

# Kolloquium zur Bachelorarbeit

Untersuchung von Knotenreduktionsregeln beim Knotenüberdeckungsproblem

---

Referent: Benedikt Lüken-Winkels

Prüfer: Prof. Dr. Henning Fernau  
Prof. Dr. Stefan Näher

07. März 2018

Universität Trier

# Knotenüberdeckungsproblem

---

## Knotenüberdeckung

EINGABE: Graph  $G = (V, E)$ , natürliche Zahl  $k \leq |V|$

AUSGABE:  $S \subseteq V$  mit  $|S| \leq k$ , sodass jede Kante aus  $E$  einen Endpunkt in  $S$  hat.

- *NP – vollständig*
- Naive Algorithmen haben eine Laufzeit von  $O(n^k)$
- Suchbaumalgorithmen laufen in  $O(2^k \cdot (m + n))$

# Graphreduktion

---

## Graphreduktion für das Knotenüberdeckungsproblem

Graph  $G = (V, E)$ , natürliche Zahl  $k$ ;  $VC(G, k)$

- Entfernen von Knoten und Kanten aus  $G$
- Verkleinerung von  $k$
- Problemkern  $G' = (V', E')$  :  
$$VC(G, k) = VC(G', k') \cup VC(G \setminus G', k - k')$$

# Einfache Reduktionsregeln

---

## Reduktionsregeln

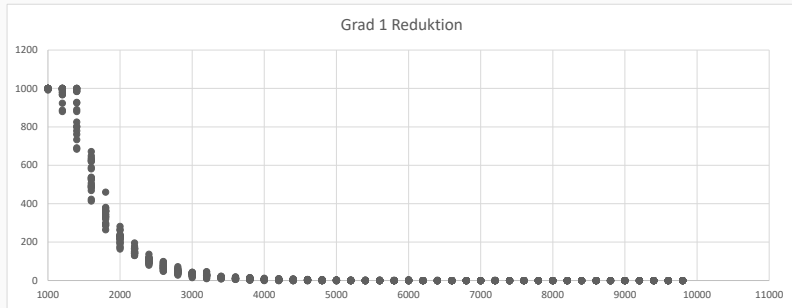
Graph  $G = (V, E)$ , natürliche Zahl  $k$

1.  $v \in V$  hat keine Kanten  $\Rightarrow V = V \setminus v$  (Grad<sub>0</sub>-Regel)
2.  $v \in V$  hat genau eine Kante  $\Rightarrow V = V \setminus (v \cup N(v)); k = k - 1$   
(Grad<sub>1</sub>-Regel)
3.  $v \in V$  hat mehr als  $k$  Kanten  $\Rightarrow V = V \setminus (v); k = k - 1$  (Buss-Regel)

## Testset

- 900 Graphen mit 1000 Knoten und bis zu 10000 Kanten
- LEDA:random\_simple\_undirected\_graph
- Anwendung bis sich keine Änderung mehr ergibt





# Kronenregel

---

## Krone

Für einen Graphen  $G = (V, E)$  besteht eine Krone aus  $H \subseteq V$  und  $I \subseteq V$  mit  $H \cap I = \emptyset$ , sodass

1.  $H = N(I)$ ,
2.  $\forall v, w \in I$  gilt  $(vw) \notin E$  und
3. die Kanten zwischen  $H$  und  $I$  enthalten ein Matching indem alle Knoten aus  $H$  enthalten sind.

# Kronenregel - Algorithmus

```
0   $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := \text{maximaler Grad eines Knoten aus } G$ 
1   $M_1 := \text{Maximal Matching von } G$ 
2   $M_1 := \emptyset$ 
3   $\forall e \in E:$ 
4       $M_1 = M_1 \cup e$ 
5      Entferne  $e$  und  $N(e)$  aus der weiteren Betrachtung
6   $O := \text{nicht gepaarte Knoten in } M_1$ 
7   $M_2 := \text{Maximum Matching von } B = (O, N(O), \{uv | u \in O \wedge v \in N(O)\})$ 
8   $I := \text{nicht gepaarte Knoten aus } O \text{ in } M_2$ 
9   $I' := \emptyset$ 
10 while  $I' \neq I$ 
11      $I' := I$ 
12      $H := N(I)$ 
13      $I := I \cup \{u \in O | \exists v \in H (uv \in M_2)\}$ 
14 Entferne  $N(I)$  aus  $G$ 
```

# Kronenregel - Laufzeit

```
0   $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := \text{maximaler Grad eines Knoten aus } G$ 
1   $M_1 := \text{Maximal Matching von } G$ 
2     $M_1 := \emptyset$ 
3     $\forall e \in E:$ 
4       $M_1 = M_1 \cup e$ 
5      Entferne  $e$  und  $N(e)$  aus der weiteren Betrachtung
6   $O := \text{nicht gepaarte Knoten in } M_1$ 
7   $M_2 := \text{Maximum Matching von } B = (O, N(O), \{uv | u \in O \wedge v \in N(O)\})$ 
8   $I := \text{nicht gepaarte Knoten aus } O \text{ in } M_2$ 
9   $I' := \emptyset$ 
10 while  $I' \neq I$ 
11    $I' := I$ 
12    $H := N(I)$ 
13    $I := I \cup \{u \in O | \exists v \in H (uv \in M_2)\}$ 
14 Entferne  $N(I)$  aus  $G$ 
```

Zeilen 1-5:  $m \cdot d$

# Kronenregel - Laufzeit

```
0   $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := \text{maximaler Grad eines Knoten aus } G$ 
1   $M_1 := \text{Maximal Matching von } G$ 
2     $M_1 := \emptyset$ 
3     $\forall e \in E:$ 
4       $M_1 = M_1 \cup e$ 
5      Entferne  $e$  und  $N(e)$  aus der weiteren Betrachtung
6   $O := \text{nicht gepaarte Knoten in } M_1$ 
7   $M_2 := \text{Maximum Matching von } B = (O, N(O), \{uv | u \in O \wedge v \in N(O)\})$ 
8   $I := \text{nicht gepaarte Knoten aus } O \text{ in } M_2$ 
9   $I' := \emptyset$ 
10 while  $I' \neq I$ 
11    $I' := I$ 
12    $H := N(I)$ 
13    $I := I \cup \{u \in O | \exists v \in H (uv \in M_2)\}$ 
14 Entferne  $N(I)$  aus  $G$ 
```

Zeile 6:  $n$

# Kronenregel - Laufzeit

```
0   $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := \text{maximaler Grad eines Knoten aus } G$ 
1   $M_1 :=$  Maximal Matching von  $G$ 
2   $M_1 := \emptyset$ 
3   $\forall e \in E:$ 
4       $M_1 = M_1 \cup e$ 
5      Entferne  $e$  und  $N(e)$  aus der weiteren Betrachtung
6   $O :=$  nicht gepaarte Knoten in  $M_1$ 
7   $M_2 :=$  Maximum Matching von  $B = (O, N(O), \{uv | u \in O \wedge v \in N(O)\})$ 
8   $I :=$  nicht gepaarte Knoten aus  $O$  in  $M_2$ 
9   $I' := \emptyset$ 
10 while  $I' \neq I$ 
11      $I' := I$ 
12      $H := N(I)$ 
13      $I := I \cup \{u \in O | \exists v \in H (uv \in M_2)\}$ 
14 Entferne  $N(I)$  aus  $G$ 
```

Zeile 7 (1):  $nd/2$

# Kronenregel - Laufzeit

```
0   $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := \text{maximaler Grad eines Knoten aus } G$ 
1   $M_1 :=$  Maximal Matching von  $G$ 
2   $M_1 := \emptyset$ 
3   $\forall e \in E:$ 
4       $M_1 = M_1 \cup e$ 
5      Entferne  $e$  und  $N(e)$  aus der weiteren Betrachtung
6   $O :=$  nicht gepaarte Knoten in  $M_1$ 
7   $M_2 :=$  Maximum Matching von  $B = (O, N(O), \{uv \mid u \in O \wedge v \in N(O)\})$ 
8   $I :=$  nicht gepaarte Knoten aus  $O$  in  $M_2$ 
9   $I' := \emptyset$ 
10 while  $I' \neq I$ 
11      $I' := I$ 
12      $H := N(I)$ 
13      $I := I \cup \{u \in O \mid \exists v \in H (uv \in M_2)\}$ 
14 Entferne  $N(I)$  aus  $G$ 
```

Zeile 7 (2):  $\sqrt{n} \cdot m$  (LEDA:mcb\_matching, Hopcroft und Karp)



# Kronenregel - Laufzeit

```
0   $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := \text{maximaler Grad eines Knoten aus } G$ 
1   $M_1 := \text{Maximal Matching von } G$ 
2     $M_1 := \emptyset$ 
3     $\forall e \in E:$ 
4       $M_1 = M_1 \cup e$ 
5      Entferne  $e$  und  $N(e)$  aus der weiteren Betrachtung
6   $O := \text{nicht gepaarte Knoten in } M_1$ 
7   $M_2 := \text{Maximum Matching von } B = (O, N(O), \{uv | u \in O \wedge v \in N(O)\})$ 
8   $I := \text{nicht gepaarte Knoten aus } O \text{ in } M_2$ 
9   $I' := \emptyset$ 
10 while  $I' \neq I$ 
11    $I' := I$ 
12    $H := N(I)$ 
13    $I := I \cup \{u \in O | \exists v \in H (uv \in M_2)\}$ 
14 Entferne  $N(I)$  aus  $G$ 
```

Zeile 8:  $n$

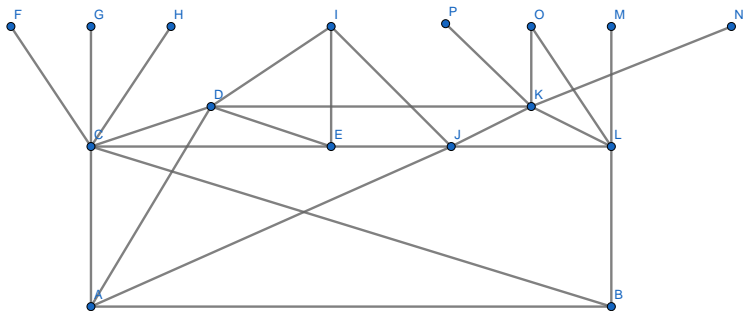
# Kronenregel - Laufzeit

```
0   $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := \text{maximaler Grad eines Knoten aus } G$ 
1   $M_1 := \text{Maximal Matching von } G$ 
2     $M_1 := \emptyset$ 
3     $\forall e \in E:$ 
4       $M_1 = M_1 \cup e$ 
5      Entferne  $e$  und  $N(e)$  aus der weiteren Betrachtung
6   $O := \text{nicht gepaarte Knoten in } M_1$ 
7   $M_2 := \text{Maximum Matching von } B = (O, N(O), \{uv | u \in O \wedge v \in N(O)\})$ 
8   $I := \text{nicht gepaarte Knoten aus } O \text{ in } M_2$ 
9   $I' := \emptyset$ 
10 while  $I' \neq I$ 
11    $I' := I$ 
12    $H := N(I)$ 
13    $I := I \cup \{u \in O | \exists v \in H (uv \in M_2)\}$ 
14 Entferne  $N(I)$  aus  $G$ 
```

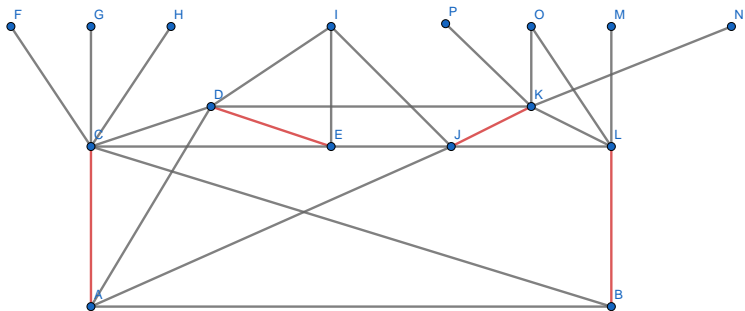
Zeilen 10-13:  $n \cdot d$

$$\begin{aligned} & m \cdot d + n + nd/2 + \sqrt{n} \cdot m + n + n \cdot d \\ &= d(m + n) + 2n + nd/2 + \sqrt{n} \cdot m \\ &\Rightarrow O(\sqrt{n} \cdot m) \end{aligned}$$

# Kronenregel - Besonderheiten



## Kronenregel - Besonderheiten



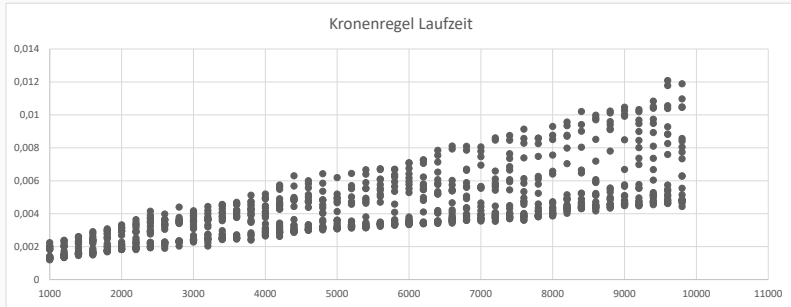
**Tabelle 1:** Mindestens ein Knoten mit Einschränkung

Grad der Knoten	Anwendungen	Reduktion
keine Einschränkung	0.29	13.04
>1	0.29	13.04
>2	0.29	13.22
>3	0.27	12.92
>4	0.3	13.71
>5	0.31	13.38
Größte Anzahl	0.32	13.44
Durchschnittliche Anzahl	0.29	12.98

**Tabelle 2:** Beide Knoten mit Einschränkung

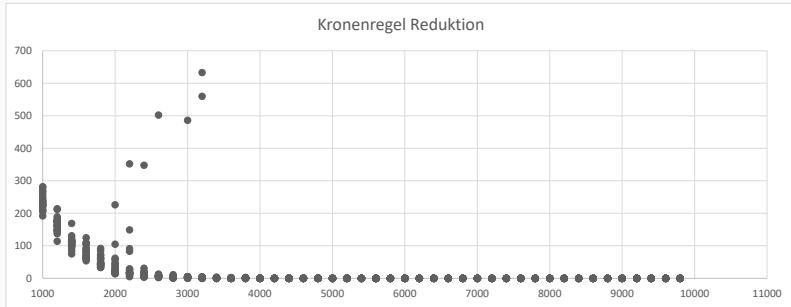
Grad der Knoten	Anwendungen	Reduktion
keine Einschränkung	0.29	13.04
>1	0.36	15.34
>2	0.41	16.96
>3	0.39	16.52
>4	0.4	15.78
>5	0.4	15.72
Größte Anzahl	0.29	13.06
Durchschnittliche Anzahl	0.46	19.77

# Kronenregel - Laufzeit





# Kronenregel - Ergebnisse



# Nemhauser-Trotter-Regel

---

## Nemhauser-Trotter-Theorem

Für einen Graphen  $G = (V, E)$  können zwei disjunkte Mengen  $C_0$  und  $V_0$  gefunden werden, sodass

1.  $C_0$  in einer minimalen Knotenüberdeckung von  $G$  enthalten ist,
2. der Teilgraph  $G[V_0]$  eine Knotenüberdeckung der Größe  $\leq |V_0|/2$  hat,
3. und  $VC(G) = VC(G[V_0]) \cup C_0$  gilt.

- 0  $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := \text{maximaler Grad eines Knoten aus } G$
- 1 Bipartiten Graphen erstellen  $B = (V, V', E')$
- 2 mit  $E' := \{\{x, y'\}, \{x', y\} \mid \{x, y\} \in E\}$
- 3 Maximum Matching  $M$  von  $B$  bestimmen
- 4  $C_B := VC(B)$
- 5  $C_0 := \{x \in V \mid x \in C_B \text{ und } x' \in C_B\}$
- 6  $V_0 := \{x \in V \mid \text{entweder } x \in C_B \text{ oder } x' \in C_B\}$

```
0   $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := \text{maximaler Grad eines Knoten aus } G$ 
1  Bipartiden Graphen erstellen  $B = (V, V', E')$ 
2    mit  $E' := \{\{x, y'\}, \{x', y\} \mid \{x, y\} \in E\}$ 
3  Maximum Matching  $M$  von  $B$  bestimmen
4   $C_B := VC(B)$ 
5   $C_0 := \{x \in V \mid x \in C_B \text{ und } x' \in C_B\}$ 
6   $V_0 := \{x \in V \mid \text{entweder } x \in C_B \text{ oder } x' \in C_B\}$ 
```

Zeilen 1-2:  $n \cdot 2d$

```
0   $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := \text{maximaler Grad eines Knoten aus } G$ 
1  Bipartiten Graphen erstellen  $B = (V, V', E')$ 
2    mit  $E' := \{\{x, y'\}, \{x', y\} \mid \{x, y\} \in E\}$ 
3  Maximum Matching  $M$  von  $B$  bestimmen
4   $C_B := VC(B)$ 
5   $C_0 := \{x \in V \mid x \in C_B \text{ und } x' \in C_B\}$ 
6   $V_0 := \{x \in V \mid \text{entweder } x \in C_B \text{ oder } x' \in C_B\}$ 
```

Zeilen 3-4:  $\sqrt{n} \cdot m$  (LEDA:mcb\_matching, Hopcroft und Karp)

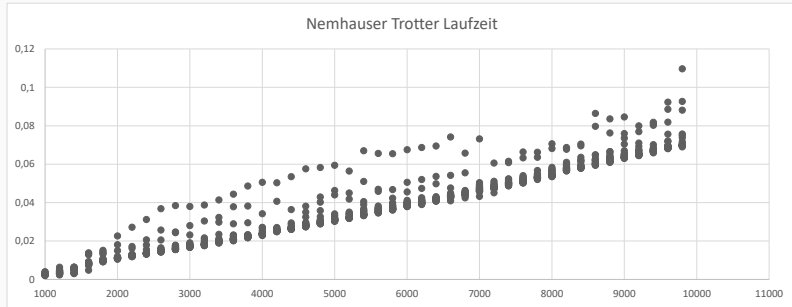
- 0  $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := \text{maximaler Grad eines Knoten aus } G$
- 1 Bipartiten Graphen erstellen  $B = (V, V', E')$
- 2 mit  $E' := \{\{x, y'\}, \{x', y\} \mid \{x, y\} \in E\}$
- 3 Maximum Matching  $M$  von  $B$  bestimmen
- 4  $C_B := VC(B)$
- 5  $C_0 := \{x \in V \mid x \in C_B \text{ und } x' \in C_B\}$
- 6  $V_0 := \{x \in V \mid \text{entweder } x \in C_B \text{ oder } x' \in C_B\}$

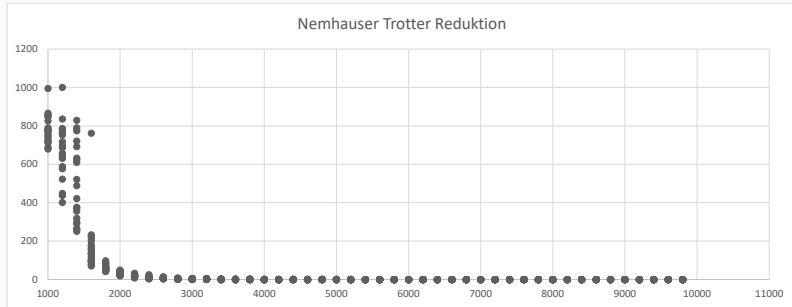
Zeilen 5-6:  $2n + k \cdot d$

$$\begin{aligned} & n \cdot 2d + \sqrt{n} \cdot m + 2n + k \cdot d \\ \Rightarrow & O(n + \sqrt{n} \cdot m) \end{aligned}$$



# NT-Regel - Laufzeit





# Vergleich

---

**Tabelle 3:** Anwendung einzelner Reduktionsregeln

Reduktionsregel	Anwendungen	Reduktion	CPU-Zeit
Nemhauser-Trotter	0.27	50.3	0.041s
Kronenregel	0.46	19.77	0.004s
Grad 1	1.32	99.06	0.0006s

# Anwendung

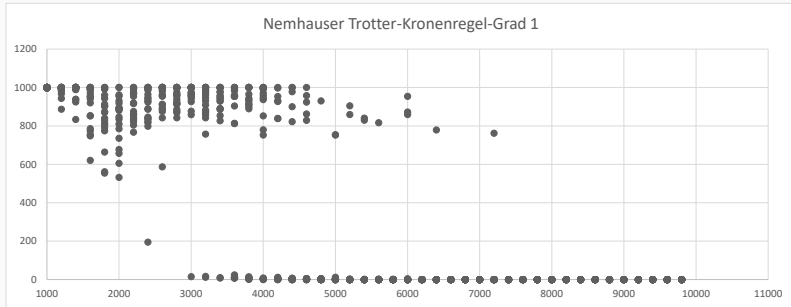
---

**Tabelle 4:** Anwendung kombinierter Reduktionsregeln

Kombination	Anwendungen <sub>1</sub>	Anwendungen <sub>2</sub>	Anwendungen <sub>3</sub>	Reduktion
K - G <sub>1</sub>	3.63	4.3	-	331.8
G <sub>1</sub> - K	4.37	3.22	-	331.17
K - NT	0.8	0.38	-	68.28
NT - K	0.45	0.56	-	68.6
G <sub>1</sub> - NT	1.33	0.017	-	99.87
NT - G <sub>1</sub>	0.28	1.13	-	99.87

**Tabelle 5:** Anwendung kombinierter Reduktionsregeln

Kombination	Anwendungen <sub>1</sub>	Anwendungen <sub>2</sub>	Anwendungen <sub>3</sub>	Reduktion
K - G <sub>1</sub> - NT	3.61	4.29	0.11	334.67
K - NT - G <sub>1</sub>	3.6	0.87	3.39	334.83
G <sub>1</sub> - NT - K	4.36	0.12	3.2	334.17
G <sub>1</sub> - K - NT	3.61	3.2	0.65	334.16
NT - K - G <sub>1</sub>	0.39	3.44	4.03	335.2
NT - G <sub>1</sub> - K	0.91	3.42	3.2	334.16





**Tabelle 6:** Besondere Graphen für die Dreierkombinationen von Regeln

Graph	Reduktionsregeln	Anwend. <sub>1</sub>	Anwend. <sub>2</sub>	Anwend. <sub>3</sub>	Reduktion
Graph <sub>1</sub>	NT - K - G <sub>1</sub>	1	5	6	195
	G <sub>1</sub> - NT - K	6	0	5	195
	Nemhauser-Trotter	1	-	-	11
	Kronenregel	1	-	-	11
	Grad <sub>1</sub>	2	-	-	91
	Kronenregel - Grad <sub>1</sub>	6	5	-	195
Graph <sub>2</sub>	NT - K - G <sub>1</sub>	1	9	2	762
	Nemhauser-Trotter	0	-	-	0
	Kronenregel	0	-	-	0
	Grad <sub>1</sub>	1	-	-	2
	Kronenregel - Grad <sub>1</sub>	9	3	-	762

## Fazit und Ausblick

---

- Form von randomgraphen untersuchen
  - Welche Form hinterlassen die Reduktionsregeln
  - Welche Form wäre für die Nemhauser Trotter am besten
- Warum ist die Nemhauser-Trotter-Regel in der Praxis so schlecht?
- Wie ergibt sich in bei den Reduktionen (Abbildung ??) der Große Unterschied zwischen den Graphen im Bereich der Kantenmenge zwischen 3000 und 4600?
- Wieso ist das Matching M1 so wichtig für die Kronenregel?

