3.36pt

Kolloquium zur Bachelorarbeit

Untersuchung von Graphreduktionsregeln beim Knotenüberdeckungsproblem

Referent:	Benedikt Lüken-Winkels
Prüfer:	Prof. Dr. Henning Fernau
	Prof. Dr. Stefan Näher

07. März 2018

Universität Trier

Knotenüberdeckungsproblem

Knotenüberdeckungsproblem - Definition

Knotenüberdeckung

EINGABE: *Graph* $G = (V, E)$, *natürliche Zahl* $k \leq |V|$

AUSGABE: $S \subseteq V$ *mit* $|S| \leq k$, *sodass jede Kante aus E einen Endpunkt in S hat.*

- $NP-vollständig$
- Naive Algorithmen haben eine Laufzeit von $O(n^k)$
- Suchbaumalgorithmen laufen in $O(2^k)$

Graphreduktion

Graphreduktion

Graphreduktion für das Knotenüberdeckungsproblem

$Graph\ G = (V, E),\ natürliche\ Zahl\ k;\ VC(G, k)$

- Entfernen von Knoten und Kanten aus G
- Verkleinerung von k
- Problemkern $G' = (V', E')$:
  $VC(G, k) = VC(G', k') \cup VC(G \setminus G', k - k')$

Einfache Reduktionsregeln

Einfache Regeln

Reduktionsregeln

Graph $G = (V, E)$, *natürliche Zahl* k

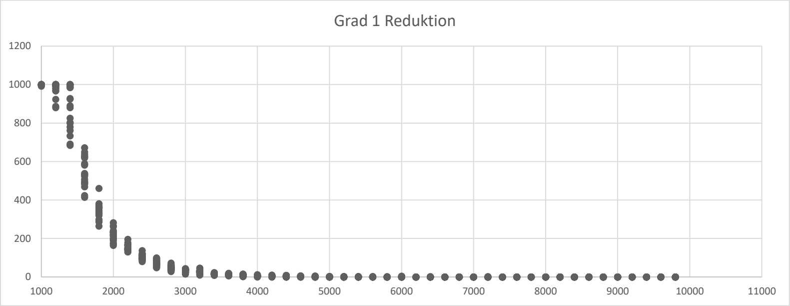
1. $v \in V$ hat keine Kanten $\Rightarrow V = V \setminus v$ (Grad$_0$-Regel)
2. $v \in V$ hat genau eine Kante $\Rightarrow V = V \setminus (v \cup N(v)); k = k - 1$ (Grad$_1$-Regel)
3. $v \in V$ hat mehr als k Kanten $\Rightarrow V = V \setminus (v); k = k - 1$ (Buss-Regel)

Anwendung

Testset

- 900 Graphen mit 1000 Knoten und bis zu 10000 Kanten
- LEDA:random_simple_undirected_graph
- Anwendung bis sich keine Änderung mehr ergibt

Grad$_1$ - Ergebnisse



Kronenregel

Kronenregel - Definitionen

Krone

Für einen Graphen $G = (V, E)$ besteht eine Krone aus $H \subseteq V$ und $I \subseteq V$ mit $H \cap I = \emptyset$, sodass

1. $H = N(I)$,
2. $\forall v, w \in I$ *gilt* $(vw) \notin E$ *und*
3. *die Kanten zwischen H und I enthalten ein Matching indem alle Knoten aus H enthalten sind.*

Kronenregel - Algorithmus

$G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d :=$ *maximaler Grad eines Knoten aus G*
M_1 := Maximal Matching von G
    $M_1 := \emptyset$
    $\forall e \in$ E:
        $M_1 = M_1 \cup e$
        Entferne e und $N(e)$ aus der weiteren Betrachtung
O := nicht gepaarte Knoten in M_1
M_2 := Maxmimum Matching von $B = (O, N(O), \{uv | u \in O \wedge v \in N(O)\})$
I := nicht gepaarte Knoten aus O in M_2
$I' := \emptyset$
while $I' \neq I$
    $I' := I$
    $H := N(I)$
    $I := I \cup \{\forall u \in O | \exists v \in H \ (uv \in M_2)\}$
Entferne $N(I)$ aus G

Kronenregel - Laufzeit

0 $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d :=$ *maximaler Grad eines Knoten aus* G
1 M_1 := Maximal Matching von G
2     $M_1 := \emptyset$
3     $\forall e \in$ E:
4         $M_1 = M_1 \cup e$
5   Entferne e und $N(e)$ aus der weiteren Betrachtung
6 O := nicht gepaarte Knoten in M_1
7 M_2 := Maxmimum Matching von $B = (O, N(O), \{uv | u \in O \wedge v \in N(O)\})$
8 I := nicht gepaarte Knoten aus O in M_2
9 $I' := \emptyset$
10 while $I' \neq I$
11     $I' := I$
12     $H := N(I)$
13     $I := I \cup \{\forall u \in O | \exists v \in H \ (uv \in M_2)\}$
14 Entferne $N(I)$ aus G

Zeilen 1-5: $m \cdot d$

Kronenregel - Laufzeit

0 $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d :=$ *maximaler Grad eines Knoten aus* G
1 M_1 `:= Maximal Matching von` G
2     $M_1 := \emptyset$
3     $\forall e \in$ `E:`
4         $M_1 = M_1 \cup e$
5   `Entferne` e `und` $N(e)$ `aus der weiteren Betrachtung`
6 O `:= nicht gepaarte Knoten in` M_1
7 M_2 `:= Maxmimum Matching von` $B = (O, N(O), \{uv | u \in O \wedge v \in N(O)\})$
8 I `:= nicht gepaarte Knoten aus` O `in` M_2
9 $I' := \emptyset$
10 `while` $I' \neq I$
11     $I' := I$
12     $H := N(I)$
13     $I := I \cup \{\forall u \in O | \exists v \in H \ (uv \in M_2)\}$
14 `Entferne` $N(I)$ `aus` G

Zeile 6: n

0 $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d :=$ *maximaler Grad eines Knoten aus* G
1 M_1 := Maximal Matching von G
2     $M_1 := \emptyset$
3     $\forall e \in$ E:
4         $M_1 = M_1 \cup e$
5   Entferne e und $N(e)$ aus der weiteren Betrachtung
6 O := nicht gepaarte Knoten in M_1
7 M_2 := Maxmimum Matching von $B = (O, N(O), \{uv | u \in O \land v \in N(O)\})$
8 I := nicht gepaarte Knoten aus O in M_2
9 $I' := \emptyset$
10 while $I' \neq I$
11     $I' := I$
12     $H := N(I)$
13     $I := I \cup \{\forall u \in O | \exists v \in H \ (uv \in M_2)\}$
14 Entferne $N(I)$ aus G

Zeile 7 (1): $nd/2$

Kronenregel - Laufzeit

0 $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d :=$ *maximaler Grad eines Knoten aus* G
1 M_1 `:= Maximal Matching von` G
2 $\quad M_1 := \emptyset$
3 $\quad \forall e \in$ `E:`
4 $\quad\quad M_1 = M_1 \cup e$
5 $\quad\quad$ `Entferne` e `und` $N(e)$ `aus der weiteren Betrachtung`
6 O `:= nicht gepaarte Knoten in` M_1
7 M_2 `:= Maxmimum Matching von` $B = (O, N(O), \{uv | u \in O \land v \in N(O)\})$
8 I `:= nicht gepaarte Knoten aus` O `in` M_2
9 $I' := \emptyset$
10 `while` $I' \neq I$
11 $\quad I' := I$
12 $\quad H := N(I)$
13 $\quad I := I \cup \{\forall u \in O | \exists v \in H \ (uv \in M_2)\}$
14 `Entferne` $N(I)$ `aus` G

Zeile 7 (2): $\sqrt{n} \cdot m$ (LEDA:mcb_matching, Hopcroft und Karp)

Kronenregel - Laufzeit

0 $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d :=$ *maximaler Grad eines Knoten aus* G

1 M_1 `:= Maximal Matching von` G

2     $M_1 := \emptyset$

3     $\forall e \in$ `E:`

4         $M_1 = M_1 \cup e$

5   `Entferne` e `und` $N(e)$ `aus der weiteren Betrachtung`

6 O `:= nicht gepaarte Knoten in` M_1

7 M_2 `:= Maxmimum Matching von` $B = (O, N(O), \{uv | u \in O \land v \in N(O)\})$

8 I `:= nicht gepaarte Knoten aus` O `in` M_2

9 $I' := \emptyset$

10 `while` $I' \neq I$

11     $I' := I$

12     $H := N(I)$

13     $I := I \cup \{\forall u \in O | \exists v \in H \ (uv \in M_2)\}$

14 `Entferne` $N(I)$ `aus` G

Zeile 8: n

Kronenregel - Laufzeit

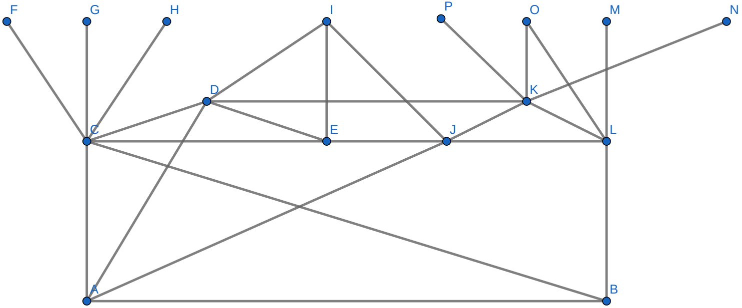
0 $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d :=$ *maximaler Grad eines Knoten aus* G
1 M_1 := Maximal Matching von G
2     $M_1 := \emptyset$
3     $\forall e \in$ E:
4         $M_1 = M_1 \cup e$
5   Entferne e und $N(e)$ aus der weiteren Betrachtung
6 O := nicht gepaarte Knoten in M_1
7 M_2 := Maxmimum Matching von $B = (O, N(O), \{uv | u \in O \wedge v \in N(O)\})$
8 I := nicht gepaarte Knoten aus O in M_2
9 $I' := \emptyset$
10 while $I' \neq I$
11     $I' := I$
12     $H := N(I)$
13     $I := I \cup \{\forall u \in O | \exists v \in H \ (uv \in M_2)\}$
14 Entferne $N(I)$ aus G

Zeilen 10-13: $n \cdot d$

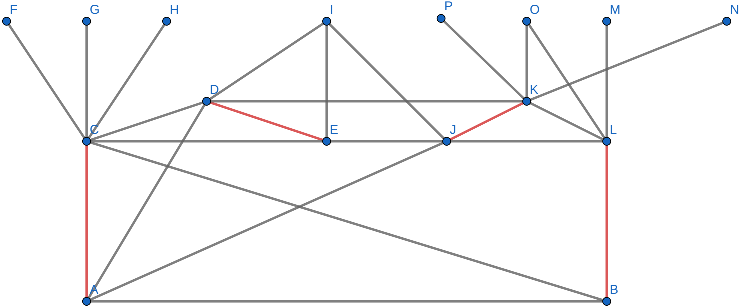
Kronenregel - Laufzeit

$$\begin{aligned} & m \cdot d + n + nd/2 + \sqrt{n} \cdot m + n + n \cdot d \\ = \; & d(m+n) + 2n + nd/2 + \sqrt{n} \cdot m \\ \Rightarrow \; & O(\sqrt{n} \cdot m) \end{aligned}$$

Kronenregel - Besonderheiten



Kronenregel - Besonderheiten



Kronenregel - Besonderheiten

Tabelle 1: Mindestens ein Knoten mit Einschränkung

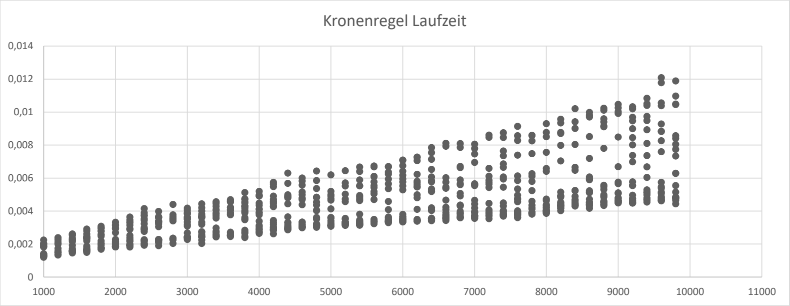
Grad der Knoten	Anwendungen	Reduktion
keine Einschränkung	0.29	13.04
>1	0.29	13.04
>2	0.29	13.22
>3	0.27	12.92
>4	0.3	13.71
>5	0.31	13.38
>Größte Anzahl	0.32	13.44
>Durchschnittliche Anzahl	0.29	12.98

Kronenregel - Besonderheiten

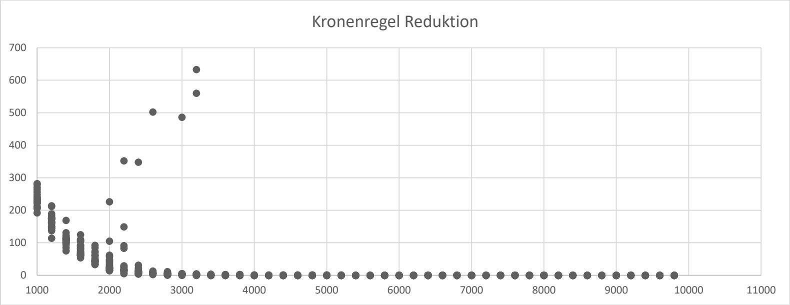
Tabelle 2: Beide Knoten mit Einschränkung

Grad der Knoten	Anwendungen	Reduktion
keine Einschränkung	0.29	13.04
>1	0.36	15.34
>2	0.41	16.96
>3	0.39	16.52
>4	0.4	15.78
>5	0.4	15.72
$>$Größte Anzahl	0.29	13.06
$>$Durchschnittliche Anzahl	0.46	19.77

Kronenegel - Laufzeit



Kronenregel - Ergebnisse



Nemhauser-Trotter-Regel

Nemhauser-Trotter-Regel

Nemhauser-Trotter-Theorem

Für einen Graphen $G = (V, E)$ können zwei disjunkte Mengen C_0 und V_0 gefunden werden, sodass

1. *C_0 in einer minimalen Knotenüberdeckung von G enthalten ist,*
2. *der Teilgraph $G[V_0]$ eine Knotenüberdeckung der Größe $\leq |V_0|/2$ hat,*
3. *und $VC(G) = VC(G[V_0]) \cup C_0$ gilt.*

NT-Regel - Algorithmus

$G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := maximaler\ \ Grad\ \ eines\ \ Knoten\ \ aus\ \ G$
`Bipartiden Graphen erstellen` $B = (V, V', E')$
`mit` $E' := \{\{x, y'\}, \{x', y\} | \{x, y\} \in E\}$
`Maximum Matching` M `von` B `bestimmen`
$C_B := VC(B)$
$C_0 := \{x \in V \mid x \in C_B\ \ und\ \ x' \in C_B\}$
$V_0 := \{x \in V \mid entweder\ \ x \in C_B\ \ oder\ \ x' \in C_B\}$

NT-Regel - Laufzeit

0 $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d :=$ *maximaler Grad eines Knoten aus* G

1 `Bipartiden Graphen erstellen` $B = (V, V', E')$

2 `mit` $E' := \{\{x, y'\}, \{x', y\} | \{x, y\} \in E\}$

3 `Maximum Matching` M `von` B `bestimmen`

4 $C_B := VC(B)$

5 $C_0 := \{x \in V \mid x \in C_B \text{ und } x' \in C_B\}$

6 $V_0 := \{x \in V \mid \text{entweder } x \in C_B \text{ oder } x' \in C_B\}$

Zeilen 1-2: $n \cdot 2d$

NT-Regel - Laufzeit

0 $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := maximaler\ \ Grad\ \ eines\ \ Knoten\ \ aus\ \ G$

1 `Bipartiden Graphen erstellen` $B = (V, V', E')$

2 `mit` $E' := \{\{x, y'\}, \{x', y\} | \{x, y\} \in E\}$

3 `Maximum Matching` M `von` B `bestimmen`

4 $C_B := VC(B)$

5 $C_0 := \{x \in V \mid x \in C_B\ \ und\ \ x' \in C_B\}$

6 $V_0 := \{x \in V \mid entweder\ \ x \in C_B\ \ oder\ \ x' \in C_B\}$

Zeilen 3-4: $\sqrt{2n} \cdot 2m$ (LEDA:mcb_matching, Hopcroft und Karp)

NT-Regel - Laufzeit

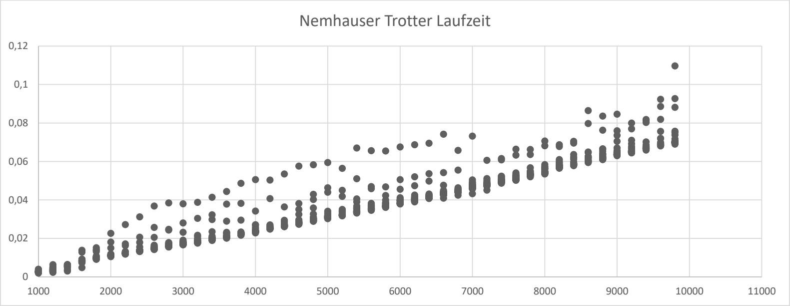
0 $G = (V, E), n := |V|, m := |E|, d := maximaler\ \ Grad\ \ eines\ \ Knoten\ \ aus\ \ G$
1 `Bipartiden Graphen erstellen` $B = (V, V', E')$
2 `   mit` $E' := \{\{x, y'\}, \{x', y\}|\{x, y\} \in E\}$
3 `Maximum Matching` M `von` B `bestimmen`
4 $C_B := VC(B)$
5 $C_0 := \{x \in V \mid x \in C_B\ \ und\ \ x' \in C_B\}$
6 $V_0 := \{x \in V \mid entweder\ \ x \in C_B\ \ oder\ \ x' \in C_B\}$

Zeilen 5-6: $2n + k \cdot d$

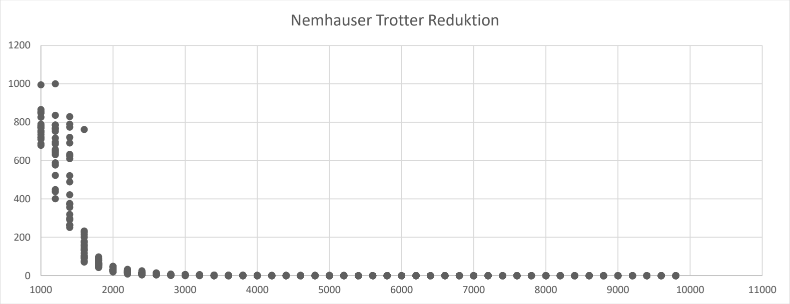
NT-Regel - Laufzeit

$$
\begin{aligned}
& n \cdot 2d + \sqrt{2n} \cdot 2m + 2n + k \cdot d \\
\Rightarrow\ & O(n + \sqrt{n} \cdot m)
\end{aligned}
$$

NT-Regel - Laufzeit



NT-Regel - Ergebnisse



Vergleich

Vergleich der Ergebnisse

Tabelle 3: Anwendung einzelner Reduktionsregeln

Reduktionsregel	Anwendungen	Reduktion	CPU-Zeit
Nemhauser-Trotter	0.27	50.3	0.041s
Kronenregel	0.46	19.77	0.004s
Grad 1	1.32	99.06	0.0006s

Anwendung

Kombination

Tabelle 4: Anwendung kombinierter Reduktionsregeln

Kombination	**Anwendungen$_1$**	**Anwendungen$_2$**	**Anwendungen$_3$**	**Reduktion**
K - G_1	3.63	4.3	-	331.8
G_1 - K	4.37	3.22	-	331.17
K - NT	0.8	0.38	-	68.28
NT - K	0.45	0.56	-	68.6
G_1 - NT	1.33	0.017	-	99.87
NT - G_1	0.28	1.13	-	99.87

Kombination

Tabelle 4: Anwendung kombinierter Reduktionsregeln

Kombination	**Anwendungen$_1$**	**Anwendungen$_2$**	**Anwendungen$_3$**	**Reduktion**
K - G_1	3.63	4.3	-	331.8
G_1 - K	4.37	3.22	-	331.17
K - NT	0.8	0.38	-	68.28
NT - K	0.45	0.56	-	68.6
G_1 - NT	1.33	0.017	-	99.87
NT - G_1	0.28	1.13	-	99.87

Kombination

Tabelle 4: Anwendung kombinierter Reduktionsregeln

Kombination	**Anwendungen$_1$**	**Anwendungen$_2$**	**Anwendungen$_3$**	**Reduktion**
K - G_1	3.63	4.3	-	331.8
G_1 - K	4.37	3.22	-	331.17
K - NT	0.8	0.38	-	68.28
NT - K	0.45	0.56	-	68.6
G_1 - NT	1.33	0.017	-	99.87
NT - G_1	0.28	1.13	-	99.87

Tabelle 4: Anwendung kombinierter Reduktionsregeln

Kombination	**Anwendungen$_1$**	**Anwendungen$_2$**	**Anwendungen$_3$**	**Reduktion**
K - G_1	3.63	4.3	-	331.8
G_1 - K	4.37	3.22	-	331.17
K - NT	0.8	0.38	-	68.28
NT - K	0.45	0.56	-	68.6
G_1 - NT	1.33	0.017	-	99.87
NT - G_1	0.28	1.13	-	99.87

Kombination

Tabelle 5: Anwendung kombinierter Reduktionsregeln

Kombination	**Anwendungen**$_1$	**Anwendungen**$_2$	**Anwendungen**$_3$	**Reduktion**
K - G_1 - NT	3.61	4.29	0.11	334.67
K - NT - G_1	3.6	0.87	3.39	334.83
G_1 - NT - K	4.36	0.12	3.2	334.17
G_1 - K - NT	3.61	3.2	0.65	334.16
NT - K - G_1	0.39	3.44	4.03	335.2
NT - G_1 - K	0.91	3.42	3.2	334.16

Kombination

Tabelle 5: Anwendung kombinierter Reduktionsregeln

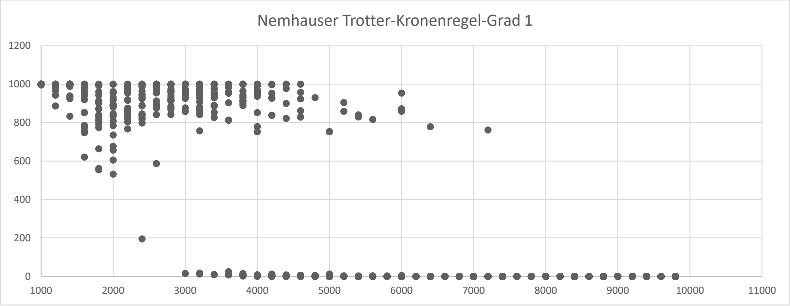
Kombination	**Anwendungen$_1$**	**Anwendungen$_2$**	**Anwendungen$_3$**	**Reduktion**
K - G_1 - NT	3.61	4.29	0.11	334.67
K - NT - G_1	3.6	0.87	3.39	334.83
G_1 - NT - K	4.36	0.12	3.2	334.17
G_1 - K - NT	3.61	3.2	0.65	334.16
NT - K - G_1	0.39	3.44	4.03	335.2
NT - G_1 - K	0.91	3.42	3.2	334.16

Kombination

Tabelle 5: Anwendung kombinierter Reduktionsregeln

Kombination	**Anwendungen$_1$**	**Anwendungen$_2$**	**Anwendungen$_3$**	**Reduktion**
K - G_1 - NT	3.61	4.29	0.11	334.67
K - NT - G_1	3.6	0.87	3.39	334.83
G_1 - NT - K	4.36	0.12	3.2	334.17
G_1 - K - NT	3.61	3.2	0.65	334.16
NT - K - G_1	0.39	3.44	4.03	335.2
NT - G_1 - K	0.91	3.42	3.2	334.16

Kombination



Kombination

Tabelle 6: Besondere Graphen für die Dreierkombinationen von Regeln

Graph	Reduktionsregeln	Anwend.$_1$	Anwend.$_2$	Anwend.$_3$	Reduktion
Graph$_1$	NT - K - G$_1$	1	5	6	195
	G$_1$ - NT - K	6	0	5	195
	Nemhauser-Trotter	1	-	-	11
	Kronenregel	1	-	-	11
	Grad$_1$	2	-	-	91
	Kronenregel - Grad$_1$	6	5	-	195
Graph$_2$	NT - K - G$_1$	1	9	2	762
	Nemhauser-Trotter	0	-	-	0
	Kronenregel	0	-	-	0
	Grad$_1$	1	-	-	2
	Kronenregel - Grad$_1$	9	3	-	762

Kombination

Tabelle 6: Besondere Graphen für die Dreierkombinationen von Regeln

Graph	**Reduktionsregeln**	**Anwend.$_1$**	**Anwend.$_2$**	**Anwend.$_3$**	**Reduktion**
Graph$_1$	NT - K - G$_1$	1	5	6	195
	G$_1$ - NT - K	6	0	5	195
	Nemhauser-Trotter	1	-	-	11
	Kronenregel	1	-	-	11
	Grad$_1$	2	-	-	91
	Kronenregel - Grad$_1$	6	5	-	195
Graph$_2$	NT - K - G$_1$	1	9	2	762
	Nemhauser-Trotter	0	-	-	0
	Kronenregel	0	-	-	0
	Grad$_1$	1	-	-	2
	Kronenregel - Grad$_1$	9	3	-	762

Kombination

Tabelle 6: Besondere Graphen für die Dreierkombinationen von Regeln

Graph	Reduktionsregeln	Anwend.$_1$	Anwend.$_2$	Anwend.$_3$	Reduktion
Graph$_1$	NT - K - G_1	1	5	6	195
	G_1 - NT - K	6	0	5	195
	Nemhauser-Trotter	1	-	-	11
	Kronenregel	1	-	-	11
	Grad$_1$	2	-	-	91
	Kronenregel - Grad$_1$	6	5	-	195
Graph$_2$	NT - K - G_1	1	9	2	762
	Nemhauser-Trotter	0	-	-	0
	Kronenregel	0	-	-	0
	Grad$_1$	1	-	-	2
	Kronenregel - Grad$_1$	9	3	-	762

Fazit und Ausblick

Fazit und Ausblick

- Nehmhauser-Trotter-Regel, obwohl viel in der Literatur erwähnt liefert in der Praxis mäßige Ergebnisse $\Rightarrow$ Warum?
  - Welche Form wäre für die Nemhauser Trotter am besten?
- Wie ergibt sich in bei den Reduktionen mit Dreierkombination der Große Unterschied zwischen den Graphen im Bereich der Kantenmenge zwischen 3000 und 4600?
- Wieso ist das Matching M1 so wichtig für die Kronenregel?

Quellen i