

Untersuchung von Graphreduktionsregeln beim Knotenüberdeckungsproblem

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor (B.Sc.)

Universität Trier
FB IV - Informatikwissenschaften
Lehrstuhl für theoretische Informatik

| | |
|------------|--|
| Gutachter: | Prof. Dr. Henning Fernau Prof. Dr. Stefan Näher |
| Betreuer: | Prof. Dr. Henning Fernau |

Vorgelegt am xx.xx.xxxx von:

Benedikt Lücken-Winkels
Bahnhofstraße 32
54292 Trier
s4beluek@uni-trier.de
Matr.-Nr. 1138844

Zusammenfassung

Hier steht eine Kurzzusammenfassung (Abstract) der Arbeit. Stellen Sie kurz und präzise Ziel und Gegenstand der Arbeit, die angewendeten Methoden, sowie die Ergebnisse der Arbeit dar. Halten Sie dabei die ersten Punkten eher kurz und fokussieren Sie die Ergebnisse. Bewerten Sie auch die Ergebnissen und ordnen Sie diese in den Kontext ein.

Die Kurzzusammenfassung sollte maximal 1 Seite lang sein.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 1.1 | Motivation | 1 |
| 1.2 | Problemstellung | 4 |
| 1.3 | Zielsetzung | 4 |
| 1.4 | Gliederung/Aufbau der Arbeit | 5 |
| 2 | Grundlagen | 6 |
| 2.1 | Knotenüberdeckung | 6 |
| 2.2 | Nemhauser-Trotter Reduktionsregeln | 6 |
| 2.3 | Kronenregel | 6 |
| 2.4 | Einfache Reduktionsregeln | 6 |
| 3 | Analyse | 7 |
| 3.1 | Anforderungen | 7 |
| 3.2 | Bewertung der Reduktionsregeln | 7 |
| 3.3 | Anwendung der Reduktionsregeln | 8 |
| 3.4 | Interpretation der Ergebnisse | 13 |
| 3.5 | Zusammenfassung | 13 |
| 4 | Implementierung | 17 |
| 4.1 | Kronenregel | 17 |
| 4.2 | Nemhauser-Trotter-Regel | 17 |
| 5 | Diskussion und Ausblick | 19 |
| | Literaturverzeichnis | 20 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Graph eines Stromnetzes | 1 |
| 3.1 | Graph ₃ nach Anwendung von Grad ₁ -Regel und Kronenregel. | 10 |
| 3.2 | Anwendung der Kronenregel. | 11 |
| 3.3 | Einfache Krone | 11 |
| 3.4 | Anwendung von Nemhauser-Trotter-Regel, Kronenregel und Grad ₁ -Regel. | 14 |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Exponentielle Laufzeit | 2 |
| 3.1 | Bewertung der Reduktionsregeln | 8 |
| 3.2 | Anwendung einzelner Reduktionsregeln | 9 |
| 3.3 | Besondere Graphen für die Kronenregel | 12 |
| 3.4 | Anwendung kombinierter Reduktionsregeln | 14 |
| 3.5 | Besondere Graphen für die Dreierkombinationen von Regeln | 15 |
| 3.6 | Statistiken über Graph ₅ | 16 |
| 4.1 | Mindestens ein Knoten mit Einschränkung | 18 |
| 4.2 | Beide Knoten mit Einschränkung | 18 |

1. Einleitung

Die Einleitung besteht aus der Motivation, der Problemstellung, der Zielsetzung und einem ersten Überblick über den Aufbau der Arbeit.

1.1 Motivation

Das *Knotenüberdeckungsproblem*, oder englisch Vertex Cover, ist ein nachgewiesen NP-vollständiges Problem [1], kann also von einem nichtdeterministischen Algorithmus in Polinomialzeit gelöst werden. Um das Problem zu erklären, betrachten wir ein Netz von Haushalten, bei dem wir die Möglichkeit haben, in jedem Haushalt einen Stromgenerator zu platzieren, sodass durch alle mit diesem Haus verbundenen Leitungen Strom fließt. Ziel ist, ein stabiles Stromnetz zu schaffen, bei dem jede Leitung an mindestens eine Stromquelle angeschlossen ist. Nun ergibt sich das Problem, dass die Kosten für Stromgeneratoren erheblich sind und daher nur maximal k Geräte angeschafft werden können. Es gilt also, aus den n Häusern k oder weniger auszuwählen, sodass jede Leitung von einem der Häuser in der Auswahl versorgt wird. In

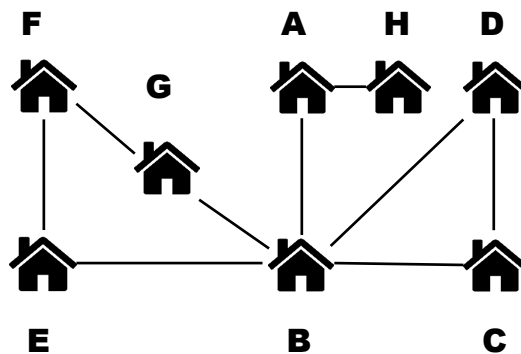


Abbildung 1.1: Graph eines Stromnetzes

Abbildung 1.1¹ sieht man ein Beispiel für eine solche Probleminstanz. Die Haushalte sind jeweils mit einem Buchstaben gekennzeichnet; jede Linie, beziehungsweise Kante eine Leitung zum Nachbarhaus. Hier ist es möglich eine Lösung für $k = 4$ zu finden, also 4 Häuser mit Generatoren auszustatten, sodass alle Leitungen versorgt sind. Bei einem kleinen Beispiel, wie hier ist zum Beispiel durch ausprobieren leicht zu sehen, dass es keine Lösung mit weniger Häusern, beziehungsweise Generatoren gibt. Um 4 Häuser, die das Problem lösen zu finden, könnten alle Möglichkeiten ausprobiert werden. Ein solcher naiver Algorithmus würde eine Laufzeit von $O(n^k \cdot m)$ (m = Anzahl der Leitungen) brauchen, da für jede k große Kombination aus Häusern, die Versorgung der Leitungen überprüft werden muss.

¹Icons in der Graphik von <https://www.flaticon.com/>

Mit einem einfachen Suchbaumalgorithmus betrachtet man jede Leitung nur einmal und entscheidet, welches der beiden Häuser mit einem Generator versorgt werden soll, da mindestens eins der beiden Häuser in der Lösungsmenge ist. Dadurch ergibt sich für jede Entscheidung eine Verzweigung. Nach k Verzweigungen sind dann k Generatoren verteilt und es muss überprüft werden, ob jede Leitung versorgt ist, was wiederum in m Schritten gemacht werden kann. Es ergibt sich eine Laufzeit von $O(2^k) \cdot m$. Nach der Verwendung eines dieser Algorithmen, finden sich die Lösungen, dass wenn die Haushalte F, B, A und C oder F, B, A und D mit einem Generator ausgestattet werden, durch alle Leitungen Strom fließt. Für eine Problemgröße wie sie hier geschildert wird, bieten diese Methoden eine Lösung. Für eine Häusermenge $n = 2000$ mit entsprechend vielen Leitungen bedeutet das ungefähr $1.148 \cdot 10^{602}$ mögliche Kombinationen.

Es ist leicht zu sehen, dass sich das Stromnetzproblem, ersetzt man die Häuser durch Knoten eines Graphen und die Leitungen durch dessen Kanten, zum Knotenüberdeckungsproblem transformieren lässt, welches sich folgendermaßen definiert[2]:

EINGABE : Graph $G = (V, E)$, positive Integer $k \leq |V|$
AUSGABE : $S \subseteq V$ mit $|S| \leq k$,
 sodass jede Kante aus E einen Endpunkt in S hat.

Ein nichtdeterministischer Algorithmus kann jede vermeintliche Lösungskombination aus Knoten, beziehungsweise Haushalten in Polynomialzeit testen [1], da lediglich überprüft werden muss, ob die Größe der Lösungsmenge den Wert von k überschreitet und ob alle Kanten abgedeckt (Leitungen versorgt) sind. Allerdings würde ein naiver Algorithmus für große Eingaben in der Realität nicht in absehbarer Zeit terminieren, wie beispielhaft in Tabelle 1.1 zu sehen ist.

Tabelle 1.1: Exponentielle Laufzeit

| Eingabegröße | Laufzeit |
|--------------|------------------------------------|
| 2^1 | 0.00002s |
| 2^{10} | 0.02s |
| 2^{100} | ca. $2 \cdot 10^{14}$ Jahrtausende |

EINFÜGEN

Es scheint also sinnvoll zu sein, die Eingabe möglichst klein zu halten und zu *reduzieren*, indem einfache Teile des Graphen durch Vorverarbeitung, englisch *Pre-processing*, entfernt werden und gegebenenfalls in die Lösungsmenge aufgenommen werden. Die sollte in Polynomialzeit geschehen, um die gesamte Laufzeit zu reduzieren. Das Ziel der in dieser Arbeit verwendeten Reduktionsregeln ist für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ und einer natürlichen Zahl k und der Problemstellung $VC(G, k)$ das Finden und Entfernen eines induzierten Teilgraphen $G' \subseteq G$ und Verkleinerung von k sodass für den Problemkern $G'' = G \setminus G'$ gilt, dass $VC(G, k) = VC(G'', k'') \cup C$ mit $C = VC(G', k')$, wobei $C = VC(G', k')$ in Polynomialzeit durch die Regeln berechnen lässt.

1.2 Problemstellung

Reihenfolge der Reduktionen (Beispiel beachten). Der Graph wird dauerhaft verändert.

- Effekt von Graphreduktionsalgorithmen auf die Problemkomplexität

1.3 Zielsetzung

- Kategorisierung der Regeln?
- Bewertungskriterien für einen GRalgorithmus
 - Laufzeit (Parametrisierung)
 - Erwartete Reduktion/Wie oft wird die Regel angewandt
 - Ressourcenverbrauch
 - Wie gut ist das Ergebnis im Vergleich zu anderen Algorithmen?
- Wie funktionieren die GRA in Kombination?
- Wie sehen Graphen aus, auf die keine Regel anwendbar ist?
- Wie sehen Graphen aus, auf die genau eine Regel anwendbar ist?
- Welche Regeln werden untersucht?

1.4 Gliederung/Aufbau der Arbeit

Was enthalten die weiteren Kapitel? Wie ist die Arbeit aufgebaut? Welche Methodik wird verfolgt?

2. Grundlagen

Beschreibung der verschiedenen Reduktionsregeln und wie funktionieren. Mit graphischen Beispielen und Pseudocode?

2.1 Knotenüberdeckung

...

2.2 Einfache Reduktionsregeln

Hierfür bieten sich einige einfache Beobachtungen, die über einen Graphen getroffen werden können an. Auf das Stromnetzproblem mit einem Netz mit maximal k Generatoren bezogen bedeuten diese:

1. Häuser, die isoliert stehen und keine Leitungen haben, können aus dem Netz entfernt werden
2. Bei Häusern, die genau eine Leitung, beziehungsweise genau ein Nachbarhaus haben, bekommt entsprechende Nachbarhaus automatisch einen Stromgenerator (Grad₁-Regel)
3. Häuser, die $k + 1$ Leitungen zu anderen Häusern haben, erhalten einen Generator, da sonst alle Nachbarnhäuser versorgt würden und somit mehr Generatoren, als verfügbar verteilt werden müssten (Buss-Regel)

Angewandt an eine Probleminstanz bedeutet das Einsetzen einer der Regeln, dass die entsprechenden Häuser und Leitungen von einer weiterführenden Betrachtung ausgeschlossen sind. Es entsteht ein äquivalenter, kleinerer Problemkern. Dies geschieht durch die meisten Regeln in polinomieller Zeit, um dann im Nachhinein einen langsameren Algorithmus für das Lösen des Problems zu benutzen [3]. Das Beispiel in Abbildung 1.1 kann durch die wiederholte Anwendung der Regeln sogar gelöst werden:

1. Es stehen 4 Generatoren zur Verfügung, allerdings hat Haus B 5 ausgehende Leitungen \Rightarrow Buss-Regel: B erhält einen Generator und dessen Leitungen haben Strom.
2. Drei disjunkte Mengen von Häusern ($\{E, G, F\}$, $\{D, C\}$ und $\{A, H\}$) bleiben übrig, wo jeweils einmal die Grad₁-Regel angewandt werden kann. Die 3 restlichen Generatoren werden verteilt, wobei sich bei jeder der Häusergruppen mehrere Möglichkeiten bieten.

3. Es steht kein Generator mehr zur Verfügung und aus der Restmenge E, G, F bleibt ein Haus ohne stromlose Leitungen zurück \Rightarrow das Haus wird aus der Betrachtung entfernt und das Problem ist gelöst.

Nach der wiederholten Anwendung der Buss-Regel haben alle Häuser mit mehr als k Leitungen einen Generator und sind von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen. Jeder übrige Haushalt kann also maximal k stromlose Leitungen haben. Wenn nun noch mehr als k^2 Leitungen zu versorgen sind, kann es keine Lösung dieser Problem Instanz geben, da lediglich k Stromgeneratoren zur Verfügung stehen und, verteilt auf die Häuser, somit nur maximal k^2 Leitungen unter Strom setzen können. Es bleiben höchstens $2k^2$ Häuser ohne Generator (mit mindestens einer Leitung), bei denen noch nicht alle Leitungen Strom haben übrig[3], da jede der Leitungen an 2 Häusern angeschlossen ist. Wird nun die Grad₁-Regel angewandt bis sie nicht mehr greift, sind höchstens $k^2 + k$ Häuser übrig, da jedes dieser Häuser jetzt zwischen 2 und k stromlose Leitungen hat.

Um ein Haus unter den n Häusern mit mehr als k Leitungen zu finden, werden im schlimmsten Fall $k \cdot n$ Schritte benötigt, da für jedes Haus alle Leitungen gezählt werden müssen. Falls alle Häuser k Leitungen haben, wird die Buss-Regel nicht ausgelöst. Ansonsten wird das gefundene Haus mit all seinen Leitungen aus dem Netz entfernt, was wiederum $d \geq k$ (wobei d der größte Grad unter den Knoten aus G ist) Schritte benötigt. Die Grad₁-Regel benötigt im schlimmsten Fall $2 \cdot n$ Schritte um das Häusernetz einmal zu durchlaufen, da die Betrachtung eines Hauses abgebrochen werden kann, sobald es mehr als eine Leitung hat, das es dann für diese Regel uninteressant ist. Wird ein Haus gefunden, kann dessen Nachbar und alle von diesem ausgehenden Leitungen entfernt werden, also d . Wird die Buss-Regel vor der Grad₁-Regel angewandt, bedeutet das, dass maximal k Schritte gebraucht werden. Um alle Häuser ohne Leitungen zu entfernen, muss lediglich für jedes Haus überprüft werden, ob es Leitungen hat, also n Schritte.

In O -Notation ergibt sich daraus eine Laufzeitabschätzung eines Durchlaufs von

$$\text{Worst Case : } kn + p + p + 1 \quad (2.1)$$

$$\Rightarrow O(kn + p) \quad (2.2)$$

$$\Rightarrow O(kn) \quad (2.3)$$

Um größere Instanzen weiter zu vereinfachen stehen allerdings auch weiteaus komplexere Reduktionsregeln zur Verfügung. In dieser Arbeit werden das Nemhauser-Trotter-Theorem, beziehungsweise die dazugehörige Reduktionsregel und die Kernenregel betrachtet.

Eine schnelle Laufzeit, um eine Knotenüberdeckung in einem gegebenen Graphen G , Parameter k und einer Knotenmenge n zu finden wird von Chen et al [4] mit $O(kn + 1.271^k k^2)$ vorgeschlagen; die schnellste bekannte Methode, alle Knotenüberdeckungen eines Graphen zu zählen von Mölle et al [5] mit einer Laufzeit von $O(1.3803^k)$.

2.3 Nemhauser-Trotter Reduktionsregeln

...

2.4 Kronenregel

...

3. Analyse

3.1 Anforderungen

Um einen Graphen, der zur Diskussion steht auf einen Problemkern zu reduzieren können verschiedene Reduktionsregeln verwendet werden.

Zunächst werden die Regeln anhand der folgenden Kriterien beurteilt:

- Laufzeit
- Erwartete Reduktion
- Ressourcenverbrauch

Dann wird die Anwendung und der Effekt der Regeln auf das eigens erstellte Testset untersucht, um folgende Fragen zu beantworten:

- Wie effektiv sind die Reduktionsregeln in der Anwendung?
 - Wie oft sind die Regeln anwendbar?
 - Wie viel wird reduziert?
- Wie (gut) funktionieren die Reduktionsregeln in Kombination?
- Wie sehen Graphen aus, auf die keine Regel anwendbar ist?
- Wie sehen Graphen aus, auf die genau eine Regel anwendbar ist?

3.2 Bewertung der Reduktionsregeln

Um die verwendeten Reduktionsregeln zu bewerten, beziehungsweise zu vergleichen, betrachten wir auf der einen Seite die theoretisch mögliche Reduktion und auf der anderen, wie sich der implementierte Algorithmus verhält.

In Tabelle 3.1 stehen die Laufzeiten in der O -Notation und erwartete Größe der reduzierten Problemkerns der Nemhauser-Trotter-Regel [6, S67], der Kronenregel [6, S71] [7], die der Buss Regel [6, S67] und von einfachen Reduktionsregeln (Grad 0 und Grad 1) gegenüber. Die Laufzeiten der einfachen Reduktionsregeln ergeben sich folgt:

Tabelle 3.1: Bewertung der Reduktionsregeln

| Reduktionsregel | Laufzeit | Reduktion |
|-------------------|--------------------|------------|
| Nemhauser-Trotter | $O(k^3)$ | $\leq 2k$ |
| Kronenregel | $O(\sqrt{ V } E)$ | $\leq 3k$ |
| Buss | $O(k V)$ | $\leq k^2$ |
| Grad 0 | $O(V)$ | * |
| Grad 1 | $O(V)$ | * |

* Die Reduktion dieser Regeln hängt stark von der Struktur des Graphen ab. Eine formale Bestimmung der zu erwartenden Reduktion steht noch aus.

k beschreibt jeweils den Eingabeparameter der Knotenüberdeckung für einen Graphen $G = (V, E)$

Beweis. Sei Graph $G = (V, E)$

Grad 0 – Reduktion

1.Fall : $|E| = 0$

jeder Knoten aus V muss betrachtet werden.

\Rightarrow Laufzeit : $O(|V|)$

2.Fall : $|E| > 0$

Sobald bei der Iteration ein Knoten mit $\text{Grad}(v) > 0$ ($v \in V$) ausgewählt wird, können alle Nachbarn ignoriert werden.

\Rightarrow Laufzeit : $O(x|V|)$ mit ($x < 1$)

□

Beweis. Sei Graph $G = (V, E)$

Grad 1 – Reduktion

Sobald bei der Iteration ein Knoten mit $\text{Grad}(v) = 1$ ($v \in V$) ausgewählt wird, wird der Nachbar in die Knotenberdeckung aufgenommen.

\Rightarrow Laufzeit : $O(x|V|)$ mit ($x < 1$)

□

TODO was bringt die Bewertung?

3.3 Anwendung der Reduktionsregeln

Das Testset an dem die Algorithmen angewandt wurden besteht aus ungerichteten Graphen, die jeweils eine Knotenmenge von 1000 Knoten und eine Kantenanzahl von

1000 bis 10000 (aufsteigend in 200er Schritten) umfassen. Von jeder *Graphklasse*, die sich durch die Kantenmenge auszeichnet gibt es 20 Exemplare. Dadurch entsteht ein Testset von 900 Graphen. Zum Erstellen der Graphen wurde die LEDA-Funktion `random_simple_undirected_graph(|V|,|E|)` [7] verwendet. Da Zufallsgraphen verwendet werden, gibt es keine Vorgabe für den Parameter k . Die obere Beschränkung der Kantenmenge (10000) hat sich bei den Tests ergeben, da ab einer bestimmten Dichte, beziehungsweise Knotenanzahl keine Reduktionsregel mehr erfolgreich ist, beziehungsweise keine Änderung am eingegebenen Graphen mehr erzielte. Dies kann mit der erwarteten Reduktion (siehe Tabelle 3.1) erklärt werden: Je dichter der Graph wird, desto größer wird k und sobald $k > \frac{|V|}{2}$ wird, ist bei der Nemhauser-Trotter-Regel und somit auch bei den anderen die theoretische Größe des reduzierten Problemkerns größer oder gleich der Menge der Knoten, was bedeutet, dass theoretisch keine Reduktion stattfinden kann. Daher eignen sich viele Benchmarktests ^{1 2} nicht, da sich diese durch sehr schwere Probleme mit dichten Graphen und Werten für k , die sich der Größe der Knotenmenge im jeweiligen Problem annähern, auszeichnen. Eine Knotenmenge von 1000 Knoten pro Graph für das Testset erwies sich bei der Anwendung als ausreichend hoher Wert, um das Einsetzen der Reduktionsregeln zu beobachten.

Die Reduktionsregeln wurden jeweils solange auf einen Graphen angewandt, bis sich keine Änderungen mehr ergeben haben. Erzielte mindestens eine der Regeln eine Reduktion, wurde der gesamte Vorgang wiederholt. In der Anwendung sorgte dies dafür, dass für manche Regeln einige weitere Iterationen möglich wurden. In Tabelle 3.3 kann man diesen Effekt beobachten. Die Anwendung der Grad₁-Regel nach der Kronenregel sorgte dafür, dass bei Graph₁ 3 und bei Graph₂ sogar 5 weitere Iterationen der Kronenregel eine Reduktion erzielten. Ausgeführt wurden die Experimente auf einem 2.6 GHz, Zweikern, Intel Core i5-3320M mit 8 GB Arbeitsspeicher. In der Tabelle 3.2 werden die durchschnittliche Anzahl der Anwendungen pro Graph, die durchschnittliche Reduktion (Anzahl der Knoten, die aus dem Graphen entfernt wurden), und die durchschnittliche CPU-Zeit, die pro Graph aufgebracht wurde. Die Buss Regel wurde von der Untersuchung ausgeschlossen, da kein Wert für k vorliegt, welcher für deren Anwendung essentiell ist, während die restlichen Regeln auch ohne diesen Parameter verwendbar sind.

Tabelle 3.2 spiegelt die erwarteten Werte (3.1) in soweit wieder, als das die Nemhauser-Trotter-Regel eine deutlich bessere Reduktion als die Kronenregel erreicht, zumindest, wenn sie isoliert angewandt wird. Dabei werden weniger Durchläufe, allerdings ein höherer Rechenaufwand benötigt.

Tabelle 3.2: Anwendung einzelner Reduktionsregeln

| Reduktionsregel | Anwendungen | Reduktion | CPU-Zeit |
|-------------------|-------------|-----------|----------|
| Nemhauser-Trotter | 0.27 | 50.3 | 0.014s |
| Kronenregel | 0.46 | 19.77 | 0.005s |
| Grad 1 | 1.32 | 99.06 | 0.001s |
| EINFÜGEN | | | |

¹<http://dimacs.rutgers.edu/pub/challenge/graph/benchmarks/>

²<http://sites.nlsde.buaa.edu.cn/kexu/benchmarks/graph-benchmarks.htm>

Während sich die Reduktion durch die Nemhauser-Trotter und die Grad 1 Regel bei der Anwendung an dichteren Graphen, also Graphen mit einer höheren Kantenzahl, erwartungsgemäß stetig verringerte, zeigten sich bei der Kronenregel einige Ausnahmen. Wie in Abbildung 3.2 zu sehen ist, setzten sich diese deutlich vom Durchschnitt ab. In Tabelle 3.3 werden die drei Graphen mit einer Kantenmenge über (beziehungsweise gleich) 3000 und einer durch die Kronenregel erreichten Reduktion > 480 Knoten betrachtet. Keiner dieser Graphen ist bipartit. Bei allen drei Graphen führte die Anwendung der Nemhauser-Trotter-Regel zu keinerlei nennenswertem Effekt, weder isoliert, noch in Kombination mit den anderen Regeln. Ähnlich verhielt sich zunächst die Grad₁-Regel, wohingegen die Anwendung in Kombination einen großen Einfluss auf die Reduktion hatte. Kombiniert man die Regeln, scheint die Reihenfolge, in der sie eingesetzt werden schwer ins Gewicht zu fallen. Besonders fiel das bei Graph₁ (3200 Kanten) auf. Wurde zuerst die Grad₁ und dann die Kronenregel verwendet, war jeweils lediglich ein Durchlauf (Anwendung) zu beobachten. Die Grad₁-Regel scheint den Graphen derart zu verändern, dass die Struktur keine Reduktion durch die Kronenregeln mehr zulässt. Betrachtet man dagegen das Ergebnis von Graph₂, erzeugte die Anwendung in gerade dieser Reihenfolge eine Lösung des Problems: 1000 von 1000 Konten reduziert, wovon 619 eine Knotenüberdeckung für Graph₂ bilden. Auch hier war die Reihenfolge wieder wichtig, wie man bei der Reduktionsmenge beim entgegengesetzten Experiment (erst Kronenregel, dann Grad₁-Regel) sieht, wo 858 Knoten bei der Reduktion aus dem Graphen entfernt wurden. Bei Graph₁ und Graph₃ zeichnet sich der übrig gebliebene Problemkern nach der jeweils größten Reduktion dadurch aus, dass der Großteil der Knoten vom Grad 2 ist. Der Problemkern G'_3 von Graph₃, zu sehen in Abbildung 3.1, lässt sich in die Knotenmengen V_1 und V_2 mit $|V_1| = |V_2| = 5$ aufteilen. Bis auf die Knoten $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$, welche vom Grad 3 sind, hat jeder andere Knoten in G'_3 durch die vorherige Reduktion den Grad 2. Für v_1 und v_2 existiert eine Kante (v_1, v_2) in G'_3 , welche die Knotenmengen verbindet. Innerhalb der Knotenmengen existiert einen Zyklus (Kreis), mit ungerader Knotenzahl, woraus sich folgern lässt, dass G'_3 nicht bipartit ist. Hier ist keine der Reduktionsregeln mehr erfolgreich.

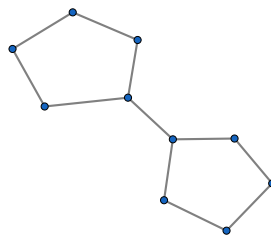


Abbildung 3.1: Graph₃ nach Anwendung von Grad₁-Regel und Kronenregel.

Die in Tabelle 3.4 zusammengefassten Ergebnisse zeigen, dass die Nemhauser-Trotter-Regel in Kombination mit anderen Regeln nicht die gleiche Reduktion erzeugt, wie Grad₁ und Kronenregel. Des Weiteren lassen sich eine Reihe von Beobachtungen anstellen.

Da durch die Grad₁-Regel einfache 1-gradige Knoten, beziehungsweise deren Nachbarn und damit der Kopf einer einfachen Krone, reduziert wird, stellt sie eine vereinfachte Form der Kronenregel dar. Daher sollten intuitiv nach der erschöpfenden

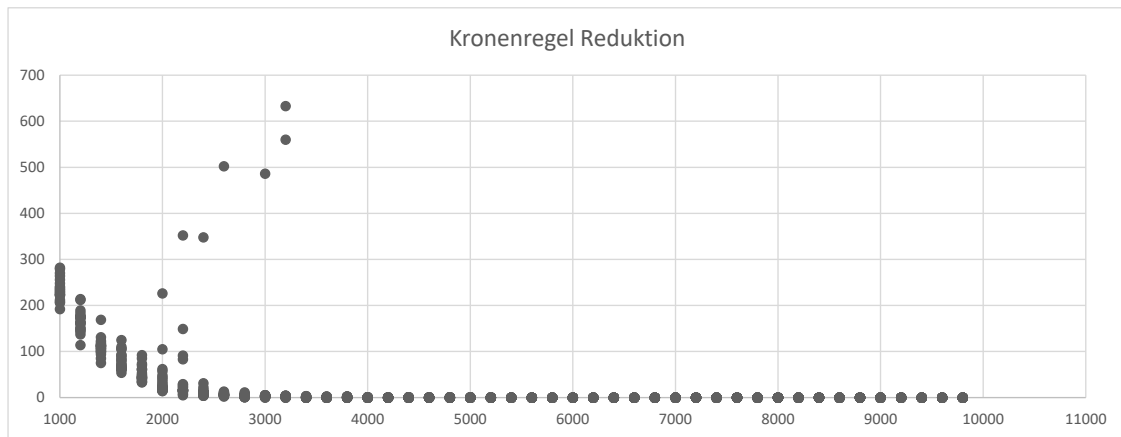


Abbildung 3.2: Anwendung der Kronenregel.

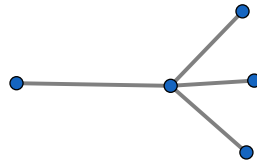


Abbildung 3.3: Einfache Krone

Anwendung der Kronenregel kaum Probleminstanzen, bei denen die Grad_1 -Regel erfolgreich ist, übrig bleiben. Wie die Tabelle allerdings zeigt, ist die Kombination beider Regeln im Vergleich zu den anderen Zweierkombination diejenige, die am meisten Knoten aus den Problemgraphen entfernt. Zu dem besseren Ergebnis der Reduktion kommt hier noch die stark erhöhte durchschnittliche Anwendung pro Graph. Ein Grund hierfür könnte die Auswahl des ersten Matchings in der Kronenregel sein, welches maßgeblich für die darauffolgende Reduktion ist. Eine einfache Krone, wie sie in Abbildung 3.1 zu sehen ist, wird mit großer Wahrscheinlichkeit von der Kronenregel, so wie sie hier verwendet wird, ignoriert. Im Abschnitt 4.1 wird genauer erläutert, warum das der Fall ist: Bei der Anwendung auf das Testset wird die größte Reduktion mit der Kronenregel dann erreicht, wenn bei der Erstellung des Matchings M_1 zunächst Kanten betrachtet werden, bei denen beide Knoten höhergradig, genauer gesagt einen höheren Grad, als der durchschnittliche Knoten im aktuellen Graphen haben. Wäre die abgebildete Krone Teil eines größeren Graphen, kann es sein, dass der Kopf dieser Krone nicht in das Matching M_1 aufgenommen und so bei der weiteren Reduktion nicht berücksichtigt wird. Die Grad_1 -Regel reduziert demnach jene einfachen Kronen, die von der Kronenregel ignoriert, beziehungsweise nicht erkannt werden. Ändert man nun die Reihenfolge, in der die beiden Regeln angewandt werden, zeigen sich nur minimale Änderungen in der durchschnittlichen Reduktion und der durchschnittlichen Anwendung pro Graph. Das könnte die Vermutung stützen, dass die Grad_1 -Regel und die Kronenregel überwiegend verschiedene Arten von Kronen abdecken, da annähernd gleiche Ergebnisse unabhängig von der Reihenfolge der Regeln erzielt werden. Die Unterschiede in den Ergebnissen zeichnen sich dadurch aus, dass die als Zweites verwendete Regel im Schnitt weniger Anwendungen hat, als wenn sie als Erstes verwendet wird. Für die Kronenregel bedeutet das eine Dif-

Tabelle 3.3: Besondere Graphen für die Kronenregel

| Graph | Reduktionsregeln | Anwendungen ₁ | Anwendungen ₂ | Reduktion |
|--------------------|---------------------------------|--------------------------|--------------------------|-----------|
| Graph ₁ | Kronenregel | 11 | - | 560 |
| | Nemhauser-Trotter | 1 | - | 4 |
| | Grad ₁ | 1 | - | 18 |
| | Grad ₁ -Kronenregel | 1 | 1 | 22 |
| | Kronenregel - Grad ₁ | 14 | 11 | 946 |
| Graph ₂ | Kronenregel | 13 | - | 486 |
| | Nemhauser-Trotter | 1 | - | 6 |
| | Grad ₁ | 2 | - | 40 |
| | Grad ₁ -Kronenregel | 12 | 13 | 1000 |
| | Kronenregel - Grad ₁ | 18 | 12 | 858 |
| Graph ₃ | Kronenregel | 15 | - | 633 |
| | Nemhauser-Trotter | 1 | - | 4 |
| | Grad ₁ | 2 | - | 46 |
| | Grad ₁ -Kronenregel | 18 | 11 | 990 |
| | Kronenregel - Grad ₁ | 15 | 9 | 971 |

EINFÜGEN

ferenz von 0.42 durchschnittlichen Durchläufen, für die Grad₁-Regel nur 0.07. Diese 0.07 Grad₁-Regel-Durchläufe mehr pro Graph verschlechtern allerdings die Gesamt-reduktion. Diesen Effekt kann auch bei dem Extrembeispiel von Graph₁ in Tabelle 3.3 beobachten, wo der gleiche Effekt eintritt. Es scheint also im Großteil der Fälle für eine maximale Reduktion von Vorteil zu sein, wenn die Kronenregel vor der Grad₁-Regel angewandt wird, was die die anderen Beispielen in Tabelle 3.4 wiederum untermalen.

Betrachtet man die Grad₁-Regel in Kombination mit der Nemhauser-Trotter-Regel sorgt die Reihenfolge zwar für einen Unterschied in der durchschnittlichen Anwendung, allerdings ist das Ergebnis der Reduktion identisch. Ein Teil der von der Grad₁-Regel abgedeckten Reduktion wird auch von der Nemhauser-Trotter-Regel entfernt und dem entsprechend auch anders herum. Die Differenz bei verschiedener Reihenfolge beträgt bei der Grad₁-Regel 0.2 und bei der NT-Regel 0.26 Iterationen pro Graph, was vermuten lässt, dass die Grad₁-Regel Bereiche des Graphen, wo beide Regeln greifen effizienter, mit weniger Durchläufen entfernt. Vergleicht man diese Kombination mit einer Grad₁-Kronenregel-Reduktion, fällt auch auf, dass die Form des Graphen, die die Nemhauser-Trotter-Regel durch das Entfernen von Knoten und Kanten erzeugt, die Anwendungsmöglichkeit der Grad₁-Regel einschränkt. In die andere Richtung scheint diese Einschränkung auch zu gelten. Die gesamte Reduktion pro Graph erhöht sich nicht sonderlich, vergleicht man die Werte, die die Grad₁-Regel alleine erzeugt (Tabelle 3.2).

Kronenregel und Nemhauser-Trotter-Regel sorgen in Kombination dafür, dass die jeweilige Anwendung pro Graph leicht erhöht wird. Auch zeigt sich ein deutlicher Anstieg der Reduktion pro Graph im Vergleich zur Einzelanwendung, was darauf hindeutet, dass die beiden Regeln wiederum verschiedene Bereiche des Graphen entfernen. Bei den Dreierkombinationen zeigt sich dieser Trend ebenfalls: Wird hier die Kronenregel unmittelbar vor der Nemhauser-Trotter-Regel angewandt, finden deutlich mehr Iterationen (der NT-Regel) pro Graph statt, als es bei vorheriger Verwendung der Grad₁-Regel der Fall ist. Zwei interessante Ergebnisse liefern die Kombinationen Grad₁ - Nemhauser-Trotter - Kronenregel und Grad₁ - Kronenregel - Nemhauser-Trotter. Die Position, beziehungsweise die Reihenfolge der Regeln beeinflusst die Anwendungshäufigkeit von Grad₁ und Nemhauser-Trotter-Regel deutlich, während Gesamtreduktion und Anwendungen der Kronenregel annähernd gleich bleiben. Dies könnte wiederum ein Indikator dafür sein, dass NT und Grad₁-Regel ähnliche Teile des Graphen reduzieren und die Kronenregel den Graphen scheinbar für die jeweilige Reduktion günstig verändert. Werden Nemhauser-Trotter-Regel, Kronenregel und Grad₁-Regel in dieser Reihenfolge angewandt, kann im Schnitt die größte Reduktion pro Graph erreicht werden. In Abbildung 3.4 lassen sich wiederum einige Ausnahmen erkennen: Zwei Graphen stechen besonders aus dem Durchschnitt heraus, zu sehen in Tabelle 3.5. Zum Einen ein Graph mit 2000 Kanten und einer Reduktion von lediglich 195 Knoten (Graph₄), während andere Graphen dieser Größe annähernd komplett gelöst wurden. Zum Anderen ein Graph mit 7200 Kanten, bei dem 762 Knoten entfernt werden konnten (Graph₅). Keiner der Graphen ist - weder vor noch nach der Reduktion - regulär oder bipartit. Die Kronenregel greift bei Graph₅ nur, wenn die Grad₁-Regel den einen eingradigen und dessen Nachbarknoten entfernt. Bis auf die Grad₁-Regel kann keine Reduktionsregel auch nur einen Knoten des Graphen entfernen, wenn sie alleine angewandt werden. Eine weitere interessante Beobachtung für Graph₅ ist, dass die Konfiguration für die Kronenregel sehr wichtig für eine hohe Reduktion ist. Die Knoten des Graphen haben vor der Reduktion einen durchschnittlichen Grad von 14 (abgerundet). Werden beim Finden des Matchings M_1 zunächst Kanten, bei denen jeder Knoten den Grad ≥ 14 hat bevorzugt, kann keine Reduktion statt, auch nicht in Kombination mit den anderen Regeln. Wählt man als Einschränkung stattdessen Grad > 14 werden 702 Knoten reduziert. Das Beste Ergebnis wird bei einer Konfiguration erreicht, bei der der Grad beider Knoten größer, als der durchschnittliche Grad aller Knoten ist. Auf dieses Phänomen wird in Kapitel 4.1 weiter eingegangen. Bei Graph₄ zeigt sich, wie bei Graph₅, dass die Nemhauser-Trotter-Regel keinen Einfluss auf die Gesamtreduktion hat. Kronenregel und Grad₁-Regel entfernen in Kombination die Größte Menge an Knoten.

3.4 Interpretation der Ergebnisse

- Gegenüberstellung der Reduktionsergebnisse
- Graphen werden dichter $\Rightarrow k$ erhöht sich \Rightarrow Keine Reduktion mehr erfolgreich
-

3.5 Zusammenfassung

Am Ende sollten ggf. die wichtigsten Ergebnisse nochmal in *einem* kurzen Absatz zusammengefasst werden.

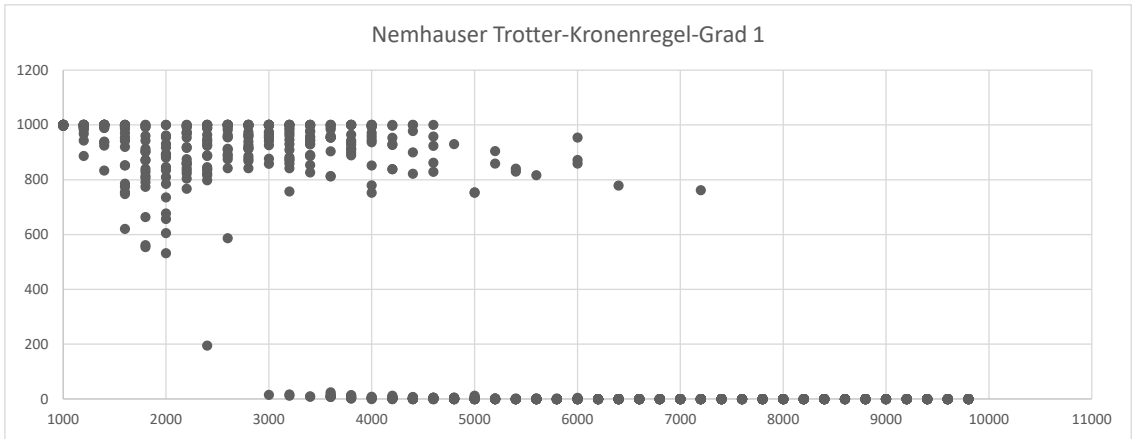


Abbildung 3.4: Anwendung von Nemhauser-Trotter-Regel, Kronenregel und Grad₁-Regel.

Tabelle 3.4: Anwendung kombinierter Reduktionsregeln

| Kombination | Anwendungen ₁ | Anwendungen ₂ | Anwendungen ₃ | Reduktion |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-----------|
| K - G ₁ | 3.63 | 4.3 | - | 331.8 |
| G ₁ - K | 4.37 | 3.22 | - | 331.17 |
| K - NT | 0.8 | 0.38 | - | 68.28 |
| NT - K | 0.45 | 0.56 | - | 68.6 |
| G ₁ - NT | 1.33 | 0.017 | - | 99.87 |
| NT - G ₁ | 0.28 | 1.13 | - | 99.87 |
| K - G ₁ - NT | 3.61 | 4.29 | 0.11 | 334.67 |
| K - NT - G ₁ | 3.6 | 0.87 | 3.39 | 334.83 |
| G ₁ - NT - K | 4.36 | 0.12 | 3.2 | 334.17 |
| G ₁ - K - NT | 3.61 | 3.2 | 0.65 | 334.16 |
| NT - K - G ₁ | 0.39 | 3.44 | 4.03 | 335.2 |
| NT - G ₁ - K | 0.91 | 3.42 | 3.2 | 334.16 |
| EINFÜGEN | | | | |

Tabelle 3.5: Besondere Graphen für die Dreierkombinationen von Regeln

| Graph | Reduktionsregeln | Anwend. ₁ | Anwend. ₂ | Anwend. ₃ | Reduktion |
|--------------------|---------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------|
| Graph ₄ | NT - K - G ₁ | 1 | 5 | 6 | 195 |
| | G ₁ - NT - K | 6 | 0 | 5 | 195 |
| | Nemhauser-Trotter | 1 | - | - | 11 |
| | Kronenregel | 1 | - | - | 11 |
| | Grad ₁ | 2 | - | - | 91 |
| | Kronenregel - Grad ₁ | 6 | 5 | - | 195 |
| Graph ₅ | NT - K - G ₁ | 1 | 9 | 2 | 762 |
| | Nemhauser-Trotter | 0 | - | - | 0 |
| | Kronenregel | 0 | - | - | 0 |
| | Grad ₁ | 1 | - | - | 2 |
| | Kronenregel - Grad ₁ | 9 | 3 | - | 762 |

EINFÜGEN

Tabelle 3.6: Statistiken über Graph₅

| Status | Grad der Knoten | Knoten | Grad der Knoten | Knoten |
|--------------------|-----------------|--------|-----------------|--------|
| Vor der Reduktion | 0 | 0 | 15 | 106 |
| | 1 | 1 | 16 | 99 |
| | 2 | 1 | 17 | 84 |
| | 3 | 0 | 18 | 66 |
| | 4 | 1 | 19 | 39 |
| | 5 | 3 | 20 | 27 |
| | 6 | 12 | 21 | 16 |
| | 7 | 13 | 22 | 18 |
| | 8 | 17 | 23 | 6 |
| | 9 | 37 | 24 | 3 |
| | 10 | 65 | 25 | 4 |
| | 11 | 59 | 26 | 5 |
| | 12 | 101 | 27 | 3 |
| | 13 | 99 | 28 | 1 |
| | 14 | 114 | | |
| Nach der Reduktion | 0 | 0 | 6 | 18 |
| | 1 | 0 | 7 | 11 |
| | 2 | 55 | 8 | 8 |
| | 3 | 59 | 9 | 0 |
| | 4 | 46 | 10 | 0 |
| | 5 | 41 | 11 | 1 |

EINFÜGEN

4. Implementierung

Die Regeln wurden in der Programmiersprache *C++* unter Verwendung der Bibliothek *LEDA* [7] implementiert. Sie wurden bei der Anwendung jeweils solange wiederholt, bis sich am Graphen keine Änderung mehr ergab.

4.1 Kronenregel

Beim Austesten der Kronenregel hat sich gezeigt, dass die Auswahl des Matchings M_1 im in Kapitel 2.3 dargestellten Algorithmus das Ergebnis der Reduktion in großem Maße beeinflusst. Wenn also beim Finden von M_1 zunächst Kanten mit Knoten höheren Grades betrachtet werden, können bessere Ergebnisse in der darauf folgenden Reduktion erzielt werden. Daraufhin wurde untersucht, wie die höhergradigen Knoten, beziehungsweise die dazugehörigen Kanten ausgewählt werden müssen. Zum einen (Tabelle 4.1) wurden Kanten betrachtet, bei denen das Auswahlkriterium auf mindestens einen der Knoten zutrifft, auf der anderen Seite Kanten, bei denen beide Knoten die Bedingung erfüllen (Tabelle 4.2). *Größte Anzahl* und *Durchschnittliche Anzahl* ergeben sich jeweils aus der Menge an Knoten eines bestimmten Grades. Bei ersterem werden Knoten, deren Grad im aktuellen Graphen am häufigsten vorkommt bevorzugt. Bei letzterem dementsprechend Knoten, deren Grad im aktuellen Graphen dem Durchschnitt entspricht. Diese Werte werden bei jeder Iteration des Algorithmus neu berechnet und passen sich dadurch während der Laufzeit an den Graphen an.

Generell wird eine bessere (größere) Reduktion mit der Kronenregel erreicht, wenn beim Matching M_1 zunächst Kanten betrachtet werden, bei denen die Einschränkung auf beide Knoten zutrifft. Die Reduktionsmenge bei Knoten mit $Grad > 2$ erzeugt im Vergleich mit anderen statischen Werten das beste Ergebnis. Dies könnte damit zusammenhängen, dass bei den Graphen, bei denen diese Regel sehr effektiv ist, der durchschnittliche Grad der Knoten 2 ist. Vermutlich erzielt die Bevorzugung des durchschnittlichen Grades das beste Ergebnis, da sich dieser Wert mit jedem Durchlauf verändert.

Wie verhält sich der durchschnittliche Grade der Knoten im Laufe der Iteration?

4.2 Nemhauser-Trotter-Regel

Tabelle 4.1: Mindestens ein Knoten mit Einschränkung

| Grad der Knoten | Anwendungen | Reduktion |
|--------------------------|-------------|-----------|
| keine Einschränkung | 0.29 | 13.04 |
| >1 | 0.29 | 13.04 |
| >2 | 0.29 | 13.22 |
| >3 | 0.27 | 12.92 |
| >4 | 0.3 | 13.71 |
| >5 | 0.31 | 13.38 |
| Größte Anzahl | 0.32 | 13.44 |
| Durchschnittliche Anzahl | 0.29 | 12.98 |

Grad der Knoten bezieht sich auf die Bedingung für die bevorzugte Auswahl der Kanten für M_1 , bzw. dessen Knoten. *Anwendung* und *Reduktion* stellen jeweils den Durchschnittswert beim gesamten Testset dar.

Tabelle 4.2: Beide Knoten mit Einschränkung

| Grad der Knoten | Anwendungen | Reduktion |
|--------------------------|-------------|-----------|
| keine Einschränkung | 0.29 | 13.04 |
| >1 | 0.36 | 15.34 |
| >2 | 0.41 | 16.96 |
| >3 | 0.39 | 16.52 |
| >4 | 0.4 | 15.78 |
| >5 | 0.4 | 15.72 |
| Größte Anzahl | 0.29 | 13.06 |
| Durchschnittliche Anzahl | 0.46 | 19.77 |

Grad der Knoten bezieht sich auf die Bedingung für die bevorzugte Auswahl der Kanten für M_1 , bzw. dessen Knoten. *Anwendung* und *Reduktion* stellen jeweils den Durchschnittswert beim gesamten Testset dar.

5. Diskussion und Ausblick

- Form von randomgraphen untersuchen
 - Welche Form hinterlassen die Reduktionsregeln
 - Welche Form wäre für die Nemhauser Trotter am besten
- Warum ist die Nemhauser-Trotter-Regel in der Praxis so schlecht?
- Wie ergibt sich in bei den Reduktionen (Abbildung 3.4) der Große Unterschied zwischen den Graphen im Bereich der Kantenmenge zwischen 3000 und 4600?
- Wieso ist das Matching M1 so wichtig für die Kronenregel?
- Implementierung der Grad 2 Regel
- Insgesamt mehr Zeit auf Preprocessing verwenden, betrachtet man das Ungleichgewicht in der Laufzeit vom Finden einer Knotenüberdeckung im Vergleich zur Vorverarbeitung. Wenn die Ergebnisse der Vorverarbeitung vielversprechend sind, scheint es sinnvoll zumindest die Laufzeiten auszugleichen.

Literaturverzeichnis

- [1] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability : a guide to the theory of NP-completeness*. Freeman New York, 2007.
- [2] G. Valiente, *Algorithms on Trees and Graphs*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [3] M. Cygan, *Parameterized algorithms*. Springer Cham, 2015.
- [4] J. Chen, I. A. Kanj, and W. Jia, “Vertex cover: further observations and further improvements,” *Journal of Algorithms* 41, 280 - 301, 2001.
- [5] S. R. aniel Mölle and P. Rossmanith, “Enumerate and expand: New runtime bounds for vertex cover variants,” *Computing and Combinatorics. Lecture Notes in Computer Science, vol 4112*, 265-273, 2006.
- [6] R. Niedermeier, *Invitation to Fixed-Parameter Algorithms*. Oxford University Press, 2006.
- [7] K. Mehlhorn and S. Näher, *LEDA: A Platform for Combinatorial and Geometric Computing*. Cambridge University Press, 2006.
- [8] E. C. Sewell, S. H. Jacobson, and H. Kaul, “Reductions for the stable set problem,” *Algorithmic Operations Research Vol.6* 40–55, 2011.
- [9] F. N. Abu-Khzam, M. A. Langston, P. Shanbhag, and C. T. Symons, “Scalable parallel algorithms for fpt problems,” *Algorithmica, Volume 45, Number 3*, 269-284, 2006.
- [10] F. Abu-Khzam, R. Collins, M. Fellows, M. Langston, and W. S. C. Symons, “Kernelization algorithms for the vertex cover problem: Theory and experiments,” *Proceedings of the 6th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX), ACM/SIAM, Proc. Applied Mathematics* 115, 2004.
- [11] F. Gurski, *Exakte Algorithmen für schwere Graphenprobleme*. Springer Heidelberg, 2010.
- [12] R. G. Downey and M. R. Fellows, *Fundamentals of parameterized complexity*. Springer London, 2013.
- [13] —, *Parametrized Complexity*. Springer New York, 1997.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit habe ich bisher keinem anderen Prüfungsamt in gleicher oder vergleichbarer Form vorgelegt. Sie wurde bisher auch nicht veröffentlicht.

Trier, den 2. März 2018