

# Untersuchungen zur Hénon Iteration

## Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades  
Master of Science (M.Sc.)

Universität Trier  
FB IV - Informatikwissenschaften  
Professur Arithmetische Algorithmen

Erstgutachter:	Prof. Dr. Norbert Müller
Zweitgutachter:	Prof Dr. Stephan Näher

Vorgelegt am xx.xx.xxxx von:

Benedikt Lüken-Winkels  
Baltzstraße 6  
54296 Trier  
b.lueken.winkels@gmail.com  
Matr.-Nr. 1138844

# **Zusammenfassung**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Hénon-Abbildung . . . . .	3
2.2	Taylormodelle . . . . .	5
2.2.1	Arithmetische Operationen auf Taylormodellen . . . . .	6
2.2.2	Spezielle Operationen auf Taylormodellen . . . . .	6
2.3	Lyapunov Exponent . . . . .	7
2.3.1	Verlustrate der Aussagekraft . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Implementierung</b>	<b>11</b>
3.1	iRRAM . . . . .	11
3.1.1	Präzision . . . . .	12
3.2	Intervallararithmetik . . . . .	12
3.3	Polynomarithmetik . . . . .	13
3.3.1	Polynomaddition . . . . .	13
3.3.2	Polynommultiplikation . . . . .	14
3.4	Taylormodelle . . . . .	15
3.4.1	Housekeeping-Methoden . . . . .	15
3.4.2	Darstellung der Taylormodelle . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Evaluation</b>	<b>20</b>
4.1	Housekeeping-Grenzwerte . . . . .	22
4.2	Sweeping . . . . .	23
4.3	Cleaning . . . . .	25
4.4	Splitting . . . . .	26
4.5	Initiales Taylormodell . . . . .	27
4.6	Anwendung der Parameter . . . . .	28
4.7	Umsetzung . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Fazit</b>	<b>32</b>
5.1	Diskussion . . . . .	32
5.2	Ausblick . . . . .	32
5.2.1	Partitionierung . . . . .	33
5.2.2	Laufzeitoptimierung . . . . .	33
5.2.3	Sweeping-Heuristiken . . . . .	33
5.2.4	Schnittstellen . . . . .	33
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>34</b>

**6 Anhang**

**36**

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Hénon-Abbildung: Einfache Evolution . . . . .	4
2.2	Hénon-Abbildung: Attraktor . . . . .	5
2.3	Linear und nichtlineare Taylormodelle: Vergleich . . . . .	7
2.4	Lokale Annäherung an den Lyapunov Exponenten mit Punkten . . .	8
2.5	Lokale Annäherung an den Lyapunov Exponenten mit Intervallen . .	9
3.1	Ebenen der Polynomdarstellung mit REALs . . . . .	12
3.2	Hénon-Abbildung: Abbildung mit verschiedenen Auflösungen . . . .	19
4.1	Hénon-Abbildung: Mehrere Iterationen mit großen Initialwerten . . .	20
4.2	Experimentelle Ergebnisse zu Grenzwerten . . . . .	23
4.3	Sweeping mit verschiedenen Graden . . . . .	24
4.4	Experimentelle Ergebnisse zu erhaltenen Fehlersymbolen . . . . .	25
4.5	Experimentelle Ergebnisse zum Effekt des Cleaning . . . . .	26
4.6	Experimentelle Ergebnisse zum Vorgehen beim Splitting . . . . .	27
4.7	Vergleich der Entfernung von Punkten, eines Intervalls und eines Tay- lormodells . . . . .	29
6.1	Hénon-Abbildung: Mehrere Iterationen mit Farbkodierung . . . . .	39

# Tabellenverzeichnis

4.1	Experimentelle Ergebnisse zu Grenzwerten . . . . .	22
4.2	Experimentelle Ergebnisse zu erhaltenen Fehlersymbolen . . . . .	25
4.3	Experimentelle Taylormodell Varianten . . . . .	28

# Listings

3.1	Beispielaufruf der Sweeping-Routine . . . . .	16
4.1	Implementierung der Hénon-Iteration in HOTM mit Punktintervallen	30
4.2	Implementierung der Hénon-Iteration in HOTM mit Intervallen . . .	30
6.1	Bespielkonfiguration . . . . .	37

# 1. Einleitung

Das Rechnen mit reellen Zahlen und Funktionen auf denselben bedeutet die Verarbeitung einer unendlichen Menge an Informationen, die in der computergestützten Praxis lediglich mit einer endlichen Approximation beschrieben werden können [BrHW08]. Eine solche Beschränkung hat zu Folge, dass arithmetische Operationen keine exakten Ergebnisse ohne Fehler liefern. Dieser wird in der Disziplin der *Exakten Reellen Arithmetik* durch Intervalle abgeschätzt, die den tatsächlichen Wert mitsamt Rundungsfehler umschließen und so ein korrektes Ergebnis garantieren können. Eine entsprechende Implementierung bietet die C++-Softwarebibliothek `iRRAM` [Müll09], die reelle Zahlen zu einer beliebigen Genauigkeit, statt der häufig verwendeten *double*-Präzision, annähert. Jedoch entsteht durch die so betriebene Intervallarithmetik das Problem der Überschätzung des Wertebereichs, zum Beispiel beim mehrfachen Auftreten derselben Variable in einem Term. Ein weit verbreiteter Lösungsansatz ist die Verwendung von Taylormodellen, mit denen Zahlen als höherdimensionale Polynome mit reellen Koeffizienten und einem Fehlerintervall dargestellt werden [BrKM15] [MaBe01]. Zudem speichern Variablen (‘Fehlersymbole’) die Rechenfehler und deren Abhängigkeitsinformationen. Eine leicht veränderte Version der Taylormodelle wird im C++-Programm `Tangentspace`<sup>1</sup> implementiert. Die Taylormodelle bestehen hier aus linearen Polynomen mit beliebigen Intervallkoeffizienten und rationalen Endpunkten. Die Taylormodelle werden verwendet, um lineare Schranken für nichtlineare Funktionen zu bestimmen. Eine weitere Implementierung von Brauße et al. [BrKM15] verwendet reelle Endpunkte für die Intervallkoeffizienten und die Intervalle der Fehlersymbole. Das im Rahmen dieser Arbeit entstandene C++-Programm `HOTM` (*High Order Taylor Model*) bildet eine Kombination aus diesen beiden Herangehensweisen, da Intervalle mit beliebigen reellen Endpunkten verwendet werden.

## Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit war die Untersuchung nichtlinearer Taylormodelle in der praktischen Anwendung. Hierzu wurde das C++-Programm `HOTM` (*High Order Taylor Model*), beziehungsweise der gleichnamige Zahlentyp implementiert. Die Taylormodelle bestehen aus Polynomen mit Intervallkoeffizienten, welche die reellen Zahlen der `iRRAM`-Software-Bibliothek als Endpunkte verwenden. Mit den so definierten Taylormodellen und damit einer mehrstufigen Intervallarchitektur ergibt sich eine Vielzahl an Konfigurationsmöglichkeiten von der Breite der Endpunkte der Intervalle, bis hin zu abstrakteren Operationen auf den Taylormodellen. An Hand von Berechnungen der Hénon-Abbildung werden diese evaluiert und versucht, eine möglichst optimale Einstellung für die Parameter der `HOTM` im zweidimensionalen Raum ( $\mathbb{R}^2$ ) zu finden.

---

<sup>1</sup><http://informatik.uni-trier.de/~mueller/Research/Tangentspace/> (Stand 29.03.2021)



## Gliederung

Als praktisch ausgelegt Arbeit liegt der Schwerpunkt bei der Implementierung und den damit erzeugten experimentellen Ergebnissen. Die Basis hierfür bilden die in Kapitel 2 beschriebenen Grundlagen, welche sich in Hénon-Abbildung, Taylormodelle und Lyapunov Exponenten gliedern. Diese Überblicke sollen das Verständnis über Entscheidungen in der Implementierung, die Deutung der Grafiken und der Ergebnisse vereinfachen. In Kapitel 3 werden die implementierten Operationen und Algorithmen der HOTM beschrieben. Mit der Anwerndung bei der Hénon-Abbildung werden diese in Kapitel 4 evaluiert und verschiedene Konfigurationen verglichen. Während der Implementierung und Durchführung der Experimente sind weiterführende Ideen und Anwendungsmöglichkeiten für die HOTM entstanden, auf die im Ausblick in Kapitel 5 neben der Diskussion der Ergebnisse eingegangen wird.

## Relevante Literatur

Die für diese Arbeit relevante Literatur lässt sich in vier Kategorien aufteilen, vergleichbar mit den später eingeführten Abstraktionsebenen, die sich aus dem Aufbau der HOTM ergeben. Für die grundlegende Zahlendarstellung wird die Implementierung der reellen Zahlen der iRRAM von Müller verwendet. Funktionsweisen und mögliche Anpassungen der Software-Bibliothek können den Quellen [Müll09] und [Müll00] entnommen werden. Für eine theoretische Grundlage der hier praktisch angewendeten Berechenbaren Analysis wird auf ein Tutorial von Brattka et al. [BrHW08] verwiesen. Spandl untersucht in [Span10] mit Hilfe der iRRAM den Lyapunov Exponenten für dynamische Systeme und zieht dabei Intervallmethoden heran, was einen zentralen Teil dieser Arbeit darstellt.

Da die HOTM auf der nächst höheren Ebene aus Polynomen mit Intervallkoeffizienten bestehen, wurde eine allgemeine Intervallarithmetik, wie im Standardwerk von Moore [Moor79] beschrieben implementiert. Yan et al. führen in [Yan98] einen Algorithmus ein, der die Addition von Polynomen effizient gestaltet, welcher in [MoPe07] für die Multiplikation formuliert ist. Mit dieser Basis können die Taylormodelle, wie in [MaBe01] und [BrKM15] beschrieben, implementiert werden.

In [BrKM15] sind zudem weiterführende Operationen auf Taylormodellen zu finden. Diese werden unter anderem im Programm *Tangentspace*, auf dem die HOTMs aufbauen, verwendet und ermöglicht geometrische Lösungen für Konfliktgesteuerte Gleichungslöser. Die Funktionsweise der so implementierten Taylormodelle wird an Hand der Hénon-Abbildung untersucht. Hierzu existieren neben dem ursprünglichen Paper von M. Hénon [Hén76], viele Experimente und Untersuchungen, wie Oliviera et al., die sich in [MdOCC20] mit verschiedenen Parameterbelegungen beschäftigen.

## 2. Grundlagen

### 2.1 Hénon-Abbildung

Die Hénon-Abbildung bietet eine Möglichkeit, das Verhalten eines seltsamen Attraktors (engl. *'strange attractor'*), wie dem des Lorenz Systems, mit einer vergleichbar einfachen Abbildung zu untersuchen [Hén76].

Konvergieren die Werte einer Funktion in einem bestimmten Wertebereich  $R$ , der Fangzone (engl. *'trapping zone'*), gegen einen Punkt oder eine Kurve, spricht man von einem Attraktor. Dieser Attraktor kann jedoch auch eine komplexere Struktur haben. Auf einem solchen seltsamen Attraktor springen die Werte hin und her und reagieren hochempfindlich auf Änderungen der Initialbedingungen. Dieses Verhalten lässt mit der Abbildung  $x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2, y_{i+1} = bx_i$ , beziehungsweise

$$f(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx)$$

beobachten.  $f$  erfüllt dieselben Kriterien, wie der Lorenz-Attraktor, der durch eine dreidimensionale Differenzialgleichung entsteht, allerdings wurde  $f$  so definiert, dass auch höhere Iterationszahlen leichter zu berechnen und zu analysieren sein sollen. Die Hénon-Abbildung bildet den  $\mathbb{R}^2$  auf sich selbst ab. Dieser Vorgang besteht aus drei Schritten. Man betrachte eine Fläche entlang der  $x$ -Achse gelegen:

#### Dehnen und Falten

$$T' : x' = x, y' = 1 + y - ax^2$$

Mit dem Parameter  $a$  kann die Stärke der Biegung gesteuert werden.

#### Kontrahieren

$$T'' : x'' = b \cdot x, y'' = y'$$

Ein  $|b| < 1$  bedeutet, dass sich die Fläche zusammen zieht. Wird  $b$  zu groß gewählt, so entsteht eine zu starke Kontraktion und der Attraktor ist schwerer erkennbar. Ist  $b$  zu klein, ist der Effekt zu gering und das Verhalten der Abbildung ist nicht mehr chaotisch.

#### Spiegeln

$$T''' : x''' = y'', y''' = x''$$

Im letzten Schritt werden die Achsen vertauscht und somit die Fläche gepiegelt.

Die entstehende Abbildung hat unter Anderem folgende Eigenschaften:

- Invertierbar:  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  kann eindeutig auf  $(x_n, y_n)$  zurückgeführt werden.
- Kontrahiert Flächen: Mit  $|b| < 1$  werden Flächen kleiner.

- Besitzt eine Fangzone, die einen Attraktor enthält. Allerdings landen nicht immer alle Orbits in der Fangzone, da wegen der Quadrierung durch  $T'$  Terme bestimmter Größe nach  $\infty$  laufen können.

Abbildung 2.1 zeigt die einzelnen Schritte einer Evolution der Hénon-Abbildung anhand eines Rechtecks, welches als nichtlineares Taylormodell definiert wurde.

$$x_0 = 0 + 1 \cdot \lambda_1 \quad (\lambda_1 \in [0 \pm 0.4])$$

$$y_0 = 0 + 1 \cdot \lambda_2 \quad (\lambda_2 \in [0 \pm 0.05])$$

Das Rechteck wird gedehnt und gefaltet, dann kontrahiert und zuletzt rotiert, beziehungsweise gespiegelt.

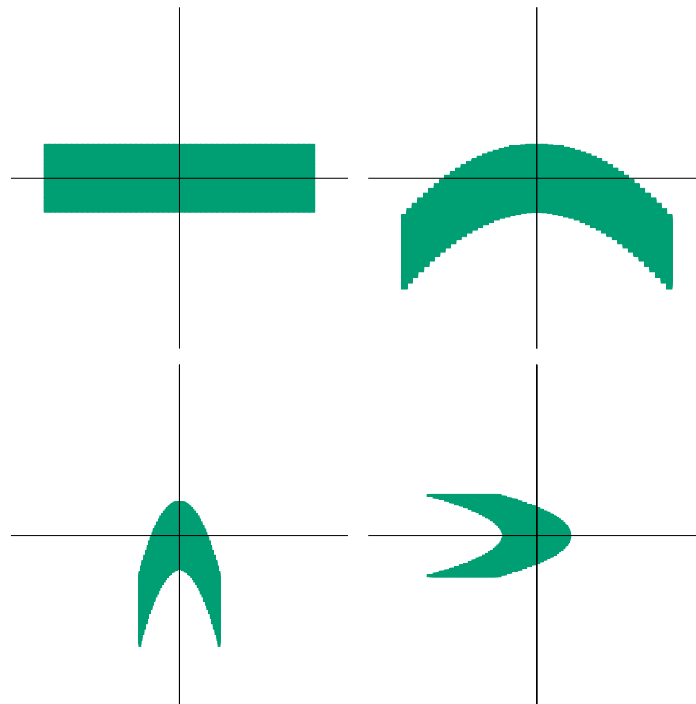


Abbildung 2.1: Einfache Evolution der Hénon Abbildung, aufgeteilt in das initiale Rechteck und die drei Zwischenschritte.

Für die Parameter  $a = 1.4$  und  $b = 0.3$  ergibt sich eine Fangzone in der sich die Funktionswerte auf einem seltsamen Attraktor bewegen, während die außerhalb gelegenen Punkte gegen unendlich laufen. Das bedeutet, dass ein Punkt, der in der Fangzone, beziehungsweise auf dem Attraktor liegt, wiederum auf diesen abgebildet wird. Der Attraktor ist in Abbildung 2.2 zu sehen. Hier wurden, ausgehend vom Punkt  $(0, 0)$ , 10000 Iterationen der Hénon-Abbildung berechnet und jeweils das Ergebnis eingezeichnet. Es ist deutlich erkennbar, dass sich der Attraktor teils nahe am Rande der Fangzone bewegt. Bereits bei einer leichten Überschätzung des Ergebnisses kann dies dazu führen, dass die Funktionswerte die Fangzone verlassen, auch wenn der tatsächliche Wert eigentlich in dieselbe abgebildet würde. Dies kommt zum Tragen, wenn Intervalle, als Zahlendarstellung gewählt werden, wie es bei HOTM der Fall ist, da diese immer auch einen Bereich um den Wert herum abdecken. Liegt dieser nun außerhalb der Fangzone, wächst der Bereich durch die Quadrierung in

jeder Iteration exponentiell und lässt somit keine aussagekräftigen Informationen ermitteln.

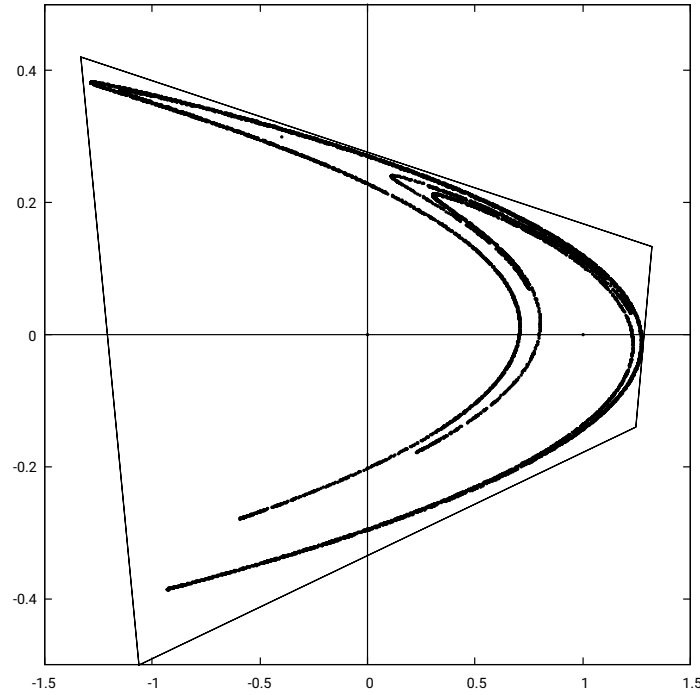


Abbildung 2.2: Seltsamer Attraktor der Hénon-Abbildung für  $a = 1,4$  und  $b = 0.3$  mit 10000 Punkten.

## 2.2 Taylormodelle

Ein Taylormodell im Sinne der Erweiterung von Brauße et al. in [BrKM15] des Grundmodells von Makino et al. in [MaBe01] besteht aus einem Polynom  $p$  mit  $k \in \mathbb{N}$  Variablen und geschlossenen Intervallen als Koeffizienten. Das Monom  $c_0$  des Grades 0, der das Kernintervall (*Kernel*) des Taylormodells darstellt, dient als Restintervall, das den Rechenfehler, über den keine Abhängigkeitsinformationen mehr verfügbar ist, enthält. Eine Variable oder ein Fehlersymbol  $\lambda_i$  aus dem Vektor  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  steht für einen Wert aus dem dazugehörigen Supportintervall aus  $S = (s_1, \dots, s_k)$  mit  $\lambda_i \in s_i$  und wird dazu verwendet, unbekannte Werte, Rechenungenauigkeiten und funktionale Abhängigkeiten innerhalb eines oder zwischen mehreren Taylormodellen abzubilden. Für die Variablen eines Monoms wird in dieser Arbeit wie in [BrKM15] eine Multiindexnotation verwendet. Für einen Index  $n = (n_1, \dots, n_k)$  ist das dazugehörige Produkt von Variablen definiert als  $\lambda^n = \lambda_1^{n_1} \cdot \dots \cdot \lambda_k^{n_k}$ .

Die verwendeten Intervalle  $c_n = [\tilde{c}_n \pm \varepsilon_n] \subseteq \mathbb{R}$  haben in HOTM reelle Endpunkte und stellen mit  $c'_n = [\tilde{c}_n \pm 0]$  Punktintervalle dar. Mit einem so definierten Taylormodell  $T = \sum_n c_n \lambda^n$  kann Exakte Reelle Arithmetik betrieben werden, indem Rundungsfehler und Ungenauigkeiten, die beim Rechnen mit endlicher Genauigkeit entstehen können als Intervalle in den Fehlersymbolen berücksichtigt werden. Dies ist zwar auch mit einfacher Intervallarithmetik möglich, jedoch leidet die Präzision des Ergebnisses einer solchen Berechnung stark unter der schnell wachsenden Überschätzung, die sich aus der Tendenz von Intervallen ergibt, bei jeder Rechenoperation zu wachsen.

In [BrKM15] werden drei Unterfamilien von Taylormodellen identifiziert, die sich in der Definition des Polynoms und dessen Koeffizienten unterscheiden:

1. Affine Arithmetik: Polynome des Grades  $\leq 1$  mit Punktintervallen, außer beim Kernel.
2. Generalisierte Intervallarithmetik: Polynome des Grades  $\leq 1$  mit beliebigen Intervallen bei den Koeffizienten.
3. Klassische Taylormodelle: Polynome beliebigen Grades mit Punktintervallen, außer beim Kernel.

Das in dieser Arbeit verwendete Taylormodell ist eine Kombination aus 2. und 3., und besteht aus Polynomen beliebiger Ordnung mit beliebigen Intervallen als Koeffizienten. Dadurch können mit zwei solchen *nichtlinearen Taylormodellen* im Zweidimensionalen komplexere Strukturen, wie Kurven höherer Ordnung beschrieben werden.

Abbildung 2.3 zeigt die Darstellung linearer und nichtlinearer Taylormodelle für

$$\begin{aligned} x &= 0 + 1 \cdot \lambda_1 & (\lambda_1 \in [0 \pm 0.4]) \\ y &= 0 + 1 \cdot \lambda_2 & (\lambda_2 \in [0 \pm 0.1]) \end{aligned}$$

und deren Abbildungen durch  $f(x, y) = (y + 1 - 1.4x^2, 0.3x)$  mit einer Farbkodierung, die den Ursprung der abgebildeten Flächen indiziert.

Sowohl die linearen, als auch die nichtlinearen Taylormodelle umschließen den korrekten Bereich der Funktionswerte, allerdings ist die abgebildete Fläche der Nichtlinearen näher an der Fläche, die sich ergäbe, betrachtete man das Rechteck als Menge Punkten und bildete sie einzeln ab. Es ergibt sich eine geringere Überschätzung, aber auch ein komplexeres Polynom.

### 2.2.1 Arithmetische Operationen auf Taylormodellen

Arithmetische Operationen auf Taylormodellen mit Intervallkoeffizienten bedeuten das Verrechnen von Polynomen, die wiederum Polynome ergeben. Für die Addition, Subtraktion und Multiplikation werden lediglich die entsprechenden Operationen auf die Polynome angewandt. Eine Division ist nur möglich, wenn der Divisor nicht die 0 enthält (siehe Kapitel 3.2).

### 2.2.2 Spezielle Operationen auf Taylormodellen

Um den durch Berechnungen wachsenden Grad des Polynomes und die Breite der Intervallkoeffizienten zu kontrollieren, wird in [BrKM15] *Sweeping* und *Splitting*, also Fegen und Teilen, vorgestellt.

Sweeping reduziert den Grad eines Monoms  $c_n \lambda_i^k$  mit  $\lambda_i \in s_i$ , indem eines der Fehlersymbole durch das entsprechende Intervall aus  $S$  ersetzt wird:

$$c_n \lambda_i^k \rightsquigarrow c_n s_i \lambda_i^{k-1}$$

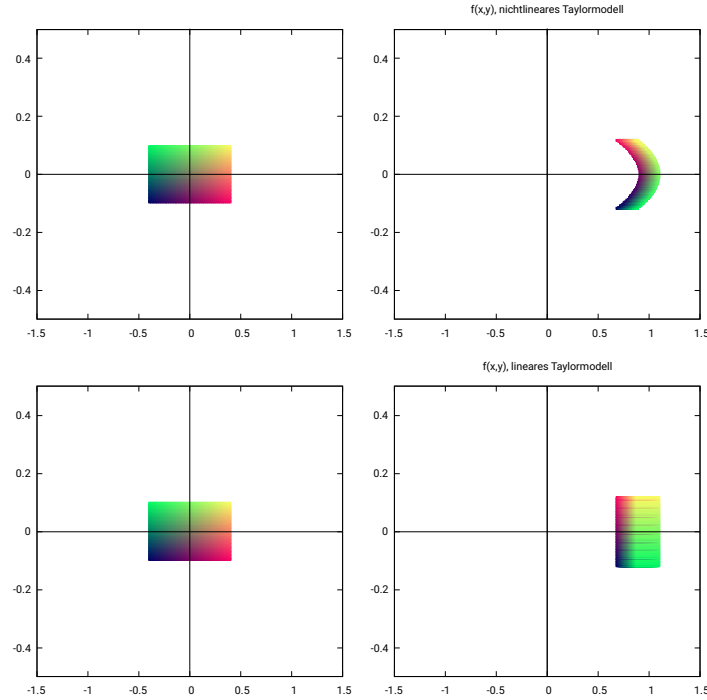


Abbildung 2.3: Darstellung nichtlinearer und linearer Taylormodelle, die ein Rechteck beschreiben und deren Abbildung durch die Funktion  $f(x, y) = (y + 1 - 1.4x^2, 0.3x)$ . Die Farbkodierung indiziert den Ursprung der abgebildeten Flächen.

Dies hat natürlich zur Folge, dass die Breite der Koeffizienten wächst und damit die Überschätzung der tatsächlichen Werte. Durch Splitting wird ein Monom in zwei Monome mit Punktintervallen zerteilt und ein neues Fehlersymbol eingeführt, das mit dem neuen Koeffizienten der Breite des Intervalls entspricht:

$$[\tilde{c}_n \pm \varepsilon_n] \rightsquigarrow [\tilde{c}_n \pm 0] + [\varepsilon_n \pm 0] \cdot \lambda_n \quad , \lambda_n \in [0 \pm 1]$$

Es ergibt sich der gegenteilige Effekt des Sweepings, da die Intervalle kleiner werden, der Grad des Polynoms jedoch erhöht wird.

## 2.3 Lyapunov Exponent

Mit dem Lyapunov Exponenten kann für ein dynamisches System  $(D, f)$  mit Phasenraum  $D$  und einer Funktion  $f : D \rightarrow D$  angegeben werden, mit welcher Rate sich zwei beliebig nahe Punkte  $x_0 \in D$  und  $x_0 + \varepsilon$  mit  $\varepsilon > 0$  voneinander entfernen, beziehungsweise annähen. Für eine iterierende Funktion  $x_{n+1} = f(x_n)$  mit diskreten Zeitschritten wird der Lyapunov Exponent wie folgt definiert [PlBr89]:

$$LE(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.1)$$

Beziehungsweise entwickelt sich die Entfernung zwischen den zwei Punkten  $\varepsilon$  zum Zeitpunkt  $n$  mit:

$$\varepsilon \cdot e^{n \cdot LE(x_0)} = |f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| \quad (2.2)$$

Für  $LE(x_0) < 0$  kontrahiert, für  $LE(x_0) > 0$  wächst der Abstand zwischen den Punkten über den Verlauf der Schritte.  $|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|$  ist eine lokale Annäherung an den Lyapunov Exponenten zum Zeitpunkt  $n$ . Betrachtet man diese Punkte als Randpunkte eines Intervalls  $I$  so bildet der Lyapunov Exponent eine untere Schranke für dessen Ausdehnung, da  $I$  durch die Anwendung von Rechenoperation den Wertebereich überschätzt.

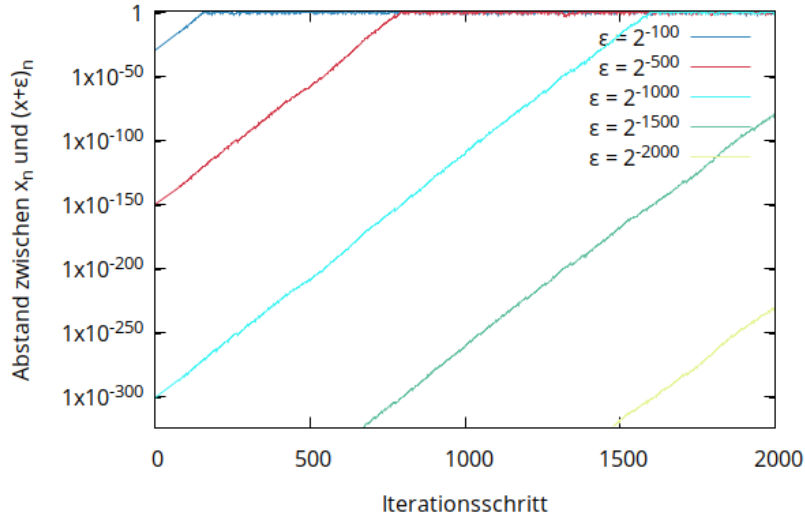


Abbildung 2.4: Lokale Annäherung an den Lyapunov Exponenten der Hénon-Iteration mit Punkten  $x_0$  und  $x_0 + \varepsilon$ , und den Parametern  $a = 1.4, b = 0.3$

Abbildung 2.4 zeigt eine lokale Annäherung an die Entfernung zwischen  $x_n$  und  $(x + \varepsilon)_n$ , wie in 2.2 bei  $n$  Iterationen und verschiedenen Größen für  $\varepsilon$ . Die Graphen stellen jeweils die Entwicklung des Abstandes  $|(x + \varepsilon)_n - x_n|$  für  $f^n(x, y)$ , beziehungsweise  $f^n(x + \varepsilon, y + \varepsilon)$  dar. Abhängig vom initialen Abstand  $\varepsilon$  bleiben die Punkte eine längere Zeit dicht beieinander, bevor der Abstand um den Wert 1 osziliert. Ist dieser Zustand erreicht, bewegen sich die Punkte scheinbar unabhängig voneinander auf dem Attraktor, bleiben also in der Fangzone und entfernen sich daher nicht weiter.

In Abbildung 2.5 ist zu sehen, wie sich die Ausbreitung entwickelt, wenn statt zwei Punkten, Intervalle für  $x_0$  und  $y_0$  mit der Breite  $\varepsilon$  verwendet werden; jeweils in Schwarz eingezeichnet. Hier zeigt sich, dass sich die Breite des Intervalls  $x_n$  deutlich schneller vergrößert<sup>1</sup>, als es der Abstand zwischen unabhängigen Punkten mit  $x_n$  und  $(x + \varepsilon)_n$ . Das entstehende Wrapping wächst umso schneller, je mehr die Intervallbreite  $|x_n|$  dem Wert 1 nähert. Dort, wo die einzelnen Punkte um die 1 oszillieren, laufen die Intervallgrenzen innerhalb weniger Iterationen gegen  $\infty$ .

### 2.3.1 Verlustrate der Aussagekraft

In [Span10] wird der Lyapunov Exponent in den Kontext der Berechenbaren Analysis gerückt und in Verbindung mit der Entwicklung von Rundungsfehlern in reeller Arithmetik gebracht. Der Wert von  $x_n$  wird zu einem beliebigen Zeitpunkt  $n$  von

<sup>1</sup>Das Intervall  $y_n$  verhält sich vergleichbar, wird jedoch von  $x_{n-1}$  dominiert

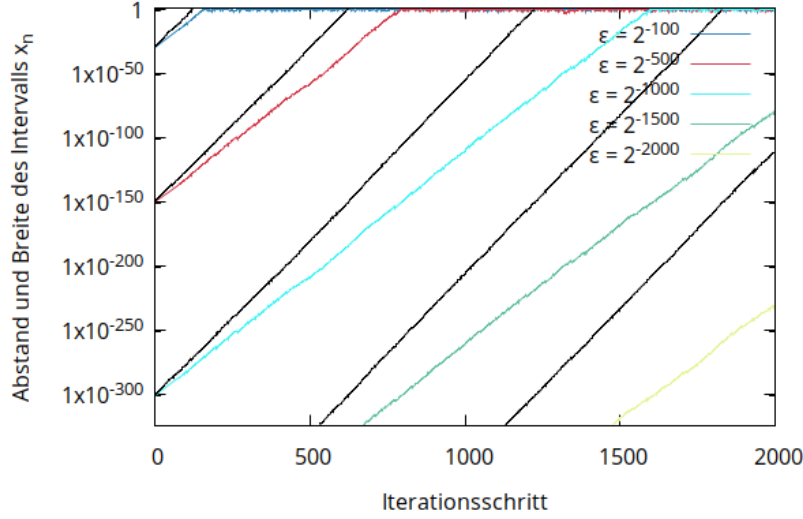


Abbildung 2.5: Lokale Annäherung an den Lyapunov Exponenten der Hénon-Iteration mit Intervallen der Breite  $|x_0| = \varepsilon$ , und den Parametern  $a = 1.4, b = 0.3$  im Vergleich zur Entwicklung des Abstandes zweier Punkte mit Abstand  $\varepsilon$

einem Intervall  $[x_n^l, x_n^u]$  umschlossen, sodass  $x_n \in [x_n^l, x_n^u]$  gilt. Die Schranken  $x_n^l$  und  $x_n^u$  sind jeweils Fließkommazahlen der Länge  $m_n$ .  $\hat{x}_n$  stellt eine Approximation von  $x_n$  dar, indem der Mittelpunkt des Intervalls bestimmt und dann auf  $m_n$  Stellen gerundet wird:

$$\hat{x}_n = rd\left(\frac{x_n^l + x_n^u}{2}, m_n\right) \quad (2.3)$$

Für die Diskrepanz zwischen  $\hat{x}_n$  und  $x_n$   $e_n$  soll bei einer Genauigkeit  $p \in \mathbb{Z}$  gelten, dass

$$e_n = |\hat{x}_n - x_n| \leq 10^{-p} \quad (2.4)$$

gilt. Die Wachstumsrate für  $m_{\min}(x, n, p)$  gibt an, wie groß  $m$  sein muss, damit 2.4 für den Startwert  $x$  nach  $n$  Iterationen bis zu einer Genauigkeit  $p$  erfüllt ist. Diese Rate wird definiert als

$$\sigma(x, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{\min}(x, n, p)}{n} \quad (2.5)$$

Mit  $m_{\min}$  kann nun die Verlustrate der Aussagekraft der errechneten Werte pro Zeitschritt durch

$$\sigma(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sigma(x, p) \quad (2.6)$$

angegeben werden.

Die in dieser Arbeit verwendeten Taylormodelle bestehen aus Polynomen mit Intervallkoeffizienten und reellen Endpunkten. Für die praktische Umsetzung wurde die Software-Bibliothek `IRRAM` [Müll09] verwendet, welche reelle Zahlen, ähnlich



wie oben beschrieben, darstellt und annähert. Stellen diese Taylormodelle nun ein Intervall dar, so ist das Ziel, für die Darstellung der reellen Zahlen einen möglichst kleinen Wert für  $m$  zu finden, sodass die Verlustrate der Aussagekraft der reellen Intervallgrenzen erlaubt, dass sich das Intervall für eine Iterationszahl  $n$  so nah wie möglich am Lyapunov Exponenten entwickelt.

Da sich die Hénon-Abbildung nun im  $\mathbb{R}^2$  bewegt, bedeutet eine Definition der Taylormodelle als Intervall, dass diese ein Rechteck aufspannen. Eine Berechnung von Hénon-Iterationen auf einem größeren Rechteck hat zu Folge, dass eine kritische Intervallbreite, bei der die Ausdehnung nicht mehr dem Lyapunov-Exponenten gleicht, sondern exponentiell schnell wächst, schneller erreicht wird. Um diesem Effekt entgegenzuwirken, kann das Rechteck und damit die Taylormodelle partitioniert und die Berechnung auf den kleineren Flächen fortgeführt werden. Mit der Entwicklung der Breite kann nun abgeschätzt werden, wie fein die Partitionierung sein muss, um eine gewisse Anzahl an Iterationen berechnen zu können.

## 3. Implementierung

### 3.1 iRRAM

Die Software-Bibliothek `iRRAM` [Müll09] implementiert die reellen Zahlen und basiert auf Intervallen als Zahlentyp, um diese mit einer beliebigen Genauigkeit darstellen zu können, ähnlich, wie in Kapitel 2.3.1 beschrieben. Zunächst wird mit Double-Präzision, also 64-Bit Zahlen gerechnet, welche verwendet werden, bis das Ergebnis für die angefragte Präzision nicht mehr genau ausgegeben werden kann, beziehungsweise bis zu einer bestimmten Anzahl an Bits. Ist dies der Fall, geschieht eine Iteration mit einer erhöhten Genauigkeit, also längeren Zahlen für die Intervallränder, welche dann mit Hilfe von `MPFR` dargestellt werden. Für eine solche Iteration werden gerade so viele Zwischenergebnisse während der Berechnung gespeichert, dass eine Wiederholung der Schritte mit höherer Präzision möglich ist. Da sich durch die Wiederholung mit höherer Genauigkeit Änderungen bei bereits durchgeführten Berechnungen ergeben können, müssen während der Laufzeit Sichtbarkeit von Variablen und Zwischenergebnissen für den Nutzer genau kontrolliert und unter Umständen beschränkt werden, da sonst unerwartetes Verhalten und Exceptions entstehen können, indem die zugegriffenen Werte gegebenenfalls nicht in der aktuellen Iteration existieren.

Einige der für rationale Zahlen zur Verfügung stehenden Funktionen, wie der Vergleich zweier Zahlen, sind mit reellen Zahlen nicht ohne weiteres möglich. Dies gilt insbesondere für den Test auf Gleichheit und die Vorzeichenfunktion *sign*. Bei all diesen Funktionen handelt es sich im Reellen (und bei der `iRRAM`) um mehrwertige Funktionen, da sich das jeweilige Ergebnis mit veränderter Präzision in der Darstellung der Zahlen ändern kann. Dieses Problem wird in `hotm` durch den `SignType` adressiert. Zusätzlich zu den Werten 'positiv' (=POS) und 'negativ' (=NEG), kann die Vorzeichenfunktion *sign* den Wert 'ambivalent' (=AMBI) ausgeben, wenn nicht entscheidbar ist, wo genau die reelle Zahl um die Null liegt. Hierfür erhält die Vorzeichenfunktion einen Parameter, der den Bereich der Unsicherheit definiert. Ist der Ausgabewert 'ambivalent', so wird in den Funktionen, welche die Vorzeichenfunktion aufrufen, der schlechteste Fall im Hinblick auf die Genauigkeit, beziehungsweise die Intervallbreite des Ergebnisses angenommen.

Eine weitere Besonderheit ergibt sich aus dem Aufbau der Zahlen. Es entstehen zwei Intervall-‘Ebenen’: Zum Einen, die Darstellung des Koeffizienten als Intervall aus Mitte und Radius. Zum Anderen die Darstellung von Mitte und Radius, als `iRRAM-REAL`, jeweils wiederum als Intervall mit Wert und Fehler, wie in Grafik 3.1 zu sehen ist. Dies sorgt für eine recht hohe Komplexität, allerdings lässt sich die Ungenauigkeit sehr genau steuern, indem zum Beispiel der Rechenfehler des Mittelpunkts eines Koeffizienten auf den Radius ‘verlagert’ wird. So vergrößert sich zwar

der Radius des Koeffizienten, welcher dadurch ungenauer wird, jedoch verkleinert sich der Rechenfehler auf der Zahlenebene der REALs.

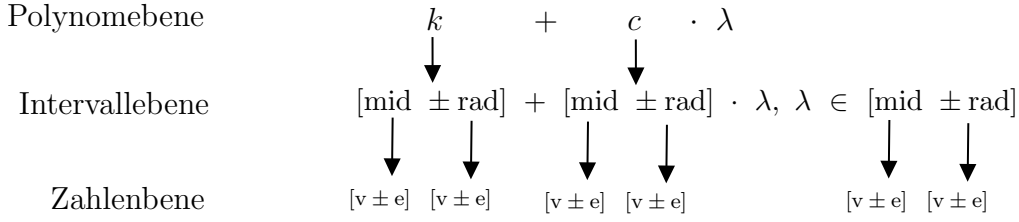


Abbildung 3.1: Ebenen der Polynomdarstellung mit REALs

### 3.1.1 Präzision

Werden zwei iRRAM-REALs  $x$  und  $y$  mit einer jeweiligen Präzision  $p_x$  und  $p_y$  verrechnet  $z = x \circ y$ , so entscheidet die Präzisions-Strategie der iRRAM `prec_policy`, ob für diese Operation absolute oder relative Genauigkeit verwendet wird. Zudem existiert eine globale, an die Iteration der iRRAM gebundene Genauigkeit `actual_precision`  $p_g$ , die sich mit jeder Iteration verringert, beginnend mit dem Wert  $p_{g0} = -50$ . Diese Werte sind negativ und repräsentieren, die Anzahl an Bits, für die eine Zahl genau bekannt ist. Bei  $z = x \circ y$  ist die Genauigkeit  $p_z$  durch

$$p_z = \begin{cases} \max(p_x, p_y, p_g) & \text{für absolute Genauigkeit} \\ \max(p_x, p_y, \max(p_x, p_y) - 50 + p_g) & \text{für relative Genauigkeit} \end{cases}$$

gegeben. Für die Anwendung in HOTM eignet sich die Verwendung von relativer Genauigkeit am besten, da die Manipulation der Fehlerbreite durch Cleaning große Unterschiede in der Genauigkeit zwischen Zahlen ergibt.

## 3.2 Intervallararithmetik

Arithmetik auf Taylormodellen zu betreiben bedeutet auf der untersten Ebene, mit Intervallen zu rechnen. Um diese wiederum als Zahlentyp zu verwenden, müssen die Operationen angepasst werden [Moor79].

### Grundrechenarten

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] + [y_1, y_2] &= [x_1 + y_1, x_2 + y_2] \\ [x_1, x_2] - [y_1, y_2] &= [x_1 - y_2, x_2 - y_1] \\ [x_1, x_2] \cdot [y_1, y_2] &= [\min(x_1 y_1, x_1 y_2, x_2 y_1, x_2 y_2), \max(x_1 y_1, x_1 y_2, x_2 y_1, x_2 y_2)] \\ [x_1, x_2] / [y_1, y_2] &= [\min(x_1 / y_1, x_1 / y_2, x_2 / y_1, x_2 / y_2), \max(x_1 / y_1, x_1 / y_2, x_2 / y_1, x_2 / y_2)] \end{aligned}$$

### Potenzfunktion

Die Potenzfunktion unterscheidet zwischen geradem und ungeradem Exponenten.

$$[x_1, x_2]^n = \begin{cases} [x_1^n, x_2^n] & \text{falls } x_1 > 0 \text{ oder } n \text{ ungerade;} \\ [x_2^n, x_1^n] & \text{falls } x_2 < 0 \text{ und } n \text{ gerade,} \\ [0, \max(x_1^n, x_2^n)] & \text{falls } 0 \in [x_1, x_2] \text{ und } n \text{ gerade;} \end{cases}$$

## Kehrwert

Der Kehrwert eines Intervalls kann nur bestimmt werden, wenn es nicht die 0 enthält:

$$1/[x_1, x_2] = [1/x_2, 1/x_1]$$

Wenn  $x_1 \leq 0 \leq x_2$ , bedeutet das, dass für ein  $x \in [x_1, x_2]$ ,  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x_2}$  oder  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x_1}$  gelten muss und das Intervall damit unbegrenzt ist.

Die im Basisprogramm `tangentspace` vorhandene Implementierung wurde erweitert, um Punktintervalle gesondert zu behandeln und die nun auf reellen Zahlen basierenden Intervalldefinitionen zu verwenden. Dies hat zur Folge, dass die Mehrwertigkeit der Vorzeichenfunktion berücksichtigt werden muss. Tritt der Fall der Unsicherheit ein, so muss mit einer Überschätzung gerechnet werden, die in jedem Fall korrekt ist.

## 3.3 Polynomarithmetik

Die Verwendung von Geobuckets ist eine Methode, die Addition [Yan98] und Multiplikation [MoPe07] zweier Polynome effizient zu gestalten, indem die Zahl der dafür nötigen Monomvergleiche reduziert wird.

### 3.3.1 Polynomaddition

Die Addition zweier Polynome  $p_1$  und  $p_2$  stellt ein Zusammenfügen zweier Listen von Monomen (*Merge*) dar. Sind diese geordnet, so sind im schlimmsten Falle  $\#p_1 + \#p_2$  Vergleiche nötig, während es für ungeordnete Polynome  $\#p_1 \cdot \#p_2$  sind, da alle Monome während des Vorgangs miteinander verglichen werden müssen. Die hierfür verwendete partielle Ordnung  $\succ$  sortiert die Monome nach dem Index der Variablen und deren Exponenten:

- $\lambda_1 \succ \lambda_2 \succ \dots \succ \lambda_k$
- $\lambda_n^i \lambda_m^j \succ \lambda_n^{i'} \lambda_m^{j'}$  für  $n > m$ , falls
  - $i > i'$ , oder
  - $i = i'$  und  $j > j'$

Bei einer Gleichheit der Monome werden diese zusammengefügt und die Koeffizienten addiert.

Algorithmus 5 erzeugt aus zwei nach der oben definierten Ordnung  $\succ$  sortierten Polynomen wiederum ein sortiertes Polynom. Endet die While-Schleife in Zeile 2, so ist im Regelfall eines der Polynome noch nicht gänzlich betrachtet, was bedeutet, dass alle übrigen Monome in diesem Polynom (im Hinblick auf  $\succ$ ) kleiner sind, als die des anderen Summanden und daher dem Ergebnispolynom angehangen werden können, ohne sie weiter zu betrachten.

### 3.3.2 Polynommultiplikation

Betrachtet man die Summe dreier Polynome  $p_1 + p_2 + p_3$  mit  $\#p_1 \gg \#p_2 = \#p_3 = 1$ , benötigt das Aufsummieren von links nach rechts bis zu  $2\#p_1 + 1$  Vergleiche, da mit dem oben verwendeten Additionsverfahren zweifach in  $p_1$  eingefügt wird und potentiell jedes Monom miteinander verglichen werden muss<sup>1</sup>. Summiert man jedoch von rechts nach links so werden lediglich  $\#p_1 + 2$  Vergleiche benötigt. Nach dieser Idee kann die Anzahl der Monomvergleiche reduziert werden, indem zunächst Polynome gleicher Länge miteinander addiert werden.

Um die oben (3.3.1) definierte Ordnung  $\prec$  auf dem Polynom  $p = p_1 \cdot p_2$  zu erhalten, müssen die  $n \cdot m$  Monome ( $n := \#p_1, m := \#p_2$ ), die bei der Multiplikation entstehen, sortiert werden. Werden diese sequentiell zu  $p$  hinzugefügt bedeutet das 2 Vergleiche, dann 3, dann 4, und so weiter, bis hin zu  $nm$  Vergleichen:

$$2 + 3 + 4 + 5 + \dots + nm = \frac{nm \cdot (nm + 1)}{2} - 1$$

So ergibt sich für die naive Multiplikation eine quadratische Laufzeit in  $O$ -Notation von  $O(nm + (nm)^2)$ . Mit Geobuckets werden die Zwischenergebnisse der Polynommultiplikation in geometrisch wachsenden 'Buckets' gespeichert. Hat ein Bucket seine Kapazität erreicht, wird das Polynom zum nächst größeren Bucket hinzuaddiert. Der Unterschied zum Originalalgorithmus besteht darin, dass die Größe der hinzukommenden Polynome bereits bekannt ist und die Bucketkapazität dementsprechend angepasst werden kann. Algorithmus 4 zeigt die in HOTM implementierte Version der Geobucketmultiplikation. Durch den Teile und Herrsche Ansatz, kann die Multiplikation mit Geobuckets so in  $O(nm \log nm)$  durchgeführt werden [MoPe07].

---

<sup>1</sup> $\#p$  liefert die Anzahl an Monomen des Polynoms  $p$

## 3.4 Taylormodelle

Taylormodelle bestehen in HOTM aus einer Liste von nach der Ordnung  $\succ$  (siehe 3.3.1) sortierten Monomen. Für die Supportintervalle der Fehlersymbole wird eine statische Liste, für die Grenzwerte der Housekeeping-Methoden und den Index neuer Fehlersymbole jeweils statische Variablen angelegt.

### 3.4.1 Housekeeping-Methoden

Die Housekeeping-Methoden Splitting und Sweeping werden in [BrKM15] beschrieben und dienen der Kontrolle der Intervallkoeffizienten und deren Wachstum. Wann die Methoden angewandt werden, wird durch die manuell justierbaren Parameter `MACRO_THRESHOLD` für Splitting und `MICRO_THRESHOLD` für Cleaning festgelegt. Da für diese beiden Methoden Vergleiche reeller Zahlen nötig sind, um das Überschreiten eines Grenzwertes zu bestimmen, werden die Zahlen mit Funktionen der `iRRAM` in rationale Approximationen zerlegt.

Ziel der Housekeeping-Methoden ist, eine Balance zwischen der Breite der Intervallkoeffizienten und dem Erhalt von Abhängigkeitsinformationen durch längere Polynome, also mehr Fehlersymbolen, zu halten, sodass die Monomzahl und der Informationsverlust gleichsam klein bleiben.

#### Cleaning

Wie oben beschrieben, ergibt die Verwendung der `iRRAM-REALs` als Intervallgrenzen zweistufige Intervalle mit der Zahlen- und Intervallebene (siehe Abbildung 3.1). Mit fortlaufenden Rechnungen wächst die Breite der Intervalle auf Zahlenebene kontinuierlich und kann ohne weitere Methoden nur durch ein Erhöhen der verwendeten Präzision wieder verringert werden, beziehungsweise durch eine Iteration der `iRRAM`. *Cleaning* verlagert den Rechenfehler der Zahlenebene auf die Intervallebene und macht ihn damit auch für andere Housekeeping-Methoden sichtbar. Das Intervall  $I = [m \pm r]$  mit  $m = [c_m \pm \varepsilon_m]$  und  $r = [c_r \pm \varepsilon_r]$  wird um  $\varepsilon_m$  und  $\varepsilon_r$  vergrößert, sodass das  $I$  zwar wächst, jedoch dessen Endpunkte exakt sind:

$$\begin{aligned} [[c_m \pm \varepsilon_m] \pm [c_r \pm \varepsilon_r]] &\rightsquigarrow [[c_m \pm 0] \pm [c_r + \varepsilon_m + \varepsilon_r \pm 0]] \\ &= [c'_m \pm \underbrace{c'_r}_{c_m + \varepsilon_m + \varepsilon_r}] \end{aligned}$$

Algorithmus ?? zeigt eine vereinfachte Darstellung der Cleaning Prozedur.

#### Splitting

Durch Cleaning, Sweeping oder eine Initialisierung der Taylormodelle mit einer gewissen Breite wachsen die Radii der Koeffizienten im Laufe einer Berechnung auch auf Intervallebene. Um die Überschätzung, die durch Intervallarithmetik entsteht zu kontrollieren, kann durch *Splitting* ein Monom in zwei Monome mit Punktintervallen als Koeffizienten und einem neuen Fehlersymbol aufgeteilt werden:

$$[\tilde{c}_n \pm \varepsilon_n] \rightarrow [\tilde{c}_n \pm 0] + [\varepsilon_n \pm 0] \cdot \lambda_n, \lambda_n \in [0 \pm 1]$$

Dadurch erhöht sich der Grad des Polynoms, jedoch verringert sich die Überschätzung durch Intervallarithmetik. Eine Alternative das Splitting zu realisieren ist, den Fehler statt wie in [BrKM15] im Koeffizienten des neuen Monoms, im neuen Fehlersymbol zu kodieren:

$$[\tilde{c}_n \pm \varepsilon_n] \rightsquigarrow [\tilde{c}_n \pm 0] + [1 \pm 0] \cdot \lambda_n, \lambda_n \in [0 \pm \varepsilon_n]$$

Dies hat den Vorteil, dass die Größe der Fehlersymbole, beziehungsweise deren Supportintervall beim Sweeping berücksichtigt werden kann und somit die Basis für die verwendete Heuristik bildet. Algorithmus 2 zeigt eine vereinfachte Darstellung der Splitting Prozedur.

### Sweeping

Cleaning und Splitting sorgen dafür, dass die Intervallbreite der Koeffizienten klein bleibt, jedoch erhöht sich der Grad der Polynome, was zum Beispiel bei der Multiplikation von Taylormodellen zu Ineffizienz durch die exponentiell wachsende Anzahl an Monomen führt. Um diesem Effekt entgegenzuwirken, kann mit *Sweeping* ein Fehlersymbol durch sein Supportintervall ersetzt werden:

$$c_n \lambda_i^k \rightsquigarrow c_n s_i \lambda_i^{k-1}$$

Hierbei ist zu beachten, dass das  $n$ -fache Sweepen eines Fehlersymbols, welches die 0 enthält, mit  $n$  gerade eine geringere Breite in den Koeffizienten einführt, als  $n$  ungerade (siehe oben 3.2). Daraus ergeben sich zwei *Sweeping-Strategien*.

**square\_only** Die Sweeping-Strategie `square_only` beschränkt das Sweeping auf gerade Potenzen. So wird die angestrebte Reduktion des Grades eines Monoms nur erreicht, wenn alle Variablen einen geraden Exponenten haben, wie in Algorithmus 3 zu sehen ist.

**square\_first** Mit `square_first` wird der angestrebte Grad erreicht, indem zunächst möglichst viele Fehlersymbole quadratisch gesweept werden. Die übrig gebliebene Differenz zwischen Zielgrad und dem tatsächlichen Grad wird durch einfaches Sweeping entfernt.

Der Aufruf der Methode erhält in HOTM drei Parameter; das zu reduziere Taylormodell, den Grad, auf das Taylormodell durch Sweeping reduziert werden soll und die Strategie:

```
1 tmsimple x;
2 x = sweep_to(x, 2, SQUARE_ONLY);
```

Listing 3.1: Beispielaufruf der Sweeping-Routine

### 3.4.2 Darstellung der Taylormodelle

Die grafischen Darstellungen der Taylormodelle in dieser Arbeit wurden mit `gnuplot` [WiKm20] erstellt und zeigen je eine Übermenge des tatsächlichen Taylormodells. Eine Darstellung eines Taylormodells entsteht, indem für jedes der  $k$  Fehlersymbol aus  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  ein Wert festgelegt und dann das Taylormodell evaluiert

wird. Um eine Übermenge zu zeichnen muss der gesamte Wertebereich eines jeden Fehlersymbols abgedeckt werden. In `hotm` geschieht das, indem für eine gegebene *Auflösung*  $a \in \mathbb{N}$  die Supportintervalle  $S = (s_1, \dots, s_k)$  in jeweils  $a$  Intervalle geteilt und für jede Kombination mit eingesetzten Werten ein von den anderen unabhängiges Rechteck gezeichnet wird. So ergeben sich für Taylormodelle mit  $k$  Variablen  $a^k$  Rechtecke. Eine solche Darstellung wird in [BrKM15] als  $image(T) \subseteq \mathbb{R}^d$  definiert. Die hier verwendete Darstellung wird um die verwendete Auflösung erweitert:  $image_{acc}(T, a)$ .

Seien  $T_1$  und  $T_2$  Taylormodelle mit  $k = 2$  Variablen, die eine Fläche aufspannen, bei denen die initialen Fehlersymbole erhalten bleiben und keine neuen Fehlersymbole eingeführt werden, so kann durch die Abhängigkeitsinformation der Fehlersymbole Ursprung und Abbild der einzelnen Regionen dieser Fläche farblich dargestellt werden. Abbildung 3.2 zeigt eine Iteration der Hénon-Abbildung eines Rechtecks mit verschiedenen Auflösungen. Es ist gut zu erkennen, dass die gröberen Auflösungen, die feinere überdeckt und  $image_{acc}(T_1, 100) \times image_{acc}(T_2, 100) \subseteq image_{acc}(T_1, 10) \times image_{acc}(T_2, 10) \subseteq image_{acc}(T_1, 2) \times image_{acc}(T_2, 2)$  gilt. Durch die Einfärbung der Rechtecke können verschiedene Effekte beobachtet werden:

1. Die Rechtecke überlagern sich im Abbild, obwohl sie sich im Ursprung nicht überschneiden und die Hénon-Abbildung an sich eindeutig invertierbar ist. Grund hierfür ist die entstehende Überschätzung durch Intervallarithmetik, die besonders bei Multiplikation, beziehungsweise Quadrierung der Intervalle zum Tragen kommt.
2. Das in den Grafiken eingezeichnete Tetragon stellt die Fangzone  $R$  für die hier verwendeten Parameter  $a = 1.4$  und  $b = 0.3$  dar. Mit Hilfe der Einfärbung ist erkennbar, wie Regionen außerhalb von  $R$  wiederum außerhalb abgebildet werden, während innerhalb liegende diese nach der Abbildung nicht verlassen.

---

**Algorithm 1:** Algorithmus für Cleaning eines Taylormodell

---

**Eingabe :** Taylormodell  $T$ : Liste von  $n$  Koeffizienten  $c_i = [m_i \pm r_i]$  und

$m_i = [\hat{c}_{m_i} \pm \varepsilon_{m_i}]$ ,  $r_i = [\hat{c}_{r_i} \pm \varepsilon_{r_i}]$ , Grenzwert  $\delta_c$

**Ausgabe:** Taylormodell  $T'$ : Liste von Monomen mit Punktintervallkoeffizienten

```

1   $T' \leftarrow T$  (Kopiere das alte Taylormodell)
2  forall  $i \in \{1, \dots, n\}$  do
3      if  $\varepsilon_{m_i} > \delta_c$  then (Überschreitet Fehler des Mittelpunktes den Grenzwert)
4           $r'_i \leftarrow r_i + \varepsilon_{m_i}$  (Erweitere das Intervall um den Fehler)
5           $m'_i \leftarrow [c_{m_i}]$  (Setze die Intervallbreite des Mittelpunktes auf 0)
6      end
7      if  $\varepsilon_{r_i} > \delta_c$  then (Überschreitet Fehler des Radius' den Grenzwert)
8           $r'_i \leftarrow r_i + \varepsilon_{r_i}$  (Erweitere das Intervall um den Fehler)
9           $r'_i \leftarrow [c_{r_i}]$  (Setze die Intervallbreite des Radius' auf 0)
10     end
11 end
12 return  $T'$  ( $T'$  hat Punktintervalle oder sehr kleine Intervalle auf Zahleneben)

```

---



**Algorithm 2:** Algorithmus für Splitting

**Eingabe:** Taylormodell  $T$ : Liste von  $n$  Monomen  $m_i = c_i \cdot \lambda^i$  mit Koeffizienten  $c_i = [\hat{c}_i \pm \varepsilon_i]$  und der Liste der Fehlersymbole  $\lambda^i$ , Grenzwert für Splitting  $\delta_s$

**Ausgabe:** Taylormodell  $T'$ : Liste von Monomen mit Punktintervallkoeffizienten

```

1 forall  $i \in \{1, \dots, n\}$  do
2   if  $\varepsilon_i > \delta_s$  then                                     (Die Intervallbreite überschreitet den Grenzwert)
3      $s_{new} \leftarrow [0 \pm \varepsilon_i]$                                (Führe neues Fehlersymbol ein)
4      $S \leftarrow S \cup s_{new}$                                    (Erweitere die Liste der Supportintervalle)
5      $m'_i \leftarrow [\hat{c}_i] \cdot \lambda^i$                              (Entferne den Radius von  $m_i$ )
6      $m''_i \leftarrow [1] \cdot \lambda^i \lambda_{new}$                      (Erstelle ein neues Monom mit neuem Fehlersymbol)
7      $T' \leftarrow T' + m'_i + m''_i$ 
8   else
9      $T' \leftarrow T' + m_i$ 
10  end
11 end
12 return  $T'$                                                  (Das neue Polynom hat maximal  $2n + 1$  Monome )

```

**Algorithm 3:** Algorithmus für Sweeping mit der Beschränkung auf quadratisches Sweeping (square\_only)

**Eingabe:** Taylormodell  $T$ : Liste von  $n$  Monomen  $m_i = c_i \cdot \lambda^i$  mit Koeffizienten  $c_i = [\hat{c}_i \pm \varepsilon_i]$  und der Liste der Fehlersymbole  $\lambda^i$ , Zielgrad  $\gamma$

**Ausgabe:** Taylormodell  $T'$ : Liste von Monomen mit Punktintervallkoeffizienten

```

1 forall  $i \in \{1, \dots, n\}$  do
2    $o \leftarrow \sum_{\lambda_j^l \in \lambda^i} l$                                (Bestimme den Grad des Monoms)
3   if  $o \leq \gamma$  then
4      $T' \leftarrow T' + m_i$    (Überspringe dieses Monom, wenn der Zielgrad bereits korrekt ist)
5   else
6      $r \leftarrow o - \gamma$    (Bestimme die nötige Gradreduktion, um das Ziel zu erreichen)
7      $c'_i \leftarrow c_i$ 
8      $\lambda^{i'} \leftarrow \{\lambda_j^l \mid \lambda_j^l \in \lambda^i \wedge |s_j| < |s_{j+1}|\}$  (Sortiere die  $\lambda$  aufsteigend nach ihrer Größe)
9     forall  $\lambda_j^l \in \lambda^{i'}$  do                                     (Iteriere über die geordnete Liste von  $\lambda$ )
10       $p \leftarrow \min(l, r)$    (Bestimme die größtmögliche Reduktion für dieses  $\lambda$ )
11      if  $p > 2$  and  $2 \nmid p$  then  $p \leftarrow p - 1$    (Wähle geraden Exponenten)
12       $c'_i \leftarrow c'_i \cdot s_j^p$    (Sweep den einen Teil des Fehlersymbols in den Koeffizienten)
13       $l \leftarrow l - p$    (Verringere den Exponenten des reduzierten  $\lambda$ )
14       $r \leftarrow r - p$    (Aktualisiere den Wert der noch nötigen Gradreduktion)
15      if  $r < 2$  then break   (Keine quadratische Reduktion mehr möglich)
16    end
17     $\lambda^{i'} \leftarrow \{\lambda_j^l \mid \lambda_j^l \in \lambda^{i'} \wedge \lambda_j \succ \lambda_{j+1}\}$    (Stelle die Ordnung  $\succ$  wieder her)
18     $T' \leftarrow T' + c'_i \cdot \lambda^{i'}$ 
19  end
20 end
21 return  $T'$ 

```

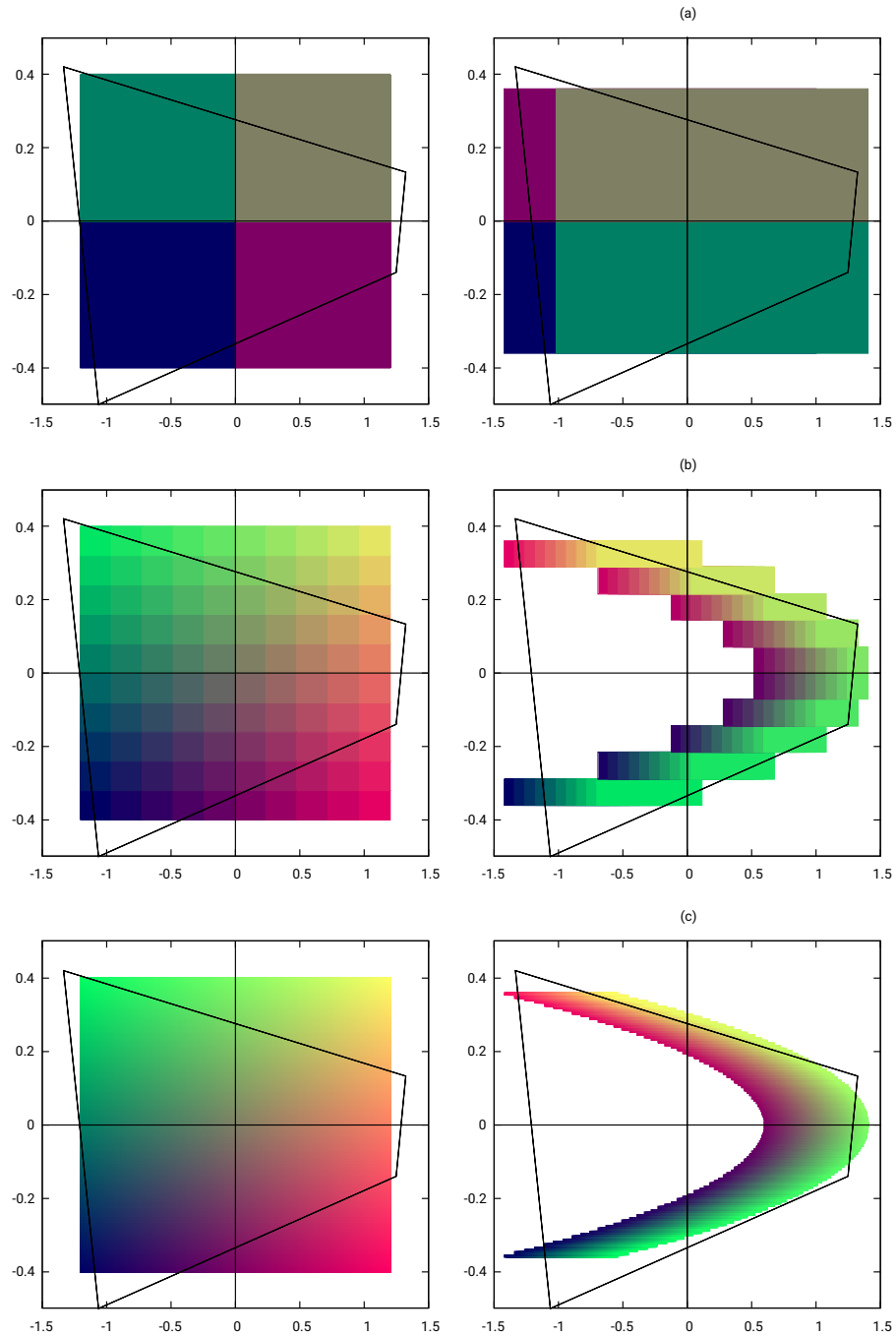


Abbildung 3.2: Jede Zeile zeigt eine einfache Abbildung der Rechtecke durch die Hénon-Abbildung mit  $a = 1.4$  und  $b = 0.3$  mit verschiedenen Auflösungen für die Darstellung. (a): 4 Rechtecke; (b): 100 Rechtecke, (c): 10000 Rechtecke. Das Tetragon stellt die Fangzone für die verwendeten Parameter dar.

## 4. Evaluation

Werden die Initialwerte für Iterationen der Hénon-Abbildung  $(x_0, y_0)$  als Taylormodelle mit Intervallen definiert, kann eine Fläche beschrieben werden, die durch die Abbildung gespiegelt, gedehnt und verzerrt wird. Liegt diese für  $a = 1.4$  und  $b = 0.3$  komplett innerhalb der Fangzone  $R$ , so wird jeder Punkt in der Fläche wiederum nach  $R$  abgebildet.

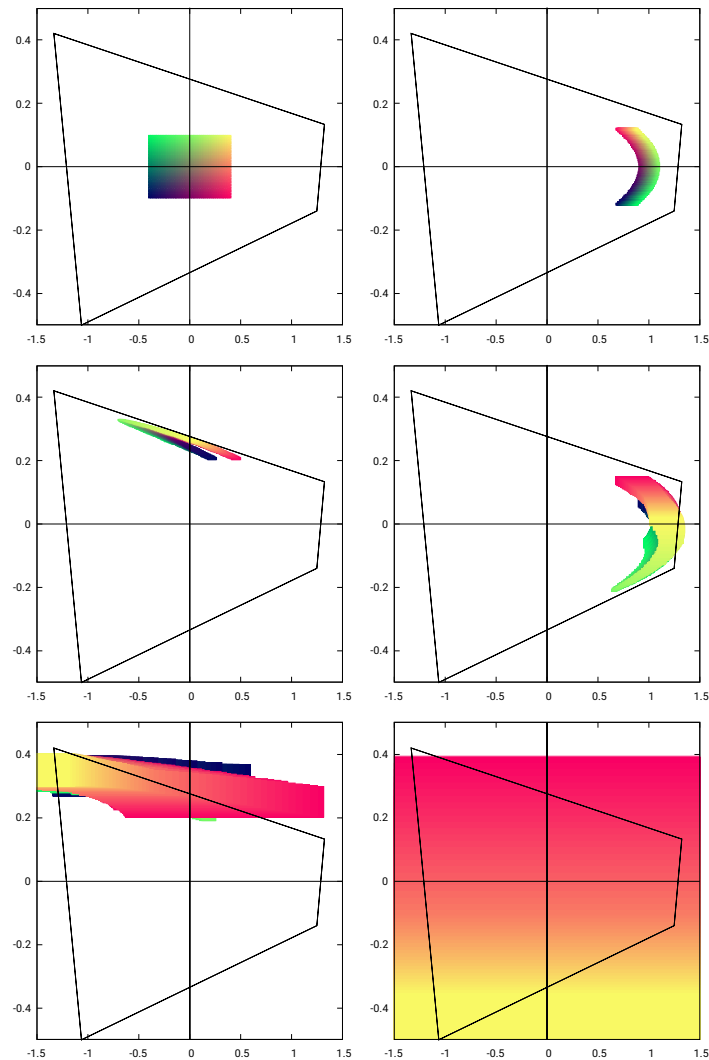


Abbildung 4.1: Iterationen der Hénon-Abbildung ausgehend von einem größeren Rechteck

Eine Abbildung der Fläche im Ganzen führt jedoch zu einer Überschätzung, die in jeder Iteration zunimmt, da nun mit Intervallen statt mit Punkten gerechnet wird. Abbildung 4.1 zeigt pro Graph eine Iteration mit

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 + 1 \cdot \lambda_1 & (\lambda_1 \in [0 \pm 0.4]) \\y_0 &= 0 + 1 \cdot \lambda_2 & (\lambda_2 \in [0 \pm 0.1])\end{aligned}$$

und der Fangzone als schwarzes Tetragon. Es ist erkennbar, dass das Rechteck nach wenigen Iterationen die Fangzone verlässt und einige Intervalle ein starkes Rauschen verursachen. Abbildung 6.1 zeigt Iterationen mit kleineren initialen Intervallen, wodurch die Überschätzung erst zu einem späteren Zeitpunkt zu groß wird. Um dem Wachstum der Intervalle entgegenzuwirken und die Berechnung der Hénon-Abbildung auch für solche Flächen mit höheren Iterationszahlen zu ermöglichen, könnten die Taylormodelle in Partitionen aufgeteilt werden. Die kleinste Partitionierung wäre die Aufteilung der Fläche in unendlich viele Punkte, was nicht praktikabel wäre, allerdings hohe Iterationszahlen ermöglichen, wie in Abbildung 2.2 zu sehen ist. Das andere Extrem stellen große Intervalle, beziehungsweise keine Partitionierung dar, was im Vergleich nur einen Bruchteil des Rechenaufwandes bedeutet, jedoch schnell zu starker Überschätzung führt.

In diesem Kapitel wird untersucht, wie sich die HOTM bei verschiedenen Intervallgrößen verhalten und welche Konfiguration der Parameter für die Housekeeping-Methoden und den Taylormodellen selbst zu einer möglichst kleinen Überschätzung führt. Der Housekeeping-Vorgang der in jeder Iteration bei den Taylormodellen angewandt wird besteht aus vier Schritten:

1. **(Sweeping)** Reduktion des Taylormodells bis zum angegebenen Grad, je nach Strategie
2. **(Sweeping überschüssiger Fehlersymbole)** Entfernen aller Fehlersymbole bis auf die  $n$ -größten (abhängig von deren Support-Space)
3. **(Cleaning)** Verlagern der durch die Schritte 1 und 2 entstandenen Rechenfehler auf der Ebene der iRRAM-REALs auf die Radii der Intervalle
4. **(Splitting)** Einführen neuer Fehlersymbole für Monome, deren Koeffizienten durch die Schritte 1-3 zu stark gewachsen sind.

Die Implementierung nichtlinearer Taylormodelle ergibt eine Vielzahl von Konfigurationsmöglichkeiten und damit einen großen Suchraum nach der optimalen Einstellung:

- Grenzwert für Cleaning  $\delta_c$ , Splitting  $\delta_s$
- Grad der Reduktion durch Sweeping
- Anzahl der zu erhaltenden Fehlersymbole
- Strategie beim Sweeping
- Heuristik für die Reihenfolge, in der Fehlersymbole gesweept werden

- Vorgehen beim Splitting
- Definition des initialen Taylormodells

Diese Konfigurationen können in HOTM als JSON-Datei mit Hilfe einer JSON-Bibliothek<sup>1</sup> eingelesen und verarbeitet werden, um wiederholte Durchläufe mit leicht veränderten Parametern oder Batch-Runs zu vereinfachen. Listing 6.1 zeigt ein Beispiel einer Konfigurationsdatei, mit der versuchsweise 1000 Iterationen der Hénon-Abbildung berechnet werden sollen.

## 4.1 Housekeeping-Grenzwerte

Der Grenzwert einer Housekeeping-Methode gibt an ab welchem Wert die jeweilige Methode angewandt wird. Bei einem Intervall in HOTM  $I = [m \pm r]$  mit  $m = [c_m \pm \varepsilon_m]$  und  $r = [c_r \pm \varepsilon_r]$  als iRRAM-REALs wird

- Cleaning angewandt, wenn  $\varepsilon_m < \delta_c$  oder  $\varepsilon_r < \delta_c$  gilt und
- Splitting angewandt, wenn  $c_m < \delta_s$  oder  $c_r < \delta_s$  gilt.

Um diese Werte zu untersuchen, wurde betrachtet, wie sich die Größe des Rechtecks, welches durch die Intervalle  $x$  und  $y$  aufgespannt wird, abhängig von den Grenzwerten  $\delta_c$  und  $\delta_s$  entwickelt, beziehungsweise, wieviele Iterationen der Hénon-Abbildung bei einer festen Genauigkeit der iRRAM-REALs möglich sind, bis das Rechteck eine Fläche von  $> 2^{-5}$  erreicht hat<sup>2</sup>.

1000 Bits Präzision $x = [0 \pm 2^{-1000}], y = [0 \pm 2^{-1000}]$			10000 Bits Präzision $x = [0 \pm 2^{-10000}], y = [0 \pm 2^{-10000}]$		
$\delta_c$ ( $2^{-\delta_c}$ )	$\delta_s$ ( $2^{-\delta_s}$ )	Iterationen	$\delta_c$ ( $2^{-\delta_c}$ )	$\delta_s$ ( $2^{-\delta_s}$ )	Iterationen
-	-	451	-	-	4360
10	10	162	100	100	1463
10	5	160	100	50	1450
100	100	273	1000	1000	2641
100	50	258	1000	500	2530
500	500	794	5000	5000	7849
500	250	746	5000	2500	7289
1000	1000	1432	10000	10000	14455
1000	500	1317	10000	5000	13401

Tabelle 4.1: Berechnung der Fläche des Rechtecks mit verschiedenen Grenzwerten für Cleaning  $\delta_c$  und Splitting  $\delta_s$  und festgelegter Präzision.

Tabelle 4.1 zeigt experimentelle Ergebnisse für  $x_0 = 0 + 1 \cdot \lambda_1$  und  $y_0 = 0 + 1 \cdot \lambda_2$  mit  $\lambda_1, \lambda_2 \in [0 \pm \varepsilon]$ . Sowohl für 1000, als auch für 10000 Bits Genauigkeit reagiert

<sup>1</sup><https://github.com/nlohmann/json> (Stand Dezember 2020)

<sup>2</sup>Ab einer Fläche von zirka  $2^{-5}$  ist die Überschätzung der Intervalle zu groß und wächst innerhalb weniger Iterationen ( $< 10$ ) gegen  $\infty$ .

das Ergebnis sehr sensibel auf die Grenzwerte der Housekeeping-Methoden. Falsch gewählte Werte vergrößern sogar die entstandene Überschätzung im Vergleich zu einer Berechnung ohne Cleaning und Splitting, jeweils in Zeile 1 der Tabellen zu sehen. Werden die Grenzwerte durch die iRRAM-Präzision bestimmt, so bleibt der Fehler am längsten klein und die höchste Iterationszahl ist möglich.

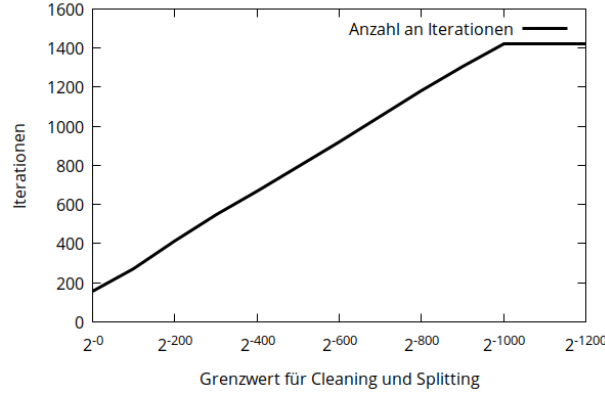


Abbildung 4.2: Iterationszahl der Hénon-Abbildung mit fester Genauigkeit von 1000 Bits.

Wie in Abbildung 4.2 zu sehen ist, hat eine Definition der Grenzwerte unter die zugrunde liegende Genauigkeit keinen Effekt mehr auf die Performanz der Berechnung und die Iterationszahl erhöht sich nicht weiter. Der Grund hierfür ist, dass die Anwendung von Methoden der iRRAM auf die sehr kleinen Intervalle zu einer Skalierung auf die gegebene Genauigkeit führt.

## 4.2 Sweeping

Für eine Sweeping-Konfiguration kommen drei einander beeinflussende Parameter in Betracht: die Sweeping-Strategie, die Gradreduktion und die Anzahl der zu erhaltenen Fehlersymbole. Abbildung 4.3 zeigt die Performanz der Berechnung der Hénon-Abbildung, gemessen an der erreichten Iterationszahl mit statischer Präzision in verschiedenen Fällen. Wie zuvor ist die Berechnung beendet, sobald die Fläche des Rechtecks einen Schwellenwert überschreitet. Zu sehen ist, bei welcher Kombination von Parametern für Sweeping (Schritt 1) und Sweeping überschüssiger Fehlersymbole (Schritt 2) die Überschätzung am langsamsten wächst und somit die meisten Iterationen errechnet werden können. Die Zeiteffizienz ist in diesem Falle kein Faktor. Es ist zu erkennen, dass sich die Graphen innerhalb derselben Sweeping-Strategie kaum unterscheiden. Eine Verzehnfachung des Exponenten in der Breite der Intervalle und der Bits für die Präzision verzehnfacht auch die erreichte Iterationszahl. Die besten Ergebnisse werden beim Beschränken auf **square\_only** (quadratisches Sweeping) für  $n = 3$  und Sweeping zum Grade 0; bei **square\_first** für  $n = 1$ ,  $n = 4$  und Sweeping zum Grade 3 erreicht. Insgesamt wird jedoch mit **square\_only** zum Grade 0, also einem Sweeping bis zu einem Taylormodell, dessen Monome Variablen mit höchstens Grad 1 haben, die höchste Iterationszahl erzielt:

$$c \cdot \lambda_1^3 \lambda_2^2 \lambda_3^1 \lambda_4^3 \xrightarrow[\text{square\_only}]{\text{sweep to 0}} c' \cdot \lambda_1^1 \lambda_2^0 \lambda_3^1 \lambda_4^1$$

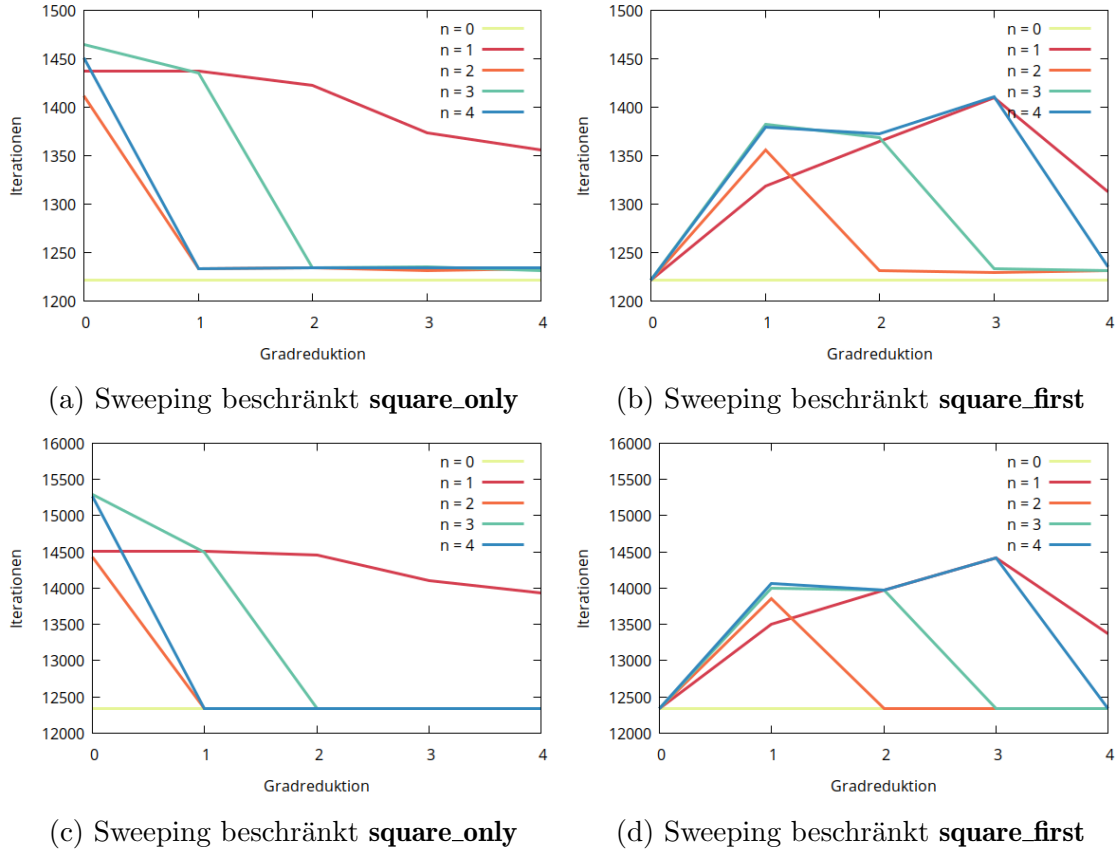


Abbildung 4.3: Anzahl an Iterationen mit Erhalt der  $n$  größten Fehlersymbole. (a) (b): 1000 Bits Präzision,  $x_0 = y_0 = [0 \pm 2^{1000}]$ . (c)(d): 10000 Bits Präzision,  $x_0 = y_0 = [0 \pm 2^{10000}]$

Im Vergleich mit rein linearen Taylormodellen zeigt sich eine Verbesserung (siehe Abbildung 4.4). Der Unterschied besteht darin, dass die nichtlinearen Taylormodelle während der Berechnung und besonders während der Multiplikation Punktintervalle erhalten können und sich stattdessen der Grad und die Länge des Polynoms erhöht. Nach jeder Iteration werden dann verschiedene Monome durch Gradreduktion vereint, wobei die Intervalle breiter werden. Im nächsten Schritt wird der Grad dann durch Splitting auf den Monomen um maximal 1 erhöht und es liegen wieder Punktintervalle vor. Für lineare Taylormodelle steht lediglich das Splitting für den Kernel zur Verfügung, da sonst nichtlineare Polynome entstünden. Des Weiteren wird hier bereits während der Multiplikation gesweept und Punktintervalle werden zu regulären Intervallen. Die Performanz des Sweepings **square\_only** zum Grade 0 verbessert sich im Schnitt mit einer wachsenden Zahl der zu erhaltenen Fehlersymbole, wie in Abbildung 4.4 zu sehen ist. Jedes Fehlersymbol erhöht die Menge an erhaltener Abhängigkeitsinformation und sorgt dafür, dass ein Taylormodell dessen Ränder besser beschreiben kann. Allerdings stellt die Praktikabilität dieser Herangehensweise ein Problem dar, da so sehr große Polynome entstehen, die während einer Iteration der Hénon-Abbildung exponentiell in ihrer Länge wachsen.

Dieser Effekt ist in Tabelle 4.2 verdeutlicht. Eine Erhöhung der Anzahl der erhaltenen Fehlersymbole hat einen drastischen Einfluss auf die durchschnittliche Dauer einer Iteration in  $ms$ , bis das Programm bei größeren Werten quasi nicht mehr lauffähig ist ( $> 100ms$  pro Iteration). Betrachtet man nun das Verhältnis zwischen der

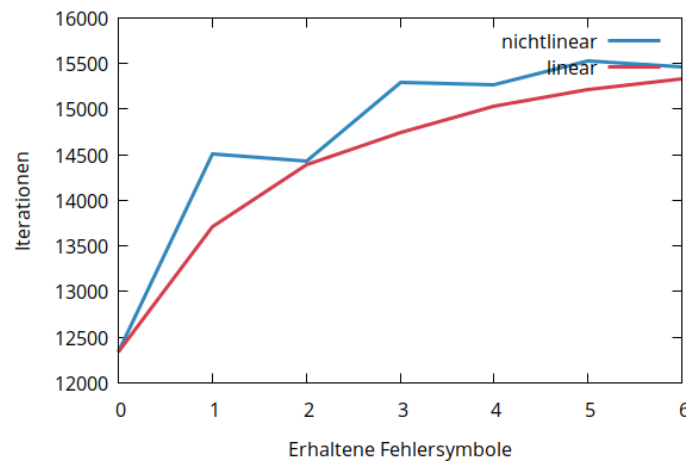


Abbildung 4.4: Gegenüberstellung von  $x_0 = y_0 = [0 \pm 2^{10000}]$  als lineare Taylormodelle und nichtlineare Taylormodelle mit quadratischem Sweeping zum Grade 0. Jeweils bleiben verschiedene Anzahlen von Fehlersymbolen pro Iteration erhalten. Gemessen wird die Iterationszahl der Hénon-Abbildung mit fester Genauigkeit von 10000 Bits, bis  $|x_n| \cdot |y_n|$  einen Grenzwert von  $2^{-6}$  überschreitet.

Verbesserung der Performanz (Abbildung 4.4) und der Verschlechterung der Laufzeit (Tabelle 4.2), so bildet das Setzen der erhaltenen Fehlersymbole auf 3 mit einem Zielgrade von 0 bei der Beschränkung auf quadratisches Sweeping einen guten Trade-off, weshalb diese Konfiguration als Voreinstellung für Sweeping in der Implementierung (Kapitel 4.7) vorgesehen ist.

Gradreduktion	Erhaltene Fehlersymbole pro Iteration				
	0	1	2	3	4
0	0.166	0.603	2.097	4.358	13.354
1	0.166	0.939	2.358	7.470	>100
2	0.166	1.645	5.750	20.339	>100
3	0.166	2.284	2.977	74.172	>100
4	0.166	2.658	3.622	>100	>100
<i>ms pro Iteration</i>					

Tabelle 4.2: Durchschnittliche Dauer einer Iteration der Hénon-Abbildung in *ms* mit Taylormodelle der Größe  $[0 \pm 2^{-10000}]$  bei festgelegter Präzision von 10000 Bits und 1000 Iterationen.

### 4.3 Cleaning

Durch die mehrstufige Intervallstruktur in den Koeffizienten der Polynome ist es mit Cleaning möglich, den Rechenfehler, beziehungsweise die Intervallbreite der Intervallgrenzen auf einer höheren Abstraktionsebene zu verwalten. Wie in Paragraph 3.4.1 beschrieben, wird das Intervall um die Intervallbreite des Mittelpunktes und des Radius' erweitert und schließt es somit komplett ein. Dies hat darüber hinaus



den Effekt, dass sämtlicher entstandene Rechenfehler durch Anwendung von Splitting reduziert werden kann.

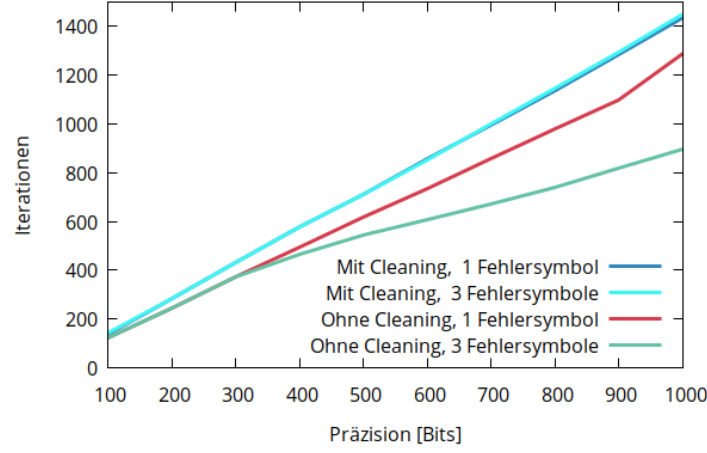


Abbildung 4.5: Iterationszahl der Hénon-Abbildung mit festem Radius der intialen Taylormodelle  $x_0 = y_0 = [0 \pm 2^{-1000}]$  mit wachsender Präzision, um den Effekt des Cleanings beschreiben.

Abbildung 4.5 zeigt die Auswirkung der Anwendung von Cleaning bei initialen Taylormodellen  $x_0, y_0$  der Breite  $2^{-1000}$  mit wachsender Genauigkeit. Cleaning sorgt für ein langsames Wachstum des Rechtecks  $|x_n| \cdot |y_n|$  nach  $n$  Iterationen im Vergleich zur Berechnung ohne Cleaning. Bei einer höheren Anzahl der erhaltenen Fehlersymbole pro Iteration wird der Effekt noch deutlicher, da nun mit deutlich längeren Polynomen gerechnet und dementsprechend mehr arithmetische Operationen auf den Koeffizienten angewandt werden. So bleibt zwar mehr Information über Form der Taylormodelle erhalten, jedoch dominiert die Überschätzung auf der Zahlenebene das Ergebnis beim Verzicht auf Cleaning, während sich die Performanz im anderen Fall leicht verbessert.

## 4.4 Splitting

Durch Splitting wird ein Monom mit Intervallkoeffizienten in zwei Monome mit einem neuen, noch nicht verwendeten Fehlersymbol und Punktintervallkoeffizienten aufgeteilt. Für diese Housekeeping-Methode wurden zwei Möglichkeiten betrachtet. Zum Einen die in [BrKM15] verwendete Definition des neuen Fehlersymbols als Einheitsintervall:

$$[c \pm \varepsilon] \xrightarrow[\text{split}]{} [c] + [\varepsilon] \cdot \lambda_{\text{new}}, \lambda_{\text{new}} \in [0 \pm 1] \quad (4.1)$$

Zum Anderen die Umlagerung des Radius  $\varepsilon$  in das neue Fehlersymbol:

$$[c \pm \varepsilon] \xrightarrow[\text{split}]{} [c] + [1] \cdot \lambda_{\text{new}}, \lambda_{\text{new}} \in [0 \pm \varepsilon] \quad (4.2)$$

Beim Sweeping hat sich gezeigt, dass die Überschätzung des Taylormodells bei einer Priorisierung kleinerer Fehlersymbole, beziehungsweise durch Erhalt von Fehlersymbolen mit größerem Support-Space, langsamer wächst. In einer linearen Implementierung der Taylormodelle mit Variante 4.1 wird eine solche Ordnung durch einen Vergleich der Koeffizienten hergestellt, da jedes Monom maximal ein Fehlersymbol enthalten kann. Ein nichtlineares Monom kann jedoch von mehreren Fehlersymbolen abhängen, wodurch die Information über die Größe des Fehlersymbols nicht im Koeffizienten kodiert werden kann und zudem innerhalb eines Monoms sortiert werden muss. Daher eignet sich Herangehensweise 4.2 für die Implementierung nichtlinearer Taylormodelle besser, als die Verwendung von Einheitsintervallen, wie in Abbildung 4.6 an einem Beispiel gezeigt wird. Hier werden beide Varianten auf die Entwicklung der Überschätzung von zwei Taylormodellen untersucht, wobei mit der Definition des Fehlersymbols als reguläres Intervall 4.2 mehr Iterationen der Hénon-Abbildung berechnet werden können, bis die Fläche des Rechtecks einen Schwellenwert, wie oben überschreitet.

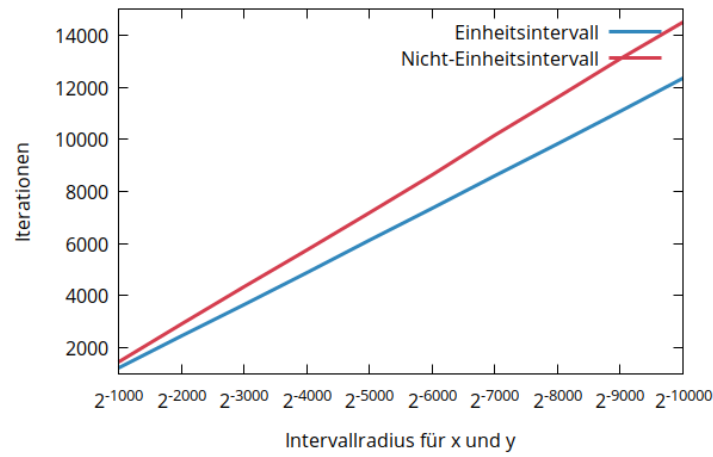


Abbildung 4.6: Iterationszahl der Hénon-Abbildung mit 10000 Bits fester Genauigkeit.

## 4.5 Initiales Taylormodell

Für die Hénon-Abbildung wird ein Punkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  wiederum in den  $\mathbb{R}^2$  abgebildet.  $x_0$  und  $y_0$  können nun als Taylormodelle verschiedener Form definiert werden:

$$[c] + [1] \cdot \lambda, \lambda \in [0 \pm \varepsilon] \quad (4.3)$$

$$[c] + [\varepsilon] \cdot \lambda, \lambda \in [0 \pm 1] \quad (4.4)$$

$$[0] + [c \pm \varepsilon] \cdot \lambda, \lambda \in [1] \quad (4.5)$$

$$[c \pm \varepsilon] \quad (4.6)$$

Die verschiedenen Taylormodelle wurden verwendet, um die Intervalle  $[0 \pm 2^{-1000}]$ , beziehungsweise  $[0 \pm 2^{-10000}]$  in  $x_0$  und  $y_0$  darzustellen. Tabelle 4.3 zeigt, wieviele Iterationen mit der jeweiligen Definition möglich sind, bis die Fläche des Rechtecks von  $|x| \cdot |y|$  einen Schwellenwert überschreitet.

	1000 Bit Präzision		10000 Bit Präzision	
Taylormodell	Iterationen	$ x  \cdot  y $	Iterationen	$ x  \cdot  y $
TM 4.3	1437	0.17	14506	0.78
TM 4.4	1227	0.49	12338	0.19
TM 4.5	1437	0.37	14505	0.17
TM 4.6	1437	0.35	14505	0.18

Tabelle 4.3: Berechnung der Fläche des Rechtecks mit verschiedenen Definitionen der initialen Taylormodelle für  $x$  und  $y$  bei festgelegter Präzision.

Bis auf Taylormodell-Definition 4.4 erreichen (beinahe) alle Berechnung dieselbe Iterationszahl, variieren jedoch in der Größe des Rechtecks, welches von  $x$  und  $y$  aufgespannt wird. Mit der Definition 4.3 als initiales Taylormodell wird für 10000 Bit Genauigkeit eine minimal höhere Iterationszahl und bei 1000 Bit Genauigkeit ein kleineres Rechteck, als in den anderen Varianten erreicht.

## 4.6 Anwendung der Parameter

In diesem Kapitel wurden mit verschiedenen Belegungen für die zu Verfügung stehenden Parameter in HOTM versucht, eine möglichst optimale Konfiguration im Hinblick auf die Eindämmung der Überschätzung des Intervalls zu finden. Die besten Ergebnisse werden hierbei erzielt mit:

- **Sweeping** mit ausschließlich quadratischem Sweeping zum Grade 0,
- **Cleaning** und **Splitting** mit einem Grenzwerten orientiert an der Genauigkeit,
- **Initialen Taylormodellen** für ein Intervall  $[c \pm \varepsilon]$  der Form  $[c] + [1] \cdot \lambda$ ,  $\lambda \in [0 \pm \varepsilon]$ ,
- Erhalt von 3 **Fehlersymbolen**.

Abbildung 4.7 zeigt die Entwicklung bei Berechnungen der Hénon-Abbildung. Jeweils zu sehen sind (1) der Abstand der  $x$ -Koordinate zweier Punkte  $a = (0, 0)$  und  $b = (2^{-p}, 2^{-p})$  in Farbe, (2) die Breite des Intervalls  $|x_n|$  für  $(x_0, y_0) = ([0 \pm 2^{-(p-1)}], [0 \pm 2^{-(p-1)}])$  in grau und (3) die Breite des ausgewerteten Taylormodells  $|x_n|$  für zwei Taylormodelle  $x_0 = [0] + [1] \cdot \lambda_0$ ,  $\lambda_0 \in [0 \pm 2^{-(p-1)}]$  und  $y_0 = [0] + [1] \cdot \lambda_1$ ,  $\lambda_1 \in [0 \pm 2^{-(p-1)}]$  in schwarz. Der Verlauf der unabhängigen Punkte (1) stellt eine lokale Annäherung an den Lyapunov Exponenten dar und damit eine untere Schranke an die Ausbreitung eines Rechtecks pro Iteration der Hénon-Abbildung dar, indem sie dessen Eckpunkte markieren. Es ist deutlich erkennbar, dass sich das Taylormodell (3) langsamer ausbreitet und damit näher an der Schranke bewegt, als die Berechnung mit reiner Intervallarithmetik (2).

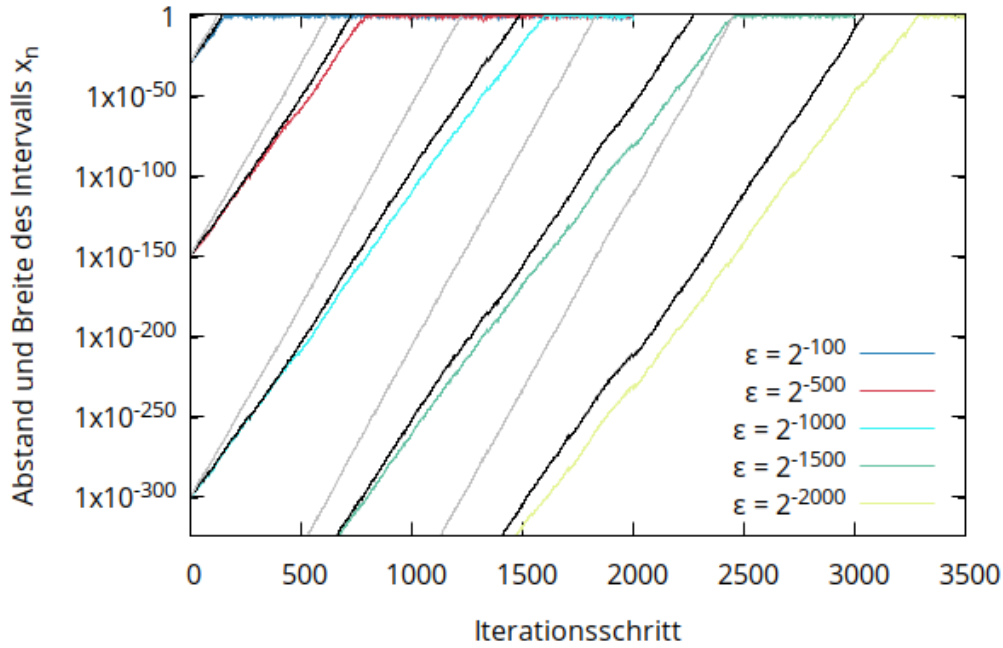


Abbildung 4.7: Entwicklung des Abstandes der x-Koordinate zweier Punkte  $(0, 0)$  und  $(\epsilon, \epsilon)$  in Farbe, der Breite des Intervalls des x-Wertes eines Rechtecks  $([0 \pm \epsilon], [0 \pm \epsilon])$  in Grau und der Breite des ausgewerteten Taylormodells für die x-Koordinate in Schwarz mit  $|x_0| = \epsilon$ . Getestet bei der Hénon-Iteration mit  $a = 1.4$  und  $b = 0.3$ .

## 4.7 Umsetzung

Zwei Implementierungen der Hénon-Abbildung für die Parameter  $a = 1.4$  und  $b = 0.3$  sind in den Listings 4.1 und 4.2 zu sehen. Es werden drei verschiedene Zahlentypen verwendet, die jedoch alle auf den `iRRAM-REALs` aufbauen: *High Order Taylor Modell* `HOTM`, *Real Number* `num` und *Real Number Interval* `numint`. Die jeweils definierte Funktion `compute()` in Zeile 5 stellt den in der `iRRAM` verwendeten Rahmen für Iterationen, beziehungsweise Erhöhungen der Genauigkeit der `REALs` dar. Mit dem Funktionsaufruf `HOTM::init()` in Zeile 9 werden die zuvor in diesem Kapitel beschriebenen Grenzwerte und Parameter für die Housekeeping-Methoden mit Werten initialisiert, die experimentell die beste Performanz lieferten. Die Parameter  $a$  und  $b$  werden in Zeile 14 als `num(iRRAM::REAL)` instanziiert. Die Durchführung der Housekeeping-Methoden ist ein Überschreiben des Zuweisungsoperators '=' für die `HOTM`-Taylormodelle realisiert. Während der Berechnung in den Zeilen 17 und 18 können sich die Taylormodelle aufblähen und werden dann bei der Zuweisung reduziert. In den Zeilen 19 und 20 findet kein Housekeeping mehr statt, gesteuert durch einen Parameter, der den Zustand des Taylormodells beschreibt<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Operationen auf dem Taylormodell markieren es als 'not cleaned'. Dieser Wert wird dann durch die Anwendung von Housekeeping zurückgesetzt.

```

1 #include "iRRAM.h"
2 #include "hoTM.h"
3 using namespace iRRAM;
4
5 void compute() {
6     int n;
7     cin >> n;
8
9     HOTM::init();
10    HOTM x(num(0));
11    HOTM y(num(0));
12    HOTM x_new, y_new;
13
14    num a(1.4), b(0.3);
15    for (int i = 0; i < n; i++) {
16        x_new = 1+y-a*(x*x);
17        y_new = b*x;
18        x = x_new;
19        y = y_new;
20    }
21    cout<<"x:"<< numint(x) <<"\n";
22    cout<<"y:"<< numint(y) <<"\n";
23 }

```

Listing 4.1:

Implementierung mit Punktintervallen

```

1 #include "iRRAM.h"
2 #include "hoTM.h"
3 using namespace iRRAM;
4
5 void compute() {
6     int n;
7     cin >> n;
8
9     HOTM::init(2);
10    HOTM x(num(0), num(0.001));
11    HOTM y(num(0), num(0.001), 0);
12    HOTM x_new, y_new;
13
14    num a(1.4), b(0.3);
15    for (int i = 0; i < n; i++) {
16        HOTM::housekeep(x,y);
17        x_new = 1+y-a*(x*x);
18        y_new = b*x;
19        x = x_new;
20        y = y_new;
21    }
22    cout<<"x:"<< x <<"\n";
23    cout<<"y:"<< y <<"\n";
24 }

```

Listing 4.2:

Implementierung mit Intervallen

Um die Anpassung der Parameter der HOTM zu vereinfachen stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung:

### Initiale Taylormodelle

In der linken Implementierung 4.1 werden  $x$  und  $y$  als Punktintervalle, also als Taylormodelle mit lediglich einem Kernel definiert:

$$\begin{aligned} \text{HOTM}::x(0) &\rightsquigarrow x := [0] \\ \text{HOTM}::y(0) &\rightsquigarrow y := [0] \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Konstruktors auf der rechten Seite wird aus der Eingabe eines Intervalls mit Mittelpunkt  $c$  und Radius  $\varepsilon$  je ein Taylormodell mit einem Fehlersymbol, welches  $\varepsilon$  enthält und dem Kernel als Punktintervall  $c$ :

$$\begin{aligned} \text{HOTM}::x(0, 0.001) &\rightsquigarrow x := [0] + [1] \cdot \lambda_0, \lambda_0 \in [0 \pm 0.001] \\ \text{HOTM}::y(0, 0.001) &\rightsquigarrow y := [0] + [1] \cdot \lambda_1, \lambda_1 \in [0 \pm 0.001] \end{aligned}$$

### Anzahl der zu erhaltenden Fehlersymbole

Die Initialisierungsfunktion `init()` akzeptiert eine  $\text{int} \geq 0$  als Eingabe. Damit kann die Anzahl der zu erhaltenden Fehlersymbole pro Taylormodell angepasst werden, wie in Listing 4.2 Zeile 9. Der Standardwert liegt bei 3. Außerdem besteht die Möglichkeit, diesen Wert für jedes Taylormodell individuell zu bestimmen (Listing 4.2 Zeile 11). Ist dieser Wert nicht gesetzt, so wird er aus dem `init()` Aufruf abgeleitet.

### Manuelles Housekeeping

Sollen die Housekeeping-Methoden nur für bestimmte Taylormodelle oder zu einem anderen Zeitpunkt, als bei der Zuweisung durchgeführt werden, so wird die Funktion `HOTM::kousekeep` aufgerufen. Ein Aufruf, wie in Listing 4.2 Zeile 16, schaltet das Housekeeping während der Zuweisung aus. Zudem wird das Entfernen bis auf die  $m$ -größten Fehlersymbole nun für alle im Aufruf enthaltenen Taylormodelle durchgeführt, statt einzeln. Das bedeutet, dass nach diesem Aufruf in allen Taylormodellen dieselben Fehlersymbole übrig bleiben.

### Ausgabe

Die Ausgabe des Ergebnisses erfolgt jeweils in den Zeilen 22 und 23. Listing 4.1 erzeugt hier eine Auswertung der Taylormodelle zu Intervallen mit einer Genauigkeit von 20 Stellen nach dem Komma für Mitte und Radius. In Listing 4.2 hingegen werden die Taylormodelle aufgelistet, ohne diese auszuwerten. Das heißt, es werden alle Monome mitsamt ihrer Variablen angezeigt.

# 5. Fazit

## 5.1 Diskussion

Der Schritt von linearen zu nichtlinearen Taylormodellen erhöht in der Praxis zwar deren Potential, Rundungsfehler zu kontrollieren, jedoch erhöht sich die Komplexität der Berechnung und der Strukturen um ein vielfaches, was sich in der Laufzeit, als auch im Aufwand für die Programmierung niederschlägt. Dadurch, dass jede Zahl der HOTM von einem Intervall dargestellt wird, beziehungsweise eine `iRRAM-REAL` ist, sorgt jede arithmetische Operation wegen der Eigenschaften der Intervallarithmetik zu einer Überschätzung. Wachsen nun die Polynome in ihrer Länge, kann zwar das Abhängigkeitsproblem der Variablen angegangen werden, jedoch erhöht sich auch die Anzahl der ausgeführten Operationen, was letztendlich die Ausdehnung der Taylormodelle dominiert, wie in Kapitel 4 zu sehen ist.

Durch den vielschichtigen Aufbau des Zahlentyps HOTM, ist es meist schwierig zu sagen, ob eine Konfiguration optimal ist, da sehr viele Faktoren eine Rolle spielen. Um beispielsweise die Ausdehnung eines Rechtecks zu untersuchen, mussten starke Einschränkungen an den unterliegenden `iRRAM`-Iterationen vorgenommen werden. Darunter fällt die Fixierung der Genauigkeit der `REALs`, die eigentlich dynamisch zu Laufzeit angepasst wird. Ohne eine solche Fixierung und andere Beschränkungen, war es nicht möglich, die experimentellen Ergebnisse klar zu deuten und die Einflüsse voneinander zu trennen. Diese Einschränkungen entstanden aus einer längeren Auseinandersetzung mit dem zu Grunde liegenden Problem und dem Wissen darüber, wann ein Rechteck bestimmter Größe, bei einer gewissen Genauigkeit die Fangzone in der Hénon-Abbildung verlässt. Um die HOTM als generischen Zahlentypen für Intervallarithmetik verwenden zu können, sind der Zeit noch solche Informationen und entsprechende Anpassungen nötig, da Berechnungen in einigen Fällen sonst nicht möglich sind.

Die Durchführung der Experimente und die Bewertung der Performanz der Parameter für die HOTM hat sich in dieser Arbeit auf Untersuchungen der Hénon-Abbildung beschränkt. Wenngleich die gefundenen Konfigurationen gute Ergebnisse lieferten, ist nicht garantiert, dass diese auch in anderen Fällen, in anderen Anwendungen die besten Ergebnisse liefern. Daher müsste besonders die Einstellung über die Anzahl der erhaltenen Fehlersymbole getestet und eventuell angepasst werden. Für diesen Zweck wurde dem Konstruktor der Taylormodelle und der Initialisierungsfunktion eine entsprechende Konfigurationsmöglichkeit hinzugefügt.

## 5.2 Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine grundlegende Implementierung für das Rechnen mit nichtlinearen Taylormodellen auf den reellen Zahlen beschrieben und angefertigt.

An verschiedenen Stellen ist es jedoch möglich und teils notwendig, die Arbeit fortzuführen.

### 5.2.1 Partitionierung

In Kapitel 3.4.2 wurde eube Art der Darstellung der Taylormodelle vorgestellt. Für jedes Fehlersymbol wird dessen Supportintervall in  $n$  gleich große Partitionen unterteilt und eingesetzt, sodass sich für ein  $d$ -dimensionales Taylormodell  $n^d$  ausgewertete Intervalle ergeben. Dieser sehr naive Algorithmus dient in dieser Arbeit lediglich der grafischen Darstellung der Taylormodelle, könnte jedoch als basis für einen Partitionsalgorithmus für eine parallele Berechnung größerer Taylormodelle dienen. Wie oben beschrieben, sorgt eine gewisse Größe der Taylormodelle bei der Hénon-Abbildung dazu, dass diese in wenigen Iterationen gegen  $\infty$  laufen. Verhindert man dies jedoch durch eine vorherige Unterteilung, so könnte die Berechnung fortgeführt werden, indem die Informationen über das Wachstum der Intervalle aus Kapitel 4.6 für die Partitionsgröße verwendet wird.

### 5.2.2 Laufzeitoptimierung

### 5.2.3 Sweeping-Heuristiken

### 5.2.4 Schnittstellen

Die Implementierung der iRRAM, beziehungsweise der HOTM bietet ein sehr hohes Abstraktionsniveau für die komplexen Berechnungen, die damit ausgeführt werden, sodass die reellen Zahlen und die nichtlinearen Taylormodelle als reguläre Zahlentypen verwendbar sind. Neben der reinen Entwicklungsarbeit, stellt allerdings auch die Verbreitung der Ideen und der Programme als solches ein Problem dar, da sich deren Verwendung auf C++-Programme beschränkt. Eine Schnittstelle zu anderen Programmiersprachen, wie beispielsweise in der Python-Bibliothek `numpy` [HaMa20], eigentlich in FORTRAN implementiert, würde die Verwendung in der populärsten Programmiersprache<sup>1</sup> eröffnen.

Für die Umsetzung wäre eine mögliche Lösung, die iRRAM, beziehungsweise HOTM in einem eigenen Thread laufen zu lassen und mit asynchronen Anfragen Ergebnisse für Berechnungen zu erhalten.

---

<sup>1</sup><https://de.statista.com/infografik/22669/popularitaet-von-programmiersprachen/> (Stand 26.03.2021)



# Literaturverzeichnis

- [BrHW08] V. Brattka, P. Hertling und K. Weihrauch. *A Tutorial on Computable Analysis*, S. 425–491. Springer New York, New York, NY. 2008.
- [BrKM15] F. Brauße, M. V. Korovina und N. T. Müller. Using Taylor Models in Exact Real Arithmetic. In I. S. Kotsireas, S. M. Rump und C. K. Yap (Hrsg.), *Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences - 6th International Conference, MACIS 2015, Berlin, Germany, November 11-13, 2015, Revised Selected Papers*, Band 9582 der *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2015, S. 474–488.
- [HaMa20] C. R. Harris, K. J. Millman und S. J. van der Walt et al. Array programming with NumPy. *Nature* 585(7825), September 2020, S. 357–362.
- [Hén76] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math. Phys.* 50(1), 1976, S. 69–77.
- [MaBe01] K. Makino und M. Berz. Higher order verified inclusions of multidimensional systems by taylor models. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 47(5), 2001, S. 3514–3503.
- [MdOCC20] V. Martins de Oliveira, D. Ciro und I. L. Caldas. Dynamical trapping in the area-preserving Hénon map. *The European Physical Journal Special Topics* 229(8), May 2020, S. 1507–1516.
- [Moor79] R. E. Moore. *Methods and applications of interval analysis*. SIAM studies in applied mathematics. SIAM. 1979.
- [MoPe07] M. B. Monagan und R. Pearce. Polynomial Division Using Dynamic Arrays, Heaps, and Packed Exponent Vectors. In V. G. Ganzha, E. W. Mayr und E. V. Vorozhtsov (Hrsg.), *Computer Algebra in Scientific Computing, 10th International Workshop, CASC 2007, Bonn, Germany, September 16-20, 2007, Proceedings*, Band 4770 der *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2007, S. 295–315.
- [Müll00] N. T. Müller. The iRRAM: Exact Arithmetic in C++. In J. Blanck, V. Brattka und P. Hertling (Hrsg.), *Computability and Complexity in Analysis, 4th International Workshop, CCA 2000, Swansea, UK, September 17-19, 2000, Selected Papers*, Band 2064 der *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2000, S. 222–252.

- [Müll09] N. Müller. Enhancing imperative exact real arithmetic with functions and logic. 2009.
- [PlBr89] P. Plaschko und K. Brod. *Deterministisches Chaos — Eine Einführung*, S. 359–424. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. 1989.
- [Span10] C. Spandl. Computational Complexity of Iterated Maps on the Interval (Extended Abstract). In X. Zheng und N. Zhong (Hrsg.), *Proceedings Seventh International Conference on Computability and Complexity in Analysis, CCA 2010, Zhenjiang, China, 21-25th June 2010*, Band 24 der *EPTCS*, 2010, S. 139–150.
- [WiKm20] T. Williams, C. Kelley und many others. Gnuplot 5.4: an interactive plotting program. <http://gnuplot.sourceforge.net/>, 2020.
- [Yan98] T. Yan. The Geobucket Data Structure for Polynomials. *J. Symb. Comput.* 25(3), 1998, S. 285–293.

## 6. Anhang

### Algorithmen für Geobuckets

---

**Algorithm 4:** Polynommultiplikation mit Geobuckets

---

**Eingabe:** Polynome  $p, q$  mit Monomen  $m_{p_i}$  und  $m_{q_j}$ , wobei  $i = \#p$  und  $j = \#q$

**Ausgabe:** Polynom  $p'$  mit geordneten Monomen

```
1  $n \leftarrow \#p, k \leftarrow \#q$ 
2  $buckets$  mit Platz geom. wachsender Größe anlegen:  $\{2k, 4k, \dots, 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}k\}$ 
3  $i \leftarrow 0$ 
4 while  $i < n$  do (Bis jedes Monom aus  $q$  betrachtet wurde)
5    $p' \leftarrow m_{p_i} \cdot q$ 
6   if  $i < (n - 1)$  then
7      $p' \leftarrow p' + m_{p_{i+1}} \cdot q$ 
8    $i \leftarrow i + 2$ 
9    $j \leftarrow 0$ 
10  while  $buckets[j] \neq \emptyset$  do (Sammle alle Buckets ein und speichere in  $p'$ )
11     $p' \leftarrow p' + buckets[j];$  (Polynome gleicher Größe werden addiert)
12     $buckets[j] \leftarrow []$ 
13     $j \leftarrow j + 1$ 
14  end
15  if  $i < n$  then (Wurde  $q$  nicht komplett betrachtet)
16     $buckets[j] \leftarrow p';$  (Speichere  $p'$  im aktuell leeren Bucket  $j$ )
17     $p' \leftarrow 0;$  (Leere  $p'$  für eine neue Iteration vorbereiten)
18 end
19 foreach  $bucket \in buckets$  do (Merge aller Buckets ins Polynom)
20    $p' \leftarrow p' + bucket;$  (vom kleinsten zum größten)
21 end
22 return  $p'$ 
```

---

**Algorithm 5:** Addition zweier geordneter Polynome**Eingabe :** Polynome  $p, q$  mit Monomen  $m_{p_i}$  und  $m_{q_j}$ , wobei  $i = \#p$  und  $j = \#q$ **Ausgabe:** Polynom  $p'$  mit geordneten Monomen

```

1  $i \leftarrow 0, j \leftarrow 0$ 
2 while  $i < \#p$  and  $j < \#q$  do      (Solange ein Polynom nicht komplett betrachtet wurde)
3   if  $m_{p_i} \succ m_{q_j}$  then
4      $p' \leftarrow p' + m_{p_i}$ 
5      $i \leftarrow i + 1$ 
6   else if  $m_{q_j} \succ m_{p_i}$  then
7      $p' \leftarrow p' + m_{q_j}$ 
8      $j \leftarrow j + 1$ 
9   else                                     (Beide Monome haben dieselben Variablen)
10     $p' \leftarrow p' + (m_{q_j} + m_{p_i})$ 
11     $i \leftarrow i + 1; j \leftarrow j + 1$ 
12 end
13 if  $i < \#p$  or  $j < \#q$  then
14   Füge den Rest zu  $p$  hinzu
15 end
16 return  $p$ 

```

## Details der Implementierung

```

1  [
2  {
3    "comment": "Error 100",
4    "rel": 1,
5    "linear": 0,
6    "keep": 2,
7    "error_in_lambda": true,
8    "strategy": "SQUARE_ONLY",
9    "iter": 1000,
10   "prec": 50,
11   "error": 1000,
12   "decimals": 20,
13   "sweep_to": 2,
14   "micro_thresh": 1,
15   "macro_thresh": 1,
16   "a": 1.4,
17   "b": 0.3,
18   "support_space": [
19     {
20       "point": false,
21       "mid": "0",
22       "rad": "e"
23     },
24     {
25       "point": false,
26       "mid": "0",
27       "rad": "e"
28     }
29   ],
30   "x": {
31     "kernel": {
32       "point": true,
33       "mid": "1",
34       "rad": "0"
35     },
36     "monomials": [
37       {
38         "point": true,
39         "mid": "1",
40         "rad": "0",

```

```
41     "lambdas": [{
42         "exp": 1,
43         "index": 0
44     }]
45     }
46 ]
47 },
48 "y": {
49     "kernel": {
50         "point": true,
51         "mid": "0.1",
52         "rad": "0"
53     },
54     "monomials": [
55         {
56             "point": true,
57             "mid": "1",
58             "rad": "0",
59             "lambdas": [{
60                 "exp": 1,
61                 "index": 1
62             }]
63         }
64     ]
65 }
66 }
67 ]
```

Listing 6.1: Beispielkonfiguration

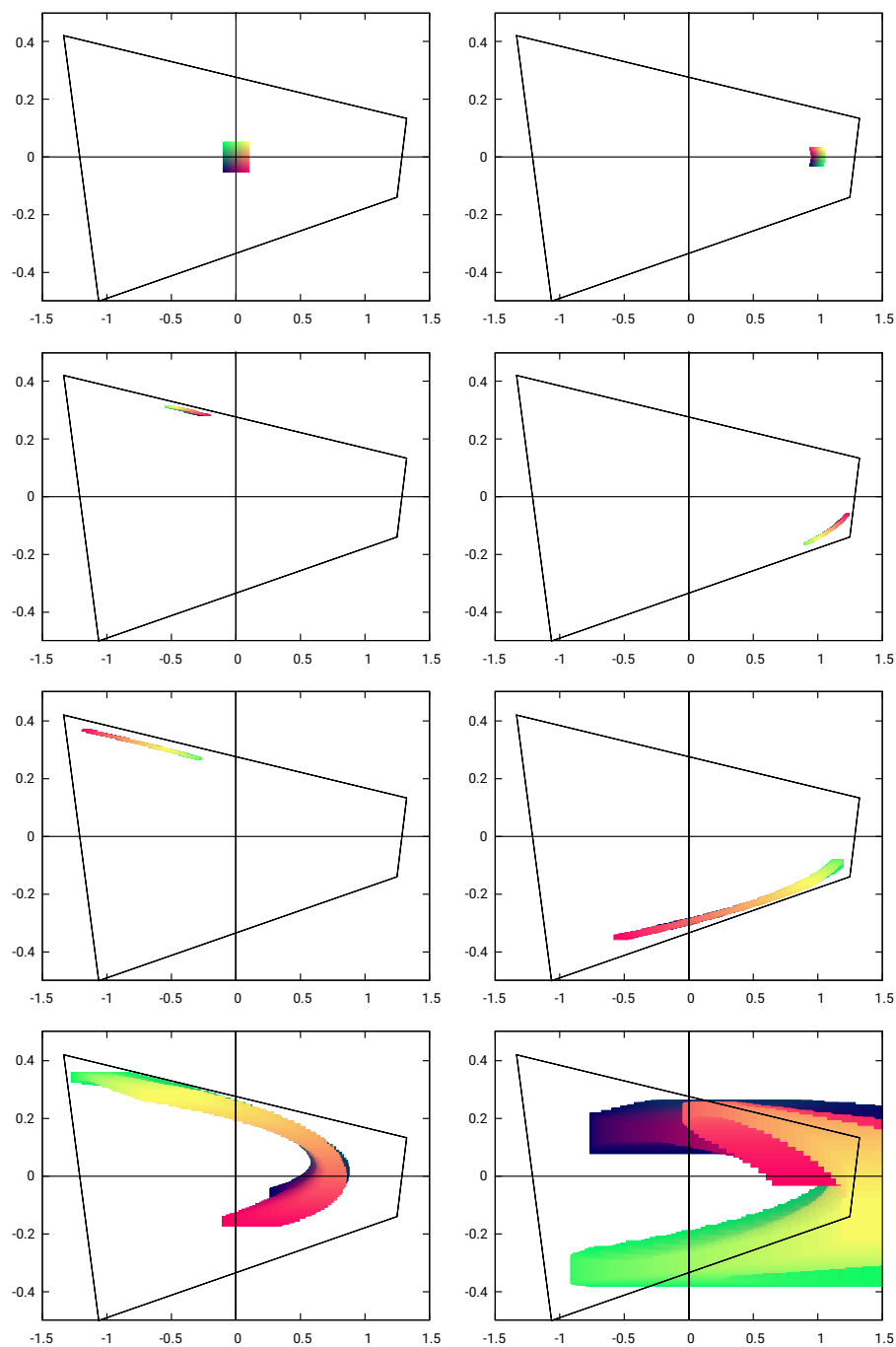


Abbildung 6.1: Mehrere Iterationen mit Farbkodierung

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Bachelor-/Masterarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit habe ich bisher keinem anderen Prüfungsamt in gleicher oder vergleichbarer Form vor-gelegt. Sie wurde bisher auch nicht veröffentlicht.

Trier, den xx. Monat 20xx