

# Algorithmen und Datenstrukturen (Master)

## WiSe 19/20

Benedikt Lücken-Winkels

January 23, 2020

### Contents

<b>1</b>	<b>Wörterbuchproblem</b>	<b>3</b>
1.0.1	zu 1: . . . . .	3
1.0.2	Definition: Randomized Search Tree (RST) . . . . .	3
1.0.3	Operationen . . . . .	4
1.0.4	Analyse des RST . . . . .	4
1.0.5	Lemma 1: . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Hashing</b>	<b>8</b>
2.1	Hashing mit offener Adressierung . . . . .	8
2.2	Perfektes Hashing . . . . .	9
2.2.1	Datenstruktur . . . . .	12
2.2.2	Aufbauzeit der Datenstruktur . . . . .	14
2.2.3	Zusammenfassung . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Planare Graphen</b>	<b>15</b>
3.1	Definition . . . . .	15
3.2	Planaritätstest . . . . .	16
3.3	Wichtige Begriffe und Definitionen . . . . .	16
3.3.1	Knotenzusammenhang . . . . .	16
3.3.2	Beobachtung . . . . .	17
3.4	Planare Einbettung . . . . .	17
3.5	Die Euler-Formel . . . . .	18
3.5.1	Folgerung . . . . .	19
3.5.2	Folgerung . . . . .	19
3.5.3	Folgerung . . . . .	20
3.6	Das Färbungsproblem für planare Graphen . . . . .	20
3.6.1	Vierfarbensatz . . . . .	20
3.7	Satz von Kuratowski . . . . .	21
3.7.1	Beweise der Lemmata . . . . .	22

<b>4</b>	<b>Maximal Matchings im bipartiten Graphen</b>	<b>24</b>
4.1	Lemma 1 . . . . .	24
4.1.1	Satz 1 . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Übung</b>	<b>26</b>
5.1	Übung 5 . . . . .	28
5.2	Übung 6 . . . . .	28
5.3	Übung 7 . . . . .	28
5.4	Übung 8 . . . . .	28
5.5	Übung 9 . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Allgemeines</b>	<b>30</b>
6.1	Einschub: Erwartungswerte . . . . .	30
6.2	Integrierende Reihe . . . . .	30

# 1 Wörterbuchproblem

Menge  $S$  mit  $n$  Schlüsseln aus einem Universum  $U$ . Operationen: INSERT (darauf achten, dass die Balance nicht verloren geht), DELETE, LOOKUP (Im Baum runterlaufen, bis das Element gefunden wurde)

## Situationen

1.  $U$  linear geordnet, also existiert ein  $\leq$ -Test  $\Rightarrow$  Suchbäume
2.  $U$  ist ein Intervall  $\{0, \dots, N-1\}$  der gesamten Zahlen  $\Rightarrow$  Hashing

### 1.0.1 zu 1:

**Randomisierte Suchbäume** Idee: Benutze Zufallszahlen zur Balancierung eines binären Suchbaums

**Binärer Suchbaum (Knoten-Orientiert)** Schlüssel werden in den  $n$  Knoten eines binären Baums gespeichert, sodass im linken Unterbaum des Knotens mit Schlüssel  $x$  alle Schlüssel  $< x$  **und** im rechten Unterbaum alle  $> x$ . Balanciert  $\Rightarrow \text{Höhe}(T) \leq \log n$ . Degeneriert  $\Rightarrow \text{Höhe}(T) = O(n)$

### 1.0.2 Definition: Randomized Search Tree (RST)

Sei  $S = \{x_1, \dots, x_n\}$  eine Menge von  $n$  Schlüsseln. Jedem  $x_i$  wird eine zusätzlich eine Zufallszahl (auch Priorität genannt)  $prio(x_i)$  zugeordnet.  $prio(x_i)$  sind gleichverteilte reelle Zufallszahlen  $\in [0, 1]$  (Implementierung wären int-Zahlen, zB 32-bit).

Ein RST für  $S$  ist ein binärer Suchbaum für die Paare  $(x_i, prio(x_i))$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sodass

1. normaler Knoten-orientierter Suchbaum für die Schlüssel  $x_1, \dots, x_n$
2. Maximumsheap bzgl der Prioritäten. dh  $prio(v) \geq prio(u)$ , falls  $v$  Parent. (( $u, v$ ) sind Knoten in einem Baum).  $\Rightarrow$  Wurzel enthält maximale Priorität.

**Existenz** durch Algorithmus zum Aufbau (rekursiv).

- Wurzel enthält  $(x_i, p_i)$  mit  $p_i = prio(x_i)$  maximal
- Linker Unterbaum: RST für  $\{(x_j, p_j) | x_j < x_i\}$
- Rechter Unterbaum: RST für  $\{(x_k, p_k) | x_k > x_i\}$

Beispiel:  $S = \{1, \dots, 10\}$

- Schreibe Tabelle mit Prioritäten und Werten.
- Teile die Tabelle beim Maximum und schreibe es in die Wurzel. Wiederhole, bis alle Elemente geschrieben.

$\Rightarrow$  Wenn sich die Prioritäten genauso oder umgekehrt, wie die Schlüssel verhalten, erhält man einen degenerierten Baum. (bzgl  $\leq$ ). zB  $prio(x_i) = x_i$ . Dieser Fall ist sehr unwahrscheinlich, wenn sich bei der Priorität um gleichverteilte Zufallszahlen handelt.

### 1.0.3 Operationen

- Lookup(x): normale suche in binärem Baum. Kosten  $O(\text{Höhe}(T))$
- Insert(x): Füge einen neuen Knoten v als Blatt  $(x, \text{prio}(x))$  gemäß des Schlüssels in den binären Baum ein, wobei  $\text{prio}(x)$  neue Zufallszahl (kann die Prio-Ordnung zerstören). Dann: Rotiere v nach oben, bis die Heap-Eigenschaft gilt, also  $\text{prio}(v) \leq \text{prio}(\text{parent}(v))$ . Kosten:  $O(\# \text{Rotationen}) = O(\text{Höhe}(T))$ . Alternativ: normales einfügen in binären Baum in absteigender Reihenfolge der Prioritäten.
- DELETE(x): Sei v der knoten mit Schlüssel x ( $v = \text{Lookup}(x)$ ). Kosten:  $O(\# \text{Rotationen}) = O(1 + |L| + |R|)$ 
  1. Rotiere v nach unten, bis v ein Blatt ist. R = linkes Rückgrat des rechten Unterbaums von v. L = rechtes Rückgrat des linken Unterbaums.
  2. Entferne das Blatt.
- Split(y)  $\rightarrow S_1 = \{x \in S | x \leq y\}, S_2 = \{x \in S | x \geq y\}$  (Teile den Baum, indem y mit maximaler Priorität zur Wurzel rotiert wird)
  1. Insert(y +  $\epsilon$ ) mit Priorität  $\infty$
  2. Entferne die Wurzel
- Join( $T_1, T_2$ ):  $S \leftarrow S_1 \cup S_2$ .  $T_1$  RST für  $S_1$  und  $T_2$  RST für  $S_2$ 
  1. Konstruiere T (Füge y zwischen  $\text{Max}(S_1)$  und  $\text{Min}(S_2)$  ein. Voraussetzung:  $\text{Max}(S_1) < \text{Min}(S_2)$ )
  2. Lösche die Wurzel (Durch runterrotieren des eingefügten Knotens y)

### 1.0.4 Analyse des RST

Wir analysieren die erwarteten Kosten einer Delete-Operation (Insert  $\rightarrow$  umgekehrtes Delete). Sei T ein RST für die Menge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  mit  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  der durch Inserts aufgebaut wurde. Betrachte die Operation  $\text{Delete}(x_k)$  für eine  $k, 1 \leq k \leq n$ . Für einen Knoten  $x_k$  im Baum T mit Suchpfad  $P_k$ ,  $L_k$  rechtes Rückgrad von  $T_l$  und  $R_k$  linkes Rückgrad von  $T_r$ . Kosten  $O(|P_k| + |L_k| + |R_k|)$ . Wir schätzen die Erwartungswerte

### 1.0.5 Lemma 1:

- a)  $E(|P_k|) = H_k + H_{n-k+1} - 1$

$$k\text{-te HarmonischeZahl} = H_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} H_k \leq \ln(x) + 1$$

- b)  $E(|L_k|) = 1 - \frac{1}{k}$
- c)  $E(|R_k|) = 1 - \frac{1}{n-k+1}$

**Beweis** Betrachte eine Permutation  $\pi : [1..n] \rightarrow [1..n]$  (bijektive Abbildung), die die Schlüssel absteigend nach ihren Prio Werten sortiert. Dann gilt:

1. Jede Permutation  $\pi$  ist gleichwahrscheinlich (Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{n!}$ ), da die Prioritäten gleichverteilte Zufallszahlen sind.
2. Man erhält den selben binären Baum durch Einfügen der Schlüssel in einen unbalancierten Baum in der Reihenfolge, die  $\pi$  angibt.  $\rightarrow$  gleiches Verhalten, wie ein zufälliger binärer Baum.
3. Baum wächst nur an den Blättern.

Trick: arbeite ab jetzt mit zufälliger Permutation statt den Prioritäten.  $\rightarrow$  normaler Binärbaum mit zufälliger Einfügereihenfolge.

**Teil a) des Lemmas**  $P_k$  ist Suchpfad für Knoten  $x_k$ . Seien  $P'_k$  und  $P''_k$  Teilfolgen von  $P_k$  mit:  $\forall v \in P'_k, key(v) \leq x_k$  und  $\forall u \in P''_k, key(u) \geq x_k$ .

*Proof.* Beobachtungen:

1.  $|P_k| = |P'_k| + |P''_k| - 1$  ( $x_k$  in beiden Teilfolgen)
2.  $P'_k$  = Menge der Knoten  $v$  mit:
  - Wenn  $v$  eingefügt wird, gilt  $key(v)$  ist maximal mit  $key(v) \leq x_k$
3.  $P''_k$  = Menge der Knoten  $u$  mit:
  - Wenn  $u$  eingefügt wird, gilt  $key(u)$  ist minimal mit  $key(u) \geq x_k$

Wir zeigen

1.  $E(|P'_k|) = H_k$
2.  $E(|P''_k|) = H_{n-k+1}$

zu 1)  $K$  mögliche Kandidaten für  $P'_k \{x_1, \dots, x_k\}$ . Spiel: Ziehe zufällig Schlüssel aus  $\{x_1, \dots, x_k\}$ .  $E(|P'_k|)$  = Erwartungswert, wie oft ein Kandidat gezogen wird, der  $\geq$  als alle vorher gezogenen ist (neues Maximum).  $A^k = E(|P'_k|)$  (Spiel A)

$$A^k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} \cdot (1 + A^{k-i})$$

Im Zug  $x_i$  schließt  $x_1 \dots x_i$  au. Dann gleiches Spiel mit  $K-i$  Kandidaten.

$$\begin{aligned} A^k &= \frac{1}{k} (k + \sum_{i=1}^k A^{k-i}) \\ &= 1 + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k A^{k-i} \end{aligned}$$

Wir zeigen durch Induktion über  $k$ , dass  $A^k = H_k$

**IA**

$$= 1 + \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k H_i$$

Eigenschaften der harmonischen Zahlen:

1.

$$\sum_{i=0}^k H_i = k \cdot (H_k - 1)$$

2.

$$H_k \leq 1 + \ln k$$

aus 1) folgt:

$$\begin{aligned} A^k &= 1 + \frac{1}{k} \cdot k \cdot (H_k - 1) \\ &= 1 + H_k - 1 \\ &= H_k \end{aligned}$$

Der Erwartungswert ist gleich der k-ten Harmonischen Zahl.  $E(P'_k) = H_k$ . Abschätzung von  $E(P''_k) =: B^k$ . (Spiel B) kandidaten  $\{x_k \dots x_n\}$ : Zähle, wie oft ein neues Minimum gezogen wird. Dann sieht man leicht, dass

$$B^k = H_{n-k+1}$$

Beweis: symmetrisch.

$$\begin{aligned} E(|P_k|) &= E(|P'_k|) + E(|P''_k|) - 1 \\ &= A^k + B^k - 1 \\ &= H_k + H_{n-k+1} - 1 \end{aligned}$$

□

### Teil b) des Lemmas

*Proof.*  $L_k$  und  $R_k$  Seien  $L_k = v_1, \dots, v_l$  und  $R_k = u_1, \dots, u_m$

**Erwartungswerte** Spiel C: Ziehe zufällig Elemente aus  $\{x_1 \dots x_n\}$ . Sobald  $x_k$  gezogen wird: ??? Trigger ??? Sei  $C^k$  der Erwartungswert dieses Spiels, dh  $C^k = E(|L_k|)$ .

$$C^k = \frac{1}{k} \cdot A^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{k} \cdot C^{k-i}$$

im 1. Zug  $x_k$ , dass Spiel mit k-1 Kandidaten (alle kleiner, als  $x_k$ ).

$$C^k = \frac{1}{k} \cdot (H_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} C^i)$$

Trick: Schätze die Differenz zweier aufeinanderfolgender  $C^i$ s =  $\delta_j = C^{j+1} - C^j$  ab.

$$\Rightarrow C^k = \sum_{j=1}^k \delta_j + C^0$$

Betrachte:

$$\begin{aligned} & (j+1) \cdot C^{j+1} - j \cdot C^j \\ &= (j+1) \frac{1}{j+1} (H_j + \sum_{i=0}^j C^i) - j \frac{1}{j} (H_{j-1} + \sum_{i=0}^{j-1} C^i) \\ &= H_j + \sum_{i=0}^j C^i - (H_{j-1} + \sum_{i=0}^{j-1} C^i) \\ &= H_j - H_{j-1} + C^j \\ &= \frac{1}{j} + C^j \end{aligned}$$

Wir wissen nun, dass

$$\begin{aligned} (j+1) \cdot C^{j+1} - j \cdot C^j &= \frac{1}{j} + C^j \\ \frac{1}{j} &= (j+1)C^{j+1} - (j+1) \cdot C^j \\ \frac{1}{j(j+1)} &= C^{j+1} - C^j = \delta_j \\ \Rightarrow \delta_j &= \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \\ C^k &= \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j = \sum_{j=1}^{k-1} \left( \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{k} \end{aligned}$$

□

**Teil c) des Lemmas** Spiel  $D^k = E(|R_k|)$ : Wie oft wird ein neues Minimum größer  $x_k$  gezogen, nachdem  $x_k$  gezogen wurde (Trigger).

*Proof.* symmetrisch:

$$D^k = \frac{1}{n-k+1} \cdot B^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n+k-1} D^{i-k??}$$

...

$$D^k = 1 - \frac{1}{n-k+1}$$

□

**Satz** Sie T ein RST für eine Menge von n Schlüsseln. Dann gilt:

1. Die erwartete Laufzeit für Insert, Delete und Lookup ist  $O(\log n)$
2. Die erwartete Zahl der Rotationen bei Delete ist  $< 2$

**Beweis**

1. Kosten von Lookup =  $O(|P_k|)$ , Insert und Delete =  $O(|P_k| + |L_k| + |R_k|)$  Kosten:  
 $O(H_k + H_{n-k+1} + 1 - \frac{1}{k} + 1 - \frac{1}{n-k+1}) = O(H_n) = O(\ln n) = O(\log n)$
2. Erwartete Zahl der Rotationen:  $E(|L_k|) + E(|R_k|) < 2$

## 2 Hashing

### 2.1 Hashing mit offener Adressierung

Tafel T  $[0, \dots, m-1]$ ,  $m \leq n$ ,  $|S| = n$  Verwende die Folge von Hashfunktionen  $h_0, h_1$

$$h_i(x) = f(x) + i \cdot g(x), i = 0, 1, \dots$$

Häufig verwendet wird

$$h_i(x) = (x \cdot \text{mod } m + i) \cdot \text{mod } m$$

→ Linear Probing.

Idee

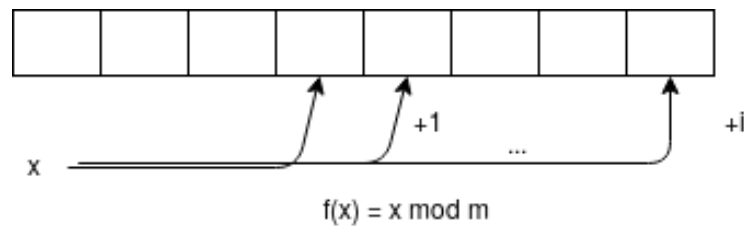


Figure 1: Idee: Offene Adressierungs-Tabelle

**Operationen** Tafelposition  $T[i]$  belegt oder frei.

- Init: alle frei
- Insert(x): betrachte die Tafelpositionen  $T[h_0(x)], T[h_1(x)], T[h_2(x)]$  bis  $T[h_i(x)]$  frei und speicher x dort ab.  $T[h_i(x)] \leftarrow x$  und markiere  $T[h_i(x)]$  als belegt. Voraussetzungen:
  1.  $m \leq |S| = n$



2.  $h_i(x)$  frei  $i = 0, 1, 2, \dots$  muss alle Tafelpoitionen durchlaufen
- Lookup(x): Teste die Tafelpoition  $T[h_i(x)]$  für  $i = 0, 1, 2, \dots$  bis entweder  $T[h_i(x)] = x$  erfolgreich oder  $T[h_i(x)]$  ist frei. **Terminiert nicht**, wenn  $m=n$  und die Tafel voll ist und das gesuchte Element nicht vorhanden ist. Daher idR  $m \geq n$
- Delete(x): (Idee 1):
  1.  $j \leftarrow \text{Lookup}(x)$
  2.  $T[j] \leftarrow \text{frei}$ , dann sind auf j folgende Elemente nicht mehr erreichbar.
 (Idee 2):
  1. Dritter Zustand: 'gelöscht' (Details: Übung)

## 2.2 Perfektes Hashing

**Situation:** Statische Menge  $S$  von  $n$  Schlüsseln aus  $[0, \dots, N - 1]$ . **Ziel:** Speichere  $S$  in einer Tafel der Größe  $O(n)$ , sodass Lookup in Zeit  $O(1)$  realisiert werden kann ( $N \gg n$ ,  $N$  sehr viel größer, als  $n$ ). **Andere Formulierung:** Finde einer Hashfunktion  $h : [0, \dots, N - 1] \rightarrow [0, \dots, S - 1]$  mit

1.  $S = \text{Größe der Tafel}$  und  $S = O(n)$
2.  $h$  injektiv auf  $S$

Zur Konstruktion oder Auswahl einer solchen Funktion Hashfunktion verwenden wir ein probabilistisches Verfahren (Zufallsverfahren).

**Idee** 2-stufiges Hashing-Schema (Hashing-Verfahren)

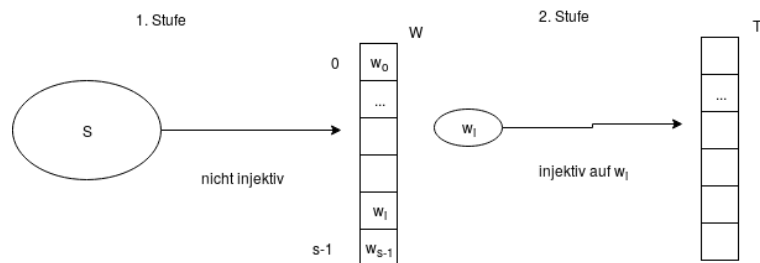


Figure 2: Idee: Perfekt Hashing Tabellen

Sei  $p$  eine Primzahl mit  $p > N$  und  $S \in \mathbb{N}$  (Tafelgröße). Betrachte folgende Hashfunktionen:

$$h_k : [0, \dots, N - 1] \rightarrow [0, \dots, S - 1]$$

mit  $h_k(x) = ((k \cdot x) \bmod p) \bmod s$  für alle  $1 \leq k \leq p-1$  (Modulo Primzahl ergibt einen Restkörper, zB Inverses der Multiplikation). Diese Funktionen sind im Allgemeinen nicht injektiv, dh  $h_k$  verteilt die Menge  $S$  auf  $s$  Buckets  $W_0^k, W_1^k, W_{s-1}^k$ .

$$\Rightarrow W_i^k = \{x \in S | h_k(x) = i\}$$

$$h_k \text{ injektiv auf } S \Leftrightarrow |W_i^k| \leq 1 \text{ für } 0 \leq i \leq s-1$$

**Lemma 1:** Für jede Menge  $S \subseteq \{0, \dots, N-1\}$ ,  $|S| = n$  gilt  $\exists k, 1 \leq k \leq p-1$  mit

$$\sum_{i=0}^{s-1} \binom{|W_i^k|}{2} < \frac{n^2}{s}$$

(Anzahl der Kollisionen  $< \frac{n^2}{s}$ ).

**Beweis** zunächst: Behauptung.

$$\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{s-1} \binom{|W_i^k|}{2} < (p-1) \frac{n^2}{s}$$

Daraus folgt das Lemma (indirekt). Annahme, das Lemma 1 gilt nicht, dh  $\forall 1 \leq k \leq p-1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{s-1} \binom{|W_i^k|}{2} &\geq \frac{n^2}{s} \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^{s-1} \binom{|W_i^k|}{2} &\geq \frac{n^2}{s} \end{aligned}$$

Widerspruch zur Behauptung!

*Beweis zur Behauptung.*

$$(1) \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{s-1} \binom{|W_i^k|}{2}$$

= Anzahl der Paare  $(k, \{x, y\})$ ,  $x \neq y$  und  $h_k(x) = h_k(y)$  (Anzahl der Kollisionen).

Wir schätzen zunächst den Betrag für 2 feste Werte  $x \neq y$  zur Behauptung ab.

Sei also  $x \neq y$ :

(1) = Anzahl aller  $K$ s mit  $(k \cdot x \cdot \bmod p) \bmod s = (k \cdot y \cdot \bmod p) \bmod s$

$$\Leftrightarrow ((k \cdot x \cdot \bmod p) - (k \cdot y \cdot \bmod p)) \bmod s = 0$$

$$k \cdot x \cdot \bmod p - k \cdot y \cdot \bmod p = i \cdot s \text{ für ein } i \in \mathbb{Z}$$

$$k \cdot (x - y) \bmod p = i \cdot s$$

Es gibt maximal  $\frac{2(p-1)}{s}$  mögliche Lösungen. Da  $p$  eine Primzahl ( $\mathbb{Z}_p$  ist ein Körper) hat jede dieser Gleichungen höchstens 1 Lösung für  $k$ .  $\Rightarrow$  Beitrag eines festen Paares  $x \neq y$  zu (1) ist maximal  $\frac{2(p-1)}{s}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1) &\leq \binom{n}{2} \cdot \frac{2(p-1)}{s} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{2(p-1)}{s} \\ &< \frac{n^2(p-1)}{s} \end{aligned}$$

□

**Folgerung 1** (aus Lemma 1)

Für  $s=n$  (dh Tafel der Größe  $n$ ):

$$\exists k, 1 \leq k \leq p-1 \text{ mit } \sum_{i=0}^{n-1} |W_i^k|^2 < 3n$$

*Beweis für Folgerung 1.* Betrachte Lemma 1 für  $s=n$

$$\exists k : \sum_{i=0}^{n-1} \binom{|W_i^k|}{2} < n \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{|W_i^k| \cdot (|W_i^k| - 1)}{2} < n \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} |W_i^k| \cdot (|W_i^k| - 1) < 2n \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} |W_i^k|^2 < 2n + \sum_{i=0}^{n-1} |W_i^k| (= n) \quad (4)$$

$$< 3n \quad (5)$$

□

**Folgerung 2** Für  $s = n^2$  dh quadratische Tafelgröße.

$\exists k' : 1 \leq k \leq p-1$ , sodass die Hashfunktion

$$k_{k'} : x \rightarrow (k'x \cdot \bmod p) \bmod s$$

injektiv auf  $S$  ist dh  $|W_i^k| \leq 1$  für  $0 \leq i \leq s-1$ .

$\Rightarrow$  Für Tafeln mit quadratische Größe existiert eine perfekte (injektive) Hashfunktion.

Beweis für Folgerung 2. Betrachte Lemma 1 mit  $s = n^2$

$$\exists k' : \sum_{i=0}^{n^2-1} \binom{|W_i^k|}{2} < 1 \quad (6)$$

$$\Rightarrow |W_i^k| \leq 1 \quad (7)$$

$$\Rightarrow h_{k'} \text{ ist injektiv auf } S \quad (8)$$

(zu 6): dh Keine Kollisionen, bzw Doppeltbelegung in den  $W_i^k$

□

Folgerung 2 zeigt Perfektes Hashing mit quadratischem Platz. Vermeidung des quadratischen Platzbedarfs durch ein 2-stufigen Hashing-Schema:

- Stufe 1: Wähle ein  $k$  gemäß Folgerung 1, dh Tafelgröße  $s=n$  und Hashfunktion  $h_k$  mit  $\sum_{i=0}^{n-1} |W_i^k| < 3n$
- Stufe 2: Für jedes nicht-leere Bucket  $W_i^k$  der ersten Stufe verwende eine Tafel der Größe  $s_i = |W_i^k|^2$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) und wähle ein  $k_i$  gemäß Folgerung 2, dh  $h_{k_i}$  ist injektiv auf  $W_i^k$

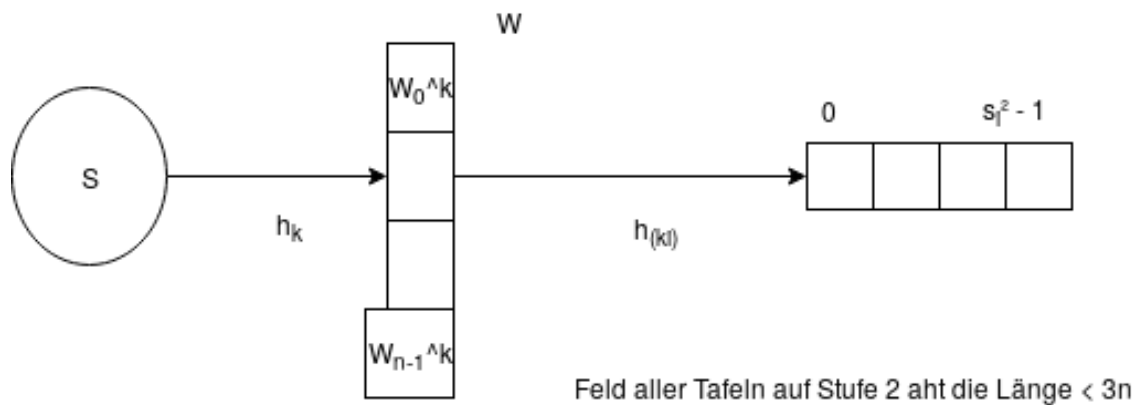


Figure 3: Konzept 2-Stufen Hashing

### 2.2.1 Datenstruktur

4 Felder + Variable  $k$

- Variable  $k$ : ( $h_k$  der 1. Stufe)
- $k[0, \dots, n-1]$ :  $k[i]$  ist  $k_i$  der 2. Stufe

- $\text{Size}[0, \dots, n-1]$ :  $\text{Size}[i] = |W_i^k|$  Bucketgrößen der 1. Stufe
- $\text{Ptr}[0, \dots, n-1]$ : Pointer auf die Hashtafeln der 2. Stufe.  $\text{Ptr}[i]$  zeigt auf die Tafel  $B[0, \dots, \text{Size}[i]^2 - 1]$
- $T[0, \dots, 3n]$ : Gesamtspeicherplatz aller B-Tafeln der 2. Stufe

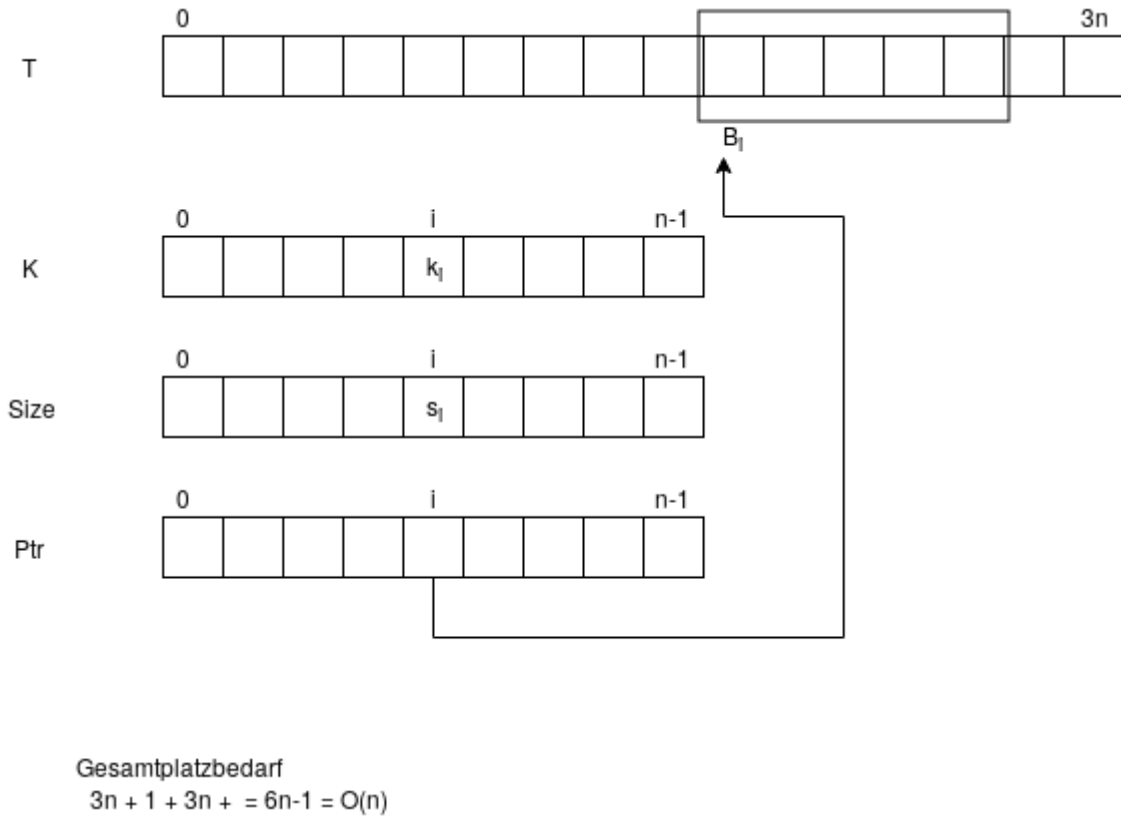


Figure 4: Datenstruktur: Perfekt Hashing

### Abspeichern eines Elements $x$

$$i \leftarrow (k \cdot x \bmod p) \bmod n \quad (9)$$

$$k' \leftarrow K[i] \quad (10)$$

$$s' \leftarrow \text{Size}[i] \quad (11)$$

$$j \leftarrow (k' \cdot x \bmod p) \bmod s' \quad (12)$$

$$\text{Ptr}[i][j] \leftarrow x \quad (13)$$

---

---

### 2.2.2 Aufbauzeit der Datenstruktur

Wir finden man die  $k$  bzw  $k'$  Werte der ersten und zweiten Stufe (gemäß Folgerung 1 und 2). Aus Folgerungen 1 und 2 folgt: Es existiert immer mindestens ein Wert für  $k$  (dh eine geeignete Hashfunktion  $h_k$ ). **Aufbaualgorithmus:** Teste alle  $k$ -Werte. Auf 1. und 2. Stufe

---

---

```
def Aufbau:
    for  $k = 1$  to  $p - 1$  do
        1.Stufe: Teste ob  $\sum_{i=0}^{n-1} |W_i^k|^2 < 3n$ ;
```

---

Kostet im worst case  $O(p \cdot n) = O(n \cdot N)$

2.Stufe für jedes Bucket  $W_i^k$

---

---

```
def Aufbau:
    for  $k' = 1$  to  $n$  do
        Teste ob  $h_{k'}$  injektiv auf  $W_i^k$ ;
```

---

Kostet für  $W_i^k O(p \cdot |W_i^k|)$  für alle Buckets  $W_i^k (0 \leq i \leq n)$ . Gesamtlaufzeit:

$$O\left(\sum_{i=0}^{n-1} p \cdot |W_i^k|\right) \quad (14)$$

Eine genauere Analyse zeigt, dass es viele  $k$ -Werte mit den geforderten Eigenschaften gibt.

**Folgerung 3** (aus Lemma 1)

Für mindestens die Hälfte aller  $k$ ,  $0 \leq k \leq p - 1$ , gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1} |W_i^k|^2 < 5n(s = n)$$

**Folgerung 4** (aus Lemma 1)

Für mindestens die Hälfte aller  $k'$ ,  $0 \leq k' \leq p - 1$ , gilt

$$h_{k'} : x \rightarrow (k' \cdot x \bmod p) \bmod 2 \cdot n^2$$

ist injektiv auf  $S$  (angedwandt:  $W_i^k$  s. Beweis analog zum Beweis der Folgerung 1 und 2.

**Änderungen in der Datenstruktur** Auf 2.Stufe Tafelgrößen verdoppeln, dh jeweils Größe  $2 \cdot |W_i^k|^2$ . Platzbedarf der 2.Stufe:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2 \cdot |W_i^k|^2 = 2 \sum_{i=0}^{n-1} |W_i^k|^2 < 10n$$

Insgesamt: Platz  $13n = O(n)$ .

**Aufbau Stufe 1:** Wähle ein zufälliges  $k \in \{1, \dots, p-1\}$  bis Folgerung 3 erfüllt. Wahrscheinlichkeit dafür ist jeweils  $\geq \frac{1}{2}$ . **Frage:** Wie hoch ist der Erwartungswert für die Anzahl der Tests. Analog zum Münzwurf: Wie viele Würfe, bis eine bestimmte Seite erscheint? Erwartungswert für diese Zahl (Integrierende Reihe):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot i = \frac{0.5}{(1-0.5)^2} = 2$$

Erwartete Laufzeit für Stufe 1 ist dann  $O(2 \cdot |S|) = O(n)$ . Analog für Stufe 2: Erwartete Zahl der Tests = 2.  $\Rightarrow$  Gesamtlaufzeit  $O(n)$ .

### 2.2.3 Zusammenfassung

Man kann eine Menge  $S$  von  $n$  Schlüsseln aus  $[0, \dots, N-1]$  so abspeichern, dass gilt

1. Platzbedarf ist  $O(n)$
2. Erwartete Aufbauzeit  $O(n)$
3. Zugriffszeit (Lookup)  $O(1)$  worst-case

Dynamisierung ist möglich (Dynamic Perfect Hashing). Idee: Zeigen, dass die gewählten  $k$ -Werte mit großer Wahrscheinlichkeit für weitere Schlüssel funktionieren.

## 3 Planare Graphen

Literatur: Nishizekim und Chiba (Planar Graphs). Graph kann in die Ebene gezeichnet werden, ohne dass sich Kanten kreuzen. Wir betrachten ungerichtete Graphen  $G=(V,E)$ .

### 3.1 Definition

1. Ein Graph  $G=(V,E)$  ist planar, wenn  $G$  eine planare Zeichnung hat.
2. Eine planare Zeichnung von  $G$  ordnet jedem Knoten  $v$  einen Punkt  $p \in \mathbb{R}^2$  (Ebene) zu,  $p = pos(x)$  heißt die Position von  $v$ , und jeder Kante  $(v, w)$  eine stetige Kurve im  $\mathbb{R}^2$  mit den Endpunkten  $pos(v)$  und  $pos(w)$  zu, sodass sich diese Kurven paarweise nicht schneiden, außer in ihren Endpunkten.

$G$  planar  $\Leftrightarrow \exists$  planare Zeichnung.

## Beispiele

**nicht-planar**  $K_{3,3}$  bipartiter vollständiger Graph mit jeweils 3 Knoten auf jeder Seite.  $K_5$  vollständiger Graph mit 5 Knoten. Ist ein Graph nicht planar, kann einer der beiden nicht-planaren Graphen gefunden werden.

## 3.2 Planaritätstest

Frage: ist der Graph planar?

1. Falls planar: planare Zeichnung
2. Falls nicht: möglichst kleiner nicht-planarer Teilgraph ( $K_{3,3}$  oder  $K_5$ )

## Beobachtung

- $G$  ist planar  $\Leftrightarrow \exists$  planare Zeichnung auf einer Kugeloberfläche
- Oberflächenstruktur von Polyedern kann durch planare Graphen dargestellt werden. (zB Würfel)

## 3.3 Wichtige Begriffe und Definitionen

### 3.3.1 Knotenzusammenhang

Der Zusammenhang eines Graphen (genauer Knotenzusammenhang).

- $G$  heißt einfach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar  $(v, w)$  von Knoten einen Pfad zwischen  $v$  und  $w$  gibt. Zusammenhangskomponenten sind zusammenhängende Teilgraphen. Der Knoten, der den Graph zerfallen lässt, nennt man Artikulationspunkt (cut-vertex)
- $G$  heißt zweifach zusammenhängend (biconnected), falls  $G \setminus \{v\}$  für jeden Knoten  $v \in V$  zusammenhängend ist. **Splitgraphen**  $G_1$  und  $G_2$  durch Entfernung eines Separationspaares, erweitert um Kopieen des Entfernten Paares. Kante innerhalb des Separationspaares kann existieren oder nicht.
- Ein zweifach zusammenhängender Graph  $G$  heißt dreifach zusammenhängend, wenn für beliebige Knoten  $v, w$  gilt,  $G \setminus \{v, w\}$  ist zusammenhängend. Die Knoten, die den Graph zerfallen lassen nennt man Separationspaar.
- Allgemein  $k$ -fach zusammenhängend kann man beliebige  $k-1$  Knoten entfernen, sodass  $G$  zusammenhängend bleibt.

1-fach, 2-fach und 3-fach kann mit DFS in Zeit  $O(n+m)$  gelöst werden.



### 3.3.2 Beobachtung

Ein nicht-zweifach zusammenhängender Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn seine zweifach Zusammenhangskomponenten (Blöcke) planar sind.

**Idee** Konstruiere für jeden Block eine planare Zeichnung, sodass alle Cut-Vertices außen liegen und kleben diese zusammen.

### 3.4 Planare Einbettung

(Plane Graph) Abstrakte planare Zeichnung eines Graphen:

- Keine Positionen (Koordinaten) für die Kanten
- Angabe der Flächen (Faces) in einer möglichen planaren Zeichnung

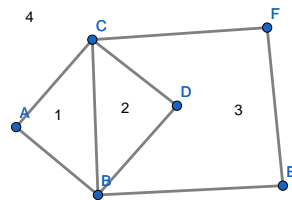


Figure 5: Die Faces sind die Flächen, die durch die Kanten eingeschlossen werden.

**Alternativ** Festlegung der Reihenfolge der Nachbarknoten jedes Knotens (Adjazenzliste) in einer möglichen planaren Zeichnung gegen den Uhrzeigersinn. Wir arbeiten meistens mit der 2. Alternative. Die beiden Definitionen sind äquivalent.

**Planaritätstest** bzw Einbettung besteht dann in der Aufgabe die Adjazenzlisten in eine Reihenfolge zu sortieren, so dass diese eine planare Einbettung definiert (falls möglich). Im Allgemeinen besitzt ein planarer Graph verschiedene planare Einbettungen (Hinweis: Einbettung ist eindeutig für 3-fach zusammenhängende Graphen). Beispiel für nicht-eindeutige Einbettungen (siehe Graphik). Die Faces sind die Flächen, die durch die Kanten eingeschlossen werden.

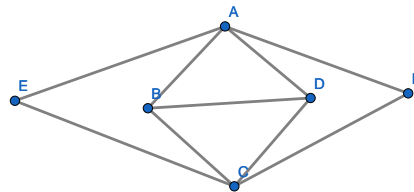


Figure 6: Graph mit nichteindeutiger Einbettung: Rotation des unteren Teils (B und D) ergibt verschiedene Faces

**Unterteilung (Subdivision)** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph.  $G'$  heißt Unterteilung oder Subdivision von  $G$ , wenn  $G'$  aus  $G$  durch Ersetzen von Kanten durch Pfade entsteht (Platzieren neuer (Unterteilungs-)Knoten auf bestehende Kanten).

### 3.5 Die Euler-Formel

Sei  $G$  eine zusammenhängende planare Einbettung mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten und  $f$  Faces. Dann gilt

$$n - m + f = 2$$

*Beweis Euler-Formel.* Induktion über  $m$

$m = 0$  : Graph besteht aus einem isolierten Knoten:  $n=1, f=1$

$m > 0$  : Sei  $G$  eine planare Einbettung mit  $m$  Kanten,  $n$  Knoten und  $f$  Faces

IA Für alle Einbettungen mit  $m-1$  Kanten gilt die Formel

Fall1  $G$  ist azyklisch (dh: Baum)

1.  $f = 1$
2.  $G$  besitzt Knoten  $v$  mit  $\deg(v) = 1$  (Blatt)

Die planare Einbettung  $G \setminus \{v\}$  ist zusammenhängend und hat  $n-1$  Knoten und  $m-1$  Kanten.

$$IA : (n-1) - (m-1) + f = 2$$

Fall2  $G$  ist kein Baum dh besitzt einen Kreis ( $f > 1$ ). Sei  $e$  eine beliebige Kante auf dem Kreis. Betrachte die planare Einbettung  $G \setminus \{e\}$

- $G \setminus \{e\}$  ist zusammenhängend
- $G \setminus \{e\}$  hat  $m-1$  Kanten,  $n$  Knoten und  $f-1$  Flächen

$$IA : n - (m-1) + (f-1) = 2$$

□

### 3.5.1 Folgerung

Sei  $G$  ein planarer Graph mit  $n \geq 3$  Knoten und  $m$  Kanten, dann gilt  $m = 3n - 6$ . dh  $m = O(n)$ , also linear viele Kanten.

*Proof.* Ein maximal planarer Graph ist ein planarer Graph, der durch Hinzufügen einer Kante  $(v, w) \notin E$  nicht-planar wird. Beobachtung: Alle Faces in jeder planaren Einbettung von  $G$  sind Dreiecke (Triangulierung). Jedes Face in einer Triangulierung hat 3 Rand-Kanten und jede Kante liegt am Rand von 3 Faces.

$$\Rightarrow 3f = 2m$$

Einstsetzen in Euler-Formel

$$\begin{aligned} n - m + \frac{2}{3}m &= 2 \\ m &= 3n - 6 \end{aligned}$$

$m \leq 3n - 6$  für beliebige planare Graphen

□

### 3.5.2 Folgerung

Sei  $G$  ein **bipartiter** planarer Graph Dann gilt  $m \leq 2n - 4$ . Beweis: Keine Kreise ungerader Länge in bipartiten Graphen. Kleinstmögliche Fläche in einem bipartiten Graphen ist ein Viereck.

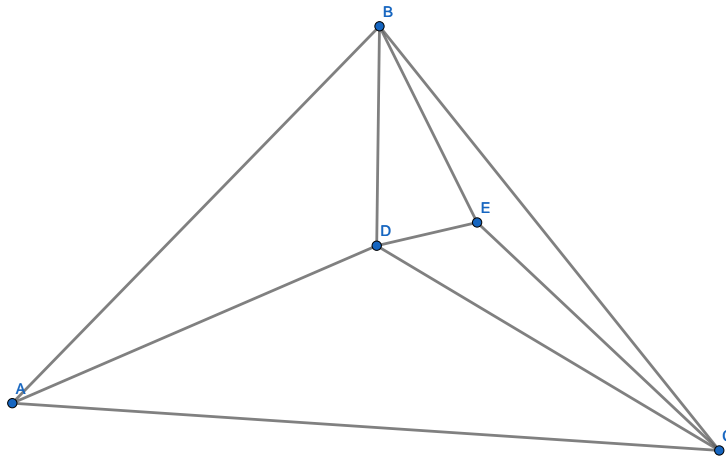


Figure 7: Beispiel für maximal planaren Graphen

### 3.5.3 Folgerung

$K_{3,3}$  und  $K_5$  sind nicht planar. Jeder planare Graph besitzt einen Knoten  $v$  mit  $\deg(v) \leq 5$ .

*Proof.* Annahme  $\forall v \in V \deg(v) \geq 6$ ,  $m = \sum_{v \in V} \frac{\deg(v)}{2} \geq \frac{6n}{2} = 3n$  □

## 3.6 Das Färbungsproblem für planare Graphen

Knotenfärbung:  $k$  Farben  $\{1, \dots, k\}$ . Finde eine Abbildung  $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , sodass  $f(v) \neq f(w)$  für alle Kanten  $(v, w) \in E$ . **Frage:** Wie viele Farben  $k$  sind notwendig? (minimales  $k$ ):

- $k=n$  geht immer
- notwendig  $k=n$  für  $K_n$

### 3.6.1 Vierfarbensatz

$k=4$  für planare Graphen. Ursprung in der Darstellung von Landkarten beim Einfärben der Länder, sodass benachbarte Länder verschiedene Farben haben.

**Dualer Graph**  $G = (V, E)$  Für jedes Land (Fläche) einen Knoten  $v \in V, (v, w) \in E \Leftrightarrow$  Länder  $v$  und  $w$  haben eine gemeinsame Grenze.

1.  $G$  ist planar
2. Knotenfärbung von  $G \Leftrightarrow$  Färbung der Karte

Einfacher, als der Vierfarbensatz ist der Fünffarbensatz.

*Proof.* Induktion über  $n$

IA für alle Graphen mit  $n \leq 5$ .

Sei  $G$  ein planarer Graph mit  $n > 5$ . Aus Folgerung 3:  $G$  besitzt einen Knoten mit  $\deg(v) \leq 5$ .

Fall 1  $G$  besitzt einen Knoten  $v$  mit  $\deg(v) \leq 4$ . Nach IA  $G \setminus \{v\}$  besitzt eine 5-Färbung. Betrachte die  $r$  Farben der Nachbarn von  $v$  in  $G$ , dann gilt  $r \leq 4$  ( $\deg(v) \leq 4$ )  $\Rightarrow$  mindestens eine Farbe frei. Diese erhält  $v$ .

Fall 2 Alle Knoten haben mindestens Grad 5. Aus Folgerung 3: Sei  $v \in V$  mit  $\deg(v) = 5$ . Beobachtung:  $v$  besitzt 2 Nachbarnknoten  $x, y$  mit  $(x, y) \notin E$  (dh  $x, y$  unabhängig), sonst totaler Graph  $K_5$ . Betrachte  $G' = G \setminus \{v\}$ : Planare Einbettung von  $G$  und entferne  $v$ .  $G'' =$  Verschmelze die unabhängigen Knoten  $x$  und  $y$  zu einem Knoten  $z$ .  $G''$  ist planar.  $G''$  hat nur noch  $n-2$  Knoten.

Aus IA:  $G''$  kann mit 5 Farben gefärbt werden. Sei  $c$  die Farbe von  $z$  in dieser Färbung. Expandiere  $z$  wieder zu  $x, y$  mit  $\text{color}(x) = \text{color}(y) = c$ .  $\Rightarrow$  Die 5 Nachbarn von  $v$  belegen höchstens 4 Farben und eine Farbe ist frei.  $\square$

**Andere Anwendung** Finde eine große unabhängige Knotenmenge (Independent Set). Beobachtung: 5-Färbung  $\rightarrow$  Farbklasse (Menge von Knoten der gleichen Farbe) mit mindestens  $\frac{n}{5}$  Knoten. Alle Knoten einer Farbe bilden ein Independent Set.

### 3.7 Satz von Kuratowski

**Notation** Verschmelzung (Kontraktion) entlang einer Kante  $e = (v, w)$ :  $G|e \rightarrow$  Graph den man durch Verschmelzen der Endknoten  $v$  und  $w$ .  $G$  planar  $\Rightarrow G|e$  planar.

**Satz** Ein Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung (Subdivision) des  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  enthält.

*Proof.* Satz von Kuratowski

$\Rightarrow$  trivial

$\Leftarrow$  (Jeder Graph ohne eine Unterteilung des  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  ist planar) Induktion über  $n$

Sei  $G$  ein Graph mit  $n$  Knoten, der keine Unterteilung des  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  enthält.

IB  $n \leq 5$  (dh, kein  $K_5$ )

IA Für alle Graphen mit weniger als  $n$  Knoten gilt die Behauptung

Fall 1  $G$  ist nicht 3-fach zusammenhängend

Angenommen,  $G$  ist 2-fach zusammenhängend  $\Rightarrow G$  besitzt ein Separationspaar  $(x, y)$ ,

das  $G$  in die Blöcke  $G_1$  und  $G_2$  zerlegt, mit jeweils weniger, als  $n$ . Offensichtlich enthalten  $G_1$  und  $G_2$  keinen  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ . Nach IA sind  $G_1$  und  $G_2$  planar. Betrachte jeweils eine planare Einbettung von  $G_1$  und  $G_2$  mit  $x$  und  $y$  (bzw. Kanze  $(x,y)$ ) außen liegt. Dann kann man diese Eingbettungen leicht zu einer Einbettung von  $G$  zusammenfügen.  
 $\Rightarrow G$  ist planar.

Fall 2  $G$  ist 3-fach zusammenhängend

**Lemma 1** Die planare Einbettung aus 2-fach zusammenhängenden Graphen  $G$  ist eindeutig, genau dann wenn  $G$  eine Unterteilung eines 3-fach zusammenhängenden Graphen.

**Corollar** Die planare Einbettung eines 3-fach zusammenhängenden Graphen ist eindeutig.

**Lemma 2** Sei  $G$  ein 3-fach zusammenhängender Graph mit mindestens 5 Knoten. Dann enthält  $G$  eine Kante  $e$ , sodass  $G|e$  3-fach zusammenhängend ist.

**Lemma 3** Sei  $e$  eine beliebige Kante in  $G$ . Falls  $G|e$  eine Unterteilung des  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  enthält, dann gilt dies auch für  $G$ . Dh Kontraktion einer Kante erzeugt keinen  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ .

IS Sei  $G$  ein 3-fach zusammenhängender Graph mit  $n$  Knoten ohne  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ . Aus Lemma 2 folgt  $\exists$  Kante  $e$ , sodass  $G|e (=G')$  3-fach zusammenhängend ist. Aus Lemma 3 folgt  $G'$  hat weder  $K_5$  noch  $K_{3,3}$ . Nach IA ist  $G'$  planar. Aus Lemma 1 folgt,  $G'$  hat eine eindeutige planare Einbettung. Betrachte diese Einbettung in der Umgebung von  $z$  ( $=$ Knoten, der aus der Knotraktion von  $x,y$  entsteht). Seien  $x_1, \dots, x_k$  die Nachbarknoten von  $z$ , angeordnet im Uhrzeigersinn, gemäß der planaren Einbettung. Ersetze  $z$  wieder durch die Kante  $(x,y)$  und Konstruiere eine planare Einbettung für  $G$ . Sei  $x'_1, \dots, x'_l$  die Teilfolge der Knoten  $x_1, \dots, x_k$ , die in  $G$  benachbart zu  $x$  sind.

Fall 1 Alle Nachbarn von  $y$  liegen auf einem Face-Segment zwischen  $x'_i$  und  $x'_{i+1}$  zyklisch und inklusive Ränder.  $\deg(y) \geq 3$ , da  $G$  3-fach zusammenhängend. Dann kann man leicht eine planare Einbettung für  $G'$  konstruieren.

Fall 2 Nicht alle Nachbarn von  $y$  (außer  $x$ ) liegen im selben Segment  $(x'_i, x'_{i+1})$

Fall 2.1  $y$  hat  $\geq 3$  Nachbarn in  $x'_1, \dots, x'_l$ .  $G$  enthält eine Unterteilung des  $K_5$  definiert durch die Kanten.

Fall 2.2  $y$  hat einen Nachbarn  $u$  in einem Segment  $P_i = (x'_i, x'_{i+1}) \setminus (x'_i, x'_{i+1})$  und einem anderen  $u \notin P_i$ .  $G$  enthält eine Unterteilung des  $K_{3,3}$

Fall 2.3  $y$  hat 2 Nachbarn in  $x'_1$  und  $x'_j$  mit  $j \neq i+1$  und  $i \neq j+1$  (zyklisch).  $G$  enthält eine Unterteilung des  $K_{3,3}$

$\Rightarrow$  Es kann nur Fall 1 vorkommen, also ist  $G$  planar. □

### 3.7.1 Beweise der Lemmata

**Lemma 1** Die Einbettung eines zweifach planaren Graphen  $G$  ist eindeutig  $\Leftrightarrow G$  ist eine Unterteilung eines 3-fach zusammenhängenden Graphen.

*Proof.* Für  $A \Leftrightarrow B$  zeige:

1.  $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$
2.  $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$

**1)** Sei  $G$  2-fach zusammenhängend, aber keine Unterteilung eines 3-fach zusammenhängenden Graphen. Beobachtung Dann existiert ein Separationspaar  $x, y$  mit Split-Graphen  $G_1$  und  $G_2$ , sodass weder  $G_1$  noch  $G_2$  ein Pfad ist. Annahme Für alle Separationspaare  $(x,y)$  sind diese Splitgraphen Pfade  $\Rightarrow G$  ist eine Unterteilung eines 3-fach zusammenhängenden Graphen **Widerspruch zur Annahme**. Betrachte eine planare Einbettung von  $G$  und das Separationspaar  $(x, y)$  gemäß Beobachtung. Durch Drehung bzw Spiegelung von  $G_1$  oder  $G_2$  in dieser Einbettung erhält man eine neue Einbettung. Ist nur eine Seite ein Pfad, existiert nur eine Einbettung.

**2)** Sei  $G$  2-fach zusammenhängend und planar mit einer nicht-eindeutigen Einbettung. Dh, es existieren mindestens 2 verschiedene Einbettungen  $E(G)$  und  $E'(G)$ .  $\Rightarrow$  es existiert ein Face Zyklus  $C$  in  $E$ , der nicht in  $E'$  existiert. Betrachte  $E$  mit  $C$  als äußeres Face.  $C$  zerlegt  $G$  in mindestens 2 Komponenten, die wahlweise auf der einen oder anderen Seite von  $C$  eingebettet werden können. Dann existieren 2 Knoten  $x,y$  auf  $C$  die die beiden Komponenten trennt.  $\Rightarrow (x,y)$  ist ein Separationspaar, sodass beide Split-Graphen keine Pfade sind.  $\Rightarrow G$  ist keine Unterteilung eines 3-fach zusammenhängenden Graphen.  $\square$

**Lemma 2** Seien  $G$  ein 3-fach zusammenhängender Graph mit mindestens 5 Knoten, dann existiert eine Kante  $e$  in  $G$ , sodass  $G|e$  3-fach zusammenhängend ist.

*Proof.* (indirekt)

Annahme Für jede Kante  $e$  in  $G$ :  $G|e$  ist nicht 3-fach zusammenhängend.  $\Rightarrow G|e$  enthält ein Separationspaar  $(x', z)$ . Sei  $e=(x,y)$  mit  $x'$  als Resultat der Kontraktion von  $(x,y)$ , Im Originalgraphen  $G$  ist  $\{x, y, z\}$  eine Separationsmenge. Wähle die Kante  $e=(x,y)$  und den Knoten  $z$  so, dass eine möglichst große Komponente  $H$  entsteht. Sei  $H'$  der Rest der Graphen (ohne  $H, x, y, z$ ). Dann betrachte eine Kante  $e'=(z,v)$  mit  $u$  in  $H'$  (existiert, denn sonst wäre  $(x,y)$  ein Sep-Paar in  $G$ ). Auch  $G|e'$  ist nicht 3-fach zusammenhängend (nach Annahme)  $\Rightarrow$  Es existiert ein Knoten  $v$  mit  $\{x, y, z\}$  ist Separationsmenge von  $G$ . Für  $v$  gibt es 3 Möglichkeiten:

1.  $v \in H'$
2.  $v = x$ . Dann existiert Komponente, die mindestens  $H$  und  $y$  enthält. Widerspruch zur Maximalität von  $H$ .
3.  $v = y$ . Symmetrisch zu Fall 2 (Widerspruch)

Das sind alle möglichen Fälle. Dh  $v \notin H$

**3** Für jede Kante  $e$ :  $G|e$  enthält eine Unterteilung des  $K_5$  oder  $K_{3,3} \Rightarrow G$  enthält eine solche Unterteilung.

□

## 4 Maximal Matchings im bipartiten Graphen

**Definition** Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph

1.  $M \subseteq E$  heißt Matching von  $G$ , falls keine 2 Kanten aus  $M$  einen gemeinsamen Endpunkt (Knoten) haben.
2. Falls  $e \in M$ , dann heißt  $e$  paarned. Ein Knoten  $v$  heißt gepaart, falls er einen Endpunkt einer paarenden Kante ist.
3. Ein Matching  $M$  heißt maximal, falls  $|M| \geq |M'|$  für alle Matchings  $M'$ .

**Beobachtung**  $|M| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Rightarrow$  Falls  $M = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , dann ist  $M$  maximal.

**Idee für Algorithmus** Kontruire  $M_1, \dots, M_l$  von Matchings mit  $|M_i| < |M_{i+1}|$  und  $M_l$  maximal. Schritt (Erhöhung/Erweiterung)  $M \rightarrow M'$  mit  $|M'| = |M| + 1$ .

**Definition** Ein einfacher Pfad  $P = (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{2k-1}, v_{2k})$  (ungerade Zahl von Kanten) heißt erweiternder Pfad (augmenting path) für ein Matching  $M$ , falls

1.  $v_1$  und  $v_2$  sind frei ( $\Rightarrow (v_1, v_2), (v_{2k-1}, v_{2k}) \notin M$ )
2. Kanten von  $P$  sind abwechselnd in  $M$  und  $E \setminus M$

Beobachtung: Man kann  $M$  um 1 vergrößern durch vertauschen von paarenden und nicht paarenden Kanten von  $P$ . Für  $M = \emptyset$  gilt jede Kante  $(v, w)$  ist erhöhender Pfad.

### 4.1 Lemma 1

Sei  $M$  ein Matching und  $P$  ein erweiternder Pfad für  $M$ , dann ist  $M \oplus P = (M \cup P) \setminus (M \cap P)$  (symmetrische Differenz) ein Matching und  $|M \oplus P| = |M| + 1$ .

---

**Algorithmus 1** : Grundalgorithmus

---

```

M ← ∅;
while ∃ ein Pfad P für M do
    M ← M ⊕ P;
end

```

---

Beobachtung: Knotendusjunkte erweiternde Pfade  $P_1, \dots, P_k$  kommen gleichzeitig behandelt werden:  $M \leftarrow M \oplus (P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_k)$ . Problem: Finde möglichst viele Knotendisjunkte Pfade für ein Matching  $M$  in einem Schritt.



#### 4.1.1 Satz 1

Seien  $M$  und  $N$  Matchings mit  $|M| = r$  und  $|N| = s$  und  $s > r$ . Dann enthält  $M \oplus N$  mindestens  $s-r$  Knotendisjunkte erweiternde Pfade für  $M$ .

*Proof.*  $M \oplus N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$  dh Kanten die entweder in  $M$  oder in  $N$  sind. Sei  $\overline{G} = (V, M \oplus N)$ . Da  $M$  und  $N$  Matchings sind, ist jeder Knoten in  $\overline{G}$  Endpunkt höchstens einer Kante aus  $M \setminus N$  und höchstens einer Kante aus  $N \setminus M \Rightarrow$  Für alle Knoten in  $\overline{G}$  gilt,  $\text{outdeg}_{\overline{G}}(c) \leq 2$  dh  $\text{outdeg}_{\overline{G}}(c) \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow \overline{G}$  zerfällt in Zusammenhangskomponenten der folgenden Form

1. isolierter Knoten
2. Pfade, die abwechselnd Kanten aus  $M \setminus N$  und  $N \setminus M$  enthalten.
3. Kreis wie 2).

□

## 5 Übung

### Übung 3:

1) Durch entfernen von Kanten soll der Graph zerlegt werden. (Unions in umgekehrter Reihenfolge)

2) Zu zeigen:

$$a(z, n) \leq \lfloor \frac{4m}{n} \rfloor \text{ für } z = \alpha(m, n)$$

Definition von  $a$  und  $\alpha$

$$a(z, n) = \min\{j | A(z, j) > \log n\}$$

$$\alpha(m, n) = \min\{i | A(i, \lfloor \frac{4m}{n} \rfloor) > \log n\}$$

Behauptung:

$$a(\alpha(m, n), n) \leq \lfloor \frac{4m}{n} \rfloor$$

Beweis: indirekt. Annahme:

$$a(\alpha(m, n), n) > \lfloor \frac{4m}{n} \rfloor$$

$$\Rightarrow A(\alpha(m, n), \lfloor \frac{4m}{n} \rfloor) \leq \log n$$

Widerspruch zur Definition von  $\alpha$ , denn

$$A(\alpha(m, n), \lfloor \frac{4m}{n} \rfloor) > \log n$$

**3.a)** Union-Split-Find. (van Emde-Boas acht Datenstruktur mit  $\log \log n$  für Union-Split-Find. ) Gegeben ist eine Array

- Split(i): Markiere i
- Find(x): Finde nächste Markierung
- Union(x): Lösche Markierung x

Balancierter (blatt-orientierter) Baum zur Speicherung der markierten Elemente. Einfügen der markierten Elemente als Blätter des Baums

- Split = Insert
- Union = Delete
- Find = Locate

Platz = #Intervalle, Zeit  $O(\log n)$

### 3.b)

- Insert = Split
- Delete = Union
- FindMin = Find(1)

### Übung 4:

1) Rekursive Funktion zum Aufbau eines RST  
A[1,...,n] von Schlüsseln. P[1,...,n] Prioritäten

---

---

```
for  $l \leftarrow 0$  to  $n$  do  
   $P[l] \leftarrow \text{random}()$ 
```

---

Rekursive Funktion RST(A,P,l,r) baut einen RST für A[l,...,r] und liefert Pointer auf die Wurzel.

```
class rst_node {  
    key  
    prio  
    left, right: rst_node  
}
```

---

---

```
def RST(A,P,l,r):  
    if  $l > r$  then  
        return null;  
     $i \leftarrow \text{max}[P, l, r]$  ;  
     $q \leftarrow \text{new rstnode}$  ;  
     $q.\text{key} \leftarrow A[i]$  ;  
     $q.\text{prio} \leftarrow P[i]$  ;  
     $q.\text{left} \leftarrow \text{RST}(A,P,l,i-1)$  ;  
     $q.\text{right} \leftarrow \text{RST}(A,P,i+1,r)$  ;  
    return q;
```

---

2) Spiel B symmetrisch zu Spiel A.

3) Implementierung von Hashing mit Verkettung. Idee: Tafelgröße  $s$  beliebig. Hashfunktion  $h(x) = x \cdot \text{mods}$

---

```

def Insert(x):
def Lookup(x):
def Delete(x):

```

---

4) Belegungsfaktor  $\beta = \frac{n}{m}$   $m$  = Tafelgröße. Bei Hashing mit Verkettung ist  $\beta$  = erwartete Länge einer Liste. Laufzeit für eine Operation  $O(1 + \beta) = O(1)$  für  $\frac{1}{2} \leq \beta \leq 2$

**Rehash** Die Tabelle muss in eine größere Liste kopiert werden

---

```

def Insert(x):
    ... ;
     $n \leftarrow n + 1$  ;
    if  $\frac{n}{m} > 2$  then
         $m_0 \leftarrow m$  ;
         $m \leftarrow 2m$  ;
         $T' \leftarrow \text{new int}[m]$ 
    Kopiere alte Tabelle in neue ;
def Delete(x):
     $n \leftarrow n - 1$  if  $\frac{n}{m} < \frac{1}{2}$  then
        ...;
         $m \leftarrow \frac{m}{2}$ ;
    Kopiere alte Tabelle in neue ;

```

---

## 5.1 Übung 5

## 5.2 Übung 6

## 5.3 Übung 7

## 5.4 Übung 8

2) Belegungsfaktor  $= \beta = \frac{n}{k}$ . Ziel ist  $\frac{1}{2} \leq \beta \leq 2$ . Erwartete Laufzeit pro Operation  $O(1 + \beta)$ . Rehashing: Test nach Insert/Delete. Wenn  $\beta$  außerhalb des Zielintervalls, Rehash mit  $k \leftarrow n$ .

Potentialmethode:  $\text{pot} : D \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Folge von Insert, Rehash mit  $\text{pot} = 2 \cdot \text{Anzahl der Markierten}$

1. Rehash löscht alle Markierungen
2. Insert markiert neues Element

pot = 2 · Anzahl der Eingefügten + 1 · (Anzahl der Gelöschten seit dem letzten Rehash)

- $T_{amontisiert}(INSERT) = O(1 + \beta) + 2$
- $T_{amontisiert}(INSERT) = O(1 + \beta) + 1$
- $T_{amontisiert}(INSERT)$ 
  - Verdopplung:  $O(n) - 2 \cdot neue$
  - Halbierung:  $-n$

3) Darstellungen von planaren Einbettungen:

- Face Zyklen. Auflistung der Knoten eines Faces
- Nachbarn jedes Knotens. Sortierung der Adjazenzlisten

Implementierung als doppelt verkettete Listen.

## 5.5 Übung 9

1)  $G$  planarer Graph mit  $n \geq 3$ . Sei  $d$  der maximale Grad eines Knotens und  $n_i =$  Anzahl von Knoten vom Grade  $i$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 &\geq n_7 + 2n_8 + \dots + (d-6)n_d + 12 \\
 0 &\geq 5n_1 - 4n_2 - 3n_3 - 2n_4 - n_5 + n_7 + 2n_8 + \dots + (d-6)n_d + 12 \\
 \sum_{i=1}^d (i-6) \cdot n_i + 12 &\leq 0 \\
 \underbrace{\sum_{i=1}^d i \cdot n_i}_{2m} - \underbrace{\sum_{i=1}^d 6n_i}_{6n} + 12 &\leq 0 \\
 m - 3n + 6 &\leq 0 \\
 m &\leq 3n - 6
 \end{aligned}$$

2) Für jede Kante  $e=(x,y)$  gilt:  $G|e$  enthält eine Unterteilung des  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ , dann enthält auch  $G$  eine solche Unterteilung. Sei  $H$  die Unterteilung des  $K_5$  bzw  $K_{3,3}$  in  $G|e$ .

Fall 1:  $z \in H$  und  $\deg_H(z) = 0$ , dann existiert  $H$  auch in  $G$ .

Fall 2:  $z \in H$  mögliche Grade  $\deg_H(z) \in \{2, 3, 4\}$

Fall 2.1:  $\deg_H(z) = 2$  ( $z$  liegt auf einer Kante)  $G \Rightarrow G$  enthält  $H$  der gleichen Art

Fall 2.2:  $\deg_H(z) = 3$   $z$  ist Ende eines  $K_{3,3}$  Fall 2.3:  $\deg_H(z) = 4$   $z$  ist Ende eines  $K_5$

1. Hat  $x$  eine Kante in  $H$ , so ist  $x$  ein Subdivision-Knoten (symmetrisch für  $y$ )
2. Hat  $x$  2 Kanten in  $H$ , so bilden  $x$  und  $y$  einen  $K_{3,3}$

## 6 Allgemeines

### 6.1 Einschub: Erwartungswerte

Situation:  $n$  Ereignisse, die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $\text{prob}(i)$  auftreten. Jedes Ereignis besitzt einen Wert  $\text{val}(i)$ .

$$E(\text{val}) = \sum_{i=1}^n \text{prob}(i) \cdot \text{val}(i)$$

Spezialfall: Gleichverteilung:  $\text{prob}(i) = \frac{1}{n}$  für  $1 \leq i \leq n$ . Dann gilt:

$$E(\text{val}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{val}(i) = \text{Mittelwert}$$

### 6.2 Integrierende Reihe

$x \leq 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i \cdot i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

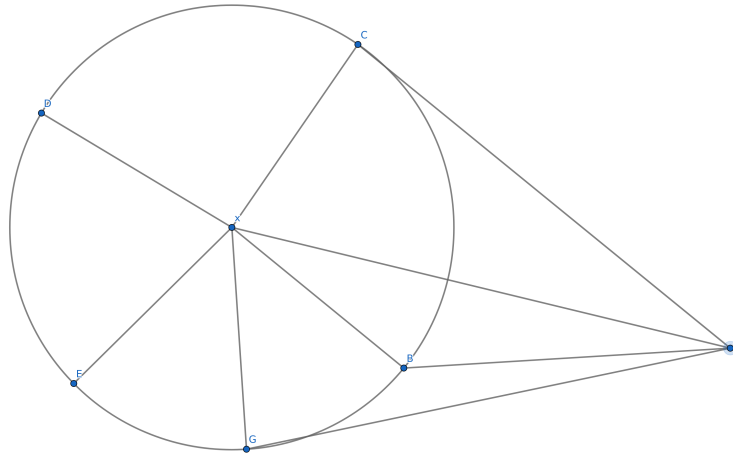


Figure 8: Beweis Satz von Kuratowski: Fall 2.1

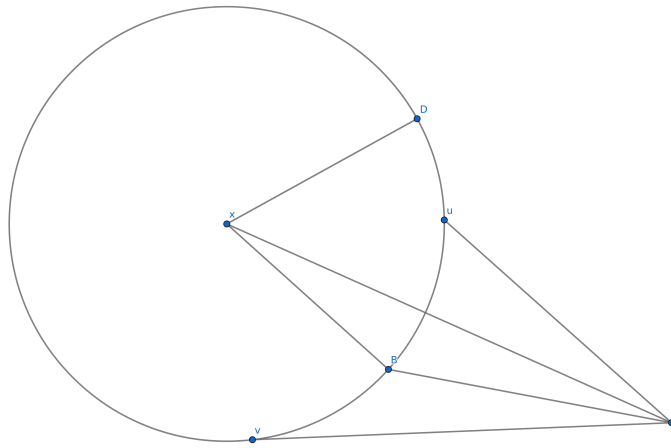


Figure 9: Beweis Satz von Kuratowski: Fall 2.2

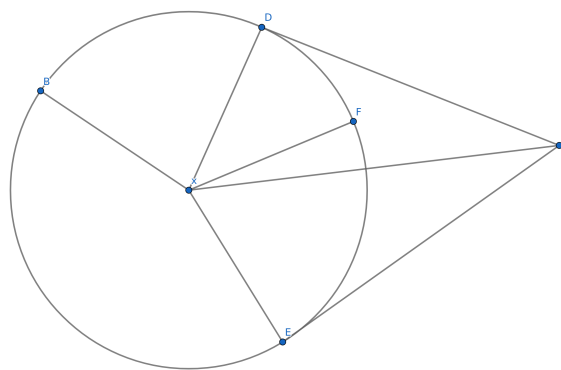


Figure 10: Beweis Satz von Kuratowski: Fall 2.3