Berechenbare Analysis
Zusammenfassung
SoSe 19

Benedikt Lüken-Winkels

July 23, 2019

1 Berechenbare reelle Zahlen

1.1 Definition

Eine reelle Zahl ist dann berechenbar, wenn eine der **äquivalenten** Bedingungen erfüllt ist:

1. **Binärdarstellung** Es gibt eine TM, die eine unendlich lange binäre Representation von x auf dem Ausgabeband erzeugt.

2. **Fehlerabschätzung** Es gibt eine TM, die Approximationen liefert. Formal: $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist Folge rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert. Bedeutet, dass alle q_i innerhalb eines bestimmten beliebig kleinen Bereichs um x liegen. Größter möglicher Fehler $2^0 = 1$

3. **Intervalschachtelung** Es gibt eine berechenbare Intervallschachtelung mit rationalen Endpunkten: Angabe zweier Folgen rationaler Zahlen mit der Bedingung, dass sie beide gegen x gehen und x dazwischen liegt. Ziel: Abstände von linker und rechter Schranke soll gegen null gehen.

4. **Dedekindscher Schnitt** Menge $\{q \in \mathbb{Q} | q < x\}$ ist entscheidbar. Beispiel $\sqrt{2}$ ist berechenbar. $\{q | q < \sqrt{2}\} = \{q | q^2 < 2\}$. $\Rightarrow$ Es gibt einen Test, ob die Zahl kleiner ist.

5. Man kann x als Summe von abzählbar unendlich vielen Brüchen darstellen: $z \in \mathbb{Z}$ $A \subseteq \mathbb{N}$, $x_A = \sum_{i \in A} 2^{-i-1}$, $x = z + x_A$

6. Es exisitert eine **Kettenbruchentwicklung**

Folgerungen / Beispiele

- $\Rightarrow$ Für Berechenbarkeit muss nur eine der Bedingungen bewiesen werden. Menge der berechenbaren reelen Zahlen = $\mathbb{R}_c$
- Nicht berechenbare reele Zahlen durch Diagonalisierung konstruierbar
- e berechenbar, weil die Fehlerabschätzung (2) existiert
- π (Notiert als alternierede Reihe) berechenbar, weil Intervalschachtelung existiert
- $\sqrt{2}$ berechenbar, weil Dedekindscher Schnitt existiert.

1.2 unendl Binärfolge zu schnell konvergenten rationalen Folgen

1.3 Typ-2-Turingmaschinen

Besonderheiten: Eingabeband ist read-only, Ausgabeband kann nur nach rechts schreiben. Undendliche Eingabe

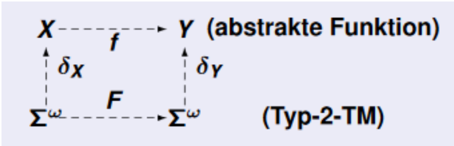

Figure 1: $(\delta_X, \delta_Y) - berechenbar$ TYP-2-TM

Berechnete Funktion Eine Typ-2-TM M berechnet eine Funktion $f_M :\subseteq \Sigma^w \to \Sigma^w$, die aus der Eingabe nach und nach die Ausgabe als Wort auf dem Ausgabeband erzeugt.

1.4 Orakel-Turingmaschine OTM

$\mathbb{F}$ ist die Menge aller partiellen Funktionen auf dem Alphabet der OTM:
$\mathbb{F} = \{f | f :\subseteq \Sigma^* \to \Sigma^*\}$

Funktion Orakel als Eingabe und Parameter als Eingabe: Liefert Resultat

Berechnete Funktionen Eine OTM M berechnet eine Funktion $f_M^\phi \in \mathbb{F}$, die bei der Eingabe w und einem Orakel ϕ einen Endzustand v ohne Fehler erreicht.
$\Rightarrow$ für $\phi \in Def(f \circ \delta_X) : f \circ \delta_X(\phi) = \delta_Y \circ \Gamma(\phi)$

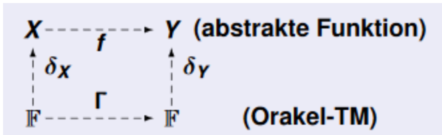

Figure 2: $(\delta_X, \delta_Y) - berechenbar$ OTM

1.5 Komposition der Modelle

$\Gamma_3 = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$. Γ_3 muss Γ_2 das richtige Orakel liefern. Bei der Implementierung ruft Γ_3 das Approx von Γ_2 und Γ_2 wiederum das Approx von Γ_1 auf. **OTM und Implementierung sind das Gleiche.**

1.6 Mehrwertige Funktionen

Mehrwertige Funktion $f :\subseteq X \rightrightarrows Y$ ist eine Funktion, die für ein x mehrere Werte für y haben kann. Ein Funktionswert eines x sind alle möglichen Werte aus Y.

Komposition von mehrwertigen Funktionen In allen Fällen, muss das Ergebnis definiert sein. Definitionsbereich der Komposition $f \circ g$ sind die x und y, die in beiden Funktionen im Definitionsbereich liegen. Außerhalb des Definitionsbereichs dürfen die Funktionen 'machen was sie wollen'. Beispiele:

- In der Implementierung: Approx von 2 und $\sqrt{2} * \sqrt{2}$.
- Konversion von $\mathbb{R}$ in Dezimalzahlen. Rundung mit erlaubter Schwankung ergibt verschiedene Ausgaben. Eindeutige Umwandlung (Rundung) ist nicht berechenbar, aber mehrwertig bb.

2 Darstellung, Darstellungsberechenbarkeit

Eine surjektive Funktion von $\subseteq \Sigma^{\psi}$ oder $\subseteq (F)$ nach X wird Darstellung genannt. $\delta(\phi) = x$ (OTM) $\delta(p) = x$ (Typ-2-TM), dann sind ϕ und p δ-Namen von x

Cauchy-Darstellung $M = [A \to B]$ ist die Menge aller partiellen Funktionen $f :\subseteq A \to B$.

Definition $\rho :\subseteq [\mathbb{N} \to \mathbb{Q}] \to \mathbb{R}$

$$\rho(f) = x \Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N})|x - f(i)| < 2^{-i}$$
$$\rho = \text{Cauchy-Darstellung der reellen Zahlen.}$$

2.1 Beispiele berechenbarer reeller Funktionen

Berechenbare reelle Funktion im Bezug auf die Cauchy-Darstellung

- Grundrechenarte: + - *
- Absolutbetrag
- min, max
- konstante Funktionen, die auf ein berechenbares c zeigen
- Projektionen
- Polynome mit berechenbarem Koeffizienten
- exp, sin, cos
- sqrt

2.2 Effektive Stetigkeit

Definition $S \subseteq \mathbb{N}$ ist rekursiv aufzählbar.

1. $< i, j > \in S\ mit\ f(B^n(i)) \subseteq B^1(j)$ erzeugt Rechtecke, durch die die Funktion laufen muss. Die Funktion liegt innerhalb der Schläuche.
2. für jedes $x \in Def(f)$ kann man ein $< i, j > \in S$ finden. Die Schläuche werden beliebig fein.

Definition

- Eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann berechenbar, wenn sie effektiv stetig ist.
- Aus Stetigkeit folgt Berechenbarkeit. Aus nicht Stetigkeit folgt nicht Berechenbarkeit
- Um nicht-Berechenbarkeit zu zeigem, zeigt man nicht-Stetigkeit
- Aus nicht-effektiver Stetigkeit folgt nicht-Berechenbarkeit. Bsp $f(x) = 1, x \geq 0; 0, x < 0$ ist nicht stetig und nicht berechenbar

Effektive Stetigkeit $\Leftrightarrow$ Berechenbarkeit

- $\Rightarrow$ Eine OTM M mit Eingabe n durchsucht S und das Orakel nach einem Tupel aus S und einem Wertpaar aus dem Orakel, sodass die Kugel aus dem Orakelwertpaar innerhalb der Kugel aus dem Tupel aus S, bei dem der Radius $< 2^{-n}$ ist, liegt. Weil das Intervall aus <i,j> beliebig klein werden kann, ist liefert M so eine ausreichend genaue Approximation.
- $\Leftarrow$ Eine OTM M sucht zu einer Eingabe <i,j> und $n \in \mathbb{N}$ eine Folge rationaler $q_0, q_1, ..., q_m$ Zahlen, sodass $B^1(i) \subseteq B(q_k, 2^{-k})$ wobei $0 \leq k \leq m$ und M ein $\overline{q}_n$ liefert, bei dem $B(\overline{q}_n, 2^{-n}) \subseteq B^1(j)$. m ist die Schranke für die Orakelanfragen. Die Folge umschließt B(i) und wird immer kleiner und enger um B(i).
  - Bedingung 1: Nimm ein <i,j> aus S. Dann gibt es für $x \in B^1(i)$ einen Namen $\psi = \phi$ für $k \leq m$. Bei dem $f_M^{\psi}(n)$ ein $\overline{p}_n$ liefert, sodass gilt: $f(B^1(i)) \subset B(\overline{q}_n, 2^{-n}) \subseteq B^1(j)$.
  - Bedingung 2: Wähle die Eingabe n so, dass gilt $2^{-n} < \epsilon$. Dann bildet der Schnitt aus allen Kuglen von q_k, B(i) und die Kugel um die Ausgabe von M $\overline{q}_n$ ergibt B(j). Dadurch, dass für n gilt, dass $2^{-n} < \epsilon$, wird der Schlauch, den i und j aufspannen beliebig fein.

3 Nicht-Berechenbarkeit

$sign : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sign ist nicht (ρ, ρ) berechenbar

3.1 Links/rechtsberechenbare reelle Zahlen

Eine Reelle Zahl x ist linksberechebar, wenn $\{q \in \mathbb{Q} | q < x\}$ rekursiv aufzählbar ist. Eine Zahl ist berechenbar, genau dann wenn sie links und rechstberechenbar ist.

3.2 Vergleich mit berechenbaren reellen Zahlen

Die Berechenbarkeiseigenschaft einer Zahl ergibt eine Intervallschachtelung (und umgekehrt)

4 Berechenbare Folgen reeller Zahlen

Modelle zur Realisierung: OTM, Typ-2-TM

Konvergenzmodul Wie schnell geht die Folge gegen einen Grenzwert $x = \overline{x} = \lim_{i\to\infty} x_i$.
Der Konvergenzmodul $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ergibt n für eine konvergente Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert, für das gilt $|x - r_i| < 2^{-n}$ mit $i \geq m(n)$

- bb Folge + bb Modul $\Rightarrow$ Grenzwert bb
- bb Folge + **nicht** bb Modul $\Rightarrow$ Grenzwert nicht bb. Lemma 4.30. Baue eine linksberechebare reelle Folge.

Berechenbare Folge, mit nicht-bb Modul Konstruierte Folge f:

- f ist nicht auf x_A definiert
- rekursiv aufzählbares A und $(x_n^M)_{n\in\mathbb{N}}$
- Für jedes $x < x_A$ gibt es ein n mit $x < x_n^M$, man findet also immer ein größeres x
- Für $x > x_A$ ist f(x):= 0.
- $\Rightarrow$ f ist stetig auf $\mathbb{R}$ $\{x_A\}$ (Sprung bei x_A)

Die Eigenschaften von f hängen nun von A ab:

- Wenn A nun entscheidbar ist, dann gibt es eine OTM, die entscheiden kann, ob $x < x_A$ *oder* $x > x_A$ ist. f ist dann auf $\mathbb{R} \setminus x_A$ berechenbar.
- Ist A nicht entscheidbar, aber aufzählbar, ist f nicht (ρ, ρ)-bb. $\Rightarrow$ Probleme durch Beschränkung auf bb Argumente

5 Berechenbare Menge reeller Zahlen

5.1 Berechenbare Mengen reeller Zahlen

Für eine berechenbare Menge gibt es einen Algortihmus, der entscheidet, ob ein Element in einer Menge ist oder nicht, oder dann in eine Endlosschleife läuft (semi-entscheidbar). Typ-2-TM und OTM sind implementierbar. Nimmt man die Berechenbarkeit auf Typ-2-TM und OTM, gibt es keine Darstellung, für die Gleichheit **entscheidbar** ist. Auf diesem Berechenbarkeitsmodell sind die einzigen entscheidbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k$ und $\emptyset$, da die charakteristische Funktion χ_A stetig sein muss und somit konstant 1 oder 0.

Entscheidbarkeit Eine Menge A aus X mit der Darstellung δ_X heißt δ_X-entscheidbar, wenn die Funktion, die bestimmt, ob ein $x \in A$, (δ_X, ρ)-berechenbar ist. (ρ, ρ)-entscheidbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ nennt man entscheidbar. $\Rightarrow$ Modifikation des Entscheidbarkeitsbegriffs, indem die charakteristische Funktion durch die Abstandsfunktion ersetzt wird.

Berechenbarkeit

- Eine abgeschlossene Menge heißt berechenbar, wenn sie leer ist oder der Abstand berechenbar ist.
- Eine offene Menge heißt berechenbar, wenn das Komplement der Menge berechenbar ist.

Plot von Mengen Berechenbarkeit $\Rightarrow$ Abstand berechenbar. Beispiel Mandelbrot/Julia-Menge. Wenn die Funktion geplottet werden kann man sie berechnen (effektive Stetigkeit)

Berechenbarer Graph $\leftrightarrow$ Berechenbare Funktion Wenn $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine totale Funktion ist, ist der Graph von f genau dann eine berechenbare abgeschlossene Menge, wenn f eine berechenbare Funktion ist.

6 Implementierung

Approx realisiert Orakelanfragen

6.1 DAG Directed Acyclic Graph

Acyclic, weil sonst um die Zahl zu berechnen, die Zahl selbst berechnet werden müsste.

Rundung Naive multiplikatoin von rationalen Zahlen verdoppelt bei jeder Iteration den Speicherplatz $\Rightarrow$ Rundung

Caching Stuktur der DAGs ausnutzen. Bekannte Ergebnisse aus DAGs werden gespeichert (Anwendung bei der Komposition)

Limit-Operator Modul ist konstant n wenn $|f(n,x) - g(x)| < 2^{-n}$

Lambda-Funktionen Funktionen als Eingabe für Variablen

7 Allgemeines

Abzählbar unendlich Es besteht eine Bijektion zu $\mathbb{N}$.

Bemerkung Es gibt so viele berechenbare reelle Zahlen, wie Programme

Entscheidbar Eine Menge M ist entscheidbar, wenn eine Funktion $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar ist und angibt, ob ein Element in der Menge ist, oder nicht. Bzw eine TM bei jeder Eingabe anhält.

Rekursiv aufzählbar Eine Menge M ist rekursiv aufzählbar, wenn eine Funktion $f_A :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar ist und angibt, ob ein Element in der Menge ist, aber sonst undefiniert ist. Bzw eine TM bei einer korrekten Angabe anhält und sonst in eine Endlosschleife läuft.

δ-rekursiv-aufzählbar Eine Orakel TM existiert, anhält wenn das Element aus der Menge ist.

Diagonalisierung **$\mathbb{R}$ ist überabzählbar**
Beweisidee: Man nimmt eine Folge reeller Zahlen zwischen 0 und 1. Mit der Diagonialisierung zeigt man, dass es eine Zahl gibt, die nicht in dieser Folge enthalten ist. Da dies für eine beliebige Menge geht, kann es keine Folge geben, die alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 enthält.

Isomorphismus Ein Isomorphismus ist zum Beispiel eine Funktion zwischen zwei Mengen, die bijektiv ist und ein Homomorphismus ist. Elemente der einen Menge werden auf bedeutungsgleiche Elemente der anderen Menge abgebildet.

Homomorphismus Ein Homomorphismus bildet die Elemente aus der einen Menge so in die andere Menge ab, dass sich ihre Bilder dort hinsichtlich der Struktur ebenso verhalten, wie sich deren Urbilder in der Ausgangsmenge verhalten.

Abgeschlossene Menge Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn der Rand ein Teil der Menge ist. Die Menge ist berechenbar, wenn sie leer ist oder der Abstand $(\rho, \rho_>)$-berechenbar ist.

Offene Menge Eine Menge heißt offen, wenn kein Element der menge auf ihrem Rand liegt. Die Menge ist berechenbar, wenn das Komplement berechenbar ist.

Chomsky-Hierarchie

- Typ-0: Beliebige formale Grammatik. Rekursiv aufzählbar
- Typ-1: Kontextsensitive Grammatik
- Typ-2: Kontextfreie Grammatik
- Typ-3: Reguläre Grammatik