Berechenbare Analysis Zusammenfassung SoSe 19

Benedikt Lüken-Winkels

July 5, 2019

Contents

1 Chomsky Hierarchie

- Typ-0: Beliebige formale Grammatik. Rekursiv aufzählbar
- Typ-1: Kontextsensitive Grammatik
- Typ-2: Kontextfreie Grammatik
- Typ-3: Reguläre Grammatik

2 Abzählbar unendlich

Es besteht eine Bijektion zu $\mathbb{N}$.

Bemerkung Es gibt so viele berechenbare reelle Zahlen, wie Programme

3 Entscheidbar

Eine Menge M ist entscheidbar, wenn eine Funktion $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar ist und angibt, ob ein Element in der Menge ist, oder nicht. Bzw eine TM bei jeder Eingabe anhält.

4 Rekursiv aufzählbar

Eine Menge M ist rekursiv aufzählbar, wenn eine Funktion $f_A :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar ist und angibt, ob ein Element in der Menge ist, aber sonst undefiniert ist. Bzw eine TM bei einer korrekten Angabe anhält und sonst in eine Endlosschleife läuft.

5 δ-rekursiv-aufzählbar

wenn eine Orakel TM existiert wenn die TM anhält.

6 Berechenbarkeit

6.1 Berechenbarkeit einer reellen Zahl

Eine reelle Zahl ist dann berechenbar, wenn eine der **äquivalenten** Bedingungen erfüllt ist:

1. Es gibt eine TM, die eine unendlich lange binäre Representation von x auf dem Ausgabeband erzeugt.

2. **Fehlerabschätzung** Es gibt eine TM, die Approximationen liefert. Formal: $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist Folge rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert. Bedeutet, dass alle q_i innerhalb eines bestimmten beliebig kleinen Bereichs um x liegen. Größter möglicher Fehler $2^0 = 1$

3. **Intervalschachtelung** Es gibt eine berechenbare Intervallschachtelung mit rationalen Endpunkten: Angabe zweier Folgen rationaler Zahlen mit der Bedingung, dass sie beide gegen x gehen und x dazwischen liegt. Ziel: Abstände von linker und rechter Schranke soll gegen null gehen.

4. **Dedekindscher Schnitt** Menge $\{q \in \mathbb{Q} | q < x\}$ ist entscheidbar. Beispiel $\sqrt{2}$ ist berechenbar. $\{q | q < \sqrt{2}\} = \{q | q^2 < 2\}$. $\Rightarrow$ Es gibt einen Test, ob die Zahl kleiner ist.

5. Man kann x als Summe von abzählbar unendlich vielen Brüchen darstellen: $z \in \mathbb{Z}$ $A \subseteq \mathbb{N}$, $x_A = \sum_{i \in A} 2^{-i-1}$, $x = z + x_A$

6. Es exisitert eine Kettenbruchentwicklung

Folgerungen / Beispiele

- $\Rightarrow$ Für Berechenbarkeit muss nur eine der Bedingungen bewiesen werden. Menge der berechenbaren reelen Zahlen $= \mathbb{R}_c$
- Nicht berechenbare reele Zahlen durch Diagonalisierung konstruierbar
- e berechenbar, weil die Fehlerabschätzung (2) existiert
- π (Notiert als alternierede Reihe) berechenbar, weil Intervalschachtelung existiert
- $\sqrt{2}$ berechenbar, weil Dedekindscher Schnitt existiert.

6.1.1 Übersetzung zwischen unendlichen Binärfolgen und schnell konvergierenden rationalen Folgen

Rationale Folge $\Rightarrow$ Binärfolge Realisiert durch OTM oder Typ-2-TM. Es gibt eine Folge, allerdings kann die Transformation nicht programmiert werden, weil nicht mehr verändert werden kann, was die OTM geschrieben hat (soll mit 1 oder 0 angefangen werden).

6.2 Links/rechtsberechenbare reelle Zahlen

Halteproblem kodiert links oder rechtsberechenbare Zahlen.
Links **und** rechtsberechenbare Zahl ergibt Berechenbarkeit. Approximationsmenge ist **rekurisv aufzählbar** und nicht entscheidbar.

6.3 $(\rho, \rho) - berechenbar$ '(Approximation, Approximation)-bb'

- Eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann berechenbar, wenn sie effektiv stetig ist.
- Aus Stetigkeit, Berechenbarkeit. Aus nicht Stetigkeit folgt nicht Berechenbarkeit
- Um nicht-Berechenbarkeit zu zeigem, zeigt man nicht-Stetigkeit
- Aus nicht-effektiver Stetigkeit folgt nicht-Berechenbarkeit. Bsp $f(x) = 1, x \geq 0; 0, x < 0$ ist nicht stetig und nicht berechenbar

6.4 $(\delta, \delta) - berechenbar$ '(Name, Name)-bb'

6.5 Berechenbare Folgen reeller Zahlen

Konvergenzmodul Wie schnell geht die Folge gegen einen Grenzwert. $\overline{x} = \lim_{i \to \infty} x_i$.

- bb Folge + bb Modul $\Rightarrow$ Grenzwert bb
- bb Folge + **nicht** bb Modul $\Rightarrow$ Grenzwert nicht bb. Lemma 4.30. Baue eine linksberechebare reelle Folge.

6.6 Berechenbare Mengen reeller Zahlen

- entscheidbar
- berechenbar
- rekursiv aufzählbar

Plot von Mengen Berechenbarkeit $\Rightarrow$ Abstand berechenbar. Beispiel Mandelbrot/Julia-Menge. Wenn die Funktion geplottet werden kann man sie berechnen (effektive Stetigkeit)

7 Effektiv stetig

Aus effektiver Stetigkeit folgt Stetigkeit. Aus effektiver Stetigkeit folgt idR Berechenbarkeit Menge S zerlegt in i und j. Jeweils formale Kugeln.

8 Diagonalisierung

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar Beweisidee: Man nimmt eine Folge reeller Zahlen zwischen 0 und 1. Mit der Diagonialisierung zeigt man, dass es eine Zahl gibt, die nicht in dieser Folge enthalten ist. Da dies für eine beliebige Menge geht, kann es keine Folge geben, die alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 enthält.

9 Isomorphismus

Ein Isomorphismus ist zum Beispiel eine Funktion zwischen zwei Mengen, die bijektiv ist und ein Homomorphismus ist. Elemente der einen Menge werden auf bedeutungsgleiche Elemente der anderen Menge abgebildet.

10 Homomorphismus

Ein Homomorphismus bildet die Elemente aus der einen Menge so in die andere Menge ab, dass sich ihre Bilder dort hinsichtlich der Struktur ebenso verhalten, wie sich deren Urbilder in der Ausgangsmenge verhalten.

11 Berechenbare reelle Funktionen

Wurzel: bei negativen Argumenten macht die OTM irgendetwas (undefiniert). Lösung: Die Approximation liefert eine rationale Zahl, die keine negativen Zahlen akzeptiert und

12 Darstellung

12.1 Cauchy-Darstellung

$M = [A \to B]$ ist die Menge aller partiellen Funktionen $f :\subseteq A \to B$.

Definition $\rho :\subseteq [\mathbb{N} \to \mathbb{Q}] \to \mathbb{R}$

$$\rho(f) = x \Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N})|x - f(i)| < 2^{-i}$$
$$\rho = \text{Cauch-Darstellung der reellen Zahlen.}$$

13 Turingmaschinen (Berechenbarkeitsmodelle)

13.1 Typ-2-Turingmaschinen

Besonderheiten: Eingabeband ist read-only, Ausgabeband kann nur nach rechts schreiben. Undendliche Eingabe

13.2 Orakel-Turingmaschine OTM

$\mathbb{F}$ ist die Menge aller partiellen Funktionen auf dem Alphabet der OTM:
$\mathbb{F} = \{f | f :\subseteq \Sigma^* \to \Sigma^*\}$

Funktion Orakel als Eingabe und Parameter als Eingabe: Liefert Resultat

13.3 Komposition der Modelle

$\Gamma_3 = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$. Γ_3 muss Γ_2 das richtige Orakel liefern. Bei der Implementierung ruft Γ_3 das Approx von Γ_2 und Γ_2 wiederum das Approx von Γ_1 auf.

OTM und Implementierung sind das Gleiche.

14 Implementierung

Approx realisiert Orakelanfragen

14.1 DAG Directed Acyclic Graph

Acyclic, weil sonst um die Zahl zu berechnen, die Zahl selbst berechnet werden müsste.

Rundung Naive multiplikatoin von rationalen Zahlen verdoppelt bei jeder Iteration den Speicherplatz $\Rightarrow$ Rundung

Caching Stuktur der DAGs ausnutzen. Bekannte Ergebnisse aus DAGs werden gespeichert (Anwendung bei der Komposition)

Limit-Operator Modul ist konstant n wenn $|f(n,x) - g(x)| < 2^{-n}$

Lambda-Funktionen Funktionen als Eingabe für Variablen

15 Mengenlehre

15.1 Abgeschlossene Menge

15.2 Offene Menge

15.3 Kompakte Menge