

# Berechenbare Analysis

## Zusammenfassung

### SoSe 19

Benedikt Lücken-Winkels

July 16, 2019

## Contents

<b>1</b>	<b>Berechenbarkeit</b>	<b>3</b>
1.1	Berechenbarkeit einer reellen Zahl . . . . .	3
1.1.1	Unendliche Binärfolgen $\rightarrow$ schnell-konvergierende rationale Folgen	3
1.2	Mehrwertige Funktionen . . . . .	4
1.3	Links/rechtsberechenbare reelle Zahlen . . . . .	4
1.4	$(\rho, \rho) - berechenbar$ '(Approximation, Approximation)-bb' . . . . .	4
1.5	Berechenbare Folgen reeller Zahlen . . . . .	4
1.6	Berechenbare Mengen reeller Zahlen . . . . .	5
1.7	Nichtberechenbare reelle Funktionen . . . . .	5
1.8	Links/rechtsberechenbare reelle Zahlen . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Effektive Stetigkeit</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Berechenbare reelle Funktionen</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Darstellung</b>	<b>6</b>
4.1	$(\delta, \delta) - berechenbar$ '(Name, Name)-bb' . . . . .	6
4.2	Cauchy-Darstellung . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Turingmaschinen (Berechenbarkeitsmodelle)</b>	<b>7</b>
5.1	Typ-2-Turingmaschinen . . . . .	7
5.2	Orakel-Turingmaschine OTM . . . . .	7
5.3	Komposition der Modelle . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Implementierung</b>	<b>8</b>
6.1	DAG Directed Acyclic Graph . . . . .	8

<b>7</b>	<b>Allgemeines</b>	<b>8</b>
7.1	Abzählbar unendlich . . . . .	8
7.2	Entscheidbar . . . . .	8
7.3	Rekursiv aufzählbar . . . . .	8
7.4	$\delta$ -rekursiv-aufzählbar . . . . .	8
7.5	Diagonalisierung . . . . .	9
7.6	Isomorphismus . . . . .	9
7.7	Homomorphismus . . . . .	9
7.8	Abgeschlossene Menge . . . . .	9
7.9	Offene Menge . . . . .	9
7.10	Kompakte Menge . . . . .	9
7.11	Chomsky-Hierarchie . . . . .	9

# 1 Berechenbarkeit

## 1.1 Berechenbarkeit einer reellen Zahl

Eine reelle Zahl ist dann berechenbar, wenn eine der **äquivalenten** Bedingungen erfüllt ist:

1. **Binärdarstellung** Es gibt eine TM, die eine unendlich lange binäre Representation von  $x$  auf dem Ausgabeband erzeugt.
2. **Fehlerabschätzung** Es gibt eine TM, die Approximationen liefert. Formal:  $q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} (q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ist Folge rationaler Zahlen, die gegen  $x$  konvergiert. Bedeutet, dass alle  $q_i$  innerhalb eines bestimmten beliebig kleinen Bereichs um  $x$  liegen. Größter möglicher Fehler  $2^0 = 1$
3. **Intervallschachtelung** Es gibt eine berechenbare Intervallschachtelung mit rationalen Endpunkten: Angabe zweier Folgen rationaler Zahlen mit der Bedingung, dass sie beide gegen  $x$  gehen und  $x$  dazwischen liegt. Ziel: Abstände von linker und rechter Schranke soll gegen null gehen.
4. **Dedekindscher Schnitt** Menge  $\{q \in \mathbb{Q} | q < x\}$  ist entscheidbar. Beispiel  $\sqrt{2}$  ist berechenbar.  $\{q | q < \sqrt{2}\} = \{q | q^2 < 2\}$ .  $\Rightarrow$  Es gibt einen Test, ob die Zahl kleiner ist.
5. Man kann  $x$  als Summe von abzählbar unendlich vielen Brüchen darstellen:  $z \in \mathbb{Z}$   
 $A \subseteq \mathbb{N}, x_A = \sum_{i \in A} 2^{-i-1}, x = z + x_A$
6. Es existiert eine **Kettenbruchentwicklung**

### Folgerungen / Beispiele

- $\Rightarrow$  Für Berechenbarkeit muss nur eine der Bedingungen bewiesen werden. Menge der berechenbaren reellen Zahlen  $= \mathbb{R}_c$
- Nicht berechenbare reelle Zahlen durch Diagonalisierung konstruierbar
- $e$  berechenbar, weil die Fehlerabschätzung (2) existiert
- $\pi$  (Notiert als alternierende Reihe) berechenbar, weil Intervallschachtelung existiert
- $\sqrt{2}$  berechenbar, weil Dedekindscher Schnitt existiert.

### 1.1.1 Unendliche Binärfolgen $\rightarrow$ schnell-konvergierende rationale Folgen

**Rationale Folge  $\Rightarrow$  Binärfolge** Realisiert durch OTM oder Typ-2-TM. Es gibt eine Folge, allerdings kann die Transformation nicht programmiert werden, weil nicht mehr verändert werden kann, was die OTM geschrieben hat (soll mit 1 oder 0 anfangen werden).

## 1.2 Mehrwertige Funktionen

Mehrwertige Funktion  $f : \subseteq X \rightrightarrows Y$  ist eine Funktion, die für ein  $x$  mehrere Werte für  $y$  haben kann. Ein Funktionswert eines  $x$  sind alle möglichen Werte aus  $Y$ .

**Komposition von mehrwertigen Funktionen** In allen Fällen, muss das Ergebnis definiert sein. Definitionsbereich der Komposition  $f \circ g$  sind die  $x$  und  $y$ , die in beiden Funktionen im Definitionsbereich liegen. Außerhalb des Definitionsbereichs dürfen die Funktionen 'machen was sie wollen'. Beispiele:

- In der Implementierung: Approx von 2 und  $\sqrt{2} * \sqrt{2}$ .
- Konversion von  $\mathbb{R}$  in Dezimalzahlen. Rundung mit erlaubter Schwankung ergibt verschiedene Ausgaben. Eindeutige Umwandlung (Rundung) ist nicht berechenbar, aber mehrwertig bb.

## 1.3 Links/rechtsberechenbare reelle Zahlen

Halteproblem kodiert links oder rechtsberechenbare Zahlen.

Links **und** rechtsberechenbare Zahl ergibt Berechenbarkeit. Approximationsmenge ist **rekursiv aufzählbar** und nicht entscheidbar.

## 1.4 $(\rho, \rho)$ – berechenbar '(Approximation, Approximation)-bb'

## 1.5 Berechenbare Folgen reeller Zahlen

Modelle zur Realisierung: OTM, Typ-2-TM

**Konvergenzmodul** Wie schnell geht die Folge gegen einen Grenzwert  $\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ .

Der Konvergenzmodul  $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ergibt  $n$  für eine konvergente Folge  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , die gegen  $x$  konvergiert, für das gilt  $|x - r_i| < 2^{-n}$

- bb Folge + bb Modul  $\Rightarrow$  Grenzwert bb
- bb Folge + **nicht** bb Modul  $\Rightarrow$  Grenzwert nicht bb. Lemma 4.30. Baue eine linksberechenbare reelle Folge.

### Bestimmung des Konvergenzmoduls

**Konstruierte Folge**  $(x_n)_n$  nicht-bb Grenzwert, aber monoton wachsend. Nicht berechenbarer Konvergenzmodul.

Die Funktion  $f$  ist auf den bb reellen Zahlen stetig, aber nicht bb mit einer nicht-bb kleinsten Nullstelle. Definitionsbereich von  $f$  ist  $\mathbb{R} \setminus \{x_A\}$ , also nicht stetig auf  $x_A$ , da für  $x > x_A$  wird  $f(x) := 0$  gesetzt. Eigenschaften von  $f$  sind abhängig von  $A$  :

- Ist  $A$  entscheidbar und der Definitionsraum ohne  $x_A$  ist berechenbar. (Sonst ist  $A$  ist so kompliziert, wie das Halteproblem und  $x_A$  kodiert das Halteproblem in einer reellen Zahl)
- $A$  ist rekursiv-aufzählbar, aber nicht entscheidbar.  $f$  bildet die bb reellen Zahlen auf die bb reellen Zahlen ab.

Funktion bildet bb Zahlen auf bb Zahlen ab oder eine Funktion ist überall stetig, springt aber trotzdem.  $\Rightarrow$  Typ-2 bb-Modell wird bevorzugt um solche Probleme zu umgehen.

## 1.6 Berechenbare Mengen reeller Zahlen

NACHTRAGEN

- entscheidbar
- berechenbar
- rekursiv aufzählbar

**Plot von Mengen** Berechenbarkeit  $\Rightarrow$  Abstand berechenbar. Beispiel Mandelbrot/Julia-Menge. Wenn die Funktion geplottet werden kann man sie berechnen (effektive Stetigkeit)

**Berechenbarer Graph  $\leftrightarrow$  Berechenbare Funktion** Wenn  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  eine totale Funktion ist, ist der Graph von  $f$  genau dann eine berechenbare abgeschlossene Menge, wenn  $f$  eine berechenbare Funktion ist.

## 1.7 Nichtberechenbare reelle Funktionen

$sign : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $sign$  ist nicht  $(\rho, \rho)$  berechenbar

## 1.8 Links/rechtsberechenbare reelle Zahlen

Eine Reelle Zahl  $x$  ist linksberechenbar, wenn  $\{q \in \mathbb{Q} | q < x\}$  rekursiv aufzählbar ist. Eine Zahl ist berechenbar, genau dann wenn sie links und rechtsberechenbar ist.

**Vergleich mit berechenbaren reellen Zahlen** Die Berechenbareigenschaft einer Zahl ergibt eine Intervallschachtelung (und umgekehrt)

## 2 Effektive Stetigkeit

$S \subseteq \mathbb{N}$  ist rekursiv aufzählbar.

1.  $\langle i, j \rangle \in S$  mit  $f(B^n(i)) \subseteq B^1(j)$  erzeugt Rechtecke, durch die die Funktion laufen muss. Die Funktion liegt innerhalb der Schläuche.

2. für jedes  $x \in Def(f)$  kann man ein  $\langle i, j \rangle \in S$  finden. Die Schläuche werden beliebig fein.
- Eine Funktion  $f : \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann berechenbar, wenn sie effektiv stetig ist.
  - Aus Stetigkeit folgt Berechenbarkeit. Aus nicht Stetigkeit folgt nicht Berechenbarkeit
  - Um nicht-Berechenbarkeit zu zeigen, zeigt man nicht-Stetigkeit
  - Aus nicht-effektiver Stetigkeit folgt nicht-Berechenbarkeit. Bsp  $f(x) = 1, x \geq 0; 0, x < 0$  ist nicht stetig und nicht berechenbar

### Effektive Stetigkeit $\Leftrightarrow$ Berechenbarkeit

- $\Rightarrow$  Eine OTM  $M$  durchsucht  $S$  und das Orakel nach einem Tupel aus  $S$  und einem Wertpaar aus dem Orakel, sodass die Kugel aus dem Orakelwertpaar innerhalb der Kugel aus dem Tupel aus  $S$  liegt.  $M$  liefert so eine ausreichend genaue Approximation.
- $\Leftarrow$  Eine OTM  $M$  sucht zu einer Eingabe  $\langle i, j \rangle$  eine Folge rationaler  $q_0, q_1, \dots, q_m$  Zahlen, sodass  $B^1(i) \subseteq B(q_m, 2^{-k})$  und  $M$  ein  $\bar{q}_n$  liefert, bei dem  $B(\bar{q}_n, 2^{-n}) \subseteq B^1(j)$ 
  - Bedingung 1: für jedes  $x \in Def(f)$  gibt es ein  $\phi$  und ein  $\gamma$

## 3 Berechenbare reelle Funktionen

Wurzel: bei negativen Argumenten macht die OTM irgendetwas (undefiniert). Lösung: Die Approximation liefert eine rationale Zahl, die keine negativen Zahlen akzeptiert und

## 4 Darstellung

$\delta(\phi) = x$  (OTM)  $\delta(p) = x$  (Typ-2-TM), dann sind  $\phi, p$   $\delta$ -Namen von  $x$

### 4.1 $(\delta, \delta) - berechenbar$ '(Name, Name)-bb'

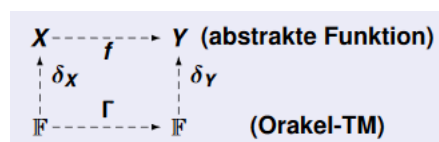


Figure 1:  $(\delta_X, \delta_Y) - berechenbar$  OTM

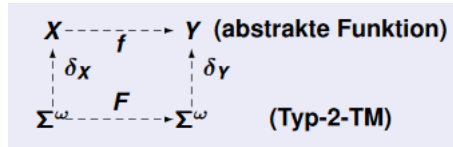


Figure 2:  $(\delta_X, \delta_Y)$  – berechenbar TYP-2-TM

## 4.2 Cauchy-Darstellung

$M = [A \rightarrow B]$  ist die Menge aller partiellen Funktionen  $f : \subseteq A \rightarrow B$ .

**Definition**  $\rho : \subseteq [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\rho(f) = x \Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N}) |x - f(i)| < 2^{-i}$$

$\rho$  = Cauchy-Darstellung der reellen Zahlen.

# 5 Turingmaschinen (Berechenbarkeitsmodelle)

## 5.1 Typ-2-Turingmaschinen

Besonderheiten: Eingabeband ist read-only, Ausgabeband kann nur nach rechts schreiben.  
Undendliche Eingabe

**Berechnete Funktion** Eine Typ-2-TM  $M$  berechnet eine Funktion  $f_M : \subseteq \Sigma^w \rightarrow \Sigma^w$ , die aus der Eingabe nach und nach die Ausgabe als Wort auf dem Ausgabeband erzeugt.

## 5.2 Orakel-Turingmaschine OTM

$\mathbb{F}$  ist die Menge aller partiellen Funktionen auf dem Alphabet der OTM:

$$\mathbb{F} = \{f \mid f : \subseteq \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\}$$

**Funktion** Orakel als Eingabe und Parameter als Eingabe: Liefert Resultat

**Berechnete Funktionen** Eine OTM  $M$  berechnet eine Funktion  $f_M^\phi \in \mathbb{F}$ , die bei der Eingabe  $w$  und einem Orakel  $\phi$  einen Endzustand  $v$  ohne Fehler erreicht.

## 5.3 Komposition der Modelle

$\Gamma_3 = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ .  $\Gamma_3$  muss  $\Gamma_2$  das richtige Orakel liefern. Bei der Implementierung ruft  $\Gamma_3$  das Approx von  $\Gamma_2$  und  $\Gamma_2$  wiederum das Approx von  $\Gamma_1$  auf. **OTM und Implementierung sind das Gleiche.**

## 6 Implementierung

Approx realisiert Orakelanfragen

### 6.1 DAG Directed Acyclic Graph

Acyclic, weil sonst um die Zahl zu berechnen, die Zahl selbst berechnet werden müsste.

**Rundung** Naive multiplikation von rationalen Zahlen verdoppelt bei jeder Iteration den Speicherplatz  $\Rightarrow$  Rundung

**Caching** Struktur der DAGs ausnutzen. Bekannte Ergebnisse aus DAGs werden gespeichert (Anwendung bei der Komposition)

**Limit-Operator** Modul ist konstant  $n$  wenn  $|f(n, x) - g(x)| < 2^{-n}$

**Lambda-Funktionen** Funktionen als Eingabe für Variablen

## 7 Allgemeines

### 7.1 Abzählbar unendlich

Es besteht eine Bijektion zu  $\mathbb{N}$ .

**Bemerkung** Es gibt so viele berechenbare reelle Zahlen, wie Programme

### 7.2 Entscheidbar

Eine Menge  $M$  ist entscheidbar, wenn eine Funktion  $f_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  berechenbar ist und angibt, ob ein Element in der Menge ist, oder nicht. Bzw eine TM bei jeder Eingabe anhält.

### 7.3 Rekursiv aufzählbar

Eine Menge  $M$  ist rekursiv aufzählbar, wenn eine Funktion  $f_A : \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  berechenbar ist und angibt, ob ein Element in der Menge ist, aber sonst undefiniert ist. Bzw eine TM bei einer korrekten Angabe anhält und sonst in eine Endlosschleife läuft.

### 7.4 $\delta$ -rekursiv-aufzählbar

Eine Orakel TM existiert, anhält wenn das Element aus der Menge ist.



## 7.5 Diagonalisierung

$\mathbb{R}$  ist überabzählbar Beweisidee: Man nimmt eine Folge reeller Zahlen zwischen 0 und 1. Mit der Diagonalisierung zeigt man, dass es eine Zahl gibt, die nicht in dieser Folge enthalten ist. Da dies für eine beliebige Menge geht, kann es keine Folge geben, die alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 enthält.

## 7.6 Isomorphismus

Ein Isomorphismus ist zum Beispiel eine Funktion zwischen zwei Mengen, die bijektiv ist und ein Homomorphismus ist. Elemente der einen Menge werden auf bedeutungsgleiche Elemente der anderen Menge abgebildet.

## 7.7 Homomorphismus

Ein Homomorphismus bildet die Elemente aus der einen Menge so in die andere Menge ab, dass sich ihre Bilder dort hinsichtlich der Struktur ebenso verhalten, wie sich deren Urbilder in der Ausgangsmenge verhalten.

## 7.8 Abgeschlossene Menge

Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn der Rand ein Teil der Menge ist. Die Menge ist berechenbar, wenn sie leer ist oder der Abstand  $(\rho, \rho_>)$ -berechenbar ist.

## 7.9 Offene Menge

Eine Menge heißt offen, wenn kein Element der Menge auf ihrem Rand liegt. Die Menge ist berechenbar, wenn das Komplement berechenbar ist.

## 7.10 Kompakte Menge

## 7.11 Chomsky-Hierarchie

- Typ-0: Beliebige formale Grammatik. Rekursiv aufzählbar
- Typ-1: Kontextsensitive Grammatik
- Typ-2: Kontextfreie Grammatik
- Typ-3: Reguläre Grammatik