

Untersuchungen zur Hénon Iteration

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science (M.Sc.)

Universität Trier
FB IV - Informatikwissenschaften
Professur Arithmetische Algorithmen

Erstgutachter: Prof. Dr. Norbert Müller
Zweitgutachter: Prof Dr. Stephan Näher

Vorgelegt am xx.xx.xxxx von:

Benedikt Lüken-Winkels
Baltzstraße 6
54296 Trier
b.lueken.winkels@gmail.com
Matr.-Nr. 1138844

Zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Problemstellung	1
1.3	Zielsetzung	1
1.4	Gliederung/Aufbau der Arbeit	1
2	Grundlagen	2
2.1	Hénon-Abbildung	2
2.2	Taylormodell	4
2.3	Intervallarithmetik	6
2.4	iRRAM	6
3	Analyse	7
4	Entwurf / Konzeption	8
5	Implementierung	9
5.1	Abschnitt 1	9
5.2	Abschnitt 2	9
6	Evaluation	10
7	Diskussion und Ausblick	11
	Literaturverzeichnis	12

Abbildungsverzeichnis

2.1	Hénon-Abbildung: Einfache Evolution	3
2.2	Hénon-Abbildung: Attraktor	4
2.3	Linear und nichtlineare Taylormodelle: Vergleich	5

Tabellenverzeichnis

1. Einleitung

Die Einleitung besteht aus der Motivation, der Problemstellung, der Zielsetzung und einem ersten Überblick über den Aufbau der Arbeit.

1.1 Motivation

Warum ist das zu bearbeitende Themengebiet spannend und relevant?

1.2 Problemstellung

Welches Problem/welche Probleme können in diesem Themengebiet identifiziert werden?

1.3 Zielsetzung

Was ist das Ziel der Arbeit. Wie soll das Problem gelöst werden?

1.4 Gliederung/Aufbau der Arbeit

Was enthalten die weiteren Kapitel? Wie ist die Arbeit aufgebaut? Welche Methodik wird verfolgt?

2. Grundlagen

2.1 Hénon-Abbildung

Die Hénon-Abbildung bietet eine Möglichkeit, das Verhalten eines seltsamen Attraktors (*engl. 'strange attractor'*), wie dem des Lorenz Systems, mit einer recht einfachen Abbildung zu untersuchen.

Konvergieren die Werte einer Funktion in einem bestimmten Wertebereich R , der Fangzone (*engl. 'trapping zone'*), gegen einen Punkt oder eine Kurve, spricht man von einem Attraktor. Dieser Attraktor kann jedoch auch eine komplexere Struktur haben. Auf einem solchen seltsamen Attraktor springen die Werte hin und her und reagieren hochempfindlich auf Änderungen der Initialbedingungen. Dieses Verhalten lässt mit der Abbildung $x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2, y_{i+1} = bx_i$, beziehungsweise

$$f(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx)$$

beobachten. f erfüllt dieselben Kriterien, wie der durch eine dreidimensionale Differenzialgleichung entstehenden Lorenz-Attraktor, allerdings wurde f so definiert, dass auch höhere Iterationszahlen leichter zu berechnen und zu analysieren sein sollen. Die Hénon-Abbildung bildet den \mathbb{R}^2 auf sich selbst ab. Dieser Vorgang besteht aus drei Schritten. Man betrachte eine Fläche entlang der x -Achse gelegen:

Dehnen und Falten

$$T' : x' = x, y' = 1 + y - ax^2$$

Mit dem Parameter a kann die Stärke der Biegung gesteuert werden.

Kontrahieren

$$T'' : x'' = b \cdot x, y'' = y'$$

Ein $|b| < 1$ bedeutet, dass sich die Fläche zusammen zieht. Wird b zu groß gewählt, so entsteht eine zu große Kontraktion und der Attraktor ist schwerer erkennbar. Ist b zu klein, ist der Effekt zu gering und das Verhalten der Abbildung ist nicht mehr chaotisch.

Rotieren

$$T''' : x''' = y'', y''' = x''$$

Im letzten Schritt werden die Achsen vertauscht und somit die Fläche um rotiert.

Die entstehende Abbildung hat unter Anderem folgende Eigenschaften:

- Invertierbar: (x_{n+1}, y_{n+1}) kann eindeutig auf (x_n, y_n) zurückgeführt werden.
- Kontrahiert Flächen: Mit $|b| < 1$ werden Flächen kleiner.

- Besitzt eine Fangzone, die einen Attraktor enthält. Allerdings landen nicht immer alle Orbits in der Fangzone, da wegen x^2 Terme bestimmter Größe nach ∞ laufen können.

Abbildung 2.1 zeigt die einzelnen Schritte einer Evolution der Hénon-Abbildung anhand eines Rechtecks, welches als nichtlineares Taylormodell definiert wurde.

$$x_0 = 0 + 1 \cdot \lambda_1 \quad (\lambda_1 \in [0 \pm 0.4])$$

$$y_0 = 0 + 1 \cdot \lambda_2 \quad (\lambda_2 \in [0 \pm 0.05])$$

Das Rechteck wird gedehnt und gefaltet, dann kontrahiert und zuletzt rotiert, beziehungsweise gespiegelt.

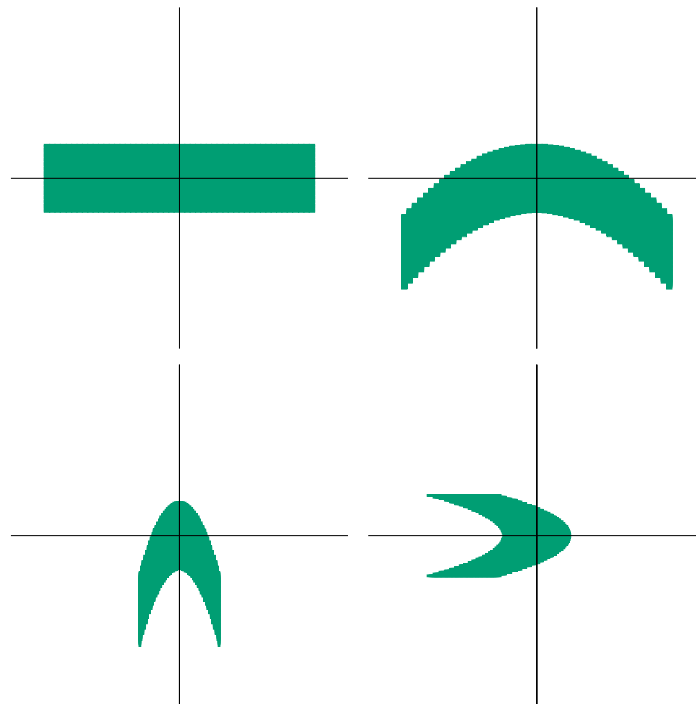


Abbildung 2.1: Einfache Evolution der Hénon Abbildung, aufgeteilt in das initiale Rechteck und die drei Zwischenschritte.

Für die Parameter $a = 1.4$ und $b = 0.3$ ergibt sich eine Fangzone in der sich die Funktionswerte auf einem seltsamen Attraktor bewegen, während die außerhalb gelegenen Punkte gegen unendlich laufen. Das bedeutet, dass ein Punkt, in der Fangzone, beziehungsweise auf dem Attraktor liegt, wiederum auf diesen abgebildet wird. Der Attraktor ist in Abbildung 2.2 zu sehen. Hier wurden, ausgehend vom Punkt $(0, 0)$, 10000 Iterationen der Hénon-Abbildung berechnet und jeweils das Ergebnis eingezeichnet. Es ist deutlich erkennbar, dass sich der Attraktor teils nahe am Rande der Fangzone bewegt. Bereits bei einer leichten Überschätzung des Ergebnisses kann dies dazu führen, dass die Funktionswerte die Fangzone verlassen, auch wenn der tatsächliche Wert eigentlich in dieselbe abgebildet würde. Dies kommt zum Tragen, wenn Intervalle, als Zahlendarstellung gewählt werden, wie es bei `hotm` der Fall ist, da dieser immer auch einen Bereich um den Wert herum abdecken. Liegt dieser nun außerhalb der Fangzone, wächst der Bereich durch die Quadrierung in jeder Iteration exponentiell und lässt somit keine aussagekräftigen Informationen ermitteln.

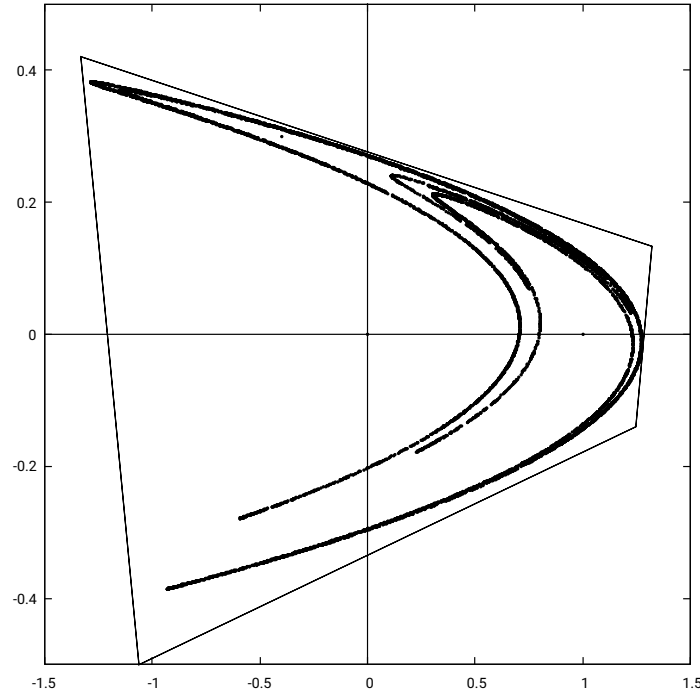


Abbildung 2.2: Seltsamer Attraktor der Hénon-Abbildung für $a = 1,4$ und $b = 0.3$ mit 10000 Punkten.

2.2 Taylormodell

Ein Taylormodell im Sinne der Erweiterung von [BrKM15] des Grundmodells von [MaBe01] besteht aus einem Polynom p mit $k \in \mathbb{N}$ Variablen, geschlossenen Intervallen als Koeffizienten. Darin enthalten ist immer ein Monom c_0 des Grades 0, der das Kernintervall (*Kernel*) des Taylormodells darstellt. Eine Variable oder ein Fehlersymbol λ_i aus dem Vektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ steht für einen Wert aus dem dazugehörigen Supportintervall aus $S = (s_1, \dots, s_k)$ mit $\lambda_i \in s_i$ und wird dazu verwendet, unbekannte Werte, Rechenungenauigkeiten und funktionale Abhängigkeiten innerhalb eines oder zwischen mehreren Taylormodellen abzubilden. Die verwendeten Intervalle $c_n = [\tilde{c}_n \pm \varepsilon_n] \subseteq \mathbb{R}$ haben in `hotm` reelle Endpunkte und stellen mit $c'_n = [\tilde{c}_n \pm 0]$ auch Punktintervalle dar. Mit einem so definierten Taylormodell $T = \sum_n c_n \lambda^n$ kann exakte reelle Arithmetik betrieben werden, indem Rundungsfehler und Ungenauigkeiten, die beim Rechnen mit endlicher Genauigkeit entstehen können als Intervalle in den Fehlersymbolen berücksichtigt werden. Dies ist zwar auch mit einfacher Intervallarithmetik möglich, jedoch leidet die Präzision des Ergebnisses einer solchen Berechnung stark unter der schnell wachsenden Überschätzung, die sich aus der Tendenz von Intervallen ergibt, bei jeder Rechenoperation zu wachsen.

Des Weiteren können mit Taylormodellen im in dieser Arbeit behandelten zweidimensionalen Fall auch komplexere Flächen als achsenparallele Rechtecke mit Hilfe von Intervallen beschrieben werden.

In [BrKM15] werden drei Unterfamilien von Taylormodellen identifiziert, die sich in der Definition des Polynoms und dessen Koeffizienten unterscheiden:

1. Affine Arithmetik: Polynome des Grades ≤ 1 mit Punktintervallen, außer beim Kernel.
2. Generalisierte Intervallarithmetik: Polynome des Grades ≤ 1 mit beliebigen Intervallen bei den Koeffizienten.
3. Klassische Taylormodelle: Polynome beliebigen Grades mit Punktintervallen, außer beim Kernel.

Das in dieser Arbeit verwendete Taylormodell ist eine Kombination aus 2 und 3, und besteht aus Polynomen beliebiger Ordnung mit beliebigen Intervallen als Koeffizienten. Dadurch kann mit zwei solchen *nichtlinearen Taylormodellen* im Zweidimensionalen komplexere Strukturen, wie Kurven höherer Ordnung beschrieben werden.

Abbildung 2.3 zeigt lineare und eine nichtlineare Taylormodelle für

$$\begin{aligned} x &= 0 + 1 \cdot \lambda_1 & (\lambda_1 \in [0 \pm 0.4]) \\ y &= 0 + 1 \cdot \lambda_2 & (\lambda_2 \in [0 \pm 0.1]) \end{aligned}$$

und deren Abbildungen durch $f(x, y) = (y + 1 - 1.4x^2, 0.3x)$ mit einer Farbkodierung, die den Ursprung der abgebildeten Flächen indiziert.

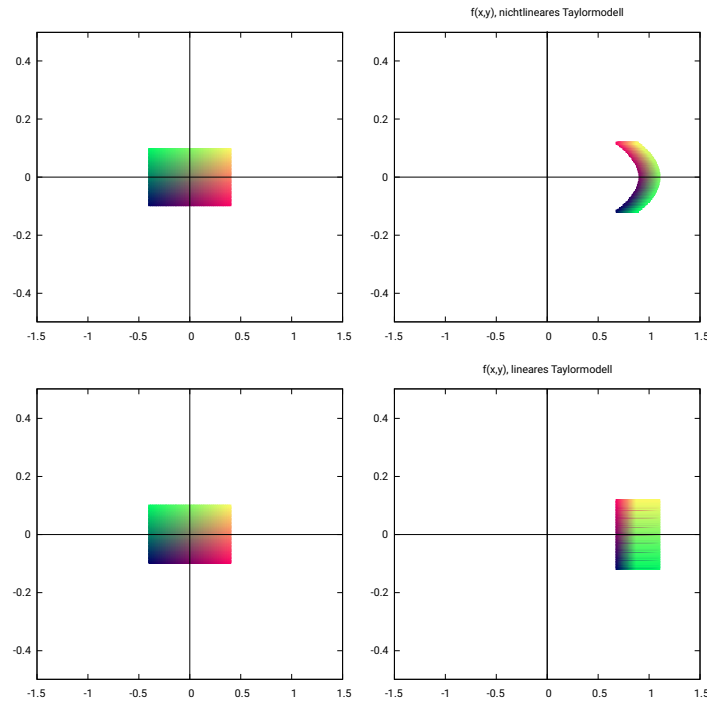


Abbildung 2.3: Darstellung nichtlinearer und linearer Taylormodelle, die ein Rechteck beschreiben und deren Abbildung durch die Funktion $f(x, y) = (y + 1 - 1.4x^2, 0.3x)$. Die Farbkodierung indiziert den Ursprung der abgebildeten Flächen.

Sowohl die linearen, als auch die nichtlinearen Taylormodelle umschließen den korrekten Bereich der Funktionswerte, allerdings ist die abgebildete Fläche der Nichtlinearen näher an der Fläche, die sich ergäbe, betrachtet man das Rechteck als Menge Punkten und bildete sie einzeln ab. Es ergibt sich eine geringere Überschätzung, aber auch ein komplexeres Polynom.

2.2.1 Operationen auf Taylormodellen

Um den durch Berechnungen wachsenden Grad des Polynomes und die Breite der Intervallkoeffizienten zu kontrollieren, wird in [BrKM15] *Sweeping* und *Splitting*, also Fegen und Teilen, vorgestellt.

Sweeping reduziert den Grad eines Monoms $c_n \lambda_i^k$ mit $\lambda_i \in s_i$, indem eines Fehler-symbole durch das entsprechende Intervall aus S ersetzt wird:

$$c_n \lambda_i^k \rightarrow c_n s_i \lambda_i^{k-1}$$

Dies hat natürlich zur Folge, dass die Breite der Koeffizienten wächst und damit die Überschätzung der tatsächlichen Werte. Durch *Splitting* wird ein Monom in zwei Monome mit Punktintervallen zerteilt und ein neues Fehlersymbol eingeführt, das der Breite des Koeffizienten entspricht:

$$[\tilde{c}_n \pm \varepsilon_n] \lambda_i \rightarrow [\tilde{c}_n \pm 0] \lambda_i + [1 \pm 0] \lambda_i \lambda_j \quad , \lambda_j \in [0 \pm \varepsilon_n]$$

Es ergibt sich der gegenteilige Effekt des Sweepings, da die Intervalle kleiner werden, der Grad des Polynoms jedoch erhöht wird.

2.3 Intervallarithmetik

$$[x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$$

$$[x_1, x_2] - [y_1, y_2] = [x_1 - y_2, x_2 - y_1]$$

$$[x_1, x_2] \cdot [y_1, y_2] = [\min(x_1 y_1, x_1 y_2, x_2 y_1, x_2 y_2), \max(x_1 y_1, x_1 y_2, x_2 y_1, x_2 y_2)]$$

$$[x_1, x_2] / [y_1, y_2] = [\min(x_1 / y_1, x_1 / y_2, x_2 / y_1, x_2 / y_2), \max(x_1 / y_1, x_1 / y_2, x_2 / y_1, x_2 / y_2)]$$

2.4 iRRAM

3. Analyse

4. Entwurf / Konzeption

5. Implementierung

...

5.1 Abschnitt 1

...

5.2 Abschnitt 2

...

6. Evaluation

7. Diskussion und Ausblick

(Keine Untergliederung mehr)

Literaturverzeichnis

- [BrKM15] F. Brauße, M. V. Korovina und N. T. Müller. Using Taylor Models in Exact Real Arithmetic. In I. S. Kotsireas, S. M. Rump und C. K. Yap (Hrsg.), *Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences - 6th International Conference, MACIS 2015, Berlin, Germany, November 11-13, 2015, Revised Selected Papers*, Band 9582 der *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2015, S. 474–488.
- [Grtdt20] T. Granlund und G. the development team. *GNU MP: The GNU Multiple Precision Arithmetic Library*, 6.2.0. Auflage, 2020. <http://gmplib.org/>.
- [Hén76] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math. Phys.* 50(1), 1976, S. 69–77.
- [MaBe01] K. Makino und M. Berz. Higher order verified inclusions of multidimensional systems by taylor models. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 47(5), 2001, S. 3514–3503.
- [MoPe07] M. B. Monagan und R. Pearce. Polynomial Division Using Dynamic Arrays, Heaps, and Packed Exponent Vectors. In V. G. Ganzha, E. W. Mayr und E. V. Vorozhtsov (Hrsg.), *Computer Algebra in Scientific Computing, 10th International Workshop, CASC 2007, Bonn, Germany, September 16-20, 2007, Proceedings*, Band 4770 der *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2007, S. 295–315.
- [Müll00] N. T. Müller. The iRRAM: Exact Arithmetic in C++. In J. Blanck, V. Brattka und P. Hertling (Hrsg.), *Computability and Complexity in Analysis, 4th International Workshop, CCA 2000, Swansea, UK, September 17-19, 2000, Selected Papers*, Band 2064 der *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2000, S. 222–252.
- [Müll09] N. Müller. Enhancing imperative exact real arithmetic with functions and logic. 2009.
- [Span10] C. Spandl. Computational Complexity of Iterated Maps on the Interval (Extended Abstract). In X. Zheng und N. Zhong (Hrsg.), *Proceedings Seventh International Conference on Computability and Complexity in Analysis, CCA 2010, Zhenjiang, China, 21-25th June 2010*, Band 24 der *EPTCS*, 2010, S. 139–150.
- [Weih00] K. Weihrauch. *Computable Analysis - An Introduction*. Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer. 2000.

-
- [Yan98] T. Yan. The Geobucket Data Structure for Polynomials. *J. Symb. Comput.* 25(3), 1998, S. 285–293.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Bachelor-/Masterarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit habe ich bisher keinem anderen Prüfungsamt in gleicher oder vergleichbarer Form vor-gelegt. Sie wurde bisher auch nicht veröffentlicht.

Trier, den xx. Monat 20xx