Berechenbare Analysis
Zusammenfassung
SoSe 19

Benedikt Lüken-Winkels

July 4, 2019

Contents

1 Chomsky Hierarchie

- Typ-0: Beliebige formale Grammatik. Rekursiv aufzählbar
- Typ-1: Kontextsensitive Grammatik
- Typ-2: Kontextfreie Grammatik
- Typ-3: Reguläre Grammatik

2 Abzählbar unendlich

Es besteht eine Bijektion zu $\mathbb{N}$.

Bemerkung Es gibt so viele berechenbare reelle Zahlen, wie Programme

3 Entscheidbar

Eine Menge M ist entscheidbar, wenn eine Funktion $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar ist und angibt, ob ein Element in der Menge ist, oder nicht. Bzw eine TM bei jeder Eingabe anhält.

4 Rekursiv aufzählbar

Eine Menge M ist rekursiv aufzählbar, wenn eine Funktion $f_A :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar ist und angibt, ob ein Element in der Menge ist, aber sonst undefiniert ist. Bzw eine TM bei einer korrekten Angabe anhält und sonst in eine Endlosschleife läuft.

5 δ-rekursiv-aufzählbar

wenn eine Orakel TM existiert wenn die TM anhält.

6 Berechenbarkeit

6.1 Berechenbarkeit einer reellen Zahl

Eine reelle Zahl ist dann berechenbar, wenn eine der **äquivalenten** Bedingungen erfüllt ist:

1. Es gibt eine TM, die eine unendlich lange binäre Representation von x auf dem Ausgabeband erzeugt.

2. **Fehlerabschätzung** Es gibt eine TM, die Approximationen liefert. Formal: $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist Folge rationaler Zahlen, die gegen x konvergiert. Bedeutet, dass alle q_i innerhalb eines bestimmten beliebig kleinen Bereichs um x liegen. Größter möglicher Fehler $2^0 = 1$

3. **Intervalschachtelung** Es gibt eine berechenbare Intervallschachtelung mit rationalen Endpunkten: Angabe zweier Folgen rationaler Zahlen mit der Bedingung, dass sie beide gegen x gehen und x dazwischen liegt. Ziel: Abstände von linker und rechter Schranke soll gegen null gehen.

4. **Dedekindscher Schnitt**Menge $\{q \in \mathbb{Q} | q < x\}$ ist entscheidbar. Beispiel $\sqrt{2}$ ist berechenbar. $\{q | q < \sqrt{2}\} = \{q | q^2 < 2\}$. $\Rightarrow$ Es gibt einen Test, ob die Zahl kleiner ist.

5. Man kann x als endliche Summe von Brüchen darstellen: $z \in \mathbb{Z}$ $A \subseteq \mathbb{N}$, $x_A = \sum_{i \in A} 2^{-i-1}$, $x = z + x_A$

6. Es exisitert eine Kettenbruchentwicklung

Folgerungen / Beispiele

- $\Rightarrow$ Für Berechenbarkeit muss nur eine der Bedingungen bewiesen werden. Menge der berechenbaren reelen Zahlen = $\mathbb{R}_c$
- Nicht berechenbare reele Zahlen durch Diagonalisierung konstruierbar
- e berechenbar, weil die Fehlerabschätzung (2) existiert
- π (Notiert als alternierede Reihe) berechenbar, weil Intervalschachtelung existiert
- $\sqrt{2}$ berechenbar, weil Dedekindscher Schnitt existiert.

6.2 $(\rho, \rho) - berechenbar$ '(Approximation, Approximation)-bb'

- Eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann berechenbar, wenn sie effektiv stetig ist.
- Aus Stetigkeit, Berechenbarkeit. Aus nicht Stetigkeit folgt nicht Berechenbarkeit
- Um nicht-Berechenbarkeit zu zeigem, zeigt man nicht-Stetigkeit
- Aus nicht-effektiver Stetigkeit folgt nicht-Berechenbarkeit. Bsp $f(x) = 1, x \geq 0; 0, x < 0$ ist nicht stetig und nicht berechenbar

6.3 $(\delta, \delta) - berechenbar$ '(Name, Name)-bb'

7 Konvergenzmodul

8 Effektiv stetig

Aus effektiver Stetigkeit folgt Stetigkeit.

9 Diagonalisierung

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar Beweisidee: Man nimmt eine Folge reeller Zahlen zwischen 0 und 1. Mit der Diagonialisierung zeigt man, dass es eine Zahl gibt, die nicht in dieser Folge enthalten ist. Da dies für eine beliebige Menge geht, kann es keine Folge geben, die alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 enthält.

10 Isomorphismus

Ein Isomorphismus ist zum Beispiel eine Funktion zwischen zwei Mengen, die bijektiv ist und ein Homomorphismus ist. Elemente der einen Menge werden auf bedeutungsgleiche Elemente der anderen Menge abgebildet.

11 Homomorphismus

Ein Homomorphismus bildet die Elemente aus der einen Menge so in die andere Menge ab, dass sich ihre Bilder dort hinsichtlich der Struktur ebenso verhalten, wie sich deren Urbilder in der Ausgangsmenge verhalten.

12 Cauchy-Darstellung

$M = [A \to B]$ ist die Menge aller partiellen Funktionen $f :\subseteq A \to B$.

Definition $\rho :\subseteq [\mathbb{N} \to \mathbb{Q}] \to \mathbb{R}$

$$\rho(f) = x \Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N})|x - f(i)| < 2^{-i}$$
$$\rho = \text{Cauch-Darstellung der reellen Zahlen.}$$

13 Mengenlehre

13.1 Abgeschlossene Menge

13.2 Offene Menge

13.3 Kompakte Menge

14 Turingmaschinen

14.1 Typ-2-Turingmaschinen

Besonderheiten: Eingabeband ist read-only, Ausgabeband kann nur nach rechts schreiben.

14.2 Orakel-Turingmaschine OTM

$\mathbb{F}$ ist die Menge aller partiellen Funktionen auf dem Alphabet der OTM:
$\mathbb{F} = \{f | f :\subseteq \Sigma^* \to \Sigma^*\}$

15 Implementierung

15.1 DAG

16 Fragen

16.1 Warum ist eine reelle Zahl bb, wenn Sie eine endlose Binärdarstellung hat?