

Untersuchungen zur Hénon Iteration

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science (M.Sc.)

Universität Trier
FB IV - Informatikwissenschaften
Professur Arithmetische Algorithmen

Erstgutachter: Prof. Dr. Norbert Müller
Zweitgutachter: Prof Dr. Stephan Näher

Vorgelegt am xx.xx.xxxx von:

Benedikt Lüken-Winkels
Baltzstraße 6
54296 Trier
b.lueken.winkels@gmail.com
Matr.-Nr. 1138844

Zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Problemstellung	1
1.3	Zielsetzung	1
1.4	Gliederung/Aufbau der Arbeit	1
2	Grundlagen	2
2.1	Hénon-Abbildung	2
2.2	Taylormodell	4
2.2.1	Arithmetische Operationen auf Taylormodellen	6
2.2.2	Spezielle Operationen auf Taylormodellen	6
2.3	Lyapunov Exponent	6
2.3.1	Verlustrate der Aussagekraft	7
3	Analyse	10
4	Implementierung	12
4.1	iRRAM	12
4.1.1	Präzision	13
4.2	Intervallarithmetik	13
4.3	Polynommultiplikation	14
4.4	Taylormodelle	16
4.4.1	Housekeeping-Methoden	16
4.4.2	Darstellung der Taylormodelle	18
5	Evaluation	20
5.1	Housekeeping-Grenzwerte	20
5.2	Sweeping	22
5.3	Splitting	23
5.4	Initiales Taylormodell	25
5.5	Umsetzung	26
6	Diskussion und Ausblick	27
	Literaturverzeichnis	28
7	Anhang	29

Abbildungsverzeichnis

2.1	Hénon-Abbildung: Einfache Evolution	3
2.2	Hénon-Abbildung: Attraktor	4
2.3	Linear und nichtlineare Taylormodelle: Vergleich	5
2.4	Lokale Annäherung an den Lyapunov Exponenten mit Punkten . . .	7
2.5	Lokale Annäherung an den Lyapunov Exponenten mit Intervallen . .	8
3.1	Hénon-Abbildung: Mehrere Iterationen mit großen Initialwerten . . .	10
4.1	Ebenen der Polynomdarstellung mit REALs	13
4.2	Naive Multiplikation gegen Multiplikation mit Geobuckets	16
4.3	Hénon-Abbildung: Abbildung mit verschiedenen Auflösungen	19
5.1	Experimentelle Ergebnisse zu Grenzwerten	21
5.2	Sweeping mit verschiedenen Graden	23
5.3	Experimentelle Ergebnisse zu erhaltenen Fehlersymbolen	24
5.4	Experimentelle Ergebnisse zum Vorgehen beim Splitting	24
5.5	Lokale Annäherung an den Lyapunov Exponenten mit Intervallen . .	26
7.1	Hénon-Abbildung: Mehrere Iterationen mit Farbkodierung	32

Tabellenverzeichnis

5.1	Experimentelle Ergebnisse zu Grenzwerten	21
5.2	Experimentelle Taylormodell Varianten	25

Listings

4.1	Beispielaufwurf der Sweeping-Routine	17
5.1	Implementierung der Hénon-Abbildung	26
7.1	Beispielkonfiguration	31

1. Einleitung

Die Einleitung besteht aus der Motivation, der Problemstellung, der Zielsetzung und einem ersten Überblick über den Aufbau der Arbeit.

1.1 Motivation

Warum ist das zu bearbeitende Themengebiet spannend und relevant?

1.2 Problemstellung

Welches Problem/welche Probleme können in diesem Themengebiet identifiziert werden?

1.3 Zielsetzung

Was ist das Ziel der Arbeit. Wie soll das Problem gelöst werden?

1.4 Gliederung/Aufbau der Arbeit

Was enthalten die weiteren Kapitel? Wie ist die Arbeit aufgebaut? Welche Methodik wird verfolgt?

2. Grundlagen

2.1 Hénon-Abbildung

Die Hénon-Abbildung bietet eine Möglichkeit, das Verhalten eines seltsamen Attraktors (*engl. 'strange attractor'*), wie dem des Lorenz Systems, mit einer recht einfachen Abbildung zu untersuchen.

Konvergieren die Werte einer Funktion in einem bestimmten Wertebereich R , der Fangzone (*engl. 'trapping zone'*), gegen einen Punkt oder eine Kurve, spricht man von einem Attraktor. Dieser Attraktor kann jedoch auch eine komplexere Struktur haben. Auf einem solchen seltsamen Attraktor springen die Werte hin und her und reagieren hochempfindlich auf Änderungen der Initialbedingungen. Dieses Verhalten lässt mit der Abbildung $x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2, y_{i+1} = bx_i$, beziehungsweise

$$f(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx)$$

beobachten. f erfüllt dieselben Kriterien, wie der durch eine dreidimensionale Differenzialgleichung entstehenden Lorenz-Attraktor, allerdings wurde f so definiert, dass auch höhere Iterationszahlen leichter zu berechnen und zu analysieren sein sollen. Die Hénon-Abbildung bildet den \mathbb{R}^2 auf sich selbst ab. Dieser Vorgang besteht aus drei Schritten. Man betrachte eine Fläche entlang der x -Achse gelegen:

Dehnen und Falten

$$T' : x' = x, y' = 1 + y - ax^2$$

Mit dem Parameter a kann die Stärke der Biegung gesteuert werden.

Kontrahieren

$$T'' : x'' = b \cdot x, y'' = y'$$

Ein $|b| < 1$ bedeutet, dass sich die Fläche zusammen zieht. Wird b zu groß gewählt, so entsteht eine zu große Kontraktion und der Attraktor ist schwerer erkennbar. Ist b zu klein, ist der Effekt zu gering und das Verhalten der Abbildung ist nicht mehr chaotisch.

Rotieren

$$T''' : x''' = y'', y''' = x''$$

Im letzten Schritt werden die Achsen vertauscht und somit die Fläche um rotiert.

Die entstehende Abbildung hat unter Anderem folgende Eigenschaften:

- Invertierbar: (x_{n+1}, y_{n+1}) kann eindeutig auf (x_n, y_n) zurückgeführt werden.
- Kontrahiert Flächen: Mit $|b| < 1$ werden Flächen kleiner.

- Besitzt eine Fangzone, die einen Attraktor enthält. Allerdings landen nicht immer alle Orbits in der Fangzone, da wegen x^2 Terme bestimmter Größe nach ∞ laufen können.

Abbildung 2.1 zeigt die einzelnen Schritte einer Evolution der Hénon-Abbildung anhand eines Rechtecks, welches als nichtlineares Taylormodell definiert wurde.

$$x_0 = 0 + 1 \cdot \lambda_1 \quad (\lambda_1 \in [0 \pm 0.4])$$

$$y_0 = 0 + 1 \cdot \lambda_2 \quad (\lambda_2 \in [0 \pm 0.05])$$

Das Rechteck wird gedehnt und gefaltet, dann kontrahiert und zuletzt rotiert, beziehungsweise gespiegelt.

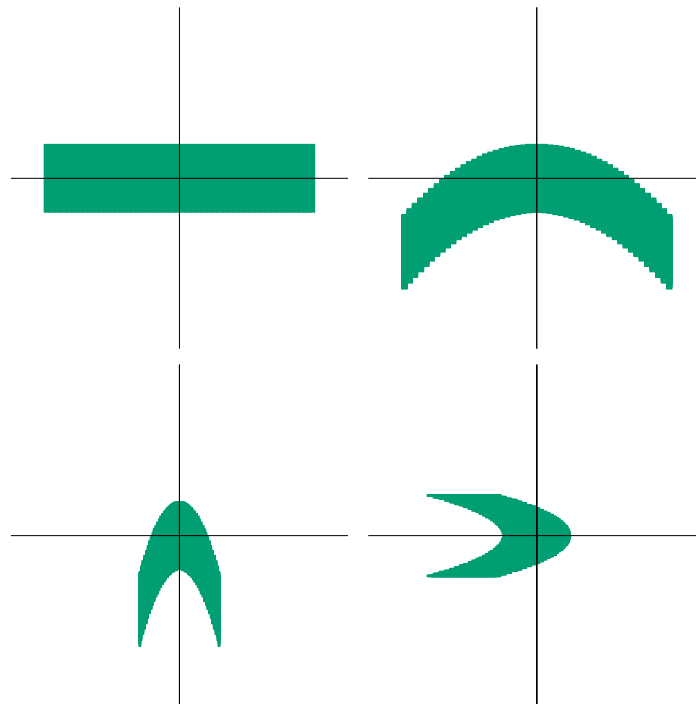


Abbildung 2.1: Einfache Evolution der Hénon Abbildung, aufgeteilt in das initiale Rechteck und die drei Zwischenschritte.

Für die Parameter $a = 1.4$ und $b = 0.3$ ergibt sich eine Fangzone in der sich die Funktionswerte auf einem seltsamen Attraktor bewegen, während die außerhalb gelegenen Punkte gegen unendlich laufen. Das bedeutet, dass ein Punkt, in der Fangzone, beziehungsweise auf dem Attraktor liegt, wiederum auf diesen abgebildet wird. Der Attraktor ist in Abbildung 2.2 zu sehen. Hier wurden, ausgehend vom Punkt $(0, 0)$, 10000 Iterationen der Hénon-Abbildung berechnet und jeweils das Ergebnis eingezeichnet. Es ist deutlich erkennbar, dass sich der Attraktor teils nahe am Rande der Fangzone bewegt. Bereits bei einer leichten Überschätzung des Ergebnisses kann dies dazu führen, dass die Funktionswerte die Fangzone verlassen, auch wenn der tatsächliche Wert eigentlich in dieselbe abgebildet würde. Dies kommt zum Tragen, wenn Intervalle, als Zahlendarstellung gewählt werden, wie es bei `hotm` der Fall ist, da dieser immer auch einen Bereich um den Wert herum abdecken. Liegt dieser nun außerhalb der Fangzone, wächst der Bereich durch die Quadrierung in jeder Iteration exponentiell und lässt somit keine aussagekräftigen Informationen ermitteln.

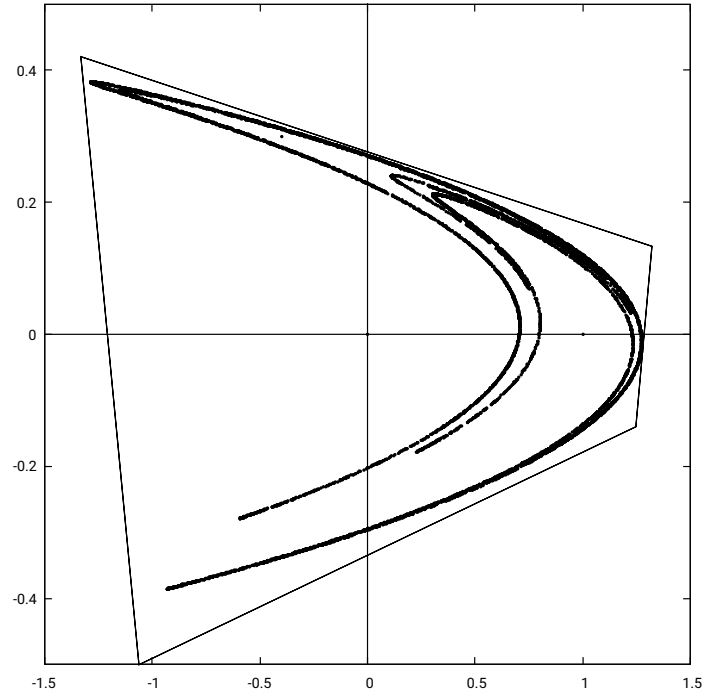


Abbildung 2.2: Seltsamer Attraktor der Hénon-Abbildung für $a = 1,4$ und $b = 0.3$ mit 10000 Punkten.

2.2 Taylormodell

Ein Taylormodell im Sinne der Erweiterung von [BrKM15] des Grundmodells von [MaBe01] besteht aus einem Polynom p mit $k \in \mathbb{N}$ Variablen, geschlossenen Intervallen als Koeffizienten. Darin enthalten ist immer ein Monom c_0 des Grades 0, der das Kernintervall (*Kernel*) des Taylormodells darstellt. Eine Variable oder ein Fehlersymbol λ_i aus dem Vektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ steht für einen Wert aus dem dazugehörigen Supportintervall aus $S = (s_1, \dots, s_k)$ mit $\lambda_i \in s_i$ und wird dazu verwendet, unbekannte Werte, Rechenungenauigkeiten und funktionale Abhängigkeiten innerhalb eines oder zwischen mehreren Taylormodellen abzubilden. Die verwendeten Intervalle $c_n = [\tilde{c}_n \pm \varepsilon_n] \subseteq \mathbb{R}$ haben in `hotm` reelle Endpunkte und stellen mit $c'_n = [\tilde{c}_n \pm 0]$ auch Punktintervalle dar. Mit einem so definierten Taylormodell $T = \sum_n c_n \lambda^n$ kann exakte reelle Arithmetik betrieben werden, indem Rundungsfehler und Ungenauigkeiten, die beim Rechnen mit endlicher Genauigkeit entstehen können als Intervalle in den Fehlersymbolen berücksichtigt werden. Dies ist zwar auch mit einfacher Intervallarithmetik möglich, jedoch leidet die Präzision des Ergebnisses einer solchen Berechnung stark unter der schnell wachsenden Überschätzung, die sich aus der Tendenz von Intervallen ergibt, bei jeder Rechenoperation zu wachsen.

Des Weiteren können mit Taylormodellen im in dieser Arbeit behandelten zweidimensionalen Fall auch komplexere Flächen als achsenparallele Rechtecke mit Hilfe von Intervallen beschrieben werden.

In [BrKM15] werden drei Unterfamilien von Taylormodellen identifiziert, die sich in der Definition des Polynoms und dessen Koeffizienten unterscheiden:

1. Affine Arithmetik: Polynome des Grades ≤ 1 mit Punktintervallen, außer beim Kernel.
2. Generalisierte Intervallarithmetik: Polynome des Grades ≤ 1 mit beliebigen Intervallen bei den Koeffizienten.
3. Klassische Taylormodelle: Polynome beliebigen Grades mit Punktintervallen, außer beim Kernel.

Das in dieser Arbeit verwendete Taylormodell ist eine Kombination aus 5.4 und 5.5, und besteht aus Polynomen beliebiger Ordnung mit beliebigen Intervallen als Koeffizienten. Dadurch kann mit zwei solchen *nichtlinearen Taylormodellen* im Zweidimensionalen komplexere Strukturen, wie Kurven höherer Ordnung beschrieben werden.

Abbildung 2.3 zeigt lineare und eine nichtlineare Taylormodelle für

$$\begin{aligned} x &= 0 + 1 \cdot \lambda_1 & (\lambda_1 \in [0 \pm 0.4]) \\ y &= 0 + 1 \cdot \lambda_2 & (\lambda_2 \in [0 \pm 0.1]) \end{aligned}$$

und deren Abbildungen durch $f(x, y) = (y + 1 - 1.4x^2, 0.3x)$ mit einer Farbkodierung, die den Ursprung der abgebildeten Flächen indiziert.

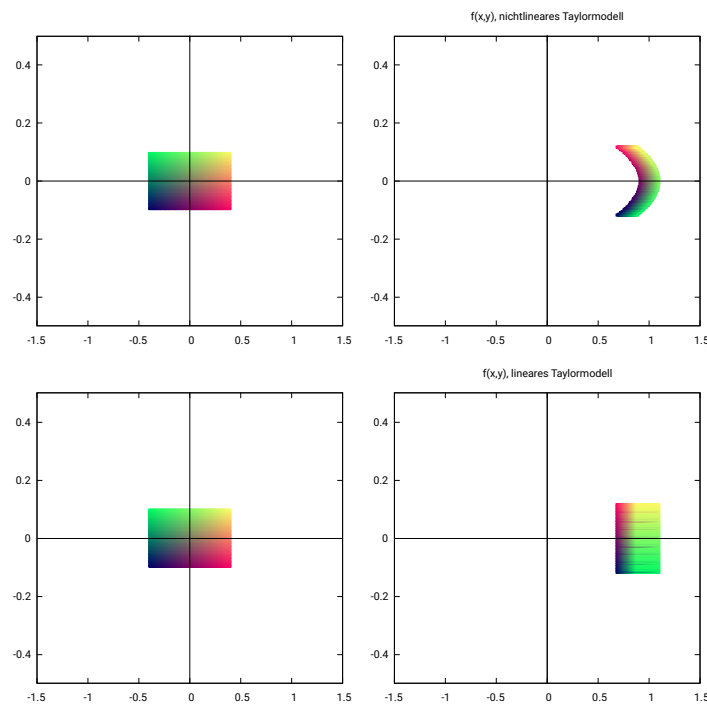


Abbildung 2.3: Darstellung nichtlinearer und linearer Taylormodelle, die ein Rechteck beschreiben und deren Abbildung durch die Funktion $f(x, y) = (y + 1 - 1.4x^2, 0.3x)$. Die Farbkodierung indiziert den Ursprung der abgebildeten Flächen.

Sowohl die linearen, als auch die nichtlinearen Taylormodelle umschließen den korrekten Bereich der Funktionswerte, allerdings ist die abgebildete Fläche der Nichtlinearen näher an der Fläche, die sich ergäbe, betrachte man das Rechteck als Menge

Punkten und bildete sie einzeln ab. Es ergibt sich eine geringere Überschätzung, aber auch ein komplexeres Polynom.

2.2.1 Arithmetische Operationen auf Taylormodellen

Arithmetische Operationen auf Taylormodellen mit Intervallkoeffizienten bedeuten das Verrechnen von Polynomen, die wiederum Polynome ergeben. Für die Addition, Subtraktion und Multiplikation werden lediglich die entsprechenden Operationen auf die Polynome angewandt. Eine Division ist nur möglich, wenn der Divisor nicht die 0 enthält (siehe Kapitel 4.2).

2.2.2 Spezielle Operationen auf Taylormodellen

Um den durch Berechnungen wachsenden Grad des Polynomes und die Breite der Intervallkoeffizienten zu kontrollieren, wird in [BrKM15] *Sweeping* und *Splitting*, also Fegen und Teilen, vorgestellt.

Sweeping reduziert den Grad eines Monoms $c_n \lambda_i^k$ mit $\lambda_i \in s_i$, indem eines Fehler-symbole durch das entsprechende Intervall aus S ersetzt wird:

$$c_n \lambda_i^k \rightarrow c_n s_i \lambda_i^{k-1}$$

Dies hat natürlich zur Folge, dass die Breite der Koeffizienten wächst und damit die Überschätzung der tatsächlichen Werte. Durch Splitting wird ein Monom in zwei Monome mit Punktintervallen zerteilt und ein neues Fehlersymbol eingeführt, das der Breite des Koeffizienten entspricht:

$$[\tilde{c}_n \pm \varepsilon_n] \rightarrow [\tilde{c}_n \pm 0] + [\varepsilon_n \pm 0] \cdot \lambda_n, \lambda_n \in [0 \pm 1]$$

Es ergibt sich der gegenteilige Effekt des Sweepings, da die Intervalle kleiner werden, der Grad des Polynoms jedoch erhöht wird.

2.3 Lyapunov Exponent

Mit dem Lyapunov Exponenten kann für ein dynamisches System (D, f) mit Phasenraum D und einer Funktion $f : D \rightarrow D$ angegeben werden, mit welcher Rate sich zwei beliebig nahe Punkte $x_0 \in D$ und $x_0 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ voneinander entfernen, beziehungsweise annähen. Für eine iterierende Funktion $x_{n+1} = f(x_n)$ mit diskreten Zeitschritten wird der Lyapunov Exponent wie folgt definiert [PlBr89]:

$$LE(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.1)$$

Beziehungsweise entwickelt sich die Entfernung zwischen den zwei Punkten ε zum Zeitpunkt n mit:

$$\varepsilon \cdot e^{n \cdot LE(x_0)} = |f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| \quad (2.2)$$

Für $LE(x_0) < 0$ kontrahiert, für $LE(x_0) > 0$ wächst der Abstand zwischen den Punkten über den Verlauf der Schritte. In der Praxis muss mit Rundungsfehlern bei der Berechnung der Werte umgegangen werden, da ein Computer nur mit endlicher

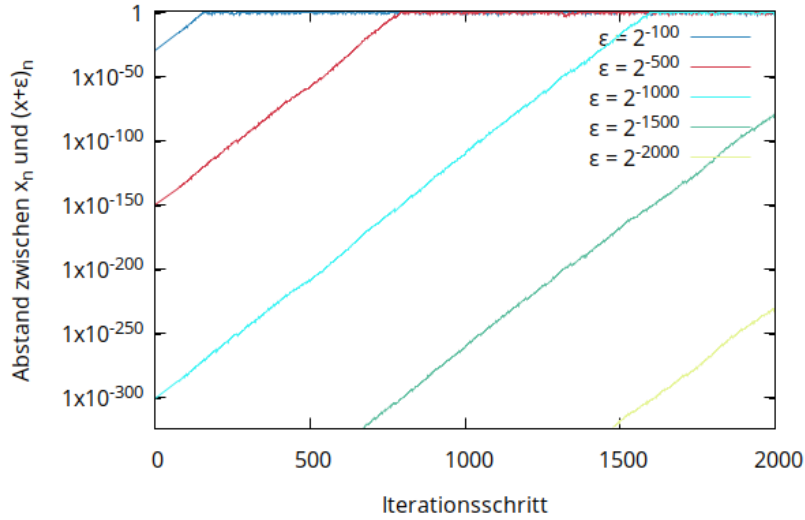


Abbildung 2.4: Lokale Annäherung an den Lyapunov Exponenten der Hénon-Iteration mit Punkten x_0 und $x_0 + \varepsilon$, und den Parametern $a = 1.4, b = 0.3$

Genauigkeit rechnen kann. Dadurch kann $|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|$ nur von oben angenähert werden. Der Lyapunov Exponent bildet somit eine untere Schranke für die Ausdehnung eines Intervalls x_0 , welches durch Intervallarithmetik überschätzt wird, auch *Wrapping Effect* [BrKM15].

Abbildung 2.4 zeigt eine lokale Annäherung an die Entfernung zwischen x_n und $(x + \varepsilon)_n$, wie in 2.2 bei n Iterationen und verschiedenen Größen für ε . Die Graphen stellen jeweils die Entwicklung des Abstandes $|(x + \varepsilon)_n - x_n|$ für $f^n(x, y)$, beziehungsweise $f^n(x + \varepsilon, y + \varepsilon)$ dar. Abhängig vom initialen Abstand ε bleiben die Punkte eine längere Zeit dicht beieinander, bevor der Abstand um den Wert 1 osziliert. Ist dieser Zustand erreicht, bewegen sich die Punkte scheinbar unabhängig voneinander auf dem Attraktor, bleiben also in der Fangzone und entfernen sich daher nicht weiter.

In Abbildung 5.5 ist zu sehen, wie sich die Ausbreitung entwickelt, wenn statt zwei Punkten, Intervalle für x_0 und y_0 mit der Breite ε verwendet werden; jeweils in Schwarz eingezeichnet. Hier zeigt sich, dass sich die Breite des Intervalls x_n deutlich schneller vergrößert¹, als es der Abstand zwischen unabhängigen Punkten mit x_n und $(x + \varepsilon)_n$. Das entstehende Wrapping wächst umso schneller, je mehr die Intervallbreite $|x_n|$ dem Wert 1 nähert. Dort, wo die einzelnen Punkte um die 1 oszillieren, laufen die Intervallgrenzen innerhalb weniger Iterationen gegen ∞ .

2.3.1 Verlustrate der Aussagekraft

In [Span10] wird der Lyapunov Exponent in den Kontext der Berechenbaren Analysis gerückt und in Verbindung mit der Entwicklung von Rundungsfehlern in reeller Arithmetik gebracht. Der Wert von x_n wird zu einem beliebigen Zeitpunkt n durch ein Intervall $[x_n^l, x_n^u]$ umschlossen, sodass $x_n \in [x_n^l, x_n^u]$ gilt. Die Schranken x_n^l und x_n^u sind jeweils Fließkommazahlen der Länge m_n . \hat{x}_n stellt eine Approximation von

¹Das Intervall y_n verhält sich vergleichbar, wird jedoch von x_{n-1} dominiert

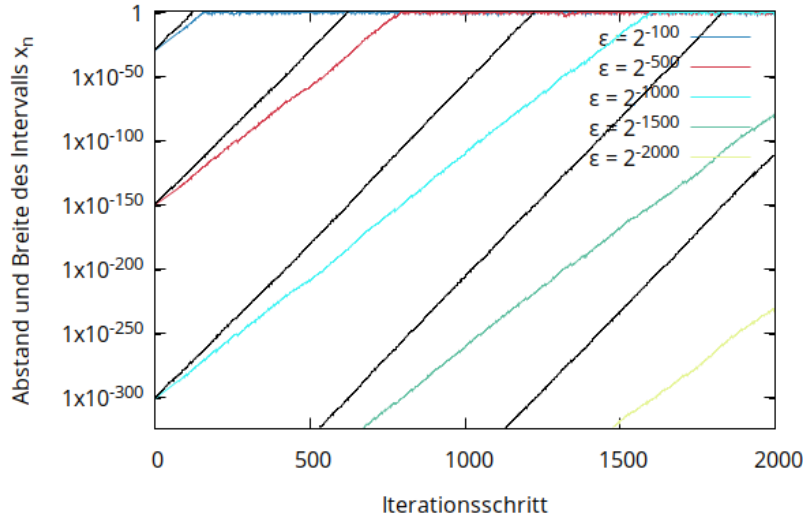


Abbildung 2.5: Lokale Annäherung an den Lyapunov Exponenten der Hénon-Iteration mit Intervallen der Breite $|x_0| = \varepsilon$, und den Parametern $a = 1.4, b = 0.3$ im Vergleich zur Entwicklung des Abstandes zweier Punkte mit Abstand ε

x_n dar, indem der Mittelpunkt des Intervalls bestimmt und dann auf m_n Stellen gerundet wird:

$$\hat{x}_n = rd\left(\frac{x_n^l + x_n^u}{2}, m_n\right) \quad (2.3)$$

Für die Diskrepanz zwischen \hat{x}_n und x_n e_n soll bei einer Genauigkeit $p \in \mathbb{Z}$ gelten, dass

$$e_n = |\hat{x}_n - x_n| \leq 10^{-p} \quad (2.4)$$

gilt. Die Wachstumsrate für $m_{\min}(x, n, p)$ gibt an, wie groß m sein muss, damit 2.4 für den Startwert x nach n Iterationen bis zu einer Genauigkeit p erfüllt ist. Diese Rate wird definiert als

$$\sigma(x, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{\min}(x, n, p)}{n} \quad (2.5)$$

Mit m_{\min} kann nun die Verlustrate der Aussagekraft der errechneten Werte pro Zeitschritt durch

$$\sigma(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sigma(x, p) \quad (2.6)$$

angegeben werden.

Die in dieser Arbeit verwendeten Taylormodelle bestehen aus Polynomen mit Intervallkoeffizienten und reellen Endpunkten. Für die praktische Umsetzung wurde die Software-Bibliothek **iRRAM** [Müll09] verwendet, welche reelle Zahlen, ähnlich wie oben beschrieben, darstellt und annähert. Stellen diese Taylormodelle nun ein Intervall dar, so ist das Ziel, für die Darstellung der reellen Zahlen einen möglichst

kleinen Wert für m zu finden, sodass die Verlustrate der Aussagekraft der reellen Intervallgrenzen erlaubt, dass sich das Intervall für eine Iterationszahl n so nah wie möglich am Lyapunov Exponenten entwickelt.

Da sich die Hénon-Abbildung nun im \mathbb{R}^2 bewegt, bedeutet eine Definition der Taylormodelle als Intervall, dass diese ein Rechteck aufspannen. Eine Berechnung von Hénon-Iterationen auf einem größeren Rechteck hat zu Folge, dass eine kritische Intervallbreite, bei der die Ausdehnung nicht mehr dem Lyapunov-Exponenten gleicht, sondern exponentiell schnell wächst, schneller erreicht wird. Um diesem Effekt entgegenzuwirken, kann das Rechteck und damit die Taylormodelle partitioniert werden und die Berechnung auf den kleineren Flächen fortgeführt werden. Mit der Entwicklung der Breite kann nun abgeschätzt werden, wie fein die Partitionierung sein muss, um eine gewisse Anzahl an Iterationen berechnen zu können.

3. Analyse

Werden die Initialwerte für Iterationen der Hénon-Abbildung (x_0, y_0) als Taylormodelle mit Intervallen definiert, kann eine Fläche beschrieben werden, die durch die Abbildung gespiegelt, gedehnt und verzerrt wird. Liegt diese für $a = 1.4$ und $b = 0.3$ komplett innerhalb der Fangzone R , so wird jeder Punkt in der Fläche wiederum nach R abgebildet.

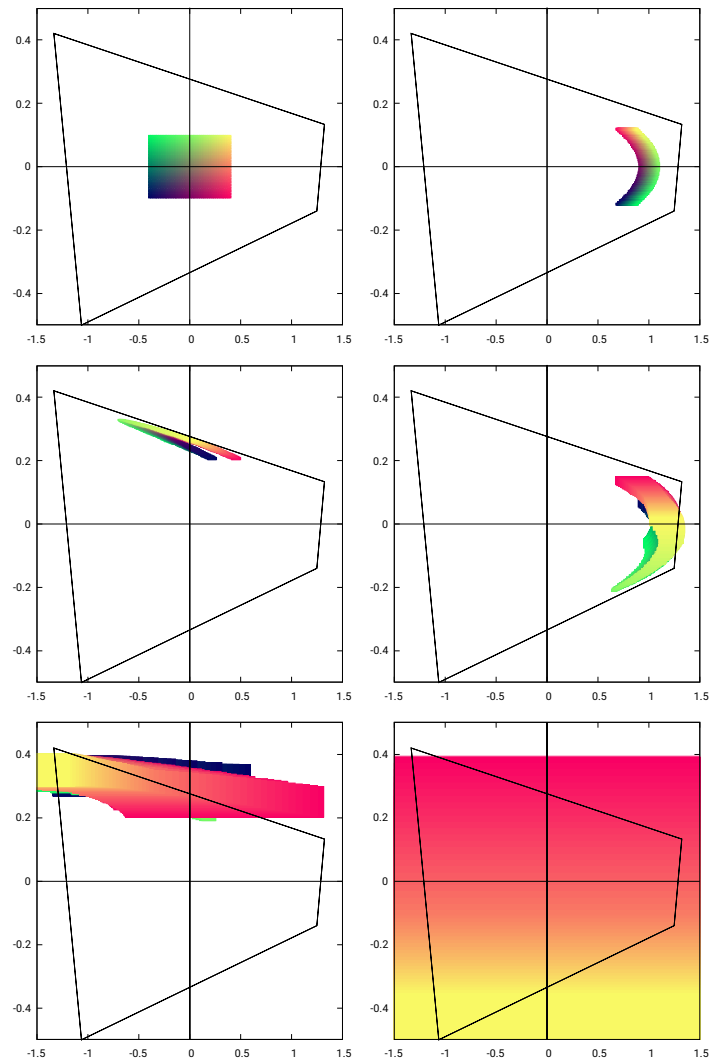


Abbildung 3.1: Iterationen der Hénon-Abbildung ausgehend von einem größeren Rechteck

Eine Abbildung der Fläche im Ganzen führt jedoch zu einer Überschätzung, die in jeder Iteration zunimmt, da nun mit Intervallen statt mit Punkten gerechnet wird. Abbildung 3.1 zeigt pro Graph eine Iteration mit

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 + 1 \cdot \lambda_1 & (\lambda_1 \in [0 \pm 0.4]) \\y_0 &= 0 + 1 \cdot \lambda_2 & (\lambda_2 \in [0 \pm 0.1])\end{aligned}$$

und der Fangzone als schwarzes Tetragon. Es ist erkennbar, dass das Rechteck nach wenigen Iterationen die Fangzone verlässt und einige Intervalle ein starkes Rauschen verursachen. Abbildung 7.1 zeigt Iterationen mit kleineren initialen Intervallen, wodurch die Überschätzung erst zu einem späteren Zeitpunkt zu groß wird. Um dem Wachstum der Intervalle entgegenzuwirken und die Berechnung der Hénon-Abbildung auch für solche Flächen mit höheren Iterationszahlen zu ermöglichen, können die Taylormodelle in Partitionen aufgeteilt werden. Die kleinste Partitionierung wäre die Aufteilung der Fläche in unendlich viele Punkte, was nicht praktikabel wäre, allerdings hohe Iterationszahlen ermöglichen, wie in Abbildung 2.2 zu sehen ist. Das andere Extrem stellen große Intervalle, beziehungsweise keine Partitionierung dar, was im Vergleich nur einen Bruchteil des Rechenaufwandes bedeutet, jedoch schnell zu starker Überschätzung führt.

Um die Fragestellung, wie die Hénon-Abbildung mit Taylormodelle nun am besten berechnet werden kann zu erörtern, wird das Problem in drei Sektionen unterteilt:

1. Wie klein müssen die Taylormodelle sein, damit längere Berechnungen möglich sind?
2. Wie verhalten sich die verschiedenen Partitionsgrößen bei unterschiedlichen Konfigurationen der Taylormodelle?
3. Welche Partition ist für eine gegebene Anzahl an Iterationen nötig?

4. Implementierung

4.1 iRRAM

Die Software-Bibliothek `iRRAM` [Müll09] basiert auf Intervallen als Zahlentyp, um diese mit einer beliebigen Genauigkeit darstellen zu können. Zunächst wird mit Double-Präzision, also 64-Bit Zahlen gerechnet, welche verwendet werden, bis das Ergebnis für die angefragte Präzision nicht mehr genau ausgegeben werden kann, beziehungsweise bis zu einer bestimmten Anzahl an Bits. Ist dies der Fall, geschieht eine Iteration mit einer erhöhten Genauigkeit, also längeren Zahlen, welche dann mit Hilfe von `MPFR` dargestellt werden. Für eine solche Iteration werden gerade so viele Zwischenergebnisse während der Berechnung gespeichert, dass eine Wiederholung der Schritte mit höherer Präzision möglich ist. Da nicht die gesamte Berechnung in jeder Iteration wiederholt wird, müssen während der Laufzeit Sichtbarkeit von Variablen und Zwischenergebnissen für den Nutzer genau kontrolliert und unter Umständen beschränkt werden, da sonst unerwartetes Verhalten und Exceptions entstehen können, indem die zugegriffenen Werte gegebenenfalls nicht in der aktuellen Iteration existieren.

Einige der für rationale Zahlen zur Verfügung stehenden Funktionen, wie der Vergleich zweier Zahlen, sind mit reellen Zahlen nicht ohne weiteres möglich. Dies gilt insbesondere für den Test auf Gleichheit und die Vorzeichenfunktion `sign`. Bei all diesen Funktionen handelt es sich im Reellen (und bei der `iRRAM`) um mehrwertige Funktionen, da sich das jeweilige Ergebnis mit veränderter Präzision in der Darstellung der Zahlen ändern kann. Dieses Problem wird in `hotm` durch den `SignType` adressiert. Zusätzlich zu den Werten 'positiv' (=POS) und 'negativ' (=NEG), kann die Vorzeichenfunktion `sign` den Wert 'ambivalent' (=AMBI) ausgeben, wenn nicht entscheidbar ist, wo genau die reelle Zahl um die Null liegt. Hierfür erhält die Vorzeichenfunktion einen Parameter, der den Bereich der Unsicherheit definiert. Ist der Ausgabewert 'ambivalent', so wird in den Funktionen, welche die Vorzeichenfunktion aufrufen, der schlechteste Fall im Hinblick auf die Genauigkeit, beziehungsweise die Intervallbreite des Ergebnisses angenommen.

Eine weitere Besonderheit ergibt sich aus dem Aufbau der Zahlen. Es entstehen zwei Intervall-‘Ebenen’: Zum Einen, die Darstellung des Koeffizienten als Intervall aus Mitte und Radius. Zum Anderen die Darstellung von Mitte und Radius, als `iRRAM-REAL`, also auch wiederum jeweils als Intervall mit Wert und Fehler, wie in Grafik 4.1 zu sehen ist. Im Vergleich zu den `mpq-RATIONALS` erhöht sich hier zwar die Komplexität deutlich, allerdings lassen sich Ungenauigkeiten sehr genau steuern, indem zum Beispiel der Rechenfehler des Mittelpunkts eines Koeffizienten auf den Radius 'verlagert' wird. So vergrößert sich zwar der Radius des Koeffizienten, welcher dadurch ungenauer wird, jedoch verkleinert sich der Rechenfehler auf der

Zahlenebene der REALs. Ein ähnlicher Effekt sollte sich durch Rundung auch mit den mpq-RATIONALS erreichen lassen.

Das Verlagern der Ungenauigkeit (e in der Grafik 4.1) auf den Wert des Radius' (v in der Grafik) (Cleaning oder auch *Micro-Housekeeping*) verringert die Intervallbreite und erzeugt Punktintervalle auf der Zahlenebene, allerdings werden die Intervalle auf der Intervallebene breiter. Hier greift dann wiederum der Polish-Mechanismus, der auf Polynomebene Monome hinzufügt, um aus den zu groß gewordenen Intervallen wiederum Punktintervalle zu machen (Splitting oder auch *Macro-Housekeeping*). So wird der Rechenfehler von der untersten Ebene bis zur Polynomebene propagiert. Diese Housekeeping-Funktionen werden durch Parameter gesteuert, die bestimmen, ab wann ein Intervall zu breit ist und die jeweilige Prozedur angewandt werden soll.

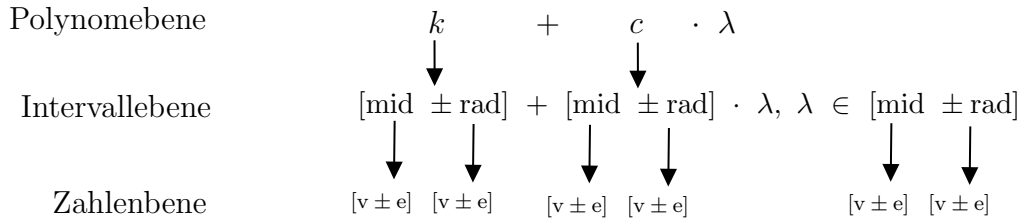


Abbildung 4.1: Ebenen der Polynomdarstellung mit REALs

4.1.1 Präzision

Werden zwei iRRAM-REALs x und y mit einer jeweiligen Präzision p_x und p_y verrechnet $z = x \circ y$, so entscheidet die Präzisions-Strategie `prec_policy`, ob für diese Operation absolute oder relative Genauigkeit verwendet wird. Zudem existiert eine globale, an die Iteration der iRRAM gebundene Genauigkeit `actual_precision` p_g , die sich mit jeder Iteration verringert, beginnend mit dem Wert $p_{g0} = -50$. Diese Werte sind negativ und repräsentieren, die Anzahl an Bits, für die eine Zahl genau bekannt ist. Bei $z = x \circ y$ ist die Genauigkeit p_z durch

$$p_z = \begin{cases} \max(p_x, p_y, p_g) & \text{falls absolute Genauigkeit} \\ \max(p_x, p_y, \max(p_x, p_y) - 50 + p_g) & \text{falls relative Genauigkeit} \end{cases}$$

gegeben. Für die Anwendung in `hotm` eignet sich die Verwendung von relativer Genauigkeit am besten, da die Manipulation der Fehlerbreite durch Cleaning große Unterschiede in der Genauigkeit zwischen Zahlen ergibt und die Skalierung zu aufwändig ist.

4.2 Intervallarithmetik

Arithmetik auf Taylormodellen zu betreiben bedeutet auf der untersten Ebene, mit Intervallen zu rechnen. Um diese wiederum als Zahlentyp zu verwenden, müssen die Operationen angepasst werden [Moor79].

Grundrechenarten

$$[x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$$

$$[x_1, x_2] - [y_1, y_2] = [x_1 - y_2, x_2 - y_1]$$

$$[x_1, x_2] \cdot [y_1, y_2] = [\min(x_1 y_1, x_1 y_2, x_2 y_1, x_2 y_2), \max(x_1 y_1, x_1 y_2, x_2 y_1, x_2 y_2)]$$

$$[x_1, x_2] / [y_1, y_2] = [\min(x_1 / y_1, x_1 / y_2, x_2 / y_1, x_2 / y_2), \max(x_1 / y_1, x_1 / y_2, x_2 / y_1, x_2 / y_2)]$$

Potenzfunktion

Die Potenzfunktion unterscheidet zwischen geradem und ungeradem Exponenten.

$$[x_1, x_2]^n = \begin{cases} [x_1^n, x_2^n] & \text{falls } x_1 > 0 \text{ oder } n \text{ ungerade;} \\ [x_2^n, x_1^n] & \text{falls } x_2 < 0 \text{ und } n \text{ gerade,} \\ [0, \max(x_1^n, x_2^n)] & \text{falls } 0 \in [x_1, x_2] \text{ und } n \text{ gerade;} \end{cases}$$

Kehrwert

Der Kehrwert eines Intervalls kann nur bestimmt werden, wenn es nicht die 0 enthält:

$$1/[x_1, x_2] = [1/x_2, 1/x_1]$$

Wenn $x_1 \leq 0 \leq x_2$, bedeutet das, dass für ein $x \in [x_1, x_2]$, $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x_2}$ oder $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x_1}$ gelten muss und das Intervall damit unbegrenzt ist.

Die im Basisprogramm `tangentspace` vorhandene Implementierung wurde erweitert, um Punktintervalle gesondert zu behandeln und die nun auf reellen Zahlen basierenden Intervalldefinitionen zu verwenden. Dies hat zur Folge, dass die Mehrwertigkeit der Vorzeichenfunktion berücksichtigt werden muss. Tritt der Fall der Unsicherheit ein, so muss mit einer Überschätzung gerechnet werden, die in jedem Fall korrekt ist.

4.3 Polynommultiplikation

In einer linearen Implementierung der Taylormodelle wird bei der Multiplikation immer eines der Fehlersymbole gesweept, sodass die Länge eines Polynoms nicht über die Dimension hinausgeht und somit der Schwerpunkt bei der Intervallarithmetik liegt. Lässt man allerdings höhere Ordnungen zu, werden auch die Polynome länger und ein weiteres Problem tritt auf. Um die oben (4.3) definierte Ordnung \prec auf dem Polynom $p = p_1 \cdot p_2$ zu erhalten, müssen die $n \cdot m$ Monome ($n := \#p_1, m := \#p_2$), die bei der Multiplikation entstehen, sortiert werden. Werden diese sequentiell zu p hinzugefügt bedeutet das 2 Vergleiche, dann 3, dann 4, und so weiter, bis hin zu nm Vergleichen:

$$2 + 3 + 4 + 5 + \dots + nm = \frac{nm \cdot (nm + 1)}{2} - 1$$

So ergibt sich für die naive Multiplikation eine quadratische Laufzeit in O -Notation von $O(nm + (nm)^2)$

Für effizientere Polynommultiplikation existieren verschiedene Algorithmen. Viele der schnellen bekannten Algorithmen basieren auf der Schnellen-Fourier-Transformation, wobei die Polynome in Stützvektoren und wieder zurück umgewandelt werden. Da

es sich bei den Koeffizienten den Monome um Intervalle mit möglicherweise unendlichen Schranken handelt, ist das Rückführen eines Stützvektors nicht immer ohne Weiteres möglich.

Ein weiterer Ansatz besteht darin, die Anzahl der benötigten Monomvergleiche zu reduzieren, wenn die Monome einsortiert werden müssen. Betrachtet man die Summe dreier Polynome $p_1 + p_2 + p_3$ mit $\#p_1 \gg \#p_2 = \#p_3 = 1$, benötigt das Aufsummieren von links nach rechts $2\#p_1 + 1$ Vergleiche, da mit dem oben verwendeten Additionsverfahren zweifach in p_1 eingefügt wird. Summiert man jedoch von rechts nach links so werden lediglich $\#p_1 + 2$ Vergleiche benötigt. Nach dieser Idee kann die Anzahl der Monomvergleiche reduziert werden, indem zunächst Polynome gleicher Länge miteinander addiert werden. Mit Geobuckets, von Yan ([Yan98]) eingeführt und Monagan und Pearce ([MoPe07]) für die Multiplikation angepasst, werden die Zwischenergebnisse der Polynommultiplikation in geometrisch wachsenden 'Buckets' gespeichert. Hat ein Bucket seine Kapazität erreicht, wird das Polynom zum nächst größeren Bucket hinzuaddiert. Der Unterschied zum Originalalgorithmus besteht darin, dass die Größe der hinzukommenden Polynome bereits bekannt ist und die Bucketkapazität dementsprechend angepasst werden kann. Algorithmus 1 zeigt die in `hotm` implementierte Version der Geobucketmultiplikation. Durch den Teile und Herrsche Ansatz, kann die Multiplikation mit Geobuckets in $O(nm \log nm)$ durchgeführt werden.

Wird wie in [Yan98] eine Ordnung \succ auf den Monomen definiert, können die Polynome sortiert werden.

- $\lambda_1 \succ \lambda_2 \succ \dots \succ \lambda_k$
- $\lambda_n^i \lambda_m^j \succ \lambda_n^{i'} \lambda_m^{j'}$ für $n > m$, falls
 - $i > i'$, oder
 - $i = i'$ und $j > j'$

Diese Ordnung ist partiell, da gleiche Monome, beziehungsweise Monome mit gleichen Fehlersymbolen nicht vergleichbar sind. Tritt dieser Fall während der Addition zweier Polynome auf, bedeutet das, dass die Koeffizienten beider Monome addiert werden und das so entstandene Monom in das Polynom aufgenommen wird. Haben die verglichenen Monome die selbe Anzahl an Variablen, entscheidet die Größe des Exponenten des Fehlersymbols mit dem kleinsten Index. Algorithmus 2 implementiert den Vergleich zweier Monome, beziehungsweise derer Variablen.

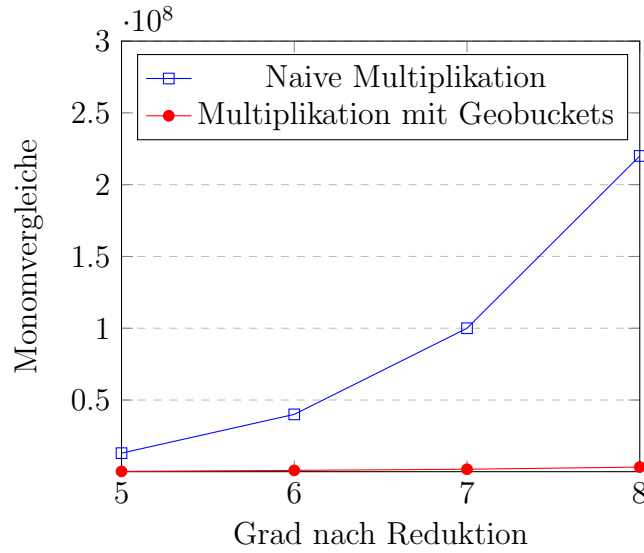


Abbildung 4.2: Naive Multiplikation gegen Multiplikation mit Geobuckets

4.4 Taylormodelle

Taylormodelle bestehen in `hotm` aus einer List von nach der Ordnung \succ (siehe 4.3) sortierten Monomen. Für die Supportintervalle der Fehlersymbole wird eine statische Liste (`static std::list`), für die Grenzwerte der Housekeeping-Methoden und den Index neuer Fehlersymbole jeweils statische Variablen angelegt.

4.4.1 Housekeeping-Methoden

Die Housekeeping-Methoden Splitting und Sweeping werden in [BrKM15] beschrieben und dienen der Kontrolle der Intervallkoeffizienten und deren Wachstum. Wann die Methoden angewandt werden, wird durch die manuell justierbaren Parameter `MACRO_THRESHOLD` für Splitting und `MICRO_THRESHOLD` für Cleaning festgelegt. Da für diese beiden Methoden Vergleiche reeller Zahlen nötig sind, um das Überschreiten eines Grenzwertes zu bestimmen, werden die Zahlen mit Funktionen der `iRRAM` in rationale Approximationen zerlegt.

Cleaning

Wie oben beschrieben, ergibt die Verwendung der `iRRAM-REALs` als Intervallgrenzen zweistufige Intervalle mit der Zahlen- und Intervallebene (siehe Abbildung 4.1). Mit fortlaufenden Rechnungen wächst die Breite der Intervalle auf Zahlenebene kontinuierlich und kann ohne weitere Methoden nur durch ein Erhöhen der verwendeten Präzision wieder verringert werden, beziehungsweise durch eine Iteration der `iRRAM`. *Cleaning* verlagert den Rechenfehler der Zahlenebene auf die Intervallebene und macht ihn damit auch für andere Housekeeping-Methoden sichtbar. Das Intervall $I = [m \pm r]$ mit $m = [c_m \pm \varepsilon_m]$ und $r = [c_r \pm \varepsilon_r]$ wird um ε_m und ε_r vergrößert, sodass das I zwar wächst, jedoch dessen Endpunkte exakt sind:

$$\begin{aligned}
 [[c_m \pm \varepsilon_m] \pm [c_r \pm \varepsilon_r]] &\rightsquigarrow [[c_m \pm 0] \pm [c_r + \varepsilon_m + \varepsilon_r \pm 0]] \\
 &= [\underbrace{c'_m}_{c_m + \varepsilon_m + \varepsilon_r} \pm c_r]
 \end{aligned}$$

Splitting

Durch Cleaning, Sweeping oder eine Initialisierung der Taylormodelle mit einer gewissen Breite wachsen die Radii der Koeffizienten im Laufe einer Berechnung auch auf Intervallebene. Um die Überschätzung, die durch Intervallarithmetik entsteht zu kontrollieren, kann durch *Splitting* ein Monom in zwei Monome mit Punktintervallen als Koeffizienten und einem neuen Fehlersymbol aufgeteilt werden:

$$[\tilde{c}_n \pm \varepsilon_n] \rightarrow [\tilde{c}_n \pm 0] + [\varepsilon_n \pm 0] \cdot \lambda_n, \lambda_n \in [0 \pm 1]$$

Dadurch erhöht sich der Grad des Polynoms, jedoch verringert sich die Überschätzung durch Intervallarithmetik. Eine Alternative das Splitting zu realisieren ist, den Fehler statt wie in [BrKM15] im Koeffizienten des neuen Monoms, im neuen Fehlersymbol zu kodieren:

$$[\tilde{c}_n \pm \varepsilon_n] \rightsquigarrow [\tilde{c}_n \pm 0] + [1 \pm 0] \cdot \lambda_n, \lambda_n \in [0 \pm \varepsilon_n]$$

Dies hat den Vorteil, dass die Größe der Fehlersymbole beim Sweeping berücksichtigt werden kann.

Sweeping

Cleaning und Splitting sorgen dafür, dass die Intervallbreite der Koeffizienten klein bleibt, jedoch erhöht sich der Grad der Polynome, was zum Beispiel bei der Multiplikation von Taylormodellen zu Ineffizienz durch die exponentiell wachsende Anzahl an Monomen führt. Um diesem Effekt entgegenzuwirken, kann mit *Sweeping* ein Fehlersymbol durch sein Supportintervall ersetzt werden:

$$c_n \lambda_i^k \rightsquigarrow c_n s_i \lambda_i^{k-1}$$

Hierbei ist zu beachten, dass das n -fache Sweepen eines Fehlersymbols, welches die 0 enthält, mit n gerade eine geringere Breite in den Koeffizienten einführt, als n ungerade (siehe oben 4.2). Daraus ergeben sich zwei Sweeping-Strategien.

square_only Die Sweeping-Strategie **square_only** beschränkt das Sweeping auf gerade Potenzen. So wird die angestrebte Reduktion des Grades eines Monoms nur erreicht, wenn alle Variablen einen geraden Exponenten haben.

square_first Mit **square_first** wird der angestrebte Grad erreicht, indem zunächst möglichst viele Fehlersymbole gerade gesweept werden. Falls dadurch jedoch nicht die gesamte Reduktion möglich ist, wird der Rest ungerade gesweept.

Der Aufruf der Methode erhält in **hotm** drei Parameter; das zu reduziere Taylormodell, den Grad, auf das Taylormodell durch Sweeping reduziert werden soll und die Strategie:

```
tmsimple x;
x = sweep_to(x, 2, SQUARE_ONLY);
```

Listing 4.1: Beispielaufruf der Sweeping-Routine

4.4.2 Darstellung der Taylormodelle

Die grafischen Darstellungen der Taylormodelle in dieser Arbeit wurden mit **gnuplot** [WiKm20] erstellt und zeigen je eine Übermenge des tatsächlichen Taylormodells. Eine Darstellung eines Taylormodells entsteht, indem für jedes der k Fehlersymbol aus $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ein Wert festgelegt und dann das Taylormodell evaluiert wird. Um eine Übermenge zu zeichnen muss der gesamte Wertebereich eines jeden Fehlersymbols abgedeckt werden. In **hotm** geschieht das, indem für eine gegebene *Auflösung* $a \in \mathbb{N}$ die Supportintervalle $S = (s_1, \dots, s_k)$ in jeweils a Intervalle geteilt und für jede Kombination mit eingesetzten Werten ein von den anderen unabhängiges Rechteck gezeichnet wird. So ergeben sich für Taylormodelle mit k Variablen a^k Rechtecke. Eine solche Darstellung wird in [BrKM15] als $image(T) \subseteq \mathbb{R}^d$ definiert. Die hier verwendete Darstellung wird um die verwendete Auflösung erweitert: $image_{acc}(T, a)$.

Seien T_1 und T_2 Taylormodelle mit $k = 2$ Variablen, die eine zweidimensionale Fläche aufspannen, bei denen die initialen Fehlersymbole erhalten bleiben und keine neuen Fehlersymbole eingeführt werden, so kann durch die Abhängigkeitsinformation der Fehlersymbole Ursprung und Abbild der einzelnen Regionen dieser Fläche farblich induziert werden. Abbildung 4.3 zeigt eine Iteration der Hénon-Abbildung eines Rechtecks mit verschiedenen Auflösungen. Es ist gut zu erkennen, dass die größere Auflösungen, die feinere überdeckt und $image_{acc}(T_1, 100) \times image_{acc}(T_2, 100) \subseteq image_{acc}(T_1, 10) \times image_{acc}(T_2, 10) \subseteq image_{acc}(T_1, 2) \times image_{acc}(T_2, 2)$ gilt. Durch die Einfärbung der Rechtecke können verschiedene Effekte beobachtet werden:

1. Die Rechtecke überlagern sich im Abbild, obwohl sie sich im Ursprung nicht überschneiden und die Hénon-Abbildung an sich eindeutig invertierbar ist. Grund hierfür ist die entstehende Überschätzung durch Intervallarithmetik, die besonders bei Multiplikation, beziehungsweise Quadrierung der Intervalle zum Tragen kommt.
2. Das in den Grafiken eingezeichnete Tetragon stellt die Fangzone R für die hier verwendeten Parameter $a = 1.4$ und $b = 0.3$ dar. Mit Hilfe der Einfärbung ist erkennbar, wie Regionen außerhalb von R wiederum außerhalb abgebildet werden, während innerhalb liegende diese nach der Abbildung nicht verlassen.

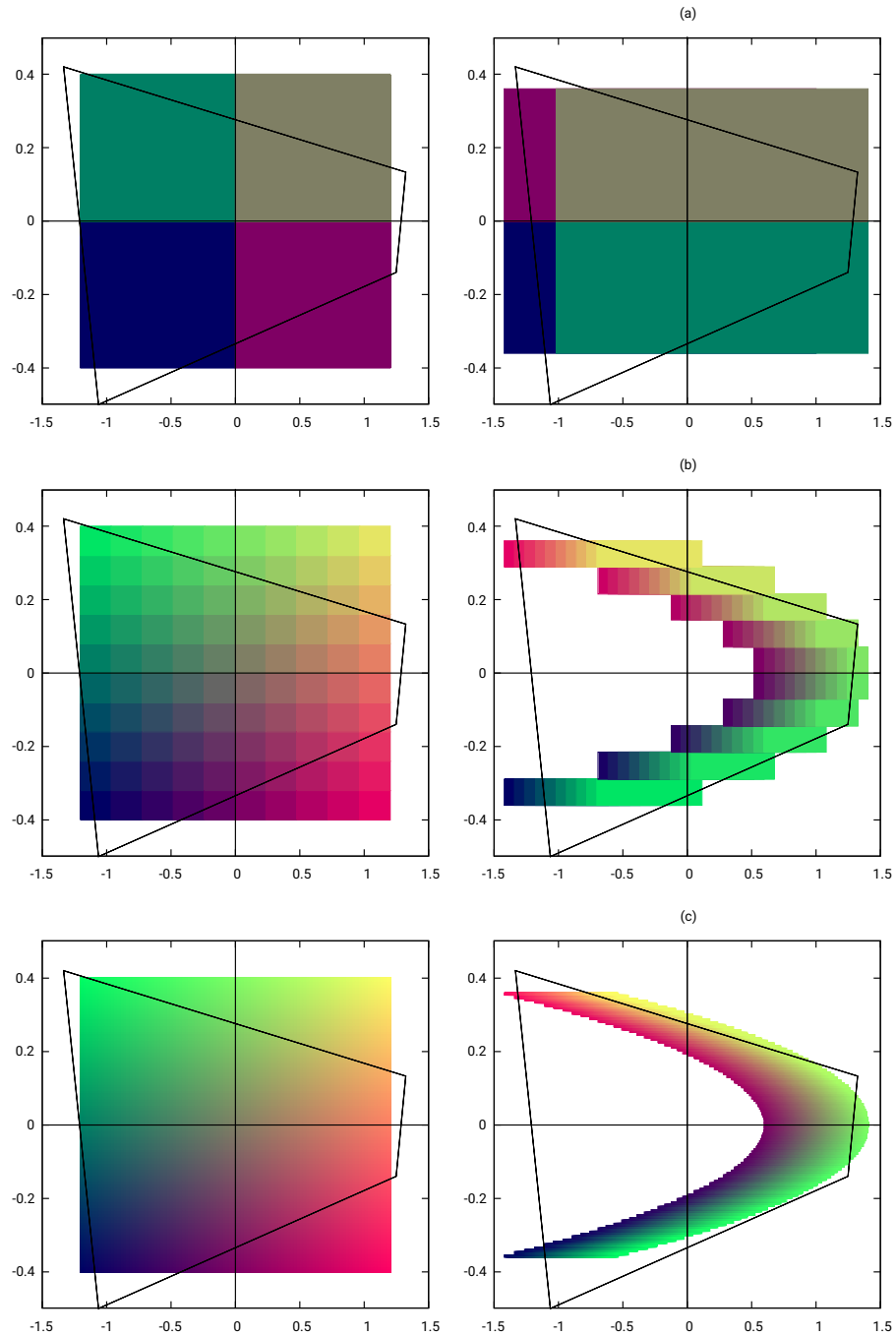


Abbildung 4.3: Jede Zeile zeigt eine einfache Abbildung der Rechtecke durch die Hénon-Abbildung mit $a = 1.4$ und $b = 0.3$ mit verschiedenen Auflösungen für die Darstellung. (a): 4 Rechtecke; (b): 100 Rechtecke, (c): 10000 Rechtecke. Das Tetragon stellt die Fangzone für die verwendeten Parameter dar.

5. Evaluation

Die Implementierung nichtlinearer Taylormodelle ergibt eine Vielzahl von Konfigurationsmöglichkeiten und damit einen großen Suchraum nach der optimalen Einstellung:

- Grenzwert für Cleaning δ_c , Splitting δ_s
- Grad der Reduktion durch Sweeping
- Anzahl der zu erhaltenden Fehlersymbole
- Strategie beim Sweeping
- Heuristik für die Reihenfolge, in der Fehlersymbole gesweept werden
- Vorgehen beim Splitting
- Definition des initialen Taylormodells

Diese Konfigurationen werden in `hotm` als JSON-Datei mit Hilfe einer JSON-Bibliothek¹ eingelesen und verarbeitet, um wiederholte Durchläufe mit leicht veränderten Parametern oder Batch-Runs zu vereinfachen. Listing 7.1 zeigt ein Beispiel einer Konfigurationsdatei, mit der versuchsweise 1000 Iterationen der Hénon-Abbildung berechnet werden sollen.

5.1 Housekeeping-Grenzwerte

Der Grenzwert einer Housekeeping-Methode gibt an ab welchem Wert die jeweiligen Methoden angewandt werden. Bei einem Intervall in `hotm` $[m \pm r]$ mit $m = [c_m \pm \varepsilon_m]$ und $r = [c_r \pm \varepsilon_r]$ als `iRRAM-REALs` wird

- Cleaning angewandt, wenn $\varepsilon_m < \delta_c$ oder $\varepsilon_r < \delta_c$ gilt und
- Splitting angewandt, wenn $c_m < \delta_s$ oder $c_r < \delta_s$ gilt.

Um diese Werte zu untersuchen, wurde betrachtet, wie sich die Größe des Rechtecks, welches durch die Intervalle x und y aufgespannt wird, abhängig von den Grenzwerten δ_c und δ_s auswirkt, beziehungsweise, wieviele Iterationen der Hénon-Abbildung bei einer festen Genauigkeit der `iRRAM-REALs` möglich sind, bis das Rechteck eine Fläche² von $> 2^{-5}$ erreicht hat.

¹<https://github.com/nlohmann/json> (Stand Dezember 2020)

²Ab einer Fläche von zirka 2^{-5} ist die Überschätzung der Intervalle zu groß und wächst innerhalb weniger Iterationen (< 10) gegen ∞ .

1000 Bits Präzision $x = [0 \pm 2^{-1000}], y = [0 \pm 2^{-1000}]$			10000 Bits Präzision $x = [0 \pm 2^{-10000}], y = [0 \pm 2^{-10000}]$		
δ_c ($2^{-\delta_c}$)	δ_s ($2^{-\delta_s}$)	Iterationen	δ_c ($2^{-\delta_c}$)	δ_s ($2^{-\delta_s}$)	Iterationen
-	-	451	-	-	4360
10	10	162	100	100	1463
10	5	160	100	50	1450
100	100	273	1000	1000	2641
100	50	258	1000	500	2530
500	500	794	5000	5000	7849
500	250	746	5000	2500	7289
1000	1000	1432	10000	10000	14455
1000	500	1317	10000	5000	13401

Tabelle 5.1: Berechnung der Fläche des Rechtecks mit verschiedenen Grenzwerten für Cleaning δ_c und Splitting δ_s und festgelegter Präzision.

Tabelle 5.1 zeigt experimentelle Ergebnisse für $x_0 = 0 + 1 \cdot \lambda_1$ und $y_0 = 0 + 1 \cdot \lambda_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in [0 \pm \varepsilon]$. Sowohl für 1000, als auch für 10000 Bits Genauigkeit reagiert das Ergebnis sehr sensibel auf die Grenzwerte der Housekeeping-Methoden. Falsch gewählte Werte vergrößern sogar die entstandene Überschätzung, im Vergleich zur Berechnung ohne Cleaning und Splitting, jeweils in Zeile 1 der Tabellen zu sehen. Werden die Grenzwerte durch die iRRAM-Präzision bestimmt, so bleibt der Fehler am längsten klein und die höchste Iterationszahl ist möglich.

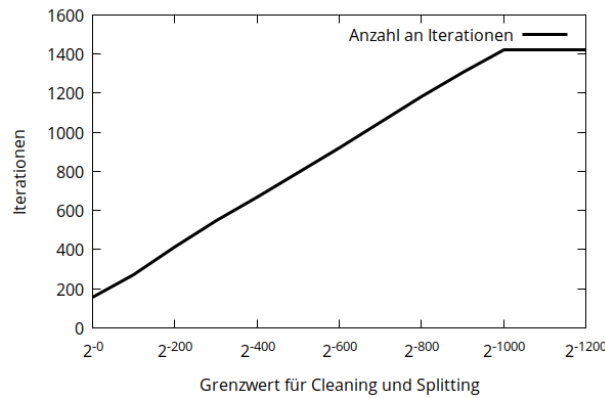


Abbildung 5.1: Iterationszahl der Hénon-Abbildung mit fester Genauigkeit von 1000 Bits.

Wie in Abbildung 5.1 zu sehen ist, hat eine Definition der Grenzwerte unter die zugrunde liegende Genauigkeit keinen Effekt mehr auf die Performanz der Berechnung, da sich die Iterationszahl nicht weiter erhöht.

5.2 Sweeping

Für eine Sweeping-Konfiguration kommen drei einander beeinflussende Parameter in Betracht: die Sweeping-Strategie, die Gradreduktion und die Anzahl der zu erhaltenen Fehlersymbole. Der Housekeeping-Vorgang für ein Taylormodell inklusive Sweeping besteht wiederum aus vier Schritten:

1. **(Sweeping)** Reduktion des Taylormodells bis zum angegebenen Grad, je nach Strategie
2. **(Sweeping überschüssiger Fehlersymbole)** Entfernen aller Fehlersymbole bis auf die n -größten (abhängig von deren Support-Space)
3. **(Cleaning)** Verlagern der durch die Schritte 1 und 2 entstandenen Rechenfehler auf der Ebene der **iRRAM-REALs** auf die Radii der Intervalle
4. **(Splitting)** Einführen neuer Fehlersymbole für Monome, deren Koeffizienten durch die Schritte 1-3 zu stark gewachsen sind.

Abbildung 5.2 zeigt die Performanz der Berechnung der Hénon-Abbildung, gemessen an der erreichten Iterationszahl mit statischer Präzision in verschiedenen Fällen. Wie zuvor ist die Berechnung beendet, sobald die Fläche des Rechtecks einen Schwellenwert überschreitet. Zu sehen ist, bei welcher Kombination von Parametern für Sweeping (Schritt 1) und Sweeping überschüssiger Fehlersymbole (Schritt 2) die Überschätzung am langsamsten wächst und somit die meisten Iterationen errechnet werden können. Die Zeiteffizienz ist in diesem Falle kein Faktor. Es ist zu erkennen, dass sich die Graphen innerhalb derselben Sweeping-Strategie kaum unterscheiden. Eine Verzehnfachung des Exponenten in der Breite der Intervalle und der Bits für die Präzision verzehnfacht auch die erreichte Iterationszahl. Die besten Ergebnisse werden beim Beschränken auf **square_only** (quadratisches Sweeping) für $n = 3$ und Sweeping zum Grade 0; bei **square_first** für $n = 1$, $n = 4$ und Sweeping zum Grade 3 erreicht. Insgesamt wird jedoch mit **square_only** zum Grade 0, also einem Sweeping bis zu einem Taylormodell, dessen Monome Variablen mit höchstens Grad 1 haben, die höchste Iterationszahl erzielt:

$$c \cdot \lambda_1^3 \lambda_2^2 \lambda_3^1 \lambda_4^3 \xrightarrow[\text{square_only}]{\text{sweep to 0}} c' \cdot \lambda_1^1 \lambda_2^0 \lambda_3^1 \lambda_4^1$$

Im Vergleich mit rein linearen Taylormodellen zeigt sich eine leichte Verbesserung (siehe Abbildung 5.3). Der Unterschied besteht darin, dass die nichtlinearen Taylormodelle während der Berechnung und besonders während der Multiplikation Punktintervalle erhalten können und sich stattdessen der Grad des Polynoms erhöht. Nach jeder Iteration werden diese dann zunächst im Grad reduziert, um diesen dann durch Splitting auf den Monomen um maximal 1 zu erhöhen. Für lineare Taylormodelle steht lediglich das Splitting für den Kernel zur Verfügung, da sonst nichtlineare Polynome entstünden. Des Weiteren wird hier bereits während der Multiplikation gesweept und Punktintervalle werden zu regulären Intervallen. Die Performanz des Sweepings **square_only** zum Grade 0 verbessert sich im Schnitt mit einer wachsenden Zahl der zu erhaltenen Fehlersymbole, wie in Abbildung 5.3 zu sehen ist. Jedes Fehlersymbol erhöht die Menge an erhaltener Abhängigkeitsinformation und sorgt

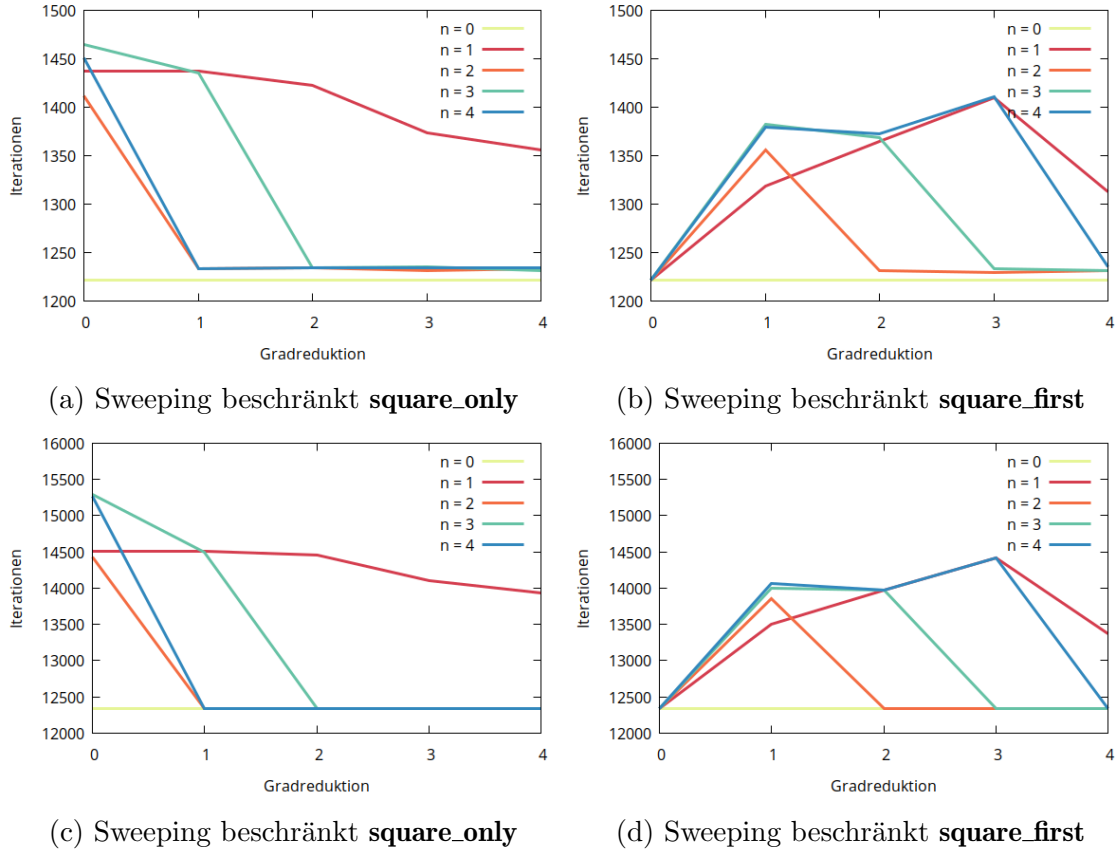


Abbildung 5.2: Anzahl an Iterationen mit Erhalt der n größten Fehlersymbole. (a) (b): 1000 Bits Präzision, $x_0 = y_0 = [0 \pm 2^{1000}]$. (c)(d): 10000 Bits Präzision, $x_0 = y_0 = [0 \pm 2^{10000}]$

dafür, dass ein Taylormodell dessen Ränder besser beschreiben kann. Allerdings stellt die Praktikabilität dieser Herangehensweise ein Problem dar, da so sehr große Polynome entstehen, die während einer Iteration der Hénon-Abbildung exponentiell in ihrer Länge wachsen.

5.3 Splitting

Durch Splitting wird ein Monom mit Intervallkoeffizienten in zwei Monome mit einem neuen, noch nicht verwendeten Fehlersymbol und Punktintervallkoeffizienten aufgeteilt. Für diese Housekeeping-Methode wurden zwei Möglichkeiten betrachtet. Zum Einen die in [BrKM15] verwendete Definition des neuen Fehlersymbols als Einheitsintervall:

$$[c \pm \varepsilon] \xrightarrow{\text{split}} [c] + [\varepsilon] \cdot \lambda_{\text{new}}, \lambda_{\text{new}} \in [0 \pm 1] \quad (5.1)$$

Zum Anderen die Umlagerung des Radius ε in das neue Fehlersymbol:

$$[c \pm \varepsilon] \xrightarrow{\text{split}} [c] + [1] \cdot \lambda_{\text{new}}, \lambda_{\text{new}} \in [0 \pm \varepsilon] \quad (5.2)$$

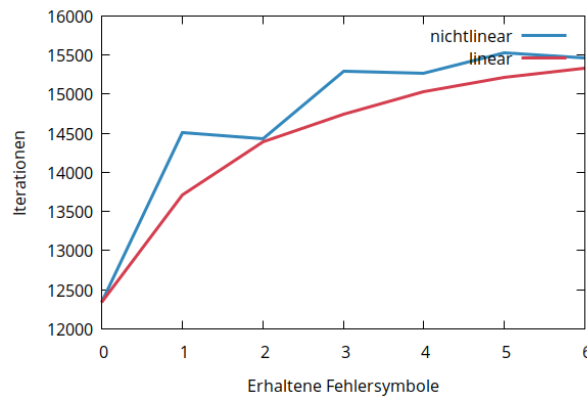


Abbildung 5.3: Iterationszahl der Hénon-Abbildung mit fester Genauigkeit von 1000 Bits.

Beim Sweeping hat sich gezeigt, dass die Überschätzung des Taylormodells bei einer Priorisierung kleinerer Fehlersymbole, beziehungsweise beim Erhalt von Fehlersymbolen mit größerem Support-Space, langsamer wächst. In einer linearen Implementierung der Taylormodelle mit Variante 5.1 wird eine solche Ordnung durch einen Vergleich der Koeffizienten hergestellt, da jedes Monom maximal nur ein Fehlersymbol enthalten kann. Ein nichtlineares Monom kann jedoch von mehreren Fehlersymbolen abhängen, wodurch die Information über die Größe des Fehlersymbols nicht im Koeffizienten kodiert werden kann und zudem innerhalb eines Monoms sortiert werden muss. Daher eignet sich Herangehensweise 5.2 für die Implementierung nichtlinearer Taylormodelle besser, als die Verwendung von Einheitsintervallen, wie in Abbildung 5.4 an einem Beispiel gezeigt wird. Hier werden beide Varianten auf die Entwicklung der Überschätzung von zwei Taylormodellen untersucht, wobei mit der Definition des Fehlersymbols als reguläres Intervall 5.2 mehr Iterationen der Hénon-Abbildung berechnet werden können, bis die Fläche des Rechtecks einen Schwellenwert überschreitet.

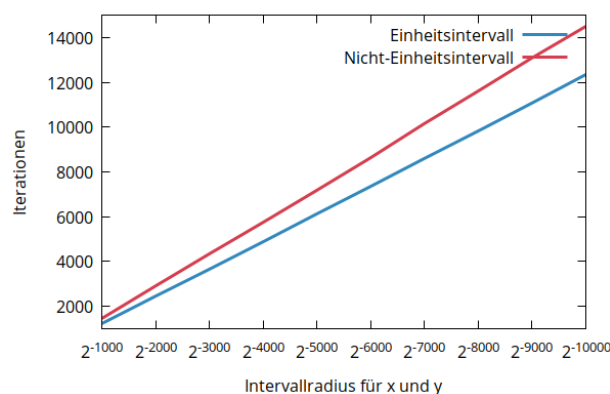


Abbildung 5.4: Iterationszahl der Hénon-Abbildung mit 10000 Bits fester Genauigkeit.

5.4 Initiales Taylormodell

Für die Hénon-Abbildung wird ein Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ wiederum in den \mathbb{R}^2 abgebildet. x_0 und y_0 können nun als Taylormodelle verschiedener Form definiert werden:

$$[c] + [1] \cdot \lambda, \lambda \in [0 \pm \varepsilon] \quad (5.3)$$

$$[c] + [\varepsilon] \cdot \lambda, \lambda \in [0 \pm 1] \quad (5.4)$$

$$[0] + [c \pm \varepsilon] \cdot \lambda, \lambda \in [1] \quad (5.5)$$

$$[c \pm \varepsilon] \quad (5.6)$$

Die verschiedenen Taylormodelle wurden verwendet, um die Intervalle $[0 \pm 2^{-1000}]$, beziehungsweise $[0 \pm 2^{-10000}]$ in x_0 und y_0 darzustellen. Tabelle 5.2 zeigt, wieviele Iterationen mit der jeweiligen Definition möglich sind, bis die Fläche des Rechtecks von $|x| \cdot |y|$ einen Schwellenwert überschreitet.

	1000 Bit Präzision		10000 Bit Präzision	
Taylormodell	Iterationen	$ x \cdot y $	Iterationen	$ x \cdot y $
TM 5.3	1437	0.17	14506	0.78
TM 5.4	1227	0.49	12338	0.19
TM 5.5	1437	0.37	14505	0.17
TM 5.6	1437	0.35	14505	0.18

Tabelle 5.2: Berechnung der Fläche des Rechtecks mit verschiedenen Definitionen der initialen Taylormodelle für x und y bei festgelegter Präzision.

Bis auf Taylormodell-Definition 5.4 erreichen (beinahe) alle Berechnung dieselbe Iterationszahl, variieren jedoch in der Größe des Rechtecks, welches von x und y aufgespannt wird. Mit der Definition 5.3 als initiales Taylormodell wird für 10000 Bit Genauigkeit eine minimal höhere Iterationszahl und bei 1000 Bit Genauigkeit ein kleineres Rechteck, als in den anderen Varianten erreicht.

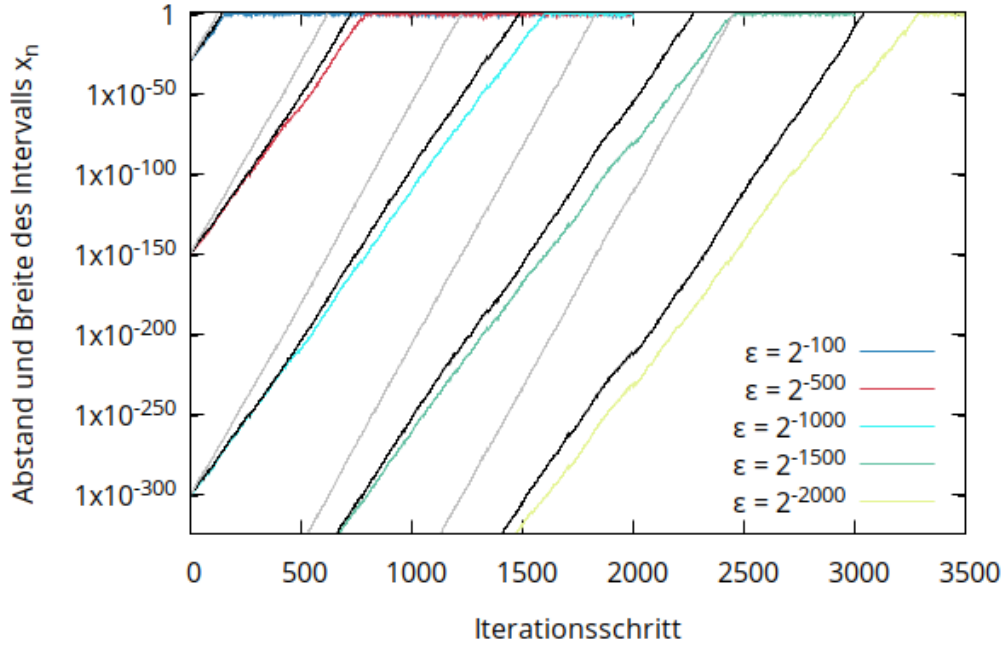


Abbildung 5.5: Lokale Annäherung an den Lyapunov Exponenten der Hénon-Iteration mit Intervallen der Breite $|x_0| = \varepsilon$, und den Parametern $a = 1.4, b = 0.3$ im Vergleich zur Entwicklung des Abstandes zweier Punkte mit Abstand ε

5.5 Umsetzung

Zwei Implementierungen der Hénon-Abbildung für die Parameter $a = 1.4$ und $b = 0.3$ sind in den Listings ?? und ?? zu sehen. Es werden drei verschiedene Zahlentypen verwendet, die jedoch alle auf den `iRRAM-REALs` aufbauen: *High Order Taylor Modell* `HOTM`, *Real Number* `num` und *Real Number Interval* `numint`. Die jeweils definierte Funktion `compare()` in Zeile 4 stellt den in der `iRRAM` verwendeten Rahmen für Iterationen, beziehungsweise Erhöhungen der Genauigkeit der `REALs` dar. Mit dem Funktionsaufruf `HOTM::init()` in Zeile 7 werden die zuvor in diesem Kapitel beschriebenen Grenzwerte und Parameter für die Housekeeping-Methoden mit Werten initialisiert, die experimentell die beste Performanz lieferten. Die beiden Listings unterscheiden zunächst im verwendeten Konstruktor für die Taylormodelle in Zeile 8. In der linken Implementierung ?? werden x und y als Punktintervalle, also als Taylormodelle mit lediglich einem Kernel definiert:

```
HOTM::x(0) ~> x := [0]
HOTM::y(0) ~> y := [0]
```

Unter Verwendung des Konstruktors auf der rechten Seite wird aus der Eingabe eines Intervalls mit Mittelpunkt c und Radius ε je ein Taylormodell mit einem Fehlersymbol, welches ε enthält und dem Kernel als Punktintervall c :

```
HOTM::x(0,0.001) ~> x := [0] + [1] · λ0, λ0 ∈ [0 ± 0.001]
HOTM::y(0,0.001) ~> y := [0] + [1] · λ1, λ1 ∈ [0 ± 0.001]
```


Die Parameter a und b werden in Zeile 10 als `num`, wodurch `iRRAM::REALs` instanziiert.

```

1 #include "iRRAM.h"
2 #include "hoTM.h"
3 using namespace iRRAM;
4 void compute(){
5     int n;
6     cin >> n;
7     HOIM::init();
8     HOIM x(0), y(0);
9     HOIM x_new, y_new;
10    num a(1.4), b(0.3);
11    for (int i = 0; i < n; i++) {
12        x_new = num(1)+y-a*(x*x);
13        y_new = b * x;
14        x = x_new;
15        y = y_new;
16    }
17    cout<<"x:"<< numint(x) <<"\n";
18    cout<<"y:"<< numint(y) <<"\n";
19 }
```

Listing 5.1:
Implementierung mit Punktintervallen

```

1 #include "iRRAM.h"
2 #include "hoTM.h"
3 using namespace iRRAM;
4 void compute(){
5     int n;
6     cin >> n;
7     HOIM::init();
8     HOIM x(0, 0.001), y(0, 0.001);
9     HOIM x_new, y_new;
10    num a(1.4), b(0.3);
11    for (int i = 0; i < n; i++) {
12        x_new = num(1)+y-a*(x*x);
13        y_new = b * x;
14        x = x_new;
15        y = y_new;
16    }
17    cout<<"x:"<< x <<"\n";
18    cout<<"y:"<< y <<"\n";
19 }
```

Listing 5.2:
Implementierung mit Intervallen

6. Diskussion und Ausblick

(Keine Untergliederung mehr)

Literaturverzeichnis

- [BrKM15] F. Brauße, M. V. Korovina und N. T. Müller. Using Taylor Models in Exact Real Arithmetic. In I. S. Kotsireas, S. M. Rump und C. K. Yap (Hrsg.), *Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences - 6th International Conference, MACIS 2015, Berlin, Germany, November 11-13, 2015, Revised Selected Papers*, Band 9582 der *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2015, S. 474–488.
- [MaBe01] K. Makino und M. Berz. Higher order verified inclusions of multidimensional systems by taylor models. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 47(5), 2001, S. 3514–3503.
- [Moor79] R. E. Moore. *Methods and applications of interval analysis*. SIAM studies in applied mathematics. SIAM. 1979.
- [MoPe07] M. B. Monagan und R. Pearce. Polynomial Division Using Dynamic Arrays, Heaps, and Packed Exponent Vectors. In V. G. Ganzha, E. W. Mayr und E. V. Vorozhtsov (Hrsg.), *Computer Algebra in Scientific Computing, 10th International Workshop, CASC 2007, Bonn, Germany, September 16-20, 2007, Proceedings*, Band 4770 der *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2007, S. 295–315.
- [Müll09] N. Müller. Enhancing imperative exact real arithmetic with functions and logic. 2009.
- [PlBr89] P. Plaschko und K. Brod. *Deterministisches Chaos — Eine Einführung*, S. 359–424. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. 1989.
- [Span10] C. Spandl. Computational Complexity of Iterated Maps on the Interval (Extended Abstract). In X. Zheng und N. Zhong (Hrsg.), *Proceedings Seventh International Conference on Computability and Complexity in Analysis, CCA 2010, Zhenjiang, China, 21-25th June 2010*, Band 24 der *EPTCS*, 2010, S. 139–150.
- [WiKm20] T. Williams, C. Kelley und many others. Gnuplot 5.4: an interactive plotting program. <http://gnuplot.sourceforge.net/>, 2020.
- [Yan98] T. Yan. The Geobucket Data Structure for Polynomials. *J. Symb. Comput.* 25(3), 1998, S. 285–293.

7. Anhang

Algorithm 1: Polynommultiplikation mit Geobuckets

input: Polynome p_1, p_2

```
1 // Initialize
2  $n \leftarrow \#p_1, m \leftarrow \#p_2$ ;
3  $p \leftarrow []$ ;
4 Allocate buckets with space for polynomials:  $\{2m, 4m, \dots, 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}m\}$ ;
5  $i \leftarrow 0$ ;
6 // Main Loop
7 while  $i < n$  do
8    $p \leftarrow p_1[i] \cdot p_2$ ;
9   if  $i < (n - 1)$  then
10     $p \leftarrow p + p_1[i + 1] \cdot p_2$ ;
11     $i \leftarrow i + 2$ ;
12     $j \leftarrow 0$ ;
13    while buckets[ $j$ ].not_empty() do
14       $p \leftarrow p + \text{buckets}[j]$ ;
15      buckets[ $j$ ]  $\leftarrow []$ ;
16       $j \leftarrow j + 1$ ;
17    end
18    if  $i < n$  then
19      buckets[ $j$ ]  $\leftarrow p$ ;
20       $p \leftarrow []$ ;
21  end
22 // Merge each bucket into the final polynomial
23 foreach bucket  $\in$  buckets do
24    $p \leftarrow p + \text{bucket}$ ;
25 end
26 return  $p$ 
```

Algorithm 2: Vergleich Variablen zweier Monome

input: Zwei Listen von Fehlersymbolen ess_1, ess_2

```

1  $size \leftarrow \max\{length(ess_1), length(ess_2)\};$ 
2  $i \leftarrow 0;$ 
3 while  $i < size$  do
4   if  $i \geq length(ess_1)$  or  $ess_1[i] \succ ess_2[i]$  then
5     return right
6   else if  $i \geq length(ess_2)$  or  $ess_1[i] \prec ess_2[i]$  then
7     return left
8 end
9 return equal

```

```

1  [
2  {
3      "comment": "Error 100",
4      "rel": 1,
5      "linear": 0,
6      "keep": 2,
7      "error_in_lambda": true,
8      "strategy": "SQUARE_ONLY",
9      "iter": 1000,
10     "prec": 50,
11     "error": 1000,
12     "decimals": 20,
13     "sweep_to": 2,
14     "micro_thresh": 1,
15     "macro_thresh": 1,
16     "a": 1.4,
17     "b": 0.3,
18     "support_space": [
19         {
20             "point": false,
21             "mid": "0",
22             "rad": "e"
23         },
24         {
25             "point": false,
26             "mid": "0",
27             "rad": "e"
28         }
29     ],
30     "x": {
31         "kernel": {
32             "point": true,
33             "mid": "1",
34             "rad": "0"
35         },
36         "monomials": [
37             {
38                 "point": true,
39                 "mid": "1",
40                 "rad": "0",
41                 "lambdas": [{
42                     "exp": 1,
43                     "index": 0
44                 }]
45             }
46         ]
47     },
48     "y": {
49         "kernel": {
50             "point": true,
51             "mid": "0.1",
52             "rad": "0"
53         },
54         "monomials": [
55             {
56                 "point": true,
57                 "mid": "1",
58                 "rad": "0",
59                 "lambdas": [{
60                     "exp": 1,
61                     "index": 1
62                 }]
63             }
64         ]
65     }
66 }
67 ]

```

Listing 7.1: Beispielkonfiguration

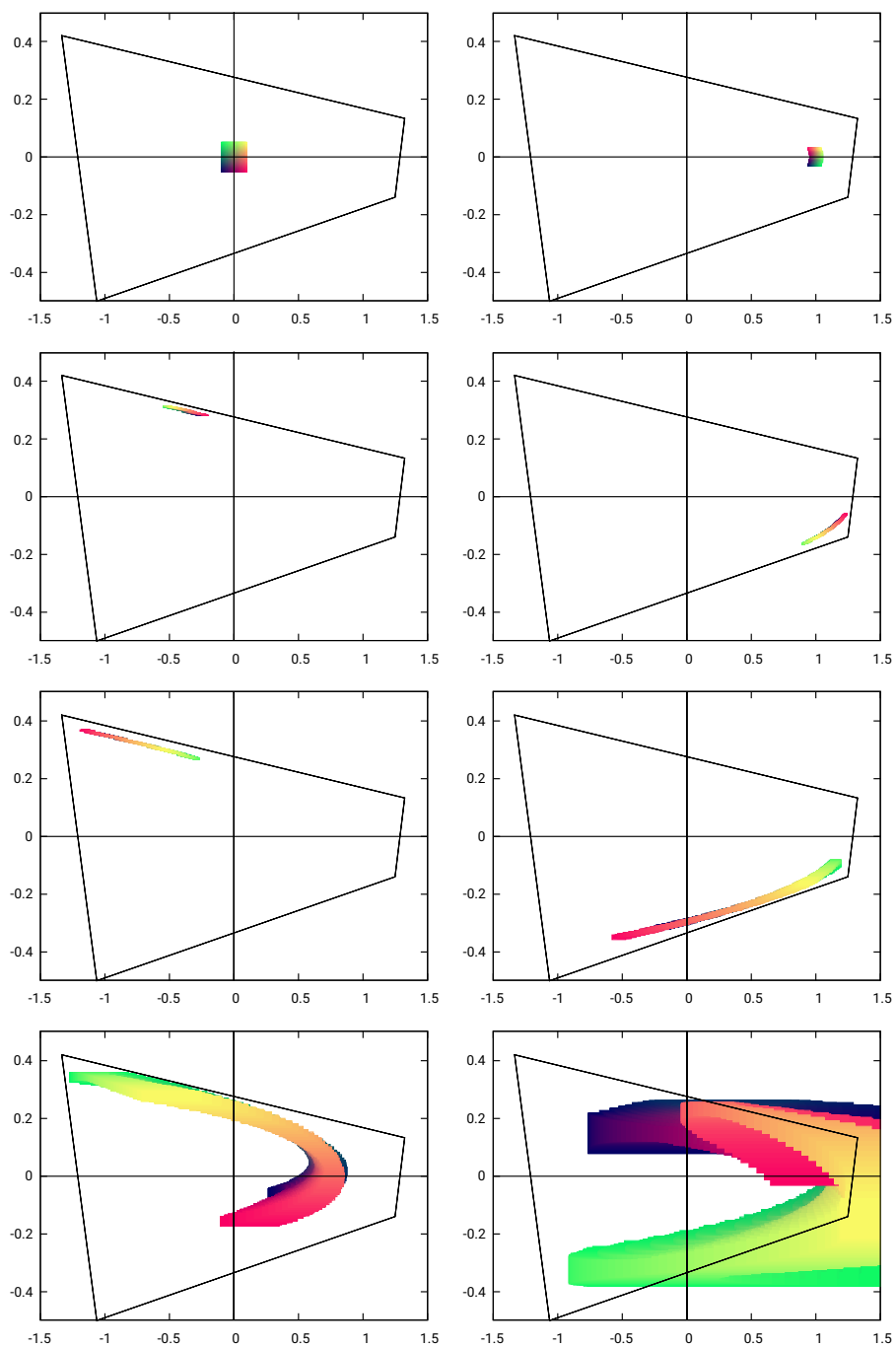


Abbildung 7.1: Mehrere Iterationen mit Farbkodierung

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Bachelor-/Masterarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit habe ich bisher keinem anderen Prüfungsamt in gleicher oder vergleichbarer Form vor-gelegt. Sie wurde bisher auch nicht veröffentlicht.

Trier, den xx. Monat 20xx