

Lothar Papula

# Mathematische Formelsammlung

für Ingenieure und Naturwissenschaftler

10. Auflage

**STUDIUM**



Lothar Papula

Mathematische Formelsammlung

Lothar Papula

# Mathematische Formelsammlung

für Ingenieure und Naturwissenschaftler

10., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit über 400 Abbildungen, zahlreichen Rechenbeispielen  
und einer ausführlichen Integraltafel

STUDIUM



**VIEWEG+**  
**TEUBNER**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der  
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

1. Auflage 1986
- 2., durchgesehene und erweiterte Auflage 1988
- 3., verbesserte Auflage 1990
- 4., verbesserte Auflage 1994
- 5., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage 1998
- 6., durchgesehene Auflage 2000
- 7., durchgesehene und erweiterte Auflage 2001
- 8., durchgesehene und ergänzte Auflage 2003
- 9., durchgesehene und erweiterte Auflage 2006  
unveränderter Nachdruck 2009
- 10., überarbeitete und erweiterte Auflage 2009

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009

Lektorat: Thomas Zipsner | Imke Zander

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.  
[www.viewegteubner.de](http://www.viewegteubner.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg  
Technische Redaktion: Gabriele McLemore, Wiesbaden  
Bilder: Graphik & Text Studio, Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing  
Satz: Druckhaus „Thomas Müntzer“, Bad Langensalza  
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Stürtz GmbH, Würzburg  
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.  
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0757-1

# Vorwort zur 10. Auflage

Das Studium der Ingenieur- und Naturwissenschaften verlangt nach *rasch* zugänglichen Informationen. Die vorliegende **Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler** wurde dementsprechend gestaltet.

## Zur Auswahl des Stoffes

Ausgehend von der elementaren Schulmathematik (z. B. Bruchrechnung, Gleichungen mit einer Unbekannten, Lehrsätze aus der Geometrie) werden alle für den Ingenieur und Naturwissenschaftler wesentlichen mathematischen Stoffgebiete behandelt. Dabei wurde der bewährte Aufbau des dreibändigen Lehrbuches **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** konsequent beibehalten. Der Benutzer wird dies sicherlich als hilfreich empfinden.

Im Anhang dieser Formelsammlung befinden sich eine ausführliche *Integraltafel* mit über 400 in den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen besonders häufig auftretenden Integralen (Teil A) sowie wichtige Tabellen zur *Wahrscheinlichkeitsrechnung* und *Statistik* (Teil B). Der Druck dieser Tafel erfolgte auf eingefärbtem Papier, um einen raschen Zugriff zu ermöglichen.

Behandelt werden folgende Stoffgebiete:

- Allgemeine Grundlagen aus Algebra, Arithmetik und Geometrie
- Vektorrechnung
- Funktionen und Kurven
- Differentialrechnung
- Integralrechnung
- Unendliche Reihen, Taylor- und Fourier-Reihen
- Lineare Algebra
- Komplexe Zahlen und Funktionen
- Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Fehler- und Ausgleichsrechnung
- Fourier-Transformationen
- Laplace-Transformationen
- Vektoranalysis
- Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Grundlagen der mathematischen Statistik

## Änderungen gegenüber der 9. Auflage

Die Kapitel I bis XIII wurden überarbeitet und an verschiedenen Stellen erweitert.

**Zur Darstellung des Stoffes**

Die Darstellung der mathematischen Begriffe, Formeln und Sätze erfolgt in anschaulicher und allgemeinverständlicher Form. Wichtige Formeln wurden gerahmt und grau unterlegt und zusätzlich durch Bilder verdeutlicht. Zahlreiche Beispiele helfen, die Formeln treffsicher auf eigene Problemstellungen anzuwenden. Ein ausführliches Inhalts- und Sachwortverzeichnis ermöglicht ein rasches Auffinden der gewünschten Informationen.

**Eine Bitte des Autors**

Für Hinweise und Anregungen – insbesondere auch aus dem Kreis der Studentenschaft – bin ich stets dankbar. Sie sind eine unverzichtbare Voraussetzung und Hilfe für die stetige Verbesserung dieser Formelsammlung.

**Ein Wort des Dankes ...**

... an alle Fachkollegen und Studenten, die durch Anregungen und Hinweise zur Verbesserung dieses Werkes beigetragen haben,

... an die Mitarbeiter des Verlages, ganz besonders aber an Frau Gabriele McLemore und Herrn Thomas Zipsner, für die hervorragende Zusammenarbeit während der Entstehung und Drucklegung dieses Werkes,

... an Frau Schulz vom Druck- und Satzhaus „Thomas Müntzer“ für den ausgezeichneten mathematischen Satz.

Wiesbaden, Sommer 2009

*Lothar Papula*

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Allgemeine Grundlagen aus Algebra, Arithmetik und Geometrie</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundlegende Begriffe über Mengen</b>	<b>1</b>
1.1 Definition und Darstellung einer Menge	1
1.2 Mengenoperationen	2
<b>2 Rechnen mit reellen Zahlen</b>	<b>2</b>
2.1 Reelle Zahlen und ihre Eigenschaften	2
2.1.1 Natürliche und ganze Zahlen	2
2.1.2 Rationale, irrationale und reelle Zahlen	4
2.1.3 Rundungsregeln für reelle Zahlen	5
2.1.4 Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengerade	5
2.1.5 Grundrechenarten	6
2.2 Zahlensysteme	7
2.3 Intervalle	8
2.4 Bruchrechnung	8
2.5 Potenzen und Wurzeln	10
2.6 Logarithmen	12
2.7 Binomischer Lehrsatz	14
<b>3 Elementare (endliche) Reihen</b>	<b>16</b>
3.1 Definition einer (endlichen) Reihe	16
3.2 Arithmetische Reihen	16
3.3 Geometrische Reihen	16
3.4 Spezielle Zahlenreihen	16
<b>4 Gleichungen mit einer Unbekannten</b>	<b>17</b>
4.1 Algebraische Gleichungen $n$ -ten Grades	17
4.1.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	17
4.1.2 Lineare Gleichungen	18
4.1.3 Quadratische Gleichungen	18
4.1.4 Kubische Gleichungen	18
4.1.5 Bi-quadratische Gleichungen	20
4.2 Allgemeine Lösungshinweise für Gleichungen	21
4.3 Graphisches Lösungsverfahren	22
4.4 Regula falsi	23
4.5 Tangentenverfahren von Newton	24
<b>5 Ungleichungen mit einer Unbekannten</b>	<b>25</b>

<b>6</b>	<b>Lehrsätze aus der elementaren Geometrie</b>	<b>26</b>
6.1	Satz des Pythagoras	26
6.2	Höhensatz	26
6.3	Kathetensatz (Euklid)	27
6.4	Satz des Thales	27
6.5	Strahlensätze	27
6.6	Sinussatz	28
6.7	Kosinussatz	28
<b>7</b>	<b>Ebene geometrische Körper (Planimetrie)</b>	<b>28</b>
7.1	Dreiecke	28
7.1.1	Allgemeine Beziehungen	28
7.1.2	Spezielle Dreiecke	29
7.1.2.1	Rechtwinkliges Dreieck	29
7.1.2.2	Gleichschenkliges Dreieck	29
7.1.2.3	Gleichseitiges Dreieck	30
7.2	Quadrat	30
7.3	Rechteck	30
7.4	Parallelogramm	31
7.5	Rhombus oder Raute	31
7.6	Trapez	31
7.7	Reguläres $n$ -Eck	32
7.8	Kreis	32
7.9	Kreis Sektor oder Kreisausschnitt	32
7.10	Kreissegment oder Kreisabschnitt	32
7.11	Kreisring	33
7.12	Ellipse	33
<b>8</b>	<b>Räumliche geometrische Körper (Stereometrie)</b>	<b>33</b>
8.1	Prisma	33
8.2	Würfel	34
8.3	Quader	34
8.4	Pyramide	34
8.5	Pyramidenstumpf	35
8.6	Tetraeder oder dreiseitige Pyramide	35
8.7	Keil	36
8.8	Gerader Kreiszylinder	36
8.9	Gerader Kreiskegel	36
8.10	Gerader Kreiskegelstumpf	37
8.11	Kugel	37
8.12	Kugelausschnitt oder Kugelsektor	37
8.13	Kugelschicht oder Kugelzone	38
8.14	Kugelabschnitt, Kugelsegment, Kugelkappe oder Kalotte	38
8.15	Ellipsoid	38
8.16	Rotationsparaboloid	39
8.17	Tonne oder Fass	39
8.18	Torus	40
8.19	Guldinsche Regeln für Rotationskörper	40



<b>9</b>	<b>Koordinatensysteme</b>	41
9.1	Ebene Koordinatensysteme	41
9.1.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	41
9.1.2	Polarkoordinaten	42
9.1.3	Koordinatentransformationen	42
9.1.3.1	Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems	42
9.1.3.2	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Polarkoordinaten	42
9.1.3.3	Drehung eines kartesischen Koordinatensystems	43
9.2	Räumliche Koordinatensysteme	44
9.2.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	44
9.2.2	Zylinderkoordinaten	44
9.2.3	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Zylinderkoordinaten	44
9.2.4	Kugelkoordinaten	45
9.2.5	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Kugelkoordinaten	45
<b>II</b>	<b>Vektorrechnung</b>	46
<b>1</b>	<b>Grundbegriffe</b>	46
1.1	Vektoren und Skalare	46
1.2	Spezielle Vektoren	46
1.3	Gleichheit von Vektoren	47
1.4	Kollineare, parallele und antiparallele Vektoren, inverser Vektor	47
<b>2</b>	<b>Komponentendarstellung eines Vektors</b>	48
2.1	Komponentendarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem	48
2.2	Komponentendarstellung spezieller Vektoren	48
2.3	Betrag und Richtungswinkel eines Vektors	49
<b>3</b>	<b>Vektoroperationen</b>	50
3.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	50
3.2	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	51
3.3	Skalarprodukt (inneres Produkt)	51
3.4	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	53
3.5	Spatprodukt (gemischtes Produkt)	55
3.6	Formeln für Mehrfachprodukte	56
<b>4</b>	<b>Anwendungen</b>	56
4.1	Arbeit einer konstanten Kraft	56
4.2	Vektorielle Darstellung einer Geraden	57
4.2.1	Punkt-Richtungs-Form	57
4.2.2	Zwei-Punkte-Form	57
4.2.3	Abstand eines Punktes von einer Geraden	58

4.2.4	Abstand zweier paralleler Geraden	58
4.2.5	Abstand zweier windschiefer Geraden	59
4.2.6	Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden	60
4.3	Vektorielle Darstellung einer Ebene	60
4.3.1	Punkt-Richtungs-Form	60
4.3.2	Drei-Punkte-Form	61
4.3.3	Ebene senkrecht zu einem Vektor	62
4.3.4	Abstand eines Punktes von einer Ebene	62
4.3.5	Abstand einer Geraden von einer Ebene	63
4.3.6	Abstand zweier paralleler Ebenen	64
4.3.7	Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene	65
4.3.8	Schnittwinkel zweier Ebenen	66
4.3.9	Schnittgerade zweier Ebenen	66
<b>III</b>	<b>Funktionen und Kurven</b>	<b>67</b>
<b>1</b>	<b>Grundbegriffe</b>	<b>67</b>
1.1	Definition einer Funktion	67
1.2	Darstellungsformen einer Funktion	67
1.2.1	Analytische Darstellung	67
1.2.2	Parameterdarstellung	67
1.2.3	Kurvengleichung in Polarkoordinaten	68
1.2.4	Graphische Darstellung	68
<b>2</b>	<b>Allgemeine Funktionseigenschaften</b>	<b>68</b>
2.1	Nullstellen	68
2.2	Symmetrie	69
2.3	Monotonie	69
2.4	Periodizität	70
2.5	Umkehrfunktion (inverse Funktion)	70
<b>3</b>	<b>Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion</b>	<b>71</b>
3.1	Grenzwert einer Folge	71
3.2	Grenzwert einer Funktion	72
3.2.1	Grenzwert für $x \rightarrow x_0$	72
3.2.2	Grenzwert für $x \rightarrow \pm \infty$	72
3.3	Rechenregeln für Grenzwerte	72
3.4	Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital	73
3.5	Stetigkeit einer Funktion	74
<b>4</b>	<b>Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)</b>	<b>75</b>
4.1	Definition der ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen)	75
4.2	Lineare Funktionen (Geraden)	75
4.2.1	Allgemeine Geradengleichung	75
4.2.2	Hauptform einer Geraden	75
4.2.3	Punkt-Steigungs-Form einer Geraden	75
4.2.4	Zwei-Punkte-Form einer Geraden	76

4.2.5	Achsenabschnittsform einer Geraden	76
4.2.6	Hessesche Normalform einer Geraden	76
4.2.7	Abstand eines Punktes von einer Geraden	76
4.2.8	Schnittwinkel zweier Geraden	77
4.3	Quadratische Funktionen (Parabeln)	77
4.3.1	Hauptform einer Parabel	77
4.3.2	Produktform einer Parabel	78
4.3.3	Scheitelpunktsform einer Parabel	78
4.4	Polynomfunktionen höheren Grades ( $n$ -ten Grades)	78
4.4.1	Abspaltung eines Linearfaktors	78
4.4.2	Nullstellen einer Polynomfunktion	78
4.4.3	Produktdarstellung einer Polynomfunktion	78
4.5	Horner-Schema	79
4.6	Reduzierung einer Polynomfunktion (Nullstellenberechnung)	80
4.7	Interpolationspolynome	81
4.7.1	Allgemeine Vorbetrachtungen	81
4.7.2	Interpolationsformel von Lagrange	81
4.7.3	Interpolationsformel von Newton	83
<b>5</b>	<b>Gebrochenrationale Funktionen</b>	<b>85</b>
5.1	Definition der gebrochenrationalen Funktionen	85
5.2	Nullstellen, Definitionslücken, Pole	86
5.3	Asymptotisches Verhalten im Unendlichen	87
<b>6</b>	<b>Potenz- und Wurzelfunktionen</b>	<b>87</b>
6.1	Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten	87
6.2	Wurzelfunktionen	89
6.3	Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	89
<b>7</b>	<b>Trigonometrische Funktionen</b>	<b>90</b>
7.1	Winkelmaße	90
7.2	Definition der trigonometrischen Funktionen	91
7.3	Sinus- und Kosinusfunktion	92
7.4	Tangens- und Kotangensfunktion	93
7.5	Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	93
7.6	Trigonometrische Formeln	94
7.6.1	Additionstheoreme	94
7.6.2	Formeln für halbe Winkel	95
7.6.3	Formeln für Winkelvielfache	95
7.6.4	Formeln für Potenzen	96
7.6.5	Formeln für Summen und Differenzen	96
7.6.6	Formeln für Produkte	97
7.7	Anwendungen in der Schwingungslehre	97
7.7.1	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	97
7.7.2	Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)	98
7.7.2.1	Gleichung einer harmonischen Schwingung	98
7.7.2.2	Darstellung einer harmonischen Schwingung im Zeigerdiagramm	98

7.7.3	Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter harmonischer Schwingungen .....	99
<b>8</b>	<b>Arkusfunktionen</b> .....	<b>100</b>
8.1	Arkussinus- und Arkuskosinusfunktion .....	100
8.2	Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion .....	101
8.3	Wichtige Beziehungen zwischen den Arkusfunktionen .....	102
<b>9</b>	<b>Exponentialfunktionen</b> .....	<b>103</b>
9.1	Definition der Exponentialfunktionen .....	103
9.2	Spezielle Exponentialfunktionen aus den Anwendungen .....	104
9.2.1	Abklingfunktion .....	104
9.2.2	Sättigungsfunktion .....	104
9.2.3	Wachstumsfunktion .....	105
9.2.4	Gauß-Funktion (Gaußsche Glockenkurve) .....	105
9.2.5	Kettenlinie .....	105
<b>10</b>	<b>Logarithmusfunktionen</b> .....	<b>106</b>
10.1	Definition der Logarithmusfunktionen .....	106
10.2	Spezielle Logarithmusfunktionen .....	106
<b>11</b>	<b>Hyperbelfunktionen</b> .....	<b>107</b>
11.1	Definition der Hyperbelfunktionen .....	107
11.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen .....	108
11.3	Formeln .....	109
11.3.1	Additionstheoreme .....	109
11.3.2	Formeln für halbe Argumente .....	109
11.3.3	Formeln für Vielfache des Arguments .....	110
11.3.4	Formeln für Potenzen .....	110
11.3.5	Formeln für Summen und Differenzen .....	111
11.3.6	Formeln für Produkte .....	111
11.3.7	Formel von Moivre .....	111
<b>12</b>	<b>Areafunktionen</b> .....	<b>112</b>
12.1	Definition der Areafunktionen .....	112
12.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Areafunktionen .....	113
<b>13</b>	<b>Kegelschnitte</b> .....	<b>114</b>
13.1	Allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes .....	114
13.2	Kreis .....	114
13.2.1	Geometrische Definition .....	114
13.2.2	Mittelpunktsgleichung eines Kreises (Ursprungsgleichung) .....	115
13.2.3	Kreis in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobener Kreis) .....	115
13.2.4	Gleichung eines Kreises in Polarkoordinaten .....	115
13.2.5	Parameterdarstellung eines Kreises .....	115

13.3	Ellipse	116
13.3.1	Geometrische Definition	116
13.3.2	Mittelpunktsleichung einer Ellipse (Ursprungsgleichung)	116
13.3.3	Ellipse in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Ellipse)	116
13.3.4	Gleichung einer Ellipse in Polarkoordinaten	117
13.3.5	Parameterdarstellung einer Ellipse	117
13.4	Hyperbel	118
13.4.1	Geometrische Definition	118
13.4.2	Mittelpunktsleichung einer Hyperbel (Ursprungsgleichung)	118
13.4.3	Hyperbel in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Hyperbel)	118
13.4.4	Gleichung einer Hyperbel in Polarkoordinaten	119
13.4.5	Parameterdarstellung einer Hyperbel	120
13.4.6	Gleichung einer um $90^\circ$ gedrehten Hyperbel	120
13.4.7	Gleichung einer gleichseitigen oder rechtwinkligen Hyperbel ( $a = b$ )	120
13.5	Parabel	121
13.5.1	Geometrische Definition	121
13.5.2	Scheitelsleichung einer Parabel	121
13.5.3	Parabel in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Parabel)	121
13.5.4	Gleichung einer Parabel in Polarkoordinaten	122
13.5.5	Parameterdarstellung einer Parabel	122
<b>14</b>	<b>Spezielle Kurven</b>	<b>123</b>
14.1	Gewöhnliche Zykloide (Rollkurve)	123
14.2	Epizykloide	123
14.3	Hypozykloide	124
14.4	Astroide (Sternkurve)	125
14.5	Kardioide (Herzkurve)	125
14.6	Lemniskate (Schleifenkurve)	126
14.7	Strophoide	126
14.8	Cartesisches Blatt	127
14.9	„Kleeblatt“ mit $n$ bzw. $2n$ Blättern	127
14.10	Spiralen	128
14.10.1	Archimedische Spirale	128
14.10.2	Logarithmische Spirale	128
<b>IV</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>129</b>
<b>1</b>	<b>Differenzierbarkeit einer Funktion</b>	<b>129</b>
1.1	Differenzenquotient	129
1.2	Differentialquotient oder 1. Ableitung	129
1.3	Ableitungsfunktion	129
1.4	Höhere Ableitungen	130
1.5	Differential einer Funktion	130
<b>2</b>	<b>Erste Ableitung der elementaren Funktionen (Tabelle)</b>	<b>131</b>

<b>3 Ableitungsregeln</b>	132
3.1 Faktorregel	132
3.2 Summenregel	132
3.3 Produktregel	132
3.4 Quotientenregel	133
3.5 Kettenregel	133
3.6 Logarithmische Differentiation	135
3.7 Ableitung der Umkehrfunktion	135
3.8 Implizite Differentiation	136
3.9 Ableitungen einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve)	136
3.10 Ableitungen einer in Polarkoordination dargestellten Kurve	137
<b>4 Anwendungen der Differentialrechnung</b>	137
4.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung	137
4.2 Tangente und Normale	138
4.3 Linearisierung einer Funktion	138
4.4 Monotonie und Krümmung einer Kurve	139
4.4.1 Geometrische Deutung der 1. und 2. Ableitung	139
4.4.2 Krümmung einer ebenen Kurve	140
4.5 Relative Extremwerte (relative Maxima, relative Minima)	141
4.6 Wendepunkte, Sattelpunkte	143
<b>V Integralrechnung</b>	144
<b>1 Bestimmtes Integral</b>	144
1.1 Definition eines bestimmten Integrals	144
1.2 Berechnung eines bestimmten Integrals	145
1.3 Elementare Integrationsregeln für bestimmte Integrale	146
<b>2 Unbestimmtes Integral</b>	147
2.1 Definition eines unbestimmten Integrals	147
2.2 Allgemeine Eigenschaften der unbestimmten Integrale	147
2.3 Tabelle der Grund- oder Stammintegrale	149
<b>3 Integrationsmethoden</b>	150
3.1 Integration durch Substitution	150
3.1.1 Allgemeines Verfahren	150
3.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen (Tabelle)	151
3.2 Partielle Integration (Produktionsintegration)	153
3.3 Integration einer gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden	154
3.3.1 Partialbruchzerlegung	154
3.3.2 Integration der Partialbrüche	157
3.4 Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden	158
3.5 Numerische Integration	158
3.5.1 Trapezformel	158
3.5.2 Simpsonsche Formel	159
3.5.3 Romberg-Verfahren	161

<b>4 Uneigentliche Integrale</b>	164
4.1 Unendliches Integrationsintervall	164
4.2 Integrand mit einer Unendlichkeitsstelle (Pol)	164
<b>5 Anwendungen der Integralrechnung</b>	165
5.1 Integration der Bewegungsgleichung	165
5.2 Arbeit einer ortsabhängigen Kraft (Arbeitsintegral)	165
5.3 Lineare und quadratische Mittelwerte einer Funktion	166
5.3.1 Linearer Mittelwert	166
5.3.2 Quadratischer Mittelwert	166
5.3.3 Zeitliche Mittelwerte einer periodischen Funktion	166
5.4 Flächeninhalt	166
5.5 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	168
5.6 Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)	169
5.7 Bogenlänge einer ebenen Kurve	169
5.8 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen)	170
5.9 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche)	171
5.10 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers	172
5.11 Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers	173
<b>VI Unendliche Reihen, Taylor- und Fourier-Reihen</b>	175
<b>1 Unendliche Reihen</b>	175
1.1 Grundbegriffe	175
1.1.1 Definition einer unendlichen Reihe	175
1.1.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe	175
1.2 Konvergenzkriterien	176
1.2.1 Quotientenkriterium	176
1.2.2 Wurzelkriterium	177
1.2.3 Vergleichskriterien	177
1.2.4 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen	178
1.2.5 Eigenschaften konvergenter bzw. absolut konvergenter Reihen	178
1.3 Spezielle konvergente Reihen	178
<b>2 Potenzreihen</b>	179
2.1 Definition einer Potenzreihe	179
2.2 Konvergenzradius und Konvergenzbereich einer Potenzreihe	180
2.3 Wichtige Eigenschaften der Potenzreihen	180
<b>3 Taylor-Reihen</b>	181
3.1 Taylorsche und Mac Laurinsche Formel	181
3.1.1 Taylorsche Formel	181
3.1.2 Mac Laurinsche Formel	181
3.2 Taylorsche Reihe	182
3.3 Mac Laurinsche Reihe	182
3.4 Spezielle Potenzreihenentwicklungen (Tabelle)	183
3.5 Näherungspolynome einer Funktion (mit Tabelle)	185

<b>4</b>	<b>Fourier-Reihen</b>	187
4.1	Fourier-Reihe einer periodischen Funktion	187
4.2	Fourier-Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung	189
4.3	Spezielle Fourier-Reihen (Tabelle)	191
<b>VII</b>	<b>Lineare Algebra</b>	194
<b>1</b>	<b>Reelle Matrizen</b>	194
1.1	Grundbegriffe	194
1.1.1	$n$ -dimensionale Vektoren	194
1.1.2	Definition einer reellen Matrix	196
1.1.3	Spezielle Matrizen	197
1.1.4	Gleichheit von Matrizen	197
1.2	Spezielle quadratische Matrizen	197
1.2.1	Diagonalmatrix	198
1.2.2	Einheitsmatrix	198
1.2.3	Dreiecksmatrix	198
1.2.4	Symmetrische Matrix	198
1.2.5	Schiefsymmetrische Matrix	198
1.2.6	Orthogonale Matrix	199
1.3	Rechenoperationen für Matrizen	199
1.3.1	Addition und Subtraktion von Matrizen	199
1.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	199
1.3.3	Multiplikation von Matrizen	200
1.4	Reguläre Matrix	201
1.5	Inverse Matrix	201
1.5.1	Definition einer inversen Matrix	201
1.5.2	Berechnung einer inversen Matrix	202
1.5.2.1	Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ unter Verwendung von Unterdeterminanten	202
1.5.2.2	Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nach dem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren)	202
1.6	Rang einer Matrix	203
1.6.1	Definitionen	203
1.6.1.1	Unterdeterminanten einer Matrix	203
1.6.1.2	Rang einer Matrix	203
1.6.1.3	Elementare Umformungen einer Matrix	203
1.6.2	Rangbestimmung einer Matrix	204
1.6.2.1	Rangbestimmung einer $(m, n)$ -Matrix $\mathbf{A}$ unter Verwendung von Unterdeterminanten	204
1.6.2.2	Rangbestimmung einer $(m, n)$ -Matrix $\mathbf{A}$ mit Hilfe elementarer Umformungen	204
<b>2</b>	<b>Determinanten</b>	205
2.1	Zweireihige Determinanten	205
2.2	Dreireihige Determinanten	206
2.3	Determinanten höherer Ordnung	207
2.3.1	Unterdeterminante $D_{ik}$	207
2.3.2	Algebraisches Komplement (Adjunkte) $A_{ik}$	207
2.3.3	Definition einer $n$ -reihigen Determinante	207



2.4	Laplacescher Entwicklungssatz	208
2.5	Rechenregeln für $n$ -reihige Determinanten	208
2.6	Regeln zur praktischen Berechnung einer $n$ -reihigen Determinante	210
2.6.1	Elementare Umformungen einer $n$ -reihigen Determinante	210
2.6.2	Reduzierung und Berechnung einer $n$ -reihigen Determinante	210
<b>3</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>211</b>
3.1	Grundbegriffe	211
3.1.1	Definition eines linearen Gleichungssystems	211
3.1.2	Spezielle lineare Gleichungssysteme	211
3.2	Lösungsverhalten eines linearen $(m, n)$ -Gleichungssystems	212
3.2.1	Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen $(m, n)$ -Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$	212
3.2.2	Lösungsmenge eines linearen $(m, n)$ -Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$	212
3.3	Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems	213
3.4	Lösungsverfahren für ein lineares Gleichungssystem nach Gauß (Gaußscher Algorithmus)	214
3.4.1	Äquivalente Umformungen eines linearen $(m, n)$ -Systems	214
3.4.2	Gaußscher Algorithmus	214
3.5	Cramersche Regel	217
3.6	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	217
<b>4</b>	<b>Komplexe Matrizen</b>	<b>218</b>
4.1	Definition einer komplexen Matrix	218
4.2	Rechenoperationen und Rechenregeln für komplexe Matrizen	219
4.3	Konjugiert komplexe Matrix	219
4.4	Konjugiert transponierte Matrix	220
4.5	Spezielle komplexe Matrizen	220
4.5.1	Hermiteische Matrix	220
4.5.2	Schiefhermitesche Matrix	220
4.5.3	Unitäre Matrix	221
<b>5</b>	<b>Eigenwertprobleme</b>	<b>221</b>
5.1	Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix	221
5.2	Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller $n$ -reihiger Matrizen	223
<b>VIII</b>	<b>Komplexe Zahlen und Funktionen</b>	<b>224</b>
<b>1</b>	<b>Darstellungsformen einer komplexen Zahl</b>	<b>224</b>
1.1	Algebraische oder kartesische Form	224
1.2	Polarformen	225
1.2.1	Trigonometrische Form	225
1.2.2	Exponentialform	225
1.3	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	226
1.3.1	Polarform $\rightarrow$ Kartesische Form	226
1.3.2	Kartesische Form $\rightarrow$ Polarform	226

<b>2 Grundrechenarten für komplexe Zahlen</b>	227
2.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	227
2.2 Multiplikation komplexer Zahlen	227
2.3 Division komplexer Zahlen	228
<b>3 Potenzieren</b>	229
<b>4 Radizieren (Wurzelziehen)</b>	230
<b>5 Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl</b>	231
<b>6 Ortskurven</b>	232
6.1 Komplexwertige Funktion einer reellen Variablen	232
6.2 Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Zahl	232
6.3 Inversion einer Ortskurve	233
<b>7 Komplexe Funktionen</b>	234
7.1 Definition einer komplexen Funktion	234
7.2 Definitionsgleichungen einiger elementarer Funktionen	234
7.2.1 Trigonometrische Funktionen	234
7.2.2 Hyperbelfunktionen	234
7.2.3 Exponentialfunktion (e-Funktion)	235
7.3 Wichtige Beziehungen und Formeln	235
7.3.1 Eulersche Formeln	235
7.3.2 Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der komplexen e-Funktion	235
7.3.3 Trigonometrische und Hyperbelfunktionen mit imaginärem Argument	235
7.3.4 Additionstheoreme der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen für komplexes Argument	235
7.3.5 Arkus- und Areafunktionen mit imaginärem Argument	236
<b>8 Anwendungen in der Schwingungslehre</b>	236
8.1 Darstellung einer harmonischen Schwingung durch einen rotierenden komplexen Zeiger	236
8.2 Ungestörte Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen („Superpositionsprinzip“)	237
<b>IX Differential- und Integralrechnung für Funktionen     von mehreren Variablen</b>	239
<b>1 Funktionen von mehreren Variablen und ihre Darstellung</b>	239
1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen	239
1.2 Darstellungsformen einer Funktion von zwei Variablen	239
1.2.1 Analytische Darstellung	239
1.2.2 Graphische Darstellung	240
1.2.2.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum	240
1.2.2.2 Schnittkurvendiagramme	240
1.2.2.3 Höhenliniendiagramm	240

1.3	Spezielle Flächen (Funktionen) .....	241
1.3.1	Ebenen .....	241
1.3.2	Rotationsflächen .....	241
1.3.2.1	Gleichung einer Rotationsfläche .....	241
1.3.2.2	Spezielle Rotationsflächen .....	242
<b>2</b>	<b>Partielle Differentiation</b> .....	<b>243</b>
2.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung .....	243
2.1.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x; y)$ .....	243
2.1.2	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ ....	244
2.2	Partielle Ableitungen höherer Ordnung .....	245
2.3	Verallgemeinerte Kettenregel (Differentiation nach einem Parameter) .....	246
2.4	Totales oder vollständiges Differential einer Funktion .....	247
2.5	Anwendungen .....	249
2.5.1	Linearisierung einer Funktion .....	249
2.5.2	Relative Extremwerte (relative Maxima, relative Minima) .....	250
2.5.3	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen (Lagrangesches Multiplikatorverfahren) .....	251
<b>3</b>	<b>Mehrfachintegrale</b> .....	<b>253</b>
3.1	Doppelintegrale .....	253
3.1.1	Definition eines Doppelintegrals .....	253
3.1.2	Berechnung eines Doppelintegrals in kartesischen Koordinaten ..	254
3.1.3	Berechnung eines Doppelintegrals in Polarkoordinaten .....	256
3.1.4	Anwendungen .....	256
3.1.4.1	Flächeninhalt .....	256
3.1.4.2	Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche .....	257
3.1.4.3	Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades) .....	258
3.2	Dreifachintegrale .....	259
3.2.1	Definition eines Dreifachintegrals .....	259
3.2.2	Berechnung eines Dreifachintegrals in kartesischen Koordinaten .....	260
3.2.3	Berechnung eines Dreifachintegrals in Zylinderkoordinaten .....	262
3.2.4	Berechnung eines Dreifachintegrals in Kugelkoordinaten .....	262
3.2.5	Anwendungen .....	263
3.2.5.1	Volumen eines zylindrischen Körpers .....	263
3.2.5.2	Schwerpunkt eines homogenen Körpers .....	263
3.2.5.3	Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers ....	264
<b>X</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b> .....	<b>266</b>
<b>1</b>	<b>Grundbegriffe</b> .....	<b>266</b>
1.1	Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung .....	266
1.2	Lösungen einer Differentialgleichung .....	266
1.3	Anfangswertprobleme .....	266
1.4	Randwertprobleme .....	267

<b>2</b>	<b>Differentialgleichungen 1. Ordnung</b>	267
2.1	Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen	267
2.2	Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, die durch Substitutionen lösbar sind (Tabelle)	268
2.3	Exakte Differentialgleichungen 1. Ordnung	269
2.4	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	270
2.4.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung	270
2.4.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	270
2.4.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	270
2.4.3.1	Integration durch Variation der Konstanten	270
2.4.3.2	Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung	271
2.4.4	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	271
2.5	Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung	273
2.5.1	Streckenzugverfahren von Euler	273
2.5.2	Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung	275
2.5.3	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	276
<b>3</b>	<b>Differentialgleichungen 2. Ordnung</b>	279
3.1	Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen lassen	279
3.2	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	280
3.2.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	280
3.2.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	280
3.2.2.1	Wronski-Determinante	280
3.2.2.2	Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung	280
3.2.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	281
3.3	Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung	284
<b>4</b>	<b>Anwendungen</b>	287
4.1	Mechanische Schwingungen	287
4.1.1	Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik	287
4.1.2	Freie ungedämpfte Schwingung	287
4.1.3	Freie gedämpfte Schwingung	288
4.1.3.1	Schwache Dämpfung (Schwingungsfall)	288
4.1.3.2	Aperiodischer Grenzfall	289
4.1.3.3	Aperiodisches Verhalten bei starker Dämpfung (Kriechfall)	289
4.1.4	Erzwungene Schwingung	290
4.1.4.1	Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung	290
4.1.4.2	Stationäre Lösung	290
4.2	Elektrische Schwingungen in einem Reihenschwingkreis	291
<b>5</b>	<b>Lineare Differentialgleichungen <math>n</math>-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten</b>	292
5.1	Definition einer linearen Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	292

5.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung .....	292
5.2.1	Wronski-Determinante .....	292
5.2.2	Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung .....	293
5.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung .....	294
<b>6</b>	<b>Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .....</b>	<b>295</b>
6.1	Grundbegriffe .....	295
6.2	Integration des homogenen linearen Systems .....	296
6.3	Integration des inhomogenen linearen Systems .....	297
6.3.1	Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung .....	297
6.3.2	Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren .....	297
<b>XI</b>	<b>Fehler- und Ausgleichsrechnung .....</b>	<b>299</b>
<b>1</b>	<b>Gaußsche Normalverteilung .....</b>	<b>299</b>
<b>2</b>	<b>Auswertung einer Messreihe .....</b>	<b>300</b>
<b>3</b>	<b>Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz .....</b>	<b>303</b>
3.1	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen .....	303
3.2	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von $n$ unabhängigen Variablen .....	305
<b>4</b>	<b>Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz .....</b>	<b>305</b>
<b>5</b>	<b>Ausgleichskurven .....</b>	<b>307</b>
5.1	Ausgleichung nach dem Gaußschen Prinzip der kleinsten Quadrate .....	307
5.2	Ausgleichs- oder Regressionsgerade .....	308
5.3	Ausgleichs- oder Regressionsparabel .....	310
<b>XII</b>	<b>Fourier-Transformationen .....</b>	<b>311</b>
<b>1</b>	<b>Grundbegriffe .....</b>	<b>311</b>
<b>2</b>	<b>Spezielle Fourier-Transformationen .....</b>	<b>316</b>
<b>3</b>	<b>Wichtige „Hilfsfunktionen“ in den Anwendungen .....</b>	<b>318</b>
3.1	Sprungfunktionen .....	318
3.2	Rechteckige Impulse .....	320
3.3	Diracsche Deltafunktion .....	321
<b>4</b>	<b>Eigenschaften der Fourier-Transformation (Transformationssätze) .....</b>	<b>324</b>
4.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen) .....	324
4.2	Ähnlichkeitssatz .....	324
4.3	Verschiebungssatz (Zeitverschiebungssatz) .....	325
4.4	Dämpfungssatz (Frequenzverschiebungssatz) .....	326

4.5	Ableitungssätze (Differentiationssätze) . . . . .	327
4.5.1	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Originalfunktion . . .	327
4.5.2	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Bildfunktion . . . . .	328
4.6	Integrationssätze . . . . .	329
4.7	Faltungssatz . . . . .	329
4.8	Vertauschungssatz . . . . .	330
<b>5</b>	<b>Anwendung: Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .</b>	<b>331</b>
5.1	Allgemeines Lösungsverfahren . . . . .	331
5.2	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . .	331
5.3	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . .	332
<b>6</b>	<b>Tabellen spezieller Fourier-Transformationen . . . . .</b>	<b>333</b>
<b>XIII</b>	<b>Laplace-Transformationen . . . . .</b>	<b>339</b>
<b>1</b>	<b>Grundbegriffe . . . . .</b>	<b>339</b>
<b>2</b>	<b>Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationssätze) . . . . .</b>	<b>340</b>
2.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen) . . . . .	340
2.2	Ähnlichkeitssatz . . . . .	341
2.3	Verschiebungssätze . . . . .	342
2.4	Dämpfungssatz . . . . .	343
2.5	Ableitungssätze (Differentiationssätze) . . . . .	343
2.5.1	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Originalfunktion . . .	343
2.5.2	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Bildfunktion. . . . .	345
2.6	Integrationssätze . . . . .	345
2.6.1	Integrationssatz für die Originalfunktion . . . . .	345
2.6.2	Integrationssatz für die Bildfunktion . . . . .	346
2.7	Faltungssatz . . . . .	347
2.8	Grenzwertsätze . . . . .	348
<b>3</b>	<b>Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion . . . . .</b>	<b>349</b>
<b>4</b>	<b>Laplace-Transformierte spezieller Funktionen (Impulse) . . . . .</b>	<b>350</b>
<b>5</b>	<b>Anwendung: Lösung linearer Anfangswertprobleme . . . . .</b>	<b>355</b>
5.1	Allgemeines Lösungsverfahren . . . . .	355
5.2	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . .	356
5.3	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . .	357
<b>6</b>	<b>Tabelle spezieller Laplace-Transformationen . . . . .</b>	<b>358</b>

<b>XIV Vektoranalysis</b>	363
<b>1 Ebene und räumliche Kurven</b>	363
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve	363
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter	364
1.2.1 Ableitung einer Vektorfunktion	364
1.2.2 Tangentenvektor	364
1.2.3 Ableitungsregeln für Summen und Produkte	364
1.2.4 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes	365
1.3 Bogenlänge einer Kurve	366
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor einer Kurve	366
1.5 Krümmung einer Kurve	367
<b>2 Flächen im Raum</b>	369
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche	369
2.2 Flächenkurven	370
2.3 Flächennormale und Flächenelement	370
2.4 Tangentialebene	371
2.4.1 Tangentialebene beim Flächentyp $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$	371
2.4.2 Tangentialebene beim Flächentyp $z = f(x; y)$	372
2.4.3 Tangentialebene beim Flächentyp $F(x; y; z) = 0$	372
<b>3 Skalar- und Vektorfelder</b>	373
3.1 Skalarfelder	373
3.2 Vektorfelder	373
<b>4 Gradient eines Skalarfeldes</b>	375
<b>5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes</b>	377
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes	377
5.2 Rotation eines Vektorfeldes	378
5.3 Spezielle Vektorfelder	379
<b>6 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in speziellen Koordinatensystemen</b>	380
6.1 Darstellung in Polarkoordinaten	380
6.2 Darstellung in Zylinderkoordinaten	382
6.3 Darstellung in Kugelkoordinaten	385
<b>7 Linien- oder Kurvenintegrale</b>	387
7.1 Linienintegral in der Ebene	387
7.2 Linienintegral im Raum	389
7.3 Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals	389
7.4 Konservative Vektorfelder	390
7.5 Arbeitsintegral (Arbeit eines Kraftfeldes)	391

<b>8 Oberflächenintegrale</b>	392
8.1 Definition eines Oberflächenintegrals	392
8.2 Berechnung eines Oberflächenintegrals	393
8.2.1 Berechnung eines Oberflächenintegrals in symmetriegerechten Koordinaten	393
8.2.2 Berechnung eines Oberflächenintegrals unter Verwendung von Flächenparametern	394
<b>9 Integralsätze von Gauß und Stokes</b>	395
9.1 Gaußscher Integralsatz	395
9.2 Stokes'scher Integralsatz	396
<b>XV Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	398
<b>1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik</b>	398
1.1 Permutationen	398
1.2 Kombinationen	399
1.3 Variationen	399
<b>2 Grundbegriffe</b>	400
<b>3 Wahrscheinlichkeit</b>	402
3.1 Absolute und relative Häufigkeit	402
3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff	403
3.3 Laplace-Experimente	403
3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit	404
3.5 Multiplikationssatz	404
3.6 Stochastisch unabhängige Ereignisse	405
3.7 Mehrstufige Zufallsexperimente	405
<b>4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen</b>	407
4.1 Zufallsvariable	407
4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	408
4.3 Kennwerte oder Maßzahlen einer Verteilung	410
<b>5 Spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b>	412
5.1 Binomialverteilung	412
5.2 Hypergeometrische Verteilung	414
5.3 Poisson-Verteilung	416
5.4 Approximationen diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Tabelle)	417
<b>6 Spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b>	418
6.1 Gaußsche Normalverteilung	418
6.1.1 Allgemeine Normalverteilung	418
6.1.2 Standardnormalverteilung	419



6.1.3	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung .....	420
6.1.4	Quantile der Standardnormalverteilung .....	421
6.2	Exponentialverteilung .....	422
<b>7</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen .....</b>	<b>423</b>
7.1	Mehrdimensionale Zufallsvariable .....	423
7.2	Summen, Linearkombinationen und Produkte von Zufallsvariablen .....	425
7.2.1	Additionssätze für Mittelwerte und Varianzen .....	425
7.2.2	Multiplikationssatz für Mittelwerte .....	426
7.2.3	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe .....	426
<b>8</b>	<b>Prüf- oder Testverteilungen .....</b>	<b>427</b>
8.1	Chi-Quadrat-Verteilung („ $\chi^2$ -Verteilung“) .....	427
8.2	$t$ -Verteilung von Student .....	429
<b>XVI</b>	<b>Grundlagen der mathematischen Statistik .....</b>	<b>431</b>
<b>1</b>	<b>Grundbegriffe .....</b>	<b>431</b>
1.1	Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit .....	431
1.2	Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe .....	432
1.3	Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben .....	434
<b>2</b>	<b>Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe .....</b>	<b>437</b>
2.1	Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe .....	437
2.2	Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeitsfunktion ...	439
2.3	Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe .....	440
<b>3</b>	<b>Statistische Schätzmethoden für unbekannte Parameter („Parameterschätzungen“) .....</b>	<b>441</b>
3.1	Aufgaben der Parameterschätzung .....	441
3.2	Schätzfunktionen und Schätzwerte für unbekannte Parameter („Punktschätzungen“) .....	441
3.2.1	Schätz- und Stichprobenfunktionen .....	441
3.2.2	Schätzungen für den Mittelwert $\mu$ und die Varianz $\sigma^2$ .....	442
3.2.3	Schätzungen für einen Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung) .....	443
3.2.4	Schätzwerte für die Parameter spezieller Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....	443
3.3	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für unbekannte Parameter („Intervallschätzungen“) .....	444
3.3.1	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle .....	444
3.3.2	Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$ .....	445
3.3.3	Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$ .....	446

3.3.4	Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ bei einer beliebigen Verteilung .....	447
3.3.5	Vertrauensintervalle für die unbekannte Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung .....	448
3.3.6	Vertrauensintervalle für einen unbekannten Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung) .....	449
3.3.7	Musterbeispiel für die Bestimmung eines Vertrauensintervalls ....	450
<b>4</b>	<b>Statistische Prüfverfahren für unbekannte Parameter („Parametertests“)</b> .....	<b>451</b>
4.1	Statistische Hypothesen und Parametertests .....	451
4.2	Spezielle Parametertests .....	452
4.2.1	Test für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$ .....	452
4.2.2	Test für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$ .....	454
4.2.3	Tests für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte $\mu_1$ und $\mu_2$ zweier Normalverteilungen („Differenzentests“) .....	455
4.2.3.1	Differenzentests für Mittelwerte bei abhängigen Stichproben .....	456
4.2.3.2	Differenzentests für Mittelwerte bei unabhängigen Stichproben .....	457
4.2.4	Tests für die unbekannte Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung ...	461
4.2.5	Tests für den unbekannten Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung) .....	463
4.2.6	Musterbeispiel für einen Parametertest .....	465
<b>5</b>	<b>Chi-Quadrat-Test</b> .....	<b>466</b>

## Anhang Teil A

<b>Integraltafel</b> .....	470
1 Integrale mit $ax + b$ .....	471
2 Integrale mit $ax + b$ und $px + q$ .....	472
3 Integrale mit $a^2 + x^2$ .....	473
4 Integrale mit $a^2 - x^2$ .....	474
5 Integrale mit $ax^2 + bx + c$ .....	476
6 Integrale mit $a^3 \pm x^3$ .....	478
7 Integrale mit $a^4 + x^4$ .....	478
8 Integrale mit $a^4 - x^4$ .....	478
9 Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ .....	479
10 Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ und $px + q$ .....	480
11 Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ und $\sqrt{px + q}$ .....	481
12 Integrale mit $\sqrt{a^2 + x^2}$ .....	482
13 Integrale mit $\sqrt{a^2 - x^2}$ .....	484
14 Integrale mit $\sqrt{x^2 - a^2}$ .....	486
15 Integrale mit $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ .....	488
16 Integrale mit $\sin(ax)$ .....	490
17 Integrale mit $\cos(ax)$ .....	492
18 Integrale mit $\sin(ax)$ und $\cos(ax)$ .....	494
19 Integrale mit $\tan(ax)$ .....	497
20 Integrale mit $\cot(ax)$ .....	497
21 Integrale mit einer Arkusfunktion .....	498
22 Integrale mit $e^{ax}$ .....	499
23 Integrale mit $\ln x$ .....	500
24 Integrale mit $\sinh(ax)$ .....	502
25 Integrale mit $\cosh(ax)$ .....	503
26 Integrale mit $\sinh(ax)$ und $\cosh(ax)$ .....	504
27 Integrale mit $\tanh(ax)$ .....	505
28 Integrale mit $\coth(ax)$ .....	505
29 Integrale mit einer Areafunktion .....	506

**Anhang   Teil B**

<b>Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik</b> .....	507
<b>Tabelle 1:</b> Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung .....	508
<b>Tabelle 2:</b> Quantile der Standardnormalverteilung .....	510
<b>Tabelle 3:</b> Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung .....	512
<b>Tabelle 4:</b> Quantile der $t$ -Verteilung von „Student“ .....	514
<b>Sachwortverzeichnis</b> .....	516

# I Allgemeine Grundlagen aus Algebra, Arithmetik und Geometrie

## 1 Grundlegende Begriffe über Mengen

### 1.1 Definition und Darstellung einer Menge

#### Menge

Unter einer *Menge*  $M$  versteht man die Zusammenfassung gewisser wohlunterschiedener Objekte, *Elemente* genannt, zu einer Einheit.

$a \in M$ :  $a$  ist ein Element von  $M$  ( $a$  gehört zur Menge  $M$ )

$a \notin M$ :  $a$  ist kein Element von  $M$  ( $a$  gehört nicht zur Menge  $M$ )

#### Beschreibende Darstellungsform

$M = \{x \mid x \text{ besitzt die Eigenschaften } E_1, E_2, E_3, \dots\}$

#### Aufzählende Darstellungsform

$M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ : Endliche Menge mit  $n$  Elementen

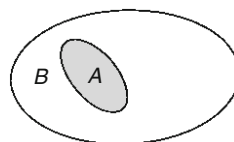
$M = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ : Unendliche Menge

#### Leere Menge

Eine Menge heißt *leer*, wenn sie *kein* Element enthält. Symbolische Schreibweise:  $\{ \}$ ,  $\emptyset$

#### Teilmenge

Eine Menge  $A$  heißt *Teilmenge* einer Menge  $B$ , wenn *jedes* Element von  $A$  auch zur Menge  $B$  gehört. Symbolische Schreibweise:  $A \subset B$ .  $A$  heißt *Untermenge*,  $B$  *Obermenge*.



#### Gleichheit von Mengen

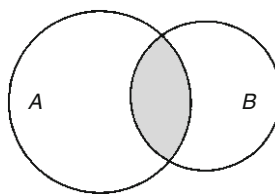
Zwei Mengen  $A$  und  $B$  heißen *gleich*, wenn *jedes* Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist *und umgekehrt*. Symbolische Schreibweise:  $A = B$

## 1.2 Mengenoperationen

### Durchschnitt zweier Mengen (Schnittmenge)

Die *Schnittmenge*  $A \cap B$  zweier Mengen  $A$  und  $B$  ist die Menge aller Elemente, die *sowohl zu  $A$  als auch zu  $B$*  gehören:

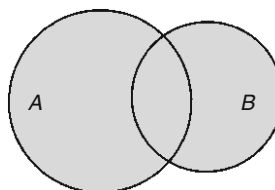
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$



### Vereinigung zweier Mengen (Vereinigungsmenge)

Die *Vereinigungsmenge*  $A \cup B$  zweier Mengen  $A$  und  $B$  ist die Menge aller Elemente, die zu  $A$  *oder zu  $B$  oder zu beiden* Mengen gehören:

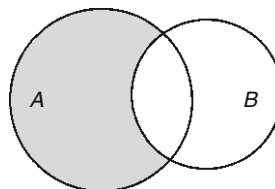
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$



### Differenz zweier Mengen (Differenzmenge, Restmenge)

Die *Differenz-* oder *Restmenge*  $A \setminus B$  zweier Mengen  $A$  und  $B$  ist die Menge aller Elemente, die zu  $A$ , *nicht aber zu  $B$*  gehören:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$



## 2 Rechnen mit reellen Zahlen

### 2.1 Reelle Zahlen und ihre Eigenschaften

#### 2.1.1 Natürliche und ganze Zahlen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$	Menge der <i>natürlichen</i> Zahlen
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge der <i>positiven</i> ganzen Zahlen

*Hinweis:* Die Zahl 0 gehört nach DIN 5473 zu den *natürlichen* Zahlen.  $\mathbb{N}^*$  ist die Menge der natürlichen Zahlen *ohne* 0, d. h.  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

*Eigenschaften:* Addition und Multiplikation sind in der Menge  $\mathbb{N}$  *unbeschränkt* durchführbar.

**Primzahl  $p$** 

Natürliche Zahl größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.

■ **Beispiele**

Die ersten Primzahlen lauten: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

**Zerlegung in Primfaktoren**

Jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  lässt sich eindeutig in ein *Produkt* aus *Primzahlen* zerlegen.

■ **Beispiel**

$$140 = 2 \cdot 70 = 2 \cdot 2 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

**Größter gemeinsamer Teiler (ggT)**

ggT mehrerer Zahlen: *größte* Zahl, die *gemeinsamer* Teiler der gegebenen Zahlen ist.

**Regel:** Man zerlegt die Zahlen in *Primfaktoren* und bildet das Produkt der *höchsten* Potenzen von Primfaktoren, die *allen* gegebenen Zahlen *gemeinsam* sind.

■ **Beispiel**

$$\left. \begin{array}{l} 60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \\ 72 = 2^3 \cdot 3^2 \\ \hline \text{ggT} = 2^2 \cdot 3^1 = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow 12 \text{ ist die } \textit{größte} \text{ Zahl, durch die } 60 \text{ und } 72 \text{ } \textit{gemeinsam} \text{ teilbar sind.}$$

**Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)**

kgV mehrerer Zahlen: *kleinste* Zahl, die *alle* gegebenen Zahlen als *Teiler* enthält.

**Regel:** Man zerlegt die Zahlen in *Primfaktoren* und bildet das Produkt der jeweils *höchsten* Potenzen von Primfaktoren, die in *mindestens einer* der gegebenen Zahlen auftreten.

■ **Beispiel**

$$\left. \begin{array}{l} 60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \\ 72 = 2^3 \cdot 3^2 \\ \hline \text{kgV} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360 \end{array} \right\} \Rightarrow 360 \text{ ist die } \textit{kleinste} \text{ Zahl, die durch } 60 \text{ und } 72 \text{ teilbar ist.}$$

**Einige Teilbarkeitsregeln**

Eine natürliche Zahl ist teilbar durch ...	wenn ...
2	die <i>letzte</i> Ziffer durch 2 teilbar ist,
3	die <i>Quersumme</i> durch 3 teilbar ist,
4	die aus den <i>beiden letzten</i> Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist,
5	die <i>letzte</i> Ziffer eine 5 oder 0 ist.

**Ganze Zahlen**

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} \quad \text{Menge der ganzen Zahlen}$$

Auch übliche Schreibweise:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Addition, Subtraktion und Multiplikation sind in der Menge  $\mathbb{Z}$  *unbeschränkt* durchführbar.

**2.1.2 Rationale, irrationale und reelle Zahlen**

Die Menge  $\mathbb{Q}$  der *rationalen* Zahlen enthält alle *endlichen* und *unendlichen periodischen* Dezimalbrüche (Dezimalzahlen):

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \text{Menge der rationalen Zahlen}$$

Die *irrationalen* Zahlen bestehen aus allen *unendlichen nichtperiodischen* Dezimalbrüchen (Dezimalzahlen).

Die Menge  $\mathbb{R}$  der *reellen* Zahlen enthält die *rationalen* und *irrationalen* Zahlen und somit *sämtliche* (endlichen und unendlichen) Dezimalbrüche (Dezimalzahlen).

■ **Beispiele**

- (1)  $\frac{33}{8} = 4,125$  *endliche Dezimalzahl (rational)*
- (2)  $\frac{1}{3} = 0,333333 \dots$  *unendliche periodische Dezimalzahl (rational)*
- (3)  $\sqrt{2} = 1,414213 \dots$  *unendliche nichtperiodische Dezimalzahl (irrational)*

■



### 2.1.3 Rundungsregeln für reelle Zahlen

In der *Praxis* wird mit *endlich* vielen Dezimalstellen nach dem Komma gerechnet. Bei Rundung auf  $n$  Dezimalstellen nach dem Komma gelten dann folgende *Regeln*:

- (1) Es wird *abgerundet*, wenn in der  $(n + 1)$ -ten Dezimalstelle nach dem Komma eine 0, 1, 2, 3 oder 4 steht.
- (2) Es wird *aufgerundet*, wenn in der  $(n + 1)$ -ten Dezimalstelle nach dem Komma eine 5, 6, 7, 8 oder 9 steht.
- (3) *Rundungsfehler*:  $\leq 0,5 \cdot 10^{-n}$

#### ■ Beispiele

Wir runden die nachfolgenden Zahlen auf 3 Dezimalstellen nach dem Komma (die in der 4. Dezimalstelle nach dem Komma stehende Ziffer (Pfeil) entscheidet dabei über Ab- oder Aufrundung):

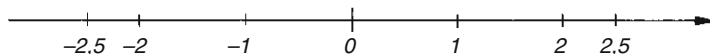
$$\begin{array}{ll}
 4,517863 \dots \approx 4,518 & \text{Fehler: } \leq 0,5 \cdot 10^{-3} = 0,0005 \\
 \downarrow & \\
 \text{Aufrundung} & \\
 \\
 0,417346 \dots \approx 0,417 & \text{Fehler: } \leq 0,5 \cdot 10^{-3} = 0,0005 \\
 \downarrow & \\
 \text{Abrundung} &
 \end{array}$$

■

### 2.1.4 Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengerade

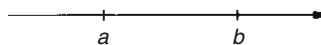
#### Zahlengerade

Die *bildliche* Darstellung einer *reellen* Zahl erfolgt durch einen *Punkt* auf einer *Zahlengerade*, wobei *positive* Zahlen nach *rechts* und *negative* Zahlen nach *links*, jeweils vom Nullpunkt aus, abgetragen werden:

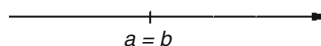


#### Anordnung der Zahlen auf der Zahlengerade

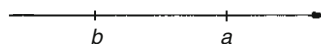
$$a < b \quad (a \text{ kleiner } b)$$



$$a = b \quad (a \text{ gleich } b)$$



$$a > b \quad (a \text{ größer } b)$$



Weitere Ungleichungen:

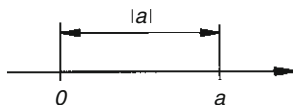
$$a \leq b \quad (a \text{ kleiner oder gleich } b)$$

$$a \geq b \quad (a \text{ größer oder gleich } b)$$

**Betrag einer reellen Zahl**

Der Betrag  $|a|$  einer reellen Zahl  $a$  ist der *Abstand* des Bildpunktes vom Nullpunkt:

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \quad (|a| \geq 0)$$

**Rechenregeln für Beträge**

- (1)  $|a \pm b| \leq |a| + |b|$  (Dreiecksungleichung)
- (2)  $|a| - |b| \leq |a| + |b|$
- (3)  $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$
- (4)  $|ab| = |a| \cdot |b|$
- (5)  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$

Beachte:  $|x| = a \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm a \quad (a > 0)$

**Signum (Vorzeichen) einer reellen Zahl**

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

**2.1.5 Grundrechenarten**

Es sind vier *Grundrechenarten* erklärt:

1. *Addition*  $\rightarrow$  Summe  $a + b$  ( $a, b$ : Summanden)
2. *Subtraktion*  $\rightarrow$  Differenz  $a - b$  ( $a, b$ : Minuend bzw. Subtrahend)
3. *Multiplikation*  $\rightarrow$  Produkt  $a \cdot b$  ( $a, b$ : Faktoren)
4. *Division*  $\rightarrow$  Quotient  $\frac{a}{b}$  ( $a, b$ : Dividend bzw. Divisor;  $b \neq 0$ )

Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier reeller Zahlen ergeben wieder *reelle* Zahlen.

*Ausnahme:* Die Division durch die Zahl 0 ist *verboten*!

Andere Schreibweisen für Produkte bzw. Quotienten:  $a \cdot b$  oder  $ab$  bzw.  $\frac{a}{b}$  oder  $a/b$  oder  $a : b$ .

**Rechenregeln**

$$\begin{array}{ll} \text{Kommutativgesetze} & a + b = b + a \\ & ab = ba \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Assoziativgesetze} & a + (b + c) = (a + b) + c \\ & a(bc) = (ab)c \end{array}$$

$$\text{Distributivgesetz} \quad a(b + c) = ab + ac$$

**2.2 Zahlensysteme****Dezimalsystem (dekadisches oder Zehnersystem)**

Basis:  $a = 10$       Zehn Ziffern: 0, 1, 2, ..., 9

Die Darstellung einer (reellen) Zahl erfolgt durch Entwicklung nach *fallenden* Potenzen der Basis  $a = 10$ . Es handelt sich dabei um ein *Stellenwert-* oder *Positionssystem*, d. h. der Wert einer Ziffer hängt von der Position (Stelle) ab.

■ **Beispiel**

$$\begin{array}{ccccccc} 1998 = 1000 + 900 + 90 + 8 = & 1 \cdot 10^3 & + & 9 \cdot 10^2 & + & 9 \cdot 10^1 & + & 8 \cdot 10^0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 1 & & 9 & & 9 & & 8 \end{array}$$

Schreibweise:  $(1998)_{10}$ , wobei der Index 10 die Basis des Systems kennzeichnet. Sind Mißverständnisse ausgeschlossen, darf der Index weggelassen werden.

■

**Dualsystem (binäres oder Zweiersystem)**

Basis:  $a = 2$       Zwei Ziffern: 0, 1

Die Entwicklung einer (reellen) Zahl erfolgt hier nach *fallenden* Potenzen der Basis  $a = 2$  (Rechenbasis der Computersysteme).

■ **Beispiele**

$$\begin{aligned} (1) \quad (1001.1)_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} = \\ &= 8 + 0 + 0 + 1 + \frac{1}{2} = (9,5)_{10} \end{aligned}$$

(2) Wir stellen die Zahl  $(11)_{10}$  aus dem Dezimalsystem im Dualsystem dar:

$$\begin{array}{ccccccc} (11)_{10} = 11 = 8 + 2 + 1 = & 1 \cdot 2^3 & + & 0 \cdot 2^2 & + & 1 \cdot 2^1 & + & 1 \cdot 2^0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 1 & & 0 & & 1 & & 1 \end{array}$$

Ergebnis:  $(11)_{10} = (1011)_2$

■

## 2.3 Intervalle

*Intervalle* sind spezielle Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , die auf der Zahlengerade durch zwei Randpunkte  $a$  und  $b$  begrenzt werden ( $a < b$ ).

### Endliche Intervalle

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$	oder	$a \leq x \leq b$	abgeschlossenes Intervall
$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$	oder	$a \leq x < b$	} halboffene Intervalle
$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$	oder	$a < x \leq b$	
$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$	oder	$a < x < b$	offenes Intervall

### Unendliche Intervalle

$[a, \infty)$	$= \{x \mid a \leq x < \infty\}$	oder	$a \leq x < \infty$	oder	$x \geq a$
$(a, \infty)$	$= \{x \mid a < x < \infty\}$	oder	$a < x < \infty$	oder	$x > a$
$(-\infty, b]$	$= \{x \mid -\infty < x \leq b\}$	oder	$-\infty < x \leq b$	oder	$x \leq b$
$(-\infty, b)$	$= \{x \mid -\infty < x < b\}$	oder	$-\infty < x < b$	oder	$x < b$
$(-\infty, 0)$	$\equiv \mathbb{R}^-$	oder	$-\infty < x < 0$	oder	$x < 0$
$(0, \infty)$	$\equiv \mathbb{R}^+$	oder	$0 < x < \infty$	oder	$x > 0$
$(-\infty, \infty)$	$\equiv \mathbb{R}$	oder	$-\infty < x < \infty$	oder	$ x  < \infty$

## 2.4 Bruchrechnung

*Hinweis:* Die nachfolgenden Begriffe und Regeln lassen sich sinngemäß auch auf *mathematische Ausdrücke* übertragen.

Ein Bruch  $a/b$  heißt *echt*, wenn  $|a| < |b|$  ist, sonst *unecht*.

### Kehrwert einer Zahl

$$\text{Der Kehrwert von } \left\{ \begin{array}{cc} a & 1/a \\ a/b & b/a \end{array} \right\} \text{ ist } \quad (\text{mit } a \neq 0, b \neq 0)$$

**Regel:** Bei der *Kehrwertbildung* werden Zähler und Nenner miteinander *vertauscht*.

#### ■ Beispiel

Der *Kehrwert* von 2 ist  $\frac{1}{2} = 0,5$ , der *Kehrwert* von  $\frac{3}{4}$  ist  $\frac{4}{3}$ .

■

**Erweitern eines Bruches mit einer Zahl  $k \neq 0$** 

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

**Regel:** Zähler *und* Nenner werden mit derselben Zahl  $k \neq 0$  *multipliziert*.

■ **Beispiel**

Wir *erweitern* den Bruch  $\frac{2}{5}$  mit der Zahl 3:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$$

■

**Kürzen eines Bruches durch eine Zahl  $k \neq 0$** 

$$\frac{a}{b} = \frac{a/k}{b/k} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{b} = \frac{k \cdot c}{k \cdot d} = \frac{c}{d} \quad (\text{Kürzen des gemeinsamen Faktors } k)$$

**Regel:** Zähler *und* Nenner werden durch dieselbe Zahl  $k \neq 0$  *dividiert*.

■ **Beispiel**

Wir *kürzen* den Bruch  $\frac{15}{25}$  durch 5:

$$\frac{15}{25} = \frac{15/5}{25/5} = \frac{3}{5} \quad \text{bzw.} \quad \frac{15}{25} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

■

**Addition und Subtraktion zweier Brüche**

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

**Regel:** Die Brüche werden *gleichnamig* gemacht, d. h. auf einen *gemeinsamen* Nenner, den sog. *Hauptnenner*, gebracht. Der Hauptnenner ist das *kleinste gemeinsame Vielfache* der Einzelnenner.

■ **Beispiel**

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{15 + 8}{20} = \frac{23}{20} \quad (\text{Hauptnenner: } 4 \cdot 5 = 20)$$

■

**Multiplikation zweier Brüche**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

**Regel:** Zwei Brüche werden *multipliziert*, indem man ihre Zähler und ihre Nenner miteinander *multipliziert*.

■ **Beispiel**

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

**Division zweier Brüche (Doppelbruch)**

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

**Regel:** Zwei Brüche werden *dividiert*, indem man mit dem *Kehrwert* des Divisors (Kehrwert des Nennerbruches) *multipliziert*.

■ **Beispiel**

$$\frac{4}{3} : \frac{5}{7} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{4 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{28}{15} \quad \left( \text{Divisor: } \frac{5}{7} \right)$$

**2.5 Potenzen und Wurzeln****Potenz  $a^n$** 

Unter einer *Potenz*  $a^n$  versteht man ein *Produkt* mit  $n$  *gleichen* Faktoren  $a$ :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ Faktoren}} \quad \begin{array}{ll} a: \text{Basis oder Grundzahl} & (a \in \mathbb{R}) \\ n: \text{Exponent oder Hochzahl} & (n \in \mathbb{N}^*) \end{array}$$

Ferner (für  $a \neq 0$ ):  $a^0 = 1$ ,  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

■ **Beispiele**

$$(1) \quad 5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

$$(2) \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

**Rechenregeln für Potenzen**

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ (2) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0) \\ (3) \quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \\ (4) \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \\ (5) \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0) \end{array} \right\} m, n \in \mathbb{N}^*; a, b \in \mathbb{R}$$

Im Falle  $a > 0$ ,  $b > 0$  gelten die *Potenzregeln* sogar für *beliebige* reelle Exponenten.

Ferner (für  $a > 0$ ):  $a^b = e^{b \cdot \ln a}$

■ **Beispiele**

$$(1) \quad 3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$$

$$(2) \quad (5^4)^{\frac{1}{2}} = 5^{4 \cdot \frac{1}{2}} = 5^2 = 25$$

$$(3) \quad \frac{20^3}{5^3} = \left(\frac{20}{5}\right)^3 = 4^3 = 64$$

■

**Wurzel  $\sqrt[n]{a}$** 

Die eindeutig bestimmte *nichtnegative* Lösung  $x$  der Gleichung  $x^n = a$  mit  $a \geq 0$  heißt *n-te Wurzel* aus  $a$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ). Symbolische Schreibweise:

$$x = \sqrt[n]{a} \quad \text{oder} \quad x = a^{\frac{1}{n}} \quad \begin{array}{l} a: \text{Radikand } (a \geq 0) \\ n: \text{Wurzelexponent } (n = 2, 3, 4, \dots) \end{array}$$

*Anmerkungen*

- (1)  $\sqrt[n]{a}$  ist diejenige *nichtnegative* Zahl, deren  $n$ -te Potenz gleich  $a$  ist.
- (2)  $\sqrt[n]{a}$  lässt sich auch als Potenz der Basis  $a$  mit dem *rationalen* Exponenten  $1/n$  darstellen:  $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ . Es gelten die *Potenzregeln* (1) bis (5).
- (3)  $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ : *Quadratwurzel* aus  $a$  (der Wurzelexponent wird meist *weggelassen*)  
 $\sqrt[3]{a}$ : *Kubikwurzel* aus  $a$
- (4) Man beachte:  $\sqrt{a^2} = |a|$
- (5) Das Wurzelziehen oder Radizieren ist die zum Potenzieren *inverse* Operation:  
 $b = a^n \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b} \quad (\text{nur für } a \geq 0, b \geq 0)$

### Rechenregeln für Wurzeln

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m \\ (2) \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \\ (3) \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = (a^{\frac{1}{n}}) \cdot (b^{\frac{1}{n}}) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab} \\ (4) \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b > 0) \end{array} \right\} m, n \in \mathbb{N}^*; a \geq 0, b \geq 0$$

Merke:  $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

#### ■ Beispiele

- (1)  $\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3, \quad \sqrt[3]{21} = 2,7589, \quad \sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = (2^8)^{\frac{1}{4}} = 2^{8 \cdot \frac{1}{4}} = 2^2 = 4$
- (2)  $\sqrt[6]{2,5^2} = 2,5^{\frac{2}{6}} = 2,5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2,5} = 1,3572$
- (3)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[4]{6^{\frac{1}{3}}} = (6^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{6} = 1,1610$

■

## 2.6 Logarithmen

### Logarithmus $\log_a r$

Jede positive Zahl  $r > 0$  ist als Potenz einer beliebigen positiven Basis  $a > 0, a \neq 1$  in der Form  $r = a^x$  darstellbar. Die eindeutig bestimmte Lösung  $x$  der Gleichung  $r = a^x$  heißt *Logarithmus* von  $r$  zur Basis  $a$ . Symbolische Schreibweise:

$$\begin{array}{ll} x = \log_a r & r: \text{N Numerus } (r > 0) \\ & a: \text{Basis } (a > 0, a \neq 1) \end{array}$$

#### Anmerkungen

- (1) Logarithmen können nur von *positiven* Zahlen gebildet werden und sind noch von der *Basis* abhängig!
- (2) Für jede (zulässige) Basis  $a$  gilt:  $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$ .
- (3)  $\log_a (a^x) = x$  (für  $a > 0, a \neq 1$  und  $x \in \mathbb{R}$ )
- (4)  $a^{\log_a x} = x$  (für  $a > 0, a \neq 1$  und  $x > 0$ )

#### ■ Beispiele

- (1)  $5^x = 125 \Rightarrow x = \log_5 125 = 3$  (wegen  $125 = 5^3$ )
- (2)  $\log_4 64 = 3$  (wegen  $64 = 4^3$ )
- (3)  $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$  (wegen  $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$ )

■



**Rechenregeln für Logarithmen**

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad \log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \\ (2) \quad \log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v \\ (3) \quad \log_a (u^k) = k \cdot \log_a u \\ (4) \quad \log_a \sqrt[n]{u} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \log_a u \end{array} \right\} a > 0, u > 0, v > 0; k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$$

**Spezielle Logarithmen**

1. *Zehnerlogarithmus (Briggscher oder dekadischer Logarithmus):*  $\log_{10} r \equiv \lg r$
2. *Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus):*  $\log_2 r \equiv \lg r$
3. *Natürlicher Logarithmus (Logarithmus naturalis):*  $\log_e r \equiv \ln r$   
( $e = 2,718281 \dots$  = Eulersche Zahl)

■ **Beispiele**

- (1)  $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 1 - \log_2 8 = 0 - 3 = -3$  (wegen  $1 = 2^0$  und  $8 = 2^3$ )
- (2)  $\ln 104 = 4,6444$
- (3)  $\lg \sqrt[3]{24} = \lg (24^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \cdot \lg 24 = \frac{1}{3} \cdot 1,3802 = 0,4601$

■

**Umrechnung von der Basis  $a$  in die Basis  $b$  (mit  $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$ )**

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a r = K \cdot \log_a r \quad (r > 0)$$

**Regel:** Beim Basiswechsel  $a \rightarrow b$  werden die Logarithmen mit einer *Konstanten*  $K$  (dem *Kehrwert* von  $\log_a b$ ) multipliziert.

*Spezialfälle*

- (1) *Basiswechsel  $10 \rightarrow e$ :*

$$\ln r = \frac{\lg r}{\lg e} = \frac{\lg r}{0,4343} = 2,3026 \cdot \lg r$$

- (2) *Basiswechsel  $e \rightarrow 10$ :*

$$\lg r = \frac{\ln r}{\ln 10} = \frac{\ln r}{2,3026} = 0,4343 \cdot \ln r$$

## 2.7 Binomischer Lehrsatz

### ***n*-Fakultät**

$n!$  (gelesen: „ $n$  Fakultät“) ist definitionsgemäß das *Produkt* der ersten  $n$  *positiven ganzen Zahlen*:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n = \prod_{k=1}^n k \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Ergänzend definiert man:  $0! = 1$

Zerlegung:  $(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}_{n!} \cdot (n+1) = n!(n+1)$

### **Der Binomische Lehrsatz**

Die *Potenzen* eines *Binoms*  $a + b$  lassen sich nach dem *Binomischen Lehrsatz* wie folgt entwickeln ( $n \in \mathbb{N}^*$ ):

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot b^3 + \dots \\ &\quad \dots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + b^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $\binom{n}{k}$  (gelesen: „ $n$  über  $k$ “) heißen *Binomialkoeffizienten*, ihr Bildungsgesetz lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k \leq n)$$

Entwicklung für  $(a-b)^n$ : Im Binomischen Lehrsatz wird  $b$  formal durch  $-b$  ersetzt (*Vorzeichenwechsel* bei den *ungeraden* Potenzen von  $b$ ).

### *Anmerkung*

Lässt man für den Exponenten  $n$  auch *reelle* Werte zu, so erhält man die *allgemeine* (unendliche) *Binomische Reihe* (siehe Tabelle VI.3.4). Das Bildungsgesetz der Binomialkoeffizienten bleibt dabei *erhalten*.



## 3 Elementare (endliche) Reihen

### 3.1 Definition einer (endlichen) Reihe

Unter einer *endlichen Reihe* versteht man die Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$a_1$ : Anfangsglied       $a_n$ : Endglied       $a_k$ : allgemeines Reihenglied ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

### 3.2 Arithmetische Reihen

Die *Differenz* zweier aufeinanderfolgender Glieder ist *konstant*:  $a_{k+1} - a_k = \text{const.} = d$ .  
Die Reihe besitzt den Summenwert

$$\begin{aligned} a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n - 1)d] &= \sum_{k=1}^n [a + (k - 1)d] = \\ &= \frac{n}{2} (2a + (n - 1)d) \end{aligned}$$

$a$ : Anfangsglied       $a_n = a + (n - 1)d$ : Endglied

Bildungsgesetz der *arithmetischen* Reihe:  $a_k = a + (k - 1)d$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

### 3.3 Geometrische Reihen

Der *Quotient* zweier aufeinanderfolgender Glieder ist *konstant*:  $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \text{const.} = q$ . Die Reihe besitzt den Summenwert

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \sum_{k=1}^n aq^{k-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

$a$ : Anfangsglied       $a_n = aq^{n-1}$ : Endglied

Bildungsgesetz der *geometrischen* Reihe:  $a_k = aq^{k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

Für  $q = 1$  hat die geometrische Reihe den Summenwert  $na$

### 3.4 Spezielle Zahlenreihen

$$\begin{aligned} (1) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n &= \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \\ (2) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \end{aligned}$$

$$(3) \quad 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

$$(4) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(5) \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

$$(6) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

## 4 Gleichungen mit einer Unbekannten

### 4.1 Algebraische Gleichungen $n$ -ten Grades

#### 4.1.1 Allgemeine Vorbetrachtungen

Eine *algebraische* Gleichung  $n$ -ten Grades besitzt die allgemeine Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R})$$

*Eigenschaften*

- (1) Die Gleichung besitzt *höchstens*  $n$  *reelle* Wurzeln oder Lösungen. Lässt man auch *komplexe* Lösungen zu, so gibt es *genau*  $n$  Lösungen, wobei grundsätzlich mehrfache Werte entsprechend oft gezählt werden (*Fundamentalsatz der Algebra*, siehe auch VIII.4).
- (2) Für *ungerades*  $n$  hat die Gleichung *mindestens eine* reelle Lösung, für *gerades*  $n$  dagegen braucht die Gleichung keine reelle Lösung zu haben.
- (3) *Komplexe* Lösungen treten (wenn überhaupt) stets *paarweise* auf, nämlich in *konjugiert komplexer* Form (siehe VIII.1.1).

*Allgemeine Lösungsformeln* existieren nur für  $n \leq 4$ . Für  $n > 4$  ist man auf *Näherungsverfahren* angewiesen (z. B. auf das *Tangentenverfahren von Newton*, siehe I.4.5). Ist eine reelle Lösung  $x_1$  der algebraischen Gleichung  $n$ -ten Grades bekannt (eine solche Lösung lässt sich häufig durch *Erraten* oder *Probieren* finden), so kann die Gleichung durch *Abspalten* des zugehörigen *Linearfaktors*  $x - x_1$  im Grad um Eins *erniedrigt* werden (siehe *Horner-Schema*, III.4.5).

### 4.1.2 Lineare Gleichungen

Allgemeine Form einer *linearen* Gleichung (mit Lösung):

$$a_1 x + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{a_0}{a_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

### 4.1.3 Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0)$$

Normalform mit Lösungen (sog. „*p, q*-Formel“)

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

Die *Diskriminante*  $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  entscheidet dabei über die *Art* der Lösungen:

$D > 0$ : Zwei *verschiedene reelle* Lösungen

$D = 0$ : Eine *doppelte reelle* Lösung

$D < 0$ : Zwei zueinander *konjugiert komplexe* Lösungen (siehe VIII.1.1)

**Vietascher Wurzelsatz**

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q$$

$x_1, x_2$ : *Wurzeln (Lösungen)* der quadratischen Gleichung

■ **Beispiel**

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \quad (p = -4, q = -5)$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + 5 = (-2)^2 + 5 = 4 + 5 = 9 > 0$$

$\Rightarrow$  Zwei *verschiedene reelle* Lösungen

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3, \quad \text{d. h.} \quad x_1 = 5, \quad x_2 = -1$$

$$x_1 + x_2 = 5 - 1 = 4 = -p$$

$$x_1 x_2 = 5 \cdot (-1) = -5 = q$$

■

### 4.1.4 Kubische Gleichungen

Allgemeine Form

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_3 \neq 0)$$

**Normalform mit Lösungen**

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Die Diskriminante  $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$  mit  $p = \frac{3b - a^2}{3}$  und  $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$  entscheidet dabei über die Art der Lösungen:

$D > 0$ : Eine *reelle* und zwei zueinander *konjugiert komplexe Lösungen*

$D = 0$ : Drei *reelle* Lösungen, darunter eine *doppelte Lösung*<sup>1)</sup>

$D < 0$ : Drei *reelle* Lösungen

**Cardanische Lösungsformel**

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= u + v - \frac{a}{3} \\ x_2 &= -\frac{u+v}{2} - \frac{a}{3} + \frac{u-v}{2} \sqrt{3}j \\ x_3 &= -\frac{u+v}{2} - \frac{a}{3} - \frac{u-v}{2} \sqrt{3}j \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \\ v &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \end{aligned}$$

$j$ : Imaginäre Einheit (siehe VIII.1.1)

*Hinweis*: Numerische Lösungsmethoden führen meist schneller zum Ziel.

*Spezialfall*  $D < 0$ :

Für  $D < 0$  erhält man die drei reellen Lösungen meist bequemer mit Hilfe des *trigonometrischen* Lösungsansatzes

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 \cdot \sqrt{\frac{|p|}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) - \frac{a}{3} \\ x_2 &= 2 \cdot \sqrt{\frac{|p|}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) - \frac{a}{3} \\ x_3 &= 2 \cdot \sqrt{\frac{|p|}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right) - \frac{a}{3} \end{aligned} \right\} \cos \varphi = -\frac{q}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}}$$

Der Hilfswinkel  $\varphi$  wird aus der angegebenen Gleichung berechnet.

**Vietascher Wurzelsatz**

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = b, \quad x_1 x_2 x_3 = -c$$

$x_1, x_2, x_3$ : *Wurzeln (Lösungen)* der kubischen Gleichung

<sup>1)</sup> Für den Spezialfall  $p = q = 0$  erhält man eine *dreifache* Lösung:  $x_{1/2/3} = -a/3$ .

■ **Beispiel**

$$x^3 + 1,6x^2 - 3,96x - 6,48 = 0 \quad (a = 1,6; \quad b = -3,96; \quad c = -6,48)$$

$$p = \frac{3b - a^2}{3} = \frac{3 \cdot (-3,96) - 1,6^2}{3} = -4,813333$$

$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = \frac{2 \cdot 1,6^3}{27} - \frac{1,6 \cdot (-3,96)}{3} - 6,48 = -4,064593$$

$$\text{Diskriminante: } D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{-4,813333}{3}\right)^3 + \left(\frac{-4,064593}{2}\right)^2 = 0$$

Es gibt also drei *reelle* Lösungen, darunter eine *Doppellösung*. Wegen  $D = 0$  ist  $u = v$ :

$$u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{2,0322965} = 1,266667$$

Lösungen nach der Cardanischen Lösungsformel unter Beachtung von  $u + v = 2u$  und  $u - v = 0$ :

$$x_1 = 2u - \frac{a}{3} = 2 \cdot 1,266667 - \frac{1,6}{3} = 2$$

$$x_{2/3} = -\frac{2u}{2} - \frac{a}{3} = -u - \frac{a}{3} = -1,266667 - \frac{1,6}{3} = -18$$

■

**Spezialfall:  $x^3 + ax^2 + bx = 0$  (Absolutglied  $c = 0$ )**

Die Gleichung zerfällt in eine *lineare* Gleichung mit der Lösung  $x_1 = 0$  und in eine *quadratische* Gleichung mit möglicherweise zwei weiteren Lösungen:

$$x^3 + ax^2 + bx = x(x^2 + ax + b) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow & x_1 = 0 \\ & & x^2 + ax + b = 0 \end{cases}$$

■ **Beispiel**

$$x^3 - 2x^2 - 15x = 0$$

$$x(x^2 - 2x - 15) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow & x_1 = 0 \\ & & x^2 - 2x - 15 = 0 & \Rightarrow & x_{2/3} = 1 \pm 4 \end{cases}$$

Lösungen:  $x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = -3$

■

**4.1.5 Bi-quadratische Gleichungen**

Eine algebraische Gleichung 4. Grades mit ausschließlich *geraden* Exponenten heißt *bi-quadratisch*:

$$a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0 = 0 \quad \text{oder} \quad x^4 + ax^2 + b = 0 \quad (a_4 \neq 0)$$

Sie lässt sich mit Hilfe der *Substitution*  $u = x^2$  in eine *quadratische* Gleichung überführen. Aus den beiden Wurzeln dieser Gleichung erhält man durch *Rücksubstitution* die (reellen) Lösungen der *bi-quadratischen* Gleichung<sup>2)</sup>.

<sup>2)</sup> Allgemeines Lösungsverfahren für eine beliebige Gleichung 4. Grades: siehe Bronstein-Semendjajew



■ **Beispiel**

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Substitution:  $u = x^2$

$$u^2 - 10u + 9 = 0 \Rightarrow u_{1/2} = 5 \pm 4, \quad u_1 = 9, \quad u_2 = 1$$

Rücksubstitution mittels  $x^2 = u$ :

$$x^2 = u_1 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

$$x^2 = u_2 = 1 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 1$$

Lösungen:  $x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1$

■

## 4.2 Allgemeine Lösungshinweise für Gleichungen

Für viele Gleichungen wie beispielsweise *Wurzelgleichungen*, *trigonometrische* oder *goniometrische* Gleichungen, *Exponential-* und *logarithmische* Gleichungen gibt es *kein* allgemeines Lösungsverfahren. Sie lassen sich daher meist nur mit *Näherungsmethoden* behandeln (siehe *graphische* und *numerische* Lösungsverfahren). In *Sonderfällen* gelingt es, die Gleichung mit Hilfe *elementarer Umformungen* oder einer geeigneten *Substitution* in eine *algebraische Gleichung n-ten Grades* zu überführen, die dann mit den in I.4.1 dargelegten Methoden gelöst werden kann.

**Wichtiger Hinweis:** Der Übergang von der gegebenen Gleichung zu einer algebraischen Gleichung *n-ten Grades* ist oft nur mit Hilfe *nichtäquivalenter Umformungen*<sup>3)</sup> möglich (Beispiel: *Quadrieren von Wurzelausdrücken*, siehe nachfolgendes Beispiel (1)). Dabei kann sich die Lösungsmenge der Gleichung *verändern*, d. h. es können sog. „*Scheinlösungen*“ auftreten. Es ist daher stets durch Einsetzen der gefundenen Werte in die *Ausgangsgleichung* zu prüfen, ob auch eine Lösung dieser Gleichung vorliegt oder nicht.

■ **Beispiele**

(1) **Wurzelgleichung**  $\sqrt{4x+1} + 1 = 2x$

Die Wurzel wird zunächst *isoliert* und anschließend durch *Quadrieren* (also eine nichtäquivalente Umformung) beseitigt:

$$\sqrt{4x+1} = 2x - 1 \quad | \text{quadrieren}$$

$$4x + 1 = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$4x^2 - 8x = 0, \quad x^2 - 2x = 0, \quad x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$

Wir prüfen durch Einsetzen in die *Ausgangsgleichung* (Wurzelgleichung), ob diese Werte auch die Wurzelgleichung lösen:

$$x_1 = 0$$

$$\sqrt{4 \cdot 0 + 1} + 1 = 2 \cdot 0 \Rightarrow \sqrt{1} + 1 = 1 + 1 = 2 = 0$$

Widerspruch:  $x_1 = 0$  ist somit *keine* Lösung der Wurzelgleichung

$$x_1 = 2$$

$$\sqrt{4 \cdot 2 + 1} + 1 = 2 \cdot 2 \Rightarrow \sqrt{9} + 1 = 3 + 1 = 4 = 4$$

$x_2 = 2$  ist eine (und zwar die einzige) *Lösung* der Wurzelgleichung

Lösung:  $x = 2$

<sup>3)</sup> Bei einer *äquivalenten* Umformung bleibt die Lösungsmenge einer Gleichung *erhalten*. Umformungen, die zu einer *Veränderung* der Lösungsmenge führen *können* (aber nicht müssen), heißen *nichtäquivalente* Umformungen.

(2) **Trigonometrische Gleichung**  $\cos^2 x = \sin x + \frac{1}{4}$ 

Unter Verwendung der Beziehung  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  („trigonometrischer Pythagoras“) und der sich anschließenden *Substitution*  $u = \sin x$  erhalten wir zunächst:

$$1 - \sin^2 x = \sin x + \frac{1}{4} \quad \text{oder} \quad \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

$$u^2 + u - \frac{3}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0,5, \quad u_2 = -1,5$$

*Rücksubstitution* mittels  $\sin x = u$ :

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = u_1 = 0,5 \quad \Rightarrow \quad x_{1k} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \phantom{\sin x = u_1 = 0,5} \quad \quad \quad x_{2k} = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \end{array} \right\} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = u_2 = -1,5 \quad \Rightarrow \quad \text{Keine Lösungen}$$

$$\text{Lösungen: } x_{1k} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \quad x_{2k} = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

■

### 4.3 Graphisches Lösungsverfahren

Die Lösungen der Gleichung  $f(x) = 0$  sind die *Nullstellen* der Funktion  $y = f(x)$ . Um diese zu bestimmen, erstellt man eine *Wertetabelle*, zeichnet die *Funktion* und liest die Nullstellen aus der Zeichnung ab. Meist ist es jedoch günstiger, die Gleichung  $f(x) = 0$  zunächst durch Termumstellungen auf die Form  $f_1(x) = f_2(x)$  zu bringen. Die gesuchten Lösungen sind dann die Abszissen der *Schnittpunkte* der beiden (meist wesentlich einfacheren) Kurven  $y = f_1(x)$  und  $y = f_2(x)$ .

Nachteil: Geringe Ablesegenauigkeit

#### ■ Beispiel

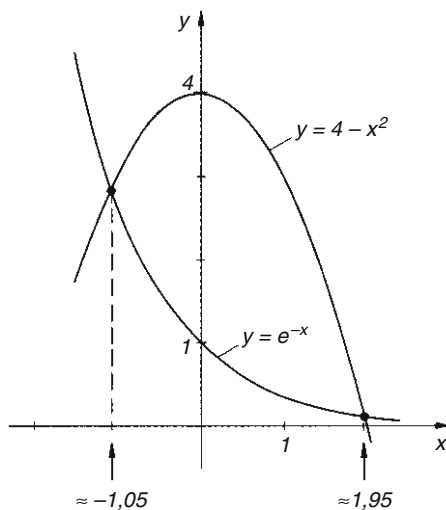
$$e^{-x} + x^2 - 4 = 0$$

*Aufspalten* durch Termumstellungen:

$$\underbrace{e^{-x}}_{f_1(x)} = \underbrace{4 - x^2}_{f_2(x)}$$

*Lösungen* nach nebenstehendem Bild  
(Schnittpunkte der Parabel  $y = 4 - x^2$   
mit  $y = e^{-x}$ ):

$$x_1 \approx -1,05; \quad x_2 \approx 1,95$$



■

## 4.4 Regula falsi

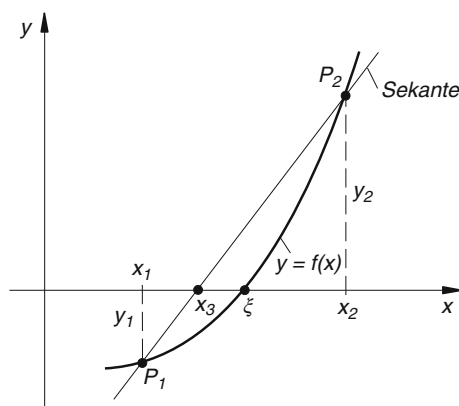
Es werden zunächst zwei *Näherungswerte* (Startwerte)  $x_1$  und  $x_2$  für die gesuchte Lösung  $\xi$  der Gleichung  $f(x) = 0$  so bestimmt, dass sie auf *verschiedenen* Seiten der Lösung  $\xi$  liegen. Dies ist bei einer *stetigen* Funktion der Fall, wenn  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$  ist, d. h. die Funktion muss in den beiden Startpunkten ein *unterschiedliches* Vorzeichen haben. Die gesuchte Lösung  $\xi$  liegt somit im Intervall  $[x_1, x_2]$ . Einen *besseren* Näherungswert erhält man dann aus der Gleichung

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_2 \quad \text{mit} \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2)$$

Dann wiederholt man das beschriebene Verfahren mit den Startwerten  $x_1, x_3$  oder  $x_2, x_3$ , je nachdem, ob  $f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$  oder  $f(x_2) \cdot f(x_3) < 0$  ist usw.

### Geometrische Deutung

Die Kurve  $y = f(x)$  wird zwischen  $x_1$  und  $x_2$  durch die dortige *Sekante* ersetzt. Der Schnittpunkt dieser Sekante mit der  $x$ -Achse liefert einen *verbesserten* Näherungswert für die gesuchte Lösung (Nullstelle  $\xi$ ). Dann wird das Verfahren mit den Startwerten  $x_1, x_3$  oder  $x_2, x_3$  wiederholt (siehe weiter oben).



### ■ Beispiel

Nullstellenberechnung von:  $f(x) = x^3 - 0,1x - 1$ :

$$x^3 - 0,1x - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad x^3 = 0,1x + 1$$

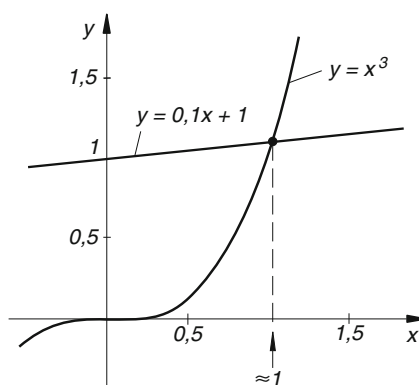
Startwerte (siehe Skizze)  $x_1 = 0,9$  und  $x_2 = 1,1$ :

$$\begin{aligned} f(x_1) \cdot f(x_2) &= f(0,9) \cdot f(1,1) = \\ &= (-0,361) \cdot (0,221) < 0 \end{aligned}$$

Verbesserter Wert nach der Regula Falsi:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_2 = \\ &= 1,1 - \frac{1,1 - 0,9}{0,221 - (-0,361)} 0,221 = \\ &= 1,024 \end{aligned}$$

Kontrolle:  $f(1,024) = -0,029 \approx 0$



■

## 4.5 Tangentenverfahren von Newton

Ausgehend von einem geeigneten *Startwert*  $x_0$  (auch Roh-, Näherungs- oder Anfangswert genannt) erhält man nach der *Iterationsvorschrift*

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

eine Folge von *Näherungswerten*  $x_0, x_1, x_2, \dots$  für die gesuchte Lösung  $\xi$  der Gleichung  $f(x) = 0$ . Im Falle der Konvergenz *verdoppelt* sich mit jedem Iterationsschritt die Anzahl der gültigen Dezimalstellen.

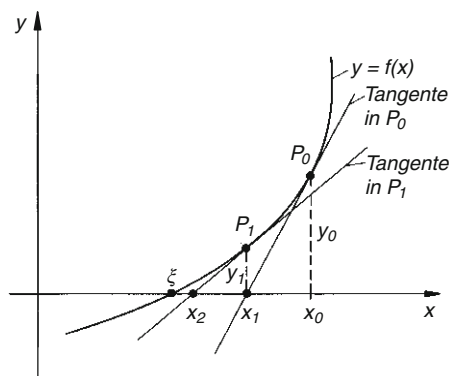
### Konvergenzbedingung

Die Folge der Näherungswerte  $x_0, x_1, x_2, \dots$  *konvergiert* gegen die gesuchte Lösung  $\xi$  der Gleichung  $f(x) = 0$ , wenn im Intervall  $[a, b]$ , in dem *alle* Näherungswerte liegen, die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$$

### Geometrische Deutung

Die Kurve  $y = f(x)$  wird an der Stelle  $x_0$  durch die dortige *Tangente* ersetzt. Der Schnittpunkt der Tangente mit der  $x$ -Achse liefert dann einen *verbesserten* Näherungswert  $x_1$  für die gesuchte Lösung (Nullstelle  $\xi$ ). Dann wird das beschriebene Verfahren mit  $x_1$  als Startwert *wiederholt* usw..



### ■ Beispiel

$$\ln x + x - 2,8 = 0 \quad \text{oder} \quad \ln x = -x + 2,8$$

Startwert nach nebenstehendem Bild:  $x_0 = 2$

$$f(x) = \ln x + x - 2,8$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

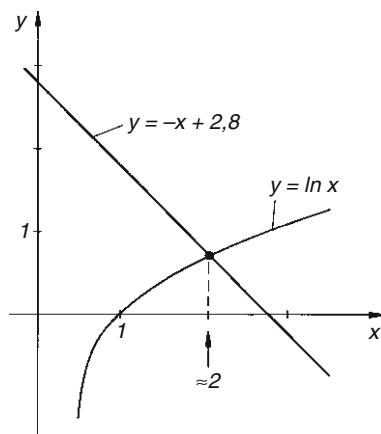
Konvergenzbedingung für den Startwert  $x_0 = 2$ :

$$f(2) = -0,10685$$

$$f'(2) = 1,5, \quad f''(2) = -0,25$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(2) \cdot f''(2)}{[f'(2)]^2} \right| &= \left| \frac{(-0,10685) \cdot (-0,25)}{1,5^2} \right| = \\ &= 0,01187 < 1 \end{aligned}$$

Die Konvergenzbedingung ist somit erfüllt.



*Newton-Iteration (zwei Schritte):*

$n$	$x_{n-1}$	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	$x_n$
1	2	-0,106 85	1,5	2,071 23
2	2,071 23	-0,000 63	1,482 80	2,071 65

*Lösung:*  $x = 2,071\ 65$  (Kontrolle:  $f(2,071\ 65) = -0,000\ 005$ )

## 5 Ungleichungen mit einer Unbekannten

*Ungleichungen mit einer Unbekannten*  $x$  entstehen, wenn man zwei Terme  $T_1(x)$  und  $T_2(x)$  durch eines der Relationszeichen „<“, „>“, „≤“, „≥“, miteinander verbindet. Sie lassen sich in vielen Fällen (ähnlich wie Gleichungen) durch sog. „äquivalente Umformungen“ lösen. Zu diesen gehören:

1. Die Seiten einer Ungleichung dürfen miteinander *vertauscht* werden, wenn gleichzeitig das Relationszeichen *umgedreht* wird.
2. Auf beiden Seiten einer Ungleichung darf ein *beliebiger* Term  $T(x)$  *addiert* oder *subtrahiert* werden.
3. Eine Ungleichung darf mit einem beliebigen *positiven* Term  $T(x) > 0$  *multipliziert* oder durch einen solchen Term *dividiert* werden.
4. Eine Ungleichung darf mit einem beliebigen *negativen* Term  $T(x) < 0$  *multipliziert* oder durch einen solchen Term *dividiert* werden, wenn gleichzeitig das Relationszeichen *umgedreht* wird.

### Anmerkungen

- (1) Bei der Multiplikation bzw. Division mit einem Term  $T(x)$  muss  $T(x) \neq 0$  vorausgesetzt werden. Kann  $T(x)$  sowohl *positiv* als auch *negativ* werden, so ist eine *Fallunterscheidung* durchzuführen.
- (2) Die Lösungsmengen von Ungleichungen sind in der Regel *Intervalle* bzw. *Vereinigungen von Intervallen*.

### ■ Beispiel

$$x^2 < x \quad \text{oder} \quad x^2 - x = x(x - 1) < 0$$

Wir lösen diese Ungleichung wie folgt durch *Fallunterscheidung* (das Produkt kann nur *negativ* sein, wenn die Faktoren  $x$  und  $x - 1$  ein *unterschiedliches* Vorzeichen haben).

$$1. \text{ Fall: } \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x - 1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x > 0 \quad \text{und} \quad x < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$$

$$2. \text{ Fall: } \left. \begin{array}{l} x < 0 \\ x - 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x < 0 \quad \text{und} \quad x > 1 \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

*Lösungsintervall:*  $0 < x < 1$

Häufig lassen sich Ungleichungen mit Hilfe einer Skizze anschaulich lösen, wie wir am soeben behandelten Beispiel zeigen wollen.

### ■ Beispiel

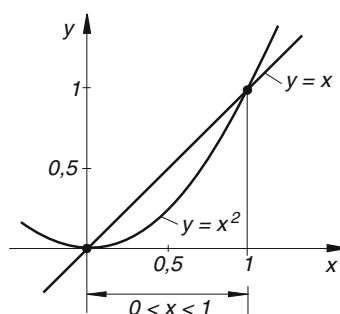
Die Lösungen der Ungleichung  $x^2 < x$  liegen dort, wo die Parabel  $y = x^2$  *unterhalb* der Geraden  $y = x$  verläuft. *Lösungsweg*: Kurvenschnittpunkte berechnen, Skizze anfertigen und das Lösungsintervall „ablesen“.

*Kurvenschnittpunkte*:

$$x^2 = x \quad \text{oder} \quad x(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

Aus der Skizze folgt:  $\mathbb{L} = (0,1)$



## 6 Lehrsätze aus der elementaren Geometrie

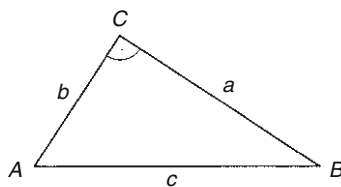
### 6.1 Satz des Pythagoras

In einem *rechtwinkligen* Dreieck gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$a, b$ : Katheten

$c$ : Hypotenuse



### 6.2 Höhensatz

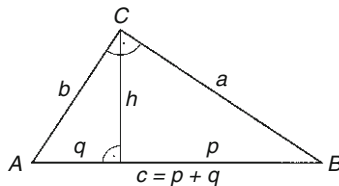
In einem *rechtwinkligen* Dreieck gilt:

$$h^2 = p \cdot q$$

$h$ : Höhe

$c$ : Hypotenuse ( $c = p + q$ )

$p, q$ : Hypotenusenabschnitte



### 6.3 Kathetensatz (Euklid)

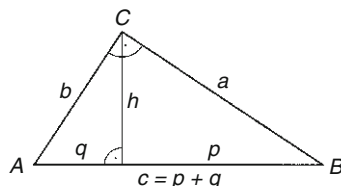
In einem *rechtwinkligen* Dreieck gilt:

$$a^2 = c \cdot p \quad \text{und} \quad b^2 = c \cdot q$$

$a, b$ : Katheten

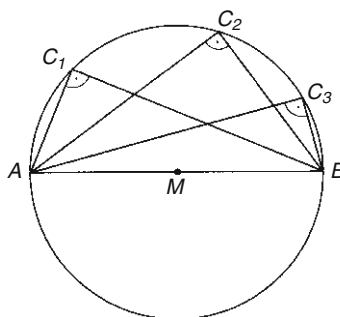
$c$ : Hypotenuse ( $c = p + q$ )

$p, q$ : Hypotenusenabschnitte



### 6.4 Satz des Thales

Jeder Peripheriewinkel über einem Kreisdurchmesser  $\overline{AB}$  ist ein *rechter* Winkel. Die Winkel bei  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  sind jeweils *rechte* Winkel.

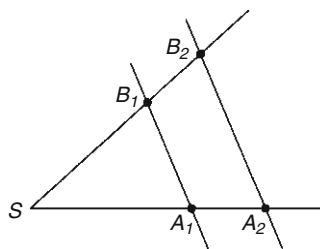


### 6.5 Strahlensätze

#### 1. Strahlensatz

Werden zwei von einem gemeinsamen Punkt  $S$  ausgehende Strahlen von *Parallelen* geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die *entsprechenden* Abschnitte auf dem anderen Strahl:

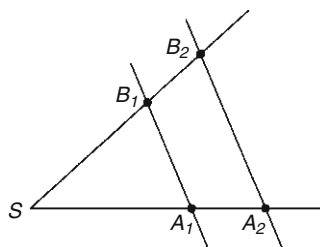
$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{SB_2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{B_1B_2}}$$



#### 2. Strahlensatz

Werden zwei von einem gemeinsamen Punkt  $S$  ausgehende Strahlen von *Parallelen* geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den beiden *Parallelen* wie die *entsprechenden* Abschnitte auf *einem* Strahl, vom *Schnittpunkt*  $S$  aus gemessen:

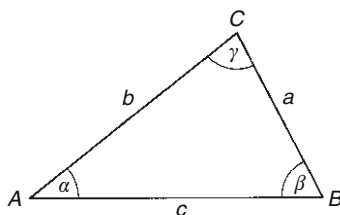
$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{SB_2}}$$



## 6.6 Sinussatz

In einem *beliebigen* Dreieck gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



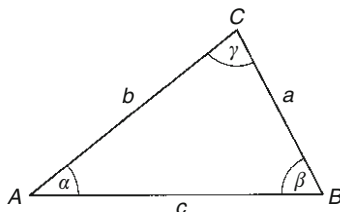
## 6.7 Kosinussatz

In einem *beliebigen* Dreieck gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$



# 7 Ebene geometrische Körper (Planimetrie)

*Bezeichnungen*

A: Fläche    d: Diagonale    h: Höhe    r, R: Radius    U: Umfang

## 7.1 Dreiecke

### 7.1.1 Allgemeine Beziehungen

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (s = U/2)$$

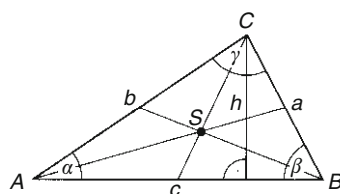
$$U = a + b + c$$

*Schwerpunkt S:*

Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

$$\text{Sinussatz: } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\begin{aligned} \text{Kosinussatz: } a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$



Der Schwerpunkt *S* teilt die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2 : 1 (von der Ecke aus betrachtet).

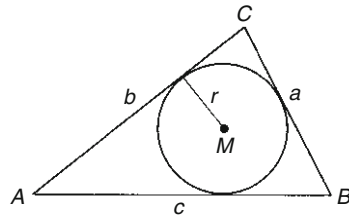


**Inkreis eines Dreiecks**

Mittelpunkt  $M$  des Inkreises:  
Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

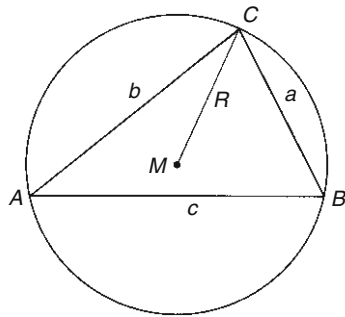
$$(s = U/2)$$

**Umkreis eines Dreiecks**

Mittelpunkt  $M$  des Umkreises:  
Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$(s = U/2)$$

**7.1.2 Spezielle Dreiecke****7.1.2.1 Rechtwinkliges Dreieck**

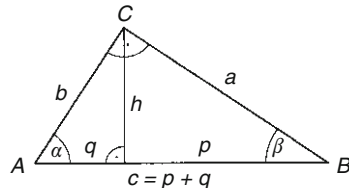
$$\gamma = 90^\circ \quad \text{und} \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} hc = \frac{1}{2} ab$$

$$\text{Pythagoras:} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{Höhensatz:} \quad h^2 = p \cdot q$$

$$\text{Kathetensatz:} \quad a^2 = c \cdot p, \quad b^2 = c \cdot q$$



$p, q$ : Hypotenusenabschnitte

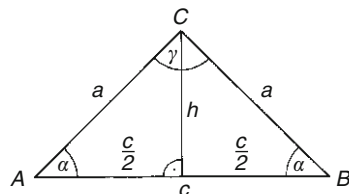
**7.1.2.2 Gleichschenkliges Dreieck**

$$a = b \quad \text{und} \quad \alpha = \beta$$

$$A = \frac{1}{2} hc = \frac{1}{4} c \sqrt{4a^2 - c^2}$$

$$U = 2a + c$$

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - c^2}$$



### 7.1.2.3 Gleichseitiges Dreieck

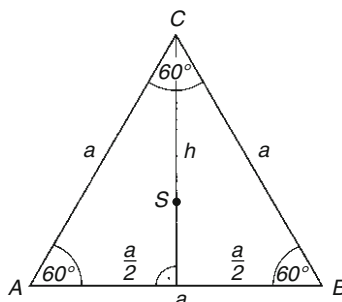
$$a = b = c$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} a h = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$$

$$U = 3 a$$

$$h = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$$



Der Schwerpunkt  $S$  hat von jeder Seite den Abstand  $h/3$ .

## 7.2 Quadrat

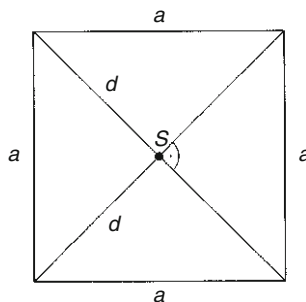
$$A = a^2$$

$$U = 4 a$$

$$d = a \sqrt{2}$$

Schwerpunkt  $S$ :

Schnittpunkt der Diagonalen



Die Diagonalen *halbieren* sich in  $S$  und stehen *senkrecht* aufeinander.

## 7.3 Rechteck

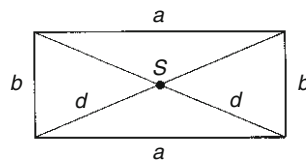
$$A = a b$$

$$U = 2 a + 2 b$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Schwerpunkt  $S$ :

Schnittpunkt der Diagonalen



Die Diagonalen *halbieren* sich in  $S$ .

## 7.4 Parallelogramm

Parallelogramm: Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten *parallel* und *gleichlang* sind.

$$A = ah = ab \cdot \sin \alpha$$

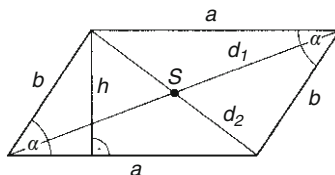
$$U = 2a + 2b$$

$$h = b \cdot \sin \alpha$$

$$d_{1/2} = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab \cos \alpha}$$

Schwerpunkt  $S$ :

Schnittpunkt der Diagonalen



Die Diagonalen *halbieren* sich in  $S$ .

## 7.5 Rhombus oder Raute

Rhombus oder Raute: Parallelogramm mit vier gleichlangen Seiten ( $a = b$ ).

$$A = ah = a^2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

$$U = 4a$$

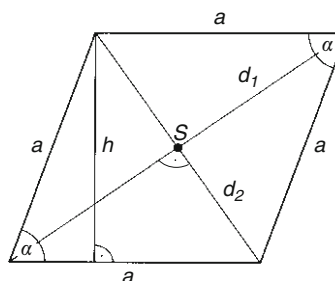
$$h = a \cdot \sin \alpha$$

$$d_1 = 2a \cdot \cos(\alpha/2)$$

$$d_2 = 2a \cdot \sin(\alpha/2)$$

Schwerpunkt  $S$ :

Schnittpunkt der Diagonalen



Die Diagonalen *halbieren* sich in  $S$  und stehen *senkrecht* aufeinander.

## 7.6 Trapez

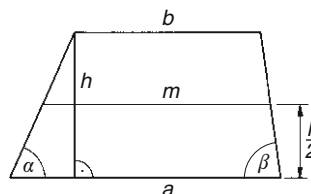
$$m = \frac{1}{2} (a + b)$$

$$A = mh = \frac{1}{2} (a + b) h$$

Schwerpunkt  $S$ :

Auf der Verbindungslinie der Mitten der beiden parallelen Grundlinien im Abstand

$$\frac{h(a + 2b)}{3(a + b)} \text{ von der Grundlinie } a$$



$a, b$ : Grundlinien ( $a \parallel b$ )  
 $m$ : Mittellinie

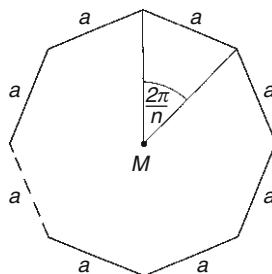
## 7.7 Reguläres $n$ -Eck

$$A = \frac{1}{4} n a^2 \cdot \cot(\pi/n)$$

$$U = n a$$

Schwerpunkt  $S$ :

Mittelpunkt  $M$  des Umkreises  
(Kreis durch die  $n$  Ecken)



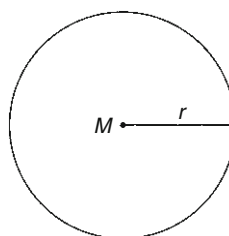
## 7.8 Kreis

$$A = \pi r^2$$

$$U = 2\pi r$$

Schwerpunkt  $S$ :

Kreismittelpunkt  $M$



Kreisdurchmesser  $= 2r$

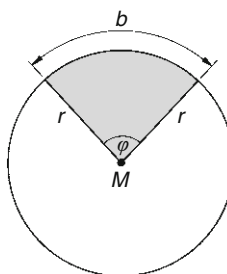
## 7.9 Kreissektor oder Kreisausschnitt

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} r^2 \varphi = \frac{1}{2} r b \\ b &= r \varphi \end{aligned} \right\} \varphi \text{ in rad}$$

Schwerpunkt  $S$ :

Auf der Symmetrieachse im Abstand

$$\frac{4r \cdot \sin(\varphi/2)}{3\varphi} \text{ vom Kreismittelpunkt } M$$



## 7.10 Kreissegment oder Kreisabschnitt

$$A = \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \sin \varphi) \quad (\varphi \text{ in rad})$$

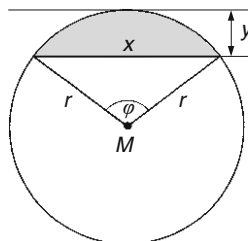
$$x = 2r \cdot \sin(\varphi/2)$$

$$y = r[1 - \cos(\varphi/2)] = 2r \cdot \sin^2(\varphi/4)$$

Schwerpunkt  $S$ :

Auf der Symmetrieachse im Abstand

$$\frac{4r \cdot \sin^3(\varphi/2)}{3(\varphi - \sin \varphi)} \text{ vom Kreismittelpunkt } M$$



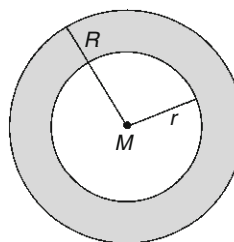
### 7.11 Kreisring

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

Schwerpunkt  $S$ :

Mittelpunkt  $M$  der beiden  
konzentrischen Kreise

$r, R$ : Innen- bzw. Außenradius



### 7.12 Ellipse

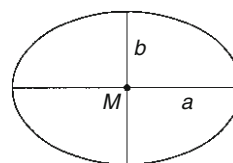
$$A = \pi a b$$

$$U \approx \pi [1,5(a + b) - \sqrt{ab}]$$

Schwerpunkt  $S$ :

Mittelpunkt  $M$  der Ellipse

$a, b$ : Große bzw. kleine Halbachse



## 8 Räumliche geometrische Körper (Stereometrie)

Bezeichnungen

$A$ : Grundfläche

$d$ : Raumdiagonale

$h$ : Höhe

$M$ : Mantelfläche

$O$ : Oberfläche

$r, R$ : Radius

$s$ : Mantellinie

$V$ : Volumen

### 8.1 Prisma

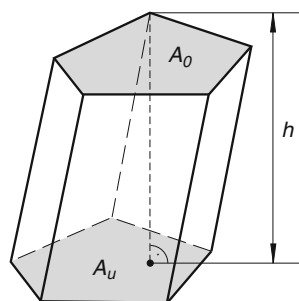
Die beiden Grundflächen eines *schiefen Prismas* liegen in *parallelen Ebenen* und sind *kongruente n-Ecke* (grau unterlegt), die  $n$  Seitenflächen sind *Parallelogramme*.

$$A_o = A_u$$

$$V = A_o h = A_u h$$

Schwerpunkt  $S$ :

Liegt auf der Verbindungsline der Schwerpunkte der beiden Grundflächen und halbiert diese Linie



*Spat* oder *Parallelepiped*: Die Grundflächen sind *Parallelelogramme*, der Schwerpunkt  $S$  liegt im Schnittpunkt der Raumdiagonalen (diese *halbieren* sich in  $S$ ).

*Gerades Prisma*: Die Kanten stehen *senkrecht* auf den beiden Grundflächen (*Sonderfälle*: Quader und Würfel).

*Reguläres Prisma*: Ein *gerades* Prisma, dessen Grundflächen *reguläre  $n$ -Ecke* sind.

## 8.2 Würfel

$$V = a^3$$

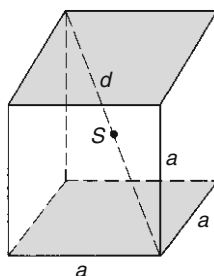
$$O = 6a^2$$

$$d = a\sqrt{3}$$

Schwerpunkt  $S$ :

Schnittpunkt der Raumdiagonalen

$a$ : Kantenlänge



## 8.3 Quader

$$V = abc$$

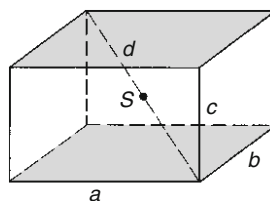
$$O = 2(ab + ac + bc)$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Schwerpunkt  $S$ :

Schnittpunkt der Raumdiagonalen

$a, b, c$ : Kantenlängen



## 8.4 Pyramide

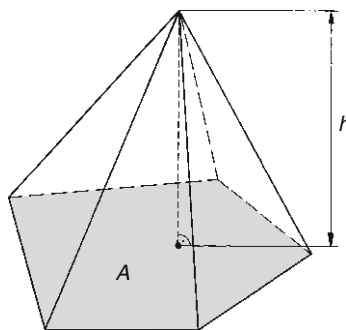
Die Grundfläche ist ein *Vieleck* (Dreieck, Viereck usw.), die Seitenflächen sind *Dreiecke*, die in der Spitze zusammenlaufen.

$$V = \frac{1}{3} Ah$$

Schwerpunkt  $S$ :

Auf der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche im Abstand  $h/4$  von der Grundfläche

*Reguläre* oder *gleichseitige* Pyramide:  
Die Grundfläche ist ein *regelmäßiges* Vieleck, die Pyramidenspitze liegt *senkrecht* über dem Schwerpunkt der Grundfläche.



## 8.5 Pyramidenstumpf

Die Schnittflächen  $A_u$  und  $A_o$  sind *parallel*, die Seitenflächen sind *Trapeze*.

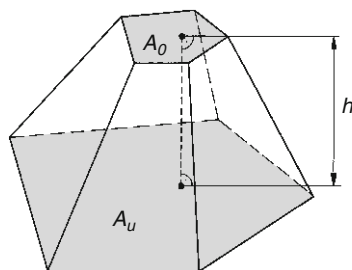
$$V = \frac{h}{3} (A_u + \sqrt{A_u A_o} + A_o)$$

*Schwerpunkt S:*

Auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Schnittflächen  $A_u$  und  $A_o$  im Abstand

$$\frac{h (A_u + 2 \sqrt{A_u A_o} + 3 A_o)}{4 (A_u + \sqrt{A_u A_o} + A_o)}$$

von der Schnittfläche  $A_u$  (Grundfläche)



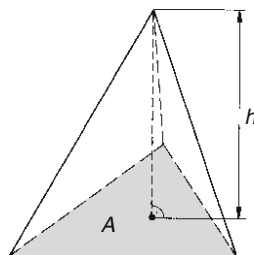
## 8.6 Tetraeder oder dreiseitige Pyramide

Das Tetraeder ist ein Spezialfall der Pyramide, die Grundfläche ist ein *Dreieck*.

$$V = \frac{1}{3} A h$$

*Schwerpunkt S:*

Auf der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche im Abstand  $h/4$  von der Grundfläche



*Reguläres Tetraeder:* Die vier Flächen sind *gleichseitige* Dreiecke mit der Seitenlänge  $a$ . Volumen und Oberfläche berechnen sich wie folgt:

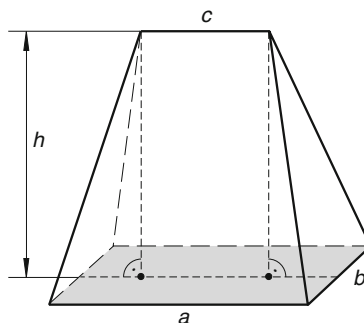
$$V = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$$

$$O = a^2 \sqrt{3}$$

## 8.7 Keil

Die Grundfläche ist ein *Rechteck*, die vier Seitenflächen *gleichschenklige* Dreiecke bzw. Trapeze.

$$V = \frac{1}{6} b h (2a + c)$$



## 8.8 Gerader Kreiszylinder

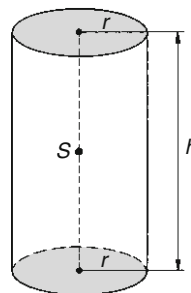
$$V = \pi r^2 h$$

$$M = 2\pi r h$$

$$O = 2\pi r(r + h)$$

*Schwerpunkt S:*

Auf der Symmetrieachse im Abstand  $h/2$  von der Grundfläche



## 8.9 Gerader Kreiskegel

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

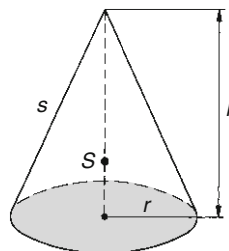
$$M = \pi r s$$

$$O = \pi r(r + s)$$

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

*Schwerpunkt S:*

Auf der Symmetrieachse im Abstand  $h/4$  von der Grundfläche





### 8.10 Gerader Kreiskegelstumpf

Die beiden kreisförmigen Schnittflächen mit den Radien  $r$  und  $R$  sind *parallel*.

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$$

$$M = \pi (R + r) s$$

$$O = \pi [R^2 + r^2 + (R + r) s]$$

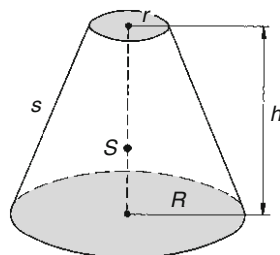
$$s = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

Schwerpunkt  $S$ :

Auf der Symmetrieachse im Abstand

$$\frac{h(R^2 + 2Rr + 3r^2)}{4(R^2 + Rr + r^2)}$$

von der Grundfläche (Radius  $R$ )



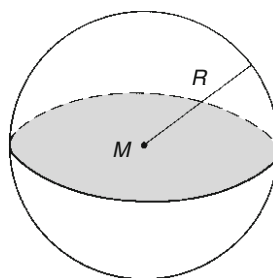
### 8.11 Kugel

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$O = 4 \pi R^2$$

Schwerpunkt  $S$ :

Kugelmittelpunkt  $M$



### 8.12 Kugelausschnitt oder Kugelsektor

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$$

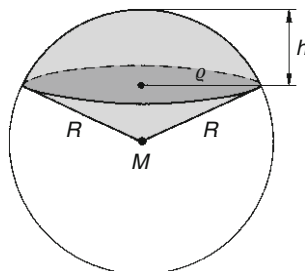
$$O = \pi R (2h + \varrho)$$

$$\varrho = \sqrt{h(2R - h)}$$

Schwerpunkt  $S$ :

Auf der Symmetriachse im Abstand

$$\frac{3}{8} (2R - h) \text{ vom Kugelmittelpunkt } M$$



$h$ : Höhe des Kugelausschnitts

### 8.13 Kugelschicht oder Kugelzone

$$V = \frac{1}{6} \pi h (3 \varrho_1^2 + 3 \varrho_2^2 + h^2)$$

$$M = 2 \pi R h$$

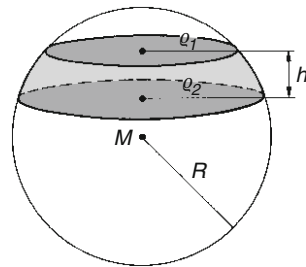
$$O = \pi (2 R h + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$$

Schwerpunkt  $S$ :

Auf der Symmetrieachse im Abstand

$$\frac{3 (\varrho_2^4 - \varrho_1^4)}{2 h (3 \varrho_1^2 + 3 \varrho_2^2 + h^2)}$$

vom Kugelmittelpunkt  $M$



$\varrho_1, \varrho_2$ : Radien der beiden kreisförmigen Grundflächen

$h$ : Höhe der Kugelschicht (Schichtdicke)

### 8.14 Kugelabschnitt, Kugelsegment, Kugelkappe oder Kalotte

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3 R - h) =$$

$$= \frac{1}{6} \pi h (3 \varrho^2 + h^2)$$

$$M = 2 \pi R h$$

$$O = \pi (2 R h + \varrho^2) = \pi h (4 R - h)$$

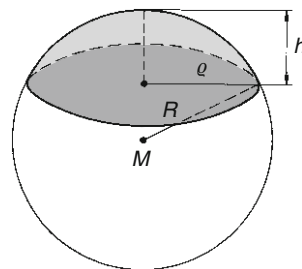
$$\varrho = \sqrt{h (2 R - h)}$$

Schwerpunkt  $S$ :

Auf der Symmetrieachse im Abstand

$$\frac{3 (2 R - h)^2}{4 (3 R - h)}$$

vom Kugelmittelpunkt  $M$



$\varrho$ : Radius der kreisförmigen Grundfläche

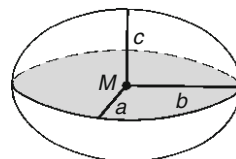
$h$ : Höhe der Kugelkappe

### 8.15 Ellipsoid

$$V = \frac{4}{3} \pi a b c$$

Schwerpunkt  $S$ :

Mittelpunkt  $M$  des Ellipsoids



$a, b, c$ : Halbachsen des Ellipsoids

**Rotationsellipsoid ( $a = b$ )**Rotationsachse: Achse  $2c$ 

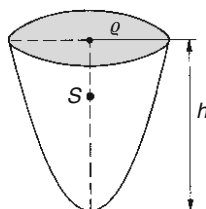
$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 c$$

**8.16 Rotationsparaboloid**

$$V = \frac{1}{2} \pi q^2 h$$

Schwerpunkt  $S$ :

Auf der Symmetrieachse im Abstand

 $\frac{2}{3} h$  vom Scheitelpunkt $q$ : Radius der kreisförmigen Grundfläche $h$ : Höhe des Rotationsparaboloids**8.17 Tonne oder Fass**

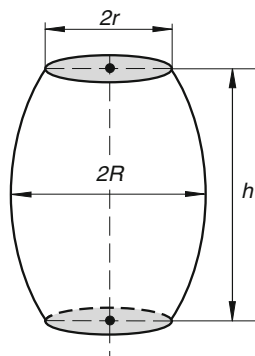
Der Rotationskörper wird erzeugt durch Drehung einer Kurve mit *sphärischer*, *elliptischer* oder *parabolischer* Krümmung. Die beiden parallelen Grundflächen sind Kreise vom Radius  $r$ .

**Sphärische oder elliptische Krümmung**

$$V = \frac{1}{3} \pi h (2R^2 + r^2)$$

**Parabolische Krümmung**

$$V = \frac{1}{15} \pi h (8R^2 + 4Rr + 3r^2)$$

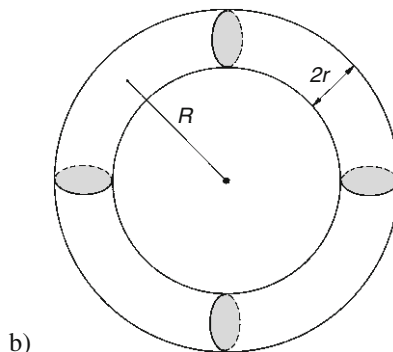
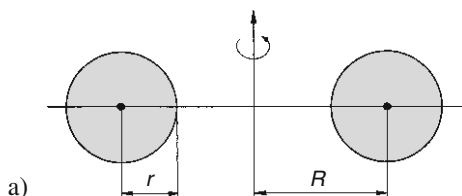


## 8.18 Torus

Die in Bild a) skizzierte Kreisfläche erzeugt bei Drehung um die eingezeichnete Achse den in Bild b) dargestellten *Torus* ( $r < R$ ).

$$V = 2\pi^2 r^2 R$$

$$O = 4\pi^2 r R$$



## 8.19 Guldinsche Regeln für Rotationskörper

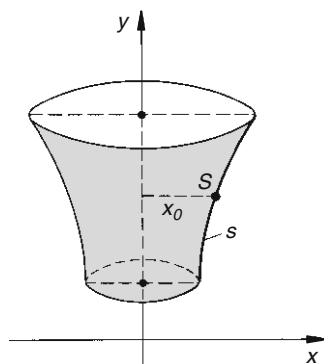
### Mantelfläche eines Rotationskörpers (1. Guldinsche Regel)

Die *Mantelfläche* eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der *Länge* der rotierenden Kurve, die diesen Körper erzeugt, und dem *Umfang* des Kreises, den der Schwerpunkt der Kurve bei der Rotation beschreibt:

$$M = s(2\pi x_0) = 2\pi x_0 s$$

$s$ : Länge der rotierenden Kurve

$x_0$ : Abstand des Schwerpunktes  $S$  der rotierenden Kurve von der Rotationsachse



### ■ Beispiel

Für den *Torus* gilt (siehe I.8.18):

$$s = 2\pi r \quad (\text{Umfang des rotierenden Kreises})$$

$$x_0 = R \quad (\text{Abstand Kreislinienschwerpunkt – Rotationsachse})$$

Somit ist

$$M = 2\pi x_0 s = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 r R$$

die Mantelfläche (Oberfläche) des Torus.

■

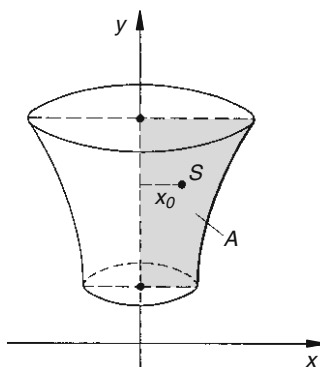
### Volumen eines Rotationskörpers (2. Guldinsche Regel)

Das *Volumen* eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem *Flächeninhalt* des rotierenden Flächenstücks, das diesen Körper erzeugt, und dem *Umfang* des Kreises, den der Schwerpunkt des Flächenstücks bei der Rotation beschreibt:

$$V = A (2\pi x_0) = 2\pi x_0 A$$

$A$ : Flächeninhalt des rotierenden Flächenstücks

$x_0$ : Abstand des Schwerpunktes  $S$  des rotierenden Flächenstücks von der Rotationsachse



#### ■ Beispiel

Für den *Torus* gilt (siehe I.8.18):

$$A = \pi r^2 \quad (\text{Fläche des rotierenden Kreises})$$

$$x_0 = R \quad (\text{Abstand Kreisflächenschwerpunkt} - \text{Rotationsachse})$$

Somit ist

$$V = 2\pi x_0 A = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R$$

das Volumen des Torus.

■

## 9 Koordinatensysteme

### 9.1 Ebene Koordinatensysteme

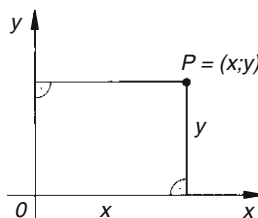
#### 9.1.1 Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten

Die beiden Koordinatenachsen stehen *senkrecht* aufeinander, die Lage des Punktes  $P$  wird durch zwei *Abstandskoordinaten*  $x$  und  $y$ , die sog. *rechtwinkligen* oder *kartesischen* Koordinaten, beschrieben:

$O$ : Ursprung, Nullpunkt

$x$ : Abszisse  
 $y$ : Ordinate } des Punktes  $P$

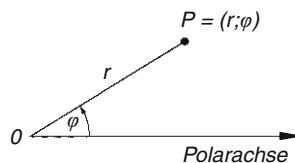
$x, y \in \mathbb{R}$



### 9.1.2 Polarkoordinaten

Die Lage des Punktes  $P$  wird durch eine *Abstandsordinate*  $r \geq 0$  und eine *Winkelordinate*  $\varphi$ , die sog. *Polarkoordinaten*, beschrieben (siehe hierzu auch XIV.6.1):

$O$ : Pol  
 $r$ : Abstand des Punktes  $P$  vom Pol  $O$   
 $\varphi$ : Winkel zwischen dem Strahl  $\overline{OP}$  und der Polarachse



Der Winkel  $\varphi$  wird *positiv* gemessen bei Drehung im *Gegenuhreigersinn*, *negativ* bei Drehung im *Uhrzeigersinn*. Er ist nur bis auf *ganzzahlige Vielfache* von  $2\pi$  bzw.  $360^\circ$  bestimmt. Man beschränkt sich daher bei der Winkelangabe meist auf den im Intervall  $0 \leq \varphi < 2\pi$  gelegenen *Hauptwert* (im *Gradmaß*:  $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ )<sup>4)</sup>. Für den Pol selbst ist  $r = 0$ , der Winkel  $\varphi$  dagegen ist *unbestimmt*.

### 9.1.3 Koordinatentransformationen

#### 9.1.3.1 Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems

Das *neue*  $u, v$ -System geht durch *Parallelverschiebung* aus dem *alten*  $x, y$ -System hervor:

$(x; y)$ : Koordinaten des Punktes  $P$  im *alten* System ( $x, y$ -System)

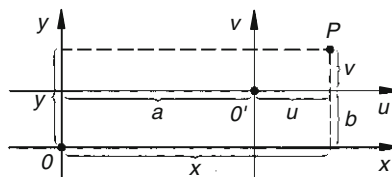
$(u; v)$ : Koordinaten des Punktes  $P$  im *neuen* System ( $u, v$ -System)

$(a; b)$ : Koordinaten des *Nullpunktes*  $O'$  des *neuen*  $u, v$ -Systems, bezogen auf das *alte*  $x, y$ -System

$a$ : Verschiebung der  $y$ -Achse ( $a > 0$ : nach *rechts*;  $a < 0$ : nach *links*)

$b$ : Verschiebung der  $x$ -Achse ( $b > 0$ : nach *oben*;  $b < 0$ : nach *unten*)

$$\begin{array}{ll} x = u + a & \text{bzw.} \quad u = x - a \\ y = v + b & \quad \quad \quad v = y - b \end{array}$$

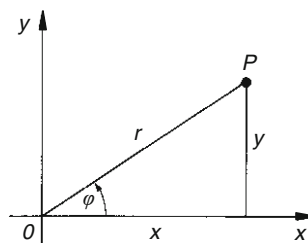


#### 9.1.3.2 Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Polarkoordinaten

*Bezeichnungen*

*Pol*: Koordinatenursprung  $O$

*Polarachse*:  $x$ -Achse



<sup>4)</sup> Unter dem *Hauptwert* wird häufig auch der im Intervall  $-\pi < \varphi \leq \pi$  gelegene Wert verstanden.

**Polarkoordinaten → Kartesische Koordinaten**

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi$$

**Kartesische Koordinaten → Polarkoordinaten**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r} \quad (x \neq 0)$$

Die Berechnung des Winkels  $\varphi$  erfolgt am bequemsten anhand einer *Lageskizze* (siehe nachfolgendes Beispiel) oder nach der folgenden vom jeweiligen Quadrant abhängigen Formel:

Quadrant	I	II, III	IV
$\varphi =$	$\arctan (y/x)$	$\arctan (y/x) + \pi$	$\arctan (y/x) + 2\pi$

*Sonderfall:*  $x = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$  für  $y > 0$ ,  $\varphi = 3\pi/2$  für  $y < 0$

■ **Beispiel**

*Gegeben:*  $P = (-4; 3)$ , d. h.  $x = -4$ ,  $y = 3$

*Gesucht:* Polarkoordinaten  $r$ ,  $\varphi$  des Punktes  $P$

*Lösung:* Der Punkt  $P$  liegt im 2. Quadrant. Aus dem eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten der Längen 3 und 4 und der Hypotenuse  $r$  berechnen wir der Reihe nach  $r$ , den *Hilfswinkel*  $\alpha$  und daraus  $\varphi$ :

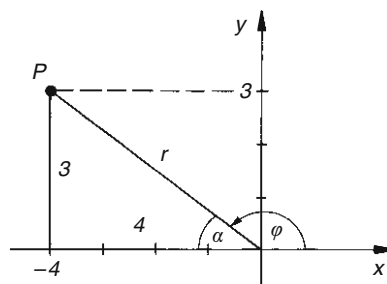
$$r = \sqrt{(4)^2 + 3^2} = 5$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{3}{4} = 36,87^\circ$$

$$\varphi = 180^\circ - \alpha = 143,13^\circ$$

Zu diesem Ergebnis führt auch die obige Formel:

$$\varphi = \arctan (y/x) + \pi = \arctan (3/-4) + \pi = \arctan (-3/4) + \pi = 2,4981 = 143,13^\circ$$

**9.1.3.3 Drehung eines kartesischen Koordinatensystems**

Das *neue*  $u, v$ -System geht durch *Drehung* um den Winkel  $\varphi$  um den Nullpunkt aus dem *alten*  $x, y$ -System hervor.

$(x; y)$ : Koordinaten des Punktes  $P$  im *alten* System

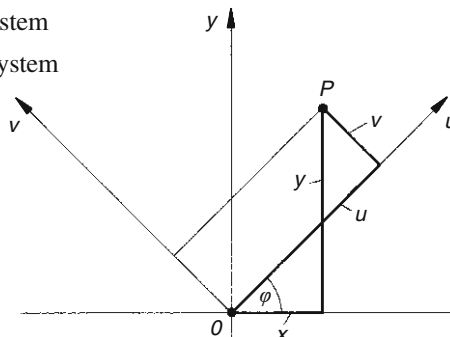
$(u; v)$ : Koordinaten des Punktes  $P$  im *neuen* System

$$u = y \cdot \sin \varphi + x \cdot \cos \varphi$$

$$v = y \cdot \cos \varphi - x \cdot \sin \varphi$$

$$x = u \cdot \cos \varphi - v \cdot \sin \varphi$$

$$y = u \cdot \sin \varphi + v \cdot \cos \varphi$$



## 9.2 Räumliche Koordinatensysteme

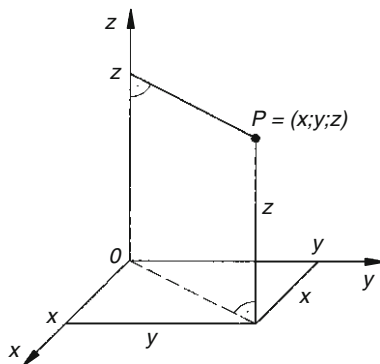
### 9.2.1 Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten

Die drei Koordinatenachsen ( $x$ ,  $y$ - und  $z$ -Achse) stehen *paarweise senkrecht* aufeinander und besitzen die *gleiche* Orientierung wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der *rechten Hand* (*rechtshändiges System*). Die Lage des Raumpunktes  $P$  wird durch drei *Abstands-kordinaten*  $x$ ,  $y$  und  $z$ , die sog. *rechtwinkligen* oder *kartesischen* Koordinaten, beschrieben:

$O$ : Ursprung, Nullpunkt  
 $x, y, z$ : Senkrechte Abstände des Punktes  $P$  von den drei Koordinatenebenen

$x, y, z \in \mathbb{R}$

$z$ : Höhenkoordinate

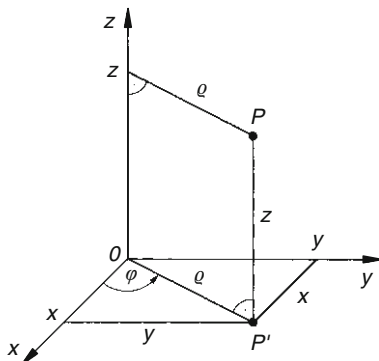


### 9.2.2 Zylinderkoordinaten

Die Lage des Raumpunktes  $P$  wird durch zwei *Abstands-kordinaten*  $\varrho, z$  und eine *Winkel-kordinate*  $\varphi$ , die sog. *Zylinderkoordinaten*, beschrieben (siehe hierzu auch XIV.6.2)<sup>5)</sup>:

$O$ : Ursprung, Nullpunkt  
 $\varrho, \varphi$ : Polarkoordinaten des Projektionspunktes  $P'$  in der  $x, y$ -Ebene ( $\varrho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ )  
 $z$ : Höhenkoordinate (entspricht der *kartesischen* Koordinate  $z$  mit  $z \in \mathbb{R}$ )

$\varrho$ : Senkrechter Abstand des Punktes  $P$  von der  $z$ -Achse



### 9.2.3 Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Zylinderkoordinaten

**Zylinderkoordinaten  $(\varrho; \varphi; z) \rightarrow$  Kartesische Koordinaten  $(x; y; z)$**

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin \varphi, \quad z = z$$

<sup>5)</sup> Statt  $\varrho$  verwendet man häufig auch  $r$  (wenn Verwechslungen mit der Kugelkoordinate  $r$  auszuschließen sind).



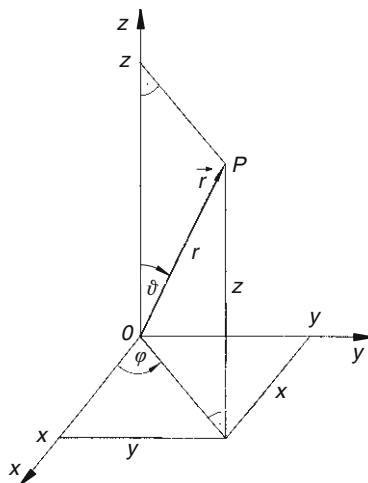
**Kartesische Koordinaten  $(x; y; z)$   $\rightarrow$  Zylinderkoordinaten  $(\varrho; \varphi; z)$**

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z \quad (x \neq 0)$$

*Sonderfall:*  $x = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$  für  $y > 0$ ,  $\varphi = 3\pi/2$  für  $y < 0$

### 9.2.4 Kugelkoordinaten

Die Lage des Raumpunktes  $P$  wird durch eine Abstandskoordinate  $r$  und zwei Winkelkoordinaten  $\vartheta$  und  $\varphi$ , die sog. *Kugelkoordinaten*, beschrieben (siehe hierzu auch XIV.6.3):



$O$ : Ursprung, Nullpunkt

$r$ : Abstand des Punktes  $P$  vom Nullpunkt (Länge des Ortsvektors  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ ;  $r \geq 0$ )

$\vartheta$ : Winkel zwischen dem Ortsvektor  $\vec{r}$  und der positiven  $z$ -Achse (*Breitenkoordinate* mit  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ )

$\varphi$ : Winkel zwischen der Projektion des Ortsvektors  $\vec{r}$  auf die  $x, y$ -Ebene und der positiven  $x$ -Achse (*Längenkoordinate* mit  $0 \leq \varphi < 2\pi$ )

### 9.2.5 Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Kugelkoordinaten

**Kugelkoordinaten  $(r; \vartheta; \varphi)$   $\rightarrow$  Kartesische Koordinaten  $(x; y; z)$**

$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cdot \cos \vartheta$$

**Kartesische Koordinaten  $(x; y; z)$   $\rightarrow$  Kugelkoordinaten  $(r; \vartheta; \varphi)$**

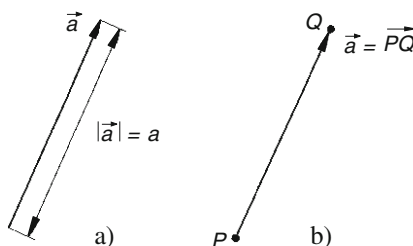
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arccos \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

## II Vektorrechnung

### 1 Grundbegriffe

#### 1.1 Vektoren und Skalare

*Vektoren* sind *gerichtete* Größen, die durch eine Maßzahl und eine Richtung vollständig beschrieben und in symbolischer Form durch einen Pfeil dargestellt werden (Bild a)). Die Länge des Pfeils heißt *Betrag*  $|\vec{a}| = a$  des Vektors  $\vec{a}$ , die Pfeilspitze legt die *Richtung* (Orientierung) des Vektors fest.



Ein Vektor  $\vec{a}$  lässt sich auch eindeutig durch einen *Anfangs-* und *Endpunkt* festlegen:  $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$  (Bild b)). Bei einer *physikalisch-technischen* Vektorgröße gehört zur vollständigen Beschreibung noch die Angabe der *Maßeinheit*.

*Skalare* dagegen sind Größen *ohne* Richtungseigenschaft. Sie sind durch Angabe einer *Maßzahl* (bzw. einer Maßzahl *und* einer Maßeinheit) eindeutig beschrieben.

In den Anwendungen unterscheidet man:

1. *Freie Vektoren*: Sie dürfen *parallel* zu sich selbst verschoben werden.
2. *Linienflüchtige Vektoren*: Sie sind längs ihrer *Wirkungslinie* verschiebbar.
3. *Gebundene Vektoren*: Sie werden von einem *festen* Punkt aus abgetragen.

#### 1.2 Spezielle Vektoren

*Nullvektor*  $\vec{0}$ : Vektor der Länge 0 (seine Richtung ist *unbestimmt*)

*Einheitsvektor*  $\vec{e}$ : Vektor der Länge 1

*Ortsvektor*  $\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP}$ : Vom Nullpunkt  $O$  zum Punkt  $P$  gerichteter Vektor

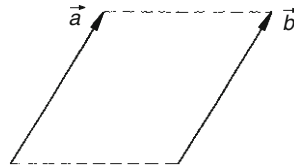
### 1.3 Gleichheit von Vektoren

Zwei Vektoren heißen *gleich*, wenn sie sich durch Parallelverschiebung zur *Deckung* bringen lassen. Sie stimmen in *Betrag* und *Richtung* und somit auch in ihren *Komponenten* überein (siehe II.2.1).

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$$

$a_x, a_y, a_z$ : Skalare Komponenten von  $\vec{a}$

$b_x, b_y, b_z$ : Skalare Komponenten von  $\vec{b}$

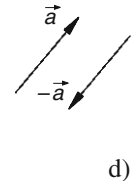
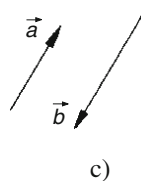
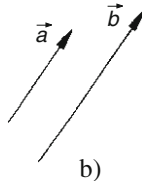
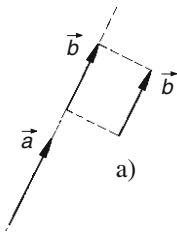


### 1.4 Kollineare, parallele und antiparallele Vektoren, inverser Vektor

*Kollineare* Vektoren lassen sich stets durch *Parallelverschiebung* in eine *gemeinsame Linie* bringen (Bild a)).

*Parallele* Vektoren haben *gleiche Richtung* (Bild b)). Symbolische Schreibweise:  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ .

*Antiparallele* Vektoren haben *entgegengesetzte Richtung* (Bild c)). Symbolische Schreibweise:  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ .



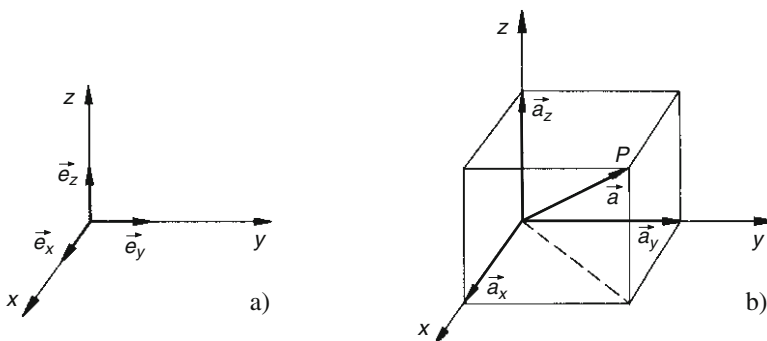
*Parallele* bzw. *anti-parallele* Vektoren sind demnach *kollinear*.

Zu jedem Vektor  $\vec{a}$  gibt es einen *inversen* oder *Gegenvektor*  $-\vec{a}$  (Bild d)). Er entsteht aus dem Vektor  $\vec{a}$  durch *Richtungsumkehr*. Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $-\vec{a}$  sind somit *gleichlang*, ihre Komponenten unterscheiden sich lediglich im *Vorzeichen*.

## 2 Komponentendarstellung eines Vektors

### 2.1 Komponentendarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem

Die *Einheitsvektoren*  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$ , auch *Basisvektoren* genannt, stehen paarweise *senkrecht* aufeinander und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (rechtshändiges System), d. h. sie haben *dieselbe* Orientierung wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der *rechten* Hand (Bild a)). Statt  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  verwendet man auch die Symbole  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  oder  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .



In diesem System besitzt ein Vektor  $\vec{a}$  die folgende *Komponentendarstellung* (Bild b))<sup>1)</sup>:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_x$ ,  $\vec{a}_y$ ,  $\vec{a}_z$ : Vektorkomponenten von  $\vec{a}$

$a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ : Vektorkoordinaten oder skalare Vektorkomponenten von  $\vec{a}$

$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ : Schreibweise in Form eines sog. *Spaltenvektors*

Schreibweise als *Zeilenvektor*:  $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)$

### 2.2 Komponentendarstellung spezieller Vektoren

Vektor  $\overrightarrow{P_1P_2}$ :  $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1) \vec{e}_x + (y_2 - y_1) \vec{e}_y + (z_2 - z_1) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$

Ortsvektor von P:  $\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

<sup>1)</sup> Bei *ebenen* Vektoren verschwindet die dritte Komponente.

*Nullvektor:*  $\vec{0} = 0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + 0\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

*Basisvektoren:*  $\vec{e}_x = 1\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + 0\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , analog:  $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

## 2.3 Betrag und Richtungswinkel eines Vektors

### Betrag (Länge) eines Vektors

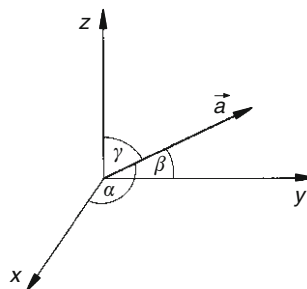
$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

### Richtungswinkel eines Vektors (Richtungskosinus)

Für die *Richtungswinkel*  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , die der Vektor  $\vec{a} \neq \vec{0}$  mit den drei Koordinatenachsen (Basisvektoren) bildet, gelten folgende Beziehungen:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



*Hinweis:* Für den *Nullvektor*  $\vec{0}$  lassen sich keine Richtungswinkel angeben.

*Umgekehrt* lassen sich die Vektorkoordinaten aus dem Betrag und den drei Richtungswinkeln (Richtungskosinus) des Vektors berechnen:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos \beta, \quad a_z = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma$$

### ■ Beispiel

Wir berechnen den *Betrag* und die drei *Richtungswinkel* des Vektors  $\vec{a} = 4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{45} = 6,71, \quad \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{45}} = 0,5963 \Rightarrow \alpha = 53,4^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{45}} = -0,2981 \Rightarrow \beta = 107,3^\circ, \quad \cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{45}} = 0,7454 \Rightarrow \gamma = 41,8^\circ$$

$$\text{Kontrolle: } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 0,5963^2 + (-0,2981)^2 + 0,7454^2 = 1$$

■

## 3 Vektoroperationen

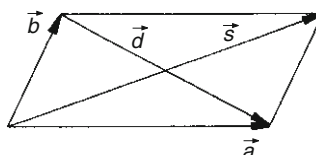
### 3.1 Addition und Subtraktion von Vektoren

#### Geometrische Darstellung

Addition und Subtraktion zweier Vektoren erfolgen nach der *Parallelogrammregel*.

$$\text{Summenvektor} \quad \vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

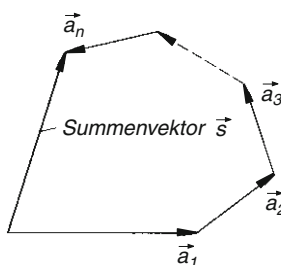
$$\text{Differenzvektor} \quad \vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$



*Differenzvektor:* Zu  $\vec{a}$  wird der *inverse* Vektor von  $\vec{b}$  addiert:  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .

Die Addition *mehrerer* Vektoren erfolgt nach der *Polygonregel* (*Vektorpolygon*).

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_n$$



*Hinweis:* Das Vektorpolygon liegt i. Allg. nicht in einer Ebene.

#### Komponentendarstellung

Addition und Subtraktion zweier Vektoren erfolgen *komponentenweise*:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

#### Rechenregeln

$$\text{Kommutativgesetz} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

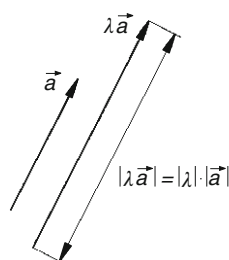
$$\text{Assoziativgesetz} \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

## 3.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

### Geometrische Darstellung

$\lambda \vec{a}$ : Vektor mit der Länge  $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$  und der Richtung oder Gegenrichtung des Vektors  $\vec{a}$ :

$$\begin{aligned} \lambda > 0: & \lambda \vec{a} \uparrow \vec{a} \\ \text{für } \lambda < 0: & \lambda \vec{a} \downarrow \vec{a} \\ \lambda = 0: & \lambda \vec{a} = \vec{0} \end{aligned}$$



### Komponentendarstellung

Die Multiplikation eines Vektors mit einem reellen Skalar erfolgt *komponentenweise*:

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

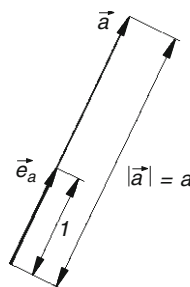
### Rechenregeln

$$\left. \begin{aligned} \text{Assoziativgesetz} \quad & \lambda(\mu \vec{a}) = \mu(\lambda \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a} \\ \text{Distributivgesetze} \quad & \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \\ & (\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a} \end{aligned} \right\} \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

### Normierung eines Vektors

Für den in Richtung des Vektors  $\vec{a} \neq \vec{0}$  weisenden *Einheitsvektor*  $\vec{e}_a$  gilt:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_y/|\vec{a}| \\ a_z/|\vec{a}| \end{pmatrix}, \quad |\vec{e}_a| = 1$$



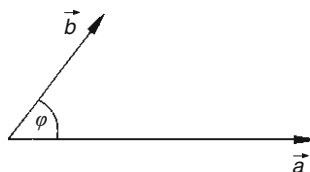
## 3.3 Skalarprodukt (inneres Produkt)

### Definition eines Skalarproduktes

Das *Skalarprodukt*  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist der wie folgt definierte *Skalar*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

$\varphi$ : Winkel zwischen den beiden Vektoren mit  
 $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$



### Skalarprodukt in der Komponentendarstellung

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

**Regel:** *Komponentenweise* multiplizieren, die Produkte aufaddieren.

*Spezialfälle*

$$(1) \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2$$

$$(2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| & \text{für } \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \\ -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| & \text{für } \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \end{cases}$$

(3) Die *Einheitsvektoren*  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  bilden eine *orthonormierte Basis*<sup>2)</sup>:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1, \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$$

### Rechenregeln

$$\text{Kommutativgesetz} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\text{Distributivgesetz} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\text{Assoziativgesetz} \quad \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

### Schnittwinkel zweier Vektoren

Den Schnittwinkel  $\varphi$  zweier vom Nullvektor verschiedener Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  berechnet man aus der folgenden Gleichung ( $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ ):

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

$$\cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rechter Winkel}$$

$$\cos \varphi > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{spitzer Winkel (stumpfer Winkel bei } \cos \varphi < 0)$$

#### ■ Beispiel

Wir bestimmen den *Schnittwinkel*  $\varphi$  der Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{51}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 - 2 + 15 = 18, \quad \cos \varphi = \frac{18}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{51}} = 0,6736$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \arccos 0,6736 = 47,7^\circ$$

<sup>2)</sup> Orthonormierte Vektoren sind *Einheitsvektoren*, die paarweise aufeinander *senkrecht* stehen.



### Orthogonalität zweier Vektoren

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  stehen genau dann *senkrecht* aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt *verschwindet*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

### Projektion eines Vektors auf einen zweiten Vektor

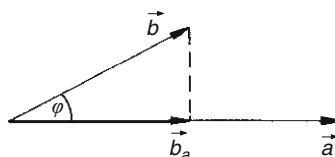
Durch Projektion des Vektors  $\vec{b}$  auf den Vektor  $\vec{a} \neq \vec{0}$  entsteht der Vektor

$$\vec{b}_a = \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{e}_a) \vec{e}_a$$

(Komponente von  $\vec{b}$  in Richtung  $\vec{a}$ ).

$\vec{e}_a$ : Einheitsvektor in Richtung von  $\vec{a}$  mit

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

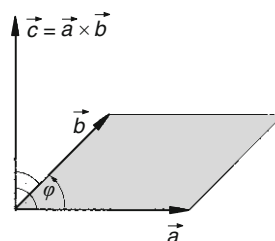


## 3.4 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)

### Definition eines Vektorproduktes

Das *Vektorprodukt*  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist der eindeutig bestimmte Vektor  $\vec{c}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (1)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$
- (2)  $\vec{c} \perp \vec{a}$  und  $\vec{c} \perp \vec{b}$   
( $\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ )
- (3)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ : Rechtssystem



$\varphi$ : Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  mit  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$

*Geometrische Deutung*: Der Betrag des Vektorproduktes  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  ist gleich dem *Flächeninhalt* des von den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten *Parallelogramms*:

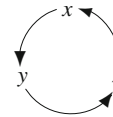
$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi \quad (0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$$

### Vektorprodukt in der Komponentendarstellung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

#### Anmerkung

Durch *zyklisches* Vertauschen der Indizes erhält man aus der ersten Komponente die zweite und aus dieser schließlich die dritte Komponente.



#### ■ Beispiel

Wir berechnen mit Hilfe des Vektorproduktes den *Flächeninhalt*  $A$  des von den Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  aufgespannten *Parallelogramms*:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 0 \\ 0 - 3 \\ 5 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{12^2 + (-3)^2 + 13^2} = 17,94$$

■

### Vektorprodukt in der Determinantenschreibweise

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Die Determinante lässt sich *formal* nach der Regel von *Sarrus* berechnen (siehe VII.2.2).

#### Spezialfälle

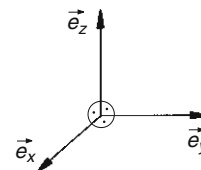
(1) Für *kollineare* Vektoren ist  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  und umgekehrt (*entartetes* Parallelogramm).

(2)  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(3) Für die Einheitsvektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  gilt (sie bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem):

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$



**Rechenregeln**

$$\text{Antikommutativgesetz} \quad \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\text{Distributivgesetze} \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$\text{Assoziativgesetz} \quad \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

**Kollineare Vektoren**

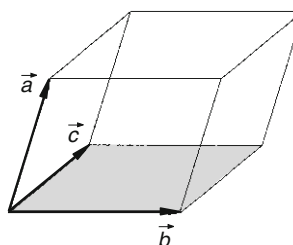
Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind genau dann *kollinear*, wenn ihr Vektorprodukt *verschwindet*:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \quad \text{oder} \quad \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$$

**3.5 Spatprodukt (gemischtes Produkt)****Definition eines Spatproduktes**

Das *Spatprodukt*  $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$  dreier Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  ist das *skalare* Produkt aus den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b} \times \vec{c}$ :

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$



Das Spatprodukt  $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$  ist *positiv*, wenn die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem* bilden, sonst *negativ*.

*Geometrische Deutung:* Der *Betrag* des Spatproduktes  $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$  ist das *Volumen* des von den Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aufgespannten *Spats* (auch *Parallelepiped* genannt):

$$V_{\text{Spat}} = |[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]|$$

**Spatprodukt in der Komponentendarstellung**

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x)$$

**Spatprodukt in der Determinantenschreibweise**

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

### Rechenregeln

- (1)  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  dürfen *zyklisch* vertauscht werden:  $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = [\vec{b} \vec{c} \vec{a}] = [\vec{c} \vec{a} \vec{b}]$
- (2) Vertauschen *zweier* Vektoren bewirkt einen *Vorzeichenwechsel* des Spatproduktes:  
z. B.  $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = -[\vec{a} \vec{c} \vec{b}]$  (die Vektoren  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  wurden vertauscht).

### Komplanare Vektoren

Drei Vektoren sind genau dann *komplanar*, wenn ihr Spatprodukt *verschwindet*:

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ sind komplanar (d. h. sie liegen in einer Ebene)}$$

#### ■ Beispiel

Das Spatprodukt der Vektoren aus  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$  verschwindet:

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ sind komplanar}$$

## 3.6 Formeln für Mehrfachprodukte

- (1) *Entwicklungssätze*:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

- (2)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

*Spezialfall*  $\vec{c} = \vec{a}$ ,  $\vec{d} = \vec{b}$ :

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b})^2 = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

## 4 Anwendungen

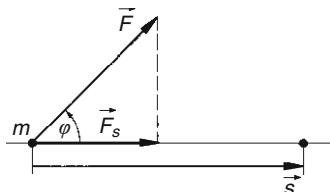
### 4.1 Arbeit einer konstanten Kraft

Eine *konstante* Kraft  $\vec{F}$  verrichtet beim Verschieben eines Massenpunktes  $m$  um den Vektor  $\vec{s}$  die folgende *Arbeit* (Skalarprodukt aus Kraft- und Verschiebungsvektor):

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi = F_s s$$

$F_s$ : Kraftkomponente in Wegrichtung

$s = |\vec{s}|$ : Verschiebung



## 4.2 Vektorielle Darstellung einer Geraden

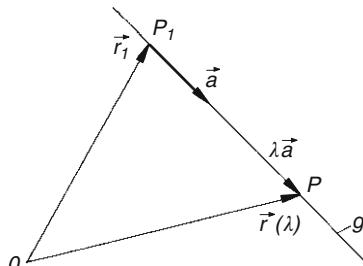
### 4.2.1 Punkt-Richtungs-Form

#### In der Parameterdarstellung

Gegeben: Ein Punkt  $P_1$  auf der Geraden  $g$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_1$  und ein Richtungsvektor  $\vec{a}$  der Geraden

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}$$

$\lambda$ : Parameter;  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;  $\vec{a} \neq \vec{0}$



#### ■ Beispiel

Die Vektorgleichung der durch den Punkt  $P_1 = (1; -2; 5)$  verlaufenden Geraden mit dem Richtungsvektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ lautet:}$$

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda \\ -2 - 4\lambda \\ 5 + 2\lambda \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

■

#### In der Determinantenschreibweise

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ : Einheitsvektoren (Basisvektoren)

$a_x, a_y, a_z$ : Skalare Vektorkomponenten des Richtungsvektors  $\vec{a}$

$x_1, y_1, z_1$ : Koordinaten des festen Punktes  $P_1$  der Geraden

$x, y, z$ : Koordinaten des laufenden Punktes  $P$  der Geraden

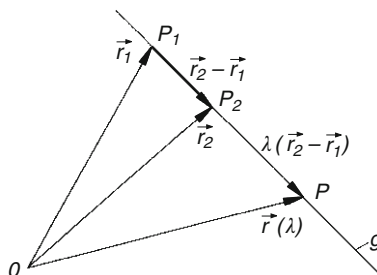
### 4.2.2 Zwei-Punkte-Form

Gegeben: Zwei verschiedene Punkte  $P_1$  und  $P_2$  auf der Geraden  $g$  mit den Ortsvektoren  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{r}_1 + \lambda (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$\lambda$ : Parameter;  $\lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ : Richtungsvektor der Geraden



■ **Beispiel**

Die Vektorgleichung der Geraden durch die beiden Punkte  $P_1 = (-1; 5; 0)$  und  $P_2 = (1; -3; 2)$  lautet:

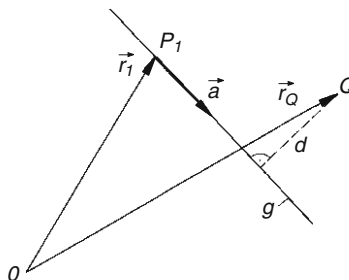
$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1+1 \\ -3-5 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2\lambda \\ 5-8\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

**4.2.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden**

*Gegeben:* Eine Gerade  $g$  mit der Gleichung  $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}$  und ein Punkt  $Q$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_Q$

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|}$$

$\vec{a}$ : Richtungsvektor der Geraden

■ **Beispiel**

Wir berechnen den Abstand  $d$  des Punktes  $Q = (1; 5; 3)$  von der Geraden mit der Vektorgleichung

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}:$$

$$\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-1 \\ 5-1 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-20 \\ 0+2 \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)| = \sqrt{(-17)^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{357}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$$

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{357}}{\sqrt{38}} = 3,065$$

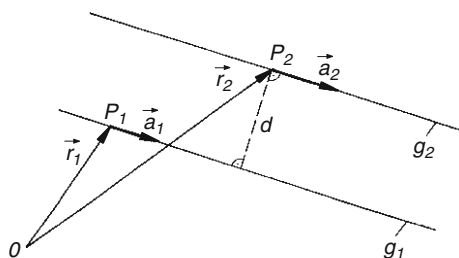
**4.2.4 Abstand zweier paralleler Geraden**

*Gegeben:* Zwei *parallele* Geraden  $g_1$  und  $g_2$  mit den Gleichungen

$$\vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 \quad \text{und}$$

$$\vec{r}(\lambda_2) = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

$$d = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|}$$



Die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  mit den Richtungsvektoren  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  sind genau dann *parallel*, wenn  $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{0}$  ist. In der Abstandsformel darf der Vektor  $\vec{a}_1$  durch den Vektor  $\vec{a}_2$  ersetzt werden.

■ **Beispiel**

$P_1 = (1; 0; 5)$  ist ein Punkt der Geraden  $g_1$ ,  $P_2 = (0; 2; 1)$  ein solcher der Geraden  $g_2$ . Der *gemeinsame* Richtungsvektor ist  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Wir bestimmen den Abstand  $d$  dieser *parallelen* Geraden:

$$\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ -1+8 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)| = \sqrt{(-6)^2 + 7^2 + 5^2} = \sqrt{110}, \quad |\vec{a}_1| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$d = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|} = \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{6}} = 4,282$$

■

**4.2.5 Abstand zweier windschiefer Geraden**

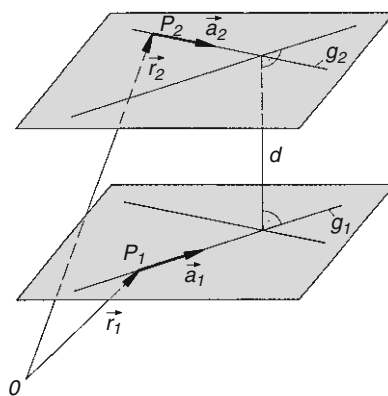
*Gegeben:* Zwei *windschiefe* Geraden  $g_1$  und  $g_2$  mit den Gleichungen

$$\vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 \quad \text{und}$$

$$\vec{r}(\lambda_2) = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

$$d = \frac{|[\vec{a}_1 \vec{a}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

Die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  sind genau dann *windschief* (d. h. nicht parallel und kommen nicht zum Schnitt), wenn die Bedingungen  $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}$  und  $[\vec{a}_1 \vec{a}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] \neq 0$  erfüllt sind.

■ **Beispiel**

$\vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{r}(\lambda_2) = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind die Gleichungen zweier *windschiefer* Geraden  $g_1$  und  $g_2$ , deren Abstand  $d$  wir berechnen wollen:

$$[\vec{a}_1 \vec{a}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2-5 & -1-2 & 0-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -8$$

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 9-1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{(-5)^2 + 8^2 + (-1)^2} = \sqrt{90}$$

$$d = \frac{|[\vec{a}_1 \vec{a}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \frac{|-8|}{\sqrt{90}} = 0,843$$

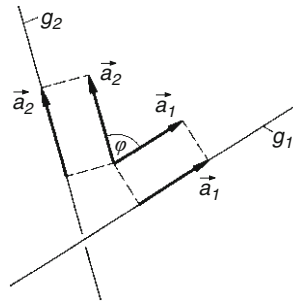
■

### 4.2.6 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

Unter dem Schnittwinkel  $\varphi$  zweier Geraden versteht man den Winkel zwischen den zugehörigen *Richtungsvektoren* (auch dann, wenn sich die Geraden *nicht* schneiden).

Gegeben: Zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  mit den Richtungsvektoren  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$

$$\varphi = \arccos \left( \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} \right)$$



Den Schnittpunkt  $S$  der Geraden  $g_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1$  und  $g_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$  erhält man durch *Gleichsetzen* der Ortsvektoren:

$$\vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

Diese Vektorgleichung führt (*komponentenweise* geschrieben) zu einem *linearen Gleichungssystem* mit drei Gleichungen und den beiden Unbekannten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Die (eindeutige) Lösung liefert die zum Schnittpunkt  $S$  gehörigen Parameterwerte. Den Ortsvektor  $\vec{r}_S$  des gesuchten Schnittpunktes  $S$  erhält man dann durch Einsetzen des Parameterwertes  $\lambda_1$  in die Gleichung der Geraden  $g_1$  (alternativ:  $\lambda_2$  in die Gleichung der Geraden  $g_2$  einsetzen).

#### ■ Beispiel

Die beiden Geraden  $g_1$  und  $g_2$  mit den Richtungsvektoren  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  schneiden sich unter dem folgenden Winkel:

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos \left( \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} \right) = \arccos \left( \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 5^2 + 3^2}} \right) = \\ &= \arccos 0,2168 = 77,5^\circ \end{aligned}$$

■

## 4.3 Vektorielle Darstellung einer Ebene

### 4.3.1 Punkt-Richtungs-Form

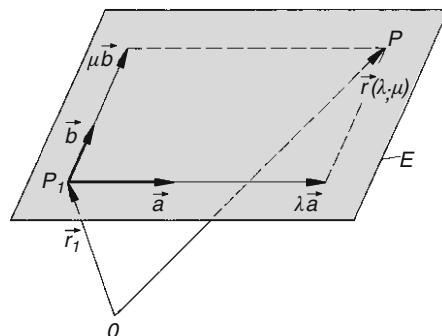
#### In der Parameterdarstellung

Gegeben: Ein Punkt  $P_1$  der Ebene  $E$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_1$  und zwei *nichtkollineare* Richtungsvektoren  $\vec{a} \neq \vec{0}$  und  $\vec{b} \neq \vec{0}$  der Ebene

$$\vec{r}(\lambda; \mu) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

$\lambda, \mu$ : Parameter;  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\vec{a} \times \vec{b}$ : Normalenvektor der Ebene





■ **Beispiel**

Eine Ebene  $E$  enthalte den Punkt  $P_1 = (1; 3; 5)$  und besitze die beiden Richtungsvektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Ihre Vektorgleichung lautet dann:

$$\vec{r}(\lambda; \mu) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 8\lambda + \mu \\ 3 + \lambda - 2\mu \\ 5 + 3\lambda + 4\mu \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

**In der Determinantenschreibweise**

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{matrix} a_x, a_y, a_z: \\ b_x, b_y, b_z: \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{Skalare Vektorkomponenten der Richtungsvektoren } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \end{array} \right.$   
 $x_1, y_1, z_1:$  Koordinaten des festen Punktes  $P_1$  der Ebene  
 $x, y, z:$  Koordinaten des *laufenden* Punktes  $P$  der Ebene

**4.3.2 Drei-Punkte-Form****In der Parameterdarstellung**

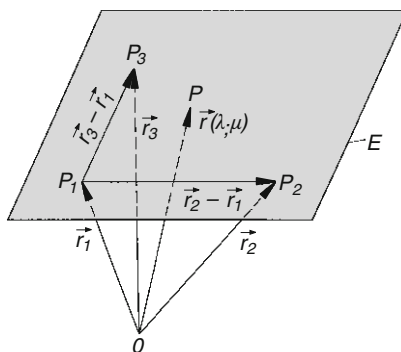
Gegeben: Drei *verschiedene* Punkte  $P_1, P_2$  und  $P_3$  der Ebene  $E$  mit den Ortsvektoren  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  und  $\vec{r}_3$

$$\begin{aligned} \vec{r}(\lambda; \mu) &= \vec{r}_1 + \lambda \overrightarrow{P_1 P_2} + \mu \overrightarrow{P_1 P_3} = \\ &= \vec{r}_1 + \lambda (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \mu (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \end{aligned}$$

$\lambda, \mu$ : Parameter;  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Die Ebene ist *eindeutig* bestimmt, wenn die drei Punkte *nicht* in einer Geraden liegen. Dies ist der Fall, wenn  $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \neq \vec{0}$  ist.

Die Vektoren  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  und  $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$  sind *Richtungsvektoren*, ihr Vektorprodukt ein *Normalenvektor* der Ebene.

■ **Beispiel**

Die Gleichung der Ebene durch die drei Punkte  $P_1 = (1; 1; 2)$ ,  $P_2 = (0; 4; -5)$  und  $P_3 = (-3; 4; 9)$  lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\lambda; \mu) &= \vec{r}_1 + \lambda (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \mu (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 4 - 1 \\ -5 - 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 - 1 \\ 4 - 1 \\ 9 - 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda - 4\mu \\ 1 + 3\lambda + 3\mu \\ 2 - 7\lambda + 7\mu \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

### In der Determinantenschreibweise

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

$x_i, y_i, z_i$ : Koordinaten des festen Punktes  $P_i$  der Ebene ( $i = 1, 2, 3$ )

$x, y, z$ : Koordinaten des *laufenden* Punktes der Ebene

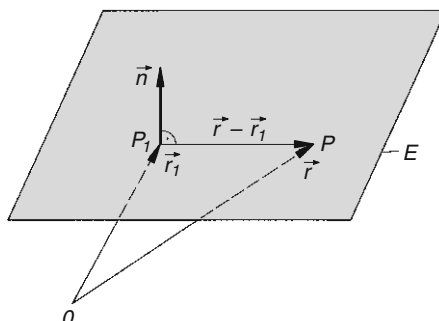
### 4.3.3 Ebene senkrecht zu einem Vektor

*Gegeben:* Ein Punkt  $P_1$  der Ebene  $E$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_1$  und ein *Normalenvektor*  $\vec{n}$  der Ebene (steht *senkrecht* auf der Ebene)

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r}_1$$

Koordinatendarstellung der Ebene:

$$ax + by + cz + d = 0$$



#### ■ Beispiel

Die Gleichung einer Ebene durch den Punkt  $P_1 = (10; -3; 2)$  und *senkrecht* zum Vektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  (*Normalenvektor*) lautet wie folgt:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 10 \\ y + 3 \\ z - 2 \end{pmatrix} = 2(x - 10) + 1(y + 3) + 5(z - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + y + 5z = 27$$

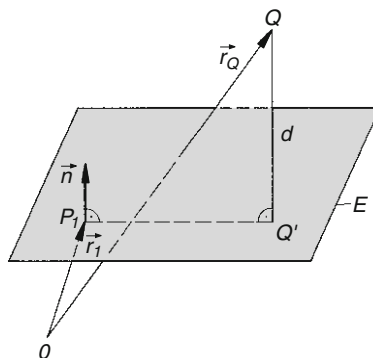
■

### 4.3.4 Abstand eines Punktes von einer Ebene

*Gegeben:* Eine Ebene  $E$  mit der Gleichung  $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$  und ein Punkt  $Q$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_Q$

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

$Q'$ : Fußpunkt des Lotes von  $Q$  auf die Ebene  $E$



■ **Beispiel**

Eine Ebene verläuft durch den Punkt  $P_1 = (3; 1; 8)$  und steht *senkrecht* zum Vektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Wir berechnen den Abstand  $d$  des Punktes  $Q = (1; 2; 0)$  von dieser Ebene:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-1 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 + 5 - 24 = -17$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{35}, \quad d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|} = \frac{|-17|}{\sqrt{35}} = 2,874$$

■

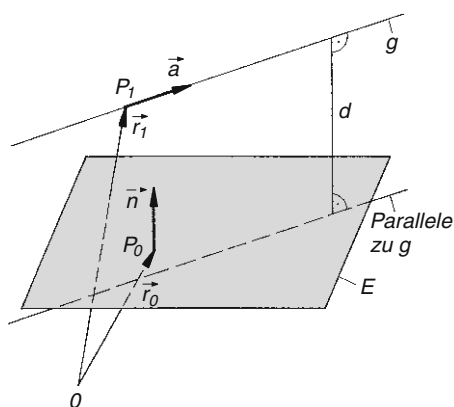
**4.3.5 Abstand einer Geraden von einer Ebene**

*Gegeben:* Eine Ebene  $E$  mit der Gleichung

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad \text{und eine zu dieser Ebene } \textit{parallele} \text{ Gerade } g \text{ mit der Gleichung } \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}$$

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|}$$

Eine Gerade mit dem Richtungsvektor  $\vec{a}$  verläuft genau dann *parallel* zu einer Ebene mit dem Normalenvektor  $\vec{n}$ , wenn das Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{n}$  *verschwindet*.

■ **Beispiel**

Die Ebene  $E$  verlaufe durch den Punkt  $P_0 = (1; 3; 2)$  und *senkrecht* zum Vektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,

die Gerade  $g$  gehe durch den Punkt  $P_1 = (0; 7; -3)$  und besitze den Richtungsvektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .  
Wegen

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 + 1 - 5 = 0$$

gilt  $g \parallel E$ . Wir berechnen den Abstand  $d$  zwischen Gerade und Ebene:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0-1 \\ 7-3 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = -2 - 4 - 25 = -31$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{30}, \quad d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|} = \frac{|-31|}{\sqrt{30}} = 5,660$$

■

### 4.3.6 Abstand zweier paralleler Ebenen

Gegeben: Zwei *parallele* Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  mit den Gleichungen

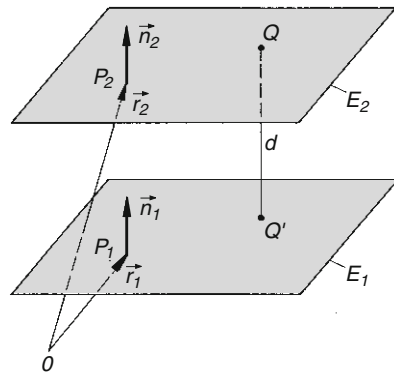
$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad \text{und}$$

$$\vec{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$$

$$d = \frac{|\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}_1|} = \frac{|\vec{n}_2 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}_2|}$$

$Q$ : Beliebiger Punkt der Ebene  $E_2$

$Q'$ : Fußpunkt des Lotes von  $Q$  auf die zweite Ebene  $E_1$



Zwei Ebenen sind genau dann *parallel*, wenn ihre Normalenvektoren  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  *kollinear* sind, d. h.  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$  ist.

#### ■ Beispiel

Ebene  $E_1$ :  $P_1 = (3; 1; -2)$ , Normalenvektor  $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ebene  $E_2$ :  $P_2 = (-4; 3; 0)$ , Normalenvektor  $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

Die Ebenen sind *parallel*, da  $\vec{n}_2 = -2\vec{n}_1$  und somit  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$  ist:

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = -2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{n}_1} = -2\vec{n}_1$$

Wir berechnen den Abstand  $d$  der Ebenen:

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3+4 \\ 1-3 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 14 + 2 - 8 = 8$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$d = \frac{|\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}_1|} = \frac{8}{\sqrt{21}} = 1,746$$

■

### 4.3.7 Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene

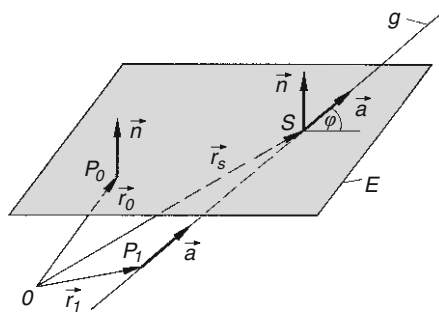
Gegeben: Eine Gerade  $g$  mit der Gleichung  $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}$  und eine Ebene  $E$  mit der Gleichung  $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

Ortsvektor des Schnittpunktes  $S$ :

$$\vec{r}_S = \vec{r}_1 + \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{\vec{n} \cdot \vec{a}} \vec{a}$$

Schnittwinkel  $\varphi$ :

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} \right)$$



Eine Gerade mit dem Richtungsvektor  $\vec{a}$  und eine Ebene mit dem Normalenvektor  $\vec{n}$  kommen genau dann zum *Schnitt*, wenn  $\vec{n} \cdot \vec{a} \neq 0$  ist.

#### ■ Beispiel

Gegeben sind eine Gerade  $g$  und eine Ebene  $E$ :

$$g: \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E: \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} = 0$$

Wir berechnen den *Schnittpunkt*  $S$  sowie den *Schnittwinkel*  $\varphi$ .

*Schnittpunkt*  $S$ :

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-0 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -2 + 1 - 3 = -4$$

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 4 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Gerade und Ebene schneiden sich}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_S = \vec{r}_1 + \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{\vec{n} \cdot \vec{a}} \vec{a} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{-4}{1} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-12 \\ 0+16 \\ 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow S = (-10; 16; 9) \end{aligned}$$

*Schnittwinkel*  $\varphi$ :

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} \right) = \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{26}} \right) = \arcsin 0,0801 = 4,6^\circ$$

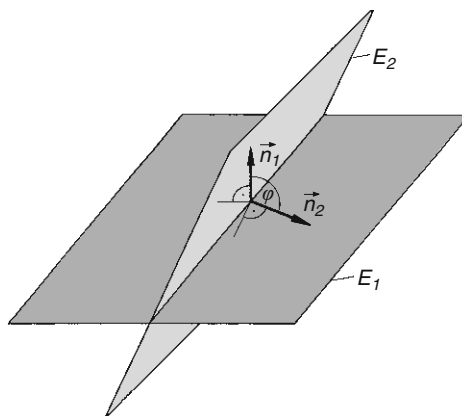
■

### 4.3.8 Schnittwinkel zweier Ebenen

Unter dem Schnittwinkel  $\varphi$  zweier Ebenen versteht man den Winkel zwischen den zugehörigen *Normalenvektoren* der beiden Ebenen.

*Gegeben:* Zwei Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  mit den Normalenvektoren  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$

$$\varphi = \arccos \left( \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right)$$



#### ■ Beispiel

Wir bestimmen den Schnittwinkel  $\varphi$  zweier Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  mit den Normalenvektoren

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} :$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 2 - 3 = 1$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{22}, \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\varphi = \arccos \left( \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right) = \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{6}} \right) = \arccos 0,0870 = 85,0^\circ$$

■

### 4.3.9 Schnittgerade zweier Ebenen

*Gegeben:* Zwei Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  mit den Vektorgleichungen  $\vec{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$  und  $\vec{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$

*Gleichung der Schnittgeraden  $g$*

$$g: \quad r(\lambda) = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

*Richtungsvektor:*  $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

Der *Ortsvektor*  $\vec{r}_0$  eines (noch unbekannten) Punktes  $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$  der Schnittgeraden  $g$  wird aus dem linearen Gleichungssystem

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = 0$$

$$\vec{n}_2 \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_2) = 0$$

bestimmt, wobei eine der drei Unbekannten  $x_0, y_0, z_0$  *frei wählbar* ist (z. B.  $x_0 = 0$  setzen).

# III Funktionen und Kurven

## 1 Grundbegriffe

### 1.1 Definition einer Funktion

Unter einer *Funktion* von *einer* Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem Element  $x \in D$  genau ein Element  $y \in W$  zuordnet. Symbolische Schreibweise:  $y = f(x)$ .

*Bezeichnungen*

- $x$ : *Unabhängige* Veränderliche (Variable) oder Argument
- $y$ : *Abhängige* Veränderliche (Variable) oder Funktionswert
- $D$ : Definitionsbereich der Funktion
- $W$ : Wertebereich oder Wertevorrat der Funktion

In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen sind  $x$  und  $y$  in der Regel *reelle* Variable,  $y = f(x)$  ist dann eine reellwertige Funktion der reellen Variablen  $x$ .

### 1.2 Darstellungsformen einer Funktion

#### 1.2.1 Analytische Darstellung

Die Funktion wird durch eine *Funktionsgleichung* dargestellt.

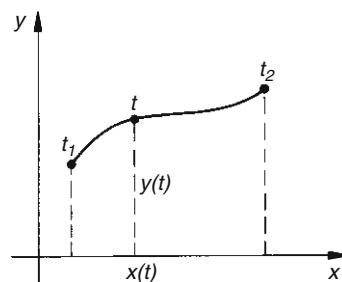
*Explizite* Form:  $y = f(x)$

*Implizite* Form:  $F(x; y) = 0$

#### 1.2.2 Parameterdarstellung

Die Variablen (Koordinaten)  $x$  und  $y$  hängen von einem (reellen) *Parameter*  $t$  ab, sind somit (stetige) Funktionen von  $t$ :

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} t_1 \leq t \leq t_2$$



### 1.2.3 Kurvengleichung in Polarkoordinaten

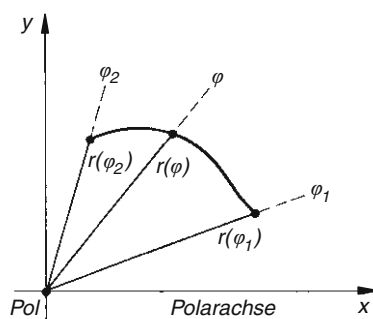
$$r = r(\varphi) \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2)$$

Pol: Koordinatenursprung

Polarachse:  $x$ -Achse

$\varphi$ : Polarwinkel

$r$ : Abstand vom Pol ( $r \geq 0$ )



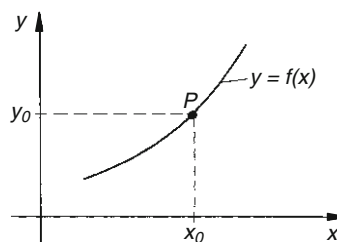
### 1.2.4 Graphische Darstellung

Die Funktion  $y = f(x)$  wird in einem rechtwinkligen Koordinatensystem durch eine Punktmenge dargestellt (*Funktionskurve*, *Schaubild* oder *Funktionsgraph* genannt). Dem Wertepaar  $(x_0; y_0)$  mit  $y_0 = f(x_0)$  entspricht dabei der Kurvenpunkt  $P = (x_0; y_0)$ .

$x_0, y_0$ : Kartesische Koordinaten von  $P$

$x_0$ : Abszisse  
 $y_0$ : Ordinate } von  $P$

Jede Parallele zur  $y$ -Achse schneidet die Kurve höchstens einmal.



## 2 Allgemeine Funktionseigenschaften

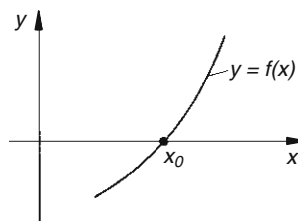
### 2.1 Nullstellen

*Schnitt- bzw. Berührungspunkte* der Funktionskurve mit der  $x$ -Achse:

$$f(x_0) = 0$$

*Doppelte* Nullstelle:

Berührungspunkt mit der  $x$ -Achse





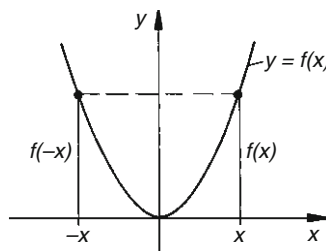
## 2.2 Symmetrie

### Gerade Funktion

Die Funktionskurve ist *spiegelsymmetrisch* zur y-Achse:

$$f(-x) = f(x)$$

(für alle  $x$  mit  $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$ )

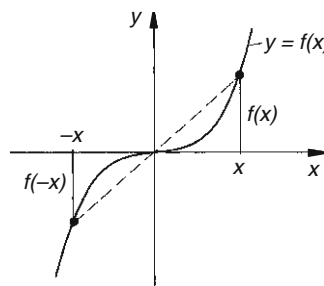


### Ungerade Funktion

Die Funktionskurve ist *punktsymmetrisch* zum Koordinatenursprung:

$$f(-x) = -f(x)$$

(für alle  $x$  mit  $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$ )

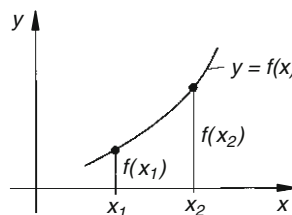


## 2.3 Monotonie

### Monoton wachsende Funktion

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

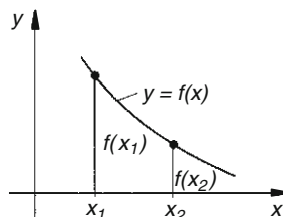
(für alle  $x_1, x_2 \in D$  mit  $x_1 < x_2$ )



### Monoton fallende Funktion

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

(für alle  $x_1, x_2 \in D$  mit  $x_1 < x_2$ )



Gilt nur das Zeichen  $<$  oder  $>$ , so heißt die Funktion *streng* monoton wachsend bzw. *streng* monoton fallend.

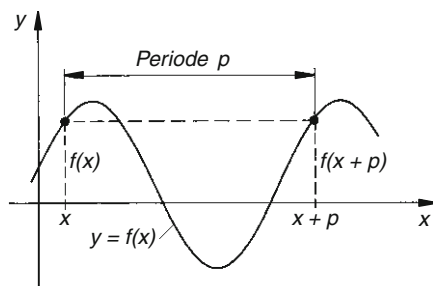
Viele Funktionen zeigen ein bestimmtes Monotonieverhalten nur in Teilintervallen ihres Definitionsbereiches.

## 2.4 Periodizität

Die Funktionswerte *wiederholen* sich, wenn man in der  $x$ -Richtung um eine *Periode*  $p$  fortschreitet:

$$f(x \pm p) = f(x)$$

(für alle  $x \in D$ )



Mit  $p$  ist auch  $\pm k \cdot p$  eine Periode der Funktion ( $k \in \mathbb{N}^*$ ). Die *kleinste* (positive) Periode heißt *primitive* Periode.

## 2.5 Umkehrfunktion (inverse Funktion)

### Definition

Eine Funktion  $y = f(x)$  heißt *umkehrbar*, wenn aus  $x_1 \neq x_2$  stets  $f(x_1) \neq f(x_2)$  folgt (zu *verschiedenen* Abszissen gehören *verschiedene* Ordinaten).

Die *Umkehrfunktion* von  $y = f(x)$  wird durch das Symbol  $y = f^{-1}(x)$  oder besser  $y = g(x)$  gekennzeichnet.

### Bestimmung der Funktionsgleichung der Umkehrfunktion

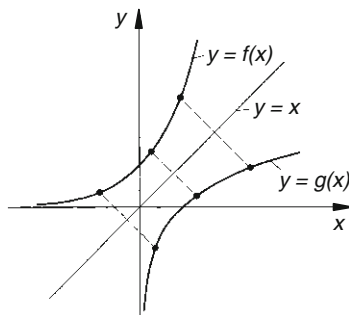
Jede *streng* monoton fallende oder wachsende Funktion ist *umkehrbar*. Bei der Umkehrung werden *Definitions-* und *Wertebereich* miteinander *vertauscht*. In vielen Fällen lässt sich die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion schrittweise wie folgt ermitteln:

1. Die Funktionsgleichung  $y = f(x)$  wird zunächst nach der Variablen  $x$  *aufgelöst*:  
 $x = g(y)^{1)}$ .
2. Durch formales *Vertauschen* der beiden Variablen erhält man hieraus die *Umkehrfunktion*  $y = g(x)$  von  $y = f(x)$ .

Die Rechenschritte dürfen auch in der umgekehrten Reihenfolge ausgeführt werden.

### Zeichnerische Konstruktion der Umkehrfunktion

Die Kurve  $y = f(x)$  wird Punkt für Punkt an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten, d. h. an der Geraden  $y = x$  *gespiegelt*.



<sup>1)</sup> Die Auflösung muß *möglich* und *eindeutig* sein.  $x = g(y)$  heißt auch „die nach  $x$  aufgelöste Form von  $y = f(x)$ “.

■ **Beispiel**

$$y = f(x) = \frac{x+2}{x}, \quad x \neq 0$$

Auflösen der Gleichung nach  $x$ :  $xy = x + 2 \Rightarrow xy - x = x(y - 1) = 2 \Rightarrow x = g(y) = \frac{2}{y-1}$

Vertauschen der beiden Variablen führt zur Umkehrfunktion:  $y = g(x) = \frac{2}{x-1}, \quad x \neq 1$

■

## 3 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

### 3.1 Grenzwert einer Folge

#### Definition einer Zahlenfolge

Unter einer (reellen) *Zahlenfolge* (kurz als Folge bezeichnet) versteht man eine *geordnete* Menge reeller Zahlen. Jeder positiven ganzen Zahl  $n$  wird dabei in eindeutiger Weise eine reelle Zahl  $a_n$  zugeordnet.

Symbolische Schreibweise:

$$\langle a_n \rangle = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$a_1, a_2, a_3, \dots$ : Glieder der Folge       $a_n$ : allgemeines Glied der Folge ( $n$ -tes Glied)

#### Grenzwert einer Zahlenfolge

Die reelle Zahl  $g$  heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Zahlenfolge  $\langle a_n \rangle$ , wenn es zu *jedem*  $\varepsilon > 0$  eine positive ganze Zahl  $n_0$  gibt, so dass für alle  $n \geq n_0$  stets  $|a_n - g| < \varepsilon$  ist.

Eine Folge  $\langle a_n \rangle$  heißt *konvergent*, wenn sie einen *Grenzwert*  $g$  hat. Symbolische Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

Eine Folge  $\langle a_n \rangle$ , die *keinen* Grenzwert besitzt, heißt *divergent*. Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.

■ **Beispiel**

Die Folge  $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  ist *konvergent* mit dem *Grenzwert*

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (\text{sog. Nullfolge}).$$

■

## 3.2 Grenzwert einer Funktion

### 3.2.1 Grenzwert für $x \rightarrow x_0$

Eine Funktion  $y = f(x)$  sei in einer Umgebung von  $x_0$  definiert. Gilt dann für *jede* im Definitionsbereich der Funktion liegende und gegen die Stelle  $x_0$  konvergierende Zahlenfolge  $\langle x_n \rangle$  mit  $x_n \neq x_0$  stets  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$ , so heißt  $g$  der *Grenzwert* von  $y = f(x)$  für  $x \rightarrow x_0$  (Grenzwert an der Stelle  $x_0$ ). Symbolische Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$$

Man beachte, dass die Funktion an der Stelle  $x_0$  *nicht* definiert sein muss. Der Grenzwert an dieser Stelle (Definitionsücke) kann trotzdem *vorhanden* sein.

■ **Beispiel**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

■

### 3.2.2 Grenzwert für $x \rightarrow \pm \infty$

Besitzt eine Funktion  $y = f(x)$  die Eigenschaft, dass die Folge ihrer Funktionswerte für *jede* über alle Grenzen hinaus wachsende Zahlenfolge  $\langle x_n \rangle$  ( $x_n \in D$ ) gegen eine Zahl  $g$  strebt, so heißt  $g$  der *Grenzwert* von  $y = f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  (Grenzwert im „Unendlichen“). Symbolische Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$$

Analog wird der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  erklärt.

■ **Beispiel**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\frac{1}{x} + x} \right) = 0$$

■

## 3.3 Rechenregeln für Grenzwerte

*Voraussetzung:* Alle auftretenden Grenzwerte sind vorhanden.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$$

(4)	$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$	(Voraussetzung: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ )
(5)	$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$	
(6)	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n$	
(7)	$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( a^{f(x)} \right) = a^{\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)}$	
(8)	$\lim_{x \rightarrow x_0} [\log_a f(x)] = \log_a \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)$	$(f(x) > 0)$

Diese Regeln gelten sinngemäß auch für Grenzübergänge vom Typ  $x \rightarrow +\infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$ .

### 3.4 Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital

Für Grenzwerte, die auf einen *unbestimmten Ausdruck* der Form  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$  führen, gilt die sog. *Bernoulli-de l'Hospital'sche Regel*:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*Voraussetzung:*  $f(x)$  und  $g(x)$  sind in einer Umgebung von  $x_0$  stetig differenzierbar und der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

#### Anmerkungen

- (1) In einigen Fällen ist die Regel *mehrmals* anzuwenden, ehe man zu einem Ergebnis kommt; es gibt jedoch auch Fälle, in denen die Regel *versagt*.
- (2) Die Regel gilt auch für Grenzübergänge vom Typ  $x \rightarrow \pm\infty$ .

#### ■ Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \rightarrow \frac{0}{0} \quad (\text{Zähler und Nenner streben beide gegen } 0)$$

*Regel von Bernoulli-de l'Hospital:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 \cdot \cos x) = 2 \cdot 1 = 2$$

■

Unbestimmte Ausdrücke der Form  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$  oder  $\infty^0$  lassen sich in vielen Fällen wie folgt durch *elementare Umformungen* auf den Typ  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$  zurückführen:

Funktion $\varphi(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$	Elementare Umformung
(A) $u(x) \cdot v(x)$	$0 \cdot \infty$	$\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}} \quad \text{oder} \quad \frac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}}$
(B) $u(x) - v(x)$	$\infty - \infty$	$\frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x) \cdot v(x)}}$
(C) $u(x)^{v(x)} \quad (u(x) > 0)$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$e^{v(x) \cdot \ln u(x)}$

#### ■ Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) \rightarrow 0 \cdot \infty \quad (\text{vom Vorzeichen abgesehen})$$

*Elementare Umformung* (Typ (A) mit  $u(x) = x$  und  $v(x) = \ln x$ ; 2. Version):

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

*Regel von Bernoulli-de L'Hospital:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

■

### 3.5 Stetigkeit einer Funktion

Eine in  $x_0$  und einer gewissen Umgebung von  $x_0$  definierte Funktion  $y = f(x)$  heißt an der Stelle  $x_0$  *stetig*, wenn der Grenzwert der Funktion für  $x \rightarrow x_0$  vorhanden ist und mit dem dortigen Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Eine Funktion, die an *jeder* Stelle ihres Definitionsbereiches *stetig* ist, heißt eine *stetige Funktion*.

Eine Funktion  $y = f(x)$  heißt an der Stelle  $x_0$  *unstetig*, wenn  $f(x_0)$  *nicht* vorhanden ist oder  $f(x_0)$  vom Grenzwert *verschieden* ist oder dieser *nicht* existiert. Es gibt dabei verschiedene Arten von Unstetigkeitsstellen (Lücken, Pole oder Unendlichkeitsstellen, Sprünge).

## 4 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)

### 4.1 Definition der ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

$n$ : Polynomgrad ( $n \in \mathbb{N}$ )

$a_0, a_1, \dots, a_n$ : Reelle Polynomkoeffizienten

Ganzrationale Funktionen oder Polynomfunktionen sind *überall* definiert und stetig. Sie werden in der Regel nach *fallenden* Potenzen geordnet (siehe hierzu III.4.5, Horner-Schema).

### 4.2 Lineare Funktionen (Geraden)

#### 4.2.1 Allgemeine Geradengleichung

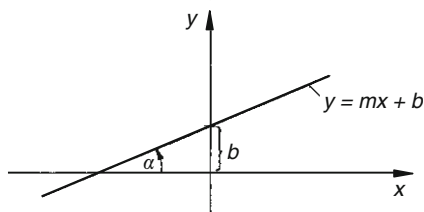
$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

#### 4.2.2 Hauptform einer Geraden

Gegeben: Steigung  $m$  und Achsenabschnitt  $b$  (Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse)

$$y = mx + b$$

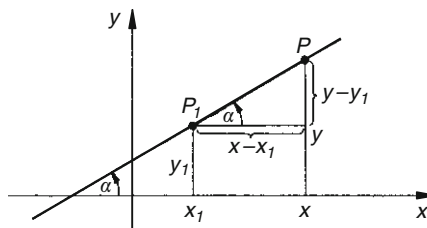
$m = \tan \alpha$  ( $\alpha$ : Steigungswinkel)



#### 4.2.3 Punkt-Steigungsform einer Geraden

Gegeben: Ein Punkt  $P_1 = (x_1; y_1)$  und die Steigung  $m$  oder der Steigungswinkel  $\alpha$  ( $m = \tan \alpha$ )

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

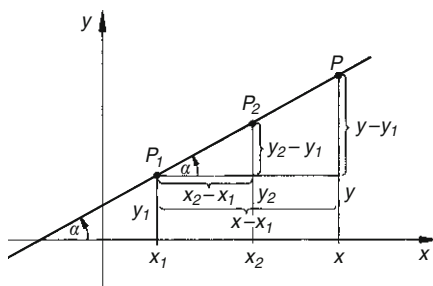


#### 4.2.4 Zwei-Punkte-Form einer Geraden

Gegeben: Zwei verschiedene Punkte

$$P_1 = (x_1; y_1) \text{ und } P_2 = (x_2; y_2)$$

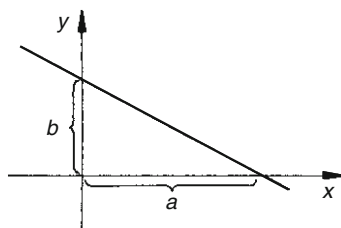
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$$



#### 4.2.5 Achsenabschnittsform einer Geraden

Gegeben: Achsenabschnitte  $a$  und  $b$  auf der  $x$ - und  $y$ -Achse

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

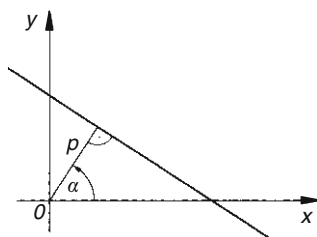


#### 4.2.6 Hessesche Normalform einer Geraden

Gegeben:  $p$ : Senkrechter Abstand des Nullpunktes  $O$  von der Geraden

$\alpha$ : Winkel zwischen dem Lot vom Nullpunkt  $O$  auf die Gerade und der positiven  $x$ -Achse

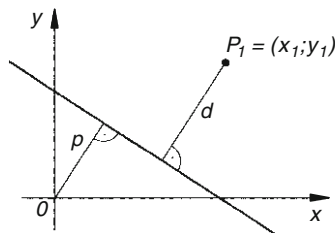
$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha = p$$



#### 4.2.7 Abstand eines Punktes von einer Geraden

Gegeben: Gerade  $Ax + By + C = 0$   
und ein Punkt  $P_1 = (x_1; y_1)$   
der Ebene

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$$





### 4.2.8 Schnittwinkel zweier Geraden

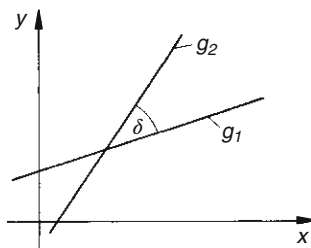
Gegeben: Zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  mit den Gleichungen  $y = m_1 x + b_1$  und  $y = m_2 x + b_2$

$$\tan \delta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \quad (0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ)$$

Voraussetzung:  $m_1 \cdot m_2 \neq -1$

Spezialfälle

- (1)  $g_1 \parallel g_2$ :  $m_1 = m_2$  und  $\delta = 0^\circ$
- (2)  $g_1 \perp g_2$ :  $m_1 \cdot m_2 = -1$  und  $\delta = 90^\circ$



## 4.3 Quadratische Funktionen (Parabeln)

Hinweis: Die nach rechts und links geöffneten Parabeln werden in III.13.5 behandelt.

### 4.3.1 Hauptform einer Parabel

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$a \neq 0$ : Öffnungsparameter

$a > 0$ : nach oben geöffnete Parabel

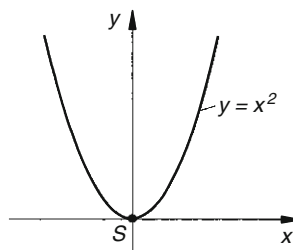
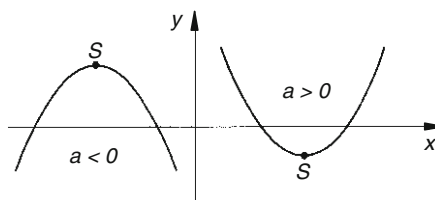
$a < 0$ : nach unten geöffnete Parabel

Scheitelpunkt:  $S = \left( -\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$

Spezialfall:  $a = 1, b = c = 0$

Normalparabel

$$y = x^2$$



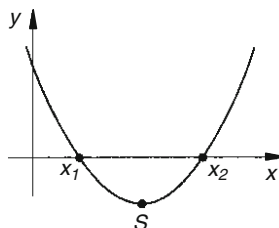
### 4.3.2 Produktform einer Parabel

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$a \neq 0$ : Öffnungsparameter

$x_1; x_2$ : Nullstellen der Parabel

$\left. \begin{array}{l} x - x_1 \\ x - x_2 \end{array} \right\}$ : Linearfaktoren



*Sonderfall:*  $x_1 = x_2 \Rightarrow y = a(x - x_1)^2$

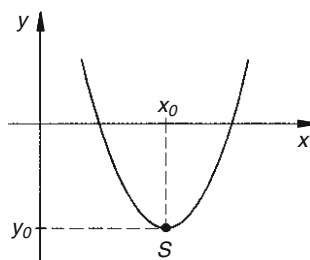
Die Parabel *berührt* die  $x$ -Achse im Scheitelpunkt  $S = (x_1; 0)$  („doppelte Nullstelle“).

### 4.3.3 Scheitelpunktform einer Parabel

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

$a \neq 0$ : Öffnungsparameter

$x_0, y_0$ : Koordinaten des Scheitelpunktes  $S$



## 4.4 Polynomfunktionen höheren Grades ( $n$ -ten Grades)

### 4.4.1 Abspaltung eines Linearfaktors

Ist  $x_1$  eine *Nullstelle* der Polynomfunktion  $f(x)$  vom Grade  $n$ , d. h.  $f(x_1) = 0$ , so ist  $f(x)$  in der Produktform

$$f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x)$$

darstellbar. Der Faktor  $(x - x_1)$  heißt *Linearfaktor*,  $f_1(x)$  ist das sog. *1. reduzierte Polynom* vom Grade  $n - 1$ .

### 4.4.2 Nullstellen einer Polynomfunktion

Eine Polynomfunktion  $n$ -ten Grades besitzt *höchstens*  $n$  *reelle* Nullstellen (*Fundamentalsatz der Algebra*, siehe hierzu auch VIII.4).

### 4.4.3 Produktdarstellung einer Polynomfunktion

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (a_n \neq 0)$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ : Nullstellen von  $f(x)$

Die Faktoren  $(x - x_1), (x - x_2), \dots, (x - x_n)$  heißen *Linearfaktoren*, die Produktdarstellung daher auch *Zerlegung der Polynomfunktion in Linearfaktoren*. Ist zum Beispiel  $x_1$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $f(x)$ , so tritt der Linearfaktor  $(x - x_1)$   $k$ -mal auf.

Ist die Anzahl  $k$  der (reellen) Nullstellen *kleiner* als der Polynomgrad  $n$ , so lautet die Zerlegung wie folgt:

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k) \cdot f^*(x) \quad (a_n \neq 0)$$

$f^*(x)$ : Polynomfunktion vom Grade  $n - k$  ohne (reelle) Nullstellen

#### ■ Beispiel

$$y = 3x^3 + 18x^2 + 9x - 30$$

Nullstellen:  $x_1 = -5, x_2 = -2, x_3 = 1$

Produktdarstellung:  $y = 3(x + 5)(x + 2)(x - 1)$

## 4.5 Horner-Schema

Für eine Polynomfunktion 3. Grades vom Typ

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_3 \neq 0)$$

erfolgt die Berechnung des Funktionswertes an der Stelle  $x_0$  nach dem folgenden Schema (*Horner-Schema*):

	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$x_0$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
		$a_3 x_0$	$(a_2 + a_3 x_0) x_0$	$(a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2) x_0$
	$a_3$	$a_2 + a_3 x_0$	$a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2$	$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3$
				$\underbrace{\hspace{10em}}_{f(x_0)}$

$\nearrow$ : Multiplikation mit  $x_0$

$\downarrow$ : Addition der in der 1. und 2. Zeile untereinander stehenden Werte

#### Anmerkungen

- (1) Das Horner-Schema gilt sinngemäß auch für Polynomfunktionen *höheren* Grades ( $n > 3$ ). Das Polynom muss dabei nach *fallenden* Potenzen geordnet sein.
- (2) *Fehlt* in der Funktionsgleichung eine Potenz, so ist im Horner-Schema der entsprechende Koeffizient gleich *Null* zu setzen!

#### ■ Beispiel

$$f(x) = 3,2x^3 - 2x^2 + 5,1x + 10, \quad f(2) = ?$$

	3,2	-2	5,1	10
$x_0 = 2$		6,4	8,8	27,8
	3,2	4,4	13,9	37,8

Ergebnis:  $f(2) = 37,8$

## 4.6 Reduzierung einer Polynomfunktion (Nullstellenberechnung)

Ist  $x_1$  eine Nullstelle von  $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , so gilt nach III.4.4.1:

$$f(x) = (x - x_1) f_1(x) = (x - x_1) (b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$$

Dabei ist  $f_1(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$  das 1. reduzierte Polynom von  $f(x)$ , dessen Koeffizienten man wie folgt aus dem *Horner-Schema* erhält:

	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$x_1$		$a_3 x_1$	$(a_2 + a_3 x_1) x_1$	$(a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2) x_1$
	$a_3$	$a_2 + a_3 x_1$	$a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2$	$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3$
	$b_2$	$b_1$	$b_0$	$f(x_1) = 0$

Die *restlichen* (reellen) Nullstellen von  $f(x)$  sind dann (falls überhaupt vorhanden), die Lösungen der *quadratischen* Gleichung  $f_1(x) = 0$ .

### Anmerkungen

- (1) Die Reduzierung einer Polynomfunktion 3. Grades setzt die Kenntnis *einer* Nullstelle  $x_1$  voraus. Diese lässt sich oft durch *Probieren*, *Erraten* oder durch *graphische* oder *numerische* Rechenverfahren ermitteln (siehe hierzu I.4.3, I.4.4 und I.4.5).
- (2) Bei Polynomfunktionen 4. und höheren Grades erfolgt die Nullstellenberechnung analog durch *mehrmalige* Reduzierung, bis man auf eine *quadratische* Gleichung stößt.
- (3) Bei der Reduzierung spielt die Reihenfolge, in der die Nullstellen bestimmt werden, *keine* Rolle. Die Produktdarstellung der Polynomfunktion ist davon *unabhängig*.

### ■ Beispiel

$$f(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 9$$

Durch *Probieren* findet man eine Nullstelle bei  $x_1 = 3$ . *Abspaltung* des zugehörigen Linearfaktors  $(x - 3)$  mit Hilfe des Horner-Schemas führt zu:

	-1	5	-3	-9
$x_1 = 3$		-3	6	9
	-1	2	3	0
	$b_2$	$b_1$	$b_0$	$f(3)$

1. reduziertes Polynom:  $f_1(x) = -x^2 + 2x + 3$

Weitere Nullstellen:  $-x^2 + 2x + 3 = 0$  oder  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = -1, x_3 = 3$

Produktdarstellung:  $f(x) = -(x - 3)(x + 1)(x - 3) = -(x - 3)^2(x + 1)$

■

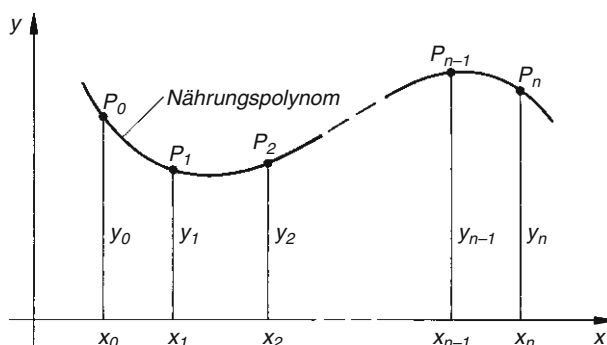
## 4.7 Interpolationspolynome

### 4.7.1 Allgemeine Vorbetrachtungen

Von einer *unbekannten* Funktion  $y = f(x)$  sind  $n + 1$  *verschiedene* Kurvenpunkte (sog. *Stützpunkte*) bekannt:

$$P_0 = (x_0; y_0), \quad P_1 = (x_1; y_1), \quad P_2 = (x_2; y_2), \quad \dots, \quad P_n = (x_n; y_n)$$

Die Abszissen  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  heißen *Stützstellen*, die zugehörigen Ordinaten  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  *Stützwerte*. Wir setzen dabei voraus, dass die Stützstellen  $x_i$  *paarweise* *voneinander verschieden* sind. Es gibt dann *genau eine* Polynomfunktion  $n$ -ten (oder auch niedrigeren) Grades, die durch diese Punkte verläuft.



Diese Näherungsfunktion wird als *Interpolationspolynom* bezeichnet, da man mit ihr z. B. beliebige *Zwischenwerte* der (unbekannten) Funktion im Intervall  $x_0 \leq x \leq x_n$  näherungsweise berechnen kann.

In der Praxis erweist sich der *direkte* Lösungsansatz

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

als *wenig* geeignet. Setzt man nämlich der Reihe nach die Koordinaten der  $n + 1$  Stützpunkte  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  in diesen Ansatz ein, so erhält man ein *lineares Gleichungssystem* mit  $n + 1$  Gleichungen und ebenso vielen unbekannten Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , das sich jedoch nur mit *erheblichem* Rechenaufwand (Gaußscher Algorithmus!) lösen lässt.

### 4.7.2 Interpolationsformel von Lagrange

Das *Lagrangesche* Interpolationspolynom durch  $n + 1$  *verschiedene* Punkte besitzt die Form

$$y = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + \dots + y_n \cdot L_n(x)$$

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ : Stützstellen

$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ : Stützwerte

$L_0(x), L_1(x), L_2(x), \dots, L_n(x)$ : Lagrangesche Koeffizientenfunktionen

Die *Lagrangesche Koeffizientenfunktionen*  $L_k(x)$  sind Polynome  $n$ -ten Grades und wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \dots (x_0 - x_n)} \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)} \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} \\ &\vdots \\ L_n(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

#### Anmerkungen

- (1) In der Koeffizientenfunktion  $L_k(x)$  fehlt genau der Faktor  $(x - x_k)$ . Der Nenner ist dabei stets der Wert des Zählers an der Stelle  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ).
- (2) *Nachteil* der Interpolationsformel von Lagrange (z. B. gegenüber der Newton-Interpolation, siehe III.4.7.3): Soll ein weiterer Stützpunkt hinzugenommen werden, um den Grad des Näherungspolynoms um 1 zu erhöhen, so müssen *sämtliche* Koeffizientenfunktionen *neu* berechnet werden.

#### ■ Beispiel

$k$	0	1	2	3
$x_k$	0	2	5	7
$y_k$	12	-16	-28	54

Das *Lagrangesche Näherungspolynom* durch diese vier Stützpunkte ist von *höchstens* 3. Grade.

*Lösungsansatz:*

$$y = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x)$$

*Bestimmung der Koeffizientenfunktionen:*

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 2)(x - 5)(x - 7)}{(0 - 2)(0 - 5)(0 - 7)} = -\frac{1}{70}(x^3 - 14x^2 + 59x - 70)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 5)(x - 7)}{(2 - 0)(2 - 5)(2 - 7)} = \frac{1}{30}(x^3 - 12x^2 + 35x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 2)(x - 7)}{(5 - 0)(5 - 2)(5 - 7)} = -\frac{1}{30}(x^3 - 9x^2 + 14x)$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 2)(x - 5)}{(7 - 0)(7 - 2)(7 - 5)} = \frac{1}{70}(x^3 - 7x^2 + 10x)$$

Näherungspolynom nach Lagrange:

$$y = 12 \cdot \left(-\frac{1}{70}\right) (x^3 - 14x^2 + 59x - 70) - 16 \cdot \left(\frac{1}{30}\right) (x^3 - 12x^2 + 35x) - \\ - 28 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) (x^3 - 9x^2 + 14x) + 54 \cdot \left(\frac{1}{70}\right) (x^3 - 7x^2 + 10x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 12$$

■

### 4.7.3 Interpolationsformel von Newton

Das *Newtonsche* Interpolationspolynom durch  $n + 1$  verschiedene Punkte besitzt die Form

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ : Stützstellen

$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ : Stützwerte

$P_k = (x_k; y_k)$ :  $k$ -ter Stützpunkt ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ )

Die Berechnung der Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  erfolgt zweckmäßigerweise nach dem sog. *Steigungs-* oder *Differenzenschema*:

$k$	$x_k$	$y_k$	I	II	III	
0	$x_0$	$y_0$				
1	$x_1$	$y_1$	$[x_0, x_1]$	$[x_0, x_1, x_2]$	$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	.....
2	$x_2$	$y_2$	$[x_1, x_2]$	$[x_1, x_2, x_3]$	.....	
3	$x_3$	$y_3$	$[x_2, x_3]$	.....		
⋮	⋮	⋮	.....			
⋮	⋮	⋮				
⋮	⋮	⋮				
⋮	⋮	⋮				
$n$	$x_n$	$y_n$				

Die Größen  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_0, x_1, x_2]$ ,  $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ ,  $\dots$  heißen *dividierte Differenzen* 1., 2., 3.,  $\dots$  Ordnung und sind wie folgt definiert:

### Dividierte Differenzen 1. Ordnung (Spalte I)

Sie werden aus *zwei* aufeinanderfolgenden Stützpunkten gebildet:

$$\begin{aligned}[x_0, x_1] &= \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \\ [x_1, x_2] &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\ &\vdots\end{aligned}$$

### Dividierte Differenzen 2. Ordnung (Spalte II)

Sie werden aus *drei* aufeinanderfolgenden Stützpunkten gebildet:

$$\begin{aligned}[x_0, x_1, x_2] &= \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2} \\ [x_1, x_2, x_3] &= \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3} \\ &\vdots\end{aligned}$$

### Dividierte Differenzen 3. Ordnung (Spalte III)

Sie werden aus *vier* aufeinanderfolgenden Stützpunkten gebildet:

$$\begin{aligned}[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{[x_0, x_1, x_2] - [x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3} \\ [x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{[x_1, x_2, x_3] - [x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_4} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Entsprechend sind die dividierten Differenzen *höherer* Ordnung definiert.

#### Anmerkung

*Vorteil* der Interpolationsformel von Newton (z. B. gegenüber der Lagrange-Interpolation, siehe III.4.7.2): Die Anzahl der Stützpunkte kann *beliebig* vergrößert (oder auch verkleinert) werden, *ohne* dass die Koeffizienten neu berechnet werden müssen (das Rechenschema ist nur entsprechend zu ergänzen).



■ **Beispiel**

$k$	0	1	2	3
$x_k$	0	2	5	7
$y_k$	12	-16	-28	54

Das *Newtonsche Näherungspolynom* durch diese vier Stützpunkte ist von *höchstens* 3. Grade.

*Lösungsansatz:*  $y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

*Berechnung der Koeffizienten nach dem Steigungs- oder Differenzenschema:*

$k$	$x_k$	$y_k$	I	II	III
			$a_0$		
0	0	12			
1	2	-16	-14		
2	5	-28	-4	2	
3	7	54	41	9	1

$$a_0 = 12, \quad a_1 = -14, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 1$$

*Näherungspolynom nach Newton:*

$$\begin{aligned}
 y &= 12 - 14(x - 0) + 2(x - 0)(x - 2) + 1 \cdot (x - 0)(x - 2)(x - 5) = \\
 &= 12 - 14x + 2x(x - 2) + x(x - 2)(x - 5) = \\
 &= 12 - 14x + 2x^2 - 4x + x(x^2 - 7x + 10) = \\
 &= 12 - 14x + 2x^2 - 4x + x^3 - 7x^2 + 10x = \\
 &= x^3 - 5x^2 - 8x + 12
 \end{aligned}$$

■

## 5 Gebrochenrationale Funktionen

### 5.1 Definition der gebrochenrationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (a_m \neq 0; b_n \neq 0)$$

$g(x)$ : Zählerpolynom vom Grade  $m$

$h(x)$ : Nennerpolynom vom Grade  $n$

$n > m$ : *Echt* gebrochenrationale Funktion (sonst *unecht* gebrochen)

*Definitionsbereich:*  $x \in \mathbb{R}$  mit Ausnahme der Nullstellen des Nennerpolynoms  $h(x)$

## 5.2 Nullstellen, Definitionslücken, Pole

### Nullstelle $x_0$

Es gilt  $f(x_0) = 0$ , d. h.  $g(x_0) = 0$  und  $h(x_0) \neq 0$ .

### Definitionslücke $x_0$

Der *Nenner* der gebrochenrationalen Funktion verschwindet an der Stelle  $x_0$ , also gilt  $h(x_0) = 0$ . Die *Definitionslücken* fallen daher mit den (reellen) Nullstellen des Nenners zusammen. Es gibt somit *höchstens*  $n$  (reelle) Definitionslücken, ermittelt aus der Gleichung  $h(x) = 0$ .

### Pol oder Unendlichkeitsstelle $x_0$

Ein *Pol*  $x_0$  ist eine Definitionslücke besonderer Art: Nähert man sich der Stelle  $x_0$ , so strebt der Funktionswert gegen  $+\infty$  oder  $-\infty$ . In einer Polstelle gilt somit  $h(x_0) = 0$  und  $g(x_0) \neq 0$ , falls Zähler und Nenner *keine* gemeinsamen Nullstellen haben (siehe auch weiter unten). Die in einem Pol errichtete Parallele zur y-Achse heißt *Polgerade* (*senkrechte Asymptote*). Verhält sich die Funktion bei Annäherung an den Pol von beiden Seiten her *gleichartig*, so liegt ein Pol *ohne* Vorzeichenwechsel, anderenfalls ein Pol *mit* Vorzeichenwechsel vor.

Ist  $x_0$  eine  $k$ -fache Nullstelle des Nennerpolynoms  $h(x)$ , so liegt ein *Pol  $k$ -ter Ordnung* vor:

$k = \text{gerade} \quad \Rightarrow \quad \text{Pol ohne Vorzeichenwechsel}$

$k = \text{ungerade} \quad \Rightarrow \quad \text{Pol mit Vorzeichenwechsel}$

### Berechnung der Nullstellen und Pole

1. Man zerlegt das Zähler- und Nennerpolynom jeweils in *Linearfaktoren* und kürzt (falls überhaupt vorhanden) *gemeinsame* Faktoren heraus.
2. Die im *Zähler* verbliebenen Linearfaktoren liefern dann die *Nullstellen*, die im *Nenner* verbliebenen Linearfaktoren die *Pole* der gebrochenrationalen Funktion.

Durch das Herauskürzen *gemeinsamer* Linearfaktoren können u. U. Definitionslücken *beho-*  
*ben* und somit der Definitionsbereich der Funktion *erweitert* werden.

#### ■ Beispiel

$$y = \frac{3x^4 - 12x^3 - 9x^2 + 42x - 24}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{3(x+2)(x-1)^2(x-4)}{(x-1)(x+1)^2} \quad (x \neq 1, -1)$$

Zähler und Nenner wurden in *Linearfaktoren* zerlegt, *gemeinsame* Linearfaktoren *herausgekürzt*:

$$y = \frac{3(x+2)(x-1)(x-4)}{(x+1)^2}$$

*Nullstellen:*  $x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 4$

*Pole:*  $x_4 = -1$  (Pol *ohne* Vorzeichenwechsel)

*Polgerade:*  $x = -1$  (Parallele zur y-Achse)

Die ursprünglich vorhandene Definitionslücke bei  $x = 1$  wurde somit *beho-*

■

### 5.3 Asymptotisches Verhalten im Unendlichen

#### Echt gebrochenrationale Funktion

Eine *echt* gebrochenrationale Funktion nähert sich im Unendlichen (d. h. für  $x \rightarrow \pm\infty$ ) stets der  $x$ -Achse:

Asymptote im Unendlichen:  $y = 0$

#### Unecht gebrochenrationale Funktion

Eine *unecht* gebrochenrationale Funktion  $f(x)$  wird zunächst durch *Polynomdivision* in eine *ganzrationale* Funktion (Polynomfunktion)  $p(x)$  und eine *echt* gebrochenrationale Funktion  $r(x)$  zerlegt:  $f(x) = p(x) + r(x)$ . Im *Unendlichen* verschwindet  $r(x)$  und die Funktion  $f(x)$  nähert sich daher *asymptotisch* der Polynomfunktion  $p(x)$ :

Asymptote im Unendlichen:  $y = p(x)$

#### ■ Beispiel

$$y = \frac{3x^4 - 12x^3 - 9x^2 + 42x - 24}{x^3 + x^2 - x - 1} \quad (\text{unecht gebrochenrationale Funktion})$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (3x^4 - 12x^3 - 9x^2 + 42x - 24) : (x^3 + x^2 - x - 1) = \underbrace{3x - 15}_{p(x)} + \underbrace{\frac{9x^2 + 30x - 39}{x^3 + x^2 - x - 1}}_{r(x)} \\ -(3x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x) \\ \hline -15x^3 - 6x^2 + 45x - 24 \\ -(-15x^3 - 15x^2 + 15x + 15) \\ \hline 9x^2 + 30x - 39 \end{array}$$

Asymptote im Unendlichen:  $y = 3x - 15$

■

## 6 Potenz- und Wurzelfunktionen

### 6.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

#### Potenzfunktionen mit positiv-ganzzahligen Exponenten

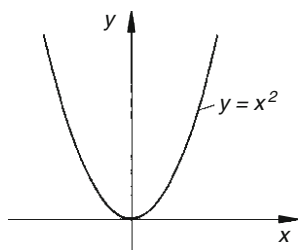
$$y = x^n, \quad -\infty < x < \infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

(„Parabel  $n$ -ter Ordnung“)

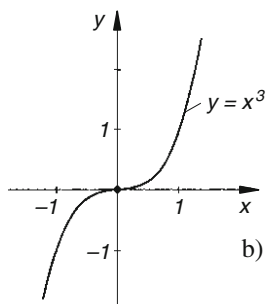
*Eigenschaften*

- (1) *Symmetrie:* Für *gerades*  $n$  erhält man *gerade* Funktionen (Bild a)), für *ungerades*  $n$  *ungerade* Funktionen (Bild b)).
- (2) *Nullstelle:*  $x_1 = 0$  ( $n$ -fache Nullstelle)

Bild a) zeigt die *gerade* Funktion  $y = x^2$  (*Normalparabel*), Bild b) die *ungerade* Funktion  $y = x^3$  (*kubische Parabel*).



a)



b)

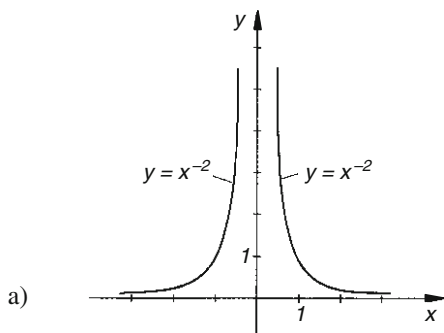
**Potenzfunktionen mit negativ-ganzzahligen Exponenten**

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

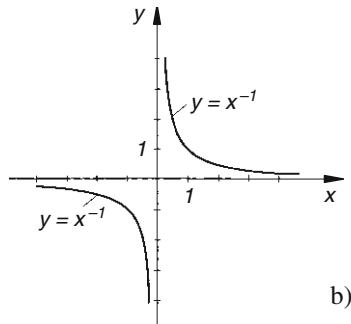
*Eigenschaften*

- (1) *Symmetrie:* Für *gerades*  $n$  erhält man *gerade* Funktionen (Bild a)), für *ungerades*  $n$  *ungerade* Funktionen (Bild b)).
- (2) *Pol:*  $x_1 = 0$  (Pol  $n$ -ter Ordnung)  
*Polgerade:*  $x = 0$  ( $y$ -Achse)
- (3) *Asymptote im Unendlichen:*  $y = 0$  ( $x$ -Achse)

Bild a) zeigt die *gerade* Funktion  $y = x^{-2}$ , Bild b) die *ungerade* Funktion  $y = x^{-1}$ .



a)



b)

## 6.2 Wurzelfunktionen

Die *Wurzelfunktionen*  $y = \sqrt[n]{x}$  sind die *Umkehrfunktionen* der auf das Intervall  $x \geq 0$  beschränkten *Potenzfunktionen*  $y = x^n$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ):

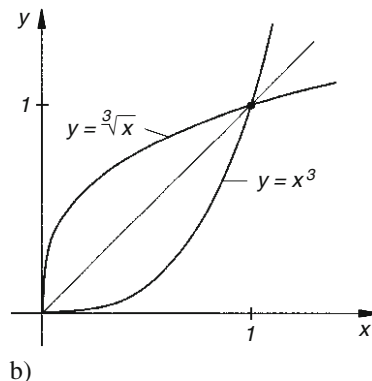
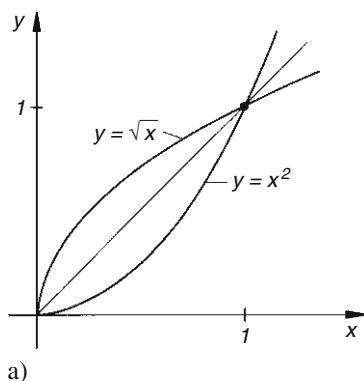
$$y = \sqrt[n]{x}, \quad x \geq 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

*Eigenschaften*

- (1) *Monotonie*: Streng monoton wachsend
- (2) *Nullstelle*:  $x_1 = 0$

Bild a) zeigt die *Wurzelfunktion*  $y = \sqrt{x}$  (Umkehrfunktion von  $y = x^2$ ,  $x \geq 0$ ),

Bild b) die *Wurzelfunktion*  $y = \sqrt[3]{x}$  (Umkehrfunktion von  $y = x^3$ ,  $x \geq 0$ ).



## 6.3 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

Unter einer *Potenzfunktion* mit *rationalem Exponenten* versteht man die *Wurzelfunktion*

$$y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}, \quad x > 0 \quad (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$$

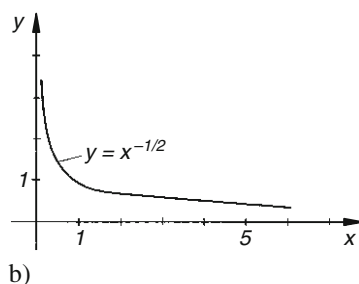
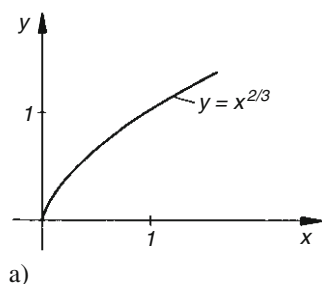
(„ $n$ -te Wurzel aus  $x^m$ “)

*Eigenschaften*

- (1) *Monotonie*: Bei *positivem* Exponenten streng monoton wachsend (Bild a)), bei *negativem* Exponenten streng monoton fallend (Bild b)).
- (2) *Definitionsbereich*:  $x > 0$ , bei *positivem* Exponenten  $x \geq 0$ .
- (3) Erweiterung auf *beliebige* reelle Exponenten  $a$ :

$$y = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \cdot \ln x} \quad (x > 0)$$

Bild a) zeigt die streng monoton *wachsende* Funktion  $y = x^{2/3}$  ( $x \geq 0$ ), Bild b) die streng monoton *fallende* Funktion  $y = x^{-1/2}$  ( $x > 0$ ).



## 7 Trigonometrische Funktionen

*Weitere Bezeichnungen:* Winkelfunktionen, Kreisfunktionen

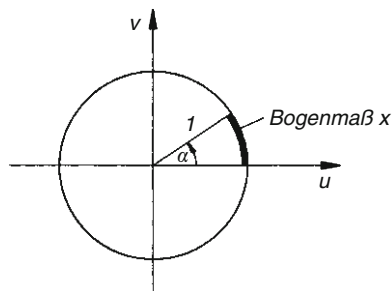
### 7.1 Winkelmaße

Winkel werden im *Grad-* oder *Bogenmaß* gemessen.

#### Bogenmaß eines Winkels

*Bogenmaß  $x$ :* Maßzahl der Länge des Kreisbogens, der im *Einheitskreis* dem Winkel  $\alpha$  gegenüberliegt<sup>2)</sup>.

Einer vollen Umdrehung entsprechen im *Gradmaß*  $360^\circ$  (Altgrad), im *Bogenmaß*  $2\pi$  rad (gelesen: Radiant)<sup>3)</sup>.



#### Umrechnung der Winkelmaße

Vom *Grad-* ins *Bogenmaß*:  $x = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha$

Vom *Bogen-* ins *Gradmaß*:  $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} x$

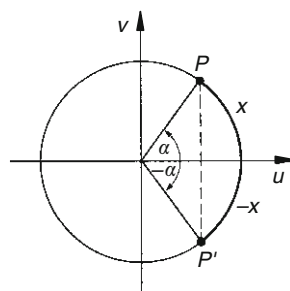
$1^\circ \approx 0,017453 \text{ rad}; \quad 1 \text{ rad} \approx 57,2958^\circ$

<sup>2)</sup> In einem beliebigen Kreis ist  $x$  das Verhältnis aus der Kreisbogenlänge  $b$  und dem Radius  $r$  ( $x = b/r$ ).

<sup>3)</sup> Neben dem *Altgrad* gibt es noch den *Neugrad*. Einer vollen Umdrehung entsprechen dabei 400 gon. Das *Bogenmaß* ist eine *dimensionslose* Größe, man lässt daher die Einheit rad meist weg.

### Drehsinn eines Winkels

Die Winkel erhalten wie folgt ein *Vorzeichen*: Im *Gegenuhrzeigersinn* überstrichene Winkel werden *positiv*, im *Uhrzeigersinn* überstrichene Winkel *negativ* gezählt.



## 7.2 Definition der trigonometrischen Funktionen

### Darstellung im rechtwinkligen Dreieck

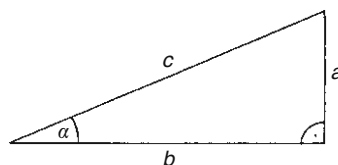
$\alpha$  ist ein *spitzer* Winkel in einem *rechtwinkligen* Dreieck ( $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ). Definitionsgemäß gilt dann:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$$



$a, b$ : Katheten  
 $c$ : Hypotenuse

### Darstellung im Einheitskreis

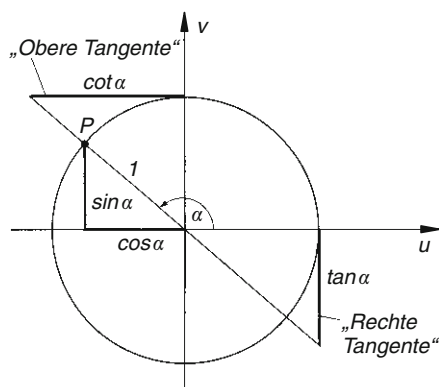
Für einen *beliebigen* (positiven oder negativen) Winkel  $\alpha$  gilt definitionsgemäß ( $P$  ist dabei der zum Winkel  $\alpha$  gehörende Kreis-punkt):

$$\sin \alpha = \text{Ordinate von } P$$

$$\cos \alpha = \text{Abszisse von } P$$

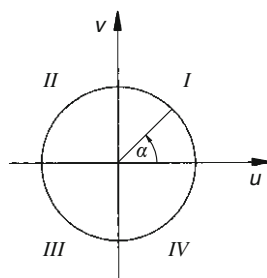
$$\tan \alpha = \text{Abschnitt auf der „rechten Tangente“}$$

$$\cot \alpha = \text{Abschnitt auf der „oberen Tangente“}$$

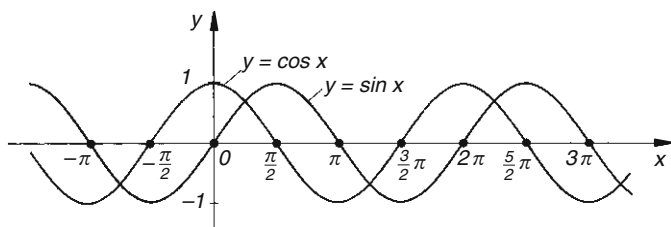


**Quadrantenregel (Vorzeichenregel)**

Quadrant	I	II	III	IV
Sinus	+	+	−	−
Kosinus	+	−	−	+
Tangens	+	−	+	−
Kotangens	+	−	+	−

**7.3 Sinus- und Kosinusfunktion**

Die *trigonometrischen* Funktionen  $y = \sin x$  und  $y = \cos x$  zeigen den folgenden Verlauf ( $x$ : Winkel im *Bogenmaß*):

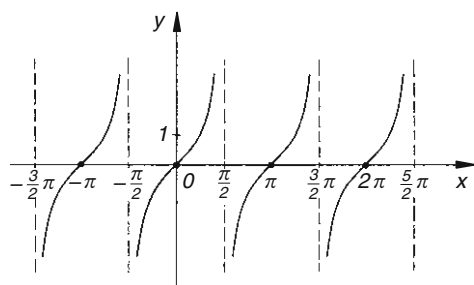


Eigenschaften ( $k \in \mathbb{Z}$ )	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$-1 \leq y \leq 1$	$-1 \leq y \leq 1$
Periode (primitive)	$2\pi$	$2\pi$
Symmetrie	ungerade	gerade
Nullstellen	$x_k = k \cdot \pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
Relative Maxima	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$	$x_k = k \cdot 2\pi$
Relative Minima	$x_k = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$	$x_k = \pi + k \cdot 2\pi$

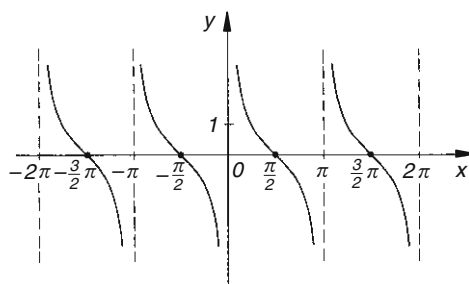


## 7.4 Tangens- und Kotangensfunktion

Die *trigonometrischen* Funktionen  $y = \tan x$  und  $y = \cot x$  zeigen den in den Bildern a) und b) dargestellten Verlauf ( $x$ : Winkel im *Bogenmaß*):



a)



b)

Eigenschaften ( $k \in \mathbb{Z}$ )	$y = \tan x$	$y = \cot x$
Definitionsbereich	$x \in \mathbb{R}$ mit Ausnahme der Stellen $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$x \in \mathbb{R}$ mit Ausnahme der Stellen $x_k = k \cdot \pi$
Wertebereich	$-\infty < y < \infty$	$-\infty < y < \infty$
Periode (primitive)	$\pi$	$\pi$
Symmetrie	ungerade	ungerade
Nullstellen	$x_k = k \cdot \pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
Pole	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$x_k = k \cdot \pi$
Senkrechte Asymptoten	$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$x = k \cdot \pi$

Beide Funktionen besitzen keine relativen Extremwerte.

## 7.5 Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen

### Zusammenhang zwischen $\sin x$ und $\cos x$

$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$	$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$
--	--

Der Kosinus läuft dem Sinus um  $\pi/2$  voraus, der Sinus läuft dem Kosinus um  $\pi/2$  hinterher.

**Trigonometrischer Pythagoras**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

**Weitere elementare Beziehungen**

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

**Umrechnungen zwischen den trigonometrischen Funktionen**

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x$	_____	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\cos x$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$	_____	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	_____	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	_____

Das Vorzeichen wird nach der *Quadrantenregel* bestimmt (siehe III.7.2).

**7.6 Trigonometrische Formeln****7.6.1 Additionstheoreme**

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2$$

$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \cdot \tan x_2}$$

$$\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot x_1 \cdot \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1}$$

### 7.6.2 Formeln für halbe Winkel

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

Das Vorzeichen wird nach der *Quadrantenregel* bestimmt (siehe III.7.2).

### 7.6.3 Formeln für Winkelvielfache

#### Formeln für doppelte Winkel

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

#### Formeln für dreifache Winkel

$$\sin(3x) = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$$

$$\cos(3x) = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x$$

$$\tan(3x) = \frac{3 \cdot \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \cdot \tan^2 x}$$

#### Formeln für $n$ -fache Winkel ( $n = 2, 3, 4, \dots$ )

$$\begin{aligned} \sin(nx) &= \binom{n}{1} \cdot \sin x \cdot \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^{n-3} x + \\ &\quad + \binom{n}{5} \cdot \sin^5 x \cdot \cos^{n-5} x - + \dots \end{aligned}$$

$$\cos(nx) = \cos^n x - \binom{n}{2} \cdot \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x + \binom{n}{4} \cdot \sin^4 x \cdot \cos^{n-4} x - + \dots$$

$\binom{n}{k}$ : Binomialkoeffizienten (siehe I.2.7)

**7.6.4 Formeln für Potenzen**

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)]$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4} [3 \cdot \sin x - \sin(3x)]$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8} [\cos(4x) - 4 \cdot \cos(2x) + 3]$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)]$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} [3 \cdot \cos x + \cos(3x)]$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} [\cos(4x) + 4 \cdot \cos(2x) + 3]$$

**7.6.5 Formeln für Summen und Differenzen**

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \cdot \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \cdot \cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

$$\cos x_1 + \cos x_2 = 2 \cdot \cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

$$\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \cdot \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

$$\tan x_1 \pm \tan x_2 = \frac{\sin(x_1 \pm x_2)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}$$

$$\sin(x_1 + x_2) + \sin(x_1 - x_2) = 2 \cdot \sin x_1 \cdot \cos x_2$$

$$\sin(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_2) = 2 \cdot \cos x_1 \cdot \sin x_2$$

$$\cos(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_2) = 2 \cdot \cos x_1 \cdot \cos x_2$$

$$\cos(x_1 + x_2) - \cos(x_1 - x_2) = -2 \cdot \sin x_1 \cdot \sin x_2$$

### 7.6.6 Formeln für Produkte

$$\sin x_1 \cdot \sin x_2 = \frac{1}{2} [\cos (x_1 - x_2) - \cos (x_1 + x_2)]$$

$$\cos x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} [\cos (x_1 - x_2) + \cos (x_1 + x_2)]$$

$$\sin x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} [\sin (x_1 - x_2) + \sin (x_1 + x_2)]$$

$$\tan x_1 \cdot \tan x_2 = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{\cot x_1 + \cot x_2}$$

## 7.7 Anwendungen in der Schwingungslehre

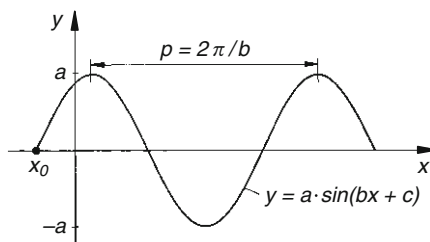
### 7.7.1 Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion

#### Allgemeine Sinusfunktion

$$y = a \cdot \sin (bx + c) \quad (a > 0, b > 0)$$

*Eigenschaften*

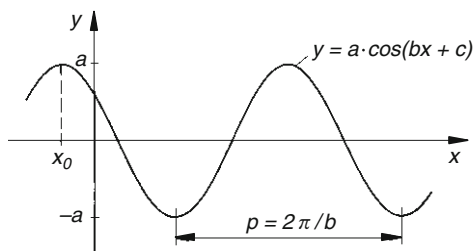
- (1) *Periode:*  $p = 2\pi/b$
- (2) *Wertebereich:*  $-a \leq y \leq a$
- (3) *Verschiebung auf der x-Achse*, bezogen auf die elementare Sinusfunktion  $y = \sin x$  („Startpunkt“):  $x_0 = -c/b$   
(für  $c > 0$  ist die Kurve nach *links*, für  $c < 0$  nach *rechts* verschoben)



#### Allgemeine Kosinusfunktion

$$y = a \cdot \cos (bx + c) \quad (a > 0, b > 0)$$

*Eigenschaften:* Ähnlich wie bei der allgemeinen Sinusfunktion (siehe oben)



## 7.7.2 Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)

### 7.7.2.1 Gleichung einer harmonischen Schwingung

Auslenkung  $y$  eines Federpendels (Feder-Masse-Schwingers) in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ :

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (A, \omega > 0)$$

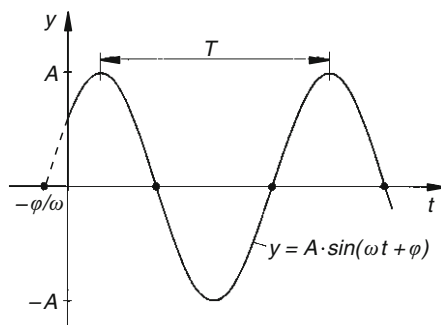
$A$ : Amplitude (maximale Auslenkung)

$\omega$ : Kreisfrequenz der Schwingung

$\varphi$ : Phase, Phasenwinkel oder Nullphasenwinkel

$T$ : Schwingungs- oder Periodendauer  
 $T = 2\pi/\omega$

$f$ : Frequenz,  $f = 1/T = \omega/(2\pi)$   
 $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$



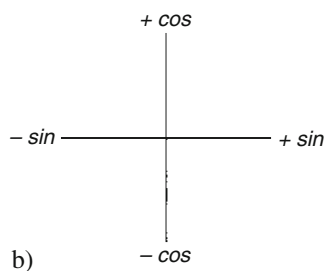
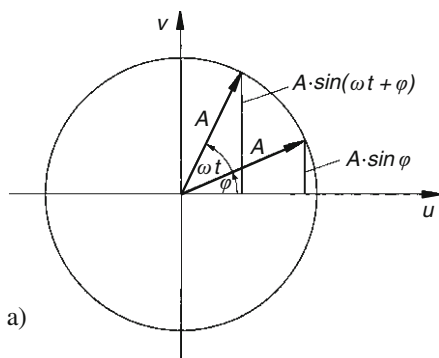
Eine in der *Kosinusform*  $y = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  dargestellte harmonische Schwingung lässt sich wie folgt in die Sinusform umschreiben:

$$y = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot \sin\left(\omega t + \underbrace{\varphi + \frac{\pi}{2}}_{\text{Nullphasenwinkel } \varphi^*}\right) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi^*)$$

**Regel:** Nullphasenwinkel  $\varphi$  um  $\pi/2$  vergrößern

### 7.7.2.2 Darstellung einer harmonischen Schwingung im Zeigerdiagramm

Eine *harmonische Schwingung*  $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$  lässt sich in einem *Zeigerdiagramm* durch einen *rotierenden Zeiger* der Länge  $A$  darstellen.<sup>4)</sup> Die Rotation erfolgt dabei aus der durch den Nullphasenwinkel  $\varphi$  eindeutig bestimmten Anfangslage heraus um den Nullpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  im *Gegenuhrzeigersinn*. Die Ordinate der Zeigerspitze entspricht dabei dem augenblicklichen Funktionswert der Schwingung (Bild a)).



<sup>4)</sup> Darstellung durch *komplexe* Zeiger: siehe VIII.8.1.

Bei der bildlichen Darstellung einer Schwingung im Zeigerdiagramm zeichnet man verabredungsgemäß nur die *Anfangslage* (Zeiger der Länge  $A$  unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die Horizontale). Lässt man auch einen *negativen* „Amplitudenfaktor“  $A$  zu, so gelten für das Abtragen der *unverschobenen* Schwingungen die folgenden Regeln ( $A < 0$  bedeutet eine *Vergrößerung* des Phasenwinkels um  $\pi$ , d. h. eine *zusätzliche* Drehung des Zeigers um  $180^\circ$  (Bild b)):

Schwingungstyp	$A > 0$	$A < 0$
$y = A \cdot \sin(\omega t)$	nach rechts abtragen	nach links abtragen
$y = A \cdot \cos(\omega t)$	nach oben abtragen	nach unten abtragen

Liegen die Schwingungen in der „phasenverschobenen“ Form  $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$  bzw.  $y = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  vor, so erfolgt eine *zusätzliche* Drehung um den Nullphasenwinkel  $\varphi$  (für  $\varphi > 0$  im *Gegenuhrzeigersinn*, für  $\varphi < 0$  im *Uhrzeigersinn*).

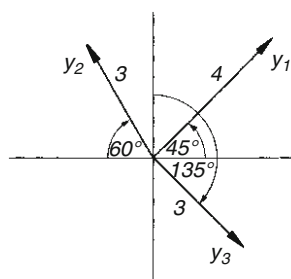
#### ■ Beispiel

Das nebenstehende Bild zeigt die Anfangslage der folgenden Zeiger:

$$y_1 = 4 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y_2 = -3 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y_3 = 3 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{3}{4}\pi\right)$$



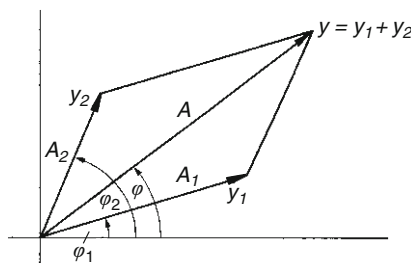
### 7.7.3 Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter harmonischer Schwingungen

Die *ungestörte Überlagerung* zweier *gleichfrequenter* harmonischer Schwingungen  $y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$  und  $y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$  führt zu einer resultierenden Schwingung der *gleichen* Frequenz (*Superpositionsprinzip der Physik*). Im Zeigerdiagramm werden die Zeiger von  $y_1$  und  $y_2$  nach der aus der Vektorrechnung bekannten *Parallelogrammregel* zu einem resultierenden Zeiger  $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$  zusammengesetzt. *Amplitude*  $A$  und *Nullphasenwinkel*  $\varphi$  können direkt abgelesen oder nach den folgenden Formeln berechnet werden ( $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$ ):

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2}{A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2}$$



#### Anmerkungen

- (1) Bei der Berechnung des Nullphasenwinkels  $\varphi$  aus der angegebenen Gleichung ist die Lage des resultierenden Zeigers zu berücksichtigen (Skizze anfertigen und Quadrant des Winkels bestimmen).

- (2) Die Formeln für Amplitude  $A$  und Phasenwinkel  $\varphi$  gelten auch dann, wenn *beide* Einzelschwingungen in der *Kosinusform* vorliegen. Die resultierende Schwingung ist dann ebenfalls eine (gleichfrequente) *Kosinusschwingung* vom Typ  $y = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ .

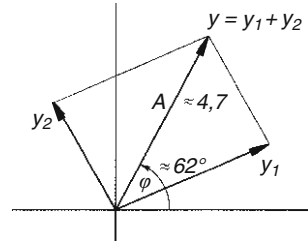
■ **Beispiel**

$$y_1 = 4 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right), \quad y_2 = 3 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$A_1 = 4, \quad A_2 = 3, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{8}, \quad \varphi_2 = \frac{2}{3}\pi$$

$$A = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{8}\right)} = 4,68$$

$$\tan \varphi = \frac{4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + 3 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 3 \cdot \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = 1,8806 \Rightarrow \varphi = \arctan 1,8806 = 1,082 = 62^\circ$$



Resultierende Schwingung:

$$y = y_1 + y_2 = 4,68 \cdot \sin(\omega t + 1,082)$$

■

## 8 Arkusfunktionen

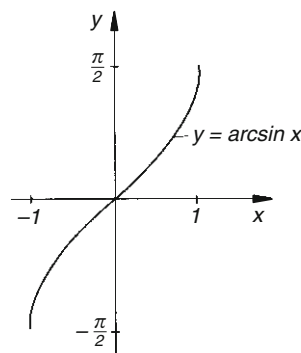
Die *Umkehrfunktionen* der auf bestimmte Intervalle beschränkten trigonometrischen Funktionen heißen *Arkus-* oder *zyklometrische Funktionen*. Die Intervalle müssen dabei so gewählt werden, dass die trigonometrischen Funktionen dort in streng monotoner Weise sämtliche Funktionswerte durchlaufen und somit *umkehrbar* sind. Der Funktionswert einer Arkusfunktion ist ein im Bogen- oder Gradmaß dargestellter *Winkel*.

### 8.1 Arkussinus- und Arkuskosinusfunktion

#### Arkussinusfunktion

$y = \arcsin x$  mit  $-1 \leq x \leq 1$  ist die *Umkehrfunktion* der auf das Intervall  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$  beschränkten Sinusfunktion.

Der Arkussinus liefert nur Winkel aus dem 1. und 4. Quadrant.

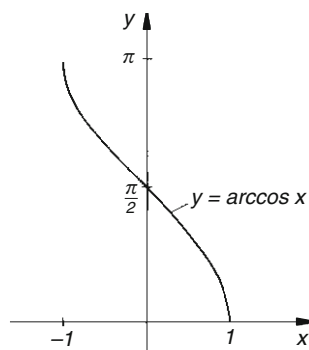




**Arkuskosinusfunktion**

$y = \arccos x$  mit  $-1 \leq x \leq 1$  ist die *Umkehrfunktion* der auf das Intervall  $0 \leq x \leq \pi$  beschränkten Kosinusfunktion.

Der Arkuskosinus liefert nur Winkel aus dem 1. und 2. Quadrant.

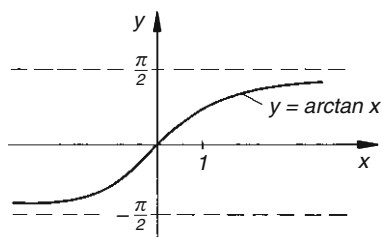


Eigenschaften	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$
Definitionsbereich	$-1 \leq x \leq 1$	$-1 \leq x \leq 1$
Wertebereich	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$0 \leq y \leq \pi$
Symmetrie <sup>5)</sup>	ungerade	
Nullstellen	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$
Monotonie	streng monoton wachsend	streng monoton fallend

**8.2 Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion****Arkustangensfunktion**

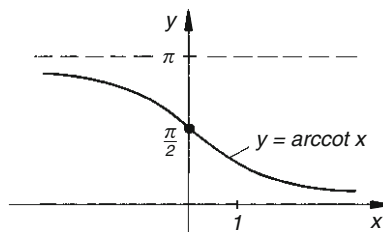
$y = \arctan x$  mit  $-\infty < x < \infty$  ist die *Umkehrfunktion* der auf das Intervall  $-\pi/2 < x < \pi/2$  beschränkten Tangensfunktion.

Der Arkustangens liefert nur Winkel aus dem 1. und 4. Quadrant.

**Arkuskotangensfunktion**

$y = \operatorname{arccot} x$  mit  $-\infty < x < \infty$  ist die *Umkehrfunktion* der auf das Intervall  $0 < x < \pi$  beschränkten Kotangensfunktion.

Der Arkuskotangens liefert nur Winkel aus dem 1. und 2. Quadrant.



<sup>5)</sup>  $y = \arccos x$  verläuft *punktsymmetrisch* zum Symmetriezentrum  $P = (0; \pi/2)$ .

Eigenschaften	$y = \arctan x$	$y = \operatorname{arccot} x$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$0 < y < \pi$
Symmetrie <sup>6)</sup>	ungerade	
Nullstellen	$x_1 = 0$	
Monotonie	streng monoton wachsend	streng monoton fallend
Asymptoten	$y = \pm \frac{\pi}{2}$	$y = 0, \quad y = \pi$

Die Berechnung der Funktionswerte von  $y = \operatorname{arccot} x$  erfolgt nach der Formel

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

### 8.3 Wichtige Beziehungen zwischen den Arkusfunktionen

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$$

$$\arcsin x = \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\arccos x = \operatorname{arccot} \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\operatorname{arccot} x = \begin{cases} \arctan (1/x) & x > 0 \\ \arctan (1/x) + \pi & x < 0 \end{cases} \quad \text{für}$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \pi/2$$

$$\arctan x = \arcsin \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$\operatorname{arccot} x = \arccos \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

#### Formeln für negative Argumente

$$\arcsin (-x) = -\arcsin x$$

$$\arctan (-x) = -\arctan x$$

$$\arccos (-x) = \pi - \arccos x$$

$$\operatorname{arccot} (-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$$

<sup>6)</sup>  $y = \operatorname{arccot} x$  verläuft *punktsymmetrisch* zum Symmetriezentrum  $P = (0; \pi/2)$ .

## 9 Exponentialfunktionen

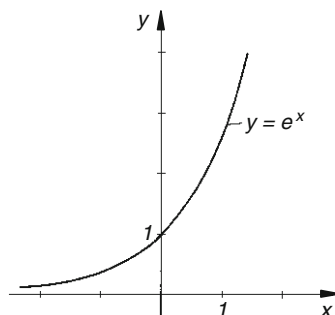
### 9.1 Definition der Exponentialfunktionen

#### e-Funktion (Basis e)

$$y = e^x, \quad -\infty < x < \infty$$

Basis: Eulersche Zahl e

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718\,281 \dots$$



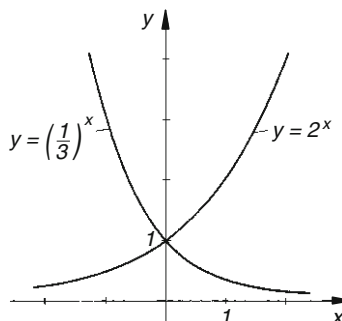
#### Allgemeine Exponentialfunktion (Basis a)

$$y = a^x, \quad -\infty < x < \infty$$

(Basis  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ )

Das Bild zeigt die Exponentialfunktionen  $y = 2^x$  (streng monoton *wachsend*) und

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  (streng monoton *fallend*).



$y = a^x$  ist auch als e-Funktion darstellbar:

$$y = a^x = e^{\lambda x} \quad (\lambda = \ln a)$$

#### Eigenschaften

- (1) *Definitionsbereich:*  $-\infty < x < \infty$
- (2) *Wertebereich:*  $0 < y < \infty$  (keine Nullstellen!)
- (3) *Monotonie:*  $\lambda > 0$  (d. h.  $a > 1$ ): Streng monoton *wachsend*  
 $\lambda < 0$  (d. h.  $0 < a < 1$ ): Streng monoton *fallend*
- (4) *Asymptote:*  $y = 0$  (x-Achse)
- (5)  $y(0) = 1$  (alle Kurven schneiden die y-Achse bei  $y = 1$ )
- (6)  $y = a^{-x}$  entsteht durch *Spiegelung* von  $y = a^x$  an der y-Achse.

## 9.2 Spezielle Exponentialfunktionen aus den Anwendungen

In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen treten Exponentialfunktionen meist in der *zeitabhängigen* Form auf, z. B. bei *Abkling-* und *Sättigungsfunktionen* ( $t$ : Zeit).

### 9.2.1 Abklingfunktion

$$y = a \cdot e^{-\lambda t} + b$$

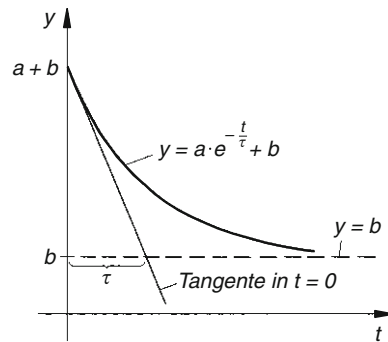
oder

$$y = a \cdot e^{-t/\tau} + b$$

$$(a > 0, \lambda > 0, \tau > 0; t \geq 0)$$

*Eigenschaften*

- (1) Streng monoton *fallende* Funktion.
- (2) *Asymptote* für  $t \rightarrow \infty$ :  $y = b$
- (3) *Tangente* in  $t = 0$  schneidet die Asymptote an der Stelle  $\tau = 1/\lambda$ .

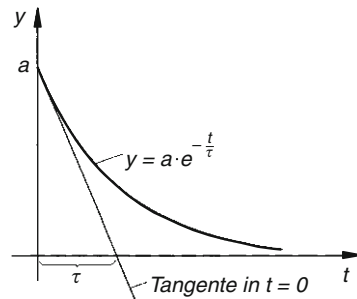


*Spezialfall:  $b = 0$*

$$y = a \cdot e^{-\lambda t}$$

oder

$$y = a \cdot e^{-t/\tau}$$



### 9.2.2 Sättigungsfunktion

$$y = a(1 - e^{-\lambda t}) + b$$

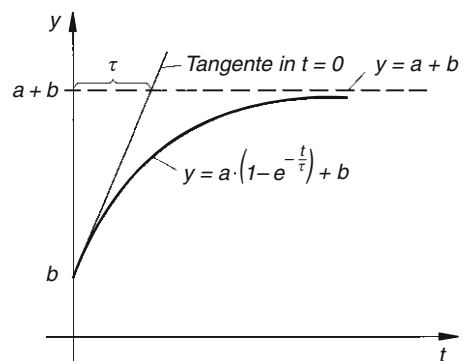
oder

$$y = a(1 - e^{-t/\tau}) + b$$

$$(a > 0, \lambda > 0, \tau > 0; t \geq 0)$$

*Eigenschaften*

- (1) Streng monoton *wachsende* Funktion.
- (2) *Asymptote* für  $t \rightarrow \infty$ :  $y = a + b$
- (3) *Tangente* in  $t = 0$  schneidet die Asymptote an der Stelle  $\tau = 1/\lambda$ .

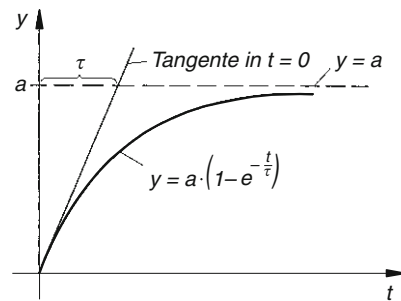


Spezialfall:  $b = 0$

$$y = a(1 - e^{-\lambda t})$$

oder

$$y = a(1 - e^{-t/\tau})$$

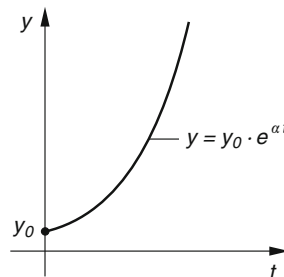


### 9.2.3 Wachstumsfunktion

$$y = y_0 \cdot e^{\alpha t}, \quad t \geq 0$$

$y_0 > 0$ : Anfangsbestand (zur Zeit  $t = 0$ )

$\alpha > 0$ : Wachstumsrate

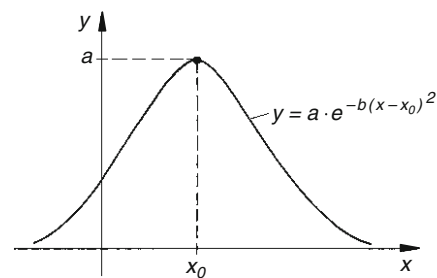


### 9.2.4 Gauß-Funktion (Gaußsche Glockenkurve)

$$y = a \cdot e^{-b(x-x_0)^2} \quad (a > 0, b > 0)$$

Eigenschaften

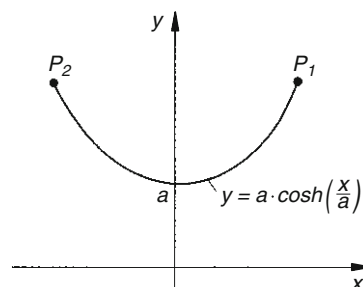
- (1) Maximum bei  $x_0$ :  $y(x_0) = a$
- (2) Symmetrieachse:  $x = x_0$  (Parallele zur y-Achse durch das Maximum)
- (3) Asymptote im Unendlichen:  $y = 0$  (x-Achse)



### 9.2.5 Kettenlinie

Eine an zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  befestigte, *freihängende* Kette nimmt unter dem Einfluß der Schwerkraft die geometrische Form einer *Kettenlinie* an ( $a > 0$ ):

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a})$$



## 10 Logarithmusfunktionen

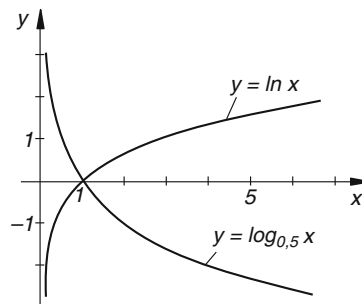
### 10.1 Definition der Logarithmusfunktionen

Die *Logarithmusfunktionen* sind die *Umkehrfunktionen* der Exponentialfunktionen.

#### Allgemeine Logarithmusfunktion

$y = \log_a x$  mit  $x > 0$  ist die *Umkehrfunktion* der Exponentialfunktion  $y = a^x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ).

Das nebenstehende Bild zeigt die Funktionen  $y = \log_e x \equiv \ln x$  (streng monoton *wachsend*) und  $y = \log_{0,5} x$  (streng monoton *fallend*).



#### Eigenschaften

- (1) *Definitionsbereich:*  $x > 0$
- (2) *Wertebereich:*  $-\infty < y < \infty$
- (3) *Nullstellen:*  $x_1 = 1$
- (4) *Monotonie:*  $0 < a < 1$ : Streng monoton *fallend*  
 $a > 1$ : Streng monoton *wachsend*
- (5) *Asymptote:*  $x = 0$  (y-Achse)
- (6) Für jede (zulässige) Basis  $a$  gilt:  $\log_a 1 = 0$ ,  $\log_a a = 1$
- (7) Die Funktionskurve von  $y = \log_a x$  erhält man durch *Spiegelung* von  $y = a^x$  an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.

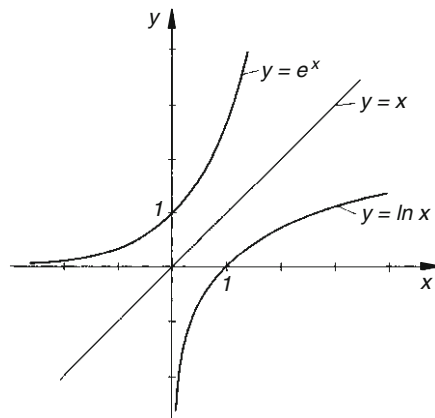
### 10.2 Spezielle Logarithmusfunktionen

#### Natürlicher Logarithmus ( $a = e$ )

$$y = \log_e x \equiv \ln x, \quad x > 0$$

(Umkehrfunktion von  $y = e^x$ )

Das nebenstehende Bild zeigt, wie man  $y = \ln x$  durch Spiegelung von  $y = e^x$  an der Winkelhalbierenden  $y = x$  erhält.



**Zehnerlogarithmus (Dekadischer oder Briggscher Logarithmus,  $a = 10$ )**

$$y = \log_{10} x \equiv \lg x, \quad x > 0$$

**Zweierlogarithmus (Binärlogarithmus,  $a = 2$ )**

$$y = \log_2 x \equiv \lg x, \quad x > 0$$

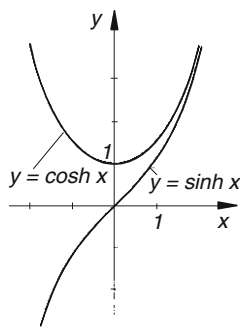
## 11 Hyperbelfunktionen

**11.1 Definition der Hyperbelfunktionen**

$y = \sinh x$  und  $y = \cosh x$

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



Für *großes*  $x$  gilt:

$$\sinh x \approx \cosh x \approx \frac{1}{2} \cdot e^x$$

Eigenschaften	$y = \sinh x$	$y = \cosh x$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$-\infty < y < \infty$	$1 \leq y < \infty$
Symmetrie	ungerade	gerade
Nullstellen	$x_1 = 0$	
Extremwerte		$x_1 = 0$ (Minimum)
Monotonie	streng monoton wachsend	

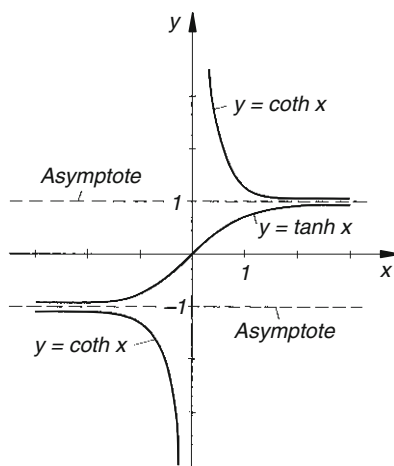
$y = \tanh x$  und  $y = \coth x$

$$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$y = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Für großes  $x$  gilt:

$$\tanh x \approx \coth x \approx 1$$



Eigenschaften	$y = \tanh x$	$y = \coth x$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$ x  > 0$
Wertebereich	$-1 < y < 1$	$ y  > 1$
Symmetrie	ungerade	ungerade
Nullstellen	$x_1 = 0$	
Pole		$x_1 = 0$
Monotonie	streng monoton wachsend	
Asymptoten	$y = \pm 1$	$x = 0$ (y-Achse) $y = \pm 1$

## 11.2 Wichtige Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen

### Hyperbolischer Pythagoras

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

### Weitere elementare Beziehungen

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$$



**Umrechnungen zwischen den Hyperbelfunktionen**

	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\coth x$
$\sinh x$	_____	$\pm \sqrt{\cosh^2 x - 1}$	$\frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$
$\cosh x$	$\sqrt{\sinh^2 x + 1}$	_____	$\frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$	$\pm \frac{\coth x}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$
$\tanh x$	$\frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}$	$\pm \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}$	_____	$\frac{1}{\coth x}$
$\coth x$	$\frac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x}$	$\pm \frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$	$\frac{1}{\tanh x}$	_____

*Oberes Vorzeichen für  $x \geq 0$ , unteres Vorzeichen für  $x < 0$ .*

**11.3 Formeln****11.3.1 Additionstheoreme**

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cdot \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \cdot \sinh x_2$$

$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cdot \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \cdot \sinh x_2$$

$$\tanh(x_1 \pm x_2) = \frac{\tanh x_1 \pm \tanh x_2}{1 \pm \tanh x_1 \cdot \tanh x_2}$$

$$\coth(x_1 \pm x_2) = \frac{1 \pm \coth x_1 \cdot \coth x_2}{\coth x_1 \pm \coth x_2}$$

**11.3.2 Formeln für halbe Argumente**

$$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \quad (\text{Oberes Vorzeichen für } x \geq 0, \text{ unteres für } x < 0)$$

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$$

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}$$

### 11.3.3 Formeln für Vielfache des Arguments

#### Formeln für doppelte Argumente

$$\sinh(2x) = 2 \cdot \sinh x \cdot \cosh x$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cdot \cosh^2 x - 1$$

$$\tanh(2x) = \frac{2 \cdot \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

#### Formeln für dreifache Argumente

$$\sinh(3x) = 3 \cdot \sinh x + 4 \cdot \sinh^3 x$$

$$\cosh(3x) = 4 \cdot \cosh^3 x - 3 \cdot \cosh x$$

$$\tanh(3x) = \frac{3 \cdot \tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3 \cdot \tanh^2 x}$$

#### Formeln für $n$ -fache Argumente ( $n = 2, 3, 4, \dots$ )

$$\begin{aligned} \sinh(nx) &= \binom{n}{1} \cdot \cosh^{n-1} x \cdot \sinh x + \binom{n}{3} \cdot \cosh^{n-3} x \cdot \sinh^3 x + \\ &\quad + \binom{n}{5} \cdot \cosh^{n-5} x \cdot \sinh^5 x + \dots \end{aligned}$$

$$\cosh(nx) = \cosh^n x + \binom{n}{2} \cdot \cosh^{n-2} x \cdot \sinh^2 x + \binom{n}{4} \cdot \cosh^{n-4} x \cdot \sinh^4 x + \dots$$

$\binom{n}{k}$ : Binomialkoeffizienten (siehe I.2.7)

### 11.3.4 Formeln für Potenzen

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2} [\cosh(2x) - 1]$$

$$\sinh^3 x = \frac{1}{4} [\sinh(3x) - 3 \cdot \sinh x]$$

$$\sinh^4 x = \frac{1}{8} [\cosh(4x) - 4 \cdot \cosh(2x) + 3]$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2} [\cosh(2x) + 1]$$

$$\cosh^3 x = \frac{1}{4} [\cosh(3x) + 3 \cdot \cosh x]$$

$$\cosh^4 x = \frac{1}{8} [\cosh(4x) + 4 \cdot \cosh(2x) + 3]$$

**11.3.5 Formeln für Summen und Differenzen**

$$\sinh x_1 + \sinh x_2 = 2 \cdot \sinh \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \cdot \cosh \left( \frac{x_1 - x_2}{2} \right)$$

$$\sinh x_1 - \sinh x_2 = 2 \cdot \cosh \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \cdot \sinh \left( \frac{x_1 - x_2}{2} \right)$$

$$\cosh x_1 + \cosh x_2 = 2 \cdot \cosh \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \cdot \cosh \left( \frac{x_1 - x_2}{2} \right)$$

$$\cosh x_1 - \cosh x_2 = 2 \cdot \sinh \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \cdot \sinh \left( \frac{x_1 - x_2}{2} \right)$$

$$\tanh x_1 \pm \tanh x_2 = \frac{\sinh (x_1 \pm x_2)}{\cosh x_1 \cdot \cosh x_2}$$

**11.3.6 Formeln für Produkte**

$$\sinh x_1 \cdot \sinh x_2 = \frac{1}{2} [\cosh (x_1 + x_2) - \cosh (x_1 - x_2)]$$

$$\cosh x_1 \cdot \cosh x_2 = \frac{1}{2} [\cosh (x_1 + x_2) + \cosh (x_1 - x_2)]$$

$$\sinh x_1 \cdot \cosh x_2 = \frac{1}{2} [\sinh (x_1 + x_2) + \sinh (x_1 - x_2)]$$

$$\tanh x_1 \cdot \tanh x_2 = \frac{\tanh x_1 + \tanh x_2}{\coth x_1 + \coth x_2}$$

**11.3.7 Formel von Moivre**

$$(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh (nx) \pm \sinh (nx) = e^{\pm nx} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

*Sonderfall*  $n = 1$ :

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

## 12 Areafunktionen

### 12.1 Definition der Areafunktionen

Die *Umkehrfunktionen* der Hyperbelfunktionen heißen *Areafunktionen*, wobei die Umkehrung von  $y = \cosh x$  im Intervall  $x \geq 0$  vorgenommen wird. Die Areafunktionen lassen sich durch *logarithmische* Funktionen ausdrücken.

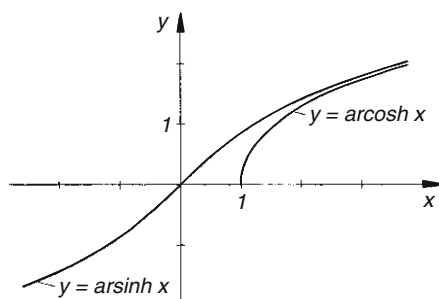
$y = \operatorname{arsinh} x$  und  $y = \operatorname{arcosh} x$

$$y = \operatorname{arsinh} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

$$y = \operatorname{arcosh} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

$$(x \geq 1)$$



Eigenschaften	$y = \operatorname{arsinh} x$	$y = \operatorname{arcosh} x$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$x \geq 1$
Wertebereich	$-\infty < y < \infty$	$y \geq 0$
Symmetrie	ungerade	
Nullstellen	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$
Monotonie	streng monoton wachsend	streng monoton wachsend

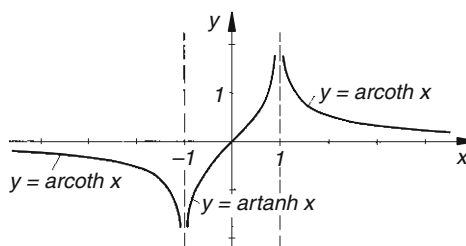
$y = \operatorname{artanh} x$  und  $y = \operatorname{arcoth} x$

$$y = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$(|x| < 1)$$

$$y = \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$(|x| > 1)$$



Eigenschaften	$y = \operatorname{artanh} x$	$y = \operatorname{arcoth} x$
Definitionsbereich	$-1 < x < 1$	$ x  > 1$
Wertebereich	$-\infty < y < \infty$	$ y  > 0$
Symmetrie	ungerade	ungerade
Nullstellen	$x_1 = 0$	
Pole	$x_{1/2} = \pm 1$	$x_{1/2} = \pm 1$
Monotonie	streng monoton wachsend	
Asymptoten	$x = \pm 1$	$x = \pm 1$ $y = 0$ ( $x$ -Achse)

## 12.2 Wichtige Beziehungen zwischen den Areafunktionen

### Umrechnungen zwischen den Areafunktionen

	$\operatorname{arsinh} x$	$\operatorname{arcosh} x$	$\operatorname{artanh} x$	$\operatorname{arcoth} x$
$\operatorname{arsinh} x$	_____	$\pm \operatorname{arcosh} \sqrt{x^2 + 1}$	$\operatorname{artanh} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$	$\operatorname{arcoth} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \right)$
$\operatorname{arcosh} x$	$\operatorname{arsinh} \sqrt{x^2 - 1}$	_____	$\operatorname{artanh} \left( \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right)$	$\operatorname{arcoth} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$
$\operatorname{artanh} x$	$\operatorname{arsinh} \left( \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$	$\pm \operatorname{arcosh} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$	_____	$\operatorname{arcoth} \left( \frac{1}{x} \right)$
$\operatorname{arcoth} x$	$\operatorname{arsinh} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$	$\pm \operatorname{arcosh} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$	$\operatorname{artanh} \left( \frac{1}{x} \right)$	_____

*Oberes Vorzeichen für  $x > 0$ , unteres Vorzeichen für  $x < 0$ .*

**Additionstheoreme**

$$\operatorname{arsinh} x_1 \pm \operatorname{arsinh} x_2 = \operatorname{arsinh} \left( x_1 \sqrt{1 + x_2^2} \pm x_2 \sqrt{1 + x_1^2} \right)$$

$$\operatorname{arcosh} x_1 \pm \operatorname{arcosh} x_2 = \operatorname{arcosh} \left( x_1 x_2 \pm \sqrt{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)} \right)$$

$$\operatorname{artanh} x_1 \pm \operatorname{artanh} x_2 = \operatorname{artanh} \left( \frac{x_1 \pm x_2}{1 \pm x_1 x_2} \right)$$

$$\operatorname{arcoth} x_1 \pm \operatorname{arcoth} x_2 = \operatorname{arcoth} \left( \frac{1 \pm x_1 x_2}{x_1 \pm x_2} \right)$$

## 13 Kegelschnitte

### 13.1 Allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes

*Kegelschnitte* sind ebene Kurven, die beim Schnitt eines geraden Kreiskegels mit Ebenen entstehen. Zu ihnen gehören *Kreis*, *Ellipse*, *Hyperbel* und *Parabel*.

#### Gleichung eines Kegelschnittes in achsenparalleler Lage

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

Verlaufen die Symmetrieachsen der Kegelschnitte nicht parallel zu den Koordinatenachsen, so enthält die Kegelschnittgleichung noch ein *gemischtes* Glied. Durch eine Drehung des  $x$ ,  $y$ -Systems lässt sich dann stets die *achsenparallele* Lage erzeugen (siehe I.9.1.3.3).

#### Art des Kegelschnittes

Kreis: $A = B$	Ellipse: $A \cdot B > 0$ und $A \neq B$
Hyperbel: $A \cdot B < 0$	Parabel: $A = 0, B \neq 0$ oder $B = 0, A \neq 0$

### 13.2 Kreis

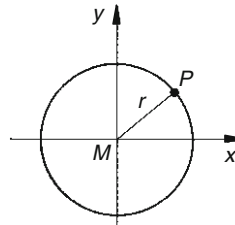
#### 13.2.1 Geometrische Definition

$$\overline{MP} = \text{const.} = r$$

$M$ : Mittelpunkt des Kreises

$r$ : Radius des Kreises ( $r > 0$ )

Symmetrieachsen: Durchmesser, d. h. jede Gerade durch den Kreismittelpunkt  $M$

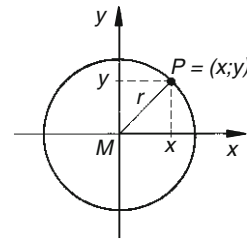


### 13.2.2 Mittelpunktsgleichung eines Kreises (Ursprungsgleichung)

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$M = (0; 0)$$

$$\text{Tangente in } P_1 = (x_1; y_1): \quad x x_1 + y y_1 = r^2$$



### 13.2.3 Kreis in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobener Kreis)

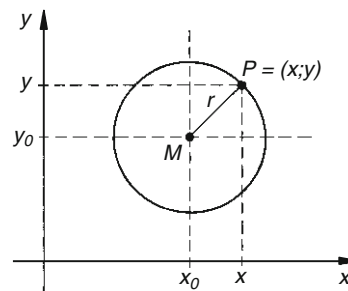
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$M = (x_0; y_0)$$

$$\text{Tangente in } P_1 = (x_1; y_1):$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2$$

Der verschobene Kreis kann durch eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems auf den Mittelpunktskreis (Ursprungskreis) zurückgeführt werden ( $M = (x_0; y_0)$  als Nullpunkt wählen).



### 13.2.4 Gleichung eines Kreises in Polarkoordinaten

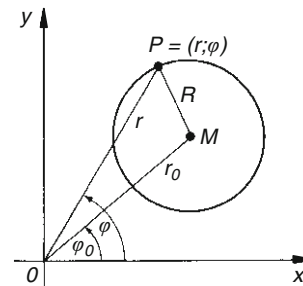
$$r^2 - 2 r_0 r \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2 = R^2$$

$$M = (r_0; \varphi_0) \text{ (in Polarkoordinaten)}$$

$R$ : Radius des Kreises

Pol:  $O = (0; 0)$

Polarachse:  $x$ -Achse

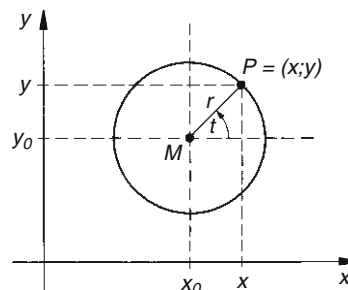


### 13.2.5 Parameterdarstellung eines Kreises

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \cdot \cos t \\ y &= y_0 + r \cdot \sin t \end{aligned} \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

$$M = (x_0; y_0)$$

$t$ : Winkelparameter



### 13.3 Ellipse

#### 13.3.1 Geometrische Definition

$$\overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = \text{const.} = 2a$$

$M$ : Mittelpunkt

$F_1, F_2$ : Brennpunkte

$2a$ : Große Achse (Hauptachse)

$2b$ : Kleine Achse (Nebenachse)

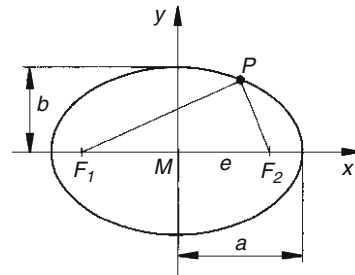
$e$ : Brennweite ( $\overline{F_1 M} = \overline{F_2 M} = e$ )  
 $e^2 = a^2 - b^2 \quad (a > b > 0)$

$\varepsilon = e/a$ : Numerische Exzentrizität ( $\varepsilon < 1$ )

Symmetrieachsen:  $x$ -Achse und  $y$ -Achse

*Spezialfall*  $b > a$ : Die Brennpunkte liegen jetzt auf der  $y$ -Achse (um  $90^\circ$  gedrehte Ellipse mit der Hauptachse  $2b$ , der Nebenachse  $2a$  und  $e^2 = b^2 - a^2$ ).

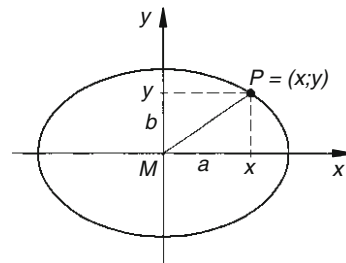
*Spezialfall*  $a = b$ : Kreis mit dem Radius  $r = a$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$M = (0; 0)$

Tangente in  $P_1 = (x_1; y_1)$ :  $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$



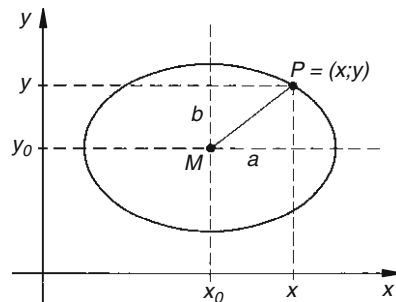
#### 13.3.3 Ellipse in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Ellipse)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$M = (x_0; y_0)$

Tangente in  $P_1 = (x_1; y_1)$ :

$$\frac{(x - x_0)(x_1 - x_0)}{a^2} + \frac{(y - y_0)(y_1 - y_0)}{b^2} = 1$$



Die verschobene Ellipse kann durch eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems auf die Ursprungsellipse zurückgeführt werden ( $M = (x_0; y_0)$  als Nullpunkt wählen).



### 13.3.4 Gleichung einer Ellipse in Polarkoordinaten

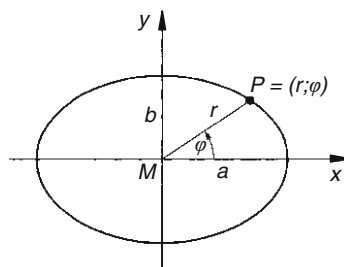
#### Pol im Mittelpunkt

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \cos^2 \varphi}} \quad (\varepsilon < 1)$$

Pol:  $M = (0; 0)$

Polarachse: Große Achse ( $x$ -Achse)

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$



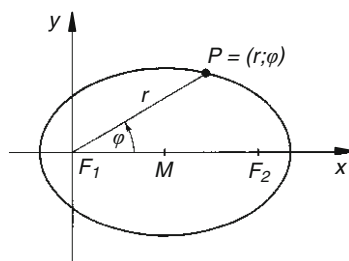
#### Pol im linken Brennpunkt

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi} \quad (\varepsilon < 1)$$

Pol:  $F_1 = (0; 0)$  (linker Brennpunkt)

Polarachse: Große Achse ( $x$ -Achse)

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}$$



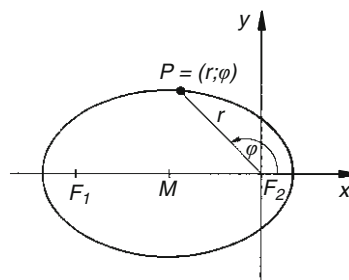
#### Pol im rechten Brennpunkt

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi} \quad (\varepsilon < 1)$$

Pol:  $F_2 = (0; 0)$  (rechter Brennpunkt)

Polarachse: Große Achse ( $x$ -Achse)

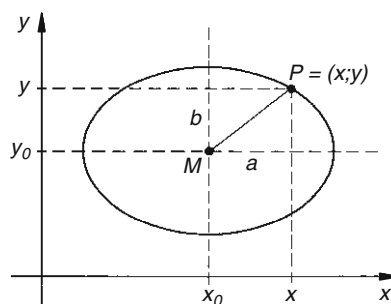
$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}$$



### 13.3.5 Parameterdarstellung einer Ellipse

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a \cdot \cos t \\ y &= y_0 + b \cdot \sin t \end{aligned} \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

$M = (x_0; y_0)$



## 13.4 Hyperbel

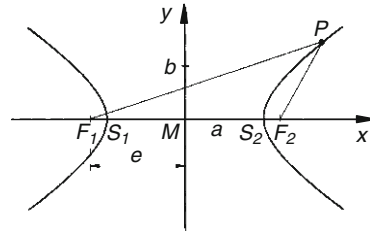
### 13.4.1 Geometrische Definition

$$|\overline{F_1 P} - \overline{F_2 P}| = \text{const.} = 2a$$

- $M$ : Mittelpunkt  
 $F_1, F_2$ : Brennpunkte  
 $S_1, S_2$ : Scheitelpunkte  
 $2a$ : Große oder reelle Achse  
 $2b$ : Kleine oder imaginäre Achse  
 $e$ : Brennweite ( $\overline{F_1 M} = \overline{F_2 M} = e$ )  
 $e^2 = a^2 + b^2 \quad (a > 0, b > 0)$

$\varepsilon = e/a$ : Numerische Exzentrizität ( $\varepsilon > 1$ )

Symmetrieachsen:  $x$ -Achse und  $y$ -Achse



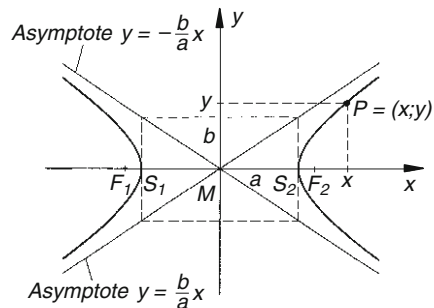
### 13.4.2 Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel (Ursprungsgleichung)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$M = (0; 0)$

Asymptoten:  $y = \pm \frac{b}{a} x$

Tangente in  $P_1 = (x_1; y_1)$ :  $\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1$



### 13.4.3 Hyperbel in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Hyperbel)

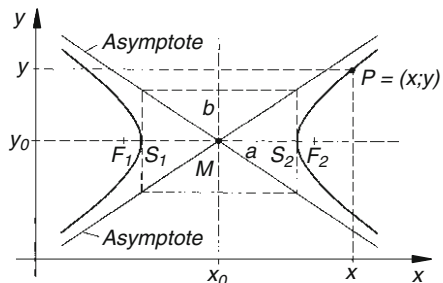
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$M = (x_0; y_0)$

Asymptoten:  $y = y_0 \pm \frac{b}{a} (x - x_0)$

Tangente in  $P_1 = (x_1; y_1)$ :

$$\frac{(x - x_0)(x_1 - x_0)}{a^2} - \frac{(y - y_0)(y_1 - y_0)}{b^2} = 1$$



Die verschobene Hyperbel kann durch eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems auf die Ursprungshyperbel zurückgeführt werden ( $M = (x_0; y_0)$  als Nullpunkt wählen).

### 13.4.4 Gleichung einer Hyperbel in Polarkoordinaten

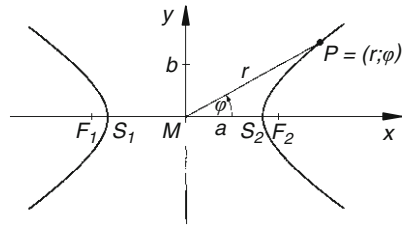
#### Pol im Mittelpunkt

$$r = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon^2 \cdot \cos^2 \varphi - 1}} \quad (\varepsilon > 1)$$

Pol:  $M = (0; 0)$

Polarachse: Große Achse ( $x$ -Achse)

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$



#### Pol im linken Brennpunkt

$$r = \frac{p}{\varepsilon \cdot \cos \varphi \pm 1} \quad (\varepsilon > 1)$$

$M = (e; 0)$

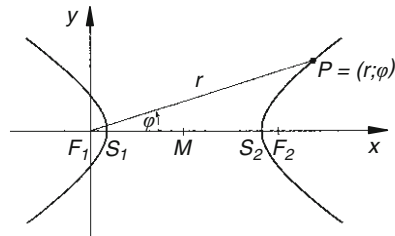
Pol:  $F_1 = (0; 0)$  (linker Brennpunkt)

Polarachse: Große Achse ( $x$ -Achse)

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}$$

Oberes Vorzeichen: linker Ast

Unteres Vorzeichen: rechter Ast



#### Pol im rechten Brennpunkt

$$r = \frac{-p}{\varepsilon \cdot \cos \varphi \pm 1} \quad (\varepsilon > 1)$$

$M = (-e; 0)$

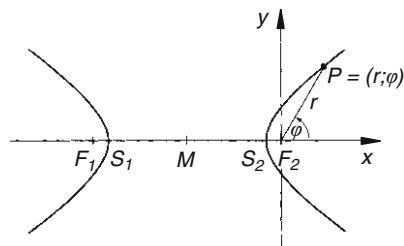
Pol:  $F_2 = (0; 0)$  (rechter Brennpunkt)

Polarachse: Große Achse ( $x$ -Achse)

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}$$

Oberes Vorzeichen: linker Ast

Unteres Vorzeichen: rechter Ast



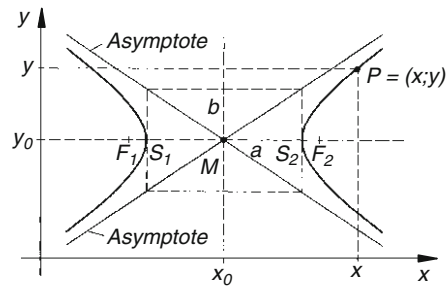
### 13.4.5 Parameterdarstellung einer Hyperbel

$$\begin{aligned} x &= x_0 \pm a \cdot \cosh t \\ y &= y_0 + b \cdot \sinh t \end{aligned} \quad (-\infty < t < \infty)$$

$$M = (x_0; y_0)$$

Oberes Vorzeichen: rechter Ast

Unteres Vorzeichen: linker Ast



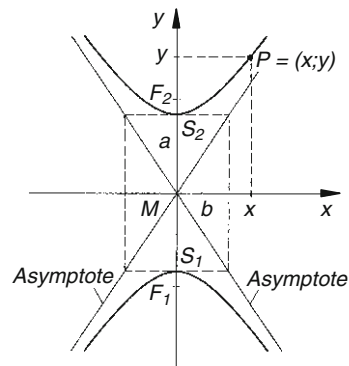
### 13.4.6 Gleichung einer um 90° gedrehten Hyperbel

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad M = (0; 0)$$

Große Achse: y-Achse

Kleine Achse: x-Achse

Asymptoten:  $y = \pm \frac{a}{b} x$



### Verschobene Hyperbel

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

$$M = (x_0; y_0)$$

### 13.4.7 Gleichung einer gleichseitigen oder rechtwinkligen Hyperbel ( $a = b$ )

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 - y^2 = a^2, \quad M = (0; 0)$$

Asymptoten:  $y = \pm x$  (stehen aufeinander senkrecht)

Legt man die Koordinatenachsen in Richtung der Asymptoten, so lautet die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel  $xy = a^2/2$ .

### Verschobene Hyperbel

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = a^2, \quad M = (x_0; y_0)$$

Asymptoten:  $y = y_0 \pm (x - x_0)$  (stehen aufeinander senkrecht)

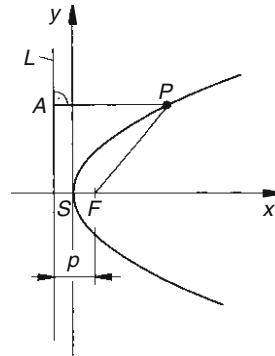
## 13.5 Parabel

*Hinweis:* Gleichungen der nach *oben* bzw. *unten* geöffneten Parabel siehe III.4.3.

### 13.5.1 Geometrische Definition

$$\overline{AP} = \overline{FP}$$

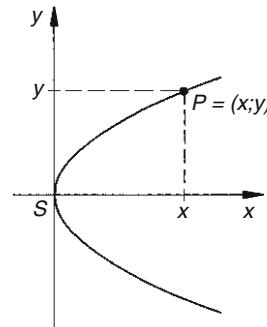
- $S$ : Scheitelpunkt  
 $F$ : Brennpunkt  
 $L$ : Leitlinie  
 $p$ : Parameter (Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie:  $|p| = 2e$ )  
 $e$ : Brennweite  $\left( \overline{SF} = e = \frac{|p|}{2} \right)$   
 $p > 0$ : Öffnung nach *rechts*  
 $p < 0$ : Öffnung nach *links*  
 Symmetrieachse:  $x$ -Achse



### 13.5.2 Scheitelgleichung einer Parabel

$$y^2 = 2px$$

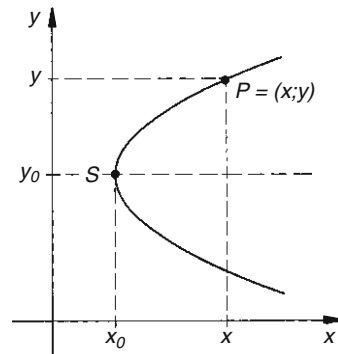
- $S = (0; 0)$   
 Symmetrieachse:  $x$ -Achse  
 Tangente in  $P_1 = (x_1; y_1)$ :  $y y_1 = p(x + x_1)$



### 13.5.3 Parabel in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Parabel)

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

- $S = (x_0; y_0)$   
 Symmetrieachse: Parallele zur  $x$ -Achse durch den Scheitelpunkt  $S$   
 Tangente in  $P_1 = (x_1; y_1)$ :  
 $(y - y_0)(y_1 - y_0) = p(x + x_1 - 2x_0)$   
 Die verschobene Parabel kann durch eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems auf die Scheitelgleichung zurückgeführt werden ( $S = (x_0; y_0)$  als Nullpunkt wählen).



### 13.5.4 Gleichung einer Parabel in Polarkoordinaten

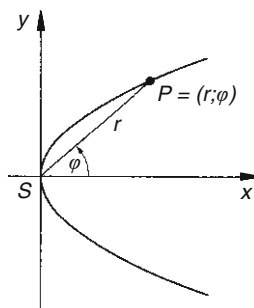
#### Pol im Scheitelpunkt

$$r = 2p \cdot \cos \varphi (1 + \cot^2 \varphi)$$

$$S = (0; 0)$$

$$\text{Pol: } S = (0; 0)$$

Polarachse: Symmetrieachse ( $x$ -Achse)



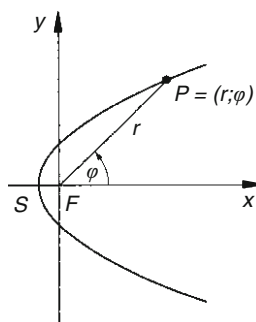
#### Pol im Brennpunkt

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$$

$$S = (-p/2; 0)$$

$$\text{Pol: } F = (0; 0)$$

Polarachse: Symmetrieachse ( $x$ -Achse)



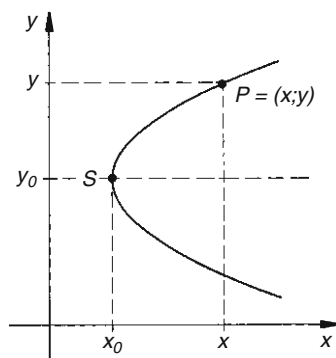
### 13.5.5 Parameterdarstellung einer Parabel

$$\begin{aligned} x &= x_0 + c t^2 \\ y &= y_0 + t \end{aligned} \quad (-\infty < t < \infty)$$

$c$ : reelle Konstante

$$S = (x_0; y_0)$$

Symmetrieachse: Parallele zur  $x$ -Achse durch den Scheitelpunkt  $S$



## 14 Spezielle Kurven

*Hinweis:* Die Kurvengleichungen liegen in der Parameterform  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  oder in der Polarkoordinatenform  $r = r(\varphi)$  vor.

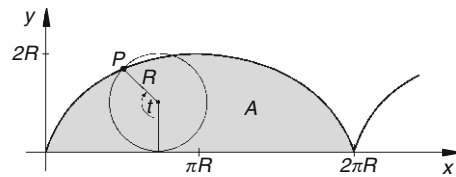
### 14.1 Gewöhnliche Zyklode (Rollkurve)

Ein Punkt  $P = (x; y)$  auf dem *Umfang* eines Kreises, der auf einer *Geraden* ( $x$ -Achse) abrollt, beschreibt eine als *Rollkurve* oder *gewöhnliche Zyklode* bezeichnete *periodische* Bahnkurve:

$$\begin{aligned} x &= R(t - \sin t) \\ y &= R(1 - \cos t) \end{aligned} \quad (-\infty < t < \infty)$$

$R$ : Radius des Kreises

$t$ : Parameter („Wälzwinkel“)



*Eigenschaften*

- (1) *Periode* der Bahnkurve:  $p = 2\pi R$  (Kreisumfang!)
- (2) *Fläche* unter einem Bogen (grau unterlegt):  $A = 3\pi R^2$
- (3) *Länge* (Umfang) eines Bogens:  $s = 8R$

### 14.2 Epizykloide

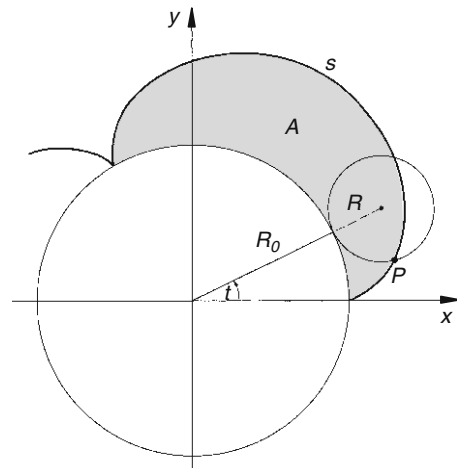
Ein Punkt  $P = (x; y)$  auf dem *Umfang* eines Kreises, der auf der *Außenseite* eines zweiten (festen) Kreises abrollt, beschreibt eine als *Epizykloide* bezeichnete Bahnkurve:

$$\begin{aligned} x &= (R_0 + R) \cos t - R \cdot \cos \left( \frac{R_0 + R}{R} \cdot t \right) \\ y &= (R_0 + R) \sin t - R \cdot \sin \left( \frac{R_0 + R}{R} \cdot t \right) \\ & \quad (-\infty < t < \infty) \end{aligned}$$

$R_0$ : Radius des *festen* Kreises

$R$ : Radius des *abrollenden* Kreises

$t$ : Winkelparameter



*Eigenschaften*

- (1) Die *Gestalt* der Kurve hängt vom Verhältnis  $m = R_0/R$  der beiden Radien ab. Die Epizykloide ist in sich *geschlossen*, wenn  $m$  *rational* ist. Ist  $m$  *ganzzahlig*, so besteht die Epizykloide aus genau  $m$  Bögen. Für den *Spezialfall*  $R = R_0$  erhält man eine *Kardioide* (siehe III.14.5).

(2) *Länge* eines Bogens:  $s = \frac{8R(R_0 + R)}{R_0}$

- (3) *Fläche* zwischen einem Bogen und dem festen Kreis (grau unterlegt):

$$A = \frac{\pi R^2 (3R_0 + 2R)}{R_0}$$

**14.3 Hypozykloide**

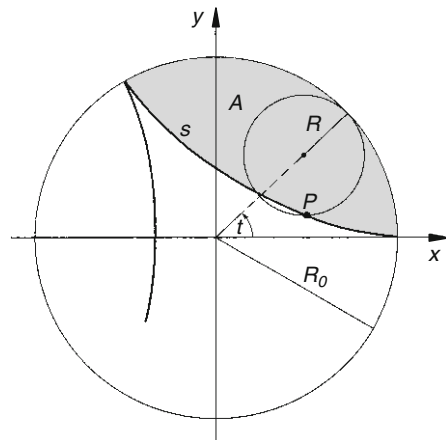
Ein Punkt  $P = (x; y)$  auf dem *Umfang* eines Kreises, der auf der *Innenseite* eines zweiten (festen) Kreises abrollt, beschreibt eine als *Hypozykloide* bezeichnete Bahnkurve:

$$\begin{aligned} x &= (R_0 - R) \cos t + R \cdot \cos \left( \frac{R_0 - R}{R} \cdot t \right) \\ y &= (R_0 - R) \sin t - R \cdot \sin \left( \frac{R_0 - R}{R} \cdot t \right) \\ (-\infty < t < \infty; R_0 > R) \end{aligned}$$

$R_0$ : Radius des *festen* Kreises

$R$ : Radius des *abrollenden* Kreises

$t$ : Winkelparameter

*Eigenschaften*

- (1) Die *Gestalt* der Kurve hängt vom Verhältnis  $m = R_0/R$  der beiden Radien ab. Die Hypozykloide ist in sich *geschlossen*, wenn  $m$  *rational* ist. Ist  $m$  *ganzzahlig*, so besteht die Hypozykloide aus genau  $m$  Bögen. Für den *Spezialfall*  $R_0 = 4R$  erhält man eine *Astroide* (siehe III.14.4).

(2) *Länge* eines Bogens:  $s = \frac{8R(R_0 - R)}{R_0}$

- (3) *Fläche* zwischen einem Bogen und dem festen Kreis (grau unterlegt):

$$A = \frac{\pi R^2 (3R_0 - 2R)}{R_0}$$



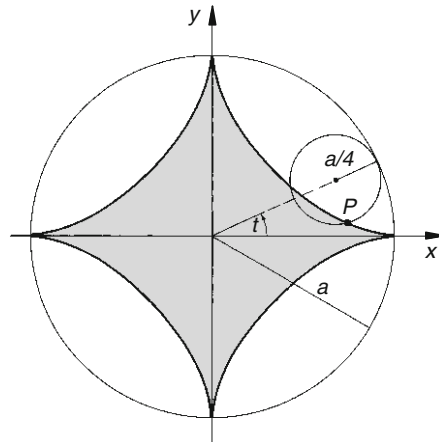
### 14.4 Astroide (Sternkurve)

Die *Astroide* oder *Sternkurve* ist ein Spezialfall der Hypozykloide für  $R_0 = 4R = a$  (siehe III.14.3):

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cdot \cos^3 t \\ y &= a \cdot \sin^3 t \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} a &> 0 \\ 0 &\leq t < 2\pi \end{aligned}$$

#### Eigenschaften

- (1) Gleichung der Kurve in *kartesischen* Koordinaten:  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
- (2) Die Kurve ist *spiegelsymmetrisch* zur  $x$ - und  $y$ -Achse.
- (3) *Fläche* (grau unterlegt):  $A = \frac{3}{8} \pi a^2$
- (4) *Länge* (Umfang) der Kurve:  $s = 6a$
- (5) Die Schnittpunkte einer jeden Tangente mit den beiden Koordinatenachsen haben den Abstand  $a$  (*Ausnahme*: Tangenten in den vier Spitzen).



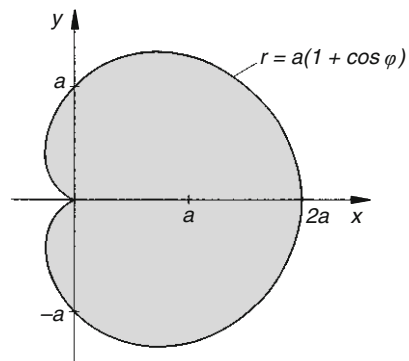
### 14.5 Kardioiden (Herzkurven)

Die *Kardioiden* oder *Herzkurven* sind ein Spezialfall der Epizykloiden für  $R = R_0 = a/2$  (siehe III.14.2). Die Kurvengleichung lautet in *Polarkoordinaten*:

$$\left. \begin{aligned} r &= a(1 + \cos \varphi) \\ (a &> 0; 0 \leq \varphi < 2\pi) \end{aligned} \right\}$$

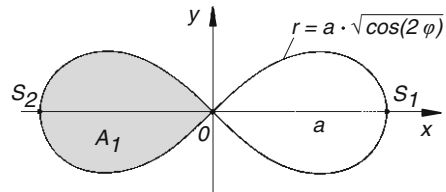
#### Eigenschaften

- (1) Die Kurve ist *spiegelsymmetrisch* zur  $x$ -Achse.
- (2) *Fläche* (grau unterlegt):  $A = \frac{3}{2} \pi a^2$
- (3) *Länge* (Umfang) der Kurve:  $s = 8a$



### 14.6 Lemniskate (Schleifenkurve)

$$r = a \cdot \sqrt{\cos(2\varphi)} \quad (a > 0)$$



#### Eigenschaften

- (1) Gleichung der Kurve in kartesischen Koordinaten:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

- (2) Die Kurve ist *spiegelsymmetrisch* zur  $x$ - und  $y$ -Achse.

- (3) *Scheitelpunkte*:  $S_{1/2} = (\pm a; 0)$

*Doppelpunkt*:  $O = (0; 0)$

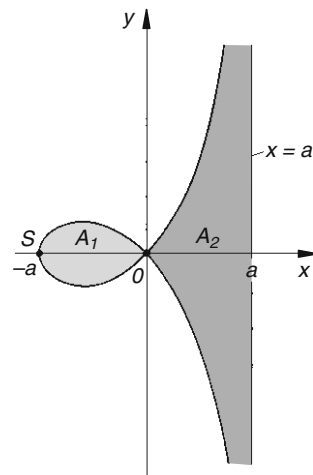
- (4) Gleichungen der *Tangenten* in  $O$  (zugleich *Wendepunkt*):  $y = \pm x$

- (5) Fläche einer Schleife (grau unterlegt):  $A_1 = a^2/2$

*Gesamtfläche*:  $A = a^2$

### 14.7 Strophoide

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \\ y &= \frac{at(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} a &> 0 \\ -\infty &< t < \infty \end{aligned}$$



#### Eigenschaften

- (1) Gleichung der Kurve in *kartesischen* Koordinaten:

$$(x + a)x^2 + (x - a)y^2 = 0$$

- (2) Gleichung der Kurve in *Polarkoordinaten*:

$$r = -\frac{a \cdot \cos(2\varphi)}{\cos \varphi}$$

- (3) *Scheitelpunkt*:  $S = (-a; 0)$ ; *Doppelpunkt*:  $O = (0; 0)$

- (4) Gleichungen der *Tangenten* in  $O$ :  $y = \pm x$

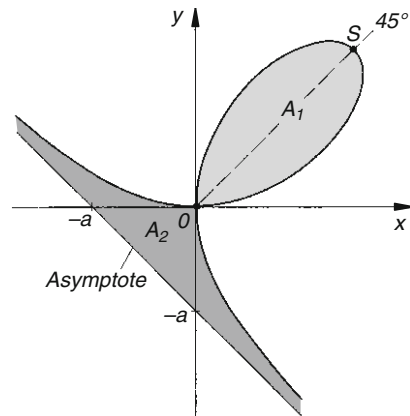
- (5) Gleichung der *Asymptote*:  $x = a$

- (6) Fläche der *Schleife* (hellgrau unterlegt):  $A_1 = \frac{a^2}{2} (4 - \pi)$

- (7) Fläche zwischen *Kurve* und *Asymptote* (dunkelgrau unterlegt):  $A_2 = \frac{a^2}{2} (4 + \pi)$

### 14.8 Cartesisches Blatt

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3at}{1+t^3} \\ y &= \frac{3at^2}{1+t^3} \end{aligned} \right\} \quad a > 0; \quad t \neq -1$$



#### Eigenschaften

- (1) Gleichung der Kurve in *kartesischen* Koordinaten:  $x^3 + y^3 = 3axy$
- (2) *Scheitelpunkt*:  $S = \left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a\right)$   
*Doppelpunkt*:  $O = (0; 0)$
- (3) Gleichungen der *Tangenten* in  $O$ :  $y = 0$  ( $x$ -Achse) und  $x = 0$  ( $y$ -Achse)
- (4) Gleichung der *Asymptote*:  $y = -x - a$
- (5) Fläche der *Schleife* (hellgrau unterlegt):  $A_1 = \frac{3}{2}a^2$
- (6) Fläche zwischen *Kurve* und *Asymptote* (dunkelgrau unterlegt):  $A_2 = \frac{3}{2}a^2$

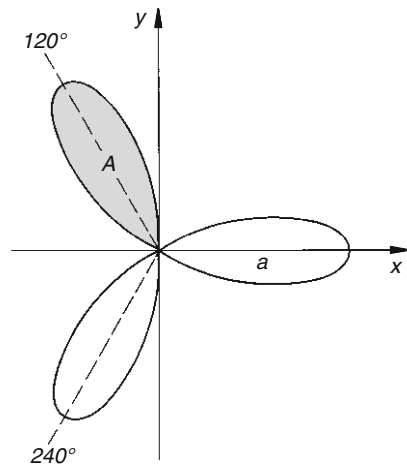
### 14.9 „Kleeblatt“ mit $n$ bzw. $2n$ Blättern

$$r = a \cdot \cos(n\varphi) \quad (a > 0; \quad n \in \mathbb{N}^*)$$

#### Eigenschaften

- (1) Die Kurve umschließt  $n$  Blätter. Das nebenstehende Bild zeigt ein „3-blättriges Kleeblatt“.
- (2) *Fläche* eines Blattes (grau unterlegt):  

$$A = \frac{\pi a^2}{4n}$$
- (3) Die Gleichung  $r = |a \cdot \cos(n\varphi)|$  beschreibt ein „Kleeblatt“ mit  $2n$  Blättern (Verdoppelung der Blattzahl).



## 14.10 Spiralen

### 14.10.1 Archimedische Spirale

$$r = a\varphi \quad (a > 0)$$

$$(0 \leq \varphi < \infty)$$

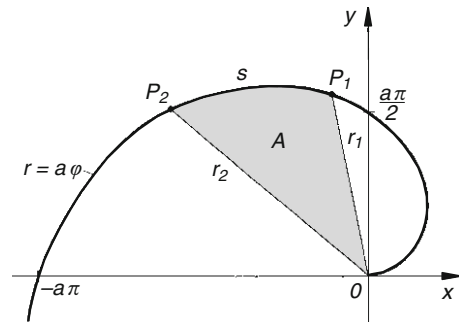
*Eigenschaften*

- (1) Fläche des Sektors  $P_1 O P_2$   
(grau unterlegt):

$$A = \frac{1}{6} a^2 (\varphi_2^3 - \varphi_1^3)$$

- (2) Länge des Bogens  $\widehat{P_1 P_2}$ :

$$s = \frac{a}{2} \left[ \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} + \ln \left( \varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1} \right) \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$



### 14.10.2 Logarithmische Spirale

$$r = a \cdot e^{b\varphi} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$(0 \leq \varphi < \infty)$$

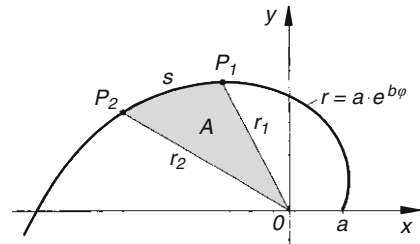
*Eigenschaften*

- (1) Fläche des Sektors  $P_1 O P_2$   
(grau unterlegt):

$$A = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4b} = \frac{a^2}{4b} \left[ e^{2b\varphi} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

- (2) Länge des Bogens  $\widehat{P_1 P_2}$ :

$$s = \frac{\sqrt{1 + b^2}}{b} (r_2 - r_1) = \frac{a\sqrt{1 + b^2}}{b} \left[ e^{b\varphi} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$



## IV Differentialrechnung

### 1 Differenzierbarkeit einer Funktion

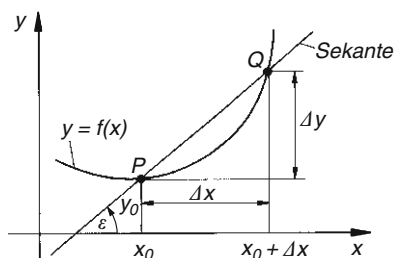
#### 1.1 Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

*Geometrische Deutung*

Steigung der *Sekante* durch  $P$  und  $Q$ :

$$m_s = \tan \varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



#### 1.2 Differentialquotient oder 1. Ableitung

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

*Geometrische Deutung*

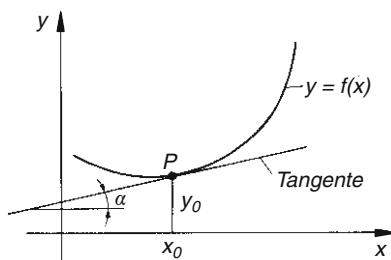
Steigung der *Kurventangente* in  $P$ :

$$m_t = \tan \alpha = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

Ist der Grenzwert  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  vorhanden, so

heißt die Funktion  $y = f(x)$  an der Stelle  $x_0$  *differenzierbar*.

Schreibweisen:  $y'(x_0)$ ,  $f'(x_0)$ ,  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$



#### 1.3 Ableitungsfunktion

Die *Ableitungsfunktion*  $y' = f'(x)$  ordnet jeder Stelle  $x$  aus einem Intervall  $I$  den *Steigungswert* der dortigen Kurventangente als Funktionswert zu. Man spricht dann kurz von der (ersten) *Ableitung* oder dem *Differentialquotienten* von  $y = f(x)$ .

Schreibweisen:  $y'$ ,  $f'(x)$ ,  $\frac{dy}{dx}$

Eine *differenzierbare* Funktion ist immer *stetig* (Umkehrung gilt nicht). Eine Funktion mit einer stetigen (ersten) Ableitung wird als *stetig differenzierbar* bezeichnet.

### Differentialoperator

Der *Differentialoperator*  $\frac{d}{dx}$  erzeugt durch „Einwirken“ auf die Funktion  $y = f(x)$  die 1. Ableitung  $y' = f'(x)$ :

$$\frac{d}{dx} [f(x)] = f'(x) = \frac{dy}{dx} = y'$$

#### ■ Beispiel

$$y = 5x^3 - 2 \cdot \sin x - 7 \Rightarrow y' = \frac{d}{dx} [5x^3 - 2 \cdot \sin x - 7] = 15x^2 - 2 \cdot \cos x$$

## 1.4 Höhere Ableitungen

Die *höheren* Ableitungen sind wie folgt definiert:

$$2. \text{ Ableitung: } y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} [f'(x)]$$

$$3. \text{ Ableitung: } y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} [f''(x)]$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$n\text{-te Ableitung: } y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} [f^{(n-1)}(x)]$$

↑ Differentialquotient  $n$ -ter Ordnung

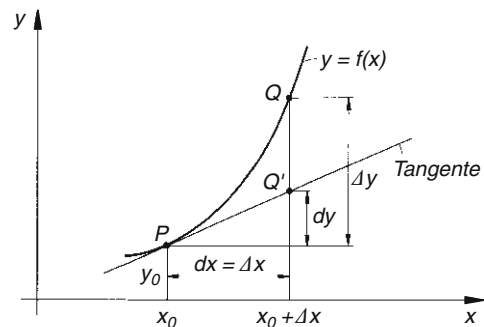
## 1.5 Differential einer Funktion

Zuwachs des Funktionswertes bzw. der Ordinate auf der *Kurve*:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Zuwachs des Funktionswertes bzw. der Ordinate auf der *Tangente*:

$$dy = f'(x_0) dx \quad (dx = \Delta x)$$



$\Delta x$  und  $\Delta y$  sind die Koordinatenänderungen auf der *Kurve*,  $dx$  und  $dy$  die entsprechenden Koordinatenänderungen auf der in  $P$  errichteten *Kurventangente*, jeweils bezogen auf den Berührungspunkt  $P$ . Die Größe  $dy = f'(x_0) dx$  heißt *Differential* von  $f(x)$  und beschreibt die *Änderung* der Ordinate auf der *Kurventangente*, wenn man in der  $x$ -Richtung um  $dx = \Delta x$  fortschreitet. Für *kleine* Änderungen  $dx = \Delta x$  gilt dann:

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0) dx = f'(x_0) \Delta x$$

## 2 Erste Ableitung der elementaren Funktionen (Tabelle)

Funktion $f(x)$		Ableitung $f'(x)$
Potenzfunktion	$x^n$	$nx^{n-1}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
Arkusfunktionen	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	$e^x$	$e^x$
	$a^x$	$(\ln a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
Hyperbelfunktionen	$\sinh x$	$\cosh x$
	$\cosh x$	$\sinh x$
	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$
Areafunktionen	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
	$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

## 3 Ableitungsregeln

### 3.1 Faktorregel

Ein *konstanter* Faktor  $C$  bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$$

### 3.2 Summenregel

Eine *endliche* Summe von Funktionen darf *gliedweise* differenziert werden:

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \Rightarrow y' = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x)$$

*Linearkombinationen* von Funktionen, z. B. ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen) werden mit Hilfe der Faktor- und Summenregel differenziert.

### 3.3 Produktregel

Bei *zwei* Faktorfunktionen:

$$y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

■ **Beispiel**

$$y = \underbrace{(x^2 - 3x)}_u \cdot \underbrace{\sin x}_v \quad (u' = 2x - 3, \quad v' = \cos x)$$

$$y' = u'v + uv' = (2x - 3) \cdot \sin x + (x^2 - 3x) \cdot \cos x$$

■

Bei *drei* Faktorfunktionen:

$$y = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) \\ \Rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$$

■ **Beispiel**

$$y = \underbrace{x^3}_u \cdot \underbrace{e^x}_v \cdot \underbrace{\arctan x}_w \quad \left( u' = 3x^2, \quad v' = e^x, \quad w' = \frac{1}{1+x^2} \right)$$

$$y' = u'vw + uv'w + uvw' = 3x^2 \cdot e^x \cdot \arctan x + x^3 \cdot e^x \cdot \arctan x + x^3 \cdot e^x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \\ = x^2 \cdot e^x \left( (3+x) \cdot \arctan x + \frac{x}{1+x^2} \right)$$

■



### 3.4 Quotientenregel

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \quad (v(x) \neq 0)$$

Gebrochenrationale Funktionen werden nach dieser Regel differenziert.

■ **Beispiel**

$$y = \frac{3x^2 - x}{\sin x} \quad (u = 3x^2 - x, \quad v = \sin x, \quad u' = 6x - 1, \quad v' = \cos x)$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(6x - 1) \cdot \sin x - (3x^2 - x) \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

■

### 3.5 Kettenregel

Die Ableitung einer aus den beiden (elementaren) Funktionen  $y = F(u)$  und  $u = u(x)$  *zusammengesetzten* (*verketteten*) Funktion  $y = F(u(x)) = f(x)$  ist das *Produkt* aus der *äußeren* und der *inneren* Ableitung (sog. *Kettenregel*):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad f'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$$

*Bezeichnungen*

$$\left. \begin{array}{ll} y = F(u): & \text{Äußere Funktion} \\ u = u(x): & \text{Innere Funktion} \end{array} \right\} y = F(u(x)) = f(x)$$

$$\frac{dy}{du} = F'(u): \quad \text{Äußere Ableitung (Ableitung der äußeren Funktion)}$$

$$\frac{du}{dx} = u'(x): \quad \text{Innere Ableitung (Ableitung der inneren Funktion)}$$

#### Zur Anwendung der Kettenregel

Die vorgegebene (*nicht* elementar differenzierbare) Funktion  $y = f(x)$  wird zunächst mit Hilfe einer möglichst einfachen *Substitution*  $u = u(x)$  in eine von der „Hilfsvariablen“  $u$  abhängige (elementare) Funktion  $y = F(u)$  übergeführt:

$$y = f(x) \xrightarrow[u = u(x)]{\text{Substitution}} y = F(u)$$

Die Substitution  $u = u(x)$  ist dabei die *innere* Funktion,  $y = F(u)$  die *äußere* Funktion. *Beide* Funktionen müssen elementar nach der jeweiligen unabhängigen Variablen (d. h. nach  $x$  bzw. nach  $u$ ) differenzierbar sein. Die beiden Ableitungen (innere und äußere Ableitung) werden dann miteinander multipliziert, anschließend wird die Hilfsvariable  $u$  durch „Rücksubstitution“ beseitigt.

■ **Beispiel**

Gegeben:  $y = f(x) = \ln(1 + x^2)$

Gesucht:  $y' = f'(x)$

„Grundform“: Logarithmusfunktion  $\ln u$

Substitution:  $u = u(x) = 1 + x^2$

Äußere und innere Funktion:

$$y = F(u) = \ln u \quad \text{mit} \quad u = u(x) = 1 + x^2$$

Kettenregel (mit nachträglicher Rücksubstitution):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{2x}{u} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

■

**Kettenregel für dreifach verschachtelte Funktionen**

Gegeben ist die Funktion

$$y = F(v) \quad \text{mit} \quad v = v(u) \quad \text{und} \quad u = u(x).$$

Die Ableitung der *mittelbar* von der Variablen  $x$  abhängigen (verketteten) Funktion  $y = F(v(u(x))) = f(x)$  nach der Variablen  $x$  wird wie folgt gebildet:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad f'(x) = F'(v) \cdot v'(u) \cdot u'(x)$$

Die vorgegebene Funktion  $y = f(x)$  wird mit Hilfe *zweier* Substitutionen in eine elementar differenzierbare Funktion der „Hilfsvariablen“  $v$  übergeführt (die Substitutionen werden von innen nach außen ausgeführt). Dabei müssen die äußere Funktion  $y = F(v)$  und die beiden inneren Funktionen  $v = v(u)$  und  $u = u(x)$  nach der jeweiligen unabhängigen Variablen elementar differenzierbar sein.

■ **Beispiel**

$$y = f(x) = \sin^3(x^2 + x), \quad y' = f'(x) = ?$$

Schrittweise Zerlegung der nicht elementaren Funktion von innen nach außen mit Hilfe zweier Substitutionen.

$$1. \text{ Substitution: } u + x^2 + x \Rightarrow y = \sin^3 u = (\sin u)^3$$

$$2. \text{ Substitution: } v = \sin u \Rightarrow y = v^3$$

Somit gilt:

$$y = v^3 \quad \text{mit} \quad v = \sin u \quad \text{und} \quad u = x^2 + x$$

Kettenregel (erst  $y$  nach  $v$  differenzieren, dann  $v$  nach  $u$  und schließlich  $u$  nach  $x$ ):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3v^2 \cdot \cos u \cdot (2x + 1) = 3(2x + 1)v^2 \cdot \cos u$$

Rücksubstitution (in der Reihenfolge  $v \rightarrow u \rightarrow x$ ):

$$y' = 3(2x + 1) \cdot (\sin u)^2 \cdot \cos u = 3(2x + 1) [\sin(x^2 + x)]^2 \cdot \cos(x^2 + x)$$

■

### 3.6 Logarithmische Differentiation

Bei der *logarithmischen* Differentiation wird die Funktion  $y = f(x)$  zunächst beiderseits *logarithmiert* und anschließend unter Verwendung der Kettenregel *differenziert*. Die Ableitung der *logarithmierten* Funktion  $\ln y = \ln f(x)$  heißt *logarithmische Ableitung* von  $y = f(x)$ . Es gilt:

$$\frac{d}{dx} (\ln y) = \frac{1}{y} \cdot y'$$

Anwendung findet die logarithmische Differentiation z. B. bei Funktionen vom Typ  $y = [u(x)]^{v(x)}$  mit  $u(x) > 0$ .

#### ■ Beispiel

$$y = f(x) = x^{\cos x}, \quad x > 0$$

$$\text{Logarithmieren: } \ln y = \ln x^{\cos x} = \cos x \cdot \ln x$$

$$\text{Differenzieren: } \frac{d}{dx} (\ln y) = \frac{d}{dx} (\cos x \cdot \ln x)$$

Die linke Seite wird nach der Kettenregel, die rechte Seite nach der Produktregel differenziert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot y' &= -\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} = \frac{-x \cdot \sin x \cdot \ln x + \cos x}{x} \\ y' &= y \left( \frac{-x \cdot \sin x \cdot \ln x + \cos x}{x} \right) = x^{\cos x} \left( \frac{-x \cdot \sin x \cdot \ln x + \cos x}{x} \right) \end{aligned}$$

■

### 3.7 Ableitung der Umkehrfunktion

$y = f(x)$  sei eine *umkehrbare* Funktion,  $x = g(y)$  die nach der Variablen  $x$  aufgelöste Form von  $y = f(x)$  ( $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ ). Zwischen den Ableitungen  $f'(x)$  und  $g'(y)$  besteht dann die Beziehung

$$f'(x) \cdot g'(y) = 1 \quad \text{oder} \quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (f'(x) \neq 0)$$

aus der sich die Ableitung  $g'(x)$  der *Umkehrfunktion*  $y = g(x)$  bestimmen lässt, indem man zunächst in der Ableitung  $f'(x)$  die Variable  $x$  durch  $g(y)$  *ersetzt* und anschließend auf beiden Seiten die Variablen  $x$  und  $y$  miteinander *vertauscht*.

#### ■ Beispiel

$$\text{Gegeben: } y = f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\text{Gesucht: Ableitung der Umkehrfunktion } g(x) = \arctan x$$

$$y = f(x) = \tan x \Leftrightarrow x = g(y) = \arctan y \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$\text{Nach Vertauschen der beiden Variablen folgt hieraus: } g'(x) = \frac{d}{dx} (\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

■

### 3.8 Implizite Differentiation

Die Gleichung der Funktion (Kurve) liege in der *impliziten* Form  $F(x; y) = 0$  vor. Die *Ableitung* lässt sich dann nach einer der beiden folgenden Methoden bestimmen.

#### 1. Methode: Implizite Differentiation unter Verwendung der Kettenregel

Die Funktionsgleichung  $F(x; y) = 0$  wird *gliedweise* nach der Variablen  $x$  differenziert, wobei  $y$  als eine von  $x$  abhängige Funktion zu betrachten ist. Daher ist *jeder* die Variable  $y$  enthaltende Term unter Verwendung der *Kettenregel* zu differenzieren. Anschließend wird die Gleichung nach  $y'$  aufgelöst (falls überhaupt möglich).

##### ■ Beispiel

$$\text{Kreis: } x^2 + y^2 = 16 \quad \text{oder} \quad F(x; y) = x^2 + y^2 - 16 = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 16) = 2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}$$

Der Term  $y^2$  wurde dabei nach der *Kettenregel* differenziert (Ergebnis:  $2y \cdot y'$ ).

■

#### 2. Methode: Implizite Differentiation unter Verwendung partieller Ableitungen

$$y' = -\frac{F_x(x; y)}{F_y(x; y)} \quad (F_y(x; y) \neq 0)$$

$F_x(x; y)$ ,  $F_y(x; y)$ : *Partielle Ableitungen* 1. Ordnung von  $z = F(x; y)$  (siehe IX.2.1)

Die Ableitung  $y'$  wird i. Allg. von *beiden* Variablen, d. h. von  $x$  und  $y$  abhängen.

##### ■ Beispiel

$$\text{Kreis: } x^2 + y^2 = 16 \quad \text{oder} \quad F(x; y) = x^2 + y^2 - 16 = 0$$

$$F_x(x; y) = 2x, \quad F_y(x; y) = 2y \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{F_x(x; y)}{F_y(x; y)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

■

### 3.9 Ableitungen einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve)

*Erste* Ableitung (Kurvenanstieg) und *zweite* Ableitung einer in der *Parameterform*  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  dargestellten Funktion (Kurve) lassen sich wie folgt bilden:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \left| \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \quad (\dot{x} \neq 0) \right.$$

Die Punkte kennzeichnen dabei die Ableitungen nach dem *Parameter*  $t$ .

■ **Beispiel**

Mittelpunktsellipse:  $x = a \cdot \cos t, \quad y = b \cdot \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi$

$$\dot{x} = -a \cdot \sin t, \quad \dot{y} = b \cdot \cos t \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{b \cdot \cos t}{-a \cdot \sin t} = -\frac{b}{a} \cdot \cot t$$

### 3.10 Ableitungen einer in Polarkoordinaten dargestellten Kurve

Eine in *Polarkoordinaten* dargestellte Kurve mit der Gleichung  $r = r(\varphi)$  lautet in der *Parameterform* wie folgt:

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos \varphi, \quad y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin \varphi$$

Für die *erste* Ableitung (Kurvenanstieg) und die *zweite* Ableitung gelten dann:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi}{\dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi} \quad \left| \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}{(\dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi)^3} \right.$$

Die Punkte kennzeichnen dabei die Ableitungen nach dem *Winkelparameter*  $\varphi$ .

■ **Beispiel**

Wir bestimmen den Kurvenanstieg der *Kardioide*  $r = 1 + \cos \varphi$  in dem zum Polarwinkel  $\varphi = \pi/4$  gehörenden Kurvenpunkt:

$$\begin{aligned} r &= 1 + \cos \varphi, \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} = -\sin \varphi \\ y' &= \frac{\dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi}{\dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi} = \frac{-\sin \varphi \cdot \sin \varphi + (1 + \cos \varphi) \cdot \cos \varphi}{-\sin \varphi \cdot \cos \varphi - (1 + \cos \varphi) \cdot \sin \varphi} = \\ &= \frac{-\sin^2 \varphi + \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{-2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \sin \varphi} = \frac{2 \cdot \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1}{-\sin \varphi (1 + 2 \cdot \cos \varphi)} \Rightarrow y'(\varphi = \pi/4) = -0,414 \end{aligned}$$

## 4 Anwendungen der Differentialrechnung

### 4.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung

*Geschwindigkeit*  $v$  und *Beschleunigung*  $a$  einer *geradlinigen* Bewegung erhält man als 1. bzw. 2. *Ableitung* des Weg-Zeit-Gesetzes  $s = s(t)$  nach der Zeit  $t$ :

$$\text{Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz: } v(t) = \dot{s}(t)$$

$$\text{Beschleunigung-Zeit-Gesetz: } a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

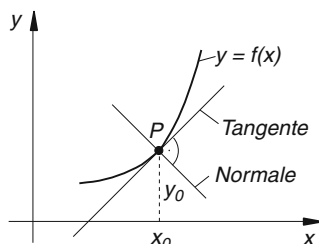
## 4.2 Tangente und Normale

*Tangente* und *Normale* im Kurvenpunkt  $P = (x_0; y_0)$  einer Kurve  $y = f(x)$  stehen *senkrecht* aufeinander. Ihre Gleichungen lauten (in der Punkt-Steigungs-Form):

$$\text{Tangente: } \frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\text{Normale: } \frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$f'(x_0) \neq 0$$



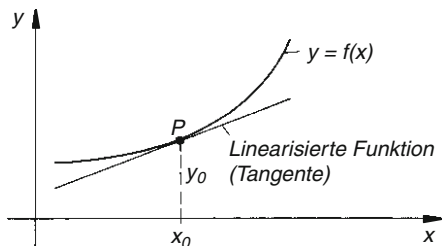
## 4.3 Linearisierung einer Funktion

Eine nichtlineare Funktion  $y = f(x)$  lässt sich in der unmittelbaren Umgebung des Kurvenpunktes  $P = (x_0; y_0)$  (in den Anwendungen meist als *Arbeitspunkt* bezeichnet) durch die dortige *Kurventangente*, d. h. durch eine *lineare* Funktion approximieren. Die Gleichung der *linearisierten* Funktion lautet:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

oder

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$



$\Delta x, \Delta y$ : *Relativkoordinaten* bezüglich des Arbeitspunktes  $P = (x_0; y_0)$   
 $(\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0)$

### ■ Beispiel

Wir *linearisieren* die Funktion  $y = (x + 1) \cdot e^x$  in der Umgebung der Stelle  $x_0 = 0$ :

$$y_0 = y(0) = 1 \Rightarrow \text{Arbeitspunkt: } P = (0; 1)$$

$$y' = 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x = (x + 2) \cdot e^x \Rightarrow y'(0) = 2$$

$$\text{Linearisierte Funktion: } y - 1 = 2(x - 0) \text{ oder } y = 2x + 1$$

Bei Verwendung von *Relativkoordinaten* bezüglich des Arbeitspunktes  $P$ :  $\Delta y = 2 \Delta x$

■

## 4.4 Monotonie und Krümmung einer Kurve

### 4.4.1 Geometrische Deutung der 1. und 2. Ableitung

Das Verhalten einer (differenzierbaren) Funktion  $y = f(x)$  in einem Intervall  $I$  wird im wesentlichen durch die *ersten beiden* Ableitungen bestimmt.

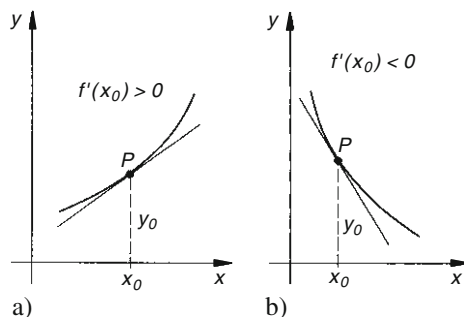
#### Monotonie-Verhalten

Die 1. Ableitung  $y' = f'(x)$  ist die *Steigung* der Kurventangente und bestimmt somit das *Monotonie-Verhalten* der Funktion:

$y' = f'(x_0) > 0$ :	streng monoton wachsend (Bild a))
$y' = f'(x_0) < 0$ :	streng monoton fallend (Bild b))

$$f'(x_0) \geq 0: \text{ monoton wachsend}$$

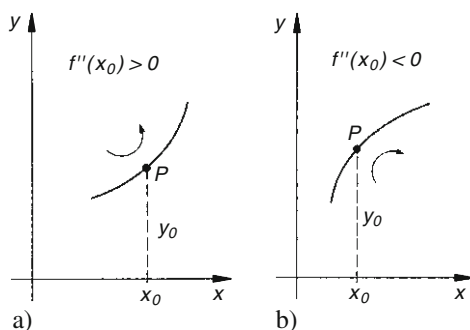
$$f'(x_0) \leq 0: \text{ monoton fallend}$$



#### Krümmungs-Verhalten

Die 2. Ableitung  $y'' = f''(x)$  bestimmt das *Krümmungs-Verhalten* der Funktion:

$y'' = f''(x_0) > 0$ :	Linkskrümmung (konvexe Krümmung, Bild a))
$y'' = f''(x_0) < 0$ :	Rechtskrümmung (konkave Krümmung, Bild b))



Der Drehpfeil in den nebenstehenden Bildern kennzeichnet den *Drehsinn* der Kurventangente beim Durchlaufen des Punktes  $P$  in positiver  $x$ -Richtung.

*Hinweis:* Siehe hierzu auch XIV.1.5

### 4.4.2 Krümmung einer ebenen Kurve

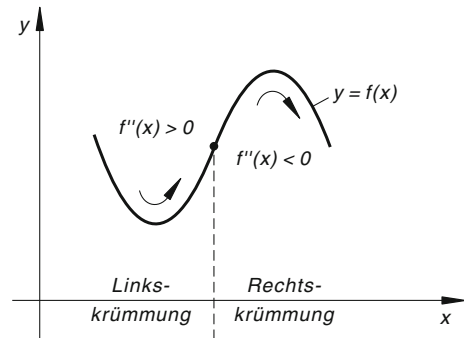
#### Kurvenkrümmung

Die *Krümmung*  $\kappa$  einer ebenen Kurve  $y = f(x)$  im Kurvenpunkt  $P = (x; y)$  ist ein *quantitatives* Maß dafür, wie stark der Kurvenverlauf in der unmittelbaren Umgebung dieses Punktes von dem einer *Geraden* abweicht:

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

$\kappa > 0 \Leftrightarrow$  Linkskrümmung

$\kappa < 0 \Leftrightarrow$  Rechtskrümmung



#### Krümmungskreis

Der *Krümmungskreis* einer Kurve  $y = f(x)$  im Kurvenpunkt  $P = (x; y)$  berührt dort die Kurve von 2. Ordnung (gemeinsame Tangente, dieselbe Krümmung). Der Radius  $\varrho$  dieses Kreises heißt *Krümmungsradius*, der Mittelpunkt  $M = (x_0; y_0)$  *Krümmungsmittelpunkt*.

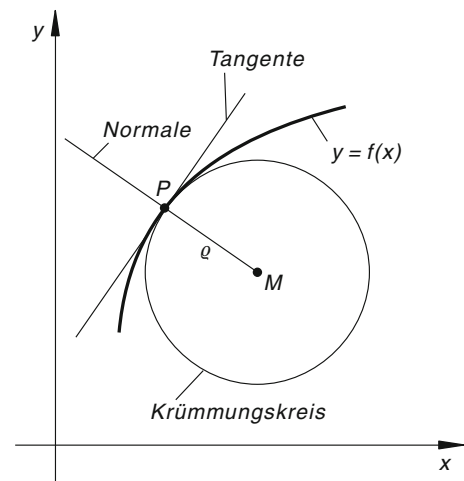
#### Krümmungsradius $\varrho$

$$\varrho = \frac{1}{|\kappa|} = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|}$$

#### Krümmungsmittelpunkt $M = (x_0; y_0)$

$$x_0 = x - y' \cdot \frac{1 + (y')^2}{y''}$$

$$y_0 = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}$$



$x, y$ : Koordinaten des Kurvenpunktes  $P$

$y', y''$ : 1. bzw. 2. Ableitung von  $y = f(x)$  im Kurvenpunkt  $P$



Der *Krümmungsmittelpunkt*  $M$  liegt stets auf der *Kurvennormale* des Berührungspunktes  $P$ . Die Verbindungslinie aller Krümmungsmittelpunkte einer Kurve heißt *Evolute*, die Kurve selbst wird als *Evolvente* bezeichnet. Die Koordinaten  $x_0$  und  $y_0$  des Krümmungsmittelpunktes sind dabei Funktionen der  $x$ -Koordinate des laufenden Kurvenpunktes  $P$  und bilden daher eine *Parameterdarstellung* der zur Kurve  $y = f(x)$  gehörenden Evolute.

### Sonderfälle

Gerade:  $\kappa = 0$ ,  $\varrho = \infty$

Kreis:  $|\kappa| = 1/r$ ,  $\varrho = r = \text{const.}$  ( $r$ : Kreisradius)

### ■ Beispiel

Wir bestimmen die *Krümmung* und den *Krümmungskreis* der Sinusfunktion an der Stelle  $x = \pi/2$ , d. h. im Punkt  $P = (\pi/2; 1)$ :

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x$$

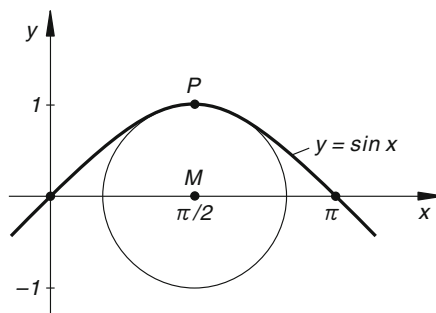
$$\kappa = \frac{-\sin x}{[1 + \cos^2 x]^{3/2}} \Rightarrow \kappa(\pi/2) = \frac{-\sin(\pi/2)}{[1 + \cos^2(\pi/2)]^{3/2}} = \frac{-1}{(1 + 0^2)^{3/2}} = -1$$

*Krümmungsradius:*

$$\varrho(\pi/2) = \frac{1}{|\kappa(\pi/2)|} = \frac{1}{|-1|} = 1$$

*Krümmungsmittelpunkt:*  $M = (\pi/2; 0)$

*Begründung:* Im Punkt  $P$  verläuft die Tangente *waagerecht*, die Normale somit parallel zur  $y$ -Achse. Der Krümmungsmittelpunkt  $M$  liegt im Abstand  $\varrho = 1$  unterhalb von  $P$  und somit auf der  $x$ -Achse.



## 4.5 Relative Extremwerte (relative Maxima, relative Minima)

Eine Funktion  $y = f(x)$  besitzt in  $x_0$  ein *relatives Maximum* bzw. ein *relatives Minimum*, wenn in einer gewissen Umgebung von  $x_0$  stets

$$f(x_0) > f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x_0) < f(x)$$

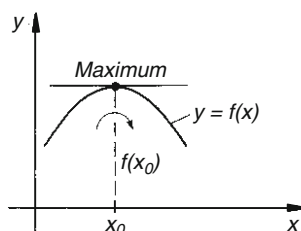
ist ( $x \neq x_0$ ).

Die folgenden Bedingungen sind *hinreichend* (Voraussetzung:  $f(x)$  ist mindestens zweimal differenzierbar):

### Relatives Maximum (Hochpunkt)

Die Kurve besitzt in  $x_0$  eine *waagerechte Tangente* und *Rechtskrümmung*:

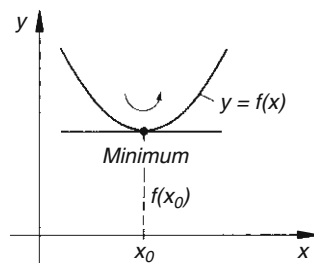
$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0$$



### Relatives Minimum (Tiefpunkt)

Die Kurve besitzt in  $x_0$  eine *waagerechte Tangente* und *Linkskrümmung*:

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0$$



#### ■ Beispiel

Wir bestimmen die *relativen Extremwerte* der Funktion  $y = x^2 \cdot e^{-x}$ . Die dabei benötigten Ableitungen  $y'$  und  $y''$  erhalten wir jeweils mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel*:

$$y = \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{e^{-x}}_v \Rightarrow y' = u'v + v'u = 2x \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot (-1)x^2 = (2x - x^2) \cdot e^{-x}$$

$$\begin{aligned} y' &= \underbrace{(2x - x^2)}_u \cdot \underbrace{e^{-x}}_v \Rightarrow y'' = u'v + v'u = (2 - 2x) \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot (-1)(2x - x^2) = \\ &= (2 - 4x + x^2) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

$$y' = 0 \Rightarrow (2x - x^2) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0; \quad x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 0,5413$$

$$y''(x_1 = 0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min} = (0; 0)$$

$$y''(x_2 = 2) = -2 \cdot e^{-2} < 0 \Rightarrow \text{Max} = (2; 0,5413)$$

■

### Allgemeines Kriterium für einen relativen Extremwert

In einigen Fällen *versagen* die oben genannten Kriterien, wenn nämlich neben  $f'(x_0)$  auch  $f''(x_0)$  verschwindet. Dann entscheidet die *nächstfolgende, nichtverschwindende* Ableitung  $f^{(n)}(x_0)$  wie folgt über *Existenz* und *Art* eines Extremwertes:

$$f'(x_0) = 0 \quad (\text{waagerechte Tangente})$$

Die *nächstfolgende, nichtverschwindende* Ableitung sei  $f^{(n)}(x_0)$  ( $n \geq 2$ ):

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0 \begin{cases} n = \text{gerade} & \Rightarrow \text{Extremwert} \begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0: \text{Maximum} \\ f^{(n)}(x_0) > 0: \text{Minimum} \end{cases} \\ n = \text{ungerade} & \Rightarrow \text{Sattelpunkt} \quad (\text{siehe IV.4.6}) \end{cases}$$

■ **Beispiel**

Wir untersuchen die Funktion  $y = x^4$  auf *relative Extremwerte*:

$$y = x^4, \quad y' = 4x^3, \quad y'' = 12x^2$$

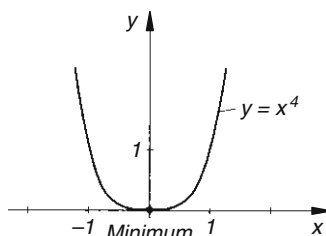
$$y' = 4x^3 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

$$y''(0) = 0 \Rightarrow \text{Kriterium versagt}$$

$$y''' = 24x \Rightarrow y'''(0) = 0$$

$$y^{(4)} = 24 \Rightarrow y^{(4)}(0) = 24 \neq 0$$

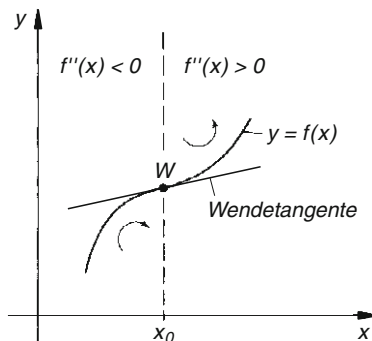
Es ist  $n = 4$ , d. h. *gerade* und  $y^{(4)}(0) > 0$ . Die Funktion  $y = x^4$  besitzt somit an der Stelle  $x_0 = 0$  ein (sogar absolutes) *Minimum*.

**4.6 Wendepunkte, Sattelpunkte****Wendepunkt**

In einem *Wendepunkt* ändert sich die *Art der Kurvenkrümmung*, d. h. die Kurve geht dort von einer *Links-* in eine *Rechtskurve* über *oder umgekehrt*. In einem Wendepunkt ändert sich somit der *Drehsinn* der Kurventangente. Die folgende Bedingung ist *hinreichend*:

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0$$

*Wendetangente*: Tangente im Wendepunkt

**Sattelpunkt**

Ein *Sattelpunkt* (auch Terrassenpunkt genannt) ist ein *Wendepunkt* mit *waagerechter Tangente*. Die *hinreichende* Bedingung lautet daher:

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0$$

■ **Beispiel**

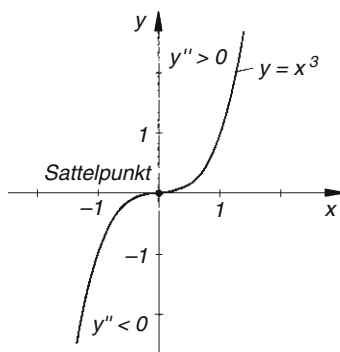
Die kubische Parabel  $y = x^3$  besitzt an der Stelle  $x_0 = 0$  einen *Sattelpunkt*:

$$y' = 3x^2, \quad y'' = 6x, \quad y''' = 6$$

$$y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 6 \neq 0$$

*Sattelpunkt*:  $(0; 0)$

*Wendetangente*:  $y = 0$  ( $x$ -Achse)

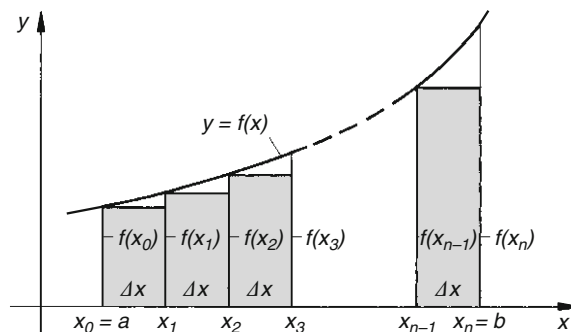


# V Integralrechnung

## 1 Bestimmtes Integral

### 1.1 Definition eines bestimmten Integrals

Das *bestimmte Integral*  $\int_a^b f(x) dx$  lässt sich in anschaulicher Weise als *Flächeninhalt*  $A$  zwischen der *stetigen* Funktion  $y = f(x)$ , der  $x$ -Achse und den beiden zur  $y$ -Achse parallelen Geraden  $x = a$  und  $x = b$  deuten, sofern die Kurve im gesamten Intervall  $a \leq x \leq b$  oberhalb der  $x$ -Achse verläuft.



Wir zerlegen zunächst die Fläche in  $n$  Streifen *gleicher* Breite  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , ersetzen jeden Streifen in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise durch ein *Rechteck* und summieren dann über alle Rechtecksflächen. Dies führt (bei einer monoton wachsenden Funktion) zu der sog. *Untersumme*

$$U_n = f(x_0) \Delta x + f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \Delta x = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x$$

die einen *Näherungswert* für den gesuchten Flächeninhalt darstellt. Beim Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  (und somit  $\Delta x \rightarrow 0$ ) strebt die Untersumme  $U_n$  gegen einen *Grenzwert*, der als *bestimmtes Integral* von  $f(x)$  in den Grenzen von  $x = a$  bis  $x = b$  bezeichnet wird und geometrisch als *Flächeninhalt*  $A$  unter der Kurve  $y = f(x)$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  interpretiert werden darf.

Symbolische Schreibweise:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x$$

*Bezeichnungen*

$x$ : Integrationsvariable

$f(x)$ : Integrandfunktion (kurz: Integrand)

$a, b$ : Untere bzw. obere Integrationsgrenze

Das Integral existiert, wenn  $f(x)$  *stetig* ist oder aber *beschränkt* ist und nur *endlich* viele Unstetigkeiten im Integrationsintervall enthält.

## 1.2 Berechnung eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(sog. *Hauptsatz der Integralrechnung*)

$F(x)$  ist dabei irgendeine *Stammfunktion* von  $f(x)$  ( $F'(x) = f(x)$ , siehe V.2.2).

### ■ Beispiele

$$(1) \quad \int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

Denn  $F(x) = \sin x$  ist wegen  $F'(x) = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$  eine *Stammfunktion* von  $f(x) = \cos x$ .

$$(2) \quad \int_{-3}^3 (x^2 - 4x + 1) dx = ?$$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x$  ist eine Stammfunktion des Integranden  $f(x) = x^2 - 4x + 1$ , da

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x \right) = x^2 - 4x + 1 = f(x)$$

gilt. Somit ist

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 (x^2 - 4x + 1) dx &= \left[ \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x \right]_{-3}^3 = \\ &= (9 - 18 + 3) - (-9 - 18 - 3) = \\ &= -6 - (-30) = 24 \end{aligned}$$

■

### 1.3 Elementare Integrationsregeln für bestimmte Integrale

#### Regel 1: Faktorregel

Ein *konstanter* Faktor  $C$  darf *vor* das Integral gezogen werden:

$$\int_a^b C \cdot f(x) \, dx = C \cdot \int_a^b f(x) \, dx \quad (C \in \mathbb{R})$$

#### Regel 2: Summenregel

Eine *endliche* Summe von Funktionen darf *gliedweise* integriert werden:

$$\int_a^b [f_1(x) + \dots + f_n(x)] \, dx = \int_a^b f_1(x) \, dx + \dots + \int_a^b f_n(x) \, dx$$

#### Regel 3: Vertauschungsregel

*Vertauschen* der Integrationsgrenzen bewirkt einen *Vorzeichenwechsel* des Integrals:

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$$

**Regel 4:** Fallen die Integrationsgrenzen *zusammen* ( $a = b$ ), so ist der Integralwert gleich *Null*:

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0$$

*Geometrische Deutung:* Flächeninhalt unter der Kurve = 0

**Regel 5:** Für jede Stelle  $c$  aus dem Integrationsintervall gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (a \leq c \leq b)$$

*Geometrische Deutung:* Zerlegung der Fläche in zwei Teilflächen

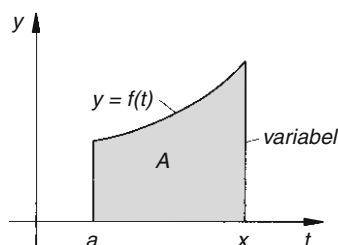
## 2 Unbestimmtes Integral

### 2.1 Definition eines unbestimmten Integrals

Das *unbestimmte Integral*  $I(x) = \int_a^x f(t) dt$  beschreibt den *Flächeninhalt*  $A$  zwischen der *stetigen Kurve*  $y = f(t)$  und der  $t$ -Achse im Intervall  $a \leq t \leq x$  in Abhängigkeit von der *oberen* (variabel gehaltenen) Grenze  $x$  und wird daher auch als *Flächenfunktion* bezeichnet (Voraussetzung:  $f(t) \geq 0$  und  $x \geq a$ ).

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Man beachte: Ein *bestimmtes* Integral ist eine *Zahl* (Flächeninhalt  $A$ ), ein *unbestimmtes* Integral dagegen eine *Funktion* der oberen Grenze  $x$  (Flächenfunktion  $I(x)$ )!



### 2.2 Allgemeine Eigenschaften der unbestimmten Integrale

1. Zu jeder *stetigen* Funktion  $f(x)$  gibt es *unendlich* viele unbestimmte Integrale, die sich in ihrer *unteren* Integrationsgrenze voneinander unterscheiden.
2. Die *Differenz* zweier unbestimmter Integrale von  $f(x)$  ist eine *Konstante*.
3. *Differenziert* man ein unbestimmtes Integral  $I(x) = \int_a^x f(t) dt$  nach der *oberen* Grenze  $x$ , so erhält man die *Integrandfunktion*  $f(x)$  (sog. *Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung*):

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dx} = I'(x) = f(x)$$

Allgemein wird eine differenzierbare Funktion  $F(x)$  mit der Eigenschaft  $F'(x) = f(x)$  als eine *Stammfunktion* von  $f(x)$  bezeichnet. In diesem Sinne lässt sich der *Fundamentalsatz* auch wie folgt formulieren: Jedes *unbestimmte* Integral  $I(x) = \int_a^x f(t) dt$  von  $f(x)$  ist eine *Stammfunktion* von  $f(x)$ .

4. Ist  $F(x)$  irgendeine Stammfunktion von  $f(x)$  und  $C_1$  eine geeignete reelle Konstante, so gilt

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) + C_1$$

Die Konstante  $C_1$  lässt sich aus der Bedingung  $I(a) = F(a) + C_1 = 0$  berechnen:  $C_1 = -F(a)$ .

5. Die Menge aller Funktionen vom Typ  $I(x) + K = \int_a^x f(t) dt + K$  wird als *unbestimmtes Integral* von  $f(x)$  bezeichnet und durch das Symbol  $\int f(x) dx$  gekennzeichnet (die Integrationsgrenzen werden weggelassen):

$$\int f(x) dx \equiv \int_a^x f(t) dt + K \quad (K \in \mathbb{R})$$

Die Begriffe „Stammfunktion von  $f(x)$ “ und „unbestimmtes Integral von  $f(x)$ “ sind somit *gleichwertig*. Das *unbestimmte* Integral  $\int f(x) dx$  von  $f(x)$  ist daher in der Form

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (F'(x) = f(x))$$

darstellbar, wobei  $F(x)$  irgendeine Stammfunktion zu  $f(x)$  bedeutet und die Integrationskonstante  $C$  alle reellen Werte durchläuft. Das Aufsuchen *sämtlicher* Stammfunktionen  $F(x)$  zu einer vorgegebenen Funktion  $f(x)$  heißt *unbestimmte Integration*:

$$f(x) \xrightarrow{\text{unbestimmte Integration}} F(x) \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)$$

*Geometrische Deutung der Stammfunktionen:* Die Stammfunktionen (oder Integralkurven) zu einer stetigen Funktion  $f(x)$  bilden eine *inparametrische Kurvenschar*. Jede Integralkurve entsteht dabei aus jeder anderen durch *Parallelverschiebung* in der  $y$ -Richtung.

6. *Faktor- und Summenregel* für *bestimmte* Integrale gelten sinngemäß auch für *unbestimmte* Integrale (siehe V.1.3).

#### ■ Beispiel

$$\int (2x - \sin x) dx = ?$$

*Stammfunktion* zu  $f(x) = 2x - \sin x$ :  $F(x) = x^2 + \cos x$ , da  $F'(x) = 2x - \sin x = f(x)$  ist.

*Lösung:*  $\int (2x - \sin x) dx = F(x) + C = x^2 + \cos x + C \quad (C \in \mathbb{R})$

■



## 2.3 Tabelle der Grund- oder Stammintegrale

$C, C_1, C_2$ : Reelle Integrationskonstanten

$\int 0 \, dx = C$	$\int 1 \, dx = \int dx = x + C$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln  x  + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$
$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + C$	$\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx = -\coth x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln \left  x + \sqrt{x^2+1} \right  + C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arcosh}  x  + C = \ln \left  x + \sqrt{x^2-1} \right  + C \quad ( x  > 1)$	
$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) + C_1 &  x  < 1 \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) + C_2 &  x  > 1 \end{cases} \quad \text{für}$	

*Hinweis:* Im Anhang befindet sich eine ausführliche *Integraltafel* mit über 400 weiteren Integralen (gedruckt auf gelbem Papier).

## 3 Integrationsmethoden

### 3.1 Integration durch Substitution

#### 3.1.1 Allgemeines Verfahren

Das vorgegebene Integral  $\int f(x) dx$  wird mit Hilfe einer geeigneten *Substitution* wie folgt in ein *Grund-* oder *Stammintegral* übergeführt<sup>1)</sup>:

1. *Aufstellung der Substitutionsgleichungen:*

$$u = g(x), \quad \frac{du}{dx} = g'(x), \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$$

2. *Durchführung der Integralsubstitution:*

$$\int f(x) dx = \int \varphi(u) du$$

3. *Integration (Berechnung des neuen Integrals):*

$$\int \varphi(u) du = \Phi(u) \quad (\text{mit } \Phi'(u) = \varphi(u))$$

4. *Rücksubstitution:*

$$\int f(x) dx = \int \varphi(u) du = \Phi(u) = \Phi(g(x)) = F(x)$$

#### Anmerkungen

- (1) In bestimmten Fällen ist es günstiger, die „Hilfsvariable“  $u$  durch eine Substitution vom Typ  $x = h(u)$  einzuführen. Die Substitutionsgleichungen lauten dann:

$$x = h(u), \quad \frac{dx}{du} = h'(u), \quad dx = h'(u) du$$

- (2) Die Substitutionen  $u = g(x)$  und  $x = h(u)$  müssen monotone und stetig differenzierbare Funktionen sein.
- (3) Bei einem *bestimmten* Integral kann auf die Rücksubstitution *verzichtet* werden, wenn man die Integrationsgrenzen mit Hilfe der Substitutionsgleichung  $u = g(x)$  bzw.  $x = h(u)$  *mitsubstituiert*.

<sup>1)</sup> Dies gelingt nicht immer im 1. Schritt. Gegebenenfalls muß das neue Integral nach einer *anderen* Integrations-technik weiterbehandelt werden.

## 3.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen (Tabelle)

Integraltyp	Substitution	Neues Integral bzw. Lösung	Beispiel
(A) $\int f(ax + b) dx$	$u = ax + b$ $dx = \frac{du}{a}$	$\frac{1}{a} \cdot \int f(u) du$	$\int \sqrt{4x + 5} dx$ ( $u = 4x + 5$ )
(B) $\int f(x) \cdot f'(x) dx$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\frac{1}{2} [f(x)]^2 + C$	$\int \sin x \cdot \cos x dx$ ( $u = \sin x$ )
(C) $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx$ ( $n \neq -1$ )	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + C$	$\int (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} dx$ ( $u = \ln x$ )
(D) $\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx$	$u = g(x)$ $dx = \frac{du}{g'(x)}$	$\int f(u) du$	$\int x \cdot e^{x^2} dx$ ( $u = x^2$ )
(E) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\ln  f(x)  + C$	$\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1} dx$ ( $u = x^2 - 3x + 1$ )
(F) $\int R\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$ R: Rationale Funktion von $x$ und $\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \cdot \sin u$ $dx = a \cdot \cos u du$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos u$		$\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ ( $x = 2 \cdot \sin u$ )
(G) $\int R\left(x; \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx$ R: Rationale Funktion von $x$ und $\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a \cdot \sinh u$ $dx = a \cdot \cosh u du$ $\sqrt{x^2 + a^2} = a \cdot \cosh u$		$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$ ( $x = 3 \cdot \sinh u$ )
(H) $\int R\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$ R: Rationale Funktion von $x$ und $\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \cdot \cosh u$ $dx = a \cdot \sinh u du$ $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \sinh u$		$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$ ( $x = 5 \cdot \cosh u$ )

**Tabelle** (Fortsetzung)

Integraltyp	Substitution	Neues Integral bzw. Lösung	Beispiel
(I) $\int R(\sin x; \cos x) dx$ $R$ : Rationale Funktion von $\sin x$ und $\cos x$	$u = \tan(x/2)$ $dx = \frac{2}{1+u^2} du$ $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$		$\int \frac{1+\cos x}{\sin x} dx$
(J) $\int R(\sinh x; \cosh x) dx$ $R$ : Rationale Funktion von $\sinh x$ und $\cosh x$	$u = e^x, dx = \frac{du}{u}$ $\sinh x = \frac{u^2 - 1}{2u}$ $\cosh x = \frac{u^2 + 1}{2u}$		$\int \frac{\sinh x + 1}{\cosh x} dx$

■ **Beispiel**

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos x dx = ?$$

Integraltyp (C):  $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx$  mit  $f(x) = \sin x$ ,  $f'(x) = \cos x$  und  $n = 4$

Substitution:  $u = \sin x$ ,  $\frac{du}{dx} = \cos x$ ,  $dx = \frac{du}{\cos x}$

Untere Grenze:  $x = 0 \Rightarrow u = \sin 0 = 0$

Obere Grenze:  $x = \pi/2 \Rightarrow u = \sin(\pi/2) = 1$

Integration: 
$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos x dx = \int_0^1 u^4 \cdot \cos x \frac{du}{\cos x} = \int_0^1 u^4 du = \left[ \frac{1}{5} u^5 \right]_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

**Alternative:** Die Integrationsgrenzen werden *nicht* mitsubstituiert, die Integration zunächst *unbestimmt* vorgenommen (Substitution  $u = \sin x$  wie oben). Dann wird rücksubstituiert und mit der gewonnenen Stammfunktion das bestimmte Integral berechnet (die Integrationskonstante darf weggelassen werden).

$$\int \sin^4 x \cdot \cos x dx = \int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + C = \frac{1}{5} (\sin x)^5 + C$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos x dx = \frac{1}{5} [(\sin x)^5]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5} \left[ \underbrace{(\sin \pi/2)^5}_1 - \underbrace{(\sin 0)^5}_0 \right] = \frac{1}{5} (1 - 0) = \frac{1}{5}$$

■

### 3.2 Partielle Integration (Produktintegration)

Die Formel der *partiellen Integration* lautet:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

In vielen Fällen lässt sich ein (unbestimmtes) Integral  $\int f(x) dx$  mit Hilfe dieser Formel wie folgt lösen. Der Integrand  $f(x)$  wird in „geeigneter“ Weise in ein *Produkt* aus zwei Funktionen  $u(x)$  und  $v'(x)$  zerlegt:  $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$ . Dabei ist  $v'(x)$  die erste Ableitung einer zunächst noch *unbekannten* Funktion  $v(x)$ . Dann gilt nach obiger Formel:

$$\int \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{Zerlegung in ein Produkt} \\ \uparrow}} dx = \int \underbrace{u(x) \cdot v'(x)}_{\substack{\text{Zerlegung in ein Produkt} \\ \uparrow}} dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Die Integration gelingt, wenn sich eine *Stammfunktion* zum „kritischen“ Faktor  $v'(x)$  angeben lässt und das neue „Hilfsintegral“ der rechten Seite *elementar lösbar* ist.

#### Anmerkungen

- (1) In einigen Fällen muss man *mehrmals* hintereinander partiell integrieren, ehe man auf ein *Grundintegral* stößt.
- (2) Die Formel der *partiellen Integration* gilt sinngemäß auch für *bestimmte* Integrale:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

#### ■ Beispiel

$$\int x \cdot \cos x dx = ?$$

Zerlegung des Integranden  $f(x) = x \cdot \cos x$  in zwei Faktoren  $u(x)$  und  $v'(x)$ :

$$u(x) = x, \quad v'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1, \quad v(x) = \sin x$$

Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} dx &= \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\sin x}_v - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\sin x}_v dx = x \cdot \sin x - \underbrace{\int \sin x dx}_{\text{Grundintegral}} \\ &= x \cdot \sin x - (-\cos x) + C = x \cdot \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

■

### 3.3 Integration einer gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden

Die Integration einer *gebrochenrationalen* Funktion  $f(x)$  geschieht nach dem folgenden Schema:

1. Ist die Funktion  $f(x)$  *unecht* gebrochenrational, so wird sie zunächst durch Polynomdivision in eine *ganzrationale* Funktion  $p(x)$  und eine *echt* gebrochenrationale Funktion  $r(x)$  zerlegt (siehe III.5.3):

$$f(x) = p(x) + r(x)$$

Diese Zerlegung *entfällt* natürlich bei einer *echt* gebrochenrationalen Funktion  $f(x)$ .

2. Der *echt* gebrochenrationale Anteil  $r(x)$  wird in *Partialbrüche* zerlegt (siehe Partialbruchzerlegung, V.3.3.1).
3. Anschließend erfolgt die *Integration* des ganzrationalen Anteils  $p(x)$  sowie sämtlicher Partialbrüche (siehe V.3.3.2).

Die *echt* gebrochenrationale Funktion ist dann als *Summe* sämtlicher Partialbrüche darstellbar. Besitzt der Nenner  $N(x)$  z. B. ausschließlich  $n$  *verschiedene einfache* Nullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , so lautet die Partialbruchzerlegung wie folgt:

$$r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

$N(x)$ ,  $Z(x)$ : Nenner- bzw. Zählerpolynom der echt gebrochenrationalen Funktion

#### 3.3.1 Partialbruchzerlegung

Die *Partialbruchzerlegung* einer *echt* gebrochenrationalen Funktion  $r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$  hängt noch von der *Art* der Nennernullstellen ab. Wir unterscheiden *zwei* Fälle:

##### 1. Fall: Der Nenner $N(x)$ besitzt ausschließlich reelle Nullstellen

Jeder Nullstelle  $x_1$  des Nenners  $N(x)$  wird nach dem folgenden Schema in eindeutiger Weise ein *Partialbruch* zugeordnet:

$$\begin{array}{ll} x_1: \text{ Einfache Nullstelle} & \rightarrow \frac{A}{x - x_1} \\ x_1: \text{ Zweifache Nullstelle} & \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} \\ \vdots & \\ x_1: \text{ } r\text{-fache Nullstelle} & \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r} \end{array}$$

*Berechnung der in den Partialbrüchen auftretenden Konstanten:*

Alle Brüche werden zunächst auf einen *gemeinsamen Nenner* gebracht (*Hauptnenner*) und dann mit diesem Hauptnenner *multipliziert*. Durch Einsetzen bestimmter  $x$ -Werte (z. B. der *Nullstellen* des Nenners) erhält man ein *lineares Gleichungssystem*, aus dem sich die noch unbekannten Konstanten berechnen lassen. Eine weitere Methode zur Bestimmung der Konstanten ist der *Koeffizientenvergleich*.

### ■ Beispiel

$$r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{-x^2 + 2x - 17}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} \quad (\text{echt gebrochenrationale Funktion})$$

*Nullstellen des Nenners:*

$$x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1, \quad x_3 = 5$$

*Zuordnung der Partialbrüche:*

$$x_{1/2} = 1 \text{ (zweifache Nullstelle): } \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}$$

$$x_3 = 5 \text{ (einfache Nullstelle): } \frac{B}{x-5}$$

*Ansatz für die Partialbruchzerlegung:*

$$\frac{-x^2 + 2x - 17}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} = \frac{-x^2 + 2x - 17}{(x-1)^2(x-5)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-5}$$

*Berechnung der Konstanten  $A_1$ ,  $A_2$  und  $B$ :*

$$\frac{-x^2 + 2x - 17}{(x-1)^2(x-5)} = \frac{A_1(x-1)(x-5) + A_2(x-5) + B(x-1)^2}{(x-1)^2(x-5)} \Rightarrow$$

$$-x^2 + 2x - 17 = A_1(x-1)(x-5) + A_2(x-5) + B(x-1)^2$$

Wir setzen für  $x$  zweckmäßigerweise der Reihe nach die Werte 1, 5 und 0 ein:

$$\boxed{x=1} \Rightarrow -16 = -4A_2 \Rightarrow A_2 = 4$$

$$\boxed{x=5} \Rightarrow -32 = 16B \Rightarrow B = -2$$

$$\begin{aligned} \boxed{x=0} &\Rightarrow -17 = 5A_1 - 5A_2 + B \Rightarrow -17 = 5A_1 - 5 \cdot 4 - 2 \Rightarrow \\ &-17 = 5A_1 - 22 \Rightarrow 5A_1 = 5 \Rightarrow A_1 = 1 \end{aligned}$$

*Partialbruchzerlegung:*

$$\frac{-x^2 + 2x - 17}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-5}$$

■

## 2. Fall: Der Nenner $N(x)$ besitzt neben reellen auch komplexe Nullstellen

Die *komplexen* Lösungen der Gleichung  $N(x) = 0$  treten immer *paarweise*, d. h. in *konjugiert komplexer* Form auf. Für zwei *einfache* konjugiert komplexe Nennernullstellen  $x_1$  und  $x_2$  lautet der *Partialbruchansatz* wie folgt:

$$\frac{Bx + C}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}$$

Dabei sind  $x_1$  und  $x_2$  die *konjugiert komplexen* Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$ . Entsprechend lautet der Ansatz für *mehrfache* konjugiert komplexe Nullstellen:

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{B_r x + C_r}{(x^2 + px + q)^r}$$

(der Nenner  $N(x)$  besitzt die jeweils  $r$ -fach auftretenden *konjugiert komplexen* Nullstellen  $x_1$  und  $x_2$ . Sie sind die Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$ ). Die Berechnung der Konstanten erfolgt wie im 1. Fall.

### ■ Beispiel

$$r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{3x^2 - 11x + 15}{x^3 - 4x^2 + 9x - 10} \quad (\text{echt gebrochenrationale Funktion})$$

Nullstellen des Nenners:

$$x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_{2/3} = 1 \pm 2j$$

Zuordnung der Partialbrüche:

$$x_1 = 2 \text{ (reell, einfach): } \frac{A_1}{x - 2}$$

$$x_{2/3} = 1 \pm 2j \text{ (konjugiert komplex, einfach): } \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5}$$

( $x_{2/3} = 1 \pm 2j$  sind die *konjugiert komplexen* Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 - 2x + 5 = 0$ , die beim Reduzieren der kubischen Gleichung  $N(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$  auftritt)

Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^2 - 11x + 15}{x^3 - 4x^2 + 9x - 10} = \frac{3x^2 - 11x + 15}{(x - 2)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5}$$

Berechnung der Konstanten  $A$ ,  $B$  und  $C$ :

$$\frac{3x^2 - 11x + 15}{(x - 2)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 - 2x + 5)} \Rightarrow$$

$$3x^2 - 11x + 15 = A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x - 2)$$

Wir setzen für  $x$  zweckmäßigerweise der Reihe nach die Werte 2, 1 und 0 ein:

$$\left. \begin{array}{lll} \boxed{x = 2} & \Rightarrow & 5 = 5A \\ \boxed{x = 1} & \Rightarrow & 7 = 4A - B - C \\ \boxed{x = 0} & \Rightarrow & 15 = 5A - 2C \end{array} \right\} \Rightarrow B = 2, \quad C = -5$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^2 - 11x + 15}{x^3 - 4x^2 + 9x - 10} = \frac{1}{x - 2} + \frac{2x - 5}{x^2 - 2x + 5}$$

■



### 3.3.2 Integration der Partialbrüche

Bei der *Integration* der Partialbrüche treten insgesamt vier verschiedene Integraltypen auf.

#### Bei reellen Nullstellen des Nenners $N(x)$

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{dx}{x - x_1} &= \ln |x - x_1| + C_1 \\ \int \frac{dx}{(x - x_1)^r} &= \frac{1}{(1 - r)(x - x_1)^{r-1}} + C_2 \quad (r \geq 2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{jeweils gelöst durch} \\ \text{die Substitution} \\ u = x - x_1 \end{array}$$

#### ■ Beispiel

$$\int \frac{-x^2 + 2x - 17}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} dx = ? \quad (\text{echt gebrochenrationale Funktion})$$

Partialbruchzerlegung des Integranden (siehe 1. Beispiel aus V.3.3.1):

$$\frac{-x^2 + 2x - 17}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} = \frac{1}{x - 1} + \frac{4}{(x - 1)^2} - \frac{2}{x - 5}$$

Integration der Partialbrüche:

$$\begin{aligned} \int \frac{-x^2 + 2x - 17}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} dx &= \int \frac{dx}{x - 1} + 4 \cdot \int \frac{dx}{(x - 1)^2} - 2 \cdot \int \frac{dx}{x - 5} = \\ &= \ln |x - 1| - \frac{4}{x - 1} - 2 \cdot \ln |x - 5| + C \end{aligned}$$

(Substitutionen  $u = x - 1$  bzw.  $v = x - 5$  grau unterlegt)

■

#### Bei konjugiert komplexen Nullstellen des Nenners $N(x)$

Im Falle *einfacher* konjugiert komplexer Nullstellen:

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx &= \frac{B}{2} \cdot \ln |x^2 + px + q| + \\ &+ \left( \frac{2C - Bp}{\sqrt{4q - p^2}} \right) \cdot \arctan \left( \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} \right) + C_3 \end{aligned}$$

Die bei *mehrfachen* konjugiert komplexen Nullstellen des Nenners auftretenden Integrale vom

Typ  $\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^r}$  bzw.  $\int \frac{x dx}{(x^2 + px + q)^r}$  mit  $r \geq 2$  entnimmt man der

**Integraltafel** im Anhang (falls  $p \neq 0 \rightarrow$  Integrale (63) bis (70); falls  $p = 0 \rightarrow$  Integrale (29) bis (34)).

### 3.4 Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden

Der Integrand  $f(x)$  des bestimmten oder unbestimmten Integrals wird in eine *Potenzreihe* entwickelt und anschließend *gliedweise* integriert (Voraussetzung: Der Integrationsbereich liegt *innerhalb* des Konvergenzbereiches der Reihe).

■ **Beispiel**

$$\int_0^1 \cos(\sqrt{x}) dx = ?$$

*Potenzreihe (Mac Laurinsche Reihe) für  $\cos z$  (siehe VI.3.4):*

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad (|z| < \infty)$$

*Substitution  $z = \sqrt{x}$ :*

$$\cos(\sqrt{x}) = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots \quad (x \geq 0)$$

*Gliedweise Integration:*

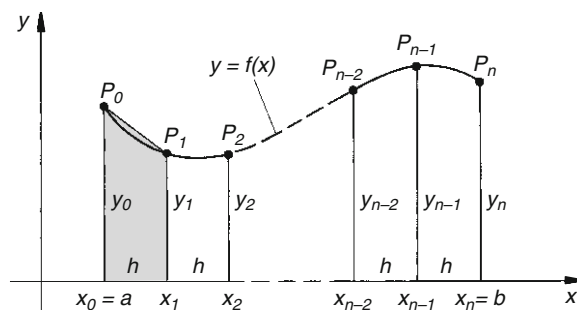
$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos(\sqrt{x}) dx &= \int_0^1 \left( 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots \right) dx = \\ &= \left[ x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 4!} - \frac{x^4}{4 \cdot 6!} + \dots \right]_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 4!} - \frac{1}{4 \cdot 6!} + \dots \approx 0,763 \text{ (auf drei Nachkommastellen genau)} \end{aligned}$$

■

### 3.5 Numerische Integration

#### 3.5.1 Trapezformel

Die Fläche unter der Kurve  $y = f(x)$  wird zunächst in  $n$  Streifen *gleicher* Breite  $h$  zerlegt, dann wird in jedem Streifen die krummlinige Begrenzung durch die *Sekante* ersetzt (der „Ersatzstreifen“ besitzt die Form eines *Trapezes*, im Bild grau unterlegt):



Die nachfolgende Trapezformel gilt unabhängig von dieser geometrischen Deutung (sofern das Integral existiert).

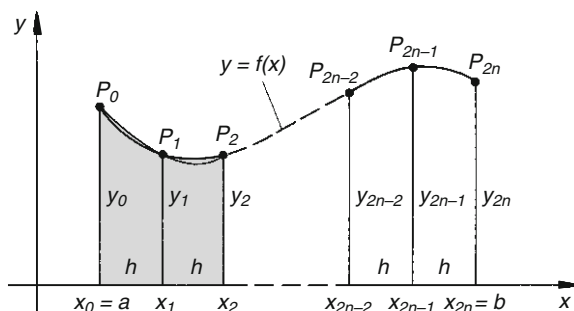
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right) h = \\ &= \left( \frac{1}{2} \underbrace{(y_0 + y_n)}_{\Sigma_1} + \underbrace{(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})}_{\Sigma_2} \right) h = \left( \frac{1}{2} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_2 \right) h \end{aligned}$$

Streifenbreite (Schrittweite):  $h = (b - a)/n$

Stützstellen:  $x_k = a + k \cdot h$  }  $k = 0, 1, 2, \dots, n$   
 Stützwerte:  $y_k = f(x_k)$

### 3.5.2 Simpsonsche Formel

Die Fläche unter der Kurve  $y = f(x)$  wird in  $2n$ , d. h. in eine *gerade* Anzahl „einfacher“ Streifen *gleicher* Breite  $h$  zerlegt. In jedem der insgesamt  $n$  „Doppelstreifen“ (er besteht aus *zwei* aufeinanderfolgenden „einfachen“ Streifen, die im Bild grau unterlegt sind) ersetzt man dann die krummlinige Begrenzung durch eine *Parabel*:



$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \frac{h}{3} = \\ &= \left( \underbrace{(y_0 + y_{2n})}_{\Sigma_0} + 4 \underbrace{(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})}_{\Sigma_1} + 2 \underbrace{(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})}_{\Sigma_2} \right) \frac{h}{3} = \\ &= \left( \Sigma_0 + 4 \cdot \Sigma_1 + 2 \cdot \Sigma_2 \right) \frac{h}{3} \end{aligned}$$

Breite eines *einfachen* Streifens (Schrittweite):  $h = (b - a)/2n$

Stützstellen:  $x_k = a + k \cdot h$  }  $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$   
 Stützwerte:  $y_k = f(x_k)$

Beim Simpsonverfahren muss die Anzahl der Stützpunkte  $P_k = (x_k; y_k)$  *ungerade* sein. Die Simpsonsche Formel gilt unabhängig von der geometrischen Deutung (sofern das Integral existiert).

### Fehlerabschätzung

*Voraussetzung:*  $2n$  ist durch 4 teilbar

$$\Delta I \approx \frac{1}{15} (I_h - I_{2h})$$

$I_h$ : Näherungswert bei der Streifenbreite  $h$

$I_{2h}$ : Näherungswert bei *doppelter* Streifenbreite  $2h$

Gegenüber  $I_h$  *verbesserter* Wert:

$$I_v = I_h + \Delta I$$

### ■ Beispiel

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = ?$$

Wir wählen  $2n = 4$  und somit  $h = 0,25$ .

$k$	$x_k$	Erstrechnung ( $h = 0,25$ )			Zweitrechnung ( $h^* = 2h = 0,5$ )		
		$y_k = e^{-x_k^2}$			$y_k = e^{-x_k^2}$		
0	0	1			1		
1	0,25		0,939 413				
2	0,5			0,778 801		0,778 801	
3	0,75		0,569 783				
4	1	0,367 879			0,367 879		
		1,367 879	1,509 196	0,778 801	1,367 879	0,778 801	0
		$\Sigma_0$	$\Sigma_1$	$\Sigma_2$	$\Sigma_0^*$	$\Sigma_1^*$	$\Sigma_2^*$

$$I_h = (\Sigma_0 + 4 \cdot \Sigma_1 + 2 \cdot \Sigma_2) \frac{h}{3} = (1,367 879 + 4 \cdot 1,509 196 + 2 \cdot 0,778 801) \frac{0,25}{3} = 0,746 855$$

$$I_{2h} = I_{h^*} = (\Sigma_0^* + 4 \cdot \Sigma_1^* + 2 \cdot \Sigma_2^*) \frac{h^*}{3} = (1,367 879 + 4 \cdot 0,778 801 + 2 \cdot 0) \frac{0,5}{3} = 0,747 181$$

$$\text{Fehlerabschätzung: } \Delta I = \frac{1}{15} (I_h - I_{2h}) = \frac{1}{15} (0,746 855 - 0,747 181) = -2,2 \cdot 10^{-5}$$

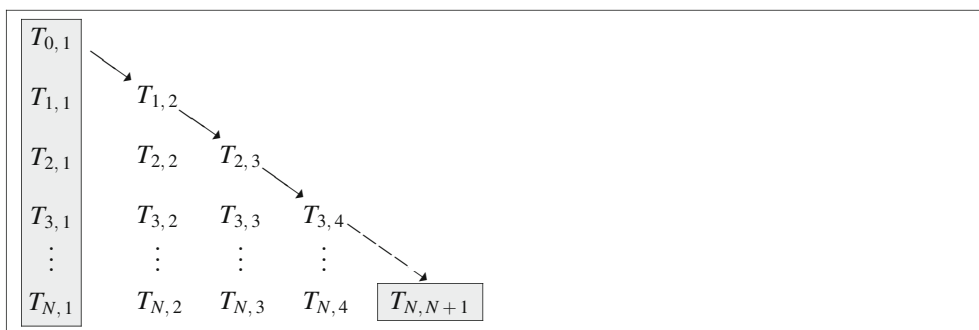
$$\text{Verbesserter Integralwert: } \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx I_v = I_h + \Delta I = 0,746 855 - 0,000 022 = 0,746 833$$

■

### 3.5.3 Romberg-Verfahren

#### Romberg-Schema

Nach bestimmten (weiter unten beschriebenen) Rechenvorschriften werden für das gesuchte bestimmte Integral  $\int_a^b f(x) dx$  zunächst Folgen von *Näherungswerten*  $T_{i,k}$  *berechnet und* wie folgt im sog. *Romberg-Schema* angeordnet:



1. Index: Zeilenindex
2. Index: Spaltenindex

Dann gilt *näherungsweise*:

$$\int_a^b f(x) dx = T_{N,N+1}$$

#### Anmerkungen

- (1) Jede der Spalten konvergiert für  $N \rightarrow \infty$  gegen den gesuchten Integralwert, ebenso die durch Pfeile gekennzeichnete Diagonalfolge.
- (2) Die Rechnung ist abzubrechen, wenn sich zwei *benachbarte* Elemente einer Spalte innerhalb der gewünschten Stellenzahl nicht mehr voneinander unterscheiden.

#### Berechnung der Elemente $T_{i,1}$ aus Spalte 1 ( $i = 0, 1, \dots, N$ )

Das Integrationsintervall  $a \leq x \leq b$  wird der Reihe nach in  $1, 2, 4, 8, \dots, 2^N$  Teilintervalle *gleicher* Länge zerlegt (Prinzip der fortlaufenden *Halbierung* der Schrittweite). Mit der *Trapezformel* aus V.3.5.1 werden dann für diese Zerlegungen *Näherungswerte*  $T_{i,1}$  für das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  berechnet, die die Elemente der 1. Spalte bilden (grau unterlegt). Der Zeilenindex  $i$  kennzeichnet dabei die *Anzahl* der Teilintervalle ( $2^i$  Teilintervalle).

Die Berechnungsformeln lauten:

$$\begin{aligned}
 T_{0,1} &= \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \\
 T_{1,1} &= \frac{1}{2} \left[ T_{0,1} + (b-a) \cdot f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) \right] \\
 T_{2,1} &= \frac{1}{2} \left[ T_{1,1} + \frac{b-a}{2} \left\{ f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + f\left(a + \frac{3(b-a)}{4}\right) \right\} \right] \\
 &\vdots \\
 T_{i,1} &= \frac{1}{2} \left[ T_{i-1,1} + \frac{b-a}{2^{(i-1)}} \cdot \sum_{j=1}^{2^{(i-1)}} f\left(a + \frac{(2j-1)(b-a)}{2^i}\right) \right] \quad (i = 1, 2, \dots, N)
 \end{aligned}$$

Aus diesen Elementen lassen sich alle übrigen Elemente berechnen.

#### Berechnung der Elemente $T_{i,2}$ aus Spalte 2 ( $i = 1, 2, \dots, N$ )

Die Berechnung dieser Elemente erfolgt aus den Elementen der 1. Spalte nach der Formel

$$T_{i,2} = \frac{4 \cdot T_{i,1} - T_{i-1,1}}{3} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

#### Berechnung der Elemente $T_{i,3}$ aus Spalte 3 ( $i = 2, 3, \dots, N$ )

Die Berechnung dieser Elemente erfolgt aus den Elementen der 2. Spalte nach der Formel

$$T_{i,3} = \frac{16 \cdot T_{i,2} - T_{i-1,2}}{15} \quad (i = 2, 3, \dots, N)$$

#### Berechnung der Elemente $T_{i,k}$ aus Spalte $k$ ( $k = 2, 3, \dots, N+1$ ; $i = k-1, k, \dots, N$ )

Die Berechnung dieser Elemente erfolgt aus den Elementen der  $(k-1)$ -ten Spalte nach der Formel

$$T_{i,k} = \frac{4^{(k-1)} \cdot T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{4^{(k-1)} - 1} \quad (k = 2, 3, \dots, N+1; i = k-1, k, \dots, N)$$

(allgemeine *Romberg-Formel*).

#### ■ Beispiel

Wir berechnen das Integral  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  für  $N = 3$ , d. h. für Zerlegungen in 1, 2, 4 und 8 Teilintervalle.

Mit  $a = 0$ ,  $b = 1$  und  $f(x) = e^{-x^2}$  erhalten wir:

*Berechnung der Elemente  $T_{i,1}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ )*

$$T_{0,1} = \frac{1}{2} [f(0) + f(1)] = \frac{1}{2} (e^0 + e^{-1}) = 0,683\,940$$

$$T_{1,1} = \frac{1}{2} [T_{0,1} + f(0,5)] = \frac{1}{2} (0,683\,940 + e^{-0,25}) = 0,731\,370$$

$$T_{2,1} = \frac{1}{2} \left[ T_{1,1} + \frac{1}{2} \{f(0,25) + f(0,75)\} \right] = \frac{1}{2} \left[ 0,731\,370 + \frac{1}{2} (e^{-0,0625} + e^{-0,5625}) \right] = 0,742\,984$$

$$\begin{aligned} T_{3,1} &= \frac{1}{2} \left[ T_{2,1} + \frac{1}{4} \{f(0,125) + f(0,375) + f(0,625) + f(0,875)\} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 0,742\,984 + \frac{1}{4} (e^{-0,015\,625} + e^{-0,140\,625} + e^{-0,390\,625} + e^{-0,765\,625}) \right] = 0,745\,866 \end{aligned}$$

*Berechnung der Elemente  $T_{i,2}$  ( $i = 1, 2, 3$ )*

$$T_{1,2} = \frac{4 \cdot T_{1,1} - T_{0,1}}{3} = \frac{4 \cdot 0,731\,370 - 0,683\,940}{3} = 0,747\,180$$

$$T_{2,2} = \frac{4 \cdot T_{2,1} - T_{1,1}}{3} = \frac{4 \cdot 0,742\,984 - 0,731\,370}{3} = 0,746\,855$$

$$T_{3,2} = \frac{4 \cdot T_{3,1} - T_{2,1}}{3} = \frac{4 \cdot 0,745\,866 - 0,742\,984}{3} = 0,746\,827$$

*Berechnung der Elemente  $T_{i,3}$  ( $i = 2, 3$ )*

$$T_{2,3} = \frac{16 \cdot T_{2,2} - T_{1,2}}{15} = \frac{16 \cdot 0,746\,855 - 0,747\,180}{15} = 0,746\,833$$

$$T_{3,3} = \frac{16 \cdot T_{3,2} - T_{2,2}}{15} = \frac{16 \cdot 0,746\,827 - 0,746\,855}{15} = 0,746\,825$$

*Berechnung des Elementes  $T_{3,4}$*

$$T_{3,4} = \frac{64 \cdot T_{3,3} - T_{2,3}}{63} = \frac{64 \cdot 0,746\,825 - 0,746\,833}{63} = 0,746\,825$$

*Romberg-Schema*

$k \backslash i$	1	2	3	4
0	0,683 940			
1	0,731 370	0,747 180		
2	0,742 984	0,746 855	0,746 833	
3	0,745 866	0,746 827	0,746 825	0,746 825

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,746\,825$$

Exakter Wert (auf 6 Dezimalstellen nach dem Komma genau): 0,746 824

■

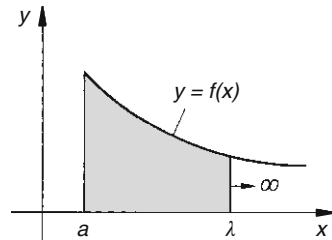
## 4 Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale werden durch Grenzwerte erklärt. Ist der jeweilige Grenzwert vorhanden, so heißt das uneigentliche Integral *konvergent*, sonst *divergent*.

### 4.1 Unendliches Integrationsintervall

Die Integration erfolgt über ein *unendliches* Intervall. Man setzt (falls der Grenzwert vorhanden ist;  $\lambda > a$ ):

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^{\lambda} f(x) dx$$



Analog:  $\int_{-\infty}^a f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

#### ■ Beispiel

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = ?$$

Integration von  $x = 0$  bis  $x = \lambda$  ( $\lambda > 0$ ):

$$I(\lambda) = \int_0^{\lambda} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\lambda} = -e^{-\lambda} + e^0 = 1 - e^{-\lambda}$$

Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} e^{-x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (1 - e^{-\lambda}) = 1 - 0 = 1$$

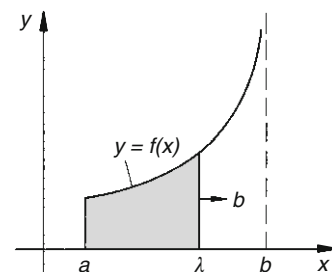
Das uneigentliche Integral ist somit *konvergent* und besitzt den Wert 1.

■

### 4.2 Integrand mit einer Unendlichkeitsstelle (Pol)

Der Integrand  $f(x)$  besitzt an der Stelle  $x = b$  einen *Pol*. Man setzt (falls der Grenzwert vorhanden ist;  $a < \lambda < b$ ):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow b} \int_a^{\lambda} f(x) dx$$





■ **Beispiel**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$$

Integration von  $x = 0$  bis  $x = \lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ):

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^\lambda = \arcsin \lambda - \underbrace{\arcsin 0}_0 = \arcsin \lambda$$

Grenzübergang  $\lambda \rightarrow 1$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \int_0^\lambda \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} (\arcsin \lambda) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Das uneigentliche Integral ist somit *konvergent* und hat den Wert  $\pi/2$ .

■

## 5 Anwendungen der Integralrechnung

### 5.1 Integration der Bewegungsgleichung

Aus der Beschleunigungs-Zeit-Funktion  $a = a(t)$  einer *geradlinigen* Bewegung erhält man durch *ein-* bzw. *zweimalige Integration* bezüglich der Zeitvariablen  $t$  den zeitlichen Verlauf von Geschwindigkeit  $v$  und Weg  $s$ :

$$v = v(t) = \int a(t) dt$$

$$s = s(t) = \int v(t) dt$$

Die Integrationskonstanten werden i. Allg. durch *Anfangswerte* festgelegt:

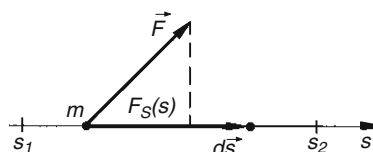
$s(0) = s_0$ : *Anfangsweg* (Wegmarke zur Zeit  $t = 0$ )

$v(0) = v_0$ : *Anfangsgeschwindigkeit* (Geschwindigkeit zur Zeit  $t = 0$ )

### 5.2 Arbeit einer ortsabhängigen Kraft (Arbeitsintegral)

Ein Massenpunkt  $m$  wird durch eine *ortsabhängige* Kraft  $\vec{F} = \vec{F}(s)$  *geradlinig* von  $s_1$  nach  $s_2$  verschoben. Die dabei verrichtete *Arbeit* beträgt:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s) ds$$



$F_s(s)$ : *Skalare* ortsabhängige Kraftkomponente in Richtung des Weges

$s$ : Ortskoordinate (Wegmarke)

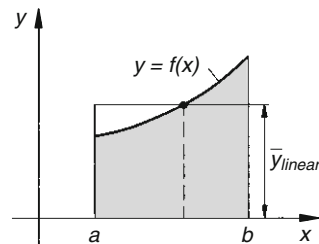
$ds$ : Wegelement

## 5.3 Lineare und quadratische Mittelwerte einer Funktion

### 5.3.1 Linearer Mittelwert

$$\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

**Geometrische Deutung:** Die Fläche unter der Kurve  $y = f(x)$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  entspricht dem Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen  $b-a$  und  $\bar{y}_{\text{linear}}$  (Voraussetzung: Die Kurve verläuft oberhalb der  $x$ -Achse). Allgemein ist der *lineare Mittelwert* eine Art *mittlere Ordinate* der Kurve  $y = f(x)$  im Intervall  $a \leq x \leq b$ .



### 5.3.2 Quadratischer Mittelwert

$$\bar{y}_{\text{quadratisch}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

### 5.3.3 Zeitliche Mittelwerte einer periodischen Funktion

$y = f(t)$  ist eine zeitabhängige *periodische* Funktion mit der *Periodendauer*  $T$ .

$$\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{T} \cdot \int_{(T)} f(t) dt$$

$$\bar{y}_{\text{quadratisch}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{(T)} [f(t)]^2 dt}$$

$(T)$ : Integration über eine Periodendauer  $T$

**Hinweis:** Bei Wechselströmen und Wechselspannungen werden die *quadratischen Mittelwerte* als *Effektivwerte* (von Strom bzw. Spannung) bezeichnet.

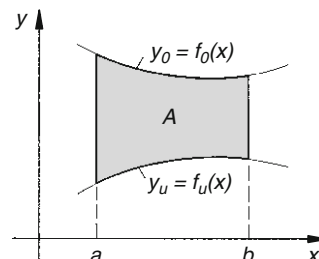
## 5.4 Flächeninhalt

In kartesischen Koordinaten

$$A = \int_a^b (y_o - y_u) dx$$

$y_o = f_o(x)$ : Obere Randkurve

$y_u = f_u(x)$ : Untere Randkurve

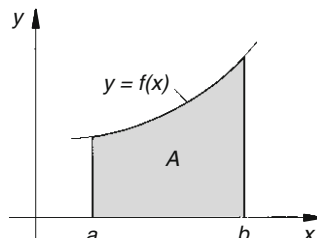


*Hinweis:* Die Integralformel gilt nur unter der Voraussetzung, dass sich die beiden Randkurven im Intervall  $a \leq x \leq b$  nicht durchschneiden ( $y_o \geq y_u$ ). Anderenfalls muss die Fläche (z. B. anhand einer Skizze) so in Teilflächen zerlegt werden, dass die Formel für jeden Teilbereich anwendbar ist.

*Spezialfall:*  $y_u = f_u(x) = 0$  (x-Achse)

$$A = \int_a^b y \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

$y = f(x)$ : Obere Randkurve

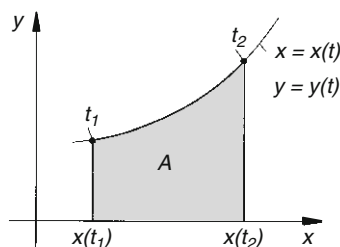


### In der Parameterform

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} \, dt$$

$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Parametergleichungen} \\ \text{der oberen Randkurve} \end{array}$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

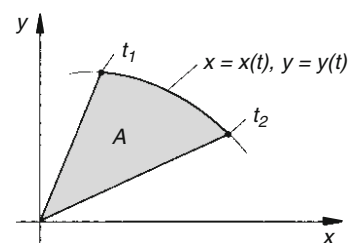


### Leibnizsche Sektorformel

$$A = \frac{1}{2} \left| \int_{t_1}^{t_2} (x \dot{y} - y \dot{x}) \, dt \right|$$

$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Parametergleichungen} \\ \text{der oberen Randkurve} \end{array}$

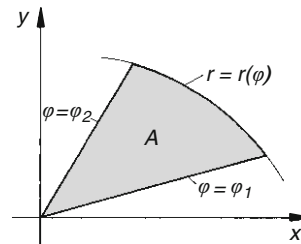
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$



**In Polarkoordinaten**

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$$

$r = r(\varphi)$ : Randkurve in Polarkoordinaten

**5.5 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche**

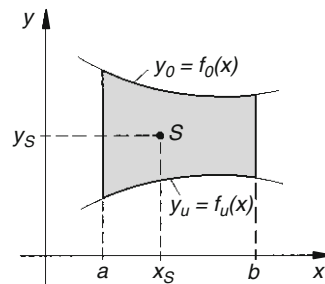
$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x(y_o - y_u) dx, \quad y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (y_o^2 - y_u^2) dx$$

$y_o = f_o(x)$ : Obere Randkurve

$y_u = f_u(x)$ : Untere Randkurve

A: Flächeninhalt (siehe V.5.4)

Multipliziert man die Formeln mit der Fläche A, so erhält man die *statischen Momente*  $M_x$  und  $M_y$  der Fläche bezogen auf die x- bzw. y-Achse:



$$M_x = A \cdot y_S = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (y_o^2 - y_u^2) dx$$

$$M_y = A \cdot x_S = \int_a^b x(y_o - y_u) dx$$

**Teilschwerpunktsatz**

Der Schwerpunkt S der Fläche A liegt auf der *Verbindungsline* der beiden Teilflächenschwerpunkte  $S_1$  und  $S_2$ :

$$A x_S = A_1 x_{S_1} + A_2 x_{S_2}$$

$$A y_S = A_1 y_{S_1} + A_2 y_{S_2}$$

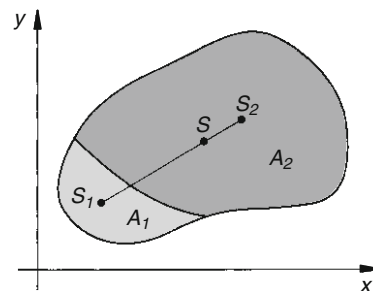
$A = A_1 + A_2$ : Fläche

$A_1, A_2$ : Teilflächen von A

$S = (x_S; y_S)$ : Schwerpunkt der Fläche A

$S_1 = (x_{S_1}; y_{S_1})$ : Schwerpunkt der Teilfläche  $A_1$

$S_2 = (x_{S_2}; y_{S_2})$ : Schwerpunkt der Teilfläche  $A_2$



## 5.6 Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)

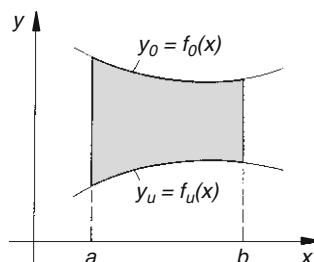
$I_x, I_y$ : Axiale oder äquatoriale Flächenmomente 2. Grades bezüglich der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse

$I_p$ : Polares Flächenmoment 2. Grades bezüglich des Nullpunktes

$$I_x = \frac{1}{3} \cdot \int_a^b (y_o^3 - y_u^3) dx$$

$$I_y = \int_a^b x^2 (y_o - y_u) dx$$

$$I_p = I_x + I_y$$



$y_o = f_o(x)$ : Obere Randkurve

$y_u = f_u(x)$ : Untere Randkurve

### Satz von Steiner

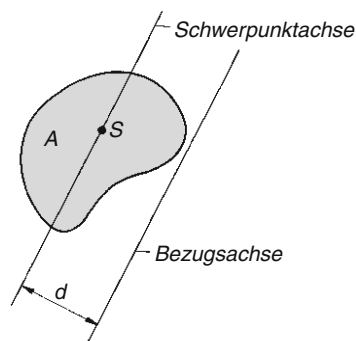
$$I = I_S + A d^2$$

$I$ : Flächenmoment bezüglich der gewählten Bezugsachse

$I_S$ : Flächenmoment bezüglich der zur Bezugsachse parallelen Schwerpunktachse

$A$ : Fläche

$d$ : Abstand zwischen Bezugs- und Schwerpunktachse

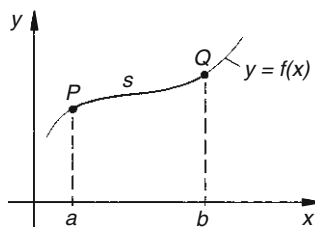


## 5.7 Bogenlänge einer ebenen Kurve

In kartesischen Koordinaten

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

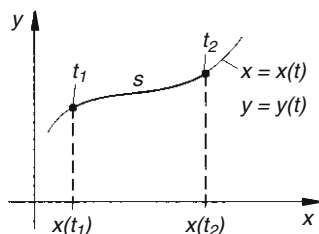


**In der Parameterform**

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} dt$$

$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Parametergleichungen} \\ \text{der Kurve} \end{array}$

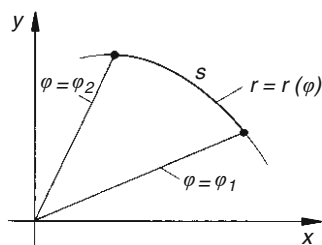
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

**In Polarkoordinaten**

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (\dot{r})^2} d\varphi$$

$r = r(\varphi)$ : Kurve in Polarkoordinaten

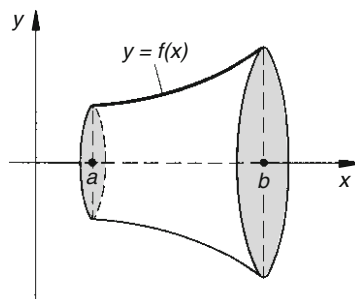
$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}$$

**5.8 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen)****In kartesischen Koordinaten**

*Rotation um die x-Achse*

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$$

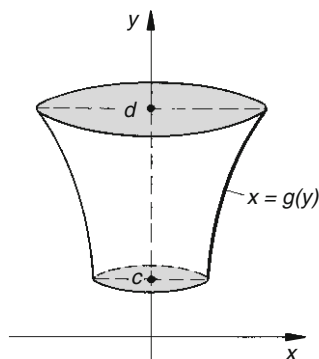
$y = f(x)$ : Rotierende Kurve



*Rotation um die y-Achse*

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy$$

$x = g(y)$ : Rotierende Kurve (in der nach  $x$  aufgelösten Form)

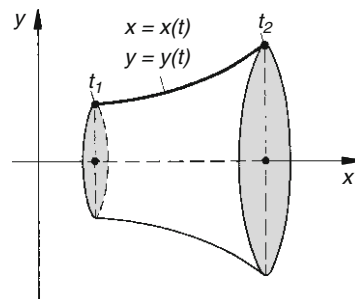


**In der Parameterform***Rotation um die x-Achse*

$$V_x = \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} y^2 \dot{x} dt$$

$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Parametergleichungen} \\ \text{der rotierenden Kurve} \end{array}$

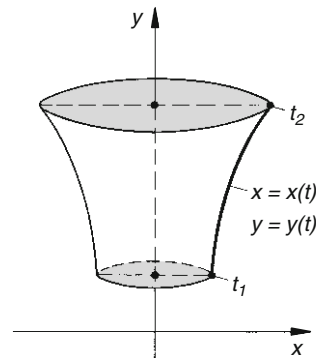
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

*Rotation um die y-Achse*

$$V_y = \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} x^2 \dot{y} dt$$

$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Parametergleichungen} \\ \text{der rotierenden Kurve} \end{array}$

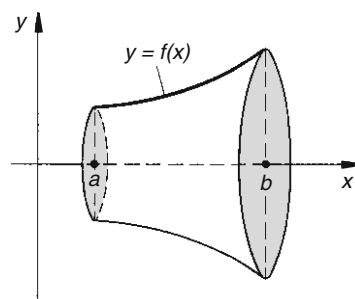
$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

**5.9 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche)***Rotation um die x-Achse*

$$M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$y = f(x)$ : Rotierende Kurve

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

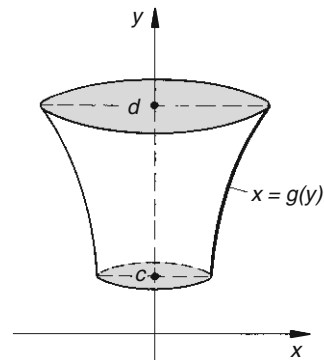


**Rotation um die y-Achse**

$$M_y = 2\pi \cdot \int_c^d x \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

$x = g(y)$ : Rotierende Kurve (in der nach  $x$  aufgelösten Form)

$$x' = \frac{dx}{dy} = g'(y)$$

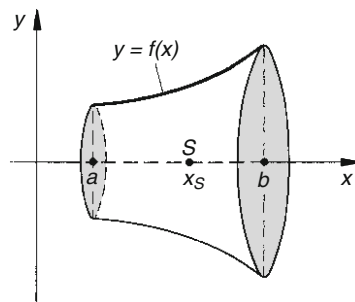
**5.10 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers****Rotation um die x-Achse**

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_a^b x y^2 dx$$

$$y_S = 0, \quad z_S = 0$$

$y = f(x)$ : Rotierende Kurve

$V_x$ : Rotationsvolumen (siehe V.5.8)

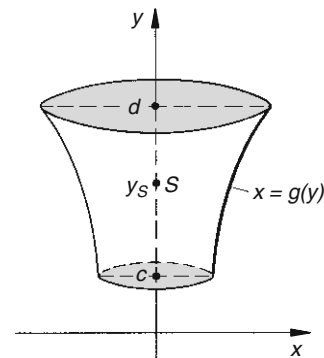
**Rotation um die y-Achse**

$$y_S = \frac{\pi}{V_y} \cdot \int_c^d y x^2 dy$$

$$x_S = 0, \quad z_S = 0$$

$x = g(y)$ : Rotierende Kurve (in der nach  $x$  aufgelösten Form)

$V_y$ : Rotationsvolumen (siehe V.5.8)





## 5.11 Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers

### Allgemeine Definition

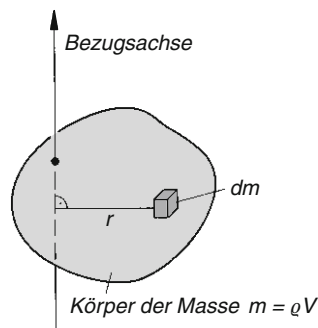
$$J = \int_{(m)} r^2 dm = \varrho \cdot \int_{(V)} r^2 dV$$

$dm$ : Massenelement  
 $dV$ : Volumenelement
  $\left. \vphantom{\begin{matrix} dm \\ dV \end{matrix}} \right\} dm = \varrho dV$

$r$ : Senkrechter Abstand des Massen- bzw. Volumenelementes von der gewählten Bezugsachse

$\varrho$ : Dichte des homogenen Körpers

*Hinweis:* Siehe hierzu auch IX.3.2.4.3 (Dreifachintegral)



### Satz von Steiner

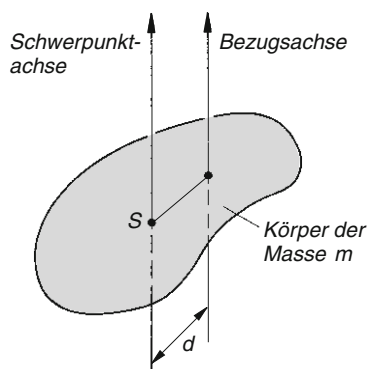
$$J = J_S + m d^2$$

$J$ : Massenträgheitsmoment bezüglich der gewählten *Bezugsachse*

$J_S$ : Massenträgheitsmoment bezüglich der zur Bezugsachse parallelen *Schwerpunktachse*

$m$ : Masse des Körpers

$d$ : Abstand zwischen Bezugs- und Schwerpunktachse



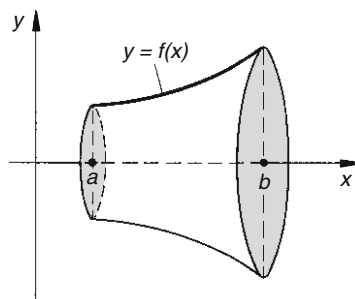
### Massenträgheitsmoment eines Rotationskörpers

Rotation um die  $x$ -Achse (= Bezugsachse)

$$J_x = \frac{1}{2} \pi \varrho \cdot \int_a^b y^4 dx$$

$y = f(x)$ : Rotierende Kurve

$\varrho$ : Dichte des homogenen Rotationskörpers

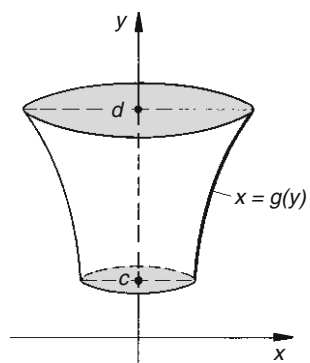


Rotation um die  $y$ -Achse (= Bezugsachse)

$$J_y = \frac{1}{2} \pi \varrho \cdot \int_c^d x^4 dy$$

$x = g(y)$ : Rotierende Kurve (in der nach  $x$  aufgelösten Form)

$\varrho$ : Dichte des homogenen Rotationskörpers



# VI Unendliche Reihen, Taylor- und Fourier-Reihen

## 1 Unendliche Reihen

### 1.1 Grundbegriffe

#### 1.1.1 Definition einer unendlichen Reihe

Aus den Gliedern einer *unendlichen* Zahlenfolge  $\langle a_n \rangle = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  werden wie folgt *Partial-* oder *Teilsummen*  $s_n$  gebildet:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n\text{-te Partialsumme})$$

Die Folge  $\langle s_n \rangle$  dieser Partialsummen heißt „*Unendliche Reihe*“. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Bildungsgesetz einer unendlichen Reihe:  $a_n = f(n)$  mit  $n \in \mathbb{N}^*$

#### 1.1.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe

Besitzt die Folge der Partialsummen  $s_n$  einen *Grenzwert*  $s$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ , so heißt die unendliche Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  *konvergent* mit dem *Summenwert*  $s$ . Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = s$$

Besitzt die Partialsummenfolge *keinen* Grenzwert, so heißt die unendliche Reihe *divergent*.

Eine unendliche Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt *absolut konvergent*, wenn die aus den *Beträgen* ihrer

Glieder gebildete Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  *konvergiert*. Eine *absolut* konvergente Reihe ist immer

konvergent. Eine Reihe mit dem „Summenwert“  $s = +\infty$  oder  $s = -\infty$  heißt *bestimmt divergent*.

## 1.2 Konvergenzkriterien

Die Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ist zwar *notwendig*, nicht aber hinreichend für die Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Die Reihenglieder einer konvergenten Reihe müssen also (notwendigerweise) eine *Nullfolge* bilden.

### ■ Beispiel

Die unendliche Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + 0,1^n)$  *divergiert*, da die Reihenglieder wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 0,1^n) = 1 \neq 0$$

keine Nullfolge bilden.

■

Die nachfolgenden Kriterien stellen *hinreichende* (aber nicht notwendige) Konvergenzbedingungen dar. Sie ermöglichen in vielen Fällen eine Entscheidung darüber, ob eine vorgegebene Reihe *konvergiert* oder *divergiert*. Der *Summenwert* einer konvergenten Reihe lässt sich jedoch nur in einfachen Fällen exakt bestimmen. *Näherungswerte* erhält man (wenn auch meist sehr mühsam) durch *gliedweises* Aufaddieren der Reihenglieder bis zum Erreichen der gewünschten Genauigkeit.

### 1.2.1 Quotientenkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1 \quad (\text{Konvergenz; } a_n \neq 0)$$

Für  $q > 1$  *divergiert* die Reihe, für  $q = 1$  *versagt* das Kriterium, d. h. eine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz ist anhand dieses Kriteriums *nicht* möglich.

### ■ Beispiel

Wir zeigen mit Hilfe des *Quotientenkriteriums*, dass die folgende Reihe *konvergiert*:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots$$

Mit  $a_n = \frac{1}{n!}$  und  $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$  folgt unter Beachtung von  $(n+1)! = n!(n+1)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Wegen  $q = 0 < 1$  *konvergiert* die Reihe.

■

### 1.2.2 Wurzelkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1 \quad (\text{Konvergenz})$$

Für  $q > 1$  *divergiert* die Reihe, für  $q = 1$  *versagt* das Kriterium, d. h. eine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz ist anhand dieses Kriteriums *nicht* möglich.

■ **Beispiel**

Wir untersuchen die unendliche Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$  mit Hilfe des *Wurzelkriteriums* auf *Konvergenz*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n}\right) = 0$$

Die Reihe ist somit wegen  $q = 0 < 1$  *konvergent*.

■

### 1.2.3 Vergleichskriterien

Das Konvergenzverhalten einer unendlichen Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  mit positiven Gliedern kann oft mit Hilfe einer geeigneten (konvergenten bzw. divergenten) *Vergleichsreihe*  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  bestimmt werden. Mit dem *Majorantenkriterium* kann die *Konvergenz*, mit dem *Minorantenkriterium* die *Divergenz* einer Reihe festgestellt werden.

#### Majorantenkriterium

Die vorliegende Reihe *konvergiert*, wenn die Vergleichsreihe *konvergiert* und zwischen den Gliedern beider Reihen die Beziehung (Ungleichung)

$$a_n \leq b_n \quad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}^*)$$

besteht.

Die konvergente Vergleichsreihe wird als *Majorante* (Oberreihe) bezeichnet. Es genügt, wenn die angegebene Bedingung  $a_n \leq b_n$  von einem gewissen  $n_0$  an, d. h. für alle Reihenglieder mit  $n \geq n_0$  erfüllt wird.

#### Minorantenkriterium

Die vorliegende Reihe *divergiert*, wenn die Vergleichsreihe *divergiert* und zwischen den Gliedern beider Reihen die Beziehung (Ungleichung)

$$a_n \geq b_n \quad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}^*)$$

besteht.

Die divergente Vergleichsreihe wird als *Minorante* (Unterreihe) bezeichnet. Es genügt, wenn die angegebene Bedingung  $a_n \geq b_n$  von einem gewissen  $n_0$  an, d. h. für alle Reihenglieder mit  $n \geq n_0$  erfüllt wird.

### 1.2.4 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen

Eine *alternierende* Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \dots \quad (\text{alle } a_i > 0)$$

*konvergiert*, wenn sie die folgenden (hinreichenden) Bedingungen erfüllt:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Die Glieder einer konvergenten alternierenden Reihe bilden dem Betrage nach eine *monoton fallende Nullfolge*. Die Reihe konvergiert auch dann, wenn die erste der beiden Bedingungen erst von einem bestimmten Glied an erfüllt ist.

#### ■ Beispiel

Die sog. *alternierende harmonische* Reihe (auch *Leibnizsche* Reihe genannt)  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$

mit dem Bildungsgesetz  $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$  konvergiert, da ihre Glieder dem Betrage nach eine *monoton fallende Nullfolge* bilden:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \dots \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0$$

■

### 1.2.5 Eigenschaften konvergenter bzw. absolut konvergenter Reihen

- (1) Eine *konvergente* Reihe bleibt *konvergent*, wenn man *endlich viele* Glieder weglässt oder hinzufügt oder abändert. Dabei kann sich jedoch der Summenwert ändern. Klammern dürfen i. Allg. *nicht* weggelassen werden, ebenso wenig darf die Reihenfolge der Glieder verändert werden.
- (2) Aufeinander folgende Glieder einer *konvergenten* Reihe dürfen durch eine Klammer zusammengefasst werden; der Summenwert der Reihe bleibt dabei erhalten.
- (3) Eine *konvergente* Reihe darf *gliedweise* mit einer Konstanten multipliziert werden, wobei sich auch der Summenwert der Reihe mit dieser Konstanten multipliziert.
- (4) *Konvergente* Reihen dürfen *gliedweise* addiert und subtrahiert werden, wobei sich ihre Summenwerte addieren bzw. subtrahieren.
- (5) Eine *absolut konvergente* Reihe ist stets *konvergent*. Für solche Reihen gelten sinngemäß die gleichen Rechenregeln wie für (endliche) *Summen* (gliedweise Addition, Subtraktion und Multiplikation, beliebige Anordnung der Reihenglieder usw.).

## 1.3 Spezielle konvergente Reihen

### Geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1} = a + a q^1 + a q^2 + \dots + a q^{n-1} + \dots = \frac{a}{1 - q} \quad (|q| < 1)$$

Divergenz für  $|q| \geq 1$

**Wichtige konvergente Reihen**

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e \quad (\text{Eulersche Zahl})$$

$$(2) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + \dots = \ln 2$$

(alternierende harmonische Reihe)

$$(3) \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$(4) \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$(5) \quad \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$(6) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1$$

## 2 Potenzreihen

### 2.1 Definition einer Potenzreihe

**Entwicklung um die Stelle  $x_0$** 

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0)^1 + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

$a_0, a_1, a_2, \dots$ : reelle Koeffizienten der Potenzreihe

**Entwicklung um den Nullpunkt**

*Spezialfall* der allgemeinen Entwicklung für  $x_0 = 0$ :

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

**■ Beispiele**

$$(1) \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (\text{Entwicklungszentrum: } x_0 = 0)$$

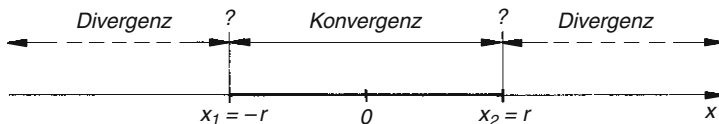
$$(2) \quad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n} = \frac{(x-1)^1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

(Entwicklungszentrum:  $x_0 = 1$ )

■

## 2.2 Konvergenzradius und Konvergenzbereich einer Potenzreihe

Der *Konvergenzbereich* einer Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  besteht aus dem offenen Intervall  $|x| < r$ , zu dem gegebenenfalls noch *ein* oder gar *beide* Randpunkte hinzukommen. Die *positive* Zahl  $r$  heißt *Konvergenzradius*. Für  $|x| > r$  *divergiert* die Potenzreihe.



### Berechnung des Konvergenzradius $r$ (bei lückenloser Potenzfolge)

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{oder} \quad r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Diese Formeln gelten auch für eine um die Stelle  $x_0$  entwickelte Potenzreihe. Die Reihe *konvergiert* dann im Intervall  $|x - x_0| < r$ , zu dem gegebenenfalls noch *ein* oder gar *beide* Randpunkte hinzukommen.

#### Sonderfälle

$r = 0$ : Potenzreihe konvergiert nur für  $x = x_0$

$r = \infty$ : Potenzreihe konvergiert *beständig* (d. h. für jedes  $x \in \mathbb{R}$ )

#### ■ Beispiel

$$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1} + \dots \quad (a_n = a_{n+1} = 1)$$

$$\text{Konvergenzradius: } r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Verhalten in den beiden *Randpunkten*:

$$\boxed{x_1 = -1} \quad 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad \text{divergent (divergente alternierende Reihe)}$$

$$\boxed{x_2 = 1} \quad 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \quad \text{divergent („Summenwert“} = \infty)$$

*Konvergenzbereich*:  $-1 < x < 1$  oder  $|x| < 1$

■

## 2.3 Wichtige Eigenschaften der Potenzreihen

- (1) Eine Potenzreihe konvergiert *innerhalb* ihres Konvergenzbereiches *absolut*.
- (2) Eine Potenzreihe darf *innerhalb* ihres Konvergenzbereiches *gliedweise* differenziert und integriert werden. Die neuen Potenzreihen haben dabei *denselben* Konvergenzradius  $r$  wie die ursprüngliche Reihe.
- (3) Zwei Potenzreihen dürfen im *gemeinsamen* Konvergenzbereich der Reihen *gliedweise* addiert, subtrahiert und multipliziert werden. Die neuen Potenzreihen konvergieren dann *mindestens* im *gemeinsamen* Konvergenzbereich der beiden Ausgangsreihen.



## 3 Taylor-Reihen

### 3.1 Taylorsche und Mac Laurinsche Formel

#### 3.1.1 Taylorsche Formel

Eine  $(n + 1)$ -mal differenzierbare Funktion  $f(x)$  lässt sich um das „Entwicklungszentrum“  $x_0$  wie folgt *entwickeln* (sog. *Taylorsche Formel*):

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n}_{\text{Taylorsches Polynom } f_n(x) \text{ vom Grade } n} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied}}$$

Somit:  $f(x) = f_n(x) + R_n(x)$

#### Restglied nach Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ liegt zwischen } x \text{ und } x_0)$$

#### 3.1.2 Mac Laurinsche Formel

Die *Mac Laurinsche Formel* ist ein *Spezialfall* der allgemeinen Taylorschen Formel für das Entwicklungszentrum  $x_0 = 0$  (Nullpunkt):

$$f(x) = f(0) + \underbrace{\frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}_{\text{Mac Laurinsches Polynom } f_n(x) \text{ vom Grade } n} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied}}$$

Somit:  $f(x) = f_n(x) + R_n(x)$

#### Restglied nach Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1)$$

### 3.2 Taylorsche Reihe

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$x_0$ : Entwicklungszentrum oder Entwicklungspunkt

*Voraussetzung:*  $f(x)$  ist in der Umgebung von  $x_0$  beliebig oft differenzierbar und das Restglied  $R_n(x)$  in der Taylorschen Formel *verschwindet* für  $n \rightarrow \infty$ .

#### ■ Beispiel

Wir entwickeln die Sinusfunktion um die Stelle  $x_0 = \pi/2$ :

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & \Rightarrow f(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1 \\ f'(x) = \cos x & \Rightarrow f'(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0 \\ f''(x) = -\sin x & \Rightarrow f''(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1 \\ f'''(x) = -\cos x & \Rightarrow f'''(\pi/2) = -\cos(\pi/2) = 0 \\ \hline f^{(4)}(x) = \sin x & \Rightarrow f^{(4)}(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1 \\ \vdots & \end{array}$$

Die Taylorreihe lautet damit wie folgt (die Sinusfunktion verläuft *spiegelsymmetrisch* zur Geraden  $x = \pi/2$ , daher verschwinden die Koeffizienten der *ungeraden* Potenzen):

$$\begin{aligned} \sin x &= 1 - \frac{1}{2!} (x - \pi/2)^2 + \frac{1}{4!} (x - \pi/2)^4 - + \dots = \\ &= 1 - \frac{(x - \pi/2)^2}{2!} + \frac{(x - \pi/2)^4}{4!} - + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x - \pi/2)^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

■

### 3.3 Mac Laurinsche Reihe

Die *Mac Laurinsche Reihe* ist eine *spezielle* Form der Taylorschen Reihe für das Entwicklungszentrum  $x_0 = 0$  (Nullpunkt):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Bei einer *geraden* Funktion treten nur *gerade* Potenzen auf, bei einer *ungeraden* Funktion nur *ungerade* Potenzen.

#### ■ Beispiel

Wir bestimmen die Mac Laurinsche Reihe von  $f(x) = e^x$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = e^x \\ f(0) &= f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = e^0 = 1 \\ e^x &= 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert *beständig*, d. h. für jedes reelle  $x$ .

■

### 3.4 Spezielle Potenzreihenentwicklungen (Tabelle)

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
<b>Allgemeine Binomische Reihe</b> <sup>1)</sup>		
$(1 \pm x)^n$	$1 \pm \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 \pm \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{4} x^4 \pm \dots$	$n > 0 :  x  \leq 1$ $n < 0 :  x  < 1$
$(a \pm x)^n$	$a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot x^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot x^2 \pm \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot x^3 + \dots$	$n > 0 :  x  \leq  a $ $n < 0 :  x  <  a $
<b>Spezielle Binomische Reihen</b>		
$(1 \pm x)^{\frac{1}{4}}$	$1 \pm \frac{1}{4} x^1 - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} x^2 \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^4 \pm \dots$	$ x  \leq 1$
$(1 \pm x)^{\frac{1}{3}}$	$1 \pm \frac{1}{3} x^1 - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} x^2 \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} x^4 \pm \dots$	$ x  \leq 1$
$(1 \pm x)^{\frac{1}{2}}$	$1 \pm \frac{1}{2} x^1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \pm \dots$	$ x  \leq 1$
$(1 \pm x)^{\frac{3}{2}}$	$1 \pm \frac{3}{2} x^1 + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \dots$	$ x  \leq 1$
$(1 \pm x)^{-\frac{1}{4}}$	$1 \mp \frac{1}{4} x^1 + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8} x^2 \mp \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^3 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} x^4 \mp \dots$	$ x  < 1$
$(1 \pm x)^{-\frac{1}{3}}$	$1 \mp \frac{1}{3} x^1 + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} x^2 \mp \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} x^4 \mp \dots$	$ x  < 1$
$(1 \pm x)^{-\frac{1}{2}}$	$1 \mp \frac{1}{2} x^1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \dots$	$ x  < 1$
$(1 \pm x)^{-1}$	$1 \mp x^1 + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots$	$ x  < 1$
$(1 \pm x)^{-\frac{3}{2}}$	$1 \mp \frac{3}{2} x^1 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 \mp \dots$	$ x  < 1$
$(1 \pm x)^{-2}$	$1 \mp 2x^1 + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots$	$ x  < 1$
$(1 \pm x)^{-3}$	$1 \mp \frac{1}{2} (2 \cdot 3x^1 \mp 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 \mp 5 \cdot 6x^4 + \dots)$	$ x  < 1$
<b>Reihen der Exponentialfunktionen</b>		
$e^x$	$1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$ x  < \infty$
$e^{-x}$	$1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$	$ x  < \infty$
$a^x$	$1 + \frac{(\ln a)^1}{1!} x^1 + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!} x^3 + \frac{(\ln a)^4}{4!} x^4 + \dots$	$ x  < \infty$

<sup>1)</sup> Für den Spezialfall  $n \in \mathbb{N}^*$  erhält man ein Polynom  $n$ -ten Grades. Die Entwicklungskoeffizienten  $\binom{n}{k}$  sind die Binomialkoeffizienten (siehe I.2.7).

**Tabelle** (Fortsetzung)

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
<b>Reihen der logarithmischen Funktionen</b>		
$\ln x$	$(x-1)^1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots$	$0 < x \leq 2$
$\ln x$	$2 \left[ \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^1 + \frac{1}{3} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \frac{1}{7} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^7 + \dots \right]$	$x > 0$
$\ln(1+x)$	$x^1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\ln(1-x)$	$- \left[ x^1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right]$	$-1 \leq x < 1$
$\ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$	$2 \left[ x^1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right]$	$ x  < 1$
<b>Reihen der trigonometrischen Funktionen</b>		
$\sin x$	$x^1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$ x  < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$ x  < \infty$
$\tan x$	$x^1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$	$ x  < \frac{\pi}{2}$
$\cot x$	$\frac{1}{x} - \frac{1}{3}x^1 - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots$	$0 <  x  < \pi$
<b>Reihen der Arkusfunktionen</b>		
$\arcsin x$	$x^1 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots$	$ x  < 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \left[ x^1 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots \right]$	$ x  < 1$
$\arctan x$	$x^1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$ x  \leq 1$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{\pi}{2} - \left[ x^1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right]$	$ x  \leq 1$
<b>Reihen der Hyperbelfunktionen</b>		
$\sinh x$	$x^1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$	$ x  < \infty$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$	$ x  < \infty$

**Tabelle** (Fortsetzung)

Funktion	Potenzreihenentwicklung	Konvergenzbereich
$\tanh x$	$x^1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - + \dots$	$ x  < \frac{\pi}{2}$
$\coth x$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^1 - \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 - + \dots$	$0 <  x  < \pi$
<b>Reihen der Areafunktionen</b>		
$\operatorname{arsinh} x$	$x^1 - \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + - \dots$	$ x  < 1$
$\operatorname{arcosh} x$	$\ln(2x) - \frac{1}{2 \cdot 2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} - \dots$	$x > 1$
$\operatorname{artanh} x$	$x^1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$	$ x  < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots$	$ x  > 1$

### 3.5 Näherungspolynome einer Funktion (mit Tabelle)

Bricht man die Potenzreihenentwicklung einer Funktion  $f(x)$  nach der  $n$ -ten Potenz ab, so erhält man ein *Näherungspolynom*  $f_n(x)$  vom Grade  $n$  für  $f(x)$  (sog. *Mac Laurinsches* bzw. *Taylorsches Polynom*). Funktion  $f(x)$  und Näherungspolynom  $f_n(x)$  stimmen an der Entwicklungsstelle  $x_0$  in ihrem Funktionswert und in ihren ersten  $n$  Ableitungen miteinander überein.

#### Fehlerabschätzung

Der durch den Abbruch der Potenzreihe entstandene *Fehler* lässt sich i. Allg. anhand der *Lagrangeschen* Restgliedformel *abschätzen* (siehe VI.3.1). Er liegt in der *Größenordnung* des *größten* Reihengliedes, das in der Näherung *nicht* mehr berücksichtigt wurde.

#### Näherungspolynome spezieller Funktionen (Tabelle)

1. *Näherung*: Abbruch nach dem *ersten* nichtkonstanten Glied

2. *Näherung*: Abbruch nach dem *zweiten* nichtkonstanten Glied

Diese Näherungen liefern in der Umgebung des *Nullpunktes* sehr brauchbare und nützliche Ergebnisse.

Funktion	1. Näherung	2. Näherung
$(1 \pm x)^n$	$1 \pm nx$	$1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$
$e^x$	$1 + x$	$1 + x + \frac{1}{2}x^2$

**Tabelle** (Fortsetzung)

Funktion	1. Näherung	2. Näherung
$e^{-x}$	$1 - x$	$1 - x + \frac{1}{2}x^2$
$a^x$	$1 + (\ln a)x$	$1 + (\ln a)x + \frac{(\ln a)^2}{2}x^2$
$\ln(1+x)$	$x$	$x - \frac{1}{2}x^2$
$\ln(1-x)$	$-x$	$-x - \frac{1}{2}x^2$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$2x$	$2x + \frac{2}{3}x^3$
$\sin x$	$x$	$x - \frac{1}{6}x^3$
$\cos x$	$1 - \frac{1}{2}x^2$	$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$
$\tan x$	$x$	$x + \frac{1}{3}x^3$
$\arcsin x$	$x$	$x + \frac{1}{6}x^3$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3$
$\arctan x$	$x$	$x - \frac{1}{3}x^3$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{3}x^3$
$\sinh x$	$x$	$x + \frac{1}{6}x^3$
$\cosh x$	$1 + \frac{1}{2}x^2$	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$
$\tanh x$	$x$	$x - \frac{1}{3}x^3$
$\operatorname{arsinh} x$	$x$	$x - \frac{1}{6}x^3$
$\operatorname{artanh} x$	$x$	$x + \frac{1}{3}x^3$

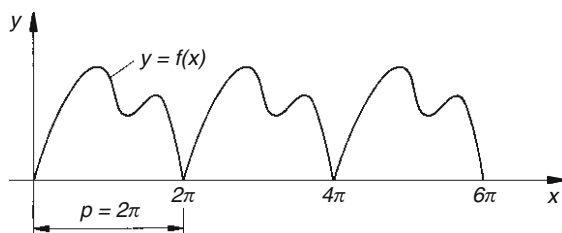
## 4 Fourier-Reihen

### 4.1 Fourier-Reihe einer periodischen Funktion

Eine *periodische* Funktion  $f(x)$  mit der Periode  $p = 2\pi$  lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen (siehe weiter unten) in eine *unendliche trigonometrische* Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$$

entwickeln (sog. *Fourier-Reihe* von  $f(x)$  in reeller Form).



#### Berechnung der Fourier-Koeffizienten $a_n$ und $b_n$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

#### Anmerkungen

- (1) Voraussetzung ist, dass die folgenden *Dirichletschen* Bedingungen erfüllt sind:
  1. Das *Periodenintervall* lässt sich in *endlich* viele Teilintervalle zerlegen, in denen  $f(x)$  *stetig* und *monoton* ist.
  2. Besitzt die Funktion  $f(x)$  im Periodenintervall *Unstetigkeitsstellen* (es kommen nur *Sprungunstetigkeiten* mit *endlichen* Sprüngen infrage), so existiert in ihnen sowohl der *links-* als auch der *rechtsseitige* Grenzwert.
- (2) In den *Sprungstellen* der Funktion  $f(x)$  liefert die Fourier-Reihe von  $f(x)$  das *arithmetische Mittel* aus dem links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion.

**Symmetriebetrachtungen**

$f(x)$  ist eine *gerade* Funktion:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) \quad (b_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}^*)$$

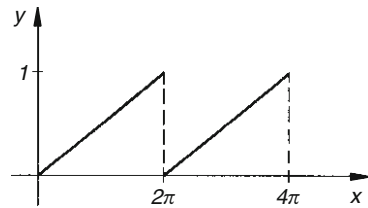
$f(x)$  ist eine *ungerade* Funktion:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx) \quad (a_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N})$$

■ **Beispiel**

Wir bestimmen die Fourier-Reihe der im Bild dargestellten periodischen Funktion mit der Periodendauer  $p = 2\pi$ :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} x, \quad 0 \leq x < 2\pi$$



Berechnung der Fourier-Koeffizienten ( $n \in \mathbb{N}^*$ ):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} x dx = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{2\pi^2} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{2\pi} = 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} x \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \cos(nx) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \left[ \frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \cdot \sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{1}{n^2} + 0 - \frac{1}{n^2} - 0 \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} x \cdot \sin(nx) dx = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \sin(nx) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \left[ \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x \cdot \cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi^2} \left( 0 - \frac{2\pi}{n} - 0 + 0 \right) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{-2\pi}{n} = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Die *Fourier-Reihe* beginnt daher wie folgt:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + \dots \right)$$

■

**Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe**

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn x} \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-jn x} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$



Die komplexe Fourier-Reihe lässt sich auch wie folgt aufspalten:

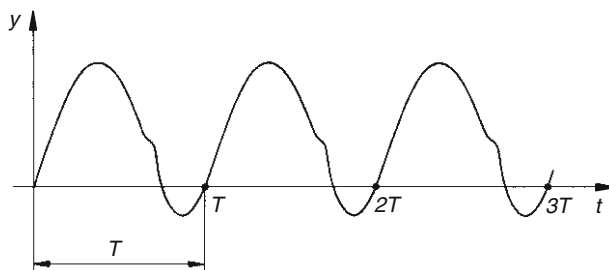
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn x} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot e^{-jn x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jn x}$$

Der Koeffizient  $c_{-n}$  ist dabei *konjugiert komplex* zu  $c_n$ , d. h.  $c_{-n} = c_n^*$ .

### Zusammenhang zwischen den Koeffizienten $a_n$ , $b_n$ und $c_n$

#### 1. Übergang von der reellen zur komplexen Form

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$



#### 2. Übergang von der komplexen zur reellen Form

$$a_0 = 2 c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = j (c_n - c_{-n}) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

## 4.2 Fourier-Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung

Eine *nichtsinusförmig* verlaufende Schwingung  $y = y(t)$  wie im obigen Bild mit der Kreisfrequenz  $\omega_0$  und der Schwingungsdauer (Periodendauer)  $T = 2\pi/\omega_0$  lässt sich nach *Fourier* wie folgt in ihre *harmonischen* Bestandteile (*Grundschwingung* und *Oberschwingungen*) zerlegen (Fourier-Zerlegung in reeller Form):

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n \omega_0 t)]$$

$\omega_0$ : Kreisfrequenz der *Grundschwingung* ( $\omega_0 = 2\pi/T$ )

$n \omega_0$ : Kreisfrequenzen der *harmonischen Oberschwingungen* ( $n = 2, 3, 4, \dots$ )

**Berechnung der Fourier-Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$** 

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} y(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} y(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$(T)$ : Integration über ein *beliebiges* Periodenintervall der Länge  $T$

**Fourier-Zerlegung in phasenverschobene Sinusschwingungen**

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)] =$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

Berechnung von Amplitude  $A_n$  und Nullphasenwinkel  $\varphi_n$  aus den Fourier-Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ :

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$A_n, \varphi_n$ : Amplituden- bzw. Phasenspektrum (sog. Linienspektren)

**Fourier-Zerlegung in komplexer Form**

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_n$ :

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

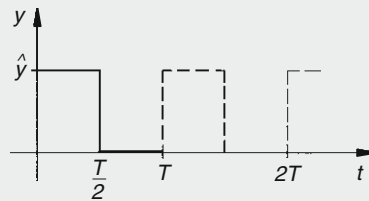
$T = 2\pi/\omega_0$ : Schwingungsdauer

$|c_n|$ : Amplitudenspektrum (Linienspektrum)

### 4.3 Spezielle Fourier-Reihen (Tabelle)

#### 1. Rechteckskurve

$$y(t) = \begin{cases} \hat{y} & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

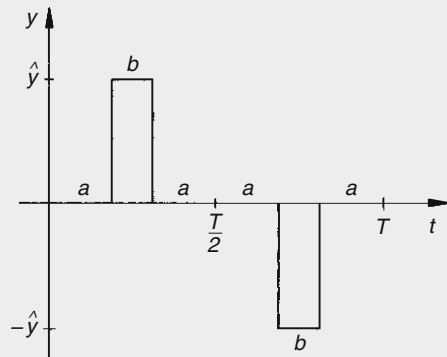


$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{2\hat{y}}{\pi} \left( \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots \right)$$

#### 2. Rechteckimpuls

Impulsbreite:  $b = \frac{T}{2} - 2a$

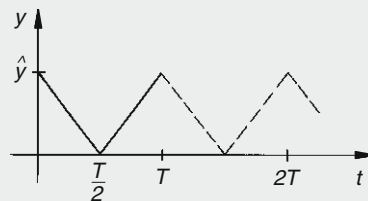
$$y(t) = \begin{cases} \hat{y} & a < t < \frac{T}{2} - a \\ -\hat{y} & \text{für } \frac{T}{2} + a < t < T - a \\ 0 & \text{im übrigen Intervall} \end{cases}$$



$$y(t) = \frac{4\hat{y}}{\pi} \left( \frac{\cos(\omega_0 a)}{1} \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(3\omega_0 a)}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \right. \\ \left. + \frac{\cos(5\omega_0 a)}{5} \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots \right)$$

#### 3. Dreieckskurve

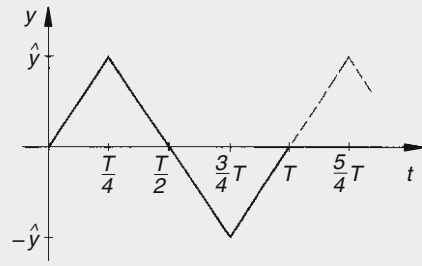
$$y(t) = \begin{cases} -\frac{2\hat{y}}{T} t + \hat{y} & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{2\hat{y}}{T} t - \hat{y} & \text{für } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$



$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{4\hat{y}}{\pi^2} \left( \frac{1}{1^2} \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \cdot \cos(5\omega_0 t) + \dots \right)$$

**4. Dreieckskurve**

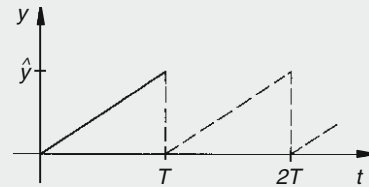
$$y(t) = \begin{cases} \frac{4\hat{y}}{T} t & 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ -\frac{4\hat{y}}{T} t + 2\hat{y} & \text{für } \frac{T}{4} < t < \frac{3}{4} T \\ \frac{4\hat{y}}{T} t - 4\hat{y} & \frac{3}{4} T \leq t \leq T \end{cases}$$



$$y(t) = \frac{8\hat{y}}{\pi^2} \left( \frac{1}{1^2} \cdot \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{3^2} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \cdot \sin(5\omega_0 t) - + \dots \right)$$

**5. Kippschwingung (Sägezahnimpuls)**

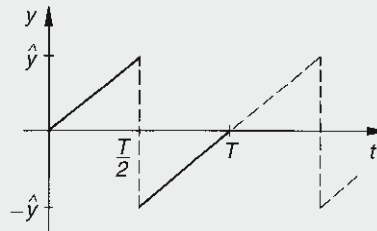
$$y(t) = \frac{\hat{y}}{T} t, \quad 0 \leq t < T$$



$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} - \frac{\hat{y}}{\pi} \left( \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \dots \right)$$

**6. Kippschwingung (Sägezahnimpuls)**

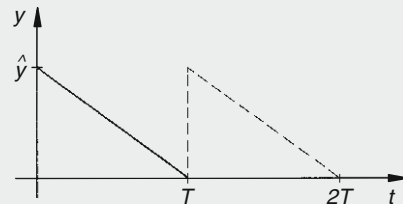
$$y(t) = \begin{cases} \frac{2\hat{y}}{T} t & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{2\hat{y}}{T} t - 2\hat{y} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$



$$y(t) = \frac{2\hat{y}}{\pi} \left( \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) - + \dots \right)$$

**7. Kippschwingung (Sägezahnimpuls)**

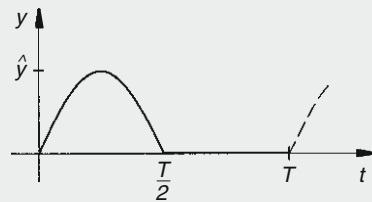
$$y(t) = -\frac{\hat{y}}{T} t + \hat{y}, \quad 0 \leq t < T$$



$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{\hat{y}}{\pi} \left( \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \dots \right)$$

**8. Sinusimpuls (Einweggleichrichtung)**

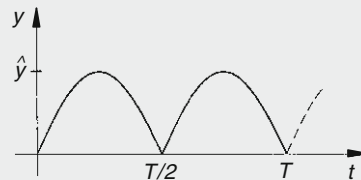
$$y(t) = \begin{cases} \hat{y} \cdot \sin(\omega_0 t) & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$



$$y(t) = \frac{\hat{y}}{\pi} + \frac{\hat{y}}{2} \cdot \sin(\omega_0 t) - \frac{2\hat{y}}{\pi} \left( \frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \cos(4\omega_0 t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdot \cos(6\omega_0 t) + \dots \right)$$

**9. Sinusimpuls (Zweiweggleichrichtung)**

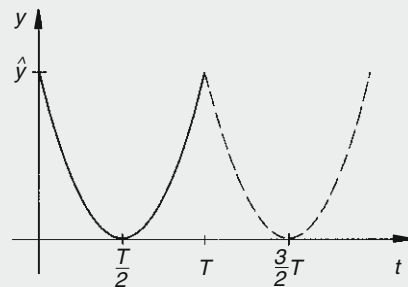
$$y(t) = \hat{y} |\sin(\omega_0 t)|, \quad 0 \leq t \leq T$$



$$y(t) = \frac{2\hat{y}}{\pi} - \frac{4\hat{y}}{\pi} \left( \frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \cos(4\omega_0 t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdot \cos(6\omega_0 t) + \dots \right)$$

**10. Parabelbögen**

$$y(t) = \frac{4\hat{y}}{T^2} \left( t - \frac{T}{2} \right)^2, \quad 0 \leq t \leq T$$



$$y(t) = \frac{\hat{y}}{3} + \frac{4\hat{y}}{\pi^2} \left( \frac{1}{1^2} \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2^2} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \dots \right)$$

# VII Lineare Algebra

## 1 Reelle Matrizen

### 1.1 Grundbegriffe

#### 1.1.1 $n$ -dimensionale Vektoren

##### $n$ -dimensionaler Vektor

$n$  reelle Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge bilden einen  $n$ -dimensionalen Vektor. Sie werden in der linearen Algebra üblicherweise durch kleine lateinische Buchstaben in **Fett-druck** (aber ohne Pfeil) gekennzeichnet: **a**, **b**, **c**, ...

*Schreibweisen*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad n\text{-dimensionaler Spaltenvektor mit den } n \text{ Vektorkoordinaten (skalaren Vektorkomponenten) } a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$\mathbf{a} = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n) \quad n\text{-dimensionaler Zeilenvektor}$$

#### Rechenoperationen und Rechenregeln

Die  $n$ -dimensionalen Vektoren bilden in ihrer Gesamtheit den  $n$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^n$ . Rechenoperationen und Rechenregeln sind die gleichen wie bei ebenen und räumlichen Vektoren, d. h. Vektoren des  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$ , siehe hierzu Kap. II. *Ausnahmen*: Vektor- und Spatprodukte sind nur im 3-dimensionalen Anschauungsraum definiert.

1. Addition und Subtraktion erfolgen komponentenweise:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

2. Die *Multiplikation* eines Vektors mit einem *Skalar* erfolgt *komponentenweise*:

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

3. Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren wird gebildet, indem man zunächst die einander entsprechenden (d. h. gleichstelligen) Vektorkoordinaten miteinander *multipliziert* und dann die insgesamt  $n$  Produkte *aufaddiert*:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

4. *Betrag* eines Vektors:

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

### Spezielle Vektoren

*Nullvektor*  $\mathbf{0}$ : Vektor der Länge 0, alle Vektorkoordinaten haben den Wert 0.

*Einheitsvektor*  $\mathbf{e}$ : Vektor der Länge 1 (normierter Vektor).

*Orthogonale Vektoren*  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ : Vektoren, deren Skalarprodukt verschwindet ( $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ )

### Komponentendarstellung eines Vektors

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_n \mathbf{e}_n$$

$\mathbf{e}_i$ : *Einheitsvektor (Basisvektor)*, dessen  $i$ -te Vektorkoordinate den Wert 1 hat, während alle übrigen Vektorkoordinaten verschwinden ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$  bilden eine *Basis* des  $n$ -dimensionalen Raumes  $\mathbb{R}^n$ , d. h. jeder  $n$ -dimensionale Vektor  $\mathbf{a}$  lässt sich in eindeutiger Weise als *Linearkombination* dieser (linear unabhängigen) Basisvektoren darstellen<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Zum Begriff der *linearen Unabhängigkeit* von Vektoren siehe VII.3.6.

■ **Beispiel**

Gegeben sind die Vektoren  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Wir bestimmen den Vektor  $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ , das

Skalarprodukt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  sowie den Betrag von  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 6 \\ 0 + 3 \\ 2 + 15 \\ -1 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 17 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 = -2 + 0 + 10 - 3 = 5$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 0 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

■

**1.1.2 Definition einer reellen Matrix**

Unter einer reellen *Matrix*  $\mathbf{A}$  vom Typ  $(m, n)$  versteht man ein aus  $m \cdot n$  reellen Zahlen bestehendes rechteckiges Schema mit  $m$  waagerecht angeordneten *Zeilen* und  $n$  senkrecht angeordneten *Spalten*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} i\text{-te Zeile} \\ \uparrow \\ k\text{-te Spalte} \end{array}$$

*Bezeichnungen*

$a_{ik}$ : Matricelemente ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ )

$i$ : Zeilenindex ( $i = 1, 2, \dots, m$ )

$k$ : Spaltenindex ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

*Schreibweisen*

$$\mathbf{A}, \mathbf{A}_{(m,n)}, (a_{ik}), (a_{ik})_{(m,n)}$$

Die  $m$  Zeilen werden auch als *Zeilenvektoren* (mit hochgestelltem Index), die  $n$  Spalten auch als *Spaltenvektoren* (mit tiefgestelltem Index) bezeichnet.



Schreibweisen

$$\underbrace{\mathbf{a}^i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in})}_{i\text{-ter Zeilenvektor}} \quad \mathbf{a}_k = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}}_{k\text{-ter Spaltenvektor}}$$

Die  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  ist dann wie folgt darstellbar:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{pmatrix}$$

(Zeile aus  $n$  Spaltenvektoren bzw. Spalte aus  $m$  Zeilenvektoren)

### 1.1.3 Spezielle Matrizen

**Nullmatrix  $\mathbf{0}$ :** Alle Elemente sind Null.

**Spaltenmatrix:** Matrix mit nur *einer* Spalte, auch *Spaltenvektor* genannt.

**Zeilenmatrix:** Matrix mit nur *einer* Zeile, auch *Zeilenvektor* genannt.

**Quadratische Matrix:** Matrix mit *gleichvielen* Zeilen und Spalten ( $m = n$ ; sog. *n-reihige* Matrix oder Matrix *n-ter Ordnung*).

**Transponierte Matrix  $\mathbf{A}^T$ :** Sie entsteht aus der  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$ , indem man Zeilen und Spalten miteinander *vertauscht* („Stürzen“ einer Matrix).  $\mathbf{A}^T$  ist daher vom Typ  $(n, m)$ . Es gilt stets  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ . Beim Transponieren wird aus einem Zeilenvektor ein Spaltenvektor und umgekehrt.

### 1.1.4 Gleichheit von Matrizen

Zwei Matrizen  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  und  $\mathbf{B} = (b_{ik})$  vom *gleichen* Typ heißen *gleich*,  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ , wenn sie in ihren entsprechenden (d. h. gleichstelligen) Elementen übereinstimmen:  $a_{ik} = b_{ik}$  für alle  $i, k$ .

## 1.2 Spezielle quadratische Matrizen

Allgemeine Gestalt einer *n-reihigen* Matrix:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hauptdiagonale} & & \text{Nebendiagonale} \\ \swarrow & & \nwarrow \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

### Spur einer quadratischen Matrix

Die Summe aller Hauptdiagonalelemente heißt *Spur* der Matrix  $\mathbf{A}$ :

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

#### 1.2.1 Diagonalmatrix

Alle *außerhalb* der Hauptdiagonalen liegenden Elemente *verschwinden*:

$$a_{ik} = 0 \quad \text{für alle } i \neq k$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Schreibweise:  $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

#### 1.2.2 Einheitsmatrix

Diagonalmatrix mit

$$a_{ii} = 1 \quad \text{für alle } i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Schreibweisen:  $\mathbf{E}, \mathbf{I}, (\delta_{ik})$

#### 1.2.3 Dreiecksmatrix

Alle Elemente *oberhalb* bzw. *unterhalb* der Hauptdiagonalen *verschwinden*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix:

$$a_{ik} = 0 \quad \text{für alle } i < k$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix:

$$a_{ik} = 0 \quad \text{für alle } i > k$$

#### 1.2.4 Symmetrische Matrix

Alle *spiegelbildlich* zur Hauptdiagonalen stehenden Elemente sind *paarweise gleich*:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad \text{oder} \quad a_{ik} = a_{ki} \quad \text{für alle } i, k$$

#### 1.2.5 Schiefsymmetrische Matrix

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad \text{oder} \quad a_{ik} = -a_{ki} \quad \text{für alle } i, k$$

Die *Hauptdiagonalelemente* verschwinden:  $a_{ii} = 0$  für alle  $i$ .

### 1.2.6 Orthogonale Matrix

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$$

Die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren sind zueinander *orthogonal* und *normiert*, es ist stets  $\det \mathbf{A} = 1$  oder  $\det \mathbf{A} = -1$ . Eine *orthogonale* Matrix ist immer *regulär*, die *inverse* Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  existiert somit und es gilt  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ . Das Produkt *orthogonaler* Matrizen ist wiederum *orthogonal*.

## 1.3 Rechenoperationen für Matrizen

### 1.3.1 Addition und Subtraktion von Matrizen

Zwei Matrizen vom *gleichen* Typ werden *addiert* bzw. *subtrahiert*, indem man ihre entsprechenden (d. h. gleichstelligen) Elemente *addiert* bzw. *subtrahiert*:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (a_{ik}) \pm (b_{ik}) = (a_{ik} \pm b_{ik}) \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$$

#### Rechenregeln

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  sind Matrizen vom *gleichen* Typ:

$$\text{Kommutativgesetz} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\text{Assoziativgesetz} \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

$$\text{Transponieren} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

### 1.3.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Die *Multiplikation* einer Matrix mit einem reellen *Skalar* erfolgt, indem man *jedes* Matrixelement mit dem Skalar multipliziert:

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = \lambda \cdot (a_{ik}) = (\lambda \cdot a_{ik}) \quad (\lambda \in \mathbb{R}; i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$$

*Folgerung:* Ein allen Matrixelementen *gemeinsamer Faktor* darf vor die Matrix gezogen werden.

#### Rechenregeln

$\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  sind Matrizen vom *gleichen* Typ,  $\lambda$  und  $\mu$  *reelle* Skalare:

$$\text{Assoziativgesetz} \quad \lambda(\mu \mathbf{A}) = \mu(\lambda \mathbf{A}) = (\lambda\mu) \mathbf{A}$$

$$\text{Distributivgesetze} \quad (\lambda + \mu) \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{A}$$

$$\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}$$

$$\text{Transponieren} \quad (\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T$$

### 1.3.3 Multiplikation von Matrizen

$\mathbf{A} = (a_{ik})$  sei eine Matrix vom Typ  $(m, n)$ ,  $\mathbf{B} = (b_{ik})$  eine Matrix vom Typ  $(n, p)$ . Dann heißt die  $(m, p)$ -Matrix  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (c_{ik})$  mit

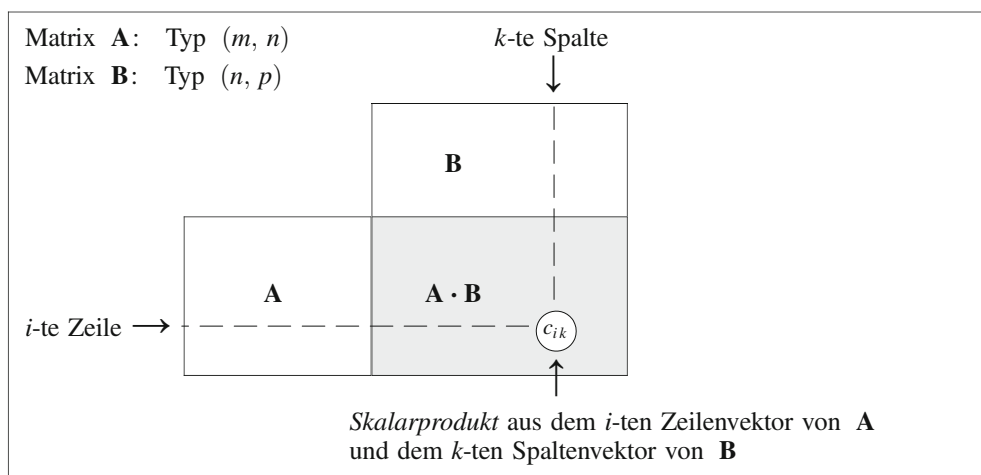
$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$$

das *Produkt* der Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, p$ ).

#### Anmerkungen

- (1) Die Produktbildung ist nur möglich, wenn die *Spaltenzahl* von  $\mathbf{A}$  mit der *Zeilenzahl* von  $\mathbf{B}$  *übereinstimmt*. Der Multiplikationspunkt darf auch weggelassen werden.
- (2) Das Matricelement  $c_{ik}$  des Matrizenproduktes  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  ist das *Skalarprodukt* aus dem *i-ten Zeilenvektor* von  $\mathbf{A}$  und dem *k-ten Spaltenvektor* von  $\mathbf{B}$  (siehe Falk-Schema weiter unten).

#### Falk-Schema zur Berechnung eines Matrizenproduktes $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$



#### Rechenregeln

*Voraussetzung:* Alle Rechenoperationen der *linken* Seiten müssen durchführbar sein.

*Assoziativgesetz*  $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$

*Distributivgesetze*  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}$

$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C}$

*Transponieren*  $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

Man beachte, dass die Matrizenmultiplikation *nicht kommutativ* ist, d. h. i. Allg. gilt  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ .

■ **Beispiel**

Wir berechnen das *Matrizenprodukt*  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  mit  $\mathbf{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_{(2,3)}$  und  $\mathbf{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}}_{(3,4)}$ :

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{B} \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \end{array} \\ \mathbf{A} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{array} & \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -6 & 6 \\ 3 & 17 & 17 & -5 \end{array} \\ & \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{array} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 6 \\ 3 & 17 & 17 & -5 \end{pmatrix}}_{(2,4)}$$

$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  dagegen existiert nicht, da  $\mathbf{B}$  vier Spalten,  $\mathbf{A}$  aber nur zwei Zeilen hat.

■

## 1.4 Reguläre Matrix

Eine  $n$ -reihige Matrix  $\mathbf{A}$  heißt *regulär*, wenn ihre Determinante einen von Null verschiedenen Wert besitzt:  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . Ihr *Rang* ist dann  $\text{Rg}(\mathbf{A}) = n$ .

Ist  $\det \mathbf{A} = 0$ , so heißt  $\mathbf{A}$  *singulär*. Es ist dann  $\text{Rg}(\mathbf{A}) < n$ .

■ **Beispiele**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 33 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A} \text{ ist regulär}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 15 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} \text{ ist singulär}$$

■

## 1.5 Inverse Matrix

### 1.5.1 Definition einer inversen Matrix

Die *regulären* Matrizen (und nur diese) lassen sich *umkehren*, d. h. zu jeder *regulären* Matrix  $\mathbf{A}$  gibt es genau eine *inverse* Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  mit

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Eine quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  ist demnach genau dann *invertierbar*, wenn  $\det \mathbf{A} \neq 0$  und somit  $\text{Rg}(\mathbf{A}) = n$  ist. Man beachte:  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}^{-1}$  sind kommutative Matrizen.

Weitere Bezeichnungen für  $\mathbf{A}^{-1}$ : *Kehrmatrix*, *Umkehrmatrix* oder *Inverse* von  $\mathbf{A}$ .

### Rechenregeln für reguläre Matrizen

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

### 1.5.2 Berechnung einer inversen Matrix

#### 1.5.2.1 Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ unter Verwendung von Unterdeterminanten

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (\det \mathbf{A} \neq 0)$$

$A_{ik}$ : Algebraisches Komplement (Adjunkte) von  $a_{ik}$  in  $\det \mathbf{A}$  ( $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$ )

$D_{ik}$ :  $(n-1)$ -reihige Unterdeterminante von  $\det \mathbf{A}$  (in  $\det \mathbf{A}$  wird die  $i$ -te Zeile und  $k$ -te Spalte gestrichen)

*Hinweis:* Zunächst die *adjungierte* Matrix  $\mathbf{A}_{\text{adj}}$  bilden (sie enthält in der  $i$ -ten Zeile die algebraischen Komplemente  $A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, \dots, A_{in}$ ), diese dann *transponieren* („stürzen“) und anschließend mit dem Kehrwert der Determinante  $\det \mathbf{A}$  multiplizieren:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}_{\text{adj}}$$

#### 1.5.2.2 Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nach dem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren)

Man bildet zunächst aus den  $n$ -reihigen Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{E}$  (Einheitsmatrix) die Matrix

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}) = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \right)$$

vom Typ  $(n, 2n)$  und bringt diese dann durch *elementare Zeilenumformungen* (siehe hierzu VII.1.6.1.3 und VII.3.4.1) auf die spezielle Form

$$\left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}} \right) = (\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1})$$

Dies ist bei einer *regulären* und daher *umkehrbaren* Matrix  $\mathbf{A}$  stets möglich. Die Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  hat jetzt den Platz der Matrix  $\mathbf{A}$  eingenommen, die Matrix  $\mathbf{B}$  ist die gesuchte *inverse* Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$ .

■ **Beispiel**

Die 3-reihige Matrix  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$  ist *regulär* und somit *invertierbar* ( $\det \mathbf{A} = 1 \neq 0$ ). Für ihre

Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  erhalten wir (die jeweils durchgeführte Operation wird rechts angeschrieben;  $Z_i$ :  $i$ -te Zeile):

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} | \mathbf{E}) &= \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \left| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \right. \right) \begin{matrix} -4Z_1 \\ -3Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -13 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right) \begin{matrix} \\ -2Z_2 \end{matrix} \Rightarrow \\
 &\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right. \right) \begin{matrix} -2Z_3 \\ +7Z_3 \end{matrix} \Rightarrow \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \left| \underbrace{\begin{pmatrix} -9 & 4 & -2 \\ 31 & -13 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \right. \right) = (\mathbf{E} | \mathbf{A}^{-1})
 \end{aligned}$$

Somit gilt:  $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -2 \\ 31 & -13 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Kontrollmöglichkeit:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$

■

## 1.6 Rang einer Matrix

### 1.6.1 Definitionen

#### 1.6.1.1 Unterdeterminanten einer Matrix

Werden in einer Matrix  $\mathbf{A}$  vom Typ  $(m, n)$   $m - p$  Zeilen und  $n - p$  Spalten gestrichen, so heißt die Determinante der  $p$ -reihigen Restmatrix eine *Unterdeterminante*  $p$ -ter *Ordnung* oder  $p$ -reihige *Unterdeterminante* von  $\mathbf{A}$ .

#### 1.6.1.2 Rang einer Matrix

Unter dem *Rang* einer Matrix  $\mathbf{A}$  vom Typ  $(m, n)$  wird die *höchste* Ordnung  $r$  aller von Null verschiedenen Unterdeterminanten von  $\mathbf{A}$  verstanden. Symbolische Schreibweise:  $\text{Rg}(\mathbf{A}) = r$ .

#### 1.6.1.3 Elementare Umformungen einer Matrix

Der *Rang*  $r$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  ändert sich *nicht*, wenn sie den folgenden *elementaren Umformungen* unterworfen wird:

1. Zwei Zeilen (oder Spalten) werden miteinander *vertauscht*.
2. Die Elemente einer Zeile (oder Spalte) werden mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl *multipliziert* oder durch eine solche Zahl *dividiert*.
3. Zu einer Zeile (oder Spalte) wird ein beliebiges Vielfaches einer *anderen* Zeile (bzw. *anderen* Spalte) *addiert*.

## 1.6.2 Rangbestimmung einer Matrix

### 1.6.2.1 Rangbestimmung einer $(m, n)$ -Matrix $\mathbf{A}$ unter Verwendung von Unterdeterminanten

Wir beschreiben das Verfahren für den Fall  $m \leq n$ . Ist jedoch  $m > n$ , so ist im folgenden die Zahl  $m$  durch die Zahl  $n$  zu ersetzen.

1. Der Rang  $r$  der Matrix  $\mathbf{A}$  ist höchstens gleich  $m$ , d. h.  $r \leq m$ . Man berechnet daher zunächst die  $m$ -reihigen Unterdeterminanten von  $\mathbf{A}$ . Gibt es unter ihnen *wenigstens eine* von Null verschiedene Determinante, so ist  $r = m$ .
2. Verschwinden aber *sämtliche*  $m$ -reihigen Unterdeterminanten von  $\mathbf{A}$ , so ist  $r$  höchstens gleich  $m - 1$ . Es ist dann zu prüfen, ob es *wenigstens eine* von Null verschiedene  $(m - 1)$ -reihige Unterdeterminante gibt. Ist dies der Fall, so ist  $r = m - 1$ . Anderenfalls ist  $r$  höchstens gleich  $m - 2$ . Das beschriebene Verfahren wird dann solange fortgesetzt, bis man auf eine von Null verschiedene Unterdeterminante von  $\mathbf{A}$  stößt. Die Ordnung dieser Determinante ist der gesuchte Rang der Matrix  $\mathbf{A}$ .

#### ■ Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 2, \quad n = 3 \quad \text{und somit} \quad r \leq 2.$$

Es gibt eine von Null verschiedene 2-reihige Unterdeterminante, z. B.  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$  (in der Matrix  $\mathbf{A}$  wurde die 3. Spalte gestrichen). Die Matrix  $\mathbf{A}$  besitzt damit den Rang  $r = 2$ .

■

### 1.6.2.2 Rangbestimmung einer $(m, n)$ -Matrix $\mathbf{A}$ mit Hilfe elementarer Umformungen

Die  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  wird zunächst mit Hilfe *elementarer Umformungen* in die folgende *Trapezform* gebracht ( $b_{ii} \neq 0$  für  $i = 1, 2, \dots, r$ ):

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \dots & b_{rn} \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{cccc|cccc} \end{array}} \right\} r \text{ Zeilen}$$


---


$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{cccc|cccc} \end{array}} \right\} (m - r) \text{ Nullzeilen}$$

Der Rang von  $\mathbf{A}$  ist dann gleich der Anzahl  $r$  der *nicht-verschwindenden* Zeilen:  
 $\text{Rg}(\mathbf{A}) = r$ .



■ **Beispiel**

Wir bringen die (3,4)-Matrix  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & -8 & 7 \\ -1 & 0 & 11 & 21 \end{pmatrix}$  mit Hilfe *elementarer Umformungen* zunächst in die gewünschte *Trapezform* und lesen aus dieser den Rang ab:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & -8 & 7 \\ -1 & 0 & 11 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2Z_1 + Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Nullzeile}$$

Somit gilt:  $\text{Rg}(\mathbf{A}) = 2$

■

## 2 Determinanten

*Determinanten n-ter Ordnung* (auch *n-reihige Determinanten* genannt) sind *reelle* Zahlen, die man den *n-reihigen quadratischen* Matrizen aufgrund einer bestimmten Rechenvorschrift zuordnet.

*Schreibweisen*

$$D, \det \mathbf{A}, |\mathbf{A}|, |a_{ik}|, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad a_{ik}: \text{Elemente der Determinante} \\ (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

### 2.1 Zweireihige Determinanten

#### Definition einer zweireihigen Determinante

Unter der *Determinante* einer 2-reihigen Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  versteht man die *reelle* Zahl

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

#### Berechnung einer 2-reihigen Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad \begin{array}{l} \text{———} \text{ Hauptdiagonale} \\ \text{---} \text{ Nebendiagonale} \end{array}$$

**Regel:** Der Wert einer 2-reihigen Determinante ist gleich dem Produkt der beiden Hauptdiagonalelemente *minus* dem Produkt der beiden Nebendiagonalelemente.

■ **Beispiel**

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - (-3) \cdot 7 = 32 + 21 = 53$$

■

## 2.2 Dreireihige Determinanten

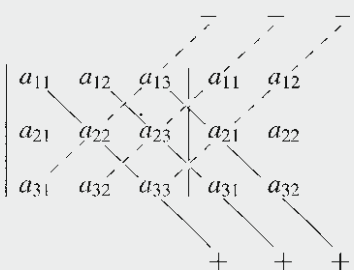
### Definition einer dreireihigen Determinante

Unter der *Determinante* einer 3-reihigen Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  versteht man die *reelle* Zahl

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

### Berechnung einer 3-reihigen Determinante nach der Regel von Sarrus

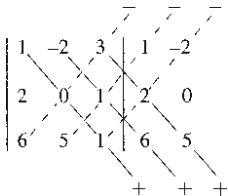


——— Hauptdiagonalprodukte  
 - - - Nebendiagonalprodukte

$$D = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

**Regel:** Die Spalten 1 und 2 der Determinante werden nochmals rechts an die Determinante gesetzt. Den Determinantenwert erhält man dann, indem man die drei Hauptdiagonalprodukte (——) *addiert* und von dieser Summe die drei Nebendiagonalprodukte (- - -) *subtrahiert*.

#### ■ Beispiel

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = ?$$


$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 5 - 6 \cdot 0 \cdot 3 - 5 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-2) =$$

$$= 0 - 12 + 30 - 0 - 5 + 4 = 17$$

■

## 2.3 Determinanten höherer Ordnung

### 2.3.1 Unterdeterminante $D_{ik}$

Die aus einer  $n$ -reihigen Determinante  $D$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte hervorgehende  $(n - 1)$ -reihige Determinante heißt *Unterdeterminante*  $D_{ik}$ :

$$D_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \uparrow \\ k\text{-te Spalte} \end{array}$$

### 2.3.2 Algebraisches Komplement (Adjunkte) $A_{ik}$

Die Größe  $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$  heißt *algebraisches Komplement* oder *Adjunkte* des Elementes  $a_{ik}$  in der Determinante  $D$ . Der Vorzeichenfaktor  $(-1)^{i+k}$  kann nach der *Schachbrettregel* bestimmt werden:

+	-	+	...
-	+	-	...
+	-	+	...
⋮	⋮	⋮	

**Schachbrettregel:** Der Vorzeichenfaktor von  $A_{ik}$  steht im *Schnittpunkt* der  $i$ -ten Zeile mit der  $k$ -ten Spalte.

### 2.3.3 Definition einer $n$ -reihigen Determinante<sup>2)</sup>

Der Wert einer  $n$ -reihigen Determinante  $D = \det \mathbf{A}$  wird *rekursiv* nach der folgenden „Entwicklungsformel“ berechnet („Entwicklung nach den Elementen der 1. Zeile“):

$$D = \det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}$$

$A_{1k}$ : Algebraisches Komplement (Adjunkte) von  $a_{1k}$  in  $D$

Prinzipiell lässt sich damit eine  $n$ -reihige Determinante durch *wiederholte* Anwendung der Entwicklungsformel auf 3-reihige Determinanten zurückführen, die nach der *Regel von Sarrus* berechnet werden können. Dieses Verfahren erweist sich jedoch in der Praxis als *ungeeignet*, da die Anzahl der dabei anfallenden 3-reihigen Determinanten mit zunehmender Ordnung  $n$  der Determinante *rasch* ansteigt. *Beispiel:* Für  $n = 5$  sind 20, für  $n = 6$  bereits 120 3-reihige Determinanten zu berechnen! Ein *praktikables* Rechenverfahren wird in Abschnitt VII.2.6 angegeben.

<sup>2)</sup> Für eine 1-reihige Matrix  $\mathbf{A} = (a)$  wird  $\det \mathbf{A} = a$  festgesetzt.

## 2.4 Laplacescher Entwicklungssatz

Eine  $n$ -reihige Determinante lässt sich nach den Elementen einer *beliebigen* Zeile oder Spalte entwickeln (*Laplacescher Entwicklungssatz*):

*Entwicklung nach den Elementen der  $i$ -ten Zeile*

$$D = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

*Entwicklung nach den Elementen der  $k$ -ten Spalte*

$$D = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$A_{ik}$ : *Algebraisches Komplement (Adjunkte)* von  $a_{ik}$  in  $D$  ( $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$ )

$D_{ik}$ :  $(n-1)$ -reihige *Unterdeterminante* von  $D$  (siehe VII.2.3.1)

### ■ Beispiel

Wir entwickeln die 4-reihige Determinante  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -3 & 2 \\ 9 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$  nach den Elementen der 3. Zeile:

$$D = \underbrace{a_{31}}_9 A_{31} + \underbrace{a_{32}}_0 A_{32} + \underbrace{a_{33}}_0 A_{33} + \underbrace{a_{34}}_4 A_{34} = 9A_{31} + 4A_{34}$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -21, \quad A_{34} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 69$$

$$D = 9A_{31} + 4A_{34} = 9 \cdot (-21) + 4 \cdot (69) = -189 + 276 = 87$$

■

## 2.5 Rechenregeln für $n$ -reihige Determinanten

**Regel 1:** Der Wert einer Determinante ändert sich *nicht*, wenn Zeilen und Spalten miteinander *vertauscht* werden („Stürzen“ einer Determinante):

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$$

**Regel 2:** Beim Vertauschen *zweier* Zeilen (oder Spalten) *ändert* eine Determinante ihr *Vorzeichen*.

**Regel 3:** Werden die Elemente einer *beliebigen* Zeile (oder Spalte) mit einem Skalar  $\lambda$  multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit  $\lambda$ .

**Regel 4:** Eine Determinante wird mit einem Skalar  $\lambda$  multipliziert, indem man die Elemente einer *beliebigen* Zeile (oder Spalte) mit  $\lambda$  multipliziert.

**Regel 5:** Besitzen die Elemente einer Zeile (oder Spalte) einen *gemeinsamen* Faktor  $\lambda$ , so darf dieser *vor* die Determinante gezogen werden.

**Regel 6:** Eine Determinante besitzt den Wert *Null*, wenn sie eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. *Alle* Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind *Null*.
2. *Zwei* Zeilen (oder Spalten) sind *gleich*.
3. *Zwei* Zeilen (oder Spalten) sind zueinander *proportional*.
4. Eine Zeile (oder Spalte) ist als *Linearkombination* der übrigen Zeilen (bzw. Spalten) darstellbar.

**Regel 7:** Der Wert einer Determinante ändert sich *nicht*, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer *anderen* Zeile (bzw. *anderen* Spalte) addiert.

**Regel 8:** Für zwei  $n$ -reihige Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  gilt das **Multiplikationstheorem**:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B})$$

Das heißt die Determinante eines *Matrizenproduktes*  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  ist gleich dem *Produkt* der Determinanten der beiden Faktoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$ .

**Regel 9:** Die Determinante einer  $n$ -reihigen *Dreiecksmatrix*  $\mathbf{A}$  besitzt den Wert

$$\det \mathbf{A} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Das heißt die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem *Produkt* der Hauptdiagonalelemente.

**Regel 10:** Für die Determinante der *inversen* Matrix von  $\mathbf{A}$  gilt:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \quad (\det \mathbf{A} \neq 0)$$

### ■ Beispiel

Mit  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$  berechnen wir die Determinante des Matrizenpro-

dukt  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  unter Verwendung des *Multiplikationstheorems* (Regel 8):

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}) = \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_5 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix}}_{-6} = 5 \cdot (-6) = -30$$

■

## 2.6 Regeln zur praktischen Berechnung einer $n$ -reihigen Determinante

### 2.6.1 Elementare Umformungen einer $n$ -reihigen Determinante

Der Wert einer  $n$ -reihigen Determinante ändert sich *nicht*, wenn man eine der nachfolgenden *elementaren Umformungen* vornimmt:

1. Ein den Elementen einer Zeile (oder Spalte) *gemeinsamer* Faktor  $\lambda$  darf *vor* die Determinante gezogen werden (Regel 5).
2. Zu einer Zeile (oder Spalte) darf ein *beliebiges* Vielfaches einer *anderen* Zeile (bzw. *anderen* Spalte) addiert werden (Regel 7).
3. Zwei Zeilen (oder Spalten) dürfen miteinander *vertauscht* werden, wenn man zugleich das *Vorzeichen* der Determinante *ändert* (Folgerung aus Regel 2).

### 2.6.2 Reduzierung und Berechnung einer $n$ -reihigen Determinante

Die *Berechnung* einer  $n$ -reihigen Determinante kann für  $n > 3$  nach dem folgenden Schema erfolgen:

1. Mit Hilfe *elementarer Umformungen* werden zunächst die Elemente einer Zeile (oder Spalte) bis auf ein Element zu *Null* gemacht.
2. Dann wird die  $n$ -reihige Determinante nach den Elementen dieser Zeile (oder Spalte) *entwickelt*. Man erhält *genau eine*  $(n - 1)$ -reihige Unterdeterminante.
3. Das unter 1. und 2. beschriebene Verfahren wird nun auf die  $(n - 1)$ -reihige Unterdeterminante angewandt und führt zu *einer*  $(n - 2)$ -reihigen Unterdeterminante. Durch *wiederholte Reduzierung* gelangt man schließlich zu *einer einzigen* 3-reihigen Determinante, deren Wert dann nach der *Regel von Sarrus* berechnet wird.

*Hinweis:* Um in einer *Zeile* (bzw. *Spalte*) Nullen zu erzeugen, sind *Spalten* (bzw. *Zeilen*) zu addieren.

#### ■ Beispiel

Die 4-reihige Determinante  $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -5 & -4 & 1 \end{vmatrix}$  lässt sich wie folgt mit Hilfe *elementarer Um-*

*formungen* auf eine 3-reihige Determinante zurückführen: Wir addieren zur zweiten, dritten und vierten Zeile der Reihe nach das  $(-2)$ -fache, 3-fache bzw. 1-fache der 1. Zeile und *entwickeln* die Determinante anschließend nach den Elementen der 1. *Spalte*:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -5 \\ 0 & 14 & 11 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -7 & -7 & -5 \\ 14 & 11 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}_{78} = 1 \cdot 78 = 78$$

Die Berechnung der 3-reihigen Determinante erfolgte dabei nach der *Regel von Sarrus*.

■

## 3 Lineare Gleichungssysteme

### 3.1 Grundbegriffe

#### 3.1.1 Definition eines linearen Gleichungssystems

Ein aus  $m$  linearen Gleichungen mit  $n$  Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bestehendes System

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

heißt *lineares Gleichungssystem* oder lineares  $(m, n)$ -System.

*Bezeichnungen*

$a_{ik}$ : Koeffizienten des linearen Gleichungssystems ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ )

$\mathbf{A}$ : Koeffizientenmatrix des Systems

$\mathbf{x}$ : Lösungsvektor

$\mathbf{c}$ : Spaltenvektor aus den *absoluten* Gliedern des Systems

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

**Erweiterte Koeffizientenmatrix  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$**

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{A}} \quad \underbrace{\hspace{1em}}_{\mathbf{c}}$

Die *erweiterte* Koeffizientenmatrix  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$  spielt eine entscheidende Rolle bei der Untersuchung des *Lösungsverhaltens* eines linearen  $(m, n)$ -Systems (siehe VII.3.2).

#### 3.1.2 Spezielle lineare Gleichungssysteme

*Homogenes System*:  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$  (alle  $c_i = 0$ , d. h.  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ )

*Inhomogenes System*:  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{c}$  (nicht alle  $c_i = 0$ , d. h.  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ )

*Quadratisches System*:  $m = n$  (auch  $(n, n)$ -System genannt)

## 3.2 Lösungsverhalten eines linearen $(m, n)$ -Gleichungssystems

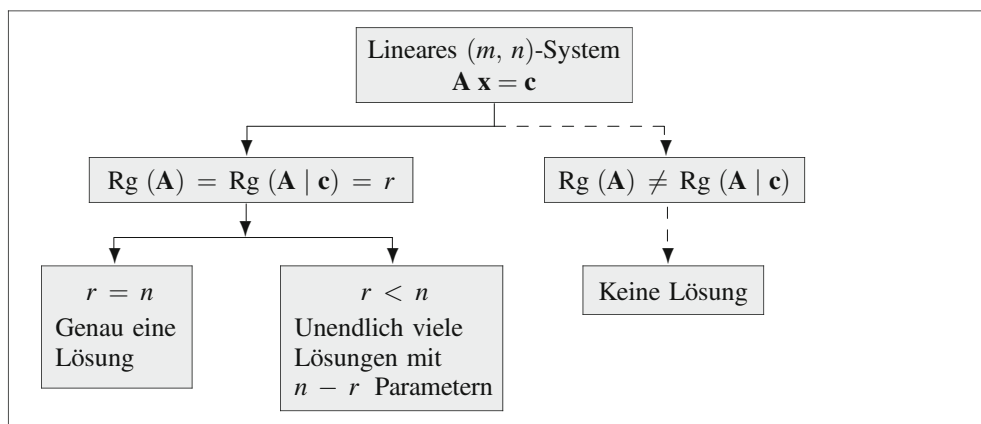
### 3.2.1 Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen $(m, n)$ -Systems $A \mathbf{x} = \mathbf{c}$

$$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A | \mathbf{c}) = r$$

Ein lineares Gleichungssystem ist stets lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix  $A$  mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix  $(A | \mathbf{c})$  übereinstimmt.

Bei einem *homogenen* System  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$  ist die Lösbarkeitsbedingung *immer* erfüllt. Ein *homogenes* System ist daher *stets* lösbar.

### 3.2.2 Lösungsmenge eines linearen $(m, n)$ -Systems $A \mathbf{x} = \mathbf{c}$



Der im Schema durch den *gestrichelten* Weg angedeutete Fall kann nur für ein *inhomogenes* System eintreten (ein *homogenes* System ist *stets* lösbar). Im einzelnen gilt somit:

#### Homogenes lineares $(m, n)$ -Gleichungssystem $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Das *homogene* System besitzt entweder genau *eine* Lösung, nämlich die *triviale* Lösung  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , oder *unendlich* viele Lösungen (darunter die *triviale* Lösung).

#### Inhomogenes lineares $(m, n)$ -Gleichungssystem $A \mathbf{x} = \mathbf{c}$ ( $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ )

Das *inhomogene* System besitzt entweder genau *eine* Lösung oder *unendlich* viele Lösungen oder *keine* Lösung.

#### ■ Beispiele

- (1) Wir prüfen, ob das *inhomogene* lineare  $(2,3)$ -System

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 8$$

lösbar ist.



Dazu bestimmen wir den *Rang* der Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $(\mathbf{A} | \mathbf{c})$  mit Hilfe *elementarer Umformungen*:

$$(\mathbf{A} | \mathbf{c}) = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \right) - Z_1 \Rightarrow \left( \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

Die Matrizen  $(\mathbf{A} | \mathbf{c})$  und  $\mathbf{A}$  besitzen jetzt *Trapezform*. Es ist  $\text{Rg}(\mathbf{A}) = \text{Rg}(\mathbf{A} | \mathbf{c}) = 2$ . Das Gleichungssystem ist somit *lösbar*. Wegen  $n - r = 3 - 2 = 1$  erhalten wir *unendlich* viele Lösungen mit *einem* Parameter.

- (2) Wir zeigen, dass das *inhomogene* lineare (3,2)-System

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}$$

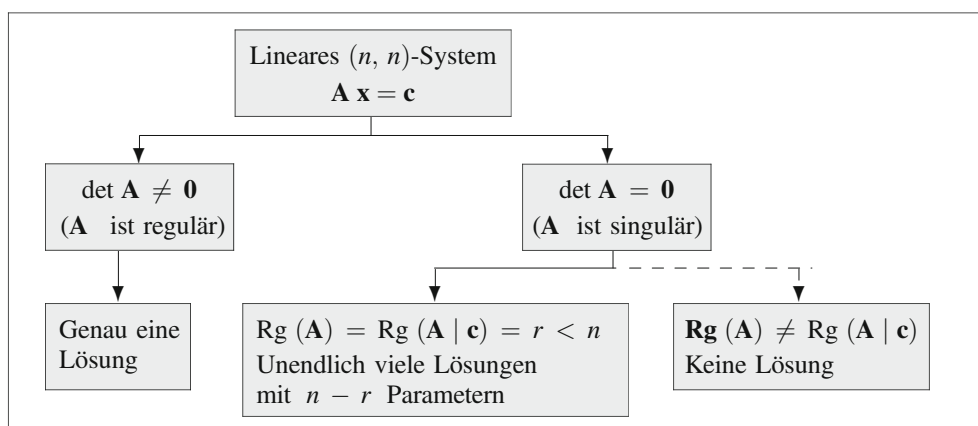
nicht lösbar ist:

$$(\mathbf{A} | \mathbf{c}) = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \right) \begin{matrix} -5Z_1 \\ -2Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ -18 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 59 \end{pmatrix} \right)$$

Die Matrizen  $(\mathbf{A} | \mathbf{c})$  und  $\mathbf{A}$  besitzen jetzt *Trapezform*. Es ist  $\text{Rg}(\mathbf{A}) = 2$ ,  $\text{Rg}(\mathbf{A} | \mathbf{c}) = 3$  und somit  $\text{Rg}(\mathbf{A}) \neq \text{Rg}(\mathbf{A} | \mathbf{c})$ . Das lineare Gleichungssystem ist daher *nicht* lösbar. ■

### 3.3 Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems

Für den Spezialfall eines *quadratischen*  $(n, n)$ -Systems gilt das folgende *Kriterium für die Lösbarkeit und Lösungsmenge*:



Ein *homogenes* lineares  $(n, n)$ -System  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$  ist *stets* lösbar. Für  $\det \mathbf{A} \neq 0$  erhält man als *einzige* Lösung die *triviale* Lösung  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , im Falle  $\det \mathbf{A} = 0$  besitzt das *homogene* System *unendlich* viele Lösungen mit  $n - r$  Parametern. Der durch den *gestrichelten* Weg angedeutete Fall kann nur für ein *inhomogenes* System eintreten.

■ **Beispiel**

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = & -3 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 & = & 14 \end{array} \Rightarrow \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

Das vorliegende quadratische lineare Gleichungssystem besitzt wegen  $\det \mathbf{A} = 2 \neq 0$  eine *reguläre* Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  und somit genau *eine* Lösung.

■

## 3.4 Lösungsverfahren für ein lineares Gleichungssystem nach Gauß (Gaußscher Algorithmus)

### 3.4.1 Äquivalente Umformungen eines linearen $(m, n)$ -Systems

Umformungen, die die *Lösungsmenge* eines linearen  $(m, n)$ -Systems *nicht* verändern, heißen *äquivalente Umformungen*. Zu ihnen gehören:

1. Zwei Gleichungen dürfen miteinander *vertauscht* werden.
2. Jede Gleichung darf mit einer beliebigen von *Null* verschiedenen Zahl *multipliziert* oder durch eine solche Zahl *dividiert* werden.
3. Zu jeder Gleichung darf ein *beliebiges* Vielfaches einer *anderen* Gleichung *addiert* werden.

### 3.4.2 Gaußscher Algorithmus

Ein lineares  $(m, n)$ -Gleichungssystem  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{c}$  lässt sich stets mit Hilfe *äquivalenter Umformungen* in ein äquivalentes *gestaffeltes* Gleichungssystem  $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{c}^*$  vom Typ

$$\begin{array}{rcl} a_{11}^* x_1 + a_{12}^* x_2 + \dots + a_{1r}^* x_r + a_{1,r+1}^* x_{r+1} + \dots + a_{1n}^* x_n & = & c_1^* \\ a_{22}^* x_2 + \dots + a_{2r}^* x_r + a_{2,r+1}^* x_{r+1} + \dots + a_{2n}^* x_n & = & c_2^* \\ \vdots & & \vdots \\ a_{rr}^* x_r + a_{r,r+1}^* x_{r+1} + \dots + a_{rn}^* x_n & = & c_r^* \\ & & 0 = c_{r+1}^* \\ & & 0 = c_{r+2}^* \\ & & \vdots \\ & & 0 = c_m^* \end{array}$$

überführen ( $a_{ii}^* \neq 0$  für  $i = 1, 2, \dots, r$ ), wobei gegebenenfalls auch *Spaltenvertauschungen*, d. h. Umnumerierungen der Unbekannten notwendig sind. Es ist dann und nur dann *lösbar*, wenn  $c_{r+1}^* = c_{r+2}^* = \dots = c_m^* = 0$  ist. Im Falle der *Lösbarkeit* erhält man somit ein *gestaffeltes* Gleichungssystem mit  $r$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten, das *sukzessiv* von unten nach oben gelöst werden kann.

Dabei sind noch *zwei* Fälle zu unterscheiden:

### 1. Fall: $r = n$

Das gestaffelte System besteht aus  $n$  Gleichungen mit  $n$  Unbekannten und besitzt genau *eine* Lösung.

### 2. Fall: $r < n$

Das gestaffelte System enthält *weniger* Gleichungen ( $r$ ) als Unbekannte ( $n$ ). Daher sind  $n - r$  der Unbekannten, z. B.  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ , *frei wählbare* Größen (Parameter). Man erhält dann *unendlich* viele Lösungen mit  $n - r$  Parametern.

## Beschreibung des Eliminationsverfahrens von Gauß

1. Im 1. Rechenschritt wird z. B. die Unbekannte  $x_1$  *eliminiert*, indem man zur  $i$ -ten Gleichung das  $-(a_{i1}/a_{11})$ -fache der 1. Gleichung addiert ( $a_{11} \neq 0$ ;  $i = 2, 3, \dots, m$ ). Bei der Addition *verschwindet* dann jeweils  $x_1$ .
2. Das unter 1. beschriebene Verfahren wird jetzt auf das *reduzierte* Gleichungssystem, bestehend aus  $m - 1$  Gleichungen mit den  $n - 1$  Unbekannten  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , angewandt. Dadurch wird die nächste Unbekannte (z. B.  $x_2$ ) eliminiert (Voraussetzung:  $a_{22} \neq 0$ ). Nach insgesamt  $m - 1$  Schritten bleibt *eine* Gleichung mit *einer* oder *mehreren* Unbekannten übrig.
3. Die Eliminationsgleichungen bilden dann zusammen mit der letzten Gleichung ein *gestaffeltes* lineares Gleichungssystem, aus dem sich die Unbekannten *sukzessiv* von unten nach oben berechnen lassen.
4. Sollte bei einem Schritt die weiter oben genannte Voraussetzung (Diagonalelement  $\neq 0$ ) *nicht* erfüllt sein, so muss eine *Zeilenvertauschung* vorgenommen werden, um zu einem von Null *verschiedenen* Pivotelement zu gelangen. Der Prozeß endet, wenn eine solche Vertauschung nicht mehr möglich ist.

## Anmerkungen

- (1) Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Unbekannten eliminiert werden.
- (2) Den *äquivalenten Umformungen* eines linearen Gleichungssystems  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{c}$  entsprechen in der Matrizendarstellung *elementare Zeilenumformungen* in der *erweiterten* Koeffizientenmatrix  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ . Damit ergibt sich der folgende Lösungsweg:
  1. Zunächst wird die *erweiterte* Koeffizientenmatrix  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$  mit Hilfe *elementarer Zeilenumformungen* in die Trapezform  $(\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*)$  gebracht (dies ist im Falle der Lösbarkeit *stets* möglich).
  2. Anschließend wird das äquivalente *gestaffelte* System  $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{c}^*$  sukzessiv von unten nach oben gelöst.

### ■ Beispiele

- (1) Wir lösen das lineare (3,3)-Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\2x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \\-x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 14\end{aligned}$$

mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus*. Das System besitzt wegen  $\det \mathbf{A} = 2 \neq 0$  genau eine Lösung. Wir verwenden hier das „elementare“ Rechenschema mit *Zeilensummenprobe* (E: eliminierte Gleichung;  $c_i$ : Absolutglied;  $s_i$ : Zeilensumme):

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c_i$	$s_i$
$E_1$	1	-2	1	6	6
	2	1	-1	-3	-1
$-2 \cdot E_1$	-2	4	-2	-12	-12
	-1	-4	3	14	12
$E_1$	1	-2	1	6	6
$E_2$		5	-3	-15	-13
		-6	4	20	18
$1,2 \cdot E_2$		6	-3,6	-18	-15,6
			0,4	2	2,4

Die grau unterlegten Zeilen bilden das gesuchte *gestaffelte* System.

*Gestaffeltes System*

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \Rightarrow x_1 = 1 \uparrow \\5x_2 - 3x_3 &= -15 \Rightarrow x_2 = 0 \uparrow \\0,4x_3 &= 2 \Rightarrow x_3 = 5\end{aligned}$$

*Lösung:*  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 5$

- (2) Ist das *homogene* lineare (4,3)-Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\x_2 - x_3 &= 0 \\3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0 \\3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0\end{aligned}$$

*nicht-trivial* lösbar?

Zunächst bringen wir die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  auf *Trapezform*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3Z_1 \\ -3Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -Z_2 \\ -2Z_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{Nullzeilen} \end{matrix}$$

Es ist  $r = \text{Rg}(\mathbf{A}) = 2$ ,  $n = 3$ , d. h.  $r < n$ . Das homogene System ist somit *nicht-trivial* lösbar. Das *gestaffelte* Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

wird gelöst durch  $x_1 = -3\lambda$ ,  $x_2 = \lambda$ ,  $x_3 = \lambda$  ( $x_3$  wurde als Parameter gewählt;  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

■

### 3.5 Cramersche Regel

Ein *quadratisches* lineares  $(n, n)$ -Gleichungssystem  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{c}$  mit *regulärer* Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  besitzt die *eindeutig* bestimmte Lösung

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(Cramersche Regel; nur für *kleines*  $n$  praktikabel).

$D$ : Koeffizientendeterminante ( $D = \det \mathbf{A} \neq 0$ )

$D_i$ : Hilfsdeterminante, die aus  $D$  hervorgeht, indem man die  $i$ -te Spalte durch die Absolutglieder  $c_1, c_2, \dots, c_n$  des Gleichungssystems ersetzt.

#### ■ Beispiel

Das *quadratische* lineare Gleichungssystem

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = -7$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$

besitzt eine *reguläre* Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  und ist somit *eindeutig* lösbar:

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Berechnung der benötigten *Hilfsdeterminanten*:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -7 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\text{Lösung: } x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-4}{-2} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{4}{-2} = -2$$

■

### 3.6 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

$n$  Vektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  aus dem  $m$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^m$  heißen *linear unabhängig*, wenn die lineare Vektorgleichung

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

nur für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  erfüllt werden kann. Verschwinden jedoch *nicht alle* Koeffizienten in dieser Gleichung, so heißen die Vektoren *linear abhängig*. Im Falle der linearen Abhängigkeit gibt es also *mindestens einen* von Null verschiedenen Koeffizienten.

Enthält das Vektorsystem  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  den *Nullvektor* oder zwei *gleiche* (oder *kollineare*) Vektoren oder ist *mindestens einer* der Vektoren als Linearkombination der übrigen darstellbar, so sind die Vektoren *linear abhängig*.

### Kriterium für linear unabhängige Vektoren

Die  $n$  Vektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  des Raumes  $\mathbb{R}^m$  werden zu einer Matrix  $\mathbf{A}$  vom Typ  $(m, n)$  zusammengefaßt. Der Rang  $r$  dieser Matrix entscheidet dann darüber, ob die Vektoren linear unabhängig sind oder nicht. Es gilt:

$$r = n \Leftrightarrow \text{linear unabhängig}$$

$$r < n \Leftrightarrow \text{linear abhängig}$$

Ist  $\mathbf{A}$  quadratisch, d. h. liegen  $n$  Vektoren des  $\mathbb{R}^n$  vor, so gelten folgende Aussagen:

1.  $\mathbf{A}$  ist *regulär*, d. h.  $\det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow$  linear unabhängig
2.  $\mathbf{A}$  ist *singulär*, d. h.  $\det \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow$  linear abhängig
3. Im  $\mathbb{R}^n$  gibt es *maximal*  $n$  linear unabhängige Vektoren. Mehr als  $n$  Vektoren sind immer linear abhängig.

#### ■ Beispiel

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A} \text{ ist regulär}$$

Die drei Vektoren des 3-dimensionalen Raumes sind daher *linear unabhängig*. ■

## 4 Komplexe Matrizen

### 4.1 Definition einer komplexen Matrix

Eine  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  mit komplexen Elementen  $a_{ik} = b_{ik} + j \cdot c_{ik}$  heißt *komplexe Matrix* ( $b_{ik}, c_{ik} \in \mathbb{R}$ ;  $j$ : imaginäre Einheit):

$$\mathbf{A} = (a_{ik}) = (b_{ik} + j \cdot c_{ik}) = (b_{ik}) + j \cdot (c_{ik}) = \mathbf{B} + j \cdot \mathbf{C}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{B} = (b_{ik}): \text{ Realteil von } \mathbf{A} \ (b_{ik} \in \mathbb{R}) \\ \mathbf{C} = (c_{ik}): \text{ Imaginärteil von } \mathbf{A} \ (c_{ik} \in \mathbb{R}) \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  sind *reelle* Matrizen vom gleichen Typ wie  $\mathbf{A}$ .

#### ■ Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+2j & 2+2j \\ 4-3j & 5-j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2j & 2j \\ -3j & -j \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} + j \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} = \mathbf{B} + j \cdot \mathbf{C} \quad \blacksquare$$

## 4.2 Rechenoperationen und Rechenregeln für komplexe Matrizen

Die für reelle Matrizen geltenden Rechenoperationen, Rechenregeln und Aussagen lassen sich sinngemäß auch auf *komplexe* Matrizen übertragen (siehe hierzu VII.1):

1. Komplexe Matrizen vom gleichen Typ werden *elementweise* addiert und subtrahiert.
2. Die Multiplikation einer komplexen Matrix mit einem (reellen oder komplexen) Skalar erfolgt *elementweise*.
3. Zwei komplexe Matrizen werden wie im Reellen multipliziert, indem man die Zeilenvektoren des linken Faktors der Reihe nach *skalar* mit den Spaltenvektoren des rechten Faktors multipliziert (unter den in Abschnitt VII.1.3.3 genannten Voraussetzungen).
4. Spiegelt man die Elemente einer komplexen Matrix  $\mathbf{A}$  an der Hauptdiagonalen, so erhält man ihre *Transponierte*  $\mathbf{A}^T$ .
5. Für eine *quadratische* komplexe Matrix lässt sich wie im Reellen eine *Determinante* bilden, die i. Allg. jedoch einen *komplexen* Wert besitzen wird.

### ■ Beispiel

Matrizenprodukt  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  (Falk-Schema, siehe VII.1.3.3):

		$\mathbf{B}$		
			j	$5 - j$
			2	$1 - j$
	$\mathbf{A}$	$\begin{pmatrix} 1 + 2j & 3 - j \\ 2 - 2j & 1 + j \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 - j & 9 + 5j \\ 4 + 4j & 10 - 12j \end{pmatrix}$	
			$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= (1 + 2j)j + (3 - j)2 = \\
 &= j + 2j^2 + 6 - 2j = \\
 &= j - 2 + 6 - 2j = 4 - j
 \end{aligned}$$

analog:  $c_{12}, c_{21}, c_{22}$

## 4.3 Konjugiert komplexe Matrix

Die Matrixelemente  $a_{ik} = b_{ik} + j \cdot c_{ik}$  werden durch die *konjugiert komplexen* Elemente  $a_{ik}^* = b_{ik} - j \cdot c_{ik}$  ersetzt:

$$\mathbf{A}^* = (a_{ik}^*) = (b_{ik} - j \cdot c_{ik}) = (b_{ik}) - j(c_{ik})$$

bzw.

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{B} + j \cdot \mathbf{C})^* = \mathbf{B} - j \cdot \mathbf{C}$$

Der Übergang  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^*$  wird als *Konjugation* bezeichnet.

### Rechenregeln

$$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^* = \mathbf{A}_1^* + \mathbf{A}_2^*, \quad (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2)^* = \mathbf{A}_1^* \cdot \mathbf{A}_2^*$$

### ■ Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + j & 5 \\ 2 - j & 3 - 2j \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 - j & 5 \\ 2 + j & 3 + 2j \end{pmatrix}$$

## 4.4 Konjugiert transponierte Matrix

Die komplexe Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  wird zunächst *konjugiert*, dann *transponiert*:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{Konjugieren}} \mathbf{A}^* \xrightarrow{\text{Transponieren}} (\mathbf{A}^*)^T = \overline{\mathbf{A}}$$

$$a_{ik} \rightarrow a_{ik}^* \rightarrow a_{ki}^* \Rightarrow \overline{a}_{ik} = a_{ki}^*$$

Die Operationen „Konjugieren“ und „Transponieren“ sind *vertauschbar*:  $(\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$

### Rechenregeln

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}, \quad (\overline{\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2}) = \overline{\mathbf{A}_1} + \overline{\mathbf{A}_2}, \quad (\overline{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2}) = \overline{\mathbf{A}_2} \cdot \overline{\mathbf{A}_1}$$

#### ■ Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+j & 2+3j \\ 4-j & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1-j & 2-3j \\ 4+j & 5 \end{pmatrix} \rightarrow (\mathbf{A}^*)^T = \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1-j & 4+j \\ 2-3j & 5 \end{pmatrix}$$

■

## 4.5 Spezielle komplexe Matrizen

### 4.5.1 Hermitesche Matrix

Eine  $n$ -reihige komplexe Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  heißt *hermitesch*, wenn

$$\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T \quad \text{oder} \quad a_{ik} = a_{ki}^*$$

für alle  $i, k$  gilt.

#### Eigenschaften

- (1) Alle Hauptdiagonalelemente  $a_{ii}$  sind *reell*.
- (2) Die komplexe Matrix  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + j \cdot \mathbf{C}$  ist dann und nur dann *hermitesch*, wenn der Realteil  $\mathbf{B}$  *symmetrisch* und der Imaginärteil  $\mathbf{C}$  *schiefsymmetrisch* ist.
- (3) Die Determinante einer hermiteschen Matrix ist *reell*.
- (4) Im Reellen fallen die Begriffe „hermitesch“ und „symmetrisch“ zusammen.

### 4.5.2 Schiefhermitesche Matrix

Eine  $n$ -reihige komplexe Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  heißt *schiefhermitesch*, wenn

$$\mathbf{A} = -\overline{\mathbf{A}}^T \quad \text{oder} \quad a_{ik} = -a_{ki}^*$$

für alle  $i, k$  gilt.



*Eigenschaften*

- (1) Alle Hauptdiagonalelemente  $a_{ii}$  sind *imaginär*.
- (2) Eine komplexe Matrix  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + j \cdot \mathbf{C}$  ist dann und nur dann *schiefhermitesch*, wenn der Realteil  $\mathbf{B}$  *schiefsymmetrisch* und der Imaginärteil  $\mathbf{C}$  *symmetrisch* ist.
- (3) Im Reellen fallen die Begriffe „schiefhermitesch“ und „schiefsymmetrisch“ zusammen.

**4.5.3 Unitäre Matrix**

Eine  $n$ -reihige komplexe Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  heißt *unitär*, wenn

$$\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$$

gilt ( $\mathbf{E}$  ist die  $n$ -reihige Einheitsmatrix).

*Eigenschaften*

- (1)  $\mathbf{A}$  ist *regulär*, die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  existiert somit und es gilt  $\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}}$ . Die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  ist ebenfalls *unitär*. Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\overline{\mathbf{A}}$  sind kommutativ:  $\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ .
- (2) Es ist stets  $|\det \mathbf{A}| = 1$ .
- (3) Im Reellen fallen die Begriffe „unitär“ und „orthogonal“ zusammen.
- (4) Das Produkt unitärer Matrizen ist immer *unitär*.

## 5 Eigenwertprobleme

**5.1 Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix**

Ist  $\mathbf{A}$  eine  $n$ -reihige (reelle oder komplexe) Matrix und  $\mathbf{E}$  die  $n$ -reihige *Einheitsmatrix*, so wird durch die Matrizengleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad \text{oder} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ein sog.  *$n$ -dimensionales Eigenwertproblem* beschrieben. Diese auch als *Eigenwertgleichung* bezeichnete Gleichung repräsentiert ein homogenes lineares Gleichungssystem mit dem noch unbekannten Parameter  $\lambda$ .

*Bezeichnungen*

$\lambda$ : *Eigenwert* der Matrix  $\mathbf{A}$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ : *Eigenvektor* der Matrix  $\mathbf{A}$  zum Eigenwert  $\lambda$

$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ : *Charakteristische Matrix* von  $\mathbf{A}$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren lassen sich schrittweise wie folgt berechnen:

1. Die *Eigenwerte* sind die Lösungen der sog. *charakteristischen Gleichung*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

(algebraische Gleichung  $n$ -ten Grades mit  $n$  Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ).

2. Einen zum Eigenwert  $\lambda_i$  gehörenden *Eigenvektor*  $\mathbf{x}_i$  erhält man als Lösungsvektor des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Er wird üblicherweise in der *normierten* Form angegeben. (Bei einem *mehrfachen* Eigenwert können auch *mehrere* Eigenvektoren auftreten, siehe weiter unten).

Die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  sind also die *Nullstellen* des charakteristischen Polynoms  $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ .

Die Eigenwerte und Eigenvektoren besitzen die folgenden Eigenschaften:

1. Die *Spur* der Matrix  $\mathbf{A}$  ist gleich der *Summe* aller Eigenwerte:

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

2. Die *Determinante* von  $\mathbf{A}$  ist gleich dem *Produkt* aller Eigenwerte:

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

3. Sind *alle* Eigenwerte voneinander *verschieden*, so gehört zu jedem Eigenwert *ein* Eigenvektor, der bis auf einen beliebigen von Null verschiedenen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist. Die  $n$  Eigenvektoren werden üblicherweise *normiert* und sind *linear unabhängig*.
4. Tritt ein Eigenwert dagegen  *$k$ -fach* auf, so gehören hierzu *mindestens ein, höchstens aber  $k$  linear unabhängige* Eigenvektoren.
5. Die zu *verschiedenen* Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind immer *linear unabhängig*.

Ist  $\mathbf{A}$  eine *reguläre* Matrix, so sind alle Eigenwerte von Null verschieden (und umgekehrt). Die *Kehrwerte* der Eigenwerte einer regulären Matrix  $\mathbf{A}$  sind die Eigenwerte der zugehörigen *inversen* Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$ .

#### ■ Beispiel

Wie lauten die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* dieser Matrix  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ?

*Charakteristische Matrix:*

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - \lambda & -5 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

Charakteristische Gleichung mit Lösungen:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -5 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)(4 - \lambda) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$$

Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$ :  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 3$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert  $\lambda_1 = -1$ :

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{E}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} -x_1 - 5x_2 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung (bitte nachrechnen):  $x_1 = -5\alpha$ ,  $x_2 = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )

$$\text{Normierter Eigenvektor: } \tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analog wird der (normierte) Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_2 = 3$  bestimmt:  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Ergebnis: Das 2-dimensionale Eigenwertproblem führt zu zwei verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 3$ , die zugehörigen Eigenvektoren  $\tilde{\mathbf{x}}_1$  und  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  sind daher *linear unabhängig*. ■

## 5.2 Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller $n$ -reihiger Matrizen

### Bei einer Diagonal- bzw. Dreiecksmatrix

Die Eigenwerte sind identisch mit den *Hauptdiagonalelementen*:  $\lambda_i = a_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

### Bei einer symmetrischen Matrix

Die Eigenwerte und Eigenvektoren einer  $n$ -reihigen *symmetrischen* Matrix  $\mathbf{A}$  besitzen die folgenden Eigenschaften:

1. Alle  $n$  Eigenwerte sind *reell*.
2. Es gibt insgesamt genau  $n$  *linear unabhängige* Eigenvektoren.
3. Zu jedem *einfachen* Eigenwert gehört genau *ein* linear unabhängiger Eigenvektor, zu jedem  *$k$ -fachen* Eigenwert dagegen genau  $k$  linear unabhängige Eigenvektoren.
4. Eigenvektoren, die zu *verschiedenen* Eigenwerten gehören, sind *orthogonal*.

### Bei einer hermiteschen Matrix

Die Eigenwerte und Eigenvektoren einer  $n$ -reihigen *hermiteschen* Matrix  $\mathbf{A}$  besitzen die folgenden Eigenschaften:

1. Alle  $n$  Eigenwerte sind *reell*.
2. Es gibt insgesamt genau  $n$  *linear unabhängige* Eigenvektoren.
3. Zu jedem *einfachen* Eigenwert gehört genau *ein* linear unabhängiger Eigenvektor, zu jedem  *$k$ -fachen* Eigenwert dagegen stets  $k$  linear unabhängige Eigenvektoren.

# VIII Komplexe Zahlen und Funktionen

## 1 Darstellungsformen einer komplexen Zahl

### 1.1 Algebraische oder kartesische Form

$$z = x + jy$$

$j$ : Imaginäre Einheit<sup>1)</sup> mit  $j^2 = -1$

$x$ : Realteil von  $z$  ( $\operatorname{Re}(z) = x$ )

$y$ : Imaginärteil von  $z$  ( $\operatorname{Im}(z) = y$ )

Eine komplexe Zahl  $z = x + jy$  lässt sich in der *Gaußschen Zahlenebene* durch einen *Bildpunkt*  $P(z) = (x; y)$  (Bild a)) oder durch einen vom Koordinatenursprung  $0$  zum Bildpunkt  $P(z)$  gerichteten *Zeiger*  $\underline{z} = x + jy$  (*unterstrichene* komplexe Zahl, Bild b)) bildlich darstellen. Die *Länge* des Zeigers heißt der *Betrag*  $|z|$  der komplexen Zahl  $z = x + jy$ :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

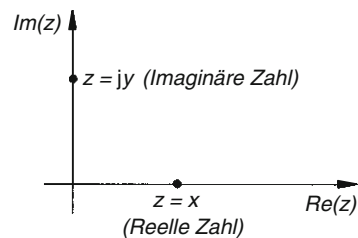
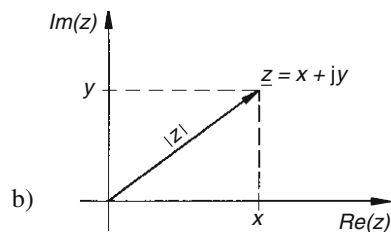
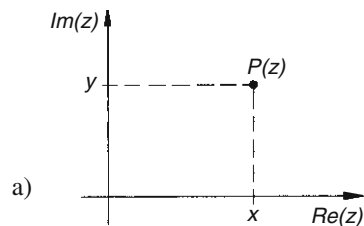
#### Spezialfälle

*Reelle Zahl*:  $\operatorname{Im}(z) = 0$

$$z = x + j0 \equiv x$$

*Imaginäre Zahl*:  $\operatorname{Re}(z) = 0$

$$z = 0 + jy \equiv jy$$



#### Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + jy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$$

<sup>1)</sup> Das in der reinen Mathematik übliche Symbol  $i$  für die imaginäre Einheit wird in der Technik nicht verwendet, um Verwechslungen mit der Stromstärke  $i$  zu vermeiden.

### Gleichheit zweier komplexer Zahlen

Zwei komplexe Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  heißen genau dann *gleich*,  $z_1 = z_2$ , wenn ihre Bildpunkte *zusammenfallen*, d. h.  $x_1 = x_2$  und  $y_1 = y_2$  ist (Übereinstimmung im Realteil und im Imaginärteil).

### Konjugiert komplexe Zahl

Die zu  $z = x + jy$  *konjugiert komplexe Zahl*  $z^*$  liegt *spiegelsymmetrisch* zur reellen Achse.  $z$  und  $z^*$  unterscheiden sich also in ihrem Imaginärteil durch das *Vorzeichen*:

$$z^* = (x + jy)^* = x - jy$$

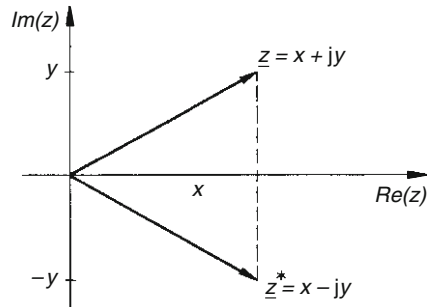
Realteil und Betrag bleiben also erhalten:

$$\operatorname{Re}(z^*) = \operatorname{Re}(z) = x, \quad |z^*| = |z|$$

Ferner gilt:

$$(z^*)^* = z, \quad z = z^* \Leftrightarrow z \text{ ist reell}$$

In der reinen Mathematik verwendet man das Symbol  $\bar{z}$  statt  $z^*$ .



## 1.2 Polarformen

In der *Polarform* erfolgt die Darstellung einer komplexen Zahl durch die *Polarkoordinaten*  $r$  und  $\varphi$ , wobei die Winkelkoordinate  $\varphi$  *unendlich vieldeutig* ist. Man beschränkt sich bei der Winkelangabe daher meist auf den im Intervall  $[0, 2\pi)$  gelegenen *Hauptwert* (siehe I.9.1.2). Im technischen Bereich wird als Winkel  $\varphi$  oft der *kleinstmögliche Drehwinkel* angegeben (1. und 2. Quadrant: Drehung im *Gegenuhreigersinn*; 3. und 4. Quadrant: Drehung im *Uhrzeigersinn*). Die Winkel liegen dann im Intervall  $-\pi < \varphi \leq \pi$ .

### 1.2.1 Trigonometrische Form

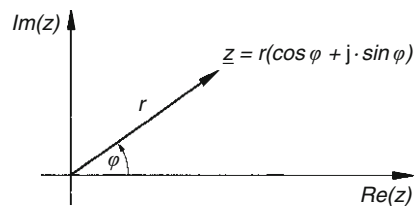
$$z = r(\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$$

$r$ : Betrag von  $z$  ( $r = |z|$ )

$\varphi$ : Argument (Winkel, Phase) von  $z$

*Konjugiert komplexe Zahl:*

$$z^* = r(\cos \varphi - j \cdot \sin \varphi)$$



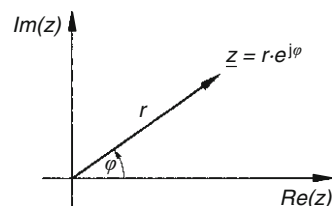
### 1.2.2 Exponentialform

$$z = r \cdot e^{j\varphi}$$

$r$ : Betrag von  $z$  ( $r = |z|$ )

$\varphi$ : Argument (Winkel, Phase) von  $z$

*Konjugiert komplexe Zahl:*  $z^* = r \cdot e^{-j\varphi}$



### Eulersche Formeln

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi, \quad e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \cdot \sin \varphi$$

Spezielle Werte:  $1 = 1 \cdot e^{j0}$ ,  $-1 = 1 \cdot e^{j\pi}$ ,  $j = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ ,  $-j = 1 \cdot e^{j\frac{3}{2}\pi}$

## 1.3 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen

### 1.3.1 Polarform $\rightarrow$ Kartesische Form

Die Umrechnung aus der *Polarform*  $z = r \cdot e^{j\varphi} = r(\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$  in die *kartesische Form*  $z = x + jy$  geschieht wie folgt („ausmultiplizieren“):

$$z = r \cdot e^{j\varphi} = r(\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \underbrace{r \cdot \cos \varphi}_x + j \cdot \underbrace{r \cdot \sin \varphi}_y = x + jy$$

#### ■ Beispiel

Wir bringen die komplexe Zahl  $z = 3 \cdot e^{j30^\circ}$  auf die *kartesische Form*:

$$z = 3 \cdot e^{j30^\circ} = 3(\cos 30^\circ + j \cdot \sin 30^\circ) = 3 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ = 2,598 + 1,5j$$

### 1.3.2 Kartesische Form $\rightarrow$ Polarform

Die Umrechnung aus der *kartesischen Form*  $z = x + jy$  in eine der *Polarformen*  $z = r(\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$  oder  $z = r \cdot e^{j\varphi}$  erfolgt mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Die *Winkelbestimmung* (Hauptwert!) erfolgt am besten anhand einer Lageskizze oder nach den folgenden vom *Quadrant* abhängigen Formeln (siehe hierzu auch I. 9.1.3):

Quadrant	I	II, III	IV
$\varphi =$	$\arctan(y/x)$	$\arctan(y/x) + \pi$	$\arctan(y/x) + 2\pi$

#### ■ Beispiel

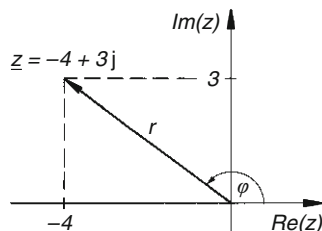
Wir bringen die im *zweiten* Quadrant liegende komplexe Zahl  $z = -4 + 3j$  in die *Polarform*:

$$r = |z| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

$$\tan \varphi = \frac{3}{-4} = -0,75 \Rightarrow$$

$$\varphi = \arctan(-0,75) + \pi = 2,498$$

$$z = -4 + 3j = 5(\cos 2,498 + j \cdot \sin 2,498) = 5 \cdot e^{j2,498}$$



## 2 Grundrechenarten für komplexe Zahlen

### 2.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

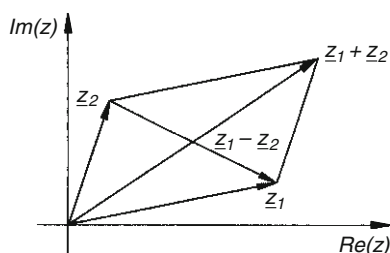
$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

**Regel:** Zwei komplexe Zahlen werden *addiert* bzw. *subtrahiert*, indem man ihre Real- und Imaginärteile (jeweils für sich getrennt) *addiert* bzw. *subtrahiert*.

*Hinweis:* Addition und Subtraktion sind *nur* in der kartesischen Form durchführbar.

#### Geometrische Deutung

Die Zeiger  $z_1$  und  $z_2$  werden nach der aus der Vektorrechnung bekannten *Parallelogrammregel* geometrisch addiert bzw. subtrahiert.



#### Rechenregeln

*Kommutativgesetz*  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

*Assoziativgesetz*  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

### 2.2 Multiplikation komplexer Zahlen

#### In kartesischer Form

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

**Regel:** Wie im *Reellen* wird jeder Summand der ersten Klammer mit jedem Summand der zweiten Klammer unter Beachtung von  $j^2 = -1$  multipliziert.

#### ■ Beispiel

$$(3 - 4j) \cdot (2 + 5j) = 6 + 15j - 8j - \underbrace{20j^2}_{-20} = 6 + 15j - 8j + 20 = 26 + 7j$$

#### In der Polarform

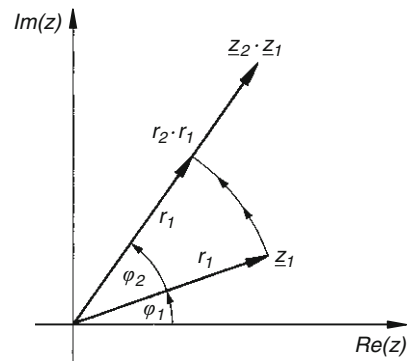
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [r_1 (\cos \varphi_1 + j \cdot \sin \varphi_1)] \cdot [r_2 (\cos \varphi_2 + j \cdot \sin \varphi_2)] = \\ &= (r_1 r_2) \cdot [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \\ z_1 \cdot z_2 &= (r_1 \cdot e^{j\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{j\varphi_2}) = (r_1 r_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

**Regel:** Zwei komplexe Zahlen werden *multipliziert*, indem man ihre Beträge *multipliziert* und ihre Argumente (Winkel) *addiert*.

**Geometrische Deutung**

Der Zeiger  $\underline{z}_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$  wird einer *Drehstreckung* unterworfen:

1. *Drehung* des Zeigers um den Winkel  $\varphi_2$  im *positiven* Drehsinn (Gegenuhrzeigersinn) falls  $\varphi_2 > 0$ . Für  $\varphi_2 < 0$  erfolgt die Drehung im *negativen* Drehsinn (Uhrzeigersinn).
2. *Streckung* des Zeigers auf das  $r_2$ -fache.

■ **Beispiel**

$$(3 \cdot e^{j30^\circ}) \cdot (5 \cdot e^{j80^\circ}) = (3 \cdot 5) \cdot e^{j(30^\circ + 80^\circ)} = 15 \cdot e^{j110^\circ} = 15 (\cos 110^\circ + j \cdot \sin 110^\circ) = \\ = 15 \cdot \cos 110^\circ + (15 \cdot \sin 110^\circ)j = -5,130 + 14,095j$$

■

**Rechenregeln***Kommutativgesetz*

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

*Assoziativgesetz*

$$z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$

*Distributivgesetz*

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

**Formeln**

$$(1) \quad z \cdot z^* = x^2 + y^2 = |z|^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{z \cdot z^*}$$

$$(2) \quad \text{Potenzen von } j: \quad j^2 = -1, \quad j^3 = -j, \quad j^4 = 1, \quad j^5 = j, \quad \text{usw.}$$

$$j^{4n} = 1, \quad j^{4n+1} = j, \quad j^{4n+2} = -1, \quad j^{4n+3} = -j \quad (n \in \mathbb{Z})$$

**2.3 Division komplexer Zahlen****In kartesischer Form**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2) \cdot (x_2 - jy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

**Regel:** Zähler und Nenner des Quotienten werden zunächst mit dem *konjugiert* komplexen Nenner, d. h. der Zahl  $z_2^* = x_2 - jy_2$  multipliziert (dadurch wird der Nenner *reell*):

*Ausnahme:* Die Division durch die Zahl 0 ist (wie im Reellen) *verboten*!

■ **Beispiel**

$$\frac{4 - 2j}{6 + 8j} = \frac{(4 - 2j)(6 - 8j)}{\underbrace{(6 + 8j)(6 - 8j)}_{3. \text{ Binom}}} = \frac{24 - 32j - 12j + 16j^2}{36 - 64j^2} = \frac{24 - 32j - 12j - 16}{36 + 64} = \\ = \frac{8 - 44j}{100} = \frac{8}{100} - \frac{44}{100}j = 0,08 - 0,44j$$

■



**In der Polarform**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + j \cdot \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + j \cdot \sin \varphi_2)} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right) [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + j \cdot \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]$$

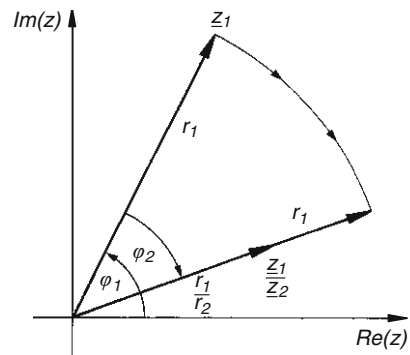
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right) \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

**Regel:** Zwei komplexe Zahlen werden *dividiert*, indem man ihre Beträge *dividiert* und ihre Argumente (Winkel) *subtrahiert*.

*Geometrische Deutung*

Der Zeiger  $\underline{z}_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$  wird wie folgt einer *Drehstreckung* unterworfen:

1. *Zurückdrehung* des Zeigers um den Winkel  $\varphi_2$  für  $\varphi_2 > 0$  (Drehung im Uhrzeigersinn). *Vorwärtsdrehung* für  $\varphi_2 < 0$  (Drehung im Gegenuhrzeigersinn).
2. *Streckung* des Zeigers auf das  $1/r_2$ -fache.

■ **Beispiel**

$$\frac{8(\cos 240^\circ + j \cdot \sin 240^\circ)}{2(\cos 75^\circ + j \cdot \sin 75^\circ)} = \frac{8 \cdot e^{j240^\circ}}{2 \cdot e^{j75^\circ}} = \left( \frac{8}{2} \right) \cdot e^{j(240^\circ - 75^\circ)} = 4 \cdot e^{j165^\circ} = -3,864 + 1,035j$$

■

**Formeln**

$$(1) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r \cdot e^{j\varphi}} = \left( \frac{1}{r} \right) \cdot e^{-j\varphi}$$

$$(2) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{x + jy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{1}{j} = -j$$

## 3 Potenzieren

**In kartesischer Form ( $n \in \mathbb{N}^*$ )**

$$z^n = (x + jy)^n = x^n + j \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot y + j^2 \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot y^2 + \dots + j^n y^n$$

**Regel:** Entwicklung nach dem *binomischen Lehrsatz* (siehe I.2.7).

**In der Polarform (Formel von Moivre,  $n \in \mathbb{Z}$ )**

$$z^n = [r(\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)]^n = r^n [\cos(n\varphi) + j \cdot \sin(n\varphi)]$$

$$z^n = [r \cdot e^{j\varphi}]^n = r^n \cdot e^{jn\varphi}$$

**Regel:** Eine in der *Polarform* vorliegende komplexe Zahl wird in die  $n$ -te Potenz erhoben, indem man ihren Betrag  $r$  in die  $n$ -te Potenz erhebt und ihr Argument (ihren Winkel)  $\varphi$  mit dem Exponenten  $n$  multipliziert.

■ **Beispiel**

Wir erheben die komplexe Zahl  $z = 3(\cos 20^\circ + j \cdot \sin 20^\circ)$  in die *vierte* Potenz:

$$\begin{aligned} z^4 &= [3(\cos 20^\circ + j \cdot \sin 20^\circ)]^4 = 3^4 [\cos(4 \cdot 20^\circ) + j \cdot \sin(4 \cdot 20^\circ)] = \\ &= 81(\cos 80^\circ + j \cdot \sin 80^\circ) = 14,066 + 79,769j \end{aligned}$$

■

## 4 Radizieren (Wurzelziehen)

**Definition**

Eine komplexe Zahl  $z$  heißt eine  $n$ -te *Wurzel* aus  $a$ , wenn sie der *algebraischen* Gleichung  $z^n = a$  genügt ( $a \in \mathbb{C}$ ;  $n \in \mathbb{N}^*$ ). Symbolische Schreibweise:  $\sqrt[n]{a}$

**Fundamentalsatz der Algebra**

Eine *algebraische Gleichung*  $n$ -ten Grades vom Typ

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (a_i: \text{ reell oder komplex})$$

besitzt in der Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen stets *genau*  $n$  Lösungen (auch *Wurzeln* genannt). Bei ausschließlich *reellen* Koeffizienten  $a_i$  treten komplexe Lösungen (falls es solche überhaupt gibt) immer paarweise in Form *konjugiert komplexer* Zahlen auf.

**Wurzeln der Gleichung  $z^n = a$  (mit  $a \in \mathbb{C}$ )**

Die  $n$  Wurzeln der Gleichung

$$z^n = a = a_0 \cdot e^{j\alpha}$$

mit  $a_0 > 0$  und  $n \in \mathbb{N}^*$  lauten:

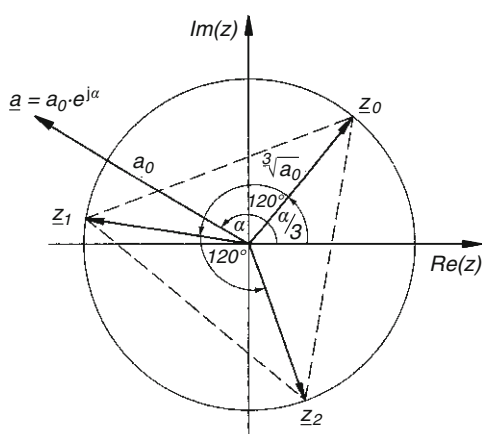
$$z_k = \sqrt[n]{a_0} \left[ \cos \left( \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} \right) + j \cdot \sin \left( \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} \right) \right] \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$\text{Hauptwert } (k = 0): \quad z_0 = \sqrt[n]{a_0} \left[ \cos \left( \frac{\alpha}{n} \right) + j \cdot \sin \left( \frac{\alpha}{n} \right) \right]$$

Für  $k = 1, 2, \dots, n-1$  erhält man die *Nebenwerte*. Die Winkel können auch im *Gradmaß* angegeben werden.

**Geometrische Deutung**

Die zugehörigen Bildpunkte liegen auf dem *Mittelpunktskreis* mit dem Radius  $R = \sqrt[n]{a_0}$  und bilden die Ecken eines *regelmäßigen  $n$ -Ecks*. Das nebenstehende Bild zeigt die drei Lösungen der Gleichung  $z^3 = a_0 \cdot e^{j\alpha}$ .

■ **Beispiel**

Wir bestimmen die drei *Wurzeln* der Gleichung  $z^3 = 8 (\cos 150^\circ + j \cdot \sin 150^\circ) = 8 \cdot e^{j150^\circ}$ :

$$n = 3, \quad a_0 = 8, \quad \alpha = 150^\circ$$

$$z_k = \sqrt[3]{8} \left[ \cos \left( \frac{150^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) + j \cdot \sin \left( \frac{150^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) \right] =$$

$$= 2 [\cos (50^\circ + k \cdot 120^\circ) + j \cdot \sin (50^\circ + k \cdot 120^\circ)] \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$z_0 = 2 (\cos 50^\circ + j \cdot \sin 50^\circ) = 1,286 + 1,532j \quad (\text{Hauptwert})$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= 2 (\cos 170^\circ + j \cdot \sin 170^\circ) = -1,970 + 0,347j \\ z_2 &= 2 (\cos 290^\circ + j \cdot \sin 290^\circ) = 0,684 - 1,879j \end{aligned} \right\} \text{Nebenwerte}$$

**Einheitswurzeln**

Die  $n$  Lösungen der Gleichung  $z^n = 1$  heißen  *$n$ -te Einheitswurzeln*. Sie lauten:

$$z^n = 1 \Rightarrow z_k = \cos \left( \frac{k \cdot 2\pi}{n} \right) + j \cdot \sin \left( \frac{k \cdot 2\pi}{n} \right) = e^{j \frac{k \cdot 2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

## 5 Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl

Der *natürliche Logarithmus* einer komplexen Zahl

$$z = r \cdot e^{j\varphi} = r \cdot e^{j(\varphi + k \cdot 2\pi)} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi; k \in \mathbb{Z})$$

ist *unendlich vieldeutig*<sup>2)</sup>:

$$\ln z = \ln r + j(\varphi + k \cdot 2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

<sup>2)</sup> Der Hauptwert des Winkels wird häufig auch im Intervall  $-\pi < \varphi \leq \pi$  angegeben (siehe hierzu Abschnitt 9.1.2 in Kapitel I).

**Hauptwert** ( $k = 0$ ):  $\operatorname{Ln} z = \ln r + j\varphi$  (Schreibweise  $\operatorname{Ln} z$  statt  $\ln z$ )

Für  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  erhält man die sog. *Nebenwerte*.

*Spezielle Werte:*

$$\begin{aligned}\ln 1 &= k \cdot 2\pi j & \ln(-1) &= (\pi + k \cdot 2\pi)j \\ \ln j &= \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)j & \ln(-j) &= \left(\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right)j\end{aligned}$$

■ **Beispiel**

$$z = 3 + 4j = 5 \cdot e^{j0,9273} = 5 \cdot e^{j(0,9273 + k \cdot 2\pi)}$$

$$\ln(3 + 4j) = \ln 5 + j(0,9273 + k \cdot 2\pi) = 1,6094 + j(0,9273 + k \cdot 2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Hauptwert } (k = 0): \operatorname{Ln}(3 + 4j) = 1,6094 + 0,9273j$$

■

## 6 Ortskurven

### 6.1 Komplexwertige Funktion einer reellen Variablen

Die von einem *reellen* Parameter  $t$  abhängige komplexe Zahl

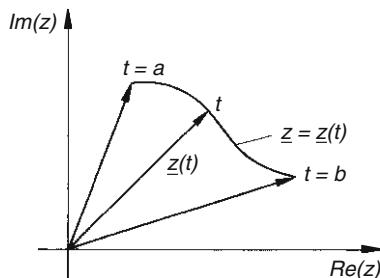
$$z = z(t) = x(t) + j \cdot y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

heißt *komplexwertige Funktion*  $z(t)$  der reellen Variablen  $t$ .

### 6.2 Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Zahl

Die von einem *parameterabhängigen* komplexen Zeiger  $\underline{z} = \underline{z}(t)$  in der Gaußschen Zahlenebene beschriebene Bahn heißt *Ortskurve*:

$$\underline{z}(t) = x(t) + j \cdot y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

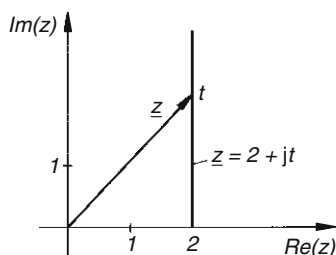


■ **Beispiel**

Die Ortskurve des komplexen Zeigers

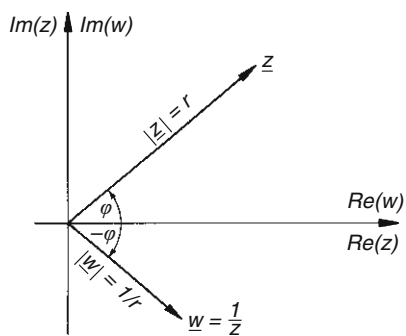
$$\underline{z}(t) = 2 + j t \quad (0 \leq t < \infty)$$

beschreibt die im nebenstehenden Bild dargestellte Halbgerade.

**6.3 Inversion einer Ortskurve****Inversion einer komplexen Zahl**

Der Übergang von einer komplexen Zahl  $z \neq 0$  zu ihrem Kehrwert  $w = 1/z$  heißt *Inversion*:

$$z = r \cdot e^{j\varphi} \rightarrow w = \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\right) \cdot e^{-j\varphi}$$



**Regel:** Vorzeichenwechsel im Argument, Kehrwertbildung des Betrages von  $z$ .

*Geometrische Deutung*

Der Zeiger wird zunächst an der reellen Achse *gespiegelt* und dann auf das  $1/r^2$ -fache *gestreckt*.

**Inversionsregeln für Ortskurven**

*Invertiert* man eine Ortskurve Punkt für Punkt, so erhält man wiederum eine Ortskurve, die sog. *invertierte* Ortskurve. Für die in den Anwendungen besonders häufig auftretenden *Geraden* und *Kreise* gelten dabei die folgenden *Inversionsregeln*:

<b><math>z</math>-Ebene</b>	<b><math>w</math>-Ebene</b>
1. Gerade durch den Nullpunkt	→ Gerade durch den Nullpunkt
2. Gerade, die nicht durch den Nullpunkt verläuft	→ Kreis durch den Nullpunkt
3. Mittelpunktskreis	→ Mittelpunktskreis
4. Kreis durch den Nullpunkt	→ Gerade, die nicht durch den Nullpunkt verläuft
5. Kreis, der nicht durch den Nullpunkt verläuft	→ Kreis, der nicht durch den Nullpunkt verläuft

Bei der *Inversion einer Ortskurve* erweisen sich auch folgende *Regeln* als nützlich:

1. Der Punkt mit dem *kleinsten* Abstand (Betrag) vom Nullpunkt führt zu dem Bildpunkt mit dem *größten* Abstand (Betrag) und umgekehrt.
2. Ein Punkt *oberhalb* der reellen Achse führt zu einem Bildpunkt *unterhalb* der reellen Achse und umgekehrt.

## 7 Komplexe Funktionen

### 7.1 Definition einer komplexen Funktion

Unter einer *komplexen Funktion* versteht man eine Vorschrift, die jeder komplexen Zahl  $z \in D$  genau eine komplexe Zahl  $w \in W$  zuordnet. Symbolische Schreibweise:  $w = f(z)$ .  $D$  und  $W$  sind Teilmengen von  $\mathbb{C}$ .

### 7.2 Definitionsgleichungen einiger elementarer Funktionen

#### 7.2.1 Trigonometrische Funktionen

$$\left. \begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots \end{aligned} \right\} \text{Periode: } p = 2\pi$$

$$\left. \begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} \\ \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\tan z} \end{aligned} \right\} \text{Periode: } p = \pi$$

#### 7.2.2 Hyperbelfunktionen

$$\left. \begin{aligned} \sinh z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \\ \cosh z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \end{aligned} \right\} \text{Periode: } p = j2\pi$$

$$\left. \begin{aligned} \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z} \\ \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{1}{\tanh z} \end{aligned} \right\} \text{Periode: } p = j\pi$$

### 7.2.3 Exponentialfunktion (e-Funktion)

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (\text{Periode: } p = j2\pi)$$

## 7.3 Wichtige Beziehungen und Formeln

### 7.3.1 Eulersche Formeln

$$e^{jx} = \cos x + j \cdot \sin x \quad | \quad e^{-jx} = \cos x - j \cdot \sin x$$

### 7.3.2 Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der komplexen e-Funktion

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{2j} (e^{jx} - e^{-jx}) & \cos x &= \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}) \\ \tan x &= -j \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{e^{jx} + e^{-jx}} & \cot x &= j \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{e^{jx} - e^{-jx}} \end{aligned}$$

### 7.3.3 Trigonometrische und Hyperbelfunktionen mit imaginärem Argument

$$\begin{aligned} \sin(jx) &= j \cdot \sinh x & \sinh(jx) &= j \cdot \sin x \\ \cos(jx) &= \cosh x & \cosh(jx) &= \cos x \\ \tan(jx) &= j \cdot \tanh x & \tanh(jx) &= j \cdot \tan x \end{aligned}$$

### 7.3.4 Additionstheoreme der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen für komplexes Argument

$$\begin{aligned} \sin(x \pm jy) &= \sin x \cdot \cosh y \pm j \cdot \cos x \cdot \sinh y \\ \cos(x \pm jy) &= \cos x \cdot \cosh y \mp j \cdot \sin x \cdot \sinh y \\ \tan(x \pm jy) &= \frac{\sin(2x) \pm j \cdot \sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x \pm jy) &= \sinh x \cdot \cos y \pm j \cdot \cosh x \cdot \sin y \\ \cosh(x \pm jy) &= \cosh x \cdot \cos y \pm j \cdot \sinh x \cdot \sin y \\ \tanh(x \pm jy) &= \frac{\sinh(2x) \pm j \cdot \sin(2y)}{\cosh(2x) + \cos(2y)} \end{aligned}$$

### 7.3.5 Arkus- und Areefunktionen mit imaginärem Argument

$$\arcsin(jx) = j \cdot \operatorname{arsinh} x$$

$$\arccos(jx) = j \cdot \operatorname{arcosh} x$$

$$\arctan(jx) = j \cdot \operatorname{artanh} x$$

$$\operatorname{arsinh}(jx) = j \cdot \arcsin x$$

$$\operatorname{arcosh}(jx) = j \cdot \arccos x$$

$$\operatorname{artanh}(jx) = j \cdot \arctan x$$

## 8 Anwendungen in der Schwingungslehre

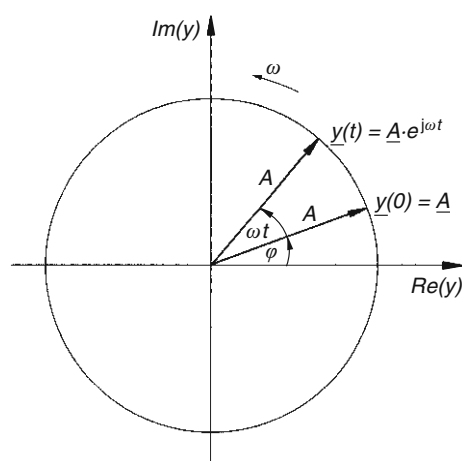
### 8.1 Darstellung einer harmonischen Schwingung durch einen rotierenden komplexen Zeiger

Eine *harmonische* Schwingung vom Typ  $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$  mit  $A > 0$  und  $\omega > 0$  lässt sich in der Gaußschen Zahlenebene durch einen mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um den Nullpunkt rotierenden (und damit zeitabhängigen) *komplexen Zeiger* der Länge  $A$  darstellen (sog. *Zeigerdiagramm*):

$$\underline{y}(t) = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{A} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\underline{A} = A \cdot e^{j\varphi}: \text{Komplexe Amplitude}$$

$$e^{j\omega t}: \text{Zeitfunktion}$$



Die Drehung erfolgt im Gegenuhrzeigersinn. Die *komplexe* Schwingungsamplitude  $\underline{A}$  beschreibt dabei die *Anfangslage* des Zeigers  $\underline{y}(t)$  zur Zeit  $t = 0$ , d. h. es ist  $\underline{y}(0) = \underline{A}$ .

Eine in der *Kosinusform* vorliegende Schwingung lässt sich wie folgt in die *Sinusform* umschreiben:

$$y = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi + \pi/2) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi^*)$$

Der *Nullphasenwinkel* beträgt somit  $\varphi^* = \varphi + \pi/2$ , d. h. der Zeiger ist (gegenüber einer Sinusschwingung) um  $90^\circ$  *vorzudrehen*.



## 8.2 Ungestörte Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen („Superpositionsprinzip“)

Durch *ungestörte Überlagerung* der *gleichfrequenten* harmonische Schwingungen

$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{und} \quad y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

entsteht nach dem *Superpositionsprinzip* der Physik eine resultierende Schwingung mit *derselben* Frequenz:

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$(A_1 > 0, A_2 > 0, A > 0, \omega > 0)$$

### Berechnung der Schwingungsamplitude $A$ und des Phasenwinkels $\varphi$

#### 1. Übergang von der reellen zur komplexen Form

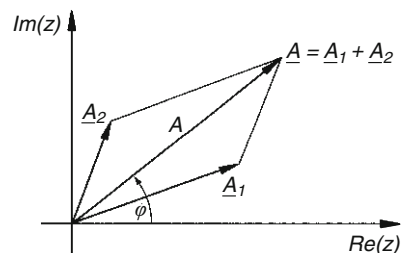
$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \underline{y}_1 = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t} \quad (\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\varphi_1})$$

$$y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \underline{y}_2 = \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t} \quad (\underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\varphi_2})$$

#### 2. Addition der komplexen Amplituden und Elongationen

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = A \cdot e^{j\varphi}$$

$$\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = \underline{A} \cdot e^{j\omega t} = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$



#### 3. Rücktransformation aus der komplexen in die reelle Form

$$y = y_1 + y_2 = \text{Im}(\underline{y}) = \text{Im}(\underline{A} \cdot e^{j\omega t}) = \text{Im}(A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

### Sonderfälle

- (1) Überlagerung einer Sinusschwingung mit einer Kosinusschwingung: Letztere erst auf die Sinusform bringen (siehe VIII.8.1).
- (2) Überlagerung zweier Kosinusschwingungen: Beide erst auf die Sinusform bringen oder die resultierende Schwingung ebenfalls als Kosinusschwingung darstellen, wobei bei der Rücktransformation der *Realteil* von  $\underline{y} = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$  zu nehmen ist.

■ **Beispiel**

$$y_1 = 5 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \quad y_2 = 3 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right), \quad y = y_1 + y_2 = ?$$

1. *Übergang von der reellen zur komplexen Form*

$$\underline{y}_1 = 5 \cdot e^{j(\omega t + \frac{\pi}{4})} = \left(5 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\right) e^{j\omega t} = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t} \quad \left(\underline{A}_1 = 5 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\underline{y}_2 = 3 \cdot e^{j(\omega t + \frac{2}{3}\pi)} = \left(3 \cdot e^{j\frac{2}{3}\pi}\right) e^{j\omega t} = \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t} \quad \left(\underline{A}_2 = 3 \cdot e^{j\frac{2}{3}\pi}\right)$$

2. *Addition der komplexen Amplituden und Elongationen*

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = 5 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} + 3 \cdot e^{j\frac{2}{3}\pi} = 5 \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right) + 3 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + j \cdot \sin \frac{2}{3}\pi\right) = \\ &= 3,536 + 3,536j - 1,5 + 2,598j = 2,036 + 6,134j = 6,463 \cdot e^{j1,250} \end{aligned}$$

$$\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = \underline{A} \cdot e^{j\omega t} = 6,463 \cdot e^{j1,250} \cdot e^{j\omega t} = 6,463 \cdot e^{j(\omega t + 1,250)}$$

3. *Rücktransformation aus der komplexen in die reelle Form*

$$y = \text{Im}(\underline{y}) = \text{Im}\left(6,463 \cdot e^{j(\omega t + 1,250)}\right) = 6,463 \cdot \sin(\omega t + 1,250)$$

■

# IX Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

## 1 Funktionen von mehreren Variablen und ihre Darstellung

### 1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen

Unter einer Funktion von *zwei* unabhängigen Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar  $(x; y)$  aus einer Menge  $D$  genau ein Element  $z$  aus einer Menge  $W$  zuordnet. Symbolische Schreibweise:  $z = f(x; y)$ .

*Bezeichnungen*

$x, y$ : *Unabhängige* Variable (Veränderliche)

$z$ : *Abhängige* Variable (Veränderliche) oder Funktionswert

$D$ : Definitionsbereich der Funktion

$W$ : Wertebereich oder Wertevorrat der Funktion

Analog:

$u = f(x; y; z)$ : Funktion von *drei* unabhängigen Variablen  $x, y$  und  $z$

$y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ : Funktion von  $n$  unabhängigen Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$

Die Variablen sind im Regelfall *reell*.

### 1.2 Darstellungsformen einer Funktion von zwei Variablen

#### 1.2.1 Analytische Darstellung

Die Funktion wird durch eine *Funktionsgleichung* dargestellt.

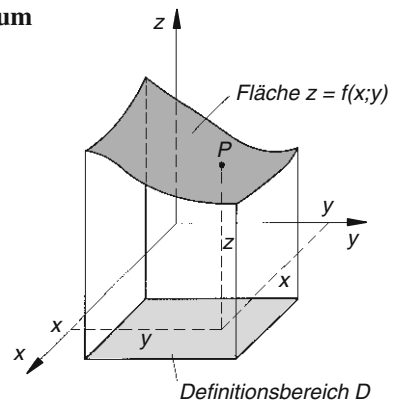
*Explizite Form:*  $z = f(x; y)$

*Implizite Form:*  $F(x; y; z) = 0$

## 1.2.2 Graphische Darstellung

### 1.2.2.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum

Die Variablen  $x$ ,  $y$  und  $z$  einer Funktion  $z = f(x; y)$  werden als *rechtwinklige* oder *kartesische* Koordinaten eines *Raumpunktes*  $P$  gedeutet:  $P = (x; y; z)$ . Der Funktionswert  $z = f(x; y)$  ist dabei die *Höhenkoordinate* des zugeordneten Bildpunktes. Man erhält als *Bild* der Funktion eine über dem Definitionsbereich liegende *Fläche*.



### 1.2.2.2 Schnittkurvendiagramme

Die *Schnittkurvendiagramme* einer Funktion  $z = f(x; y)$  erhält man durch Schnitte der zugehörigen Bildfläche mit *Ebenen*, die *parallel* zu einer der drei Koordinatenebenen verlaufen. Die Schnittkurven werden noch in die jeweilige Koordinatenebene projiziert und repräsentieren einparametrische Kurvenscharen. Ihre Gleichungen erhält man aus der Funktionsgleichung  $z = f(x; y)$ , indem man der Reihe nach jeweils *eine* der drei Variablen (Koordinaten) als *Parameter* betrachtet. In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen werden die Schnittkurvendiagramme als *Kennlinienfelder* bezeichnet.

### 1.2.2.3 Höhenliniendiagramm

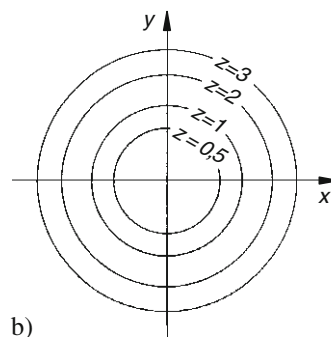
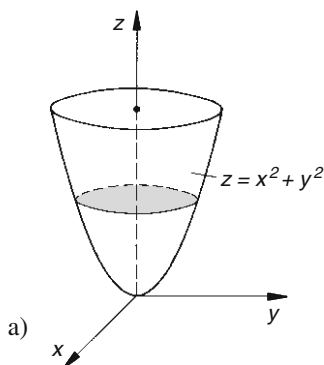
Das *Höhenliniendiagramm* ist ein spezielles Schnittkurvendiagramm mit der Höhenkoordinate  $z$  als Kurvenparameter („Linien gleicher Höhe“):

$$f(x; y) = \text{const.} = c$$

$c$ : zulässiger Wert der Höhenkoordinate  $z$

#### ■ Beispiel

Die *Höhenlinien* der in Bild a) dargestellten Fläche  $z = x^2 + y^2$  (Mantel eines Rotationsparaboloids) sind *konzentrische* Mittelpunktskreise mit der Kurvengleichung  $x^2 + y^2 = c$  und dem Radius  $R = \sqrt{c}$  mit  $c > 0$  (Bild b)).



## 1.3 Spezielle Flächen (Funktionen)

### 1.3.1 Ebenen

Die Bildfläche einer *linearen* Funktion ist eine *Ebene*.

#### Gleichung einer Ebene

$$ax + by + cz + d = 0$$

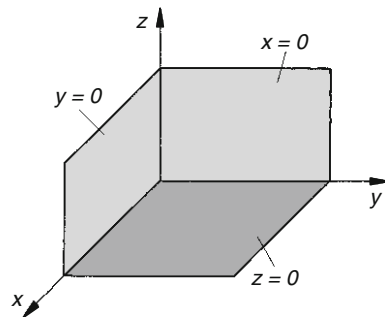
$a, b, c, d$ : reelle Konstanten

#### Koordinatenebenen

$x, y$ -Ebene:  $z = 0$

$x, z$ -Ebene:  $y = 0$

$y, z$ -Ebene:  $x = 0$

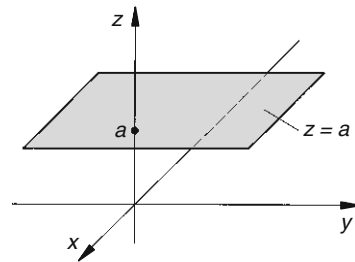


#### Parallelebenen

Ebene parallel zur  $x, y$ -Ebene:  $z = a$   
(siehe nebenstehendes Bild)

Ebene parallel zur  $x, z$ -Ebene:  $y = a$

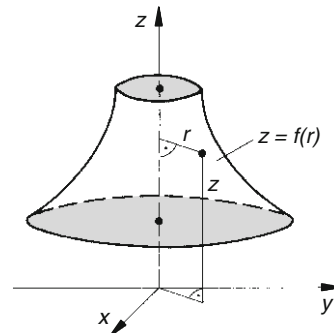
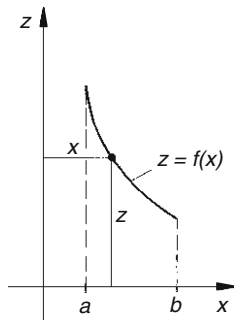
Ebene parallel zur  $y, z$ -Ebene:  $x = a$



### 1.3.2 Rotationsflächen

#### 1.3.2.1 Gleichung einer Rotationsfläche

Eine *Rotationsfläche* entsteht durch *Drehung* einer ebenen Kurve  $z = f(x)$  um die  $z$ -Achse:



Ihre Funktionsgleichung lautet:

In Zylinderkoordinaten<sup>1)</sup> (formale Substitution  $x \rightarrow r$ ):

$$z = f(r)$$

In kartesischen Koordinaten (formale Substitution  $x \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$ ):

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

### 1.3.2.2 Spezielle Rotationsflächen

#### Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

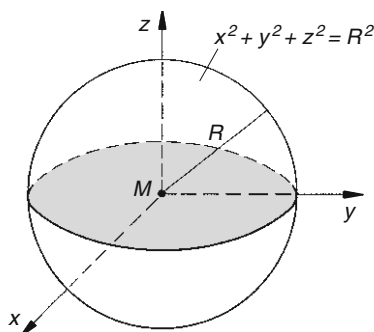
oder

$$r^2 + z^2 = R^2$$

Obere bzw. untere Halbkugel (in kartesischen Koordinaten bzw. Zylinderkoordinaten):

$$z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \text{bzw.}$$

$$z = \pm \sqrt{R^2 - r^2}$$

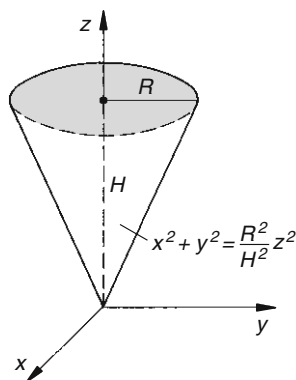


#### Kreiskegel

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2 \quad \text{oder} \quad z = \frac{H}{R} r$$

Die Gleichungen beschreiben einen *Doppelkegel*. Für  $z \geq 0$  erhält man den Mantel des gezeichneten Kegels mit der Funktionsgleichung

$$z = \frac{H}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$$

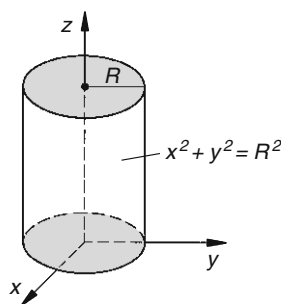


<sup>1)</sup> Zylinderkoordinaten: siehe (I.9.2.2 und XIV.6.2). Den senkrechten Abstand von der  $z$ -Achse bezeichnen wir hier mit  $r$  (statt  $\varrho$ ).

**Kreiszylinder**

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{oder} \quad r = R$$

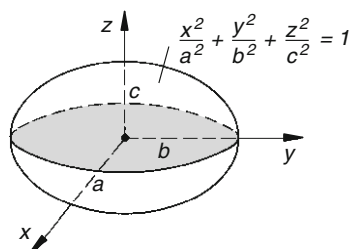
Höhenkoordinate:  $z \in \mathbb{R}$

**Ellipsoid**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Durch Auflösen nach  $z$  erhält man *zwei* Funktionen (oberer bzw. unterer Mantel des Ellipsoids).

Für  $a = b$  erhält man ein *Rotationsellipsoid* (Rotationsachse:  $z$ -Achse).



## 2 Partielle Differentiation

### 2.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung

#### 2.1.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x; y)$

##### Partielle Ableitung 1. Ordnung nach $x$

$$f_x(x; y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

##### Partielle Ableitung 1. Ordnung nach $y$

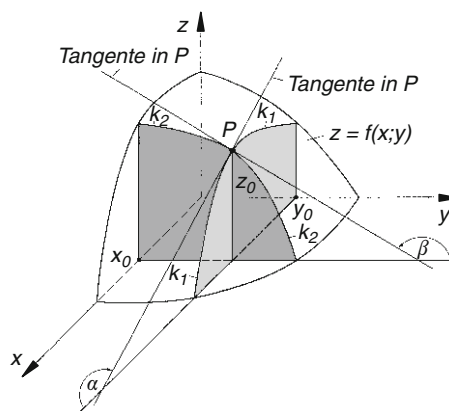
$$f_y(x; y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$$

*Geometrische Deutung*

$f_x(x_0; y_0) = \tan \alpha$  und  $f_y(x_0; y_0) = \tan \beta$  sind die *Steigungen* der Flächentangenten im Bildpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  in der  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung:

$k_1$ : Schnittkurve der Fläche  $z = f(x; y)$  mit der Ebene  $y = y_0$

$k_2$ : Schnittkurve der Fläche  $z = f(x; y)$  mit der Ebene  $x = x_0$

*Schreibweisen*

$$f_x(x; y), \quad z_x(x; y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x; y), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x; y)$$

$$f_y(x; y), \quad z_y(x; y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x; y), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x; y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}: \quad \text{Partielle Differentialquotienten 1. Ordnung}$$

**Partielle Differentialoperatoren**

Die *partiellen Differentialoperatoren*  $\partial/\partial x$  und  $\partial/\partial y$  erzeugen durch „Einwirken“ auf die Funktion  $z = f(x; y)$  die *partiellen Ableitungen 1. Ordnung*:

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(x; y)] = f_x(x; y), \quad \frac{\partial}{\partial y} [f(x; y)] = f_y(x; y)$$

**2.1.2 Partielle Ableitungen 1. Ordnung von  $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$** 

Für eine Funktion  $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$  von  $n$  unabhängigen Variablen lassen sich insgesamt  $n$  *verschiedene* partielle Ableitungen 1. Ordnung bilden:

$$f_{x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Die partielle Ableitung  $f_{x_k}$  nach der Variablen  $x_k$  erhält man, indem man in der Funktionsgleichung alle Variablen bis auf  $x_k$  festhält, d. h. als *Parameter* behandelt und anschließend die Funktion mit Hilfe der bekannten Ableitungsregeln (siehe IV.3) nach  $x_k$  *differenziert*.



*Schreibweisen*

$$f_{x_k}, \quad y_{x_k}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} [f] = f_{x_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}: \text{Partieller Differentialoperator 1. Ordnung}$$

■ **Beispiel**

Wir differenzieren die Funktion  $f(x; y; z) = x^2 y \cdot e^{3z} + z \cdot \sin(xy)$  *partiell* nach der Variablen  $x$ :

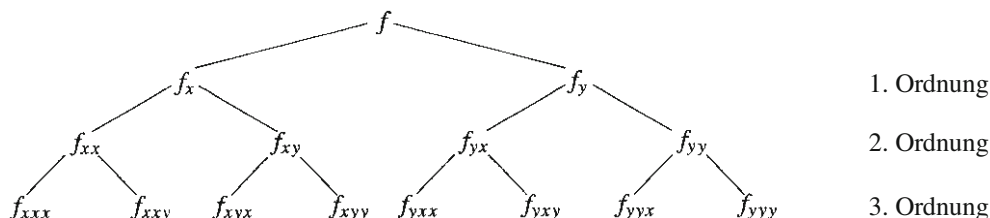
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [x^2 y \cdot e^{3z} + z \cdot \sin(xy)] = 2xy \cdot e^{3z} + yz \cdot \cos(xy)$$

■

**2.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung**

Partielle Ableitungen *höherer* Ordnung erhält man, indem man die gegebene Funktion *mehrmals* nacheinander partiell differenziert.

Für eine Funktion  $z = f(x; y)$  lassen sich die höheren Ableitungen nach dem folgenden Schema bilden:

*Schreibweisen*

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xyx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \quad \text{usw.}$$

**Vereinbarung:** Die einzelnen Differentiationsschritte sind grundsätzlich in der Reihenfolge der Indizes durchzuführen. Abweichungen sind nur dann zulässig, wenn der *Satz von Schwarz* erfüllt ist.

**Satz von Schwarz**

Sind die partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung *stetig*, so ist die *Reihenfolge* der Differentiationen beliebig *vertauschbar*.

Unter diesen Voraussetzungen gilt für eine Funktion  $z = f(x; y)$ :

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$f_{xxy} = f_{yxx} = f_{xyx}, \quad f_{yyx} = f_{xyy} = f_{yxy}$$

### ■ Beispiel

Wir bilden die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von  $z = f(x; y) = x^3 y^2 + e^{xy}$ :

*Partielle Ableitungen 1. Ordnung:*

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x} [x^3 y^2 + e^{xy}] = 3x^2 y^2 + y \cdot e^{xy}, \quad z_y = \frac{\partial}{\partial y} [x^3 y^2 + e^{xy}] = 2x^3 y + x \cdot e^{xy}$$

*Partielle Ableitungen 2. Ordnung:*

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (z_x) = \frac{\partial}{\partial x} [3x^2 y^2 + y \cdot e^{xy}] = 6xy^2 + y^2 \cdot e^{xy} = y^2 (6x + e^{xy})$$

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} (z_x) = \frac{\partial}{\partial y} [3x^2 y^2 + y \cdot e^{xy}] = 6x^2 y + e^{xy} + xy \cdot e^{xy} = \\ &= 6x^2 y + (xy + 1) \cdot e^{xy} = z_{yx} \end{aligned}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (z_y) = \frac{\partial}{\partial y} [2x^3 y + x \cdot e^{xy}] = 2x^3 + x^2 \cdot e^{xy} = x^2 (2x + e^{xy})$$

■

## 2.3 Verallgemeinerte Kettenregel (Differentiation nach einem Parameter)

Die unabhängigen Variablen  $x$  und  $y$  der Funktion  $z = f(x; y)$  hängen noch von einem (reellen) Parameter  $t$  ab, sind also Funktionen dieses Parameters:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

Dann ist auch  $z$  eine sog. *zusammengesetzte, verkettete* oder *mittelbare* Funktion des Parameters  $t$ :

$$z = f(x(t); y(t)) = F(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

Ihre *Ableitung* nach dem Parameter  $t$  erhält man nach der folgenden *verallgemeinerten Kettenregel*:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{oder} \quad \dot{z} = z_x \cdot \dot{x} + z_y \cdot \dot{y}$$

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ : Ableitungen nach dem Parameter  $t$

$z_x, z_y$ : Partielle Ableitungen 1. Ordnung von  $z = f(x; y)$

Nach erfolgter *Rücksubstitution* ( $x$  und  $y$  werden durch die Parametergleichungen ersetzt) hängt die Ableitung  $\dot{z}$  nur noch vom Parameter  $t$  ab.

**Alternative:** In der Funktion  $z = f(x; y)$  zunächst die Variablen  $x$  und  $y$  durch ihre Parametergleichungen  $x(t)$  und  $y(t)$  ersetzen, dann die jetzt nur noch von  $t$  abhängige Funktion nach diesem Parameter differenzieren (gewöhnliche Differentiation).

■ **Beispiel**

$$z = f(x; y) = x^2 y - 2x^3 \quad \text{mit} \quad x = x(t) = t^2 \quad \text{und} \quad y = y(t) = 2t + 1$$

$$z_x = 2xy - 6x^2, \quad z_y = x^2, \quad \dot{x} = 2t, \quad \dot{y} = 2$$

Die verallgemeinerte Kettenregel liefert zunächst:

$$\dot{z} = z_x \cdot \dot{x} + z_y \cdot \dot{y} = (2xy - 6x^2) \cdot 2t + x^2 \cdot 2 = 4xyt - 12x^2 t + 2x^2$$

Rücksubstitution ( $x = t^2, y = 2t + 1$ ):

$$\begin{aligned} \dot{z} &= 4t^2 \cdot (2t + 1) \cdot t - 12t^4 \cdot t + 2t^4 = 4t^3(2t + 1) - 12t^5 + 2t^4 = \\ &= 8t^4 + 4t^3 - 12t^5 + 2t^4 = -12t^5 + 10t^4 + 4t^3 \end{aligned}$$

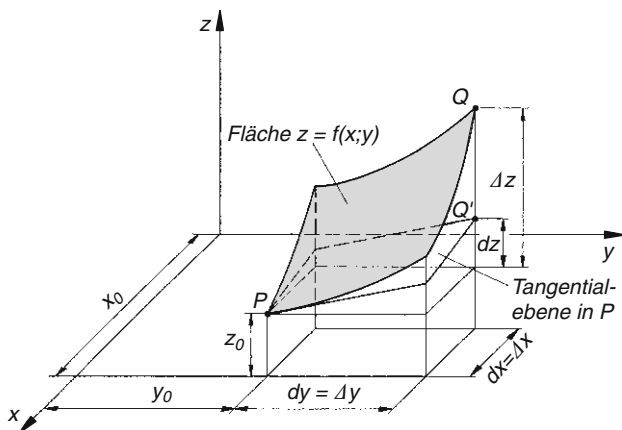
■

## 2.4 Totales oder vollständiges Differential einer Funktion

### Tangentialebene

Alle im Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  an die Bildfläche von  $z = f(x; y)$  angelegten Tangenten liegen in der Regel in einer Ebene, der sog. *Tangentialebene*. Die Gleichung der Tangentialebene lautet wie folgt (in symmetrischer Schreibweise):

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$



**Totales Differential von  $z = f(x; y)$** 

$$dz = f_x dx + f_y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

 $dx, dy$ : unabhängige Differentiale $dz$ : abhängiges Differential*Geometrische Deutung*

Das *totale Differential*  $dz = f_x(x_0; y_0) dx + f_y(x_0; y_0) dy$  beschreibt die *Änderung* der Höhenkoordinate bzw. des Funktionswertes  $z$  auf der im Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  errichteten *Tangentialebene*, wenn sich die beiden unabhängigen Koordinaten (Variablen)  $x$  und  $y$  um  $dx = \Delta x$  bzw.  $dy = \Delta y$  ändern (Punkt  $Q'$ ). Die *exakte* Änderung der Höhenkoordinate  $z$  beträgt

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$$

(Höhenzuwachs auf der *Fläche*, von Punkt  $P$  nach Punkt  $Q$ ).Für *kleine* Koordinatenänderungen  $dx = \Delta x$  und  $dy = \Delta y$  gilt:

$$\Delta z \approx dz = f_x dx + f_y dy = f_x \Delta x + f_y \Delta y$$

■ **Beispiel**

$$z = f(x; y) = x^2 y - x y^3$$

$$x = 1, \quad y = 3, \quad dx = \Delta x = 0,2, \quad dy = \Delta y = -0,1$$

*Zuwachs  $\Delta z$  auf der Fläche:*

$$x = 1, \quad y = 3 \rightarrow x = 1 + \Delta x = 1 + 0,2 = 1,2, \quad y = 3 + \Delta y = 3 - 0,1 = 2,9$$

$$\Delta z = f(1,2; 2,9) - f(1; 3) = -25,0908 + 24 = -1,0908$$

*Zuwachs  $dz$  auf der Tangentialebene:*

$$f_x(x; y) = 2xy - y^3 \Rightarrow f_x(1; 3) = 2 \cdot 1 \cdot 3 - 3^3 = 6 - 27 = -21$$

$$f_y(x; y) = x^2 - 3xy^2 \Rightarrow f_y(1; 3) = 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 3^2 = 1 - 27 = -26$$

$$dz = f_x(1; 3) dx + f_y(1; 3) dy = -21 \cdot 0,2 - 26 \cdot (-0,1) = -4,2 + 2,6 = -1,6$$

■

**Totales Differential von  $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$** 

$$dy = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Für *kleine* Änderungen der unabhängigen Variablen liefert das totale Differential  $dy$  einen brauchbaren *Näherungswert* für den Funktionswert  $y$ .

## 2.5 Anwendungen

### 2.5.1 Linearisierung einer Funktion

#### Linearisierung von $z = f(x; y)$

Die *nichtlineare* Funktion  $z = f(x; y)$  wird in der unmittelbaren Umgebung des Flächenpunktes  $P = (x_0; y_0; z_0)$  (in den Anwendungen meist als *Arbeitspunkt* bezeichnet) durch eine *lineare* Funktion, nämlich das *totale* oder *vollständige Differential* der Funktion, ersetzt:

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

oder

$$\Delta z = f_x(x_0; y_0) \Delta x + f_y(x_0; y_0) \Delta y = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \Delta x + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \Delta y$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ : Abweichungen (Relativkoordinaten) gegenüber dem Arbeitspunkt  $P$

$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_0, \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_0$ : Partielle Ableitungen 1. Ordnung im Arbeitspunkt  $P$

#### Geometrische Deutung

Die i. Allg. *gekrümmte* Bildfläche von  $z = f(x; y)$  wird in der unmittelbaren Umgebung des Arbeitspunktes  $P$  durch die dortige *Tangentialebene* ersetzt.

#### ■ Beispiel

Wir *linearisieren* die Funktion  $z = f(x; y) = x^2 y + 2x \cdot e^y$  in der unmittelbaren Umgebung des Punktes  $P = (1; 0; 2)$ :

Partielle Ableitungen in  $P$ :

$$f_x(x; y) = 2xy + 2 \cdot e^y \Rightarrow f_x(1; 0) = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot e^0 = 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$f_y(x; y) = x^2 + 2x \cdot e^y \Rightarrow f_y(1; 0) = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot e^0 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

Linearisierte Funktion:

$$\Delta z = f_x(1; 0) \Delta x + f_y(1; 0) \Delta y = 2 \Delta x + 3 \Delta y$$

oder (mit  $\Delta x = x - 1$ ,  $\Delta y = y - 0 = y$ ,  $\Delta z = z - 2$ )

$$z - 2 = 2(x - 1) + 3y, \quad \text{d.h.} \quad z = 2x + 3y$$

■

**Linearisierung von  $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$** 

$$\Delta y = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_0 \Delta x_n$$

$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n, \Delta y$ : Abweichungen gegenüber dem Arbeitspunkt  $P$  (Relativkoordinaten)

$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_0, \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_0$ : Partielle Ableitungen 1. Ordnung im Arbeitspunkt  $P$

**2.5.2 Relative Extremwerte (relative Maxima, relative Minima)**

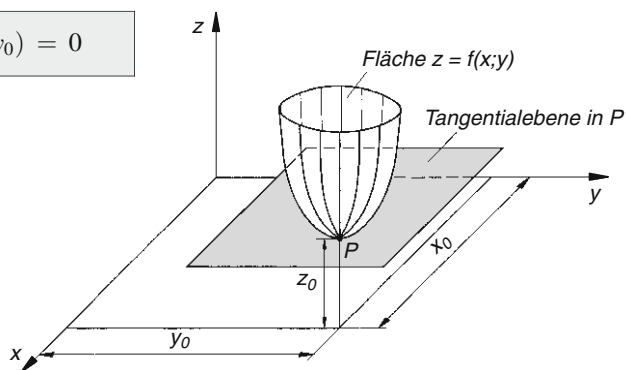
Eine Funktion  $z = f(x; y)$  besitzt an der Stelle  $(x_0; y_0)$  ein *relatives Maximum* bzw. ein *relatives Minimum*, wenn in einer gewissen Umgebung von  $(x_0; y_0)$  stets

$$f(x_0; y_0) > f(x; y) \quad \text{bzw.} \quad f(x_0; y_0) < f(x; y)$$

ist ( $(x; y) \neq (x_0; y_0)$ ). Die entsprechenden Punkte auf der Bildfläche werden als Hoch- bzw. Tiefpunkte bezeichnet.

In einem *relativen Extremum* besitzt die Bildfläche von  $z = f(x; y)$  eine zur  $x, y$ -Ebene *parallele* Tangentialebene. Somit ist *notwendigerweise*

$$f_x(x_0; y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0; y_0) = 0$$

**Hinreichende Bedingungen für einen relativen Extremwert**

Eine Funktion  $z = f(x; y)$  besitzt an der Stelle  $(x_0; y_0)$  mit *Sicherheit* einen *relativen Extremwert*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1.  $f_x(x_0; y_0) = 0$  und  $f_y(x_0; y_0) = 0$
2.  $\Delta = f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - f_{xy}^2(x_0; y_0) > 0$   
 $f_{xx}(x_0; y_0) < 0 \Rightarrow$  Relatives Maximum  
 $f_{xx}(x_0; y_0) > 0 \Rightarrow$  Relatives Minimum

$\Delta < 0$ : Es liegt ein *Sattelpunkt* vor.

$\Delta = 0$ : Das Kriterium ermöglicht in diesem Fall *keine* Entscheidung darüber, ob an der Stelle  $(x_0; y_0)$  ein relativer Extremwert vorliegt oder nicht.

*Notwendige* Bedingungen für einen relativen Extremwert bei Funktionen von  $n$  unabhängigen Variablen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

### ■ Beispiel

Wir berechnen die *relativen Extremwerte* der Funktion  $z = f(x; y) = xy - 27\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$  mit  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ :

*Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung:*

$$f_x(x; y) = y + \frac{27}{x^2}, \quad f_y(x; y) = x - \frac{27}{y^2}$$

$$f_{xx}(x; y) = -\frac{54}{x^3}, \quad f_{xy}(x; y) = f_{yx}(x; y) = 1, \quad f_{yy}(x; y) = \frac{54}{y^3}$$

*Notwendige Bedingungen:*

$$\left. \begin{aligned} f_x(x; y) = 0 &\Rightarrow y + \frac{27}{x^2} = 0 \\ f_y(x; y) = 0 &\Rightarrow x - \frac{27}{y^2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 3; \quad y = -3$$

*Hinreichende Bedingungen:*

$$\left. \begin{aligned} f_{xx}(3; -3) &= -2, \quad f_{xy}(3; -3) = 1, \quad f_{yy}(3; -3) = -2 \\ \Delta &= (-2) \cdot (-2) - 1^2 = 3 > 0 \\ f_{xx}(3; -3) &= -2 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Relatives Maximum in } (3; -3)$$

*Relative Extremwerte:*

Die Funktion besitzt an der Stelle  $(3; -3)$  ein *relatives Maximum*, der Flächenpunkt  $P = (3; -3; -27)$  ist somit ein *Hochpunkt*.

■

### 2.5.3 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen (Lagrangesches Multiplikatorverfahren)

Die Extremwerte einer Funktion  $z = f(x; y)$  mit der Neben- oder Kopplungsbedingung  $\varphi(x; y) = 0$  lassen sich nach Lagrange schrittweise wie folgt bestimmen:

1. „Hilfsfunktion“ bilden:

$$F(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda \cdot \varphi(x; y)$$

( $\lambda$ : sog. Lagrangescher Multiplikator)

2. Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der von den drei Variablen  $x$ ,  $y$  und  $\lambda$  abhängigen Hilfsfunktion  $F(x; y; \lambda)$  werden gleich Null gesetzt:

$$F_x = f_x(x; y) + \lambda \cdot \varphi_x(x; y) = 0$$

$$F_y = f_y(x; y) + \lambda \cdot \varphi_y(x; y) = 0$$

$$F_\lambda = \varphi(x; y) = 0$$

Aus diesem Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten werden die gesuchten Extremwerte bestimmt.

Die angegebenen Bedingungen sind *notwendig*, nicht aber *hinreichend*. Der Lagrangesche Multiplikator ist eine *Hilfsgröße* ohne Bedeutung und sollte daher möglichst früh aus den Rechnungen eliminiert werden.

### ■ Beispiel

Welches Rechteck mit den noch unbekannten Seitenlängen  $x$  und  $y$  hat bei einem vorgegebenen Umfang von  $U = 20$  m den größten Flächeninhalt?

Flächeninhalt:  $A = f(x; y) = xy$  ( $x, y$  in m,  $A$  in  $\text{m}^2$ )

Nebenbedingung:  $U = 2x + 2y = 20 \Rightarrow \varphi(x; y) = x + y - 10 = 0$

Hilfsfunktion bilden:

$$\begin{aligned} F(x; y; \lambda) &= f(x; y) + \lambda \cdot \varphi(x; y) = \\ &= xy + \lambda(x + y - 10) \end{aligned}$$

Gleichungssystem für die Unbekannten  $x$ ,  $y$  und  $\lambda$  mit Lösung:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= y + \lambda = 0 \\ F_y &= x + \lambda = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda = -y = -x \Rightarrow x = y$$

$$F_\lambda = x + y - 10 = 0 \Rightarrow x + x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Lösung der Aufgabe:

$$x = y = 5 \text{ m}, \quad A_{\max} = 25 \text{ m}^2 \quad (\text{Quadrat})$$

■

Verallgemeinerung für eine Funktion von  $n$  unabhängigen Variablen und  $m < n$  Nebenbedingungen:

$$F(x_1; x_2; \dots; x_n; \lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m) = f(x_1; x_2; \dots; x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \varphi_i(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

Alle  $n + m$  partiellen Ableitungen 1. Ordnung werden gleich Null gesetzt (notwendige Bedingungen).



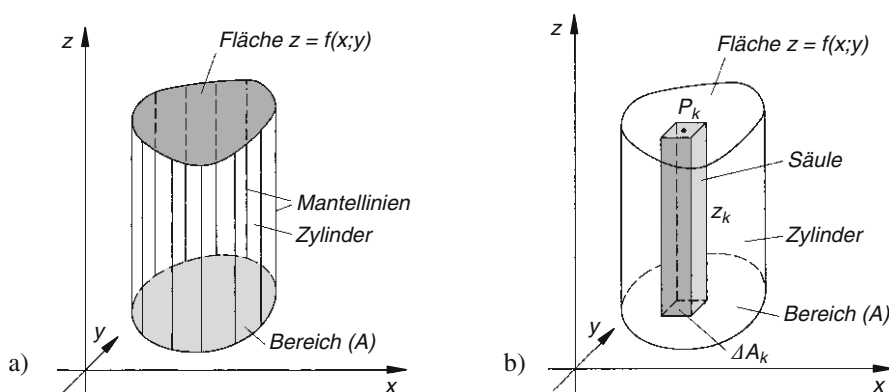
## 3 Mehrfachintegrale

### 3.1 Doppelintegrale

#### 3.1.1 Definition eines Doppelintegrals

Das Doppelintegral  $\iint_{(A)} f(x; y) dA$  lässt sich in anschaulicher Weise als das *Volumen* des in

Bild a) skizzierten *zylindrischen* Körpers einführen, sofern  $f(x; y) \geq 0$  ist. Der „*Boden*“ des Zylinders besteht aus dem Bereich  $(A)$  der  $x, y$ -Ebene, sein „*Deckel*“ ist die Bildfläche der Funktion  $z = f(x; y)$ .



Wir zerlegen zunächst den Zylinder in  $n$  zylindrische Röhren, deren Mantellinien parallel zur  $z$ -Achse verlaufen, und ersetzen dann jede Röhre in der aus Bild b) ersichtlichen Weise durch eine *quaderförmige* Säule vom Volumen  $\Delta V_k = z_k \cdot \Delta A_k = f(x_k; y_k) \Delta A_k$  mit  $k = 1, 2, \dots, n$  und *summieren* schließlich über alle Röhren (Säulen). Für das Zylindervolumen  $V$  erhält man so den Näherungswert

$$V \approx \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \sum_{k=1}^n f(x_k; y_k) \Delta A_k$$

Beim Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  (und somit  $\Delta A_k \rightarrow 0$ ) strebt diese Summe gegen einen *Grenzwert*, der als *2-dimensionales Bereichsintegral* von  $f(x; y)$  über  $(A)$  oder kurz als *Doppelintegral* bezeichnet wird und geometrisch als *Zylindervolumen* interpretiert werden darf (unter der Voraussetzung, dass die Bildfläche der Funktion  $z = f(x; y)$  im Bereich  $(A)$  oberhalb der  $x, y$ -Ebene liegt). Symbolische Schreibweise:

$$\iint_{(A)} f(x; y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k; y_k) \Delta A_k$$

*Bezeichnungen*

- $x, y$ : Integrationsvariable  
 $f(x; y)$ : Integrandfunktion (kurz: Integrand)  
 $dA$ : Flächendifferential oder Flächenelement  
 $(A)$ : Flächenhafter Integrationsbereich

**3.1.2 Berechnung eines Doppelintegrals in kartesischen Koordinaten**

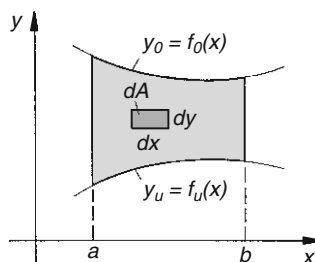
Wir legen den folgenden *kartesischen Normalbereich*  $(A)$  zugrunde (seitliche Begrenzung durch zwei zur  $y$ -Achse parallele Geraden):

$$y_u = f_u(x): \text{ Untere Randkurve}$$

$$y_o = f_o(x): \text{ Obere Randkurve}$$

$$dA = dx \, dy = dy \, dx$$

$$(A): \left\{ \begin{array}{l} f_u(x) \leq y \leq f_o(x) \\ a \leq x \leq b \end{array} \right\}$$



Das Doppelintegral  $\iint_{(A)} f(x; y) \, dA$  lässt sich dann schrittweise durch *zwei* nacheinander auszuführende *gewöhnliche* Integrationen berechnen:

$$\iint_{(A)} f(x; y) \, dA = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} f(x; y) \, dy \, dx$$

└──────────┘  
 Inneres Integral  
└──────────┘  
 Äußeres Integral

**1. Innere Integration (nach der Variablen  $y$ )**

Die Variable  $x$  wird zunächst als *Parameter* festgehalten und die Funktion  $f(x; y)$  unter Verwendung der für *gewöhnliche* Integrale gültigen Regeln *nach der Variablen  $y$*  integriert. In die ermittelte Stammfunktion setzt man dann für  $y$  die (variablen) Integrationsgrenzen  $f_o(x)$  und  $f_u(x)$  ein und bildet die entsprechende Differenz.

**2. Äußere Integration (nach der Variablen  $x$ )**

Die jetzt nur noch von der Variablen  $x$  abhängige Funktion wird in den Grenzen von  $x = a$  bis  $x = b$  integriert (*gewöhnliche* Integration nach  $x$ ).

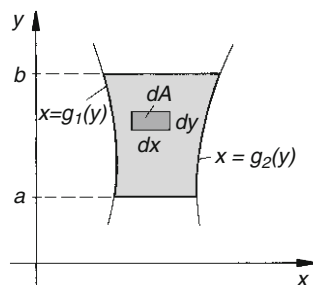
**Allgemeine Regel:** Zunächst wird über die Variable mit *veränderlichen* Grenzen, dann über die Variable mit *festen* Grenzen integriert.

Bei einer Integration über den *kartesischen Normalbereich*

$x = g_1(y)$ : Linke Randkurve

$x = g_2(y)$ : Rechte Randkurve

$$(A): \left\{ \begin{array}{l} g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \\ a \leq y \leq b \end{array} \right\}$$



gilt (Begrenzung unten und oben durch Parallelen zur  $x$ -Achse):

$$\iint_{(A)} f(x; y) dA = \int_{y=a}^b \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x; y) dx dy$$

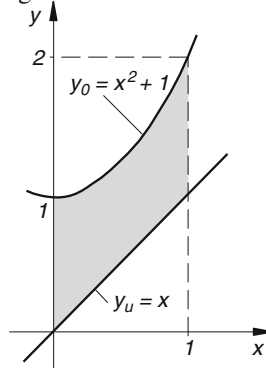
Hier wird zuerst nach  $x$  und dann nach  $y$  integriert, wobei die Integrationsgrenzen des inneren Integrals i. Allg. noch von der Variablen  $y$  abhängen.

#### ■ Beispiel

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=x}^{x^2+1} x^2 y dy dx = ?$$

Innere Integration nach der Variablen  $y$ :

$$\begin{aligned} \int_{y=x}^{x^2+1} x^2 y dy &= x^2 \cdot \int_{y=x}^{x^2+1} y dy = \\ &= \frac{1}{2} x^2 [y^2]_{y=x}^{x^2+1} = \\ &= \frac{1}{2} x^2 [(x^2+1)^2 - x^2] = \\ &= \frac{1}{2} (x^6 + x^4 + x^2) \end{aligned}$$



Äußere Integration nach der Variablen  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^1 (x^6 + x^4 + x^2) dx &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot 7 \cdot 3 + 1 \cdot 7 \cdot 5}{7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15 + 21 + 35}{105} = \frac{71}{210} \end{aligned}$$

Ergebnis:  $\int_{x=0}^1 \int_{y=x}^{x^2+1} x^2 y dy dx = \frac{71}{210}$

■

### 3.1.3 Berechnung eines Doppelintegrals in Polarkoordinaten

Wir legen den folgenden *Normalbereich* in *Polarkoordinaten* zugrunde:

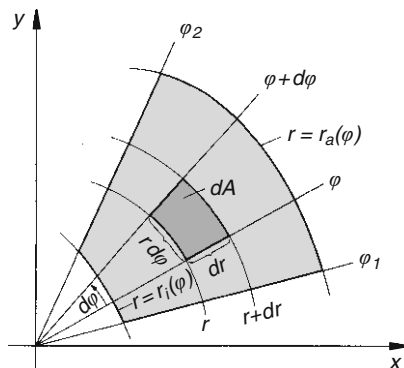
$r = r_i(\varphi)$ : Innere Randkurve

$r = r_a(\varphi)$ : Äußere Randkurve

$dA = r \, dr \, d\varphi$

$$(A): \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i(\varphi) \leq r \leq r_a(\varphi) \\ \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \end{array} \right\}$$

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi$$



Das Doppelintegral  $\iint_{(A)} f(x; y) \, dA$  lässt sich dann schrittweise durch *zwei* nacheinander auszuführende *gewöhnliche* Integrationen berechnen (man setzt  $x = r \cdot \cos \varphi$ ,  $y = r \cdot \sin \varphi$  und  $dA = r \, dr \, d\varphi$ ):

$$\iint_{(A)} f(x; y) \, dA = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} f(r \cdot \cos \varphi; r \cdot \sin \varphi) \cdot r \, dr \, d\varphi$$

Inneres Integral
Äußeres Integral

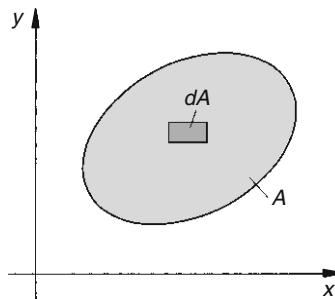
Zunächst wird dabei nach der Variablen  $r$  integriert, wobei die Winkelkoordinate  $\varphi$  als *Parameter* festgehalten wird (*innere* Integration). Dann folgt die *äußere* Integration nach der Variablen  $\varphi$ .

### 3.1.4 Anwendungen

#### 3.1.4.1 Flächeninhalt

##### Definitionsformel

$$A = \iint_{(A)} 1 \, dA = \iint_{(A)} dA$$

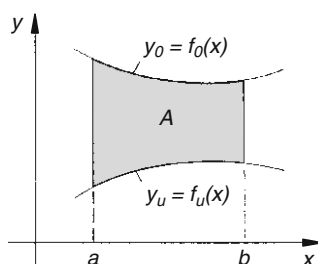


**In kartesischen Koordinaten**

$$A = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} 1 \, dy \, dx$$

$y_o = f_o(x)$ : Obere Randkurve

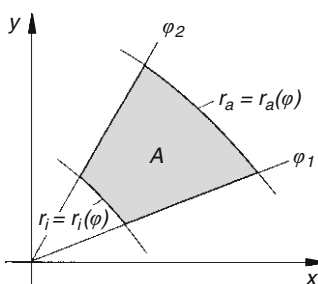
$y_u = f_u(x)$ : Untere Randkurve

**In Polarkoordinaten**

$$A = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r \, dr \, d\varphi$$

$r_a = r_a(\varphi)$ : Äußere Randkurve

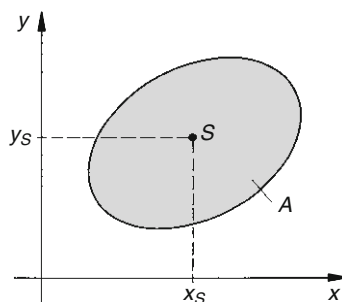
$r_i = r_i(\varphi)$ : Innere Randkurve

**3.1.4.2 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche****Definitionsformeln**

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} x \, dA$$

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} y \, dA$$

A: Flächeninhalt (siehe IX.3.1.4.1)

**In kartesischen Koordinaten**

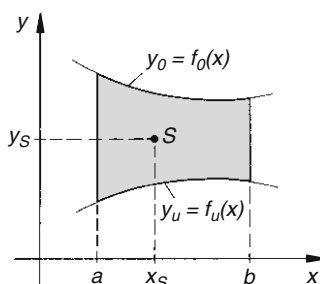
$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} x \, dy \, dx$$

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} y \, dy \, dx$$

$y_o = f_o(x)$ : Obere Randkurve

$y_u = f_u(x)$ : Untere Randkurve

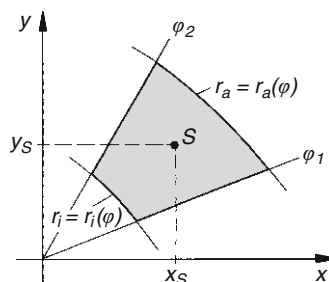
A: Flächeninhalt (siehe IX.3.1.4.1)



**In Polarkoordinaten**

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^2 \cdot \cos \varphi \, dr \, d\varphi$$

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^2 \cdot \sin \varphi \, dr \, d\varphi$$



$r_a = r_a(\varphi)$ : Äußere Randkurve

$r_i = r_i(\varphi)$ : Innere Randkurve

A: Flächeninhalt (siehe IX.3.1.4.1)

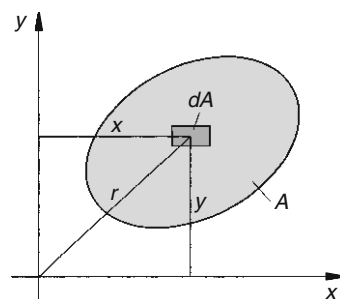
**Teilschwerpunktsatz:** Siehe V.5.5

**3.1.4.3 Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)****Definitionsformeln**

$$I_x = \iint_{(A)} y^2 \, dA, \quad I_y = \iint_{(A)} x^2 \, dA$$

$$I_p = \iint_{(A)} r^2 \, dA$$

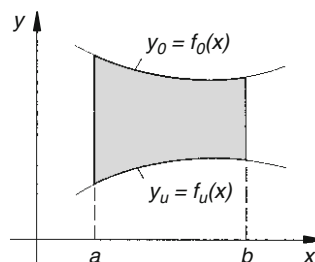
$$I_p = I_x + I_y$$

**In kartesischen Koordinaten**

$$I_x = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} y^2 \, dy \, dx$$

$$I_y = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} x^2 \, dy \, dx$$

$$I_p = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$$



$y_o = f_o(x)$ : Obere Randkurve

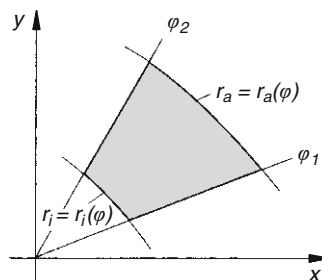
$y_u = f_u(x)$ : Untere Randkurve

### In Polarkoordinaten

$$I_x = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^3 \cdot \sin^2 \varphi \, dr \, d\varphi$$

$$I_y = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^3 \cdot \cos^2 \varphi \, dr \, d\varphi$$

$$I_p = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^3 \, dr \, d\varphi$$



$r_a = r_a(\varphi)$ : Äußere Randkurve

$r_i = r_i(\varphi)$ : Innere Randkurve

**Satz von Steiner:** Siehe V.5.6

## 3.2 Dreifachintegrale

### 3.2.1 Definition eines Dreifachintegrals

$u = f(x; y; z)$  sei eine im Zylinderbereich  $(V)$  definierte und dort stetige Funktion. Wir zerlegen den Zylinder zunächst in  $n$  räumliche Teilbereiche  $\Delta V_k$ , wählen in jedem Teilbereich einen beliebigen Punkt  $P_k = (x_k; y_k; z_k)$ , bilden das Produkt  $f(x_k; y_k; z_k) \Delta V_k$  und summieren schließlich über alle Teilbereiche ( $k = 1, 2, \dots, n$ ; siehe hierzu das obere Bild auf Seite 260):

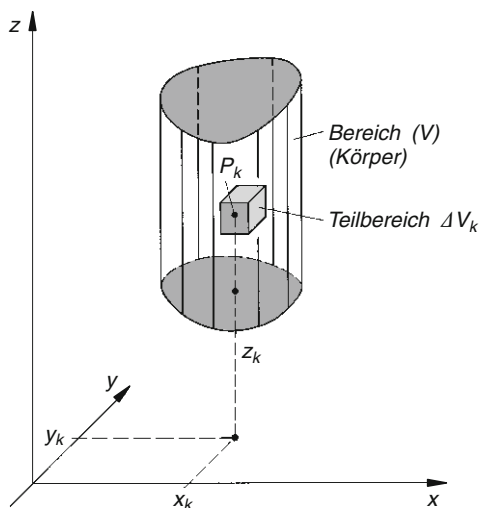
$$\sum_{k=1}^n f(x_k; y_k; z_k) \Delta V_k$$

Beim Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  (und zugleich  $\Delta V_k \rightarrow 0$ ) strebt diese Summe gegen einen Grenzwert, der als *3-dimensionales Bereichsintegral* von  $f(x; y; z)$  über  $(V)$  oder kurz als *Dreifachintegral* bezeichnet wird. Symbolische Schreibweise:

$$\iiint_{(V)} f(x; y; z) \, dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k; y_k; z_k) \Delta V_k$$

*Bezeichnungen*

$x, y, z$ :	Integrationsvariable
$f(x; y; z)$ :	Integrandfunktion (kurz: Integrand)
$dV$ :	Volumendifferential oder Volumenelement
$(V)$ :	Räumlicher Integrationsbereich

**3.2.2 Berechnung eines Dreifachintegrals in kartesischen Koordinaten**

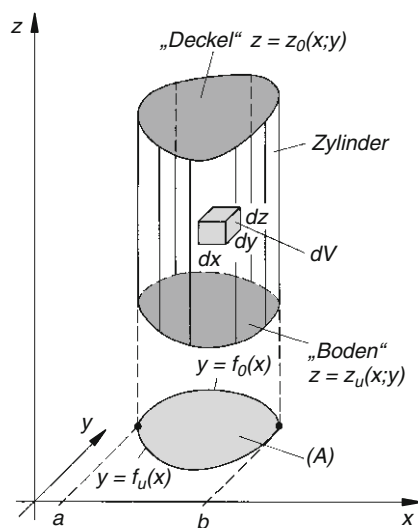
Wir legen den folgenden *kartesischen Normalbereich* zugrunde:

$z = z_u(x; y)$ : „Bodenfläche“

$z = z_o(x; y)$ : „Deckelfläche“

$$dV = dx \, dy \, dz = dz \, dy \, dx$$

$$(V): \left\{ \begin{array}{l} z_u(x; y) \leq z \leq z_o(x; y) \\ f_u(x) \leq y \leq f_o(x) \\ a \leq x \leq b \end{array} \right\}$$





Das Dreifachintegral  $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dV$  lässt sich dann schrittweise durch *drei* nacheinander auszuführende *gewöhnliche* Integrationen berechnen:

$$\iiint_{(V)} f(x; y; z) dV = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x; y)}^{z_o(x; y)} f(x; y; z) dz dy dx$$

1. Integration  
2. Integration  
3. Integration

Es wird in der Reihenfolge  $z, y, x$  integriert. Bei einer *Abänderung* dieser Integrationsreihenfolge müssen die Integrationsgrenzen jeweils *neu* bestimmt werden. Zuletzt wird dabei stets über die Variable mit *festen* Genzen integriert.

### ■ Beispiel

$$\int_{x=1}^2 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^{x+y} (x-y) z dz dy dx = ?$$

1. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen  $z$ ):

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^{x+y} (x-y) z dz &= (x-y) \cdot \int_{z=0}^{x+y} z dz = \frac{1}{2} (x-y) [z^2]_{z=0}^{x+y} = \frac{1}{2} (x-y) (x+y)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (x-y) (x^2 + 2xy + y^2) = \frac{1}{2} (x^3 + 2x^2y + xy^2 - x^2y - 2xy^2 - y^3) = \\ &= \frac{1}{2} (x^3 + x^2y - xy^2 - y^3) \end{aligned}$$

2. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen  $y$ ):

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^x \frac{1}{2} (x^3 + x^2y - xy^2 - y^3) dy &= \frac{1}{2} \left[ x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 - \frac{1}{3} x y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right]_{y=0}^x = \\ &= \frac{1}{2} \left( x^4 + \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{3} x^4 - \frac{1}{4} x^4 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{12x^4 + 6x^4 - 4x^4 - 3x^4}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11x^4}{12} = \frac{11}{24} x^4 \end{aligned}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach der Variablen  $x$ ):

$$\int_{x=1}^2 \frac{11}{24} x^4 dx = \frac{11}{120} [x^5]_1^2 = \frac{11}{120} (2^5 - 1^5) = \frac{11}{120} (32 - 1) = \frac{11 \cdot 31}{120} = \frac{341}{120}$$

Ergebnis:  $\int_{x=1}^2 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^{x+y} (x-y) z dz dy dx = \frac{341}{120}$

■

### 3.2.3 Berechnung eines Dreifachintegrals in Zylinderkoordinaten

*Hinweis:* Die Zylinderkoordinate  $\varrho$  (senkrechter Abstand von der  $z$ -Achse, siehe I.9.2.2 und XIV.6.2) wird hier mit  $r$  bezeichnet, um Verwechslungen mit der Dichte  $\varrho$  zu vermeiden.

Beim Übergang von den *kartesischen* Raumkoordinaten  $(x; y; z)$  zu den *Zylinderkoordinaten*  $(r; \varphi; z)$  gelten die *Transformationsgleichungen*

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad z = z, \quad dV = r \, dz \, dr \, d\varphi$$

(Zylinderkoordinaten: siehe I.9.2.2 und XIV.6.2). Ein Dreifachintegral  $\iiint_{(V)} f(x; y; z) \, dV$  transformiert sich dabei wie folgt:

$$\iiint_{(V)} f(x; y; z) \, dV = \iiint_{(V)} f(r \cdot \cos \varphi; r \cdot \sin \varphi; z) \cdot r \, dz \, dr \, d\varphi$$

Die Integration erfolgt dabei in *drei* nacheinander auszuführenden *gewöhnlichen* Integrationschritten, wobei zunächst nach  $z$ , dann nach  $r$  und schließlich nach  $\varphi$  integriert wird. Bei einer *Abänderung* der Integrationsreihenfolge müssen die (in *Zylinderkoordinaten* ausgedrückten) Integrationsgrenzen neu bestimmt werden.

### 3.2.4 Berechnung eines Dreifachintegrals in Kugelkoordinaten

Beim Übergang von den *kartesischen* Raumkoordinaten  $(x; y; z)$  zu den *Kugelkoordinaten*  $(r; \vartheta; \varphi)$  gelten die Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cdot \cos \vartheta \\ dV = r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

(Kugelkoordinaten: siehe I.9.2.4 und XIV.6.3). Ein Dreifachintegral  $\iiint_{(V)} f(x; y; z) \, dV$  transformiert sich dabei wie folgt:

$$\iiint_{(V)} f(x; y; z) \, dV = \iiint_{(V)} f(r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi; r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi; r \cdot \cos \vartheta) \cdot r^2 \cdot \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

Die Integration erfolgt in *drei* nacheinander auszuführenden *gewöhnlichen* Integrationschritten, wobei zunächst nach  $r$ , dann nach  $\vartheta$  und schließlich nach  $\varphi$  integriert wird. Bei einer Änderung der Integrationsreihenfolge müssen die (in *Kugelkoordinaten* ausgedrückten) Integrationsgrenzen neu bestimmt werden.

### 3.2.5 Anwendungen

#### 3.2.5.1 Volumen eines zylindrischen Körpers

##### Definitionsformel

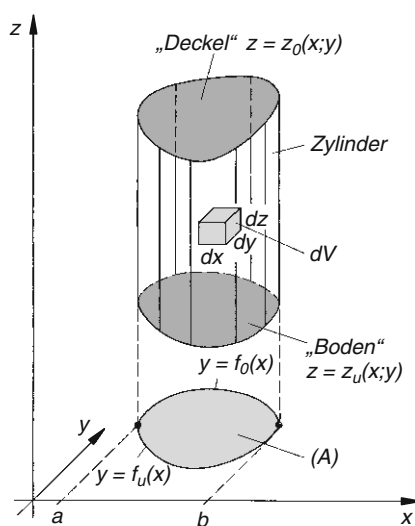
$$V = \iiint_{(V)} 1 \, dV = \iiint_{(V)} dV$$

##### In kartesischen Koordinaten

$$V = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} dz \, dy \, dx$$

$z = z_o(x, y)$ : „Deckelfläche“

$z = z_u(x, y)$ : „Bodenfläche“

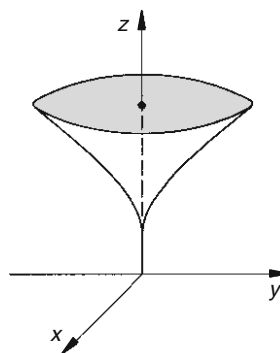


##### Rotationskörper

Rotationsachse: z-Achse

$$V = \iiint_{(V)} r \, dz \, dr \, d\varphi$$

$r, \varphi, z$ : Zylinderkoordinaten (siehe I.9.2.2 und XIV.6.2)



#### 3.2.5.2 Schwerpunkt eines homogenen Körpers

##### Definitionsformeln

$$x_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(V)} x \, dV, \quad y_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(V)} y \, dV, \quad z_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(V)} z \, dV$$

$V$ : Volumen (siehe IX.3.2.5.1)

Bild: siehe Seite 264 oben

**In kartesischen Koordinaten**

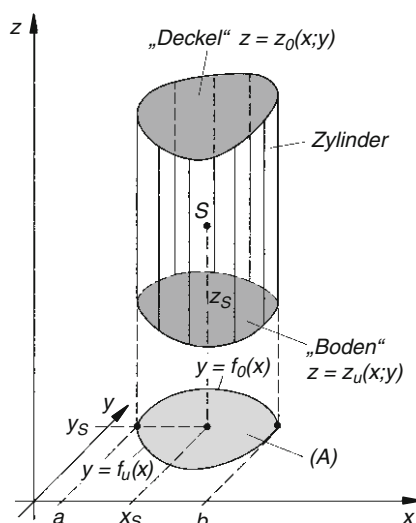
$$x_S = \frac{1}{V} \cdot \int_a^b \int_{f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} x \, dz \, dy \, dx$$

$$y_S = \frac{1}{V} \cdot \int_a^b \int_{f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} y \, dz \, dy \, dx$$

$$z_S = \frac{1}{V} \cdot \int_a^b \int_{f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} z \, dz \, dy \, dx$$

$z = z_o(x; y)$ : „Deckelfläche“

$z = z_u(x; y)$ : „Bodenfläche“

**Rotationskörper**

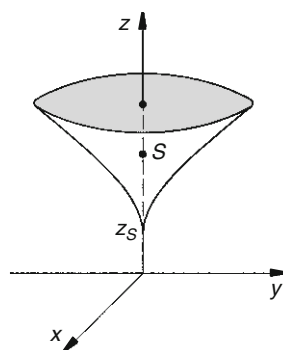
Rotationsachse:  $z$ -Achse

$$x_S = 0, \quad y_S = 0$$

$$z_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint_{(V)} z r \, dz \, dr \, d\varphi$$

$V$ : Rotationsvolumen (siehe IX.3.2.5.1)

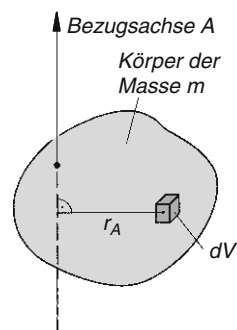
$r, \varphi, z$ : Zylinderkoordinaten (siehe I.9.2.2 und XIV.6.2)

**3.2.5.3 Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers****Definitionsformel**

$$J = \varrho \cdot \iiint_{(V)} r_A^2 \, dV$$

$\varrho$ : Konstante Dichte des Körpers

$r_A$ : Senkrechter Abstand des Volumenelementes  $dV$  von der Bezugsachse

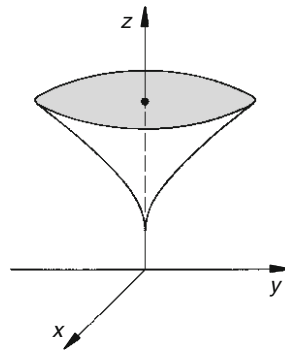


**In kartesischen Koordinaten**Bezugsachse:  $z$ -Achse

$$J = \varrho \cdot \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} (x^2 + y^2) dz dy dx$$

 $z = z_o(x; y)$ : „Deckelfläche“ $z = z_u(x; y)$ : „Bodenfläche“ $\varrho$ : Konstante Dichte des Körpers**Rotationskörper**Rotations- und Bezugsachse:  $z$ -Achse

$$J_z = \varrho \cdot \iiint_{(V)} r^3 dz dr d\varphi$$

 $\varrho$ : Konstante Dichte des Körpers $r, \varphi, z$ : Zylinderkoordinaten (siehe I.9.2.2 und XIV.6.2)**Satz von Steiner**

Siehe V.5.11

# X Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 1 Grundbegriffe

### 1.1 Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion  $y = y(x)$  bis zur  $n$ -ten Ordnung auftreten, heißt eine *gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung*.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Implizite Form: } F(x; y; y'; \dots; y^{(n)}) = 0 \\ \text{Explizite Form: } y^{(n)} = f(x; y; y'; \dots; y^{(n-1)}) \end{array} \right\} n \in \mathbb{N}^*$$

### 1.2 Lösungen einer Differentialgleichung

Eine Funktion  $y = y(x)$  heißt eine *Lösung* der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung *identisch* erfüllt.

#### Allgemeine Lösung

Die *allgemeine* Lösung einer Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung enthält  $n$  voneinander *unabhängige* Parameter oder Integrationskonstanten.

#### Spezielle oder partikuläre Lösung

Man erhält aus der allgemeinen Lösung eine *spezielle* oder *partikuläre* Lösung, indem man den  $n$  Parametern feste Werte zuweist (z. B. durch *zusätzliche* Bedingungen wie *Anfangs-* oder *Randbedingungen*).

#### Singuläre Lösung

Eine Lösung der Differentialgleichung, die sich *nicht* aus der allgemeinen Lösung gewinnen lässt, heißt *singulär*.

### 1.3 Anfangswertprobleme

Von der gesuchten Lösung  $y = y(x)$  einer Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung sind genau  $n$  Werte, nämlich der *Funktionswert* sowie die Werte der *ersten  $n - 1$  Ableitungen* an einer Stelle  $x_0$  vorgegeben:  $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$  (sog. *Anfangswerte*). Aus diesen *Anfangsbedingungen* lassen sich die  $n$  Integrationskonstanten  $C_1, C_2, \dots, C_n$  der allgemeinen Lösung bestimmen.

Dies bedeutet für eine

**Dgl. 1. Ordnung:** Gesucht ist die Lösungskurve  $y = y(x)$  durch den Punkt  $P = (x_0; y_0)$ .

**Dgl. 2. Ordnung:** Gesucht ist die Lösungskurve  $y = y(x)$  durch den Punkt  $P = (x_0; y_0)$ , die in diesem Punkt die Steigung  $y'(x_0) = m$  besitzt.

## 1.4 Randwertprobleme

Von der gesuchten Lösung  $y = y(x)$  einer Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung sind oft die *Funktionswerte* an  $n$  verschiedenen Stellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vorgegeben:  $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$  (sog. *Randwerte*;  $n \geq 2$ ). Aus diesen *Randbedingungen* lassen sich dann die  $n$  Integrationskonstanten  $C_1, C_2, \dots, C_n$  der allgemeinen Lösung bestimmen<sup>1)</sup>.

Allgemeiner formuliert: Ein *Randwertproblem* (auch *Randwertaufgabe* genannt) liegt vor, wenn die gesuchte Lösung einer Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung und gewisse ihrer Ableitungen an *mindestens* zwei verschiedenen Stellen des Definitionsbereiches vorgeschriebene Werte annehmen sollen (insgesamt  $n$  Randbedingungen).

## 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

### 2.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

wird durch „*Trennung der Variablen*“ wie folgt gelöst:

1. Zunächst werden die beiden Variablen und ihre zugehörigen Differentiale voneinander *getrennt*, d. h. auf *verschiedene* Seiten der Gleichung gebracht.
2. Dann erfolgt die *Integration* auf *beiden* Seiten der Gleichung. Die *Lösung* lautet (in impliziter Form):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \quad (g(y) \neq 0)$$

Weitere Lösungen kann die Gleichung  $g(y) = 0$  liefern, muss es aber nicht. Sie sind dann vom Typ  $y = \text{const.}$

#### ■ Beispiel

$$y' = (\cos x) \cdot y \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = (\cos x) \cdot y$$

$$\text{Trennen der beiden Variablen: } \frac{dy}{y} = \cos x \, dx \quad (\text{für } y \neq 0)$$

<sup>1)</sup> Nicht jedes Randwertproblem ist lösbar, in bestimmten Fällen können auch *mehrere* Lösungen auftreten.

$$\begin{aligned} \text{Integration auf beiden Seiten: } \int \frac{dy}{y} = \int \cos x \, dx &\Rightarrow \ln |y| = \sin x + \ln |C| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln |y| - \ln |C| = \ln \left| \frac{y}{C} \right| = \sin x \end{aligned}$$

*Allgemeiner Hinweis:* Beim Auftreten *logarithmischer* Terme wird die Integrationskonstante zweckmäßigerweise in der Form  $\ln |C|$  angesetzt. Man beachte ferner, das in diesem Beispiel auch  $y = 0$  eine Lösung ist.

*Lösung* (nach Entlogarithmierung der Gleichung):  $y = C \cdot e^{\sin x} \quad (C \in \mathbb{R})$  ■

## 2.2 Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, die durch Substitutionen lösbar sind (Tabelle)

Differentialgleichung	Substitution	Neue Dgl/Lösungsweg
(A) $y' = f(ax + by + c)$	$u = ax + by + c$	$u' = a + b \cdot f(u)$ 1. Trennung der Variablen 2. Rücksubstitution
(B) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (homogene Dgl)	$u = \frac{y}{x}$	$u' = \frac{f(u) - u}{x}$ 1. Trennung der Variablen 2. Rücksubstitution
(C) $y' + g(x) \cdot y = h(x) \cdot y^n$ (Bernoullische Dgl; $n \neq 1$ )	$u = y^{1-n}$	$u' + (1-n)g(x) \cdot u = (1-n)h(x)$ 1. Lineare Dgl (siehe X.2.4) 2. Rücksubstitution

Man beachte:  $y$  ist eine Funktion von  $x$ , dies gilt daher auch für die „Hilfsvariable“  $u$ .

### ■ Beispiel

$$y' = \frac{2y-x}{x} = 2\left(\frac{y}{x}\right) - 1 \quad (x \neq 0) \quad \text{homogene Dgl vom Typ (B)}$$

$$\text{Substitution: } u = \frac{y}{x}, \quad y = xu \Rightarrow y' = 1 \cdot u + x \cdot u' = u + xu'$$

$$\text{Neue Dgl: } u + xu' = 2u - 1 \Rightarrow xu' = u - 1$$

$$\text{Trennung der Variablen: } x \frac{du}{dx} = u - 1 \Rightarrow \frac{du}{u-1} = \frac{dx}{x} \quad (x \neq 0; u \neq 1)$$

$$\text{Integration: } \int \frac{du}{u-1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |u-1| = \ln |x| + \ln |C| = \ln |Cx|$$

$$\text{Entlogarithmierung: } u - 1 = Cx \Rightarrow u = Cx + 1$$

$$\text{Lösung (nach Rücksubstitution): } y = xu = x(Cx + 1) = Cx^2 + x \quad (C \in \mathbb{R})$$
 ■



## 2.3 Exakte Differentialgleichungen 1. Ordnung

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$g(x; y) dx + h(x; y) dy = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

heißt *exakt* oder *vollständig*. Die lineare Differentialform  $g(x; y) dx + h(x; y) dy$  ist dann das *totale* oder *vollständige* Differential  $du$  einer Funktion  $u = u(x; y)$ . Somit gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(x; y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = h(x; y)$$

Die Lösung der exakten Differentialgleichung lautet dann in geschlossener Form:

$$\int g(x; y) dx + \int \left[ h(x; y) - \int \frac{\partial g}{\partial y} dx \right] dy = \text{const.} = C$$

### ■ Beispiel

Die Dgl  $(1-x)y' + x - y = 0$  oder  $\underbrace{(x-y)}_g dx + \underbrace{(1-x)}_h dy = 0$  ist *exakt*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (x-y) = -1 \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (1-x) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} = -1$$

Integration (nach obiger Lösungsformel):

$$\begin{aligned} \int (x-y) dx + \int \left[ 1-x - \underbrace{\int \frac{\partial}{\partial y} (x-y) dx}_{-1} \right] dy &= \int (x-y) dx + \int [1-x+x] dy = \\ &= \frac{1}{2} x^2 - xy + y = C \end{aligned}$$

$$\text{Lösung: } \frac{1}{2} x^2 - xy + y = C \quad \text{oder} \quad y = \frac{x^2 - 2C}{2(x-1)} \quad (C \in \mathbb{R})$$

### Integrierender Faktor

Häufig lässt sich eine *nichtexakte* Differentialgleichung 1. Ordnung durch *Multiplikation* mit einer geeigneten Funktion  $\lambda = \lambda(x; y)$  in eine *exakte* Differentialgleichung überführen. Der „integrierende Faktor“  $\lambda(x; y)$  muss dabei die *Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial}{\partial y} [\lambda(x; y) \cdot g(x; y)] = \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(x; y) \cdot h(x; y)]$$

erfüllen. In vielen Fällen hängt der integrierende Faktor nur von  $x$  oder  $y$  ab, d. h.  $\lambda = \lambda(x)$  bzw.  $\lambda = \lambda(y)$ .

### ■ Beispiel

$$(1+xy) dx + (xy+x^2) dy = 0 \quad (\text{nichtexakte Dgl})$$

$$\text{Integrierender Faktor: } \lambda = \frac{1}{x}$$

$$\text{Neue (exakte) Dgl: } \frac{1}{x} (1 + xy) dx + \frac{1}{x} (xy + x^2) dy = \underbrace{\left(\frac{1}{x} + y\right)}_g dx + \underbrace{(y + x)}_h dy = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{x} + y \right) = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (y + x) = 1 \Rightarrow \text{exakte Dgl}$$

$$\text{Integration: } \int \left( \frac{1}{x} + y \right) dx + \int \left[ y + x - \underbrace{\int 1 dx}_x \right] dy = \ln |x| + xy + \frac{1}{2} y^2 = C$$

$$\text{Lösung: } \ln |x| + xy + \frac{1}{2} y^2 = C \quad (C \in \mathbb{R})$$

■

## 2.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

### 2.4.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Die Funktion  $g(x)$  wird als *Störfunktion* oder *Störglied* bezeichnet. *Fehlt* das Störglied, d. h. ist  $g(x) \equiv 0$ , so heißt die lineare Differentialgleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

### 2.4.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

Lösung durch „Trennung der Variablen“:

$$y = C \cdot e^{-\int f(x) dx} \quad (C \in \mathbb{R})$$

#### ■ Beispiel

$$y' - 2xy = 0 \Rightarrow y = C \cdot e^{\int 2x dx} = C \cdot e^{x^2} \quad (C \in \mathbb{R})$$

■

### 2.4.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung

#### 2.4.3.1 Integration durch Variation der Konstanten

Eine *inhomogene* lineare Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ  $y' + f(x) \cdot y = g(x)$  lässt sich durch „Variation der Konstanten“ wie folgt lösen:

1. Integration der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung  $y' + f(x) \cdot y = 0$  durch „Trennung der Variablen“. Allgemeine Lösung:

$$y = K \cdot e^{-\int f(x) dx} \quad (K \in \mathbb{R})$$

2. „Variation der Konstanten“: Die Integrationskonstante  $K$  wird durch eine (noch unbekannte) Funktion  $K(x)$  ersetzt. Mit dem Lösungsansatz:

$$y = K(x) \cdot e^{-\int f(x) dx}$$

geht man in die *inhomogene* lineare Differentialgleichung ein und erhält eine einfache Differentialgleichung 1. Ordnung für die Faktorfunktion  $K(x)$ , die durch unbestimmte Integration direkt gelöst werden kann.

### ■ Beispiel

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \quad \text{oder} \quad y' - \frac{1}{x} y = x^2 \quad (x \neq 0)$$

1. *Homogene Differentialgleichung*  $y' - \frac{y}{x} = 0$

Integration durch „Trennung der Variablen“:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln |y| = \ln |x| + \ln |K| = \ln |K \cdot x|$$

$$\text{Lösung: } y = K \cdot x \quad (K \in \mathbb{R})$$

2. *Inhomogene Differentialgleichung*  $y' - \frac{y}{x} = x^2$

Integration durch „Variation der Konstanten“:  $K \rightarrow K(x)$

$$y = K(x) \cdot x, \quad y' = K'(x) \cdot x + K(x)$$

$$K'(x) \cdot x + K(x) - \frac{K(x) \cdot x}{x} = x^2, \quad K'(x) \cdot x = x^2, \quad K'(x) = x \Rightarrow K(x) = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\text{Lösung: } y = K(x) \cdot x = \left( \frac{1}{2} x^2 + C \right) \cdot x = \frac{1}{2} x^3 + Cx \quad (C \in \mathbb{R})$$

■

### 2.4.3.2 Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung

Man löst zunächst die zugehörige *homogene* Differentialgleichung  $y' + f(x) \cdot y = 0$  durch „Trennung der Variablen“ (allgemeine Lösung:  $y_0 = C \cdot e^{-\int f(x) dx}$ ) und versucht dann mit Hilfe eines *geeigneten* Lösungsansatzes, der einen oder mehrere *Parameter* enthält, eine *partikuläre* Lösung  $y_p$  der *inhomogenen* Differentialgleichung  $y' + f(x) \cdot y = g(x)$  zu bestimmen. Die *allgemeine* Lösung  $y$  der *inhomogenen* Differentialgleichung ist dann die *Summe* aus  $y_0$  und  $y_p$ :

$$y = y_0 + y_p = C \cdot e^{-\int f(x) dx} + y_p \quad (C \in \mathbb{R})$$

### 2.4.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y' + ay = g(x) \quad (a \in \mathbb{R})$$

(Spezialfall der allgemeinen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung für  $f(x) = a$ )

Die Integration dieser Differentialgleichung erfolgt entweder durch „*Variation der Konstanten*“ (siehe X.2.4.3.1) oder durch „*Aufsuchen einer partikulären Lösung*“ (siehe X.2.4.3.2), wobei sich die *letzte* Lösungsmethode in den meisten Fällen als die *zweckmäßigere* erweist, da der Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung  $y_p$  im Wesentlichen dem Funktionstyp des *Störgliedes*  $g(x)$  entspricht.

Die zugehörige *homogene* Gleichung  $y' + ay = 0$  wird durch die *Exponentialfunktion*  $y_0 = C \cdot e^{-ax}$  gelöst. Für die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung gilt somit:

$$y = y_0 + y_p = C \cdot e^{-ax} + y_p \quad (C \in \mathbb{R})$$

Den Lösungsansatz für eine *partikuläre* Lösung  $y_p$  entnimmt man der folgenden Tabelle.

**Tabelle: Lösungsansatz  $y_p$  für spezielle Störfunktionen (Störglieder)**

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
1. Konstante Funktion	Konstante Funktion $y_p = c_0$
2. Lineare Funktion	Lineare Funktion $y_p = c_1 x + c_0$
3. Quadratische Funktion	Quadratische Funktion $y_p = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$
4. Polynomfunktion vom Grade $n$	Polynomfunktion vom Grade $n$ $y_p = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$
5. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x)$	$\left\{ \begin{array}{l} y_p = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x) \\ \text{oder} \\ y_p = C \cdot \sin(\omega x + \varphi) \end{array} \right.$
6. $g(x) = B \cdot \cos(\omega x)$	
7. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	
8. $g(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_p = \begin{cases} C \cdot e^{bx} & \text{für } b \neq -a \\ Cx \cdot e^{bx} & \text{für } b = -a \end{cases}$

$c_0, c_1, \dots, c_n; C, C_1, C_2$ : „Stellparameter“

#### Anmerkungen zur Tabelle

- (1) Die im jeweiligen Lösungsansatz enthaltenen *Parameter* sind so zu bestimmen, dass die Funktion die vorgegebene Differentialgleichung *löst*.
- (2) Ist die Störfunktion  $g(x)$  eine *Summe* aus *mehreren* Störgliedern, so erhält man den Lösungsansatz für  $y_p$  als *Summe* der Lösungsansätze für die einzelnen Störglieder.
- (3) Ist die Störfunktion  $g(x)$  ein *Produkt* aus *mehreren* Faktoren, so werden die Ansätze für die einzelnen Faktoren miteinander *multipliziert*.

■ **Beispiel**

$$y' - 2y = 4x - 2$$

1. *Homogene Differentialgleichung*  $y' - 2y = 0$

$$\text{Lösung: } y_0 = C \cdot e^{2x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

2. *Inhomogene Differentialgleichung*  $y' - 2y = 4x - 2$  (Störglied:  $g(x) = 4x - 2$ )

$$\text{Lösungsansatz für } y_p: y_p = ax + b, \quad y'_p = a$$

Bestimmung der Konstanten  $a$  und  $b$ :

$$a - 2(ax + b) = 4x - 2, \quad -2ax + a - 2b = 4x - 2$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{array}{l} -2a = 4 \\ a - 2b = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -2, \quad b = 0$$

$$\text{Partikuläre Lösung: } y_p = -2x$$

$$\text{Lösung der inhomogenen Differentialgleichung: } y = y_0 + y_p = C \cdot e^{2x} - 2x \quad (C \in \mathbb{R})$$

■

## 2.5 Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung

### 2.5.1 Streckenzugverfahren von Euler

Die Lösungskurve  $y(x)$  der Differentialgleichung  $y' = f(x; y)$  für den Anfangswert  $y(x_0) = y_0$  lässt sich an den Stellen  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ ,  $x_3 = x_0 + 3h$ , ... näherungsweise wie folgt berechnen ( $h$ : gewählte Schrittweite):

$$y(x_0) = y_0 \quad (\text{vorgegebener Anfangswert})$$

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0)$$

$$y(x_2) \approx y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1; y_1)$$

$$y(x_3) \approx y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2; y_2)$$

$$\vdots$$

#### Rechenschema

$i$	$x$	$y$	$h \cdot f(x; y)$
0	$x_0$	$y_0$ (Anfangswert)	$h \cdot f(x_0; y_0)$
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0)$	$h \cdot f(x_1; y_1)$
2	$x_2 = x_0 + 2h$	$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1; y_1)$	$h \cdot f(x_2; y_2)$
3	$x_3 = x_0 + 3h$	$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2; y_2)$	$h \cdot f(x_3; y_3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

### Fehlerabschätzung

$$\Delta y_i = y(x_i) - y_i \approx y_i - \tilde{y}_i$$

$y(x_i)$ : Exakte Lösung an der Stelle  $x_i$

$y_i$ : Näherungslösung an der Stelle  $x_i$  bei der Schrittweite  $h$

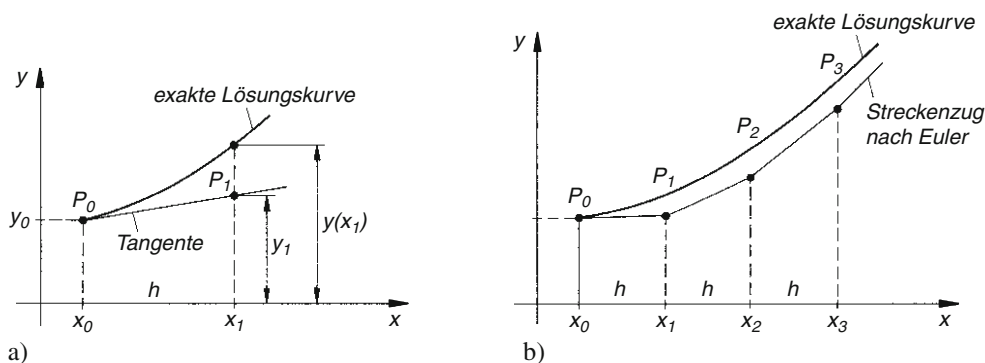
$\tilde{y}_i$ : Näherungslösung an der Stelle  $x_i$  bei doppelter Schrittweite  $2h$

### Geometrische Deutung

Die (exakte) Lösungskurve wird im Anfangspunkt  $P_0 = (x_0; y_0)$  durch die dortige *Tangente* mit der Steigung  $m = f(x_0; y_0)$  ersetzt. Der an der Stelle  $x_1 = x_0 + h$  gelegene Tangentenpunkt  $P_1$  besitzt dann die Ordinate  $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0)$  (Bild a)). Dieser Wert ist ein *Näherungswert* für die exakte Lösung  $y(x_1)$ :

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0)$$

Dann wird das Verfahren für den (neuen) Anfangspunkt  $P_1$  wiederholt usw.. Man erhält einen *Streckenzug* als Näherung für die gesuchte Lösung der Differentialgleichung (Bild b)).



### ■ Beispiel

$$y' = y - x \quad \text{Anfangswert: } y(0) = 0$$

Wir berechnen die *Näherungslösung* dieser Differentialgleichung im Intervall  $0 \leq x \leq 0,2$  für die Schrittweite  $h = 0,05$  und vergleichen sie mit der *exakten* Lösung  $y = -e^x + x + 1$ :

$i$	$x$	$y$	$h \cdot f(x; y) = 0,05 (y - x)$	$y_{\text{exakt}}$
0	0,00	0,000 000	0,000 000	0,000 000
1	0,05	0,000 000	-0,002 500	-0,001 271
2	0,10	-0,002 500	-0,005 125	-0,005 171
3	0,15	-0,007 625	-0,007 881	-0,011 834
4	0,20	-0,015 506	-0,010 775	-0,021 403

■

### 2.5.2 Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung

Die Lösungskurve  $y(x)$  der Differentialgleichung  $y' = f(x; y)$  für den Anfangswert  $y(x_0) = y_0$  lässt sich an den Stellen  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ ,  $x_3 = x_0 + 3h$ , ... näherungsweise wie folgt berechnen ( $h$ : gewählte Schrittweite):

$y(x_0) = y_0$ (vorgegebener Anfangswert)
$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$ $k_1 = h \cdot f(x_0; y_0)$ $k_2 = h \cdot f(x_0 + h; y_0 + k_1)$
$y(x_2) \approx y_2 = y_1 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$ $k_1 = h \cdot f(x_1; y_1)$ $k_2 = h \cdot f(x_1 + h; y_1 + k_1)$
$y(x_3) \approx y_3 = y_2 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$ $k_1 = h \cdot f(x_2; y_2)$ $k_2 = h \cdot f(x_2 + h; y_2 + k_1)$
$\vdots$

#### Rechenschema

Abkürzung:  $K = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$

$i$	$x$	$y$	$f(x; y)$	$k = h \cdot f(x; y)$
0	$x_0$	$y_0$	$f(x_0; y_0)$	$k_1 = h \cdot f(x_0; y_0)$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_1$	$f(x_0 + h; y_0 + k_1)$	$k_2 = h \cdot f(x_0 + h; y_0 + k_1)$
				$K = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + K$	.....	
	$\vdots$			

*Grau unterlegt:* Näherungswert für  $y(x_1)$

**Fehlerabschätzung**

$$\Delta y_i = y(x_i) - y_i \approx \frac{1}{3} (y_i - \tilde{y}_i)$$

$y(x_i)$ : Exakte Lösung an der Stelle  $x_i$

$y_i$ : Näherungslösung an der Stelle  $x_i$  bei der Schrittweite  $h$

$\tilde{y}_i$ : Näherungslösung an der Stelle  $x_i$  bei doppelter Schrittweite  $2h$

■ **Beispiel**

$$y' = y - x \quad \text{Anfangswert: } y(0) = 0$$

Wir berechnen die *Näherungslösung* dieser Differentialgleichung im Intervall  $0 \leq x \leq 0,3$  für die Schrittweite  $h = 0,1$  und vergleichen sie mit der *exakten* Lösung  $y = -e^x + x + 1$ :

$i$	$x$	$y$	$f(x; y) = y - x$	$k = 0,1(y - x)$	$y_{\text{exakt}}$
0	0,0	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000
	0,1	0,000 000	-0,100 000	-0,010 000	
				$K = -0,005 000$	
1	0,1	-0,005 000	-0,105 000	-0,010 500	-0,005 171
	0,2	-0,015 500	-0,215 500	-0,021 550	
				$K = -0,016 025$	
2	0,2	-0,021 025	-0,221 025	-0,022 103	-0,021 403
	0,3	-0,043 128	-0,343 128	-0,034 313	
				$K = -0,028 208$	
3	0,3	-0,049 233			-0,049 859

*Näherungslösung*

im Vergleich zur *exakten* Lösung:

$x$	$y$	$y_{\text{exakt}}$
0,0	0,000 000	0,000 000
0,1	-0,005 000	-0,005 171
0,2	-0,021 025	-0,021 403
0,3	-0,049 233	-0,049 859

■

**2.5.3 Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung**

Die Lösungskurve  $y(x)$  der Differentialgleichung  $y' = f(x; y)$  für den Anfangswert  $y(x_0) = y_0$  lässt sich an den Stellen  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ ,  $x_3 = x_0 + 3h, \dots$  näherungsweise nach dem Schema der folgenden Seite berechnen ( $h$ : gewählte Schrittweite).



$y(x_0) = y_0$ (vorgegebener Anfangswert)
$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $k_1 = h \cdot f(x_0; y_0)$ $k_2 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$ $k_3 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$ $k_4 = h \cdot f(x_0 + h; y_0 + k_3)$
$y(x_2) \approx y_2 = y_1 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $k_1 = h \cdot f(x_1; y_1)$ $k_2 = h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{k_1}{2}\right)$ $k_3 = h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{k_2}{2}\right)$ $k_4 = h \cdot f(x_1 + h; y_1 + k_3)$
$\vdots$

**Rechenschema**

Abkürzung:  $K = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$i$	$x$	$y$	$f(x; y)$	$k = h \cdot f(x; y)$
0	$x_0$	$y_0$	$f(x_0; y_0)$	$k_1$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1}{2}$	$f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$	$k_2$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2}{2}$	$f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$	$k_3$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	$f(x_0 + h; y_0 + k_3)$	$k_4$
				$K = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + K$	.....	
	$\vdots$			

*Grau unterlegt:* Näherungswert für  $y(x_1)$

**Fehlerabschätzung**

$$\Delta y_i = y(x_i) - y_i \approx \frac{1}{15} (y_i - \tilde{y}_i)$$

$y(x_i)$ : Exakte Lösung an der Stelle  $x_i$

$y_i$ : Näherungslösung an der Stelle  $x_i$  bei der Schrittweite  $h$

$\tilde{y}_i$ : Näherungslösung an der Stelle  $x_i$  bei doppelter Schrittweite  $2h$

■ **Beispiel**

$$y' = y - x \quad \text{Anfangswert: } y(0) = 0$$

Wir berechnen die *Näherungslösung* dieser Differentialgleichung im Intervall  $0 \leq x \leq 0,3$  für die Schrittweite  $h = 0,1$  und vergleichen sie mit der *exakten* Lösung  $y = -e^x + x + 1$ :

$i$	$x$	$y$	$f(x; y) = y - x$	$k = 0,1(y - x)$	$y_{\text{exakt}}$
0	0,00	0,000 000	0,000 000	0,000 000	0,000 000
	0,05	0,000 000	− 0,050 000	− 0,005 000	
	0,05	− 0,002 500	− 0,052 500	− 0,005 250	
	0,10	− 0,005 250	− 0,105 250	− 0,010 525	
				$K = -0,005\,171$	
1	0,10	− 0,005 171	− 0,105 171	− 0,010 517	− 0,005 171
	0,15	− 0,010 430	− 0,160 430	− 0,016 043	
	0,15	− 0,013 193	− 0,163 193	− 0,016 320	
	0,20	− 0,021 490	− 0,221 490	− 0,022 149	
				$K = -0,016\,232$	
2	0,20	− 0,021 403	− 0,221 403	− 0,022 140	− 0,021 403
	0,25	− 0,032 473	− 0,282 473	− 0,028 247	
	0,25	− 0,035 527	− 0,285 527	− 0,028 553	
	0,30	− 0,049 956	− 0,349 956	− 0,034 996	
				$K = -0,028\,456$	
3	0,30	− 0,049 859			− 0,049 859

*Näherungslösung*  
im Vergleich zur *exakten* Lösung:

$x$	$y$	$y_{\text{exakt}}$
0,0	0,000 000	0,000 000
0,1	− 0,005 171	− 0,005 171
0,2	− 0,021 403	− 0,021 403
0,3	− 0,049 859	− 0,049 859

■

## 3 Differentialgleichungen 2. Ordnung

### 3.1 Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen lassen

Die in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellten Differentialgleichungen 2. Ordnung lassen sich mit Hilfe geeigneter *Substitutionen* auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen.

Differentialgleichung	Substitution	Neue Dgl/Lösungsweg
(A) $y'' = f(y)$	$y' = \frac{dy}{dx} = u$ $y'' = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u$	$u \frac{du}{dy} = f(y)$ 1. Integration durch <i>Trennung der Variablen</i> (siehe X.2.1): $u = \pm \sqrt{2 \cdot \int f(y) dy}$ 2. Rücksubstitution ( $u = y'$ ): $y' = \pm \sqrt{2 \cdot \int f(y) dy}$ 3. Integration durch <i>Trennung der Variablen</i> (siehe X.2.1)
(B) $y'' = f(y')$	$y' = u$ $y'' = u'$	$u' = f(u)$ 1. Integration durch <i>Trennung der Variablen</i> (siehe X.2.1): $\int \frac{du}{f(u)} = x + C$ (nach $u$ auflösen: $u = u(x)$ ) 2. Rücksubstitution ( $u = y'$ ): $y' = u(x)$ 3. Direkte Integration: $y = \int u(x) dx$
(C) $y'' = f(x; y')$	$y' = u$ $y'' = u'$	$u' = f(x; u)$ Weiterer Lösungsweg hängt vom Typ der Funktion $f(x; u)$ ab
(D) $y'' = f(y; y')$	$y' = \frac{dy}{dx} = u$ $y'' = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u$	$u \frac{du}{dy} = f(y; u)$ Weiterer Lösungsweg hängt vom Typ der Funktion $f(y; u)$ ab

■ **Beispiel**

$$y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$$

Substitution vom Typ (B):  $y' = u, \quad y'' = u'$

Neue Differentialgleichung 1. Ordnung:  $u' = \sqrt{1 + u^2}$

Integration nach „Trennung der Variablen“:

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = dx, \quad \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int dx \Rightarrow \operatorname{arsinh} u = x + C_1 \Rightarrow u = \sinh(x + C_1)$$

Rücksubstitution mit anschließender Integration:

$$y' = u = \sinh(x + C_1) \Rightarrow y = \int \sinh(x + C_1) dx = \cosh(x + C_1) + C_2$$

Lösung:  $y = \cosh(x + C_1) + C_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

■

## 3.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

### 3.2.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + ay' + by = g(x) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Die Funktion  $g(x)$  wird als *Störfunktion* oder *Störglied* bezeichnet. *Fehlt* das Störglied, d. h. ist  $g(x) \equiv 0$ , so heißt die lineare Differentialgleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

### 3.2.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung

#### 3.2.2.1 Wronski-Determinante

Zwei *Lösungsfunktionen*  $y_1$  und  $y_2$  der *homogenen* linearen Differentialgleichung  $y'' + ay' + by = 0$  heißen *Basisfunktionen* oder *Basislösungen* der Differentialgleichung, wenn die aus ihnen gebildete *Wronski-Determinante*

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

von Null *verschieden* ist. Die Basislösungen bilden eine sog. *Fundamentalebasis* der Differentialgleichung, sie werden auch als *linear unabhängige* Lösungen bezeichnet.

#### 3.2.2.2 Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

Die *allgemeine* Lösung  $y$  der *homogenen* linearen Differentialgleichung  $y'' + ay' + by = 0$  ist als *Linearkombination* zweier *linear unabhängiger* Lösungen (Basisfunktionen)  $y_1$  und  $y_2$  darstellbar:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Eine solche *Fundamentalebasis*  $y_1, y_2$  lässt sich durch den Lösungsansatz  $y = e^{\lambda x}$  gewinnen (Exponentialansatz). Die *Basisfunktionen* hängen dabei noch von der Art der Lösungen der zugehörigen *charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (a, b: \text{Koeffizienten der Dgl})$$

ab, wobei *drei* Fälle zu unterscheiden sind ( $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ):

**1. Fall:  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  (reell)**

$$\text{Fundamentalebasis: } y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$$

**2. Fall:  $\lambda_1 = \lambda_2 = c$  (reell)**

$$\text{Fundamentalebasis: } y_1 = e^{cx}, \quad y_2 = x \cdot e^{cx}$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{cx}$$

**3. Fall:  $\lambda_{1/2} = \alpha \pm j\omega$  (konjugiert komplex)**

$$\text{Fundamentalebasis: } y_1 = e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega x), \quad y_2 = e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega x)$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } y = e^{\alpha x} [C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)]$$

■ **Beispiel**

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

Charakteristische Gleichung mit Lösungen:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -1 \pm 3j \quad (3. \text{ Fall: } \alpha = -1, \omega = 3)$$

$$\text{Fundamentalebasis: } y_1 = e^{-x} \cdot \sin(3x), \quad y_2 = e^{-x} \cdot \cos(3x)$$

$$\text{Lösung: } y = e^{-x} [C_1 \cdot \sin(3x) + C_2 \cdot \cos(3x)] \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

■

### 3.2.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung

Eine *inhomogene* lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ  $y'' + ay' + by = g(x)$  wird schrittweise wie folgt gelöst:

1. Zunächst wird die *allgemeine* Lösung  $y_0$  der zugehörigen *homogenen* linearen Differentialgleichung  $y'' + ay' + by = 0$  bestimmt (siehe X.3.2.2).
2. Dann ermittelt man mit Hilfe eines *speziellen*, aus der nachfolgenden Tabelle entnommenen Lösungsansatzes eine *partikuläre* Lösung  $y_p$  der *inhomogenen* linearen Differentialgleichung.
3. Die *allgemeine* Lösung  $y$  der *inhomogenen* linearen Differentialgleichung ist dann die *Summe* aus  $y_0$  und  $y_p$ :

$$y = y_0 + y_p$$

**Tabelle: Lösungsansatz  $y_p$  für spezielle Störfunktionen (Störglieder)**

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
1. Polynomfunktion vom Grade $n$ $g(x) = P_n(x)$	$y_p = \begin{cases} Q_n(x) & b \neq 0 \\ x \cdot Q_n(x) & \text{für } a \neq 0, \quad b = 0 \\ x^2 \cdot Q_n(x) & a = b = 0 \end{cases}$ <p><math>Q_n(x)</math>: Polynom vom Grade <math>n</math>  Parameter: Koeffizienten des Polynoms <math>Q_n(x)</math></p>
2. Exponentialfunktion $g(x) = e^{cx}$	(1) $c$ ist <i>keine</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot e^{cx}$ Parameter: $A$
	(2) $c$ ist eine <i>einfache</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot x \cdot e^{cx}$ Parameter: $A$
	(3) $c$ ist eine <i>doppelte</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot x^2 \cdot e^{cx}$ Parameter: $A$
3. Sinusfunktion $g(x) = \sin(\beta x)$ oder Kosinusfunktion $g(x) = \cos(\beta x)$ oder eine <i>Linearkombination</i> aus beiden Funktionen	(1) $j\beta$ ist <i>keine</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\beta x + \varphi)$ Parameter: $A, B$ bzw. $C, \varphi$
	(2) $j\beta$ ist eine <i>Lösung</i> der charakteristischen Gleichung: $y_p = x[A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)]$ oder $y_p = C \cdot x \cdot \sin(\beta x + \varphi)$ Parameter: $A, B$ bzw. $C, \varphi$
4. $g(x) = P_n(x) \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$ oder $g(x) = P_n(x) \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$ ( $P_n(x)$ ist dabei eine Polynomfunktion vom Grade $n$ )	(1) $c + j\beta$ ist <i>keine</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = e^{cx} [Q_n(x) \cdot \sin(\beta x) + R_n(x) \cdot \cos(\beta x)]$ $Q_n(x), R_n(x)$ : Polynome vom Grade $n$ Parameter: Koeffizienten der beiden Polynome
	(2) $c + j\beta$ ist eine <i>Lösung</i> der charakteristischen Gleichung: $y_p = x \cdot e^{cx} [Q_n(x) \cdot \sin(\beta x) + R_n(x) \cdot \cos(\beta x)]$ $Q_n(x), R_n(x)$ : Polynome vom Grade $n$ Parameter: Koeffizienten der beiden Polynome

*Anmerkungen zur Tabelle*

- (1) Der jeweilige Lösungsansatz gilt auch dann, wenn die Störfunktion zusätzlich noch einen *konstanten Faktor* enthält.
- (2) Die im jeweiligen Lösungsansatz enthaltenen *Parameter* sind so zu bestimmen, dass die Funktion die vorgegebene Differentialgleichung *löst*.
- (3) Ist die Störfunktion  $g(x)$  eine *Summe* aus *mehreren* Störgliedern, so erhält man den Lösungsansatz für  $y_p$  als *Summe* der Lösungsansätze für die einzelnen Störglieder.
- (4) Ist  $g(x)$  ein *Produkt* aus mehreren „Störfaktoren“, so erhält man in vielen (aber nicht allen) Fällen einen Lösungsansatz für  $y_p$ , indem man die Lösungsansätze der „Störfaktoren“ miteinander *multipliziert*.
- (5) Bei *periodischen* Störfunktionen vom Typ  $g(x) = \sin(\beta x)$  oder  $g(x) = \cos(\beta x)$  verwendet man häufig auch *komplexe* Lösungsansätze der allgemeinen Form

$$y_p(x) = C \cdot e^{i(\beta x + \varphi)} \quad (C, \varphi: \text{Parameter})$$

Die gesuchte (reelle) Lösung ist dann der Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Lösung.

■ **Beispiel**

$$y'' - 2y' - 8y = 6 \cdot e^{4x}$$

$$1. \text{ Homogene Differentialgleichung } y'' - 2y' - 8y = 0$$

$$\text{Charakteristische Gleichung: } \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -2$$

$$\text{Lösung: } y_0 = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot e^{-2x}$$

$$2. \text{ Inhomogene Differentialgleichung } y'' - 2y' - 8y = 6 \cdot e^{4x}$$

$$\text{Lösungsansatz für } y_p: y_p = Ax \cdot e^{4x}$$

( $c = 4$  ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung!)

Bestimmung der Konstanten  $A$ :

$$y_p = Ax \cdot e^{4x}, \quad y'_p = (A + 4Ax) \cdot e^{4x}, \quad y''_p = (8A + 16Ax) \cdot e^{4x}$$

$$(8A + 16Ax) \cdot e^{4x} - 2(A + 4Ax) \cdot e^{4x} - 8Ax \cdot e^{4x} = 6 \cdot e^{4x} \mid : e^{4x}$$

$$8A + 16Ax - 2(A + 4Ax) - 8Ax = 6$$

$$8A + 16Ax - 2A - 8Ax - 8Ax = 6$$

$$6A = 6 \Rightarrow A = 1$$

$$\text{Partikuläre Lösung: } y_p = x \cdot e^{4x}$$

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{4x} = (C_1 + x) \cdot e^{4x} + C_2 \cdot e^{-2x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

■

### 3.3 Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung

#### Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung

Die Lösungskurve  $y(x)$  der Differentialgleichung  $y'' = f(x; y; y')$  für die Anfangswerte  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0$  lässt sich an den Stellen  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_0 + 2h$ ,  $x_3 = x_0 + 3h \dots$  näherungsweise wie folgt lösen ( $h$ : gewählte Schrittweite):

$\left. \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array} \right\} \text{ (vorgegebene Anfangswerte)}$	
$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $y'(x_1) \approx y'_1 = y'_0 + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$ $k_1 = h \cdot y'_0 \qquad m_1 = h \cdot f(x_0; y_0; y'_0)$ $k_2 = h \left( y'_0 + \frac{m_1}{2} \right) \qquad m_2 = h \cdot f \left( x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1}{2}; y'_0 + \frac{m_1}{2} \right)$ $k_3 = h \left( y'_0 + \frac{m_2}{2} \right) \qquad m_3 = h \cdot f \left( x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2}{2}; y'_0 + \frac{m_2}{2} \right)$ $k_4 = h (y'_0 + m_3) \qquad m_4 = h \cdot f(x_0 + h; y_0 + k_3; y'_0 + m_3)$	
$y(x_2) \approx y_2 = y_1 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $y'(x_2) \approx y'_2 = y'_1 + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$ $k_1 = h \cdot y'_1 \qquad m_1 = h \cdot f(x_1; y_1; y'_1)$ $k_2 = h \left( y'_1 + \frac{m_1}{2} \right) \qquad m_2 = h \cdot f \left( x_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{k_1}{2}; y'_1 + \frac{m_1}{2} \right)$ $k_3 = h \left( y'_1 + \frac{m_2}{2} \right) \qquad m_3 = h \cdot f \left( x_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{k_2}{2}; y'_1 + \frac{m_2}{2} \right)$ $k_4 = h (y'_1 + m_3) \qquad m_4 = h \cdot f(x_1 + h; y_1 + k_3; y'_1 + m_3)$	
$\vdots$	



**Rechenschema**

Abkürzungen:  $K = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ ,  $M = \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$

$i$	$x$	$y$	$y'$	$k = h \cdot y'$	$m = h \cdot f(x; y; y')$
0	$x_0$	$y_0$	$y'_0$	$k_1$	$m_1$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1}{2}$	$y'_0 + \frac{m_1}{2}$	$k_2$	$m_2$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2}{2}$	$y'_0 + \frac{m_2}{2}$	$k_3$	$m_3$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	$y'_0 + m_3$	$k_4$	$m_4$
				$K = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $M = \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$	
1	$x_1 = x_0 + h$ $\vdots$	$y_1 = y_0 + K$	$y'_1 = y'_0 + M$	.....	

*Grau unterlegt:* Näherungswerte für  $y(x_1)$  und  $y'(x_1)$

Beispiel

$y'' = -2y' + 3y$       Anfangswerte:  $y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$

Wir berechnen die Näherungslösung dieser Differentialgleichung im Intervall  $0 \leq x \leq 0,2$  für die Schrittweite  $h = 0,1$  und vergleichen sie mit der exakten Lösung  $y = e^x - e^{-3x}, y' = e^x + 3 \cdot e^{-3x}$ ;

$i$	$x$	$y$	$y'$	$k = h \cdot y' = 0,1y'$	$m = h \cdot f(x; y, y') = 0,1(3y - 2y')$	$y_{\text{exakt}}$	$y'_{\text{exakt}}$
0	0,00	0,000 000	4,000 000	0,400 000	- 0,800 000	0,000 000	4,000 000
	0,05	0,200 000	3,600 000	0,360 000	- 0,660 000		
	0,05	0,180 000	3,670 000	0,367 000	- 0,680 000		
	0,10	0,367 000	3,320 000	0,332 000	- 0,553 900		
$K = 0,364\,333$ $M = -0,672\,317$							
1	0,10	0,364 333	3,327 683	0,332 768	- 0,556 237	0,364 353	3,327 626
	0,15	0,530 717	3,049 565	0,304 956	- 0,450 698		
	0,15	0,516 811	3,102 334	0,310 233	- 0,465 424		
	0,20	0,674 566	2,862 259	0,286 226	- 0,370 082		
$K = 0,308\,229$ $M = -0,459\,761$							
2	0,20	0,672 562	2,867 922			0,672 591	2,867 838

Näherungslösung  
im Vergleich zur exakten Lösung:

$x$	$y$	$y_{\text{exakt}}$	$y'$	$y'_{\text{exakt}}$
0,0	0,000 000	0,000 000	4,000 000	4,000 000
0,1	0,364 333	0,364 353	3,327 683	3,327 626
0,2	0,672 562	0,672 591	2,867 922	2,867 838

■

## 4 Anwendungen

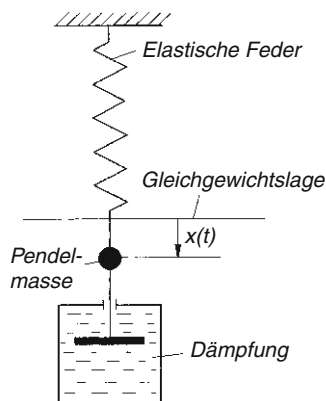
### 4.1 Mechanische Schwingungen

#### 4.1.1 Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik

Das Federpendel (Feder-Masse-Schwinger) dient als Modell für ein schwingungsfähiges mechanisches System. Bei viskoser Dämpfung gilt dann:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(t)$$

- $m$ : Masse  
 $b$ : Reibungsfaktor oder Dämpferkonstante  
 $c$ : Federkonstante  
 $F(t)$ : Von außen auf das System einwirkende (zeitabhängige) Kraft



#### 4.1.2 Freie ungedämpfte Schwingung

##### Differentialgleichung der freien ungedämpften Schwingung

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

- $m$ : Masse  
 $c$ : Federkonstante  
 $\omega_0$ : Eigen- oder Kennkreisfrequenz des Systems  $\left( \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \right)$

**Allgemeine Lösung** (Bild: siehe Seite 288 oben)

$$x(t) = C \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (C > 0; 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

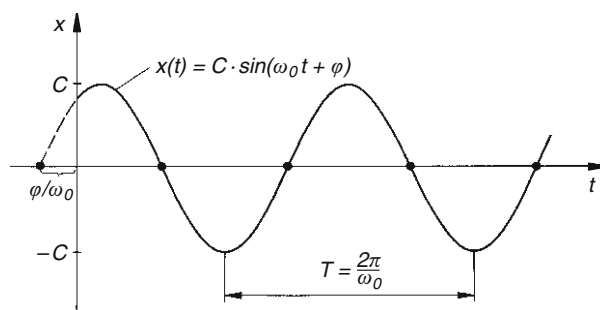
oder

$$x(t) = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Die Integrationskonstanten werden meist aus den *Anfangswerten* bestimmt:

$$x(0) = x_0: \quad \text{Anfangslage}$$

$$\dot{x}(0) = v(0) = v_0: \quad \text{Anfangsgeschwindigkeit}$$



### 4.1.3 Freie gedämpfte Schwingung

#### Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingung (bei viskoser Dämpfung)

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \left( \delta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \right)$$

$m$ : Masse

$b$ : Reibungsfaktor oder Dämpferkonstante

$c$ : Federkonstante

$\delta$ : Dämpfungsfaktor oder Abklingkonstante

$\omega_0$ : Eigen- oder Kennkreisfrequenz des *ungedämpften* Systems

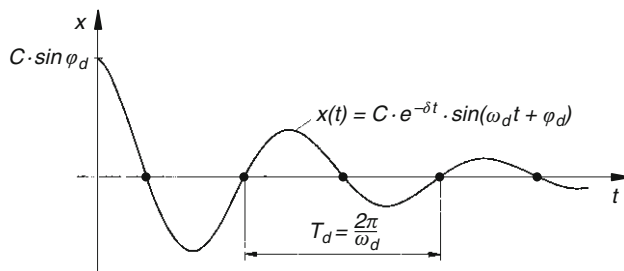
#### 4.1.3.1 Schwache Dämpfung (Schwingsungsfall)

Für  $\delta < \omega_0$  erhält man eine *gedämpfte* Schwingung mit der Eigen- oder Kennkreisfrequenz  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ :

$$x(t) = C \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_d) \quad (C > 0; 0 \leq \varphi_d < 2\pi)$$

oder

$$x(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cdot \sin(\omega_d t) + C_2 \cdot \cos(\omega_d t)] \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$



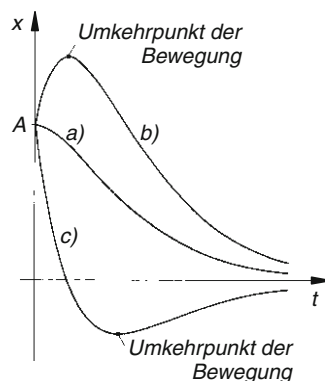
### 4.1.3.2 Aperiodischer Grenzfall

Für  $\delta = \omega_0$  tritt der *aperiodische Grenzfall* ein. Das System ist zu *keiner* echten Schwingung mehr fähig und bewegt sich *aperiodisch*, d. h. *asymptotisch* auf die Gleichgewichtslage zu:

$$x(t) = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-\delta t} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Das nebenstehende Bild zeigt die Abhängigkeit der Lösung von den physikalischen Anfangsbedingungen:

- a)  $x(0) = A > 0, \quad v(0) = \dot{x}(0) = 0$
- b)  $x(0) = A > 0, \quad v(0) = \dot{x}(0) = v_0 > 0$
- c)  $x(0) = A > 0, \quad v(0) = \dot{x}(0) = v_0 < -\delta A$



### 4.1.3.3 Aperiodisches Verhalten bei starker Dämpfung (Kriechfall)

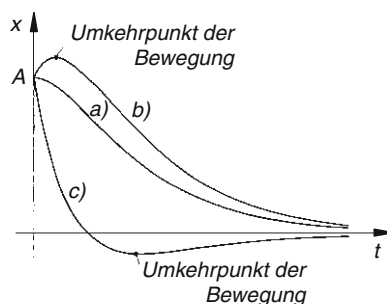
Für  $\delta > \omega_0$  wird die Dämpfung so stark, dass das System zu *keiner* echten Schwingung mehr fähig ist. Es bewegt sich *asymptotisch* auf die Gleichgewichtslage zu:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-k_1 t} + C_2 \cdot e^{-k_2 t} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$\lambda_1 = -k_1$  und  $\lambda_2 = -k_2$  sind dabei die Lösungen der *charakteristischen Gleichung*  $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$  ( $k_1, k_2 > 0$ ).

Das nebenstehende Bild zeigt den zeitlichen Verlauf der Kriechbewegung in Abhängigkeit von den physikalischen Anfangsbedingungen:

- a)  $x(0) = A > 0, \quad v(0) = \dot{x}(0) = 0$
- b)  $x(0) = A > 0, \quad v(0) = \dot{x}(0) = v_0 > 0$
- c)  $x(0) = A > 0, \quad v(0) = \dot{x}(0) = v_0 < -k_2 A$



#### 4.1.4 Erzwungene Schwingung

##### 4.1.4.1 Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung

Das System wird durch die *periodische* Kraft  $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega t)$  zu Schwingungen erregt. Bei viskoser Dämpfung gilt dann:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = K_0 \cdot \sin(\omega t)$$

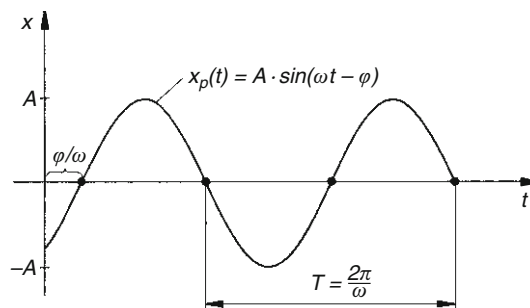
$$\delta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad K_0 = \frac{F_0}{m}$$

$m$ :	Masse	$F_0$ :	Amplitude der Erregerkraft
$b$ :	Reibungsfaktor oder Dämpferkonstante	$\omega$ :	Kreisfrequenz des Erregersystems
$c$ :	Federkonstante	$\delta$ :	Dämpfungsfaktor oder Abklingkonstante
		$\omega_0$ :	Eigenkreisfrequenz des <i>ungedämpften</i> Systems

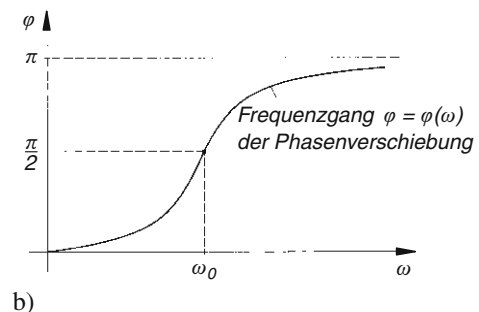
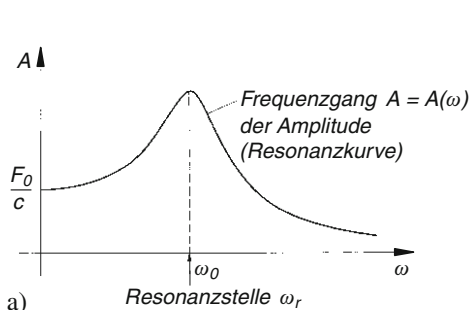
##### 4.1.4.2 Stationäre Lösung

Nach einer gewissen *Einschwingphase* schwingt das System *harmonisch* mit der Kreisfrequenz  $\omega$  des Erregers:

$$x(t) \approx x_p(t) = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$



Schwingungsamplitude  $A$  und Phasenverschiebung  $\varphi$  (gegenüber dem Erreger-System) sind dabei *frequenzabhängige* Größen (sog. *Frequenzgang*, vgl. hierzu Bild a) und b)).



Ihre Berechnung erfolgt nach den folgenden Formeln:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \quad (\text{Bild a), Seite 290 unten})$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) & \omega < \omega_0 \\ \pi/2 & \text{für } \omega = \omega_0 \\ \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) + \pi & \omega > \omega_0 \end{cases} \quad (\text{Bild b), Seite 290 unten})$$

### Resonanzfall

Das System schwingt bei der *Resonanzkreisfrequenz*

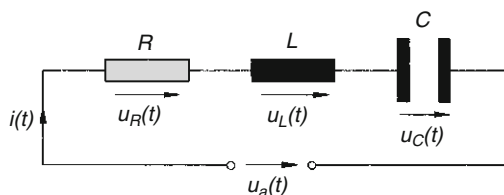
$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

mit *größtmöglicher* Amplitude (*Resonanzfall*, siehe Bild a) auf Seite 290 unten):

## 4.2 Elektrische Schwingungen in einem Reihenschwingkreis

Die Differentialgleichung einer *elektrischen* Schwingung in einem *Reihenschwingkreis* lautet wie folgt:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\delta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \cdot \frac{du_a(t)}{dt} \quad \left( \delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)$$



$R$ : Ohmscher Widerstand

$\delta$ : Dämpfungsfaktor (Abklingkonstante)

$L$ : Induktivität

$\omega_0$ : Eigen- oder Kennkreisfrequenz

$C$ : Kapazität

$i(t)$ : Stromstärke

$u_a(t)$ : Von außen angelegte Spannung (Erregerspannung)

$u_R(t)$ ,  $u_L(t)$ ,  $u_C(t)$ : Spannungsabfall an  $R$ ,  $L$  bzw.  $C$

Der elektromagnetische Reihenschwingkreis ist das *elektrische Analogon* des mechanischen Schwingkreises (siehe X.4.1). In beiden Fällen wird die Schwingung durch eine *lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* vom allgemeinen Typ

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = f(t)$$

beschrieben, wobei folgende Zuordnung gilt:

Schwingkreis	$y(t)$	$\delta$	$\omega_0$	Störglied $f(t)$
Mechanischer Schwingkreis	Auslenkung $x = x(t)$	$\frac{b}{2m}$	$\sqrt{\frac{c}{m}}$	$\frac{F(t)}{m}$
Elektrischer Reihenschwingkreis	Stromstärke $i = i(t)$	$\frac{R}{2L}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{L} \cdot \frac{du_a(t)}{dt}$

Alle Aussagen über den mechanischen Schwingkreis gelten daher auch *sinngemäß* für den elektromagnetischen Reihenschwingkreis.

## 5 Lineare Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

### 5.1 Definition einer linearen Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2} \cdot y^{(n-2)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 y = g(x)$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ : Reelle Koeffizienten

Fehlt das Störglied  $g(x)$ , so heißt die Differentialgleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

### 5.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung

#### 5.2.1 Wronski-Determinante

$n$  Lösungen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  der homogenen linearen Differentialgleichung heißen *Basisfunktionen* oder *Basislösungen*, wenn die aus ihnen gebildete sog. *Wronski-Determinante*

$$W(y_1; y_2; \dots; y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

von Null *verschieden* ist. Die Basislösungen bilden eine sog. *Fundamentalebasis* der Differentialgleichung, sie werden auch als *linear unabhängige* Lösungen bezeichnet.



### 5.2.2 Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung ist als *Linearkombination* von  $n$  *linear unabhängigen* Lösungen (Basisfunktionen)  $y_1, y_2, \dots, y_n$  wie folgt darstellbar:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (C_i \in \mathbb{R}; i = 1, 2, \dots, n)$$

Eine solche Fundamentalbasis  $y_1, y_2, \dots, y_n$  lässt sich durch den Lösungsansatz  $y = e^{\lambda x}$  gewinnen (*Exponentialansatz*). Die Basisfunktionen hängen dabei noch von der Art der Lösungen der zugehörigen *charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

ab, wobei die folgenden *drei* Fälle zu unterscheiden sind:

#### 1. Fall: Es treten nur *einfache* reelle Lösungen auf

Jede *einfache* reelle Lösung  $\lambda_i$  liefert den (additiven) Beitrag  $C_i \cdot e^{\lambda_i x}$  zur Gesamtlösung ( $C_i \in \mathbb{R}; i = 1, 2, \dots, n$ ).

#### 2. Fall: Es treten auch *mehrfache* reelle Lösungen auf

Eine  $r$ -fache reelle Lösung  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = \alpha$  liefert den Beitrag  $C(x) \cdot e^{\alpha x}$ , wobei  $C(x)$  eine Polynomfunktion vom Grade  $r - 1$  ist.

#### 3. Fall: Es treten *konjugiert komplexe* Lösungen auf

Eine *einfache* konjugiert komplexe Lösung  $\lambda_{1/2} = \alpha \pm j\omega$  liefert den Beitrag

$$e^{\alpha x} [C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)] \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Tritt das konjugiert komplexe Paar jedoch  $r$ -fach auf, so müssen die beiden Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  durch *Polynome* vom Grade  $r - 1$  ersetzt werden.

#### Gesamtlösung (allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung)

Die *allgemeine* Lösung der homogenen Differentialgleichung ist dann die *Summe* der in den Fällen 1 bis 3 beschriebenen Einzelbeiträge.

#### ■ Beispiel

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0 \quad (\text{Differentialgleichung 4. Ordnung})$$

*Charakteristische Gleichung mit Lösungen:*

$$\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1 \quad (1. \text{ Fall}), \quad \lambda_{3/4} = 0 \pm 2j = \pm 2j \quad (3. \text{ Fall})$$

Sie liefern folgende Beiträge zur Gesamtlösung:

$$C_1 \cdot e^x, \quad C_2 \cdot e^{-x} \quad \text{und} \quad C_3 \cdot \sin(2x) + C_4 \cdot \cos(2x)$$

*Allgemeine Lösung:*

$$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + C_3 \cdot \sin(2x) + C_4 \cdot \cos(2x) \quad (C_1, \dots, C_4 \in \mathbb{R})$$

■

### 5.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung

Wie bei den inhomogenen linearen Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung gilt auch hier für die gesuchte allgemeine Lösung:

$$y = y_0 + y_p$$

$y_0$ : Allgemeine Lösung der zugehörigen *homogenen* linearen Differentialgleichung (siehe X.5.2)

$y_p$ : Irgendeine *partikuläre* Lösung der *inhomogenen* linearen Differentialgleichung

Einen Lösungsansatz für  $y_p$ , der im Wesentlichen vom Störglied  $g(x)$  der Differentialgleichung abhängt, entnimmt man der folgenden Tabelle (Fallunterscheidungen beachten).

**Tabelle: Lösungsansatz  $y_p$  für spezielle Störfunktionen (Störglieder)**

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
1. Polynomfunktion vom Grade $n$ $g(x) = P_n(x)$	$y_p = \begin{cases} Q_n(x) & a_0 \neq 0 \\ x^k \cdot Q_n(x) & \text{für } a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0 \end{cases}$ <p><math>Q_n(x)</math>: Polynom vom Grade <math>n</math>  <i>Parameter</i>: Koeffizienten des Polynoms <math>Q_n(x)</math></p>
2. Exponentialfunktion $g(x) = e^{cx}$	(1) $c$ ist <i>keine</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot e^{cx}$ <i>Parameter</i> : $A$
	(2) $c$ ist eine $r$ -fache Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot x^r \cdot e^{cx}$ <i>Parameter</i> : $A$
3. Sinusfunktion $g(x) = \sin(\beta x)$ oder Kosinusfunktion $g(x) = \cos(\beta x)$ oder eine <i>Linearkombination</i> aus beiden Funktionen	(1) $j\beta$ ist <i>keine</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)$ <i>Parameter</i> : $A, B$
	(2) $j\beta$ ist eine $r$ -fache Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = x^r [A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)]$ <i>Parameter</i> : $A, B$

*Anmerkungen zur Tabelle*

- (1) Der jeweilige Lösungsansatz gilt auch dann, wenn die Störfunktion zusätzlich noch einen *konstanten Faktor* enthält.
- (2) Die im jeweiligen Lösungsansatz enthaltenen Parameter sind so zu bestimmen, dass die Funktion die vorgegebene Differentialgleichung *löst*.
- (3) Ist die Störfunktion  $g(x)$  eine *Summe* aus *mehreren* Störgliedern, so erhält man den Lösungsansatz für  $y_p$  als *Summe* der Lösungsansätze für die einzelnen Störglieder.
- (4) Ist die Störfunktion  $g(x)$  ein *Produkt* aus mehreren „Störfaktoren“, so erhält man in vielen (aber leider nicht allen) Fällen einen geeigneten Lösungsansatz für  $y_p$  in Form eines *Produktes*, dessen Faktoren die Lösungsansätze der einzelnen „Störfaktoren“ sind.
- (5) Bei *periodischen* Störgliedern wie z. B.  $\sin(\beta x)$  oder  $\cos(\beta x)$  lassen sich ähnlich wie bei Differentialgleichungen 2. Ordnung auch *komplexe* Lösungsansätze verwenden (siehe X.3.2.3).

■ **Beispiel**

$$y''' + y' = 4 \cdot e^x$$

1. *Homogene Differentialgleichung:*  $y''' + y' = 0$

$$\text{Charakteristische Gleichung: } \lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2/3} = \pm j$$

$$\text{Homogene Lösung: } y_0 = C_1 + C_2 \cdot \sin x + C_3 \cdot \cos x$$

2. *Inhomogene Differentialgleichung:*  $y''' + y' = 4 \cdot e^x$

$$\text{Lösungsansatz: } y_p = A \cdot e^x, \quad y'_p = y''_p = y'''_p = A \cdot e^x$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$A \cdot e^x + A \cdot e^x = 4 \cdot e^x \mid : e^x \Rightarrow A + A = 4 \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2$$

$$\text{Partikuläre Lösung: } y_p = 2 \cdot e^x$$

3. *Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:*

$$y = y_0 + y_p = C_1 + C_2 \cdot \sin x + C_3 \cdot \cos x + 2 \cdot e^x \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$$

■

## 6 Systeme linearer Differentialgleichungen

### 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

**6.1 Grundbegriffe**

Wir beschränken uns auf Systeme aus zwei inhomogenen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten (*gekoppelte* Differentialgleichungen):

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(x) \\ y'_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(x) \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{g}(x)$$

*Bezeichnungen*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ : Koeffizientenmatrix (reell)

$\mathbf{y}$ : Lösungsvektor (mit den beiden „Komponenten“  $y_1$  und  $y_2$ )

$\mathbf{y}'$ : Ableitung des Lösungsvektors

$\mathbf{g}(x)$ : „Störvektor“ (aus den beiden „Störgliedern“  $g_1(x)$  und  $g_2(x)$  gebildet)

*Homogenes System:*  $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$  (keine Störglieder)

*Inhomogenes System:*  $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{g}(x)$  mit  $\mathbf{g}(x) \neq \mathbf{0}$

Das Differentialgleichungssystem hat die Ordnung 2 (= Summe der Ordnungen der beiden zum System gehörenden Differentialgleichungen 1. Ordnung).

## 6.2 Integration des homogenen linearen Systems

Das *homogene* lineare System  $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$  lässt sich mit den Exponentialansätzen  $y_1 = K_1 \cdot e^{\lambda x}$  und  $y_2 = K_2 \cdot e^{\lambda x}$  lösen. Die Werte des noch unbekannten Parameters  $\lambda$  sind die *Eigenwerte* der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  und damit die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Der Lösungsvektor  $\mathbf{y}$  hängt dabei von der *Art* der Lösungen dieser quadratischen Gleichung ab. Es sind folgende *drei* Fälle zu unterscheiden:

### 1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell)

$$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}} (y_1' - a_{11} y_1)$$

### 2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ (reell)

$$y_1 = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{\alpha x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}} (y_1' - a_{11} y_1)$$

### 3. Fall: $\lambda_{1/2} = \alpha \pm j \omega$ (konjugiert komplex)

$$y_1 = e^{\alpha x} [C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)] \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}} (y_1' - a_{11} y_1)$$

■ **Beispiel**

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= 3y_1 - 2y_2 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Charakteristische Gleichung mit Lösungen:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(-2 - \lambda) + 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1 \quad (2. \text{ Fall})$$

Allgemeine Lösung des linearen Systems ( $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ):

$$y_1 = (C_1 + C_2 x) \cdot e^x$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{a_{12}} (y_1' - a_{11} y_1) = \frac{1}{-3} \left( C_2 \cdot e^x + (C_1 + C_2 x) \cdot e^x - 4(C_1 + C_2 x) \cdot e^x \right) = \\ &= -\frac{1}{3} (C_2 + C_1 + C_2 x - 4C_1 - 4C_2 x) \cdot e^x = -\frac{1}{3} (-3C_1 + C_2 - 3C_2 x) \cdot e^x = \\ &= \left( C_1 - \frac{1}{3} C_2 + C_2 x \right) \cdot e^x \end{aligned}$$

■

## 6.3 Integration des inhomogenen linearen Systems

### 6.3.1 Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung

Das *inhomogene* lineare System  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(x)$  lässt sich schrittweise wie folgt lösen:

1. Integration des zugehörigen *homogenen* Systems  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  (siehe X.6.2). Man erhält die Lösung  $y_1(0), y_2(0)$ .
2. Bestimmung einer *partikulären* Lösung  $y_{1(p)}, y_{2(p)}$  des *inhomogenen* Systems. Dies geschieht mit Hilfe der Tabelle aus Abschnitt X.2.4.4, wobei im Lösungsansatz für  $y_{1(p)}$  und  $y_{2(p)}$  jeweils *beide* Störglieder entsprechend zu berücksichtigen sind.
3. Die gesuchte *allgemeine* Lösung  $y_1, y_2$  ist dann die *Summe* der Teillösungen aus den ersten beiden Schritten:

$$y_1 = y_1(0) + y_{1(p)}, \quad y_2 = y_2(0) + y_{2(p)}$$

### 6.3.2 Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren

Das Lösungsverfahren für ein *inhomogenes* lineares System  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(x)$  lässt sich wie folgt auf die Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zurückführen:

1.  $y_1$  genügt der folgenden *inhomogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y_1'' + a y_1' + b y_1 = \tilde{g}(x)$$

Lösungsverfahren: siehe X.3.2

Dabei bedeuten:

$$a = -\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = -(a_{11} + a_{22}) \quad (\text{Spur von } \mathbf{A})$$

$$b = \det \mathbf{A} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (\text{Determinante von } \mathbf{A})$$

$$\tilde{g}(x) = g'_1(x) - \det \mathbf{B}$$

**B:** *Hilfsmatrix* (in der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  wird die 1. Spalte durch die beiden Störglieder  $g_1(x)$  und  $g_2(x)$  ersetzt)

2. Aus der 1. Komponente  $y_1$  lässt sich dann die 2. Komponente  $y_2$  folgendermaßen berechnen:

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}} (y'_1 - a_{11} y_1 - g_1(x))$$

### ■ Beispiel

$$\begin{aligned} y'_1 &= -y_1 + 3y_2 + x \\ y'_2 &= 2y_1 - 2y_2 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{g}(x)}$$

$$a = -\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = -(-1 - 2) = 3$$

$$b = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

$$\tilde{g}(x) = g'_1(x) - \det \mathbf{B} = 1 - \begin{vmatrix} x & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 + 2x \quad (g_1(x) = x, \quad g_2(x) = 0)$$

*Differentialgleichung 2. Ordnung für  $y_1$ :*  $y''_1 + 3y'_1 - 4y_1 = 1 + 2x$

*Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:*  $y''_1 + 3y'_1 - 4y_1 = 0$ :

*Charakteristische Gleichung mit Lösungen:*  $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 1$

*Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:*

$$y_{1(0)} = C_1 \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot e^x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

*Partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (Störglied:  $1 + 2x$ ):*

$$y_{1(p)} = Ax + B, \quad y'_{1(p)} = A, \quad y''_{1(p)} = 0$$

$$3A - 4(Ax + B) = 1 + 2x, \quad -4Ax + 3A - 4B = 2x + 1$$

*Koeffizientenvergleich:*

$$\left. \begin{aligned} -4A &= 2 & \Rightarrow & A = -1/2 \\ 3A - 4B &= 1 & \Rightarrow & B = -5/8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_{1(p)} = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{8}$$

*Lösung des Systems:*

$$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)} = C_1 \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot e^x - \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}$$

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}} (y'_1 - a_{11} y_1 - g_1(x)) = \frac{1}{3} \left( -3C_1 \cdot e^{-4x} + 2C_2 \cdot e^x - \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} \right)$$

■

# XI Fehler- und Ausgleichsrechnung

## 1 Gaußsche Normalverteilung

Die Fehler- und Ausgleichsrechnung beschäftigt sich mit den *zufälligen* oder *statistischen* Mess- oder Beobachtungsfehlern auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik<sup>1)</sup>. Die Messgröße  $X$  ist daher im Sinne der mathematischen Statistik eine *Zufallsvariable*. Die *Messwerte* und *Messfehler* einer Messreihe unterliegen dabei in der Regel der *Gaußschen Normalverteilung* mit der *normierten Verteilungsdichtefunktion*

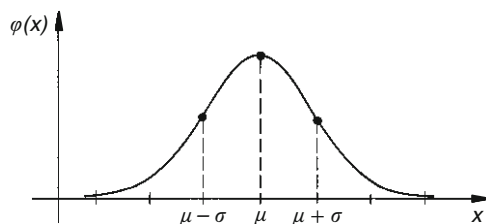
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

*Bezeichnungen*

$\mu$ : Mittelwert (Erwartungswert)

$\sigma$ : Standardabweichung

$\sigma^2$ : Varianz (Streuung)

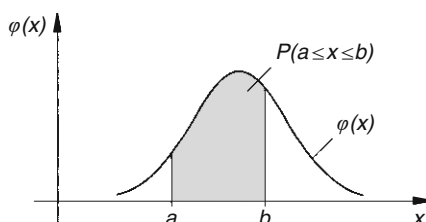


*Eigenschaften der Gaußschen Normalverteilung*

- (1) *Maximum* bei  $x_1 = \mu$   
(„wahrscheinlichster“ Messwert).
- (2) *Wendepunkte* bei  $x_{2/3} = \mu \pm \sigma$ .
- (3) Die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass ein Messwert  $x$  in das Intervall  $[a, b]$  fällt, beträgt

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \varphi(x) dx$$

(entspricht der grau unterlegten Fläche im nebenstehenden Bild). Das Integral ist in geschlossener Form nicht lösbar.



68,3 % aller Messwerte liegen im Intervall  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$

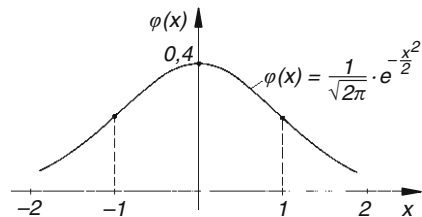
95,5 % aller Messwerte liegen im Intervall  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$

99,7 %, d. h. *fast alle* Messwerte liegen im Intervall  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

<sup>1)</sup> Nach DIN 1319 soll die Bezeichnung „Fehler“ durch „Messabweichung“ (kurz: Abweichung) ersetzt werden.

- (4) Bei einer „unendlichen“ Messreihe würde der Messwert  $x = \mu$  mit der *größten* Häufigkeit auftreten. Wären Messungen *ohne* Messfehler möglich, so würde man stets den Messwert  $x = \mu$  erhalten. Daher wird der Mittelwert  $\mu$  häufig auch als „wahrer“ Wert der Messgröße  $X$  bezeichnet. Die Standardabweichung  $\sigma$  ist ein geeignetes Maß für die *Streuung* der einzelnen Messwerte um ihren Mittelwert  $\mu$  ( $\sigma$  bestimmt im Wesentlichen die Breite der Glockenkurve).
- (5)  $\varphi(x)$  ist *normiert*:  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$  (alle Messwerte liegen im Intervall  $(-\infty, \infty)$ )
- (6) *Standardisierte Normalverteilung*  
 $(\mu = 0, \sigma = 1)$ :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



## 2 Auswertung einer Messreihe

Die *normalverteilte* Messreihe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bestehe aus  $n$  unabhängigen Messwerten *gleicher* Genauigkeit (gleiche Messmethode, gleiches Messinstrument, gleicher Beobachter).

### Mittelwert einer Messreihe

Der „*günstigste*“ Schätzwert für den „wahren“ Wert der Messgröße  $x$  ist der *arithmetische Mittelwert* (auch *arithmetisches Mittel* genannt):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

### Standardabweichung der Einzelmessung

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$v_i = x_i - \bar{x}$ : Abweichung des Messwertes  $x_i$  vom Mittelwert  $\bar{x}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )



Die Standardabweichung  $s$  ist ein *Schätzwert* für den Parameter  $\sigma$  (gleichen Namens) der normalverteilten Messgröße. Alte (aber weiterhin übliche) Bezeichnung für  $s$ : *mittlerer Fehler* der Einzelmessung ( $m_x$ ).

$$\text{Kontrolle: } \sum_{i=1}^n v_i = 0$$

### Standardabweichung des Mittelwertes

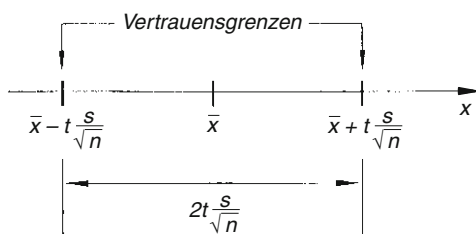
$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (n \geq 2)$$

Alte (weiterhin übliche) Bezeichnung für  $s_{\bar{x}}$ : *mittlerer Fehler* des Mittelwertes.

### Vertrauensintervall (Vertrauensbereich)

Es lässt sich ein zum arithmetischen Mittelwert  $\bar{x}$  symmetrisches Intervall angeben, in dem der unbekannte Mittel- oder Erwartungswert  $\mu$  der normalverteilten Messgröße  $X$  mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $\gamma$  (auch *Vertrauensniveau* oder *statistische Sicherheit* genannt) *vermutet* wird (sog. *Vertrauensintervall* oder *Vertrauensbereich*).

$$\text{Vertrauensgrenzen: } \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$



Der Faktor  $t$  hängt dabei noch vom gewählten Vertrauensniveau  $\gamma$  (z. B.  $\gamma = 95\%$ ) und der Anzahl  $n$  der Einzelmessungen ab und kann der nachfolgenden Tabelle auf Seite 302 entnommen werden (sie enthält die  $t$ -Werte für die in der Praxis üblichen statistischen Sicherheiten).

**Regel:** Je größer die statistische Sicherheit, umso breiter das Vertrauensintervall! In Naturwissenschaft und Technik wird meist  $\gamma = 95\%$  gewählt.

**Tabelle:** Werte für den Zahlenfaktor (Parameter)  $t$  in Abhängigkeit von der Anzahl  $n$  der Messwerte und dem gewählten Vertrauensniveau  $\gamma$

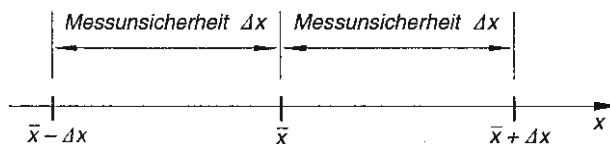
Anzahl $n$ der Messwerte	Vertrauensniveau (statistische Sicherheit)			
	$\gamma = 68,3\%$	$\gamma = 90\%$	$\gamma = 95\%$	$\gamma = 99\%$
2	1,84	6,31	12,71	63,66
3	1,32	2,92	4,30	9,93
4	1,20	2,35	3,18	5,84
5	1,15	2,13	2,78	4,60
6	1,11	2,02	2,57	4,03
7	1,09	1,94	2,45	3,71
8	1,08	1,90	2,37	3,50
9	1,07	1,86	2,31	3,36
10	1,06	1,83	2,26	3,25
15	1,04	1,77	2,14	2,98
20	1,03	1,73	2,09	2,86
30	1,02	1,70	2,05	2,76
50	1,01	1,68	2,01	2,68
100	1,00	1,66	1,98	2,63
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	1,00	1,65	1,96	2,58

### Messergebnis

$$x = \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$\bar{x}$ : arithmetischer Mittelwert

$\Delta x$ : Messunsicherheit (halbe Breite des Vertrauensbereiches)



■ **Beispiel**Widerstandsmessung ( $n = 6$  Einzelmessungen)

$i$	$\frac{R_i}{\Omega}$	$\frac{R_i - \bar{R}}{\Omega}$	$\frac{(R_i - \bar{R})^2}{\Omega^2}$
1	60,3	0,2	0,04
2	60,2	0,1	0,01
3	59,9	-0,2	0,04
4	59,9	-0,2	0,04
5	60,2	0,1	0,01
6	60,1	0,0	0,00
$\Sigma$	360,6	0	0,14

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^6 R_i}{6} = \frac{360,6 \Omega}{6} = 60,1 \Omega$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (R_i - \bar{R})^2}{6 - 1}} = \sqrt{\frac{0,14 \Omega^2}{5}} = 0,167 \Omega$$

Bei einer statistischen Sicherheit von  $\gamma = 95\%$  entnehmen wir der Tabelle der  $t$ -Faktoren den Wert  $t = 2,57$  für  $n = 6$ .

Messunsicherheit:

$$\Delta R = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2,57 \cdot \frac{0,167 \Omega}{\sqrt{6}} = 0,175 \Omega \approx 0,2 \Omega$$

Messergebnis:  $R = \bar{R} \pm \Delta R = (60,1 \pm 0,2) \Omega$ 

■

### 3 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz

*Hinweis:* Bei der Fehlerfortpflanzung werden für die Messunsicherheiten meist die *Standardabweichungen* der Mittelwerte verwendet.

#### 3.1 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen

Das Messergebnis für zwei *direkt* gemessene Größen  $x$  und  $y$  laute:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x, \quad y = \bar{y} \pm \Delta y \quad (\Delta x = s_{\bar{x}}, \Delta y = s_{\bar{y}})$$

Für die von  $x$  und  $y$  *abhängige* Größe  $z = f(x; y)$  gilt dann:

##### Mittelwert

$$\bar{z} = f(\bar{x}; \bar{y})$$

**Standardabweichung des Mittelwertes (mittlerer Fehler des Mittelwertes)**

$$\Delta z = s_{\bar{z}} = \sqrt{(f_x(\bar{x}; \bar{y}) \Delta x)^2 + (f_y(\bar{x}; \bar{y}) \Delta y)^2}$$

(Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Standardabweichung des Mittelwertes)

$$\left. \begin{array}{l} f_x(\bar{x}; \bar{y}) \\ f_y(\bar{x}; \bar{y}) \end{array} \right\} \text{Partielle Ableitungen von } z = f(x; y) \text{ an der Stelle } x = \bar{x}, y = \bar{y}$$

**Messergebnis**

$$z = \bar{z} \pm \Delta z$$

■ **Beispiel**

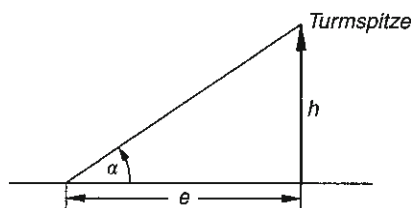
Wir berechnen die Turmhöhe  $h$  sowie den *mittleren* Fehler des Mittelwertes von  $h$  aus der Entfernung  $e$  und dem Erhebungswinkel  $\alpha$ :

$$e = (75,2 \pm 2,5 \text{ m}), \quad \alpha = (30 \pm 1)^\circ$$

$$h = h(e; \alpha) = e \cdot \tan \alpha$$

$$\bar{h} = h(\bar{e}; \bar{\alpha}) = \bar{e} \cdot \tan \bar{\alpha} =$$

$$= 75,2 \text{ m} \cdot \tan 30^\circ = 43,417 \text{ m} \approx 43,4 \text{ m}$$



Partielle Ableitungen 1. Ordnung an der Stelle  $\bar{e} = 75,2 \text{ m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ :

$$\frac{\partial h}{\partial e} = \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial e}(\bar{e}; \bar{\alpha}) = \tan 30^\circ = 0,5774$$

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = \frac{e}{\cos^2 \alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\bar{e}; \bar{\alpha}) = \frac{75,2 \text{ m}}{\cos^2 30^\circ} = 100,2667 \text{ m}$$

Mittlerer Fehler des Mittelwertes (Standardabweichung des Mittelwertes):

$$\Delta h = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial e} \Delta e\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha} \Delta \alpha\right)^2} = \sqrt{(0,5774 \cdot 2,5 \text{ m})^2 + (100,2667 \text{ m} \cdot 0,01745)^2} =$$

$$= 2,2683 \text{ m} \approx 2,3 \text{ m}$$

( $\Delta \alpha$  muss aus Dimensionsgründen im Bogenmaß angegeben werden:  $\Delta \alpha = 1^\circ \approx 0,01745 \text{ rad.}$ )

Messergebnis:  $h = (43,4 \pm 2,3) \text{ m}$

■

**Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für spezielle Funktionen ( $C \in \mathbb{R}$ )**

Funktion	Standardabweichung des Mittelwertes (mittlerer Fehler des Mittelwertes)
$z = x + y$	$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (absoluter Fehler)
$z = x - y$	
$z = Cxy$	$\left  \frac{\Delta z}{\bar{z}} \right  = \sqrt{\left  \frac{\Delta x}{\bar{x}} \right ^2 + \left  \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right ^2}$ (relativer Fehler)
$z = C \frac{x}{y}$	
$z = Cx^\alpha y^\beta$	$\left  \frac{\Delta z}{\bar{z}} \right  = \sqrt{\left  \alpha \frac{\Delta x}{\bar{x}} \right ^2 + \left  \beta \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right ^2}$ (relativer Fehler)

Entsprechende Fehlerfortpflanzungsgesetze gelten auch für Summen mit *mehr als zwei* Summanden und Potenzprodukte mit *mehr als zwei* Faktoren.

**3.2 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von  $n$  unabhängigen Variablen**

Das Messergebnis von  $n$  *direkt* gemessenen Größen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  laute:

$$x_i = \bar{x}_i \pm \Delta x_i \quad (\Delta x_i = s_{\bar{x}_i}; i = 1, 2, \dots, n)$$

Für die von  $x_1, x_2, \dots, x_n$  abhängige *indirekte Messgröße*  $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$  gilt dann:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \dots; \bar{x}_n)$$

$$\Delta y = \sqrt{(f_{x_1} \Delta x_1)^2 + (f_{x_2} \Delta x_2)^2 + \dots + (f_{x_n} \Delta x_n)^2}$$

$$\text{Messergebnis: } y = \bar{y} \pm \Delta y$$

$f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ : Partielle Ableitungen 1. Ordnung von  $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$  an der Stelle  $x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2, \dots, x_n = \bar{x}_n$

**4 Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz**

Das *lineare* Fehlerfortpflanzungsgesetz liefert eine *obere* Fehlerschranke für den absoluten Fehler einer von mehreren Messgrößen abhängigen „indirekten“ Messgröße (Fehlerabschätzung mit Hilfe des *totalen Differentials*). Diese Fehlerschranke wird als *maximaler* oder *größtmöglicher* Fehler oder *maximale Messunsicherheit* des Mittelwertes bezeichnet.

Bei zwei unabhängigen Messgrößen gilt:

$$\Delta z_{\max} = |f_x(\bar{x}; \bar{y}) \Delta x| + |f_y(\bar{x}; \bar{y}) \Delta y|$$

$f_x, f_y$ : Partielle Ableitungen 1. Ordnung von  $z = f(x; y)$  für  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$

$\Delta x, \Delta y$ : Messunsicherheiten der unabhängigen Messgrößen (Standardabweichungen der beiden Mittelwerte)

Das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz wird häufig für *Überschlagsrechnungen* verwendet, insbesondere auch dann, wenn die Messunsicherheiten der unabhängigen Größen *unbekannt* sind und man daher auf *Schätzwerte* angewiesen ist.

### Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz für spezielle Funktionen ( $C \in \mathbb{R}$ )

Funktion	Maximale Messunsicherheit des Mittelwertes
$z = x + y$	$\Delta z_{\max} = \Delta x + \Delta y$ (absoluter Fehler)
$z = x - y$	
$z = Cxy$	$\left  \frac{\Delta z_{\max}}{\bar{z}} \right  = \left  \frac{\Delta x}{\bar{x}} \right  + \left  \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right $ (relativer Fehler)
$z = C \frac{x}{y}$	
$z = Cx^\alpha y^\beta$	$\left  \frac{\Delta z_{\max}}{\bar{z}} \right  = \left  \alpha \frac{\Delta x}{\bar{x}} \right  + \left  \beta \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right $ (relativer Fehler)

Entsprechende „lineare Fehlerfortpflanzungsgesetze“ gelten auch für Summen mit *mehr als zwei* Summanden und Potenzprodukte mit *mehr als zwei* Faktoren.

Bei  $n$  unabhängigen Messgrößen gilt analog:

$$\Delta y_{\max} = |f_{x_1} \Delta x_1| + |f_{x_2} \Delta x_2| + \dots + |f_{x_n} \Delta x_n|$$

In die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion  $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$  sind die *Mittelwerte* der unabhängigen Messgrößen einzusetzen,  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  sind die *Messunsicherheiten* (Standardabweichungen der Mittelwerte) oder deren *Schätzwerte*.

#### ■ Beispiel

Maximaler Fehler der Turmhöhe (Beispiel aus Abschnitt XI.3.1):

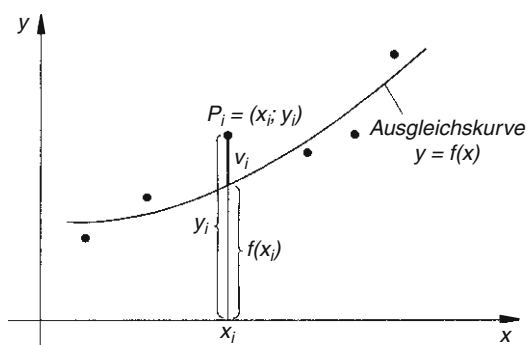
$$\begin{aligned} \Delta h_{\max} &= \left| \frac{\partial h}{\partial e} \Delta e \right| + \left| \frac{\partial h}{\partial \alpha} \Delta \alpha \right| = |0,5774 \cdot 2,5 \text{ m}| + |100,2667 \text{ m} \cdot 0,01745| = \\ &= 1,4435 \text{ m} + 1,7497 \text{ m} = 3,1932 \text{ m} \approx 3,2 \text{ m} \end{aligned}$$

■

## 5 Ausgleichskurven

### 5.1 Ausgleichung nach dem Gaußschen Prinzip der kleinsten Quadrate

Unter einer *Ausgleichskurve* versteht man eine Kurve, die sich  $n$  vorgegebenen Messpunkten  $P_i = (x_i, y_i)$  mit  $i = 1, 2, \dots, n$  „optimal“ anpasst:



Man bestimmt sie nach *Gauß* wie folgt:

1. Zunächst ist anhand des konkreten Falles eine Entscheidung über den *speziellen* Funktionstyp, der der Ausgleichsrechnung zugrunde gelegt werden soll, zu treffen (z. B. Gerade, Parabel, Potenz- oder Exponentialfunktion). Der Lösungsansatz  $y = f(x)$  enthält dabei noch gewisse *Parameter*  $a, b, c, \dots$ .
2. Dann wird für jeden Messpunkt  $P_i = (x_i, y_i)$  die *vertikale Abweichung*  $v_i = y_i - f(x_i)$  von der Ausgleichskurve  $y = f(x)$  bestimmt und daraus die *Summe der Abweichungsquadrate*:

$$S(a; b; c; \dots) = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2$$

Sie hängt noch von den Kurvenparametern  $a, b, c, \dots$  ab.

3. Nach *Gauß* passt sich diejenige Kurve den vorgegebenen Messpunkten „am besten“ an, für die diese Summe *minimal* wird (*Methode der kleinsten Quadrate*). Die Parameter  $a, b, c, \dots$  lassen sich dann aus den sog. *Normalgleichungen* (Extremalbedingungen)

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \dots$$

berechnen.

**Einfache Lösungsansätze für Ausgleichskurven**

Lösungsansatz	Parameter
Lineare Funktion (Gerade): $y = ax + b$	$a, b$
Quadratische Funktion (Parabel): $y = ax^2 + bx + c$	$a, b, c$
Potenzfunktion: $y = a \cdot x^b$	$a, b$
Exponentialfunktion: $y = a \cdot e^{bx}$	$a, b$

Exponential- und Potenzfunktion lassen sich im *halb-* bzw. *doppellogarithmischen* Maßstab durch *lineare* Funktionen, d. h. durch *Geraden* darstellen:

*Exponentialfunktion*  $y = a \cdot e^{bx}$ :

$$\ln y = \ln(a \cdot e^{bx}) = \ln a + \ln e^{bx} = \ln a + bx \cdot \ln e = \ln a + bx$$

Mit  $z = \ln y$  und  $c = \ln a$  erhalten wir die Gerade  $z = bx + c$ .

*Potenzfunktion*  $y = a \cdot x^b$ :

$$\ln y = \ln(a \cdot x^b) = \ln a + \ln x^b = \ln a + b \cdot \ln x$$

Mit  $u = \ln x$ ,  $v = \ln y$  und  $c = \ln a$  erhalten wir die Gerade  $v = bu + c$ .

*Hinweis:* Für die linearisierte Exponential- bzw. Potenzfunktion ist die Summe der Abweichungsquadrate nur für die *transformierten* Wertepaare minimal, nicht aber für die Wertepaare selbst. Die mit dem vereinfachten Verfahren berechneten Werte sind daher nur (für die Praxis jedoch meist völlig ausreichende) *Näherungen* der Kurvenparameter.

**5.2 Ausgleichs- oder Regressionsgerade**

Diejenige *Gerade*  $y = ax + b$ , die sich  $n$  vorgegebenen Messpunkten  $P_i = (x_i; y_i)$  „optimal“ anpasst, heißt *Ausgleichs-* oder *Regressionsgerade* ( $i = 1, 2, \dots, n; n \geq 3$ ). Steigung  $a$  (auch Regressionskoeffizient genannt) und Achsenabschnitt  $b$  werden wie folgt berechnet:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\Delta}$$

$$b = \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{\Delta}$$

$$\Delta = n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$



Die Ausgleichsgerade kann auch in der *symmetrischen* Form

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$$

dargestellt werden. Sie verläuft durch den sog. „*Schwerpunkt*“  $S = (\bar{x}; \bar{y})$  der aus den  $n$  Messpunkten gebildeten *Punktwolke* ( $\bar{x}, \bar{y}$ : Mittelwerte der  $x$ - bzw.  $y$ -Koordinaten der  $n$  Messpunkte;  $a$ : Regressionskoeffizient).

### Korrelationskoeffizient

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2\right)}}, \quad -1 \leq r \leq 1$$

Die  $n$  Messpunkte liegen immer dann nahezu auf einer *Geraden*, wenn  $r$  sich nur wenig von  $-1$  oder  $+1$  unterscheidet. Im Falle  $|r| = 1$  liegen die Messpunkte *exakt* auf einer Geraden.

#### ■ Beispiel

Wir zeigen zunächst, dass die 5 Messpunkte  $P_1 = (0; 0,6)$ ,  $P_2 = (2; 3,9)$ ,  $P_3 = (3; 5,8)$ ,  $P_4 = (5; 9,7)$  und  $P_5 = (8; 14,6)$  *nahezu* auf einer *Geraden* liegen und bestimmen dann die *Ausgleichsgerade*.

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$
1	0	0,6	0	0,36	0
2	2	3,9	4	15,21	7,8
3	3	5,8	9	33,64	17,4
4	5	9,7	25	94,09	48,5
5	8	14,6	64	213,16	116,8
$\Sigma$	18	34,6	102	356,46	190,5

*Korrelationskoeffizient* (die folgenden Summen laufen jeweils von  $i = 1$  bis  $i = 5$ ):

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{18}{5} = 3,6, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{34,6}{5} = 6,92$$

$$r = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum x_i^2 - n \bar{x}^2\right) \left(\sum y_i^2 - n \bar{y}^2\right)}} = \frac{190,5 - 5 \cdot 3,6 \cdot 6,92}{\sqrt{(102 - 5 \cdot 3,6^2) (356,46 - 5 \cdot 6,92^2)}} = 0,9994$$

$$r = 0,9994 \approx 1 \Rightarrow \text{Die Punkte liegen nahezu auf einer Geraden.}$$

**Bestimmung der Ausgleichsgeraden  $y = ax + b$**

$$\Delta = 5 \cdot \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2 = 5 \cdot 102 - 18^2 = 186$$

$$a = \frac{5 \cdot \sum x_i y_i - \left( \sum x_i \right) \left( \sum y_i \right)}{\Delta} = \frac{5 \cdot 190,5 - 18 \cdot 34,6}{186} = 1,773$$

$$b = \frac{\left( \sum x_i^2 \right) \left( \sum y_i \right) - \left( \sum x_i \right) \left( \sum x_i y_i \right)}{\Delta} = \frac{102 \cdot 34,6 - 18 \cdot 190,5}{186} = 0,539$$

*Ausgleichsgerade:*  $y = 1,773x + 0,539$

■

### 5.3 Ausgleichs- oder Regressionsparabel

Diejenige Parabel  $y = ax^2 + bx + c$ , die sich den  $n$  Messpunkten  $P_i = (x_i; y_i)$  „optimal“ anpasst, heißt *Ausgleichs- oder Regressionsparabel* ( $i = 1, 2, \dots, n; n \geq 4$ ). Die Kurvenparameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  lassen sich aus den folgenden *Normalgleichungen* eindeutig bestimmen (lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten  $a$ ,  $b$  und  $c$ ):

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n x_i^4 \right) \cdot a + \left( \sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \cdot b + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot c &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \cdot a + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot b + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot c &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b + nc &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

## XII Fourier-Transformationen

### 1 Grundbegriffe

#### Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation ist eine *Integraltransformation*. Sie ordnet einer nichtperiodischen (in den Anwendungen meist *zeitabhängigen*) Funktion  $f(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  wie folgt eine Funktion  $F(\omega)$  der reellen Variablen  $\omega$  zu<sup>1)</sup>:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Das uneigentliche Integral der rechten Seite heißt *Fourier-Integral*. Es existiert, wenn  $f(t)$  absolut integrierbar ist, d. h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

gilt. Geometrische Deutung: Die Fläche unter der Kurve  $y = |f(t)|$  besitzt einen endlichen Wert.

#### Bezeichnungen

$f(t)$ : Originalfunktion (Zeitfunktion)

$F(\omega)$ : Bildfunktion (*Fourier-Transformierte* von  $f(t)$ , Spektraldichte)

#### Weitere symbolische Schreibweisen

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad (\text{Fourier-Transformierte von } f(t))$$

$\mathcal{F}$ : Fourier-Transformationsoperator

$$f(t) \circ \bullet F(\omega) \quad (\text{Korrespondenz})$$

Originalfunktion  $f(t)$  und Bildfunktion  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  bilden ein zusammengehöriges *Funktionenpaar*.

<sup>1)</sup> Die Variable  $\omega$  ist bei zeitabhängigen Funktionen die Kreisfrequenz.

## Anmerkungen

- (1) Wegen der im Fourier-Integral enthaltenen (komplexen) Exponentialfunktion spricht man häufig auch von der *exponentiellen Fourier-Transformation*.
- (2) Die Fourier-Transformierte  $F(\omega)$  ist eine i. Allg. komplexwertige und stetige Funktion der reellen Variablen  $\omega$ , die im Unendlichen verschwindet:

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} F(\omega) = 0$$

- (3) Eine Funktion  $f(t)$  heißt *Fourier-transformierbar*, wenn das Fourier-Integral  $F(\omega)$  existiert. Die Menge aller (transformierbaren) Originalfunktionen wird als *Originalbereich*, die Menge der zugeordneten Bildfunktionen als *Bildbereich* bezeichnet.
- (4) Für die Fourier-Transformierte einer *reellen* Funktion  $f(t)$  gilt:

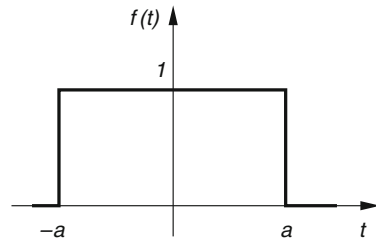
$$F(-\omega) = [F(\omega)]^* = F^*(\omega)$$

(der „Stern“ kennzeichnet den Übergang zum *konjugiert komplexen* Funktionswert)

## ■ Beispiel

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq a \\ 0 & \text{für } |t| > a \end{cases}$$

Die Fourier-Transformierte dieses *Rechteckimpulses* existiert (Fläche unter der Kurve =  $2a$ ):

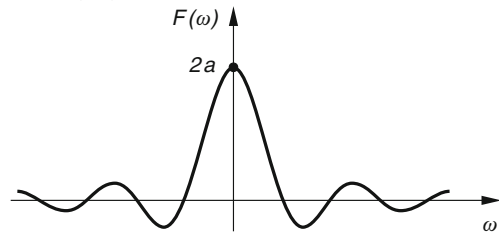


$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[ \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \right]_{-a}^a = -\frac{1}{j\omega} [e^{-j\omega a} - e^{j\omega a}] = \\ &= -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega a} - e^{j\omega a}) = \frac{1}{j\omega} \underbrace{(e^{j\omega a} - e^{-j\omega a})}_{2j \cdot \sin(a\omega)} = \frac{1}{j\omega} \cdot 2j \cdot \sin(a\omega) = \frac{2 \cdot \sin(a\omega)}{\omega} \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \frac{2 \cdot \sin(a\omega)}{\omega}$$

$$f(t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{2 \cdot \sin(a\omega)}{\omega}$$



## Inverse Fourier-Transformation

Für die *Rücktransformation* aus dem Bild- in den Originalbereich schreibt man symbolisch

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) \quad (\text{inverse Fourier-Transformierte})$$

oder

$$F(\omega) \quad \bullet \longleftrightarrow \quad f(t) \quad (\text{Korrespondenz})$$

Die Rücktransformation ist durchführbar, wenn  $f(t)$  stückweise monoton, stetig und absolut integrierbar ist und in den eventuell vorhandenen Sprungstellen die *beiderseitigen* Grenzwerte existieren. Es gilt dann die folgende *Integraldarstellung* für die Originalfunktion:

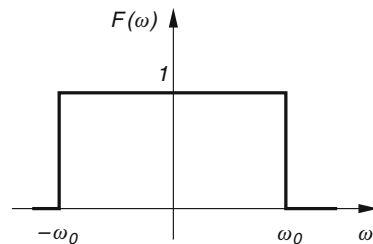
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

In den *Sprungstellen* liefert das uneigentliche Integral der rechten Seite das *arithmetische Mittel* der beiderseitigen Grenzwerte.

#### ■ Beispiel

$$F(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

Aus der (rechteckigen) Bildfunktion  $F(\omega)$  lässt sich wie folgt die zugehörige *Originalfunktion* gewinnen:



$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{jt} \cdot e^{j\omega t} \right]_{-\omega_0}^{\omega_0} = \\ &= \frac{1}{2\pi jt} [e^{jt\omega}]_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{1}{\pi t} \cdot \underbrace{\frac{1}{2j} (e^{jt\omega_0} - e^{-jt\omega_0})}_{\sin(\omega_0 t)} = \frac{1}{\pi t} \cdot \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_0 t)}{t} \end{aligned}$$

(für  $t \neq 0$ )

Für  $t = 0$  gilt:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} 1 \cdot e^0 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} 1 d\omega = \frac{1}{2\pi} [\omega]_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{1}{2\pi} (\omega_0 + \omega_0) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\omega_0 = \frac{\omega_0}{\pi} \end{aligned}$$

■

### Physikalische Deutung der Fourier-Transformation

Die *nichtperiodische* zeitabhängige Funktion  $f(t)$  kann als *Grenzfall* einer periodischen Funktion mit der Periode  $T = \infty$  aufgefasst werden. Sie wird in ihre *harmonischen Bestandteile* zerlegt, die durch harmonische Schwingungen in der komplexen Exponentialform  $e^{j\omega t}$  beschrieben werden (sog. *Fourier-Analyse*). Anders wie bei der Zerlegung *periodischer* Funktionen treten hier *alle* Kreisfrequenzen aus dem Intervall  $-\infty < \omega < \infty$  auf. An die Stelle der komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_n$  tritt die *Fourier-Transformierte*  $F(\omega)$ , aus dem *Linienspektrum* wird ein *kontinuierliches* Spektrum:

periodische Zeitfunktion	→	Linienspektrum
nichtperiodische Zeitfunktion	→	kontinuierliches Spektrum

Im naturwissenschaftlich-technischen Bereich sind folgende Bezeichnungen üblich:

$F(\omega)$ : *Spektrum* von  $f(t)$  (*Frequenzspektrum*, Spektraldichte, Spektralfunktion)

$A(\omega) = |F(\omega)|$ : *Amplitudenspektrum* (spektrale Amplitudendichte)

$\varphi(\omega) = \arg(F(\omega))$ : *Phasenspektrum* (spektrale Phasendichte)

### Polardarstellung der Fourier-Transformierten

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

### Äquivalente Fourier-Darstellungen (in reeller Form)

$f(t)$ : *reelle* Zeitfunktion (absolut integrierbar)

### Entwicklung nach Kosinus- und Sinusschwingungen

$$f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cdot \cos(\omega t) + b(\omega) \cdot \sin(\omega t)] d\omega$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt$$

$a(\omega), b(\omega)$ : *Spektralfunktionen* (Amplitudendichten)

### Sonderfälle

$f(t)$ : *gerade* Funktion  $\Rightarrow b(\omega) = 0$  (nur Kosinusschwingungen)

$f(t)$ : *ungerade* Funktion  $\Rightarrow a(\omega) = 0$  (nur Sinusschwingungen)

### Entwicklung nach phasenverschobenen Sinusschwingungen

$$f(t) = \int_0^{\infty} B(\omega) \cdot \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

$$B(\omega) = \sqrt{[a(\omega)]^2 + [b(\omega)]^2}, \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{a(\omega)}{b(\omega)}$$

$\pi \cdot B(\omega)$ : *Amplitudenspektrum*

$\varphi(\omega)$ : *Phasenspektrum*

**Sonderfälle**

$f(t)$	$B(\omega)$	$\varphi(\omega)$	$A(\omega) =  F(\omega) $
gerade	$ a(\omega) $	$\pi/2$ (nur Kosinusglieder)	$\pi \cdot  a(\omega) $
ungerade	$ b(\omega) $	0 (nur Sinusglieder)	$\pi \cdot  b(\omega) $

**Zusammenhang zwischen dem Spektrum  $F(\omega)$  und den Spektralfunktionen  $a(\omega)$  und  $b(\omega)$** 

$$F(\omega) = \pi [a(\omega) - j \cdot b(\omega)]$$

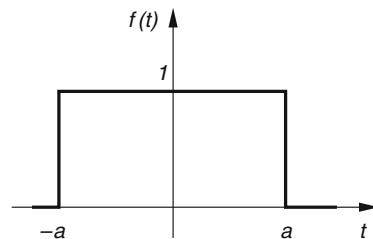
$$A(\omega) = |F(\omega)| = \pi \cdot B(\omega) = \pi \cdot \sqrt{[a(\omega)]^2 + [b(\omega)]^2}$$

■ **Beispiel**

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq a \\ 0 & \text{für } |t| > a \end{cases}$$

Die *Fourier-Analyse* dieses *rechteckigen Impulses* enthält ausschließlich *Kosinusterme* ( $f(t)$  ist eine *gerade Funktion*  $\Rightarrow b(\omega) = 0$ ):

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cdot \cos(\omega t) d\omega$$



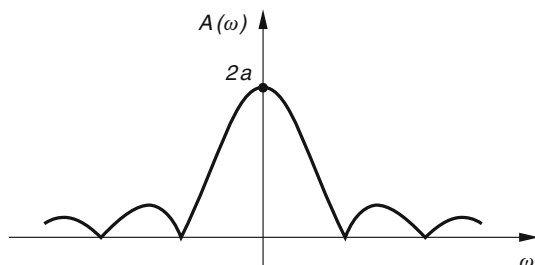
$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-a}^a 1 \cdot \cos(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^a \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^a = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega} (\sin(\omega a) - \sin 0) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(a\omega)}{\omega} \quad (\text{für } \omega \neq 0) \end{aligned}$$

$$a(0) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-a}^a 1 \cdot \cos 0 dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-a}^a 1 dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^a 1 dt = \frac{2}{\pi} [t]_0^a = \frac{2}{\pi} (a - 0) = \frac{2a}{\pi}$$

Amplitudenspektrum:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \pi \cdot |a(\omega)| = \\ &= \pi \cdot \frac{2}{\pi} \left| \frac{\sin(a\omega)}{\omega} \right| = \\ &= 2 \left| \frac{\sin(a\omega)}{\omega} \right| \end{aligned}$$

$$A(0) = \pi \cdot a(0) = \pi \cdot \frac{2a}{\pi} = 2a$$



■

## 2 Spezielle Fourier-Transformationen

Neben der *exponentiellen* Fourier-Transformation gibt es noch zwei weitere spezielle Fourier-Transformationen.

### Fourier-Kosinus-Transformation

$$F_C(\omega) = \mathcal{F}_C\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt$$

$F_C(\omega)$ : *Fourier-Kosinus-Transformierte* von  $f(t)$

Für eine *gerade* Funktion gilt:

$$F(\omega) = 2 \cdot F_C(\omega)$$

### Fourier-Sinus-Transformation

$$F_S(\omega) = \mathcal{F}_S\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega t) dt$$

$F_S(\omega)$ : *Fourier-Sinus-Transformierte* von  $f(t)$

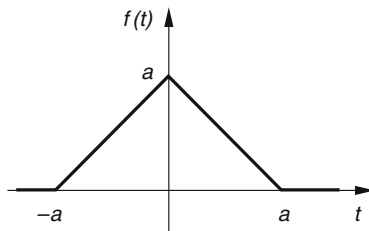
Für eine *ungerade* Funktion gilt:

$$F(\omega) = -2j \cdot F_S(\omega)$$

#### ■ Beispiel

$$f(t) = \begin{cases} t + a & -a \leq t \leq 0 \\ -t + a & \text{für } 0 \leq t \leq a \\ 0 & |t| \geq a \end{cases}$$

Für diese *gerade* Dreiecksfunktion erhalten wir mit Hilfe der *Fourier-Kosinus-Transformation* die folgende Bildfunktion:





$$\begin{aligned}
F(\omega) &= 2 \cdot F_C(\omega) = 2 \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = 2 \cdot \int_0^a (-t + a) \cdot \cos(\omega t) dt = \\
&= 2 \cdot \int_0^a [-t \cdot \cos(\omega t) + a \cdot \cos(\omega t)] dt = \\
&= 2 \left[ -\frac{\cos(\omega t)}{\omega^2} - \frac{t \cdot \sin(\omega t)}{\omega} + \frac{a}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \right]_0^a = \\
&= 2 \left( -\frac{\cos(a\omega)}{\omega^2} - \frac{a \cdot \sin(a\omega)}{\omega} + \frac{a \cdot \sin(a\omega)}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} \right) = \\
&= 2 \left( \frac{-\cos(a\omega) + 1}{\omega^2} \right) = \frac{2[1 - \cos(a\omega)]}{\omega^2} \quad (\text{für } \omega \neq 0) \\
F(0) &= 2 \cdot F_C(0) = 2 \cdot \int_0^a (-t + a) \cdot \cos 0 dt = 2 \cdot \int_0^a (-t + a) dt = 2 \left[ -\frac{1}{2} t^2 + at \right]_0^a = \\
&= 2 \left( -\frac{1}{2} a^2 + a^2 \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 = a^2
\end{aligned}$$

■

### Zusammenhang zwischen den Fourier-Transformationen $F(\omega)$ , $F_C(\omega)$ und $F_S(\omega)$

Jede Funktion  $f(t)$  lässt sich wie folgt in eine Summe aus einer *geraden* Funktion  $g(t)$  und einer *ungeraden* Funktion  $h(t)$  zerlegen:

$$f(t) = \frac{1}{2} \underbrace{[f(t) + f(-t)]}_{g(t)} + \frac{1}{2} \underbrace{[f(t) - f(-t)]}_{h(t)} = \frac{1}{2} g(t) + \frac{1}{2} h(t)$$

Dann gilt:

$$F(\omega) = \frac{1}{2} G(\omega) + \frac{1}{2} H(\omega) = \mathcal{G}_C(\omega) - j \cdot H_S(\omega)$$

$\mathcal{G}(\omega)$ ,  $H(\omega)$ : Fourier-Transformierte von  $g(t)$  bzw.  $h(t)$

$G_C(\omega)$ : Fourier-Kosinus-Transformierte von  $g(t)$

$H_S(\omega)$ : Fourier-Sinus-Transformierte von  $h(t)$

### Berechnung der Fourier-Transformation mit Hilfe von Korrespondenztabelle

- **Tabelle 1** (Seite 333 bis 334): Exponentielle Fourier-Transformation
- **Tabelle 2** (Seite 335 bis 336): Fourier-Sinus-Transformation
- **Tabelle 3** (Seite 337 bis 338): Fourier-Kosinus-Transformation

## 3 Wichtige „Hilfsfunktionen“ in den Anwendungen

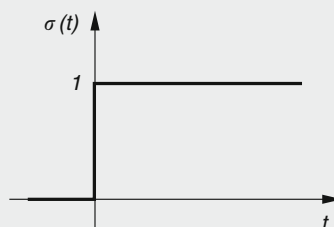
### 3.1 Sprungfunktionen

*Sprungfunktionen* werden z. B. für Einschaltvorgänge benötigt.

#### Sprungfunktion $\sigma(t)$ (Sprungstelle: $t = 0$ )

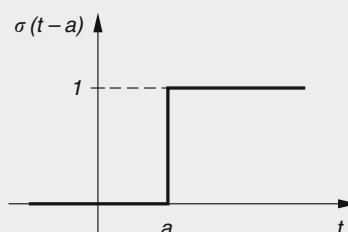
Einheitssprung, Heaviside-Funktion, Sigmafunktion ( $\sigma$ -Funktion)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$



#### Verschobene Sprungfunktion (Sprungstelle: $t = a$ )

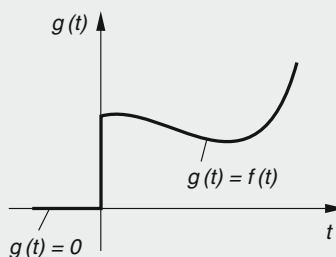
$$\sigma(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ 1 & \text{für } t \geq a \end{cases}$$



#### „Ausblenden“ mit Hilfe der $\sigma$ -Funktion

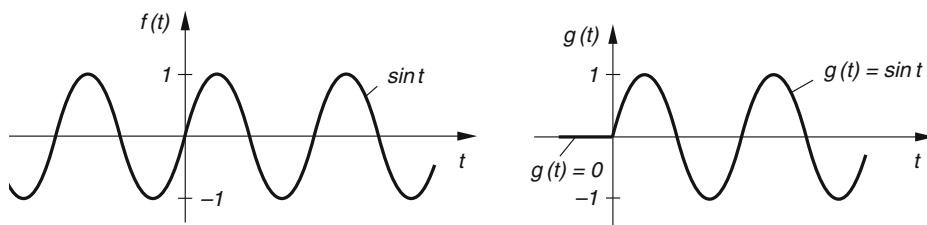
Die *Multiplikation* einer Funktion  $f(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  mit der Sprungfunktion  $\sigma(t)$  bewirkt, dass alle Funktionswerte für  $t < 0$  *verschwinden*, d. h. gleich Null gesetzt werden, während im Intervall  $t \geq 0$  alles beim Alten bleibt (sog. „Ausblenden“ im Intervall  $t < 0$ ):

$$g(t) = \sigma(t) \cdot f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

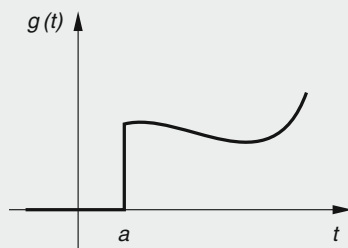


■ **Beispiel**

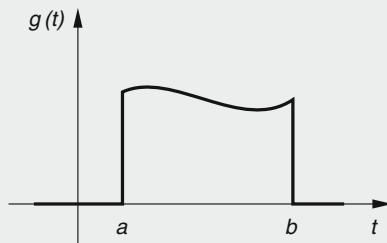
$$f(t) = \sin t \Rightarrow g(t) = \sigma(t) \cdot \sin t = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \sin t & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

**„Ausblenden“ im Intervall  $t < a$** 

$$g(t) = \sigma(t - a) \cdot f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ f(t) & \text{für } t \geq a \end{cases}$$

**„Ausblenden“ in den Intervallen  $t < a$  und  $t > b$  (mit  $a < b$ )**

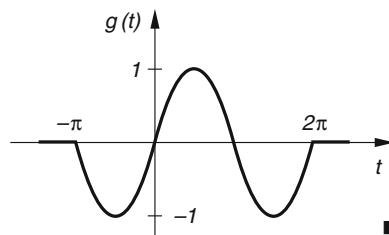
$$g(t) = [\sigma(t - a) - \sigma(t - b)] \cdot f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a, \quad t > b \\ f(t) & \text{für } a \leq t \leq b \end{cases}$$

■ **Beispiel**

$$f(t) = \sin t; \quad a = -\pi, \quad b = 2\pi$$

$$g(t) = [\sigma(t + \pi) - \sigma(t - 2\pi)] \cdot \sin t =$$

$$= \begin{cases} \sin t & \text{für } -\pi \leq t \leq 2\pi \\ 0 & \text{für alle übrigen } t \end{cases}$$



### „Ausblenden“ einer verschobenen Funktion

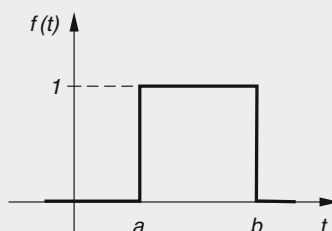
Die Funktion  $f(t)$  wird zunächst um  $a$  verschoben und dann im Intervall  $t < a$  „ausgeblendet“:

$$g(t) = \sigma(t - a) \cdot f(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a \\ f(t - a) & \text{für } t \geq a \end{cases}$$

## 3.2 Rechteckige Impulse

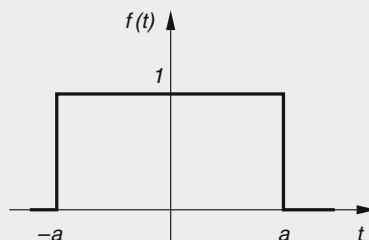
Intervall  $a \leq t \leq b$  ( $a < b$ )

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t - a) - \sigma(t - b) = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{für alle übrigen } t \end{cases} \end{aligned}$$



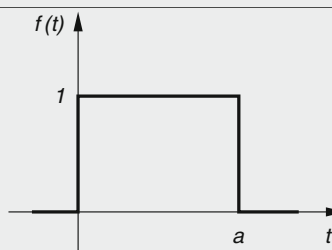
Symmetrisches Intervall  $-a \leq t \leq a$  ( $a > 0$ )

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t + a) - \sigma(t - a) = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq a \\ 0 & \text{für } |t| > a \end{cases} \end{aligned}$$



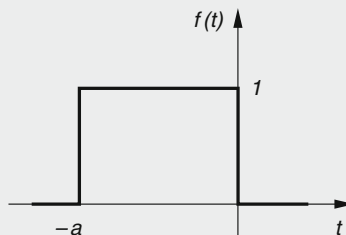
Intervall  $0 \leq t \leq a$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t) - \sigma(t - a) = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{für alle übrigen } t \end{cases} \end{aligned}$$



Intervall  $-a \leq t \leq 0$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t + a) - \sigma(t) = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } -a \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{für alle übrigen } t \end{cases} \end{aligned}$$



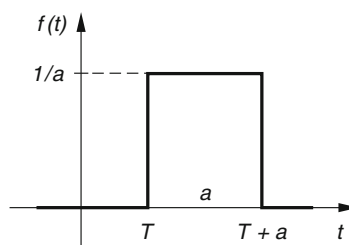
### 3.3 Diracsche Deltafunktion

Für die Beschreibung *lokalisierter* Impulse (die nur in einem bestimmten Zeitpunkt  $T$  einwirken) benötigt man die sog. *Diracsche Deltafunktion* ( $\delta$ -Funktion, auch *Dirac-Stoß* oder *Impulsfunktion* genannt). Sie ist keine Funktion im üblichen Sinne, sondern eine sog. „verallgemeinerte Funktion“ (Distribution).

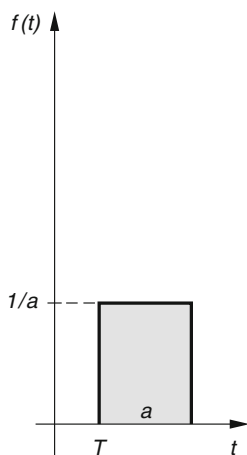
#### Anschauliches Modell der Deltafunktion

Ausgangspunkt ist ein *rechteckiger* Impuls (Stoß) der Breite  $a$  und der Höhe  $1/a$ , dessen Stärke (entspricht dem Flächeninhalt) den Wert 1 besitzt:

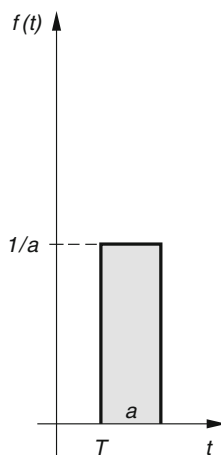
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = a \cdot \frac{1}{a} = 1$$



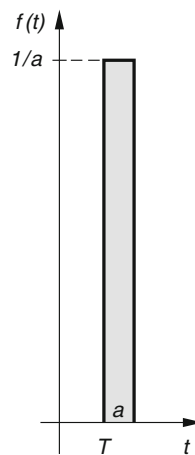
Mit abnehmender Breite nimmt die Höhe bei unverändertem Flächeninhalt immer mehr zu (siehe Bilderfolge a)  $\rightarrow$  b)  $\rightarrow$  c)). Im *Grenzfall*  $a \rightarrow 0$  entsteht ein Impuls mit einer Breite nahe 0 und einer unendlich großen Höhe.



a)

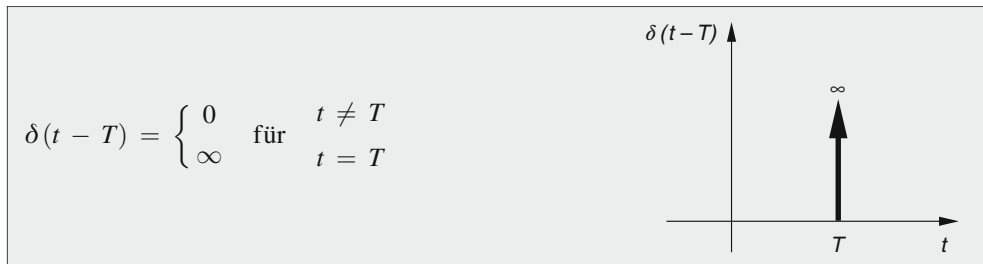


b)



c)

### Symbolische Schreibweise und Darstellung der Deltafunktion



### Eigenschaften der Deltafunktion

#### Normierung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) dt = 1 \quad (\text{„Flächeninhalt“} = 1)$$

#### „Ausblendeigenschaft“

Für bestimmte Zeitfunktionen  $f(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  gilt:

$$\int_a^b \delta(t - T) \cdot f(t) dt = \begin{cases} f(T) & \text{für } a \leq T \leq b \\ 0 & \text{alle übrigen } T \end{cases}$$

#### Anmerkungen

- (1) Die Integrale sind nur *symbolisch* zu verstehen, sie können *nicht* im üblichen Sinne „berechnet“ werden (es handelt sich um sog. „verallgemeinerte Integrale“).
- (2) Nur wenn  $T$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt, ist das „Ausblendintegral“ von Null verschieden.

#### ■ Beispiel

$$\int_0^{2\pi} \delta(t - \pi) \cdot \underbrace{e^{-t} \cdot \cos t}_{f(t)} dt = e^{-\pi} \cdot \cos \pi = e^{-\pi} \cdot (-1) = -e^{-\pi}$$

*Begründung:*  $\pi$  liegt im Integrationsintervall.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) \cdot \underbrace{\cos t}_{f(t)} dt = \cos T$$

*Begründung:* Die reelle Zahl  $T$  liegt *stets* im Integrationsbereich ( $-\infty < T < \infty$ ).

■

**„Verallgemeinerte Fourier-Transformierte“ der Deltafunktion**

$$\mathcal{F}\{\delta(t - T)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) \cdot e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega T}$$

**Sonderfall  $T = 0$ :**

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = F(\omega) = 1$$

Das Frequenzspektrum enthält dann alle Frequenzen mit *gleichem* Gewicht („Amplitude“ jeweils 1  $\rightarrow$  sog. „weißes“ Spektrum).

**Zusammenhang zwischen der Delta- und der Sigmafunktion**

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau - T) d\tau = \sigma(t - T)$$

$$\frac{D}{Dt} \sigma(t - T) = \delta(t - T)$$

Die Deltafunktion ist die sog. „verallgemeinerte Ableitung“ der Sigmafunktion (Sprungfunktion).

**„Verallgemeinerte Ableitung“ einer Funktion  $f(t)$** 

Die sog. „verallgemeinerte Ableitung“ einer Funktion  $f(t)$ , die an der Stelle  $t = t_0$  eine *Sprungunstetigkeit* aufweist und sonst für jedes  $t \neq t_0$  stetig differenzierbar ist, wird wie folgt gebildet:

$$\frac{Df(t)}{Dt} = \frac{df(t)}{dt} + a \cdot \delta(t - t_0) = f'(t) + a \cdot \delta(t - t_0)$$

$$\frac{Df(t)}{Dt} = \frac{D}{Dt} f(t): \text{ „Verallgemeinerte Ableitung“ von } f(t)$$

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t): \text{ „Gewöhnliche Ableitung“ von } f(t)$$

$a$ : Höhe des Sprunges an der Stelle  $t = t_0$  (Differenz der beiderseitigen Funktionsgrenzwerte an der Stelle  $t = t_0$ )

Die „verallgemeinerte Ableitung“ unterscheidet sich nur an der *Sprungstelle*  $t = t_0$  von der „gewöhnlichen Ableitung“  $f'(t)$ . An der Sprungstelle kommt noch ein *Dirac-Stoß* hinzu.

## 4 Eigenschaften der Fourier-Transformation (Transformationssätze)

### 4.1 Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen)

Für die Fourier-Transformierte einer *Linearkombination* von Originalfunktionen gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) + \dots + c_n \cdot f_n(t)\} &= \\ &= c_1 \cdot \mathcal{F}\{f_1(t)\} + c_2 \cdot \mathcal{F}\{f_2(t)\} + \dots + c_n \cdot \mathcal{F}\{f_n(t)\} = \\ &= c_1 \cdot F_1(\omega) + c_2 \cdot F_2(\omega) + \dots + c_n \cdot F_n(\omega)\end{aligned}$$

$c_1, c_2, \dots, c_n$ : Reelle oder komplexe Konstanten

$$F_i(\omega) = \mathcal{F}\{f_i(t)\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

**Regel:** Es darf *gliedweise* transformiert werden, *konstante* Koeffizienten bleiben dabei *erhalten*.

#### ■ Beispiel

$$g(t) = 2 \cdot e^{-t} \cdot \sigma(t) + 3 \cdot e^{-6t} \cdot \sigma(t), \quad \mathcal{F}\{g(t)\} = ?$$

Unter Verwendung der *Korrespondenzen*

$$\mathcal{F}\{e^{-t} \cdot \sigma(t)\} = \frac{1}{1 + j\omega} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}\{e^{-6t} \cdot \sigma(t)\} = \frac{1}{6 + j\omega}$$

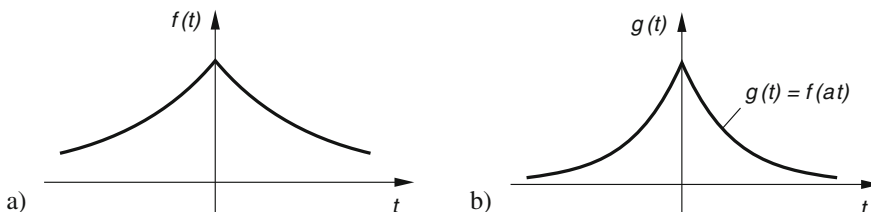
erhält man mit Hilfe des Linearitätssatzes:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g(t)\} &= \mathcal{F}\{2 \cdot e^{-t} \cdot \sigma(t) + 3 \cdot e^{-6t} \cdot \sigma(t)\} = 2 \cdot \mathcal{F}\{e^{-t} \cdot \sigma(t)\} + 3 \cdot \mathcal{F}\{e^{-6t} \cdot \sigma(t)\} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1 + j\omega} + 3 \cdot \frac{1}{6 + j\omega} = \frac{2(6 + j\omega) + 3(1 + j\omega)}{(1 + j\omega)(6 + j\omega)} = \frac{12 + 2j\omega + 3 + 3j\omega}{6 + j\omega + 6j\omega + j^2\omega^2} = \\ &= \frac{15 + 5j\omega}{6 + 7j\omega - \omega^2} = \frac{15 + 5j\omega}{6 - \omega^2 + 7j\omega}\end{aligned}$$

■

### 4.2 Ähnlichkeitssatz

Die Originalfunktion  $f(t)$  wird der *Ähnlichkeitstransformation*  $t \rightarrow at$  mit  $a \neq 0$  unterworfen. Die neue Funktion  $g(t) = f(at)$  zeigt dabei einen *ähnlichen* Kurvenverlauf wie  $f(t)$  (gezeichnet: Bild a)  $f(t) = e^{-|t|}$ , Bild b)  $g(t) = f(2t) = e^{-2|t|}$ ):





Für die Fourier-Transformierte von  $g(t) = f(at)$  gilt dann ( $a \neq 0$ : reell):

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{mit} \quad F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

**Regel:** In der Bildfunktion  $F(\omega)$  wird zunächst  $\omega$  durch  $\omega/a$  ersetzt, dann wird die neue Bildfunktion mit dem Kehrwert von  $|a|$  multipliziert.

$|a| < 1$ : Dehnung der Zeitachse  $\rightarrow$  Stauchung der Frequenzachse

$|a| > 1$ : Stauchung der Zeitachse  $\rightarrow$  Dehnung der Frequenzachse

$a = -1$ : Richtungsumkehr der Zeitachse  $\rightarrow g(t) = f(-t)$

#### ■ Beispiel

Unter Verwendung der *Korrespondenz*

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

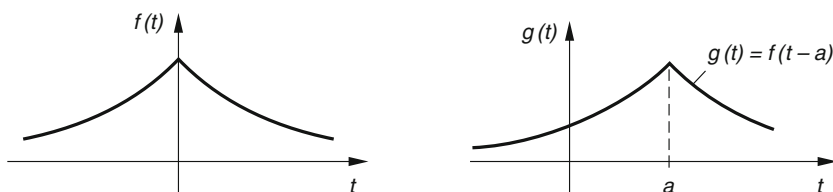
erhalten wir für die Originalfunktion  $g(t) = e^{-|2t|} = e^{-2|t|}$  die folgende *Fourier-Transformierte* ( $a = 2$ ):

$$\mathcal{F}\{e^{-2|t|}\} = \frac{1}{2} \cdot F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1 + (\omega/2)^2} = \frac{1}{1 + \omega^2/4} = \frac{1}{(4 + \omega^2)/4} = \frac{4}{4 + \omega^2}$$

■

### 4.3 Verschiebungssatz (Zeitverschiebungssatz)

Die Originalfunktion  $f(t)$  wird um die Strecke  $|a|$  auf der Zeitachse *verschoben* ( $a > 0$ : nach rechts;  $a < 0$ : nach links). Man erhält die neue Funktion  $g(t) = f(t - a)$ :



Für die Fourier-Transformierte von  $g(t) = f(t - a)$  gilt dann ( $a \neq 0$ : reell):

$$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-ja\omega} \cdot F(\omega) \quad \text{mit} \quad F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

**Regel:** Die Bildfunktion  $F(\omega)$  wird mit dem „Phasenfaktor“  $e^{-ja\omega}$  multipliziert.

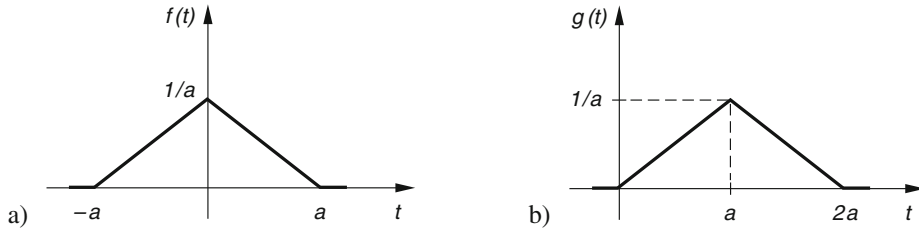
Bei einer Verschiebung im Zeitbereich bleibt das Amplitudenspektrum  $A(\omega) = |F(\omega)|$  erhalten.

■ **Beispiel**

Die in Bild a) skizzierte „Stoßfunktion“  $f(t)$  mit der Bildfunktion

$$F(\omega) = \frac{2[1 + \cos(a\omega)]}{a^2 \omega^2}$$

wird um  $a$  nach *rechts* verschoben (siehe Bild b)).



Die *Bildfunktion* der verschobenen Funktion  $g(t) = f(t - a)$ ,  $0 \leq t \leq 2a$  lautet dann:

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = e^{-ja\omega} \cdot F(\omega) = e^{-ja\omega} \cdot \frac{2[1 + \cos(a\omega)]}{a^2 \omega^2} = \frac{2[1 + \cos(a\omega)] \cdot e^{-ja\omega}}{a^2 \omega^2}$$

■

#### 4.4 Dämpfungssatz (Frequenzverschiebungssatz)

Die Originalfunktion  $f(t)$  wird mit  $e^{j\omega_0 t}$  multipliziert („Modulation“). Die Fourier-Transformierte der neuen Funktion  $g(t) = f(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$  lautet dann ( $\omega_0$ : reell):

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} \cdot f(t)\} = F(\omega - \omega_0) \quad \text{mit} \quad F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

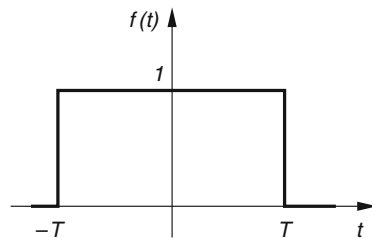
**Regel:** Einer *Multiplikation* im Zeitbereich mit  $e^{j\omega_0 t}$  entspricht im Frequenzbereich eine *Frequenzverschiebung* um  $\omega_0$  ( $\omega$  wird in  $F(\omega)$  durch  $\omega - \omega_0$  ersetzt).

■ **Beispiel**

Der folgende Rechteckimpuls soll „moduliert“ werden:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq T \\ 0 & \text{für } |t| > T \end{cases} = \sigma(t + T) - \sigma(t - T)$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{2 \cdot \sin(T\omega)}{\omega}$$



Der „gedämpfte“ Rechteckimpuls  $g(t) = f(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$  besitzt dann die folgende Fourier-Transformierte:

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0) = \frac{2 \cdot \sin[T(\omega - \omega_0)]}{\omega - \omega_0}$$

■

## 4.5 Ableitungssätze (Differentiationssätze)

### 4.5.1 Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Originalfunktion

Die Fourier-Transformierten der *Ableitungen* der Originalfunktion  $f(t)$  nach der Variablen  $t$  lauten wie folgt:

#### 1. Ableitung

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega \cdot F(\omega) \quad \text{mit} \quad F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

*Voraussetzung:*  $f'(t)$  ist *Fourier-transformierbar* und der Grenzwert von  $f(t)$  für  $|t| \rightarrow \infty$  verschwindet.

#### 2. Ableitung

$$\mathcal{F}\{f''(t)\} = (j\omega)^2 \cdot F(\omega) = -\omega^2 \cdot F(\omega) \quad \text{mit} \quad F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

*Voraussetzung:*  $f''(t)$  ist *Fourier-transformierbar* und die Grenzwerte von  $f(t)$  und  $f'(t)$  für  $|t| \rightarrow \infty$  verschwinden.

#### $n$ -te Ableitung

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n \cdot F(\omega) \quad \text{mit} \quad F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

*Voraussetzung:*  $f^{(n)}(t)$  ist *Fourier-transformierbar* und die Grenzwerte von  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$  für  $|t| \rightarrow \infty$  verschwinden.

**Regel:** Jeder Differentiationsschritt im Originalbereich bewirkt eine *Multiplikation* mit dem Faktor  $j\omega$  im Bildbereich.

#### ■ Beispiel

Ausgehend von der (als bekannt vorausgesetzten) *Korrespondenz*

$$f(t) = e^{-0,5t^2} \quad \longleftrightarrow \quad F(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-0,5\omega^2}$$

lässt sich die Bildfunktion von  $g(t) = t \cdot e^{-0,5t^2}$  wie folgt aus dem *Ableitungssatz* bestimmen ( $g(t)$  ist – vom Vorzeichen abgesehen – genau die 1. Ableitung von  $f(t)$ ):

$$f(t) = e^{-0,5t^2} \quad \Rightarrow \quad f'(t) = e^{-0,5t^2} \cdot (-t) = -t \cdot e^{-0,5t^2} = -g(t)$$

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \mathcal{F}\{-g(t)\} = -\mathcal{F}\{g(t)\} = j\omega \cdot F(\omega) = j\omega \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{-0,5\omega^2}$$

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{t \cdot e^{-0,5t^2}\} = -j\omega \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{-0,5\omega^2} = -j \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \omega \cdot e^{-0,5\omega^2}$$

■

### 4.5.2 Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Bildfunktion

Die *Ableitungen* der Fourier-Transformierten  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  nach der Variablen  $\omega$  lauten wie folgt:

#### 1. Ableitung

$$F'(\omega) = (-j)^1 \cdot \mathcal{F}\{t \cdot f(t)\} = -j \cdot \mathcal{F}\{t \cdot f(t)\}$$

*Voraussetzung:* Die Funktion  $t \cdot f(t)$  ist *Fourier-transformierbar*.

#### 2. Ableitung

$$F''(\omega) = (-j)^2 \cdot \mathcal{F}\{t^2 \cdot f(t)\} = -\mathcal{F}\{t^2 \cdot f(t)\}$$

*Voraussetzung:* Die Funktion  $t^2 \cdot f(t)$  ist *Fourier-transformierbar*.

#### $n$ -te Ableitung

$$F^{(n)}(\omega) = (-j)^n \cdot \mathcal{F}\{t^n \cdot f(t)\}$$

*Voraussetzung:* Die Funktion  $t^n \cdot f(t)$  ist *Fourier-transformierbar*.

**Regel:** Die  $n$ -Ableitung der Bildfunktion  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  erhält man als Fourier-Transformierte der mit der Potenz  $t^n$  *multiplizierten* Originalfunktion  $f(t)$ , multipliziert mit  $(-j)^n$ . Dieser Satz wird daher auch als *Multiplikationssatz* bezeichnet.

#### ■ Beispiel

Die Fourier-Transformierte von  $g(t) = t \cdot e^{-0,5t^2}$  lässt sich auch mit Hilfe des *Ableitungssatzes* für die *Bildfunktion* aus der (z. B. einer Tabelle entnommenen) *Korrespondenz*

$$f(t) = e^{-0,5t^2} \quad \longleftrightarrow \quad F(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-0,5\omega^2}$$

gewinnen, da  $g(t) = t \cdot f(t)$  ist:

$$F'(\omega) = -j \cdot \mathcal{F}\{t \cdot f(t)\} = -j \cdot \mathcal{F}\{g(t)\}$$

Nach Multiplikation mit  $j$  folgt aus dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g(t)\} &= j \cdot F'(\omega) = j \cdot \frac{d}{d\omega} \left( \sqrt{2\pi} \cdot e^{-0,5\omega^2} \right) = j \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{-0,5\omega^2} \cdot (-\omega) = \\ &= -j \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \omega \cdot e^{-0,5\omega^2} \end{aligned}$$

■

## 4.6 Integrationssätze

### Integrationssatz für die Originalfunktion

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t f(u) du \right\} = \frac{1}{j\omega} \cdot F(\omega) \quad \text{mit} \quad F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

Voraussetzung:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$

**Regel:**  $F(\omega)$  wird durch  $j\omega$  dividert.

### Parsevalsche Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad \text{mit} \quad F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

Voraussetzung: Die Originalfunktion  $f(t)$  ist *quadratisch integrierbar*.

## 4.7 Faltungssatz

### Faltungsprodukt

Unter dem *Faltungsprodukt*  $f_1(t) * f_2(t)$  zweier Originalfunktionen  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$  versteht man das uneigentliche Integral

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) \cdot f_2(t - u) du$$

(*Faltungsintegral*, 2-seitige *Faltung* der Funktionen  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$ )

Voraussetzung: Beide Funktionen sind *absolut integrierbar*.

### Rechenregeln

*Kommutativgesetz*  $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

*Assoziativgesetz*  $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$

*Distributivgesetz*  $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$

### Faltungssatz

Die Fourier-Transformierte des *Faltungsproduktes*  $f_1(t) * f_2(t)$  ist gleich dem *Produkt* der Fourier-Transformierten von  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$ :

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t)\} \cdot \mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

$$F_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}, \quad F_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}$$

*Voraussetzung:*  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$  und ihre Quadrate sind *absolut integrierbar*.

#### ■ Beispiel

Für die Fourier-Transformation einer *Gauß-Funktion* mit dem „Breitenparameter“  $\sigma$  gilt die folgende Zuordnung (Korrespondenz):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}$$

Wir interessieren uns für die *Faltung* zweier Gauß-Funktionen mit den Breitenparametern  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Aus dem *Faltungssatz* folgt dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) = e^{-\frac{\sigma_1^2 \omega^2}{2}} \cdot e^{-\frac{\sigma_2^2 \omega^2}{2}} = e^{\left(-\frac{\sigma_1^2 \omega^2}{2} - \frac{\sigma_2^2 \omega^2}{2}\right)} = \\ &= e^{-\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \omega^2}{2}} = e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} \end{aligned}$$

(mit  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ ). Durch *Rücktransformation* erhalten wir das *Faltungsprodukt*:

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

**Folgerung:** Die *Faltung* zweier Gauß-Funktionen mit den Breitenparametern  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  führt wieder auf eine (breitere!) *Gauß-Funktion* mit dem Breitenparameter  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ . ■

## 4.8 Vertauschungssatz

Aus einer *vorgegebenen* Korrespondenz

$$f(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad F(\omega)$$

erhält man durch Vertauschen von Originalfunktion  $f(t)$  und Bildfunktion  $F(\omega)$  wie folgt eine *neue* Korrespondenz (sog. *Vertauschungssatz*, auch als  $t - \omega$ -Dualitätsprinzip bezeichnet):

$$F(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad 2\pi \cdot f(-\omega)$$

$F(t)$  ist die (neue) Originalfunktion,  $2\pi \cdot f(-\omega)$  die neue zugehörige Bildfunktion.

■ **Beispiel**

Aus der (als bekannt vorausgesetzten) Korrespondenz

$$f(t) = e^{-|t|} \quad \longleftrightarrow \quad F(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

erhält man mit Hilfe des Vertauschungssatzes die folgende neue Korrespondenz:

$$F(t) = \frac{2}{1 + t^2} \quad \longleftrightarrow \quad 2\pi \cdot f(-\omega) = 2\pi \cdot e^{-|\omega|} = 2\pi \cdot e^{-|\omega|}$$

Somit gilt:

$$\frac{1}{1 + t^2} \quad \longleftrightarrow \quad \pi \cdot e^{-|\omega|}$$

■

## 5 Anwendung: Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

### 5.1 Allgemeines Lösungsverfahren

Eine (gewöhnliche) *lineare* Differentialgleichung mit *konstanten* Koeffizienten lässt sich mit Hilfe der *Fourier-Transformation* schrittweise wie folgt lösen:

- (1) Die lineare Differentialgleichung wird mit Hilfe der Fourier-Transformation in eine *algebraische Gleichung* übergeführt (Transformation vom Originalbereich in den Bildbereich).
- (2) Die Lösung dieser Gleichung ist die *Bildfunktion*  $Y(\omega)$  der gesuchten Originalfunktion  $y(t)$ .
- (3) Durch *Rücktransformation* (inverse Fourier-Transformation) in der Regel unter Verwendung einer Transformationstabelle erhält man aus der Bildfunktion  $Y(\omega)$  die gesuchte *Lösung*  $y(t)$ .

*Vorteil* dieser Lösungsmethode: Die Rechenoperationen sind im Bildbereich meist *einfacherer* Art. Man erhält diejenige (spezielle oder partikuläre) Lösung, die im Intervall  $-\infty < t < \infty$  stetig und beschränkt ist.

### 5.2 Lineare Differentialgleichungen

#### 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

**Differentialgleichung im Originalbereich**

$y' + ay = g(t) \quad (a: \text{Konstante}; \quad g(t): \text{Störfunktion})$
---

**Transformierte Differentialgleichung im Bildbereich (mit Lösung)**

$$j\omega \cdot Y(\omega) + a \cdot Y(\omega) = F(\omega)$$

$$\text{Lösung: } Y(\omega) = \frac{F(\omega)}{a + j\omega}$$

$Y(\omega)$ : Fourier-Transformierte der (gesuchten) *Lösung*  $y(t)$

$F(\omega)$ : Fourier-Transformierte der *Störfunktion*  $g(t)$

■ **Beispiel**

$$y' - y = \sigma(t) \cdot e^{-t}$$

Transformation der Dgl in den *Bildbereich* ( $a = -1$ ;  $g(t) = \sigma(t) \cdot e^{-t}$ ):

$$j\omega \cdot Y(\omega) - Y(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \quad \text{oder} \quad Y(\omega) \cdot (j\omega - 1) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

*Lösung im Bildbereich:*

$$Y(\omega) = \frac{1}{(j\omega - 1)(1 + j\omega)} = \frac{1}{(j\omega - 1)(j\omega + 1)} = \frac{1}{(j\omega)^2 - 1} = \frac{1}{-\omega^2 - 1} = -\frac{1}{1 + \omega^2}$$

*Rücktransformation in den Originalbereich* (unter Verwendung der Tabelle 1 aus Kap. XII.6):

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{-\frac{1}{1 + \omega^2}\right\} = -\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1 + \omega^2}\right\} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-|t|}$$

■

## 5.3 Lineare Differentialgleichungen

### 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

**Differentialgleichung im Originalbereich**

$$y'' + ay' + by = g(t) \quad (a, b: \text{Konstanten}; \quad g(t): \text{Störfunktion})$$

**Transformierte Differentialgleichung im Bildbereich (mit Lösung)**

$$-\omega^2 \cdot Y(\omega) + aj\omega \cdot Y(\omega) + b \cdot Y(\omega) = F(\omega)$$

$$\text{Lösung: } Y(\omega) = \frac{F(\omega)}{-\omega^2 + ja\omega + b}$$

$Y(\omega)$ : Fourier-Transformierte der (gesuchten) *Lösung*  $y(t)$

$F(\omega)$ : Fourier-Transformierte der *Störfunktion*  $g(t)$



## 6 Tabellen spezieller Fourier-Transformationen

**Tabelle 1: Exponentielle Fourier-Transformationen**

*Hinweis:*  $a > 0$ ,  $b > 0$

Bei den Korrespondenzen Nr. 18 bis Nr. 26 handelt es sich um die Fourier-Transformierten sog. „verallgemeinerter“ Funktionen (Distributionen).

	Originalfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F(\omega)$
(1)	$\sigma(t-a) - \sigma(t-b) =$ $= \begin{cases} 1 & \text{für } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ <p>(mit <math>a &lt; b</math>)</p>	$j \cdot \frac{e^{-jb\omega} - e^{-ja\omega}}{\omega}$
(2)	$\sigma(t+a) - \sigma(t-a) =$ $= \begin{cases} 1 & \text{für }  t  \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{2 \cdot \sin(a\omega)}{\omega}$
(3)	$\sigma(t+a) - \sigma(t) =$ $= \begin{cases} 1 & \text{für } -a \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$j \cdot \frac{1 - e^{ja\omega}}{\omega}$
(4)	$\sigma(t) - \sigma(t-a) =$ $= \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$j \cdot \frac{e^{-ja\omega} - 1}{\omega}$
(5)	$\begin{cases} a -  t  & \text{für }  t  \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{2[1 - \cos(a\omega)]}{\omega^2}$
(6)	$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$\frac{\pi}{a} \cdot e^{-a \omega }$
(7)	$\frac{t}{a^2 + t^2}$	$\begin{cases} j\pi \cdot e^{-a \omega } & \omega < 0 \\ 0 & \text{für } \omega = 0 \\ -j\pi \cdot e^{-a \omega } & \omega > 0 \end{cases}$
(8)	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
(9)	$e^{-at} \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$
(10)	$t \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$

	Originalfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F(\omega)$
(11)	$t^2 \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)$	$\frac{2}{(a + j\omega)^3}$
(12)	$t^n \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)$	$\frac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$
(13)	$e^{-at^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
(14)	$t \cdot e^{-at^2}$	$-\frac{j}{2a} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \omega \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
(15)	$\frac{\sin(at)}{t}$	$\begin{cases} \pi &  \omega  < a \\ \pi/2 & \text{für }  \omega  = a \\ 0 &  \omega  > a \end{cases}$
(16)	$e^{-at} \sin(bt) \cdot \sigma(t)$	$\frac{b}{(a + j\omega)^2 + b^2}$
(17)	$e^{-at} \cdot \cos(bt) \cdot \sigma(t)$	$\frac{j\omega}{(a + j\omega)^2 + b^2}$
(18)	$\delta(t)$ (Dirac-Stoß)	1
(19)	$\delta(t + a)$	$e^{ja\omega}$
(20)	$\delta(t - a)$	$e^{-ja\omega}$
(21)	$e^{jat}$	$2\pi \cdot \delta(\omega - a)$
(22)	$e^{-jat}$	$2\pi \cdot \delta(\omega + a)$
(23)	$\cos(at)$	$\pi[\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a)]$
(24)	$\sin(at)$	$j\pi[\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)]$
(25)	$\delta(t + a) + \delta(t - a)$	$2 \cdot \cos(a\omega)$
(26)	$\delta(t + a) - \delta(t - a)$	$2j \cdot \sin(a\omega)$

**Tabelle 2: Fourier-Sinus-Transformationen***Hinweis:*  $a > 0$ ,  $b > 0$ 

	Originalfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F_S(\omega)$
(1)	$\sigma(t) - \sigma(t - a) =$ $= \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{1 - \cos(a\omega)}{\omega}$
(2)	$\begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$	$\frac{4 \cdot \sin \omega \cdot \sin^2(\omega/2)}{\omega^2}$
(3)	$\frac{1}{t}$	$\frac{\pi}{2}$
(4)	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}$
(5)	$\frac{b}{b^2 + (a - t)^2} - \frac{b}{b^2 + (a + t)^2}$	$\pi \cdot e^{-b\omega} \cdot \sin(a\omega)$
(6)	$\frac{a + t}{b^2 + (a + t)^2} - \frac{a - t}{b^2 + (a - t)^2}$	$\pi \cdot e^{-b\omega} \cdot \cos(a\omega)$
(7)	$\frac{t}{a^2 + t^2}$	$\frac{\pi}{2} \cdot e^{-a\omega}$
(8)	$\frac{1}{t(a^2 + t^2)}$	$\frac{\pi}{2a^2} \left(1 - e^{-a\omega}\right)$
(9)	$\frac{t}{a^2 - t^2}$	$-\frac{\pi}{2} \cdot \cos(a\omega)$
(10)	$\frac{1}{t(a^2 - t^2)}$	$\frac{\pi}{2a^2} \left(1 - \cos(a\omega)\right)$
(11)	$e^{-at}$	$\frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$
(12)	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{2a\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}$
(13)	$\frac{e^{-at}}{t}$	$\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$
(14)	$t \cdot e^{-at^2}$	$\frac{1}{4a} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \omega \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$

	Originalfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F_S(\omega)$
(15)	$\frac{1}{e^{2t} - 1}$	$\frac{\pi}{4} \cdot \coth\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) - \frac{1}{2\omega}$
(16)	$\ln \left  \frac{a+t}{a-t} \right $	$\pi \cdot \frac{\sin(a\omega)}{\omega}$
(17)	$\frac{\sin(at)}{t}$	$\frac{1}{2} \cdot \ln \left  \frac{a+\omega}{a-\omega} \right $
(18)	$\frac{\sin(at)}{t^2}$	$\begin{cases} \pi\omega/2 & \text{für } \omega \leq a \\ \pi a/2 & \text{für } \omega \geq a \end{cases}$
(19)	$\frac{\sin^2(at)}{t}$	$\begin{cases} \pi/4 & 0 < \omega < 2a \\ \pi/8 & \text{für } \omega = 2a \\ 0 & \omega > 2a \end{cases}$
(20)	$\frac{\sin^2(at)}{t^2}$	$\frac{1}{4} \left[ (\omega + 2a) \cdot \ln(\omega + 2a) + (\omega - 2a) \cdot \ln \omega - 2a  - \frac{1}{2} \omega \cdot \ln \omega \right]$
(21)	$\frac{\sin(at) \cdot \sin(bt)}{t}$	$\begin{cases} \pi/4 & \text{für } a-b < \omega < a+b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
(22)	$\frac{\cos(at)}{t}$	$\begin{cases} 0 & 0 < \omega < a \\ \pi/4 & \text{für } \omega = a \\ \pi/2 & \omega > a \end{cases}$
(23)	$e^{-bt} \cdot \sin(at)$	$\frac{b}{2} \left[ \frac{1}{b^2 + (a-\omega)^2} - \frac{1}{b^2 + (a+\omega)^2} \right]$
(24)	$\frac{e^{-bt} \cdot \sin(at)}{t}$	$\frac{1}{4} \cdot \ln \left( \frac{b^2 + (\omega+a)^2}{b^2 + (\omega-a)^2} \right)$

**Tabelle 3: Fourier-Kosinus-Transformationen***Hinweis:*  $a > 0$ ,  $b > 0$ 

	Originalfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F_C(\omega)$
(1)	$\sigma(t) - \sigma(t - a) =$ $= \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{\sin(a\omega)}{\omega}$
(2)	$\begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$	$\frac{4 \cdot \cos \omega \cdot \sin^2(\omega/2)}{\omega^2}$
(3)	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}$
(4)	$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$\frac{\pi}{2a} \cdot e^{-a\omega}$
(5)	$\frac{1}{a^2 - t^2}$	$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(a\omega)}{\omega}$
(6)	$\frac{b}{b^2 + (a - t)^2} + \frac{b}{b^2 + (a + t)^2}$	$\pi \cdot e^{-b\omega} \cdot \cos(a\omega)$
(7)	$\frac{a + t}{b^2 + (a + t)^2} + \frac{a - t}{b^2 + (a - t)^2}$	$\pi \cdot e^{-b\omega} \cdot \sin(a\omega)$
(8)	$e^{-at}$	$\frac{a}{a^2 + \omega^2}$
(9)	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{a^2 - \omega^2}{(a^2 + \omega^2)^2}$
(10)	$\sqrt{t} \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\cos\left[\frac{3}{2} \cdot \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)\right]}{(a^2 + \omega^2)^{3/4}}$
(11)	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 + \omega^2}}{a^2 + \omega^2}$
(12)	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$	$\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{b^2 + \omega^2}{a^2 + \omega^2}\right)$
(13)	$e^{-at^2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$

	Originalfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F_C(\omega)$
(14)	$\ln \left( \frac{a^2 + t^2}{b^2 + t^2} \right)$	$\pi \cdot \frac{e^{-b\omega} - e^{-a\omega}}{\omega}$
(15)	$\ln \left  \frac{a^2 + t^2}{b^2 - t^2} \right $	$\pi \cdot \frac{\cos(b\omega) - e^{-a\omega}}{\omega}$
(16)	$\frac{\sin(at)}{t}$	$\begin{cases} \pi/2 & \omega < a \\ \pi/4 & \text{für } \omega = a \\ 0 & \omega > a \end{cases}$
(17)	$\frac{\sin^2(at)}{t}$	$\frac{1}{4} \cdot \ln \left  \frac{\omega^2 - 4a^2}{\omega^2} \right $
(18)	$\frac{\sin(at) \cdot \sin(bt)}{t}$	$\frac{1}{2} \cdot \ln \left  \frac{(a+b)^2 - \omega^2}{(a-b)^2 - \omega^2} \right $
(19)	$\frac{\sin^2(at)}{t^2}$	$\begin{cases} \frac{\pi}{4} (2a - \omega) & \text{für } \omega \leq 2a \\ 0 & \omega > 2a \end{cases}$
(20)	$\frac{1 - \cos(at)}{t}$	$\frac{1}{2} \cdot \ln \left  \frac{\omega^2 - a^2}{\omega^2} \right $
(21)	$\frac{1 - \cos(at)}{t^2}$	$\begin{cases} \frac{\pi}{2} (a - \omega) & \text{für } \omega \leq a \\ 0 & \omega > a \end{cases}$
(22)	$e^{-bt} \cdot \sin(at)$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{a + \omega}{b^2 + (a + \omega)^2} + \frac{a - \omega}{b^2 + (a - \omega)^2} \right]$
(23)	$e^{-bt} \cdot \cos(at)$	$\frac{b}{2} \left[ \frac{1}{b^2 + (a - \omega)^2} + \frac{1}{b^2 + (a + \omega)^2} \right]$
(24)	$\frac{e^{-t} \cdot \sin t}{t}$	$\frac{1}{2} \cdot \arctan \left( \frac{2}{\omega^2} \right)$
(25)	$\sin(at^2)$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left[ \cos \left( \frac{\omega^2}{4a} \right) - \sin \left( \frac{\omega^2}{4a} \right) \right]$
(26)	$\cos(at^2)$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left[ \cos \left( \frac{\omega^2}{4a} \right) + \sin \left( \frac{\omega^2}{4a} \right) \right]$

# XIII Laplace-Transformationen

## 1 Grundbegriffe

### Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ist eine *Integraltransformation*. Sie ordnet einer (in den Anwendungen meist *zeitabhängigen*) Funktion  $f(t)$  mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  wie folgt eine Funktion  $F(s)$  der (komplexen) Variablen  $s$  zu:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

#### Bezeichnungen

$f(t)$ : *Original-* oder *Oberfunktion*

$F(s)$ : *Bild-* oder *Unterfunktion*

Das uneigentliche Integral der rechten Seite heißt *Laplace-Integral*. Es existiert, wenn  $f(t)$  stückweise stetig ist (in jedem endlichen Intervall nur endlich viele Sprungstellen liegen) und für hinreichend große  $t$ -Werte die Bedingung

$$|f(t)| \leq K \cdot e^{-\alpha t} \quad (\alpha > 0, K > 0: \text{ reelle Konstanten})$$

erfüllt (hinreichende Bedingung). Das Laplace-Integral *konvergiert* dann für  $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ .

#### Weitere symbolische Schreibweisen

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (\text{Laplace-Transformierte von } f(t))$$

$\mathcal{L}$ : *Laplace-Transformationsoperator*

$$f(t) \circ \longrightarrow F(s) \quad (\text{Korrespondenz})$$

Originalfunktion  $f(t)$  und Bildfunktion  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  bilden ein zusammengehöriges *Funktionenpaar*.

#### Anmerkungen

- (1) Die Laplace-Transformierte  $F(s)$  *verschwindet* im Unendlichen:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

- (2) Eine Funktion  $f(t)$  mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  lässt sich mit Hilfe der  $\sigma$ -Funktion auch in der Form  $\sigma(t) \cdot f(t)$  darstellen. Sie heißt *Laplace-transformierbar*, wenn das Laplace-Integral  $F(s)$  *existiert*. Die Menge aller (transformierbaren) Originalfunktionen wird als *Originalbereich*, die Menge der zugeordneten Bildfunktionen als *Bildbereich* bezeichnet.

■ **Beispiel**

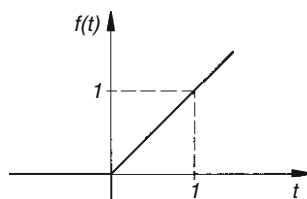
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Die Laplace-Transformierte dieser Funktion lautet:

$$F(s) = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \left[ \frac{(-st - 1) \cdot e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

(das uneigentliche Integral existiert *nur* für  $\operatorname{Re}(s) > 0$ ). Somit ist:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad \text{oder} \quad t \longleftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

**Inverse Laplace-Transformation**

Für die *Rücktransformation* aus dem Bild- in den Originalbereich schreibt man symbolisch

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \quad (\text{inverse Laplace-Transformierte})$$

oder

$$F(s) \bullet \longleftrightarrow f(t) \quad (\text{Korrespondenz})$$

■ **Beispiel**

$$\text{Aus } \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1} \text{ folgt durch Umkehrung } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \sin t.$$

## 2 Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationssätze)

**2.1 Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen)**

Für die Laplace-Transformierte einer *Linearkombination* von Originalfunktionen gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) + \dots + c_n \cdot f_n(t)\} &= \\ &= c_1 \cdot \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\} + \dots + c_n \cdot \mathcal{L}\{f_n(t)\} \end{aligned}$$

$c_1, c_2, \dots, c_n$ : Konstanten (reell oder komplex)

**Regel:** Es darf *gliedweise* transformiert werden, *konstante* Faktoren bleiben dabei *erhalten*.



■ **Beispiel**

Die Laplace-Transformierten von  $f_1(t) = t$  und  $f_2(t) = \sin t$  lauten nach Tabelle XIII.6:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

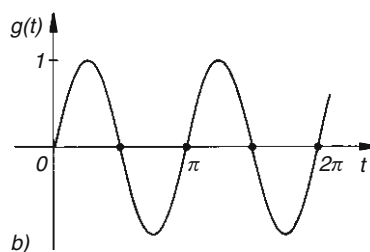
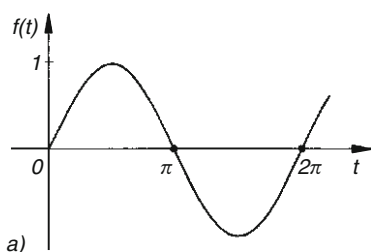
Für die Laplace-Transformierte der *Linearkombination*  $f(t) = 4t + 5 \cdot \sin t$  erhält man dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{4t + 5 \cdot \sin t\} &= 4 \cdot \mathcal{L}\{t\} + 5 \cdot \mathcal{L}\{\sin t\} = 4 \cdot \frac{1}{s^2} + 5 \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{4}{s^2} + \frac{5}{s^2 + 1} = \\ &= \frac{4(s^2 + 1) + 5s^2}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{4s^2 + 4 + 5s^2}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{9s^2 + 4}{s^2(s^2 + 1)} \end{aligned}$$

■

**2.2 Ähnlichkeitssatz**

Die Originalfunktion  $f(t)$  mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  wird der *Ähnlichkeitstransformation*  $t \rightarrow at$  mit  $a > 0$  unterworfen. Die neue Funktion  $g(t) = f(at)$  mit  $g(t) = 0$  für  $t < 0$  zeigt dabei einen *ähnlichen* Kurvenverlauf wie  $f(t)$  (gezeichnet: Bild a)  $f(t) = \sin t$ , Bild b)  $g(t) = f(2t) = \sin(2t)$ ):



Für die Laplace-Transformierte von  $g(t) = f(at)$  gilt dann (mit  $a > 0$ ):

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{mit} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

**Regel:** Der Parameter  $s$  in der Bildfunktion  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  wird durch  $s/a$  ersetzt und die neue Bildfunktion anschließend mit  $1/a$  multipliziert.

$a < 1$ : *Dehnung* der Funktion  $f(t)$  längs der  $t$ -Achse

$a > 1$ : *Stauchung* der Funktion  $f(t)$  längs der  $t$ -Achse

■ **Beispiel**

Wir bestimmen die Laplace-Transformierte von  $\sin(at)$  unter Verwendung der Korrespondenz

$$F(s) = \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (\text{siehe Tabelle XIII.6}):$$

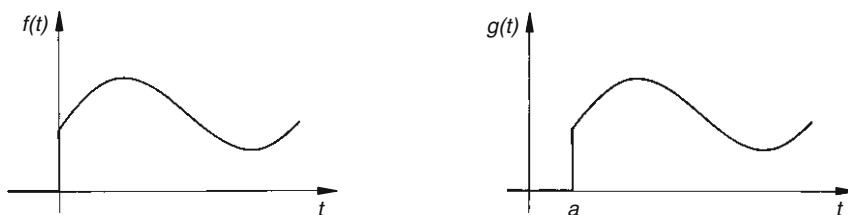
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(at)\} &= \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{a^2} + 1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{s^2 + a^2}{a^2}} = \\ &= \frac{a^2}{a(s^2 + a^2)} = \frac{a}{s^2 + a^2} \end{aligned}$$

■

## 2.3 Verschiebungssätze

### 1. Verschiebungssatz (Verschiebung nach rechts)

Die Originalfunktion  $f(t)$  mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  wird um die Strecke  $a$  nach *rechts* verschoben. Die *verschobene* Funktion lässt sich mit Hilfe der Sprungfunktion  $\sigma(t)$  durch die Gleichung  $g(t) = f(t - a) \cdot \sigma(t - a)$  beschreiben.



Für die Laplace-Transformierte von  $g(t)$  gilt dann ( $a > 0$ ):

$$\mathcal{L}\{f(t - a) \cdot \sigma(t - a)\} = e^{-as} \cdot F(s) \quad \text{mit} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

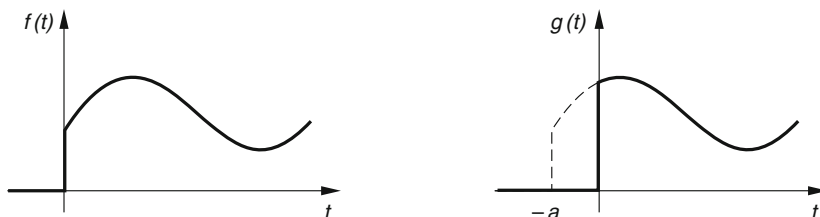
**Regel:** Die Bildfunktion  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  wird mit  $e^{-as}$  *multipliziert*.

#### ■ Beispiel

$$\mathcal{L}\{\sin(t - 3) \cdot \sigma(t - 3)\} = e^{-3s} \cdot \mathcal{L}\{\sin t\} = e^{-3s} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{e^{-3s}}{s^2 + 1} \quad (\text{nach Tabelle XIII.6})$$

### 2. Verschiebungssatz (Verschiebung nach links)

Die Originalfunktion  $f(t)$  mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  wird um die Strecke  $a$  nach *links* verschoben. Die *verschobene* Funktion lässt sich mit Hilfe der Sprungfunktion  $\sigma(t)$  durch die Gleichung  $g(t) = f(t + a) \cdot \sigma(t)$  beschreiben.



Für die Laplace-Transformierte von  $g(t)$  gilt dann ( $a > 0$ ):

$$\mathcal{L}\{f(t+a) \cdot \sigma(t)\} = e^{as} \left( F(s) - \int_0^a f(t) \cdot e^{-st} dt \right) \quad \text{mit} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

**Regel:** Von der Bildfunktion  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  wird zunächst das Integral  $\int_0^a f(t) \cdot e^{-st} dt$  subtrahiert, anschließend wird die neue Funktion mit  $e^{as}$  multipliziert.

■ **Beispiel**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(t+\pi) \cdot \sigma(t)\} &= e^{\pi s} \left( \mathcal{L}\{\sin t\} - \int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-st} dt \right) = e^{\pi s} \left( \frac{1}{s^2+1} - \left[ \frac{e^{-st}(-s \cdot \sin t - \cos t)}{s^2+1} \right]_0^{\pi} \right) = \\ &= e^{\pi s} \left( \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \right) = -\frac{1}{s^2+1} \quad (\text{mit Hilfe von Tabelle XIII.6}) \end{aligned}$$

■

## 2.4 Dämpfungssatz

Die Originalfunktion  $f(t)$  mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  wird *exponentiell gedämpft*, d. h. mit dem Faktor  $e^{-at}$  multipliziert. Die Laplace-Transformierte der *gedämpften* Funktion  $g(t) = e^{-at} \cdot f(t)$  mit  $g(t) = 0$  für  $t < 0$  lautet dann<sup>1)</sup>:

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot f(t)\} = F(s+a) \quad \text{mit} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

**Regel:** In der Bildfunktion  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  wird der Parameter  $s$  durch  $s+a$  ersetzt.

■ **Beispiel**

Die Laplace-Transformierte der *gedämpften Schwingung*  $g(t) = e^{-2t} \cdot \cos t$  lautet unter Verwendung der Transformation  $F(s) = \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$  (siehe Tabelle XIII.6) wie folgt:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \cdot \cos t\} = F(s+2) = \frac{(s+2)}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2}{s^2+4s+5}$$

■

## 2.5 Ableitungssätze (Differentiationssätze)

### 2.5.1 Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Originalfunktion

Die Laplace-Transformierten der *Ableitungen* der Originalfunktion  $f(t)$  nach der Variablen  $t$  lauten:

<sup>1)</sup> Eine Dämpfung im *physikalischen* Sinne erhält man nur für  $a > 0$ . Für  $a < 0$  bewirkt der Faktor  $e^{-at}$  eine *Verstärkung*.

**1. Ableitung**

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0) \quad \text{mit} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$f(0)$ : Anfangswert von  $f(t)$

**2. Ableitung**

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0) \quad \text{mit} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$f(0), f'(0)$ : Anfangswerte von  $f(t), f'(t)$

 **$n$ -te Ableitung**

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$ : Anfangswerte von  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$

**Voraussetzung:** Die  $n$ -te Ableitung von  $f(t)$  ist Laplace-transformierbar.

**Regel:** Die Bildfunktion  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  wird zunächst mit  $s^n$  multipliziert, dann wird ein Polynom  $(n-1)$ -ten Grades in der Variablen  $s$  subtrahiert (die Polynomkoeffizienten sind die Anfangswerte der Originalfunktion  $f(t)$  und ihrer Ableitungen  $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ ).

**Anmerkungen**

- (1) Bei Sprungfunktionen mit einer Sprungstelle bei  $t = 0$  sind für  $f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$  jeweils die rechtsseitigen Grenzwerte einzusetzen.
- (2) Sollte die Anfangsstelle bei  $t \neq 0$  liegen, so muss  $f(t)$  vorher entsprechend verschoben werden.

**■ Beispiel**

Zur Originalfunktion  $f(t) = \sin t$  gehört die Bildfunktion  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$  (siehe Tabelle XIII.6). Nach dem Ableitungssatz (1. Ableitung) erhält man dann für die Laplace-Transformierte der 1. Ableitung  $f'(t)$ , d. h. für die Laplace-Transformierte der Kosinusfunktion unter Berücksichtigung des Anfangswertes  $f(0) = \sin 0 = 0$ :

$$\mathcal{L}\{(\sin t)'\} = \mathcal{L}\{\cos t\} = s \cdot F(s) - f(0) = s \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - 0 = \frac{s}{s^2 + 1}$$

■

### 2.5.2 Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Bildfunktion

Die *Ableitungen* der Laplace-Transformierten  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  nach der Variablen  $s$  lauten:

#### 1. Ableitung

$$F'(s) = \mathcal{L}\{-t \cdot f(t)\}$$

#### 2. Ableitung

$$F''(s) = \mathcal{L}\{(-t)^2 \cdot f(t)\} = \mathcal{L}\{t^2 \cdot f(t)\}$$

#### $n$ -te Ableitung

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n \cdot f(t)\}$$

*Voraussetzung:* Die Funktion  $(-t)^n \cdot f(t)$  ist Laplace-transformierbar.

**Regel:** Die  $n$ -te Ableitung der Bildfunktion  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  ist die Laplace-Transformierte der mit  $(-t)^n$  multiplizierten Originalfunktion  $f(t)$ .

#### ■ Beispiel

Die Laplace-Transformierte von  $g(t) = t \cdot \sin t$  lässt sich wie folgt durch Anwendung des *Ableitungssatzes* (1. Ableitung) auf das Funktionenpaar

$$f(t) = \sin t \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

gewinnen:

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot \sin t\} = -F'(s) = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2 + 1} \right) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

■

## 2.6 Integrationssätze

### 2.6.1 Integrationssatz für die Originalfunktion

Es wird zunächst über die *Originalfunktion*  $f(t)$  integriert. Für die Laplace-Transformierte des *Integrals* gilt dann:

**Integration über das Intervall  $0 \leq u \leq t$**

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(u) du \right\} = \frac{1}{s} \cdot F(s) \quad \text{mit} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

**Regel:** Die Bildfunktion  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  wird durch  $s$  dividiert.

**Integration über das Intervall  $a \leq u \leq t$  (mit  $a > 0$ )**

$$\mathcal{L} \left\{ \int_a^t f(u) du \right\} = \frac{1}{s} \left( F(s) - \int_0^a f(u) du \right) \quad \text{mit} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

**Regel:** Von der Bildfunktion  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  wird zunächst das Integral  $\int_0^a f(u) du$  subtrahiert, anschließend wird die neue Funktion mit  $1/s$  multipliziert.

■ **Beispiel**

Die Laplace-Transformierte von  $f(t) = t$  ist  $F(s) = 1/s^2$  (siehe Tabelle XIII.6). Aus dem *Integrationssatz* lässt sich dann die Laplace-Transformierte von  $g(t) = t^2$  wie folgt bestimmen (mit  $f(u) = u$ ):

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t u du \right\} = \mathcal{L} \left\{ \left[ \frac{1}{2} u^2 \right]_0^t \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2} t^2 \right\} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{1}{s} \cdot F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^3}$$

Somit ist  $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$  die Laplace-Transformierte von  $g(t) = t^2$ . ■

**2.6.2 Integralsatz für die Bildfunktion**

Es wird über die *Bildfunktion*  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  integriert. Dann gilt:

$$\int_s^\infty F(u) du = \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{t} \cdot f(t) \right\}$$

**Voraussetzung:** Die Funktion  $\frac{1}{t} \cdot f(t)$  ist Laplace-transformierbar.

**Regel:** Die Originalfunktion  $f(t)$  von  $F(s)$  wird zunächst durch  $t$  dividiert, dann wird die Laplace-Transformierte der neuen Funktion  $g(t) = (1/t) \cdot f(t)$  bestimmt.

■ **Beispiel**

Aus der bekannten Korrespondenz

$$f(t) = t^2 \longleftrightarrow F(s) = \frac{2}{s^3} \quad (\text{siehe Tabelle XIII.6})$$

lässt sich mit Hilfe des *Integrationssatzes* die Laplace-Transformierte von  $g(t) = t$  wie folgt bestimmen (mit  $F(u) = 2/u^3$ ):

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{t} \cdot t^2 \right\} = \mathcal{L}\{t\} = \int_s^\infty \frac{2}{u^3} du = \left[ -\frac{1}{u^2} \right]_s^\infty = \frac{1}{s^2}$$

Somit gilt:

$$t \longleftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

■

## 2.7 Faltungssatz

### Faltungsprodukt

Unter dem *Faltungsprodukt*  $f_1(t) * f_2(t)$  zweier Originalfunktionen  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$  versteht man das Integral

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t-u) du$$

(*Faltungsintegral*, *einseitige Faltung* der Funktionen  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$ )

### Rechenregeln

*Kommutativgesetz*  $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

*Assoziativgesetz*  $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$

*Distributivgesetz*  $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$

### Faltungssatz

Die Laplace-Transformierte des *Faltungsproduktes*  $f_1(t) * f_2(t)$  ist gleich dem *Produkt* der Laplace-Transformierten von  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$ :

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t-u) du\right\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

$$F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}, \quad F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

### ■ Beispiel

Wir bestimmen mit Hilfe des *Faltungssatzes* die zur Bildfunktion  $F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)s^2}$  gehörende *Originalfunktion*  $f(t)$ . Es ist:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)s^2} = \underbrace{\frac{1}{s^2 + 1}}_{F_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2}}_{F_2(s)} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Nach dem *Faltungssatz* gilt dann:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

d. h., die gesuchte Originalfunktion  $f(t)$  ist das *Faltungsprodukt* der Originalfunktionen  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$  zu  $F_1(s)$  und  $F_2(s)$ :

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t-u) du$$

Die *Originalfunktionen* zu  $F_1(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$  und  $F_2(s) = \frac{1}{s^2}$  entnehmen wir aus der Tabelle XIII.6:

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \sin t, \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$$

Dann aber ist:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= f_1(t) * f_2(t) = (\sin t) * t = \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t-u) du = \int_0^t (\sin u) (t-u) du = \\
 &= \int_0^t t \cdot \sin u du - \int_0^t u \cdot \sin u du = [-t \cdot \cos u]_{u=0}^t - [\sin u - u \cdot \cos u]_{u=0}^t = \\
 &= (-t \cdot \cos t + t) - (\sin t - t \cdot \cos t) = t - \sin t
 \end{aligned}$$

■

## 2.8 Grenzwertsätze

Das Verhalten der Originalfunktion  $f(t)$  für  $t \rightarrow 0$  (Anfangswert  $f(0)$ ) bzw. für  $t \rightarrow \infty$  (Endwert  $f(\infty)$ ) lässt sich aus der zugehörigen Bildfunktion  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  auch *ohne* Rücktransformation bestimmen (unter der Voraussetzung, dass  $f(0)$  bzw.  $f(\infty)$ , d. h. die aufgeführten Grenzwerte auf der jeweils linken Seite existieren):

**Anfangswert  $f(0)$  (rechtsseitiger Grenzwert für  $t \rightarrow 0$ )**

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s \cdot F(s)) \quad \text{mit} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

### ■ Beispiel

Die Bildfunktion einer (nicht näher bekannten) Originalfunktion  $f(t)$  lautet:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Dann besitzt die Originalfunktion  $f(t)$  den folgenden Anfangswert:

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s \cdot F(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{s}{s^2 + 1} \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{s + 1/s} \right) = 0$$

■

**Endwert  $f(\infty)$  (Grenzwert für  $t \rightarrow \infty$ )**

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s)) \quad \text{mit} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

### ■ Beispiel

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2s + 1}{s(s + 3)}$$

Die zugehörige Originalfunktion  $f(t)$  besitzt den folgenden Endwert:

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s(2s + 1)}{s(s + 3)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{2s + 1}{s + 3} \right) = \frac{1}{3}$$

■

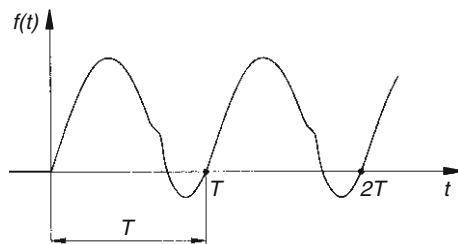


### 3 Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion

Die Laplace-Transformierte  $F(s)$  einer periodischen Funktion  $f(t)$  lautet<sup>2)</sup>:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \cdot \int_0^T f(u) \cdot e^{-su} du$$

$T$ : Periode von  $f(t)$



#### ■ Beispiel

Die Laplace-Transformierte der Rechteckskurve

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < a \\ 0 & a < t < 2a \end{cases} \text{ für}$$

mit der Periode  $T = 2a$  lautet wie folgt:



$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-2as}} \left[ \int_0^a 1 \cdot e^{-su} du + \int_a^{2a} 0 \cdot e^{-su} du \right] = \frac{1}{1 - e^{-2as}} \left[ -\frac{1}{s} \cdot e^{-su} \right]_{u=0}^{u=a} = \\ &= \frac{1}{(1 - e^{-2as})s} \left[ -e^{-su} \right]_{u=0}^{u=a} = \frac{1}{(1 - e^{-2as})s} (-e^{-as} + e^0) = \\ &= \frac{1}{(1 - e^{-2as})s} (-e^{-as} + 1) = \frac{1 - e^{-as}}{(1 - e^{-2as})s} = \frac{1 - e^{-as}}{(1 - e^{-as})(1 + e^{-as})s} = \\ &\quad \text{3. Binom} \\ &= \frac{1}{(1 + e^{-as})s} = \frac{1}{s(e^{-as} + 1)} \end{aligned}$$

Hinweis zum 3. Binom:

$$(1 + e^{-as})(1 - e^{-as}) = 1^2 - (e^{-as})^2 = 1 - e^{-2as}$$

<sup>2)</sup> Die Periodizität bleibt auf den positiven Zeitbereich beschränkt ( $f(t) = 0$  für  $t < 0$ ).

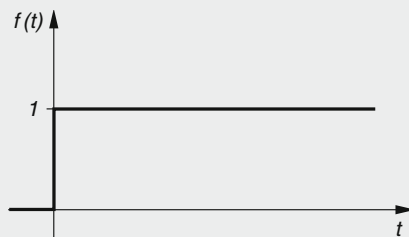
## 4 Laplace-Transformierte spezieller Funktionen (Impulse)

*Hinweis:* Es ist stets  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ .

### 1. Sprungfunktion $\sigma(t)$ (Sigmafunktion)

$$f(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

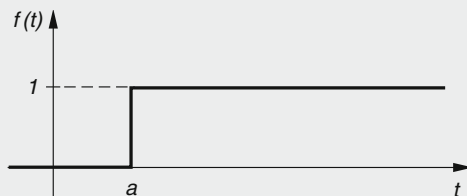
$$F(s) = \frac{1}{s}$$



### 2. Verschobene Sprungfunktion $\sigma(t - a)$

$$f(t) = \sigma(t - a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & \text{für } t \geq a \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{e^{-as}}{s}$$

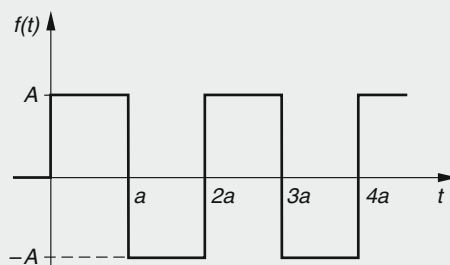


### 3. Rechteckskurve

Periode:  $T = 2a$

$$f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t < a \\ -A & \text{für } a \leq t < 2a \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{A(1 - e^{-as})}{s(1 + e^{-as})} = \frac{A}{s} \cdot \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$$

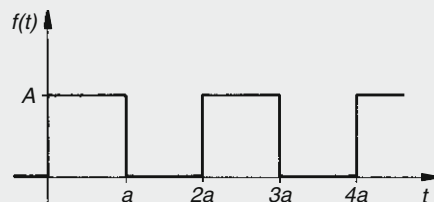


### 4. Rechteckskurve

Periode:  $T = 2a$

$$f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t < a \\ 0 & \text{für } a \leq t < 2a \end{cases}$$

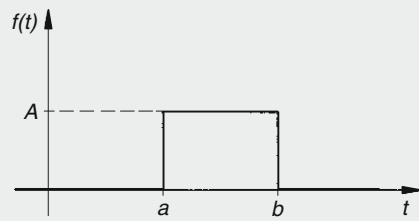
$$F(s) = \frac{A}{s(1 + e^{-as})}$$



**5. Rechteckimpuls**

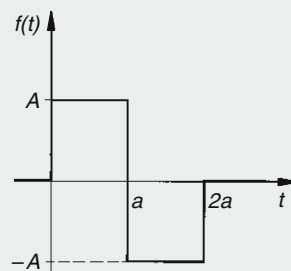
$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < a \\ A & \text{für } a \leq t \leq b \\ 0 & t > b \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{A(e^{-as} - e^{-bs})}{s}$$

**6. Rechteckimpuls**

$$f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t < a \\ -A & \text{für } a \leq t \leq 2a \\ 0 & t > 2a \end{cases}$$

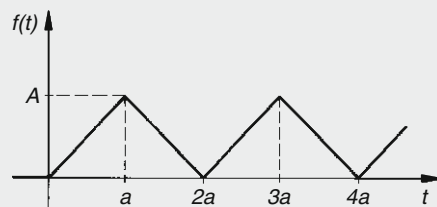
$$F(s) = \frac{A(1 - e^{-as})^2}{s}$$

**7. Dreieckskurve**

Periode:  $T = 2a$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a}t & 0 \leq t \leq a \\ -\frac{A}{a}(t - 2a) & a \leq t \leq 2a \end{cases} \quad \text{für}$$

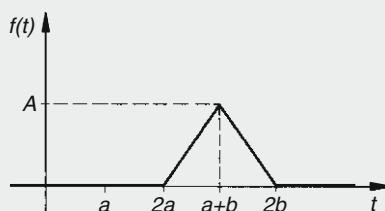
$$F(s) = \frac{A(1 - e^{-as})}{as^2(1 + e^{-as})}$$



**8. Dreieckimpuls**

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 2a \\ \frac{A}{b-a}(t-2a) & 2a \leq t \leq a+b \\ -\frac{A}{b-a}(t-2b) & a+b \leq t \leq 2b \\ 0 & t \geq 2b \end{cases} \quad \text{für}$$

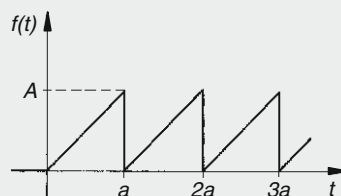
$$F(s) = \frac{A(e^{-as} - e^{-bs})^2}{(b-a)s^2}$$

**9. Sägezahnfunktion (Kippschwingung)**

Periode:  $T = a$

$$f(t) = \frac{A}{a} t \quad \text{für } 0 \leq t < a$$

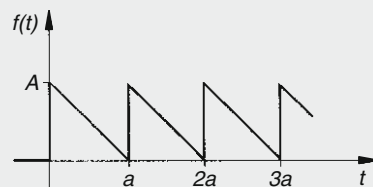
$$F(s) = \frac{A(1 + as - e^{as})}{as^2(1 - e^{as})}$$

**10. Sägezahnfunktion (Kippschwingung)**

Periode:  $T = a$

$$f(t) = -\frac{A}{a}(t-a) \quad \text{für } 0 \leq t < a$$

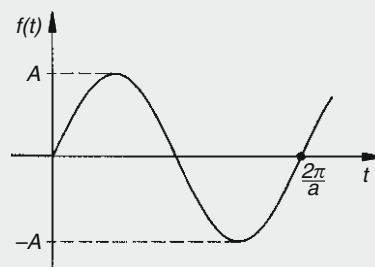
$$F(s) = \frac{A(e^{-as} + as - 1)}{as^2(1 - e^{-as})}$$

**11. Sinusfunktion (Sinusschwingung)**

Periode:  $T = 2\pi/a$

$$f(t) = A \cdot \sin(at)$$

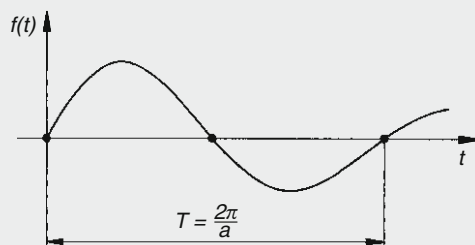
$$F(s) = \frac{Aa}{s^2 + a^2}$$



**12. Gedämpfte Sinusschwingung**

$$f(t) = A \cdot e^{-bt} \cdot \sin(at)$$

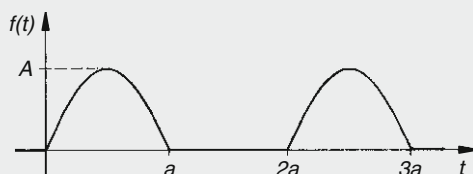
$$F(s) = \frac{Aa}{(s-b)^2 + a^2}$$

**13. Sinusimpuls (Einweggleichrichtung)**

Periode:  $T = 2a$

$$f(t) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} t\right) & \text{für } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{für } a \leq t \leq 2a \end{cases}$$

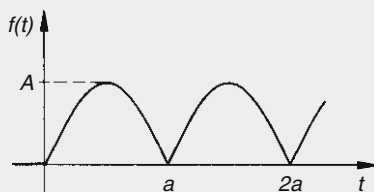
$$F(s) = \frac{\pi a A}{(a^2 s^2 + \pi^2)(1 - e^{-as})}$$

**14. Sinusimpuls (Zweiweggleichrichtung)**

Periode:  $T = a$

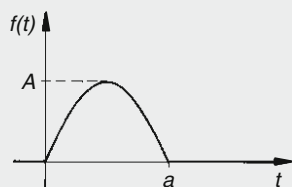
$$f(t) = A \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi}{a} t\right) \right|$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\pi a A (1 + e^{-as})}{(a^2 s^2 + \pi^2)(1 - e^{-as})} = \\ &= \frac{\pi a A}{a^2 s^2 + \pi^2} \cdot \coth\left(\frac{as}{2}\right) \end{aligned}$$

**15. Sinusimpuls**

$$f(t) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} t\right) & \text{für } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{für } t \geq a \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{\pi a A (1 + e^{-as})}{a^2 s^2 + \pi^2}$$

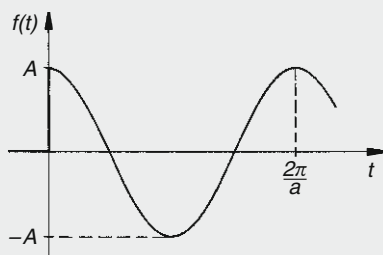


**16. Kosinusfunktion (Kosinusschwingung)**

Periode:  $T = 2\pi/a$

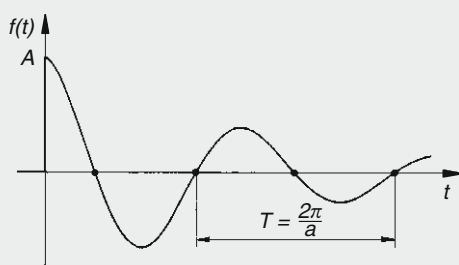
$$f(t) = A \cdot \cos(at)$$

$$F(s) = \frac{As}{s^2 + a^2}$$

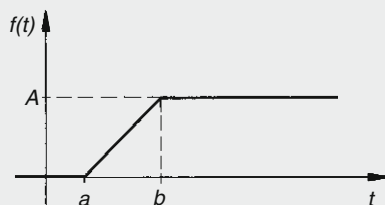
**17. Gedämpfte Kosinusschwingung**

$$f(t) = A \cdot e^{-bt} \cdot \cos(at)$$

$$F(s) = \frac{A(s+b)}{(s+b)^2 + a^2}$$

**18. Rampenfunktion**

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq a \\ \frac{A}{b-a}(t-a) & \text{für } a \leq t \leq b \\ A & t \geq b \end{cases}$$

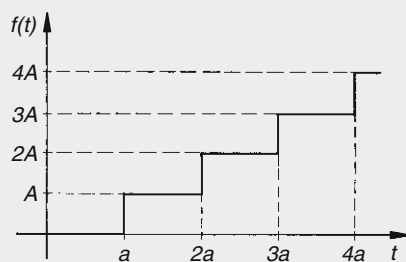


$$F(s) = \frac{A(e^{-as} - e^{-bs})}{(b-a)s^2}$$

**19. Treppenfunktion**

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < a \\ A & \text{für } a \leq t < 2a \\ 2A & 2a \leq t < 3a \\ \text{usw.} \end{cases}$$

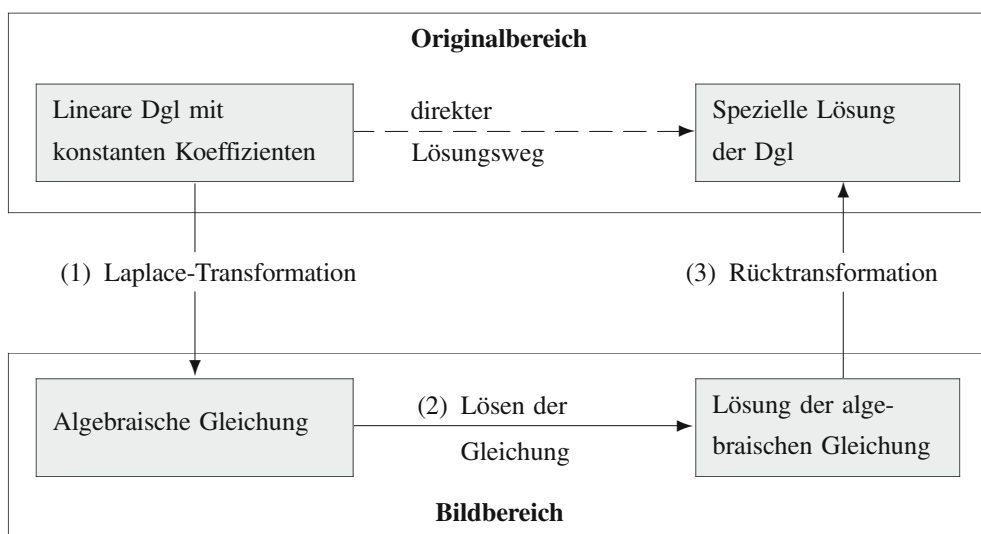
$$F(s) = \frac{A}{s(e^{as} - 1)}$$



## 5 Anwendung: Lösung linearer Anfangswertprobleme

### 5.1 Allgemeines Lösungsverfahren

Eine (gewöhnliche) *lineare* Differentialgleichung (Dgl) mit *konstanten* Koeffizienten und vorgegebenen *Anfangswerten* (*Anfangswertproblem*) lässt sich mit Hilfe der Laplace-Transformation wie folgt lösen:



#### Lösungsschritte

1. Die lineare Differentialgleichung wird mit Hilfe der Laplace-Transformation in eine *algebraische* Gleichung übergeführt.
2. Als Lösung dieser Gleichung erhält man die *Bildfunktion*  $Y(s)$  der gesuchten Originalfunktion  $y(t)$ .
3. Durch *Rücktransformation* (*inverse* Laplace-Transformation) gewinnt man aus der Bildfunktion  $Y(s)$  mit Hilfe einer Transformationstabelle (z. B. der Tabelle XIII.6) und/oder spezieller Methoden (wie z. B. der Partialbruchzerlegung bei gebrochenrationalen Funktionen) die gesuchte Lösung  $y(t)$  der vorgegebenen Anfangswertaufgabe.

*Vorteil* dieser Lösungsmethode: Die Rechenoperationen sind im Bildbereich meist *einfacher* ausführbar.

## 5.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

### Differentialgleichung im Originalbereich (Anfangswertproblem)

$$y' + ay = g(t) \quad \text{Anfangswert: } y(0)$$

$a$ : reelle Konstante                       $g(t)$ : Störfunktion

### Transformierte Differentialgleichung im Bildbereich (mit Lösung)

$$[s \cdot Y(s) - y(0)] + a \cdot Y(s) = F(s)$$

$$\text{Lösung: } Y(s) = \frac{F(s) + y(0)}{s + a}$$

$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ : Laplace-Transformierte der (gesuchten) *Lösung*  $y(t)$

$F(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ : Laplace-Transformierte der *Störfunktion*  $g(t)$

Durch *Rücktransformation* (z. B. unter Verwendung von Tabelle XIII.6) erhält man aus  $Y(s)$  die zugehörige *Originalfunktion*  $y(t)$ , d. h. die *gesuchte Lösung* der Differentialgleichung. Die Lösungsfunktion  $y(t)$  lässt sich auch in *geschlossener* Form angeben:

$$y(t) = g(t) * e^{-at} + y(0) \cdot e^{-at}$$

$g(t) * e^{-at}$ : *Faltungsprodukt* der Funktionen  $g(t)$  und  $e^{-at}$

#### ■ Beispiel

$$y' + 2y = 10 \quad \text{Anfangswert: } y(0) = 0$$

*Transformation der Dgl in den Bildraum* ( $a = 2$ ,  $g(t) = 10$ ):

$$[s \cdot Y(s) - 0] + 2 \cdot Y(s) = \frac{10}{s} \quad \text{oder} \quad s \cdot Y(s) + 2 \cdot Y(s) = \frac{10}{s}$$

*Lösung im Bildraum:*

$$Y(s) = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{5}{s} - \frac{5}{s+2} = \mathcal{L}\{y(t)\} \quad (\text{nach Partialbruchzerlegung})$$

*Rücktransformation in den Originalraum:*

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s} - \frac{5}{s+2}\right\} = 5 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 5 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \\ &= 5 \cdot 1 - 5 \cdot e^{-2t} = 5(1 - e^{-2t}) \end{aligned}$$

(unter Verwendung des Dämpfungssatzes und der Tabelle XIII.6)

*Lösung der Anfangswertaufgabe:*

$$y(t) = 5(1 - e^{-2t}) \quad (\text{für } t \geq 0)$$

■



### 5.3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

#### Differentialgleichung im Originalbereich (Anfangswertproblem)

$$y'' + ay' + by = g(t) \quad \text{Anfangswerte: } y(0), \quad y'(0)$$

$a, b$ : reelle Konstanten       $g(t)$ : Störfunktion

#### Transformierte Differentialgleichung im Bildbereich (mit Lösung)

$$[s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)] + a[s \cdot Y(s) - y(0)] + b \cdot Y(s) = F(s)$$

$$\text{Lösung: } Y(s) = \frac{F(s) + y(0) \cdot (s + a) + y'(0)}{s^2 + as + b}$$

$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ : Laplace-Transformierte der (gesuchten) Lösung  $y(t)$

$F(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ : Laplace-Transformierte der Störfunktion  $g(t)$

Durch *Rücktransformation* (z. B. unter Verwendung von Tabelle XIII.6) erhält man aus  $Y(s)$  die zugehörige *Originalfunktion*  $y(t)$ , d. h. die *gesuchte Lösung* der Differentialgleichung. Die Lösungsfunktion  $y(t)$  lässt sich auch in *geschlossener* Form angeben:

$$y(t) = g(t) * f_1(t) + y(0) \cdot f_2(t) + y'(0) \cdot f_1(t)$$

$$f_1(t): \text{ Originalfunktion zu } F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\} = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

$$f_2(t): \text{ Originalfunktion zu } F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\} = \frac{s + a}{s^2 + as + b}$$

$g(t) * f_1(t)$ : *Faltungsprodukt* der Funktionen  $g(t)$  und  $f_1(t)$

#### ■ Beispiel

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad \text{Anfangswerte: } y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Transformation der Dgl in den Bildraum ( $a = 2, b = 1, g(t) = 0$ ):

$$[s^2 \cdot Y(s) - s \cdot 0 - 1] + 2[s \cdot Y(s) - 0] + 1 \cdot Y(s) = 0$$

$$s^2 \cdot Y(s) + 2s \cdot Y(s) + Y(s) = 1$$

Lösung im Bildraum:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s + 1)^2}$$

Rücktransformation in den Originalraum (unter Verwendung des Dämpfungssatzes und der Tabelle XIII.6):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 1)^2}\right\} = t \cdot e^{-t}$$

Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$y(t) = t \cdot e^{-t} \quad (\text{für } t \geq 0)$$

■

## 6 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen

	Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(1)	1	$\delta(t)$ (Diracsche Deltafunktion)
(2)	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$ (Sprungfunktion, Sigmafunktion)
(3)	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}$
(4)	$\frac{1}{s^2}$	$t$
(5)	$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{e^{at} - 1}{a}$
(6)	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$t \cdot e^{at}$
(7)	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$
(8)	$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at) \cdot e^{at}$
(9)	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{a \cdot e^{at} - b \cdot e^{bt}}{a-b}$
(10)	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} t^2$
(11)	$\frac{1}{s^2(s-a)}$	$\frac{e^{at} - at - 1}{a^2}$
(12)	$\frac{1}{s(s-a)^2}$	$\frac{(at-1) \cdot e^{at} + 1}{a^2}$
(13)	$\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \cdot e^{at}$
(14)	$\frac{1}{s(s-a)(s-b)}$	$\frac{b \cdot e^{at} - a \cdot e^{bt} + a - b}{ab(a-b)}$
(15)	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{(b-c) \cdot e^{at} + (c-a) \cdot e^{bt} + (a-b) \cdot e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
(16)	$\frac{s}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2} at^2 + t\right) \cdot e^{at}$
(17)	$\frac{s}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{a \cdot e^{at} - [a + b(a-b)t] \cdot e^{bt}}{(a-b)^2}$
(18)	$\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{a(b-c) \cdot e^{at} + b(c-a) \cdot e^{bt} + c(a-b) \cdot e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

	Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(19)	$\frac{s^2}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2} a^2 t^2 + 2 a t + 1\right) \cdot e^{a t}$
(20)	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{a^2 \cdot e^{a t} - [b^2(a-b)t + 2ab - b^2] \cdot e^{b t}}{(a-b)^2}$
(21)	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{a^2(b-c) \cdot e^{a t} + b^2(c-a) \cdot e^{b t} + c^2(a-b) \cdot e^{c t}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
(22)	$\frac{1}{s^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
(23)	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{t^{n-1} \cdot e^{a t}}{(n-1)!}$
(24)	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\sin(a t)}{a}$
(25)	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos(a t)$
(26)	$\frac{(\sin b) \cdot s + a \cdot \cos b}{s^2 + a^2}$	$\sin(a t + b)$
(27)	$\frac{(\cos b) \cdot s - a \cdot \sin b}{s^2 + a^2}$	$\cos(a t + b)$
(28)	$\frac{1}{(s-b)^2 + a^2}$	$\frac{e^{b t} \cdot \sin(a t)}{a}$
(29)	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$	$e^{b t} \cdot \cos(a t)$
(30)	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{\sinh(a t)}{a}$
(31)	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(a t)$
(32)	$\frac{1}{(s-b)^2 - a^2}$	$\frac{e^{b t} \cdot \sinh(a t)}{a}$
(33)	$\frac{s-b}{(s-b)^2 - a^2}$	$e^{b t} \cdot \cosh(a t)$
(34)	$\frac{1}{s(s^2 + 4a^2)}$	$\frac{\sin^2(a t)}{2a^2}$
(35)	$\frac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$	$\cos^2(a t)$
(36)	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{1 - \cos(a t)}{a^2}$

	Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(37)	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin(at) - at \cdot \cos(at)}{2a^3}$
(38)	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t \cdot \sin(at)}{2a}$
(39)	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin(at) + at \cdot \cos(at)}{2a}$
(40)	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cdot \cos(at)$
(41)	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2}$	$\cos(at) - \frac{1}{2} at \cdot \sin(at)$
(42)	$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$	$\frac{at - \sin(at)}{a^3}$
(43)	$\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a \cdot \sin(bt) - b \cdot \sin(at)}{ab(a^2 - b^2)}$
(44)	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{\cos(bt) - \cos(at)}{a^2 - b^2}$
(45)	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a \cdot \sin(at) - b \cdot \sin(bt)}{a^2 - b^2}$
(46)	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{a^2 \cdot \cos(at) - b^2 \cdot \cos(bt)}{a^2 - b^2}$
(47)	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{-at \cdot \sin(at) - \cos(at) + 1}{2a^4}$
(48)	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$\frac{b^2 \cdot \cos(at) - a^2 \cdot \cos(bt) + a^2 - b^2}{a^2 b^2 (a^2 - b^2)}$
(49)	$\frac{1}{s(s^2 - a^2)}$	$\frac{\cosh(at) - 1}{a^2}$
(50)	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{at \cdot \cosh(at) - \sinh(at)}{2a^3}$
(51)	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{t \cdot \sinh(at)}{2a}$
(52)	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{\sinh(at) + at \cdot \cosh(at)}{2a}$
(53)	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \cdot \cosh(at)$
(54)	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{2} at \cdot \sinh(at) + \cosh(at)$

	Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(55)	$\frac{1}{s^2(s^2 - a^2)}$	$\frac{\sinh(at) - at}{a^3}$
(56)	$\frac{1}{s(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{at \cdot \sinh(at) - 2 \cdot \cosh(at) + 2}{a^4}$
(57)	$\frac{1}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3a^2} \left[ \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) + e^{-3at/2} \right] \cdot e^{at/2}$
(58)	$\frac{s}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3a} \left[ \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) - e^{-3at/2} \right] \cdot e^{at/2}$
(59)	$\frac{s^2}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3} \left[ e^{-at} + 2 \cdot e^{at/2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) \right]$
(60)	$\frac{1}{s^3 - a^3}$	$\frac{1}{3a^2} \left[ e^{3at/2} - \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) \right] \cdot e^{-at/2}$
(61)	$\frac{s}{s^3 - a^3}$	$\frac{1}{3a} \left[ e^{3at/2} + \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) \right] \cdot e^{-at/2}$
(62)	$\frac{s^2}{s^3 - a^3}$	$\frac{1}{3} \left[ e^{at} - 2 \cdot e^{-at/2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}at}{2}\right) \right]$
(63)	$\frac{1}{s^4 + a^4}$	$\frac{1}{a^3 \sqrt{2}} \left[ \sin\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cosh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) - \cos\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sinh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \right]$
(64)	$\frac{s}{s^4 + a^4}$	$\frac{\sin\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sinh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)}{a^2}$
(65)	$\frac{s^2}{s^4 + a^4}$	$\frac{1}{a \sqrt{2}} \left[ \cos\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sinh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cosh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \right]$
(66)	$\frac{s^3}{s^4 + a^4}$	$\cos\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cosh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)$
(67)	$\frac{1}{s^4 - a^4}$	$\frac{\sinh(at) - \sin(at)}{2a^3}$
(68)	$\frac{s}{s^4 - a^4}$	$\frac{\cosh(at) - \cos(at)}{2a^2}$
(69)	$\frac{s^2}{s^4 - a^4}$	$\frac{\sinh(at) + \sin(at)}{2a}$
(70)	$\frac{s^3}{s^4 - a^4}$	$\frac{\cosh(at) + \cos(at)}{2}$
(71)	$\frac{s}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{\sin(at) \cdot \sinh(at)}{2a^2}$

	Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(72)	$\frac{s^2 - 2a^2}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{\cos(at) \cdot \sinh(at)}{a}$
(73)	$\frac{s^2 + 2a^2}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{\sin(at) \cdot \cosh(at)}{a}$
(74)	$\frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$	$\cos(at) \cdot \cosh(at)$
(75)	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
(76)	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$	$2 \cdot \sqrt{\frac{t}{\pi}}$
(77)	$\frac{1}{s^2\sqrt{s}}$	$\frac{4}{3} t \cdot \sqrt{\frac{t}{\pi}}$
(78)	$\frac{s+a}{s\sqrt{s}}$	$\frac{1+2at}{\sqrt{\pi t}}$
(79)	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$
(80)	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{2t \cdot \sqrt{\pi t}}$
(81)	$\frac{1}{s^n \sqrt{s}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{4^n \cdot n! \cdot t^{(2n-1)/2}}{(2n)! \sqrt{\pi}}$
(82)	$\ln\left(\frac{s-a}{s}\right)$	$\frac{1 - e^{at}}{t}$
(83)	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$
(84)	$\ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right)$	$\frac{2 \cdot \sinh(at)}{t}$
(85)	$\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2[1 - \cos(at)]}{t}$
(86)	$\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$	$\frac{2[\cos(bt) - \cos(at)]}{t}$
(87)	$\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$	$\frac{\sin(at)}{t}$
(88)	$\arctan\left(\frac{2as}{s^2 - a^2 + b^2}\right)$	$\frac{2 \cdot \sin(at) \cdot \cos(bt)}{t}$
(89)	$\arctan\left(\frac{s^2 - as + b}{ab}\right)$	$\frac{(e^{at} - 1) \cdot \sin(bt)}{t}$

# XIV Vektoranalysis

## 1 Ebene und räumliche Kurven

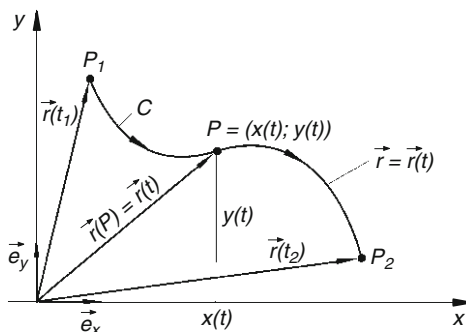
### 1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve

Eine *ebene* oder *räumliche* Kurve wird durch einen *parameterabhängigen* Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  beschrieben ( $t$ : reeller Kurvenparameter mit  $t_1 \leq t \leq t_2$ ). Die Vektorkoordinaten sind dabei stetige Funktionen von  $t$ .

#### Ortsvektor einer ebenen Kurve

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$x(t), y(t)$ : Vektorkoordinaten



#### ■ Beispiel

Normalparabel:  $\vec{r}(t) = t \vec{e}_x + t^2 \vec{e}_y = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad -\infty < t < \infty$

#### Ortsvektor einer Raumkurve

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$x(t), y(t), z(t)$ : Vektorkoordinaten

**Vektorfunktion**  $\vec{a} = \vec{a}(t)$ : Allgemeine Bezeichnung für einen von einem reellen Parameter  $t$  abhängigen Vektor  $\vec{a}$  mit den Vektorkoordinaten  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$  und  $a_z(t)$ .

## 1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter

### 1.2.1 Ableitung einer Vektorfunktion

Die *Differentiation* einer Vektorfunktion  $\vec{a} = \vec{a}(t)$  erfolgt *komponentenweise* (die Vektorkoordinaten  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$  und  $a_z(t)$  müssen dabei *differenzierbare* Funktionen des Parameters  $t$  sein, die Ableitungen werden üblicherweise durch Punkte gekennzeichnet):

$$\frac{d}{dt} \vec{a}(t) = \dot{\vec{a}}(t) = \dot{a}_x(t) \vec{e}_x + \dot{a}_y(t) \vec{e}_y + \dot{a}_z(t) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{a}_x(t) \\ \dot{a}_y(t) \\ \dot{a}_z(t) \end{pmatrix}$$

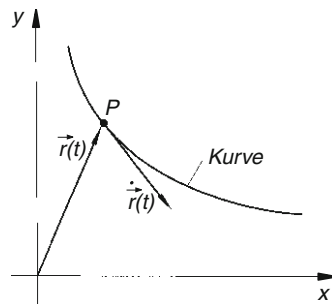
Analog werden *höhere* Ableitungen  $\ddot{\vec{a}}, \dddot{\vec{a}}, \dots$  gebildet. Alle Ableitungen sind *Vektoren*!

### 1.2.2 Tangentenvektor

Die 1. Ableitung eines Ortsvektors  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  nach dem Parameter  $t$  ergibt den in der Tangentenrichtung liegenden *Tangentenvektor*  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$ .

**Tangentenvektor einer ebenen Kurve  $\vec{r} = \vec{r}(t)$**

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$



#### ■ Beispiel

$$\vec{r}(t) = t^2 \vec{e}_x + 3t \vec{e}_y \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = 2t \vec{e}_x + 3 \vec{e}_y$$

■

**Tangentenvektor einer Raumkurve  $\vec{r} = \vec{r}(t)$**

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y + \dot{z}(t) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

### 1.2.3 Ableitungsregeln für Summen und Produkte

Summen werden *gliedweise*, Produkte nach der *Produktregel* differenziert (ähnlich wie bei Funktionen).



**Summenregel**

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} + \vec{b}) = \dot{\vec{a}} + \dot{\vec{b}}$$

**Produktregel**

$$\begin{aligned} \text{a) Skalarprodukt:} \quad & \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}} \\ \text{b) Vektorprodukt:} \quad & \frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}} \\ \text{c) Produkt aus dem Skalar } \varphi \text{ und dem Vektor } \vec{a}: \quad & \frac{d}{dt} (\varphi \vec{a}) = \dot{\varphi} \vec{a} + \varphi \dot{\vec{a}} \end{aligned}$$

Voraussetzung:  $\vec{a} = \vec{a}(t)$ ,  $\vec{b} = \vec{b}(t)$  und  $\varphi = \varphi(t)$  sind differenzierbare Funktionen.

**1.2.4 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes**

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ : Zeitabhängiger Ortsvektor der Bahnkurve eines Massenpunktes

**Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v} = \dot{\vec{v}}(t)$** 

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y + \dot{z}(t) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

**Beschleunigungsvektor  $\vec{a} = \ddot{\vec{a}}(t)$** 

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t) \vec{e}_x + \ddot{y}(t) \vec{e}_y + \ddot{z}(t) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$$

■ **Beispiel**

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ ,  $t \geq 0$  sei die schraubenlinienförmige Bahnkurve eines Elektrons. Wir berechnen

$\vec{v}(t)$  und  $\vec{a}(t)$ :

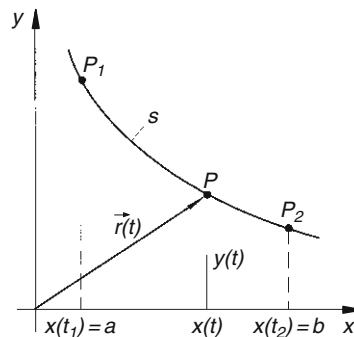
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

### 1.3 Bogenlänge einer Kurve

**Bogenlänge einer ebenen Kurve**  $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$



■ **Beispiel**

*Kreis* (Radius  $r$ ):  $\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi \Rightarrow \dot{\vec{r}} = r \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad |\dot{\vec{r}}| = r$

*Kreisumfang* (Bogenlänge des Vollkreises):

$$s = \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{r}}| dt = \int_0^{2\pi} r dt = r \cdot \int_0^{2\pi} dt = r[t]_0^{2\pi} = r(2\pi - 0) = 2\pi r$$

■

**Bogenlänge einer Raumkurve**  $\vec{r} = \vec{r}(t)$

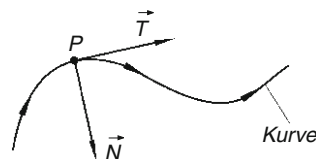
$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

### 1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor einer Kurve

Jedem Punkt  $P$  einer ebenen oder räumlichen Kurve mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  lassen sich zwei *aufeinander senkrecht* stehende *Einheitsvektoren* zuordnen: *Tangenteneinheitsvektor*  $\vec{T} = \vec{T}(t)$  und *Hauptnormaleneinheitsvektor*  $\vec{N} = \vec{N}(t)$ .

**Tangenteneinheitsvektor**  $\vec{T}$

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}|} \dot{\vec{r}} \quad (\dot{\vec{r}} \neq 0)$$



$\vec{T}$  liegt in der Kurventangente.

**Hauptnormaleneinheitsvektor  $\vec{N}$** 

$$\vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}}{|\dot{\vec{T}}|} = \frac{1}{|\dot{\vec{T}}|} \dot{\vec{T}} \quad (\text{siehe Bild Seite 367 unten})$$

$\vec{N}$  zeigt in Richtung der Krümmung (siehe XIV.1.5).

■ **Beispiel**

Kreis (Radius  $r$ ):  $\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi$

Tangenteneinheitsvektor  $\vec{T}$ :

$$\dot{\vec{r}} = r \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad |\dot{\vec{r}}| = r \Rightarrow \vec{T} = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}|} \dot{\vec{r}} = \frac{1}{r} \cdot r \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Hauptnormaleneinheitsvektor  $\vec{N}$ :

$$\dot{\vec{T}} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad |\dot{\vec{T}}| = 1 \Rightarrow \vec{N} = \frac{1}{|\dot{\vec{T}}|} \dot{\vec{T}} = \frac{1}{1} \dot{\vec{T}} = \dot{\vec{T}} = -\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

■

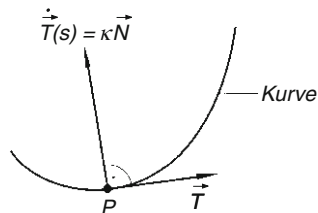
**1.5 Krümmung einer Kurve**

Die *Krümmung*  $\kappa$  einer Raumkurve ist ein Maß für die *Abweichung* von einer Geraden und somit für die *Richtungsänderung* der Kurventangente pro Bogenlängenänderung ( $\kappa \geq 0$ ).

**Krümmung einer Raumkurve  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  ( $s$ : Bogenlänge)**

$$\kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \left| \dot{\vec{T}}(s) \right| = \left| \ddot{\vec{r}}(s) \right|$$

$\vec{r} = \vec{r}(s)$ : „Natürliche“ Darstellung der Kurve

**Krümmung einer Raumkurve  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  ( $t$ : beliebiger Parameter)**

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$$

Krümmungsradius:  $\varrho = 1/\kappa$  (Kehrwert der Krümmung)

**Sonderfall: Ebene Kurve  $\vec{r} = \vec{r}(t)$** 

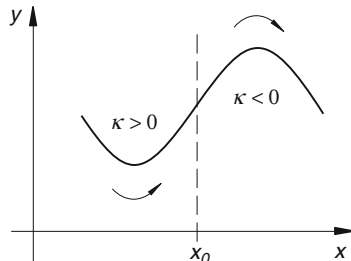
Bei einer *ebenen* Kurve unterscheidet man noch zwischen *Rechts-* und *Linkskrümmung* durch ein Vorzeichen (dies ist bei einer Raumkurve *nicht* möglich).

Es gilt:

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

$$\kappa > 0 \Rightarrow \text{Linkskrümmung}$$

$$\kappa < 0 \Rightarrow \text{Rechtskrümmung}$$



Krümmungsradius:  $\varrho = 1/|\kappa|$

■ **Beispiel**

Wir bestimmen Krümmung und Krümmungsradius des Kreises  $x = r \cdot \cos t$ ,  $y = r \cdot \sin t$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ :

$$\dot{x} = -r \cdot \sin t, \quad \ddot{x} = -r \cdot \cos t, \quad \dot{y} = r \cdot \cos t, \quad \ddot{y} = -r \cdot \sin t$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{(-r \cdot \sin t) \cdot (-r \cdot \sin t) - (-r \cdot \cos t) \cdot (r \cdot \cos t)}{(r^2 \cdot \sin^2 t + r^2 \cdot \cos^2 t)^{3/2}} = \\ &= \frac{r^2 \cdot \sin^2 t + r^2 \cdot \cos^2 t}{[r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)]^{3/2}} = \frac{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}{[r^2]^{3/2}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

(unter Beachtung von  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ )

$$\text{Somit: } \varrho = \frac{1}{|\kappa|} = r$$

■

**Ebene Kurve  $y = f(x)$** 

Ortsvektor:  $\vec{r} = \vec{r}(x) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = x\vec{e}_x + f(x)\vec{e}_y$

(Parameter ist die Koordinate  $x$ )

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad \begin{array}{ll} y'' < 0 & \Rightarrow \text{Rechtskrümmung} \\ y'' > 0 & \Rightarrow \text{Linkskrümmung} \end{array}$$

■ **Beispiel**

Wir berechnen die Krümmung der Normalparabel  $y = x^2$  an der Stelle  $x = 0$ :

$$y = x^2, \quad y' = 2x, \quad y'' = 2$$

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}} \Rightarrow \kappa(x=0) = 2$$

■

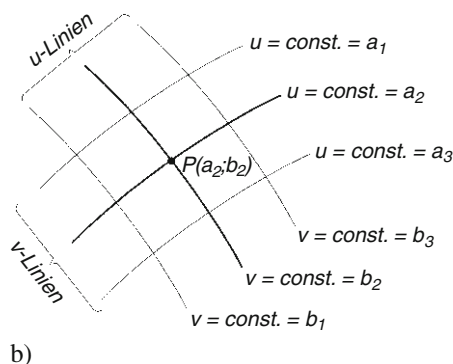
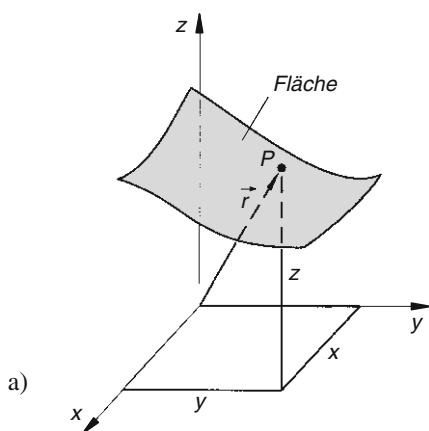
## 2 Flächen im Raum

### 2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche

Ortsvektor einer Fläche im Raum (Bild a))

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v) = x(u; v) \vec{e}_x + y(u; v) \vec{e}_y + z(u; v) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(u; v) \\ y(u; v) \\ z(u; v) \end{pmatrix}$$

$u, v$ : voneinander unabhängige (reelle) Parameter (sog. Flächenparameter)



#### ■ Beispiel

Ortsvektor der Mantelfläche eines Rotationsparaboloids ( $u, v \in \mathbb{R}$ ):

$$\vec{r}(u; v) = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y + (u^2 + v^2) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

#### Parameter- oder Koordinatenlinien einer Fläche (Bild b))

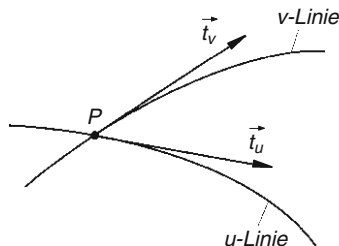
$u$ -Linien ( $u$ : variabel,  $v$ : fest):  $\vec{r} = \vec{r}(u; v = \text{const.}) = \vec{r}(u)$

$v$ -Linien ( $u$ : fest,  $v$ : variabel):  $\vec{r} = \vec{r}(u = \text{const.}; v) = \vec{r}(v)$

#### Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

(Partielle Ableitungen 1. Ordnung des Ortsvektors  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$ )

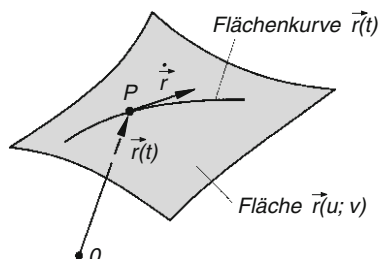


## 2.2 Flächenkurven

Sind die Parameter  $u$  und  $v$  einer Fläche  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$  selbst Funktionen einer (reellen) Variablen  $t$ , so beschreibt der Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(u(t); v(t))$$

eine *Flächenkurve* (d. h. eine auf der Fläche gelegene Kurve).



### Tangentenvektor an eine Flächenkurve

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{u}(t) \vec{t}_u + \dot{v}(t) \vec{t}_v$$

$\dot{u}(t), \dot{v}(t)$ : Ableitungen der Flächenparameter  $u$  und  $v$  nach  $t$

$\vec{t}_u, \vec{t}_v$ : Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien der Fläche

## 2.3 Flächennormale und Flächenelement

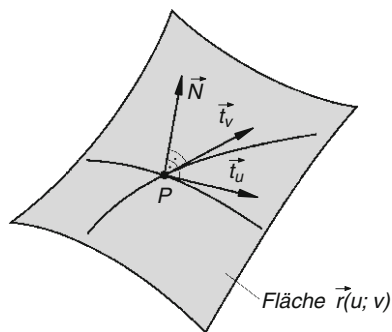
Jedem Punkt  $P$  einer Fläche mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$  lassen sich eine *Flächennormale*  $\vec{N}$  und ein *Flächenelement*  $dA$  zuordnen.

### Flächennormale $\vec{N}$

$\vec{N}$  steht *senkrecht* auf der Tangentialebene bzw. dem Flächenelement  $dA$ .

$$\vec{N} = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{|\vec{t}_u \times \vec{t}_v|}, \quad |\vec{N}| = 1$$

$\vec{t}_u, \vec{t}_v$ : Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien der Fläche

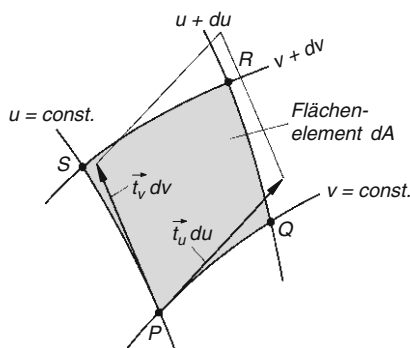


**Flächenelement  $dA$** 

Das Flächenelement  $dA$  wird durch je zwei benachbarte  $u$ - und  $v$ -Linien begrenzt.

$$dA = |\vec{t}_u \times \vec{t}_v| du dv$$

$\vec{t}_u, \vec{t}_v$ : Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien der Fläche

**2.4 Tangentialebene**

Die Tangentialebene in einem Flächenpunkt  $P$  enthält alle *Tangenten*, die man in diesem Punkt an die Fläche anlegen kann.

**2.4.1 Tangentialebene beim Flächentyp  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$** 

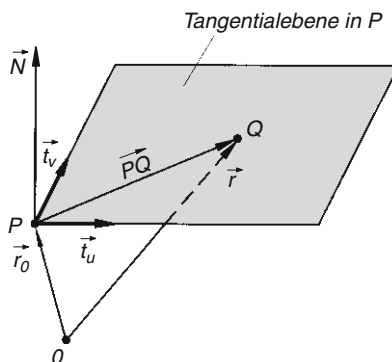
$$\vec{N}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad \text{oder} \quad (\vec{t}_u \times \vec{t}_v)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$\vec{N}_0$ : Flächennormale in  $P$

$\vec{r}_0$ : Ortsvektor von  $P$

$\vec{r}$ : Ortsvektor eines beliebigen Punktes  $Q$  der Tangentialebene

$\vec{t}_u, \vec{t}_v$ : Tangentenvektoren in  $P$

**■ Beispiel**

$$\begin{aligned} \vec{r}(u; v) &= u \vec{e}_x + v \vec{e}_y + (u^2 + v^2) \vec{e}_z = \\ &= \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix} \quad (u, v \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Wir bestimmen die *Tangentialebene* für die Flächenparameter  $u = 1$  und  $v = 1$ , d. h. im Flächenpunkt  $P = (1; 1; 2)$ :

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t}_u(1; 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_v(1; 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_u(1; 1) \times \vec{t}_v(1; 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{t}_u(1; 1) \times \vec{t}_v(1; 1)) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2(x-1) - 2(y-1) + 1(z-2) = 0 \Rightarrow z = 2x + 2y - 2$$

■

### 2.4.2 Tangentialebene beim Flächentyp $z = f(x; y)$

*Vektordarstellung* der Fläche (die unabhängigen Variablen  $x$  und  $y$  dienen dabei als *Flächenparameter*):

$$\vec{r} = \vec{r}(x; y) = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + f(x; y) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x; y) \end{pmatrix}$$

### Tangentialebene im Flächenpunkt $P = (x_0; y_0; z_0 = f(x_0; y_0))$

$$(\vec{t}_x \times \vec{t}_y)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{N}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\vec{t}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}, \quad \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f_x, f_y$ : Partielle Ableitungen 1. Ordnung von  $z = f(x; y)$

### Tangentialebene im Flächenpunkt $P$ in expliziter Form

$$z = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) + z_0$$

(Siehe hierzu auch IX.2.4)

$f_x(x_0; y_0), f_y(x_0; y_0)$ : Partielle Ableitungen 1. Ordnung von  $z = f(x; y)$  im Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  mit  $z_0 = f(x_0; y_0)$

### 2.4.3 Tangentialebene beim Flächentyp $F(x; y; z) = 0$

$$(\text{grad } F(x; y; z))_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Bezeichnungen wie oben; der Gradient von  $F(x; y; z)$  wird im Flächenpunkt  $P$  gebildet (siehe hierzu XIV.4).

#### ■ Beispiel

Gleichung der Tangentialebene an die Kugeloberfläche  $F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$  im Punkt  $P = (2; 2; 1)$ :

$$\text{grad } F = \text{grad } (x^2 + y^2 + z^2 - 9) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{grad } F)_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(\text{grad } F)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 2 \\ z - 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$4(x - 2) + 4(y - 2) + 2(z - 1) = 0 \Rightarrow z = -2x - 2y + 9$$

■



## 3 Skalar- und Vektorfelder

### 3.1 Skalarfelder

Ein *Skalarfeld* ordnet jedem Punkt  $P$  eines ebenen oder räumlichen Bereiches in eindeutiger Weise einen *Skalar* zu:

#### Ebenes bzw. räumliches Skalarfeld

$$\phi(P) = \phi(x; y) \quad \text{bzw.} \quad \phi(P) = \phi(x; y; z)$$

*Stationäres Feld*: Das skalare Feld verändert sich *nicht* im Laufe der Zeit, ist also *zeitunabhängig*.

*Niveau- oder Äquipotentialflächen*: Flächen im Raum, auf denen das Skalarfeld einen *konstanten* Wert annimmt:  $\phi(x; y; z) = \text{const.}$

*Niveaulinien* eines *ebenen* Skalarfeldes: Kurven, auf denen das Skalarfeld einen *konstanten* Wert annimmt:  $\phi(x; y) = \text{const.}$

#### ■ Beispiel

*Elektrostatisches Potential* in der Umgebung einer geladenen Kugel. Niveau- oder Äquipotentialflächen: *konzentrische Kugelschalen*.

■

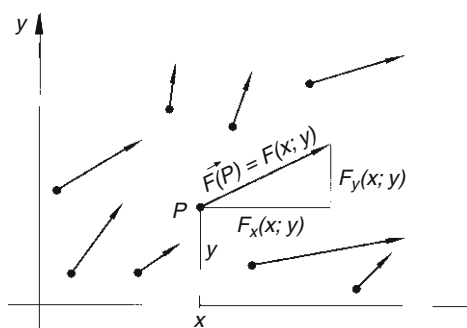
### 3.2 Vektorfelder

Ein *Vektorfeld* ordnet jedem Punkt  $P$  eines ebenen oder räumlichen Bereiches in eindeutiger Weise einen *Vektor* zu:

#### Ebenes Vektorfeld

$$\begin{aligned} \vec{F}(x; y) &= F_x(x; y) \vec{e}_x + F_y(x; y) \vec{e}_y = \\ &= \begin{pmatrix} F_x(x; y) \\ F_y(x; y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$F_x, F_y$ : Skalare *Komponenten* des ebenen Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y)$



## Räumliches Vektorfeld

$$\vec{F}(x; y; z) = F_x(x; y; z) \vec{e}_x + F_y(x; y; z) \vec{e}_y + F_z(x; y; z) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} F_x(x; y; z) \\ F_y(x; y; z) \\ F_z(x; y; z) \end{pmatrix}$$

$F_x, F_y, F_z$ : Skalare Komponenten des räumlichen Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z)$

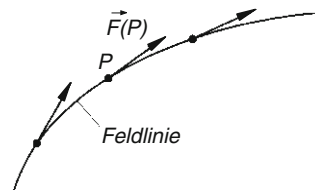
### ■ Beispiel

*Geschwindigkeitsfeld* einer strömenden Flüssigkeit: Zu jedem Flüssigkeitsteilchen (Massenpunkt) gehört ein Geschwindigkeitsvektor.

## Feldlinien

*Kurven*, die in jedem Punkt  $P$  eines Vektorfeldes  $\vec{F} = \vec{F}(P)$  durch den dortigen Feldvektor *tangiert* werden. Gleichung der Feldlinien:

$$\vec{F} \times \dot{\vec{r}} = \vec{0} \quad \text{oder} \quad \vec{F} \times d\vec{r} = \vec{0}$$



$\vec{r}$ : Ortsvektor von  $P$

### ■ Beispiel

*Elektrisches Feld* in der Umgebung einer positiven Punktladung: Die elektrischen Feldlinien verlaufen *radial* nach außen.

## Spezielle Vektorfelder

### 1. Homogenes Vektorfeld: $\vec{F}(P) = \overrightarrow{\text{const.}}$

Der Feldvektor hat überall die *gleiche* Richtung und den *gleichen* Betrag.

*Beispiel*: Elektrisches Feld in einem geladenen Plattenkondensator.

### 2. Kugel- oder radialsymmetrisches Vektorfeld (Zentralfeld): $\vec{F}(P) = f(r) \vec{e}_r$

Der Feldvektor hat *radiale* Richtung (Einheitsvektor  $\vec{e}_r$ ), sein Betrag hängt nur vom *Abstand*  $r$  vom Nullpunkt ab:  $|\vec{F}(P)| = f(r)$ .

*Beispiel*: Gravitationsfeld der Erde.

### 3. Zylinder- oder axialsymmetrisches Vektorfeld: $\vec{F}(P) = f(\varrho) \vec{e}_\varrho$

Der Feldvektor hat *axiale* Richtung (Einheitsvektor  $\vec{e}_\varrho$ ), sein Betrag hängt nur vom *Abstand*  $\varrho$  von der Zylinderachse ab:  $|\vec{F}(P)| = f(\varrho)$ .

*Beispiel*: Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Zylinders.

## 4 Gradient eines Skalarfeldes

### Definition des Gradienten (in kartesischen Koordinaten)

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \partial \phi / \partial x \\ \partial \phi / \partial y \\ \partial \phi / \partial z \end{pmatrix}$$

$\phi = \phi(x; y; z)$ : Räumliches Skalarfeld

Darstellung des Gradienten in *Polar*-, *Zylinder*- und *Kugelkoordinaten*: siehe XIV.6

Bei einem *ebenen* Feld verschwindet die *dritte* Komponente.

#### ■ Beispiel

Gradient des räumlichen Skalarfeldes  $\phi = x^2 + y^2 + z$  in  $P = (1; 0; 2)$ :

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z = 2x \vec{e}_x + 2y \vec{e}_y + 1 \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{grad } \phi)_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix}$$

Die skalaren Komponenten sind die partiellen Differentialoperatoren  $\partial / \partial x$ ,  $\partial / \partial y$  und  $\partial / \partial z$  (siehe hierzu IX.2.1)

Der Vektor  $\text{grad } \phi$  ist *formal* auch als Produkt des Nabla-Operator  $\vec{\nabla}$  mit dem Skalar  $\phi$  darstellbar:

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi = \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} \partial \phi / \partial x \\ \partial \phi / \partial y \\ \partial \phi / \partial z \end{pmatrix}$$

#### Anmerkungen

- (1) Der Operator „grad“ (Nabla-Operator) ist ein *Differentialoperator 1. Ordnung*.
- (2) Der Gradient eines räumlichen Skalarfeldes  $\phi(x; y; z)$  steht immer *senkrecht* auf den *Niveauflächen*  $\phi(x; y; z) = \text{const.}$  und zeigt in die Richtung des *größten* Zuwachses von  $\phi$ .
- (3) Bei einem *ebenen* Skalarfeld  $\phi(x; y)$  ist  $\text{grad } \phi$  ein *ebener* Vektor, der *senkrecht* zu den *Niveaulinien*  $\phi(x; y) = \text{const.}$  verläuft.

### Rechenregeln

$\phi$  und  $\psi$  sind *skalare* Felder,  $c$  eine Konstante:

- (1)  $\text{grad } c = 0$
- (2)  $\text{grad } (c\phi) = c(\text{grad } \phi)$
- (3)  $\text{grad } (\phi + \psi) = \text{grad } \phi + \text{grad } \psi$
- (4)  $\text{grad } (\phi + c) = \text{grad } \phi$
- (5)  $\text{grad } (\phi \cdot \psi) = \phi(\text{grad } \psi) + \psi(\text{grad } \phi)$

### Richtungsableitung

Die Richtungsableitung  $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}}$  eines Skalarfeldes  $\phi$  in Richtung des Vektors  $\vec{a}$  ist ein Maß für die *Änderung* des Funktionswertes von  $\phi$ , wenn man von einem Punkt  $P$  aus in Richtung von  $\vec{a}$  um eine Längeneinheit fortschreitet:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}} = (\text{grad } \phi) \cdot \vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} (\text{grad } \phi) \cdot \vec{a}$$

$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}}$  ist die *Projektion* des Gradienten von  $\phi$  auf den *normierten* Richtungsvektor  $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ . Der *Maximalwert* wird in Richtung des *Gradienten* erreicht.

### ■ Beispiel

$$\phi = xy + z^2, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (1; 1; 2)$$

Wir berechnen die *Richtungsableitung* des skalaren Feldes  $\phi$  in  $P$  in Richtung des Vektors  $\vec{a}$ :

$$\text{grad } \phi = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{grad } \phi)_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}} \right)_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} (\text{grad } \phi)_0 \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + 1 + 4) = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

■

## 5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes

### 5.1 Divergenz eines Vektorfeldes

#### Definition der Divergenz (in kartesischen Koordinaten)

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$F_x, F_y, F_z$ : Skalare Komponenten des Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z)$

Bei einem ebenen Feld verschwindet der dritte Summand.

Darstellung der Divergenz in Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten: siehe XIV.6

#### ■ Beispiel

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x + y \\ yz \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y} (x + y) + \frac{\partial}{\partial z} (yz) = 2xy + 1 + y$$

$$\text{Divergenz in } P = (1; 2; 0): (\operatorname{div} \vec{F})_0 = 4 + 1 + 2 = 7$$

Der Skalar  $\operatorname{div} \vec{F}$  ist auch als Skalarprodukt des Nabla-Operators  $\vec{\nabla}$  mit dem Vektor  $\vec{F}$  darstellbar:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

#### Anmerkungen

- (1) Der Operator „div“ ist ein Differentialoperator 1. Ordnung.
- (2) Die Bezeichnung „Divergenz“ stammt aus der Hydrodynamik und bedeutet „Auseinanderströmen einer Flüssigkeit“ („Divergieren“).
- (3)  $\operatorname{div} \vec{F}$  heißt auch „Quelldichte“ oder „Quellstärke pro Volumeneinheit“. Ein Vektorfeld  $\vec{F}$ , dessen Divergenz verschwindet, heißt *quellenfrei*. Gilt in einem Punkt  $\operatorname{div} \vec{F} > 0$ , so hat das Vektorfeld dort eine „Quelle“, für  $\operatorname{div} \vec{F} < 0$  eine „Senke“.

#### Rechenregeln

$\vec{A}$  und  $\vec{B}$  sind Vektorfelder,  $\vec{a}$  ein konstanter Vektor,  $\phi$  ein skalares Feld, und  $c$  eine (reelle) Konstante:

- (1)  $\operatorname{div} \vec{a} = 0$
- (2)  $\operatorname{div} (\phi \vec{A}) = (\operatorname{grad} \phi) \cdot \vec{A} + \phi (\operatorname{div} \vec{A})$
- (3)  $\operatorname{div} (c \vec{A}) = c (\operatorname{div} \vec{A})$
- (4)  $\operatorname{div} (\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \vec{B}$
- (5)  $\operatorname{div} (\vec{A} + \vec{a}) = \operatorname{div} \vec{A}$

## 5.2 Rotation eines Vektorfeldes

### Definition der Rotation (in kartesischen Koordinaten)

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$F_x, F_y, F_z$ : Skalare Komponenten des Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z)$

#### ■ Beispiel

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xyz \\ x + y \\ z^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x + y) \\ \frac{\partial}{\partial z}(xyz) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x + y) - \frac{\partial}{\partial y}(xyz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ xy - 0 \\ 1 - xz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ xy \\ 1 - xz \end{pmatrix}$$

Der Vektor  $\operatorname{rot} \vec{F}$  ist auch als *Vektorprodukt* des Nabla-Operators  $\vec{\nabla}$  mit dem Vektor  $\vec{F}$  darstellbar:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

### Determinantenschreibweise

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ : Partielle Differentialoperatoren 1. Ordnung (siehe IX.2.1)

Durch *Entwicklung* der Determinante nach den Elementen der 1. Zeile erhält man die weiter oben stehende Definitionsformel der Rotation.

#### Anmerkungen

- (1) Der Operator „rot“ ist ein *Differentialoperator 1. Ordnung*.
- (2) Die Bezeichnung „Rotation“ stammt aus der *Hydrodynamik* und beschreibt dort die Bildung von „Wirbeln“ (geschlossene Feldlinien in den Geschwindigkeitsfeldern strömender Flüssigkeiten).
- (3) Der Vektor  $\operatorname{rot} \vec{F}$  heißt auch „Wirbeldichte“ oder „Wirbelfeld“ zu  $\vec{F}$ .
- (4) Ein Vektorfeld  $\vec{F}$ , dessen Rotation *verschwindet*, heißt *wirbelfrei*.

**Rotation eines ebenen Vektorfeldes ( $F_z = 0$ )**

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

Die Komponenten in  $x$ - und  $y$ -Richtung *verschwinden*!

**Rechenregeln**

$\vec{A}$  und  $\vec{B}$  sind *Vektorfelder*,  $\vec{a}$  ein *konstanter Vektor*,  $\phi$  ein *skalares Feld* und  $c$  eine (reelle) *Konstante*:

- (1)  $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$
- (2)  $\text{rot } (\phi \vec{A}) = (\text{grad } \phi) \times \vec{A} + \phi (\text{rot } \vec{A})$
- (3)  $\text{rot } (c \vec{A}) = c (\text{rot } \vec{A})$
- (4)  $\text{rot } (\vec{A} + \vec{B}) = \text{rot } \vec{A} + \text{rot } \vec{B}$
- (5)  $\text{rot } (\vec{A} + \vec{a}) = \text{rot } \vec{A}$

**5.3 Spezielle Vektorfelder****Quellenfreies Vektorfeld:  $\text{div } \vec{F} = 0$** 

Ein *quellenfreies* Vektorfeld  $\vec{F}$  lässt sich immer als *Rotation* eines Vektorfeldes  $\vec{E}$ , *Vektorpotential* genannt, darstellen:

$$\text{div } \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \text{rot } \vec{E}$$

Auch die Umkehrung gilt: Ein *Wirbelfeld*  $\vec{F} = \text{rot } \vec{E}$  ist *quellenfrei*:

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \text{div } \vec{F} = \text{div } (\text{rot } \vec{E}) = 0$$

*Quellenfreie* Felder: *Elektrisches Feld* einer Punktladung, *Gravitationsfeld* der Erde.

**Wirbelfreies Vektorfeld:  $\text{rot } \vec{F} = 0$** 

Ein *wirbelfreies* Vektorfeld  $\vec{F}$  lässt sich stets als *Gradient* eines *skalaren* Feldes  $\phi$  darstellen:

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \text{grad } \phi$$

Auch die Umkehrung gilt: Ein *Gradientenfeld*  $\vec{F} = \text{grad } \phi$  ist *wirbelfrei*:

$$\vec{F} = \text{grad } \phi \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \vec{F} = \text{rot } (\text{grad } \phi) = \vec{0}$$

*Wirbelfreie* Felder: *Homogenes elektrisches Feld* in einem Plattenkondensator, *Zentralfelder* wie z. B. das *Gravitationsfeld* der Erde, *zylindersymmetrische* Felder.

### Quellen- und wirbelfreies Vektorfeld: $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ und $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$

Ein quellen- und wirbelfreies Vektorfeld  $\vec{F}$  ist als *Gradient* eines skalaren Feldes  $\phi$  darstellbar, d. h.  $\vec{F} = \operatorname{grad} \phi$ , wobei  $\phi$  der *Laplaceschen* Differentialgleichung

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

genügt. Dabei ist  $\Delta$  der sog. *Laplace-Operator*

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \operatorname{div} (\operatorname{grad}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(*Differentialoperator* 2. Ordnung, *Skalarprodukt* des Nabla-Operators  $\vec{\nabla}$  mit sich selbst).

## 6 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in speziellen Koordinatensystemen

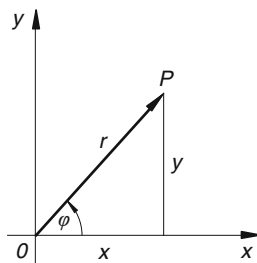
### 6.1 Darstellung in Polarkoordinaten

#### Polarkoordinaten

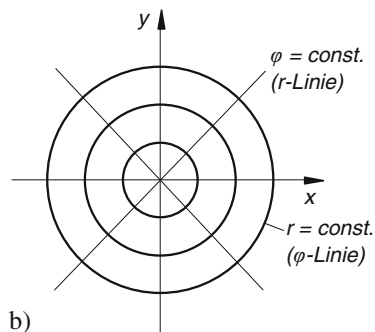
Die *Polarkoordinaten*  $r$ ,  $\varphi$  eines Punktes  $P$  der Ebene bestehen aus einer *Abstandskoordinate*  $r$  und einer *Winkelkoordinate*  $\varphi$  (Bild a)):

$r$ : Abstand des Punktes  $P$  vom Koordinatenursprung  $O$  ( $r \geq 0$ )

$\varphi$ : Winkel zwischen dem Ortsvektor  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  des Punktes  $P$  und der positiven  $x$ -Achse (Hauptwert:  $0 \leq \varphi < 2\pi$  bzw.  $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ ).



a)



b)



**Koordinatenlinien (Bild b, siehe Seite 369 unten)**

Das Polarkoordinatensystem ist ein sog. *krummliniges* Koordinatensystem mit den folgenden *Koordinatenlinien*:

$r = \text{const.}$ : *Konzentrische Kreise* um den Koordinatenursprung ( $\varphi$ -Linien)

$\varphi = \text{const.}$ : *Radial* vom Koordinatenursprung nach *außen* laufende Strahlen ( $r$ -Linien)

Die  $r$ - und  $\varphi$ -Linien schneiden sich in jedem Punkt *senkrecht*, d. h. die Polarkoordinaten sind (wie die kartesischen Koordinaten) *orthogonale* ebene Koordinaten.

**Zusammenhang zwischen den Polarkoordinaten und den kartesischen Koordinaten**

*Polarkoordinaten*  $\rightarrow$  *Kartesische Koordinaten*

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi$$

*Kartesische Koordinaten*  $\rightarrow$  *Polarkoordinaten*

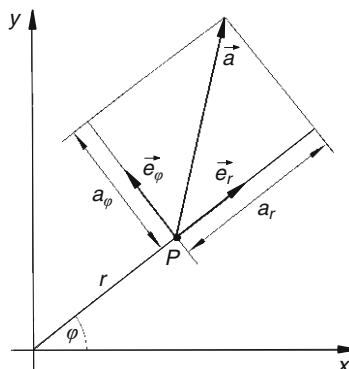
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

**Vektordarstellung in Polarkoordinaten**

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ : Tangenteneinheitsvektoren an die  $r$ - bzw.  $\varphi$ -Koordinatenlinie (Basisvektoren)

$a_r, a_\varphi$ : Vektorkoordinaten

**Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Polarkoordinaten****Skalarfeld in Polarkoordinaten**

$$\phi = \phi(r; \varphi)$$

**Vektorfeld in Polarkoordinaten**

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi) = F_r(r; \varphi) \vec{e}_r + F_\varphi(r; \varphi) \vec{e}_\varphi$$

**Gradient des Skalarfeldes  $\phi(r; \varphi)$** 

$$\text{grad } \phi(r; \varphi) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

**Divergenz des Vektorfeldes  $\vec{F}(r; \varphi)$** 

$$\operatorname{div} \vec{F}(r; \varphi) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

**Rotation des Vektorfeldes  $\vec{F}(r; \varphi)$** 

Es existiert nur eine Komponente *senkrecht* zur  $x, y$ -Ebene ( $z$ -Richtung):

$$[\operatorname{rot} \vec{F}(r; \varphi)]_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\varphi) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}$$

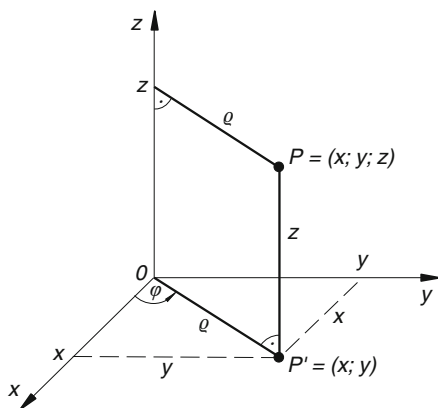
**Laplace-Operator**

$$\Delta \phi(r; \varphi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

**6.2 Darstellung in Zylinderkoordinaten****Zylinderkoordinaten**

Die Zylinderkoordinaten  $\varrho, \varphi$  und  $z$  eines Raumpunktes  $P$  bestehen aus den *Polarkoordinaten*  $\varrho$  und  $\varphi$  des Projektionspunktes  $P'$  in der  $x, y$ -Ebene und der (kartesischen) *Höhenkoordinate*  $z$ <sup>1)</sup>:

$$\varrho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$



<sup>1)</sup> Die Zylinderkoordinate  $\varrho$  gibt den *senkrechten* Abstand des Raumpunktes  $P$  von der  $z$ -Achse an und ist daher *nicht* zu verwechseln mit dem Abstand  $r$  desselben Punktes vom Koordinatenursprung  $0$ , d. h. mit der Länge des Ortsvektors  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ . Sie wird häufig auch (wenn Verwechslungen auszuschließen sind) mit  $r$  bezeichnet.

**Koordinatenflächen**

*Koordinatenflächen* entstehen, wenn jeweils *eine* der drei Zylinderkoordinaten *festgehalten* wird:

$\varrho = \text{const.}$ : *Zylindermantel*

$\varphi = \text{const.}$ : *Halbebene* durch die  $z$ -Achse

$z = \text{const.}$ : *Parallelebene* zur  $x, y$ -Ebene in der „Höhe“  $z$

Die Koordinatenflächen stehen paarweise *senkrecht* aufeinander.

**Koordinatenlinien**

*Koordinatenlinien* entstehen, wenn jeweils *zwei* der drei Zylinderkoordinaten *festgehalten* werden. Sie sind somit *Schnittkurven* zweier Koordinatenflächen:

$\varphi, z = \text{const.}$ : *Gerade* durch die  $z$ -Achse *parallel* zur  $x, y$ -Ebene ( $\varrho$ -Linie)

$\varrho, z = \text{const.}$ : *Kreis* um die  $z$ -Achse *parallel* zur  $x, y$ -Ebene ( $\varphi$ -Linie)

$\varrho, \varphi = \text{const.}$ : *Mantellinie* des Zylinder ( $z$ -Linie)

Die Koordinatenlinien stehen in jedem Punkt paarweise *senkrecht* aufeinander (Ausnahme: Koordinatenursprung). Die Zylinderkoordinaten sind daher (wie die kartesischen Koordinaten) *orthogonale* räumliche Koordinaten.

**Zusammenhang zwischen den Zylinderkoordinaten und den kartesischen Koordinaten**

*Zylinderkoordinaten*  $\rightarrow$  *Kartesische Koordinaten*

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin \varphi, \quad z = z$$

*Kartesische Koordinaten*  $\rightarrow$  *Zylinderkoordinaten*

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z$$

Die Zylinderkoordinaten stimmen mit den kartesischen Koordinaten in der „Höhenkoordinate“  $z$  überein.

**Linienelement  $ds$** 

Das *Linienelement* ist der Verbindungsbogen zweier differentiell benachbarter Punkte, die sich in ihren Zylinderkoordinaten um  $d\varrho, d\varphi, dz$  voneinander unterscheiden. Es besitzt die *Länge*

$$ds = \sqrt{(d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\varphi)^2 + (dz)^2}$$

**Flächenelement  $dA$  auf dem Zylindermantel ( $\varrho = \text{const.}$ )**

Flächenstück auf dem Zylindermantel, begrenzt durch je zwei benachbarte  $\varphi$ - und  $z$ -Koordinatenlinien, mit dem Flächeninhalt

$$dA = \varrho \, d\varphi \, dz$$

**Volumenelement  $dV$** 

Das Volumenelement betragt

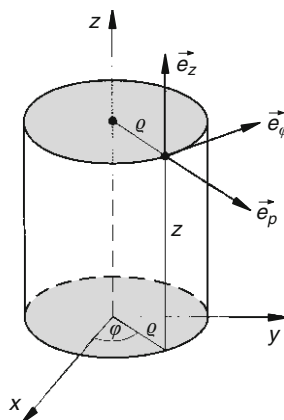
$$dV = \varrho \, d\varrho \, d\varphi \, dz$$

**Vektordarstellung in Zylinderkoordinaten**

$$\vec{a} = a_\varrho \vec{e}_\varrho + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z$$

$\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ : Tangenteneinheitsvektoren an die  $\varrho$ -,  $\varphi$ - bzw.  $z$ -Koordinatenlinie (Basisvektoren)

$a_\varrho, a_\varphi, a_z$ : Vektorkoordinaten

**Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten****Skalarfeld in Zylinderkoordinaten**

$$\phi = \phi(\varrho; \varphi; z)$$

**Vektorfeld in Zylinderkoordinaten**

$$\vec{F} = \vec{F}(\varrho; \varphi; z) = F_\varrho(\varrho; \varphi; z) \vec{e}_\varrho + F_\varphi(\varrho; \varphi; z) \vec{e}_\varphi + F_z(\varrho; \varphi; z) \vec{e}_z$$

**Gradient des Skalarfeldes  $\phi(\varrho; \varphi; z)$** 

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

**Divergenz des Vektorfeldes  $\vec{F}(\varrho; \varphi; z)$** 

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot F_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

**Rotation des Vektorfeldes  $\vec{F}(\varrho; \varphi; z)$** 

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\varrho + \left( \frac{\partial F_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \varrho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot F_\varphi) - \frac{\partial F_\varrho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

**Laplace-Operator**

$$\Delta \phi = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

## 6.3 Darstellung in Kugelkoordinaten

### Kugelkoordinaten

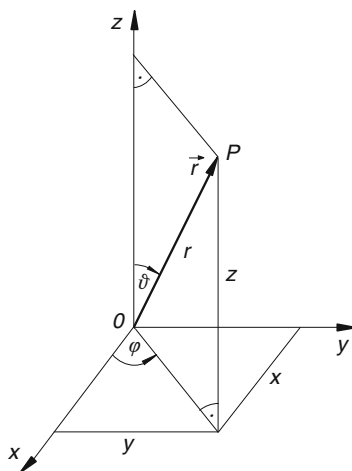
Die *Kugelkoordinaten*  $r$ ,  $\vartheta$  und  $\varphi$  eines Raumpunktes  $P$  bestehen aus einer *Abstandskoordinate*  $r$  und zwei *Winkelkoordinaten*  $\vartheta$  und  $\varphi$ :

- $r$ : Länge des Ortsvektors  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  ( $r \geq 0$ )  
 $\vartheta$ : Winkel zwischen dem Ortsvektor  $\vec{r}$  und der *positiven*  $z$ -Achse ( $0 \leq \vartheta \leq \pi$ )  
 $\varphi$ : Winkel zwischen der Projektion des Ortsvektors  $\vec{r}$  auf die  $x, y$ -Ebene und der *positiven*  $x$ -Achse ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ )

### Bezeichnungen

$\vartheta$ : Breitenkoordinate

$\varphi$ : Längenkoordinate



### Koordinatenflächen

*Koordinatenflächen* entstehen, wenn jeweils *eine* der drei Kugelkoordinaten *festgehalten* wird:

$r = \text{const.}$ : Kugeloberfläche (Kugelschale)

$\vartheta = \text{const.}$ : Mantelfläche eines Kegels (Kegelspitze im Koordinatenursprung)

$\varphi = \text{const.}$ : Halbebene durch die  $z$ -Achse

Die Koordinatenflächen stehen in jedem Punkt paarweise *senkrecht* aufeinander.

### Koordinatenlinien

*Koordinatenlinien* entstehen, wenn jeweils *zwei* der drei Zylinderkoordinaten *festgehalten* werden. Sie sind somit *Schnittkurven* zweier Koordinatenflächen:

$\vartheta, \varphi = \text{const.}$ : *Radialer* Strahl vom Koordinatenursprung nach *außen* ( $r$ -Linie)

$r, \vartheta = \text{const.}$ : *Breitenkreis* mit dem Radius  $r \cdot \sin \vartheta$  ( $\varphi$ -Linie)

$r, \varphi = \text{const.}$ : *Längenkreis* ( $\vartheta$ -Linie)

Die Koordinatenlinien stehen in jedem Punkt paarweise *senkrecht* aufeinander. Die Kugelkoordinaten sind daher (wie die kartesischen Koordinaten und die Zylinderkoordinaten) *orthogonale* räumliche Koordinaten.

### Zusammenhang zwischen den Kugelkoordinaten und den kartesischen Koordinaten

*Kugelkoordinaten*  $\rightarrow$  *Kartesische Koordinaten*

$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cdot \cos \vartheta$$

*Kartesische Koordinaten*  $\rightarrow$  *Kugelkoordinaten*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arccos \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

### Linielement $ds$

Das *Linielement* ist der Verbindungsbogen zweier differentiell benachbarter Punkte, die sich in ihren Kugelkoordinaten um  $dr, d\vartheta, d\varphi$  voneinander unterscheiden. Es besitzt die *Länge*

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\vartheta)^2 + r^2 \cdot \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2}$$

### Flächenelement $dA$ auf der Kugeloberfläche ( $r = \text{const.}$ )

Flächenstück auf der Kugeloberfläche, begrenzt durch je zwei benachbarte  $\vartheta$ - und  $\varphi$ -Koordinatenlinien, mit dem Flächeninhalt

$$dA = r^2 \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

### Volumenelement $dV$

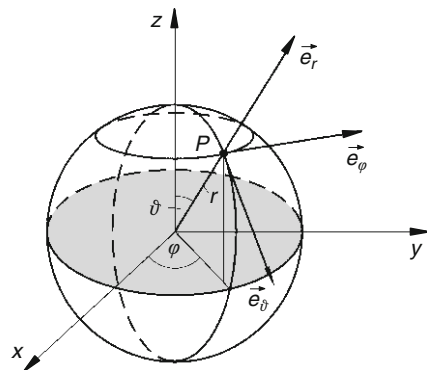
$$dV = dA \, dr = r^2 \cdot \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

### Vektordarstellung in Kugelkoordinaten

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\vartheta \vec{e}_\vartheta + a_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ : Tangenteneinheitsvektoren an die  $r$ -,  $\vartheta$ - bzw.  $\varphi$ -Koordinatenlinie (Basisvektoren)

$a_r, a_\vartheta, a_\varphi$ : Vektorkoordinaten



**Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten****Skalarfeld in Kugelkoordinaten**

$$\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi)$$

**Vektorfeld in Kugelkoordinaten**

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r(r; \vartheta; \varphi) \vec{e}_r + F_\vartheta(r; \vartheta; \varphi) \vec{e}_\vartheta + F_\varphi(r; \vartheta; \varphi) \vec{e}_\varphi$$

**Gradient des Skalarfeldes  $\phi(r; \vartheta; \varphi)$** 

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

**Divergenz des Vektorfeldes  $\vec{F}(r; \vartheta; \varphi)$** 

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot F_r) + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot F_\vartheta) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

**Rotation des Vektorfeldes  $\vec{F}(r; \vartheta; \varphi)$** 

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = & \left\{ \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot F_\varphi) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \right\} \vec{e}_r + \\ & + \left\{ \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\varphi) \right\} \vec{e}_\vartheta + \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\vartheta) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right\} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

**Laplace-Operator**

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\}$$

## 7 Linien- oder Kurvenintegrale

### 7.1 Linienintegral in der Ebene

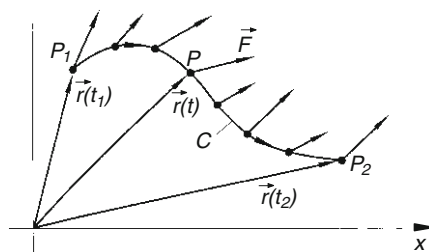
$\vec{F} = \vec{F}(x; y)$  sei ein *ebenes* Vektorfeld,  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  der Ortsvektor einer von  $P_1$  nach  $P_2$  verlaufenden ebenen Kurve  $C$  mit  $t_1 \leq t \leq t_2$  und  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$  der zugehörige *Tangentenvektor* der Kurve.

Dann heißt das Integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt$$

das *Linien- oder Kurvenintegral* des Vektorfeldes  $\vec{F}$  längs der Kurve  $C$ .

y ↑



In ausführlicher Schreibweise:

$$\int_C (F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy) = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y}) dt$$

$F_x, F_y$ : Skalare Komponenten des ebenen Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y)$

$\dot{x}, \dot{y}$ : Koordinaten des Tangentenvektors  $\dot{\vec{r}}$

### Berechnung eines Linienintegrals

Für die Variablen  $x$  und  $y$  werden die parameterabhängigen Koordinaten  $x(t)$  und  $y(t)$  der Integrationskurve  $C$  eingesetzt, für  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  deren Ableitungen. Anschließend wird der nur noch vom Parameter  $t$  abhängende Integrand in den Grenzen von  $t_1$  bis  $t_2$  integriert.

**Sonderfall:** Falls die Kurve  $C$  in der *expliziten* Form  $y = f(x)$  vorliegt, ersetzt man im Linienintegral die Koordinate  $y$  durch  $f(x)$  und das Differential  $dy$  durch  $f'(x) dx$  und erhält so ein *gewöhnliches* Integral mit der Variablen  $x$ :

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} [F_x(x; f(x)) + F_y(x; f(x)) \cdot f'(x)] dx$$

$x_1, x_2$ : Abszissen der beiden Kurvenrandpunkte

### Anmerkungen

- (1) Man beachte, dass der Wert eines Linien- oder Kurvenintegrals i. Allg. nicht nur vom *Anfangs-* und *Endpunkt* des Integrationsweges, sondern auch noch vom *eingeschlagenen* Verbindungsweg abhängt.
- (2) Wird der Integrationsweg  $C$  in der *umgekehrten* Richtung durchlaufen (symbolische Schreibweise:  $-C$ ), so tritt im Integral ein *Vorzeichenwechsel* ein:

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- (3) Für ein Kurvenintegral längs einer *geschlossenen* Linie  $C$  verwenden wir das Symbol  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  oder auch  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Ein solches Kurvenintegral wird in den physikalisch-technischen Anwendungen auch als *Zirkulation* des Vektorfeldes  $\vec{F}$  längs der *geschlossenen* Kurve  $C$  bezeichnet.



■ **Beispiel**

Wir berechnen das Linien- oder Kurvenintegral  $\int_C (x^2 y \, dx + x y^2 \, dy)$  längs des Weges  $C: x(t) = 2t, y(t) = t, 0 \leq t \leq 1$ :

$$x = 2t, \quad dx = \dot{x} \, dt = 2 \, dt, \quad y = t, \quad dy = \dot{y} \, dt = 1 \, dt = dt$$

$$\int_C (x^2 y \, dx + x y^2 \, dy) = \int_0^1 (4t^2 \cdot t \cdot 2 \, dt + 2t \cdot t^2 \, dt) = \int_0^1 10t^3 \, dt = \frac{5}{2} [t^4]_0^1 = \frac{5}{2} (1 - 0) = \frac{5}{2}$$

■

**7.2 Linienintegral im Raum**

Das *Linien- oder Kurvenintegral* eines *räumlichen* Vektorfeldes  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$  längs einer Raumkurve  $C$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(t), t_1 \leq t \leq t_2$  lautet:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) \, dt$$

$\dot{\vec{r}}$ : Tangentenvektor von  $C$

In ausführlicher Schreibweise:

$$\int_C (F_x(x; y; z) \, dx + F_y(x; y; z) \, dy + F_z(x; y; z) \, dz) = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) \, dt$$

$F_x, F_y, F_z$ : Skalare *Komponenten* des räumlichen Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z)$

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ : Koordinaten des Tangentenvektors  $\dot{\vec{r}}$

**Berechnung eines Linienintegrals**

Die Berechnung erfolgt wie beim Linienintegral in der Ebene. Alle dort gemachten Bemerkungen gelten *sinngemäß* auch hier.

**7.3 Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals**

Ein Linien- oder Kurvenintegral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  ist genau dann *wegunabhängig*, wenn das Vektorfeld  $\vec{F}$  in einem einfach-zusammenhängenden Bereich, der den Integrationsweg  $C$  enthält, die folgende *Integrabilitätsbedingung* erfüllt:

**Integrabilitätsbedingung für ein ebenes Vektorfeld**

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \text{oder} \quad (\text{rot } \vec{F})_z = 0$$

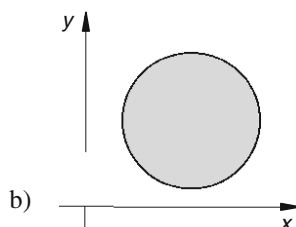
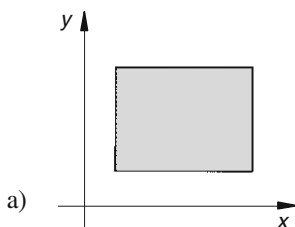
### Integrabilitätsbedingung für ein räumliches Vektorfeld

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \quad \text{oder} \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$$

Die Bedingungen sind notwendig *und* hinreichend.

#### Anmerkungen

- (1) Ein Bereich heißt *einfachzusammenhängend*, wenn sich *jede* im Bereich gelegene *geschlossene* Kurve auf einen Punkt „zusammenziehen“ lässt. Ein *ebener* einfachzusammenhängender Bereich wird von einer einzigen geschlossenen Kurve begrenzt. Beispiele: rechteckiger Bereich (siehe Bild a)) bzw. kreisförmiger Bereich (siehe Bild b)).



- (2) Im Falle der Wegunabhängigkeit *verschwindet* das Linienintegral längs einer *geschlossenen* Kurve.

#### ■ Beispiel

Das *ebene* Vektorfeld  $\vec{F}(x; y)$  mit den skalaren Komponenten  $F_x = 3x^2 y^2$  und  $F_y = 2x^3 y$  erfüllt die *Integrabilitätsbedingung*:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 y^2) = 6x^2 y, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2x^3 y) = 6x^2 y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 6x^2 y$$

Daher *verschwindet* das Linienintegral  $\oint_C (F_x dx + F_y dy) = \oint_C (3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy)$  für jede *geschlossene* Kurve  $C$ .

■

## 7.4 Konservative Vektorfelder

Ein (ebenes oder räumliches) Vektorfeld  $\vec{F}$  heißt *konservativ* oder *Potentialfeld*, wenn das Linien- oder Kurvenintegral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  nur vom *Anfangs-* und *Endpunkt*, *nicht* aber vom *eingeschlagenen* Verbindungsweg  $C$  der beiden Punkte abhängt.

### Eigenschaften eines konservativen Vektorfeldes

Ein *konservatives* Vektorfeld  $\vec{F}$  besitzt in einem *einfach-zusammenhängenden* Bereich die folgenden *gleichwertigen* Eigenschaften:

1. Das Linien- oder Kurvenintegral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  längs einer Kurve  $C$ , die zwei (beliebige) Punkte  $P_1$  und  $P_2$  verbindet, ist *unabhängig* vom eingeschlagenen Verbindungsweg, solange dieser vollständig im Bereich liegt.

2. Das Linienintegral längs einer im Bereich liegenden *geschlossenen* Kurve  $C$  hat stets den Wert *Null*:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

3. Der Feldvektor  $\vec{F}$  ist überall im Bereich als *Gradient* einer Potentialfunktion  $\phi$  darstellbar:

$$\vec{F} = \text{grad } \phi$$

4. Das Vektorfeld  $\vec{F}$  ist im Bereich *wirbelfrei*:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$$

5. Das Skalarprodukt  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  ist das *totale* oder *vollständige Differential* einer Potentialfunktion  $\phi$ :

$$d\phi = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

#### ■ Beispiel

Ein *Zentralfeld* ist stets *konservativ*. Das Linienintegral eines solchen Feldes verschwindet daher längs einer jeden *geschlossenen* Kurve (diese darf *nicht* durch den Nullpunkt verlaufen). Beispiele für Zentralfelder sind das *Gravitationsfeld* der Erde und das *elektrische Feld* einer Punktladung.

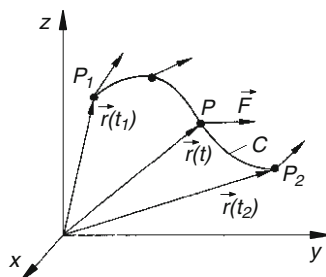
■

## 7.5 Arbeitsintegral (Arbeit eines Kraftfeldes)

Ein *Kraftfeld*  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$  verrichtet an einem Massenpunkt beim Verschieben längs einer Kurve  $C$  die folgende *Arbeit* (sog. *Arbeitsintegral*):

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt$$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ : Ortsvektor der Kurve  $C$   
 $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$ : Tangentenvektor der Kurve  $C$   
 $d\vec{r}$ : Differentielles Wegelement



## 8 Oberflächenintegrale

### 8.1 Definition eines Oberflächenintegrals

Der „*Fluss*“ eines Vektorfeldes  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$  durch eine orientierte Fläche  $A$  wird durch das als *Oberflächenintegral* bezeichnete Integral

$$\iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$$

beschrieben.

*Bezeichnungen*

$\vec{N}$ : Flächennormale

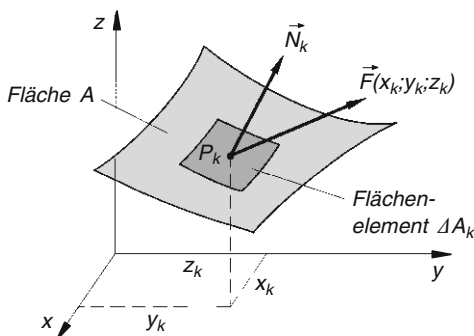
$d\vec{A}$ : Orientiertes Flächenelement  
vom Betrage  $dA$

$\vec{F} \cdot \vec{N}$ : Normalkomponente von  $\vec{F}$

$(\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$  ist der Fluss des Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch das *Flächenelement*  $dA$ , anschließend werden die Beiträge aller Flächenelemente aufsummiert.

*Anmerkungen*

- (1) Die *Orientierung* der Fläche ist durch die Flächennormale  $\vec{N}$  *eindeutig* festgelegt. Bei einer *geschlossenen* Fläche, z. B. der Oberfläche einer Kugel, eines Zylinders oder eines Quaders, zeigt  $\vec{N}$  vereinbarungsgemäß nach *außen*. Bei einer *offenen* Fläche wird die Randkurve der Fläche so durchlaufen, dass mit der Flächennormale *Rechtsschraubung* entsteht.
- (2) Auch die folgenden Bezeichnungen für das Oberflächenintegral sind gebräuchlich: „*Flussintegral*“ des Vektorfeldes  $\vec{F}$  oder kurz „*Fluss*“ des Feldvektors  $\vec{F}$  durch die Fläche  $A$  oder auch *Flächenintegral* des Vektorfeldes  $\vec{F}$  über die orientierte Fläche  $A$ .
- (3) Das Oberflächenintegral über eine *geschlossene* Fläche  $A$  wird durch das Symbol  $\oint\oint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A}$  oder  $\oint\oint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$  gekennzeichnet. Folgende Bezeichnungen für ein solches Integral sind in den Anwendungen üblich: „*Hüllenintegral*“ oder „*Fluss*“ des Feldvektors  $\vec{F}$  durch die geschlossene Fläche  $A$  oder auch „*Ergiebigkeit*“ des Feldvektors  $\vec{F}$ .



## 8.2 Berechnung eines Oberflächenintegrals

Ein Oberflächenintegral lässt sich stets auf ein *Doppelintegral* zurückführen (siehe IX.3.1).

### 8.2.1 Berechnung eines Oberflächenintegrals in symmetriegerechten Koordinaten

Die *Berechnung* eines Oberflächenintegrals  $\iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$  erfolgt in vier Schritten:

1. Zunächst werden *geeignete* Koordinaten ausgewählt, die sich der *Symmetrie* des Problems in *optimaler* Weise anpassen. Zur Auswahl stehen dabei:
  - *Kartesische* Koordinaten  $x, y, z$
  - *Zylinderkoordinaten*  $\varrho, \varphi, z$  (Abschnitt XIV.6.2)
  - *Kugelkoordinaten*  $r, \vartheta, \varphi$  (Abschnitt XIV.6.3)
2. Man bestimmt dann die *Flächennormale*  $\vec{N}$ , berechnet anschließend das *Skalarprodukt*  $\vec{F} \cdot \vec{N}$  und drückt dieses sowie das *Flächenelement*  $dA$  durch die gewählten Koordinaten aus.
3. Festlegung der *Integrationsgrenzen* im erhaltenen Doppelintegral.
4. *Berechnung* des Doppelintegrals in der bekannten Weise (siehe IX.3.1).

#### ■ Beispiel

Wir berechnen den Fluss des *Zentralfeldes*  $\vec{F} = (1/r^2) \vec{e}_r$  durch die (geschlossene) Oberfläche  $A$  der konzentrischen *Einheitskugel*. Auf der Kugeloberfläche gilt  $r = 1$  und daher  $\vec{F} = \vec{e}_r$ , die Flächennormale  $\vec{N}$  ist der radiale Einheitsvektor  $\vec{e}_r$ . Somit:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A)} (\underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_1) dA = \iint_{(A)} 1 dA = \iint_{(A)} dA = A = 4\pi$$

(Oberfläche der *Einheitskugel*:  $A = 4\pi$ )

■

#### Sonderfälle

- (1) Der Fluss eines *homogenen* Vektorfeldes durch eine beliebige *geschlossene* Oberfläche ist stets *Null*.
- (2) Der Fluss eines *zylindersymmetrischen* Vektorfeldes  $\vec{F} = f(\varrho) \vec{e}_\varrho$  durch die *geschlossene* Oberfläche eines (zur  $z$ -Achse) *koaxialen Zylinders* beträgt:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = f(R) \cdot 2\pi R H$$

( $R$ : Zylinderradius;  $H$ : Zylinderhöhe; Symmetrieachse =  $z$ -Achse)

- (3) Der Fluss eines *Zentralfeldes*  $\vec{F} = f(r) \vec{e}_r$  durch die *geschlossene* Oberfläche  $A$  einer (konzentrischen) *Kugel* beträgt:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = f(R) \cdot 4\pi R^2$$

( $R$ : Kugelradius; Kugelmittelpunkt = Koordinatenursprung)

### 8.2.2 Berechnung eines Oberflächenintegrals unter Verwendung von Flächenparametern

Die von einem Vektorfeld  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$  „durchflutete“ Fläche  $A$  sei durch einen von den beiden Parametern  $u$  und  $v$  abhängigen Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$  gegeben. Für den „Fluss“ durch diese Fläche gilt dann:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A)} \vec{F} \cdot (\vec{t}_u \times \vec{t}_v) du dv = \iint_{(A)} [\vec{F} \vec{t}_u \vec{t}_v] du dv$$

Die Integralberechnung erfolgt in vier Schritten:

1. Das Vektorfeld  $\vec{F}$  wird zunächst durch die Flächenparameter  $u$  und  $v$  ausgedrückt, indem man die Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  durch die parameterabhängigen Koordinaten  $x(u; v)$ ,  $y(u; v)$  und  $z(u; v)$  des Ortsvektors  $\vec{r}(u; v)$  der Fläche ersetzt.
2. Man bildet die Tangentenvektoren  $\vec{t}_u$  und  $\vec{t}_v$  der Fläche und mit ihnen das *gemischte Produkt* (Spatprodukt)  $\vec{F} \cdot (\vec{t}_u \times \vec{t}_v)$ .
3. Festlegung der *Integrationsgrenzen* im erhaltenen Doppelintegral.
4. *Berechnung* des Doppelintegrals in der bekannten Weise (siehe IX.3.1).

#### ■ Beispiel

Vektorfeld:  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$ ; Fläche  $A$ :  $\vec{r} = \vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}$  mit  $0 \leq u \leq \pi$ ,  $0 \leq v \leq 1$

Wir berechnen den Fluss des Feldes  $\vec{F}$  durch die Fläche  $A$  (halber Mantel eines Zylinders mit dem Radius  $R = 1$  und der Höhe  $H = 1$ ). Mit  $x = \cos u$ ,  $y = \sin u$  und  $z = v$  geht  $\vec{F}$  über in  $\vec{F} = \begin{pmatrix} \sin u \\ \cos u \\ v^2 \end{pmatrix}$ .

*Tangentenvektoren der Fläche:*

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Integrand des Flussintegrals:*

$$\begin{aligned} \vec{t}_u \times \vec{t}_v &= \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{F} \cdot (\vec{t}_u \times \vec{t}_v) &= \begin{pmatrix} \sin u \\ \cos u \\ v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = \sin u \cdot \cos u + \cos u \cdot \sin u + 0 = \\ &= 2 \cdot \sin u \cdot \cos u = \sin(2u) \end{aligned}$$

*Flussintegral:*

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A)} \vec{F} \cdot (\vec{t}_u \times \vec{t}_v) du dv = \int_{v=0}^1 \int_{u=0}^{\pi} \sin(2u) du dv$$

Berechnung des Doppelintegrals (siehe IX.3.1):

$$\begin{aligned} \int_{v=0}^1 \int_{u=0}^{\pi} \sin(2u) \, du \, dv &= \int_{v=0}^1 dv \cdot \int_{u=0}^{\pi} \sin(2u) \, du = [v]_{v=0}^1 \cdot \left[ -\frac{1}{2} \cdot \cos(2u) \right]_{u=0}^{\pi} = \\ &= [1 - 0] \cdot \left[ -\frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi) + \frac{1}{2} \cdot \cos 0 \right] = 1 \left( -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \\ &= 1 \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Ergebnis:  $\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA = 0$  ■

## 9 Integralsätze von Gauß und Stokes

### 9.1 Gaußscher Integralsatz

#### Gaußscher Integralsatz im Raum

Der *Gaußsche Integralsatz im Raum* stellt eine Verbindung her zwischen einem *Oberflächen-* und einem *Volumenintegral*. Er lautet wie folgt:

„Das *Oberflächenintegral* eines räumlichen Vektorfeldes  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$  über eine *geschlossene* Fläche  $A$  ist gleich dem *Volumenintegral* der *Divergenz* von  $\vec{F}$ , erstreckt über das von der Fläche  $A$  eingeschlossene Volumen  $V$ “:

$$\oiint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA = \oiint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

$\vec{N}$ : Nach *außen* gerichtete Flächennormale

*Voraussetzung*:  $\vec{F}$  ist stetig differenzierbar.

*Anmerkung*

Bei einem *quellenfreien* Feld ( $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ ) ist der Gesamtfluss durch eine *geschlossene* Oberfläche gleich *Null*.

#### ■ Beispiel

Wir berechnen den *Fluss* des Zentralfeldes  $\vec{F} = \vec{r} = r \vec{e}_r$  durch die Oberfläche  $A$  einer konzentrischen Kugel vom Radius  $R$  mit Hilfe eines *Volumenintegrals*. Mit

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \vec{r} = \operatorname{div} (r \vec{e}_r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = \frac{1}{r^2} \cdot 3r^2 = 3$$

(siehe hierzu XIV.6.3) folgt aus dem *Gaußschen Integralsatz*:

$$\oiint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_{(V)} 3 \, dV = 3 \cdot \iiint_{(V)} dV = 3V = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3$$

(Kugelvolumen:  $V = 4\pi R^3/3$ ). ■

### Gaußscher Integralsatz in der Ebene

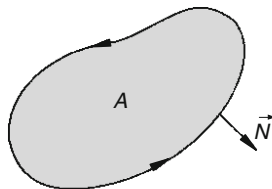
Der *Gaußsche Integralsatz* gilt sinngemäß auch in der Ebene, wobei „Volumen“ durch „Fläche“ und „Oberfläche“ durch „geschlossene Kurve“ (Randkurve der Fläche) zu ersetzen sind. Er verbindet ein *Kurven-* oder *Linienintegral* mit einem *zweidimensionalen Bereichsintegral* (*Doppelintegral*) und lautet wie folgt:

„Das *Kurvenintegral* der Normalkomponente eines ebenen Vektorfeldes  $\vec{F} = \vec{F}(x; y)$  längs einer *geschlossenen Kurve*  $C$  ist gleich dem *Bereichsintegral* (*Doppelintegral*) über die *Divergenz* von  $\vec{F}$ , erstreckt über die von der Kurve  $C$  eingeschlossene Fläche  $A$ “:

$$\oint_C (\vec{F} \cdot \vec{N}) ds = \iint_{(A)} \operatorname{div} \vec{F} dA$$

$\vec{N}$ : Nach *außen* gerichtete Kurvennormale

$ds$ : Linienelement der Randkurve  $C$



Randkurve  $C$

*Voraussetzung:*  $\vec{F}$  ist stetig differenzierbar und die Randkurve  $C$  wird so durchlaufen, dass die Fläche  $A$  *links* liegen bleibt.

## 9.2 Stokes'scher Integralsatz

Der *Integralsatz von Stokes* ermöglicht die Umwandlung eines *Oberflächenintegrals* in ein *Kurven-* oder *Linienintegral* und umgekehrt. Er lautet wie folgt:

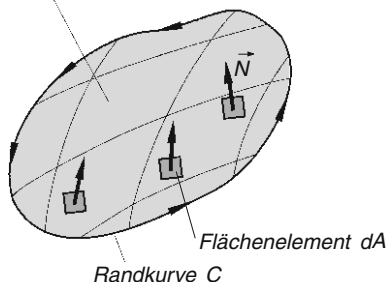
„Das *Kurven-* oder *Linienintegral* eines räumlichen Vektorfeldes  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$  längs einer *geschlossenen Kurve*  $C$  ist gleich dem *Oberflächenintegral* der *Rotation* von  $\vec{F}$  über eine *beliebige Fläche*  $A$ , die durch die Kurve  $C$  berandet wird:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N} dA$$

$\vec{N}$ : Flächennormale

*Voraussetzung:*  $\vec{F}$  ist stetig differenzierbar und die Randkurve  $C$  der Fläche  $A$  ist *orientiert* (ein Beobachter, der in die Richtung von  $\vec{N}$  blickt, durchläuft die Randkurve  $C$  so, dass die Fläche *links* liegen bleibt).

räumliche Fläche



Randkurve  $C$



## Anmerkungen

- (1) Das Oberflächenintegral  $\iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N} \, dA$  wird auch als „Wirbelfluss“ bezeichnet.
- (2) Der Wirbelfluss durch eine *geschlossene* Fläche ist gleich *Null* und für alle Flächen, die von der *gleichen* Kurve  $C$  berandet werden, *gleich* groß.
- (3) Der Stokes'sche Satz gilt auch für Flächen, die von *mehreren* geschlossenen Kurven berandet werden.

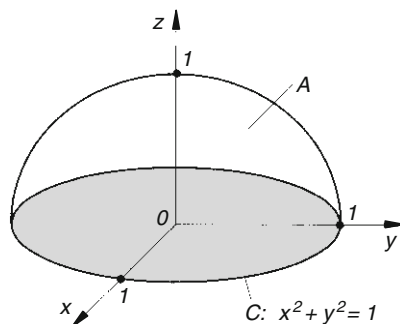
## ■ Beispiel

Wir berechnen den *Wirbelfluss* des Vektorfeldes  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 0 \\ z^2 \end{pmatrix}$  durch den Mantel  $A$  der Halbkugel

$x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  mit Hilfe eines *Linienintegrals*.

Nach Stokes gilt:

$$\iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Die Randkurve  $C$  ist der *Einheitskreis* mit der Parameterdarstellung  $x = \cos t, y = \sin t, z = 0$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Mit  $dx = -\sin t \, dt, dy = \cos t \, dt, dz = 0$  wird

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 0 \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = (x^2 + y^2) \, dx + 0 \, dy + z^2 \, dz = (x^2 + y^2) \, dx + z^2 \, dz = \\ &= \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_1 \cdot (-\sin t \, dt) + 0^2 \cdot 0 = -\sin t \, dt \end{aligned}$$

Somit ist:

$$\iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = [\cos t]_0^{2\pi} = \cos(2\pi) - \cos 0 = 1 - 1 = 0$$

■

# XV Wahrscheinlichkeitsrechnung

## 1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik

### 1.1 Permutationen

Eine Anordnung von  $n$  Kugeln (allgemein: Elementen) in einer bestimmten Reihenfolge heißt *Permutation*. Für die *Anzahl* der möglichen Permutationen gilt dann:

1. Alle  $n$  Kugeln sind voneinander *verschieden*:

$$P(n) = n!$$

2. Unter den  $n$  Kugeln befinden sich jeweils  $n_1, n_2, \dots, n_k$  einander *gleiche*:

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \quad \text{und} \quad k \leq n)$$

#### ■ Beispiele

- (1) Es gibt  $P(3) = 3! = 6$  *verschiedene* Möglichkeiten, 3 verschiedenfarbige Kugeln anzuordnen:



- (2) In einer Urne befinden sich 5 Kugeln, 3 weiße und 2 rote. Sie lassen sich auf

$$P(5; 3, 2) = \frac{5!}{3! 2!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 2 \cdot 5 = 10$$

*verschiedene* Arten anordnen.

■

## 1.2 Kombinationen

Aus einer Urne mit  $n$  verschiedenen Kugeln werden nacheinander  $k$  Kugeln entnommen und in *beliebiger* Weise angeordnet (Urnenmodell). Eine solche Anordnung heißt *Kombination  $k$ -ter Ordnung*. Für die *Anzahl* der möglichen Kombinationen  $k$ -ter Ordnung gilt dann:

1. Die Ziehung der  $k$  Kugeln erfolgt *ohne* Zurücklegen (sog. Kombinationen  $k$ -ter Ordnung *ohne* Wiederholung):

$$C(n; k) = \binom{n}{k} \quad (k \leq n)$$

2. Die Ziehung der  $k$  Kugeln erfolgt *mit* Zurücklegen (sog. Kombinationen  $k$ -ter Ordnung *mit* Wiederholung):

$$C_w(n; k) = \binom{n + k - 1}{k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

### ■ Beispiel

Einer Warenlieferung von 10 Glühbirnen von jeweils 100 Watt soll zu Kontrollzwecken eine *Stichprobe* von 3 Glühbirnen entnommen werden. Es gibt dann

$$C(10; 3) = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$$

verschiedene Möglichkeiten, aus den 10 Glühbirnen 3 auszuwählen. ■

## 1.3 Variationen

Einer Urne mit  $n$  verschiedenen Kugeln werden nacheinander  $k$  Kugeln entnommen und in der *Reihenfolge* ihrer Ziehung angeordnet. Eine solche Anordnung heißt *Variation  $k$ -ter Ordnung*. Für die *Anzahl* der möglichen Variationen  $k$ -ter Ordnung gilt dann:

1. Die Ziehung der  $k$  Kugeln erfolgt *ohne* Zurücklegen (sog. Variationen  $k$ -ter Ordnung *ohne* Wiederholung):

$$V(n; k) = \frac{n!}{(n - k)!} \quad (k \leq n)$$

2. Die Ziehung der  $k$  Kugeln erfolgt *mit* Zurücklegen (sog. Variationen  $k$ -ter Ordnung *mit* Wiederholung):

$$V_w(n; k) = n^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

### ■ Beispiel

Bei einem 100-Meter-Lauf starten 8 Läufer. Für die ersten 3 Plätze gibt es Medaillen (Gold, Silber, Bronze). Wieviel *verschiedene* Zieleinläufe für die ersten 3 Plätze sind möglich?

*Lösung:* Von  $n = 8$  Läufern werden  $k = 3$  Läufer die Plätze 1, 2 und 3 belegen. Es handelt sich somit um *Variationen 3. Ordnung* und zwar *ohne* Wiederholung, da jeder Läufer nur *einen* Platz belegen kann. Die Anzahl der möglichen Zieleinläufe ist somit

$$V(8; 3) = \frac{8!}{(8 - 3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$$

■

## 2 Grundbegriffe

### Zufallsexperiment

Lässt sich ein Experiment unter den gleichen äußeren Bedingungen *beliebig oft* wiederholen, wobei mehrere sich *gegenseitig ausschließende* Ergebnisse möglich sind und ist das Ergebnis bei einer konkreten Durchführung des Experiments *ungewiss*, d. h. *zufallsbedingt*, so spricht man von einem *Zufallsexperiment*.

#### ■ Beispiele

Wurf einer Münze oder eines Würfels, zufällige Entnahme von Kugeln aus einer Urne, Stichprobenentnahme aus einer laufenden Produktion zwecks Qualitätskontrolle. ■

### Elementarereignisse, Ergebnismenge eines Zufallsexperiments

*Elementarereignisse* heißen die möglichen sich *gegenseitig ausschließenden* Ergebnisse eines Zufallsexperiments. Symbolische Schreibweise:  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$

Die Menge aller Elementarereignisse heißt *Ergebnismenge* des Zufallsexperiments. Symbolische Schreibweise:  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$

#### ■ Beispiel

Beim „Wurf einer homogenen Münze“ gibt es die beiden Elementarereignisse  $Z$  = Zahl und  $W$  = Wappen. Ergebnismenge:  $\Omega = \{Z, W\}$  ■

### Ereignisse, Ereignisraum oder Ereignisfeld

Alle möglichen Ergebnisse (Versuchsausgänge) eines Zufallsexperiments werden als *Ereignisse* bezeichnet. Ein Ereignis  $A$  ist daher immer eine *Teilmenge* der Ergebnismenge  $\Omega$ , die bekanntlich sämtliche Elementarereignisse enthält.

Die Menge aller Ereignisse heißt *Ereignisraum* oder *Ereignisfeld*. Der Ereignisraum enthält also *alle* Teilmengen der Ergebnismenge  $\Omega$  und somit definitionsgemäß auch die *leere* Menge  $\emptyset$  und die *Ergebnismenge*  $\Omega$  selbst.  $\emptyset$  beschreibt das sog. *unmögliche* Ereignis (d. h. ein Ereignis, das *nie* eintreten kann),  $\Omega$  dagegen das sog. *sichere* Ereignis (d. h. ein Ereignis, das *immer* eintreten wird).

#### ■ Beispiel

Beim „Wurf eines homogenen Würfels“ gibt es 6 Elementarereignisse, nämlich das Auftreten einer der 6 Zahlen („Augen“) 1, 2, ..., 6.

Ergebnismenge:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

*Ereignisse* sind z. B. die folgenden *Teilmengen* von  $\Omega$ :

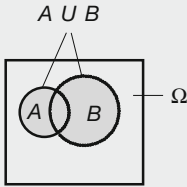
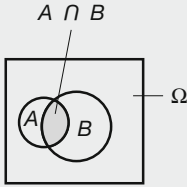
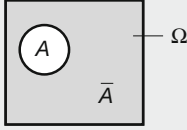
$\{2, 4, 6\}$ : Würfeln einer geraden Zahl

$\{1, 6\}$ : Würfeln einer „1“ oder einer „6“

$\Omega$  ist das *sichere* Ereignis, da bei *jedem* Wurf eine der Zahlen 1, 2, ..., 6 oben liegt! ■

### Verknüpfungen von Ereignissen

Ereignisse werden durch *Teilmengen* der Ergebnismenge  $\Omega$  beschrieben und lassen sich daher wie Mengen *verknüpfen*. Dies führt zu den folgenden *zusammengesetzten* Ereignissen ( $A$  und  $B$  sind dabei beliebige Ereignisse):

Verknüpfungssymbol mit <i>Euler-Venn-Diagramm</i>	Bedeutung des zusammengesetzten Ereignisses
	<p><i>Vereinigung</i> der Ereignisse <math>A</math> und <math>B</math>:  <i>Entweder tritt <math>A</math> ein oder <math>B</math> oder <math>A</math> und <math>B</math> gleichzeitig</i></p> <p>Symbolische Schreibweise: <math>A \cup B</math></p>
	<p><i>Durchschnitt</i> der Ereignisse <math>A</math> und <math>B</math>:  <i><math>A</math> und <math>B</math> treten gleichzeitig ein</i></p> <p>Symbolische Schreibweise: <math>A \cap B</math></p>
	<p><i>Zu <math>A</math> komplementäres Ereignis:</i>  <i><math>A</math> tritt nicht ein</i></p> <p>Symbolische Schreibweise: <math>\bar{A}</math></p>

#### Anmerkungen

- (1) Das Ereignis  $A \cup B$  wird auch als *Summe* aus  $A$  und  $B$  bezeichnet (symbolische Schreibweise:  $A + B$ ).
- (2) Das Ereignis  $A \cap B$  heißt auch *Produkt* aus  $A$  und  $B$  (symbolische Schreibweise:  $A \cdot B$  oder kurz  $AB$ ).
- (3)  $\bar{A}$  ist die *Restmenge* (*Differenzmenge*) von  $\Omega$  und  $A$ :  $\bar{A} = \Omega \setminus A$
- (4) Für sich *gegenseitig ausschließende* Ereignisse gilt  $A \cap B = \emptyset$  (sog. „disjunkte“ Mengen).

#### ■ Beispiel

Zufallsexperiment: „Wurf einer homogenen Münze“

$$A = \{Z\}: \text{„Zahl“ liegt oben} \Rightarrow \bar{A} = \{W\}: \text{„Wappen“ liegt oben}$$

■

### De Morgansche Regeln

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$A, B$ : beliebige Ereignisse

## 3 Wahrscheinlichkeit

### 3.1 Absolute und relative Häufigkeit

Ein Zufallsexperiment wird  $n$ -mal durchgeführt, dabei tritt das Ereignis  $A$  genau  $n(A)$ -mal ein. Dann heißt  $n(A)$  die *absolute* und  $h_n(A) = n(A)/n$  die *relative Häufigkeit* des Ereignisses  $A$ .

#### Eigenschaften und Regeln für relative Häufigkeiten

- (1)  $0 \leq h_n(A) \leq 1$
- (2) Für das *sichere* Ereignis  $\Omega$  gilt  $h_n(\Omega) = 1$ .
- (3) Für sich *gegenseitig ausschließende* Ereignisse  $A$  und  $B$  gilt der *Additionssatz*

$$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) \quad (A \cap B = \emptyset)$$
- (4) *Erfahrungsgemäß* gilt: Wird die Anzahl  $n$  der Versuche laufend vergrößert, so „stabilisiert“ sich i. Allg. die relative Häufigkeit  $h_n(A)$  eines Ereignisses  $A$  und schwankt somit immer weniger um einen bestimmten (konstanten) Wert  $h(A)$ .

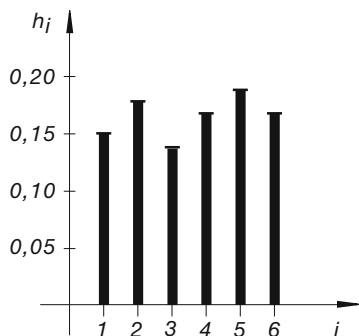
#### ■ Beispiel

Das Zufallsexperiment „Wurf eines homogenen Würfels“ wurde  $n = 100$  Mal durchgeführt und führte zu der folgenden *Verteilungstabelle* mit dem nebenstehenden *Stabdiagramm*:

$i$	1	2	3	4	5	6
$n_i$	15	18	14	17	19	17
$h_i$	0,15	0,18	0,14	0,17	0,19	0,17

$n_i$ : Anzahl der Würfe mit der Augenzahl  $i$   
( $i = 1, 2, \dots, 6$ )

$h_i = n_i/100$



### 3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff

Jedem Ereignis  $A$  eines Zufallsexperiments mit der Ergebnismenge  $\Omega$  wird eine reelle Zahl  $P(A)$ , *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses  $A$  genannt, so zugeordnet, dass die folgenden *Axiome* erfüllt sind:

*Axiom 1:*  $0 \leq P(A) \leq 1$

*Axiom 2:*  $P(\Omega) = 1$  (Wahrscheinlichkeit für das *sichere* Ereignis)

*Axiom 3:* Für paarweise sich *gegenseitig ausschließende* Ereignisse  $A_1, A_2, A_3, \dots$  gilt der *Additionssatz*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

In der *Praxis* gilt: Die meist unbekannte Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  eines Ereignisses  $A$  wird *näherungsweise* durch die in umfangreichen Versuchsreihen beobachtete *relative Häufigkeit*  $h_n(A)$  ersetzt:  $P(A) \approx h_n(A)$  (sog. „statistischer“ oder „empirischer“ Wahrscheinlichkeitswert).

#### Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

(1) Für das *unmögliche* Ereignis  $\emptyset$  gilt  $P(\emptyset) = 0$ .

(2) Für das zum Ereignis  $A$  *komplementäre* Ereignis  $\bar{A}$  gilt

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

(3) *Additionssatz* für zwei *beliebige* Ereignisse  $A$  und  $B$ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(4) *Additionssatz* für zwei sich *gegenseitig ausschließende* Ereignisse  $A$  und  $B$ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (A \cap B = \emptyset)$$

#### ■ Beispiel

Zufallsexperiment: „Wurf einer homogenen Münze“

Ergebnismenge:  $\Omega = \{Z, W\}$   $Z$  = Zahl,  $W$  = Wappen

Festlegung der Wahrscheinlichkeiten:  $P(Z) = P(W) = 0,5$  (die Elementarereignisse  $Z$  und  $W$  sind *gleichwahrscheinlich*).

■

### 3.3 Laplace-Experimente

Ein *Laplace-Experiment* liegt vor, wenn alle  $m$  Elementarereignisse  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  die *gleiche* Wahrscheinlichkeit  $p = 1/m$  besitzen. Für ein *beliebiges* Ereignis  $A$  gilt dann:

$$P(A) = \frac{g(A)}{m}$$

$g(A)$ : Anzahl der für das Ereignis  $A$  *günstigen* Fälle (d. h. derjenigen Fälle, in denen  $A$  *eintritt*)

■ **Beispiel**

Zufallsexperiment: „Wurf eines homogenen Würfels“

Die Wahrscheinlichkeit  $p(i)$  für das Würfeln der Augenzahl „ $i$ “ ist für alle 6 möglichen Augenzahlen gleich (Laplace-Experiment):  $p(i) = 1/6$  für  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Für das Ereignis  $A$ : „Würfeln einer geraden Zahl“ gilt dann:

$$P(A) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Denn es gibt unter den 6 Elementarereignissen genau 3 für das Ereignis  $A$  günstige Fälle ( $A$  tritt ein bei der Augenzahl „2“, „4“ oder „6“).

■

### 3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit  $P(B | A)$  für das Eintreten des Ereignisses  $B$  unter der *Bedingung* oder *Voraussetzung*, dass das Ereignis  $A$  bereits *eingetreten* ist, beträgt

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) \neq 0)$$

(sog. *bedingte Wahrscheinlichkeit* von  $B$  unter der *Bedingung*  $A$ )

■ **Beispiel**

Zufallsexperiment: „Wurf eines homogenen Würfels“

$A$ : gerade Augenzahl  $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$  mit  $P(A) = 1/2$

$B$ : Augenzahl „6“  $\Rightarrow B = \{6\}$

$A \cap B = \{6\}$ : Augenzahl „6“ mit  $P(A \cap B) = 1/6$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$P(B | A)$  ist dabei die Wahrscheinlichkeit dafür, die Augenzahl „6“ zu erhalten, wenn bereits *bekannt* ist, dass die gewürfelte Augenzahl *gerade* ist.

■

### 3.5 Multiplikationssatz

Die Wahrscheinlichkeit für das *gleichzeitige* Eintreten der Ereignisse  $A$  und  $B$  beträgt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Entsprechend bei *drei* gleichzeitig eintretenden Ereignissen  $A$ ,  $B$  und  $C$ :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | A \cap B)$$



### 3.6 Stochastisch unabhängige Ereignisse

Ist das Eintreten des Ereignisses  $B$  *unabhängig* davon, ob das Ereignis  $A$  bereits eingetreten ist *oder* nicht und umgekehrt, so heißen die Ereignisse  $A$  und  $B$  *stochastisch unabhängig*. Es gilt dann:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Entsprechend bei *drei* stochastisch unabhängigen Ereignissen  $A$ ,  $B$  und  $C$ :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

#### ■ Beispiel

Eine homogene Münze wird *zweimal* geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir zunächst „Zahl“ und dann „Wappen“?

*Lösung:*

$$A: \text{„Zahl“ beim 1. Wurf} \Rightarrow P(A) = 1/2$$

$$B: \text{„Wappen“ beim 2. Wurf} \Rightarrow P(B) = 1/2$$

Die beiden Ereignisse sind *unabhängig* voneinander. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

$$A \cap B: \text{Zunächst „Zahl“, dann „Wappen“}$$

beträgt dann

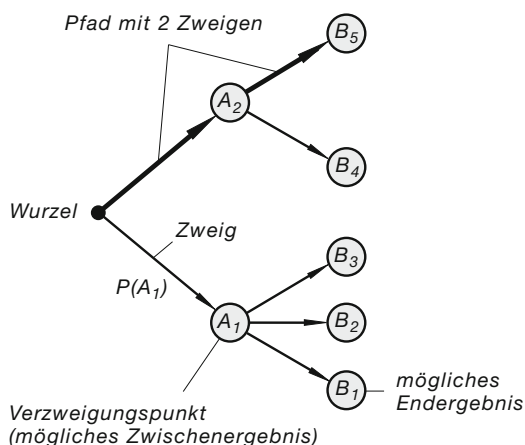
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

■

### 3.7 Mehrstufige Zufallsexperimente

#### Ereignisbaum (Baumdiagramm)

Ein *mehrstufiges* Zufallsexperiment besteht aus *mehreren* nacheinander ablaufenden Zufallsexperimenten. Es lässt sich anschaulich durch einen *Ereignisbaum*, auch *Baumdiagramm* genannt, darstellen:



$A_1, A_2$ :

Verzweigungspunkte  
(mögliche Ergebnisse  
der 1. Stufe, d. h.  
Zwischenergebnisse)

$B_1, \dots, B_5$ :

Mögliche Endergebnisse

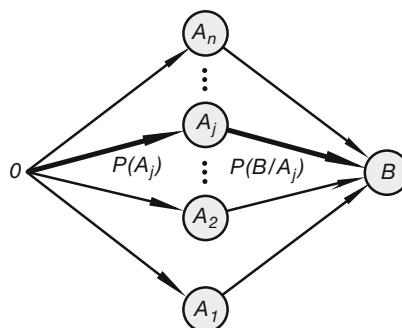
### Pfadregeln

Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten längs bestimmter *Pfade* (die aus mehreren *Zweigen* bestehen) geschieht mit Hilfe der folgenden *Pfadregeln*:

- (1) Die Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades werden miteinander *multipliziert*.
- (2) Führen *mehrere* Pfade zum *gleichen* Endergebnis, so *addieren* sich ihre Wahrscheinlichkeiten.

### Totale Wahrscheinlichkeit

Ein Ereignis  $B$  trete *stets* in Verbindung mit genau einem der sich paarweise *gegenseitig ausschließenden* Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_n$  auf, d. h. die Ereignisse  $A_i$  sind die möglichen „Zwischenstationen“ auf dem Wege zum Ereignis  $B$  (siehe Bild).



Die sog. *totale Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten des Ereignisses  $B$  beträgt dann

$$P(B) = \sum_i P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$

$P(A_i) \cdot P(B | A_i)$ : Wahrscheinlichkeit dafür, das Ereignis  $B$  über die „Zwischenstation“  $A_i$  zu erreichen (Wahrscheinlichkeit längs des Pfades  $OA_iB$ )

**Regel:** Die Wahrscheinlichkeiten aller nach  $B$  führenden Pfade werden *addiert*.

### Bayes'sche Formel

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das bereits *eingetretene* Ereignis  $B$  über die „Zwischenstation“  $A_j$ , d. h. längs des Pfades  $OA_jB$  erreicht wurde, beträgt

$$P(A_j | B) = \frac{P(OA_jB)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \cdot P(B | A_j)}{\sum_i P(A_i) P(B | A_i)}$$

(sog. *Bayes'sche Formel*).

**Regel:** Die Wahrscheinlichkeit längs des einzigen „*günstigen*“ Pfades  $OA_jB$  wird durch die *totale Wahrscheinlichkeit*  $P(B)$  dividiert.

■ **Beispiel**

Auf zwei Maschinen  $M_1$  und  $M_2$  werden Glühbirnen vom gleichen Typ hergestellt und zwar mit einem Anteil von 80% bzw. 20% an der Gesamtproduktion. Die Ausschussanteile betragen jeweils 2%. Aus der Gesamtproduktion wird zufällig eine Glühbirne entnommen und auf ihre Funktionstüchtigkeit hin überprüft.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man dabei eine *defekte* Glühbirne?
- Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese auf der Maschine  $M_1$  produziert wurde?

*Lösung:*

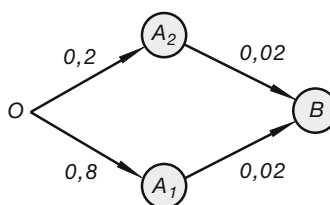
$A_i$ : Die entnommene Glühbirne wurde auf der Maschine  $M_i$  produziert ( $i = 1, 2$ )

$B$ : Die entnommene Glühbirne ist *defekt*

Zwei Pfade führen nach  $B$  („Zwischenstationen“ sind  $A_1$  bzw.  $A_2$ ). Aus dem Ereignisbaum lassen sich dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln leicht berechnen:

$$\begin{aligned} P(OA_1B) &= P(A_1) \cdot P(B | A_1) = \\ &= 0,8 \cdot 0,02 = 0,016 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(OA_2B) &= P(A_2) \cdot P(B | A_2) = \\ &= 0,2 \cdot 0,02 = 0,004 \end{aligned}$$



- Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die *totale Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses  $B$ :

$$P(B) = P(OA_1B) + P(OA_2B) = 0,016 + 0,004 = 0,020 = 2\%$$

- Die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(A_1 | B)$  berechnen wir mit Hilfe der *Bayes'schen Formel*:

$$P(A_1 | B) = \frac{P(OA_1B)}{P(B)} = \frac{0,016}{0,020} = 0,8 = 80\%$$

■

## 4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

### 4.1 Zufallsvariable

Eine *Zufallsvariable* oder *Zufallsgröße*  $X$  ist eine Funktion, die jedem Elementarereignis  $\omega$  aus der Ergebnismenge  $\Omega$  genau eine reelle Zahl  $X(\omega)$  zuordnet. Sie heißt *diskret*, wenn sie endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte annehmen kann, *stetig* dagegen, wenn sie jeden Wert aus einem bestimmten Intervall annehmen kann.

## 4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen

Die *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  einer Zufallsvariablen  $X$  ist die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  einen Wert annimmt, der *höchstens* gleich einem vorgegebenen Zahlenwert  $x$  ist:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

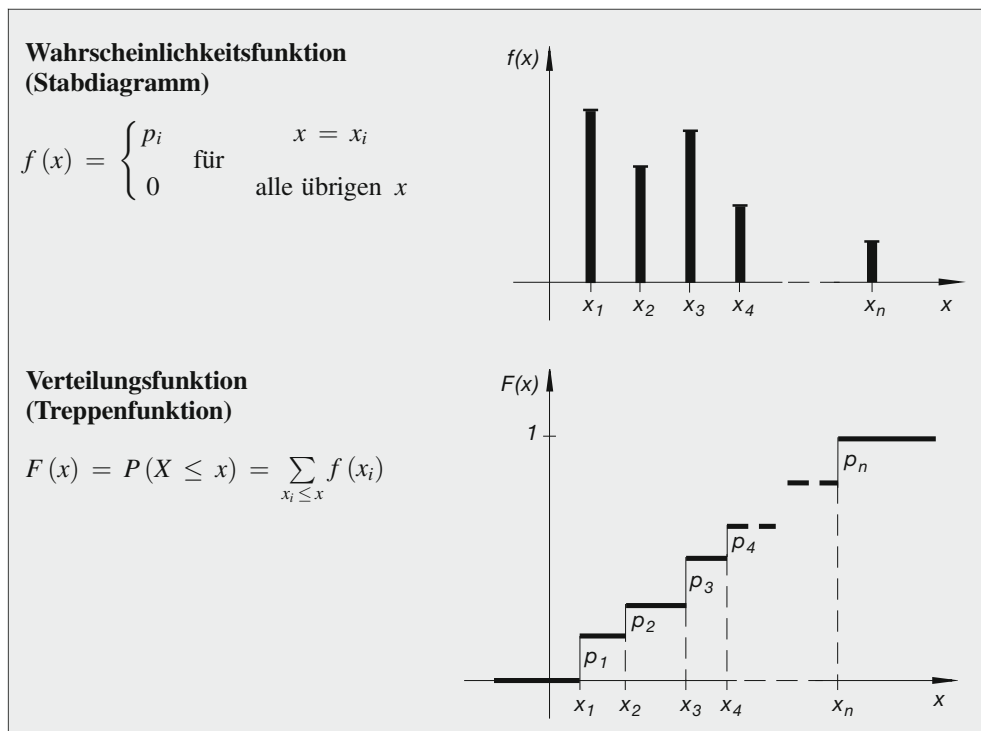
*Eigenschaften*

- (1)  $F(x)$  ist *monoton wachsend* mit  $0 \leq F(x) \leq 1$ .
- (2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  (*unmögliches Ereignis*)
- (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$  (*sicheres Ereignis*)
- (4) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $X$  einen Wert aus dem Intervall  $a < X \leq b$  annimmt, beträgt

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

### Diskrete Verteilung

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer *diskreten* Zufallsvariablen:



*Eigenschaften*

- (1)  $p_i$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  den Wert  $x_i$  annimmt ( $p_i > 0$ ).
- (2)  $f(x) \geq 0$  ist *normiert*, d. h.  $\sum_i f(x_i) = \sum_i p_i = 1$ .

■ **Beispiel**

Zufallsexperiment: „Wurf einer homogenen Münze“ (Laplace-Experiment)

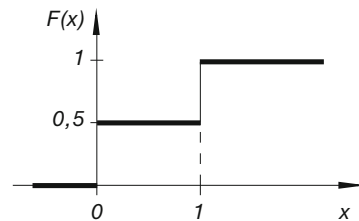
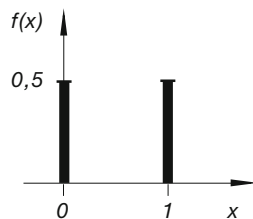
Zufallsvariable:  $X = \text{Anzahl „Wappen“}$

$X$  ist *diskret*, mögliche Werte sind 0 (Zahl) und 1 (Wappen).

Verteilungstabelle:

$x_i$	0	1
$f(x_i)$	0,5	0,5

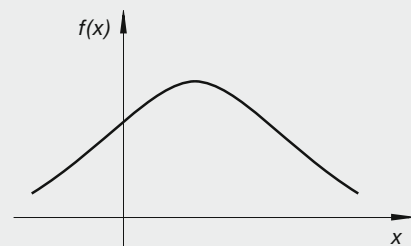
Stabdiagramm und Treppenkurve:

**Stetige Verteilung**

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer *stetigen* Zufallsvariablen:

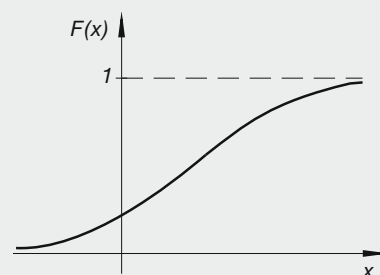
**Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion**  
(kurz: Dichtefunktion)

$$f(x) = F'(x)$$



**Verteilungsfunktion**

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$



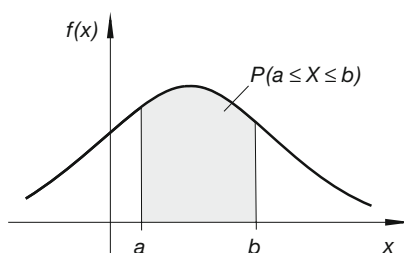
**Eigenschaften**

- (1)  $f(x) \geq 0$  ist normiert:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

(entspricht der *Gesamtfläche* unter der Dichtefunktion).

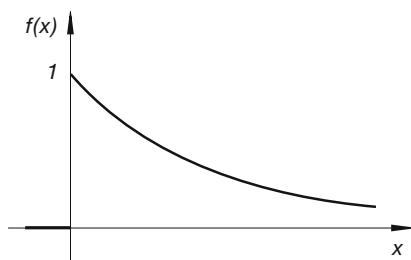
- (2)  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

(entspricht der im Bild grau unterlegten Fläche)

■ **Beispiel**

$X$  sei eine *exponentialverteilte* Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

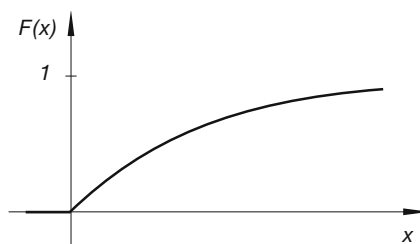
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{für}$$



Die zugehörige *Verteilungsfunktion* lautet dann für  $x \geq 0$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(u) du = \int_0^x e^{-u} du = \\ &= [-e^{-u}]_0^x = -e^{-x} + e^0 = \\ &= -e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Für  $x < 0$  ist  $F(x) = 0$ .



■

**4.3 Kennwerte oder Maßzahlen einer Verteilung****Erwartungswert einer Zufallsvariablen  $X$** 

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot f(x_i) \quad (\text{diskrete Verteilung})$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (\text{stetige Verteilung})$$

### ■ Beispiele

- (1) Wir berechnen den *Erwartungswert* einer *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  mit der nebenstehenden Verteilungstabelle:

$x_i$	0	1	2	3
$f(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot f(x_i) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

- (2) Die *stetige* Zufallsvariable  $X$  mit der Dichtefunktion  $f(x) = e^{-x}$  für  $x \geq 0$  (sonst  $f(x) = 0$ ) besitzt den folgenden *Erwartungswert*:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx = [(-x - 1) \cdot e^{-x}]_0^{\infty} = 0 + e^0 = 0 + 1 = 1$$

■

### Erwartungswert einer Funktion $Z = g(X)$

$$E(Z) = \sum_i g(x_i) \cdot f(x_i) \quad (\text{diskrete Verteilung})$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx \quad (\text{stetige Verteilung})$$

### Rechenregeln für Erwartungswerte

$a$ ,  $b$  und  $c$  sind Konstanten

- (1)  $E(c) = c$   
 (2)  $E(a \cdot g_1(x) + b \cdot g_2(x)) = a \cdot E(g_1(x)) + b \cdot E(g_2(x))$

### Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen

*Mittelwert*  $\mu$ , *Varianz*  $\sigma^2$  und *Standardabweichung*  $\sigma$  sind die drei *Maßzahlen* oder *Kennwerte* einer Zufallsvariablen  $X$ . Sie sind wie folgt definiert:

Kennwerte (Maßzahlen)	diskret	stetig
Mittelwert $\mu = E(X)$	$\sum_i x_i \cdot f(x_i)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$
Varianz $\sigma^2 = \text{Var}(X)$	$\sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i)$	$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$
Standardabweichung $\sigma$	$\sqrt{\text{Var}(X)}$	$\sqrt{\text{Var}(X)}$

*Anmerkungen*

- (1) Der Mittelwert  $\mu$  ist der *Erwartungswert* von  $X$ .
- (2) Die Varianz  $\sigma^2$  ist ein Maß für die *mittlere quadratische Abweichung* der Einzelwerte vom Mittelwert  $\mu$  („Streuung“ der Einzelwerte um den Mittelwert).  $\sigma^2$  ist der Erwartungswert der Funktion (Zufallsvariablen)  $Z = (X - \mu)^2$ .
- (3)  $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$  („bequemere“ Rechenformel für die Varianz)
- (4)  $\mu$ ,  $\sigma^2$  und  $\sigma$  werden auch als *Kennwerte (Maßzahlen)* der *Verteilung* bezeichnet.

**Rechenregeln für lineare Funktionen**

- (1)  $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$
  - (2)  $\text{Var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$
- }  $a, b$ : Konstanten

## 5 Spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

### 5.1 Binomialverteilung

#### Bernoulli-Experiment

Ein Zufallsexperiment mit nur *zwei* sich *gegenseitig ausschließenden* Ergebnissen (Ereignissen) heißt *Bernoulli-Experiment*.

■ **Beispiel**

Beim Zufallsexperiment „Wurf einer homogenen Münze“ gibt es nur die beiden sich *gegenseitig ausschließenden* Ergebnisse „Zahl“ oder „Wappen“. Es handelt sich also um ein *Bernoulli-Experiment*.

■

#### Urnenmodell

Eine Urne enthalte weiße und schwarze Kugeln. Die zufällige Entnahme einer Kugel ist dann ein *Bernoulli-Experiment*. Wird dieses Experiment  $n$ -mal nacheinander durchgeführt, wobei die jeweils gezogene Kugel vor der nächsten Ziehung in die Urne *zurückgelegt* wird („Ziehung mit Zurücklegen“), so ist die *diskrete* Zufallsvariable

$X = \text{Anzahl der insgesamt gezogenen weißen Kugeln}$

*binomialverteilt* (mögliche Werte für  $X$ :  $0, 1, 2, \dots, n$ ).



**Binomialverteilung**

Die Verteilung einer *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  mit der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n)$$

und der zugehörigen *Verteilungsfunktion*

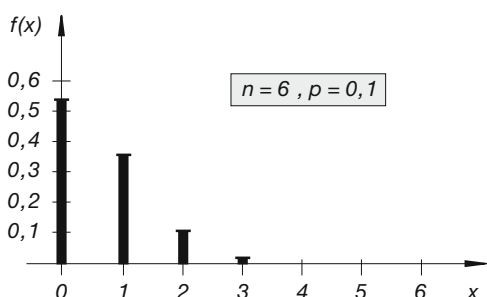
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

heißt *Binomialverteilung* mit den *Parametern*  $n$  und  $p$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $0 < p < 1$ ;  $q = 1 - p$ ). Die *Kennwerte* oder *Maßzahlen* dieser Verteilung sind:

*Mittelwert:*  $\mu = np$

*Varianz:*  $\sigma^2 = npq = np(1 - p)$

*Standardabweichung:*  $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1 - p)}$



Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$   
einer Binomialverteilung mit den  
Parametern  $n = 6$  und  $p = 0,1$

*Anmerkungen*

- (1) Symbolische Schreibweise für die Binomialverteilung:  $B(n; p)$
- (2) *Anwendung* findet die Binomialverteilung überall dort, wo *alternative* Entscheidungen zu treffen sind. *Beispiele*: Münzwurf (Zahl oder Wappen), Qualitätskontrollen (einwandfrei oder Ausschuß).
- (3) Wird ein *Bernoulli-Experiment* mit den beiden sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen  $A$  und  $\bar{A}$   $n$ -mal nacheinander ausgeführt (sog. *mehrstufiges Bernoulli-Experiment* vom Umfang  $n$ ), so ist die *diskrete* Zufallsvariable

$X = \text{Anzahl der Versuche, in denen das Ereignis } A \text{ eintritt}$

*binomialverteilt* mit den Parametern  $n$  und  $p$ . Dabei bedeuten:

- $p$ : *Konstante* Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $A$  beim Einzelversuch ( $0 < p < 1$ )
- $q$ : *Konstante* Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des zu  $A$  *komplementären* Ereignisses  $\bar{A}$  beim Einzelversuch ( $q = 1 - p$ )
- $n$ : Anzahl der Ausführungen des *Bernoulli-Experiments* (Umfang des mehrstufigen *Bernoulli-Experiments*)

- (4) Üblich sind auch folgende Bezeichnungen:

$A$  = Erfolg,  $\bar{A}$  = Mißerfolg,  $p$  = Erfolgswahrscheinlichkeit

- (5) Nützliche *Rekursionsformel* für die Praxis:

$$f(x+1) = \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)} \cdot f(x) \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

- (6) *Sonderfall*  $n = 1$ : Die Zufallsvariable  $X$  kann nur die Werte 0 und 1 annehmen (sog. „Null-Eins-Verteilung“):

$X = 0 \Rightarrow \bar{A}$  ist eingetreten

$X = 1 \Rightarrow A$  ist eingetreten

- (7) Die Binomialverteilung  $B(n; p)$  darf für *großes*  $n$  und *kleines*  $p$  *näherungsweise* durch die (rechnerisch bequemere) *Poisson-Verteilung* mit dem Parameter  $\mu = np$  ersetzt werden (**Faustregel**:  $np < 10$  und  $n > 1500p$ ).

## 5.2 Hypergeometrische Verteilung

### Urnenmodell

In einer Urne befinden sich  $N$  Kugeln, darunter  $M$  weiße und  $N - M$  schwarze Kugeln. Entnimmt man der Urne ganz zufällig  $n$  Kugeln, wobei die jeweils gezogene Kugel vor der nächsten Ziehung *nicht* in die Urne zurückgelegt wird („Ziehung *ohne* Zurücklegen“), so genügt die *diskrete* Zufallsvariable

$X$  = Anzahl der insgesamt gezogenen weißen Kugeln

einer *hypergeometrischen* Verteilung (mögliche Werte für  $X$ : 0, 1, 2, ...,  $n$ ).

### Hypergeometrische Verteilung

Die Verteilung einer *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  mit der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n)$$

und der zugehörigen *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = \sum_{k \leq x} \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

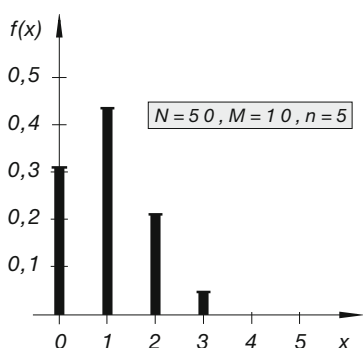
heißt *hypergeometrische* Verteilung mit den Parametern  $N$ ,  $M$  und  $n$  ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ;  $M = 1, 2, 3, \dots, N$ ;  $M \leq N$ ;  $n \leq N$ ).

Die *Kennwerte* oder *Maßzahlen* dieser Verteilung sind:

$$\text{Mittelwert: } \mu = n \frac{M}{N}$$

$$\text{Varianz: } \sigma^2 = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}}$$



Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$   
einer hypergeometrischen Verteilung  
mit den Parametern  $N = 50$ ,  
 $M = 10$  und  $n = 5$

#### Anmerkungen

- (1) Symbolische Schreibweise für die hypergeometrische Verteilung:  $H(N; M; n)$ .
- (2) *Anwendungen*: Qualitäts- und Endkontrollen eines Herstellers von Massenartikeln, Abnahmekontrollen des Kunden bei der Warenanlieferung.
- (3) Zum Urnenmodell: Die Urne repräsentiert eine Grundgesamtheit mit  $N$  Elementen (Kugeln), die *entweder* die Eigenschaft  $A$  (weiß) *oder*  $\bar{A}$  (schwarz) besitzen.

$M$ : Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft  $A$

$n$ : Umfang der *Stichprobe*

$x$ : Anzahl der in der *Stichprobe* enthaltenen Elemente mit der Eigenschaft  $A$

- (4) Nützliche *Rekursionsformel* für die Praxis:

$$f(x+1) = \frac{(n-x)(M-x)}{(x+1)(N-M-n+x+1)} \cdot f(x)$$

$$(x = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

- (5) Für  $N \gg n$  lässt sich die hypergeometrische Verteilung *näherungsweise* durch eine *Binomialverteilung* mit den Parametern  $n$  und  $p = M/N$  ersetzen (**Faustregel**:  $n < 0,05N$ ).
- (6) *Merke*: Ziehung *mit* Zurücklegen  $\rightarrow$  Binomialverteilung  
Ziehung *ohne* Zurücklegen  $\rightarrow$  hypergeometrische Verteilung

### 5.3 Poisson-Verteilung

Die Verteilung einer *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  mit der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

und der zugehörigen *Verteilungsfunktion*

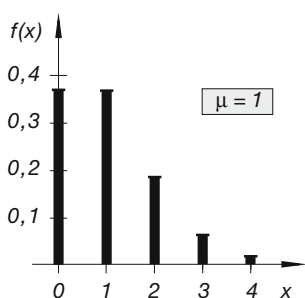
$$F(x) = P(X \leq x) = e^{-\mu} \cdot \sum_{k \leq x} \frac{\mu^k}{k!}$$

heißt *Poisson-Verteilung* mit dem *Parameter*  $\mu > 0$ . Die *Kennwerte* oder *Maßzahlen* dieser Verteilung sind:

*Mittelwert:*  $\mu$

*Varianz:*  $\sigma^2 = \mu$

*Standardabweichung:*  $\sigma = \sqrt{\mu}$



Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$   
einer Poisson-Verteilung  
mit dem Parameter  $\mu = 1$

#### Anmerkungen

- (1) Symbolische Schreibweise für die Poisson-Verteilung:  $Ps(\mu)$
- (2) *Anwendung* findet die Poisson-Verteilung bei *mehrstufigen* Bernoulli-Experimenten, in denen das Ereignis  $A$  mit *geringer* Wahrscheinlichkeit  $p$ , d. h. *sehr selten* eintritt (z. B. radioaktiver Zerfall).
- (3) Nützliche *Rekursionsformel* für die Praxis:

$$f(x+1) = \frac{\mu}{x+1} \cdot f(x) \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

## 5.4 Approximationen diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Tabelle)

Approximation durch eine ...		
... Binomialverteilung	... Poisson-Verteilung	... Normalverteilung
Binomialverteilung $B(n; p)$	<b>Faustregel:</b> $np \leq 10$ und $n \geq 1500p$ $P_S(\mu = np)$	<b>Faustregel:</b> $np(1-p) > 9$ $N(\mu = np; \sigma = \sqrt{np(1-p)})$
Hypergeometrische Verteilung $H(N; M; n)$	<b>Faustregel:</b> $\frac{M}{N} \leq 0,1$ oder $\frac{M}{N} \geq 0,9$ $n < 0,05N, n > 30$ $P_S\left(\mu = n \frac{M}{N}\right)$	<b>Faustregel:</b> $0,1 < \frac{M}{N} < 0,9$ $n < 0,05N, n > 30$ $N\left(\mu = n \frac{M}{N}; \sigma = \sqrt{n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}}\right)$
Poisson-Verteilung $P_S(\mu)$		<b>Faustregel:</b> $\mu > 10$ $N(\mu; \sigma = \sqrt{\mu})$

## 6 Spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

### 6.1 Gaußsche Normalverteilung

#### 6.1.1 Allgemeine Normalverteilung

Die Verteilung einer *stetigen* Zufallsvariablen  $X$  mit der *Dichtefunktion*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

und der zugehörigen *Verteilungsfunktion*

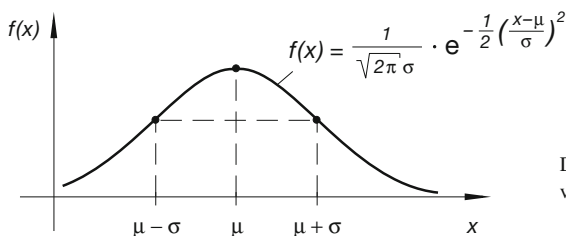
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2} dt$$

heißt *Gaußsche Normalverteilung* mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma > 0$ . Die *Kennwerte* oder *Maßzahlen* dieser Verteilung sind:

*Mittelwert:*  $\mu$

*Varianz:*  $\sigma^2$

*Standardabweichung:*  $\sigma$



Dichtefunktion  $f(x)$  der Gaußschen Normalverteilung („Gaußsche Glockenkurve“)

#### Anmerkungen

- (1) Symbolische Schreibweise für die Gaußsche Normalverteilung:  $N(\mu; \sigma)$
- (2) Eigenschaften der *Dichtefunktion*  $f(x)$ :
  - a)  $f(x)$  ist *spiegelsymmetrisch* zur Geraden  $x = \mu$ .
  - b) Das (einzige) *Maximum* liegt bei  $x_1 = \mu$  und ist zugleich *Symmetriezentrum*, die beiden *Wendepunkte* liegen symmetrisch zum Maximum an den Stellen  $x_{2/3} = \mu \pm \sigma$ .
  - c)  $f(x)$  ist *normiert* (die Fläche unter der Dichtefunktion hat den Wert 1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} dx$$

- (3) Die Dichtefunktion wird ihrer Form wegen auch als *Gaußsche Glockenkurve* bezeichnet.
- (4) Der Parameter  $\sigma$  (Standardabweichung) bestimmt im Wesentlichen *Breite* und *Höhe* der Glockenkurve: je kleiner  $\sigma$ , umso höher und steiler die Kurve.
- (5) *Anwendung* findet die Normalverteilung in der Fehlerrechnung und Statistik.

### 6.1.2 Standardnormalverteilung

Die *allgemeine* Gaußsche Normalverteilung mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  lässt sich stets auf die sog. *Standardnormalverteilung* mit den speziellen Parameterwerten  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  zurückführen. Dies entspricht einem Übergang von der *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  zur sog. *standardnormalverteilten* Zufallsvariablen  $U$  mit Hilfe der linearen *Transformation* (Substitution)

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

(sog. *Standardisierung* oder Umrechnung in *Standardeinheiten*).

#### Standardnormalverteilung einer stetigen Zufallsvariablen $U$

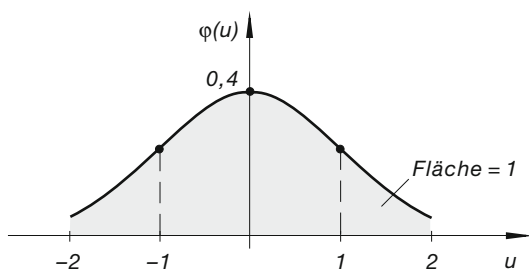
Eine *Normalverteilung* mit den Parametern  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  heißt *Standardnormalverteilung* oder auch *standardisierte* Normalverteilung. Ihre *Dichtefunktion* ist

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} \quad (-\infty < u < \infty)$$

und besitzt den im Bild dargestellten typischen Verlauf („Glockenkurve“). Die zugehörige *Verteilungsfunktion* lautet:

$$\Phi(u) = P(U \leq u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Eine ausführliche *Tabelle* der Verteilungsfunktion  $\Phi(u)$  befindet sich im *Anhang*, Teil B (Tabelle 1).



Dichtefunktion  $\varphi(u)$   
der Standardnormalverteilung

## Anmerkungen

- (1) Symbolische Schreibweise für die Standardnormalverteilung:  $N(0; 1)$
- (2) Eigenschaften der Dichtefunktion  $\varphi(u)$ :
  - a)  $\varphi(u)$  ist *achsensymmetrisch*, d. h. eine *gerade* Funktion.
  - b) Das *Maximum* liegt bei  $u_1 = 0$  und ist zugleich *Symmetriezentrum*, die beiden *Wendepunkte* befinden sich an den Stellen  $u_{2/3} = \pm 1$ .
  - c)  $\varphi(u)$  ist *normiert*, d. h. die Fläche unter der Dichtefunktion hat den Wert 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1$$

- (3) Die Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  wird auch als *Gaußsches Fehlerintegral* bezeichnet.

### 6.1.3 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

#### 1. Fall: Die Zufallsvariable ist standardnormalverteilt

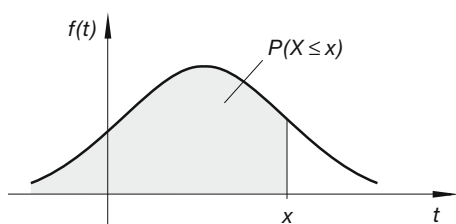
Die wichtigsten Formeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei ein- bzw. zweiseitiger Abgrenzung befinden sich aus Gründen der Zweckmäßigkeit im *Anhang* (Teil B) gegenüber der **Tabelle 1** (Seite 508 / 509).

#### 2. Fall: Die Zufallsvariable ist normalverteilt mit den Parametern $\mu$ und $\sigma$

Die *normalverteilte* Zufallsvariable  $X$  wird zunächst durch die Transformation (Substitution)  $U = (X - \mu)/\sigma$  in die *standardnormalverteilte* Zufallsvariable  $U$  übergeführt (Umrechnung in *Standardseinheiten*). Bei ein- bzw. zweiseitiger Abgrenzung gelten dann folgende Formeln:

#### Einseitige Abgrenzung

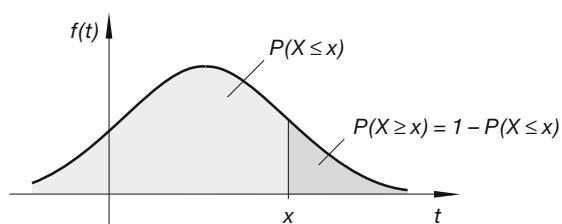
Abgrenzung nach *oben*



$$P(X \leq x) = \phi(u)$$

mit  $u = (x - \mu)/\sigma$

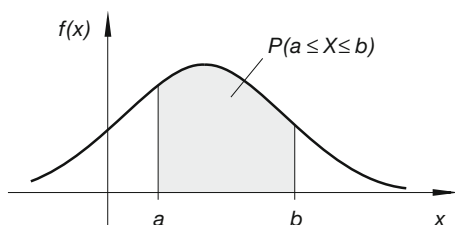
Abgrenzung nach *unten*



$$P(X \geq x) = 1 - \phi(u)$$

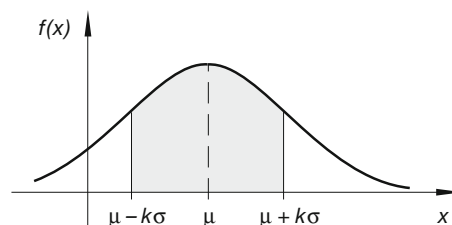
mit  $u = (x - \mu)/\sigma$



**Zweiseitige Abgrenzung***unsymmetrisches Intervall*

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(b^*) - \Phi(a^*)$$

mit  $a^* = (a - \mu)/\sigma$  und  $b^* = (b - \mu)/\sigma$

*symmetrisches Intervall*

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) = 2 \cdot \Phi(k) - 1$$

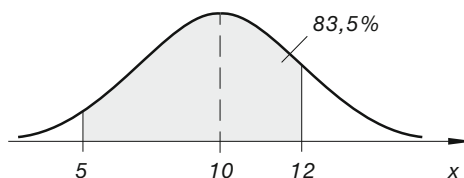
■ **Beispiel**

Die Zufallsvariable  $X$  ist *normalverteilt* mit dem *Mittelwert*  $\mu = 10$  und der *Standardabweichung*  $\sigma = 2$ . Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit  $P(5 \leq X \leq 12)$ .

Umrechnung der Grenzen in *Standardeinheiten*:

$$a = 5 \Rightarrow a^* = \frac{a - \mu}{\sigma} = \frac{5 - 10}{2} = -2,5$$

$$b = 12 \Rightarrow b^* = \frac{b - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 10}{2} = 1$$



Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Tabelle 1 im Anhang, Teil B:

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 12) &= P(-2,5 \leq U \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-2,5) = \Phi(1) - [1 - \Phi(2,5)] = \\ &= \Phi(1) + \Phi(2,5) - 1 = 0,8413 + 0,9938 - 1 = 0,8351 \end{aligned}$$

■

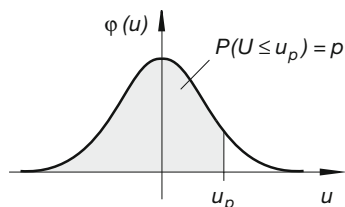
**6.1.4 Quantile der Standardnormalverteilung**

Bei einer einseitigen Abgrenzung nach *oben* beschreibt die Verteilungsfunktion  $\Phi(u)$  der Standardnormalverteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die *standardnormalverteilte* Zufallsvariable  $U$  einen Wert zwischen  $-\infty$  und  $u$  annimmt (Fläche unter der Dichtefunktion bis hin zur *oberen* Grenze  $u$ ):  $P(U \leq u) = \Phi(u)$ . Zu *jedem* Wert  $u$  gehört somit *genau ein* Wahrscheinlichkeitswert  $\Phi(u)$ .

Umgekehrt gehört zu einem vorgegebenen Wahrscheinlichkeitswert  $p$  genau eine obere Grenze oder Schranke, die als *Quantil*  $u_p$  zum Wahrscheinlichkeitswert  $p$  bezeichnet wird. Das Quantil  $u_p$  genügt der Gleichung

$$P(U \leq u_p) = \phi(u_p) = p$$

und lässt sich für die in der Praxis gängigen Wahrscheinlichkeitswerte aus der *Tabelle 2* im *Anhang*, Teil B bestimmen. Formeln für die Berechnung der Intervallgrenzen bei ein- bzw. zweiseitiger Abgrenzung findet der Leser im *Anhang*, Teil B gegenüber der *Tabelle 2* (Seite 510 / 511).

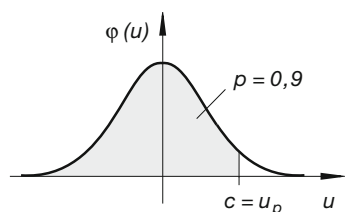


#### ■ Beispiel

$$P(U \leq c) = 0,9$$

$$c = ?$$

$$P(U \leq c) = \phi(c) = 0,9$$



Aus der *Tabelle 2* im *Anhang*, Teil B entnehmen wir: Zum Wahrscheinlichkeitswert  $p = 0,9$  gehört das Quantil  $u_{0,9} = 1,282$ . Somit ist  $c = u_{0,9} = 1,282$ .

■

## 6.2 Exponentialverteilung

Die Verteilung einer *stetigen* Zufallsvariablen  $X$  mit der *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

und der zugehörigen *Verteilungsfunktion*

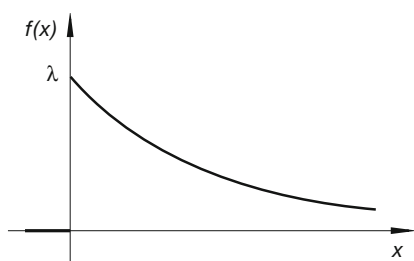
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

heißt *Exponentialverteilung* mit dem *Parameter*  $\lambda > 0$ . Die *Kennwerte* oder *Maßzahlen* dieser Verteilung sind:

$$\text{Mittelwert: } \mu = 1/\lambda$$

$$\text{Varianz: } \sigma^2 = 1/\lambda^2$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = 1/\lambda$$



Dichtefunktion einer exponentialverteilten Zufallsvariablen  $X$

#### Anmerkungen

- (1) Mittelwert und Standardabweichung stimmen überein:  $\mu = \sigma = 1/\lambda$
- (2) *Anwendungen*: Lebensdauer von Bauelementen und Lebewesen.

## 7 Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen

### 7.1 Mehrdimensionale Zufallsvariable

#### 2-dimensionale Zufallsvariable

Zufallsexperimente, in denen gleichzeitig *zwei* Merkmale beobachtet werden, lassen sich durch eine *2-dimensionale Zufallsvariable*  $(X; Y)$ , auch *2-dimensionaler Zufallsvektor* genannt, darstellen. Die Verteilung wird dabei vollständig durch die *Verteilungsfunktion*

$$F(x; y) = P(X \leq x; Y \leq y)$$

beschrieben (Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  *gleichzeitig* Werte annehmen, die kleiner oder gleich  $x$  bzw.  $y$  sind).  $F(x; y)$  wird auch als *gemeinsame Verteilung* der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  bezeichnet.

Bei einer *diskreten* Verteilung sind  $X$  und  $Y$  *beide* diskret. Die normierte *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f(x; y)$  ordnet dann jedem möglichen Wertepaar  $(x_i; y_k)$  einen *Wahrscheinlichkeitswert*  $p_{ik} > 0$  zu.

Eine *stetige* Verteilung ( $X$  und  $Y$  sind *beide* stetig) lässt sich durch die normierte *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion*  $f(x; y) \geq 0$  mit der *Verteilungsfunktion*

$$F(x; y) = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^y f(u; v) dv du$$

vollständig beschreiben.

### ■ Beispiel

Das Zufallsexperiment „Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln“ beschreiben wir durch die 2-dimensionale Zufallsvariable  $(X; Y)$  mit den beiden *stochastisch unabhängigen* Komponenten

$X = \text{Augenzahl des 1. Würfels}$

$Y = \text{Augenzahl des 2. Würfels}$

die unabhängig voneinander die Werte 1, 2, 3, 4, 5 und 6 annehmen können. Insgesamt gibt es 36 *gleichwahrscheinliche* Elementarereignisse (*Laplace-Experiment*):

$(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), \dots, (6; 6)$

Sie treten jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 1/36$  auf. Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* lautet daher:

$$f(x; y) = \begin{cases} 1/36 & \text{für } x, y = 1, 2, \dots, 6 \\ 0 & \text{alle übrigen } (x; y) \end{cases}$$

■

### *n*-dimensionale Zufallsvariable

Zufallsexperimente mit  $n$  gleichzeitig beobachteten Merkmalen werden durch eine *n-dimensionale Zufallsvariable*  $(X_1; X_2; \dots; X_n)$ , auch *n-dimensionaler Zufallsvektor* genannt, beschrieben. Alle bisherigen Begriffe lassen sich sinngemäß übertragen.

### Stochastisch unabhängige Zufallsvariable

Zwei Zufallsvariable  $X$  und  $Y$  heißen *stochastisch unabhängig*, wenn stets gilt

$$F(x; y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

$F_1(x), F_2(y)$ : Verteilungsfunktionen von  $X$  bzw.  $Y$

Anderenfalls sind die beiden Zufallsvariablen *stochastisch abhängig*. Für die zugehörigen *Wahrscheinlichkeits-* bzw. *Dichtefunktionen* gilt (im Falle der Unabhängigkeit)

$$f(x; y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

$f_1(x), f_2(y)$ : Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktionen von  $X$  bzw.  $Y$  (auch *Randverteilungen* der 2-dimensionalen Verteilung genannt)

Diese Bedingung ist notwendig *und* hinreichend für die Unabhängigkeit. Analoge Beziehungen gelten für  $n$  stochastisch unabhängige Zufallsvariable.

## 7.2 Summen, Linearkombinationen und Produkte von Zufallsvariablen

*Summen, Linearkombinationen und Produkte* von  $n$  Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sind wiederum Zufallsvariable (alle  $X_i$  sind dabei *entweder* diskret *oder* stetig).

### 7.2.1 Additionssätze für Mittelwerte und Varianzen

Für *Summen* vom Typ  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  gelten folgende Sätze:

#### Additionssatz für Mittelwerte

$$E(Z) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

oder (in anderer Schreibweise)

$$\mu_z = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

$E(X_i) = \mu_i$ : Mittelwert von  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )

#### Additionssatz für Varianzen

*Voraussetzung*:  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sind *stochastisch unabhängig*

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

oder (in anderer Schreibweise)

$$\sigma_z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

$\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ : Varianz von  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )

#### Additionssätze für Linearkombinationen

In allgemeiner Form gelten beide Additionssätze unter den genannten Voraussetzungen auch für *Linearkombinationen* vom Typ

$$Z = a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + \dots + a_n \cdot X_n \quad (a_i: \text{Konstanten})$$

$$E(Z) = a_1 \cdot E(X_1) + a_2 \cdot E(X_2) + \dots + a_n \cdot E(X_n)$$

$$\text{Var}(Z) = a_1^2 \cdot \text{Var}(X_1) + a_2^2 \cdot \text{Var}(X_2) + \dots + a_n^2 \cdot \text{Var}(X_n)$$

$$\left. \begin{array}{l} E(X_i) = \mu_i: \quad \text{Mittelwert von } X_i \\ \text{Var}(X_i) = \sigma_i^2: \quad \text{Varianz von } X_i \end{array} \right\} (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

■ **Beispiel**

Zufallsexperiment: „Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln“

2-dimensionaler Zufallsvektor:  $(X_1; X_2)$  mit den beiden Komponenten

$X_i$  = Augenzahl des  $i$ -ten Würfels ( $i = 1, 2$ )

$X_1$  und  $X_2$  sind *stochastisch unabhängig*. Sie haben die Mittelwerte  $\mu_1 = \mu_2 = 3,5$  und die Varianzen  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 35/12$ . Dann gilt für die Summe  $Z = X_1 + X_2$ :

$$\mu_z = E(Z) = \mu_1 + \mu_2 = 3,5 + 3,5 = 7$$

$$\sigma_z^2 = \text{Var}(Z) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{70}{12} = \frac{35}{6}$$

■

### 7.2.2 Multiplikationssatz für Mittelwerte

Für ein Produkt  $Z = X_1 \cdot X_2 \dots X_n$  aus  $n$  *stochastisch unabhängigen* Faktoren gilt der folgende *Multiplikationssatz für Mittelwerte*:

$$E(Z) = E(X_1) \cdot E(X_2) \dots E(X_n)$$

oder (in anderer Schreibweise)

$$\mu_z = \mu_1 \cdot \mu_2 \dots \mu_n$$

$E(X_i) = \mu_i$ : Mittelwert von  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )

### 7.2.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe

Eine Summe  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  von  $n$  *normalverteilten* und *stochastisch unabhängigen* Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  besitzt folgende Eigenschaften:

$Z$  ist *normalverteilt* mit dem Mittelwert

$$\mu_z = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

und der Varianz

$$\sigma_z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

*Sonderfall*:  $\mu_i = \mu, \sigma_i^2 = \sigma^2 \Rightarrow \mu_z = n\mu, \sigma_z^2 = n\sigma^2$

*Anmerkung*

Sind die Summanden  $X_i$  zwar *stochastisch unabhängig*, jedoch *beliebig verteilt*, so ist die Summe *näherungsweise normalverteilt*, falls die Anzahl  $n$  der Summanden hinreichend groß ist (**Faustregel**:  $n > 30$ ) und keiner der Summanden dominiert.

## 8 Prüf- oder Testverteilungen

*Prüf- oder Testverteilungen* sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die im Zusammenhang mit statistischen Prüf- oder Testverfahren benötigt werden.

### 8.1 Chi-Quadrat-Verteilung („ $\chi^2$ -Verteilung“)

$X_1, X_2, \dots, X_n$  seien *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable, die alle der *Standard-normalverteilung*  $N(0; 1)$  genügen. Die aus ihnen gebildete Quadratsumme

$$Z = \chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

ist dann eine *stetige* Zufallsvariable mit dem Wertebereich  $z \geq 0$  und genügt einer sog. *Chi-Quadrat-Verteilung* mit der *Dichtefunktion*

$$f(z) = \begin{cases} A_n \cdot z^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{z}{2}} & \text{für } z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

und der zugehörigen Verteilungsfunktion

$$F(z) = A_n \cdot \int_0^z u^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{u}{2}} du \quad (z > 0)$$

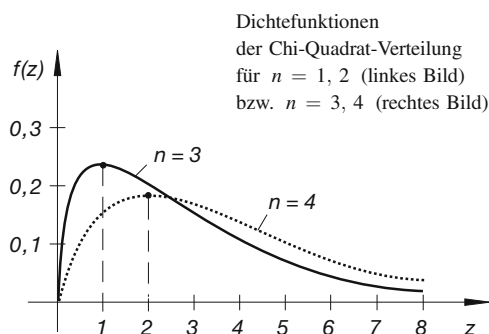
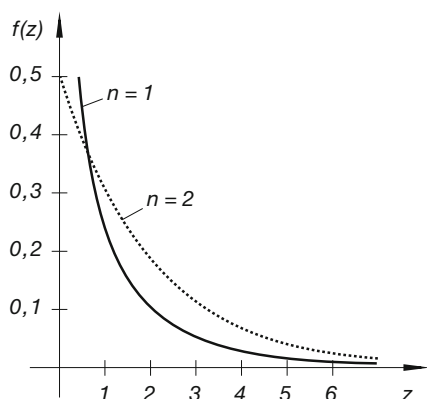
(für  $z \leq 0$  ist  $F(z) = 0$ ). Die Verteilung ist durch den *Parameter*  $n$  vollständig bestimmt ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Die *Kennwerte* oder *Maßzahlen* dieser Verteilung sind:

*Mittelwert:*  $\mu = n$

*Varianz:*  $\sigma^2 = 2n$

*Standardabweichung:*  $\sigma = \sqrt{2n}$

Im *Anhang* (Teil B) befindet sich eine ausführliche *Tabelle der Quantile* der Chi-Quadrat-Verteilung in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad  $f = n$  (Tabelle 3).



*Anmerkungen*

- (1) Der Parameter  $n$  bestimmt die Anzahl  $f$  der *Freiheitsgrade* der Verteilung:  $f = n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).
- (2)  $A_n$  ist eine noch vom Freiheitsgrad  $f = n$  abhängige *Normierungskonstante*, die mit Hilfe der *Gamma-Funktion* berechnet werden kann (siehe weiter unten).
- (3) Eigenschaften der *Dichtefunktion*  $f(z)$ : *normiert*, für  $n \leq 2$  *streng monoton fallend*, *Maximum* an der Stelle  $z = n - 2$  für  $n > 2$ .
- (4) Die Chi-Quadrat-Verteilung lässt sich für *hinreichend großes*  $n$  (**Faustregel:**  $n > 100$ ) durch eine *Normalverteilung* mit dem Mittelwert  $\mu = n$  und der Varianz  $\sigma^2 = 2n$  *annähern*.

**Berechnung der Normierungskonstante  $A_n$** 

Die Berechnung der Normierungskonstante

$$A_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

erfolgt über die *Gamma-Funktion*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} dt \quad (\alpha > 0)$$

mit Hilfe der folgenden speziellen Werte und Rekursionsformeln:

$$(1) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1$$

$$(2) \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \quad (\alpha > 0)$$

$$(3) \quad \Gamma(n + 1) = n! \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(4) \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1)}{2^n} \cdot \sqrt{\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$



## 8.2 *t*-Verteilung von Student

$X$  und  $Y$  seien zwei *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable mit den Eigenschaften

$X$ : *standardnormalverteilt*

$Y$ : *Chi-Quadrat-verteilt* mit  $n$  Freiheitsgraden

Die aus ihnen gebildete Größe

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

ist dann eine *stetige* Zufallsvariable, die einer sog. *t-Verteilung* von *Student* mit der *Dichtefunktion*

$$f(t) = A_n \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} \quad (-\infty < t < \infty)$$

und der zugehörigen Verteilungsfunktion

$$F(t) = A_n \cdot \int_{-\infty}^t \frac{du}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}$$

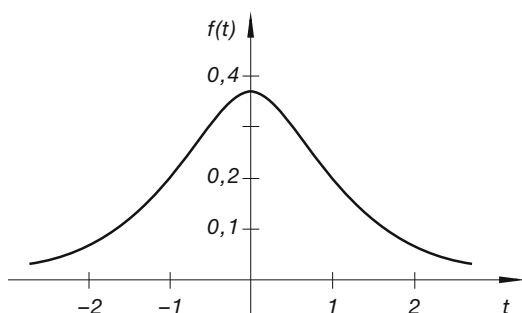
genügt. Die Verteilung ist dabei durch den *Parameter*  $n$  vollständig bestimmt ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Die *Kennwerte* oder *Maßzahlen* dieser Verteilung sind:

*Mittelwert*<sup>1)</sup>:  $\mu = 0$  für  $n \geq 2$

*Varianz*<sup>1)</sup>:  $\sigma^2 = \frac{2}{n-2}$  für  $n \geq 3$

*Standardabweichung*<sup>1)</sup>:  $\sigma = \sqrt{\frac{2}{n-2}}$  für  $n \geq 3$

Im *Anhang* (Teil B) befindet sich eine ausführliche *Tabelle der Quantile* der *t-Verteilung* in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad  $f = n$  (Tabelle 4).



Dichtefunktion  $f(t)$   
einer *t-Verteilung*  
mit dem Parameter  
 $n = 2$

<sup>1)</sup> Für  $n = 1$  existiert kein Mittelwert, für  $n = 1, 2$  keine Varianz.

*Anmerkungen*

- (1) Der Parameter  $n$  bestimmt die Anzahl der *Freiheitsgrade* der Verteilung:  $f = n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).
- (2)  $A_n$  ist eine noch vom Freiheitsgrad  $f = n$  abhängige *Normierungskonstante*, die mit Hilfe der *Gamma-Funktion* berechnet werden kann (siehe weiter unten).
- (3) Eigenschaften der *Dichtefunktion*  $f(t)$ : *normiert*, *achsensymmetrisch*, (absolutes) *Maximum* bei  $t = 0$ , nähert sich im Unendlichen *asymptotisch* der  $t$ -Achse.
- (4) Die  $t$ -Verteilung lässt sich für *hinreichend großes*  $n$  (**Faustregel:**  $n > 30$ ) durch die *Standardnormalverteilung* näherungsweise ersetzen.

**Berechnung der Normierungskonstante  $A_n$** 

Die Berechnung der Normierungskonstante

$$A_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

erfolgt über die *Gamma-Funktion* (siehe Tabelle spezieller Werte und Rekursionsformeln auf Seite 428).

# XVI Grundlagen der mathematischen Statistik

## 1 Grundbegriffe

### 1.1 Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit

Eine grundlegende Aufgabe der Statistik besteht darin, Kenntnisse und Informationen über die Eigenschaften oder Merkmale einer bestimmten Menge von Objekten (Elementen) zu gewinnen, ohne dass dabei *alle* Objekte in die Untersuchung miteinbezogen werden müssen. Dies ist aus den folgenden Gründen meist auch nicht möglich:

- Zu *hoher* Zeit- und Kostenaufwand
- Die Anzahl der Elemente, die untersucht werden müßten, ist zu *groß*
- Die Untersuchungsobjekte könnten unter Umständen *zerstört* werden (Beispiel: Zerstörung einer Glühbirne beim Testen der Lebensdauer)

#### Grundgesamtheit

Unter einer *Grundgesamtheit* versteht man die Gesamtheit *gleichartiger* Objekte oder Elemente, die hinsichtlich eines bestimmten *Merkmals* untersucht werden sollen. Das dabei interessierende Merkmal wird durch eine *Zufallsvariable*  $X$  beschrieben. Die Grundgesamtheit kann aus *endlich vielen* oder *unendlich vielen* Elementen bestehen.

#### Zufallsstichprobe (kurz: Stichprobe)

Eine aus der Grundgesamtheit nach dem „Zufallsprinzip“ herausgegriffene *Teilmenge* mit  $n$  Elementen wird als *Zufallsstichprobe* vom Umfang  $n$  bezeichnet. Die Auswahl der Elemente muss also *wahllos* und *unabhängig voneinander* geschehen; *alle* Elemente der Grundgesamtheit müssen dabei grundsätzlich die *gleiche* Chance haben, ausgewählt (d. h. gezogen) zu werden. Die beobachteten Merkmalswerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  der  $n$  Elemente sind *Realisierungen* der Zufallsvariablen  $X$  und heißen *Stichprobenwerte*.

Da es in der Praxis aus den weiter oben genannten Gründen *nicht* möglich ist, *alle* Elemente einer Grundgesamtheit auf ein bestimmtes Merkmal  $X$  hin zu untersuchen, beschränkt man sich auf die Untersuchung einer *Stichprobe* vom Umfang  $n$ , die der Grundgesamtheit nach dem Zufallsprinzip entnommen wurde.

Die Aufgabe der mathematischen Statistik besteht dann u. a. darin, aus einer solchen Zufallsstichprobe mit Hilfe der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* gewisse *Rückschlüsse* auf die Grundgesamtheit zu ermöglichen.

## 1.2 Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe

*Urliste*: Sie enthält die  $n$  Stichprobenwerte in der Reihenfolge ihres Auftretens

*Spannweite* der Stichprobe: Abstand zwischen dem kleinsten und dem größten Wert

Die Stichprobenwerte werden ihrer Größe nach geordnet, dann wird festgestellt, wie oft jeder Wert vorkommt. Ist der Stichprobenwert  $x_i$  genau  $n_i$ -mal in der Stichprobe enthalten, so heißt diese Zahl *absolute Häufigkeit* des Stichprobenwertes  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$  und  $k < n$ ). Dividiert man die absolute Häufigkeit  $n_i$  durch die Anzahl  $n$  der Stichprobenwerte, so erhält man die *relative Häufigkeit*  $h_i = n_i/n$ , wobei gilt

$$0 < h_i \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k h_i = h_1 + h_2 + \dots + h_k = 1$$

### Verteilungstabelle

Absolute und relative Häufigkeit werden in einer *Verteilungstabelle* dargestellt:

Stichprobenwert $x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\dots$	$x_k$
absolute Häufigkeit $n_i$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$\dots$	$n_k$
relative Häufigkeit $h_i$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$\dots$	$h_k$

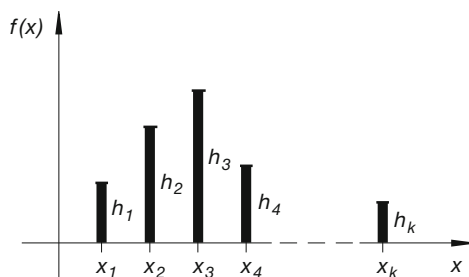
### Häufigkeitsfunktion $f(x)$ einer Stichprobe

Die Verteilung der einzelnen Stichprobenwerte in einer geordneten Stichprobe vom Umfang  $n$  mit  $k$  verschiedenen Werten  $x_1, x_2, \dots, x_k$  lässt sich durch die folgende *Häufigkeitsfunktion* beschreiben:

$$f(x) = \begin{cases} h_i & \text{für } x = x_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k) \\ 0 & \text{für alle übrigen } x \end{cases}$$

Graphische Darstellung:

*Stabdiagramm*



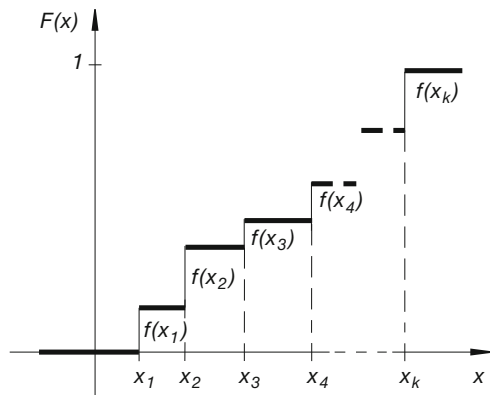
### Verteilungsfunktion $F(x)$ einer Stichprobe

Die *Summe* der relativen Häufigkeiten aller Stichprobenwerte, die kleiner *oder* gleich  $x$  sind, heißt *Summenhäufigkeits-* oder *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  der Stichprobe:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Graphische Darstellung:

*Treppenfunktion* (stückweise konstante Funktion, an der Stelle  $x_i$  erfolgt ein Sprung um  $f(x_i) = h_i$ , Endwert = 1)



#### ■ Beispiel

Der Tagesproduktion von Gewindeschrauben mit dem Solldurchmesser 5,0 mm wurde eine Stichprobe vom Umfang  $n = 25$  mit der folgenden *Verteilungstabelle* entnommen:

$\frac{x_i}{\text{mm}}$	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2
$n_i$	1	3	6	9	4	2
$h_i$	0,04	0,12	0,24	0,36	0,16	0,08

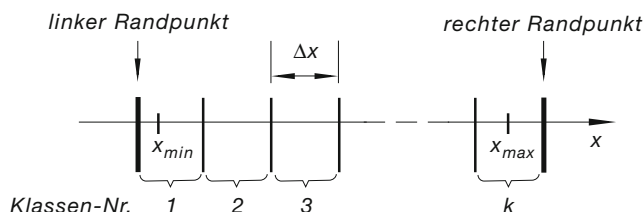
Häufigkeitsfunktion  $f(x)$  und Verteilungsfunktion  $F(x)$  haben damit das folgende Aussehen:

$\frac{x_i}{\text{mm}}$	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2
$f(x_i)$	0,04	0,12	0,24	0,36	0,16	0,08
$F(x_i)$	0,04	0,16	0,40	0,76	0,92	1

■

### 1.3 Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben

Bei *umfangreichen* Stichproben mit vielen verschiedenen Werten gruppiert man die Stichprobenwerte zweckmäßigerweise in sog. *Klassen*. Zunächst wird die Stichprobe *geordnet* und der *kleinste* und *größte* Wert bestimmt ( $x_{\min}$  bzw.  $x_{\max}$ ). Dann wird das Intervall  $I$  festgelegt, in dem *sämtliche* Stichprobenwerte liegen und dieses schließlich in  $k$  Teilintervalle  $\Delta I_i$  gleicher Breite  $\Delta x$  zerlegt. Die Mitte eines jeden Klassenintervalls  $\Delta I_i$  heißt *Klassenmitte*  $\tilde{x}_i$ .



#### Allgemeine Regeln für die Gruppierung einer umfangreichen Stichprobe (Einteilung der Stichprobenwerte in Klassen)

- (1) Man wähle möglichst Klassen gleicher Breite  $\Delta x$ .
- (2) Die Klasseneinteilung sollte so gewählt werden, dass die *Klassenmitten* durch möglichst einfache Zahlen (z. B. ganze Zahlen) charakterisiert werden.
- (3) Fällt ein Stichprobenwert in einen der beiden *Randpunkte* einer Klasse, so zählt man ihn je zur  *Hälfte* den beiden angrenzenden Klassen zu.
- (4) Bei der Festlegung der *Anzahl*  $k$  der Klassen bei  $n$  Stichprobenwerten verwende man die folgende **Faustregel**:

$$k \approx \sqrt{n} \quad \text{für} \quad 50 < n < 500$$

Bei Stichproben mit einem Umfang  $n > 500$  wähle man *höchstens*  $k = 30$  Klassen.

#### Anmerkung

Eine weitere häufig empfohlene **Faustregel** für die Klassenanzahl  $k$  lautet:  $k \leq 5 \cdot \lg n$

Durch *Auszählen* wird festgestellt, welche Stichprobenwerte in welche Klassen fallen. Die Anzahl  $n_i$  der Stichprobenwerte, die in der  $i$ -ten Klasse liegen, heißt *absolute Klassenhäufigkeit*. Dividiert man diese durch die Anzahl  $n$  aller Stichprobenwerte, so erhält man die *relative Klassenhäufigkeit*  $h_i = n_i/n$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Für die Weiterverarbeitung der Stichprobenwerte wird vereinbart, dass *allen* Elementen einer Klasse genau die *Klassenmitte* als Wert zugeordnet wird.

### Verteilungstabelle einer gruppierten Stichprobe

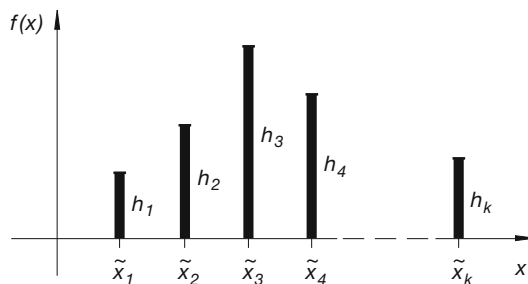
Klassenmitte $\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\dots$	$\tilde{x}_k$
relative Klassenhäufigkeit $h_i$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$\dots$	$h_k$

### Häufigkeitsfunktion einer gruppierten Stichprobe

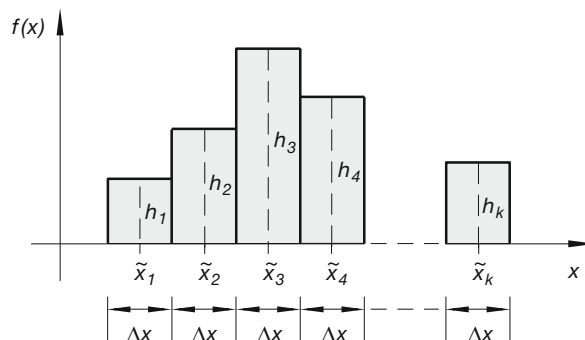
Die *Häufigkeitsfunktion*  $f(x)$  einer *gruppierten* Stichprobe beschreibt die *relative Klassenhäufigkeit*  $h_i$  in Abhängigkeit von der Klassenmitte  $\tilde{x}_i$ :

$$f(x) = \begin{cases} h_i & \text{für } x = \tilde{x}_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k) \\ 0 & \text{für alle übrigen } x \end{cases}$$

Der Verlauf dieser Funktion lässt sich graphisch durch ein *Stabdiagramm* oder durch ein sog. *Histogramm* verdeutlichen. Beim *Stabdiagramm* trägt man dabei über der Klassenmitte  $\tilde{x}_i$  die *relative Klassenhäufigkeit*  $h_i$  ab (d. h. einen Stab der *Länge*  $h_i$ ).



Ein *Histogramm* oder *Staffelbild* entsteht, wenn man über den Klassen gleicher Breite  $\Delta x$  Rechtecke errichtet, deren Höhen den *relativen* Klassenhäufigkeiten entsprechen. Die *Flächeninhalte* der Rechtecke sind dabei den *relativen* Klassenhäufigkeiten *proportional*.



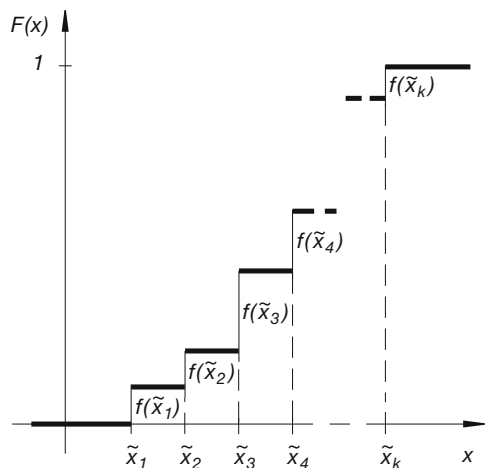
### Verteilungsfunktion einer gruppierten Stichprobe

$$F(x) = \sum_{\tilde{x}_i \leq x} f(\tilde{x}_i)$$

$F(x)$  heißt auch *Summenhäufigkeits-* oder *empirische Verteilungsfunktion*.

Graphische Darstellung:

*Treppenfunktion*



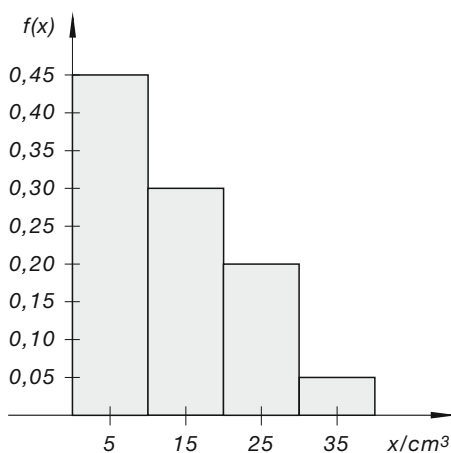
#### ■ Beispiel

Mit einer automatischen Abfüllanlage wird Wein in Literflaschen gefüllt. Eine nachträgliche Stichprobenuntersuchung an  $n = 20$  gefüllten Flaschen ergab die folgenden Fehlmengen, beschrieben durch die Zufallsvariable  $X$  (in  $\text{cm}^3$ ):

Klasse $i$	Fehlmenge (in $\text{cm}^3$ )	Anzahl der Flaschen
1	$0 \leq x \leq 10$	9
2	$10 < x \leq 20$	6
3	$20 < x \leq 30$	4
4	$30 < x \leq 40$	1

Man erhält die folgende *Verteilung* (Klassenmitte, Häufigkeits- und Verteilungsfunktion, Histogramm):

$i$	1	2	3	4
$\tilde{x}_i$	5	15	25	35
$f(\tilde{x}_i)$	0,45	0,30	0,20	0,05
$F(\tilde{x}_i)$	0,45	0,75	0,95	1





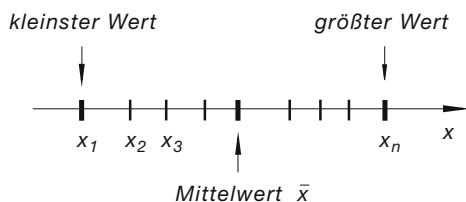
## 2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe

### 2.1 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe

#### Mittelwert $\bar{x}$ einer Stichprobe

Der *Mittelwert*  $\bar{x}$  einer (geordneten) Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vom Umfang  $n$  ist das *arithmetische Mittel* der Stichprobenwerte:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$



Kontrolle:  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$

Weitere übliche Bezeichnungen für  $\bar{x}$ : *Stichprobenmittelwert*, *empirischer Mittelwert*

#### Varianz $s^2$ und Standardabweichung $s$ einer Stichprobe

Ein geeignetes Maß für die *Streuung* der Einzelwerte  $x_i$  um den Mittelwert  $\bar{x}$  ist die *Varianz*

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{1}{n - 1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Die Quadratwurzel aus der Varianz  $s^2$  heißt *Standardabweichung*  $s$  der Stichprobe.

## Anmerkungen

- (1) Weitere übliche Bezeichnungen für die Varianz  $s^2$  einer Stichprobe sind *Stichprobenvarianz* oder auch *empirische Varianz*.
- (2) Beide Kennwerte, sowohl die Varianz  $s^2$  als auch die Standardabweichung  $s$ , sind ein Maß für die Streuung der Stichprobenwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  um ihren Mittelwert  $\bar{x}$ . Die Standardabweichung  $s$  hat dabei den Vorteil, dass sie *dieselbe* Dimension und Einheit besitzt wie die einzelnen Stichprobenwerte und deren Mittelwert  $\bar{x}$ .
- (3) Die Varianz  $s^2$  ist eine Art *mittleres* Abweichungsquadrat. Es gilt stets  $s^2 > 0$  und somit auch  $s > 0$ .
- (4) Bequemere Rechenformel für die Varianz:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right]$$

## ■ Beispiel

Aus der Tagesproduktion von Widerständen mit dem Sollwert  $10 \Omega$  wurde eine Stichprobe vom Umfang  $n = 8$  entnommen:

9,8; 10,1; 10,3; 10,2; 10,2; 10,0; 9,9; 10,3 (jeweils in  $\Omega$ ).

Die Auswertung führt zu dem folgenden Ergebnis:

$i$	$\frac{x_i}{\Omega}$	$\frac{x_i^2}{\Omega^2}$
1	9,8	96,04
2	10,1	102,01
3	10,3	106,09
4	10,2	104,04
5	10,2	104,04
6	10,0	100,00
7	9,9	98,01
8	10,3	106,09
$\Sigma$	80,8	816,32

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 x_i = \frac{1}{8} \cdot 80,8 \Omega = 10,1 \Omega$$

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{1}{8-1} \left[ \sum_{i=1}^8 x_i^2 - 8 \cdot \bar{x}^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{7} (816,32 \Omega^2 - 8 \cdot (10,1 \Omega)^2) = \\
 &= \frac{1}{7} (816,32 - 816,08) \Omega^2 = \\
 &= \frac{1}{7} \cdot 0,24 \Omega^2 = 0,034 \Omega^2
 \end{aligned}$$

$$s = 0,19 \Omega$$

■

## 2.2 Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeitsfunktion

*Voraussetzung:* Es liegt eine *geordnete* Stichprobe vom Umfang  $n$  mit  $k$  verschiedenen Werten  $x_1, x_2, \dots, x_k$  und der *Häufigkeitsfunktion*  $f(x)$  vor

**Mittelwert  $\bar{x}$**

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i \cdot f(x_i)$$

**Varianz  $s^2$**

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot f(x_i) = \frac{n}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot f(x_i) - \bar{x}^2 \right]$$

### ■ Beispiel

Bei 10 Würfeln eines homogenen Würfels erhielt man die folgenden „Augenzahlen“:

2, 1, 6, 4, 3, 4, 4, 6, 3, 5

Die Auswertung dieser Stichprobe führt zu dem folgenden Ergebnis ( $x_i$  = Augenzahl):

$i$	$x_i$	$n_i$	$f(x_i)$	$x_i \cdot f(x_i)$	$x_i^2$	$x_i^2 \cdot f(x_i)$
1	1	1	0,1	0,1	1	0,1
2	2	1	0,1	0,2	4	0,4
3	3	2	0,2	0,6	9	1,8
4	4	3	0,3	1,2	16	4,8
5	5	1	0,1	0,5	25	2,5
6	6	2	0,2	1,2	36	7,2
$\Sigma$		10	1,0	3,8		16,8

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot f(x_i) = 3,8$$

$$s^2 = \frac{10}{10-1} \left[ \sum_{i=1}^6 x_i^2 \cdot f(x_i) - \bar{x}^2 \right] = \frac{10}{9} (16,8 - 3,8^2) = \frac{10}{9} (16,8 - 14,44) = \frac{10}{9} \cdot 2,36 = 2,62$$

$$s = 1,62$$

■

## 2.3 Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe

*Voraussetzung:* Es liegt eine in  $k$  Klassen aufgeteilte Stichprobe vom Umfang  $n$  mit den Klassenmitten  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$  und der *Klassenhäufigkeitsfunktion*  $f(x)$  vor

### Mittelwert $\bar{x}$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \cdot f(\tilde{x}_i)$$

### Varianz $s^2$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k (\tilde{x}_i - \bar{x})^2 \cdot f(\tilde{x}_i) = \frac{n}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i^2 \cdot f(\tilde{x}_i) - \bar{x}^2 \right]$$

### ■ Beispiel

Wir werten die in Abschnitt 1.3 beschriebene Stichprobe (Fehlmenge bei der automatischen Abfüllung von Wein in Literflaschen) aus:

$i$	$\tilde{x}_i$	$n_i$	$f(\tilde{x}_i)$	$\tilde{x}_i \cdot f(\tilde{x}_i)$	$\tilde{x}_i^2$	$\tilde{x}_i^2 \cdot f(\tilde{x}_i)$
1	5	9	0,45	2,25	25	11,25
2	15	6	0,30	4,50	225	67,50
3	25	4	0,20	5,00	625	125,00
4	35	1	0,05	1,75	1225	61,25
$\Sigma$		20	1,00	13,50		265,00

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^4 \tilde{x}_i \cdot f(\tilde{x}_i) = 13,5 \quad (\text{in cm}^3)$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{20}{20-1} \left[ \sum_{i=1}^4 \tilde{x}_i^2 \cdot f(\tilde{x}_i) - \bar{x}^2 \right] = \frac{20}{19} (265 - 13,5^2) = \\ &= \frac{20}{19} (265 - 182,25) = \frac{20}{19} \cdot 82,75 = 87,11 \quad (\text{in cm}^6) \end{aligned}$$

$$s = 9,33 \quad (\text{in cm}^3)$$

■

## 3 Statistische Schätzmethoden für unbekannte Parameter („Parameterschätzungen“)

### 3.1 Aufgaben der Parameterschätzung

Die Zufallsvariable  $X$  genüge einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der vom *Typ* her bekannten Verteilungsfunktion  $F(x)$ , deren Parameter jedoch *unbekannt* sind.

#### ■ Beispiel

$X$  ist *normalverteilt*, die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  bzw.  $\sigma^2$  jedoch sind *unbekannt*. ■

Die Parameterschätzung hat dann auf der Basis einer konkreten Stichprobe die folgenden Aufgaben zu lösen:

1. Bestimmung von *Schätz-* oder *Näherungswerten* für die unbekannten Parameter (sog. „*Punktschätzung*“).
2. Konstruktion von *Konfidenz-* oder *Vertrauensintervallen*, in denen die unbekannten Parameter mit einer vorgegebenen (großen) Wahrscheinlichkeit *vermutet* werden (sog. „*Intervallschätzung*“). Diese Intervalle ermöglichen Aussagen über die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Schätzwerte.

### 3.2 Schätzfunktionen und Schätzwerte für unbekannte Parameter („Punktschätzungen“)

#### 3.2.1 Schätz- und Stichprobenfunktionen

##### Stichprobenfunktionen

Eine Funktion (Zufallsvariable)  $Z = g(X_1; X_2; \dots; X_n)$ , die von  $n$  *stochastisch unabhängigen* Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  abhängt, die alle der *gleichen* Verteilungsfunktion  $F(x)$  genügen, heißt *Stichprobenfunktion*. Die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  können dabei auch als Komponenten einer *n-dimensionalen Zufallsvariablen*  $(X_1; X_2; \dots; X_n)$ , auch *n-dimensionaler Zufallsvektor* genannt, aufgefaßt werden. Eine konkrete Stichprobe mit den Stichprobenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ist dann eine *Realisierung* des Zufallsvektors. Einsetzen dieser Werte in die Stichprobenfunktion  $Z$  liefert einen *Schätz-* oder *Näherungswert* für diese Zufallsvariable.

##### Schätzfunktionen

*Schätzfunktionen* sind Stichprobenfunktionen für bestimmte unbekannte Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Eine Schätzfunktion  $\Theta = g(X_1; X_2; \dots; X_n)$  für den unbekannten Parameter  $\vartheta$  wird als „*optimal*“ angesehen, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Die Schätzfunktion  $\Theta$  ist *erwartungstreu*, d. h. ihr Erwartungswert ist gleich dem zu schätzenden Parameter:  $E(\Theta) = \vartheta$

- Die Schätzfunktion  $\Theta$  ist *konsistent (passend)*, d. h.  $\Theta$  konvergiert mit zunehmendem Stichprobenumfang  $n$  gegen den Parameter  $\vartheta$ .
- Die Schätzfunktion  $\Theta$  ist *effizient (wirksam)*, d. h. es gibt bei *gleichem* Stichprobenumfang  $n$  keine andere erwartungstreue Schätzfunktion mit einer *kleineren* Varianz.

### 3.2.2 Schätzungen für den Mittelwert $\mu$ und die Varianz $\sigma^2$

*Voraussetzung:* Die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  genügen alle der *gleichen* Verteilung mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma^2$

Unbekannter Parameter	Schätzfunktion für den unbekannten Parameter	Schätzwert für den unbekannten Parameter
Erwartungs- oder Mittelwert $E(X) = \mu$	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$	Mittelwert der konkreten Stichprobe $x_1, x_2, \dots, x_n$ : $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$
Varianz $\text{Var}(X) = \sigma^2$	$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	Varianz der konkreten Stichprobe $x_1, x_2, \dots, x_n$ : $\hat{s}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

#### Anmerkungen

- Die Schätzfunktionen  $\bar{X}$  und  $S^2$  sind *erwartungstreu* und *konsistent*,  $\bar{X}$  außerdem noch *effizient*.
- Sind alle Zufallsvariablen  $X_i$  außerdem noch *normalverteilt*, so ist auch die Schätzfunktion  $\bar{X}$  eine *normalverteilte* Zufallsgröße mit dem Erwartungs- oder Mittelwert  $E(\bar{X}) = \mu$  und der Varianz  $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$ .
- Bei *beliebig verteilten* Zufallsvariablen  $X_i$  mit  $E(X_i) = \mu$  und  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$  ist die Schätzfunktion  $\bar{X}$  *näherungsweise normalverteilt* mit dem Mittelwert  $E(\bar{X}) = \mu$  und der Varianz  $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$ .
- Die Stichprobenfunktion  $S = \sqrt{S^2}$  ist eine Schätzfunktion für die *Standardabweichung*  $\sigma$  der Grundgesamtheit. Sie ist jedoch *nicht erwartungstreu*.

#### ■ Beispiel

*Mittlere Lebensdauer eines bestimmten elektronischen Bauelements (in Stunden)*

Stichprobe vom Umfang  $n = 8$ :

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$t_i/\text{h}$	950	980	1150	770	1230	1210	990	1120

Mittlere Lebensdauer:

$$\bar{t} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 t_i = \frac{1}{8} \underbrace{(950 + 980 + \dots + 1120)}_{8400} \text{ h} = 1050 \text{ h}$$

■

### 3.2.3 Schätzungen für einen Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung)

#### Schätzfunktion für den Anteilswert $p$

$$\hat{P} = \frac{X}{n}$$

$X$  = Anzahl der „Erfolge“ (Eintreten des Ereignisses  $A$ ) bei  $n$ -maliger Durchführung des Bernoulli-Experiments

Die *binomialverteilte* Zufallsvariable  $\hat{P}$  ist bei *umfangreichen* Stichproben *näherungsweise normalverteilt* mit dem Mittelwert  $E(\hat{P}) = p$  und der Varianz  $\text{Var}(\hat{P}) = p(1 - p)/n$ .

#### Schätzwert für den Anteilswert $p$

$$\hat{p} = h(A) = \frac{k}{n}$$

$k$ : Anzahl der „Erfolge“ (Eintreten des Ereignisses  $A$ ) bei  $n$ -maliger Durchführung des Bernoulli-Experiments (Ergebnis einer konkreten Stichprobe vom Umfang  $n$ )

#### ■ Beispiel

*Ausschussanteil  $p$  einer Serienproduktion von Glühlampen*

Eine Stichprobe vom Umfang  $n = 300$  enthielt  $k = 6$  defekte Glühlampen. Schätzwert für den Ausschussanteil  $p$ :

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{6}{300} = \frac{2}{100} = 0,02 = 2\%$$

■

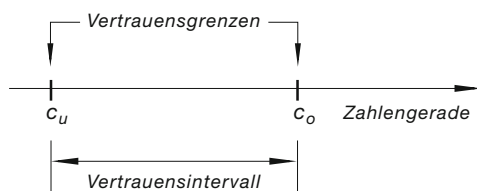
### 3.2.4 Schätzwerte für die Parameter spezieller Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Verteilung	Schätzwert für ...	Bemerkungen
<b>Binomialverteilung</b> $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$	Parameter $p$ : $\hat{p} = \frac{k}{n}$	$k$ : Anzahl der „Erfolge“ bei einer $n$ -fachen Ausführung des Bernoulli-Experiments
<b>Poisson-Verteilung</b> $f(x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$	Mittelwert $\mu$ : $\hat{\mu} = \bar{x}$	$\bar{x}$ : Mittelwert der Stichprobe
<b>Exponentialverteilung</b> $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$	Parameter $\lambda$ : $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$	$\bar{x}$ : Mittelwert der Stichprobe
<b>Gaußsche Normalverteilung</b> $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	a) Mittelwert $\mu$ : $\hat{\mu} = \bar{x}$ b) Varianz $\sigma^2$ : $\hat{\sigma}^2 = s^2$	$\bar{x}$ : Mittelwert der Stichprobe  $s^2$ : Varianz der Stichprobe

### 3.3 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für unbekannte Parameter („Intervallschätzungen“)

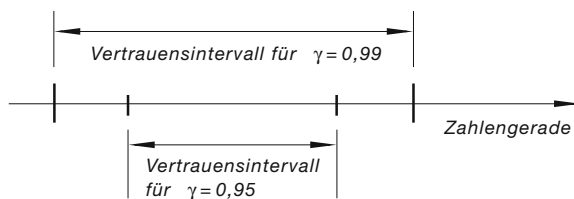
#### 3.3.1 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle

*Vertrauens- oder Konfidenzintervalle* ermöglichen Aussagen über die *Genauigkeit* und *Zuverlässigkeit* von Parameterschätzungen auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit einer vorgegebenen (großen) Wahrscheinlichkeit  $\gamma$  lässt sich aus einer konkreten Stichprobe stets ein sog. *Vertrauens- oder Konfidenzintervall* bestimmen, in dem der *wahre* (aber unbekannte) Wert des Parameters *vermutet* wird. Die Grenzen dieses Intervalls heißen *Vertrauens- oder Konfidenzgrenzen*, die vorgegebene Wahrscheinlichkeit  $\gamma$  wird als *statistische Sicherheit* oder als *Vertrauens- oder Konfidenzniveau* bezeichnet. Die Größe  $\alpha = 1 - \gamma$  heißt *Irrtumswahrscheinlichkeit*.



Verschiedene Stichproben führen zu verschiedenen Vertrauensintervallen. *Vor* der Durchführung der Stichprobe besteht die Wahrscheinlichkeit  $\gamma = 1 - \alpha$ , ein Intervall zu erhalten, das den unbekannten Parameter „überdeckt“. *Nach* der Durchführung der Stichprobe darf man darauf *vertrauen*, dass bei einer Vielzahl von durchgeführten Stichproben der *wahre* Parameterwert in  $\gamma \cdot 100\%$  aller Fälle *innerhalb* und nur in  $\alpha \cdot 100\%$  aller Fälle *außerhalb* des Vertrauensintervalls liegt. Der wahre Wert des Parameters muss also nicht unbedingt im berechneten Vertrauensintervall liegen, sondern er kann auch (mit der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 1 - \gamma$ ) *außerhalb* des Intervalls liegen. In diesem Fall trifft man eine *Falschaussage* (sog. *Fehler 1. Art*).

In der Praxis übliche Werte für  $\gamma$  sind  $0,95 = 95\%$  oder  $0,99 = 99\%$ . Dabei gilt: Je *größer*  $\gamma$ , umso *breiter* ist das Vertrauensintervall und damit umso *unschärfer* die Aussage.





### 3.3.2 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$

$X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem *unbekannten* Mittelwert  $\mu$  und der als *bekannt* vorausgesetzten Varianz  $\sigma^2$ . Für den *Mittelwert*  $\mu$  lässt sich dann unter Verwendung einer konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  schrittweise wie folgt ein *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* bestimmen:

1. Man wähle zunächst ein bestimmtes *Vertrauensniveau*  $\gamma$  (in der Praxis meist  $\gamma = 0,95 = 95\%$  oder  $\gamma = 0,99 = 99\%$ ).
2. Berechnung der Konstanten  $c$  aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c) = \gamma$$

für die *standardnormalverteilte* Zufallsvariable

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang, Teil B. Dabei bedeuten:

$\bar{X}$ : *Schätzfunktion* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.2)

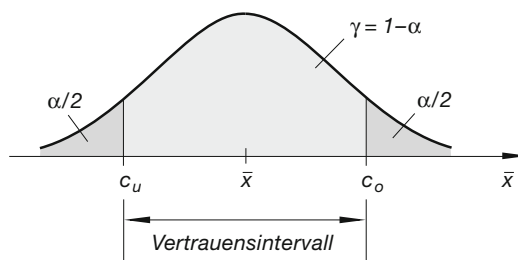
$\sigma$ : *Standardabweichung* der normalverteilten Grundgesamtheit (als *bekannt* vorausgesetzt)

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe

3. Berechnung des *Mittelwertes*  $\bar{x}$  der konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
4. Das *Vertrauensintervall* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit lautet dann:

$$\bar{x} - c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Der *wahre* Wert des Mittelwertes  $\mu$  liegt dabei mit einem *Vertrauen* von  $\gamma \cdot 100\%$  in diesem Intervall (siehe Bild).



#### Anmerkungen

- (1) Häufig wird die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  vorgegeben (meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ). Das *Vertrauensniveau* ist dann  $\gamma = 1 - \alpha$ .
- (2) Das Vertrauensintervall besitzt die Länge  $l = 2c\sigma/\sqrt{n}$  und lässt sich stets durch eine *Vergrößerung* des Stichprobenumfangs  $n$  *verkürzen* (für feste Werte von  $\sigma$  und  $\gamma$ ).

**Hinweis:** Musterbeispiel für die Berechnung eines Vertrauensintervalls → Abschnitt 3.3.7

### 3.3.3 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$

$X$  sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem unbekannten Mittelwert  $\mu$  und der ebenfalls unbekannten Varianz  $\sigma^2$ . Für den Mittelwert  $\mu$  lässt sich dann unter Verwendung einer konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  schrittweise wie folgt ein Vertrauens- oder Konfidenzintervall bestimmen:

1. Man wähle zunächst ein bestimmtes Vertrauensniveau  $\gamma$  (in der Praxis meist  $\gamma = 0,95 = 95\%$  oder  $\gamma = 0,99 = 99\%$ ).
2. Berechnung der Konstanten  $c$  aus der Bedingung

$$P(-c \leq T \leq c) = \gamma$$

für die einer  $t$ -Verteilung mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden genügenden Zufallsvariablen

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

unter Verwendung von Tabelle 4 im Anhang, Teil B. Dabei bedeuten:

$\bar{X}$ : Schätzfunktion für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.2)

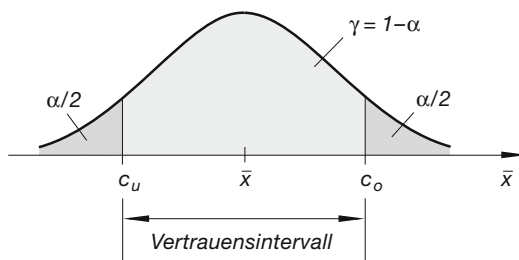
$S$ : Schätzfunktion für die unbekannte Standardabweichung  $\sigma$  der normalverteilten Grundgesamtheit (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.2)

$n$ : Umfang der verwendeten Stichprobe

3. Berechnung des Mittelwertes  $\bar{x}$  und der Varianz  $s^2$  bzw. der Standardabweichung  $s$  der konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
4. Das Vertrauensintervall für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit lautet dann:

$$\bar{x} - c \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + c \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Der wahre Wert des Mittelwertes  $\mu$  liegt dabei mit einem Vertrauen von  $\gamma \cdot 100\%$  in diesem Intervall (siehe Bild).



*Anmerkungen*

- (1) Häufig wird die *Irrtumswahrscheinlichkeit*  $\alpha$  vorgegeben (meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ). Das *Vertrauensniveau* ist dann  $\gamma = 1 - \alpha$ .
- (2) Das Vertrauensintervall besitzt die Länge  $l = 2 c s / \sqrt{n}$ . Eine *Verkürzung* des Vertrauensintervalls lässt sich stets durch eine entsprechende *Vergrößerung* des Stichprobenumfangs  $n$  erreichen.
- (3) Bei *unbekannter* Varianz  $\sigma^2$  sind die Vertrauensintervalle für den Mittelwert  $\mu$  stets *breiter* als bei bekannter Varianz (bei *gleichem* Vertrauensniveau  $\gamma$  und *gleichem* Stichprobenumfang  $n$ ).
- (4) Bei *umfangreichen* Stichproben (**Faustregel:**  $n > 30$ ) kann die *unbekannte* Standardabweichung  $\sigma$  der Grundgesamtheit durch die Standardabweichung  $s$  der Stichprobe *geschätzt* werden:  $\sigma \approx s$ . In diesem *Sonderfall* darf man daher von einer normalverteilten Grundgesamtheit mit der *bekannten* Varianz  $\sigma^2 \approx s^2$  ausgehen und das bereits im vorangegangenen Abschnitt 3.3.2 besprochene Verfahren anwenden.

**Hinweis:** Musterbeispiel für die Berechnung eines Vertrauensintervalls  $\rightarrow$  Abschnitt 3.3.7

### 3.3.4 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ bei einer beliebigen Verteilung

$X$  sei eine *beliebig verteilte* Zufallsvariable mit dem *unbekannten* Mittelwert  $\mu$  und der (bekannten oder unbekannten) Varianz  $\sigma^2$ . Für die Konstruktion von *Vertrauensintervallen* für den Mittelwert  $\mu$  gelten dann bei Verwendung *hinreichend großer* Stichproben (**Faustregel:**  $n > 30$ ) die bereits in den Abschnitten 3.3.2 und 3.3.3 beschriebenen Methoden. Sie liefern in guter Näherung *brauchbare* Vertrauensintervalle, wobei noch *zwei* Fälle zu unterscheiden sind:

1. Ist die Varianz  $\sigma^2$  der Grundgesamtheit *bekannt*, so ist das in Abschnitt 3.3.2 beschriebene Verfahren anzuwenden (*Standardnormalverteilung*).
2. Bei *unbekannter* Varianz  $\sigma^2$  ist dagegen die in Abschnitt 3.3.3 dargestellte Methode anzuwenden (*t-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden).

Die Näherung ist umso *besser*, je *größer* der Umfang  $n$  der verwendeten Stichprobe ist. Für *großes*  $n$  besteht dann *kein wesentlicher* Unterschied mehr zwischen den beiden Vertrauensintervallen, die man durch die Fallunterscheidung erhält.

### 3.3.5 Vertrauensintervalle für die unbekannte Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung

$X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem (bekannten oder unbekannten) Mittelwert  $\mu$  und der unbekannten Varianz  $\sigma^2$ . Für die *Varianz*  $\sigma^2$  lässt sich dann unter Verwendung einer konkreten Zufallsstichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  wie folgt schrittweise ein *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* bestimmen:

1. Man wähle zunächst ein bestimmtes *Vertrauensniveau*  $\gamma$  (in der Praxis meist  $\gamma = 0,95 = 95\%$  oder  $\gamma = 0,99 = 99\%$ ).
2. Berechnung der beiden Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  aus der Bedingung

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2) = \gamma$$

für die einer *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden genügenden Zufallsvariablen

$$Z = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma^2}$$

oder aus den beiden *gleichwertigen* Bestimmungsgleichungen

$$F(c_1) = \frac{1}{2} (1 - \gamma) \quad \text{und} \quad F(c_2) = \frac{1}{2} (1 + \gamma)$$

unter Verwendung von Tabelle 3 im Anhang, Teil B. Dabei bedeuten:

$S^2$ : *Schätzfunktion* für die unbekannte *Varianz*  $\sigma^2$  der normalverteilten Grundgesamtheit (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.2)

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe

$F(z)$ : Verteilungsfunktion der Chi-Quadrat-Verteilung mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden (Tabelle 3 im Anhang, Teil B)

3. Berechnung des *Varianz*  $s^2$  der konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
4. Das *Vertrauensintervall* für die unbekannte *Varianz*  $\sigma^2$  der normalverteilten Grundgesamtheit lautet dann:

$$\frac{(n - 1) s^2}{c_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n - 1) s^2}{c_1}$$

Der *wahre* Wert der Varianz  $\sigma^2$  liegt dabei mit einem *Vertrauen* von  $\gamma \cdot 100\%$  in diesem Intervall.

#### Anmerkungen

- (1) Häufig wird die *Irrtumswahrscheinlichkeit*  $\alpha$  vorgegeben (meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ). Das *Vertrauensniveau* ist dann  $\gamma = 1 - \alpha$ .
- (2) Das Vertrauensintervall besitzt die Länge  $l = \frac{(n - 1) (c_2 - c_1) s^2}{c_1 c_2}$ .
- (3) Aus dem Vertrauensintervall für die Varianz  $\sigma^2$  erhält man durch Wurzelziehen ein entsprechendes Vertrauensintervall für die *Standardabweichung*  $\sigma$ .

**Hinweis:** Musterbeispiel für die Berechnung eines Vertrauensintervalls → Abschnitt 3.3.7

### 3.3.6 Vertrauensintervalle für einen unbekannten Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung)

Der Parameter  $p$  einer Binomialverteilung sei *unbekannt*. Der binomialverteilten Grundgesamtheit wird daher eine *umfangreiche* Stichprobe entnommen, in dem das dieser Verteilung zugrunde liegende Bernoulli-Experiment  $n$ -mal nacheinander ausgeführt und dabei die Anzahl  $k$  der erzielten „Erfolge“ festgestellt wird. Als „Erfolg“ wird das Eintreten des Ereignisses  $A$ , als „Mißerfolg“ demnach das Eintreten des zu  $A$  *komplementären* Ereignisses  $\bar{A}$  gewertet. Die *beobachtete relative Häufigkeit* für das Ereignis  $A$  („Erfolg“) beträgt somit  $h(A) = k/n$  und ist ein *Schätzwert* für den unbekannten Parameter  $p$  der Binomialverteilung (Anteilswert  $p$ ).

Unter Verwendung dieser Stichprobe lässt sich dann für den unbekannten Parameter  $p$  schrittweise wie folgt ein *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* konstruieren:

1. Man wähle zunächst ein bestimmtes Vertrauensniveau  $\gamma$  (in der Praxis meist  $\gamma = 0,95 = 95\%$  oder  $\gamma = 0,99 = 99\%$ ).

2. Berechnung der Konstanten  $c$  aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c) = \gamma$$

für die (näherungsweise) *standardnormalverteilte* Zufallsvariable

$$U = \frac{n\hat{P} - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang, Teil B. Dabei bedeuten:

$\hat{P}$ : *Schätzfunktion* für den Parameter  $p$  einer binomialverteilten Grundgesamtheit (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.3)

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe

3. Berechnung des *Schätzwertes*  $\hat{p} = k/n$  für den Parameter  $p$  aus der konkreten Stichprobe („ $k$  Erfolge bei insgesamt  $n$  Ausführungen des Bernoulli-Experiments“).

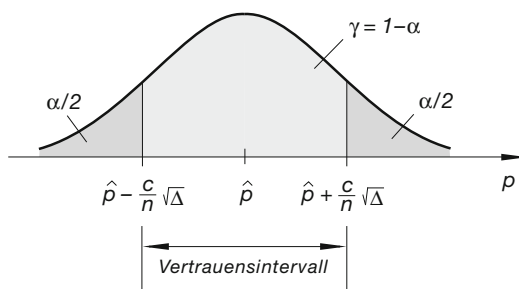
4. Unter der *Voraussetzung*, dass die Bedingung

$$\Delta = n\hat{p}(1 - \hat{p}) > 9$$

für eine *umfangreiche* Stichprobe erfüllt ist, lautet das *Vertrauensintervall* für den unbekannten Parameter  $p$  der binomialverteilten Grundgesamtheit wie folgt:

$$\hat{p} - \frac{c}{n} \sqrt{\Delta} \leq p \leq \hat{p} + \frac{c}{n} \sqrt{\Delta}$$

Der *wahre* Wert des Parameters  $p$  liegt dabei mit einem *Vertrauen* von  $\gamma \cdot 100\%$  in diesem Intervall (siehe Bild auf der nächsten Seite).



### Anmerkungen

- (1) Häufig wird die *Irrtumswahrscheinlichkeit*  $\alpha$  vorgegeben (meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ). Das *Vertrauensniveau* ist dann  $\gamma = 1 - \alpha$ .
- (2) Eine Verkürzung des Vertrauensintervalls der Länge  $l = 2(c/n)\sqrt{\Delta}$  lässt sich stets durch eine entsprechende *Vergrößerung* des Stichprobenumfangs  $n$  erreichen.

**Hinweis:** Musterbeispiel für die Berechnung eines Vertrauensintervalls → Abschnitt 3.3.7

### 3.3.7 Musterbeispiel für die Bestimmung eines Vertrauensintervalls

#### Qualitätskontrolle bei der Serienproduktion eines bestimmten elektronischen Bauteils

Eine Stichprobe vom Umfang  $n = 500$  enthielt  $k = 27$  defekte Teile. Für den unbekannten Ausschussanteil  $p$  der binomialverteilten Grundgesamtheit soll ein *Vertrauensintervall* bestimmt werden. Das Verfahren ist in Abschnitt 3.3.6 ausführlich beschrieben.

Wahl des *Vertrauensniveaus*:  $\gamma = 0,95 = 95\%$

Berechnung der Konstanten  $c$ :

$$P(-c \leq U \leq c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 0,95$$

$$\phi(c) = 0,975 \Rightarrow c = u_{0,975} = 1,960 \quad (\text{aus Tabelle 2 im Anhang, Teil B})$$

Schätzwert für den unbekannten Ausschussanteil  $p$ :

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{27}{500} = \frac{54}{1000} = 0,054 = 5,4\%$$

Die Bedingung für eine *umfangreiche* Stichprobe ist erfüllt:

$$\Delta = n\hat{p}(1 - \hat{p}) = 500 \cdot 0,054(1 - 0,054) = 25,542 > 9$$

*Vertrauensintervall* für den unbekannten Ausschussanteil  $p$ :

$$a = \frac{c}{n} \sqrt{\Delta} = \frac{1,960}{500} \cdot \sqrt{25,542} = 0,020$$

$$\hat{p} - a \leq p \leq \hat{p} + a \Rightarrow 0,054 - 0,020 \leq p \leq 0,054 + 0,020$$

$$0,034 \leq p \leq 0,074$$

$\Leftrightarrow$

$$3,4\% \leq p \leq 7,4\%$$

Mit einem Vertrauen von 95% können wir davon ausgehen, dass der Ausschussanteil  $p$  zwischen 3,4% und 7,4% liegt.

## 4 Statistische Prüfverfahren für unbekannte Parameter („Parametertests“)

### 4.1 Statistische Hypothesen und Parametertests

#### Statistische Hypothese

Unter einer *statistischen Hypothese* (kurz: Hypothese) versteht man irgendwelche Annahmen, Vermutungen oder Behauptungen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen oder einer Grundgesamtheit und deren Parameter.

#### Parametertest

Ein *Parametertest* ist ein *statistisches Prüfverfahren* für einen *unbekannten* Parameter in der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen oder Grundgesamtheit, wobei die *Art* der Verteilung (d. h. der *Verteilungstyp* wie z. B. Binomialverteilung oder Gaußsche Normalverteilung) als *bekannt* vorausgesetzt wird. Ein solcher *Test* dient der *Überprüfung* einer Hypothese über einen bestimmten Parameter der Verteilung mit Hilfe einer *Stichprobenuntersuchung* der betreffenden Grundgesamtheit. Die zu überprüfende Hypothese wird meist als *Nullhypothese*  $H_0$  bezeichnet. Ihr wird oft eine *Alternativhypothese*  $H_1$  gegenübergestellt. Es ist dann das erklärte *Ziel* eines Parametertests, eine *Entscheidung* darüber zu ermöglichen, ob man die Nullhypothese  $H_0$  *beibehalten* (d. h. *nicht ablehnen*) kann, da die Auswertung des verwendeten Stichprobenmaterials in *keinem* Widerspruch zur Nullhypothese steht oder ob man sie zugunsten der Alternativhypothese  $H_1$  *ablehnen* oder *verwerfen* muss. Mit einem Parametertest kann also über *Ablehnung* oder *Beibehaltung* (Nichtablehnung) einer aufgestellten Hypothese („Nullhypothese“) entschieden werden. Allerdings: *Wie auch immer die Entscheidung ausfallen sollte, sie kann richtig aber auch falsch sein.*

#### ■ Beispiel

Ein Großhändler bestellt direkt beim Hersteller einen größeren Posten eines bestimmten elektronischen Bauelements und vereinbart dabei, dass die Ware einen *maximalen* Ausschussanteil von  $p_0 = 1\%$  enthalten darf. Bei der Anlieferung der Ware wird er daher mit einem speziellen statistischen Test prüfen, ob die vereinbarte maximale Ausschussquote auch *nicht überschritten* wurde. Der Großhändler wird daher mit Hilfe einer Stichprobenuntersuchung die *Nullhypothese*

$$H_0: p \leq p_0 = 1\%$$

gegen die *Alternativhypothese*

$$H_1: p > p_0 = 1\%$$

testen (sog. *einseitiger* Parametertest, da hier die Alternativhypothese nur Werte  $p > p_0$  zulässt). Sollte dabei die Testentscheidung zugunsten der *Alternativhypothese*  $H_1$  ausfallen, so darf er davon ausgehen, dass der Ausschussanteil  $p$  *größer* ist als vereinbart, d. h. *größer* als 1%. Der Großhändler wird in diesem Fall die Annahme der gelieferten Bauelemente verweigern. Trotzdem *kann* die getroffene Entscheidung falsch sein! Denn sie beruht ausschließlich auf der verwendeten Stichprobe. Eine weitere Stichprobe *könnte* durchaus zu einer anderen Entscheidung führen.



## 4.2 Spezielle Parametertests

### 4.2.1 Test für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$

#### Zweiseitiger Test

$X$  sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit der bekannten Varianz  $\sigma^2$ . Es soll geprüft werden, ob der unbekannte Mittelwert  $\mu$  (wie vermutet) den speziellen Wert  $\mu_0$  besitzt. Auf der Basis einer Zufallsstichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vom Umfang  $n$  wird daher die

$$\text{Nullhypothese } H_0: \mu = \mu_0$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1: \mu \neq \mu_0$$

getestet. Die Durchführung des Tests erfolgt dabei schrittweise wie folgt:

1. Man wähle zunächst eine bestimmte *Signifikanzzahl* (*Irrtumswahrscheinlichkeit*)  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ).
2. *Test- oder Prüfvariable* ist die *standardnormalverteilte* Zufallsvariable

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Dabei bedeuten:

$\bar{X}$ : *Schätzfunktion* für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.2)

$\mu_0$ : *Vermuteter* Wert des unbekannten Mittelwertes  $\mu$

$\sigma$ : *Standardabweichung* der normalverteilten Grundgesamtheit (wird hier als *bekannt* vorausgesetzt)

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe

Die Berechnung des *kritischen* Wertes  $c$  und damit der *kritischen Grenzen*  $\mp c$  erfolgt aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha$$

unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang, Teil B. Der *nicht-kritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet dann:

$$-c \leq u \leq c$$

3. Berechnung des Mittelwertes  $\bar{x}$  der konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sowie des *Test- oder Prüfwertes*

$$\hat{u} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

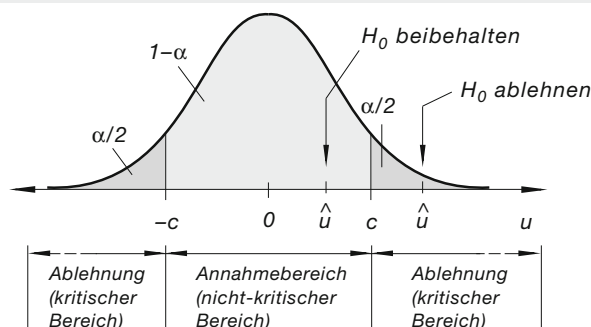
der Testvariablen  $U$ .



4. **Testentscheidung:** Fällt der *Test-* oder *Prüfwert*  $\hat{u}$  in den *nicht-kritischen* Bereich (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$-c \leq \hat{u} \leq c$$

so wird die Nullhypothese  $H_0: \mu = \mu_0$  *beibehalten*, anderenfalls zugunsten der Alternativhypothese  $H_1: \mu \neq \mu_0$  *verworfen* (siehe Bild). „*Beibehalten*“ bedeutet dabei lediglich, dass die Nullhypothese  $H_0$  aufgrund der verwendeten Stichprobe *nicht abgelehnt* werden kann.



*Hinweis:* Musterbeispiel für einen Parametertest → Abschnitt 4.2.6

### Einseitige Tests

Analog verlaufen die *einseitigen* Tests (Abgrenzung nach *oben* bzw. nach *unten*), bei denen es nur *eine* kritische Grenze gibt.

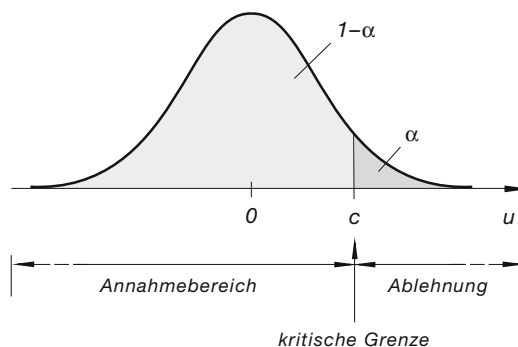
#### Abgrenzung nach oben

$$H_0: \mu \leq \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$

$$P(U \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha$$

$$\text{Annahmebereich: } u \leq c$$



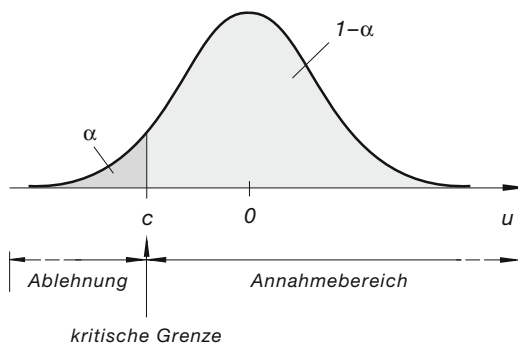
#### Abgrenzung nach unten

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$

$$P(U < c)_{H_0} = \alpha$$

$$\text{Annahmebereich: } u \geq c$$



### 4.2.2 Test für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$

#### Zweiseitiger Test

$X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit der *unbekannten* Varianz  $\sigma^2$ . Es soll *geprüft* werden, ob der ebenfalls unbekannte Mittelwert  $\mu$  (wie vermutet) den speziellen Wert  $\mu_0$  besitzt. Auf der Basis einer *Zufallsstichprobe*  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vom Umfang  $n$  wird daher die

*Nullhypothese*  $H_0: \mu = \mu_0$

gegen die

*Alternativhypothese*  $H_1: \mu \neq \mu_0$

getestet. Die Durchführung des Tests erfolgt dabei schrittweise wie folgt:

1. Man wähle zunächst eine bestimmte *Signifikanzzahl* (*Irrtumswahrscheinlichkeit*)  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ).
2. *Test- oder Prüfvariable* ist die Zufallsvariable

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

die der *t-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden genügt. Dabei bedeuten:

$\bar{X}$ : *Schätzfunktion* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.2)

$\mu_0$ : *Vermuteter* Wert des unbekannten Mittelwertes  $\mu$

$S$ : *Schätzfunktion* für die unbekannte Standardabweichung  $\sigma$  der normalverteilten Grundgesamtheit (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.2)

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe

Die Berechnung des *kritischen* Wertes  $c$  und damit der *kritischen Grenzen*  $\mp c$  erfolgt aus der Bedingung

$$P(-c \leq T \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha$$

unter Verwendung von Tabelle 4 im Anhang, Teil B. Der *nicht-kritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet dann:

$$-c \leq t \leq c$$

3. Berechnung des *Mittelwertes*  $\bar{x}$  und der *Standardabweichung*  $s$  der vorgegebenen konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sowie des *Test- oder Prüfwertes*

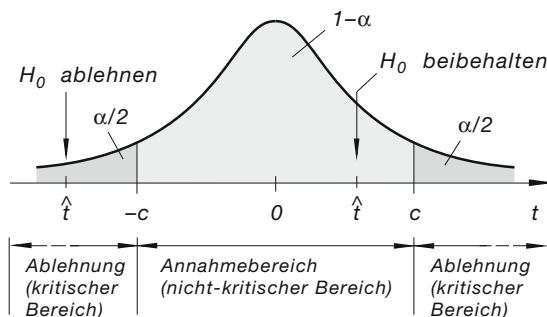
$$\hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

der *Testvariablen*  $T$ .

4. **Testentscheidung:** Fällt der *Test-* oder *Prüfwert*  $\hat{t}$  in den *nicht-kritischen* Bereich (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$-c \leq \hat{t} \leq c$$

so wird die Nullhypothese  $H_0: \mu = \mu_0$  *beibehalten*, anderenfalls zugunsten der Alternativhypothese  $H_1: \mu \neq \mu_0$  *verworfen* (siehe Bild). „Beibehalten“ bedeutet dabei lediglich, dass die Nullhypothese  $H_0$  aufgrund der verwendeten Stichprobe *nicht abgelehnt* werden kann.



#### Anmerkung

Bei einer *umfangreichen* Stichprobe (**Faustregel:**  $n > 30$ ) ist die Testvariable  $T$  *näherungsweise standardnormalverteilt* und man darf daher das in Abschnitt 4.2.1 besprochene Testverfahren anwenden ( $\sigma^2 \approx s^2$ ).

**Hinweis:** Musterbeispiel für einen Parametertest → Abschnitt 4.2.6

#### Einseitige Tests

Die *einseitigen* Tests (Abgrenzung nach *oben* bzw. nach *unten*) verlaufen ähnlich wie im Fall bekannter Varianz (siehe Abschnitt 4.2.1). Bei der Berechnung der kritischen Grenze ist dabei die *t-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden anstelle der Standardnormalverteilung zu verwenden (Testvariable ist die weiter oben beschriebene Zufallsvariable  $T$ ).

### 4.2.3 Tests für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte $\mu_1$ und $\mu_2$ zweier Normalverteilungen („Differenzentests“)

#### Abhängige und unabhängige Stichproben

Zwei Stichproben heißen voneinander *abhängig*, wenn sie den *gleichen* Umfang haben und zu *jedem* Wert der einen Stichprobe *genau ein* Wert der anderen Stichprobe gehört und umgekehrt. Zwischen *abhängigen* Stichproben besteht somit eine *Kopplung*. Man spricht daher in diesem Zusammenhang auch von *verbundenen* oder *korrelierten* Stichproben.

Zwei Stichproben, die diese beiden Bedingungen *nicht* zugleich erfüllen, heißen dagegen voneinander *unabhängig* (*unabhängige* Stichproben). So sind beispielsweise zwei Stichproben von *unterschiedlichem* Umfang stets voneinander *unabhängig*.

### 4.2.3.1 Differenzentests für Mittelwerte bei abhängigen Stichproben

Bei *abhängigen* oder *verbundenen* Stichproben lässt sich der *Differenzentest* auf die in den Abschnitten 4.2.1 und 4.2.2 beschriebenen Parametertests für den Mittelwert  $\mu$  einer normalverteilten Grundgesamtheit zurückführen.

$X$  und  $Y$  seien zwei *normalverteilte* Zufallsvariable mit den *unbekannten* Mittelwerten  $\mu_1$  und  $\mu_2$ . Es soll *geprüft* werden, ob die beiden Mittelwerte (wie vermutet) *übereinstimmen*. Auf der Basis zweier *abhängiger* Stichproben

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{und} \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

vom (gleichen) Umfang  $n$  wird daher die

$$\text{Nullhypothese } H_0: \mu_1 = \mu_2$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

getestet. Diesen *zweiseitigen* Parametertest führen wir zweckmäßigerweise auf einen entsprechenden Test des *Hilfsparameters*

$$\mu = \mu_1 - \mu_2$$

(*Differenz* der beiden Mittelwerte  $\mu_1$  und  $\mu_2$ ) zurück. Getestet wird dann die

$$\text{Nullhypothese } H_0: \mu = 0$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1: \mu \neq 0$$

wie folgt:

Zunächst bildet man aus den beiden *abhängigen* Stichproben die entsprechenden *Differenzen*

$$z_i = x_i - y_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

und betrachtet diese Werte als Stichprobenwerte einer *neuen* (normalverteilten) Stichprobe vom Umfang  $n$ :

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

Es lässt sich dann mit den in den Abschnitten 4.2.1 und 4.2.2 beschriebenen Verfahren prüfen, ob der *Mittelwert*  $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$  dieser Stichprobe in den Annahmebereich fällt *oder* nicht. Fällt der Mittelwert  $\bar{z}$  in den *Annahmebereich*, so wird die Nullhypothese  $H_0: \mu = 0$  bzw.  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  *beibehalten*, d. h. *nicht abgelehnt* und man kann davon ausgehen, dass die Mittelwerte  $\mu_1$  und  $\mu_2$  der beiden normalverteilten Grundgesamtheiten *übereinstimmen*. Anderenfalls wird die Nullhypothese  $H_0$  zugunsten der Alternativhypothese  $H_1: \mu \neq 0$  bzw.  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$  *verworfen*. Die *Mittelwerte*  $\mu_1$  und  $\mu_2$  der beiden normalverteilten Grundgesamtheiten können in diesem Fall als *verschieden* betrachtet werden.

Es wird also getestet, ob die durch *Differenzbildung* erhaltene Stichprobe  $z_1, z_2, \dots, z_n$  einer *normalverteilten* Grundgesamtheit mit dem *Mittelwert*  $\mu = 0$  entstammt. Dabei sind noch zwei Fälle zu unterscheiden.

**1. Fall: Die Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind bekannt**

Dann gilt

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$$

und man darf das in Abschnitt 4.2.1 besprochene Prüfverfahren anwenden (die verwendete Testvariable ist in diesem Fall *standardnormalverteilt*).

Diese Aussage gilt *näherungsweise* auch bei *unbekannten* Varianzen, sofern die verwendeten abhängigen Stichproben *hinreichend umfangreich* sind (**Faustregel:**  $n > 30$ ). In diesem Fall verwendet man als *Schätzwert* für die unbekannte Varianz  $\sigma^2$  die *Stichprobenvarianz*  $s^2$  (d. h. die Varianz der Stichprobe  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ).

**2. Fall: Die Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind unbekannt**

Dann bleibt auch die Varianz  $\sigma^2$  *unbekannt* und man muss das in Abschnitt 4.2.2 dargestellte Testverfahren verwenden (die Testvariable genügt jetzt einer *t-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden). Dieser Fall tritt ein bei *kleinen abhängigen* Stichproben mit  $n \leq 30$ .

*Anmerkung*

Ähnlich verläuft der Differenzentest bei *einseitigen* Fragestellungen.

**Hinweis:** Musterbeispiel für einen Parametertest → Abschnitt 4.2.6

**4.2.3.2 Differenzentests für Mittelwerte bei unabhängigen Stichproben****Zweiseitiger Differenzentest bei bekannten Varianzen**

$X$  und  $Y$  seien zwei *unabhängige* und *normalverteilte* Zufallsvariable mit den *unbekannten* Mittelwerten  $\mu_1$  und  $\mu_2$ , aber *bekannten* Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$ . Es soll *geprüft* werden, ob die beiden Mittelwerte (wie vermutet) *übereinstimmen*. Auf der Basis zweier *unabhängiger* Zufallsstichproben

$$x_1, x_2, \dots, x_{n_1} \quad \text{und} \quad y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$$

mit den Stichprobenumfängen  $n_1$  und  $n_2$  wird daher die

$$\text{Nullhypothese } H_0: \mu_1 = \mu_2$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

getestet.

Die Durchführung des Tests erfolgt dabei schrittweise wie folgt:

1. Man wähle zunächst eine bestimmte *Signifikanzzahl* (*Irrtumswahrscheinlichkeit*)  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ).
2. *Test- oder Prüfvariable* ist die *standardnormalverteilte* Zufallsvariable

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma} \quad \text{mit} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Dabei bedeuten:

$\bar{X}, \bar{Y}$ : *Schätzfunktionen* für die unbekannten *Mittelwerte*  $\mu_1$  und  $\mu_2$  der beiden normalverteilten Grundgesamtheiten (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.2)

$\sigma_1, \sigma_2$ : *Standardabweichungen* der beiden normalverteilten Grundgesamtheiten (hier als *bekannt* vorausgesetzt)

$n_1, n_2$ : *Umfänge* der verwendeten *unabhängigen* Stichproben

$\sigma$ : *Standardabweichung* der Zufallsvariablen  $\bar{X} - \bar{Y}$

Die Berechnung des *kritischen Wertes*  $c$  und damit der *kritischen Grenzen*  $\mp c$  erfolgt aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha$$

unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang, Teil B. Der *nicht-kritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet dann:

$$-c \leq u \leq c$$

3. Berechnung der *Mittelwerte*  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  der beiden vorgegebenen unabhängigen Stichproben sowie des *Test- oder Prüfwertes*

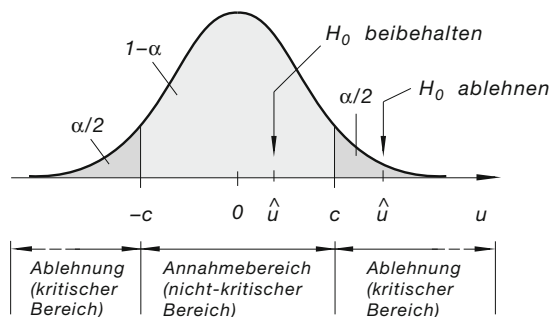
$$\hat{u} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma}$$

der *Testvariablen*  $U$ .

4. **Testentscheidung:** Fällt der *Test- oder Prüfwert*  $\hat{u}$  in den *nicht-kritischen* Bereich (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$-c \leq \hat{u} \leq c$$

so wird die Nullhypothese  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  *beibehalten*, anderenfalls zugunsten der Alternativhypothese  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$  *verworfen* (siehe Bild). „*Beibehalten*“ bedeutet dabei lediglich, dass man die Nullhypothese  $H_0$  aufgrund der verwendeten Stichprobe *nicht ablehnen* kann.



*Anmerkungen*

- (1) Dieser *Differenzentest* lässt sich in ähnlicher Weise auch für *einseitige* Fragestellungen durchführen. In diesem Fall gibt es nur *eine* kritische Grenze.
- (2) Bei *umfangreichen* Stichproben (**Faustregel:**  $n_1, n_2 > 30$ ) dürfen die Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  *näherungsweise* durch ihre *Schätzwerte*  $s_1^2$  und  $s_2^2$ , d. h. durch die *Stichprobenvarianzen* ersetzt werden, falls sie *unbekannt* sein sollten.

**Hinweis:** Musterbeispiel für einen Parametertest → Abschnitt 4.2.6

**Zweiseitiger Differenzentest bei gleicher (aber unbekannter) Varianz**

$X$  und  $Y$  seien zwei *unabhängige* und *normalverteilte* Zufallsvariable mit den *unbekannten* Mittelwerten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  und zwar *gleicher*, aber *unbekannter* Varianz ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ). Es soll *geprüft* werden, ob die beiden Mittelwerte (wie vermutet) *übereinstimmen*. Auf der Basis zweier *unabhängiger* Zufallsstichproben

$$x_1, x_2, \dots, x_{n_1} \quad \text{und} \quad y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$$

mit den Stichprobenumfängen  $n_1$  und  $n_2$  wird daher die

$$\text{Nullhypothese } H_0: \mu_1 = \mu_2$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

getestet. Die Durchführung des Tests erfolgt dabei schrittweise wie folgt:

1. Man wähle zunächst eine bestimmte *Signifikanzzahl* (*Irrtumswahrscheinlichkeit*)  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ).
2. *Test- oder Prüfvariable* ist die Zufallsvariable

$$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}}$$

die der *t-Verteilung* von *Student* mit  $f = n_1 + n_2 - 2$  Freiheitsgraden genügt.

Dabei bedeuten:

$\bar{X}, \bar{Y}$ : *Schätzfunktionen* für die unbekannten *Mittelwerte*  $\mu_1$  und  $\mu_2$  der beiden *normalverteilten* Grundgesamtheiten (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.2)

$S_1^2, S_2^2$ : *Schätzfunktionen* für die zwar gleichen, jedoch unbekannten *Varianzen*  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  der beiden *normalverteilten* Grundgesamtheiten (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.2)

$n_1, n_2$ : *Umfänge* der verwendeten *unabhängigen* Stichproben

Die Berechnung des *kritischen* Wertes  $c$  und damit der *kritischen Grenzen*  $\mp c$  erfolgt aus der Bedingung

$$P(-c \leq T \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha$$

unter Verwendung von Tabelle 4 im Anhang, Teil B. Der *nicht-kritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet dann:

$$-c \leq t \leq c$$

3. Berechnung der Mittelwerte  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  und der Varianzen  $s_1^2$  und  $s_2^2$  der beiden vorgegebenen *unabhängigen* Stichproben sowie des *Hilfsparameters*

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Daraus wird dann der *Test-* oder *Prüfwert*

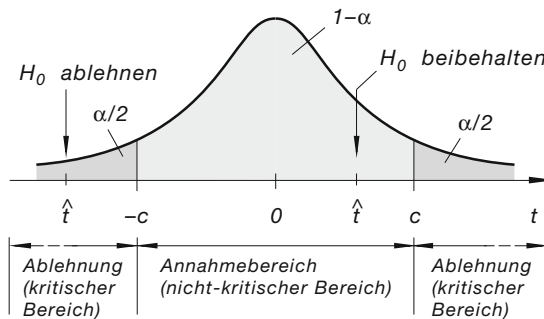
$$\hat{t} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s}$$

der *Testvariablen*  $T$  bestimmt.

4. **Testentscheidung:** Fällt der *Test-* oder *Prüfwert*  $\hat{t}$  in den *nicht-kritischen* Bereich (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$-c \leq \hat{t} \leq c$$

so wird die Nullhypothese  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  *beibehalten*, anderenfalls zugunsten der Alternativhypothese  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$  *verworfen* (siehe Bild). „*Beibehalten*“ bedeutet in diesem Zusammenhang lediglich, dass man die Nullhypothese  $H_0$  aufgrund der verwendeten Stichprobe *nicht ablehnen* kann.



#### Anmerkungen

- (1) Bei *gleichem* Stichprobenumfang ( $n_1 = n_2 = n$ ) vereinfacht sich die Formel zur Ermittlung des *Test-* oder *Prüfwertes* wie folgt:

$$\hat{t} = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} = \sqrt{\frac{n}{s_1^2 + s_2^2}} \cdot (\bar{x} - \bar{y})$$

- (2) Dieser Differenzentest lässt sich in ähnlicher Weise auch für *einseitige* Fragestellungen durchführen. In diesem Fall gibt es nur *eine* kritische Grenze.
- (3) Wird die Nullhypothese  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  *beibehalten* (d. h. *nicht abgelehnt*), so ist  $\mu_1 = \mu_2$  und  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ . Die beiden unabhängigen Stichproben stammen somit aus der *gleichen* Grundgesamtheit.

**Hinweis:** Musterbeispiel für einen Parametertest → Abschnitt 4.2.6



#### 4.2.4 Tests für die unbekannte Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung

##### Zweiseitiger Test

$X$  sei eine normalverteilte Zufallsvariable. Es soll *geprüft* werden, ob die unbekannte Varianz  $\sigma^2$  (wie vermutet) einen bestimmten Wert  $\sigma_0^2$  besitzt. Auf der Basis einer *Zufallsstichprobe*  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vom Umfang  $n$  wird daher die

$$\text{Nullhypothese } H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

getestet. Die Durchführung des Tests erfolgt dabei schrittweise wie folgt:

1. Man wähle zunächst eine bestimmte *Signifikanzzahl* (*Irrtumswahrscheinlichkeit*)  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ).
2. *Test- oder Prüfvariable* ist die Zufallsvariable

$$Z = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma_0^2}$$

Dabei bedeuten:

$S^2$ : *Schätzfunktion* für die unbekannte Varianz  $\sigma^2$  der normalverteilten Grundgesamtheit (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.2)

$\sigma_0^2$ : *Vermuteter* Wert der unbekannten Varianz  $\sigma^2$

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe

Die *Testvariable*  $Z$  genügt der *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden. Die Berechnung der beiden *kritischen Grenzen*  $c_1$  und  $c_2$  erfolgt dabei aus der Bedingung

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2)_{H_0} = 1 - \alpha$$

oder aus den beiden *gleichwertigen* Bestimmungsgleichungen

$$F(c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad F(c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion  $F(z)$  der *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden (Tabelle 3 im Anhang, Teil B). Der *nicht-kritische Bereich* (*Annahmebereich*) lautet dann:

$$c_1 \leq z \leq c_2$$

3. Berechnung der Varianz  $s^2$  der vorgegebenen konkreten Stichprobe und des *Test- oder Prüfwertes*

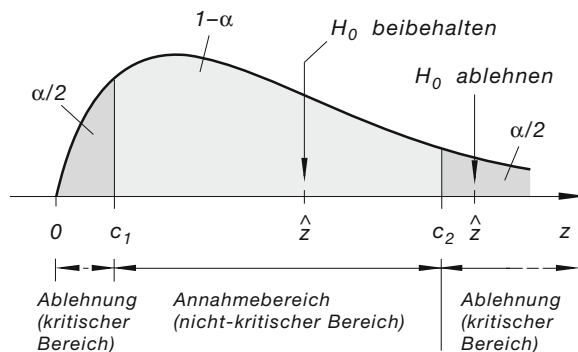
$$\hat{z} = (n - 1) \frac{s^2}{\sigma_0^2}$$

der *Testvariablen*  $Z$ .

4. **Testentscheidung:** Fällt der *Prüf- oder Testwert*  $\hat{z}$  in den *nicht-kritischen Bereich* (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$c_1 \leq \hat{z} \leq c_2$$

so wird die Nullhypothese  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$  *beibehalten*, anderenfalls zugunsten der Alternativhypothese  $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$  *verworfen* (siehe Bild). „*Beibehalten*“ bedeutet in diesem Zusammenhang lediglich, dass man aufgrund der verwendeten Stichprobe die Nullhypothese  $H_0$  *nicht ablehnen* kann.



#### Anmerkung

Der beschriebene Test ist zugleich auch ein Test für die (ebenfalls unbekannte) *Standardabweichung*  $\sigma$ . Getestet wird dabei die *Nullhypothese*  $H_0: \sigma = \sigma_0$  gegen die *Alternativhypothese*  $H_1: \sigma \neq \sigma_0$ .

**Hinweis:** Musterbeispiel für einen Parametertest → Abschnitt 4.2.6

### Einseitige Tests

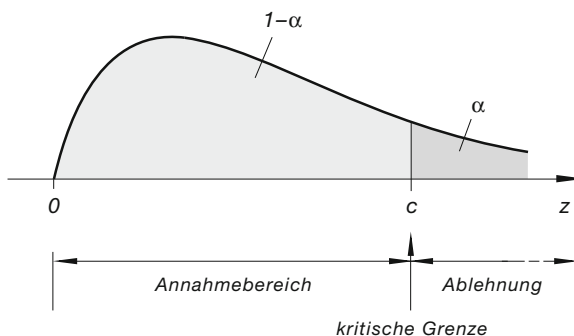
Analog verlaufen die *einseitigen* Tests, bei denen es jeweils nur *eine* kritische Grenze gibt.

#### Abgrenzung nach oben

$$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2; \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$P(Z \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha$$

$$\text{Annahmebereich: } z \leq c$$

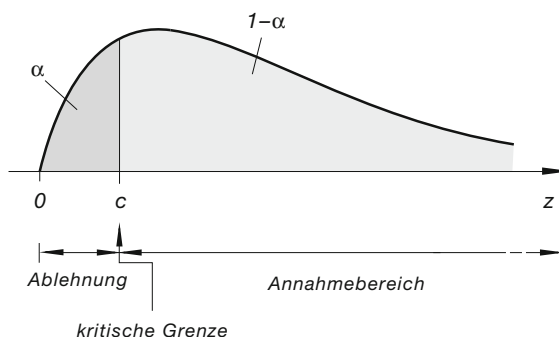


#### Abgrenzung nach unten

$$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2; \quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

$$P(Z < c)_{H_0} = \alpha$$

$$\text{Annahmebereich: } z \geq c$$



### 4.2.5 Tests für den unbekannten Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung)

Es soll geprüft werden, ob ein *unbekannter* Anteilswert  $p$  (Parameter  $p$  einer Binomialverteilung) einen bestimmten Wert  $p_0$  besitzt. Zu diesem Zweck wird der binomialverteilten Grundgesamtheit eine *umfangreiche* Stichprobe, d. h. eine Stichprobe, deren Umfang  $n$  der Bedingung

$$np_0(1 - p_0) > 9$$

genügt, entnommen. Die Stichprobe selbst besteht dann darin, dass das *Bernoulli-Experiment*  $n$ -mal nacheinander ausgeführt und dabei die Anzahl  $k$  der „Erfolge“ festgestellt wird. Als „Erfolg“ wertet man das Eintreten des Ereignisses  $A$ , „Misserfolg“ bedeutet demnach, dass das *komplementäre* Ereignis  $\bar{A}$  eintritt. Die beobachtete *relative Häufigkeit* für das Ereignis  $A$  („Erfolg“) beträgt somit  $h(A) = k/n$ . Unter Verwendung dieser Stichprobe wird dann die

$$\text{Nullhypothese } H_0: p = p_0$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1: p \neq p_0$$

getestet.

Die Durchführung des Tests erfolgt schrittweise wie folgt:

1. Man wähle zunächst eine bestimmte *Signifikanzzahl* (*Irrtumswahrscheinlichkeit*)  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ).
2. *Test- oder Prüfvariable* ist die *näherungsweise standardnormalverteilte* Zufallsvariable

$$U = \sqrt{\frac{n}{p_0(1-p_0)}} \cdot (\hat{P} - p_0)$$

Dabei bedeuten:

$\hat{P}$ : *Schätzfunktion* für den unbekannten Parameter  $p$  der binomialverteilten Grundgesamtheit (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.3)

$p_0$ : *Vermuteter* Wert des unbekannten Parameters  $p$

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe (Anzahl der Ausführungen des *Bernoulli-Experiments*)

Die Berechnung des *kritischen* Wertes  $c$  und damit der *kritischen Grenzen*  $\mp c$  erfolgt dabei aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha$$

unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang, Teil B. Der *nicht-kritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet dann:

$$-c \leq u \leq c$$

3. Berechnung des *Schätzwertes*  $\hat{p} = h(A) = k/n$  für den Parameter  $p$  aus der vorgegebenen konkreten Stichprobe ( $n$ -fache Ausführung des Bernoulli-Experimentes, dabei  $k$ -mal „Erfolg“) sowie des *Test- oder Prüfwertes*

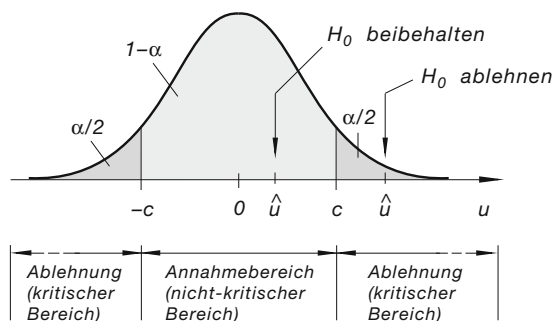
$$\hat{u} = \sqrt{\frac{n}{p_0(1-p_0)}} \cdot (\hat{p} - p_0)$$

der *Testvariablen*  $U$ .

4. **Testentscheidung:** Fällt der *Test- oder Prüfwert*  $\hat{u}$  in den *nicht-kritischen* Bereich (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$-c \leq \hat{u} \leq c$$

so wird die Nullhypothese  $H_0: p = p_0$  *beibehalten*, anderenfalls zugunsten der Alternativhypothese  $H_1: p \neq p_0$  *verworfen* (siehe Bild). „*Beibehalten*“ bedeutet in diesem Zusammenhang lediglich, dass man aufgrund der verwendeten Stichprobe die Nullhypothese  $H_0$  *nicht ablehnen* kann.



*Anmerkungen*

- (1) Man beachte, dass dieser Parametertest nur für *umfangreiche* Stichproben gilt, d. h. für solche, die der Bedingung  $np_0(1 - p_0) > 9$  genügen. Bei *kleinem* Stichprobenumfang ist diese Bedingung jedoch *nicht* erfüllt und das angegebene Prüfverfahren daher *nicht* anwendbar. Wir müssen in diesem Fall auf die Spezialliteratur verweisen (siehe Literaturverzeichnis).
- (2) Analog verlaufen die *einseitigen* Parametertests. In diesen Fällen gibt es jeweils nur *eine* kritische Grenze  $c$ .

**Hinweis:** Musterbeispiel für einen Parametertest → Abschnitt 4.2.6

**4.2.6 Musterbeispiel für einen Parametertest****Serienproduktion von Schrauben mit vorgegebener Länge**

In einem Werk werden Schrauben produziert, deren Länge  $X$  eine *normalverteilte* Zufallsgröße mit dem *Sollwert* (*Mittelwert*)  $\mu_0 = 21$  mm sei. Eine *Stichprobenuntersuchung* vom Umfang  $n = 25$  führte zu dem folgenden Ergebnis:

Mittelwert  $\bar{x} = 20,5$  mm, Standardabweichung  $s = 1,5$  mm

Es soll mit einer *Irrtumswahrscheinlichkeit* von  $\alpha = 1\%$  geprüft werden, ob die Abweichung des beobachteten Stichprobenmittelwertes  $\bar{x} = 20,5$  mm vom Sollwert  $\mu_0 = 21$  mm *signifikant* oder *zufallsbedingt* ist. Wir verwenden den in Abschnitt 4.2.2 ausführlich beschriebenen Test.

Zunächst werden *Nullhypothese*  $H_0$  und *Alternativhypothese*  $H_1$  formuliert:

*Nullhypothese*  $H_0: \mu = \mu_0 = 21$  mm

*Alternativhypothese*  $H_1: \mu \neq \mu_0 = 21$  mm

*Signifikanzzahl* (*Irrtumswahrscheinlichkeit*):  $\alpha = 1\% = 0,01$

$$\text{Testvariable: } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 21 \text{ mm}}{S/\sqrt{25}} = \frac{\bar{X} - 21 \text{ mm}}{S/5}$$

$T$  genügt der  $t$ -Verteilung mit  $f = n - 1 = 25 - 1 = 24$  Freiheitsgraden.

*Bestimmung des kritischen Wertes*  $c$ :

$$P(-c \leq T \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$$

$$P(-c \leq T \leq c)_{H_0} = 2 \cdot F(c) - 1 = 0,99 \quad \Rightarrow \quad F(c) = 0,995$$

$$F(c) = 0,995 \xrightarrow{f=24} c = t_{(0,995; 24)} = 2,797$$

(aus Tabelle 4 im Anhang, Teil B entnommen)

Nicht-kritischer Bereich („Annahmebereich“):

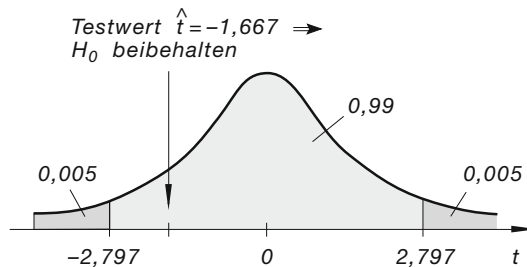
$$-c \leq t \leq c \quad \Rightarrow \quad -2,797 \leq t \leq 2,797$$

Berechnung des Testwertes  $\hat{t}$ :

$$\hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{(20,5 - 21) \text{ mm}}{1,5 \text{ mm}/\sqrt{25}} = \frac{-0,5}{1,5/5} = -\frac{2,5}{1,5} = -\frac{5}{3} = -1,667$$

Testentscheidung:

Der Testwert  $\hat{t} = -1,667$  fällt in den *nicht-kritischen* Bereich (Annahmebereich).



Die Nullhypothese  $H_0: \mu = \mu_0 = 21 \text{ mm}$  wird daher *beibehalten*, d. h. *nicht abgelehnt*. Die Abweichung des Stichprobenmittelwertes  $\bar{x} = 20,5 \text{ mm}$  vom Sollwert  $\mu_0 = 21 \text{ mm}$  ist *zufallsbedingt*, die Stichprobe liefert keinen Anlass, daran zu zweifeln, dass  $\mu_0 = 21 \text{ mm}$  der Mittelwert der normalverteilten Grundgesamtheit ist.

## 5 Chi-Quadrat-Test

Der *Chi-Quadrat-Test* („ $\chi^2$ -Test“) ist ein *Anpassungs-* oder *Verteilungstest* und dient der Überprüfung einer Hypothese über die *Art* einer unbekannten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Es wird der Versuch unternommen, einer Grundgesamtheit mit der *unbekannten* Verteilungsfunktion  $F(x)$  eine *bekannte* Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  „anzupassen“.

$X$  sei eine Zufallsvariable mit der *unbekannten* Verteilungsfunktion  $F(x)$ . Auf der Basis einer Zufallsstichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  soll geprüft werden, ob (wie vermutet)  $F_0(x)$  die Verteilungsfunktion der Grundgesamtheit ist, aus der diese Stichprobe entnommen wurde. Unter der Voraussetzung, dass sämtliche Parameter der als wahr angenommenen Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  bekannt sind, wird die

*Nullhypothese*  $H_0: F(x) = F_0(x)$

(„die Zufallsvariable  $X$  genügt einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Verteilungsfunktion  $F_0(x)$ “) gegen die

*Alternativhypothese*  $H_1: F(x) \neq F_0(x)$

(„ $F_0(x)$  ist *nicht* die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $X$ “) getestet.

Die Durchführung des Tests erfolgt schrittweise wie folgt:

1. Unterteilung der  $n$  Stichprobenwerte in  $k$  Klassen (Intervalle)  $I_1, I_2, \dots, I_k$  und Feststellung der *absoluten Klassenhäufigkeiten* (*Besetzungszahlen*)  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . Erfahrungsgemäß sollte dabei *jede* Klasse *mindestens* 5 Werte der vorgegebenen konkreten Stichprobe enthalten<sup>1)</sup>.
2. Für *jede* Klasse  $I_i$  wird unter Verwendung der als *wahr angenommenen* Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  zunächst die Wahrscheinlichkeit  $p_i$  und daraus die Anzahl  $n_i^* = np_i$  der *theoretisch* erwarteten Stichprobenwerte berechnet (*hypothetische* absolute Häufigkeit;  $i = 1, 2, \dots, k$ ).

3. *Test- oder Prüfvariable* ist die Zufallsvariable

$$Z = \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - n_i^*)^2}{n_i^*} = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$$

die der *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = k - 1$  Freiheitsgraden genügt. Dabei bedeuten:

$N_i$ : Zufallsvariable, die die *empirische absolute Häufigkeit* in der  $i$ -ten Klasse beschreibt

$n_i^*$ : *Theoretisch erwartete absolute Klassenhäufigkeit*, berechnet unter Verwendung der als *wahr angenommenen* Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  der Grundgesamtheit ( $n_i^* = np_i$ )

$p_i$ : *Hypothetische Wahrscheinlichkeit* dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  einen Wert aus der  $i$ -ten Klasse annimmt (berechnet mit der als *wahr angenommenen* Verteilungsfunktion  $F_0(x)$ )

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe

Dann wird anhand der vorgegebenen (und in  $k$  Klassen unterteilten) konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  der *Test- oder Prüfwert*

$$\hat{z} = \hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

der Testvariablen  $Z = \chi^2$  berechnet.

4. Jetzt wähle man eine kleine *Signifikanzzahl* (*Irrtumswahrscheinlichkeit*)  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ) und bestimme die *kritische Grenze*  $c$  aus der Bedingung

$$P(Z \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha$$

unter Verwendung von Tabelle 3 im Anhang, Teil B. Der *nicht-kritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet dann:

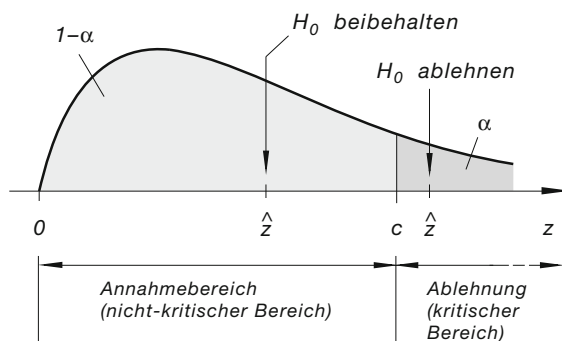
$$z = \chi^2 \leq c$$

<sup>1)</sup> Gegebenenfalls müssen nachträglich Klassen zusammengelegt werden.

5. **Testentscheidung:** Fällt der *Test-* oder *Prüfwert*  $\hat{z} = \hat{\chi}^2$  in den *nicht-kritischen* Bereich (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$\hat{z} = \hat{\chi}^2 \leq c$$

so wird die Nullhypothese  $H_0: F(x) = F_0(x)$  *beibehalten*, d. h. *nicht abgelehnt* und wir dürfen davon ausgehen, dass die untersuchte Grundgesamtheit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  genügt (die Stichprobe steht in *keinem* Widerspruch zur Nullhypothese). Anderenfalls muss die Nullhypothese  $H_0$  zugunsten der Alternativhypothese  $H_1: F(x) \neq F_0(x)$  *abgelehnt* werden (siehe Bild).



#### Anmerkungen

- (1) Sind ein oder mehrere Parameter der als wahr angenommenen Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  *unbekannt*, so muss man zunächst für diese Parameter unter Verwendung der vorgegebenen konkreten Stichprobe *Näherungs-* oder *Schätzwerte* bestimmen. Die Anzahl der Freiheitsgrade *vermindert* sich dabei um die Anzahl der zu *schätzenden* Parameter.
- (2) Bei einer *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  sind die Klassen die möglichen Werte selbst.

#### ■ Beispiel

Ein Würfel wurde 300-mal geworfen. Dabei ergab sich die folgende *Häufigkeitsverteilung* für die 6 möglichen Augenzahlen:

Augenzahl $i$	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit $n_i$	35	39	62	56	70	38

Durch einen *Chi-Quadrat-Test* soll auf dem Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$  geprüft werden, ob die Zufallsstichprobe *gegen* eine Gleichverteilung der Augenzahlen spricht.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Nullhypothese } H_0: p_i = 1/6 \\ \text{Alternativhypothese } H_1: p_i \neq 1/6 \end{array} \right\} (i = 1, 2, \dots, 6)$$

#### 1. Schritt: Klasseneinteilung

$k = 6$  Klassen (sie entsprechen den 6 Augenzahlen, Spalte 1 der nachfolgenden Tabelle)



**2. Schritt: Theoretische Häufigkeitsverteilung**

Es wird vorausgesetzt, dass die Nullhypothese  $H_0$  zutrifft:

$$n_i^* = n p_i = 300 \cdot \frac{1}{6} = 50 \quad (\text{Spalte 4 der nachfolgenden Tabelle})$$

Klasse (Augenzahl $i$ )	$n_i$	$p_i$	$n_i^* = n p_i$	$\Delta n_i = n_i - n_i^*$	$\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$
1	35	1/6	50	-15	225/50
2	39	1/6	50	-11	121/50
3	62	1/6	50	12	144/50
4	56	1/6	50	6	36/50
5	70	1/6	50	20	400/50
6	38	1/6	50	-12	144/50
$\Sigma$	300	1	300	0	1070/50

**3. Schritt: Berechnung des Testwertes**

Spalte 5 enthält die Differenzen  $\Delta n_i = n_i - n_i^*$  (Abweichungen zwischen den beobachteten und den theoretischen absoluten Häufigkeiten), Spalte 6 die daraus berechneten „Abweichungsmaße“  $(\Delta n_i)^2/n_i^*$ . Aufsummieren der letzten Spalte ergibt den gesuchten *Testwert*:

$$\hat{z} = \hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*} = \sum_{i=1}^6 \frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*} = \frac{1070}{50} = 21,4$$

**4. Schritt: Berechnung der kritischen Grenze und des nicht-kritischen Bereiches**

$$P(Z \leq c)_{H_0} = P(\chi^2 \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$$

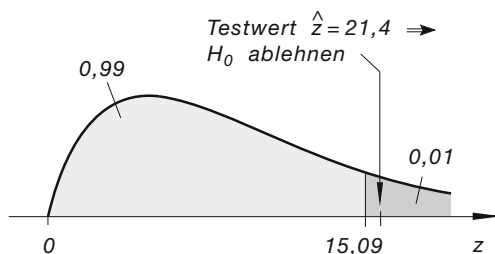
Die Testvariable  $Z = \chi^2$  genügt der *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = k - 1 = 6 - 1 = 5$  Freiheitsgraden. Aus Tabelle 3 im Anhang, Teil B erhält man:

$$P(Z \leq c)_{H_0} = F(c) = 0,99 \xrightarrow{f=5} c = z_{(0,99;5)} = 15,09$$

$$\text{Nicht-kritischer Bereich: } z = \chi^2 \leq c \Rightarrow z = \chi^2 \leq 15,09$$

**5. Schritt: Testentscheidung**

Der Testwert  $\hat{z} = \hat{\chi}^2 = 21,4$  fällt in den *kritischen Bereich*  $z = \chi^2 > 15,09$ . Die Nullhypothese  $H_0$  wird daher *abgelehnt*. Wir dürfen davon ausgehen, dass der Würfel „verfälscht“ ist.



# Anhang Teil A

## Integraltafel

Diese *Integraltafel* enthält über 400 ausgewählte in den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen besonders häufig auftretende *unbestimmte Integrale*. Die Integrationskonstante wurde dabei aus Platzgründen stets weggelassen.

### Übersicht

1	Integrale mit $ax + b$ .....	471
2	Integrale mit $ax + b$ und $px + q$ .....	472
3	Integrale mit $a^2 + x^2$ .....	473
4	Integrale mit $a^2 - x^2$ .....	474
5	Integrale mit $ax^2 + bx + c$ .....	476
6	Integrale mit $a^3 \pm x^3$ .....	478
7	Integrale mit $a^4 + x^4$ .....	478
8	Integrale mit $a^4 - x^4$ .....	478
9	Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ .....	479
10	Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ und $px + q$ .....	480
11	Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ und $\sqrt{px + q}$ .....	481
12	Integrale mit $\sqrt{a^2 + x^2}$ .....	482
13	Integrale mit $\sqrt{a^2 - x^2}$ .....	484
14	Integrale mit $\sqrt{x^2 - a^2}$ .....	486
15	Integrale mit $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ .....	488
16	Integrale mit $\sin(ax)$ .....	490
17	Integrale mit $\cos(ax)$ .....	492
18	Integrale mit $\sin(ax)$ und $\cos(ax)$ .....	494
19	Integrale mit $\tan(ax)$ .....	497
20	Integrale mit $\cot(ax)$ .....	497
21	Integrale mit einer Arkusfunktion .....	498
22	Integrale mit $e^{ax}$ .....	499
23	Integrale mit $\ln x$ .....	500
24	Integrale mit $\sinh(ax)$ .....	502
25	Integrale mit $\cosh(ax)$ .....	503
26	Integrale mit $\sinh(ax)$ und $\cosh(ax)$ .....	504
27	Integrale mit $\tanh(ax)$ .....	505
28	Integrale mit $\coth(ax)$ .....	505
29	Integrale mit einer Areafunktion .....	506

# 1 Integrale mit $ax + b$ ( $a \neq 0$ )

**Hinweis:** Im Sonderfall  $b = 0$  erhält man Integrale von *Potenzen*, die mit Hilfe der Potenzregel der Integralrechnung elementar lösbar sind.

$$(1) \int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{(n+1)a} \quad (n \neq -1)$$

Fall  $n = -1$ : siehe Integral (2)

$$(2) \int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax + b|$$

$$(3) \int x(ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax + b)^{n+1}}{(n+1)a^2} \quad (n \neq -1, -2)$$

Fall  $n = -1, -2$ : siehe Integral (4) bzw. (5)

$$(4) \int \frac{x dx}{ax + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln|ax + b|$$

$$(5) \int \frac{x dx}{(ax + b)^2} = \frac{b}{a^2(ax + b)} + \frac{1}{a^2} \cdot \ln|ax + b|$$

$$(6) \int \frac{x dx}{(ax + b)^n} = -\frac{1}{(n-2)a^2(ax + b)^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)a^2(ax + b)^{n-1}} \quad (n \neq 1, 2)$$

Fall  $n = 1, 2$ : siehe Integral (4) bzw. (5)

$$(7) \int x^2(ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(ax + b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(ax + b)^{n+1}}{(n+1)a^3} \quad (n \neq -1, -2, -3)$$

Fall  $n = -1, -2, -3$ : siehe Integral (8), (9) bzw. (10)

$$(8) \int \frac{x^2 dx}{ax + b} = \frac{(ax + b)^2}{2a^3} - \frac{2b(ax + b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3} \cdot \ln|ax + b|$$

$$(9) \int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^2} = \frac{ax + b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3(ax + b)} - \frac{2b}{a^3} \cdot \ln|ax + b|$$

$$(10) \int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^3} = \frac{2b}{a^3(ax + b)} - \frac{b^2}{2a^3(ax + b)^2} + \frac{1}{a^3} \cdot \ln|ax + b|$$

$$(11) \int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^n} = -\frac{1}{(n-3)a^3(ax + b)^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)a^3(ax + b)^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)a^3(ax + b)^{n-1}} \\ (n \neq 1, 2, 3). \text{ Fall } n = 1, 2, 3: \text{ siehe Integral (8), (9) bzw. (10)}$$

$$(12) \int \frac{dx}{x(ax + b)} = -\frac{1}{b} \cdot \ln \left| \frac{ax + b}{x} \right|$$

$$(13) \int \frac{dx}{x(ax + b)^2} = \frac{1}{b(ax + b)} - \frac{1}{b^2} \cdot \ln \left| \frac{ax + b}{x} \right|$$

$$(14) \int \frac{dx}{x(ax+b)^3} = \frac{a^2 x^2}{2b^3(ax+b)^2} - \frac{2ax}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3} \cdot \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right|$$

$$(15) \int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \cdot \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right|$$

$$(16) \int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = -\frac{a}{b^2(ax+b)} - \frac{1}{b^2x} + \frac{2a}{b^3} \cdot \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right|$$

$$(17) \int \frac{dx}{x^3(ax+b)} = -\frac{(ax+b)^2}{2b^3x^2} + \frac{2a(ax+b)}{b^3x} - \frac{a^2}{b^3} \cdot \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right|$$

$$(18) \int \frac{dx}{x^3(ax+b)^2} = -\frac{(ax+b)^2}{2b^4x^2} + \frac{3a(ax+b)}{b^4x} - \frac{a^3x}{b^4(ax+b)} - \frac{3a^2}{b^4} \cdot \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right|$$

$$(19) \int x^m(ax+b)^n dx = \begin{cases} \frac{x^{m+1}(ax+b)^n}{m+n+1} + \frac{nb}{m+n+1} \cdot \int x^m(ax+b)^{n-1} dx & (m+n \neq -1) \\ \frac{x^m(ax+b)^{n+1}}{(m+n+1)a} - \frac{mb}{(m+n+1)a} \cdot \int x^{m-1}(ax+b)^n dx & (m+n \neq -1) \\ -\frac{x^{m+1}(ax+b)^{n+1}}{(n+1)b} + \frac{m+n+2}{(n+1)b} \cdot \int x^m(ax+b)^{n+1} dx & (n \neq -1) \end{cases}$$

## 2 Integrale mit $ax+b$ und $px+q$ ( $a, p \neq 0$ )

**Abkürzung:**  $\Delta = bp - aq$

**Hinweis:** Es wird stets  $\Delta \neq 0$  vorausgesetzt. Für  $\Delta = 0$  ist  $px+q = \frac{q}{b}(ax+b)$ .  
Die Integrale entsprechen dann dem Integraltyp aus Abschnitt 1.

$$(20) \int \frac{ax+b}{px+q} dx = \frac{ax}{p} + \frac{\Delta}{p^2} \cdot \ln |px+q|$$

$$(21) \int \frac{dx}{(ax+b)(px+q)} = \frac{1}{\Delta} \cdot \ln \left| \frac{px+q}{ax+b} \right|$$

$$(22) \int \frac{dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{1}{ax+b} + \frac{p}{\Delta} \cdot \ln \left| \frac{px+q}{ax+b} \right| \right]$$

$$(23) \int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^n} = -\frac{1}{(n-1)\Delta} \left[ \frac{1}{(ax+b)^{m-1}(px+q)^{n-1}} + \right. \\ \left. + (m+n-2)a \cdot \int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^{n-1}} \right] \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (24)

$$(24) \quad \int \frac{(ax+b)^m}{px+q} dx = \frac{(ax+b)^m}{mp} + \frac{\Delta}{p} \cdot \int \frac{(ax+b)^{m-1}}{px+q} dx \quad (m \neq 0)$$

Fall  $m = 0$ : siehe Integral (2)

$$(25) \quad \int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)p} \left[ \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} - ma \cdot \int \frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^{n-1}} dx \right] \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (24)

$$(26) \quad \int \frac{x dx}{(ax+b)(px+q)} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{b}{a} \cdot \ln |ax+b| - \frac{q}{p} \cdot \ln |px+q| \right]$$

$$(27) \quad \int \frac{x dx}{(ax+b)^2 (px+q)} = \frac{1}{\Delta} \left[ -\frac{b}{a(ax+b)} + \frac{q}{\Delta} \cdot \ln \left| \frac{ax+b}{px+q} \right| \right]$$

$$(28) \quad \int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^2 (px+q)} = \frac{b^2}{a^2 \Delta (ax+b)} + \frac{1}{\Delta^2} \left[ \frac{q^2}{p} \cdot \ln |px+q| + \frac{b(bp-2aq)}{a^2} \cdot \ln |ax+b| \right]$$

### 3 Integrale mit $-a^2 + x^2$ ( $a > 0$ )

$$(29) \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(30) \quad \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2a^3} \cdot \arctan \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(31) \quad \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2 + x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \cdot \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (29)

$$(32) \quad \int \frac{x dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln (a^2 + x^2)$$

$$(33) \quad \int \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^2} = -\frac{1}{2(a^2 + x^2)}$$

$$(34) \quad \int \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(a^2 + x^2)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (32)

$$(35) \quad \int \frac{x^2 dx}{a^2 + x^2} = x - a \cdot \arctan \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(36) \quad \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^2} = -\frac{x}{2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2a} \cdot \arctan \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(37) \quad \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^n} = -\frac{x}{2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}}}_{\text{Integral (31)}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (35)

$$(38) \quad \int \frac{dx}{x(a^2 + x^2)} = -\frac{1}{2a^2} \cdot \ln \left( \frac{a^2 + x^2}{x^2} \right)$$

$$(39) \quad \int \frac{dx}{x(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2 + x^2)} - \frac{1}{2a^4} \cdot \ln \left( \frac{a^2 + x^2}{x^2} \right)$$

$$(40) \quad \int \frac{dx}{x^2(a^2 + x^2)} = -\frac{1}{a^2 x} - \frac{1}{a^3} \cdot \arctan \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(41) \quad \int \frac{dx}{x^2(a^2 + x^2)^2} = -\frac{1}{a^4 x} - \frac{x}{2a^4(a^2 + x^2)} - \frac{3}{2a^5} \cdot \arctan \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(42) \quad \int \frac{x^m dx}{(a^2 + x^2)^n} = \int \frac{x^{m-2} dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}} - a^2 \cdot \int \frac{x^{m-2} dx}{(a^2 + x^2)^n}$$

$$(43) \quad \int \frac{dx}{x^m(a^2 + x^2)^n} = \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{dx}{x^m(a^2 + x^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{dx}{x^{m-2}(a^2 + x^2)^n}$$

$$(44) \quad \int \frac{dx}{(px + q)(a^2 + x^2)} = \frac{1}{a^2 p^2 + q^2} \left[ \frac{p}{2} \cdot \ln \left( \frac{(px + q)^2}{a^2 + x^2} \right) + \frac{q}{a} \cdot \arctan \left( \frac{x}{a} \right) \right] \quad (p \neq 0)$$

$$(45) \quad \int \frac{x dx}{(px + q)(a^2 + x^2)} = \frac{1}{2(a^2 p^2 + q^2)} \left[ q \cdot \ln \left( \frac{a^2 + x^2}{(px + q)^2} \right) + 2ap \cdot \arctan \left( \frac{x}{a} \right) \right] \quad (p \neq 0)$$

## 4 Integrale mit $a^2 - x^2$ ( $a > 0$ )

**Hinweis:** Die in den nachfolgenden Integralformeln auftretende *logarithmische* Funktion  $\ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$  kann auch wie folgt durch *Areafunktionen* ersetzt werden:

$$\ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| = \begin{cases} \ln \left( \frac{a+x}{a-x} \right) = 2 \cdot \operatorname{artanh} \left( \frac{x}{a} \right) & \text{für } |x| < a \\ \ln \left( \frac{x+a}{x-a} \right) = 2 \cdot \operatorname{arcoth} \left( \frac{x}{a} \right) & \text{für } |x| > a \end{cases}$$

$$(46) \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| = \begin{cases} \frac{1}{a} \cdot \operatorname{artanh} \left( \frac{x}{a} \right) & \text{für } |x| < a \\ \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arcoth} \left( \frac{x}{a} \right) & \text{für } |x| > a \end{cases}$$

$$(47) \quad \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{4a^3} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

$$(48) \quad \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2 - x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \cdot \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (46)

$$(49) \quad \int \frac{x dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \ln |a^2 - x^2|$$

$$(50) \quad \int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{1}{2(a^2 - x^2)}$$

$$(51) \quad \int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(a^2 - x^2)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (49)

$$(52) \quad \int \frac{x^2 dx}{a^2 - x^2} = -x + \frac{a}{2} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

$$(53) \quad \int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x}{2(a^2 - x^2)} - \frac{1}{4a} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

$$(54) \quad \int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(a^2 - x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{n-1}}}_{\text{Integral (48)}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (52)

$$(55) \quad \int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)} = -\frac{1}{2a^2} \cdot \ln \left| \frac{a^2 - x^2}{x^2} \right|$$

$$(56) \quad \int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2 - x^2)} - \frac{1}{2a^4} \cdot \ln \left| \frac{a^2 - x^2}{x^2} \right|$$

$$(57) \quad \int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)} = -\frac{1}{a^2 x} + \frac{1}{2a^3} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

$$(58) \quad \int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)^2} = -\frac{1}{a^4 x} + \frac{x}{2a^4(a^2 - x^2)} + \frac{3}{4a^5} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

$$(59) \quad \int \frac{x^m dx}{(a^2 - x^2)^n} = a^2 \cdot \int \frac{x^{m-2} dx}{(a^2 - x^2)^n} - \int \frac{x^{m-2} dx}{(a^2 - x^2)^{n-1}}$$

$$(60) \quad \int \frac{dx}{x^m(a^2 - x^2)^n} = \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{dx}{x^m(a^2 - x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{dx}{x^{m-2}(a^2 - x^2)^n}$$

$$(61) \quad \int \frac{dx}{(px+q)(a^2 - x^2)} = \frac{1}{a^2 p^2 - q^2} \left[ \frac{p}{2} \cdot \ln \left| \frac{(px+q)^2}{a^2 - x^2} \right| - \frac{q}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right] \quad (p \neq 0)$$

$$(62) \quad \int \frac{x dx}{(px+q)(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2(a^2 p^2 - q^2)} \left[ q \cdot \ln \left| \frac{a^2 - x^2}{(px+q)^2} \right| + ap \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right] \quad (p \neq 0)$$

## 5 Integrale mit $ax^2 + bx + c$ ( $a \neq 0$ )

**Abkürzung:**  $\Delta = 4ac - b^2$

**Hinweis:** Es wird stets  $\Delta \neq 0$  vorausgesetzt. Für  $\Delta = 0$  ist  $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ . Die Integrale entsprechen dann dem Integraltyp aus Abschnitt 1.

$$(63) \quad \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \cdot \arctan\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}}\right) & \text{für } \Delta > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{|\Delta|}}{2ax + b + \sqrt{|\Delta|}} \right| & \text{für } \Delta < 0 \end{cases}$$

$$(64) \quad \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{2ax + b}{\Delta(ax^2 + bx + c)} + \frac{2a}{\Delta} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}}_{\text{Integral (63)}}$$

$$(65) \quad \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{2ax + b}{(n-1)\Delta(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{2(2n-3)a}{(n-1)\Delta} \cdot \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (63)

$$(66) \quad \int \frac{xdx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \cdot \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}}_{\text{Integral (63)}}$$

$$(67) \quad \int \frac{xdx}{(ax^2 + bx + c)^2} = -\frac{bx + 2c}{\Delta(ax^2 + bx + c)} - \frac{b}{\Delta} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}}_{\text{Integral (63)}}$$

$$(68) \quad \int \frac{xdx}{(ax^2 + bx + c)^n} = -\frac{bx + 2c}{(n-1)\Delta(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - \frac{(2n-3)b}{(n-1)\Delta} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}}}_{\text{Integral (65)}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (66)

$$(69) \quad \int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{p}{2a} \cdot \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2aq - bp}{2a} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}}_{\text{Integral (63)}}$$

$$(70) \quad \int \frac{px + q}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{(2aq - bp)x + bq - 2cp}{(n-1)\Delta(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{(2n-3)(2aq - bp)}{(n-1)\Delta} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}}}_{\text{Integral (65)}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (69)



$$(71) \quad \int \frac{x^2 dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \cdot \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}}_{\text{Integral (63)}}$$

$$(72) \quad \int \frac{x^2 dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = -\frac{x}{(2n-3)a(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{c}{(2n-3)a} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}}_{\text{Integral (65)}} - \\ - \frac{(n-2)b}{(2n-3)a} \cdot \underbrace{\int \frac{x dx}{(ax^2 + bx + c)^n}}_{\text{Integral (68)}}$$

$$(73) \quad \int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)} = -\frac{1}{2c} \cdot \ln \left| \frac{ax^2 + bx + c}{x^2} \right| - \frac{b}{2c} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}}_{\text{Integral (63)}} \quad (c \neq 0)$$

$$(74) \quad \int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{1}{2(n-1)c(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - \frac{b}{2c} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}}_{\text{Integral (65)}} + \\ + \frac{1}{c} \cdot \int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \quad (n \neq 1; c \neq 0)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (73)

$$(75) \quad \int \frac{x^m dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)a(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \\ + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a} \cdot \int \frac{x^{m-2} dx}{(ax^2 + bx + c)^n} + \frac{(m-n)b}{(2n-m-1)a} \cdot \int \frac{x^{m-1} dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad (m \neq 2n-1)$$

Fall  $m = 2n-1$ : siehe Integral (76)

$$(76) \quad \int \frac{x^{2n-1} dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{x^{2n-3} dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - \\ - \frac{c}{a} \cdot \int \frac{x^{2n-3} dx}{(ax^2 + bx + c)^n} - \frac{b}{a} \cdot \int \frac{x^{2n-2} dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

$$(77) \quad \int \frac{dx}{x^m(ax^2 + bx + c)^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}(ax^2 + bx + c)^{n-1}} - \\ - \frac{(m+2n-3)a}{(m-1)c} \cdot \int \frac{dx}{x^{m-2}(ax^2 + bx + c)^n} - \\ - \frac{(m+n-2)b}{(m-1)c} \cdot \int \frac{dx}{x^{m-1}(ax^2 + bx + c)^n}$$

$(m \neq 1; c \neq 0)$  Fall  $m = 1$ : siehe Integral (74)

$$(78) \int \frac{dx}{(px+q)(ax^2+bx+c)} = \frac{1}{2(aq^2 - bpq + cp^2)} \left[ p \cdot \ln \left| \frac{(px+q)^2}{ax^2+bx+c} \right| + \right. \\ \left. + (2aq - bp) \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{\text{Integral (63)}} \right] \quad (p \neq 0)$$

## 6 Integrale mit $a^3 \pm x^3$ ( $a > 0$ )

**Hinweis:** Das *obere* Vorzeichen gilt für  $a^3 + x^3$ , das *untere* Vorzeichen für  $a^3 - x^3$ .

$$(79) \int \frac{dx}{a^3 \pm x^3} = \pm \frac{1}{6a^2} \cdot \ln \left| \frac{(a \pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} \right| + \frac{1}{a^2 \sqrt{3}} \cdot \arctan \left( \frac{2x \mp a}{a \sqrt{3}} \right)$$

$$(80) \int \frac{dx}{(a^3 \pm x^3)^2} = \frac{x}{3a^3(a^3 \pm x^3)} \pm \frac{1}{9a^5} \cdot \ln \left| \frac{(a \pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} \right| + \frac{2}{3a^5 \sqrt{3}} \cdot \arctan \left( \frac{2x \mp a}{a \sqrt{3}} \right)$$

$$(81) \int \frac{x dx}{a^3 \pm x^3} = \frac{1}{6a} \cdot \ln \left| \frac{a^2 \mp ax + x^2}{(a \pm x)^2} \right| \pm \frac{1}{a^2 \sqrt{3}} \cdot \arctan \left( \frac{2x \mp a}{a \sqrt{3}} \right)$$

$$(82) \int \frac{x dx}{(a^3 \pm x^3)^2} = \frac{x^2}{3a^3(a^3 \pm x^3)} + \frac{1}{18a^4} \cdot \ln \left| \frac{a^2 \mp ax + x^2}{(a \pm x)^2} \right| \pm \frac{1}{3a^4 \sqrt{3}} \cdot \arctan \left( \frac{2x \mp a}{a \sqrt{3}} \right)$$

$$(83) \int \frac{dx}{x(a^3 \pm x^3)} = \frac{1}{3a^3} \cdot \ln \left| \frac{x^3}{a^3 \pm x^3} \right|$$

## 7 Integrale mit $a^4 + x^4$ ( $a > 0$ )

$$(84) \int \frac{dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}a^3} \cdot \ln \left| \frac{x^2 + a\sqrt{2}x + a^2}{x^2 - a\sqrt{2}x + a^2} \right| - \frac{1}{2\sqrt{2}a^3} \cdot \arctan \left( \frac{a\sqrt{2}x}{x^2 - a^2} \right)$$

$$(85) \int \frac{x dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2a^2} \cdot \arctan \left( \frac{x^2}{a^2} \right)$$

$$(86) \int \frac{dx}{x(a^4 + x^4)} = \frac{1}{4a^4} \cdot \ln \left( \frac{x^4}{a^4 + x^4} \right)$$

## 8 Integrale mit $a^4 - x^4$ ( $a > 0$ )

$$(87) \int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + \frac{1}{2a^3} \cdot \arctan \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(88) \quad \int \frac{x dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^2} \cdot \ln \left| \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} \right|$$

$$(89) \quad \int \frac{dx}{x(a^4 - x^4)} = -\frac{1}{4a^4} \cdot \ln \left| \frac{a^4 - x^4}{x^4} \right|$$

## 9 Integrale mit $\sqrt{ax+b}$ ( $a \neq 0$ )

$$(90) \quad \int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3}$$

$$(91) \quad \int x \sqrt{ax+b} dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2} \sqrt{(ax+b)^3}$$

$$(92) \quad \int x^n \sqrt{ax+b} dx = \frac{2x^n}{(2n+3)a} \sqrt{(ax+b)^3} - \frac{2nb}{(2n+3)a} \cdot \int x^{n-1} \sqrt{ax+b} dx$$

$$(93) \quad \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} + b \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}}_{\text{Integral (99)}}$$

$$(94) \quad \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}}_{\text{Integral (99)}}$$

$$(95) \quad \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^n} dx = -\frac{\sqrt{(ax+b)^3}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-5)a}{2(n-1)b} \cdot \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^{n-1}} dx \quad (n \neq 1; b \neq 0)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (93)

$$(96) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{ax+b}$$

$$(97) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2} \cdot \sqrt{ax+b}$$

$$(98) \quad \int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2x^n \sqrt{ax+b}}{(2n+1)a} - \frac{2nb}{(2n+1)a} \cdot \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{ax+b}}$$

$$(99) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right| & \text{für } b > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{|b|}} \cdot \arctan \left( \sqrt{\frac{ax+b}{|b|}} \right) & \text{für } b < 0 \end{cases}$$

$$(100) \quad \int \frac{dx}{x^n \sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{2(n-1)b} \cdot \int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}} \quad (n \neq 1; b \neq 0)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (99)

$$(101) \quad \int \sqrt{(ax+b)^3} dx = \frac{2}{5a} \cdot \sqrt{(ax+b)^5}$$

$$(102) \quad \int \sqrt{(ax+b)^n} dx = \frac{2\sqrt{(ax+b)^{n+2}}}{(n+2)a} \quad (n \neq -2)$$

Fall  $n = -2$ : siehe Integral (2)

$$(103) \quad \int x \sqrt{(ax+b)^3} dx = \frac{2}{35a^2} \left[ 5\sqrt{(ax+b)^7} - 7b\sqrt{(ax+b)^5} \right]$$

$$(104) \quad \int x \sqrt{(ax+b)^n} dx = \frac{2\sqrt{(ax+b)^{n+4}}}{(n+4)a^2} - \frac{2b\sqrt{(ax+b)^{n+2}}}{(n+2)a^2} \quad (n \neq -2, -4)$$

Fall  $n = -2, -4$ : siehe Integral (4) bzw. (5)

$$(105) \quad \int \frac{\sqrt{(ax+b)^3}}{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(ax+b)^3} + 2b\sqrt{ax+b} + b^2 \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}}_{\text{Integral (99)}}$$

$$(106) \quad \int \frac{x}{\sqrt{(ax+b)^3}} dx = \frac{2}{a^2} \left[ \sqrt{ax+b} + \frac{b}{\sqrt{ax+b}} \right] = \frac{2(ax+2b)}{a^2\sqrt{ax+b}}$$

## 10 Integrale mit $\sqrt{ax+b}$ und $px+q$

**Abkürzung:**  $\Delta = bp - aq$

**Hinweis:** Es wird stets  $\Delta \neq 0$  vorausgesetzt. Für  $\Delta = 0$  ist  $px+q = \frac{q}{b}(ax+b)$ .  
Die Integrale entsprechen dann dem Integraltyp aus Abschnitt 9.

$$(107) \quad \int \frac{\sqrt{ax+b}}{px+q} dx = \begin{cases} \frac{2\sqrt{ax+b}}{p} + \frac{\sqrt{\Delta}}{p\sqrt{p}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{p(ax+b)} - \sqrt{\Delta}}{\sqrt{p(ax+b)} + \sqrt{\Delta}} \right| & \text{für } p > 0, \Delta > 0 \\ \frac{2\sqrt{ax+b}}{p} - \frac{2\sqrt{|\Delta|}}{p\sqrt{p}} \cdot \arctan \left( \sqrt{\frac{p(ax+b)}{|\Delta|}} \right) & \text{für } p > 0, \Delta < 0 \end{cases}$$

$$(108) \quad \int \frac{\sqrt{ax+b}}{(px+q)^n} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)p(px+q)^{n-1}} + \frac{a}{2(n-1)p} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{(px+q)^{n-1}\sqrt{ax+b}}}_{\text{Integral (111)}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (107)

$$(109) \quad \int \frac{px + q}{\sqrt{ax + b}} dx = \frac{2(apx + 3aq - 2bp)\sqrt{ax + b}}{3a^2}$$

$$(110) \quad \int \frac{dx}{(px + q)\sqrt{ax + b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p\Delta}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{p(ax + b)} - \sqrt{\Delta}}{\sqrt{p(ax + b)} + \sqrt{\Delta}} \right| & \text{für } \Delta > 0, p > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{p|\Delta|}} \cdot \arctan \left( \sqrt{\frac{p(ax + b)}{|\Delta|}} \right) & \text{für } \Delta < 0, p > 0 \end{cases}$$

$$(111) \quad \int \frac{dx}{(px + q)^n \sqrt{ax + b}} = -\frac{\sqrt{ax + b}}{(n-1)\Delta(px + q)^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{2(n-1)\Delta} \cdot \int \frac{dx}{(px + q)^{n-1} \sqrt{ax + b}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (110)

## 11 Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ und $\sqrt{px + q}$ ( $a, p \neq 0$ )

**Abkürzung:**  $\Delta = bp - aq$

$$(112) \quad \int \sqrt{(ax + b)(px + q)} dx = \frac{[2a(px + q) + \Delta] \sqrt{(ax + b)(px + q)}}{4ap} - \frac{\Delta^2}{8ap} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{(ax + b)(px + q)}}}_{\text{Integral (114)}}$$

$$(113) \quad \int \frac{\sqrt{px + q}}{\sqrt{ax + b}} dx = \frac{\sqrt{(ax + b)(px + q)}}{a} - \frac{\Delta}{2a} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{(ax + b)(px + q)}}}_{\text{Integral (114)}}$$

$$(114) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(ax + b)(px + q)}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{ap}} \cdot \ln \left| \sqrt{a(px + q)} + \sqrt{p(ax + b)} \right| & \text{für } ap > 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{|ap|}} \cdot \arctan \left( \sqrt{-\frac{p(ax + b)}{a(px + q)}} \right) & \text{für } ap < 0 \end{cases}$$

$$(115) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{(ax + b)(px + q)}} = \frac{\sqrt{(ax + b)(px + q)}}{ap} - \frac{aq + bp}{2ap} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{(ax + b)(px + q)}}}_{\text{Integral (114)}}$$

## 12 Integrale mit $\sqrt{a^2 + x^2}$ ( $a > 0$ )

$$(116) \quad \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left[ x \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \cdot \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[ x \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{x}{a} \right) \right]$$

$$(117) \quad \int x \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{3} \sqrt{(a^2 + x^2)^3}$$

$$(118) \quad \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{4} x \sqrt{(a^2 + x^2)^3} - \frac{a^2}{8} \left[ x \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \cdot \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) \right] = \\ = \frac{1}{4} x \sqrt{(a^2 + x^2)^3} - \frac{a^2}{8} \left[ x \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{x}{a} \right) \right]$$

$$(119) \quad \int x^3 \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{5} \sqrt{(a^2 + x^2)^5} - \frac{a^2}{3} \sqrt{(a^2 + x^2)^3}$$

$$(120) \quad \int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} \, dx = \sqrt{a^2 + x^2} - a \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right|$$

$$(121) \quad \int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^2} \, dx = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} + \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) = \\ = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} + \operatorname{arsinh} \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(122) \quad \int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^3} \, dx = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2x^2} - \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right|$$

$$(123) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) = \operatorname{arsinh} \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(124) \quad \int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$(125) \quad \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2} \cdot \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) = \\ = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2} \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(126) \quad \int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{(a^2 + x^2)^3} - a^2 \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$(127) \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{1}{a} \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right|$$

$$(128) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^2 x}$$

$$(129) \quad \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^3} \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right|$$

$$(130) \quad \int \sqrt{(a^2 + x^2)^3} dx = \frac{1}{4} \left[ x \sqrt{(a^2 + x^2)^3} + \frac{3}{2} a^2 x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{3}{2} a^4 \cdot \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) \right] = \\ = \frac{1}{4} \left[ x \sqrt{(a^2 + x^2)^3} + \frac{3}{2} a^2 x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{3}{2} a^4 \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{x}{a} \right) \right]$$

$$(131) \quad \int x \sqrt{(a^2 + x^2)^3} dx = \frac{1}{5} \sqrt{(a^2 + x^2)^5}$$

$$(132) \quad \int x^2 \sqrt{(a^2 + x^2)^3} dx = \frac{1}{6} x \sqrt{(a^2 + x^2)^5} - \frac{a^2}{24} x \sqrt{(a^2 + x^2)^3} - \frac{a^4}{16} x \sqrt{a^2 + x^2} - \\ - \frac{a^6}{16} \cdot \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) = \\ = \frac{1}{6} x \sqrt{(a^2 + x^2)^5} - \frac{a^2}{24} x \sqrt{(a^2 + x^2)^3} - \frac{a^4}{16} x \sqrt{a^2 + x^2} - \\ - \frac{a^6}{16} \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(133) \quad \int \frac{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}{x} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(a^2 + x^2)^3} + a^2 \sqrt{a^2 + x^2} - a^3 \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right|$$

$$(134) \quad \int \frac{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}{x} + \frac{3}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{3}{2} a^2 \cdot \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) = \\ = -\frac{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}{x} + \frac{3}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{3}{2} a^2 \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(135) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$(136) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$(137) \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \operatorname{arsinh} \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(138) \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{(a^2 + x^2)^3}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{a^3} \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right|$$

$$(139) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(a^2 + x^2)^3}} = -\frac{2x^2 + a^2}{a^4 x \sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$(140) \quad \int \frac{dx}{(px + q) \sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 p^2 + q^2}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 p^2 + q^2} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} - qx + a^2 p}{px + q} \right|$$

( $p \neq 0$ )

### 13 Integrale mit $\sqrt{a^2 - x^2}$ ( $a > 0$ ; $|x| < a$ )

$$(141) \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left[ x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right]$$

$$(142) \quad \int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3}$$

$$(143) \quad \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{4} x \sqrt{(a^2 - x^2)^3} + \frac{a^2}{8} \left[ x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right]$$

$$(144) \quad \int x^3 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{5} \sqrt{(a^2 - x^2)^5} - \frac{a^2}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3}$$

$$(145) \quad \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|$$

$$(146) \quad \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(147) \quad \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|$$

$$(148) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(149) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(150) \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin \left( \frac{x}{a} \right)$$



$$(151) \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3} - a^2 \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(152) \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|$$

$$(153) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x}$$

$$(154) \quad \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2 a^2 x^2} - \frac{1}{2 a^3} \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|$$

$$(155) \quad \int \sqrt{(a^2 - x^2)^3} dx = \frac{1}{4} \left[ x \sqrt{(a^2 - x^2)^3} + \frac{3}{2} a^2 x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3}{2} a^4 \cdot \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right]$$

$$(156) \quad \int x \sqrt{(a^2 - x^2)^3} dx = -\frac{1}{5} \sqrt{(a^2 - x^2)^5}$$

$$(157) \quad \int x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)^3} dx = -\frac{1}{6} x \sqrt{(a^2 - x^2)^5} + \frac{a^2}{24} x \sqrt{(a^2 - x^2)^3} + \frac{a^4}{16} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^6}{16} \cdot \arcsin \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(158) \quad \int \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}{x} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3} + a^2 \sqrt{a^2 - x^2} - a^3 \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|$$

$$(159) \quad \int \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}{x} - \frac{3}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{3}{2} a^2 \cdot \arcsin \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(160) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$(161) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$(162) \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \arcsin \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(163) \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{a^3} \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|$$

$$(164) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{2x^2 - a^2}{a^4 x \sqrt{a^2 - x^2}}$$

#### 14 Integrale mit $\sqrt{x^2 - a^2}$ ( $a > 0$ ; $|x| > a$ )

$$(165) \quad \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} \left[ x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| \right]$$

$$(166) \quad \int x \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - a^2)^3}$$

$$(167) \quad \int x^2 \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{4} x \sqrt{(x^2 - a^2)^3} + \frac{a^2}{8} \left[ x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| \right]$$

$$(168) \quad \int x^3 \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{5} \sqrt{(x^2 - a^2)^5} + \frac{a^2}{3} \sqrt{(x^2 - a^2)^3}$$

$$(169) \quad \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \arccos \left| \frac{a}{x} \right|$$

$$(170) \quad \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right|$$

$$(171) \quad \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a} \cdot \arccos \left| \frac{a}{x} \right|$$

$$(172) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| = \operatorname{arcosh} \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$(173) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$(174) \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right|$$

$$(175) \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - a^2)^3} + a^2 \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$(176) \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \cdot \arccos \left| \frac{a}{x} \right|$$

$$(177) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x}$$

$$(178) \quad \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^3} \cdot \arccos \left| \frac{a}{x} \right|$$

$$(179) \quad \int \sqrt{(x^2 - a^2)^3} dx = \frac{1}{4} \left[ x \sqrt{(x^2 - a^2)^3} - \frac{3}{2} a^2 x \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{3}{2} a^4 \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| \right]$$

$$(180) \quad \int x \sqrt{(x^2 - a^2)^3} dx = \frac{1}{5} \sqrt{(x^2 - a^2)^5}$$

$$(181) \quad \int x^2 \sqrt{(x^2 - a^2)^3} dx = \frac{1}{6} x \sqrt{(x^2 - a^2)^5} + \frac{a^2}{24} x \sqrt{(x^2 - a^2)^3} - \frac{a^4}{16} x \sqrt{x^2 - a^2} + \\ + \frac{a^6}{16} \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right|$$

$$(182) \quad \int \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}{x} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - a^2)^3} - a^2 \sqrt{x^2 - a^2} + a^3 \cdot \arccos \left| \frac{a}{x} \right|$$

$$(183) \quad \int \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}{x} + \frac{3}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{3}{2} a^2 \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right|$$

$$(184) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$(185) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$(186) \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right|$$

$$(187) \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = -\frac{1}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{1}{a^3} \cdot \arccos \left| \frac{a}{x} \right|$$

$$(188) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = \frac{a^2 - 2x^2}{a^4 x \sqrt{x^2 - a^2}}$$

## 15 Integrale mit $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ( $a \neq 0$ )

**Abkürzung:**  $\Delta = 4ac - b^2$

**Hinweis:** Es wird stets  $\Delta \neq 0$  vorausgesetzt. Für  $\Delta = 0$  ist  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a}\right)$ . Die Integrale entsprechen dann dem Integraltyp aus Abschnitt 1.

$$(189) \quad \int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{\Delta}{8a} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}}_{\text{Integral (194)}}$$

$$(190) \quad \int x \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx = \frac{1}{3a} \cdot \sqrt{(ax^2 + bx + c)^3} - \frac{b(2ax + b)}{8a^2} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b\Delta}{16a^2} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}}_{\text{Integral (194)}}$$

$$(191) \quad \int x^2 \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx = \frac{1}{24a^2} (6ax - 5b) \sqrt{(ax^2 + bx + c)^3} + \frac{5b^2 - 4ac}{16a^2} \cdot \underbrace{\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx}_{\text{Integral (189)}}$$

$$(192) \quad \int \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x} \, dx = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{b}{2} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}}_{\text{Integral (194)}} + c \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}}}_{\text{Integral (197)}}$$

$$(193) \quad \int \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x^2} \, dx = -\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x} + a \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}}_{\text{Integral (194)}} + \frac{b}{2} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}}}_{\text{Integral (197)}}$$

$$(194) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \ln \left| 2\sqrt{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + 2ax + b \right| & \text{für } a > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} \right) & \text{für } a > 0, \Delta > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \cdot \arcsin \left( \frac{2ax + b}{\sqrt{|\Delta|}} \right) & \text{für } a < 0, \Delta < 0 \end{cases}$$

$$(195) \quad \int \frac{x \, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}}_{\text{Integral (194)}}$$

$$(196) \quad \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{2ax - 3b}{4a^2} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}}_{\text{Integral (194)}}$$

$$(197) \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \ln \left| \frac{2\sqrt{c} \sqrt{ax^2 + bx + c} + bx + 2c}{x} \right| & \text{für } c > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{bx + 2c}{\sqrt{\Delta} x} \right) & \text{für } c > 0, \Delta > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|c|}} \cdot \arcsin \left( \frac{bx + 2c}{\sqrt{|\Delta|} x} \right) & \text{für } c < 0, \Delta < 0 \end{cases}$$

$$(198) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{cx} - \frac{b}{2c} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}}}_{\text{Integral (197)}}$$

$$(199) \quad \int \sqrt{(ax^2 + bx + c)^3} \, dx = \frac{2ax + b}{8a} \sqrt{(ax^2 + bx + c)^3} + \frac{3\Delta}{16a} \cdot \underbrace{\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx}_{\text{Integral (189)}}$$

$$(200) \quad \int x \sqrt{(ax^2 + bx + c)^3} \, dx = \frac{1}{5a} \sqrt{(ax^2 + bx + c)^5} - \frac{b}{2a} \cdot \underbrace{\int \sqrt{(ax^2 + bx + c)^3} \, dx}_{\text{Integral (199)}}$$

$$(201) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^3}} = \frac{4ax + 2b}{\Delta \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$(202) \quad \int \frac{x \, dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^3}} = -\frac{2bx + 4c}{\Delta \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$(203) \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{(ax^2 + bx + c)^3}} = \frac{1}{c \sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{1}{c} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}}}_{\text{Integral (197)}} - \frac{b}{2c} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^3}}}_{\text{Integral (201)}}$$

( $c \neq 0$ )

## 16 Integrale mit $\sin(ax)$ ( $a \neq 0$ )

**Hinweis:** Integrale mit einer Sinusfunktion *und* einer

- *Kosinusfunktion*: siehe Abschnitt 18
- *Exponentialfunktion*: siehe Abschnitt 22
- *Hyperbelfunktion*: siehe Abschnitt 24 und 25

$$(204) \quad \int \sin(ax) \, dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$$

$$(205) \quad \int \sin^2(ax) \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} = \frac{x}{2} - \frac{\sin(ax) \cdot \cos(ax)}{2a}$$

$$(206) \quad \int \sin^3(ax) \, dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + \frac{\cos^3(ax)}{3a}$$

$$(207) \quad \int \sin^n(ax) \, dx = -\frac{\sin^{n-1}(ax) \cdot \cos(ax)}{na} + \frac{n-1}{n} \cdot \int \sin^{n-2}(ax) \, dx \quad (n \neq 0)$$

$$(208) \quad \int x \cdot \sin(ax) \, dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a}$$

$$(209) \quad \int x^2 \cdot \sin(ax) \, dx = \frac{2x \cdot \sin(ax)}{a^2} - \frac{(a^2 x^2 - 2) \cdot \cos(ax)}{a^3}$$

$$(210) \quad \int x^n \cdot \sin(ax) \, dx = -\frac{x^n \cdot \cos(ax)}{a} + \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \sin(ax)}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^2} \cdot \int x^{n-2} \cdot \sin(ax) \, dx$$

$(n \geq 2)$

$$(211) \quad \int \frac{\sin(ax)}{x} \, dx = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - + \dots$$

(Potenzreihenentwicklung: Konvergenz für  $|x| < \infty$ )

$$(212) \quad \int \frac{\sin(ax)}{x^2} \, dx = -\frac{\sin(ax)}{x} + a \cdot \underbrace{\int \frac{\cos(ax)}{x} \, dx}_{\text{Integral (235)}}$$

$$(213) \quad \int \frac{\sin(ax)}{x^n} \, dx = -\frac{\sin(ax)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \cdot \underbrace{\int \frac{\cos(ax)}{x^{n-1}} \, dx}_{\text{Integral (237)}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (211)

$$(214) \quad \int \frac{dx}{\sin(ax)} = \frac{1}{a} \cdot \ln \left| \tan \left( \frac{ax}{2} \right) \right|$$

$$(215) \quad \int \frac{dx}{\sin^2(ax)} = -\frac{\cot(ax)}{a}$$

$$(216) \quad \int \frac{dx}{\sin^n(ax)} = -\frac{\cos(ax)}{a(n-1) \cdot \sin^{n-1}(ax)} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \int \frac{dx}{\sin^{n-2}(ax)} \quad (n > 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (214)

$$(217) \quad \int x \cdot \sin^2(ax) dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \cdot \sin(2ax)}{4a} - \frac{\cos(2ax)}{8a^2}$$

$$(218) \quad \int \frac{x dx}{\sin^2(ax)} = -\frac{x \cdot \cot(ax)}{a} + \frac{1}{a^2} \cdot \ln |\sin(ax)|$$

$$(219) \quad \int \frac{dx}{1 \pm \sin(ax)} = \mp \frac{1}{a} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right)$$

$$(220) \quad \int \frac{dx}{p + q \cdot \sin(ax)} = \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{p^2 - q^2}} \cdot \arctan\left(\frac{p \cdot \tan(ax/2) + q}{\sqrt{p^2 - q^2}}\right) & \text{für } p^2 > q^2 \\ \frac{1}{a\sqrt{q^2 - p^2}} \cdot \ln \left| \frac{p \cdot \tan(ax/2) + q - \sqrt{q^2 - p^2}}{p \cdot \tan(ax/2) + q + \sqrt{q^2 - p^2}} \right| & \text{für } p^2 < q^2 \end{cases}$$

Fall  $p^2 = q^2$ : siehe Integral (219)

$$(221) \quad \int \frac{x dx}{1 + \sin(ax)} = -\frac{x}{a} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2} \cdot \ln \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) \right|$$

$$(222) \quad \int \frac{x dx}{1 - \sin(ax)} = \frac{x}{a} \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2} \cdot \ln \left| \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) \right|$$

$$(223) \quad \int \frac{\sin(ax) dx}{1 \pm \sin(ax)} = \pm x + \frac{1}{a} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right)$$

$$(224) \quad \int \frac{\sin(ax) dx}{p + q \cdot \sin(ax)} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{p + q \cdot \sin(ax)}}_{\text{Integral (220)}} \quad (q \neq 0)$$

$$(225) \quad \int \frac{dx}{\sin(ax) [p + q \cdot \sin(ax)]} = \frac{1}{ap} \cdot \ln \left| \tan\left(\frac{ax}{2}\right) \right| - \frac{q}{p} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{p + q \cdot \sin(ax)}}_{\text{Integral (220)}} \quad (p \neq 0)$$

$$(226) \quad \int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} \quad (a^2 \neq b^2)$$

Fall  $a^2 = b^2$ : siehe Integral (205)

$$(227) \quad \int \sin(ax) \cdot \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax + b) + \frac{(\cos b)}{2} x$$

## 17 Integrale mit $\cos(ax)$ ( $a \neq 0$ )

**Hinweis:** Integrale mit einer Kosinusfunktion *und* einer

- Sinusfunktion: siehe Abschnitt 18
- Exponentialfunktion: siehe Abschnitt 22
- Hyperbelfunktion: siehe Abschnitt 24 und 25

$$(228) \quad \int \cos(ax) \, dx = \frac{\sin(ax)}{a}$$

$$(229) \quad \int \cos^2(ax) \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} = \frac{x}{2} + \frac{\sin(ax) \cdot \cos(ax)}{2a}$$

$$(230) \quad \int \cos^3(ax) \, dx = \frac{\sin(ax)}{a} - \frac{\sin^3(ax)}{3a}$$

$$(231) \quad \int \cos^n(ax) \, dx = \frac{\cos^{n-1}(ax) \cdot \sin(ax)}{na} + \frac{n-1}{n} \cdot \int \cos^{n-2}(ax) \, dx \quad (n \neq 0)$$

$$(232) \quad \int x \cdot \cos(ax) \, dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot \sin(ax)}{a}$$

$$(233) \quad \int x^2 \cdot \cos(ax) \, dx = \frac{2x \cdot \cos(ax)}{a^2} + \frac{(a^2 x^2 - 2) \cdot \sin(ax)}{a^3}$$

$$(234) \quad \int x^n \cdot \cos(ax) \, dx = \frac{x^n \cdot \sin(ax)}{a} + \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \cos(ax)}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^2} \cdot \int x^{n-2} \cdot \cos(ax) \, dx$$

$(n \geq 2)$

$$(235) \quad \int \frac{\cos(ax)}{x} \, dx = \ln|ax| - \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \dots$$

(Potenzreihenentwicklung: Konvergenz für  $|x| > 0$ )

$$(236) \quad \int \frac{\cos(ax)}{x^2} \, dx = -\frac{\cos(ax)}{x} - a \cdot \underbrace{\int \frac{\sin(ax)}{x} \, dx}_{\text{Integral (211)}}$$

$$(237) \quad \int \frac{\cos(ax)}{x^n} \, dx = -\frac{\cos(ax)}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \cdot \underbrace{\int \frac{\sin(ax)}{x^{n-1}} \, dx}_{\text{Integral (213)}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (235)

$$(238) \quad \int \frac{dx}{\cos(ax)} = \frac{1}{a} \cdot \ln \left| \tan \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$(239) \quad \int \frac{dx}{\cos^2(ax)} = \frac{\tan(ax)}{a}$$



$$(240) \quad \int \frac{dx}{\cos^n(ax)} = \frac{\sin(ax)}{a(n-1) \cdot \cos^{n-1}(ax)} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \int \frac{dx}{\cos^{n-2}(ax)} \quad (n > 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (238)

$$(241) \quad \int x \cdot \cos^2(ax) dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \cdot \sin(2ax)}{4a} + \frac{\cos(2ax)}{8a^2}$$

$$(242) \quad \int \frac{x dx}{\cos^2(ax)} = \frac{x \cdot \tan(ax)}{a} + \frac{1}{a^2} \cdot \ln |\cos(ax)|$$

$$(243) \quad \int \frac{dx}{1 + \cos(ax)} = \frac{1}{a} \cdot \tan\left(\frac{ax}{2}\right)$$

$$(244) \quad \int \frac{dx}{1 - \cos(ax)} = -\frac{1}{a} \cdot \cot\left(\frac{ax}{2}\right)$$

$$(245) \quad \int \frac{dx}{p + q \cdot \cos(ax)} = \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{p^2 - q^2}} \cdot \arctan\left(\frac{(p - q) \cdot \tan(ax/2)}{\sqrt{p^2 - q^2}}\right) & \text{für } p^2 > q^2 \\ \frac{1}{a\sqrt{q^2 - p^2}} \cdot \ln \left| \frac{(q - p) \cdot \tan(ax/2) + \sqrt{q^2 - p^2}}{(q - p) \cdot \tan(ax/2) - \sqrt{q^2 - p^2}} \right| & \text{für } p^2 < q^2 \end{cases}$$

Fall  $p^2 = q^2$ : siehe Integral (243) bzw. Integral (244)

$$(246) \quad \int \frac{x dx}{1 + \cos(ax)} = \frac{x}{a} \cdot \tan\left(\frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2} \cdot \ln \left| \cos\left(\frac{ax}{2}\right) \right|$$

$$(247) \quad \int \frac{x dx}{1 - \cos(ax)} = -\frac{x}{a} \cdot \cot\left(\frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2} \cdot \ln \left| \sin\left(\frac{ax}{2}\right) \right|$$

$$(248) \quad \int \frac{\cos(ax) dx}{1 + \cos(ax)} = x - \frac{1}{a} \cdot \tan\left(\frac{ax}{2}\right)$$

$$(249) \quad \int \frac{\cos(ax) dx}{1 - \cos(ax)} = -x - \frac{1}{a} \cdot \cot\left(\frac{ax}{2}\right)$$

$$(250) \quad \int \frac{\cos(ax) dx}{p + q \cdot \cos(ax)} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{p + q \cdot \cos(ax)}}_{\text{Integral (245)}} \quad (q \neq 0)$$

$$(251) \quad \int \frac{dx}{\cos(ax) [p + q \cdot \cos(ax)]} = \frac{1}{ap} \cdot \ln \left| \tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| - \frac{q}{p} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{p + q \cdot \cos(ax)}}_{\text{Integral (245)}} \quad (p \neq 0)$$

$$(252) \quad \int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} \quad (a^2 \neq b^2)$$

Fall  $a^2 = b^2$ : siehe Integral (229)

$$(253) \quad \int \cos(ax) \cdot \cos(ax + b) dx = \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax + b) + \frac{(\cos b)}{2} x$$

## 18 Integrale mit $\sin(ax)$ und $\cos(ax)$ ( $a \neq 0$ )

$$(254) \quad \int \sin(ax) \cdot \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a} = -\frac{1}{4a} \cdot \cos(2ax)$$

$$(255) \quad \int \sin^n(ax) \cdot \cos(ax) dx = \frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a} \quad (n \neq -1)$$

Fall  $n = -1$ : siehe Integral (293)

$$(256) \quad \int \sin(ax) \cdot \cos^n(ax) dx = -\frac{\cos^{n+1}(ax)}{(n+1)a} \quad (n \neq -1)$$

Fall  $n = -1$ : siehe Integral (286)

$$(257) \quad \int \sin^2(ax) \cdot \cos^2(ax) dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4ax)}{32a}$$

$$(258) \quad \int \sin^m(ax) \cdot \cos^n(ax) dx =$$

$$= \begin{cases} -\frac{\sin^{m-1}(ax) \cdot \cos^{(n+1)}(ax)}{(m+n)a} + \frac{m-1}{m+n} \cdot \int \sin^{m-2}(ax) \cdot \cos^n(ax) dx \\ \frac{\sin^{m+1}(ax) \cdot \cos^{(n-1)}(ax)}{(m+n)a} + \frac{n-1}{m+n} \cdot \int \sin^m(ax) \cdot \cos^{n-2}(ax) dx \end{cases}$$

Beide Formeln gelten nur für  $m \neq -n$ . Fall  $m = -n$ : siehe Integral (289) bzw. (296)

$$(259) \quad \int \frac{dx}{\sin(ax) \cdot \cos(ax)} = \frac{1}{a} \cdot \ln |\tan(ax)|$$

$$(260) \quad \int \frac{dx}{\sin^2(ax) \cdot \cos(ax)} = \frac{1}{a} \left[ \ln \left| \tan \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{\sin(ax)} \right]$$

$$(261) \quad \int \frac{dx}{\sin^m(ax) \cdot \cos(ax)} = -\frac{1}{(m-1)a \cdot \sin^{m-1}(ax)} + \int \frac{dx}{\sin^{m-2}(ax) \cdot \cos(ax)} \quad (m \neq 1)$$

Fall  $m = 1$ : siehe Integral (259)

$$(262) \quad \int \frac{dx}{\sin(ax) \cdot \cos^2(ax)} = \frac{1}{a} \left[ \ln \left| \tan \left( \frac{ax}{2} \right) \right| + \frac{1}{\cos(ax)} \right]$$

$$(263) \quad \int \frac{dx}{\sin(ax) \cdot \cos^n(ax)} = \frac{1}{(n-1)a \cdot \cos^{n-1}(ax)} + \int \frac{dx}{\sin(ax) \cdot \cos^{n-2}(ax)} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (259)

$$(264) \quad \int \frac{dx}{\sin^m(ax) \cdot \cos^n(ax)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(n-1)a \cdot \sin^{m-1}(ax) \cdot \cos^{n-1}(ax)} + \frac{m+n-2}{n-1} \cdot \int \frac{dx}{\sin^m(ax) \cdot \cos^{n-2}(ax)} \\ - \frac{1}{(m-1)a \cdot \sin^{m-1}(ax) \cdot \cos^{n-1}(ax)} + \frac{m+n-2}{m-1} \cdot \int \frac{dx}{\sin^{m-2}(ax) \cdot \cos^n(ax)} \end{cases}$$

Obere Formel für  $n \neq 1$ , untere Formel für  $m \neq 1$ .

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (261); Fall  $m = 1$ : siehe Integral (263)

$$(265) \quad \int \frac{\sin(ax)}{\cos(ax)} dx = \int \tan(ax) dx = -\frac{1}{a} \cdot \ln |\cos(ax)|$$

$$(266) \quad \int \frac{\sin^2(ax)}{\cos(ax)} dx = -\frac{\sin(ax)}{a} + \frac{1}{a} \cdot \ln \left| \tan \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$(267) \quad \int \frac{\sin^m(ax)}{\cos(ax)} dx = -\frac{\sin^{m-1}(ax)}{(m-1)a} + \int \frac{\sin^{m-2}(ax)}{\cos(ax)} dx \quad (m \neq 1)$$

Fall  $m = 1$ : siehe Integral (265)

$$(268) \quad \int \frac{\sin(ax)}{\cos^2(ax)} dx = \frac{1}{a \cdot \cos(ax)}$$

$$(269) \quad \int \frac{\sin(ax)}{\cos^n(ax)} dx = \frac{1}{(n-1)a \cdot \cos^{n-1}(ax)} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (265)

$$(270) \quad \int \frac{\sin^2(ax)}{\cos^2(ax)} dx = \int \tan^2(ax) dx = \frac{\tan(ax)}{a} - x$$

$$(271) \quad \int \frac{\sin^m(ax)}{\cos^n(ax)} dx = \begin{cases} \frac{\sin^{m-1}(ax)}{(n-1)a \cdot \cos^{n-1}(ax)} - \frac{m-1}{n-1} \cdot \int \frac{\sin^{m-2}(ax)}{\cos^{n-2}(ax)} dx & (n \neq 1) \\ \frac{\sin^{m+1}(ax)}{(n-1)a \cdot \cos^{n-1}(ax)} - \frac{m-n+2}{n-1} \cdot \int \frac{\sin^m(ax)}{\cos^{n-2}(ax)} dx & (n \neq 1) \\ - \frac{\sin^{m-1}(ax)}{(m-n)a \cdot \cos^{n-1}(ax)} + \frac{m-1}{m-n} \cdot \int \frac{\sin^{m-2}(ax)}{\cos^n(ax)} dx & (m \neq n) \end{cases}$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (267); Fall  $m = n$ : siehe Integral (289)

$$(272) \quad \int \frac{\cos(ax)}{\sin(ax)} dx = \int \cot(ax) dx = \frac{1}{a} \cdot \ln |\sin(ax)|$$

$$(273) \quad \int \frac{\cos(ax)}{\sin^2(ax)} dx = -\frac{1}{a \cdot \sin(ax)}$$

$$(274) \quad \int \frac{\cos(ax)}{\sin^n(ax)} dx = -\frac{1}{(n-1)a \cdot \sin^{n-1}(ax)} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (272) und (293)

$$(275) \quad \int \frac{\cos^2(ax)}{\sin(ax)} dx = \frac{1}{a} \left[ \cos(ax) + \ln \left| \tan \left( \frac{ax}{2} \right) \right| \right]$$

$$(276) \quad \int \frac{\cos^m(ax)}{\sin(ax)} dx = \frac{\cos^{m-1}(ax)}{(m-1)a} + \int \frac{\cos^{m-2}(ax)}{\sin(ax)} dx \quad (m \neq 1)$$

Fall  $m = 1$ : siehe Integral (272) und (293)

$$(277) \quad \int \frac{\cos^m(ax)}{\sin^n(ax)} dx = \begin{cases} -\frac{\cos^{m-1}(ax)}{(n-1)a \cdot \sin^{n-1}(ax)} - \frac{m-1}{n-1} \cdot \int \frac{\cos^{m-2}(ax)}{\sin^{n-2}(ax)} dx & (n \neq 1) \\ -\frac{\cos^{m+1}(ax)}{(n-1)a \cdot \sin^{n-1}(ax)} - \frac{m-n+2}{n-1} \cdot \int \frac{\cos^m(ax)}{\sin^{n-2}(ax)} dx & (n \neq 1) \\ \frac{\cos^{m-1}(ax)}{(m-n)a \cdot \sin^{n-1}(ax)} + \frac{m-1}{m-n} \cdot \int \frac{\cos^{m-2}(ax)}{\sin^n(ax)} dx & (m \neq n) \end{cases}$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (276); Fall  $m = n$ : siehe Integral (296)

$$(278) \quad \int \frac{dx}{\sin(ax) \pm \cos(ax)} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \cdot \ln \left| \tan \left( \frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8} \right) \right|$$

$$(279) \quad \int \frac{\sin(ax) dx}{\sin(ax) \pm \cos(ax)} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a} \cdot \ln |\sin(ax) \pm \cos(ax)|$$

$$(280) \quad \int \frac{\cos(ax) dx}{\sin(ax) \pm \cos(ax)} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \ln |\sin(ax) \pm \cos(ax)|$$

$$(281) \quad \int \frac{dx}{\sin(ax) [1 \pm \cos(ax)]} = \pm \frac{1}{2a[1 \pm \cos(ax)]} + \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \tan \left( \frac{ax}{2} \right) \right|$$

$$(282) \quad \int \frac{dx}{\cos(ax) [1 \pm \sin(ax)]} = \mp \frac{1}{2a[1 \pm \sin(ax)]} + \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \tan \left( \frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$(283) \quad \int \frac{\sin(ax) dx}{\cos(ax) [1 \pm \cos(ax)]} = \frac{1}{a} \cdot \ln \left| \frac{1 \pm \cos(ax)}{\cos(ax)} \right|$$

$$(284) \quad \int \frac{\cos(ax) dx}{\sin(ax) [1 \pm \sin(ax)]} = -\frac{1}{a} \cdot \ln \left| \frac{1 \pm \sin(ax)}{\sin(ax)} \right|$$

$$(285) \quad \int \sin(ax) \cdot \cos(bx) dx = -\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} \quad (a^2 \neq b^2)$$

Fall  $a^2 = b^2$ : siehe Integral (254)

## 19 Integrale mit $\tan(ax)$ ( $a \neq 0$ )

$$(286) \quad \int \tan(ax) \, dx = -\frac{1}{a} \cdot \ln |\cos(ax)|$$

$$(287) \quad \int \tan^2(ax) \, dx = \frac{\tan(ax)}{a} - x$$

$$(288) \quad \int \tan^3(ax) \, dx = \frac{\tan^2(ax)}{2a} + \frac{1}{a} \cdot \ln |\cos(ax)|$$

$$(289) \quad \int \tan^n(ax) \, dx = \frac{\tan^{n-1}(ax)}{(n-1)a} - \int \tan^{n-2}(ax) \, dx \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (286)

$$(290) \quad \int \frac{dx}{\tan(ax)} = \int \cot(ax) \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln |\sin(ax)|$$

$$(291) \quad \int \frac{\tan^n(ax)}{\cos^2(ax)} \, dx = \frac{\tan^{n+1}(ax)}{(n+1)a} \quad (n \neq -1)$$

Fall  $n = -1$ : siehe Integral (259)

$$(292) \quad \int \frac{dx}{p + q \cdot \tan(ax)} = \frac{apx + q \cdot \ln |q \cdot \sin(ax) + p \cdot \cos(ax)|}{a(p^2 + q^2)} \quad (q \neq 0)$$

## 20 Integrale mit $\cot(ax)$ ( $a \neq 0$ )

$$(293) \quad \int \cot(ax) \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln |\sin(ax)|$$

$$(294) \quad \int \cot^2(ax) \, dx = -\frac{\cot(ax)}{a} - x$$

$$(295) \quad \int \cot^3(ax) \, dx = -\frac{\cot^2(ax)}{2a} - \frac{1}{a} \cdot \ln |\sin(ax)|$$

$$(296) \quad \int \cot^n(ax) \, dx = -\frac{\cot^{n-1}(ax)}{(n-1)a} - \int \cot^{n-2}(ax) \, dx \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (293)

$$(297) \quad \int \frac{dx}{\cot(ax)} = \int \tan(ax) dx = -\frac{1}{a} \cdot \ln |\cos(ax)|$$

$$(298) \quad \int \frac{\cot^n(ax)}{\sin^2(ax)} dx = -\frac{\cot^{n+1}(ax)}{(n+1)a} \quad (n \neq -1)$$

Fall  $n = -1$ : siehe Integral (259)

$$(299) \quad \int \frac{dx}{p + q \cdot \cot(ax)} = \frac{apx - q \cdot \ln |p \cdot \sin(ax) + q \cdot \cos(ax)|}{a(p^2 + q^2)} \quad (q \neq 0)$$

## 21 Integrale mit einer Arkusfunktion ( $a \neq 0$ )

$$(300) \quad \int \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(301) \quad \int x \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) dx = \left(\frac{2x^2 - a^2}{4}\right) \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{4} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(302) \quad \int x^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x^2 + 2a^2}{9}\right) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(303) \quad \int \arccos\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(304) \quad \int x \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right) dx = \left(\frac{2x^2 - a^2}{4}\right) \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{4} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(305) \quad \int x^2 \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{x^2 + 2a^2}{9}\right) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$(306) \quad \int \arctan\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{2} \cdot \ln(x^2 + a^2)$$

$$(307) \quad \int x \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{ax}{2}$$

$$(308) \quad \int x^2 \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \cdot \ln(x^2 + a^2)$$

$$(309) \quad \int \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \cdot \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a}{2} \cdot \ln(x^2 + a^2)$$

$$(310) \quad \int x \cdot \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \cdot \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{ax}{2}$$

$$(311) \quad \int x^2 \cdot \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6} \cdot \ln(x^2 + a^2)$$

## 22 Integrale mit $e^{ax}$ ( $a \neq 0$ )

$$(312) \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax}$$

$$(313) \quad \int x \cdot e^{ax} dx = \left( \frac{ax - 1}{a^2} \right) \cdot e^{ax}$$

$$(314) \quad \int x^2 \cdot e^{ax} dx = \left( \frac{a^2 x^2 - 2ax + 2}{a^3} \right) \cdot e^{ax}$$

$$(315) \quad \int x^n \cdot e^{ax} dx = \frac{x^n \cdot e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \cdot \int x^{n-1} \cdot e^{ax} dx$$

$$(316) \quad \int \frac{e^{ax}}{x} dx = \ln |ax| + \frac{ax}{1 \cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

(Potenzreihenentwicklung; Konvergenz für  $|x| > 0$ )

$$(317) \quad \int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = -\frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \cdot \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} dx \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (316)

$$(318) \quad \int \frac{dx}{p + q \cdot e^{ax}} = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap} \cdot \ln |p + q \cdot e^{ax}| \quad (p \neq 0)$$

$$(319) \quad \int \frac{e^{ax} dx}{p + q \cdot e^{ax}} = \frac{1}{aq} \cdot \ln |p + q \cdot e^{ax}| \quad (q \neq 0)$$

$$(320) \quad \int \frac{dx}{p \cdot e^{ax} + q \cdot e^{-ax}} = \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{pq}} \cdot \arctan \left( \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot e^{ax} \right) & \text{für } pq > 0 \\ \frac{1}{2a\sqrt{|pq|}} \cdot \ln \left| \frac{q + \sqrt{|pq|} \cdot e^{ax}}{q - \sqrt{|pq|} \cdot e^{ax}} \right| & \text{für } pq < 0 \end{cases}$$

$$(321) \quad \int e^{ax} \cdot \ln x dx = \frac{e^{ax} \cdot \ln |x|}{a} - \frac{1}{a} \cdot \underbrace{\int \frac{e^{ax}}{x} dx}_{\text{Integral (316)}}$$

$$(322) \quad \int e^{ax} \cdot \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cdot \sin(bx) - b \cdot \cos(bx)]$$

$$(323) \quad \int e^{ax} \cdot \sin^n(bx) dx = \frac{e^{ax} \cdot \sin^{n-1}(bx)}{a^2 + n^2 b^2} [a \cdot \sin(bx) - nb \cdot \cos(bx)] + \\ + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + n^2 b^2} \cdot \int e^{ax} \cdot \sin^{n-2}(bx) dx$$

$$(324) \quad \int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cdot \cos(bx) + b \cdot \sin(bx)]$$

$$(325) \quad \int e^{ax} \cdot \cos^n(bx) dx = \frac{e^{ax} \cdot \cos^{n-1}(bx)}{a^2 + n^2 b^2} [a \cdot \cos(bx) + nb \cdot \sin(bx)] + \\ + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + n^2 b^2} \cdot \int e^{ax} \cdot \cos^{n-2}(bx) dx$$

$$(326) \quad \int e^{ax} \cdot \sinh(ax) dx = \frac{e^{2ax}}{4a} - \frac{x}{2}$$

$$(327) \quad \int e^{ax} \cdot \sinh(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cdot \sinh(bx) - b \cdot \cosh(bx)] \quad (a^2 \neq b^2)$$

Fall  $a^2 = b^2$ : siehe Integral (326)

$$(328) \quad \int e^{ax} \cdot \cosh(ax) dx = \frac{e^{2ax}}{4a} + \frac{x}{2}$$

$$(329) \quad \int e^{ax} \cdot \cosh(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cdot \cosh(bx) - b \cdot \sinh(bx)] \quad (a^2 \neq b^2)$$

Fall  $a^2 = b^2$ : siehe Integral (328)

$$(330) \quad \int x \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx) dx = \frac{x \cdot e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cdot \sin(bx) - b \cdot \cos(bx)] - \\ - \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2} [(a^2 - b^2) \cdot \sin(bx) - 2ab \cdot \cos(bx)]$$

$$(331) \quad \int x \cdot e^{ax} \cdot \cos(bx) dx = \frac{x \cdot e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cdot \cos(bx) + b \cdot \sin(bx)] - \\ - \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2} [(a^2 - b^2) \cdot \cos(bx) + 2ab \cdot \sin(bx)]$$

## 23 Integrale mit $\ln x$ ( $x > 0$ )

**Hinweis:** Integrale mit einer Logarithmus- und einer Exponentialfunktion: siehe Abschnitt 22.

$$(332) \quad \int \ln x dx = x \cdot \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$(333) \quad \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x \cdot \ln x + 2x = x[(\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x + 2]$$

$$(334) \quad \int (\ln x)^3 dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \cdot \ln x - 6x = x[(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6 \cdot \ln x - 6]$$



$$(335) \quad \int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n \cdot \int (\ln x)^{n-1} dx \quad (n \neq -1)$$

Fall  $n = -1$ : siehe Integral (336)

$$(336) \quad \int \frac{dx}{\ln x} = \ln |\ln x| + \frac{\ln x}{1 \cdot 1!} + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots \quad (x \neq 1)$$

$$(337) \quad \int x \cdot \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \left( \ln x - \frac{1}{2} \right)$$

$$(338) \quad \int x^2 \cdot \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \left( \ln x - \frac{1}{3} \right)$$

$$(339) \quad \int x^m \cdot \ln x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left( \ln x - \frac{1}{m+1} \right) \quad (m \neq -1)$$

Fall  $m = -1$ : siehe Integral (340)

$$(340) \quad \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

$$(341) \quad \int \frac{\ln x}{x^m} dx = -\frac{\ln x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}} \quad (m \neq 1)$$

Fall  $m = 1$ : siehe Integral (340)

$$(342) \quad \int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

Fall  $n = -1$ : siehe Integral (343)

$$(343) \quad \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \ln |\ln x| \quad (x \neq 1)$$

$$(344) \quad \int \frac{x^m}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + (m+1) \ln x + \frac{(m+1)^2}{2 \cdot 2!} (\ln x)^2 + \frac{(m+1)^3}{3 \cdot 3!} (\ln x)^3 + \dots \quad (x \neq 1)$$

$$(345) \quad \int x^m \cdot (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1} \cdot (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \cdot \int x^m \cdot (\ln x)^{n-1} dx \quad (m \neq -1)$$

Fall  $m = -1$ : siehe Integral (342)

$$(346) \quad \int \frac{x^m}{(\ln x)^n} dx = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \cdot \int \frac{x^m}{(\ln x)^{n-1}} dx \quad (n \neq 1; x \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (344)

$$(347) \quad \int \ln(x^2 + a^2) dx = x \cdot \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (a \neq 0)$$

$$(348) \quad \int \ln(x^2 - a^2) dx = x \cdot \ln(x^2 - a^2) - 2x + a \cdot \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right) \quad (x^2 > a^2)$$

## 24 Integrale mit $\sinh(ax)$ ( $a \neq 0$ )

**Hinweis:** Integrale mit einer hyperbolischen Sinusfunktion *und* einer

– hyperbolischen Kosinusfunktion: siehe Abschnitt 26

– Exponentialfunktion: siehe Abschnitt 22

$$(349) \quad \int \sinh(ax) \, dx = \frac{\cosh(ax)}{a}$$

$$(350) \quad \int \sinh^2(ax) \, dx = \frac{\sinh(2ax)}{4a} - \frac{x}{2}$$

$$(351) \quad \int \sinh^n(ax) \, dx = \frac{\sinh^{n-1}(ax) \cdot \cosh(ax)}{na} - \frac{n-1}{n} \cdot \int \sinh^{n-2}(ax) \, dx \quad (n \neq 0)$$

$$(352) \quad \int x \cdot \sinh(ax) \, dx = \frac{x \cdot \cosh(ax)}{a} - \frac{\sinh(ax)}{a^2}$$

$$(353) \quad \int x^n \cdot \sinh(ax) \, dx = \frac{x^n \cdot \cosh(ax)}{a} - \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \sinh(ax)}{a^2} + \\ + \frac{n(n-1)}{a^2} \cdot \int x^{n-2} \cdot \sinh(ax) \, dx \quad (n \geq 2)$$

$$(354) \quad \int \frac{\sinh(ax)}{x} \, dx = ax + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} + \dots$$

(Potenzreihenentwicklung; Konvergenz für  $|x| < \infty$ )

$$(355) \quad \int \frac{\sinh(ax)}{x^n} \, dx = -\frac{\sinh(ax)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \cdot \underbrace{\int \frac{\cosh(ax)}{x^{n-1}} \, dx}_{\text{Integral (369)}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (354)

$$(356) \quad \int \frac{dx}{\sinh(ax)} = \frac{1}{a} \cdot \ln \left| \tanh \left( \frac{ax}{2} \right) \right|$$

$$(357) \quad \int \frac{dx}{\sinh^n(ax)} = -\frac{\cosh(ax)}{(n-1)a \cdot \sinh^{n-1}(ax)} - \frac{n-2}{n-1} \cdot \int \frac{dx}{\sinh^{n-2}(ax)} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (356)

$$(358) \quad \int \frac{dx}{p + q \cdot \sinh(ax)} = \frac{1}{a\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \ln \left| \frac{q \cdot e^{ax} + p - \sqrt{p^2 + q^2}}{q \cdot e^{ax} + p + \sqrt{p^2 + q^2}} \right| \quad (q \neq 0)$$

$$(359) \quad \int \frac{\sinh(ax) \, dx}{p + q \cdot \sinh(ax)} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{p + q \cdot \sinh(ax)}}_{\text{Integral (358)}} \quad (q \neq 0)$$

$$(360) \quad \int \sinh(ax) \cdot \sinh(bx) dx = \frac{\sinh((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\sinh((a-b)x)}{2(a-b)} \quad (a^2 \neq b^2)$$

Fall  $a^2 = b^2$ : siehe Integral (350)

$$(361) \quad \int \sinh(ax) \cdot \sin(bx) dx = \frac{a \cdot \cosh(ax) \cdot \sin(bx) - b \cdot \sinh(ax) \cdot \cos(bx)}{a^2 + b^2}$$

$$(362) \quad \int \sinh(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{a \cdot \cosh(ax) \cdot \cos(bx) + b \cdot \sinh(ax) \cdot \sin(bx)}{a^2 + b^2}$$

## 25 Integrale mit $\cosh(ax)$ ( $a \neq 0$ )

**Hinweis:** Integrale mit einer hyperbolischen Kosinusfunktion *und* einer

– hyperbolischen Sinusfunktion: siehe Abschnitt 26

– Exponentialfunktion: siehe Abschnitt 22

$$(363) \quad \int \cosh(ax) dx = \frac{\sinh(ax)}{a}$$

$$(364) \quad \int \cosh^2(ax) dx = \frac{\sinh(2ax)}{4a} + \frac{x}{2}$$

$$(365) \quad \int \cosh^n(ax) dx = \frac{\cosh^{n-1}(ax) \cdot \sinh(ax)}{na} + \frac{n-1}{n} \cdot \int \cosh^{n-2}(ax) dx \quad (n \neq 0)$$

$$(366) \quad \int x \cdot \cosh(ax) dx = \frac{x \cdot \sinh(ax)}{a} - \frac{\cosh(ax)}{a^2}$$

$$(367) \quad \int x^n \cdot \cosh(ax) dx = \frac{x^n \cdot \sinh(ax)}{a} - \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \cosh(ax)}{a^2} + \\ + \frac{n(n-1)}{a^2} \cdot \int x^{n-2} \cdot \cosh(ax) dx \quad (n \geq 2)$$

$$(368) \quad \int \frac{\cosh(ax)}{x} dx = \ln|ax| + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} + \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \dots$$

(Potenzreihenentwicklung; Konvergenz für  $|x| > 0$ )

$$(369) \quad \int \frac{\cosh(ax)}{x^n} dx = -\frac{\cosh(ax)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \cdot \underbrace{\int \frac{\sinh(ax)}{x^{n-1}} dx}_{\text{Integral (355)}} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (368)

$$(370) \quad \int \frac{dx}{\cosh(ax)} = \frac{2}{a} \cdot \arctan(e^{ax})$$

$$(371) \quad \int \frac{dx}{\cosh^n(ax)} = \frac{\sinh(ax)}{(n-1)a \cdot \cosh^{n-1}(ax)} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \int \frac{dx}{\cosh^{n-2}(ax)} \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (370)

$$(372) \quad \int \frac{dx}{p + q \cdot \cosh(ax)} = \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{p^2 - q^2}} \cdot \ln \left| \frac{q \cdot e^{ax} + p - \sqrt{p^2 - q^2}}{q \cdot e^{ax} + p + \sqrt{p^2 - q^2}} \right| & \text{für } q > 0, p^2 > q^2 \\ \frac{-2}{a(p + q \cdot e^{ax})} & \text{für } p^2 = q^2 \neq 0 \\ \frac{2}{a\sqrt{q^2 - p^2}} \cdot \arctan \left( \frac{p + q \cdot e^{ax}}{\sqrt{q^2 - p^2}} \right) & \text{für } p^2 < q^2 \end{cases}$$

$$(373) \quad \int \frac{\cosh(ax) dx}{p + q \cdot \cosh(ax)} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{p + q \cdot \cosh(ax)}}_{\text{Integral (372)}} \quad (q \neq 0)$$

$$(374) \quad \int \cosh(ax) \cdot \cosh(bx) dx = \frac{\sinh((a+b)x)}{2(a+b)} + \frac{\sinh((a-b)x)}{2(a-b)} \quad (a^2 \neq b^2)$$

Fall  $a^2 = b^2$ : siehe Integral (364)

$$(375) \quad \int \cosh(ax) \cdot \sin(bx) dx = \frac{a \cdot \sinh(ax) \cdot \sin(bx) - b \cdot \cosh(ax) \cdot \cos(bx)}{a^2 + b^2}$$

$$(376) \quad \int \cosh(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{a \cdot \sinh(ax) \cdot \cos(bx) + b \cdot \cosh(ax) \cdot \sin(bx)}{a^2 + b^2}$$

## 26 Integrale mit $\sinh(ax)$ und $\cosh(ax)$ ( $a \neq 0$ )

$$(377) \quad \int \sinh(ax) \cdot \cosh(ax) dx = \frac{\sinh^2(ax)}{2a} = \frac{1}{4a} \cdot \cosh(2ax)$$

$$(378) \quad \int \sinh(ax) \cdot \cosh(bx) dx = \frac{\cosh((a+b)x)}{2(a+b)} + \frac{\cosh((a-b)x)}{2(a-b)} \quad (a^2 \neq b^2)$$

Fall  $a^2 = b^2$ : siehe Integral (377)

$$(379) \quad \int \sinh^n(ax) \cdot \cosh(ax) dx = \frac{\sinh^{n+1}(ax)}{(n+1)a} \quad (n \neq -1)$$

Fall  $n = -1$ : siehe Integral (384)

$$(380) \quad \int \sinh(ax) \cdot \cosh^n(ax) dx = \frac{\cosh^{n+1}(ax)}{(n+1)a} \quad (n \neq -1)$$

Fall  $n = -1$ : siehe Integral (382)

$$(381) \quad \int \sinh^2(ax) \cdot \cosh^2(ax) dx = \frac{\sinh(4ax)}{32a} - \frac{x}{8}$$

$$(382) \quad \int \frac{\sinh(ax)}{\cosh(ax)} dx = \int \tanh(ax) dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(\cosh(ax))$$

$$(383) \quad \int \frac{\sinh^2(ax)}{\cosh(ax)} dx = \frac{\sinh(ax)}{a} - \frac{1}{a} \cdot \arctan(\sinh(ax))$$

$$(384) \quad \int \frac{\cosh(ax)}{\sinh(ax)} dx = \int \coth(ax) dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|\sinh(ax)|$$

$$(385) \quad \int \frac{\cosh^2(ax)}{\sinh(ax)} dx = \frac{\cosh(ax)}{a} + \frac{1}{a} \cdot \ln\left|\tanh\left(\frac{ax}{2}\right)\right|$$

$$(386) \quad \int \frac{dx}{\sinh(ax) \cdot \cosh(ax)} = \frac{1}{a} \cdot \ln|\tanh(ax)|$$

## 27 Integrale mit $\tanh(ax)$ ( $a \neq 0$ )

$$(387) \quad \int \tanh(ax) dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(\cosh(ax))$$

$$(388) \quad \int \tanh^2(ax) dx = x - \frac{\tanh(ax)}{a}$$

$$(389) \quad \int \tanh^n(ax) dx = -\frac{\tanh^{n-1}(ax)}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2}(ax) dx \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (387)

$$(390) \quad \int \frac{dx}{\tanh(ax)} = \int \coth(ax) dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|\sinh(ax)|$$

$$(391) \quad \int x \cdot \tanh^2(ax) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x \cdot \tanh(ax)}{a} + \frac{1}{a^2} \cdot \ln(\cosh(ax))$$

## 28 Integrale mit $\coth(ax)$ ( $a \neq 0$ )

$$(392) \quad \int \coth(ax) dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|\sinh(ax)|$$

$$(393) \quad \int \coth^2(ax) dx = x - \frac{\coth(ax)}{a}$$

$$(394) \quad \int \coth^n(ax) dx = -\frac{\coth^{n-1}(ax)}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2}(ax) dx \quad (n \neq 1)$$

Fall  $n = 1$ : siehe Integral (392)

$$(395) \quad \int \frac{dx}{\coth(ax)} = \int \tanh(ax) dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(\cosh(ax))$$

$$(396) \quad \int x \cdot \coth^2(ax) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x \cdot \coth(ax)}{a} + \frac{1}{a^2} \cdot \ln|\sinh(ax)|$$

## 29 Integrale mit einer Areafunktion ( $a \neq 0$ )

$$(397) \quad \int \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$(398) \quad \int x \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) dx = \left(\frac{2x^2 + a^2}{4}\right) \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{4} \cdot \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$(399) \quad \int \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \cdot \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$(400) \quad \int x \cdot \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) dx = \left(\frac{2x^2 - a^2}{4}\right) \cdot \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{4} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$(401) \quad \int \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \cdot \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a}{2} \cdot \ln|a^2 - x^2|$$

$$(402) \quad \int x \cdot \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{ax}{2} + \left(\frac{x^2 - a^2}{2}\right) \cdot \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$(403) \quad \int \operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \cdot \operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a}{2} \cdot \ln|x^2 - a^2|$$

$$(404) \quad \int x \cdot \operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{ax}{2} + \left(\frac{x^2 - a^2}{2}\right) \cdot \operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right)$$

## Anhang Teil B

### Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

#### Übersicht

<b>Tabelle 1:</b>	Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung .....	508
<b>Tabelle 2:</b>	Quantile der Standardnormalverteilung .....	510
<b>Tabelle 3:</b>	Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung .....	512
<b>Tabelle 4:</b>	Quantile der $t$ -Verteilung von „Student“ .....	514



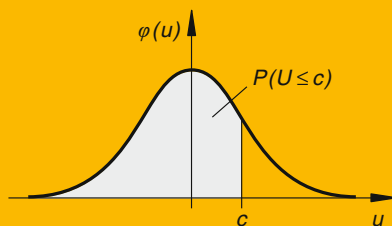


**Zahlenbeispiele**

- (1)  $\phi(1,32) = 0,9066$
- (2)  $\phi(1,855) = 0,9682$  (durch lineare Interpolation)
- (3)  $\phi(-2,36) = 1 - \phi(2,36) = 1 - 0,9909 = 0,0091$

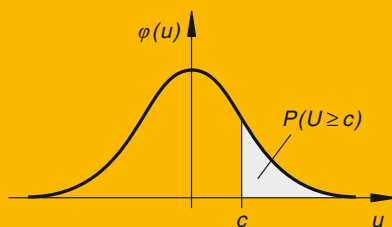
**Formeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten**

- (1) *Einseitige Abgrenzung nach oben*



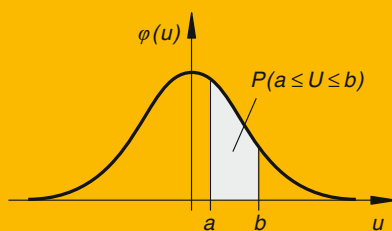
$$P(U \leq c) = \phi(c)$$

- (2) *Einseitige Abgrenzung nach unten*



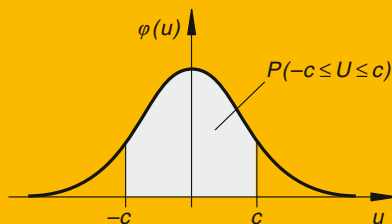
$$P(U \geq c) = 1 - P(U \leq c) = 1 - \phi(c)$$

- (3) *Zweiseitige (unsymmetrische) Abgrenzung*

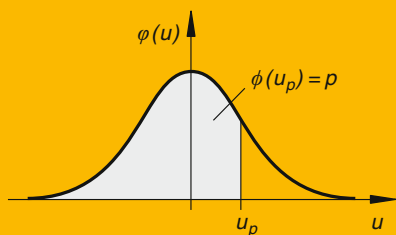


$$P(a \leq U \leq b) = \phi(b) - \phi(a)$$

- (4) *Zweiseitige (symmetrische) Abgrenzung*



$$\begin{aligned} P(-c \leq U \leq c) &= P(|U| \leq c) = \\ &= 2 \cdot \phi(c) - 1 \end{aligned}$$

**Tabelle 2:** Quantile der Standardnormalverteilung

$p$ : Vorgegebene Wahrscheinlichkeit  
( $0 < p < 1$ )

$u_p$ : Zur Wahrscheinlichkeit  $p$   
gehöriges Quantil  
(*obere Schranke*)

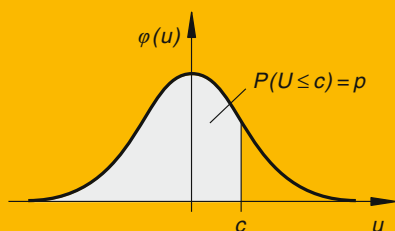
Die Tabelle enthält für spezielle Werte von  $p$  das jeweils zugehörige Quantil  $u_p$  (*einseitige Abgrenzung nach oben*).

$p$	$u_p$	$p$	$u_p$
0,90	1,282	0,1	-1,282
0,95	1,645	0,05	-1,645
0,975	1,960	0,025	-1,960
0,99	2,326	0,01	-2,326
0,995	2,576	0,005	-2,576
0,999	3,090	0,001	-3,090

*Formeln:*

$$u_{1-p} = -u_p$$

$$u_p = -u_{1-p}$$

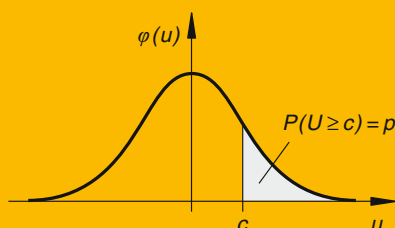
**Formeln zur Berechnung von Quantilen**(1) *Einseitige Abgrenzung nach oben*

$$P(U \leq c) = \phi(c) = p$$

$$\phi(c) = p \rightarrow c = u_p$$

Zahlenbeispiel:

$$P(U \leq c) = \phi(c) = 0,90 \rightarrow c = u_{0,90} = 1,282$$

(2) *Einseitige Abgrenzung nach unten*

$$P(U \geq c) = 1 - P(U \leq c) =$$

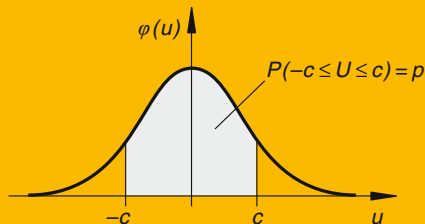
$$= 1 - \phi(c) = p$$

$$\phi(c) = 1 - p \rightarrow c = u_{1-p}$$

Zahlenbeispiel:

$$P(U \geq c) = 1 - P(U \leq c) = 1 - \phi(c) = 0,90$$

$$\phi(c) = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow c = u_{0,1} = -1,282$$

(3) *Zweiseitige (symmetrische) Abgrenzung*

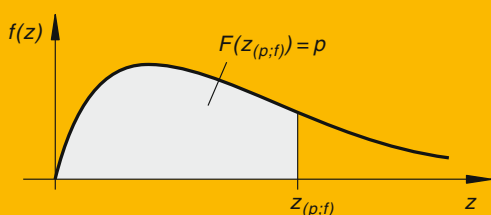
$$P(-c \leq U \leq c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = p$$

$$\phi(c) = \frac{1}{2} (1 + p) \rightarrow c = u_{(1+p)/2}$$

Zahlenbeispiel:

$$P(-c \leq U \leq c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 0,90$$

$$\phi(c) = \frac{1}{2} (1 + 0,90) = 0,95 \rightarrow c = u_{0,95} = 1,645$$

**Tabelle 3:** Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung

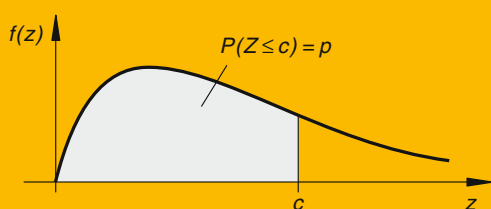
$p$ : Vorgegebene Wahrscheinlichkeit  
( $0 < p < 1$ )

$f$ : Anzahl der Freiheitsgrade

$z_{(p;f)}$ : Zur Wahrscheinlichkeit  $p$   
gehöriges Quantil bei  $f$  Freiheits-  
graden (*obere Schranke*)

Die Tabelle enthält für spezielle Werte von  $p$  das jeweils zugehörige Quantil  $z_{(p;f)}$  in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad  $f$  (*einseitige Abgrenzung nach oben*).

$f$	$p$									
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,020	0,051	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,554	0,831	1,15	1,6	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,06	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,67	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
22	8,6	9,5	11,0	12,3	14,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
24	9,9	10,9	12,4	13,8	15,7	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	43,3	45,4	48,8	51,7	55,3	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	51,2	53,5	57,2	60,4	64,3	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,2	61,8	65,6	69,1	73,3	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

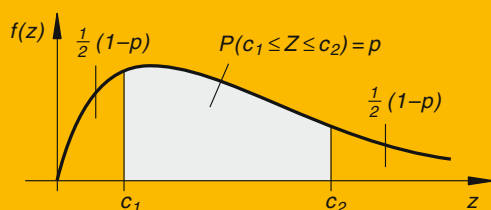
**Formeln zur Berechnung von Quantilen**(1) *Einseitige* Abgrenzung nach *oben*

$$P(Z \leq c) = F(c) = p$$

$$F(c) = p \rightarrow c = z_{(p;f)}$$

*Zahlenbeispiel* (bei  $f = 10$  Freiheitsgraden):

$$P(Z \leq c) = F(c) = 0,90 \xrightarrow{f=10} c = z_{(0,9;10)} = 15,99$$

(2) *Zweiseitige* (symmetrische) Abgrenzung

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2) = p$$

$$P(Z \leq c_1) = F(c_1) = \frac{1}{2} (1 - p)$$

$$F(c_1) = \frac{1}{2} (1 - p) \rightarrow c_1 = z_{((1-p)/2;f)}$$

$$P(Z \geq c_2) = 1 - P(Z \leq c_2) = 1 - F(c_2) = \frac{1}{2} (1 - p)$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2} (1 + p) \rightarrow c_2 = z_{((1+p)/2;f)}$$

*Zahlenbeispiel* (bei  $f = 10$  Freiheitsgraden):

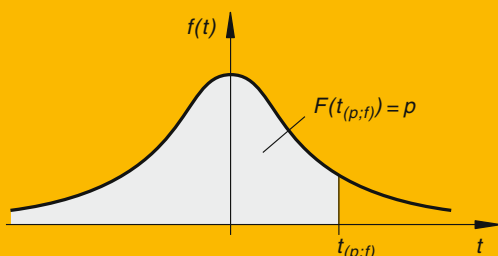
$$P(c_1 \leq Z \leq c_2) = 0,90$$

$$P(Z \leq c_1) = F(c_1) = \frac{1}{2} (1 - 0,90) = 0,05$$

$$F(c_1) = 0,05 \xrightarrow{f=10} c_1 = z_{(0,05;10)} = 3,94$$

$$P(Z \geq c_2) = 1 - P(Z \leq c_2) = 1 - F(c_2) = \frac{1}{2} (1 - 0,90) = 0,05$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2} (1 + 0,90) = 0,95 \xrightarrow{f=10} c_2 = z_{(0,95;10)} = 18,31$$

**Tabelle 4:** Quantile der  $t$ -Verteilung von „Student“

$p$ : Vorgegebene Wahrscheinlichkeit  
( $0 < p < 1$ )

$f$ : Anzahl der Freiheitsgrade

$t_{(p;f)}$ : Zur Wahrscheinlichkeit  $p$   
gehöriges Quantil bei  $f$  Freiheits-  
graden (*obere Schranke*)

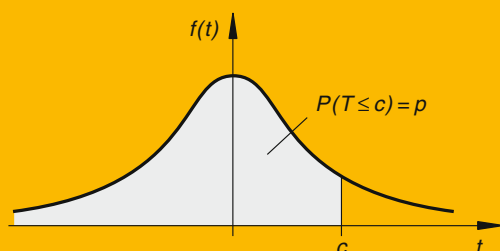
Die Tabelle enthält für spezielle Werte von  $p$  das jeweils zugehörige Quantil  $t_{(p;f)}$  in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad  $f$  (*einseitige* Abgrenzung nach *oben*).

$f$	$p$				
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,707	31,820	63,654
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

**Formeln:**

$$t_{(1-p;f)} = -t_{(p;f)}$$

$$t_{(p;f)} = -t_{(1-p;f)}$$

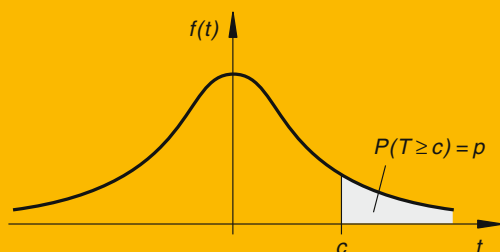
**Formeln zur Berechnung von Quantilen**(1) *Einseitige Abgrenzung nach oben*

$$P(T \leq c) = F(c) = p$$

$$F(c) = p \rightarrow c = t_{(p;f)}$$

Zahlenbeispiel (bei  $f = 10$  Freiheitsgraden):

$$P(T \leq c) = F(c) = 0,90 \xrightarrow{f=10} c = t_{(0,90;10)} = 1,372$$

(2) *Einseitige Abgrenzung nach unten*

$$P(T \geq c) = 1 - P(T \leq c) =$$

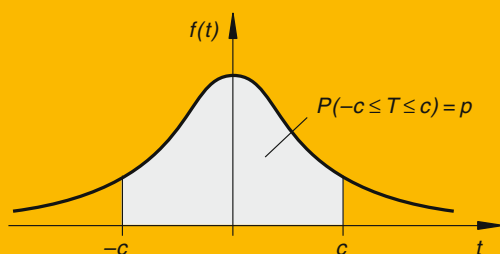
$$= 1 - F(c) = p$$

$$F(c) = 1 - p \rightarrow c = t_{(1-p;f)}$$

Zahlenbeispiel (bei  $f = 10$  Freiheitsgraden):

$$P(T \geq c) = 1 - P(T \leq c) = 1 - F(c) = 0,90$$

$$F(c) = 1 - 0,90 = 0,10 \xrightarrow{f=10} c = t_{(0,10;10)} = -t_{(0,90;10)} = -1,372$$

(3) *Zweiseitige (symmetrische) Abgrenzung*

$$P(-c \leq T \leq c) = 2 \cdot F(c) - 1 = p$$

$$F(c) = \frac{1}{2} (1 + p) \rightarrow c = t_{((1+p)/2;f)}$$

Zahlenbeispiel (bei  $f = 10$  Freiheitsgraden):

$$P(-c \leq T \leq c) = 2 \cdot F(c) - 1 = 0,90$$

$$F(c) = \frac{1}{2} (1 + 0,90) = 0,95 \xrightarrow{f=10} c = t_{(0,95;10)} = 1,812$$

# Sachwortverzeichnis

## A

- abgeschlossenes Intervall 8
- abhängige Stichproben 455
  - Variable 67, 239
  - Veränderliche 67, 239
- Abklingfunktion 104
- Abklingkonstante 288, 290f.
- Ableitung 129
  - , äußere 133
  - , höhere 130
  - , implizite 136
  - , innere 133
  - , logarithmische 135
  - , partielle 243 ff.
  - , verallgemeinerte 323
- Ableitung der elementaren Funktionen (Tabelle) 131
  - der Umkehrfunktion 135
  - einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve) 136
  - einer in Polarkoordinaten dargestellten Kurve 137
  - einer Vektorfunktion 364
- Ableitungsfunktion 129
- Ableitungsregeln 132 ff.
  - für Vektorfunktionen 364f.
- Ableitungssätze der Fourier-Transformation 327f.
  - der Laplace-Transformation 343 ff.
- absolute Häufigkeit 402
  - – eines Stichprobenwertes 432
- absolut konvergente Reihe 175, 178
- Abspaltung eines Linearfaktors 78
- Abstand einer Geraden von einer Ebene 63
  - eines Punktes von einer Ebene 62
  - eines Punktes von einer Geraden 58, 76
  - zweier paralleler Ebenen 64
  - zweier paralleler Geraden 58
  - zweier windschiefer Geraden 59
- Abszisse eines Punktes 41
- Achsenabschnitte 75f.
- Achsenabschnittsform einer Geraden 76
- Addition komplexer Zahlen 227
  - von Brüchen 9
  - von Matrizen 199
  - von Vektoren 50, 194
  - von Zahlen 6
- Additionssatz für beliebige Ereignisse 403
  - für Mittelwerte 425f.
  - für sich gegenseitig ausschließende Ereignisse 403
  - für Varianzen 425f.
- Additionssätze für Linearkombinationen von Zufallsvariablen 425
- Additionstheoreme der Areafunktionen 114
  - der Hyperbelfunktionen 235
  - der trigonometrischen Funktionen 94, 235
- Adjunkte 202, 207
- Ähnlichkeitssatz der Fourier-Transformation 324f.
  - der Laplace-Transformation 341
- Ähnlichkeitstransformation 324, 341
- Algebra, Fundamentalsatz 230
  - , lineare 196 ff.
- algebraische Form einer komplexen Zahl 224
  - Gleichungen  $n$ -ten Grades 17 ff.
- algebraisches Komplement 202, 207
- Algorithmus, Gaußscher 214f.
- allgemeine Binomische Reihe 183
  - Exponentialfunktion 103
  - Kosinusfunktion 97
  - Logarithmusfunktion 106
  - Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung 270
  - Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung 280f.
  - Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung 293
  - Lösung einer Differentialgleichung 266
  - Sinusfunktion 97
- allgemeines Kriterium für einen relativen Extremwert 142
- Alternativhypothese 451
- Amplitude 98
- Amplitudendichte, spektrale 314
- analytische Darstellung einer Funktion 67, 239



Anfangsbedingungen 266  
Anfangsglied einer Reihe 16  
Anfangswerte 266  
Anfangswertproblem 266  
–, lineares 355 ff.  
Anpassungstest 466  
antiparallele Vektoren 47  
Anwendungen der Differentialrechnung 137 ff.  
– der Integralrechnung 165 ff.  
– der Vektorrechnung 56 ff.  
aperiodischer Grenzfall 289  
aperiodisches Verhalten 289  
äquatoriales Flächenmoment 169  
Äquipotentialflächen 373  
äquivalente Umformungen einer Gleichung 21  
– – einer Ungleichung 25  
– – eines linearen Gleichungssystems 214  
Arbeit einer konstanten Kraft 56  
– einer ortsabhängigen Kraft 165  
– eines Kraftfeldes 391  
Arbeitsintegral 165, 391  
Arbeitspunkt 138  
Archimedische Spirale 128  
Areafunktionen 112 ff.  
– mit imaginärem Argument 236  
Areakosinus hyperbolicus 112  
Areakotangens hyperbolicus 112 f.  
Areasinus hyperbolicus 112  
Areatangens hyperbolicus 112 f.  
arithmetische Reihe 16  
arithmetischer Mittelwert 300  
arithmetisches Mittel 300  
Arkusfunktionen 100 ff.  
– mit imaginärem Argument 236  
Arkuskosinusfunktion 101  
Arkuskotangensfunktion 101  
Arkussinusfunktion 100  
Arkustangensfunktion 101  
Astroide 125  
Asymptoten einer gebrochenrationalen Funktion 87  
– einer Hyperbel 118, 120  
Aufsuchen einer partikulären Lösung 271  
Ausblenden einer Funktion 318 ff.  
Ausgleichsgerade 308 f.  
Ausgleichskurven 307 ff.

Ausgleichsparabel 310  
Ausgleichsrechnung 307 ff.  
äußere Ableitung 133  
– Funktion 133  
– Integration 254  
äußeres Integral 254, 256  
– Produkt 53 ff.  
Auswertung einer Messreihe 300 ff.  
axiales Flächenmoment 169  
axialsymmetrisches Vektorfeld 374

## B

Basis 10, 12, 195  
Basisfunktionen einer Differentialgleichung 280, 292  
Basislösungen einer Differentialgleichung 280, 292  
Basisvektoren 48, 195  
Baumdiagramm 405  
Bayes'sche Formel 406  
bedingte Wahrscheinlichkeit 404  
Beobachtungsfehler 299  
Berechnung der Fourier-Koeffizienten 187, 190  
– eines bestimmten Integrals 145  
Bereich, einfachzusammenhängender 390 f.  
Bereichsintegral, 2-dimensionales 253  
–, 3-dimensionales 259  
Bernoulli-de l'Hospital'sche Regel 73  
Bernoulli-Experiment 412  
Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung 137  
Beschleunigungsvektor 365  
bestimmt divergente Reihe 175  
bestimmtes Integral 144 ff.  
Betrag einer komplexen Zahl 224  
– einer reellen Zahl 6  
– eines Vektors 49, 195  
Beziehungen zwischen den Areafunktionen 113 f.  
– zwischen den Arkusfunktionen 102  
– zwischen den Hyperbelfunktionen 108 ff.  
– zwischen den trigonometrischen Funktionen 93 ff.  
Bildbereich 312, 339  
Bildfunktion 311, 339  
Bildungsgesetz einer Reihe 16

binärer Logarithmus 13  
 binäres System 7  
 Binärlogarithmus 107  
 Binomialkoeffizient 14  
 Binomialverteilung 412 ff.  
 binomische Formeln 15  
 binomischer Lehrsatz 14 f.  
 bi-quadratische Gleichungen 20  
 Bogenlänge einer ebenen Kurve 169 f., 366  
 – einer Kurve 366  
 – einer Raumkurve 366  
 Bogenmaß 90  
 Breitenkoordinate 45, 385  
 Brennpunkt einer Parabel 121  
 Brennpunkte einer Ellipse 116  
 – einer Hyperbel 118  
 Brennweite einer Ellipse 116  
 – einer Hyperbel 118  
 – einer Parabel 121  
 Briggscher Logarithmus 13, 107  
 Bruch 8  
 Bruchrechnung 8 ff.

## C

Cardanische Lösungsformel 19  
 cartesisches Blatt 127  
 charakteristische Gleichung einer Differen-  
 tialgleichung 281, 293  
 – – einer Matrix 222  
 charakteristische Matrix 221  
 charakteristisches Polynom einer Matrix 222  
 Chi-Quadrat-Test 466 ff.  
 Chi-Quadrat-Verteilung 427 f.  
 Cramersche Regel 217

## D

Dämpfungsfaktor 288, 290 f.  
 Dämpfungssatz der Fourier-Transformation  
 326  
 – der Laplace-Transformation 343  
 Darstellung einer Funktion als Fläche im  
 Raum 240  
 Darstellungsformen einer Funktion 67 f.,  
 239 f.  
 – einer komplexen Zahl 224 ff.  
 Definitionsbereich einer Funktion 67, 239  
 Definitionslücke 86

dekadischer Logarithmus 13, 107  
 dekadisches System 7  
 Deltafunktion 321 f.  
 de Morgansche Regeln 402  
 Determinante, dreireihige 206  
 –, gestürzte 208  
 –,  $n$ -reihige 207  
 –, Wronski-Determinante 280, 292  
 –, zweireihige 205  
 Determinante einer komplexen Matrix 219  
 – einer reellen Matrix 205, 207  
 Determinanten 205 ff.  
 –, elementare Umformungen 210  
 –, Multiplikationstheorem 209  
 –, Rechenregeln 208 f.  
 Dezimalbruch 4  
 Dezimalsystem 7  
 Dezimalzahl 4  
 $\delta$ -Funktion 321 f.  
 Diagonalmatrix 198, 223  
 Dichtefunktion 409  
 – der Standardnormalverteilung 419  
 – einer Chi-Quadrat-Verteilung 427  
 – einer Exponentialverteilung 422  
 – einer Normalverteilung 418  
 – einer  $t$ -Verteilung 429  
 Differential einer Funktion 130  
 –, totales 247 f.  
 –, vollständiges 247 f.  
 Differentialgleichung 266  
 –, allgemeine Lösung 266  
 –, Lösung 266  
 –, partikuläre Lösung 266  
 –, singuläre Lösung 266  
 –, spezielle Lösung 266  
 Differentialgleichung einer elektrischen  
 Schwingung 291  
 – einer erzwungenen Schwingung 290  
 – einer freien gedämpften Schwingung  
 288  
 – einer freien ungedämpften Schwingung  
 287  
 Differentialgleichungen 266 ff.  
 – 1. Ordnung 267 ff.  
 – 1. Ordnung mit trennbaren Variablen 267  
 – 2. Ordnung 279 ff.  
 –  $n$ -ter Ordnung 266, 292 ff.  
 Differentialoperator 130  
 –, partieller 244

- Differentialquotient 129 f.
    - , partieller 244
  - Differentialrechnung 129 ff.
    - , Anwendungen 137 ff.
  - Differentiation, gewöhnliche 129 f.
    - , implizite 136
    - , logarithmische 135
    - , partielle 243 f.
  - Differentiation einer Vektorfunktion 364
    - eines Vektors nach einem Parameter 364 f.
    - nach einem Parameter 246
  - Differentiationssätze der Fourier-Transformation 327 f.
    - der Laplace-Transformation 343 ff.
  - Differenzenquotient 129
  - Differenzenschema 83
  - Differenzentest 455 ff.
    - bei bekannten Varianzen 457 ff.
    - bei gleicher (aber unbekannter) Varianz 459 f.
    - für Mittelwerte bei abhängigen Stichproben 456 f.
    - für Mittelwerte bei unabhängigen Stichproben 457 ff.
  - Differenzierbarkeit einer Funktion 129 f.
  - Differenzmenge 2
  - Differenzvektor 50
  - Diracsche Deltafunktion 321 f.
  - Dirac-Stoß 321 f.
  - diskrete Verteilung 408
  - diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen 412 ff.
    - –, Approximationen 417
  - diskrete Zufallsvariable 407
  - Diskriminante 18
  - divergente Folge 71
    - Reihe 175
  - Divergenz eines Vektorfeldes 377
    - –, Rechenregeln 377
  - Divergenz in kartesischen Koordinaten 377
    - in Kugelkoordinaten 387
    - in Polarkoordinaten 382
    - in Zylinderkoordinaten 384
  - Dividend 6
  - dividierte Differenzen 84
  - Division komplexer Zahlen 228 f.
    - von Brüchen 10
    - von Zahlen 6
  - Divisor 6
  - Doppelbruch 10
  - Doppelintegral 253
    - in kartesischen Koordinaten 254 f.
    - in Polarkoordinaten 256
  - Doppelintegrale 253 ff.
  - doppelte Nullstelle 68
  - Drehsinn eines Winkels 91
  - Drehstreckung 128 f., 228
  - Drehung eines kartesischen Koordinatensystems 43
  - dreidimensionales Bereichsintegral 259
  - Dreieck 28 ff.
    - , gleichschenkliges 29
    - , gleichseitiges 30
    - , Inkreis 29
    - , rechtwinkliges 29
    - , Umkreis 29
  - Dreiecksimpuls 352
  - Dreieckskurve 191 f., 351
  - Dreiecksmatrix 198, 223
  - Dreiecksungleichung 6
  - Dreifachintegral 259
    - in kartesischen Koordinaten 260 f.
    - in Kugelkoordinaten 262
    - in Zylinderkoordinaten 262
  - Dreifachintegrale 259 ff.
  - Drei-Punkte-Form einer Ebene 61
  - dreireihige Determinante 206
  - dreiseitige Pyramide 35
  - Dualitätsprinzip der Fourier-Transformation 330
  - Dualsystem 7
  - Durchschnitt von Ereignissen 401
    - von Mengen 2
- E**
- ebene Kurven 363 ff.
  - Ebene 241
    - , Abstand paralleler Ebenen 64
    - , Abstand von einem Punkt 62
    - , Abstand von einer Geraden 63
    - , Determinantenschreibweise 62
    - , Drei-Punkte-Form 61
    - , Koordinatendarstellung 62
    - , Normalenvektor 62
    - , Parameterdarstellung 60 f.
    - , Punkt-Richtungs-Form 60
    - , Richtungsvektoren 60

- , Schnittgerade zweier Ebenen 66
- , Schnittpunkt mit einer Geraden 65
- , Schnittwinkel mit einer Geraden 65
- , Schnittwinkel zweier Ebenen 66
- , vektorielle Darstellung 60 ff.
- Ebene senkrecht zu einem Vektor 62
- ebenes Koordinatensystem 41 f.
- Vektorfeld 373
- echt gebrochenrationale Funktion 85
- e-Funktion 103, 235
- Eigenkreisfrequenz 288, 290 f.
- Eigenvektoren einer quadratischen Matrix 221 f.
- spezieller  $n$ -reihiger Matrizen 223
- Eigenwerte einer quadratischen Matrix 221 f.
- spezieller  $n$ -reihiger Matrizen 223
- Eigenwertproblem 221 f.
- einfachzusammenhängender Bereich 390
- Einheitskreis 91
- Einheitsmatrix 198
- Einheitssprung 318
- Einheitsvektor 46, 48, 195
- Einheitswurzeln 231
- Einschwingphase 290
- Einweggleichrichtung 193, 353
- elektrische Schwingungen in einem Reihenschwingkreis 291 f.
- elementare Umformungen einer Matrix 203
- – einer  $n$ -reihigen Determinante 210
- Elementarereignis 400
- Elemente einer Determinante 205
- einer Matrix 196
- einer Menge 1
- Ellipse 33, 116 f.
- , Brennpunkte 116
- , Gleichung in Polarkoordinaten 117
- , große Achse 116
- , Hauptachse 116
- , Hauptform 116
- , kleine Achse 116
- , Mittelpunktsgleichung 116
- , Nebenachse 116
- , Parameterdarstellung 117
- , Ursprungsgleichung 116
- Ellipsoid 38, 243
- elliptische Krümmung 39
- empirische Varianz 438
- empirischer Wahrscheinlichkeitswert 403
- Endglied einer Reihe 16
- endliche Intervalle 8
- Menge 1
- Reihe 16
- Epizykloide 123 f.
- Ereignis 400
- , komplementäres 401
- , sicheres 402
- , zusammengesetztes 401
- Ereignisbaum 405
- Ereignisfeld 400
- Ereignisraum 400
- Ereignisse, Additionssatz 403
- , Durchschnitt 401
- , Multiplikationssatz 404
- , Produkt 401
- , stochastisch unabhängige 405
- , Summe 401
- , Vereinigung 401
- , Verknüpfungen 401
- Ergebnismenge eines Zufallsexperiments 400
- Ergiebigkeit des Feldvektors 392
- Erwartungswert 299
- einer Funktion 411
- einer Zufallsvariablen 410
- Erweitern eines Bruches 9
- erweiterte Koeffizientenmatrix 211
- erzwungene Schwingung 290 f.
- Euklid, Satz des Euklid 27
- Euler, Streckenzugverfahren 273 f.
- Eulersche Formeln 226, 235
- Zahl 103
- Euler-Venn-Diagramm 401
- Evolute 141
- Evolvente 141
- exakte Differentialgleichung 1. Ordnung 269
- explizite Funktion 67, 239
- Exponent 10
- Exponentialansatz 293
- Exponentialform einer komplexen Zahl 225
- Exponentialfunktionen 103 ff., 235
- Exponentialverteilung 422 f.
- exponentielle Fourier-Transformation 312
- –, Tabelle 333 f.
- Extremwertaufgabe 251 f.
- Extremwerte, relative 141 f., 250 f.

**F**

- Faktor 6
  - , integrierender 269
- Faktorregel der Differentialrechnung 132
  - der Integralrechnung 146
- Falk-Schema 200
- Faltung 329, 347
  - , einseitige 347
  - , zweiseitige 329
- Faltungsintegral der Fourier-Transformation 329
  - der Laplace-Transformation 347
- Faltungsprodukt der Fourier-Transformation 329
  - der Laplace-Transformation 347
- Faltungssatz der Fourier-Transformation 329 f.
  - der Laplace-Transformation 347
- Fass 39
- Feder-Masse-Schwinger 287
- Federpendel 287
- Fehler 1. Art 444
  - , größtmöglicher 305
  - , maximaler 305
- Fehlerintegral, Gaußsches 420
- Fehlerfortpflanzungsgesetz, Gaußsches 303 ff.
  - , lineares 305 f.
- Fehlerrechnung 299 ff.
- Feldlinien 374
- Flächen im Raum 369 ff.
- Flächendifferential 254
- Flächenelement 254, 371
  - , orientiertes 392
- Flächenelement auf dem Zylindermantel 383
  - auf der Kugeloberfläche 386
- Flächenfunktion 147
- flächenhafter Integrationsbereich 254
- Flächeninhalt 166 ff., 256 ff.
- Flächenintegral eines Vektorfeldes 392
- Flächenkurve 370
- Flächenmoment, äquatoriales 169
  - , axiales 169
  - , polares 169
- Flächenmoment 2. Grades 169, 258 f.
- Flächennormale 370
- Flächenparameter 369
- Flächenträgheitsmomente 169, 258 f.
- Fluss eines Feldvektors 392
  - eines homogenen Vektorfeldes 393
  - eines Vektorfeldes durch eine orientierte Fläche 392
  - eines Zentralfeldes 393
  - eines zylindersymmetrischen Vektorfeldes 393
- Flussintegral des Vektorfeldes 392
- Folge, divergente 71
  - , Grenzwert 71
  - , konvergente 71
  - , Zahlenfolge 71
- Formel von Moivre 111, 230
- Formeln für Mehrfachprodukte von Vektoren 56
- Fourier-Integral 311
- Fourier-Koeffizienten 187, 189 f.
- Fourier-Kosinus-Transformation 316
  - , Tabelle 337 f.
- Fourier-Kosinus-Transformierte 316
- Fourier-Reihen 187 ff.
  - , Tabelle 191 ff.
- Fourier-Sinus-Transformation 316
  - , Tabelle 335 f.
- Fourier-Sinus-Transformierte 316
- Fourier-Transformationen 311 ff.
  - , exponentielle 312
  - , exponentielle (Tabelle) 333 ff.
  - , Fourier-Kosinus-Transformation 316
  - , Fourier-Kosinus-Transformation (Tabelle) 337 f.
  - , Fourier-Sinus-Transformation 316
  - , Fourier-Sinus-Transformation (Tabelle) 335 f.
  - , inverse 312
  - , spezielle 316 f.
  - , Tabellen 333 ff.
- Fourier-Transformationsoperator 311
- Fourier-Transformierte 311
  - , inverse 312
  - , Polardarstellung 314
  - , verallgemeinerte 323
- Fourier-Transformierte des Faltungsproduktes 330
  - einer Linearkombination 324
- Fourier-Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung 189
- freie gedämpfte Schwingung 288 f.
  - ungedämpfte Schwingung 287

- freier Vektor 46
- Freiheitsgrad 427, 429
- Frequenz 98
- Frequenzgang 290
- Frequenzspektrum 314
- Frequenzverschiebungssatz der Fourier-Transformation 326
- Fundamentalebasis einer Differentialgleichung 280, 292
- Fundamentalsatz der Algebra 230
  - der Differential- und Integralrechnung 147
- Funktion 67, 239
  - , Abklingfunktion 104
  - , analytische Darstellung 67, 239
  - , Areafunktionen 112 ff.
  - , Areakosinus hyperbolicus 112
  - , Areakotangens hyperbolicus 112 f.
  - , Areasinus hyperbolicus 112
  - , Areatangens hyperbolicus 112 f.
  - , Arkusfunktionen 100 ff.
  - , Arkuskosinusfunktion 101
  - , Arkuskotangensfunktion 101 f.
  - , Arkussinusfunktion 100 f.
  - , Arkustangensfunktion 101 f.
  - , äußere 133
  - , Darstellung als Fläche im Raum 240
  - , Darstellungsformen 67 f., 239 f.
  - , Definitionsbereich 67, 239
  - , Deltafunktion 321 f.
  - ,  $\delta$ -Funktion 321 f.
  - , differenzierbare 129 f.
  - , Diracsche Deltafunktion 321 f.
  - , e-Funktion 103
  - , echt gebrochenrationale 85
  - , explizite 67, 239
  - , Exponentialfunktionen 103 ff.
  - , Flächenfunktion 147
  - , Gammafunktion 428
  - , ganzrationale 75 ff.
  - , Gaußfunktion 105
  - , gebrochenrationale 85 ff.
  - , gerade 69
  - , Graph 68
  - , graphische Darstellung 68, 240
  - , Grenzwert 72
  - , Heaviside-Funktion 318
  - , Hyperbelfunktionen 107 ff.
  - , implizite 67, 239
  - , Impulsfunktion 321 f.
  - , innere 133
  - , Integrandfunktion 147
  - , inverse 70
  - , komplexwertige 232
  - , Kosinusfunktion 92
  - , Kosinus hyperbolicus 107
  - , Kotangensfunktion 93
  - , Kotangens hyperbolicus 108
  - , lineare 75 ff.
  - , linearisierte 138, 249 f.
  - , Linearisierung 138, 249 f.
  - , Logarithmusfunktionen 106 f.
  - , Mittelwerte 166
  - , monotone 69
  - , Näherungspolynome 185 f.
  - , Nullstellen 68
  - , Parameterdarstellung 67
  - , periodische 70
  - , Polynomfunktionen 75 ff.
  - , Potenzfunktionen 87 ff.
  - , punktsymmetrische 69
  - , quadratische 77 ff.
  - , Sättigungsfunktion 104 f.
  - , Schaubild 68
  - , Sigmafunktion 318
  - , Sinusfunktion 92
  - , Sinus hyperbolicus 107
  - ,  $\sigma$ -Funktion 318
  - , spiegelsymmetrische 69
  - , Sprungfunktion 318
  - , Stammfunktion 145, 147
  - , stetig differenzierbare 129
  - , stetige 74
  - , Stetigkeit 74
  - , Symmetrie 69
  - , Tangensfunktion 93
  - , Tangens hyperbolicus 108
  - , trigonometrische 90 ff.
  - , Umkehrfunktion 70
  - , unecht gebrochenrationale 85
  - , ungerade 69
  - , verallgemeinerte 321
  - , verkettete 133
  - , Wachstumsfunktion 105
  - , Wertebereich 67, 239
  - , Wertevorrat 67, 239
  - , Wurzelfunktionen 89
  - , zusammengesetzte 133

Funktionen 67 ff., 239 ff.  
 Funktionsgraph 68  
 Funktionskurve 68  
 Funktionswert 67, 239

## G

Gamma-Funktion 428  
 ganze Zahlen 4  
 ganzrationale Funktionen 75 ff.  
 Gauß-Funktion 105  
 Gauß-Jordan-Verfahren 202  
 Gaußsche Glockenkurve 105, 418 f.  
 – Normalverteilung 299 f., 418 ff.  
 – Zahlenebene 224  
 Gaußscher Algorithmus 214 f.  
 Gaußscher Integralsatz 395 f.  
 – – im Raum 395  
 – – in der Ebene 396  
 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz 303 ff.  
 – Fehlerintegral 420  
 – Prinzip der kleinsten Quadrate 307  
 gebrochenrationale Funktionen 85 ff.  
 – –, Asymptote im Unendlichen 87  
 – –, Nullstellen 86  
 – –, Pole 86  
 – –, Unendlichkeitsstellen 86  
 gebundener Vektor 46  
 gedämpfte Kosinusschwingung 354  
 – Sinusschwingung 353  
 Gegenvektor 47  
 gekoppelte Differentialgleichungen 295  
 gemeinsame Verteilung zweier Zufallsvariablen 423  
 gemischtes Produkt 55  
 geometrische Reihe 16, 178  
 gerade Funktion 69  
 Gerade 75  
 – Abstand paralleler Geraden 58  
 – Abstand von einem Punkt 58, 76  
 – Abstand von einer Ebene 63  
 – Abstand windschiefer Geraden 59  
 – Achsenabschnitte 75 f.  
 – Achsenabschnittsform 76  
 – Determinantenschreibweise 57  
 – Hauptform 75  
 – Hessesche Normalform 76  
 – Parameterdarstellung 57  
 – Punkt-Richtungs-Form 57  
 – Punkt-Steigungs-Form 75  
 – Richtungsvektor 57  
 – Schnittpunkt mit einer Ebene 65  
 – Schnittpunkt zweier Geraden 60  
 – Schnittwinkel mit einer Ebene 65  
 – Schnittwinkel zweier Geraden 60, 77  
 – Steigung 75  
 – Steigungswinkel 75  
 – vektorielle Darstellung 57 ff.  
 – Zwei-Punkte-Form 57, 76  
 Geraden 57 ff., 75 ff.  
 – parallele 58  
 – windschiefe 59  
 gerader Kreiskegel 36  
 – Kreiskegelstumpf 37  
 – Kreiszylinder 36  
 gerades Prisma 34  
 Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung 137  
 Geschwindigkeitsvektor 365  
 gestaffeltes lineares Gleichungssystem 214  
 gewöhnliche Zykloide 123  
 Gleichheit von Mengen 1  
 – von Vektoren 47  
 – zweier komplexer Zahlen 225  
 gleichschenkliges Dreieck 29  
 gleichseitige Hyperbel 120  
 – Pyramide 34  
 gleichseitiges Dreieck 30  
 Gleichung, algebraische 17 ff.  
 – bi-quadratische 20  
 – kubische 18 ff.  
 – lineare 18  
 – quadratische 18  
 – trigonometrische 22  
 – Wurzelgleichung 21  
 Gleichung einer Ellipse in Polarkoordinaten 117  
 – einer gedrehten Hyperbel 120  
 – einer Hyperbel in Polarkoordinaten 119  
 – einer Parabel in Polarkoordinaten 122  
 – eines Kegelschnittes 114  
 – eines Kreises in Polarkoordinaten 115  
 Gleichungen mit einer Unbekannten 17 ff.  
 Gleichungssysteme, lineare 211 ff.  
 Glockenkurve, Gaußsche 418 f.  
 Gradient eines Skalarfeldes 375  
 – – –, Rechenregeln 376



- Gradient in kartesischen Koordinaten 375
    - in Kugelkoordinaten 387
    - in Polarkoordinaten 381
    - in Zylinderkoordinaten 384
  - Gradientenfeld 379
  - Gradmaß 90
  - graphische Darstellung einer Funktion 68, 240
  - graphisches Lösungsverfahren für Gleichungen 22
  - Grenzwert einer Folge 71
  - Grenzwert einer Funktion 72
    - –, Rechenregeln 72f.
  - Grenzwertregel von Bernoulli und l'Hospital 73
  - Grenzwertsätze der Laplace-Transformation 348
  - große Achse einer Ellipse 116
    - –, einer Hyperbel 118
  - größter gemeinsamer Teiler 3
  - größtmöglicher Fehler 305
  - Grundgesamtheit 431
  - Grundintegrale (Tabelle) 149
  - Grundrechenarten 6
    - für komplexe Zahlen 227ff.
  - Grundzahl 10
  - gruppierte Stichprobe 434
    - –, Häufigkeitsfunktion 435
    - –, Histogramm 435
    - –, Kennwerte 440
    - –, Stabdiagramm 435
    - –, Staffelpbild 435
    - –, Treppenfunktion 436
    - –, Verteilungsfunktion 436
    - –, Verteilungstabelle 435
  - Guldinsche Regeln 40f.
- H**
- halboffenes Intervall 8
  - harmonische Schwingung 98f., 236
  - Häufigkeit, absolute 402, 432
    - , relative 402, 432
  - Häufigkeitsfunktion einer gruppierten Stichprobe 435
    - einer Stichprobe 432
  - Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe 432
  - Hauptachse einer Ellipse 116
  - Hauptdiagonale einer Determinante 205
    - einer Matrix 197
  - Hauptdiagonalprodukt 206
  - Hauptform einer Ellipse 116
    - einer Geraden 75
    - einer Hyperbel 118
    - einer Parabel 77, 121
    - eines Kreises 115
  - Hauptnenner 9
  - Hauptnormaleneinheitsvektor 367
  - Hauptwert des natürlichen Logarithmus 232
    - eines Winkels 42, 225
  - Heaviside-Funktion 318
  - hermitesche Matrix 220, 223
  - Herzkurve 125
  - Hessesche Normalform einer Geraden 76
  - Histogramm 435
  - Hochpunkt 141
  - Hochzahl 10
  - Höhenkoordinate 44, 382
  - Höhenliniendiagramm 240
  - Höhensatz 26
  - höhere Ableitungen 130
    - –, partielle 245
  - homogenes lineares Gleichungssystem 211
    - Vektorfeld 374
  - Horner-Schema 79
  - Hüllenintegral 392
  - Hyperbel 120ff.
    - , Asymptoten 118, 120
    - , Brennpunkte 118
    - , gedrehte 120
    - , gleichseitige 120
    - , Gleichung in Polarkoordinaten 119
    - , große Achse 118
    - , Hauptform 118
    - , imaginäre Achse 118
    - , kleine Achse 118
    - , Mittelpunktsleichung 118
    - , Parameterdarstellung 120
    - , rechtwinklige 120
    - , reelle Achse 118
    - , Scheitelpunkte 118
    - , Ursprungsgleichung 118
  - Hyperbelfunktionen 107ff., 229, 234
  - hyperbolischer Pythagoras 108
  - hypergeometrische Verteilung 414f.
  - Hypothese 451
    - , Alternativhypothese 451



- , Nullhypothese 451
- , statistische 451
- Hypozykloide 124

## I

- imaginäre Achse 224
  - – einer Hyperbel 118
- imaginäre Einheit 224
  - Zahl 224
- Imaginärteil einer komplexen Matrix 218
  - einer komplexen Zahl 224
- implizite Differentiation 136
  - – unter Verwendung der Kettenregel 136
  - – unter Verwendung partieller Ableitungen 136
- implizite Funktion 67, 239
- Impulsfunktion 321 f.
- inhomogenes lineares Gleichungssystem 211
- Inkreis eines Dreiecks 29
- innere Ableitung 133
  - Funktion 133
  - Integration 254
- inneres Integral 254, 256
  - Produkt 51 f.
- Integrabilitätsbedingung 269
  - für ein ebenes Vektorfeld 389
  - für ein räumliches Vektorfeld 390
- Integral 144 ff.
  - , Arbeitsintegral 165, 391
  - , äußeres 254, 256
  - , bestimmtes 144 ff.
  - , Doppelintegral 253
  - , Dreifachintegral 259
  - , Flächenintegral 392
  - , Fourier-Integral 311
  - , Hüllenintegral 392
  - , inneres 254, 256
  - , Laplace-Integral 339
  - , Mehrfachintegral 253 ff.
  - , Oberflächenintegral 392
  - , unbestimmtes 147 ff.
  - , uneigentliches 164 f.
- Integralrechnung 144 ff.
- Integralsatz, Gaußscher 395 f.
  - , Stokes'scher 396
- Integrationssätze der Fourier-Transformation 329
  - der Laplace-Transformation 345 f.
- Integraltafel 470
- Integrand 145, 254, 260
- Integrandfunktion 145, 254, 260
- Integration, bestimmte 144 ff.
  - , partielle 153
  - , Produktintegration 153
  - , unbestimmte 148
- Integration der Bewegungsgleichung 165
  - durch Potenzreihenentwicklung des Integranden 158
  - durch Substitution 150 ff.
  - einer gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden 154 ff.
  - einer homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung 270
  - einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung 280 f.
  - einer homogenen linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung 292 f.
  - einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung 270 f.
  - einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung 281 f.
  - einer inhomogenen linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung 294
- Integrationsgrenzen 145
- Integrationsmethoden 150 ff.
- Integrationsregeln 146
- Integrationsvariable 145, 254, 260
- integrierender Faktor 269
- Interpolationsformel von Lagrange 81 f.
  - von Newton 83 f.
- Interpolationspolynome 81 ff.
- Intervall 8
  - , abgeschlossenes 8
  - , endliches 8
  - , halboffenes 8
  - , offenes 8
  - , unendliches 8
- Intervallschätzungen 441, 444 ff.
- inverse Fourier-Transformation 312
  - Fourier-Transformierte 312
  - Funktion 70
  - Laplace-Transformation 340
  - Laplace-Transformierte 340
  - Matrix 201 f.
- inverser Vektor 47
- Inversion einer komplexen Zahl 233

– einer Ortskurve 233  
 Inversionsregeln für Ortskurven 233  
 irrationale Zahl 4  
 Irrtumswahrscheinlichkeit 444

## K

Kalotte 38  
 Kardioiden 125  
 kartesische Form einer komplexen Zahl 224  
 – Koordinaten 41, 44  
 kartesischer Normalbereich 254, 260  
 Kathetensatz 27  
 Kegelschnitte 114 ff.  
 Kehrmatrix 201  
 Kehrwert einer Zahl 8  
 Keil 36  
 Kennkreisfrequenz 288, 291  
 Kennwerte der Standardnormalverteilung 419  
 – einer Binomialverteilung 413  
 – einer Chi-Quadrat-Verteilung 427  
 – einer Exponentialverteilung 422  
 – einer hypergeometrischen Verteilung 415  
 – einer Normalverteilung 418  
 – einer Poisson-Verteilung 416  
 – einer Stichprobe 437 f.  
 – einer  $t$ -Verteilung 429  
 – einer Verteilung 410 ff.  
 Kettenlinie 105  
 Kettenregel 133 f.  
 –, verallgemeinerte 246  
 Kippschwingung 192, 352  
 Klasse 434  
 Klassenhäufigkeit 434  
 Klassenmitte 434  
 Kleeblatt 127  
 kleine Achse einer Ellipse 116  
 – – einer Hyperbel 118  
 kleinstes gemeinsames Vielfaches 3  
 Koeffizientenmatrix 211, 296  
 kollineare Vektoren 47, 55  
 Kombinationen 399  
 – mit Wiederholung 399  
 – ohne Wiederholung 399  
 Kombinatorik 398 ff.  
 komplanare Vektoren 56

komplementäres Ereignis 401  
 komplexe Amplitude 236  
 – Funktionen 234 ff.  
 komplexe Matrix 218  
 – –, Determinante 219  
 – –, Imaginärteil 218  
 – –, Realteil 218  
 – –, Rechenregeln 219  
 komplexe Zahlen 224 ff.  
 – –, algebraische Form 224  
 – –, Betrag 224  
 – –, Darstellungsformen 224 ff.  
 – –, Exponentialform 225  
 – –, Grundrechenarten 227 ff.  
 – –, Imaginärteil 224  
 – –, Inversion 233  
 – –, kartesische Form 224  
 – –, Phase 225  
 – –, Polarformen 225  
 – –, Realteil 224  
 – –, Rechenregeln 227 f.  
 – –, trigonometrische Form 225  
 komplexer Zeiger 236  
 komplexwertige Funktion 232  
 Komponentendarstellung eines Vektors 48, 195  
 Konfidenzgrenzen 444  
 Konfidenzintervalle 444 ff.  
 Konfidenzniveau 444  
 Konjugation 219  
 konjugiert komplexe Matrix 219  
 – komplexe Zahl 225  
 – transponierte Matrix 220  
 konkave Krümmung 139  
 konservatives Vektorfeld 390 f.  
 kontinuierliches Spektrum 313  
 konvergente Folge 71  
 – Reihe 175, 178  
 Konvergenzbereich einer Potenzreihe 180  
 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen 176 ff.  
 Konvergenzradius einer Potenzreihe 180  
 konvexe Krümmung 139  
 Koordinaten, kartesische 41, 44  
 –, Kugelkoordinaten 45  
 –, orthogonale 381, 383, 385  
 –, Polarkoordinaten 42  
 –, rechtwinklige 41, 44  
 –, Zylinderkoordinaten 44

- Koordinatendarstellung einer Ebene 62
  - Koordinatenebenen 241
  - Koordinatenflächen in Kugelkoordinaten 385
    - in Zylinderkoordinaten 383
  - Koordinatenlinien einer Fläche 369
    - in einem Polarkoordinatensystem 381
    - in Kugelkoordinaten 385
    - in Zylinderkoordinaten 383
  - Koordinatensysteme 41 ff.
    - , ebene 41 f.
    - , krummlinige 381
    - , räumliche 44 f.
  - Koordinatentransformationen 42 f.
  - Korrelationskoeffizient 309
  - korrelierte Stichproben 455
  - Korrespondenz 311, 339
  - Kosinus hyperbolicus 107
  - Kosinusfunktion 92, 354
    - , allgemeine 97
  - Kosinussatz 28
  - Kosinusschwingung 98, 354
    - , gedämpfte 354
  - Kotangens hyperbolicus 108
  - Kotangensfunktion 93
  - Kreis 32, 114 f.
    - , Gleichung in Polarkoordinaten 115
    - , Hauptform 115
    - , Mittelpunktsgleichung 115
    - , Parameterdarstellung 115
    - , Ursprungsgleichung 115
  - Kreisabschnitt 32
  - Kreisausschnitt 32
  - Kreisfrequenz 98
  - Kreisegel 242
    - , gerader 36
  - Kreisegelstumpf, gerader 37
  - Kreisring 33
  - Kreissegment 32
  - Kreissektor 32
  - Kreiszyylinder 243
    - , gerader 36
  - Kreuzprodukt 53
  - Kriechfall 289
  - krummliniges Koordinatensystem 381
  - Krümmung, elliptische 39
    - , konkave 139
    - , konvexe 139
    - , Linkskrümmung 139 f.
    - , parabolische 39
    - , Rechtskrümmung 139 f.
    - , sphärische 39
  - Krümmung einer Kurve 139 ff., 367 f.
    - einer Raumkurve 367
  - Krümmungskreis 140
  - Krümmungsmittelpunkt 140
  - Krümmungsradius 140, 367
  - Kubikwurzel 11
  - kubische Gleichung 18 ff.
  - Kugel 37, 242
  - Kugelabschnitt 38
  - Kugelausschnitt 37
  - Kugelkappe 38
  - Kugelkoordinaten 45, 385
  - Kugelschicht 38
  - Kugelsegment 38
  - Kugelsektor 37
  - kugelsymmetrisches Vektorfeld 374
  - Kugelzone 38
  - Kurve 67 ff., 363 ff.
    - , Bogenlänge 169 f.
    - , ebene 363 ff.
    - , räumliche 363 ff.
    - , vektorielle Darstellung 363
  - Kurvengleichung in Polarkoordinaten 68
  - Kurvenintegral 387 ff.
    - eines räumlichen Vektorfeldes 389
    - längs einer geschlossenen Linie 388
  - Kurvenkrümmung 139 f.
  - Kürzen eines Bruches 9
- ## L
- Lagrange, Interpolationsformel 81 f.
  - , Koeffizientenfunktionen 81
  - , Restglied 181
  - Lagrangesche Koeffizientenfunktion 81
  - Lagrangescher Multiplikator 251
  - Lagrangesches Multiplikatorverfahren 251 f.
  - Längencoordinate 45, 385
  - Laplace-Experiment 403
  - Laplace-Integral 339
  - Laplace-Operator 380
    - in Kugelkoordinaten 387
    - in Polarkoordinaten 381
    - in Zylinderkoordinaten 384
  - Laplacesche Differentialgleichung 380
  - Laplacescher Entwicklungssatz 208

- Laplace-Transformationen 339 ff.
  - Laplace-Transformationsoperator 339
  - Laplace-Transformierte 339
    - des Faltungsproduktes 347
    - einer Linearkombination 340
    - einer periodischen Funktion 349
    - spezieller Funktionen (Impulse) 350 ff.
  - leere Menge 1
  - Leibnizsche Sektorformel 167
  - Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen 178
  - Leitlinie einer Parabel 121
  - Lemniskate 126
  - Linearkombinationen von Zufallsvariablen 425
  - linear abhängige Vektoren 217 f.
    - unabhängige Vektoren 217 f.
  - lineare Algebra 194 ff.
  - lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung 270 ff.
    - – 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 271 f., 331, 356
    - – 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 280 ff., 332, 357
    - –  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten 292 ff.
  - lineare Funktionen 75 f.
    - Gleichungen 18
    - Gleichungssysteme 211 ff.
    - Unabhängigkeit von Vektoren 217 f.
  - linearer Mittelwert einer Funktion 166
  - lineares Anfangswertproblem 355 ff.
    - Fehlerfortpflanzungsgesetz 305 f.
  - lineares Gleichungssystem 211
    - –, äquivalente Umformungen 214
    - –, homogenes 211
    - –, inhomogenes 211
    - –, quadratisches 211
  - Linearfaktoren 78 f.
  - Linearisierung einer Funktion 138, 249 f.
  - Linearitätssatz der Fourier-Transformation 324
    - der Laplace-Transformation 340
  - Linien gleicher Höhe 240
  - Linielement in Kugelkoordinaten 386
    - in Zylinderkoordinaten 383
  - linienflächiger Vektor 46
  - Linienintegrale 387 ff.
    - im Raum 389 f.
    - in der Ebene 387 f.
  - Linienpektrum 313
  - Linkskrümung 139 f., 368
  - Logarithmen 12 f.
    - , Rechenregeln 13
  - logarithmische Ableitung 135
    - Differentiation 135
    - Spirale 128
  - Logarithmus 12
    - , binärer 13, 107
    - , Briggscher 13, 107
    - , dekadischer 13, 107
    - , natürlicher 13, 106
    - , Zehnerlogarithmus 13, 107
    - , Zweierlogarithmus 13, 107
  - Logarithmus naturalis 13
  - Logarithmusfunktionen 106 ff.
  - Lösungen einer Differentialgleichung 266
  - Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems 212
    - eines quadratischen linearen Gleichungssystems 213
- ## M
- Mac Laurinsche Formel 181
    - – Reihe 182
  - Mac Laurinsches Polynom 181
  - Majorante 177
  - Majorantenkriterium 177
  - Mantelfläche eines Rotationskörpers 171 f.
  - Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers 173 f., 264 f.
    - eines Rotationskörper 173 f.
  - Maßzahlen der Standardnormalverteilung 419
    - einer Binomialverteilung 413
    - einer Chi-Quadrat-Verteilung 427
    - einer Exponentialverteilung 422
    - einer hypergeometrischen Verteilung 415
    - einer Normalverteilung 418
    - einer Poisson-Verteilung 416
    - einer Stichprobe 437 f.
    - einer  $t$ -Verteilung 429
    - einer Verteilung 410 ff.
  - Matrix 196
    - , charakteristische 221
    - , Diagonalmatrix 198
    - , Dreiecksmatrix 198

- , Eigenvektoren 221 f.
- , Eigenwerte 221 f.
- , Einheitsmatrix 198
- , elementare Umformungen 203
- , Elemente 196
- , hermitesche 220
- , inverse 201 f.
- , Kehrmatrix 201
- , Koeffizientenmatrix 211, 296
- , komplexe 218
- , konjugiert komplexe 219
- , konjugiert transponierte 220
- ,  $n$ -reihige 197
- , Nullmatrix 197
- , orthogonale 199
- , quadratische 197
- , Rang 203
- , reelle 196
- , reguläre 201
- , schiefhermitesche 220
- , schiefsymmetrische 198
- , singuläre 201
- , Spaltenmatrix 197
- , Spur 198
- , symmetrische 198
- , transponierte 197
- , Umkehrmatrix 201
- , unitäre 221
- , Unterdeterminante 203
- , Zeilenmatrix 197
- Matrixelement 196
- Matrizen, Addition 199
- , komplexe 218 ff.
- , Multiplikation 199 f.
- , Rechenregeln 199 f.
- , reelle 196 ff.
- , Subtraktion 199
- maximale Messunsicherheit 305
- maximaler Fehler 305
- Maximum, relatives 141 f., 250 f.
- mechanische Schwingungen 287 ff.
- mehrdimensionale Zufallsvariable 423
- Mehrfachintegral 253 ff.
- mehrstufiges Zufallsexperiment 405 f.
- Menge 1 f.
- , Differenzmenge 2
- , Durchschnitt 2
- , Elemente 1
- , endliche 1
- , leere 1
- , Obermenge 1
- , Restmenge 2
- , Schnittmenge 2
- , Teilmenge 1
- , unendliche 1
- , Untermenge 1
- , Vereinigungsmenge 2
- Menge der ganzen Zahlen 4
- der komplexen Zahlen 224
- der natürlichen Zahlen 2
- der positiven ganzen Zahlen 2
- der rationalen Zahlen 4
- der reellen Zahlen 4
- Mengenoperationen 2
- Messergebnis 302
- Messfehler 299
- Messreihe 300
- , Auswertung 300 ff.
- , Mittelwert 300
- Messunsicherheit 302
- , maximale 305
- Messwert 299
- , wahrscheinlichster 299
- Methode der kleinsten Quadrate 307
- Minimum, relatives 141 f., 250 f.
- Minorante 177
- Minorantenkriterium 177
- Minuend 6
- Mittelpunktsgleichung einer Ellipse 116
- einer Hyperbel 118
- eines Kreises 115
- Mittelwert 299
- , arithmetischer 300
- Mittelwert der Standardnormalverteilung 419
- einer Binomialverteilung 413
- einer Chi-Quadrat-Verteilung 427
- einer Exponentialverteilung 422
- einer Funktion 166
- einer hypergeometrischen Verteilung 415
- einer Messreihe 300
- einer Normalverteilung 418
- einer Poisson-Verteilung 416
- einer Stichprobe 437
- einer  $t$ -Verteilung 429
- einer Zufallsvariablen 411
- mittlerer Fehler der Einzelmessung 301
- – des Mittelwertes 301

Modulation 326  
 Moivre, Formel von Moivre 111, 230  
 monoton fallende Funktion 69  
   – wachsende Funktion 69  
 Monotonie 69, 139  
 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar 199  
   – eines Vektors mit einem Skalar 51, 195  
   – komplexer Zahlen 227f.  
   – von Brüchen 10  
   – von Matrizen 200  
   – von Zahlen 6  
 Multiplikationssatz für Ereignisse 404  
   – für Fourier-Transformationen 328  
   – für Mittelwerte 426  
 Multiplikationstheorem für Determinanten 209  
  
**N**  
*n*-dimensionale Zufallsvariable 424  
*n*-dimensionaler Raum 195  
*n*-dimensionaler Vektor 194  
 Nabla-Operator 375  
 Näherungspolynome einer Funktion 185  
   – spezieller Funktionen (Tabelle) 185f.  
 natürliche Zahlen 2  
 natürlicher Logarithmus 13, 106  
   – – einer komplexen Zahl 231f.  
 Nebenachse einer Ellipse 116  
 Nebendiagonale einer Determinante 205  
   – einer Matrix 197  
 Nebendiagonalprodukt 206  
*n*-Eck, reguläres 32  
 Newton, Interpolationsformel 83f.  
   –, Tangentenverfahren 24  
*n*-Fakultät 14  
 nichtäquivalente Umformungen einer Gleichung 21  
 Niveauflächen 373  
 Niveaulinien 373  
 Normalbereich in kartesischen Koordinaten 254, 260  
   – in Polarkoordinaten 256  
 Normale 138  
 Normalenvektor einer Ebene 62  
 Normalgleichungen 307, 310  
 Normalparabel 77  
 Normalverteilung, Gaußsche 299f., 418ff.  
   –, standardisierte 300, 419ff.  
 Normierung eines Vektors 51

*n*-reihige Determinante 207  
   – Matrix 197  
 Nullhypothese 451  
 Nullmatrix 197  
 Nullphasenwinkel 98  
 Nullstelle 68  
   – einer gebrochenrationalen Funktion 86  
   – einer Polynomfunktion 78  
 Nullstellenberechnung einer Polynomfunktion 80  
 Nullvektor 46, 195  
 numerische Exzentrizität einer Ellipse 116  
   – – einer Hyperbel 118  
 numerische Integration 158ff.  
   – –, Romberg-Verfahren 161f.  
   – –, Simpsonsche Formel 159f.  
   – –, Trapezformel 158f.  
 numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung 273ff.  
   – – einer Differentialgleichung 2. Ordnung 284f.  
 Numerus 12  
  
**O**  
 obere Dreiecksmatrix 198  
   – Integrationsgrenze 145  
 Oberflächenintegral 392ff.  
   – über eine geschlossene Fläche 392  
 Oberfunktion 339  
 Obermenge 1  
 Oberreihe 177  
 offenes Intervall 8  
 Öffnungsparameter 77, 121  
 Ordinate 41  
 orientiertes Flächenelement 392  
 Originalbereich 312, 339  
 Originalfunktion 311, 339  
 orthogonale ebene Koordinaten 381  
   – Matrix 199  
   – räumliche Koordinaten 383, 385  
   – Vektoren 53, 195  
 orthonormierte Basis 52  
 Ortskurve 232ff.  
   – einer parameterabhängigen komplexen Zahl 232  
 Ortsvektor 46  
   – einer ebenen Kurve 363  
   – einer Fläche 369  
   – einer Raumkurve 363

**P**

- $p$ ,  $q$ -Formel 18
- Parabel 77 f., 121 f.
  - , Brennpunkt 121
  - , Gleichung in Polarkoordinaten 122
  - , Hauptform 77, 121
  - , Leitlinie 121
  - , Normalparabel 77
  - , Öffnungsparameter 77, 121
  - , Parameterdarstellung 122
  - , Produktform 78
  - , Scheitelform 121
  - , Scheitelpunkt 121
  - , Scheitelpunktsform 78
- parabolische Krümmung 39
- parallele Vektoren 47
- Parallelebenen 241
- Parallelepipet 34
- Parallelogramm 31
- Parallelogrammregel für komplexe Zahlen 227
- Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems 42
- Parameter 67
  - der Standardnormalverteilung 419
  - einer Binomialverteilung 413
  - einer Chi-Quadrat-Verteilung 427
  - einer Exponentialverteilung 422
  - einer hypergeometrischen Verteilung 414
  - einer Normalverteilung 418
  - einer Poisson-Verteilung 416
  - einer  $t$ -Verteilung 429
- parameterabhängiger Ortsvektor 363
- Parameterdarstellung einer Ebene 60 f.
  - einer Ellipse 117
  - einer Funktion 67
  - einer Geraden 57
  - einer Hyperbel 120
  - einer Parabel 122
  - eines Kreises 115
- Parameterlinien einer Fläche 369
- Parameterschätzungen 441 ff.
- Parametertest 451
  - , Musterbeispiel 465 f.
- Parametertests 451 ff.
  - , spezielle 452 ff.
- Parsevalsche Gleichung 329
- Partialbruch 154
- Partialbruchzerlegung 154 ff.
- Partialsumme 175
- Partialsummenfolge 175
- partielle Ableitungen 243 ff.
  - – 1. Ordnung 243 f.
  - – höherer Ordnung 245 f.
- partielle Differentialoperatoren 244 f.
  - Differentialquotienten 244
  - Differentiation 243 ff.
  - Integration 153
- partikuläre Lösung einer Differentialgleichung 266
- Pascalsches Dreieck 15
- Periode 70
  - , primitive 70
- Periodendauer 98
- periodische Funktion 70
  - –, Laplace-Transformierte 349
- Periodizität 70
- Permutationen 398
- Pfad 405
- Pfadregeln 406
- Phase 98
  - einer komplexen Zahl 225
- Phasendichte, spektrale 314
- Phasenspektrum 314
- Phasenverschiebung 290
- Phasenwinkel 98
- Pivotelement 215
- Planimetrie 28 ff.
- Poisson-Verteilung 416
- Pol 68, 86
  - $k$ -ter Ordnung 86
- Polarachse 68
- Polardarstellung der Fourier-Transformierten 314
- polares Flächenmoment 169
- Polarformen einer komplexen Zahl 225
- Polarkoordinaten 42, 380
- Polarwinkel 68
- Polynom, charakteristisches 222
  - , Interpolationspolynom 81 ff.
  - , Mac Laurinsches 181
  - , reduziertes 78
  - , Taylorsches 181
- Polynomfunktionen 75 ff.
  - , Nullstellen 78
  - , Produktdarstellung 78 f.
  - , Reduzierung 80
  - , Zerlegung in Linearfaktoren 79



Positionssystem 7  
 Potenzen 10 f.  
 – , Rechenregeln 11  
 Potenzfunktionen 87 ff.  
 Potenzieren einer komplexen Zahl 229 f.  
 Potenzregeln 11  
 Potenzreihen 179 ff.  
 – , Konvergenzbereich 180  
 – , Konvergenzradius 180  
 – , Tabelle 183 ff.  
*p*-reihige Unterdeterminante 203  
 Primfaktoren 3  
 primitive Periode 70  
 Primzahl 3  
 Prisma 33 f.  
 – , gerades 34  
 – , reguläres 34  
 – , schiefes 33  
 Produkt von Ereignissen 401  
 – von Zufallsvariablen 426 f.  
 Produktdarstellung einer Polynomfunktion 78 f.  
 Produktform einer Parabel 78  
 Produktintegration 153  
 Produktregel der Differentialrechnung 132  
 – der Vektoranalysis 365  
 Projektion eines Vektors 53  
 Prüfverfahren, statistische 451 ff.  
 Prüfverteilungen 427 ff.  
 Punktschätzungen 441  
 Punkt-Richtungs-Form einer Ebene 60  
 – einer Geraden 57  
 Punkt-Steigungs-Form einer Geraden 75  
 punktsymmetrische Funktion 69  
 Punktwolke 309  
 Pyramide 34  
 – , dreiseitige 35  
 – , gleichseitige 34  
 – , reguläre 34  
 Pyramidenstumpf 35  
 Pythagoras, hyperbolischer 108  
 – , Satz des Pythagoras 26  
 – , trigonometrischer 94

## Q

Quader 34  
 Quadrantenregel für trigonometrische Funktionen 92

Quadrat 30  
 quadratische Funktionen 77 f.  
 – Gleichungen 18  
 – Matrix 197  
 quadratischer Mittelwert einer Funktion 166  
 quadratisches lineares Gleichungssystem 211  
 Quadratwurzel 11  
 Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung (Tabelle) 512  
 – der Standardnormalverteilung 421 f.  
 – der Standardnormalverteilung (Tabelle) 510  
 – der *t*-Verteilung (Tabelle) 514  
 Quelldichte 377  
 Quelle 377  
 quellenfreies Vektorfeld 377, 379  
 Quellstärke pro Volumeneinheit 377  
 Quotientenkriterium 176  
 Quotientenregel der Differentialrechnung 133

## R

radialsymmetrisches Vektorfeld 374  
 Radikand 11  
 Radizieren 11  
 – einer komplexen Zahl 230  
 Rampenfunktion 354  
 Randbedingungen 267  
 Randverteilungen 424  
 Randwerte 267  
 Randwertproblem 267  
 Rang einer Matrix 203  
 rationale Zahlen 4  
 räumliche Kurven 363 ff.  
 räumlicher Integrationsbereich 260  
 räumliches Koordinatensystem 44 f.  
 – Vektorfeld 374  
 Raute 31  
 Realteil einer komplexen Matrix 218  
 – einer komplexen Zahl 224  
 Rechenregeln für Beträge 6  
 – für Divergenzen 377  
 – für Erwartungswerte 411 f.  
 – für Faltungsprodukte 329, 347  
 – für Gradienten 376  
 – für Grenzwerte 72 f.  
 – für komplexe Matrizen 219  
 – für komplexe Zahlen 227 ff.  
 – für Logarithmen 13



- für Matrizen 199 f.
- für  $n$ -reihige Determinanten 208 f.
- für Potenzen 11
- für relative Häufigkeiten 402
- für Rotationen 379
- für Vektoren 50 f., 55 f.
- für Wahrscheinlichkeiten 403
- für Wurzeln 12
- Rechteck 30
- Rechteckimpuls 191, 320, 351
- Rechteckskurve 191, 350
- rechtshändiges System 48
- Rechtskrümmung 139 f., 368
- Rechtssystem 48, 53
- rechtwinklige Hyperbel 120
  - Koordinaten 41, 44
- rechtwinkliges Dreieck 29
- reduziertes Polynom 78
- Reduzierung einer Polynomfunktion 80
- reelle Achse 224
  - – einer Hyperbel 118
- reelle Matrizen 194 ff.
  - Zahlen 2 ff.
- Regel von Sarrus 206
- Regressionsgerade 308 f.
- Regressionsparabel 310
- regula falsi 23
- reguläre Matrix 201
  - Pyramide 34
- reguläres  $n$ -Eck 32
  - Prisma 34
  - Tetraeder 35
- Reihe 16
  - , absolut konvergente 175, 178
  - , arithmetische 16
  - , bestimmt divergente 175
  - , Bildungsgesetz 16
  - , binomische 183
  - , divergente 175
  - , Eigenschaften 178
  - , endliche 16
  - , Fourier-Reihe 187 ff.
  - , geometrische 16, 178
  - , konvergente 175, 178
  - , Konvergenzkriterien 176 ff.
  - , Mac Laurinsche 182
  - , Potenzreihe 179 ff.
  - , Taylorsche 182
  - , unendliche 175 ff.
- Reihen der Areafunktionen 185
  - der Arkusfunktionen 184
  - der Exponentialfunktionen 183
  - der Hyperbelfunktionen 184 f.
  - der logarithmischen Funktionen 184
  - der trigonometrischen Funktionen 184
- relative Extremwerte 141 f., 250 f.
  - –, allgemeines Kriterium 142
- relative Häufigkeit 402
  - – eines Stichprobenwertes 432
- relatives Maximum 141 f., 250 f.
  - Minimum 141 f., 250 f.
- Resonanzfall 291
- Resonanzkreisfrequenz 291
- Restglied 181
  - nach Lagrange 181
- Restmenge 2
- Rhombus 31
- Richtungsableitung 376
- Richtungskosinus 49
- Richtungsvektor einer Geraden 57
- Richtungsvektoren einer Ebene 60
- Richtungswinkel eines Vektors 49
- Rollkurve 123
- Romberg-Verfahren 161 f.
- Rotation eines Vektorfeldes 378 f.
  - – –, Determinantenschreibweise 378
  - – –, Rechenregeln 379
- Rotation in kartesischen Koordinaten 378
  - in Kugelkoordinaten 387
  - in Polarkoordinaten 382
  - in Zylinderkoordinaten 384
- Rotationsellipsoid 39
- Rotationsfläche 171 f., 241 f.
- Rotationskörper, Mantelfläche 171 f.
  - , Massenträgheitsmoment 173 f., 265
  - , Schwerpunkt 172, 264
  - , Volumen 170 f., 263
- Rotationsparaboloid 39
- Rotationsvolumen 170 f.
- rotierender Zeiger 98
- Rundungsregeln für reelle Zahlen 5
- Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung 275 f.
  - 4. Ordnung 276 ff., 284 f.
- S
- Sägezahnfunktion 352
- Sägezahnimpuls 192
- Sarrus, Regel von Sarrus 206

- Sattelpunkt 143  
 Sättigungsfunktion 104 f.  
 Satz des Euklid 27  
 – des Pythagoras 26  
 – des Thales 27  
 – über Linearkombinationen 324, 340  
 – von Schwarz 245  
 – von Steiner 169, 173  
 Schachbrettregel 207  
 Schätzfunktion 441  
 –, effiziente 442  
 –, erwartungstreue 441  
 –, konsistente 442  
 Schätzfunktionen für unbekannte Parameter 441 ff.  
 Schätzmethoden, statistische 441 ff.  
 Schätzungen für den Anteilswert 443  
 – für den Erwartungswert 442  
 – für den Mittelwert 442  
 – für die Varianz 442  
 Schätzwerte für den Parameter einer Binomialverteilung 443  
 – – – – einer Exponentialverteilung 443  
 – – – – einer Gaußschen Normalverteilung 443  
 – – – – einer Poisson-Verteilung 443  
 Schätzwerte für unbekannte Parameter 441 ff.  
 Schaubild 68  
 Scheitelformel einer Parabel 121  
 Scheitelpunkt einer Parabel 77, 121  
 Scheitelpunkte einer Hyperbel 118  
 Scheitelpunktsform einer Parabel 78  
 schiefes Prisma 33  
 schieferhermitesche Matrix 220  
 schiefsymmetrische Matrix 198  
 Schleifenkurve 126  
 Schnittgerade zweier Ebenen 66  
 Schnittpunktendiagramm 240  
 Schnittmenge 2  
 Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene 65  
 – zweier Geraden 60  
 Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene 65  
 – zweier Ebenen 66  
 – zweier Geraden 60, 77  
 – zweier Vektoren 52  
 schwache Dämpfung 288  
 Schwarz, Satz von Schwarz 245  
 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche 168, 257 f.  
 – eines homogenen Körpers 263 f.  
 – eines homogenen Rotationskörpers 172  
 Schwerpunktsachse 169, 173  
 Schwingung, aperiodischer Grenzfall 289  
 –, aperiodisches Verhalten 289  
 –, erzwungene 290 f.  
 –, freie gedämpfte 288 f.  
 –, freie ungedämpfte 287  
 –, harmonische 98, 236  
 –, Kosinusschwingung 98  
 –, mechanische 287 ff.  
 –, Sinusschwingung 98  
 –, Superpositionsprinzip 99  
 Schwingungsamplitude 290  
 Schwingungsdauer 98  
 Schwingungsfall 288  
 Schwingungsgleichung der Mechanik 287  
 Schwingungslehre 97 ff.  
 sicheres Ereignis 402  
 Sicherheit, statistische 444  
 Sigmafunktion 318  
 Signum einer reellen Zahl 6  
 Simpsonsche Formel 159 f.  
 singuläre Lösung einer Differentialgleichung 266  
 – Matrix 201  
 Sinus hyperbolicus 107  
 Sinusfunktion 92, 352  
 –, allgemeine 97  
 Sinusimpuls 193, 353  
 Sinussatz 28  
 Sinusschwingung 98, 352  
 –, gedämpfte 353  
 $\sigma$ -Funktion 318  
 Skalar 46  
 skalare Vektorkomponente 48  
 Skalarfeld 373  
 – in Kugelkoordinaten 387  
 – in Polarkoordinaten 381  
 – in Zylinderkoordinaten 384  
 Skalarprodukt 51 f., 195  
 Spaltenindex einer Matrix 196  
 Spaltenmatrix 197  
 Spaltenvektor 48, 194  
 – einer Matrix 196 f.  
 Spannweite einer Stichprobe 432

- Spat 34
- Spatprodukt 55 f.
- Spektraldichte 311, 314
- spektrale Amplitudendichte 314
  - Phasendichte 314
- Spektralfunktion 314
- Spektrum 314
- spezielle binomische Reihen 183
  - Dreiecke 29 f.
  - Exponentialfunktionen 104
  - Fourier-Reihen (Tabelle) 191 ff.
  - Fourier-Transformationen (Tabellen) 333 ff.
  - Integrale (Integraltafel) 470 ff.
  - Integralsubstitutionen (Tabelle) 151 f.
  - komplexe Matrizen 220 f.
  - konvergente Reihen 178 f.
  - Kurven 123 ff.
  - Laplace-Transformationen (Tabelle) 350 ff., 358 ff.
  - Logarithmusfunktionen 106 f.
  - Lösung einer Differentialgleichung 266
  - Potenzreihenentwicklungen (Tabelle) 183 ff.
  - quadratische Matrizen 197 ff.
  - Vektorfelder 374, 379 f.
  - Zahlenreihen 16 f.
- sphärische Krümmung 39
- spiegelsymmetrische Funktion 69
- Spirale 128
  - , archimedische 128
  - , logarithmische 128
- Sprungfunktion 318, 350
- Spur einer Matrix 198
- Stabdiagramm 408, 432, 435
- Staffelbild 435
- Stammfunktion 145, 147
- Stammintegrale (Tabelle) 149
- Standardabweichung 299
  - der Einzelmessung 300
  - der Standardnormalverteilung 419
  - des Mittelwertes 301
  - einer Binomialverteilung 413
  - einer Chi-Quadrat-Verteilung 427
  - einer Exponentialverteilung 422
  - einer hypergeometrischen Verteilung 415
  - einer Normalverteilung 418
  - einer Poisson-Verteilung 416
  - einer Stichprobe 437
  - einer  $t$ -Verteilung 429
  - einer Zufallsvariablen 411
- Standardeinheiten 419
- standardisierte Normalverteilung 300, 419 ff.
- Standardisierung der Gaußschen Normalverteilung 419
- Standardnormalverteilung 419 ff.
  - , Tabelle 508 ff.
- stationäres Skalarfeld 373
- statisches Moment 168
- Statistik 431 ff.
- statistische Hypothese 451
  - Prüfverfahren für unbekannte Parameter 451 ff.
  - Schätzmethoden 441 ff.
  - Sicherheit 301, 444
- statistischer Wahrscheinlichkeitswert 403
- Steigung einer Geraden 75
- Steigungsschema 83
- Steigungswinkel einer Geraden 75
- Steiner, Satz von Steiner 169, 173
- Stellenwertsystem 7
- Stereometrie 33 ff.
- Sternkurve 125
- stetig differenzierbare Funktion 129
- stetige Funktion 74
  - Verteilung 409
  - Wahrscheinlichkeitsverteilungen 418 ff.
  - Zufallsvariable 407
- Stetigkeit einer Funktion 74
- Stichprobe 431
  - , geordnete 432, 434
  - , gruppierte 434
  - , Häufigkeitsfunktion 432, 435
  - , Häufigkeitsverteilung 432
  - , Kennwerte 437 f.
  - , Maßzahlen 437 f.
  - , Mittelwert 437
  - , Spannweite 432
  - , Standardabweichung 437
  - , Summenhäufigkeitsfunktion 433
  - , umfangreiche 434
  - , Urliste 432
  - , Varianz 437
  - , Verteilungsfunktion 433, 436
  - , Verteilungstabelle 432, 435
- Stichproben, abhängige 455
  - , korrelierte 455

–, unabhängige 455  
 –, verbundene 455  
 Stichprobenfunktion 441  
 Stichprobenvarianz 438  
 Stichprobenwerte 441  
 stochastisch unabhängige Ereignisse 405  
   – – Zufallsvariable 424  
 Summe von Ereignissen 401  
   – von Zufallsvariablen 425 f.  
 Summenhäufigkeitsfunktion einer Stichprobe 433  
 Stokes'scher Integralsatz 396  
 Störfunktion 270, 280, 292  
 Störglied 270, 280, 292  
 Störvektor 296  
 Strahlensätze 27  
 Streckenzugverfahren von Euler 273 f.  
 streng monoton fallende Funktion 69  
   – – wachsende Funktion 69  
 Streuung 300  
 Strophoide 126  
 Stürzen einer Determinante 208  
 Stützpunkte 81, 160  
 Stützstellen 81, 159  
 Stützwerte 81, 159  
 Subtrahend 6  
 Subtraktion komplexer Zahlen 227  
   – von Brüchen 9  
   – von Matrizen 199  
   – von Vektoren 50, 194  
   – von Zahlen 6  
 Summand 6  
 Summenregel der Differentialrechnung 132  
   – der Integralrechnung 146  
   – der Vektoranalysis 365  
 Summenvektor 50  
 Superposition gleichfrequenter harmonischer Schwingungen 99  
 Superpositionsprinzip der Physik 99, 237  
 Symmetrie einer Funktion 69  
 symmetrische Matrix 198, 223  
 Systeme linearer Differentialgleichungen  
   1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 295 ff.

## T

Tangens hyperbolicus 108  
 Tangensfunktion 93

Tangente 138  
 Tangenteneinheitsvektor 366  
 Tangentenvektor 364  
   – an eine Flächenkurve 370  
   – an eine Koordinatenlinie 369  
   – einer ebenen Kurve 364  
   – einer Raumkurve 364  
 Tangentenverfahren von Newton 24  
 Tangentialebene 247, 371 f.  
 Taylor-Reihen 181 ff.  
 Taylorsche Formel 181  
   – Reihe 182  
 Taylorsches Polynom 181  
 Teilbarkeitsregeln für ganze Zahlen 4  
 Teilmenge 1  
 Teilschwerpunktsatz 168  
 Teilsumme 175  
 Terrassenpunkt 143  
 Test für den unbekannten Mittelwert einer Normalverteilung bei bekannter Varianz 452 f.  
   – für den unbekannten Mittelwert einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz 454 f.  
   – für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte zweier Normalverteilungen 455 ff.  
   – für die unbekannte Varianz einer Normalverteilung 461 ff.  
   – für einen unbekannten Anteilswert 463 ff.  
 Testverteilungen 427 ff.  
 Tetraeder 35  
 –, reguläres 35  
 Thales, Satz des Thales 27  
 Tiefpunkt 142  
 Tonne 39  
 Torus 40  
 totales Differential einer Funktion 246 f.  
 totale Wahrscheinlichkeit 406  
 Transformationssätze der Fourier-Transformation 324 ff.  
   – der Laplace-Transformation 340 ff.  
 transponierte Matrix 197  
 Trapez 31  
 Trapezformel 158 f.  
 Trennung der Variablen 267  
 Treppenfunktion 354, 408, 433, 436

trigonometrische Form einer komplexen Zahl 225  
– Formeln 94 ff.  
trigonometrische Funktionen 90 ff., 234  
– –, Additionstheoreme 94, 235  
– –, Reihen 184  
trigonometrische Gleichung 22  
trigonometrischer Pythagoras 94  
triviale Lösung 212  
 $t$ -Verteilung von Student 429

## U

Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen 237  
umfangreiche Stichprobe 434  
– –, Einteilung in Klassen 434  
Umkehrfunktion 70  
Umkehrmatrix 201  
Umkreis eines Dreiecks 29  
Umrechnungen zwischen den Areafunktionen 113  
– zwischen den Hyperbelfunktionen 109  
– zwischen den trigonometrischen Funktionen 94  
unabhängige Stichproben 455  
– Variable 67, 239  
– Veränderliche 67, 239  
unbestimmte Integration 148  
unbestimmtes Integral 147 ff.  
unecht gebrochenrationale Funktionen 85, 87  
uneigentliche Integrale 164 f.  
unendliche Intervalle 8  
– Mengen 1  
– Reihen 175 ff.  
Unendlichkeitsstelle 74, 86  
ungerade Funktion 69  
Ungleichungen mit einer Unbekannten 25  
unitäre Matrix 221  
Unterdeterminante 202, 207  
– einer Matrix 203  
–  $p$ -ter Ordnung 203  
untere Dreiecksmatrix 198  
– Integrationsgrenze 145  
Unterfunktion 339  
Untermenge 1  
Unterreihe 177  
Untersumme 144  
Urliste 432

Urnenmodell 412, 414  
Ursprungsgleichung einer Ellipse 116  
– einer Hyperbel 118  
– eines Kreises 115

## V

Variable 67, 239  
–, abhängige 67, 239  
–, unabhängige 67, 239  
Varianz 299  
–, empirische 438  
Varianz der Standardnormalverteilung 419  
– einer Binomialverteilung 413  
– einer Chi-Quadrat-Verteilung 427  
– einer Exponentialverteilung 422  
– einer hypergeometrischen Verteilung 415  
– einer Normalverteilung 418  
– einer Poisson-Verteilung 416  
– einer Stichprobe 437  
– einer  $t$ -Verteilung 429  
– einer Zufallsvariablen 411  
Variation der Konstanten 270 f.  
Variationen 399  
– mit Wiederholung 399  
– ohne Wiederholung 399  
Vektor 46, 194  
–, Betrag 49, 195  
–, Differenzvektor 50  
–, Einheitsvektor 46, 195  
–, freier 46  
–, gebundener 46  
–, Gegenvektor 47  
–, inverser 47  
–, Komponenten 48, 194  
–, Komponentendarstellung 48, 195  
–, Koordinaten 48, 194  
–, linienflüchtiger 46  
–,  $n$ -dimensionaler 194  
–, Normierung 51  
–, Nullvektor 46, 195  
–, Ortsvektor 46  
–, Richtungswinkel 49  
–, Spaltenvektor 48, 194  
–, Summenvektor 50  
–, Verschiebungsvektor 56  
–, Zeilenvektor 48, 194  
Vektoranalysis 363 ff.

- Vektordarstellung in Kugelkoordinaten 386
  - in Polarkoordinaten 381
  - in Zylinderkoordinaten 384
- Vektoren, Addition 50, 194
  - , antiparallele 47
  - , äußeres Produkt 53 ff.
  - , Basisvektoren 48, 195
  - , gemischtes Produkt 55 f.
  - , inneres Produkt 51 f., 195
  - , kollineare 47
  - , komplanare 56
  - , Kreuzprodukt 53
  - , linear abhängige 217 f.
  - , Linearkombination 195
  - , linear unabhängige 217 f.
  - , Mehrfachprodukte 56
  - , orthogonale 53, 195
  - , parallele 47
  - , Rechenregeln 50 f., 55 f., 194 f.
  - , Skalarprodukt 51 f., 195
  - , Spatprodukt 55 f.
  - , Subtraktion 50, 194
  - , Vektorprodukt 53 ff.
- Vektorfeld 373 f.
  - , axialsymmetrisches 374
  - , ebenes 373
  - , homogenes 374
  - , konservatives 390
  - , kugelsymmetrisches 374
  - , quellenfreies 379
  - , radialsymmetrisches 374
  - , räumliches 374
  - , wirbelfreies 379
  - , zylindersymmetrisches 374
- Vektorfeld in Kugelkoordinaten 387
  - in Polarkoordinaten 381
  - in Zylinderkoordinaten 384
- Vektorfunktion 363
- vektorielle Darstellung einer Ebene 60 ff.
  - – einer Fläche 369
  - – einer Geraden 57 ff.
  - – einer Kurve 363
- Vektorkomponenten 48
- Vektorkoordinaten 48
- Vektorpolygon 50
- Vektorpotential 379
- Vektorprodukt 53 ff.
- Vektorrechnung 46 ff.
- Veränderliche 67, 239
  - , abhängige 67, 239
  - , unabhängige 67, 239
- verallgemeinerte Ableitung 323
  - Fourier-Transformierte 323
  - Funktion 321
  - Kettenregel 246
- verbundene Stichproben 455
- Vereinigung von Ereignissen 401
  - von Mengen 2
- Vereinigungsmenge 2
- Vergleichskriterien für Reihen 177
- Vergleichsreihe 177
- verkettete Funktion 133
- Verschiebungssätze der Fourier-Transformation 325 f.
  - – –, Frequenzverschiebungssatz 326
  - – –, Zeitverschiebungssatz 325
- Verschiebungssätze der Laplace-Transformation 342 f.
- Verschiebungsvektor 56
- Vertauschungsregel der Integralrechnung 146
- Vertauschungssatz der Fourier-Transformation 330
- Verteilung, diskrete 408
  - , stetige 409
- Verteilungsdichtefunktion 299
- Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung 419
  - der Standardnormalverteilung (Tabelle) 508
  - einer Binominalverteilung 413
  - einer Chi-Quadrat-Verteilung 427
  - einer diskreten Zufallsvariablen 408
  - einer Exponentialverteilung 422
  - einer gruppierten Stichprobe 436
  - einer hypergeometrischen Verteilung 414
  - einer mehrdimensionalen Zufallsvariablen 423
  - einer Normalverteilung 418
  - einer Poisson-Verteilung 416
  - einer stetigen Zufallsvariablen 409
  - einer Stichprobe 433
  - einer  $t$ -Verteilung 429
  - einer Zufallsvariablen 408 f.
- Verteilungstabelle einer gruppierten Stichprobe 435
  - einer Stichprobe 432

Verteilungstest 466  
Vertrauensbereich 301  
Vertrauensgrenzen 301, 444  
Vertrauensintervall 301  
–, Musterbeispiel 450  
Vertrauensintervalle 444 ff.  
– für den unbekannten Mittelwert einer beliebigen Verteilung 447  
– für den unbekannten Mittelwert einer Normalverteilung bei bekannter Varianz 445  
– für den unbekannten Mittelwert einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz 446 f.  
– für die unbekannte Varianz einer Normalverteilung 448  
– für einen unbekannten Anteilswert 449 f.  
Vertrauensniveau 301, 444  
Verzweigungspunkt 405  
Vietascher Wurzelsatz 18 f.  
vollständiges Differential einer Funktion 247 f.  
– – einer Potentialfunktion 391  
Volumen eines Rotationskörpers 170 f.  
– eines zylindrischen Körpers 263  
Volumendifferential 260  
Volumenelement 260  
– in Kugelkoordinaten 386  
– in Zylinderkoordinaten 384

## W

Wachstumsfunktion 105  
Wachstumsrate 105  
wahrscheinlichster Messwert 299  
Wahrscheinlichkeit 402 ff.  
–, bedingte 404  
–, Berechnung mit der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung 420 ff.  
–, totale 406  
Wahrscheinlichkeiten, Rechenregeln 403  
Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff 403  
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion 409  
Wahrscheinlichkeitsfunktion 408  
– einer Binomialverteilung 413  
– einer hypergeometrischen Verteilung 414  
– einer Poisson-Verteilung 416

Wahrscheinlichkeitsrechnung 398 ff.  
Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Zufallsvariablen 426  
– einer Zufallsvariablen 407 ff.  
– von mehreren Zufallsvariablen 423  
Wahrscheinlichkeitsverteilungen, diskrete 412 ff.  
–, stetige 418 ff.  
Wahrscheinlichkeitswert, empirischer 403  
–, statistischer 403  
Wegunabhängigkeit eines Kurvenintegrals 389 f.  
– eines Linienintegrals 389 f.  
Wendepunkt 143  
Wendetangente 143  
Wertebereich einer Funktion 67, 239  
Wertevorrat einer Funktion 67, 239  
windschiefe Geraden 59  
Winkelmaße 90  
Wirbel 378  
Wirbeldichte 378  
Wirbelfeld 378  
Wirbelfluss 397  
wirbelfreies Vektorfeld 378 f.  
Wronski-Determinante 280, 292  
Würfel 34  
Wurzel 11 f.  
–, Rechenregeln 12  
Wurzelexponent 11  
Wurzelfunktionen 89  
Wurzelgleichung 21  
Wurzelkriterium 177  
Wurzelziehen 11

## Z

Zahl, Eulersche 103  
–, ganze 4  
–, imaginäre 224  
–, irrationale 4  
–, komplexe 224  
–, natürliche 2  
–, Primzahl 3  
–, rationale 4  
–, reelle 4  
Zahlenfolge 71  
Zahlengerade 5  
Zahlensysteme 7  
Zehnerlogarithmus 13, 107

- Zehnersystem 7
- Zeiger 98 f.
  - , komplexer 236
- Zeigerdiagramm 98 f., 236
- Zeilenindex einer Matrix 196
- Zeilenmatrix 197
- Zeilenumformungen einer Matrix 215
- Zeilenvektor 48, 194
  - einer Matrix 196 f.
- Zeitfunktion 236
- zeitliche Mittelwerte einer periodischen Funktion 166
- Zeitverschiebungssatz der Fourier-Transformation 325
- Zentralfeld 374
- Zerlegung einer Polynomfunktion in
  - Linearfaktoren 79
  - in Primfaktoren 3
- Zirkulation des Vektorfeldes 388
- Zufallsexperiment 400
  - , mehrstufiges 405 f.
- Zufallsgröße 407
- Zufallsstichprobe 431
- Zufallsvariable 299, 407
  - , Dichtefunktion 409
  - , diskrete 407
  - , Erwartungswert 410
  - , Kennwerte 410 ff.
  - , Linearkombinationen 425
  - , Maßzahlen 410 ff.
  - , mehrdimensionale 423
  - , Mittelwert 411
  - ,  $n$ -dimensionale 424
  - , Produkte 425 f.
  - , Standardabweichung 411
  - , stetige 407
  - , stochastisch unabhängige 424
  - , Summen 425 f.
  - , Varianz 411
  - , Verteilung 408 f.
  - , Verteilungsfunktion 408 f.
  - , Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion 409
  - , Wahrscheinlichkeitsfunktion 408
  - , zweidimensionale 423
- Zufallsvektor 423 f.
- zusammengesetzte Funktion 133
- zusammengesetztes Ereignis 401
- zweidimensionale Zufallsvariable 423
- zweidimensionales Bereichsintegral 253
- Zweierlogarithmus 13, 107
- Zweiersystem 7
- Zweig 405
- Zwei-Punkte-Form einer Geraden 57, 76
- zweireihige Determinante 205
- Zweiweggleichrichtung 193, 353
- Zykloide, gewöhnliche 123
- Zylinderkoordinaten 44, 382
- zylindersymmetrisches Vektorfeld 374