

Volker Läpple

Einführung in die Festigkeitslehre

Lehr- und Übungsbuch
2. Auflage

STUDIUM



Volker Läpple

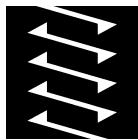
Einführung in die Festigkeitslehre

Lehr- und Übungsbuch

2., verbesserte und erweiterte Auflage

Mit 410 Abbildungen und 49 Tabellen

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Der Verfasser hat alle Texte, Formeln und Abbildungen mit größter Sorgfalt erarbeitet. Dennoch können Fehler nicht ausgeschlossen werden. Deshalb übernehmen weder Verfasser noch Verlag irgendwelche Garantien für die in diesem Buch abgedruckten Informationen. In keinem Fall haften Verfasser und Verlag für irgendwelche direkten oder indirekten Schäden, die aus der Anwendung dieser Informationen folgen.

Normen wiedergegeben mit Erlaubnis des DIN Deutsches Institut für Normung e.V. Maßgebend für das Anwenden der DIN-Norm ist deren Fassung mit dem neuesten Ausgabedatum, die bei der Beuth Verlag GmbH, Burggrafenstraße 6, 10787 Berlin, erhältlich ist.

1. Auflage 2006
2., verbesserte und erweiterte Auflage 2008

Alle Rechte vorbehalten
© Vieweg+Teubner Verlag | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2008

Lektorat: Thomas Zipsner | Imke Zander

Der Vieweg+Teubner Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbindnerische Verarbeitung: Wilhelm & Adam, Heusenstamm
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0426-6

Vorwort zur 2. Auflage

Die **Festigkeitslehre** ist eine technische Disziplin, die sich mit der Ermittlung der inneren Beanspruchung fester Körper sowie mit der Beurteilung des daraus resultierenden Werkstoffverhaltens beschäftigt. Mit den Methoden der Festigkeitslehre können Bauteile wirtschaftlich dimensioniert und sicher ausgelegt werden.

Während die Verfahren der Elastostatik bzw. der Elastizitätstheorie nur die Ermittlung von Spannungen und Verformungen im Werkstück erlauben, muss in der Festigkeitslehre zusätzlich die Reaktion des Werkstoffs auf die jeweilige Beanspruchung berücksichtigt werden. Die Festigkeitslehre ist dementsprechend ein interdisziplinäres Fachgebiet. Sie erfordert nicht nur mathematische und physikalische Grundkenntnisse sondern vor allem auch Kenntnisse aus der Mechanik und der Werkstoffkunde.

Obwohl Spannungen und Verformungen in realen, komplexen Bauteilen heute mit Hilfe leistungsfähiger Programme berechnet werden können, ist es aus wirtschaftlichen und zeitlichen Gründen häufig nicht geboten, in allen Phasen der Bauteilentwicklung derartige Berechnungen durchzuführen. Auch die Überprüfung der Plausibilität von Festigkeitsberechnungen sowie die Beurteilung des eng mit der Beanspruchung verknüpften Werkstoffverhaltens muss vom Konstrukteur selbst durchgeführt werden. Hierfür müssen Hilfsmittel zur Verfügung gestellt werden, die es erlauben, auf einfache Weise das Bauteilverhalten unter Berücksichtigung von Geometrie und Beanspruchung abzuschätzen. Eine der Hauptschwierigkeiten dabei ist es, reale, meist komplexe Bauteile auf einfachere und damit berechenbare Körper zu reduzieren, ohne die für das Werkstoffverhalten maßgeblichen Einflussfaktoren zu vernachlässigen.

Das Ziel des vorliegenden Lehr- und Übungsbuches ist es, auf möglichst einfache und anschauliche Weise, Hilfsmittel zur sicheren und wirtschaftlichen Berechnung und Dimensionierung von Bauteilen zur Verfügung zu stellen. Die mathematisch-physikalischen sowie die werkstoffkundlichen Grundlagen bleiben dabei auf das Nötigste beschränkt, um Raum für vielfältige Übungsaufgaben zu schaffen. Der dargebotene Lehrstoff kann anhand von mehr als 140 Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad eingeübt werden. Ergebnisse zu allen Übungsaufgaben erlauben eine sofortige Kontrolle des Lernerfolgs. Ausführliche Lösungsvorschläge sowie Lösungsvarianten finden Sie im separat verfügbaren **Lösungsbuch zur Einführung in die Festigkeitslehre**.

Das vorliegende Lehr- und Übungsbuch eignet sich vorlesungsbegleitend im Rahmen des Studiums des Ingenieurwesens an Hochschulen und Universitäten. Aber auch Technikern und Ingenieuren in der Praxis soll es wertvolle Hinweise zur Beurteilung des Festigkeitsverhaltens liefern.

Die große Nachfrage machte bereits ein Jahr nach Erscheinen des Lehr- und Übungsbuches eine Neuauflage erforderlich. Gestärkt durch die vielfältigen positiven Zuschriften aus dem Leserkreis wurde das didaktische Konzept der 1. Auflage beibehalten und lediglich einige wenige Fehler korrigiert. Die neue Auflage enthält zusätzlich **zwei Musterklausuren** mit ausführlichem Lösungsweg sowie ein **Verzeichnis englischer Fachausdrücke**. Außerdem wurde eine CD mit mehr als **300 Farbfolien zur Vorlesungsgestaltung** sowie ein **Manuskript** und eine **Formelsammlung** zum sofortigen Vorlesungseinsatz beigelegt.

Mein besonderer Dank gilt dem Vieweg-Verlag, insbesondere Herrn Dipl.-Ing. Thomas Zipsner, für die sorgfältige Drucklegung und die angenehme Zusammenarbeit. Gedankt sei an dieser Stelle auch allen Kollegen für die wertvollen Hinweise, die zur Verbesserung der vorliegenden 2. Auflage geführt haben. Um den Umfang des Lehr- und Übungsbuches nicht zu sprengen, konnten Vorschläge zur Aufnahme weiterer Kapitel leider nicht realisiert werden. Dies soll jedoch zu einem späteren Zeitpunkt in einem separaten Band erfolgen.

Anregungen für Ergänzungen sowie Verbesserungsvorschläge werden weiterhin stets gerne entgegen genommen.

Anmerkungen zur Bewertung der Schwierigkeit der Aufgaben

Das vorliegende Lehrbuch enthält mehr als **140 Aufgaben** mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden zu allen Themengebieten.

Die meist praxisorientierten Aufgaben ermöglichen es Ihnen, das erlernte Wissen zu überprüfen, anzuwenden und zu vertiefen. Weiterhin können die Aufgaben zur selbstständigen und gezielten Klausurvorbereitung eingesetzt werden.

Es wird empfohlen, die Aufgaben parallel zu den einzelnen Kapiteln des Lehrbuchs durchzuarbeiten. Die ausführlichen Lösungen sowie Lösungsvarianten zu allen Aufgaben finden Sie im separat verfügbaren **Lösungsbuch zur Einführung in die Festigkeitslehre**.

Die Bewertung der Schwierigkeit der Aufgaben erfolgt gemäß der Symbolik:

- Einfache Aufgabe. Die Lösung erfordert nur geringe einschlägige Vorkenntnisse und dient der Einführung in das Themengebiet. Häufig stehen einfache Formeln zur Lösung der Aufgabe zur Verfügung.
- Aufgabe mit mäßigem Schwierigkeitsgrad. Zur Lösung der Aufgabe sind Grundkenntnisse aus der Mechanik und Festigkeitslehre erforderlich. Weiterhin müssen bereits einfache Zusammenhänge und grundlegende Mechanismen verstanden werden.
- Aufgaben mit mittlerem Schwierigkeitsgrad. Die Lösung erfordert ein fundiertes Basiswissen insbesondere auf den Gebieten der Mechanik und der Festigkeitslehre sowie die Fähigkeit, themenübergreifende Zusammenhänge und komplexere Mechanismen zu verstehen. Mathematische Grundkenntnisse sind zur Lösung der Aufgabe in der Regel erforderlich.
- Schwierige Aufgabe. Die Aufgabe erfordert die Analyse der Problemstellung, die Entwicklung einer geeigneten Lösungsstrategie sowie das Aufzeigen und die Formulierung einer möglichen Lösung. Alternative Lösungen sind möglich. Vertiefte mathematische Kenntnisse sind zur Lösung der Aufgabe in der Regel erforderlich.
- Sehr schwierige Aufgabe meist mit hohem Praxisbezug. Die Lösung erfordert vom Bearbeiter die Entwicklung einer eigenständigen Lösungsstrategie und sehr fundierte Kenntnisse, insbesondere aus der Festigkeitslehre. Vertiefte mathematische Kenntnisse sowie Grundkenntnisse aus der Werkstoffkunde sind Voraussetzung zur erfolgreichen Lösung der Aufgabe.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Grundbelastungsarten	2
2.1 Zug	3
2.1.1 Spannungsermittlung bei Zugbeanspruchung	3
2.1.2 Werkstoffverhalten und Kennwerte bei Zugbeanspruchung	4
2.1.3 Zulässige Spannung bei Zugbeanspruchung	13
2.1.4 Formänderungen durch einachsige Normalspannung	15
2.1.5 Aufgaben	17
2.2 Druck	22
2.2.1 Spannungsermittlung bei Druckbeanspruchung	22
2.2.2 Werkstoffverhalten und Kennwerte bei Druckbeanspruchung	22
2.2.3 Zulässige Spannung bei Druckbeanspruchung	25
2.2.4 Aufgaben	26
2.3 Gerade Biegung	28
2.3.1 Spannungsermittlung bei gerader Biegung	29
2.3.2 Axiale Flächen- und Widerstandsmomente zusammengesetzter Querschnitte ..	35
2.3.3 Werkstoffverhalten und Kennwerte bei Biegebeanspruchung	37
2.3.4 Zulässige Spannung bei Biegebeanspruchung	38
2.3.5 Aufgaben	39
2.4 Schub	44
2.4.1 Schubspannung	44
2.4.2 Schiebung (Winkelverzerrung)	45
2.4.3 Formänderung durch Schubspannungen	45
2.4.4 Spannungsermittlung bei Abscherbeanspruchung	46
2.4.5 Werkstoffkennwerte bei Abscherbeanspruchung	46
2.4.6 Zulässige Spannung bei Abscherbeanspruchung	47
2.4.7 Aufgaben	48
2.5 Torsion	50
2.5.1 Spannungsermittlung bei Torsion kreisförmiger Querschnitte	50
2.5.2 Verdrehwinkel	53
2.5.3 Werkstoffverhalten und Kennwerte bei Torsionsbeanspruchung	54
2.5.4 Zulässige Spannung bei Torsionsbeanspruchung	56
2.5.5 Aufgaben	57
2.6 Zusammenfassung der Grundbelastungsarten	61
3 Spannungszustand	62
3.1 Spannungsbegriff	63
3.1.1 Normal- und Schubspannungen	63
3.1.2 Indizierung von Normal- und Schubspannungen	64
3.1.3 Vorzeichenregelung für Normal- und Schubspannungen	64
3.1.4 Zugeordnete Schubspannungen	65

3.2 Einachsiger Spannungszustand	65
3.3 Zweiachsiger (ebener) Spannungszustand	68
3.3.1 Spannungskomponenten und Schnittrichtung	68
3.3.2 Mohrscher Spannungskreis	70
3.4 Dreiachsiger (räumlicher) Spannungszustand	75
3.4.1 Spannungstensor	75
3.4.2 Berechnung von Normal- und Schnittspannungen in einer bel. Schnittebene ..	77
3.4.3 Hauptnormalspannungen bei dreiachsigem Spannungszustand	78
3.4.4 Mohrscher Spannungskreis für den dreiachsigen Spannungszustand	82
3.4.5 Hauptschubspannungen bei dreiachsigem Spannungszustand	83
3.4.6 Graphische Ermittlung von Schnittspannungen	84
3.5 Aufgaben	85
4 Verformungszustand	88
4.1 Verformungsgrößen	89
4.1.1 Dehnung	89
4.1.2 Schiebung (Winkelverzerrung)	89
4.1.3 Vorzeichenregelung für Dehnungen und Schiebungen	89
4.1.4 Indizierung von Dehnungen und Schiebungen	90
4.2 Verformungszustand und Schnittrichtung	91
4.2.1 Berechnung der Dehnung ε_x	91
4.2.2 Berechnung der Schiebung γ_{xy}	93
4.3 Mohrscher Verformungskreis	95
4.3.1 Konstruktion des Mohrschen Verformungskreises	96
4.3.2 Hauptdehnungen und Hauptdehnungsrichtungen	97
4.3.3 Verformungszustand	97
4.4 Praktische Anwendung des Mohrschen Verformungskreis	99
4.4.1 Auswertung dreier beliebig orientierter Dehnungsmessstreifen	99
4.4.2 Auswertung einer 0° - 45° - 90° DMS-Rosette	101
4.5 Grundlagen der Dehnungsmesstechnik	102
4.6 Aufgaben	105
5 Elastizitätsgesetze	107
5.1 Formänderungen durch einachsige Normalspannung	107
5.2 Formänderungen durch Schubspannungen	108
5.3 Formänderungen beim allgemeinen (dreiachsigen) Spannungszustand	108
5.4 Formänderungen beim ebenen (zweiachsigen) Spannungszustand	111
5.5 Aufgaben	112

6 Festigkeitshypothesen	116
6.1 Normalspannungshypothese (NH)	118
6.1.1 NH in Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand	118
6.1.2 NH bei Zug- oder Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion	119
6.1.3 Grenzkurve für das Werkstoffversagen nach der NH	119
6.2 Schubspannungshypothese (SH)	121
6.2.1 SH in Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand	123
6.2.2 SH bei Zug-, Druck oder Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion	125
6.2.3 Grenzkurve für das Werkstoffversagen nach der SH	125
6.3 Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)	126
6.3.1 GEH in Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand	127
6.3.2 GEH bei Zug-, Druck oder Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion	127
6.3.3 Grenzkurve für das Werkstoffversagen nach der GEH	128
6.4 Zusammenfassung der Festigkeitshypothesen	129
6.5 Aufgaben	130
7 Kerbwirkung	138
7.1 Technische Kerben	138
7.2 Auswirkung technischer Kerben	139
7.3 Nennspannung und Formzahl	140
7.3.1 Nennspannung	140
7.3.2 Formzahl	140
7.3.3 Ermittlung von Formzahlen	141
7.3.4 Formzahldiagramme	142
7.4 Kerbwirkung und Bauteilverhalten	143
7.4.1 Kerbwirkung bei spröden Werkstoffen	143
7.4.2 Kerbwirkung bei duktilen Werkstoffen	143
7.5 Aufgaben	146
8 Knickung von Stäben	154
8.1 Knickkraft (Eulersche Knickfälle)	154
8.1.1 Knickung bei außermittigem Kraftangriff	154
8.1.2 Knickung bei mittigem Kraftangriff	158
8.2 Spannungsermittlung bei Knickung	160
8.3 Zulässige Spannung bei Knickung	161
8.4 Knicklänge	161
8.5 Knickspannungsdiagramme	163
8.6 Biegeknickung	165
8.7 Aufgaben	166

9 Schiefe Biegung	171
9.1 Flächenmomente.....	171
9.1.1 Flächenmomente 1. Ordnung	171
9.1.2 Flächenmomente 2. Ordnung	172
9.1.3 Abhängigkeit der Flächenmomente 2. Ordnung vom Koordinatensystem	174
9.2 Spannungsermittlung bei schiefer Biegung.....	178
9.3 Nulllinie.....	180
9.4 Aufgaben	182
10 Schubspannungen durch Querkräfte bei Biegung	186
10.1 Spannungsermittlung bei Querkraftschub	186
10.2 Schubspannungen in dünnwandigen Profilträgern.....	190
10.2.1 Horizontale Schubspannungen im Flansch	191
10.2.2 Vertikale Schubspannungen im Steg	191
10.2.3 Schubmittelpunkt	192
10.3 Schubspannungen in genieteten und geschweißten Profilträgern	193
10.3.1 Genietete Träger	193
10.3.2 Geschweißte Träger	194
10.4 Schub- und Normalspannungen bei biegebeanspruchten Balken	195
10.5 Verformung unter Schubbeanspruchung (Schubverformung)	196
10.6 Aufgaben	197
11 Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte	200
11.1 Torsion dünnwandiger, geschlossener Hohlprofile.....	200
11.2 Torsion dünnwandiger, offener Hohlprofile	201
11.3 Torsion beliebiger Vollquerschnitte	202
11.3.1 Membran-Analogie von Prandtl	202
11.3.2 Strömungsanalogie von Thomson	203
11.4 Grundgleichungen zur Torsion ausgewählter Querschnitte	204
11.5 Aufgaben	206
12 Behälter unter Innen- und Außendruck	207
12.1 Dünnewandige Behälter	207
12.1.1 Dünnewandige Behälter unter Innendruck	207
12.1.2 Dünnewandige Behälter unter Außendruck	210
12.1.3 Dünnewandige Hohlkugel unter Innen- bzw. Außendruck	211
12.1.4 Dünnewandige Behälter mit elliptischer Unrundheit	212
12.2 Dickwandige Behälter	213
12.2.1 Elastischer Zustand unter Innen- bzw. Außendruck	213
12.2.2 Vollplastischer Zustand unter Innendruck.....	224
12.2.3 Teilplastischer Zustand unter Innendruck	227
12.3 Aufgaben	234

13 Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit	245
13.1 Schadensfälle infolge Werkstoffermüdung.....	246
13.2 Mechanismen der Entstehung eines ErmüdungsrisSES.....	247
13.3 Ermüdungsbruchflächen	250
13.4 Begriffsdefinitionen	250
13.5 Werkstoffverhalten und Kennwerte	252
13.5.1 Wöhlerversuch und Wöhlerkurve	252
13.5.2 Einteilung der Wöhlerkurve	254
13.5.3 Grenzschwingspielzahl	256
13.5.4 Analytische Beschreibung der Wöhlerkurve	256
13.5.5 Statistische Auswertung von Wöhlerversuchen	258
13.5.6 Dauerfestigkeitskennwerte	260
13.6 Spannungsermittlung bei Schwingbeanspruchung	263
13.6.1 Nachweis der Dauerfestigkeit	264
13.6.2 Festigkeitsbedingung	265
13.7 Einflussgrößen auf die Schwingfestigkeit	265
13.7.1 Mittelspannungseinfluss (Dauerfestigkeitsschaubilder)	266
13.7.2 Einfluss der Oberflächenrauigkeit	277
13.7.3 Einfluss der Proben- bzw. Bauteilgröße - Größeneinfluss.....	280
13.7.4 Einfluss der Temperatur.....	283
13.7.5 Einfluss einer Oberflächenverfestigung (Randschichteinfluss)	284
13.7.6 Einfluss von Eigenspannungen	286
13.7.7 Frequenzeinfluss	287
13.7.8 Kerbwirkung bei schwingender Beanspruchung	288
13.8 Aufgaben.....	293
Anhang 1: Werkstoffkennwerte.....	312
Anhang 2: Sicherheitsfaktoren.....	321
Anhang 3: Formzahldiagramme.....	322
Anhang 4: Lösungen zu den Aufgaben	330
Anhang 5: Musterklausur 1	373
Anhang 6: Musterklausur 2	388
Anhang 7: Englische Fachausdrücke	399
Literaturverzeichnis	413
Sachwortverzeichnis	416

1 Einleitung

Die Beanspruchbarkeit technischer Bauteile und Konstruktionen ist begrenzt. Es ist die Aufgabe der Festigkeitslehre, Konzepte bereitzustellen, die eine sichere und wirtschaftliche Bauauslegung unter Berücksichtigung von Art und Höhe der **Belastung** sowie von **Geometrie** und **Werkstoffart** erlauben. Bild 1.1 zeigt das Prinzip eines Festigkeitsnachweises.

Als Reaktion auf eine äußere Beanspruchung (z. B. Kräfte, Momente, Temperaturänderungen) entstehen im Bauteilinnern in Abhängigkeit der Geometrie (Form und Abmessungen) innere **Beanspruchungen**. Als Maß für diese inneren Beanspruchungen definiert man die mechanische Spannung σ bzw. τ . Für geometrisch einfache Bauteile lassen sich diese Spannungen mit Hilfe von Formeln berechnen. Für komplexe Bauteilgeometrien stehen leistungsfähige Berechnungsprogramme zur Verfügung.

Erreicht die innere Beanspruchung in einem Bauteil bestimmte, von der Werkstoffart abhängige Grenzen, dann muss mit einem Versagen gerechnet werden. Ein derartiges Werkstoffversagen ist zum Beispiel die plastische Verformung oder der Bruch. Die **Beanspruchbarkeit** wird durch Werkstoffkennwerte festgelegt, die teilweise in genormten Versuchen (z. B. im Zugversuch) ermittelt werden.

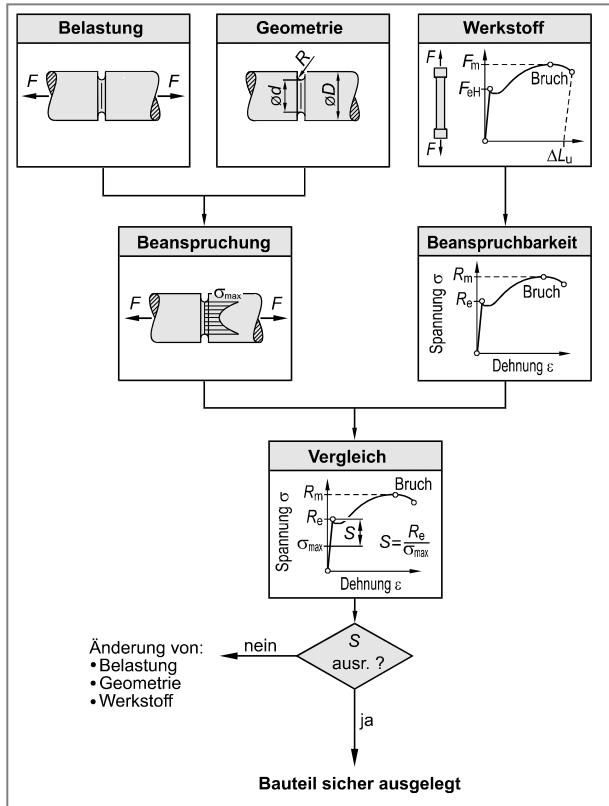


Bild 1.1 Prinzip eines Festigkeitsnachweises

Durch Vergleich der Beanspruchung des Bauteils mit seiner Beanspruchbarkeit ergibt sich schließlich in Abhängigkeit von Belastung, Geometrie und Werkstoff die **Sicherheit gegen Versagen** (S). Diese Sicherheit darf bestimmte beispielsweise in Normen oder Richtlinien vorgegebene **Sicherheitsbeiwerte** nicht unterschreiten.

Die Wahl eines geeigneten Sicherheitsbeiwertes ist für die sichere und wirtschaftliche Auslegung eines technischen Bauteils von großer Bedeutung. Wird ein zu hoher Sicherheitsbeiwert gewählt, dann führt dies zu einer **Überdimensionierung** des Bauteils und damit zu erhöhten Werkstoff- und Fertigungskosten sowie zu einer Erhöhung des Bauteilgewichts. Ein zu geringer Sicherheitsbeiwert bedeutet andererseits eine **Unterdimensionierung** und kann dementsprechend ein vorzeitiges Bauteilversagen nach sich ziehen.

2 Grundbelastungsarten

Bauteile können auf unterschiedliche Weise beansprucht werden. Man unterscheidet zwischen:

- **äußerer Beanspruchung**

- mechanisch (z. B. Zug- oder Druckkräfte)
- thermisch (z. B. Wärmedehnungen)
- chemisch (z. B. korrosive Umgebung)

- **innerer Beanspruchung**

- Eigenspannungen (z. B. Schweißeigenspannungen)

Zur Durchführung von Festigkeitsnachweisen versucht man die vielfältigen Bauteilformen der Technik auf einfach zu berechnende Grundformen wie Stab, Rohr, Scheibe, Platte und Schale zurückzuführen. Diese Bauteile können verschiedenen Belastungen ausgesetzt sein, die man in fünf **Grundbelastungsarten** einteilen kann (Bild 2.1):

- **Zug**
- **Druck**
- **Biegung**
- **Schub (Abscherung)**
- **Torsion**

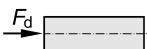
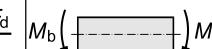
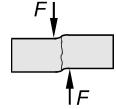
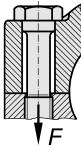
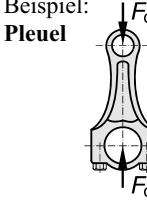
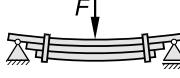
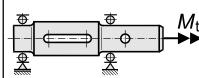
Zug	Druck	Biegung	Schub	Torsion
				
Beispiel: Dehnschraube 	Beispiel: Pleuel 	Beispiel: Blattfeder 	Beispiel: Gelenkbolzenverbindung 	Beispiel: Antriebswelle 

Bild 2.1 Grundbelastungsarten mit typischen Beispielen

Ziel dieses Kapitels ist die Bereitstellung von Grundgleichungen zur Ermittlung der **inneren Beanspruchung** eines Bauteils in Abhängigkeit der äußeren Belastung sowie die für den jeweiligen Belastungsfall maßgeblichen Werkstoffkennwerte (**Beanspruchbarkeit**). Die Berechnungen sollen schwerpunktmäßig für gerade prismatische Stäbe erfolgen. Ein **Stab** ist dabei ein geometrischer Körper, dessen Querschnittsabmessungen klein sind im Vergleich zu seiner Länge. Die Bezeichnung „gerade“ bedeutet, dass die Stabachse nicht nennenswert gekrümmt ist. „Prismatisch“ heisst, dass keine Veränderung der Querschnittsfläche längs der Stabachse erfolgt. In Kapitel 6 werden die Grundbelastungsarten überlagert und Festigkeitsnachweise bei kombinierter Beanspruchung durchgeführt (z. B. kombinierte Zug- und Torsionsbeanspruchung).

2.1 Zug

Eine **reine Zugbeanspruchung** liegt vor:

- bei geraden, prismatischen Stäben mit symmetrischem Querschnitt, falls die Belastung zentrisch in Achsrichtung wirkt,
- bei geraden, prismatischen Stäben mit nicht symmetrischem Querschnitt sofern die Wirkungslinie der resultierenden Zugbeanspruchung durch den Flächenschwerpunkt geht.

Abrupte Querschnittsveränderungen (technische Kerben) dürfen also nicht auftreten d. h. es muss ein ungestörter Kraftlinienverlauf vorliegen (siehe auch Kapitel 7). Typische, durch eine reine Zugbeanspruchung beanspruchte Bauteile sind beispielsweise:

- Seile
- Schrauben
- Rohrleitungen unter Innendruck

2.1.1 Spannungsermittlung bei Zugbeanspruchung

Um die Beanspruchung im Bauteil unter der Wirkung einer Zugkraft zu ermitteln, soll ein Stab mit der Querschnittsfläche A betrachtet werden. Der Stab wird durch die Kraft F auf Zug beansprucht (Bild 2.2).

Als Reaktion auf die äußere Belastung F muss sich eine innere Beanspruchung ergeben. Zur Ermittlung dieser inneren Beanspruchung wird das **Schnittprinzip** angewandt. Man denkt sich den Stab dabei an einer beliebigen Stelle durchgeschnitten. Alleine betrachtet, würde die untere Hälfte dann unter der Wirkung der Kraft F nach unten fallen. Um dies zu verhindern, muss an der Schnittfläche jeweils eine entgegen gerichtete Kraft als Ersatz angebracht werden. Aus Gleichgewichtsgründen muss diese Schnittkraft betragsmäßig der äußeren Kraft F entsprechen. Diese Schnittkraft F kann jedoch nicht als Einzelkraft im Flächenmittelpunkt wirken, da sonst nur ein kleines, zentrales Volumenelement belastet und verformt würde und die benachbarten Volumenelemente hingegen keine Verformung erfahren würden. Aufgrund des formschlüssigen Werkstoffzusammenhangs (Gefüge) ist dies nicht möglich. Auch würde sich hierbei keine parallele Verschiebung des Stabquerschnitts vor und nach der Belastung ergeben. Vielmehr muss man sich die Schnittkraft F , wie durch die Pfeile dargestellt, gleichmäßig über den gesamten Querschnitt verteilt vorstellen.

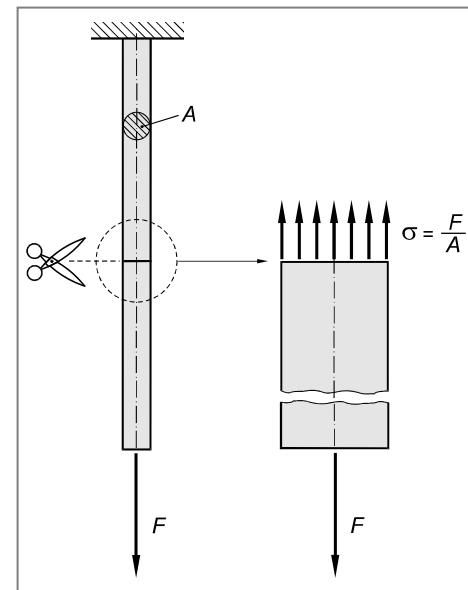


Bild 2.2 Gerader, prismatischer Stab unter Zugbeanspruchung
a) ungeschnitten
b) geschnitten

Als Maß für die innere Beanspruchung bezieht man die Kraft F auf die Querschnittsfläche A und berechnet somit die innere Kraft pro Querschnittsfläche. Diese von der Bauteilgeometrie (Querschnittsfläche) unabhängige Größe wird als **mechanische Spannung** bezeichnet.

Unter Zugbeanspruchung errechnet sich die **Zug(normal)spannung** σ als Quotient aus Zugkraft F (Spannungskomponente senkrecht zur betrachteten Schnittfläche) und der Querschnittsfläche A senkrecht zur Zugkraft:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{Grundgleichung zur Spannungsermittlung bei reiner Zugbeanspruchung} \quad (2.1)$$

F (Zug-)Kraftkomponente senkrecht zur Schnittfläche (N), siehe auch Kapitel 2.4.1
 A Schnittfläche (mm^2)
 σ (Zug-)Normalspannung (N/mm^2)¹⁾

In Kapitel 3.1 erfolgt eine allgemeine Ableitung des Spannungsbegriffes.

An den Krafteinleitungsstellen entstehen örtlich komplexe Spannungszustände. Nach dem **Prinzip von de Saint-Venant**²⁾ sind jedoch die Beanspruchungen in hinreichendem Abstand von den Krafteinleitungsstellen abgeklungen, d. h. die Spannungen und die Verformungen sind nicht mehr von der Kräfteverteilung im Gebiet der Einleitung, sondern nur noch von ihrer statischen Resultierenden abhängig.

2.1.2 Werkstoffverhalten und Kennwerte bei Zugbeanspruchung

Die Berechnung von Spannungen und Verformungen ist nur ein Teil des Festigkeitsnachweises. Der zweite Teil besteht in der Ermittlung der Beanspruchbarkeit (Bild 1.1). Die Beanspruchbarkeit wird durch Werkstoffkennwerte gekennzeichnet, die meist in genormten Versuchen ermittelt werden. Im Falle einer reinen Zugbeanspruchung erhält man die erforderlichen Kennwerte aus dem einfach durchzuführenden, einachsigen **Zugversuch**. Die wichtigsten Kennwerte technisch bedeutsamer Werkstoffe sind im Anhang 1 (Werkstofftabellen) zusammengestellt.

2.1.2.1 Kraft-Verlängerungs- und Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Zur Durchführung des Zugversuchs nach DIN EN 10 002 wird eine genormte Probe (z. B. nach DIN 50 125) in der Regel in einer servohydraulisch oder elektromechanisch betriebenen Prüfmaschine stetig bis zum Bruch verformt (Bild 2.3). Gleichzeitig wird die Zugkraft F und die Probenverlängerung ΔL gemessen. Man erhält dabei zunächst das **Kraft-Verlängerungs-Diagramm** (Bild 2.3).

Da die Zugkraft sowie die Verlängerung der Probe von der Probengeometrie (Querschnittsfläche und Länge der Probe) abhängig sind, können dem Kraft-Verlängerungs-Diagramm keine Werkstoffkennwerte entnommen werden. Zur Ermittlung von Kennwerten, die von der Probengeometrie unabhängig sind, **Werkstoffkennwerte** also, bezieht man die Kraft F auf die als konstant angenommene Anfangsquerschnittsfläche A_0 der Probe (in Normenwerken teilweise auch mit S_0 bezeichnet) und erhält auf diese Weise die **Zugspannung** σ .

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad (2.2)$$

¹⁾ Anstelle von N/mm^2 ist auch die Einheit MPa (Megapascal gebräuchlich). Es gilt $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \cdot 10^{-6} \text{ N/mm}^2 = 1 \text{ N/mm}^2$

²⁾ Barré de Saint-Venant (1797 ... 1886)

In analoger Weise bezieht man auch die Verlängerung der Probe (ΔL) auf deren Anfangslänge (L_0) und errechnet die (technische) **Dehnung ε** :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (\text{technische}) \text{ Dehnung} \quad (2.3)$$

Die Dehnung ε ist dimensionslos, sie wird bisweilen jedoch auch in Prozent (%) oder Promille (‰) angegeben. Mitunter ist auch die Angabe m/m, mm/mm oder $\mu\text{m}/\text{m}$ gebräuchlich.

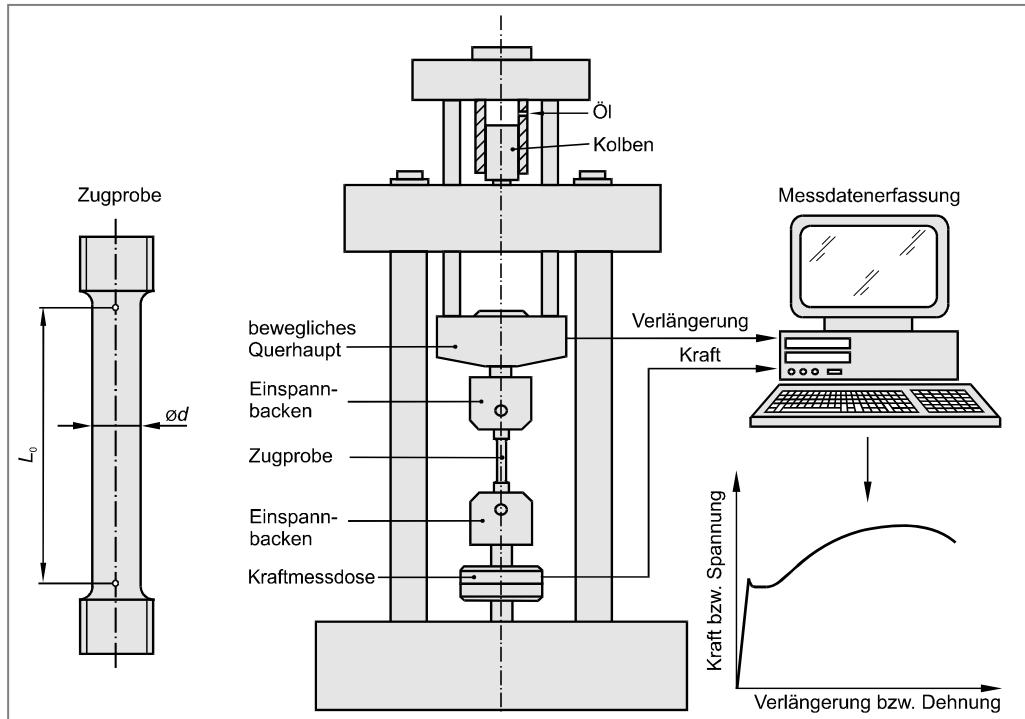


Bild 2.3 Zugprüfmaschine mit Rundzugprobe (schematisch)

Aus dem Kraft-Verlängerungs-Diagramm entsteht auf diese Weise das **Spannungs-Dehnungs-Diagramm**. Kraft-Verlängerungs- und Spannungs-Dehnungs-Diagramm unterscheiden sich lediglich im Maßstab der Koordinatenachsen um die Faktoren A_0 bzw. L_0 .

Spannungs-Dehnungs-Diagrammen können in Abhängigkeit von Werkstoffart und Werkstoffverhalten wichtige Kennwerte entnommen werden, die Aussagen zum Festigkeits- und Verformungsverhalten des Werkstoffs erlauben.

Zur Berechnung der Spannung σ wird die Kraft F auf die Anfangsquerschnittsfläche A_0 (Gleichung 2.2) und nicht auf die momentane Querschnittsfläche A bezogen. In analoger Weise wird die Dehnung ε als Quotient aus Verlängerung ΔL und Anfangsmesslänge L_0 (Gleichung 2.3) und nicht als Quotient aus Verlängerung und momentaner Länge L errechnet. Daher stellen die Größen σ und ε lediglich Nennwerte dar und kennzeichnen nicht die wahren Spannungen bzw. Dehnungen der Probe. Dieser Fehler kann insbesondere bei größeren Verformungen (z. B. in der Umformtechnik) nicht mehr vernachlässigt werden.

2.1.2.2 Grundtypen von Spannungs-Dehnungs-Diagrammen

Die Spannungs-Dehnungs-Diagramme metallischer sowie vieler nicht metallischer Werkstoffe lassen sich vier Grundtypen zuordnen, die in Bild 2.4 zusammenfassend dargestellt sind.

Typ 1 stellt den allgemeinsten Fall eines Spannungs-Dehnungs-Diagrammes dar. Zwischen Spannung und Dehnung herrscht über den gesamten Bereich der Verformung kein linearer Zusammenhang. Darüber hinaus beobachtet man nach Überschreitung des Spannungsmaximums eine örtliche Einschnürung der Probe (Kapitel 2.1.2.3), d. h. trotz abnehmender Kraft erfolgt eine weiter zunehmende Verlängerung. Ein derartiges Werkstoffverhalten zeigen beispielsweise unlegiertes Kupfer, Reinaluminium oder unlegierte Baustähle bei erhöhter Temperatur (Bild 2.4a).

Eine Variante vom Typ 1 weist keine Einschnürung auf, die Probe bricht ohne größere Verformungen mit Erreichen der maximal ertragbaren Spannung (Bild 2.4b). Dieses Werkstoffverhalten beobachtet man beispielsweise beim Gusseisen mit Lamellengraphit.

Typ 2 unterscheidet sich vom Typ 1 durch eine anfängliche Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung, die sich als Gerade (Hooke'sche Gerade, Kapitel 2.1.2.3) im Diagramm abzeichnet. Der Werkstoff verhält sich in diesem Bereich linear-elastisch. Nach Überschreiten einer bestimmten Beanspruchung beobachtet man, analog zum Typ 1, eine örtliche Einschnürung des Probestabes und schließlich einen Bruch an dieser Stelle (Bild 2.4c). Beispiele für ein Spannungs-Dehnungs-Verhalten entsprechend Typ 2 sind legierte sowie vergütete Stähle, Aluminiumlegierungen oder Temperguss.

Eine Reihe von Werkstoffen, wie zum Beispiel bestimmte ausgehärtete Aluminiumlegierungen, brechen bereits bei relativ geringer plastischer Verformung und zeigen keine Einschnürung (Bild 2.4d).

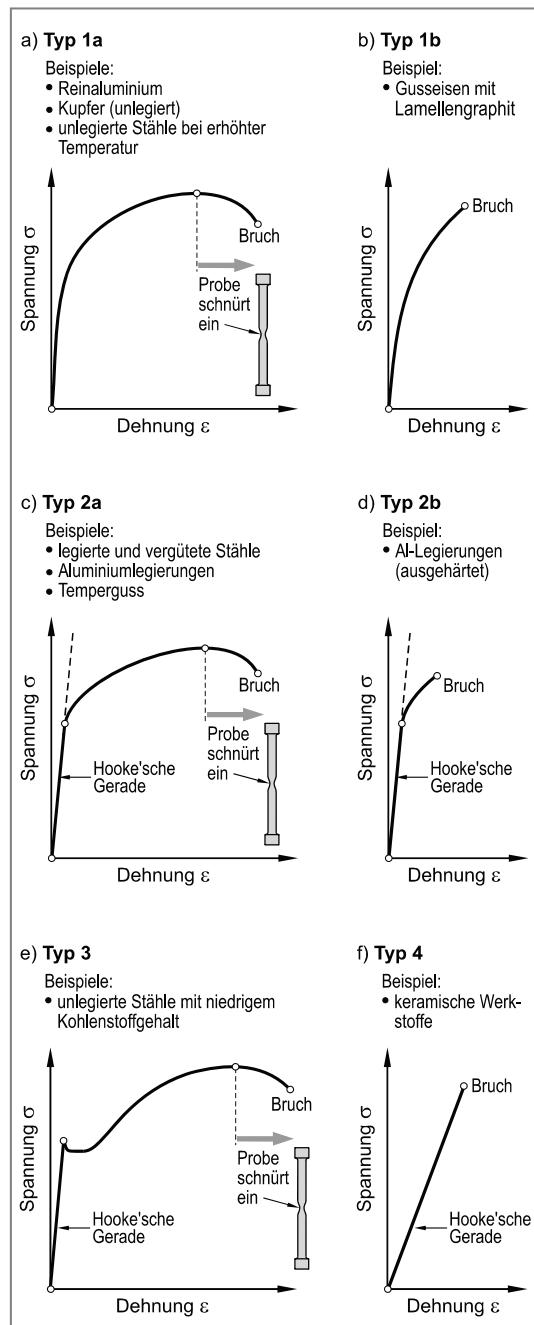


Bild 2.4 Grundtypen von Spannungs-Dehnungs-Diagrammen

Typ 3 eines Spannungs-Dehnungs-Diagrammes zeigt zwei voneinander getrennte Bereiche. Der Werkstoff verhält sich anfänglich linear-elastisch d. h. Spannung und Dehnung sind proportional zueinander, so dass sich, analog zu Typ 2, eine Gerade im Diagramm abzeichnet (Bild 2.4e). Der Übergang zum zweiten Bereich des Diagramms vollzieht sich dann mit einem mehr oder weniger ausgeprägten waagerechten Kurvenverlauf. In diesem Bereich beobachtet man eine deutlich sichtbare plastische Verformung („fließen“) des Werkstoffs bei gleichbleibender Beanspruchung. Der weitere Kurvenverlauf ist dann analog zum Typ 1 bzw. 2. Ein derartiges Spannungs-Dehnungs-Verhalten zeigen in der Regel unlegierte Baustähle mit niedrigem Kohlenstoffgehalt.

Typ 4 zeigt das Spannungs-Dehnungs-Diagramm (ideal) spröder Werkstoffe. Diese Werkstoffe verhalten sich weitgehend linear-elastisch bis zum Bruch, d. h. am Ende der Hookeschen Geraden tritt der Bruch ein (Bild 2.4f). Ein derartiges Werkstoffverhalten zeigen beispielsweise keramische Werkstoffe wie Aluminiumoxid oder Siliciumnitrid.

2.1.2.3 Ermittlung von Werkstoffkennwerten

Die Vorgehensweise zur Ermittlung von Werkstoffkennwerten soll nachfolgend für duktile Metalle¹⁾ mit Spannungs-Dehnungs-Diagrammen vom Typ 2 und 3 sowie für spröde Werkstoffe mit Spannungs-Dehnungs-Diagrammen vom Typ 4 aufgezeigt werden.

a) Duktile Metalle

Die Mehrzahl der technischen Konstruktionswerkstoffe sind duktile Metalle und weisen ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm von Typ 2 oder vom Typ 3 auf. Diese Werkstoffe zeigen zu Beginn der Belastung einen linearen Zusammenhang zwischen Kraft und Verlängerung bzw. Spannung und Dehnung. Die sich im Spannungs-Dehnungs-Diagramm darstellende (steile) Gerade wird als **Hookesche Gerade** bezeichnet (Bild 2.5). Die Bezeichnung geht auf den englischen Physiker **Robert Hooke** zurück, der im Jahre 1678 diesen Zusammenhang an Uhrfedern erstmals nachwies. Im Bereich der Hookeschen Geraden verhält sich der Werkstoff linear-elastisch, d. h. die Atome werden aus ihrer Ruhelage ausgelenkt. Wird die Probe wieder entlastet, dann verschwindet die Verformung wieder vollständig. Es gilt das **Hookesche Gesetz**²⁾ $\sigma = E \cdot \varepsilon$ (Kapitel 2.1.4.1).

¹⁾ duktil = verformungsfähig

²⁾ Die Gesetzmäßigkeit wurde erstmals 1678 von **Robert Hooke** (1635 ... 1703) veröffentlicht, allerdings als linearer Zusammenhang zwischen Belastung und Längenänderung elastisch beanspruchter Federn (ut tensio, sic vis = wie die Kraft, so die Streckung). Die Formulierung als linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung ($\sigma = E \cdot \varepsilon$) erfolgte erst 1727 durch **Leonhard Euler** (1707 ... 1783).

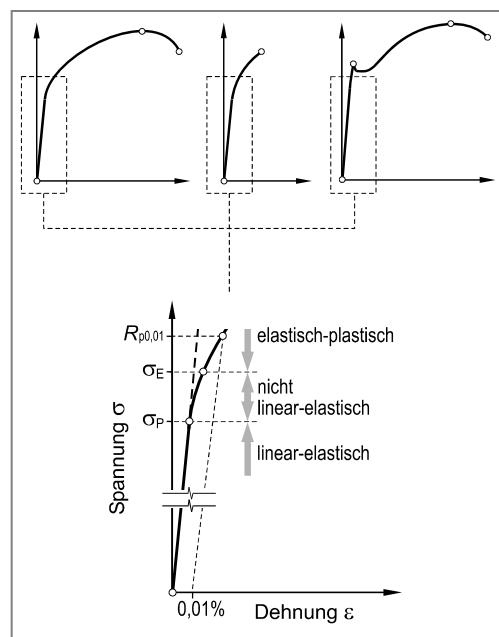


Bild 2.5 Spannungs-Dehnungs-Verhalten duktiler Metalle (Typ 2 und 3) zu Beginn der Beanspruchung

Mit Erreichen der Spannung σ_p , die als **Proportionalitätsgrenze** bezeichnet wird, endet das linear-elastische Werkstoffverhalten und damit die Hookesche Gerade (Bild 2.5).

Bei weiter zunehmender Beanspruchung über σ_p hinaus, nimmt die Dehnung im Vergleich zur Spannung überproportional zu. Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm zeigt nunmehr einen gekrümmten Kurvenverlauf. Der Werkstoff verhält sich allerdings noch immer elastisch d. h. nach einer Entlastung ist noch keine plastische Verformung (bleibende Dehnung) festzustellen. Erst mit Erreichen der als **Elastizitätsgrenze** σ_E bezeichneten Spannung beobachtet man nach Entlastung plastische (bleibende) Verformungen, der Werkstoff verhält sich dementsprechend nicht mehr rein elastisch.

Die in DIN EN 10002 nicht enthalten Kennwerte σ_p und σ_E liegen in der Regel dicht beieinander oder fallen zusammen und sind messtechnisch nicht exakt erfassbar. Häufig wird daher als Ersatzwert für σ_E die **technische Elastizitätsgrenze** $R_{p0,01}$ (auch als **0,01%-Dehngrenze** bezeichnet) ermittelt. $R_{p0,01}$ ist diejenige Spannung, die nach einer Entlastung eine bleibende Dehnung von 0,01% verursacht (Bild 2.5).

Bei einer Beanspruchung über $R_{p0,01}$ bzw. σ_E hinaus, beobachtet man bei duktilen Metallen in Abhängigkeit von Werkstoffart bzw. Werkstoffzustand entweder eine ausgeprägte Streckgrenze oder eine kontinuierliche Abweichung des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes von der Hookeschen Geraden.

Duktile Metalle mit ausgeprägter Streckgrenze

Wird der Probestab über $R_{p0,01}$ bzw. σ_E hinaus beansprucht, dann setzt plastische Verformung durch ausgeprägte Versetzungsbewegungen ein. Die Verformung ist nunmehr irreversibel, d. h. nach Entlastung der Probe nimmt diese nicht mehr ihre Ausgangslänge an. Lediglich der elastische Anteil der Dehnung verschwindet wieder, während der plastische Verformungsanteil zu einer bleibenden Probenverlängerung führt. Am Ende der Hookeschen Geraden beginnt der Werkstoff also zu „**fließen**“.

Bei einer Reihe normalgeglühter, unlegierter Stähle mit niedrigem Kohlenstoffgehalt, wie zum Beispiel die unlegierten Baustähle nach DIN EN 10025-2, wird mit zunehmender Belastung ein Punkt erreicht, bei dem sich der Probestab unter nahezu gleich bleibender oder abnehmender Beanspruchung stark verlängert (Punkt 3 in Bild 2.6). Dieser Punkt wird als **Streckgrenze** bezeichnet und der ausgeprägte Fließbereich als **Lüders-Dehnung**, Bild 2.6.

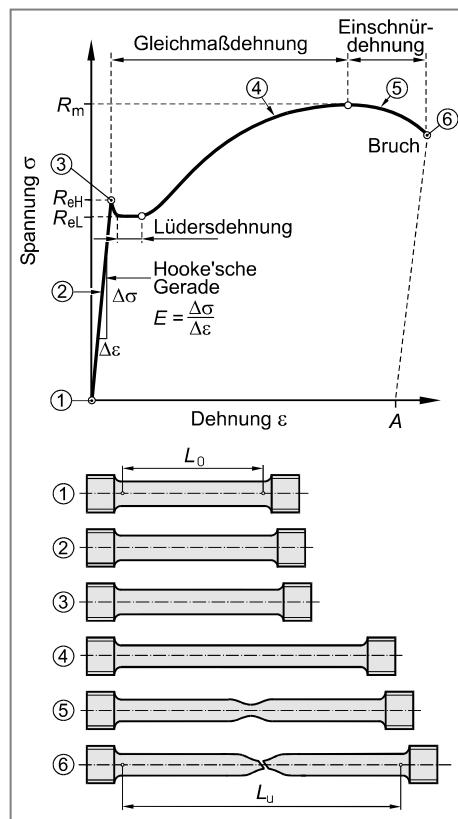


Bild 2.6 Spannungs-Dehnungs-Diagramm duktiler Metalle mit ausgeprägter Streckgrenze. Proportionalitäts- und Elastizitätsgrenze sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet

In der Regel unterscheidet man zwischen einer oberen und einer unteren Streckgrenze (s. u.). Die Spannung an der oberen Streckgrenze (R_{eH}) wird unter anderem von der Prüfgeschwindigkeit sowie von der Geometrie der Probe beeinflusst. Im Sinne der Vergleichbarkeit der Ergebnisse sind diese Größen daher in DIN EN 10002 genormt.

Um den Werkstoff im Anschluss an den Fließbereich weiter zu verformen, bedarf es einer zunehmenden Kraft bzw. Spannung, da der Werkstoff verfestigt d. h. durch Versetzungsneubildung werden die Abgleitvorgänge zunehmend behindert. Mit zunehmender Beanspruchung verläuft das Spannungs-Dehnungs-Diagramm flacher und überschreitet schließlich ein Maximum. Bis zu diesem Punkt hat sich die Probe über die gesamte Messlänge gleichmäßig verformt d. h. die zylindrische Probenform wird beibehalten. Dieser Bereich wird daher als **Gleichmaßdehnung** bezeichnet (Bild 2.6).

Jenseits des Spannungsmaximums beginnt sich die Probe innerhalb der Messlänge an der zufällig schwächsten Stelle einzuschnüren. Die plastische Verformung der Probe konzentriert sich nur noch auf diesen Einschnürbereich. Man spricht daher auch vom Bereich der **Einschnürdehnung** (Bild 2.6). Da der tragende Querschnitt zunehmend vermindert wird, sinkt auch die ertragbare Kraft F und somit die Spannung $\sigma = F / A$. Es muss an dieser Stelle allerdings nochmals angemerkt werden, dass zur Ermittlung des (technischen) Spannungs-Dehnungs-Diagrammes die Zugkraft gemäß Gleichung 2.2 auf die Anfangsquerschnittsfläche A_0 und nicht auf die momentane Querschnittsfläche A bezogen wird. Tatsächlich nimmt die Spannung im Einschnürquerschnitt hingegen zu (wahre Spannung).

Sobald der Restquerschnitt die Beanspruchung nicht mehr aufzunehmen vermag, tritt der Bruch der Probe ein (Punkt 6 in Bild 2.6). Bild 2.7 zeigt einen nach deutlicher Einschnürung gebrochenen Probestab. Die Bruchvorgänge, Bruchformen und Bruchflächen des Zähbruchs werden in [1] ausführlich beschrieben.

Dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm entnimmt man die nachfolgend genannten Werkstoffkennwerte (Bild 2.6).

- **Zugfestigkeit:** Die Zugfestigkeit R_m ist die höchste ertragbare Belastung F_m bezogen auf die Anfangsquerschnittsfläche A_0 :

$$R_m = \frac{F_m}{A_0} \quad \text{Zugfestigkeit} \quad (2.4)$$

R_m Zugfestigkeit (N/mm^2)

F_m Höchstzugkraft bzw. Maximum im Kraft-Verlängerungs-Diagramm (N)

A_0 Anfangsquerschnittsfläche (mm^2)

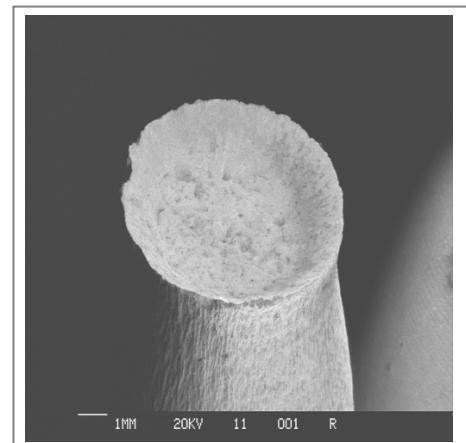


Bild 2.7 Nach einer deutlichen Einschnürung gebrochene Rundzugprobe (Werkstoff: S235JR)

- **Streckgrenze:** Die Streckgrenze ist diejenige Spannung, bei der mit zunehmender Verlängerung der Probe die Zugkraft erstmals konstant bleibt oder abfällt (Punkt 3 in Bild 2.6). In der Regel unterscheidet man eine **obere Streckgrenze R_{eH}** und eine **untere Streckgrenze R_{eL}** .

Die obere Streckgrenze ist definiert als die obere Streckgrenzenkraft F_{eH} bezogen auf die Anfangsquerschnittsfläche A_0 , die untere Streckgrenze als untere Streckgrenzenkraft F_{eL} bezogen auf die Anfangsquerschnittsfläche A_0 (Bild 2.6):

$$R_{eH} = \frac{F_{eH}}{A_0} \text{ bzw. } R_{eL} = \frac{F_{eL}}{A_0} \quad \text{Obere Streckgrenze und untere Streckgrenze} \quad (2.5)$$

R_{eH} obere Streckgrenze (N/mm^2)

F_{eH} obere Streckgrenzenkraft (N)

R_{eL} untere Streckgrenze (N/mm^2)

F_{eL} untere Streckgrenzenkraft (N)

A_0 Anfangsquerschnittsfläche (mm^2)

- **Bruchdehnung:** Die Bruchdehnung A ist definiert als die *bleibende* Dehnung der Probe nach dem Bruch (Bild 2.8):

$$A = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100\% \quad \text{Bruchdehnung} \quad (2.6)$$

A Bruchdehnung (%)

L_u Länge der Probe nach dem Bruch (mm)

L_0 Anfangsmesslänge (mm)

Alternativ kann die Bruchdehnung auch als bleibender Dehnungsanteil aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm ermittelt werden, indem man eine Parallelle zur Hookeschen Geraden durch denjenigen Kurvenpunkt konstruiert, der den Probenbruch kennzeichnet (z. B. Bild 2.6).

- **Brucheinschnürung:** Die Brucheinschnürung Z ist definiert als die größte prozentuale Querschnittsänderung:

$$Z = \frac{A_0 - A_u}{A_0} \cdot 100\% = \frac{d_0^2 - d_u^2}{d_0^2} \cdot 100\% \quad \text{Brucheinschnürung} \quad (2.7)$$

Z Brucheinschnürung (%)

A_0 Anfangsquerschnittsfläche (mm^2)

A_u Querschnittsfläche an der Bruchstelle (mm^2)

Die Brucheinschnürung lässt sich nicht direkt dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm entnehmen. Zu ihrer Ermittlung muss die Querschnittsfläche der Probe vor und nach dem Bruch ermittelt werden (Bild 2.8).

- **Elastizitätsmodul:** Der Elastizitätsmodul E kennzeichnet das elastische Verformungsvermögen des Werkstoffes. Bei linearer Elastizität ergibt sich der Elastizitätsmodul aus der Steigung der Hookeschen Geraden im Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Kapitel 2.1.4.1 und Bild 2.6).

$$E = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varepsilon} \quad \text{Elastizitätsmodul} \quad (2.8)$$

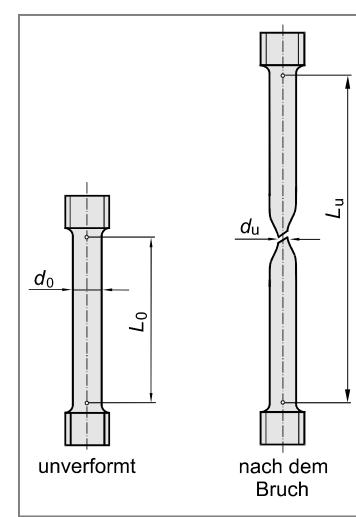


Bild 2.8 Abmessungen am Probestab vor der Prüfung und nach dem Bruch

Der Elastizitätsmodul kann als diejenige Spannung interpretiert werden, die erforderlich ist, um den Probestab auf das Doppelte seiner Länge gegenüber dem unbelasteten Zustand zu dehnen. In der Praxis ist allerdings eine derart hohe Dehnung in der Regel nicht erreichbar, da zuvor eine plastische Verformung und anschließend ein Bruch eintritt.

- **Querkontraktionszahl:** Wird neben der Längsdehnung ε bzw. ε_l auch die Durchmesserveränderung Δd der Probe ermittelt, dann kann die Querdehnung ε_q errechnet werden:

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0} \quad \text{Querdehnung} \quad (2.9)$$

Im Gültigkeitsbereich der Hookeschen Geraden (linear-elastisches Werkstoffverhalten) definiert man dann die **Querkontraktionszahl μ** als Verhältnis aus Querdehnung ε_q und Längsdehnung ε_l (siehe auch Kapitel 2.1.4.3):

$$\mu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_l} \quad \text{Definition der Querkontraktionszahl} \quad (2.10)$$

Duktile Metalle ohne ausgeprägte Streckgrenze

Die Mehrzahl duktiler Metalle und Metallegierungen zeigen ein Spannungs-Dehnungs-Verhalten ohne ausgeprägte Streckgrenze. Das Werkstoffverhalten ist gekennzeichnet durch einen kontinuierlichen Übergang zwischen dem Bereich elastischer und plastischer Verformung. Oberhalb der messtechnisch nicht erfassbaren Elastizitätsgrenze σ_E beobachtet man eine zunehmende Abweichung des Kurvenverlaufs von der Hookeschen Geraden (Bild 2.9). Mit steigender Belastung wird der Kurvenverlauf zunehmend flacher. Bei ausreichendem Verformungsvermögen des Werkstoffs strebt das Spannungs-Dehnungs-Diagramm einem Maximum zu. Die Probe schnürt sich mehr oder weniger stark ein und bricht anschließend relativ rasch. Werkstoffe mit geringer Plastizität brechen hingegen vor Erreichen eines Spannungsmaximums d. h. sie zeigen keine Einschnürung. Ein typisches Beispiel sind die ausgehärteten Aluminiumlegierungen (Bild 2.4d).

Da der Beginn der plastischen Verformung, wie bereits erwähnt, bei Metallen ohne ausgeprägte Streckgrenze messtechnisch nicht erfassbar ist, wird ersatzweise diejenige Spannung ermittelt, die nach der Entlastung eine festgelegte bleibende Dehnung (z. B. 0,01%, 0,2% oder 1%) hervorruft. Diese Kennwerte werden als **Dehnungsgrenzen** bezeichnet und erhalten als Formelzei-

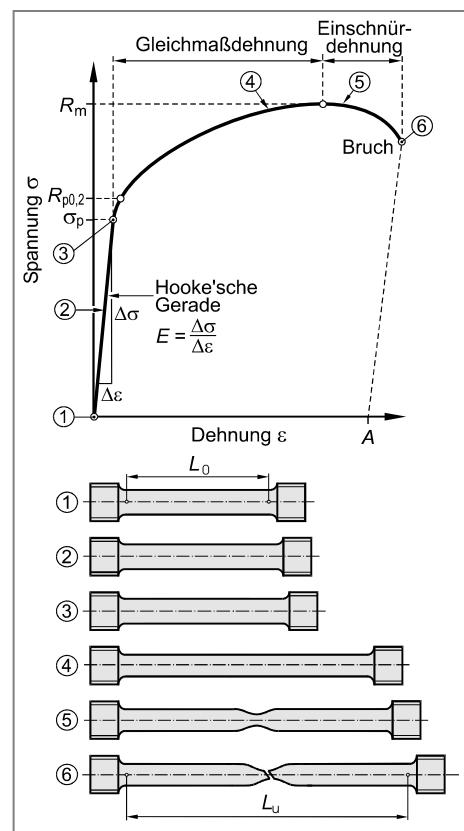


Bild 2.9 Spannungs-Dehnungs-Diagramm duktiler Metalle ohne ausgeprägte Streckgrenze (die Elastizitätsgrenze ist nicht eingezeichnet)

chen R_p (z. B. $R_{p0,01}$, $R_{p0,2}$ oder R_{p1}). Im Maschinenbau wird häufig die **0,2%-Dehngrenze** ($R_{p0,2}$) als maßgeblicher Werkstoffkennwert für den Beginn ausgeprägter plastischer Verformungen zugrunde gelegt.

Zur Ermittlung von Dehngrenzen konstruiert man im **Feindehnungsdiagramm**, ausgehend von einer festgelegten bleibenden Dehnung (z. B. 0,01%, 0,2% oder 1%), eine Parallel zur Hookeschen Geraden. Ihr Schnittpunkt mit der Abszisse des Koordinatensystems liefert den gesuchten Werkstoffkennwert (Bild 2.10).

b) Spröde Werkstoffe bzw. sprödes Werkstoffverhalten

Bei spröden Werkstoffen bzw. bei sprödem Werkstoffverhalten beobachtet man kein bzw. ein eingeschränktes plastisches Verformungsvermögen. Bei ideal sprödem Werkstoffverhalten (z. B. keramische Werkstoffe) verhält sich der Werkstoff linear-elastisch bis zum Bruch. Eine Abweichung vom linear-elastischen Anstieg kann auf eine gewisse Plastizität hindeuten. Neben dem Elastizitätsmodul E ist die Zugfestigkeit R_m der einzige Werkstoffkennwert (Bild 2.11). Eine Streck- bzw. Dehngrenze wird nicht ermittelt, Bruchdehnung und Bruchhörschnürung sind Null.

Der Zugversuch zeigt, dass sich duktile Werkstoffe vor dem Bruch mehr oder weniger ausgeprägt plastisch verformen, während ein spröder Werkstoff bereits nach relativ geringer, nahezu rein elastischer Verformung bricht.

Auf eine Konstruktion übertragen bedeutet dies, dass ein Bauteil aus einem duktilen Werkstoff entweder durch plastische Verformungen („Fließen“) oder durch Bruch versagen bzw. funktionsunfähig werden kann. Für Bauteile aus einem spröden Werkstoff bzw. bei sprödem Werkstoffverhalten kommt als Versagensmöglichkeit nur ein Bruch in Frage. Die Festigkeitsberechnung, die ein solches Versagen ausschließen soll, muss sich dementsprechend nach den jeweils möglichen Versagensarten richten. Man führt daher bei duktilen Werkstoffen einen Festigkeitsnachweis gegen Fließen und Bruch durch, während man bei spröden Werkstoffen üblicherweise nur gegen Bruch rechnet.

Für Festigkeitsnachweise muss die zulässige Spannung ggf. mit einem ausreichenden Sicherheitsabstand (Kapitel 2.1.3) unter demjenigen Werkstoffkennwert bleiben, der für die jeweilige Versagensart maßgebend ist. Für den Versagensfall „Fließen“ ist dieser Kennwert unter Zugbeanspruchung die Streckgrenze R_e bzw. die Dehngrenze R_p (z. B. $R_{p0,2}$).

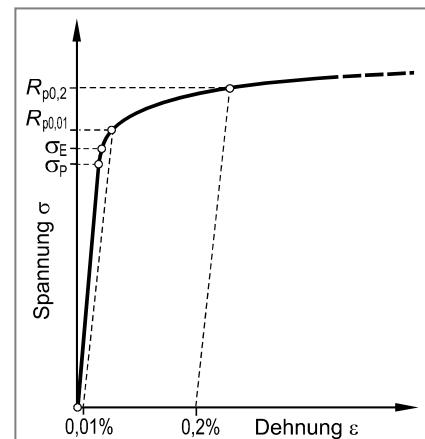


Bild 2.10 Prinzip der Ermittlung von Dehngrenzen im Feindehnungsdiagramm (hier: 0,01%- und 0,2%-Dehngrenze)

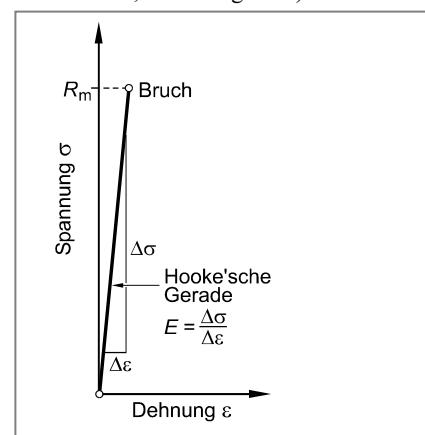


Bild 2.11 Spannungs-Dehnungs-Verhalten eines spröden Werkstoffs

Für den Versagensfall „Bruch“ ist die Zugfestigkeit R_m maßgebend. Erreicht also die wirkende Spannung σ im Bauteil die Festigkeitsgrenzen (Streck- bzw. Dehngrenze oder Zugfestigkeit) dann ist mit einem Versagen (plastisches Fließen oder Bruch) zu rechnen.

In Tabelle 2.1 sind die maßgeblichen Werkstoffkennwerte aus dem Zugversuch tabellarisch zusammengestellt.

Tabelle 2.1 Werkstoffkennwerte aus dem Zugversuch

Kennwerte der Elastizität	Verformungskennwerte	Festigkeitskennwerte
Elastizitätsmodul E Dimension: N/mm ² Berechnung: $E = \Delta\sigma / \Delta\varepsilon$	Bruchdehnung A Dimension: % oder dimensionslos Berechnung: $A = (L_u - L_0) / L_0$	Zugfestigkeit R_m Dimension: N/mm ² Berechnung: $R_m = F_m / A_0$
Querkontraktionszahl μ dimensionslos Berechnung: $\mu = -\varepsilon_q / \varepsilon_l$	Brucheinschnürung Z Dimension: % oder dimensionslos Berechnung: $Z = (A_0 - A_u) / A_0$	Streckgrenze R_e (R_{eH}, R_{eL}) Dimension: N/mm ² Berechnung: $R_e = F_e / A_0$

2.1.3 Zulässige Spannung bei Zugbeanspruchung

Mit einem Versagen ist zu rechnen, sobald die im Bauteil wirkende Spannung die Festigkeitsgrenzen erreicht. Bei der Festlegung der zulässigen Belastung wird man aus Sicherheitsgründen nicht bis an die Festigkeitsgrenzen (R_e bzw. R_p oder R_m) gehen, sondern man begrenzt die im Bauteil wirkenden Spannungen auf die **zulässige Spannung** σ_{zul} .

Die zulässige Spannung σ_{zul} erhält man, indem man den jeweiligen Festigkeitskennwert (z. B. R_e bzw. R_p oder R_m) durch einen **Sicherheitsbeiwert S** dividiert. Mit Hilfe des Sicherheitsbeiwertes sollen alle Unsicherheiten einer Festigkeitsberechnung abgedeckt werden. Derartige Unsicherheiten sind beispielsweise:

- Lastannahmen (z. B. Belastungsschwankungen, tatsächliche Höhe der Beanspruchung),
- Werkstoffkennwerte (Gefügeinhomogenitäten, Werkstofffehler),
- Spannungsermittlung (Idealisierungen der Bauteilgeometrie).

Die Höhe des Sicherheitsbeiwerts hängt ab von:

- Anzahl und Einfluss der auszugleichenden Unsicherheitsfaktoren,
- Gefährdungspotenzial das mit dem Erreichen der Grenzbeanspruchung verbunden ist,
- Folgen im Falle des Versagens.

Wenngleich eine plastische Verformung in der Regel zum Verlust der Funktionsfähigkeit eines Bauteils führt, so kann der Sicherheitsbeiwert gegen plastische Verformung (Fließen) dennoch niedriger angesetzt werden, da sich ein Bruch durch mehr oder weniger ausgeprägte plastische Verformungen ankündigt (**Zähbruch**). Die Sicherheit gegen Bruch ist andererseits umso höher anzusetzen, je geringer die Verformungsfähigkeit des Werkstoffes ist, da sich der

Bruch bei einem spröden Werkstoff nicht durch nennenswerte plastische Formänderungen ankündigt (**Sprödbruch**). In Tabelle 2.2 sind Kennwerte zur Ermittlung der zulässigen Spannung unter Zugbeanspruchung sowie Sicherheitsbeiwerte zusammengestellt. Weitere Sicherheitsbeiwerte, wie sie in der FKM-Richtlinie [2] empfohlen werden, sind im Anhang 2 zusammengestellt.

Tabelle 2.2 Kennwerte zur Bestimmung der zulässigen Spannung unter reiner Zugbeanspruchung

Werkstoff bzw. Werkstoffzustand	Versagensart	Werkstoffkennwert	Sicherheitsbeiwert ¹⁾
duktil	Fließen	R_e bzw. $R_{p0,2}$	$S_F = 1,2 \dots 2,0$
	Bruch	R_m	$S_B = 2,0 \dots 4,0$
spröde	Bruch	R_m	$S_B = 4,0 \dots 9,0$

¹⁾ Anhaltswerte, sofern keine einschlägigen Berechnungsvorschriften vorliegen.

Zusammenfassend errechnet sich die zulässige Spannung σ_{zul} unter Zugbeanspruchung wie folgt:

Bauteile aus duktilen Werkstoffen bzw. duktile Werkstoffverhalten

- Fließen:
$$\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F} \text{ bzw. } \frac{R_p}{S_F} \quad \text{mit } S_F = 1,2 \dots 2,0 \quad (2.11)$$

- Bruch:
$$\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B} \quad \text{mit } S_B = 2,0 \dots 4,0 \quad (2.12)$$

Maßgebend für den Festigkeitsnachweis ist der niedrigere der beiden Werte für σ_{zul} .

Bauteile aus spröden Werkstoffen bzw. sprödes Werkstoffverhalten

- Bruch:
$$\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B} \quad \text{mit } S_B = 4,0 \dots 9,0 \quad (2.13)$$

2.1.4 Formänderung durch einachsige Normalspannung

Mechanische Spannungen bewirken in einem deformierbaren Körper Formänderungen, die sich durch Längen- und/oder Winkeländerungen äußern können. Der Zusammenhang zwischen Formänderungen und Spannungen wird durch **Stoffgesetze** hergestellt.

2.1.4.1 Hookesches Gesetz

Im Gültigkeitsbereich der Hookeschen Geraden besteht zwischen Normalspannung σ und Dehnung ε ein linearer Zusammenhang, der durch das **Hookesche Gesetz** ausgedrückt werden kann:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Hookesches Gesetz bei einachsiger Beanspruchung

(2.14)

Die Gesetzmäßigkeit wurde erstmals 1678 von **Robert Hooke** (1635 ... 1703) veröffentlicht, allerdings als linearer Zusammenhang zwischen Belastung und Längenänderung elastisch beanspruchter Federn (*ut tensio, sic vis* = wie die Kraft, so die Streckung). Die Formulierung als linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung ($\sigma = E \cdot \varepsilon$) erfolgte erst 1727 durch **Leonhard Euler** (1707 ... 1783).

Gleichung 2.14 gilt nur bei einachsiger Zug- oder Druckbeanspruchung. Bei mehrachsiger Beanspruchung muss das Hookesche Gesetz erweitert werden (Kapitel 5).

Der Proportionalitätsfaktor E in Gleichung 2.14 wird als **Elastizitätsmodul** (kurz: **E-Modul**) bezeichnet und entspricht der Steigung der Hookeschen Geraden im Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Bilder 2.5 und 2.6 sowie Bilder 2.9 bis 2.11). Der Elastizitätsmodul E hat innerhalb einer Werkstoffgruppe ähnliche Werte:

Stähle und Stahlguss: $E = 200000 \dots 210000 \text{ N/mm}^2$

Al und Al-Legierungen: $E = 60000 \dots 80000 \text{ N/mm}^2$

Mg und Mg-Legierungen: $E = 40000 \dots 45000 \text{ N/mm}^2$

Die Elastizitätsmoduln wichtiger Konstruktionswerkstoffe finden sich im Anhang 1 (Werkstofftabellen).

Anschaulich entspricht der Zahlenwert des Elastizitätsmoduls, wie bereits erwähnt, derjenigen Spannung mit der man einen Zugstab beanspruchen muss, um eine elastische Dehnung von 100% (also eine Verdoppelung der Ausgangslänge) zu erreichen. Es muss jedoch angemerkt werden, dass nahezu alle Werkstoffe bereits weit vorher eine plastische Verformung oder einen Bruch erleiden.

2.1.4.2 Nicht lineare Elastizität

Das Hookesche Gesetz gilt nicht für alle Werkstoffe. Bei einigen Metallen und insbesondere bei nicht metallischen Werkstoffen, insbesondere den Kunststoffen, beobachtet man nicht lineare Elastizitätsscheinungen. Ein bekanntes Beispiel für **nicht lineare Elastizität** bei Metallen ist das Gusseisen mit Lamellengraphit, dessen Elastizitätsmodul E

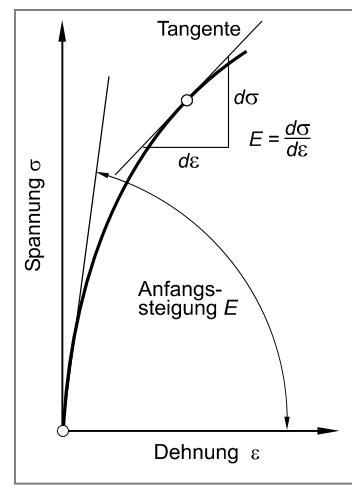


Bild 2.12 Nicht lineare Elastizität

in Abhängigkeit der Spannung 80000 N/mm² bis 130000 N/mm² betragen kann. Unter Zugbeanspruchung sinkt der Elastizitätsmodul aufgrund lokaler Plastifizierung an den Enden der Graphitlamellen. Unter Druckbeanspruchung verhält sich der Werkstoff hingegen über weite Spannungsbereiche linear-elastisch, d. h. der Elastizitätsmodul ist konstant.

Bei nicht linearer Elastizität wird als Maß für den Elastizitätsmodul entweder die Anfangssteigung oder die Steigung (Tangente) der Kurve in einem bestimmten Kurvenpunkt angegeben (Bild 2.12).

2.1.4.3 Poissonsches Gesetz

Die Zugbeanspruchung eines elastischen Körpers führt nicht nur zu einer Längenänderung (ΔL) bzw. zu einer Dehnung in Beanspruchungsrichtung (ε bzw. ε_l), sondern auch zu einer Verformung in Querrichtung. Eine Zugspannung führt dementsprechend zu einer Längenzunahme bei gleichzeitiger Querkontraktion (Stab wird länger und dünner), eine Druckbeanspruchung hingegen zu umgekehrten Verhältnissen. Die Formulierung dieser Gesetzmäßigkeit geht auf den französischen Mathematiker **Siméon Denis Poisson** (1781 ... 1840) zurück und wird als **Poissonsches Gesetz** bezeichnet:

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon_l \quad \text{Poissonsches Gesetz} \quad (2.15)$$

Die dimensionslose Werkstoffkonstante μ (mitunter auch ν) wird als **Querkontraktionszahl** oder **Querzahl** bezeichnet. Den Kehrwert $m = 1/\mu$ nennt man **Poisson-Zahl**. Das negative Vorzeichen berücksichtigt, dass eine Längsdehnung (Zugbeanspruchung) mit einer Querstauchung bzw. eine Längstauchung (Druckbeanspruchung) mit einer Querdehnung einhergeht. Die Querkontraktionszahl kann im Zugversuch ermittelt werden, falls spezielle Querdehnungsaufnehmer eingesetzt werden (Kapitel 2.1.2).

Die Querkontraktionszahl kann Werte zwischen $\mu = 0$ (keine Querdehnung) und $\mu = 0,5$ (inkompressibler Werkstoff) annehmen. Für Metalle findet man bei linear-elastischem Verhalten: $0,25 \leq \mu \leq 0,40$. Häufig wird mit den folgenden Werten gerechnet:

Beton:	$\mu \approx 0$
Stähle und Stahlguss:	$\mu = 0,30$
Gusseisen mit Lamellengraphit:	$\mu = 0,25 \dots 0,27$
Al und Al-Legierungen:	$\mu = 0,33$
Mg und Mg-Legierungen:	$\mu = 0,35$
Kupfer:	$\mu = 0,34$
Zink:	$\mu = 0,39$
Elastomere:	$\mu \approx 0,5$

2.1.5 Aufgaben

Aufgabe 2.1

Ein Zugstab aus Vergütungsstahl 34CrMo4 mit Kreisringquerschnitt ($d_a = 25 \text{ mm}$, $s = 2,5 \text{ mm}$) und einer Länge von $l_0 = 1,2 \text{ m}$ (im unbelasteten Zustand) wird durch eine mittig angreifende statische Kraft von $F = 60 \text{ kN}$ auf Zug beansprucht.

Werkstoffkennwerte 34CrMo4:

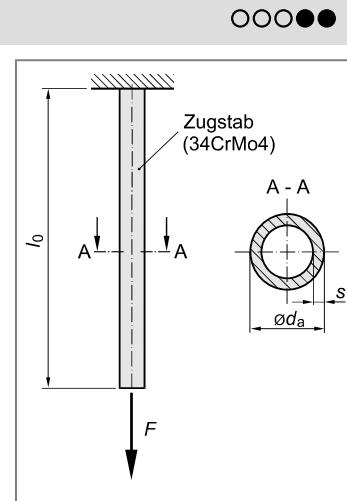
$$R_{p0,2} = 680 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1050 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 208000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,0$$

- Ermitteln Sie die Normalspannung im Zugstab.
- Berechnen Sie die Sicherheiten gegen Fließen (S_F) und gegen Bruch (S_B). Sind die Sicherheiten ausreichend?
- Bestimmen Sie die Verlängerung Δl des Zugstabes bei der angegebenen Belastung.
- Die Verringerung des Außendurchmessers (Δd_a) soll auf 0,01 mm begrenzt werden. Ermitteln Sie für diesen Fall den zulässigen Wert der Zugkraft F .
- Eine zweite Variante des Zugstabes aus derselben Stahlsorte (34CrMo4) soll eine Zugkraft von $F^* = 150 \text{ kN}$ aufnehmen. Berechnen Sie die erforderliche Wandstärke s , falls der Außendurchmesser unverändert bleiben soll ($d_a = 25 \text{ mm}$) und eine Sicherheit von $S_F = 1,4$ gegenüber Fließen gefordert wird.

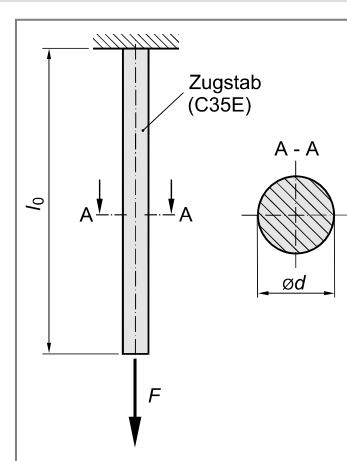


Aufgabe 2.2



Ein Zugstab mit Vollkreisquerschnitt und einer Länge von $l_0 = 1500 \text{ mm}$ aus Vergütungsstahl C35E ($R_e = 430 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 630 \text{ N/mm}^2$; $E = 210000 \text{ N/mm}^2$) soll als Zuganker verwendet werden. Der Stab muss eine statische Betriebskraft von $F = 15500 \text{ N}$ aufnehmen.

- Ermitteln Sie den erforderlichen Durchmesser d des Zugstabes, damit die Betriebskraft mit Sicherheit aufgenommen werden kann ($S_F = 1,5$ und $S_B = 2,0$).
- Berechnen Sie für die Betriebskraft von $F = 15500 \text{ N}$ die Dehnung ε sowie die Verlängerung Δl des Zugstabes.
- Bestimmen Sie diejenige statische Zugkraft F_B , die zu einem Bruch des Zugstabes führt.



Aufgabe 2.3

Ein Wassertank ist an vier Stahlbändern aus S275JR befestigt (siehe Abbildung). Die Masse des leeren Tanks beträgt $m_L = 2000 \text{ kg}$, die des gefüllten Tanks $m_V = 3600 \text{ kg}$ ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$). Die Stahlbänder haben eine Querschnittsfläche von $25 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$. Der Abstand der Stahlbänder vom linken und rechten Ende des Tankes beträgt jeweils $a = 500 \text{ mm}$.

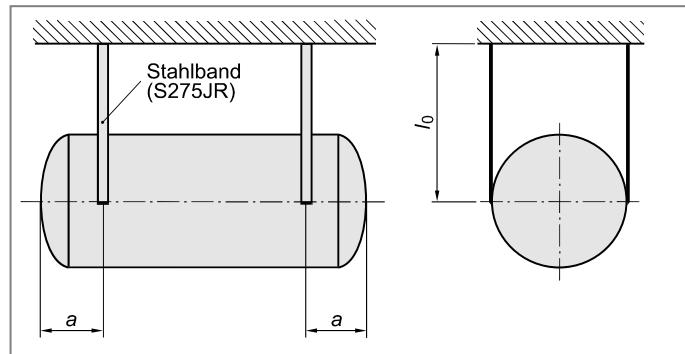
Werkstoffkennwerte S275JR:

$$R_c = 265 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 470 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

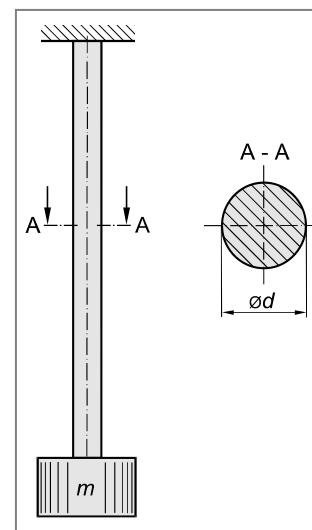


- Berechnen Sie die Spannung in den Bändern bei leerem und bei vollem Tank.
- Ermitteln Sie bei vollem Wassertank die Sicherheiten der Bänder gegen Versagen. Sind die Sicherheiten ausreichend?
- Um welchen Betrag Δl senkt sich der Tank beim Befüllen, falls die Länge der Bänder bei leerem Tank $l_0 = 1,5 \text{ m}$ beträgt?

Aufgabe 2.4

Die Abbildung zeigt eine Zugstange mit Vollkreisquerschnitt aus Werkstoff S275JR ($R_c = 260 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 480 \text{ N/mm}^2$). Die Stange wird durch die Masse m belastet ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

- Berechnen Sie den Durchmesser d der Zugstange, damit eine Masse von $m = 2500 \text{ kg}$ mit Sicherheit ($S_F = 1,5$ bzw. $S_B = 2,0$) aufgenommen werden kann.
- Bei einer alternativen Ausführung wird eine Zugstange aus der Gusseisensorte EN-GJL-300 ($R_m = 300 \text{ N/mm}^2$) mit einem Durchmesser von $d = 20 \text{ mm}$ verwendet. Ist die Sicherheit ausreichend, falls die Stange mit der Masse von $m = 2500 \text{ kg}$ belastet wird?
- Ermitteln Sie die zulässige Masse m für den Fall einer Zugstange aus Werkstoff EN-GJL-300, falls eine Sicherheit von $S_B = 4,0$ gegen Bruch gefordert wird.



Aufgabe 2.5

Das dargestellte Stabwerk ist an seinem linken Ende gelenkig gelagert und trägt an seinem freien, rechten Ende die Masse $m = 1500 \text{ kg}$ ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$). Das Stabwerk wird in zwei Varianten gefertigt:

Variante 1: Baustahl S275JR ($R_m = 510 \text{ N/mm}^2$; $R_e = 275 \text{ N/mm}^2$; $E = 210000 \text{ N/mm}^2$)

Variante 2: EN AW-Al Mg5-H14 ($R_m = 350 \text{ N/mm}^2$; $R_{p0,2} = 270 \text{ N/mm}^2$; $E = 70000 \text{ N/mm}^2$)

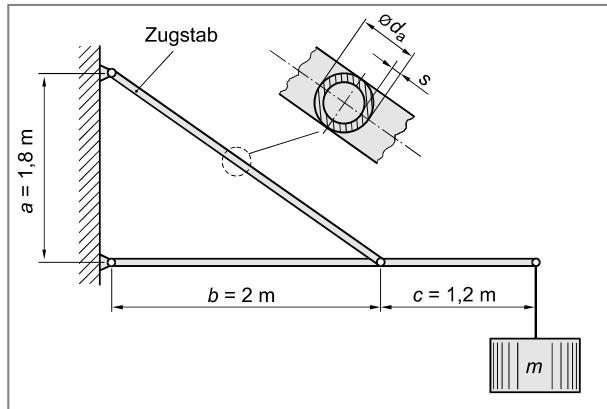
a) Berechnen Sie die Kraft F_S am Zugstab.

b) Ermitteln Sie die Spannung im Zugstab (Kreisringquerschnitt mit $d_a = 50 \text{ mm}$ und $s = 5 \text{ mm}$).

c) Errechnen Sie die Verlängerung Δl des Zugstabes, falls das Stabwerk aus S275JR bzw. aus EN AW-Al Mg5-H14 gefertigt wird.

d) Bestimmen Sie die Belastung m_1 , die zu einem Bruch des Zugstabs führt, falls das Stabwerk aus S275JR bzw. aus EN AW-Al Mg5-H14 gefertigt wird.

e) Berechnen Sie die Wandstärke s des Zugstabs ($d_i = 40 \text{ mm}$), damit eine erhöhte Belastung von $m_2 = 3250 \text{ kg}$ mit Sicherheit ($S_F = 1,5$ bzw. $S_B = 2,0$) aufgenommen werden kann, falls das Stabwerk aus S275JR bzw. EN AW-Al Mg5-H14 gefertigt wird.

**Aufgabe 2.6**

Die dargestellte gelenkig gelagerte Konstruktion soll durch ein Stahlseil aus einem Spannstahl gehalten werden. Das Stahlseil hat eine Querschnittsfläche von $A = 100 \text{ mm}^2$.

Ermitteln Sie die zulässige Belastung F , falls die Verlängerung des Stahlseils auf $0,5 \text{ mm}$ begrenzt werden muss.

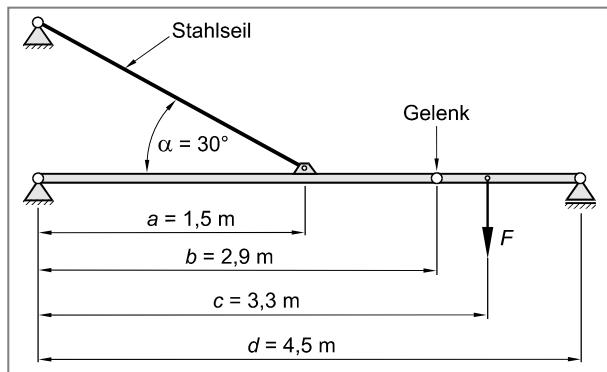
Werkstoffkennwerte des Spannstahls:

$$R_{p0,2} = 720 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 950 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



Aufgabe 2.7

Ein Vierkantprofilstab aus der unlegierten Vergütungsstahlsorte C60E+QT mit einer Kantenlänge von $a = 36 \text{ mm}$ wird aus Gründen des Korrosionsschutzes allseitig mit einer $s = 7 \text{ mm}$ dicken Lage aus der nicht rostenden Stahlsorte X6CrNiMoTi17-12-2 plattierte (kraftschlüssige Verbindung). Der hierdurch entstehende Verbundstab wird durch die im Flächenschwerpunkt S angreifende Zugkraft statisch beansprucht.

Es kann für beide Stahlsorten ein linear-elastisch ideal-plastisches Werkstoffverhalten angenommen werden (siehe Abbildung). Eigenspannungen durch das Platten können vernachlässigt werden.

Werkstoffkennwerte von C60E+QT:

$$R_e = 580 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 212000 \text{ N/mm}^2$$

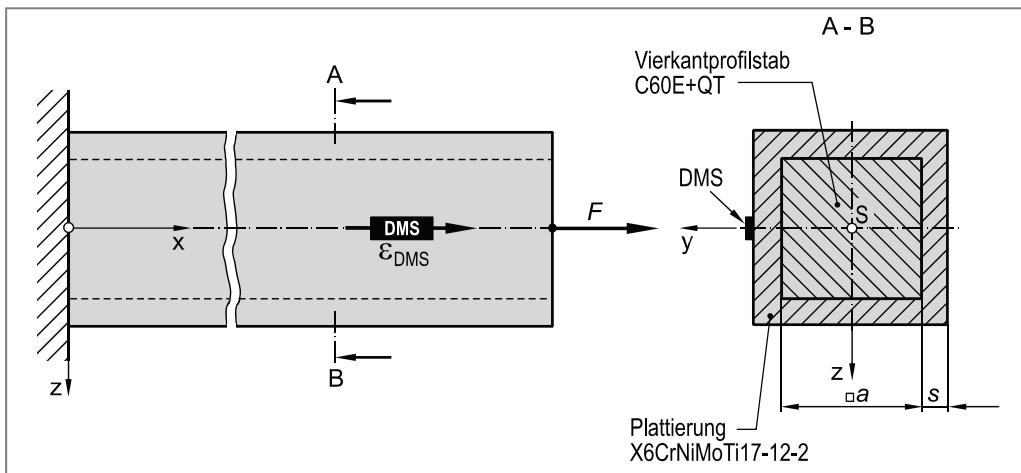
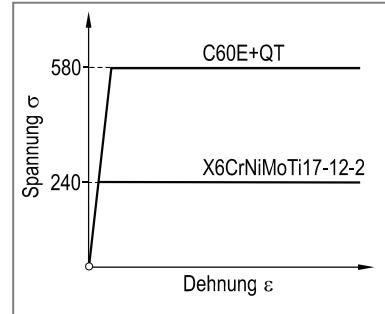
$$\mu = 0,30$$

Werkstoffkennwerte von X6CrNiMoTi17-12-2:

$$R_{p0,2} = 240 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 212000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- Berechnen Sie die zulässige Zugkraft F_1 , damit Fließen mit einer Sicherheit von $S_F = 1,4$ an keiner Stelle des Verbundstabes eintritt.
- Ermitteln Sie diejenige Zugkraft F_2 , die erstmals zu einem Fließen des Verbundstabes führt.
- Berechnen Sie die Spannungen im Vierkantprofilstab sowie in der Platte bei einer Zugkraft von $F_3 = 800 \text{ kN}$.

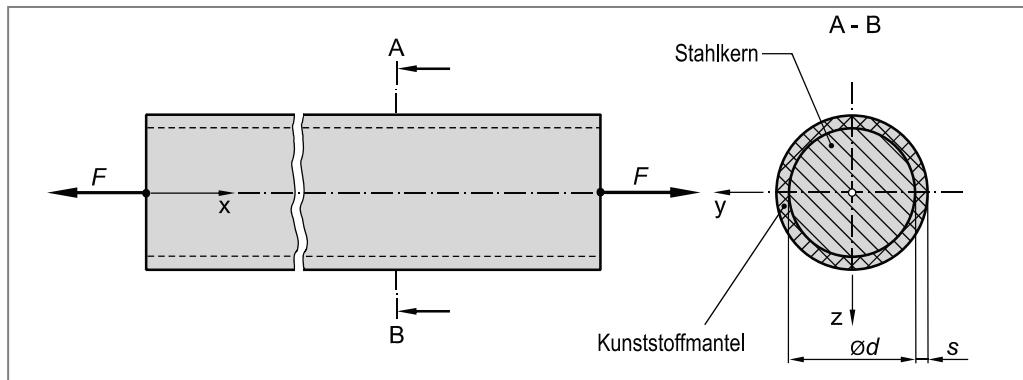
Zur Kontrolle der Beanspruchung wird in Längsrichtung des Verbundstabes ein Dehnungsmessstreifen appliziert (siehe Abbildung).

- Ermitteln Sie die wirkende Zugkraft F_4 bei einer Dehnungsanzeige von $\varepsilon_{\text{DMS}} = 1,800 \text{ \%}$.

Aufgabe 2.8

Ein Stahlseil ($R_{p0,2} = 980 \text{ N/mm}^2$, $E = 212\,000 \text{ N/mm}^2$) mit einem Durchmesser von 50 mm und einer Länge von 75 m wurde aus Gründen des Korrosionsschutzes mit einer thermoplastischen Kunststoffschicht ($E = 12\,500 \text{ N/mm}^2$) mit einer Dicke von 3 mm ummantelt. Stahlseil und Kunststoffmantel können als fest miteinander verbunden betrachtet werden.

Berechnen Sie für eine Zugkraft von $F = 1250 \text{ kN}$ die Verlängerung der Stahlseils sowie die Spannungen im Stahlkern und im Kunststoffmantel. Das Werkstoffverhalten des Kunststoffmantels kann als linear-elastisch betrachtet werden. Spannungen infolge unterschiedlicher Querkontraktion von Mantel und Kern sollen unberücksichtigt bleiben.



2.2 Druck

Eine an einem geraden, prismatischen Stab zentrisch angreifende Druckkraft F_d führt zu einer reinen **Druckspannung** in der Querschnittsfläche A . Typische, durch reine Druckbeanspruchung beaufschlagte Bauteile sind zum Beispiel:

- Stützen
- dehnungsbehinderte Teile wie z. B. Temperatur beaufschlagte Rohrleitungen
- Pleuel in Verbrennungsmotoren.

2.2.1 Spannungsermittlung bei Druckbeanspruchung

Die Druckbeanspruchung kann als Umkehrung der Zugbeanspruchung aufgefasst werden. Dementsprechend errechnet sich die Druck(normal)-spannung σ_d als Quotient aus Druckkraft F_d (Kraftkomponente senkrecht zur Querschnittsfläche) und der Querschnittsfläche A (Bild 2.13):

$$\sigma_d = \frac{F_d}{A} \quad \text{Grundgleichung zur Spannungsermittlung (2.16) bei reiner Druckbeanspruchung}$$

F_d (Druck-)Kraftkomponente senkrecht zur Schnittfläche (N), siehe auch Kapitel 2.4.1

A Schnittfläche (mm^2)

σ_d (Druck-)Normalspannung (N/mm^2)

Analog zur Zugbeanspruchung liegt auch hier eine einachsige Beanspruchung vor. Im Unterschied zur Zugspannung erhalten Druckspannungen üblicherweise ein negatives Vorzeichen oder den Index d , bisweilen auch beides.

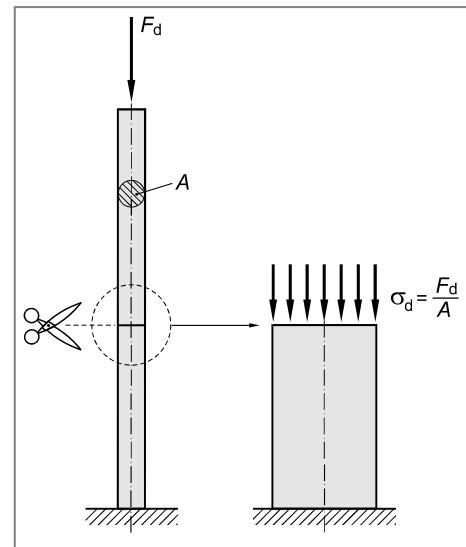


Bild 2.13 Gerader, prismatischer Stab unter Druckbeanspruchung
a) ungeschnitten
b) geschnitten

2.2.2 Werkstoffverhalten und Kennwerte bei Druckbeanspruchung

Festigkeitskennwerte für druckbeanspruchte Bauteile werden im **Druckversuch** nach DIN 50106 ermittelt. Der Druckversuch hat dabei eine besondere Bedeutung für Werkstoffe wie Beton, Ziegel, Holz, usw. Auch metallische Werkstoffe werden im Druckversuch geprüft. Eine große Bedeutung hat der Druckversuch hierbei für spröde Werkstoffe (z. B. Gusseisen mit Lamellengraphit) oder auf Druck beanspruchte Metalle (z. B. Lagermetalle). Auf die Beschreibung des Druckversuchs soll verzichtet und auf die Norm verwiesen werden.

2.2.2.1 Duktile Werkstoffe

In Analogie zum Zugversuch wird beim Druckversuch eine dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm vergleichbare **Druckspannungs-Stauchungs-Kurve** ermittelt. Bild 2.14 zeigt beispielhaft die Spannungs-Dehnungs-Diagramme bei Zug- und Druckbeanspruchung für duktile Metalle mit und ohne ausgeprägte Streckgrenze. Im Bereich der elastischen Beanspruchung stimmen die Spannungs-Dehnungs- bzw. die Druckspannungs-Stauchungs-Kurven weitgehend

überein, der Elastizitätsmodul ist also für Zug- und Druckbeanspruchung identisch und die Hookesche Gerade weist am Übergang von Zug nach Druck keinen Knick auf. Bei höheren Beanspruchungen beobachtet man jedoch erhebliche Unterschiede. Mit Erreichen der Proportionalitätsgrenze σ_{dp} endet das linear-elastische Werkstoffverhalten.

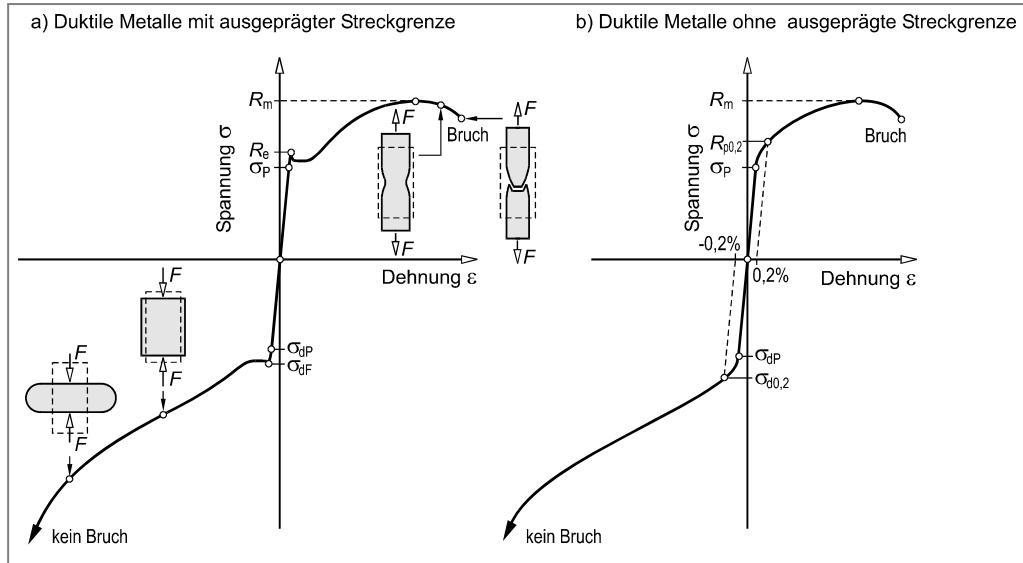


Bild 2.14 Spannungs-Dehnungs- bzw. Druckspannungs-Stauchungs-Diagramme duktiler Metalle

Werkstoffe, die im Zugversuch eine ausgeprägte Streckgrenze aufweisen (Kapitel 2.1.2.3) zeigen auch bei Druckbeanspruchung eine entsprechende Unstetigkeit im Druckspannungs-Stauchungs-Diagramm. Der entsprechende, den Beginn einer plastischen Verformung kennzeichnende Werkstoffkennwert wird in Analogie zur Streckgrenze R_e im Zugversuch, als **natürliche Quetschgrenze σ_{df}** (mitunter auch **Druckfließgrenze**) bezeichnet (Bild 2.14a).

Die Quetsch- bzw. Druckfließgrenze ist der Quotient aus der Druckkraft F_F mit Erreichen der ersten Unstetigkeit der Druckspannungs-Stauchungs-Kurve und der Anfangsquerschnittsfläche A_0 . Die Quetsch- bzw. Druckfließgrenze σ_{df} entspricht betragsmäßig etwa Streckgrenze R_e .

$$\sigma_{df} = \frac{F_F}{A_0} \approx R_e \quad \text{Natürliche Quetschgrenze (Druckfließgrenze)} \quad (2.17)$$

σ_{df} natürliche Quetschgrenze oder Druckfließgrenze (N/mm^2)

F_F Druckkraft bei der ersten Unstetigkeit der Druckspannungs-Stauchungs-Kurve (N)

A_0 Anfangsquerschnittsfläche (mm^2)

Bei Werkstoffen ohne ausgeprägte Streckgrenze (Kapitel 2.1.2.3) wird anstelle der Quetschgrenze ersatzweise die **Stauchgrenze σ_{dp}** ermittelt (Bild 2.14b). Die Stauchgrenze ist der Quotient aus derjenigen Kraft F_p , die zu einer bleibenden Stauchung von $p\%$ führt, bezogen auf die Anfangsquerschnittsfläche A_0 . Die Stauchgrenze σ_{dp} entspricht betragsmäßig etwa der Dehngrenze R_p .

$$\sigma_{dp} = \frac{F_p}{A_0} \approx R_p \quad \text{Stauchgrenze} \quad (2.18)$$

σ_{dp} Stauchgrenze (N/mm^2)

F_p Druckkraft, die zu einer bleibenden Stauchung von $p\%$ führt (N)

A_0 Anfangsquerschnittsfläche (mm^2)

Besonders vereinbarte Stauchgrenzen sind die **0,2%-Stauchgrenze** $\sigma_{d0,2}$ (entspricht etwa der 0,2%-Dehngrenze $R_{p0,2}$ bei Zugbeanspruchung) die zu einer bleibenden Stauchung von 0,2% führt und die **2%-Stauchgrenze** σ_{d2} , die zu einer bleibenden Stauchung von 2% führt.

Da mit abnehmender Höhe der Probe der Durchmesser zunimmt, steigt die Druckspannungs-Stauchungs-Kurve duktiler Werkstoffe kontinuierlich an, ohne dass ein Bruch zu erwarten ist. Die Probe wird mehr oder weniger zusammengedrückt. Da also ein Bruch bei duktilen Werkstoffen unter Druckbeanspruchung nicht auftritt bzw. bei vielen technischen Bauteilen vorher mit einem Versagen durch Knickung (Kapitel 8) zu rechnen ist, wird eine der Zugfestigkeit entsprechende Druckfestigkeit bei duktilen Werkstoffen nicht ermittelt.

2.2.2.2 Spröde Werkstoffe

Spröde Werkstoffe können unter Druckbeanspruchung in der Regel weit höhere Belastungen ertragen als unter Zuglast. Bild 2.15 zeigt, dass die Druckfestigkeit spröder Werkstoffe (z. B. Gusseisen mit Lamellengraphit) ein Vielfaches der Zugfestigkeit R_m betragen kann.

Während spröde Werkstoffe unter Zugbeanspruchung durch einen **Trennbruch** versagen, sobald die Zugspannung die Zugfestigkeit R_m erreicht, ist unter Druckbeanspruchung mit einem **Scher-** bzw. **Schiebungsbruch** durch Abscherung zu rechnen, sobald die Druckspannung die Druckfestigkeit σ_{dB} erreicht (siehe auch Kapitel 6.1). Dieses Werkstoffverhalten wird auch experimentell bestätigt.

Der für Festigkeitsberechnungen relevante Werkstoffkennwert unter Druckbeanspruchung ist die **Druckfestigkeit** σ_{dB} . Der Kennwert ist definiert als der Quotient aus Druckkraft F_B beim Anriß oder Bruch der Probe, bezogen auf die Anfangsquerschnittsfläche A_0 :

$$\sigma_{dB} = \frac{F_B}{A_0} \quad \text{Druckfestigkeit} \quad (2.19)$$

σ_{dB} Druckfestigkeit (N/mm^2)

F_B Druckkraft beim Anriß oder Bruch der Probe (N)

A_0 Anfangsquerschnittsfläche (mm^2)

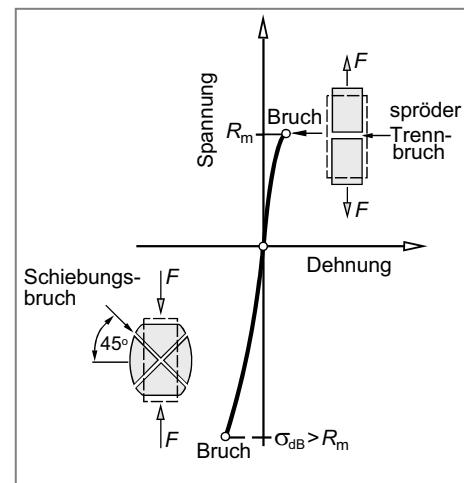


Bild 2.15 Spannungs-Dehnungs- bzw. Druckspannungs-Stauchungs-Diagramm spröder Metalle

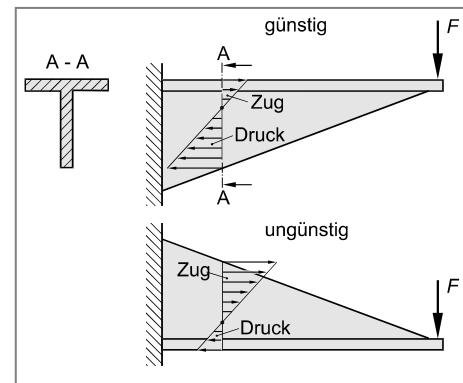


Bild 2.16 Werkstoffgerechtes Konstruieren am Beispiel eines Kragarms aus (sprödem) Gusseisen mit Lamellengraphit

Wird bei der Konstruktion von Bauteilen aus spröden Werkstoffen darauf geachtet, dass die höchst beanspruchten Querschnitte überwiegend Druckspannungen ausgesetzt sind, dann kann ihre Beanspruchbarkeit deutlich verbessert werden. Bild 2.16 verdeutlicht diesen Sachverhalt am Beispiel eines Kragarms aus Gusseisen mit Lamellengraphit (werkstoffgerechtes Konstruieren).

2.2.3 Zulässige Spannung bei Druckbeanspruchung

Ein Versagen unter Druckbeanspruchung kann bei duktilen Werkstoffen durch Fließen oder Knickung erfolgen. Bei spröden Werkstoffen unter Druckbeanspruchung ist Bruch oder Knickung als mögliche Versagensursache zu berücksichtigen. Die Berechnung der Knickkraft F_K bzw. der Knickspannung σ_K für den Versagensfall Knickung erfolgt in Kapitel 8.

In Tabelle 2.3 sind Kennwerte zur Bestimmung der zulässigen Spannung unter reiner Druckbeanspruchung sowie Richtwerte für Sicherheitsbeiwerte zusammengestellt. Die Zahlenwerte entsprechen dabei den Sicherheitsbeiwerten wie sie üblicherweise für die Zugbeanspruchung (Tabelle 2.2) verwendet werden.

Tabelle 2.3 Kennwerte zur Bestimmung der zulässigen Spannung unter reiner Druckbeanspruchung

Werkstoff bzw. Werkstoffzustand	Versagensart	Werkstoffkennwert	Ersatzwert	Sicherheitsbeiwert ¹⁾
duktil	Fließen	σ_{dF} bzw. $\sigma_{d0,2}$	R_e bzw. $R_{p0,2}$	$S_F = 1,2 \dots 2,0$
	Knickung ²⁾	σ_K	----	$S_K = 2,5 \dots 5,0$
spröde	Bruch	σ_{dB}	³⁾	$S_B = 4,0 \dots 9,0$
	Knickung ²⁾	σ_K	----	$S_K = 2,5 \dots 5,0$

¹⁾ Anhaltswerte, falls keine einschlägigen Berechnungsvorschriften vorliegen.

²⁾ Kapitel 8

³⁾ In der Regel ist bei spröden Werkstoffen $\sigma_{dB} > R_m$

Zusammenfassend errechnet sich die zul. Spannung σ_{zul} unter Druckbeanspruchung wie folgt:

Bauteile aus duktilen Werkstoffen bzw. duktile Werkstoffverhalten

$$\bullet \text{ Fließen: } \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \text{ bzw. } \frac{\sigma_{dp}}{S_F} \text{ mit } S_F = 1,2 \dots 2,0 \quad (2.20)$$

$$\bullet \text{ Knickung } ^1): \sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K} \text{ mit } S_K = 2,5 \dots 5,0 \quad (2.21)$$

Maßgebend für den Festigkeitsnachweis ist der niedrigere der beiden Werte.

Bauteile aus spröden Werkstoffen bzw. spröder Werkstoffzustand

$$\bullet \text{ Bruch: } \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dB}}{S_B} \text{ mit } S_B = 4,0 \dots 9,0 \quad (2.22)$$

$$\bullet \text{ Knickung } ^1): \sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K} \text{ mit } S_K = 2,5 \dots 5,0 \quad (2.23)$$

Maßgebend für den Festigkeitsnachweis ist auch hier der niedrigere der beiden Werte.

¹⁾ Siehe Kapitel 8

2.2.4 Aufgaben

Aufgabe 2.9

Eine Stahlstütze aus Werkstoff S235JR mit Kreisringquerschnitt soll eine axiale Druckkraft von $F = 120 \text{ kN}$ aufnehmen. Die Stütze hat die Länge $l_0 = 1600 \text{ mm}$ und einen Außenradius von $d_a = 100 \text{ mm}$.

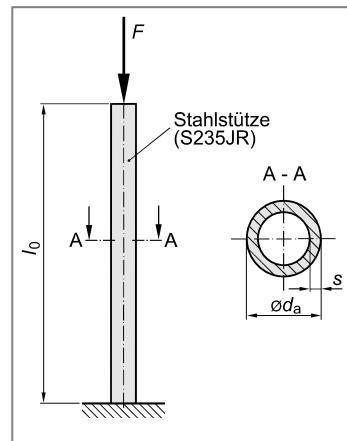
Werkstoffkennwerte S235JR:

$$R_c = 235 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 390 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

- Auf welche Weise kann die Stütze versagen?
- Berechnen Sie die mindestens erforderliche Wandstärke s , damit die Druckkraft F mit Sicherheit ($S_F = 1,5$) aufgenommen werden kann (Berechnung nur gegen Fließen).
- Um welchen Betrag Δl verkürzt sich die Stütze für die in Teil b) errechnete Wandstärke unter Wirkung der Druckkraft von $F = 120 \text{ kN}$?



Aufgabe 2.10

Die Abbildung zeigt eine einfache hydraulische Hebevorrichtung. Die maximale Belastung der Hebevorrichtung soll $m = 10000 \text{ kg}$ betragen ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$). Die Kolbenstange wurde aus Vergütungsstahl C60E gefertigt. Eine mögliche Knickung der Kolbenstange soll nicht betrachtet werden.

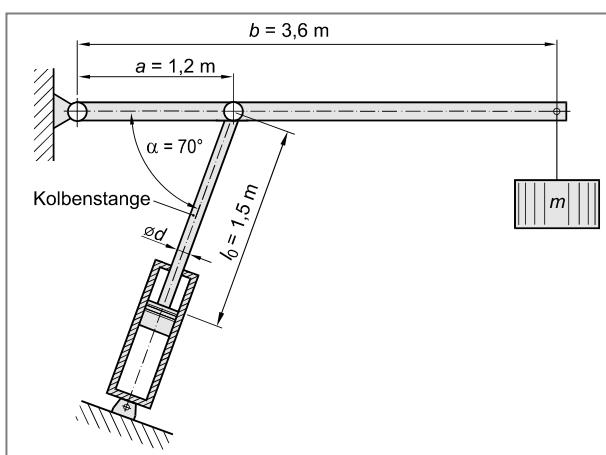
Werkstoffkennwerte C60E (vergütet):

$$R_{p0,2} = 580 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 950 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- Berechnen Sie den erforderlichen Durchmesser d der Kolbenstange (Vollkreisquerschnitt), damit Fließen mit Sicherheit ($S_F = 1,20$) ausgeschlossen werden kann.
- Ermitteln Sie die Verkürzung Δl der Kolbenstange bei einer Belastung von $m = 10000 \text{ kg}$ und dem in Teil a) berechneten Durchmesser d (Länge im unbelasteten Zustand $l_0 = 1,5 \text{ m}$).
- Bei einer anderen Ausführung der Kolbenstange wird ein Durchmesser von $d_1 = 80 \text{ mm}$ gewählt (Vollkreisquerschnitt). Berechnen Sie die maximale Belastbarkeit m^* der Hebevorrichtung, falls die Durchmesservergrößerung der Kolbenstange maximal $0,015 \text{ mm}$ betragen darf.

Aufgabe 2.11

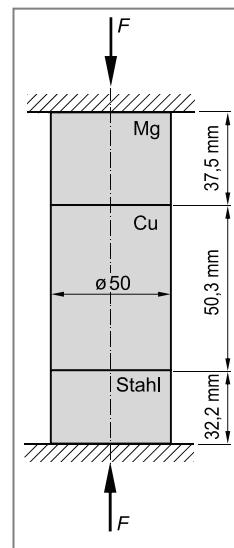
Zwischen den ebenen, starren Druckplatten einer Hydraulikpresse werden drei eben aufeinander liegende Metallscheiben mit gleichem Durchmesser ($d = 50 \text{ mm}$) jedoch aus verschiedenen Werkstoffen (Magnesium, Kupfer und Stahl) auf Druck beansprucht (siehe Abbildung). Bei der zunächst unbekannten Druckkraft F wird an einer Messuhr die gemeinsame Verkürzung $\Delta l = 0,25 \text{ mm}$ ermittelt.

Scheibe 1: Magnesium: $E = 45000 \text{ N/mm}^2$

Scheibe 2: Kupfer: $E = 120000 \text{ N/mm}^2$

Scheibe 3: Stahl: $E = 210000 \text{ N/mm}^2$

- Berechnen Sie die Druckkraft F .
- Ermitteln Sie die Spannungen in den einzelnen Metallscheiben.
- Berechnen Sie die Verkürzungen der einzelnen Metallscheiben unter Wirkung der Druckkraft F .



2.3 Gerade Biegung

Prismatische Stäbe mit beliebigem Querschnitt deren Querschnittsabmessungen klein gegenüber ihrer Länge sind, bezeichnet man als **Balken**. Die Verbindungsline aller Flächenschwerpunkte S ist die **Balkenachse** und die von den Kraftvektoren (Einzelkräfte oder Streckenlasten) aufgespannte Ebene wird als **Lastebene** bezeichnet (Bild 2.17).

Ein Balken wird auf Biegung beansprucht, falls die Balkenachse in der Lastebene liegt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann tritt neben einer Biegebeanspruchung auch noch eine Verdrehung auf bzw. der Balken kippt. Dieser Fall soll hier allerdings nicht betrachtet werden.

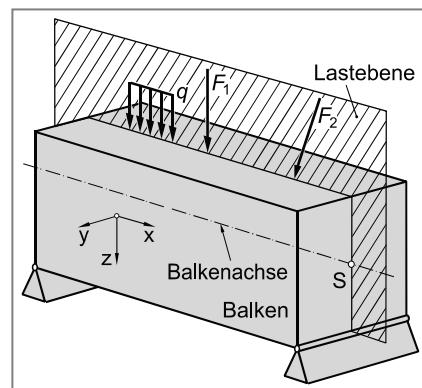


Bild 2.17 Biegebeanspruchter Balken

Von **gerader Biegung** oder **einachsiger Biegung** spricht man, sofern an einem Balken Kräfte (Einzelkräfte oder Streckenlasten) oder Momente angreifen, deren Momentenvektor M_b mit einer der beiden Hauptachsen¹⁾ des Balkenquerschnitts zusammenfällt. Dies ist beispielsweise der Fall bei Balken mit mindestens einer Symmetrieebene, die in der Symmetrieebene (Bild 2.18a) oder senkrecht dazu (Bild 2.18b) belastet werden.

Fällt der Biegemomentenvektor nicht mit einer der Hauptachsen zusammen, wie zum Beispiel bei Belastungen schräg zur Symmetrieebene (Bild 2.18c) oder bei unsymmetrischen Querschnitten (Bild 2.18d), dann spricht man von **schiefer Biegung** oder **zweiachsiger Biegung**. Bisweilen ist auch die Bezeichnung **allgemeine Biegung** üblich. Die schiefe Biegung wird in Kapitel 9 besprochen.

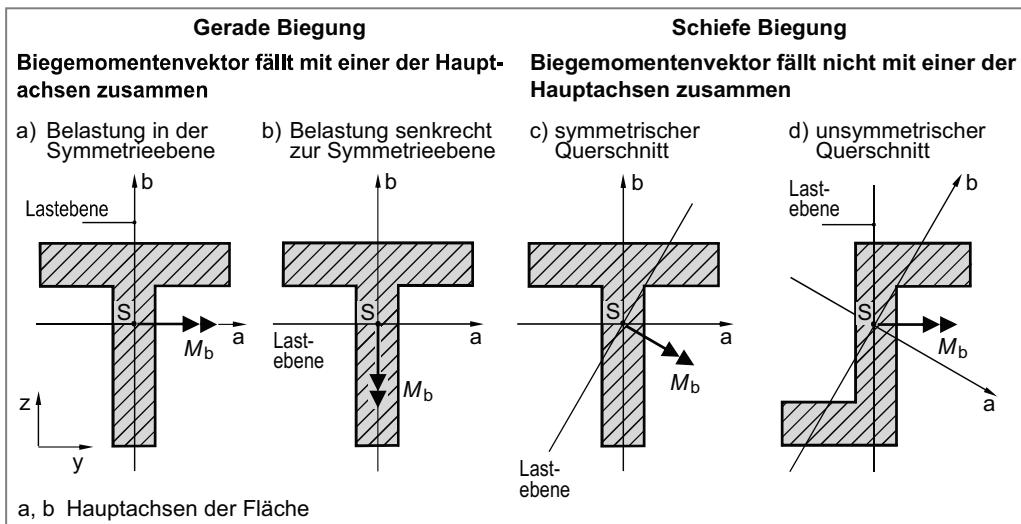


Bild 2.18 Gerade und schiefe Biegung

¹⁾ Zwei zueinander senkrecht stehende Achsen durch den Schwerpunkt einer Fläche bezüglich derer die axialen Flächenmomente 2. Ordnung Extremwerte annehmen d. h. das gemischte Flächenmoment Null wird, werden als **Hauptachsen** bezeichnet. Für einfach symmetrische Querschnitte (z. B. T-Profil in Bild 2.18) sind die Symmetriechse und deren Senkrechte durch den Flächenschwerpunkt S stets Hauptachsen (siehe auch Kapitel 9).

2.3.1 Spannungsermittlung bei gerader Biegung

Zur Ermittlung der Spannungen bei gerader Biegung müssen die folgenden Annahmen getroffen werden:

1. Lastebene und Balkenachse (vor der Biegung) fallen zusammen, andernfalls würde sich der Balken, abhängig von der Lagerung zusätzlich verdrehen oder kippen.
2. Es tritt eine **reine Biegung (querkraftfreie Biegung)** auf, d. h. die Schnittgrößen Q_y und Q_z (Querkräfte) sind Null. Außerdem soll keine Normalkraft (N) und kein Torsionsmoment (M_t) wirken. In der Querschnittsfläche tritt also nur ein gleichbleibendes Biegemoment $M_b = \text{konst.}$ mit seinen Komponenten M_{by} und M_{bz} auf (Bild 2.19). Eine reine Biegung tritt beispielsweise auf, falls der Balken mit einem Biegemoment (Bild 2.20a) oder einem Kräftepaar (Bild 2.20b) beansprucht wird.

Wird ein Balken hingegen durch ein veränderliches Biegemoment $M_b(x)$ beansprucht, dann treten in jeder Querschnittsfläche des Balkens Querkräfte $Q(x)$ und damit Schubspannungen auf, da gilt: $Q(x) = dM(x)/dx$ (**Querkraftschub**). Dies ist zum Beispiel bei einseitig eingespannten Balken (Bild 2.20c) oder durch Streckenlasten beanspruchten Balken der Fall. Diese Schubspannungen sind nur bei kleinen Querschnittsabmessungen im Vergleich zur Balkenlänge gegenüber der Biegespannung vernachlässigbar. Hierauf wird in Kapitel 10 näher eingegangen.

3. Zur Balkenachse senkrechte Querschnittsebenen bleiben auch nach der Verformung in sich eben (keine Verwölbung) und stehen senkrecht zur neutralen Faser (**Bernoullische Hypothese**)
4. Konstanter d. h. nicht von der Spannung abhängiger Elastizitätsmodul.

Die Grundgleichungen der geraden, reinen Biegung, sollen am Beispiel eines Biegebalkens mit kreiszylindrischem Querschnitt hergeleitet werden (Bild 2.21).

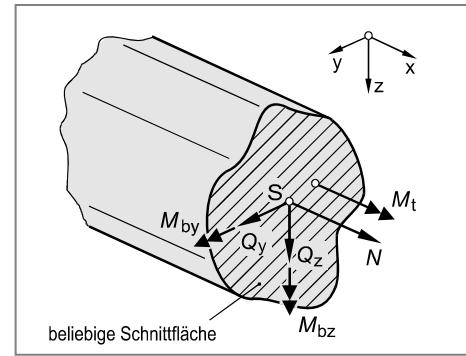


Bild 2.19 Schnittgrößen an einem Balkenquerschnitt

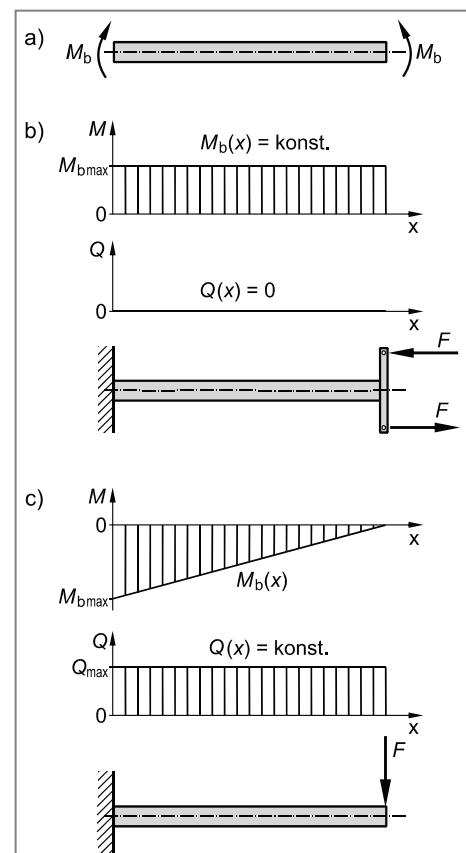


Bild 2.20 Momenten- und Querkraftverlauf unterschiedlich beanspruchter Balken (Beispiele)

Ein durch ein Biegemoment M_b belasteter Balken wird elastisch verformt, d. h. die Balkenachse erfährt eine Krümmung (Bild 2.21). Sofern das Biegemoment längs der Balkenachse konstant bleibt bzw. die Schubspannungen vernachlässigbar sind (Kapitel 10) kann die Krümmung als Kreisbögen mit Radius R angesetzt werden. Unter der Annahme, dass die Querschnitte des Balkens eben und senkrecht zur Balkenachse bleiben (Bernoullische Hypothese) werden Werkstoffteilchen an der Außenseite der Krümmung gedehnt, an der Innenseite hingegen gestaucht. Werkstoffteilchen, die mit der Balkenachse (Verbindungsline aller Flächenschwerpunkte) zusammenfallen, erfahren bei reiner Biegung keine Dehnung. Die Balkenachse wird dann auch als **neutrale Faser** bezeichnet.

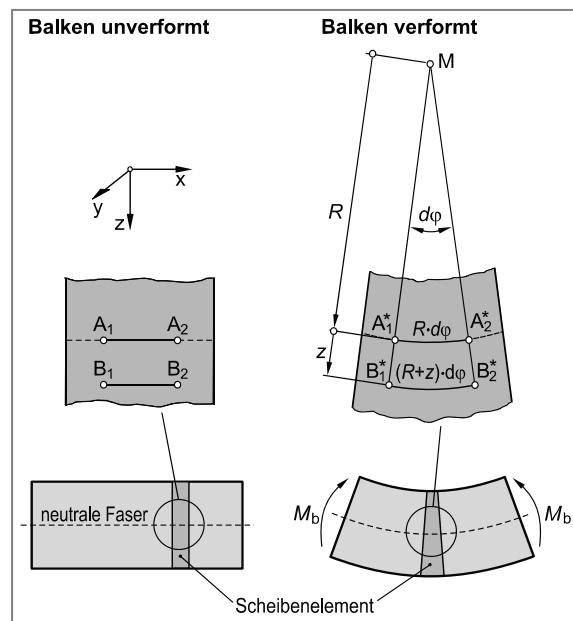


Bild 2.21 Verformung eines Balkens bei gerader, reiner Biegung

Markiert man außerhalb der neutralen Faser ein Linienelement (z. B. Strecke B_1B_2), dann wird es durch die Biegebeanspruchung gedehnt, falls es relativ zur neutralen Faser vom Krümmungsmittelpunkt M entfernt liegt. Liegt es hingegen auf der Seite des Krümmungsmittelpunktes, dann wird das Linienelement gestaucht. Die ursprüngliche Strecke B_1B_2 im gedehnten Bereich erfährt also durch die Biegung die Längenänderung¹⁾:

$$\overline{B_1^* B_2^*} = (R + z) \cdot d\varphi \quad (2.24)$$

Das Linienelement auf der neutralen Faser erfährt durch die Biegebeanspruchung hingegen keine Veränderung seiner ursprünglichen Länge:

$$\overline{A_1^* A_2^*} = \overline{A_1 A_2} = R \cdot d\varphi \quad (2.25)$$

Für die Dehnung $\varepsilon(z)$ im Abstand z von der neutralen Faser ergibt sich damit die **Verträglichkeitsbedingung**:

$$\varepsilon(z) = \frac{(R + z) \cdot d\varphi - R \cdot d\varphi}{R \cdot d\varphi} = \frac{z}{R} \quad (2.26)$$

Gleichung 2.26 zeigt zunächst, dass sich die Biegedehnung (unter den oben genannten Voraussetzungen) linear über dem Querschnitt ändert. Unter der Voraussetzung eines konstanten Elastizitätsmoduls ergibt sich mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes für die Spannungsverteilung in der Querschnittsfläche:

$$\sigma(z) = E \cdot \varepsilon(z) = \frac{E}{R} \cdot z \quad (2.27)$$

¹⁾ φ im Bogenmaß

Die Spannungen im Stabquerschnitt unter Biegebeanspruchung sind also an der neutralen Faser ($z = 0$) Null und nehmen zu Rändern hin linear zu (Zugseite) bzw. ab (Druckseite). Die für Festigkeitsnachweise wichtige maximale Biegespannung, die nachfolgend mit σ_b bezeichnet werden soll, findet man also am Rand ($z = z_{\max}$). Dort gilt:

$$\sigma_b = \sigma(z_{\max}) = \frac{E}{R} \cdot z_{\max} \quad (2.28)$$

Gleichung 2.28 ist für die Berechnung der maximalen Biegespannung ungeeignet, da der Krümmungsradius R bei Balken in der Regel schwierig zu ermitteln ist bzw. überhaupt nicht ermittelt werden kann. Es muss also ein Zusammenhang zwischen der in der Regel bekannten äußeren Belastung (Biegemoment M_b) und den Spannungen im Bauteil gefunden werden. Den gesuchten Zusammenhang erhält man, indem man eine **Gleichgewichtsbedingung** zwischen den in den Querschnittsflächen wirkenden Spannungen und dem äußeren Biegemoment herstellt.

Hierzu betrachtet man entsprechend Bild 2.22 ein „unendlich“ schmales Flächenelement dA der Querschnittsfläche das sich im Abstand z von der neutralen Faser entfernt befindet. Im Flächenelement wirkt die Spannung $\sigma(z)$. Bezuglich der y -Achse (neutrale Faser) ergibt sich damit das Teilmoment:

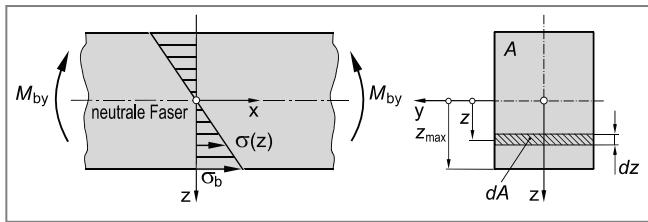


Bild 2.22 Schnittspannungen am Biegestab

$$dM_{by} = \sigma(z) \cdot dA \cdot z \quad (2.29)$$

Das Gesamtmoment M_{by} ergibt sich als Summe aller Teilmomente dM_{by} über den gesamten Querschnitt, d. h. als Integral über die Querschnittsfläche A . Aufgrund des Momentengleichgewichts muss dieses Gesamtmoment dem äußeren Biegemoment um die y -Achse (M_b) äquivalent sein. Aus Gleichung 2.29 ergibt sich mit Gleichung 2.27 und Integration über A :

$$M_{by} = \int_A \sigma(z) \cdot z \, dA = \frac{E}{R} \int_A z^2 \, dA = \frac{E}{R} \cdot I_y \quad (2.30)$$

$$\text{Der Integralausdruck } \int_A z^2 \, dA \quad (2.31)$$

wird als **axiales Flächenmoment 2. Ordnung** (siehe auch Kapitel 9.1.2) bezeichnet. Üblicherweise verwendet man hierfür das Formelzeichen I , ergänzt durch einen Index (z. B. x , y oder z) welcher die Biegeachse bezeichnet. I_y bedeutet also axiales Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der y -Achse. Die Dimension des axialen Flächenmomentes ist beispielsweise m^4 , cm^4 oder mm^4 . Für praktische Berechnungen verwendet man häufig mm^4 .

Da der Integralausdruck für I (Gleichung 2.31) bei komplexen Querschnitten mitunter schwierig zu ermitteln ist, findet man die entsprechenden Werte für technisch wichtige Querschnittsgeometrien in Tabellenwerken. Voraussetzung für die Integration ist allerdings die mathematische Beschreibbarkeit der Flächenberandung.

In Tabelle 2.4 sind für ausgewählte, technisch wichtige Querschnittsgeometrien die axialen Flächenmomente 2. Ordnung zusammengestellt.

Die Spannungsverteilung im Balkenquerschnitt erhält man aus Gleichung 2.27 und 2.30, indem man den Krümmungsradius R eliminiert.

$$\text{Gleichung (2.27): } \sigma(z) = \frac{E}{R} \cdot z$$

$$\text{Gleichung (2.30): } M_b = \frac{E}{R} \cdot I$$

und damit letztlich:

$$\sigma(z) = \frac{M_b}{I} \cdot z \quad \text{Spannungsverteilung bei gerader, reiner Biegung} \quad (2.32)$$

Die größte Biegespannung $\sigma(z_{\max}) \equiv \sigma_b$ tritt an Stellen des Querschnitts auf, die den größten Abstand zur neutralen Faser (Zug- oder Druckseite) haben (Bild 2.22), also:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{I} \cdot z_{\max} \quad (2.33)$$

Da für Festigkeitsnachweise in der Regel die größte im Querschnitt herrschende Spannung von Interesse ist, fasst man den Ausdruck I / z_{\max} zum **axialen Widerstandsmoment W_b** zusammen:

$$W_b = \frac{I}{z_{\max}} \quad \text{Definition des axialen Widerstandsmomentes} \quad (2.34)$$

Das Formelzeichen für W_b wird üblicherweise ebenfalls durch einen die Biegeachse kennzeichnenden Index (z. B. x , y oder z) ergänzt. Die Dimension des axialen Widerstandsmomentes ist beispielsweise m^3 , cm^3 oder mm^3 , wobei in der Praxis häufig mit mm^3 gerechnet wird. Ebenso wie das axiale Flächenmoment 2. Ordnung (I), ist auch das axiale Widerstandsmoment (W_b) für technisch wichtige Querschnittsgeometrien in Tabelle 2.4 zusammengestellt.

Für geometrisch einfache Querschnitte kann das axiale Flächenmoment 2. Ordnung (I) nach Gleichung 2.31 ermittelt werden (Aufgabe 2.17 und 2.18). Für zusammengesetzte Querschnitte dürfen die axialen Flächenmomente addiert oder subtrahiert werden. Das axiale Widerstandsmoment (W_b) erhält man dann gemäß $W_b = I / z_{\max}$, wobei z_{\max} der maximale Abstand der Randfaser des Querschnitts zur Biegeachse ist. Es ist zu beachten, dass axiale Widerstandsmomente *nicht* addiert oder subtrahiert werden dürfen (Aufgabe 2.20 und 2.21).

Aus Gleichung (2.33) und mit Gleichung (2.34) folgt schließlich die Grundgleichung zur Spannungsermittlung bei gerader, reiner Biegung:

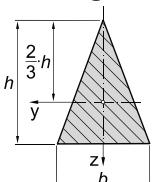
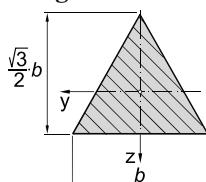
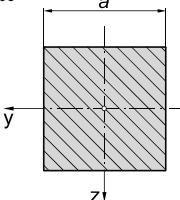
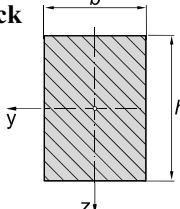
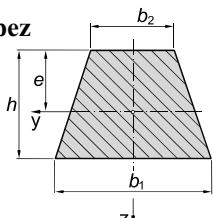
$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} \quad \text{Grundgleichung zur Spannungsermittlung bei gerader, reiner Biegung} \quad (2.35)$$

σ_b maximale Biegespannung im Querschnitt (N/mm^2)

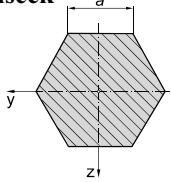
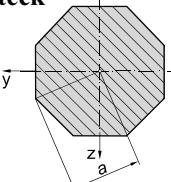
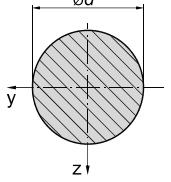
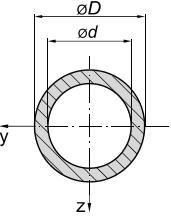
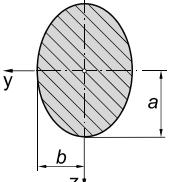
M_b Biegemoment (Nm)

W_b axiales Widerstandsmoment (mm^3)

Tabelle 2.4 Axiale Flächenmomente 2. Ordnung und axiale Widerstandsmomente ausgewählter Querschnitte

Profil	axiales Flächenmoment	axiales Widerstandsmoment
gleichschenkliges Dreieck 	$I_y = \frac{b \cdot h^3}{36}$ $I_z = \frac{h \cdot b^3}{48}$	$W_{by} = \frac{b \cdot h^2}{24}$ $W_{bz} = \frac{h \cdot b^2}{24}$
gleichseitiges Dreieck 	$I_y = \frac{b^4}{32 \cdot \sqrt{3}}$ $I_z = \frac{b^4}{32 \cdot \sqrt{3}}$	$W_{by} = \frac{b^3}{32}$ $W_{bz} = \frac{b^3}{16 \cdot \sqrt{3}}$
Quadrat 	$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$	$W_{by} = W_{bz} = \frac{a^3}{6}$
Rechteck 	$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$	$W_{by} = \frac{b \cdot h^2}{6}$ $W_{bz} = \frac{h \cdot b^2}{6}$
Trapez 	$I_y = \frac{h^3}{36} \cdot \frac{b_1^2 + 4 \cdot b_1 \cdot b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}$ $e = \frac{h}{3} \cdot \frac{2 \cdot b_1 + b_2}{b_1 + b_2}$	$W_{by} = \frac{h^2}{12} \cdot \frac{b_1^2 + 4 \cdot b_1 \cdot b_2 + b_2^2}{2 \cdot b_1 + b_2}$

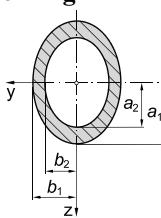
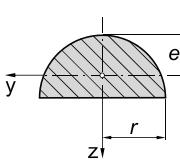
Fortsetzung Tabelle 2.4 Axiale Flächenmomente 2. Ordnung und axiale Widerstandsmomente ausgewählter Querschnitte

Profil	axiales Flächenmoment	axiales Widerstandsmoment
Sechseck 	$I_y = I_z = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot a^4$	$W_{by} = \frac{5}{8} \cdot a^3$ $W_{bz} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot a^3$
Achteck 	$I_y = I_z = (1 + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{a^4}{6}$	$W_{by} = W_{bz} = 0,6906 \cdot a^3$
Vollkreis 	$I_y = I_z = \frac{\pi}{64} \cdot d^4$	$W_{by} = W_{bz} = \frac{\pi}{32} \cdot d^3$
Kreisring ¹⁾ 	$I_y = I_z = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4)$	$W_{by} = W_{bz} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$
Ellipse 	$I_y = \frac{\pi}{4} \cdot a^3 b$ $I_z = \frac{\pi}{4} \cdot b^3 a$	$W_{by} = \frac{\pi}{4} \cdot a^2 b$ $W_{bz} = \frac{\pi}{4} \cdot b^2 a$

¹⁾ Dickwandig. Für einen *dünnwandigen* Kreisring mit $t \ll d_m$ (t = Wanddicke; d_m = mittlerer Durchmesser) gilt:

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{8} \cdot d_m^3 \cdot t \quad \text{und} \quad W_{by} = W_{bz} = \frac{\pi}{4} \cdot d_m^2 \cdot t \quad (\text{siehe auch Aufgabe 10.3})$$

Fortsetzung Tabelle 2.4 Axiale Flächenmomente 2. Ordnung und axiale Widerstandsmomente ausgewählter Querschnitte

Profil	axiales Flächenmoment	axiales Widerstandsmoment
Ellipsenring 	$I_y = \frac{\pi}{4} \cdot (a_1^3 \cdot b_1 - a_2^3 \cdot b_2)$ $I_z = \frac{\pi}{4} \cdot (b_1^3 \cdot a_1 - b_2^3 \cdot a_2)$	$W_{by} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a_1^3 \cdot b_1 - a_2^3 \cdot b_2}{a_1}$ $W_{bz} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b_1^3 \cdot a_1 - b_2^3 \cdot a_2}{b_1}$
halber Vollkreis 	$I_y = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9 \cdot \pi} \right) \cdot r^4$ $I_z = \frac{\pi}{8} \cdot r^4$ $e = \left(1 - \frac{4}{3 \cdot \pi} \right) \cdot r$	$W_{by} = \frac{I_y}{e} = 0,1907 \cdot r^3$ $W_{bz} = \frac{\pi}{8} \cdot r^3$

2.3.2 Axiale Flächenmomente 2. Ordnung und axiale Widerstandsmomente zusammengesetzter Querschnitte

Zur Berechnung der axialen Flächen- und Widerstandsmomente einfacher Querschnitte sind in Tabelle 2.4 die entsprechenden Beziehungen zusammengestellt. Die Querschnittsgeometrien technischer Bauteile sind in der Regel komplexer, sie setzen sich jedoch häufig aus diesen einfachen Querschnitten zusammen. Typische Beispiele sind I- oder U-Profile. In diesem Fall lassen sich die entsprechenden axialen Flächen- und Widerstandsmomente ebenfalls auf einfache Weise ermitteln. Die Vorgehensweise soll am Beispiel des in Bild 2.23 dargestellten Profils erläutert werden (siehe auch Kapitel 9.1.3.1).

- Das Gesamtprofil wird in einem ersten Schritt in einfach zu berechnende Teilflächen (z. B. Rechtecke) zerlegt.
- Falls die Querschnittsfläche bezüglich der betrachteten Achse durch den Flächenschwerpunkt S (Biegeachse) nicht symmetrisch ist, muss zunächst die Lage des Flächenschwerpunktes des Gesamtquerschnitts berechnet werden. Dies erfolgt mit Hilfe des **Teilschwerpunktsatzes**:

$$z_S = \frac{\sum_i z_i \cdot A_i}{\sum_i A_i} \quad \text{Teilschwerpunktsatz} \quad (2.36)$$

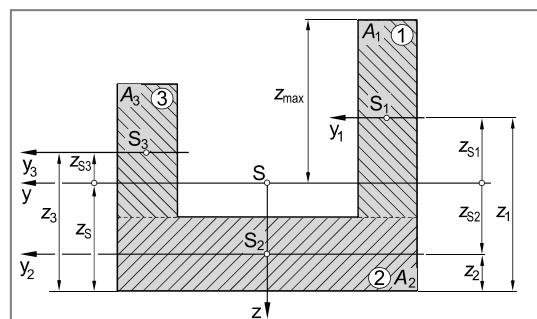


Bild 2.23 Ermittlung der axialen Flächen- und Widerstandsmomente zusammengesetzter Querschnitte

3. Berechnung der axialen Flächenmomente 2. Ordnung der Teilflächen bezüglich einer Achse durch den Flächenschwerpunkt S der Gesamtfläche. Hierzu bedient man sich des **Satzes von Steiner** (siehe auch Kapitel 9.1.3.1):

Ist das axiale Flächenmoment 2. Ordnung I_y bezüglich einer Achse durch den Flächenschwerpunkt bekannt (y -Achse in Bild 2.24), dann errechnet sich das axiale Flächenmoment 2. Ordnung $I_{y'}$ bezüglich einer hierzu parallelen Achse (y' -Achse in Bild 2.24) gemäß:

$$I_{y'} = I_y + z_S^2 \cdot A \quad (2.37)$$

Axiales Flächenmoment bei Parallelverschiebung der Koordinatenachse

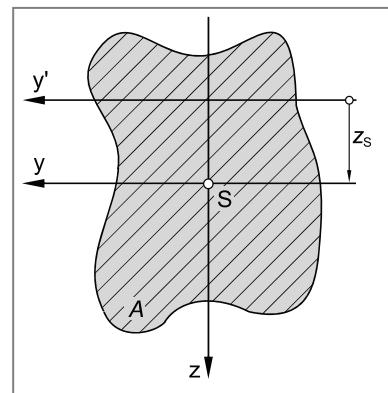


Bild 2.24 Geometrische Verhältnisse zur Anwendung des Satzes von Steiner

Auf das Beispiel in Bild 2.23 übertragen, bedeutet dies die Umrechnung der axialen Flächenmomente der Teilflächen bezüglich der Achsen durch ihre jeweiligen Teilschwerpunkte (y_1 -, y_2 - und y_3 -Achse) auf die y -Achse durch den Gesamtflächenschwerpunkt S . Die Vorgehensweise ist nachfolgend tabellarisch zusammengestellt.

Teilfläche	Abstand zwischen Teil- und Gesamtflächenschwerpunkt	Flächeninhalt	axiales Flächenmoment bezüglich einer Achse durch den	
			Teilflächen-schwerpunkt	Gesamtflächen-schwerpunkt
1	z_{S1}	A_1	I_{y1}	$I_{yS1} = I_{y1} + z_{S1}^2 \cdot A_1$
2	z_{S2}	A_2	I_{y2}	$I_{yS2} = I_{y2} + z_{S2}^2 \cdot A_2$
3	z_{S3}	A_3	I_{y3}	$I_{yS3} = I_{y3} + z_{S3}^2 \cdot A_3$

4. Das axiale Flächenmoment 2. Ordnung I_{yS} des Gesamtquerschnitts ergibt sich durch Addition der (auf die y -Achse umgerechneten) axialen Flächenmomente der Teilquerschnitte:

$$I_{yS} = I_{yS1} + I_{yS2} + I_{yS3}$$

Axiale Flächenmomente 2. Ordnung dürfen addiert und subtrahiert werden, sofern sie auf die gleiche Achse bezogen sind. Dies gilt jedoch nicht für die axialen Widerstandsmomente.

5. Das axiale Widerstandsmoment W_{by} der Gesamtfläche (bezüglich der y -Achse) erhält man entsprechend Gleichung 2.34 als Quotient aus axialem Flächenmoment 2. Ordnung (I_{yS}) und dem maximalen Abstand der Flächenberandung zur Biegeachse (z_{\max}).

$$W_{by} = \frac{I_{yS}}{z_{\max}}$$

¹⁾ **Jakob Steiner** (1796 ... 1863). Die Grundlagen des Steiner'schen Satzes wurden jedoch bereits von **Christian Huygens** (1629 ... 1695) gelegt.

2.3.3 Werkstoffverhalten und Kennwerte bei Biegebeanspruchung

In Analogie zur Zug- bzw. Druckbeanspruchung, muss beim Festigkeitsnachweis biegebeanspruchter Bauteile das Werkstoffverhalten (duktil oder spröde) berücksichtigt werden.

2.3.3.1 Duktile Werkstoffe

Unter einachsiger Zugbeanspruchung sind die Streck- oder Dehngrenze (R_e bzw. R_p) bzw. die Zugfestigkeit die maßgeblichen Werkstoffkennwerte. Sie werden im Zugversuch ermittelt (Kapitel 2.1.2). Relevante Werkstoffkennwerte für Festigkeitsnachweise unter Druckbeanspruchung sind die natürliche Quetsch- bzw. Druckfließgrenze σ_{dF} oder die Stauchgrenze σ_{dp} , in der Regel $\sigma_{d0,2}$ oder σ_{d2} (Kapitel 2.2.2). Die Kennwerte ergeben sich aus dem Druckversuch.

Es liegt nun nahe anzunehmen, dass die für Biegebeanspruchung maßgeblichen Werkstoffkennwerte einem Biegeversuch entstammen. Dies ist jedoch nicht der Fall, da ein Biegeversuch für duktile Werkstoffe nicht existiert. Ein derartiger Versuch ist auch nicht erforderlich, da sich die Biegebeanspruchung aus Zug- und Druckbeanspruchungen zusammensetzt (Bild 2.25). In der Zug- bzw. Druckzone eines Biegebalkens spielen sich prinzipiell dieselben Vorgänge ab, wie beim Zug- bzw. Druckversuch.

Bei duktilen Werkstoffen beginnt der Biegestab zu fließen, sobald die maximale Spannung σ_b in der Randfaser die Streck- bzw. Dehngrenze (Zugseite) oder die Druckfließ- bzw. Stauchgrenze (Druckseite) erreicht.

Man führt als Werkstoffkennwert bei Biegebeanspruchung von duktilen Werkstoffen die **Biegefließgrenze** σ_{bf} ein. Sie ist definiert als Quotient aus Biegemoment bei Fließbeginn (M_{bf}) und axialem Widerstandsmoment der Querschnittsfläche (W_b). Die Biegefließgrenze entspricht bei duktilen Metallen etwa der Streck- bzw. Dehnungsgrenze.

$$\sigma_{bf} = \frac{M_{bf}}{W_b} \approx R_e \text{ bzw. } R_p \quad \text{Biegefließgrenze} \quad (2.38)$$

Unter Biegebeanspruchung beginnt das Fließen zuerst an den höchst beanspruchten Randfasern, während Werkstoffbereiche in der Balkenmitte noch elastisch beansprucht werden und dementsprechend eine **Stützwirkung** ausüben. Zur weiteren plastischen Verformung eines Biegebalkens ist daher eine Erhöhung des Biegemomentes nötig. Demzufolge findet man für die Biegefließgrenze mitunter auch die Beziehung:

$$\sigma_{bf} \approx 1,1 \dots 1,2 \cdot R_e$$

Wird der Stab aus einem duktilen Werkstoff über die Biegefließgrenze hinaus weiter verformt, dann könnte angenommen werden, dass ein Bruch eintritt, sobald die maximale Spannung σ_b auf der Zugseite die Zugfestigkeit R_m erreicht. Da duktile Werkstoffe unter Biegebeanspruchung jedoch nicht brechen, muss der Versagensfall Bruch auch nicht berücksichtigt werden.

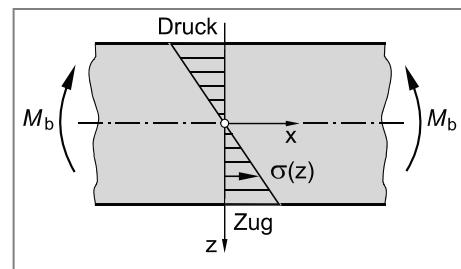


Bild 2.25 Spannungsverteilung im Biegebalken

2.3.3.2 Spröde Werkstoffe

Für spröde Werkstoffe wird als Werkstoffkennwert die **Biegefestigkeit** σ_{bB} eingeführt. Sie ist definiert als Quotient aus Biegemoment beim Bruch (M_{bB}) und axialem Widerstandsmoment (W_b) der Querschnittsfläche:

$$\sigma_{bB} = \frac{M_{bB}}{W_b} \geq R_m \quad \text{Biegefestigkeit} \quad (2.39)$$

Bei ideal sprödem, d. h. linear-elastischem Werkstoffverhalten entspricht die Biegefestigkeit σ_{bB} der Zugfestigkeit R_m , da ein Trennbruch dann eintritt, sobald die Spannung in der Randfaser (σ_b) die Zugfestigkeit erreicht.

In der Praxis brechen spröde metallische Werkstoffe unter Biegebeanspruchung in der Regel bei weit höheren Spannungen als der im Zugversuch ermittelten Zugfestigkeit R_m . Der Bruch geht dabei stets von der Zugseite des Biegestabes aus und verläuft senkrecht zur größten Normalspannung. Der Grund für diese Beobachtung liegt darin, dass spröde Werkstoffe infolge ihres doch vorhandenen Plastifizierungsvermögens häufig eine Zug-Druck-Anisotropie aufweisen. Für Gusseisen mit Lamellengraphit gilt damit beispielsweise:

$$\sigma_{bB} = 2,0 \dots 2,5 \cdot R_m \quad (\text{für Gusseisen mit Lamellengraphit})$$

2.3.4 Zulässige Spannung bei Biegebeanspruchung

Duktile Werkstoffe versagen unter Biegebeanspruchung durch Fließen, spröde Werkstoffe hingegen durch Bruch. In Tabelle 2.5 sind Kennwerte zur Bestimmung der zulässigen Spannung unter Biegebeanspruchung sowie Richtwerte für Sicherheitsbeiwerte zusammengestellt. Die Sicherheitsbeiwerte entsprechen dabei den Werten wie sie für die Zug- bzw. Druckbeanspruchung (Tabelle 2.2 und 2.3) eingeführt wurden.

Tabelle 2.5 Kennwerte zur Bestimmung der zulässigen Spannung unter Biegebeanspruchung

Werkstoff bzw. Werkstoffzustand	Versagensart	Werkstoffkennwert	Ersatzwert	Sicherheits- beiwert ¹⁾
duktil	Fließen	σ_{bF}	$\approx R_e$	$S_F = 1,2 \dots 2,0$
	Bruch	tritt unter Biegebeanspruchung nicht auf		
spröde	Bruch	σ_{bB}	$\geq R_m$ ²⁾	$S_B = 4,0 \dots 9,0$

¹⁾ Anhaltswerte, falls keine einschlägigen Berechnungsvorschriften vorliegen.

²⁾ für Gusseisen mit Lamellengraphit: $\sigma_{bB} = 2,0 \dots 2,5 \cdot R_m$

Zusammenfassend errechnet sich die zulässige Spannung σ_{zul} unter Biegebeanspruchung damit wie folgt:

Bauteile aus duktilen Werkstoffen bzw. duktile Werkstoffverhalten

- Fließen: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{bF}}{S_F} \quad \text{mit } S_F = 1,2 \dots 2,0$ (2.40)

Bauteile aus spröden Werkstoffen bzw. sprödes Werkstoffverhalten

- Bruch: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{bB}}{S_B} \quad \text{mit } S_B = 4,0 \dots 9,0$ (2.41)

2.3.5 Aufgaben

Aufgabe 2.12



Der dargestellte Kastenträger aus Werkstoff S275JR ist beidseitig gelenkig gelagert und wird durch die statisch wirkende Kraft $F = 25 \text{ kN}$ auf Biegung beansprucht. Das Eigengewicht des Trägers sowie Schubspannungen durch Querkräfte sollen vernachlässigt werden.

Berechnen Sie die mindestens erforderliche Wandstärke s , damit Fließen mit Sicherheit ($S_F = 1,5$) ausgeschlossen werden kann.

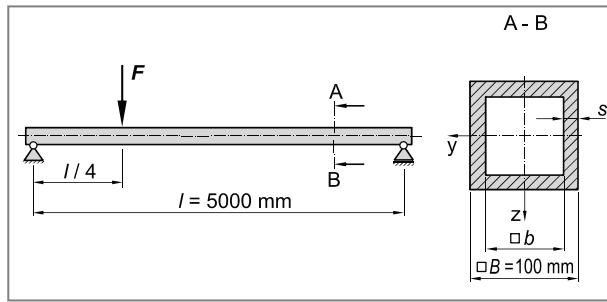
Werkstoffkennwerte S275JR:

$$R_c = 275 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 540 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 208000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



Aufgabe 2.13



Ein einseitig eingespannter T-Träger aus dem unlegierten Baustahl S355J2 wird durch die statisch wirkende Kraft $F = 1 \text{ kN}$ auf Biegung beansprucht. Das Eigengewicht des Trägers, Schubspannungen durch Querkräfte sowie die Kerbwirkung an der Einspannstelle sollen bei allen Aufgaben-teilen vernachlässigt werden.

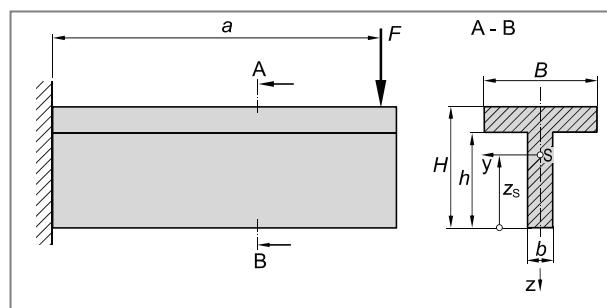
Werkstoffkennwerte S355J2:

$$R_c = 355 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 610 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 212000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



Abmessungen des T-Trägers:

$$a = 1000 \text{ mm}$$

$$H = 60 \text{ mm}$$

$$h = 40 \text{ mm}$$

$$B = 60 \text{ mm}$$

$$b = 20 \text{ mm}$$

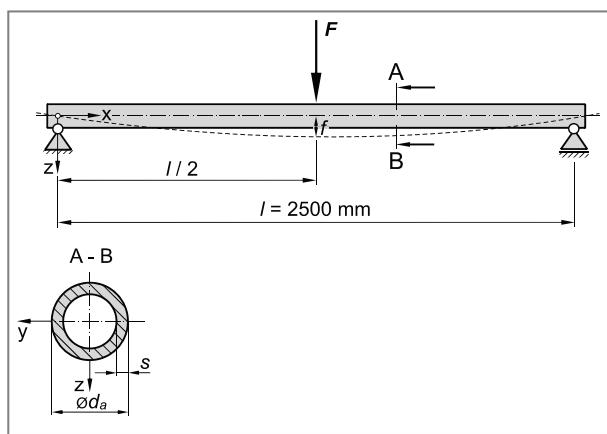
- Bestimmen Sie die Lage z_s des Flächenschwerpunktes S und berechnen Sie das axiale Flächennmoment 2. Ordnung (I_y) sowie das axiale Widerstandsmoment (W_{by}) bezüglich der y-Achse.
- Ermitteln Sie die Sicherheit S_F gegen Fließen für die höchst beanspruchte Stelle.
- Für eine Konstruktionsvariante soll die Länge des T-Trägers auf $a^* = 1500 \text{ mm}$ erhöht werden. Die Belastung von $F = 1 \text{ kN}$ bleibt unverändert. Ermitteln Sie das mindestens erforderliche axiale Widerstandsmoment (W_{by}^*), falls eine Sicherheit von $S_F = 1,5$ gegen Fließen gefordert wird.

Aufgabe 2.14

Ein Rohr mit Kreisringquerschnitt und einer Länge von $l = 2500$ mm (Außendurchmesser $d_a = 100$ mm, Wandstärke $s = 5$ mm) aus Werkstoff S275JR ($R_e = 275$ N/mm 2 und $E = 210000$ N/mm 2) ist an beiden Enden gelenkig gelagert und wird in der Mitte durch die statisch wirkende Einzelkraft F belastet.

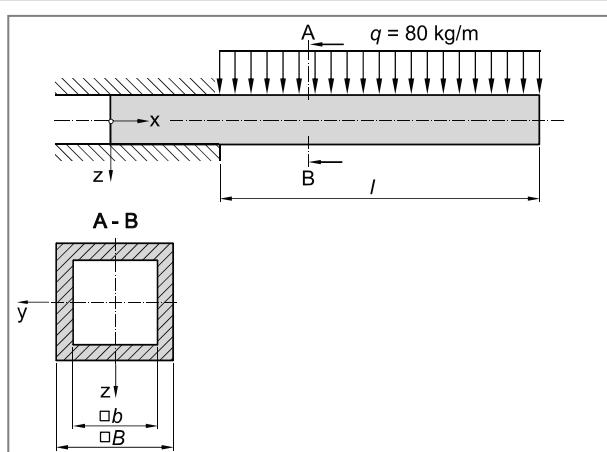
- Skizzieren Sie den Verlauf des Biegemomentes M_b und berechnen Sie das maximale Biegemoment $M_{b\max}$ in Abhängigkeit der Kraft F .
- Ermitteln Sie die zulässige Durchbiegung f_{\max} des Stahlrohres, damit Fließen mit Sicherheit ($S_F = 1,5$) ausgeschlossen werden kann.
- Auf welchen zulässigen Betrag f_{\max}^* muss die maximale Durchbiegung begrenzt werden, falls als Rohrwerkstoff die Gusseisensorte EN-GJL-350 ($R_m = 350$ N/mm 2 ; $\sigma_{bB} \approx 2,5 \cdot R_m$ und $E = 100000$ N/mm 2) gewählt und eine Sicherheit von $S_B = 5,0$ gegen Bruch gefordert wird?

Hinweis: $f = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I}$

**Aufgabe 2.15**

Ein Stahlträger mit quadratischer Querschnittsfläche ($B = 200$ mm; $b = 180$ mm) aus Baustahl S355JR ($R_e = 355$ N/mm 2) wird beim Bau einer Stahlkonstruktion frei tragen vorgeschoben. Die Masse des Trägers beträgt $q = 80$ kg/m (Erdbeschleunigung $g = 9,81$ m/s 2).

Berechnen Sie die maximal mögliche freie Länge l des Stahlträgers, damit plastische Verformungen infolge des Eigengewichts mit Sicherheit ($S_F = 1,5$) ausgeschlossen werden können.

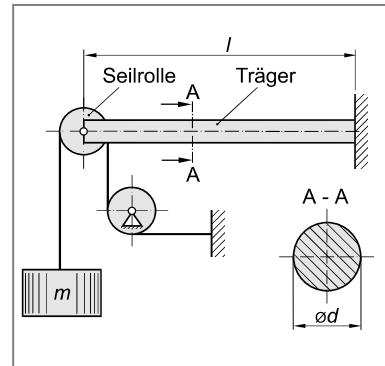


Kerbwirkung an der Einspannstelle, das Eigengewicht des Trägers sowie Schubspannungen durch Querkräfte dürfen vernachlässigt werden.

Aufgabe 2.16

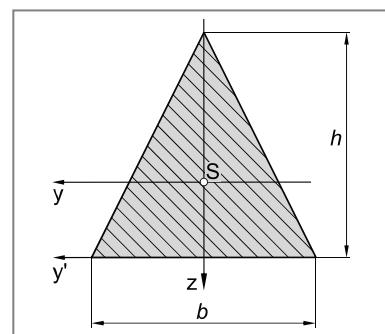
Ein Bauteil mit einer Masse von $m = 1000 \text{ kg}$ soll mit Hilfe des dargestellten Freiträgers gehalten werden. Der Abstand l zwischen Seilrolle und Einspannung beträgt $1,5 \text{ m}$. Der Durchmesser der Seilrolle kann gegenüber der Stablänge vernachlässigt werden ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$). Kerbwirkung an der Einspannstelle sowie Schubspannungen durch Querkräfte sollen ebenfalls vernachlässigt werden.

- Berechnen Sie das erforderliche axiale Widerstandsmoment (W_b) des Freiträgers, damit die Masse m mit Sicherheit ($S_F = 1,5$) gehalten werden kann, falls der Träger aus C35E ($R_e = 295 \text{ N/mm}^2$) gefertigt wurde.
- Ermitteln Sie die Masse m^* , die von einem baugleichen Träger aus der Gusseisensorte EN-GJL-300 ($R_m = 300 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{bb} = 460 \text{ N/mm}^2$) mit Sicherheit ($S_B = 4,0$) gehalten werden kann, falls ein Vollkreisquerschnitt mit $d = 50 \text{ mm}$ gewählt wird.

**Aufgabe 2.17**

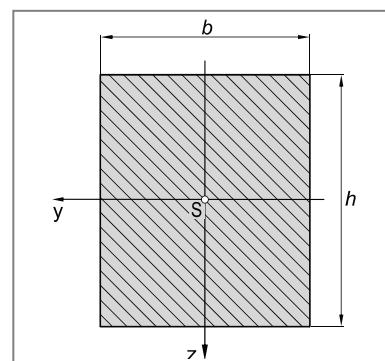
Die Abbildung zeigt die Querschnittsfläche eines Profilstabes. Sie entspricht einem gleichschenkligen Dreieck mit der Höhe h und der Breite b .

- Berechnen Sie das axiale Flächenmoment 2. Ordnung (I_y) sowie das axiale Widerstandsmoment (W_{by}) bezüglich der y -Achse (Achse durch den Flächenschwerpunkt S).
- Ermitteln Sie das axiale Flächenmoment 2. Ordnung (I_y) und das axiale Widerstandsmoment (W_{by}) für ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge b .
- Berechnen Sie die Werte für I_y und W_{by} für den Fall eines gleichschenkligen Dreiecks, jedoch bezüglich der y' -Achse (siehe Abbildung).

**Aufgabe 2.18**

Ermitteln Sie für den dargestellten Rechteckquerschnitt rechnerisch das axiale Flächenmoment 2. Ordnung sowie das axiale Widerstandsmoment:

- bezüglich der y -Achse (I_y und W_{by}).
- bezüglich der z -Achse (I_z und W_{bz}).

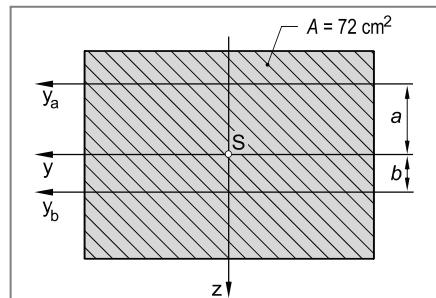


Aufgabe 2.19

Der dargestellte Rechteckquerschnitt hat eine Fläche von $A = 72 \text{ cm}^2$.

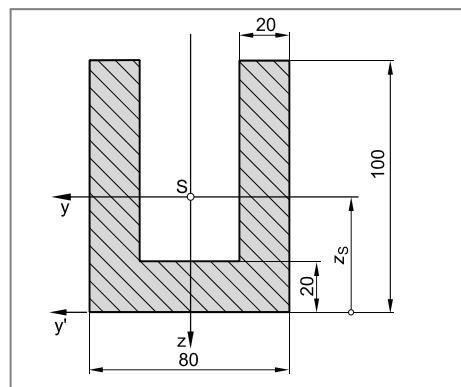
Das axiale Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der y_a -Achse ($a = 5 \text{ cm}$) ist bekannt und beträgt $I_{ya} = 2664 \text{ cm}^4$.

Berechnen Sie das axiale Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der y_b -Achse ($b = 2 \text{ cm}$).

**Aufgabe 2.20**

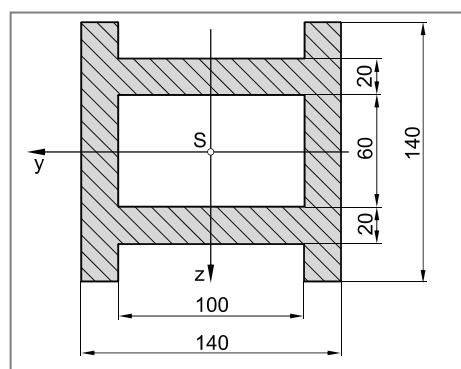
Das dargestellte U-Profil setzt sich aus drei Rechtecken zusammen.

- Ermitteln Sie den Abstand z_s des Flächenschwerpunktes S von der y' -Achse.
- Berechnen Sie das axiale Flächenmoment 2. Ordnung (I_y) bezüglich der y -Achse (Achse durch den Flächenschwerpunkt S).

**Aufgabe 2.21**

Berechnen Sie für das dargestellte Profil die axialen Flächenmomente 2. Ordnung und die axialen Widerstandsmomente:

- bezüglich der y -Achse (I_y und W_{by}).
- bezüglich der z -Achse (I_z und W_{bz}).



Aufgabe 2.22

Ein gelenkig gelagerter U-Profilstab aus der unlegierten Baustahlsorte S275JR wird durch eine statisch wirkende Zugkraft F beansprucht.

Werkstoffkennwerte S275JR:

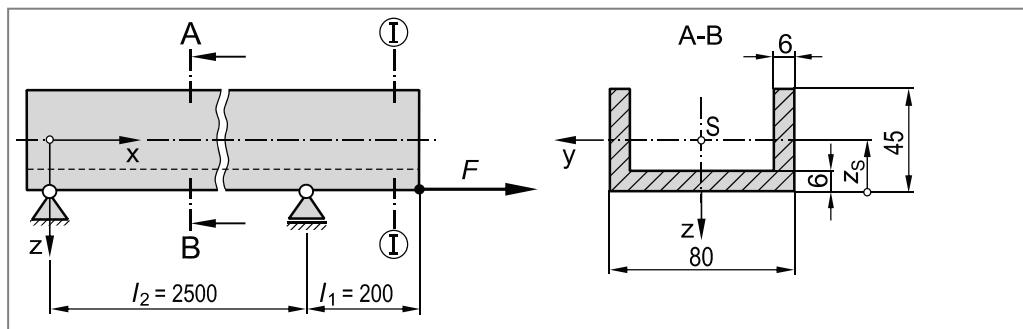
$$R_{p0,2} = 280 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 550 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 209000 \text{ N/mm}^2$$

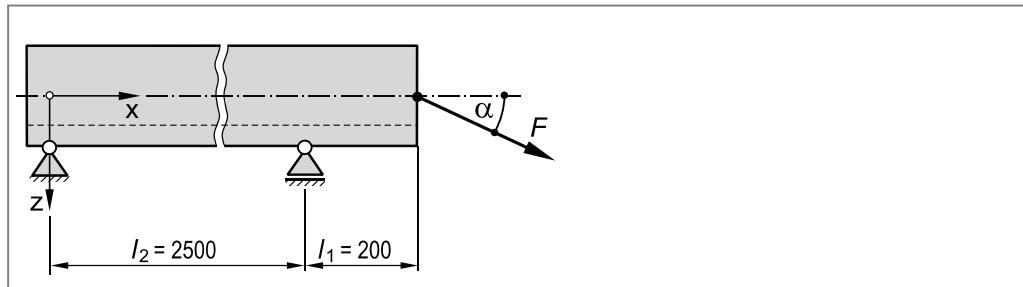
$$\mu = 0,30$$

Bei einem ersten zu untersuchenden Lastfall wirkt die Zugkraft F in horizontaler Richtung (x-Richtung). Der Kraftangriffspunkt befindet sich jedoch am unteren Ende der Querschnittsfläche (siehe Abbildung).



- Berechnen Sie Lage des Flächenschwerpunktes (Maß z_s) sowie das axiale Flächenmoment 2. Ordnung des U-Profils bezüglich der y-Achse (I_y).
- Berechnen Sie die zulässige Zugkraft F , falls an keiner Stelle der Querschnittsfläche I - I eine Spannung von $\sigma_{zul} = 150 \text{ N/mm}^2$ überschritten werden darf.

Bei einem zweiten zu untersuchenden Lastfall greift die Kraft F im Flächenschwerpunkt S unter einem Winkel von $\alpha = 25^\circ$ zur Horizontalen (x-Richtung) an.



- Ermitteln Sie die zulässige Zugkraft F , damit Fließen an der höchst beanspruchten Stelle mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden kann. Schubspannungen durch Querkräfte können vernachlässigt werden.

2.4 Schub

Wirken zwei Kräfte F senkrecht zur Stabachse und liegen ihre Wirkungslinien dicht beieinander, dann tritt in der Querschnittsfläche zwischen den beiden Wirkungslinien eine **Schubbeanspruchung** (auch als **Abscherbeanspruchung** bezeichnet) auf. Typische Beispiele für in dieser Weise beanspruchte Bauteile sind kurze Balken (Bild 2.26a), Schraub-, Niet- und Bolzenverbindungen (Bild 2.26b) aber auch Überlapptöpfe von Klebe- und Schweißverbindungen. Auch bei der Verarbeitung wie zum Beispiel dem Stanzen oder Scherschneiden treten derartige Schubbeanspruchungen im Werkstoff auf. Da die Wirkungslinien des Kräftepaars einen geringen Abstand haben, können die dadurch entstehenden Biegespannungen genauso vernachlässigt werden, wie eventuell auftretende Zug- oder DrucksSpannungen.

Schubbeanspruchungen treten auch durch Querkräfte bei einer Biegebeanspruchung mit veränderlichem Biegemoment auf (**Querkraftschub**, Bild 2.20c). Dementsprechend ist zu unterscheiden zwischen:

- Schubbeanspruchung durch Abscherung (Kapitel 2.4.4)
- Schubbeanspruchung durch Querkräfte bei Biegung (Kapitel 10)

2.4.1 Schubspannung

Bislang wurden die Grundbelastungsarten Zug, Druck und Biegung besprochen. Als Reaktion auf eine äußere Belastung (Zugkraft, Druckkraft oder Biegemoment) treten im Innern des Bauteils mechanische Spannungen auf. Die Schnittkräfte sind dabei stets senkrecht (normal) zur Schnittfläche gerichtet. Als Maß für die innere Beanspruchung wurde die **Normalspannung** σ eingeführt (Bild 2.27). Sie ist definiert als Kraftkomponente (F_s) senkrecht zur Schnittfläche bezogen auf die Schnittfläche A (Kapitel 2.1.1, Gleichung 2.1).

Bezieht man in analoger Weise die zur Schnittfläche parallele Komponente (F_p) auf die Schnittfläche A , dann erhält man als Maß für die innere Beanspruchung die **Schubspannung** τ (Bild 2.27):

$$\tau = \frac{F_p}{A} \quad \text{Definition der Schubspannung} \quad (2.42)$$

F_p Kraftkomponente parallel zur Schnittfläche (N)
 A Schnittfläche (mm^2)
 τ Schubspannung (N/mm^2)

Eine verallgemeinerte Betrachtung zum Spannungsbegriff sowie die Indizierung und Vorzeichenregelung für Normal- und Schubspannungen folgt in Kapitel 3.1.

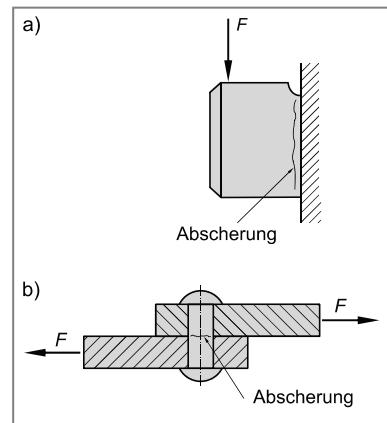


Bild 2.26 Schubbeanspruchung durch Abscherung (Beispiele)

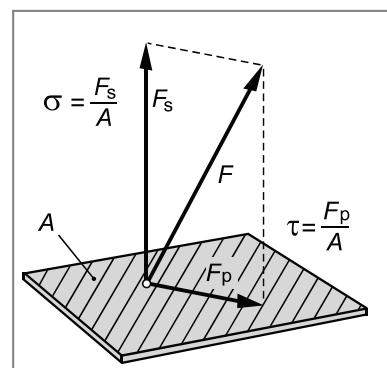


Bild 2.27 Definition von Normal- und Schubspannung

Schubspannungen treten aus Gründen des Momentengleichgewichts immer paarweise auf (**zugeordnete Schubspannungen**; siehe auch Kapitel 3.1.4), Bild 2.28.

Zugeordnete Schubspannungen wirken stets in zwei zueinander senkrechten Ebenen des betrachteten Volumenelements. Sie haben den gleichen Betrag und zeigen entweder auf die gemeinsame Kante hin oder von ihr weg.

2.4.2 Schiebung (Winkelverzerrung)

Um die Verformung eines Werkstoffelementes bei Schubbeanspruchung zu ermitteln, wird das in Bild 2.29 dargestellte ursprünglich quadratische Flächenelement betrachtet. Das Element wird unter der Wirkung der Schubspannungen τ zu einem Parallelogramm verformt. Aus dem ursprünglich rechten Winkel $\angle AOB = \pi/2$ der Würfelkanten bei O (hier denkt man sich das Flächenelement festgehalten) ist unter der Wirkung der zugeordneten Schubspannungen der Winkel $\alpha = \angle A'OB'$ geworden. Diese durch Schubspannungen erzeugte Winkelveränderung des ursprünglich rechtwinkligen Elementes γ heißt **Schiebung (Winkelverzerrung)**¹⁾ und ist wie folgt definiert:

$$\gamma = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad \text{Definition der Schiebung (Winkelverzerrung)} \quad (2.43)$$

Die Schiebung γ wird im Bogenmaß (rad) angegeben, sie ist daher dimensionslos. Mitunter wird die Schiebung in Analogie zur Dehnung ε auch in Prozent (%) oder Promille (‰) ausgedrückt. Eine verallgemeinerte Betrachtung zum Verformungsbegriff sowie die Indizierung und Vorzeichenregelung für Dehnungen und Schiebungen folgt in Kapitel 4.1.

2.4.3 Formänderung durch Schubspannungen

Experimentelle Untersuchungen zeigen, dass bei linear-elastischem Werkstoffverhalten zwischen Schubspannung τ und Schiebung γ ein linearer Zusammenhang besteht (vgl. Hookesches Gesetz, Kapitel 2.1.4.1):

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \text{Hooke'sches Gesetz für Schubbeanspruchung} \quad (2.44)$$

Der Proportionalitätsfaktor G heißt **Schubmodul** oder **Gleitmodul**. Seine Einheit ist N/mm² oder MPa bzw. GPa. Der Schubmodul G ist, wie der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl μ , eine elastische Werkstoffkonstante. Von diesen drei Größen sind für isotrope Werkstoffe und linear-elastisches Werkstoffverhalten jedoch nur zwei voneinander unabhängig. Zwischen ihnen besteht die Beziehung (ohne Herleitung):

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad \text{Zusammenhang zwischen den elastischen Werkstoffkonstanten } E, G \text{ und } \mu \quad (2.45)$$

¹⁾ Mitunter sind auch die Begriffe „Schubverzerrung“ oder „Scherung“ gebräuchlich. Der Begriff „Gleitung“ soll in diesem Zusammenhang allerdings nicht verwendet werden, da dieser Begriff nach DIN 13316 bleibenden Verformungen vorbehalten ist.

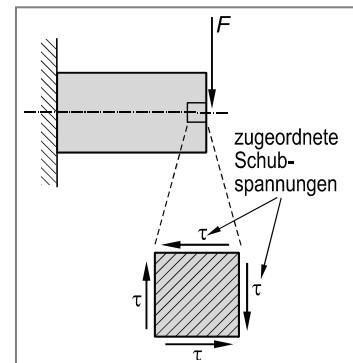


Bild 2.28 Zugeordnete Schubspannungen

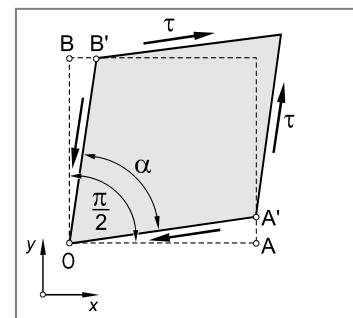


Bild 2.29 Verformung bei Schubbeanspruchung

Die elastischen Kennwerte der wichtigsten Werkstoffgruppen bzw. Werkstoffe sind im Anhang 1 (Werkstofftabellen) zusammengestellt.

Vergleicht man die Wirkung von Normal- und Schubspannungen miteinander, so gilt:

Normalspannungen bewirken Dehnungen (Längenänderungen) nach Maßgabe des Hookeschen Gesetzes ($\sigma = E \cdot \varepsilon$), Schubspannungen bewirken Schiebungen (Winkelverzerrungen) nach Maßgabe des Hookeschen Gesetzes für Schubbeanspruchung ($\tau = G \cdot \gamma$).

2.4.4 Spannungsermittlung bei Abscherbeanspruchung

Viele technische Bauteile wie Nieten, Bolzen aber auch Überlappstöße von Klebe- und Schweißverbindungen müssen Längskräfte übertragen und werden dementsprechend auf Abscherung beansprucht. Auch bei der Verarbeitung wie zum Beispiel Stanzen oder Scherschneiden treten derartige Abscherbeanspruchungen auf. Bei dieser Art der Beanspruchung greifen zwei Kräfte mit dicht nebeneinander liegenden Wirkungslinien quer zur Längsachse des Bauteils (Stabes) an (Bild 2.26a und b). Der dabei erzeugte räumliche Spannungszustand ist verhältnismäßig komplex, da sich die Schubspannungen nicht gleichmäßig über den Querschnitt verteilen und teilweise noch zusätzlich Zug-, Druck- oder Biegespannungen auftreten können. Die Schubspannungen in einem Balken sind nicht, wie die Normalspannungen in einem Zugstab, gleichmäßig über den gesamten Querschnitt verteilt. Sie verschwinden vielmehr an den Rändern, da senkrecht zu einer lastfreien Oberfläche keine Spannungen auftreten können und haben ein Maximum im Innern (Kapitel 10). Dennoch genügt es häufig anzunehmen, dass die Schubspannungen gleichmäßig über die Querschnittsfläche verteilt sind. Die **mittlere Abscherspannung τ_a** errechnet sich dann aus der Schubkraft F_a und der Schnittfläche A zu:

$$\tau_a = \frac{F_a}{A} \quad \text{Mittlere Abscherspannung} \quad (2.46)$$

Die tatsächliche Spannungsverteilung wird in Kapitel 10 besprochen und für einige ausgewählte Querschnittsgeometrien quantifiziert (Tabelle 10.1).

2.4.5 Werkstoffkennwerte bei Abscherbeanspruchung

Das Werkstoffverhalten unter Abscherbeanspruchung (Kapitel 2.4.4) wird in der Materialprüfung mit dem **Scherversuch** untersucht. Der Scherversuch ist für metallische Werkstoffe in DIN 50141 (Probendurchmesser 2 mm ... 25 mm) genormt und dient zur Ermittlung der Scherfestigkeit τ_{ab} metallischer Werkstoffe bis zu einer Zugfestigkeit von maximal 1300 N/mm².

Beim Scherversuch werden zylindrische Proben mit einem Durchmesser d_0 und einer in der Norm angegebenen Mindestlänge l in einem Schergerät nach Bild 2.30 zügig beansprucht, bis die Probe zweischnittig abschert. Das Schergerät kann beispielsweise in eine Zug- oder Universalprüfmaschine eingebaut werden.

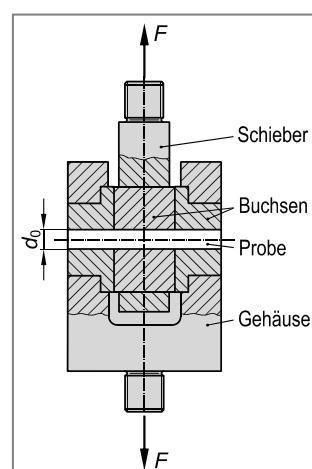


Bild 2.30 Schergerät für Zugprüfmaschinen nach DIN 50 141

Beim Scherversuch treten neben reinen Schubspannungen zusätzlich Spannungen durch Biegung und Flächenpressung auf. Da kein eindeutiger Spannungszustand zu erreichen ist, wird im Scherversuch im Allgemeinen nur die zum Abscheren erforderliche Höchstzugkraft F_m ermittelt, auf den Ausgangsquerschnitt A_0 der Probe bezogen und auf diese Weise die **Scherfestigkeit** τ_{ab} ermittelt. Da die Probe zweiseitig abgescheret wird (Gesamtfläche $2 \cdot A_0$) folgt für die Scherfestigkeit τ_{ab} :

$$\tau_{ab} = \frac{F_m}{2 \cdot A_0} = \frac{2 \cdot F_m}{\pi \cdot d_0^2} \quad (2.47)$$

τ_{ab} = Scherfestigkeit (N/mm^2)

F_m = Höchstzugkraft beim Abscheren der Probe (N)

A_0 = Anfangsquerschnittsfläche der unbelasteten Probe (mm^2)

d_0 = Anfangsdurchmesser der unbelasteten Probe (mm)

Eine der Streck- oder Dehngrenze vergleichbare Schub- oder Scherfließgrenze wird nicht ermittelt, da sie für die praktische Anwendung keine Bedeutung hat.

Ist die Scherfestigkeit τ_{ab} nicht verfügbar, dann kann sie für duktile Werkstoffe in erster Näherung aus der Zugfestigkeit R_m mit Hilfe der nachfolgenden empirischen Beziehung ermittelt werden.

$$\tau_{ab} \approx 0,6 \dots 0,9 \cdot R_m \quad 0,6 \cdot R_m \text{ für hochfeste, } 0,9 \cdot R_m \text{ für niedrigfeste, duktile Werkstoffe} \quad (2.48)$$

Für Stähle mit $R_m \leq 1800 \text{ N/mm}^2$ verwendet man mitunter auch die empirisch abgeleitete Beziehung:

$$\tau_{ab} = 0,5 \cdot R_m + 140 \text{ N/mm}^2 \quad (2.49)$$

Für spröde Werkstoffe sind keine Umrechnungsbeziehungen bekannt. Lediglich für Gusseisen mit Lamellengraphit kann die Scherfestigkeit etwa der Zugfestigkeit gleichgesetzt werden: $\tau_{ab} \approx R_m$.

2.4.6 Zulässige Spannung bei Abscherbeanspruchung

Als Versagensart kommt unter Abscherbeanspruchung nur der Bruch in Frage. Für die zulässige Schubspannung τ_{zul} ergibt sich:

$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{ab}}{S_B} \quad \text{mit } S_B = 2,0 \dots 4,0 \quad (2.50)$$

2.4.7 Aufgaben

Aufgabe 2.23

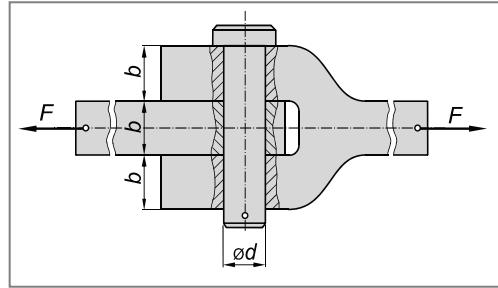


Über eine einfache Laschenverbindung aus unlegiertem Baustahl E295 ($R_c = 295 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 490 \text{ N/mm}^2$; $\tau_{ab} = 150 \text{ N/mm}^2$) soll eine Kraft von $F = 35 \text{ kN}$ übertragen werden.

- Ermitteln Sie den Durchmesser d des Bolzens, damit eine sichere Kraftübertragung erfolgen kann ($S_B = 2,0$).

- Bestimmen Sie für den Bolzen gemäß Aufgabenteil a) die maximale Biegespannung σ_b . Zwischen Bolzen und Laschen soll dabei ausreichend Spiel bestehen. Das Maß b soll 20 mm betragen.

- Berechnen Sie die maximale Flächenpressung p in der Laschenverbindung.



Aufgabe 2.24

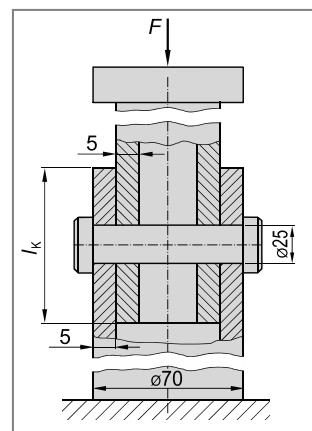


Zur Verlängerung einer druckbeanspruchten Rohrstütze werden Bolzen aus C45 ($R_m = 580 \text{ N/mm}^2$; $R_c = 320 \text{ N/mm}^2$) mit einem Durchmesser von $d = 25 \text{ mm}$ verwendet (siehe Abb.).

- Ist die Sicherheit gegen Abscheren des Bolzens ausreichend, falls die maximal zulässige Druckkraft auf die Stützen $F = 150 \text{ kN}$ beträgt?

Anstelle des Bolzens sollen die beiden Rohre durch Kleben miteinander verbunden werden.

- Ermitteln Sie die erforderliche Klebelänge l_K , damit die Druckkraft $F = 150 \text{ kN}$ aufgenommen werden kann. Die zulässige Schubspannung in der Klebeverbindung $\tau_{K \text{ zul}}$ darf 15 N/mm^2 nicht überschreiten.



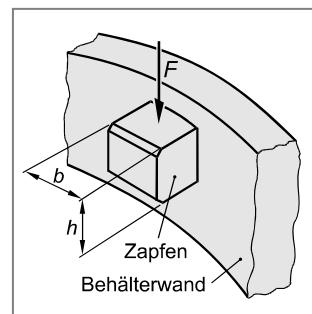
Aufgabe 2.25



An der Innenoberfläche eines zylindrischen Behälters aus Werkstoff G34CrMo4 ($R_{p0,2} = 600 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 750 \text{ N/mm}^2$) sind zur Auflage eines Zwischenbodens 4 um 90° gegeneinander versetzte Zapfen mit einer Breite b von jeweils 80 mm angegossen worden.

Berechnen Sie die mindestens erforderliche Höhe h , damit bei einer Auflagekraft von $F_A = 2000 \text{ kN}$ ein Bruch mit Sicherheit ($S_B = 2,5$) ausgeschlossen werden kann.

Normalspannungen aufgrund von Biegung sowie Kerbwirkung sollen vernachlässigt werden.

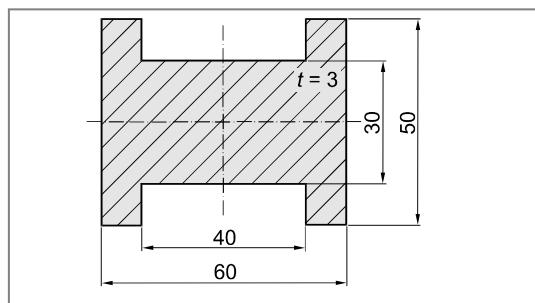


Aufgabe 2.26

○○○○●

Aus einer Blechtafel der Aluminium-Legierung EN AW-Al Mg3-H14 mit einer Dicke von $t = 3$ mm soll das dargestellte Werkstück ausgestanzt werden. Die Scherfestigkeit der Aluminiumlegierung beträgt $\tau_{ab} = 290 \text{ N/mm}^2$.

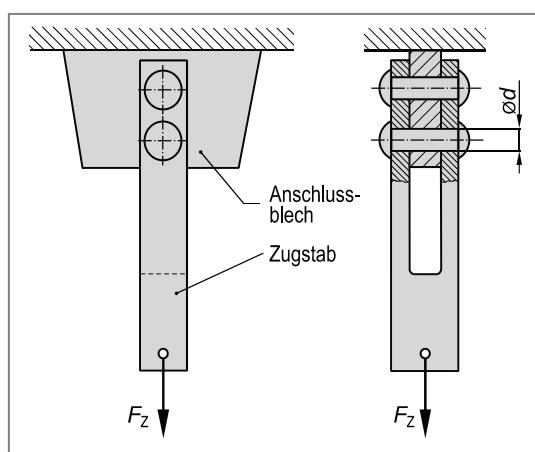
Ermitteln Sie die mindestens erforderliche Stanzkraft F_s .

**Aufgabe 2.27**

○○○●●

Der dargestellte Zugstab wird durch zwei Stahlnieten mit dem Anschlussblech verbunden (jeweils zweischnittige Nietverbindung).

Ermitteln Sie den erforderlichen Durchmesser d der Nieten, damit eine statisch wirkende Zugkraft von $F_z = 100 \text{ kN}$ mit Sicherheit ($S_B = 3,5$) aufgenommen werden kann. Als Werkstoff für die Nieten soll C22 verwendet werden (Scherfestigkeit $\tau_{ab} = 290 \text{ N/mm}^2$).

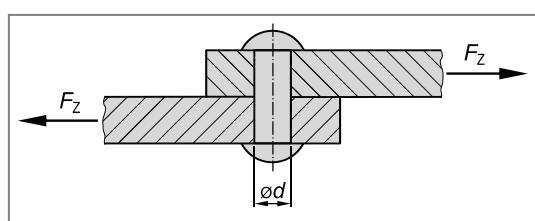
**Aufgabe 2.28**

○○○○●

Die Abbildung zeigt die einschnittige Nietverbindung zweier Stahlbleche.

Als Nietwerkstoff wurde die Aluminium-Legierung EN AW-Al Zn5Mg3Cu-T6 gewählt. Die Scherfestigkeit der Legierung beträgt $\tau_{ab} = 380 \text{ N/mm}^2$.

Berechnen Sie den mindestens erforderlichen Durchmesser d des Niets, damit eine Kraft von $F_z = 50 \text{ kN}$ mit Sicherheit ($S_B = 3,0$) übertragen werden kann. Kerbwirkung und Biegeanteile sollen vernachlässigt werden.



2.5 Torsion

Ein Torsionsmoment entsteht, falls Kräftepaare F auf einen Stab einwirken, deren Ebenen parallel zum Stabquerschnitt oder deren Momentenvektoren M_t in Richtung der Stabachse liegen (Bild 2.31). Eine Torsionsbeanspruchung führt zu einer Verdrehung der Querschnittsflächen gegeneinander, die Mantellinien werden dabei schraubenförmig verformt.

Die nachfolgenden Ausführungen sollen sich auf einfache Querschnitte beschränken, da die Theorie der Torsion beliebig geformter Querschnittsflächen kompliziert ist. Sinnvollerweise unterscheidet man zwischen:

- Torsion kreisförmiger Querschnitte (Kreis- und Kreisringquerschnitte, Kapitel 2.5.1)
- Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte (Kapitel 11)

2.5.1 Spannungsermittlung bei Torsion kreisförmiger Querschnitte

Bei einer Torsionsbeanspruchung gerader, prismatischer Stäbe mit kreisförmiger Querschnittsfläche (konstruktiv gesehen handelt es sich dabei vor allem um Wellen und Achsen) bleiben die einzelnen Querschnitte eben und senkrecht zur Stabachse, sie verdrehen sich lediglich wie starre Scheiben gegeneinander unter Beibehaltung der Stabachse. Aufgrund der Symmetrie der Querschnitte entsteht eine gleichmäßige Verformung d. h. keine Verschiebung von Werkstoffteilchen in Längsrichtung. Die Stabquerschnitte bleiben dabei eben und senkrecht zur Stabachse, sie verwölben sich nicht. Es soll außerdem vorausgesetzt werden, dass die Belastung nur durch ein Drehmoment um die Stabachse erfolgt. Querkräfte treten nicht auf.

Zur Herleitung der durch ein Torsionsmoment im Werkstoff hervorgerufenen Spannungen betrachtet man zunächst den in Bild 2.32a dargestellten Stab. Der Stab wird durch das Torsionsmoment M_t auf Verdrehung (Torsion) beansprucht.

Zur Ermittlung der durch das Torsionsmoment M_t hervorgerufenen Schubspannungen wird eine aus dem Stab herausgeschnitten Scheibe der Dicke dx und dem Radius R betrachtet (Bild 2.32c).

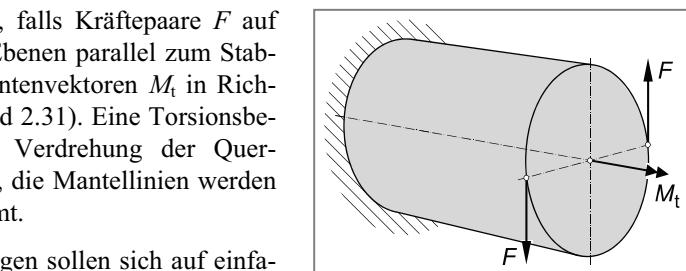


Bild 2.31 Torsionsbeanspruchter Stab

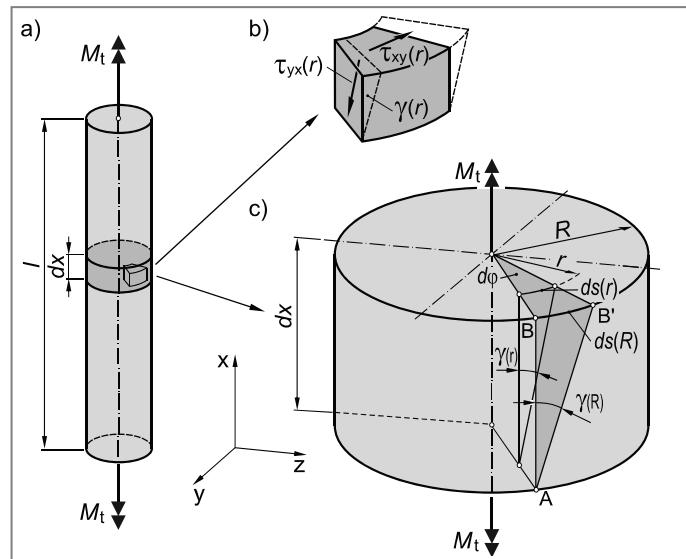


Bild 2.32 Verformung eines Rundstabes unter Torsion

Das Torsionsmoment M_t versucht benachbarte Querschnittsebenen relativ zueinander um einen Winkel $d\varphi$ zu verdrehen. Bei der Drehung der beiden Endquerschnitte um den Winkel $d\varphi$ geht die Mantellinie AB des Zylinders in die Schraubenlinie AB' mit dem Steigungswinkel γ über. Der ursprünglich rechte Winkel zwischen der Mantellinie AB sowie der zur Stabachse senkrechten Querschnittsfläche ändert sich um den Winkel γ . Dieser Winkel γ entspricht der Schiebung (Kapitel 2.4.2).

Aufgrund der geometrischen Verhältnisse gelten für ein Bogenstück im Abstand r ($0 \leq r \leq R$) von der Drehachse die folgenden Beziehungen:

$$ds(r) = r \cdot d\varphi \quad (2.51)$$

sowie

$$ds(r) = \tan \gamma(r) \cdot dx \approx \gamma(r) \cdot dx \quad (2.52)$$

Gleichsetzen von Gleichung 2.51 und 2.52:

$$r \cdot d\varphi = \gamma(r) \cdot dx \quad (2.53)$$

Integration über die gesamte Stablänge ergibt schließlich einen Zusammenhang zwischen Verdrehwinkel φ und der Schiebung (Winkelverzerrung) γ in Abhängigkeit des Abstands r von der Drehachse:

$$\begin{aligned} r \cdot \int_0^\varphi d\varphi &= \gamma(r) \cdot \int_0^l dx \\ r \cdot \varphi &= \gamma(r) \cdot l \quad \text{bzw. } \gamma(r) = \frac{\varphi}{l} \cdot r \end{aligned} \quad (2.54)$$

Gemäß Gleichung 2.54 nimmt die Schiebung $\gamma(r)$ ausgehend vom Wert Null in der Drehachse ($r = 0$) mit dem Radius r linear bis zum Maximalwert $\gamma(R)$ an der Staboberfläche ($r = R$) zu.

An einem parallel zur Stabachse im Abstand r herausgeschnittenen Volumenelement wirken bei reiner Torsion einander zugeordnete Schubspannungen (Bild 2.32b). Die in den Querschnitten in Umfangsrichtung auftretenden Schubspannungen sind denjenigen Schubspannungen zugeordnet, die in Längsschnitten in axialer Richtung wirken, also $\tau_{xy}(r) = \tau_{yx}(r) = \tau(r)$. Diese zugeordneten Schubspannungen bewirken damit die Verformung, die bei der Verdrehung des Stabes entsteht:

$$\tau(r) = |\tau_{xy}(r)| = |\tau_{yx}(r)|$$

Bei linear-elastischem Werkstoffverhalten ist der Zusammenhang zwischen Schubspannung $\tau(r)$ und Schiebung $\gamma(r)$ durch das Hookesche Gesetz für Schubspannungen gegeben (Kapitel 2.4.3):

$$\tau(r) = G \cdot \gamma(r) \quad (2.55)$$

Setzt man Gleichung 2.54 in Gleichung 2.55 ein, dann folgt schließlich für die Schubspannung $\tau(r)$ im Abstand r von der Drehachse:

$$\tau(r) = G \cdot \frac{\varphi}{l} \cdot r \quad (2.56)$$

Die Schubspannung $\tau(r)$ steigt also mit zunehmendem Abstand von der Drehachse nach außen linear an.

Mit Hilfe von Gleichung 2.56 können bei einem vorgegebenen Verdrehwinkel φ die Schubspannungen $\tau(r)$ in Abhängigkeit des Abstands r von der Drehachse ermittelt werden. Für praktische Berechnungen der Schubspannung $\tau(r)$ ist jedoch Gleichung 2.56 ungeeignet, da der Verdrehwinkel in der Regel nicht vorgegeben ist. Daher muss, analog zur Biegung, ein Zusammenhang zwischen der bekannten äußeren Belastung durch das Torsionsmoment M_t und der Schubspannung $\tau(r)$ im Bauteil hergeleitet werden.

Freischneiden des Torsionsstabes zeigt, dass die Schubspannungen $\tau(r)$ für einen festen Radius r in konzentrischen Kreisen um die Drehachse verlaufen (Bild 2.33). Der Anteil dM_t am Gesamtmoment, den die Schubspannung $\tau(r)$ an einem beliebigen Radius ($0 \leq r \leq R$) liefert, beträgt:

$$dM_t = r \cdot \tau(r) \cdot dA \quad (2.57)$$

Das Gesamtmoment ergibt sich dann als Integral über die Querschnittsfläche A zu:

$$M_t = \int_A r \cdot \tau(r) \cdot dA \quad (2.58)$$

Gleichung 2.56 in Gleichung 2.58 eingesetzt, liefert:

$$M_t = \int_A r \cdot G \cdot \frac{\varphi}{l} \cdot r \cdot dA = G \cdot \frac{\varphi}{l} \int_A r^2 \cdot dA \quad (2.59)$$

Der Integralausdruck

$$\int_A r^2 \cdot dA = I_p \quad (2.60)$$

wird als **polares Flächenmoment 2. Ordnung** (I_p) bezeichnet. Es hat die Dimension m^4 (bzw. cm^4 oder mm^4). Die polaren Flächenmomente 2. Ordnung sind für den Vollkreis- und Kreisringquerschnitt in Tabelle 2.6 zusammengestellt. Das Torsionsmoment M_t berechnet sich damit zu:

$$M_t = G \cdot \frac{\varphi}{l} \cdot I_p \quad (2.61)$$

Aus Gleichung 2.56 folgt:

$$G \cdot \frac{\varphi}{l} = \frac{\tau(r)}{r} \quad (2.62)$$

Gleichung 2.62 in Gleichung 2.61 eingesetzt ergibt schließlich:

$$M_t = \tau(r) \cdot \frac{I_p}{r} \quad (2.63)$$

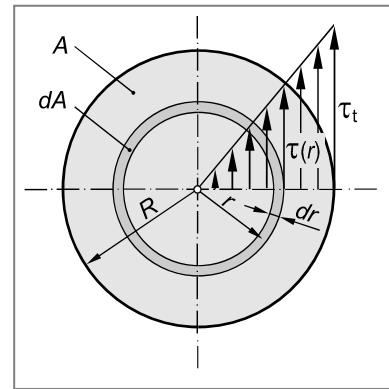


Bild 2.33 Spannungsverteilung eines kreiszylindrischen Stabes unter Torsion

Die für Festigkeitsnachweise erforderliche maximale Schubspannung τ_{\max} , die in der Regel mit τ_t ($\tau_t \equiv \tau_{\max}$) bezeichnet wird, erhält man dementsprechend für $r = R$ zu:

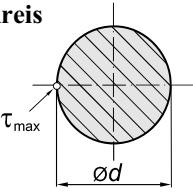
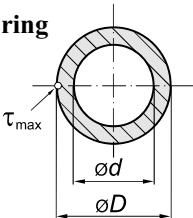
$$\tau_t = \frac{M_t}{I_p} \cdot R \quad (2.64)$$

Die beiden Größen I_p und R , die nur von der Querschnittsgeometrie abhängen, fasst man zum **Widerstandsmoment gegen Torsion W_t** (bisweilen auch mit W_p bezeichnet) zusammen. Das Widerstandsmoment gegen Torsion hat die Dimension m^3 (bzw. cm^3 oder mm^3) und ist für den Vollkreis- und Kreisringquerschnitt ebenfalls in Tabelle 2.6 zusammengestellt.

Damit ergibt sich die Grundgleichung zur Berechnung der maximalen Torsionsschubspannung τ_t in der Randfaser eines auf Torsion beanspruchten geraden prismatischen Stabes mit Vollkreis- oder Kreisringquerschnitt:

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{Maximale Torsionsschubspannung in einem geraden prismatischen Stab mit Vollkreis- oder Kreisringquerschnitt unter der Wirkung eines Torsionsmomentes} \quad (2.65)$$

Tabelle 2.6 Polare Flächenmomente 2. Ordnung (I_p) sowie Widerstandsmomente gegen Torsion (W_t) für den Vollkreis- und Kreisringquerschnitt

Profil	polares Flächenmoment	Widerstandsmoment gegen Torsion
Vollkreis 	$I_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$
Kreisring 	$I_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4)$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$

2.5.2 Verdrehwinkel

Aus Gleichung 2.61 kann auch der Verdrehwinkel φ unter der Wirkung des Torsionsmomentes M_t errechnet werden:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \quad \text{Verdrehwinkel eines geraden prismatischen Stabes mit Vollkreis- oder Kreisringquerschnitt unter der Wirkung eines Torsionsmomentes} \quad (2.66)$$

Bei der Anwendung von Gleichung 2.66 ist zu beachten:

1. die Gleichung gilt nur für gerade, prismatische Stäbe mit Vollkreis- und Kreisringquerschnitt (analog Gleichung 2.65),
 2. der Verdrehwinkel φ ergibt sich aus Gleichung 2.66 im Bogenmaß. Die Umrechnung ins Gradmaß erfolgt über die Beziehung:

$$\varphi \text{ (in Grad)} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi \text{ (in rad)}$$

Umrechnung zwischen Gradmaß und Bogenmaß (2.67)

Der Verdrehwinkel φ eines geraden prismatischen Stabes aus unterschiedlichen Werkstoffen mit sprunghaft sich verändernden Querschnitten und / oder Momenten (Bild 2.34) berechnet sich aus der Summe der Einzelverdrehwinkel φ_i . Bezeichnet man die Anzahl der Balkenabschnitte mit konstantem Werkstoff, Querschnitt oder Moment mit n , dann ergibt sich mit Gleichung 2.66 die Beziehung:

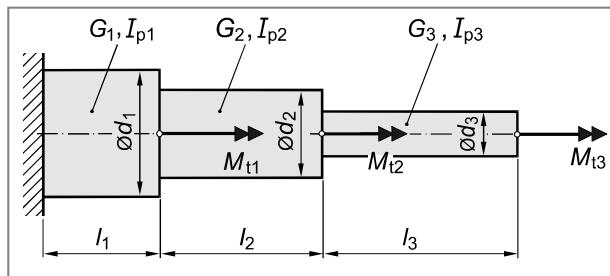


Bild 2.34 Verdrehung eines geraden prismatischen Stabes mit Kreisringquerschnitt sowie abschnittsweise konstantem Stabquerschnitt, Werkstoff und Torsionsmoment

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{M_{ti} \cdot l_i}{G_i \cdot I_{pi}}$$

Verdrehwinkel eines geraden prismatischen Stabes mit Vollkreis- oder Kreisringquerschnitt und abschnittsweise konstantem Stabquerschnitt, Werkstoff sowie Torsionsmoment

2.5.3 Werkstoffverhalten und Kennwerte bei Torsionsbeanspruchung

Das Materialverhalten unter Torsionsbeanspruchung wird im **Torsions-** oder **Verdrehversuch** ermittelt. Beim nicht genormten Torsions- oder Verdrehversuch, der hauptsächlich zur Prüfung von Werkstoffen für Wellen, Rohre, Drähte usw. dient, wird eine meist zylindrische Probe ($L_0 = 5 \cdot d_0 \dots 10 \cdot d_0$) durch ein um die Probenlängsachse wirkendes Torsionsmoment M_t verdreht, bis der Werkstoff zu fließen beginnt bzw. bis die Probe bricht (Bild 2.35).

Ausgehend von der Stabmitte nimmt die Schubspannung dabei zum Rand hin kontinuierlich zu und ist dort am größten (Bild 2.35). Als Versagensart kommen bei duktilen Werkstoffen das Fließen und der Bruch, bei spröden Werkstoffen nur der Bruch in Betracht.

Als Werkstoffkennwerte können im Torsionsversuch die Torsionsfließgrenze τ_{fF} und die Torsionsfestigkeit τ_{FB} ermittelt werden.

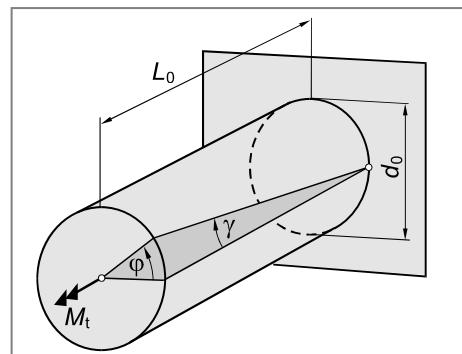


Bild 2.35 Prinzip des Torsionsversuchs

Aus dem Moment M_{tF} bei Fließbeginn errechnet man die am Probenrand auftretende größte Schubspannung, die **Torsionsfließgrenze** τ_{tF} zu:

$$\tau_{tF} = \frac{M_{tF}}{W_t} \quad \text{Torsionsfließgrenze} \quad (2.69)$$

τ_{tF} Torsionsfließgrenze (N/mm^2)

M_{tF} Torsionsmoment bei Fließbeginn (Nm)

W_t Widerstandsmoment gegen Torsion (mm^3)

Die beim Bruch der Probe am Probenrand auftretende Schubspannung wird als **Torsionsfestigkeit** τ_{tB} bezeichnet:

$$\tau_{tB} = \frac{M_{tB}}{W_t} \quad \text{Torsionsfestigkeit} \quad (2.70)$$

τ_{tB} Torsionsfestigkeit (N/mm^2)

M_{tB} Torsionsmoment beim Bruch der Probe (Nm)

W_t Widerstandsmoment gegen Torsion (mm^3)

Das Widerstandsmoment gegen Torsion W_t wurde unter der Voraussetzung eines linear-elastischen Werkstoffverhaltens hergeleitet (s. o.). Mit Erreichen von M_{tB} ist jedoch der gesamte Querschnitt bereits plastifiziert, so dass τ_{tB} lediglich ein fiktiver Spannungswert ist.

Stehen Werkstoffkennwerte aus dem Torsionsversuch nicht zur Verfügung, dann kann die Torsionsfließgrenze τ_{tF} und die Torsionsfestigkeit τ_{tB} auch aus Zugversuchskennwerten abgeschätzt werden. Aus dem Vergleich von Werkstoffkennwerten aus dem Torsions- und dem Zugversuch wurden empirische Zusammenhänge zwischen der Torsionsfließgrenze τ_{tF} bzw. der Torsionsfestigkeit τ_{tB} und der Streck- bzw. Dehngrenze (R_e bzw. R_p) bzw. der Zugfestigkeit (R_m) abgeleitet.

Für **duktile Werkstoffe** gilt:

$$\tau_{tF} = \frac{R_e}{2} \quad \text{bzw. } \tau_{tF} = \frac{R_{p0,2}}{2} \quad (2.71)$$

$$\tau_{tB} \approx 0,6 \dots 0,9 \cdot R_m \quad \begin{matrix} 0,6 \cdot R_m & \text{für hochfeste, } 0,9 \cdot R_m & \text{für niedrigfeste} \\ & \text{Werkstoffe} & \end{matrix} \quad (2.72)$$

Für Stähle mit $R_m \leq 1800 \text{ N/mm}^2$ verwendet man mitunter auch die empirisch abgeleitete Beziehung:

$$\tau_{tB} = 0,5 \cdot R_m + 140 \text{ N/mm}^2 \quad (2.73)$$

Für **spröde Werkstoffe** gilt:

$$\tau_{tB} = R_m \quad (2.74)$$

2.5.4 Zulässige Spannung bei Torsionsbeanspruchung

Duktile Werkstoffe versagen unter Torsionsbeanspruchung durch Fließen oder Bruch, spröde Werkstoffe hingegen nur durch Bruch. In Tabelle 2.7 sind in Abhängigkeit des Werkstoffverhaltens und der Versagensart die maßgebenden Werkstoffkennwerte sowie Sicherheitsbeiwerte bei reiner Torsionsbeanspruchung zusammengestellt.

Tabelle 2.7 Kennwerte zur Bestimmung der zulässigen Spannung unter Torsionsbeanspruchung

Werkstoff bzw. Werkstoffzustand	Versa- gensart	Werkstoffkenn- wert	Ersatzwert	Sicherheitsbeiwert ¹⁾
duktil	Fließen	τ_{tF}	$R_e / 2$ bzw. $R_{p0,2} / 2$	$S_F = 1,2 \dots 2,0$
	Bruch	τ_{tB}	$0,6 \dots 0,9 \cdot R_m$ oder $0,5 \cdot R_m + 140 \text{ N/mm}^2$	$S_B = 2,0 \dots 4,0$
spröde	Bruch	τ_{tB}	R_m	$S_B = 4,0 \dots 9,0$

¹⁾ Anhaltswerte, falls keine einschlägigen Berechnungsvorschriften vorliegen.

Zusammenfassend errechnet sich die zulässige Schubspannung τ_{zul} unter Torsionsbeanspruchung also wie folgt:

Bauteile aus duktilen Werkstoffen bzw. duktile Werkstoffverhalten

- Fließen:
$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{tF}}{S_F} \quad \text{mit } S_F = 1,2 \dots 2,0 \quad (2.75)$$

- Bruch:
$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{tB}}{S_B} \quad \text{mit } S_B = 2,0 \dots 4,0 \quad (2.76)$$

Maßgebend für den Festigkeitsnachweis ist der niedrigere der beiden Werte.

Bauteile aus spröden Werkstoffen bzw. sprödes Werkstoffverhalten

- Bruch:
$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{tB}}{S_B} \quad \text{mit } S_B = 4,0 \dots 9,0 \quad (2.77)$$

2.5.5 Aufgaben

Aufgabe 2.29

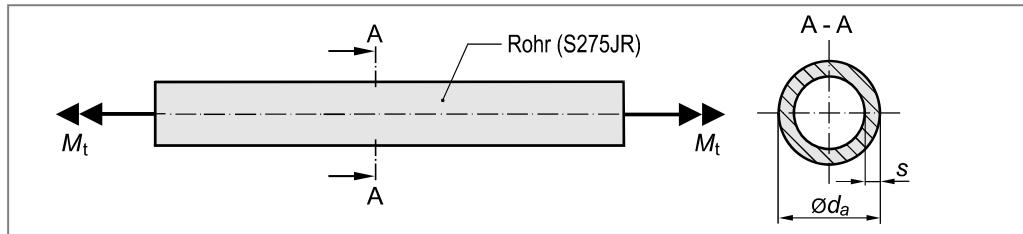
○○○○●

Ein Rohr aus Werkstoff S275JR mit einem Außendurchmesser $d_a = 50 \text{ mm}$ und einer Wandstärke von $s = 6 \text{ mm}$ wird durch ein Torsionsmoment M_t statisch beansprucht.

Werkstoffkennwerte S275JR:

$$R_e = 295 \text{ N/mm}^2 \quad E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 490 \text{ N/mm}^2 \quad \mu = 0,30$$

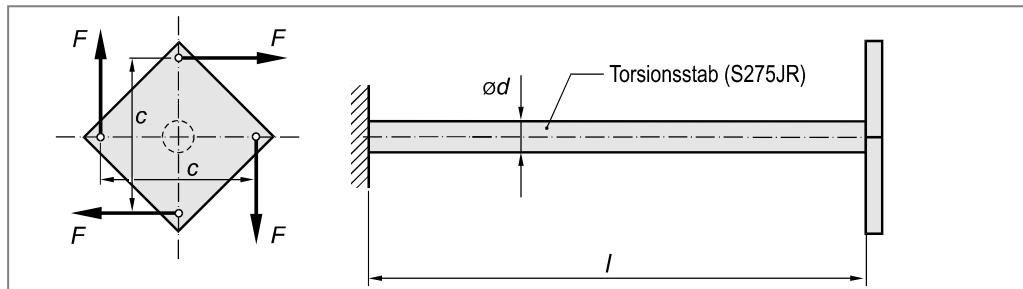


- Skizzieren Sie qualitativ den Spannungsverlauf über der Querschnittsfläche.
- Ermitteln Sie das zulässige Torsionsmoment, damit ein Versagen mit Sicherheit ausgeschlossen werden kann ($S_F = 1,2$ und $S_B = 2,0$).
- Berechnen Sie für den Fall aus Aufgabenteil b) die maximale Schubspannung im Querschnitt.

Aufgabe 2.30

○○○●●

Ein Torsionsstab aus Werkstoff S275JR (Werkstoffkennwerte siehe Aufgabe 2.29) mit Vollkreisquerschnitt und einer Länge von $l = 2 \text{ m}$ ist an einem Ende fest eingespannt. Am anderen Ende des Stabes ist eine Platte angebracht, an der vier tangential gerichtete, statisch wirkende Kräfte von je $F = 900 \text{ N}$ angreifen. Der Abstand der Wirkungslinien der Kräfte beträgt $c = 700 \text{ mm}$. Die Kerbwirkung an der Einspannstelle kann vernachlässigt werden.



- Dimensionieren Sie den Durchmesser d des Stabes so, damit Fließen mit einer Sicherheit von $S_F = 2,0$ ausgeschlossen werden kann.
- Bestimmen Sie den mindestens erforderlichen Durchmesser d^* , falls der Stab aus der Guss-eisensorte EN-GJL-300 ($R_m = 300 \text{ N/mm}^2$; $E = 110000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,25$) gefertigt wurde und eine Sicherheit von $S_B = 5,0$ gegen Bruch verlangt wird.
- Ermitteln Sie den Verdrehwinkel φ für die Fälle aus Aufgabenteil a) und b).

Aufgabe 2.31

Ein Stab mit kreiszylindrischer Querschnittsfläche aus dem Vergütungsstahl 42CrMo4 mit den in der Abbildung gegebenen Abmessungen, ist an einem Ende fest eingespannt und wird an seinem anderen Ende durch das statisch wirkende, tangential angreifende Kräftepaar F auf Torsion beansprucht. Die Kerbwirkung an der Einspannstelle sowie im Bereich der Durchmesseränderung kann vernachlässigt werden.

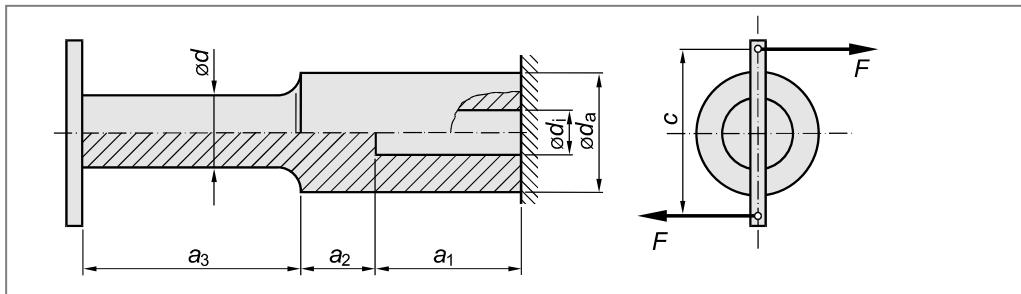
Werkstoffkennwerte 42CrMo4:

$$R_{p0,2} = 1140 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1320 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 205000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



$$a_1 = 50 \text{ mm} \quad d_a = 40 \text{ mm}$$

$$a_2 = 25 \text{ mm} \quad d_i = 15 \text{ mm}$$

$$a_3 = 65 \text{ mm} \quad d = 25 \text{ mm}$$

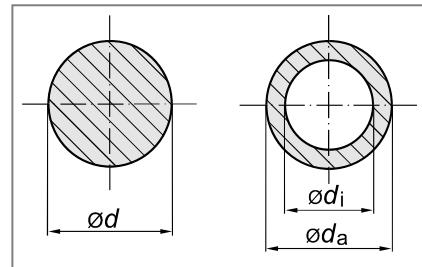
$$c = 80 \text{ mm}$$

- Berechnen Sie die Kräfte F , die erforderlich sind, um den Stab um $2,5^\circ$ zu verdrehen.
- Ermitteln Sie für die in Aufgabenteil a) berechnete Kraft F die Sicherheiten gegen Fließen (S_F) in den einzelnen Abschnitten des Stabes.

Aufgabe 2.32

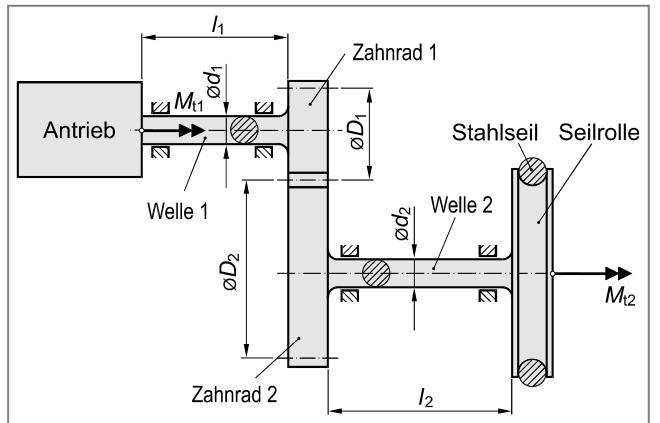
Berechnen Sie das polare Flächenmoment 2. Ordnung (I_p) sowie das Widerstandsmoment gegen Torsion (W_t):

- für einen Vollkreisquerschnitt mit Durchmesser d ,
- für einen Kreisringquerschnitt mit Außendurchmesser d_a und Innendurchmesser d_i .



Aufgabe 2.33

Die Abbildung zeigt ein einfaches Getriebe für eine Seilwinde (schematisch). Unter der Wirkung der zu übertragenden Torsionsmomente werden die beiden Wellen elastisch verdreht.



$$\begin{aligned}l_1 &= 100 \text{ mm} \\l_2 &= 200 \text{ mm} \\d_1 &= 25 \text{ mm} \\d_2 &= 35 \text{ mm} \\D_1 &= 50 \text{ mm} \\D_2 &= 100 \text{ mm}\end{aligned}$$

- Ermitteln Sie allgemein den Zusammenhang zwischen dem Antriebsmoment M_{t1} und dem Abtriebsmoment M_{t2} .
- Berechnen Sie das zulässige Abtriebsmoment M_{t2} , falls der Verdrehwinkel der Seilrolle $\varphi_s = 3^\circ$ gegenüber dem unbelasteten Zustand nicht überschreiten darf. Die Zahnräder sowie die Seilrolle sind als starre Scheiben zu betrachten. Als Werkstoff für die Stahlwellen wurde der Vergütungsstahl 36CrNiMo4 gewählt.

Werkstoffkennwerte 36CrNiMo4 (vergütet):

$$\begin{aligned}R_{p0,2} &= 900 \text{ N/mm}^2 \\R_m &= 1120 \text{ N/mm}^2 \\E &= 205000 \text{ N/mm}^2 \\\mu &= 0,30\end{aligned}$$

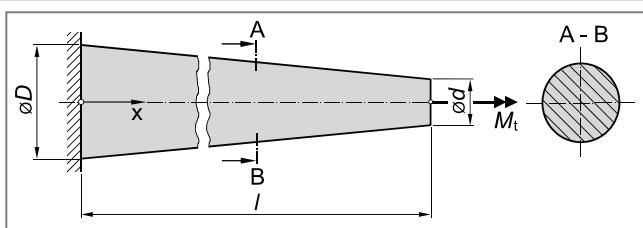
Aufgabe 2.34

Ein kegelstumpfförmiges Bau teil ($l = 2000 \text{ mm}$; $D = 50 \text{ mm}$; $d = 40 \text{ mm}$) aus der Federstahl sorte 54SiCr6 soll als Dreh stabfeder eingesetzt werden.

Ermitteln Sie das übertragbare Torsionsmoment M_t , falls der Verdrehwinkel des Stabes auf $\varphi = 5^\circ$ begrenzt werden soll.

Werkstoffkennwerte 54SiCr6:

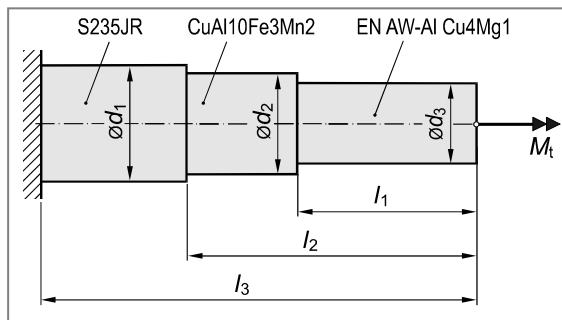
$$\begin{aligned}R_{p0,2} &= 1150 \text{ N/mm}^2 \\R_m &= 1520 \text{ N/mm}^2 \\E &= 205000 \text{ N/mm}^2 \\\mu &= 0,30\end{aligned}$$



Aufgabe 2.35

Zu Versuchszwecken wurde der abgebildete, abgesetzte Torsionsstab mit Vollkreisquerschnitt entwickelt. Die einzelnen Abschnitte setzen sich aus unterschiedlichen Werkstoffen zusammen.

Werkstoff	R_e bzw. $R_{p0,2}$ N/mm ²	R_m N/mm ²	E N/mm ²	μ
S235JR	240	450	210000	0,30
CuAl10Fe3Mn2	330	590	108000	0,34
EN AW-Al Cu4Mg1-T6	350	560	68000	0,33

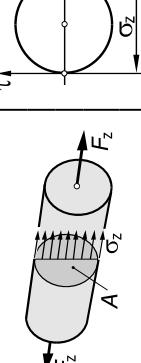
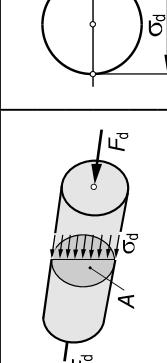
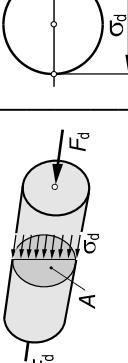
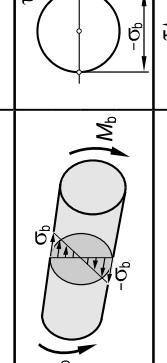
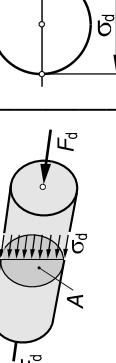
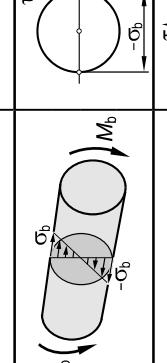
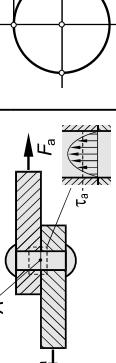
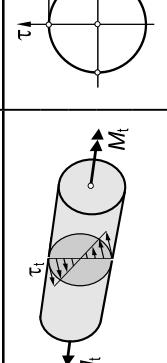
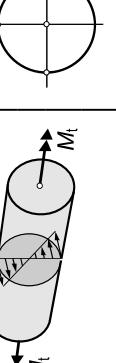
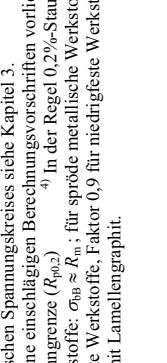


$$\begin{aligned}d_1 &= 30 \text{ mm} \\d_2 &= 28 \text{ mm} \\d_3 &= 26 \text{ mm} \\l_1 &= 50 \text{ mm} \\l_2 &= 80 \text{ mm} \\l_3 &= 120 \text{ mm}\end{aligned}$$

Ermitteln Sie das zulässige Torsionsmoment $M_{t,zul}$ sowie den zulässigen Verdrehwinkel ϕ_{zul} des Torsionsstabes, so dass Fließen mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden kann. Kerbwirkung an der Einspannstelle sowie an den Stellen der Querschnittsveränderung ist zu vernachlässigen.

2.6 Zusammenfassung der Grundbelastungsarten

Tabelle 2.8 Zusammenfassung der Grundbelastungsarten

Belastungsart	Spannungsverteilung	Mohrscher Spannungskreis ¹⁾	Grundgleichung	Werkstoffkennwert	Ersatzwert	Sicherheitsbeiwerte ²⁾
Zug			$\sigma_z = \frac{F_z}{A}$	Duktiler Werkstoff: • Fließen: R_e oder R_p • Bruch: R_m	----	$S_F = 1,2 \dots 2,0$ $S_B = 2,0 \dots 4,0$
Druck			$\sigma_d = \frac{F_d}{A}$	Duktiler Werkstoff: • Fließen: σ_{df} oder σ_{dp} • Knickung: $\sigma_K = F_K / A$	R_e oder R_p	$S_F = 1,2 \dots 2,0$ $S_K = 2,5 \dots 5,0$
Biegung			$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$	Duktiler Werkstoff: • Fließen: σ_{bf} Spröder Werkstoff: • Bruch: σ_{bb}	----	$S_B = 4,0 \dots 9,0$ $S_K = 2,5 \dots 5,0$
Schub (Absicherung)			$\tau_a = \frac{F_a}{A}$	Duktiler Werkstoff: • Bruch: τ_{ab} Spröder Werkstoff: • Bruch: τ_{ab}	$0,6 \dots 0,9 R_m$	$S_F = 1,2 \dots 2,0$ $S_B = 4,0 \dots 9,0$
Torsion			$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$	Duktiler Werkstoff: • Fließen: τ_{if} • Bruch: τ_{ib}	$R_e/2$ oder $R_p/2$ $0,6 \dots 0,9 R_m$	$S_F = 1,2 \dots 2,0$ $S_B = 2,0 \dots 4,0$
				Spröder Werkstoff: • Bruch: τ_{ib}	R_m	$S_B = 4,0 \dots 9,0$

¹⁾ Erläuterung des Mohrschen Spannungskreises siehe Kapitel 3.²⁾ Anhaltswerte, falls keine einschlägigen Berechnungsvorschriften vorliegen.³⁾ In der Regel 0,2%-Dehngrenze ($R_{p0,2}$)⁴⁾ Für ideal spröde Werkstoffe: $\sigma_{bb} \approx R_m$; für spröde metallische Werkstoffe: $\sigma_{bb} > R_m$, insbesondere für Gussseisen mit Lamellengraphit: $\sigma_{bb} = 2,0 \dots 2,5 R_m$ ⁵⁾ Mitunter auch 1,1 ... 1,2 R_e bzw. 1,1 ... 1,2 $R_{p0,2}$ ⁶⁾ Faktor 0,6 für hochfeste Werkstoffe, Faktor 0,9 für niedrigfeste Werkstoffe. Insbesondere für Stähle mit $R_m \leq 1800 \text{ N/mm}^2$: $\tau_{ab} = 0,5 R_m + 140 \text{ N/mm}^2$ bzw. $\tau_{ib} = 0,5 R_m + 140 \text{ N/mm}^2$ ⁷⁾ Gültig für Gussseisen mit Lamellengraphit.

3 Spannungszustand

Das Ziel von Kapitel 2 war die Bereitstellung von Grundgleichungen mit deren Hilfe die Spannungsermittlung in Abhängigkeit der Bauteilgeometrie sowie der Art und Höhe der äußeren Beanspruchung ermöglicht wurde. Bei einachsiger Zugbeanspruchung zum Beispiel $\sigma = F/A$. Betrachtet wurden die Grundbelastungarten Zug, Druck, Biegung, Schub (Abscherung) und Torsion.

Mit Hilfe der in Kapitel 2 abgeleiteten Grundgleichungen ist es allerdings nur möglich, die wirkenden Normal- und Schubspannungen in denjenigen Schnittebenen zu ermitteln, welche für die Herleitung der Grundgleichungen gewählt wurden. Bei einachsiger Zugbeanspruchung also beispielsweise in Ebenen senkrecht zur Beanspruchungsrichtung. Für Festigkeitsnachweise ist es jedoch erforderlich, unter anderem diejenigen Schnittebenen zu ermitteln, in denen die Normalspannungen Extremwerte annehmen (Hauptebenen, siehe Kapitel 6).

Das Ziel von Kapitel 3 ist dementsprechend die Bereitstellung von Methoden, mit deren Hilfe eine Spannungsermittlung in beliebigen Schnittebenen durchgeführt werden kann. Diese Problemstellung soll am Beispiel eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck (p_i) mit einer überlagerten Torsionsbeanspruchung (Torsionsmoment M_t) erläutert werden (Bild 3.1a). Schneidet man entsprechend Bild 3.1b ein Flächenelement parallel zur Achsrichtung heraus, dann kann man auf einfache Weise die Lastspannungen in den Schnittebenen berechnen. Im vorliegenden Beispiel also:

$$\sigma_x = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} \text{ (siehe Kapitel 12)}$$

$$\sigma_y = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} \text{ (siehe Kapitel 12)}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = M_t / W_t$$

Die Spannungen σ_x , σ_y und $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ in einem Flächenelement dessen Schnittebenen parallel zu den Koordinatenachsen x und y verlaufen (Bild 3.1b) unterscheiden sich von den Spannungen $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ und $\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'}$ in einem um den Winkel φ gedrehten Flächenelement, dessen Schnitt ebenen parallel zur x' - und y' -Koordinatenachse verlaufen (Bild 3.1c). Die Herleitung der entsprechenden Zusammenhänge zwischen äußerer Belastung und den Spannungen (Normal- und Schubspannungen) in beliebigen Schnittebenen bzw. Schnittrichtungen soll nachfolgend getrennt für den ein-, zwei- und dreiachsigem Spannungszustand erfolgen (Kapitel 3.2 bis 3.4).

Spannungszustand

Unter dem Begriff „Spannungszustand“ versteht man alle Spannungen (Normal- und Schubspannungen), die an einem beliebigen Ort eines Körpers wirken.

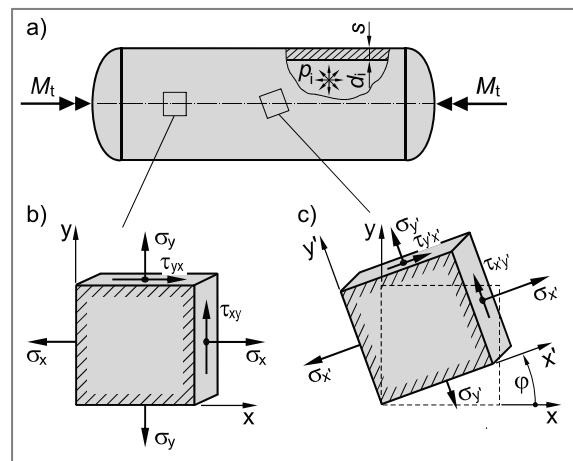


Bild 3.1 Normal- und Schubspannungen in unterschiedlichen Schnittebenen am Beispiel eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck mit überlagerter Torsionsbeanspruchung

3.1 Spannungsbegriff

Denkt man sich ein in *A* und *B* gelagertes Bauteil unter der Wirkung einer äußeren Beanspruchung (z. B. Kräfte, Streckenlasten und Momente) an einer beliebigen Stelle durchgeschnitten, dann müssen sich die über die Schnittebene ungleichmäßig verteilten inneren Schnittkräfte mit der äußeren Beanspruchung im Gleichgewicht befinden. Die innere Beanspruchung an einer bestimmten Stelle der Schnittebene wird durch die dort angreifende und auf die Teilfläche ΔA wirkende Kraft $\Delta \vec{F}$ gekennzeichnet. Da die Kräfteverteilung über die Teilfläche ΔA ungleichmäßig ist, stellt $\Delta \vec{F}$ die gemittelte, resultierende Kraft dar. Um eine Aussage über die örtliche Beanspruchung machen zu können, also den Einfluss der Größe von ΔA auf $\Delta \vec{F}$ zu eliminieren, muss die Schnittfläche ΔA klein gemacht werden.

Als Maß für die auf eine unendlich kleine Querschnittsfläche bezogene Schnittkraft $\Delta \vec{F}$ führt man die (**mechanische**) Spannung \vec{s} ein (Bild 3.2):

$$\vec{s} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{d \vec{F}}{dA} \quad (3.1)$$

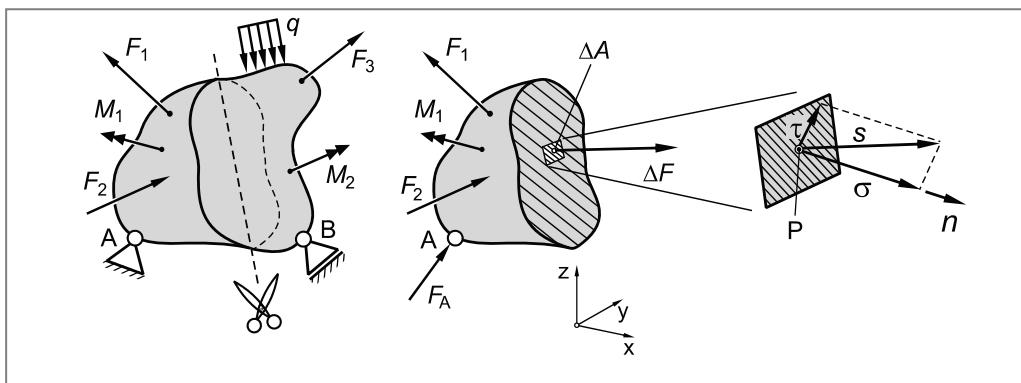


Bild 3.2 Definition der mechanischen Spannung

3.1.1 Normal- und Schubspannungen

Spannungen sind, wie zum Beispiel Kräfte, vektorielle Größen, sie haben also eine Richtung und einen Betrag. Spannungen haben die Dimension Kraft pro Fläche und werden beispielsweise in der Einheit N/mm² oder Pa = N/m² (1 MPa = 1 N/mm²) angegeben¹⁾.

Der Spannungsvektor \vec{s} ist im Allgemeinen schräg zum Flächenelement (Normalenvektor \vec{n}) orientiert. Für Festigkeitsnachweise ist es dabei zweckmäßig, den Spannungsvektor in eine Komponente senkrecht und tangential zur Schnittebene zu zerlegen. Man bezeichnet dann den Betrag der Komponente senkrecht zur Fläche als **Normalspannung** σ , den Betrag der Komponente tangential zur Fläche hingegen als **Schubspannung** τ (Bild 3.2).

¹⁾ Pa = Pascal, benannt nach dem Mathematiker und Physiker **Blaise Pascal** (1623 ... 1662)

3.1.2 Indizierung von Normal- und Schubspannungen

Zur eindeutigen Kennzeichnung von Spannungen führt man zwei Indizes ein. Definitionsgemäß soll gelten:

1. Index: Richtung der Schnittebenennormalen
2. Index: Richtung der Spannung

Liegt beispielsweise eine **Schubspannung** in einer Schnittebene deren Normalenvektor in x-Richtung zeigt, dann ist der 1. Index „x“. Zeigt die Schubspannung selbst in y-Richtung, dann lautet der zweite Index „y“. Die Schubspannung wird dementsprechend mit τ_{xy} bezeichnet.

Zur Kennzeichnung von **Normalspannungen** verzichtet man üblicherweise auf eine Doppelindizierung, da die Richtung der Flächennormalen mit der Spannungsrichtung übereinstimmt und schreibt dann beispielsweise σ_x anstelle von σ_{xx} .

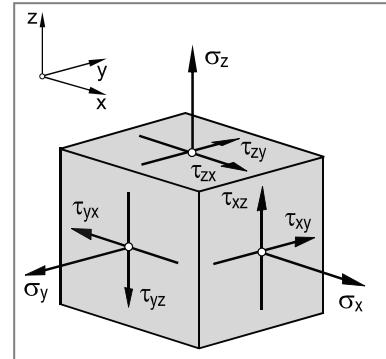


Bild 3.3 Indizierung von Normal- und Schubspannungen

3.1.3 Vorzeichenregelung für Normal- und Schubspannungen

Normalspannungen können entweder zur Schnittebene hin oder von ihr weg gerichtet sein. Dementsprechend unterscheidet man zwischen Zugspannungen (Kapitel 2.1) und Druckspannungen (Kapitel 2.2). Die Unterscheidung von Zug- und Druckspannungen soll im Folgenden durch ein Vorzeichen („+“ für Zugspannung und „-“ für Druckspannungen) erfolgen. Die in Bild 3.3 dargestellten Normalspannungen (σ_x , σ_y , σ_z) sind dementsprechend Zugspannungen.

Bei **Schubspannungen** ist eine Unterscheidung der Spannungen mittels Vorzeichen physikalisch nicht sinnvoll und hat nur für die Richtung der Schubspannung innerhalb der Schnittebene eine Bedeutung. Für die Festlegung des Vorzeichens einer Schubspannung ist die folgende **allgemeine Vorzeichenregelung für Schubspannungen** zweckmäßig:

Eine Schubspannung ist positiv, wenn sie in Schnittebenen mit Normalenvektor in positiver Achsrichtung liegt (positives Schnittufer) und ihre Richtung ebenfalls mit einer positiven Achsrichtung zusammenfällt.

In Schnittebenen mit Normalenvektor in negativer Achsrichtung (negatives Schnittufer) sind Schubspannungen dann positiv, wenn ihre Richtung mit einer negativen Achsrichtung zusammenfällt. Demnach sind alle in Bild 3.3 dargestellten Schubspannungen positiv.

Häufig treten an der zu untersuchenden Stelle des Bauteils in einer der drei Schnittebenen weder Normal- noch Schubspannungen auf (z. B. lastfreie Bauteiloberflächen). Man spricht dann von einem zweiachsigen oder ebenen Spannungszustand (Kapitel 3.3). In diesem Fall ist es zweckmäßig, die erforderlichen Berechnungen mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises (Kapitel 3.3.4) durchzuführen. Hierfür ist es jedoch empfehlenswert, von der allgemeinen Vorzeichenregelung abzurücken und die nachfolgende **spezielle Vorzeichendefinition für Schubspannungen** anzuwenden (siehe auch Kapitel 3.3.4.2):

Eine Schubspannung ist positiv (negativ) anzusetzen, falls bei Blick in Richtung der Schubspannung die zugehörige Schnittebene rechts (links) von der Schubspannung liegt.

3.1.4 Zugeordnete Schubspannungen

In Bild 3.4 ist ein quaderförmiges Werkstoffelement mit den Seitenlängen dx , dy und dz dargestellt. Man kann es sich beispielsweise aus einem Balken herausgeschnitten denken. In den Schnittebenen wirken die Schubspannungen τ_{xy} bzw. τ_{yx} . Die Bedingung $\sum M_A = 0$ für das Momentengleichgewicht führt mit dem Momentenbezugspunkt A auf die Gleichung:

$$\tau_{xy} \cdot dx \cdot dz \cdot dy = \tau_{yx} \cdot dy \cdot dz \cdot dx \quad (3.2)$$

Hieraus folgt:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.3)$$

Schubspannungen, die in zueinander senkrechten Schnittebenen wirken und auf eine gemeinsame Schnittkante zu oder von ihr weg zeigen, bezeichnet man als **zugeordnete Schubspannungen**. In Bild 3.3 sind somit zugeordnete Schubspannungen:

- τ_{xy} und τ_{yx}
- τ_{xz} und τ_{zx}
- τ_{yz} und τ_{zy}

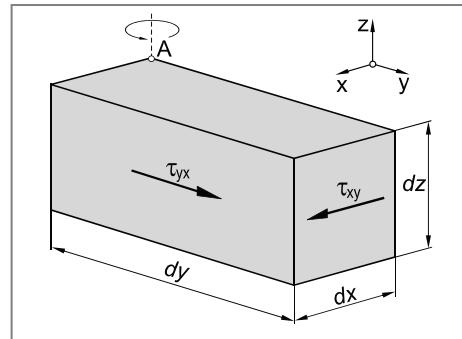


Bild 3.4 Momentengleichgewicht an einem Würfelement eines schubbeanspruchten Bauteils

3.2 Einachsiger Spannungszustand

Für die nachfolgenden Ausführungen soll zunächst ein einachsig auf Zug beanspruchter Stab betrachtet werden (Bild 3.5a). Zur Ermittlung des Zusammenhangs zwischen äußerer Beanspruchung und den Spannungen in einer beliebigen Schnittebene E , deren Normalenvektor \vec{n} mit der x-Richtung den Winkel φ einschließt, wird das Schnittprinzip angewandt (Bild 3.5b).

Zur Sicherstellung des Kräftegleichgewichts des abgeschnittenen Teils, muss die Schnittkraft F_S in der schrägen Schnittebene der äußeren Kraft F das Gleichgewicht halten. Es ist dabei zweckmäßig, die Kraft F_S in eine Normalkomponente $F_x' = F_S \cdot \cos \varphi$ und in eine Tangentialkomponente $F_y' = F_S \cdot \sin \varphi$ zu zerlegen.

Geht man von einer gleichmäßigen Spannungsverteilung über der Querschnittsfläche aus, dann folgt mit $A_\varphi = A/\cos\varphi$ und $\sigma = F_S/A$ für die Normalspannung $\sigma_{x'}$ in Abhängigkeit des Schnittwinkels φ :

$$\sigma_{x'} = \frac{F_{x'}}{A_\varphi} = \frac{F_S \cdot \cos \varphi}{A / \cos \varphi} = \frac{F_S}{A} \cdot \cos^2 \varphi = \sigma \cdot \cos^2 \varphi \quad (3.4)$$

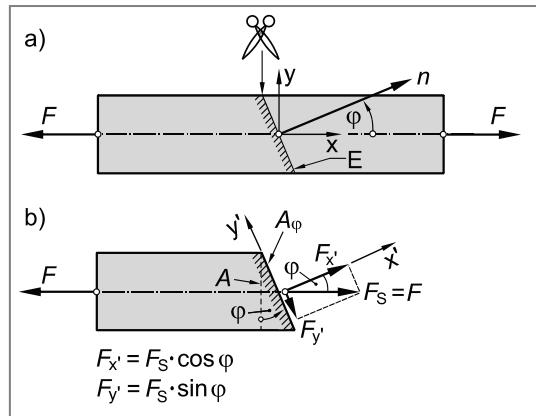


Bild 3.5 Kräftegleichgewicht an einem einachsig beanspruchten Zugstab

und für die Tangentialspannung $\tau_{x'y'}$ in Abhängigkeit des Schnittwinkels φ :

$$\tau_{x'y'} = \frac{F_{y'}}{A_\varphi} = \frac{F_S \cdot \sin \varphi}{A / \cos \varphi} = \frac{F_S}{A} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \sigma \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad (3.5)$$

Unter Anwendung der trigonometrischen Beziehungen:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2\varphi) \quad (3.6)$$

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi \quad (3.7)$$

folgt aus Gleichung 3.4 für die Normalspannung:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma}{2} \cdot (1 + \cos 2\varphi) \quad \text{Normalspannung in der Schnittebene } E, \text{ deren Normalenvektor mit der x-Richtung den Winkel } \varphi \text{ einschließt bei einachsigem Spannungszustand} \quad (3.8)$$

und aus Gleichung 3.5 für die Schubspannung:

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\varphi \quad \text{Schubspannung in der Schnittebene } E, \text{ deren Normalenvektor mit der x-Richtung den Winkel } \varphi \text{ einschließt bei einachsigem Spannungszustand} \quad (3.9)$$

Gleichungen 3.8 und 3.9 zeigen, dass sich in Abhängigkeit der gewählten Schnittrichtung φ , die Normal- und die Schubspannungen stetig ändern. Bild 3.6 zeigt insbesondere, dass in Schnittrichtungen von 45° und 135° die Schubspannungen einen Extremwert annehmen und mit $|\tau(45^\circ)| = |\tau(135^\circ)| = 0.5 \cdot \sigma$ betragsmäßig die Größe der Normalspannung in dieser Schnittrichtung erreichen. In Schnittebenen parallel zur Beanspruchungsrichtung (90°) wirken hingegen keine Normal- und keine Schubspannungen.

Löst man Gleichung 3.8 nach $\cos 2\varphi$ und Gleichung 3.9 nach $\sin 2\varphi$ auf, dann erhält man:

$$\cos 2\varphi = \frac{2 \cdot \sigma_{x'}}{\sigma} - 1 \quad (3.10)$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \cdot \tau_{x'y'}}{\sigma} \quad (3.11)$$

Quadriert und addiert man die Gleichungen 3.10 und 3.11, dann folgt:

$$\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi = \left(\frac{2 \cdot \sigma_{x'}}{\sigma} - 1 \right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \tau_{x'y'}}{\sigma} \right)^2 \quad (3.12)$$

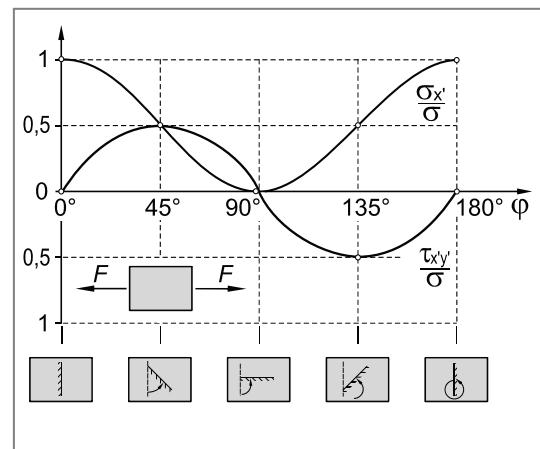


Bild 3.6 Spannungsverlauf eines einachsig beanspruchten Zugstabes in Abhängigkeit der Schnitttrichtung

mit $\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi = 1$ ergibt sich schließlich:

$$1 = \left(\frac{2}{\sigma}\right)^2 \cdot \left[\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 \right] \quad (3.13)$$

und somit:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2$$

Gleichung des Mohrschen Spannungskreises in der σ - τ -Ebene bei einachsigem Spannungszustand (3.14)

Gleichung 3.14 beschreibt einen Kreis in der σ - τ -Ebene mit Mittelpunkt in $(0,5 \cdot \sigma | 0)$ und Radius $\sigma/2$, den **Mohrschen Spannungskreis**¹⁾ (Bild 3.7).

Jeder Bildpunkt des Mohrschen Spannungskreises repräsentiert die Spannungen ($\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'}$) in einer bestimmten Schnittebene. So repräsentiert beispielsweise der Bildpunkt A die Spannungen in einer Schnittebene senkrecht zur Stabachse ($\varphi = 0$). In dieser Ebene tritt bekanntlich nur eine Normalspannung auf. Die Schubspannung ist hingegen Null (siehe auch Bild 3.6).

Zur Ermittlung der Spannungen in einer beliebigen Schnittebene B , deren Normalenvektor mit der x -Achse (Beanspruchungsrichtung) den Winkel φ einschließt, trägt man den Winkel 2φ bzw. φ in der in Bild 3.7a dargestellten Weise ab (Richtungssinn analog zum Lageplan, Bild 3.7b). Die Koordinaten des Bildpunktes B ($\sigma_{x'} | \tau_{x'y'}$) sind dann die Spannungen in der Schnittebene B .

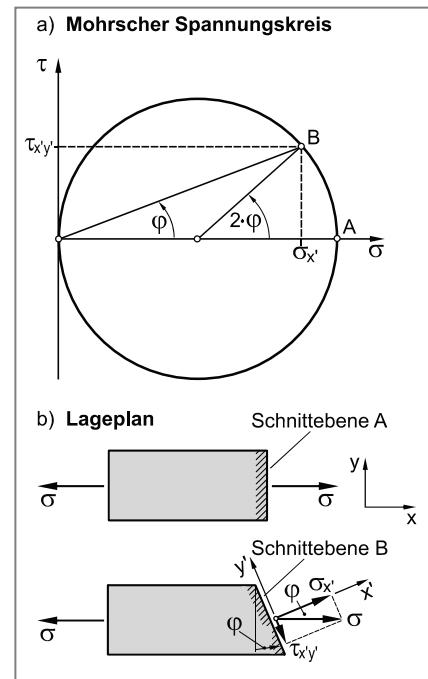


Bild 3.7 Mohrscher Spannungskreis für einachsige Zugbeanspruchung

¹⁾ benannt nach dem deutschen Ingenieur **Christian Otto Mohr** (1835 ... 1918)

3.3 Zweiachsiger (ebener) Spannungszustand

Als Beispiel eines zweiachsig beanspruchten Bauteils wird eine dünne Scheibe mit der Dicke t entsprechend Bild 3.8a betrachtet. Die Scheibe wird durch die Normalspannungen σ_x und σ_y sowie durch die zugeordneten Schubspannungen τ_{xy} und τ_{yx} beansprucht.

Zweiachsig Spannungszustände findet man häufig im Bereich lastfreier Oberflächen, da senkrecht zur Oberfläche aus Gleichgewichtsgründen keine Spannungen auftreten können.

3.3.1 Spannungszustand und Schnittrichtung

Zur Durchführung von Festigkeitsnachweisen müssen, wie in späteren Kapiteln noch eingehender gezeigt wird, Spannungen in Schnittrichtungen ermittelt werden, die nicht mit der äußereren Beanspruchungsrichtung zusammenfallen.

Zur Ermittlung der Spannungen $\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'}$ in einer beliebigen Schnittebene $E_{x'}$, deren Normalenvektor \vec{n} mit der x-Richtung den Winkel φ einschließt, wendet man das bereits aus Kapitel 3.2 bekannte Schnittprinzip an und betrachtet das Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung am abgeschnittenen Scheibenelement (Bild 3.8b).

Kräftegleichgewicht in x-Richtung ($\sum F_x = 0$):

$$\begin{aligned} -\sigma_x \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot t + \tau_{yx} \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot t + \sigma_{x'} \cdot \cos \varphi \cdot l \cdot t + \tau_{x'y'} \cdot \sin \varphi \cdot l \cdot t &= 0 \quad |:(l \cdot t) \\ -\sigma_x \cdot \cos \varphi + \tau_{yx} \cdot \sin \varphi + \sigma_{x'} \cdot \cos \varphi + \tau_{x'y'} \cdot \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Kräftegleichgewicht in y-Richtung ($\sum F_y = 0$):

$$\begin{aligned} -\sigma_y \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot t + \tau_{xy} \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot t + \sigma_{x'} \cdot \sin \varphi \cdot l \cdot t - \tau_{x'y'} \cdot \cos \varphi \cdot l \cdot t &= 0 \quad |:(l \cdot t) \\ -\sigma_y \cdot \sin \varphi + \tau_{xy} \cdot \cos \varphi + \sigma_{x'} \cdot \sin \varphi - \tau_{x'y'} \cdot \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Berechnung der Normalspannung $\sigma_{x'}$

Aus Gleichung 3.15 folgt:

$$\tau_{x'y'} = \sigma_x \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \tau_{yx} - \sigma_{x'} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (3.17)$$

Gleichung 3.17 in 3.16 eingesetzt und mit $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (zugeordnete Schubspannungen):

$$-\sigma_y \cdot \sin \varphi + \tau_{xy} \cdot \cos \varphi + \sigma_{x'} \cdot \sin \varphi - \left(\sigma_x \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \tau_{xy} - \sigma_{x'} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right) \cdot \cos \varphi = 0 \quad (3.18)$$

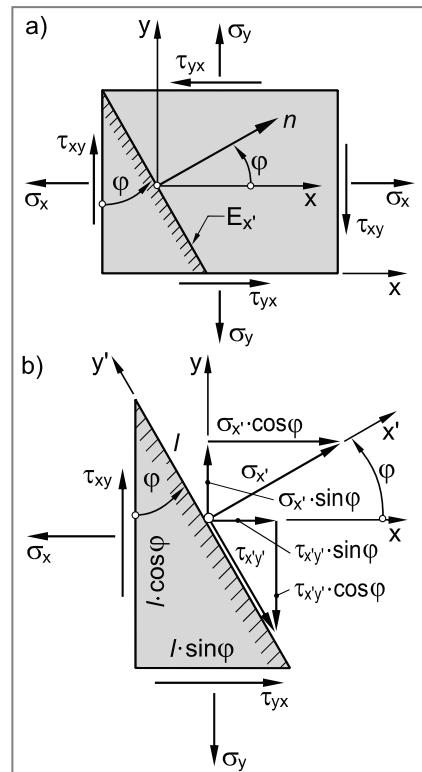


Bild 3.8 Spannungen an einem zweiachsig beanspruchten Scheibenelement

$$-\sigma_y \cdot \sin \varphi + \tau_{xy} \cdot \cos \varphi + \sigma_{x'} \cdot \sin \varphi - \sigma_x \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} + \tau_{xy} \cdot \cos \varphi + \sigma_{x'} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} = 0 \quad (3.19)$$

Multiplikation von Gleichung 3.19 mit $\sin \varphi$ liefert:

$$-\sigma_y \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \sigma_{x'} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi = 0 \quad (3.20)$$

Mit den trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$\sin^2 \varphi = 0,5 \cdot (1 - \cos 2\varphi)$$

$$\cos^2 \varphi = 0,5 \cdot (1 + \cos 2\varphi)$$

$$2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

folgt schließlich aus Gleichung 3.20:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x}{2} \cdot (1 + \cos 2\varphi) + \frac{\sigma_y}{2} \cdot (1 - \cos 2\varphi) - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \quad (3.21)$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \quad (3.22)$$

Normalspannung in der Schnittebene E_x' , deren Normalenvektor \vec{n} mit der x-Richtung den Winkel φ einschließt bei zweiachsigem Spannungszustand.

Vorzeichen von τ_{xy} entsprechend spezieller Vorzeichenregelung (Kapitel 3.1.3).

Berechnung der Schubspannung $\tau_{x'y'}$

Aus Gleichung 3.15 folgt:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x - \tau_{yx} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \tau_{x'y'} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \quad (3.23)$$

Gleichung 3.23 in 3.16 eingesetzt und mit $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (zugeordnete Schubspannungen):

$$-\sigma_y \cdot \sin \varphi + \tau_{xy} \cdot \cos \varphi + \left(\sigma_x - \tau_{xy} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \tau_{x'y'} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \cdot \sin \varphi - \tau_{x'y'} \cdot \cos \varphi = 0 \quad (3.24)$$

$$-\sigma_y \cdot \sin \varphi + \tau_{xy} \cdot \cos \varphi + \sigma_x \cdot \sin \varphi - \tau_{xy} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} - \tau_{x'y'} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} - \tau_{x'y'} \cdot \cos \varphi = 0 \quad (3.25)$$

Multiplikation von Gleichung 3.25 mit $\cos \varphi$ liefert:

$$-\sigma_y \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \tau_{xy} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \sigma_x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \tau_{x'y'} \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 0 \quad (3.26)$$

Mit den trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi$$

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0,5 \cdot \sin 2\varphi$$

folgt schließlich aus Gleichung 3.26:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi + \frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\varphi \quad (3.27)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \quad (3.28)$$

Schubspannung in der Schnittebene $E_{x'}$, deren Normalenvektor \vec{n} mit der x-Richtung den Winkel φ einschließt bei zweiachsigem Spannungszustand

Vorzeichen von τ_{xy} entsprechend spezieller Vorzeichenregelung (Kapitel 3.1.3).

Bei der Anwendung von Gleichung 3.22 und 3.28 ist hinsichtlich des Vorzeichens der Schubspannung τ_{xy} zu beachten, dass eine Schubspannung als positiv anzusetzen ist, falls sie entsprechend Bild 3.8 wirkt. Dies entspricht der Vorzeichenregelung für Schubspannungen für den ebenen Spannungszustand (spezielle Vorzeichenregelung). Erhält man aus Gleichung 3.28 ein negatives Ergebnis, dann wirkt die Schubspannung $\tau_{x'y'}$ entgegen der in Bild 3.8 dargestellten Richtung.

Mitunter findet man in der Literatur in Gleichung 3.22 vor dem letzten Summanden ein Pluszeichen ($\sigma_{x'} = \dots + \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi$) und in Gleichung 3.28 ein Minuszeichen ($\tau_{x'y'} = \dots - \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi$). Die Erklärung für diesen scheinbaren Unterschied findet sich in der Vorzeichenregelung für Schubspannungen. Während bei obiger Herleitung, wie bereits erwähnt, die spezielle Vorzeichenregelung (Kapitel 3.1.3) zugrunde gelegt wurde (τ_{xy} ist in Bild 3.8 positiv anzusetzen) wird in der Literatur mitunter auch die allgemeine Vorzeichenregelung für τ_{xy} angewandt. Gemäß der allgemeinen Vorzeichenregelung müsste τ_{xy} für die in Bild 3.8 eingezeichnete Richtung negativ eingesetzt werden, so dass sich die erwähnte Vorzeichenumkehr ergibt.

3.3.2 Mohrscher Spannungskreis

Zur Ermittlung der Spannungen $\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'}$ in einer beliebigen Schnittebene können prinzipiell die Gleichungen 3.22 und 3.28 herangezogen werden. Eine anschaulichere Möglichkeit derartige Fragestellungen zu beantworten, bietet der **Mohrsche Spannungskreis**.

3.3.2.1 Mittelpunkt und Radius des Mohrschen Spannungskreises

Zur Bestimmung von Mittelpunkt und Radius des Mohrschen Spannungskreises eliminiert man aus den Gleichungen 3.22 und 3.28 den Winkel φ und erhält dann die Gleichung eines Kreises in der σ - τ -Ebene (Mohrscher Spannungskreis). Um den Winkel φ zu eliminieren, werden die Gleichungen 3.22 und 3.28 quadriert und addiert. Aus Gleichung 3.22 folgt:

$$\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \quad | \text{ quadriert} \quad (3.29)$$

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \right)^2 \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 2\varphi \\ &\quad - 2 \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy}^2 \cdot \sin^2 2\varphi \end{aligned} \quad (3.31)$$

Aus Gleichung 3.28 folgt:

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \quad | \text{ quadriert} \quad (3.32)$$

$$\tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \right)^2 \quad (3.33)$$

$$\tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cdot \sin^2 2\varphi + 2 \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy}^2 \cdot \cos^2 2\varphi \quad (3.34)$$

Addition der Gleichungen 3.31 und 3.34 führt auf eine Kreisgleichung im σ - τ -Koordinatensystem (Mohrscher Spannungskreis):

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cdot (\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi) + \tau_{xy}^2 \cdot (\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi)$$

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad \text{Gleichung des Mohrschen Spannungskreises in der } \sigma\text{-}\tau\text{-Ebene bei zweiachsigem Spannungszustand} \quad (3.35)$$

Für den Mittelpunkt des Mohrschen Spannungskreises folgt:

$$M = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \mid 0 \right) \quad \text{Mittelpunkt des Mohrschen Spannungskreises} \quad (3.36)$$

Der Radius des Mohrschen Spannungskreises ergibt sich zu:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{Radius des Mohrschen Spannungskreises} \quad (3.37)$$

Jeder Bildpunkt P des Mohrschen Spannungskreises repräsentiert die Spannungen ($\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'}$) in einer Schnittebene, deren Normalenvektor durch den Winkel φ festgelegt ist.

3.3.2.2 Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises

Gegeben sei ein durch die Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} gekennzeichneter ebener Spannungszustand (Bild 3.9a). Gesucht sind der Mohrsche Spannungskreis sowie die Spannungen $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, $\tau_{x'y'}$ und $\tau_{y'x'}$ an einem um den Winkel φ gegenüber der x-Richtung gedrehten Flächenelement (Bild 3.9b).

Zur Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises geht man wie folgt vor (Bild 3.9c):

1. Zeichnen eines σ - τ -Koordinatensystems.
2. Eintragen des Bildpunktes $P_x(\sigma_x \mid \tau_{xy})$ der die Spannungen in der Schnittebene mit der x-Achse als Normale repräsentiert (Schnittebene E_x).

Für die graphische Darstellung des Mohrschen Spannungskreises ist es infolge der Kreisgeometrie zweckmäßig, von der allgemeinen Vorzeichenregelung für den dreiachigen (räumlichen) Spannungszustand (Kapitel 3.1.3) abzurücken und die bereits in Kapitel 3.1.3 erwähnte **spezielle Vorzeichendefinition für Schubspannungen** anzuwenden:

Eine Schubspannung ist positiv (negativ) anzusetzen, falls bei Blick in Richtung der Schubspannung die zugehörige Schnittebene rechts (links) von der Schubspannung liegt.

Unter Verwendung dieser speziellen Vorzeichenregelung ergibt sich eine Übereinstimmung der Vorzeichen der Schubspannungen am Flächenelement und im Mohrschen Spannungskreis. Gemäß dieser speziellen Vorzeichenregelung ist die Schubspannung τ_{xy} in Bild 3.9a positiv, die Schubspannung τ_{yx} hingegen negativ anzusetzen.

3. Eintragen des Bildpunktes $P_y(\sigma_y \mid \tau_{yx})$ der die Spannungen in der Schnittebene mit der y -Achse als Normalenvektor repräsentiert (Schnittebene E_y). Die Schubspannung τ_{yx} ist entsprechend der speziellen Vorzeichenregelung negativ anzusetzen.
4. Die Schnittebenen E_x und E_y stehen senkrecht aufeinander (siehe Lageplan). Da die Bildpunkte zweier senkrechter Schnittebenen bzw. Schnittrichtungen auf einem Kreisdurchmesser liegen, schneidet die Strecke $\overline{P_x P_y}$ die σ -Achse im Kreismittelpunkt M .
5. Kreis um M durch die Bildpunkte P_x oder P_y ist der gesuchte Mohrsche Spannungskreis.

Zur Ermittlung der Spannungen $\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'}$ einer beliebigen Schnittebene $E_{x'}$ überträgt man, ausgehend von einer Schnittebene mit bekannten Spannungen (z. B. Schnittebene E_x mit der x -Achse als Normale), den *doppelten* Richtungswinkel (2φ) in den Mohrschen Spannungskreis. Der Drehsinn muss dabei dem Lageplan entsprechen. Die Koordinaten des Bildpunktes P_x' ($\sigma_{x'} \mid \tau_{x'y'}$) kennzeichnen die Spannungen in der Schnittebene $E_{x'}$ (Bild 3.9b und 3.9c).

Für Festigkeitsnachweise werden mithin auch die Spannungen σ_y und $\tau_{y'x'}$ in der Schnittebene mit der y' -Achse als Normale ($E_{y'}$) benötigt. Diese Größen werden auf analoge Weise ermittelt (siehe Bild 3.9c).

3.3.2.3 Hauptnormalspannungen und Hauptspannungsrichtungen

Aus dem Mohrschen Spannungskreis (Bild 3.9c) ist ersichtlich, dass eine maximale Spannung σ_{H1} und eine minimale Spannung σ_{H2} existieren (Bildpunkte P_1 und P_2 in Bild 3.9c). Diese beiden extremalen Normalspannungen werden als **Hauptnormalspannungen** bezeichnet. Im praktischen Sprachgebrauch nennt man die Hauptnormalspannungen bisweilen auch **Hauptspannungen** (nicht zu verwechseln mit den Hauptschubspannungen, Kapitel 3.3.2.4). Die Richtungen zu den Hauptnormalspannungen (Winkel φ_1 und φ_2) nennt man dementsprechend **Hauptnormalspannungsrichtungen** oder kurz **Hauptspannungsrichtungen** bzw. **Hauptrichtungen** (nicht zu verwechseln mit den Hauptschubspannungsrichtungen). Schnittebenen, deren Normalenvektor mit der Hauptnormalspannungsrichtung zusammenfällt sind schubspannungsfrei.

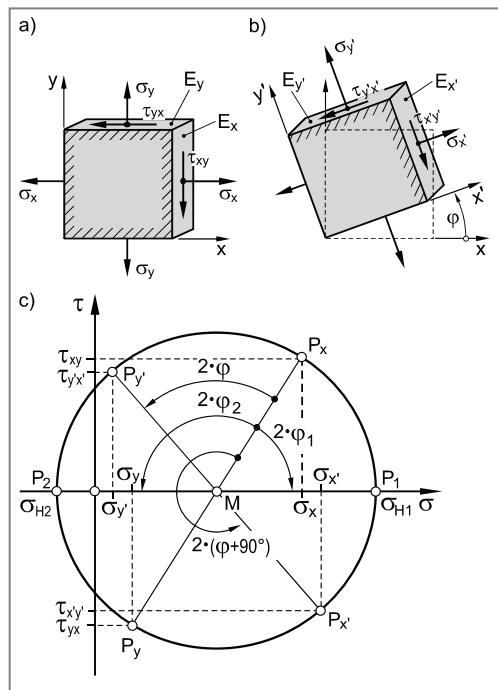


Bild 3.9 Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises

Eine Richtung ist auch dann Hauptspannungsrichtung, falls die zugehörige Schnittebene völlig frei von Spannungen ist, wie zum Beispiel eine lastfreie Oberfläche (zweiachsiger Spannungszustand). Die zugehörige Hauptnormalspannung ist dann Null. Im Hinblick auf die Bezeichnung soll vereinbart werden, dass mit σ_{H1} die größere der beiden (von Null verschiedenen) Hauptspannungen bezeichnet wird, also $\sigma_{H1} > \sigma_{H2}$.

Die beiden Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2} ergeben sich aus den Schnittpunkten des Mohrschen Spannungskreises mit der σ -Achse (Bild 3.9c), da in diesen als **Hauptspannungsebenen** oder **Hauptebenen** bezeichneten Ebenen, die Schubspannungen zu Null werden.

Der Winkel φ_1 zwischen der x-Richtung und der Normalen zur ersten Hauptebene (erste Hauptspannungsrichtung) kann graphisch mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises ermittelt werden. Es gilt dabei: $2 \cdot \varphi_1 = \angle(MP_x, MP_1)$. Für den Winkel φ_2 zwischen der x-Richtung und der Normalen zur zweiten Hauptebene (zweite Hauptspannungsrichtung) gilt dementsprechend: $2 \cdot \varphi_2 = \angle(MP_x, MP_2)$.

Die Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2} können auch rechnerisch ermittelt werden. Aus dem Mohrschen Spannungskreis lassen sich die folgenden Beziehungen ableiten:

$$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.38)$$

$$\sigma_{H2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.39)$$

Die Winkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Normalen zur den Hauptebenen (Hauptspannungsrichtungen) lassen sich ebenfalls rechnerisch ermitteln. Man erhält die Richtungswinkel φ_1 bzw. φ_2 aus Gleichung 3.28 mit der Bedingung $\tau_{x'y'} = 0$, da, wie bereits erwähnt, in Schnittebenen mit den Hauptspannungsrichtungen als Normale voraussetzungsgemäß keine Schubspannungen auftreten:

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \quad \text{Richtungswinkel zwischen der x-Achse und der ersten oder der zweiten Hauptspannungsrichtung. Vorzeichen von } \tau_{xy} \text{ entsprechend spezieller Vorzeichenregelung (Kapitel 3.1.3).} \quad (3.40)$$

Der mit Hilfe von Gleichung 3.40 errechnete Winkel kann der Richtungswinkel zwischen der x-Achse und der ersten *oder* der zweiten Hauptspannungsrichtung sein. Eine Entscheidung kann mit Hilfe von Tabelle 3.1 erfolgen.

Aufgrund der π -Periodizität des Tangens ergibt sich der zweite Winkel zu:

$$\varphi_{2,1} = \varphi_{1,2} + \frac{\pi}{2} \quad (3.41)$$

3.3.2.4 Hauptschubspannungen

Die im Bauteil auftretenden betragsmäßig größten Schubspannungen τ_{max} ergeben sich aus dem Mohrschen Spannungskreis (Bild 3.9c) zu:

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \frac{\sigma_{H1} - \sigma_{H2}}{2} \quad \text{Maximale Schubspannung in der x-y-Ebene bei zweiachsigem Spannungszustand} \quad (3.42)$$

Tabelle 3.1 Rechnerische Ermittlung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Hauptspannungsrichtungen σ_{H1} und σ_{H2}

Fall ¹⁾	Lageplan	Winkel zu den Hauptspannungsrichtungen ^{1,2)}	Hauptnormalspannungen	Mohrscher Spannungskreis ¹⁾
Fall 1: $\sigma_x > \sigma_y$ $\tau_{xy} > 0$		$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$ $\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ$	$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	
Fall 2: $\sigma_x < \sigma_y$ $\tau_{xy} > 0$		$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$ $\varphi_1 = \varphi_2 + 90^\circ$	$\sigma_{H2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	
Fall 3: $\sigma_x < \sigma_y$ $\tau_{xy} < 0$		$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$ $\varphi_1 = \varphi_2 + 90^\circ$	$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	
Fall 4: $\sigma_x > \sigma_y$ $\tau_{xy} < 0$		$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$ $\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ$	$\sigma_{H2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	

¹⁾ Vorzeichenregelung für Schubspannungen entsprechend der speziellen Vorzeichenregelung für die Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises (Kapitel 3.1.3)
²⁾ φ_1 : Winkel zwischen der x-Richtung und der ersten Hauptspannungsrichtung (σ_{H1}). φ_2 : Winkel zwischen der x-Richtung und der zweiten Hauptspannungsrichtung (σ_{H2}).

3.4 Dreiachsiger (räumlicher) Spannungszustand

Unter der Voraussetzung eines zweiachsigen Spannungszustandes war es mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises möglich, die Normal- und die Schubspannungen in beliebigen Schnittebenen zu ermitteln. Im Falle eines dreiachsigen (räumlichen) Spannungszustandes ist diese Vorgehensweise in der Regel nicht möglich¹⁾.

Zur Beschreibung des Spannungszustandes in einem Punkt P eines beliebig beanspruchten Körpers (vgl. Bild 3.2) schneidet man ein würfelförmiges Volumenelement heraus, dessen Kanten parallel zu den Achsen des Koordinatensystems sind. Im allgemeinen Fall wirken am Volumenelement drei voneinander unabhängige Normalspannungen (σ_x , σ_y und σ_z) sowie drei Paare voneinander unabhängiger, zugeordneter Schubspannungen (τ_{xy} und τ_{yx} , τ_{xz} und τ_{zx} , τ_{yz} und τ_{zy}).

3.4.1 Spannungstensor

Zur Ermittlung der Schnittspannungen in einer beliebigen Schnittebene (charakterisiert durch den Normalenvektor \vec{n}) trennt man, analog zum zweiachsigen Spannungszustand, vom Würfelement einen Tetraeder heraus und betrachtet das Kräftegleichgewicht (Bild 3.10).

Die Spannungsvektoren \vec{s} bzw. \vec{s}_1 , \vec{s}_2 und \vec{s}_3 in den einzelnen Tetraederflächen wirken schräg zur jeweiligen Fläche (Bild 3.10). Multipliziert man den jeweiligen Spannungsvektor mit der entsprechenden Tetraederfläche, dann erhält man die auf die jeweiligen Flächen wirkenden Kräfte, deren vektorielle Summe aus Gleichgewichtsgründen Null sein muss. Ansetzen des Kräftegleichgewichts am freigeschnittenen Tetraederelement liefert (Bild 3.10):

$$\vec{s} \cdot \Delta A = \vec{s}_1 \cdot \Delta A_1 + \vec{s}_2 \cdot \Delta A_2 + \vec{s}_3 \cdot \Delta A_3 = 0 \quad (3.43)$$

Damit Gleichung (3.43) weiter umgeformt werden kann, müssen zunächst die Flächeninhalte der Teillflächen ΔA_1 , ΔA_2 und ΔA_3 berechnet werden. Die Berechnung soll am Beispiel von Teillfläche ΔA_3 erfolgen (Bild 3.11).

Für den Inhalt der Tetraederfläche ΔA gilt:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \quad (3.44)$$

Für den Inhalt der Tetraederfläche ΔA_3 gilt:

$$\Delta A_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_3 \quad (3.45)$$

¹⁾ Die Berechnung von Spannungen in beliebigen Schnittrichtungen mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises gelingt nur, falls das Volumenelement parallel zu den Hauptachsen herausgeschnitten vorliegt (Hauptspannungselement, Kapitel 3.4.3).

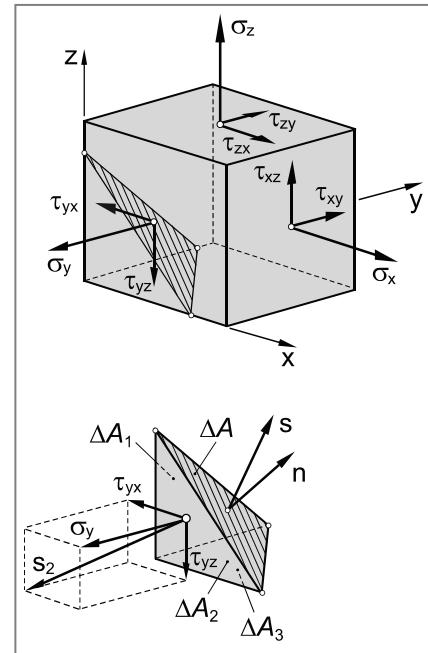


Bild 3.10 Spannungen am räumlichen Tetraederelement

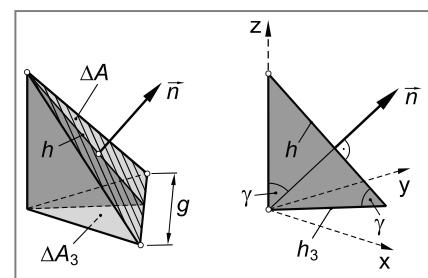


Bild 3.11 Geometrische Beziehungen am Tetraederelement

Zwischen den Höhen h und h_3 der beiden Dreiecksflächen gilt weiterhin (Bild 3.11):

$$h_3 = h \cdot \cos \gamma \quad (3.46)$$

Damit folgt aus Gleichung 3.45 mit Gleichung 3.44:

$$\Delta A_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \cdot \cos \gamma = \Delta A \cdot \cos \gamma \quad (3.47)$$

In analoger Weise folgt für die Teilflächen ΔA_1 und ΔA_2 :

$$\Delta A_1 = \Delta A \cdot \cos \alpha \quad (3.48)$$

$$\Delta A_2 = \Delta A \cdot \cos \beta \quad (3.49)$$

Setzt man die Gleichungen 3.47 bis 3.49 in Gleichung 3.43 ein, dann folgt:

$$\vec{s} \cdot \Delta A = \vec{s}_1 \cdot \Delta A \cdot \cos \alpha + \vec{s}_2 \cdot \Delta A \cdot \cos \beta + \vec{s}_3 \cdot \Delta A \cdot \cos \gamma \quad | : \Delta A \quad (3.50)$$

$$\vec{s} = \vec{s}_1 \cdot \cos \alpha + \vec{s}_2 \cdot \cos \beta + \vec{s}_3 \cdot \cos \gamma \quad (3.51)$$

Für die Komponenten der Spannungsvektoren ergibt sich (Bild 3.10):

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} \quad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Eingesetzt in Gleichung 3.51 folgt für den Spannungsvektor \vec{s} in der Schnittebene ΔA :

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \cdot \cos \alpha + \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \cdot \cos \beta + \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \cos \gamma \quad (3.53)$$

Gleichung 3.53 lässt sich auch in Matrizenform darstellen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix}}_{\vec{s}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\bar{S}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}}_{\vec{n}} \quad (3.54)$$

Die Größe \bar{S} wird als **Spannungstensor** bezeichnet. Der Spannungstensor beschreibt den Spannungszustand in einem beliebigen Punkt eines Bauteils. Die Hauptdiagonale des Spannungstensors enthält die Normalspannungen σ_x , σ_y und σ_z , daneben stehen die Schubspannungen. Da jeweils drei Paare von Schubspannungen gleich sind (zugeordnete Schubspannungen, d. h. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ und $\tau_{yz} = \tau_{zy}$) ist die Spannungsmatrix symmetrisch, so dass nur 6 von einander unabhängige Spannungskomponenten vorliegen.

Entsprechend des Gesetzes für zugeordnete Schubspannungen können die Indizes der Schubspannungen vertauscht werden, so dass der Spannungstensor \bar{S} auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

3.4.2 Berechnung der Normal- und Schubspannungen in einer beliebigen Schnittebene

Mit Hilfe des Spannungstensors wird der Spannungszustand in einem beliebigen Körperpunkt eindeutig beschrieben. Mitunter ist es von Interesse, die Spannungen in beliebigen Schnittrichtungen zu ermitteln. Die räumliche Lage der schrägen Schnittebene ΔA wird durch ihren Normaleneinheitsvektor \vec{n} festgelegt, wobei gilt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Bei bekanntem Spannungszustand (gekennzeichnet durch den Spannungstensor) errechnet sich der Spannungsvektor \vec{s} zu:

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \cdot \cos \alpha + \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \cdot \cos \beta + \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \cos \gamma \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_x \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot \cos \beta + \tau_{xz} \cdot \cos \gamma \\ \tau_{xy} \cdot \cos \alpha + \sigma_y \cdot \cos \beta + \tau_{yz} \cdot \cos \gamma \\ \tau_{xz} \cdot \cos \alpha + \tau_{yz} \cdot \cos \beta + \sigma_z \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (3.57) \end{aligned}$$

Sofern \vec{n} keine Hauptspannungsebene kennzeichnet und damit \vec{s} keine Hauptnormalspannung ist, fallen \vec{s} und \vec{n} nicht zusammen. Dann lässt sich der Spannungsvektor \vec{s} in eine Komponente in Richtung der Flächennormalen (Normalspannung) und in eine Komponente senkrecht dazu (Schubspannung) zerlegen (Bild 3.12).

Die Normalspannungskomponente $\vec{\sigma}$ des Spannungsvektors \vec{s} zur Schnittebene ΔA erhält man durch senkrechte Projektion des Spannungsvektors \vec{s} auf den Normaleneinheitsvektor \vec{n} . Der Betrag der Normalspannung σ ergibt sich dann als Skalarprodukt von \vec{s} und \vec{n} :

$$\sigma = \vec{s} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_x \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot \cos \beta + \tau_{xz} \cdot \cos \gamma \\ \tau_{xy} \cdot \cos \alpha + \sigma_y \cdot \cos \beta + \tau_{yz} \cdot \cos \gamma \\ \tau_{xz} \cdot \cos \alpha + \tau_{yz} \cdot \cos \beta + \sigma_z \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

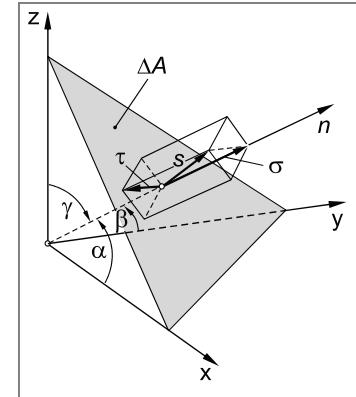


Bild 3.12

Spannungen in beliebiger Schnittichtung bei dreiachsigem Spannungszustand

$$\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \cos^2 \beta + \sigma_z \cdot \cos^2 \gamma + 2 \cdot (\tau_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + \tau_{yz} \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \tau_{xz} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha) \quad (3.59)$$

Betrag der Normalspannung in beliebiger (räumlicher) Schnittrichtung

Für den Betrag der Schubspannung in der Schnittebene ΔA ergibt sich unter Anwendung des Satzes von Pythagoras:

$$\tau = \sqrt{s^2 - \sigma^2} \quad \begin{array}{l} \text{Betrag der Schubspannung in beliebiger (räumlicher)} \\ \text{Schnittrichtung} \end{array} \quad (3.60)$$

3.4.3 Hauptnormalspannungen bei dreiachsigem Spannungszustand

Wird ein Bauteil durch äußere Kräfte und Momente beansprucht, dann können zumindest bei einfachen geometrischen Verhältnissen, mit Hilfe der in Kapitel 2 beschriebenen Grundgleichungen die Lastspannungen und damit der Spannungszustand ermittelt werden. Allgemein wird der Spannungszustand in einem Punkt P eines beanspruchten Bauteils durch drei voneinander unabhängige Normalspannungen (σ_x , σ_y und σ_z) sowie drei Paare zugeordneter Schubspannungen (τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}) beschrieben (Bild 3.10) und mathematisch durch den Spannungstensor \bar{S} ausgedrückt (Kapitel 3.4.1). In Lastspannungen ausgedrückt lautet der Spannungstensor:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Für einen Festigkeitsnachweis ist in der Regel die Kenntnis von Betrag und ggf. Richtung der Hauptnormalspannungen (σ_{H1} , σ_{H2} und σ_{H3}) erforderlich. Zur Ermittlung der Hauptnormalspannungen dreht man das Würfelement so, bis die Schubspannungen in den Schnittebenen verschwinden und die Normalspannungen Extremwerte annehmen (**Hauptspannungselement**, Bild 3.13). Die entsprechenden Schnittrichtungen bezeichnet man als Hauptnormalspannungsrichtungen und die in diesen Schnittebenen (Hauptspannungsebenen bzw. Hauptebenen) wirkenden Normalspannungen als Hauptnormalspannungen (siehe auch Kapitel 3.3.4.3).

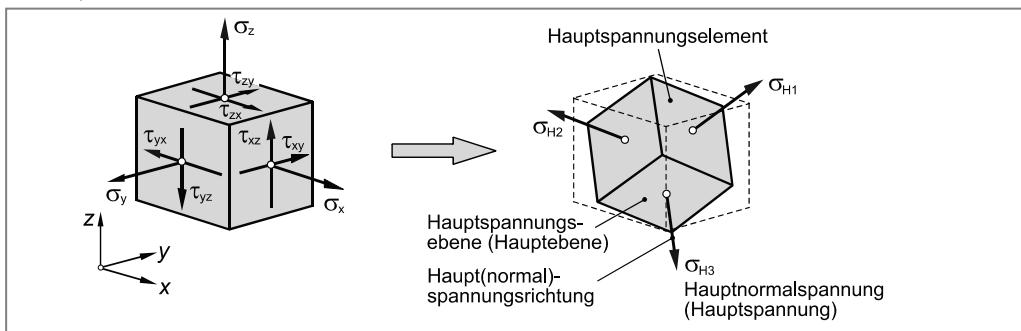


Bild 3.13 Allgemeiner Spannungszustand und Hauptspannungselement

Im Allgemeinen sind in einem beliebigen Punkt eines Bauteils der Spannungsvektor \vec{s} und der Normalenvektor \vec{n} der zugehörigen Schnittebene nicht parallel zueinander (Bild 3.2). Die Hauptspannungsrichtungen sind jedoch dadurch gekennzeichnet, dass die Spannungsvektoren ($\vec{s}_{H1} \equiv \vec{\sigma}_{H1}, \vec{s}_{H2} \equiv \vec{\sigma}_{H2}$ und $\vec{s}_{H3} \equiv \vec{\sigma}_{H3}$) senkrecht zu den zugehörigen Schnittebenen bzw. parallel zu deren Normalenvektoren ($\vec{n}_{H1}, \vec{n}_{H2}$ und \vec{n}_{H3}) sind d. h. die Schubspannungen verschwinden. Der Betrag der Hauptnormalspannungen ist dabei das σ_{H1} - bzw. σ_{H2} - bzw. das σ_{H3} -fache des Normaleneinheitsvektors der jeweiligen Hauptspannungsebene. Mathematisch lässt sich dieser Sachverhalt wie folgt formulieren:

$$\vec{\sigma}_{Hi} = \sigma_{Hi} \cdot \vec{n}_{Hi} \quad (i=1,2,3) \quad (3.62)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{Hi\ x} \\ \sigma_{Hi\ y} \\ \sigma_{Hi\ z} \end{pmatrix} = \sigma_{Hi} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \cos \beta_i \\ \cos \gamma_i \end{pmatrix}$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_{Hi\ x} &= \sigma_{Hi} \cdot \cos \alpha_i \\ \sigma_{Hi\ y} &= \sigma_{Hi} \cdot \cos \beta_i \\ \sigma_{Hi\ z} &= \sigma_{Hi} \cdot \cos \gamma_i \end{aligned} \quad (3.63)$$

Andererseits muss sich bei bekannter Hauptspannungsrichtung und bekanntem Spannungszustand (gekennzeichnet durch den Spannungstensor \bar{S}) derselbe Spannungsvektor $\vec{\sigma}_{Hi}$ auch entsprechend Gleichung 3.54 ergeben:

$$\vec{\sigma}_{Hi} = \bar{S} \cdot \vec{n}_{Hi} \quad (3.64)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{Hi\ x} \\ \sigma_{Hi\ y} \\ \sigma_{Hi\ z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \cos \beta_i \\ \cos \gamma_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{Hi\ x} &= \sigma_x \cdot \cos \alpha_i + \tau_{xy} \cdot \cos \beta_i + \tau_{xz} \cdot \cos \gamma_i \\ \sigma_{Hi\ y} &= \tau_{xy} \cdot \cos \alpha_i + \sigma_y \cdot \cos \beta_i + \tau_{yz} \cdot \cos \gamma_i \\ \sigma_{Hi\ z} &= \tau_{xz} \cdot \cos \alpha_i + \tau_{yz} \cdot \cos \beta_i + \sigma_z \cdot \cos \gamma_i \end{aligned} \quad (3.65)$$

Nach Gleichsetzen von Gleichung 3.63 mit 3.65 und ordnen, erhält man ein homogenes, lineares Gleichungssystem für den Richtungskosinus der Normalenvektoren der jeweiligen Hauptspannungsebenen ($\cos \alpha_i, \cos \beta_i$ und $\cos \gamma_i$) und damit auch der Hauptnormalspannungen.

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_{Hi}) \cdot \cos \alpha_i + \tau_{xy} \cdot \cos \beta_i + \tau_{xz} \cdot \cos \gamma_i &= 0 \\ \tau_{xy} \cdot \cos \alpha_i + (\sigma_y - \sigma_{Hi}) \cdot \cos \beta_i + \tau_{yz} \cdot \cos \gamma_i &= 0 \\ \tau_{xz} \cdot \cos \alpha_i + \tau_{yz} \cdot \cos \beta_i + (\sigma_z - \sigma_{Hi}) \cdot \cos \gamma_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Das Gleichungssystem hat nur dann nicht triviale Lösungen, falls die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems Null ist. Dies führt auf die **charakteristische Gleichung** (E = Einheitsmatrix, S = Spannungsmatrix, σ_{Hi} = Eigenwert der Spannungsmatrix):

$$\det(S - \sigma_{\text{Hi}} \cdot E) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_{\text{Hi}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{\text{Hi}} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{\text{Hi}} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{charakteristische Gleichung} \quad (3.67)$$

Die Lösung der charakteristischen Gleichung liefert die Eigenwerte (σ_{H1} , σ_{H2} und σ_{H3}) der Spannungsmatrix. Diese Eigenwerte entsprechen den jeweiligen Hauptspannungen. Die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren ($\vec{n}_{\text{H1}}, \vec{n}_{\text{H2}}$ und \vec{n}_{H3}) sind identisch mit den Hauptspannungsrichtungen.

Die Berechnung der Determinante (Gleichung 3.67) führt auf eine Gleichung dritten Grades (**Eigenwertgleichung**), deren Lösung die gesuchten Eigenwerte der Spannungsmatrix d. h. die Hauptnormalspannungen σ_{Hi} sind. Zu den mathematischen Grundlagen wird an dieser Stelle auf die entsprechende Literatur wie z. B. [3] verwiesen. Die Eigenwertgleichung lautet:

$$\sigma_{\text{Hi}}^3 - I_1 \cdot \sigma_{\text{Hi}}^2 + I_2 \cdot \sigma_{\text{Hi}} - I_3 = 0 \quad \text{Eigenwertgleichung} \quad (3.68)$$

Die Koeffizienten I_1 , I_2 und I_3 der Eigenwertgleichung (Gleichung 3.68) sind die Invarianten des Spannungstensors (unveränderliche Größen in Bezug auf eine Koordinatentransformation) und berechnen sich wie folgt:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (3.69)$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \quad \text{Invarianten des Spannungstensors} \quad (3.70)$$

$$I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{xz} - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 \quad (3.71)$$

Aufgrund der Symmetrie der Koeffizientendeterminante hat Gleichung 3.68 stets drei reelle Lösungen, die Hauptspannungen σ_{H1} , σ_{H2} und σ_{H3} . Damit existieren bei einem räumlichen Spannungszustand in jedem Punkt eines Bauteils drei zueinander senkrechte, schubspannungsfreie Schnittebenen.

Zur **Lösung einer Gleichung 3. Grades** der Form entsprechend Gleichung 3.68, schreibt man:

$$\sigma_{\text{Hi}}^3 + A \cdot \sigma_{\text{Hi}}^2 + B \cdot \sigma_{\text{Hi}} + C = 0 \quad (3.72)$$

Die Zahlenwerte für A , B und C erhält man durch Koeffizientenvergleich mit Gleichung 3.68:

$$\begin{aligned} A &= -I_1 \\ B &= I_2 \\ C &= -I_3 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Zur Lösung von Gleichung 3.72 geht man wie nachfolgend beschrieben vor.

1. Schritt: Elimination von $A \cdot \sigma_{\text{Hi}}^2$ durch Substitution, gemäß:

$$\sigma_{\text{Hi}} = u - \frac{A}{3} \quad (3.74)$$

liefert die reduzierte Form der Gleichung 3. Grades:

$$u^3 + a \cdot u + b = 0 \quad (3.75)$$

$$\text{mit: } a = B - \frac{A^2}{3} \quad \text{und} \quad b = \frac{2}{27} \cdot A^3 - \frac{1}{3} \cdot A \cdot B + C$$

2. Schritt: Berechnung der Diskriminante D von Gleichung 3.75:

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \quad (3.76)$$

für $D > 0$: eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen

$D = 0$: zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen (eine einfache Lösung und eine Doppellosung)

$D < 0$: drei reelle Lösungen

Da die Matrix der Koeffizienten-Determinante symmetrisch ist (Gleichung 3.67), erhält man drei reelle Lösungen aus denen sich die drei Hauptspannungen ermitteln lassen.

3. Schritt: Für die drei (reellen) Lösungen der Gleichung 3. Grades (Gleichung 3.75) folgt:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \cos \varphi \\ u_2 &= 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \cos(\varphi + 120^\circ) \\ u_3 &= 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \cos(\varphi + 240^\circ) \end{aligned} \quad \text{mit } \varphi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-b}{2 \cdot \sqrt{(-a/3)^3}} \right) \quad (3.77)$$

Die Hauptspannungen σ_{H1} , σ_{H2} und σ_{H3} ergeben sich schließlich aus Gleichung 3.74:

$$\sigma_{Hi} = u_i - \frac{A}{3} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Vereinbarungsgemäß wird die größte positive Hauptnormalspannung mit σ_1 und die kleinste Hauptnormalspannung mit σ_3 bezeichnet (siehe auch Kapitel 6), so dass gilt (ordnen der Hauptspannungen entsprechend ihrer algebraischen Größe):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \max\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\} \\ \sigma_3 &= \min\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\} \\ \sigma_1 &< \sigma_2 < \sigma_3 \end{aligned} \quad (3.78)$$

4. Schritt: Kontrolle

Zur Kontrolle der Berechnungen kann die erste Invariante (I_1) herangezogen werden. Die Invarianten eines Tensors sind Größen, die sich auch bei einer Koordinatentransformation z. B. vom x-y-z-Koordinatensystem ins Hauptachsensystem nicht ändern, so dass gelten muss:

$$\sigma_{H1} + \sigma_{H2} + \sigma_{H3} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (3.79)$$

3.4.4 Mohrscher Spannungskreis für den dreiachigen Spannungszustand

Unter der Voraussetzung eines zweiachigen Spannungszustandes konnten mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises die Normal- und Schubspannungen in jeder beliebigen Schnittebene ebenso wie die Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2} auf einfache und anschauliche Weise ermittelt werden (Kapitel 3.3.4).

Liegt hingegen ein dreiachiger (allgemeiner) Spannungszustand vor, dann ist eine ähnliche Vorgehensweise mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises nicht mehr möglich. Die Ermittlung der Hauptnormalspannungen sowie der Spannungen in beliebiger (räumlicher) Schnittrichtung muss in diesem Fall analytisch erfolgen (Kapitel 3.4.2 und 3.4.3).

Sind hingegen die drei Hauptnormalspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 bekannt (siehe Gleichung 3.78), dann können für jede durch die Hauptspannungsrichtungen gekennzeichnete Hauptspannungsebene (σ_1 - σ_2 -Ebene, σ_1 - σ_3 -Ebene und σ_2 - σ_3 -Ebene) die Mohrschen Spannungskreise angegeben werden. Man erhält dabei zwei sich berührende **Nebenkreise** (σ_1 - σ_2 -Ebene und σ_2 - σ_3 -Ebene), die von einem **Hauptkreis** (σ_1 - σ_3 -Ebene) eingeschlossen werden (Bild 3.14).

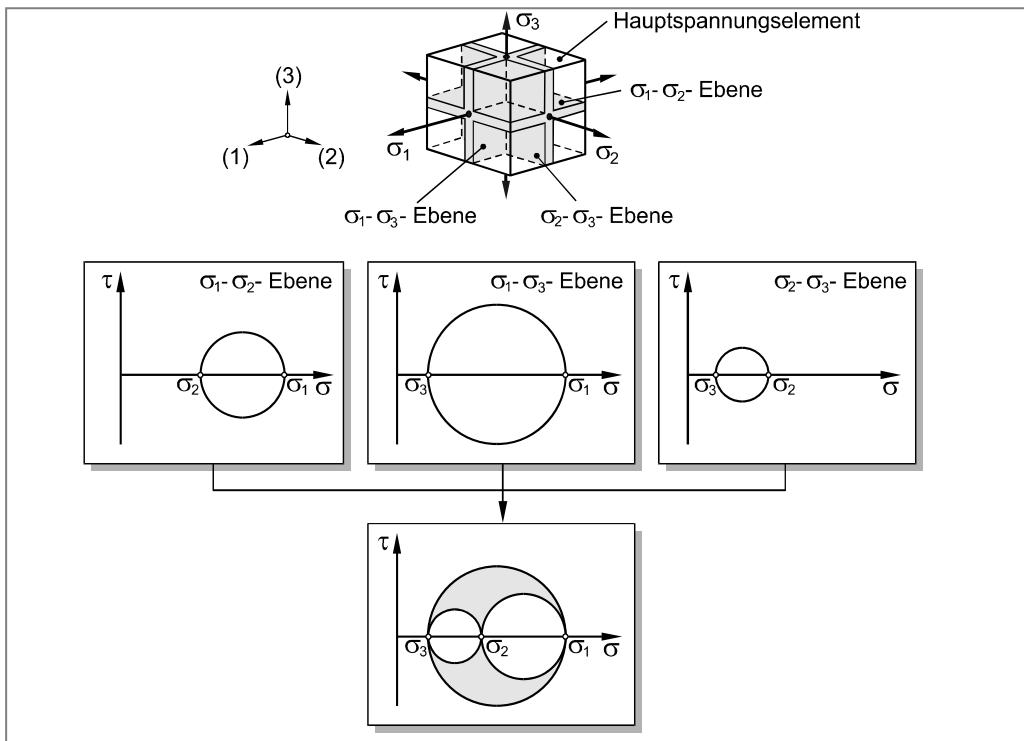


Bild 3.14 Mohrsche Spannungskreise für den dreiachigen (allgemeinen) Spannungszustand

Die Spannungen (σ_ϕ , τ_ϕ) in einem räumlich beliebig gerichteten Flächenelement findet man als Bildpunkt P innerhalb des Hauptkreises und außerhalb der beiden Nebenkreise (grau markierter Bereich in Bild 3.14). Eine graphische Methode für das Auffinden des Bildpunktes bei gegebener Schnittrichtung wird in Kapitel 3.4.6 beschrieben.

Mit Hilfe der Mohrschen Spannungskreise können nunmehr die folgenden Aufgabenstellungen auf anschauliche Weise gelöst werden:

- Ermittlung der Hauptschubspannungen (Kapitel 3.4.5).
- Graphische Bestimmung der Spannungen (σ_ϕ und τ_ϕ) in beliebigen räumlichen Schnittrichtungen (Kapitel 3.4.6).

3.4.5 Hauptschubspannungen bei dreiachsigem Spannungszustand

Zweckmäßigerweise ermittelt man die Hauptschubspannungen mit Hilfe der Mohrschen Spannungskreise, nachdem die Hauptnormalspannungen bekannt sind (Kapitel 3.4.3). Die Hauptschubspannungen (τ_{H1} , τ_{H2} und τ_{H3}) ergeben sich sofort als Radien der drei Mohrschen Spannungskreise zu:

$$\begin{aligned}\tau_{H1} &= \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \tau_{H2} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ \tau_{H3} &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\end{aligned}\quad (3.80)$$

Die Hauptschubspannungen wirken jeweils in Schnittebenen, die zu den Hauptspannungsebenen einen Winkel von 45° einschließen und zu einer der Hauptachsen parallel sind (Bild 3.15).

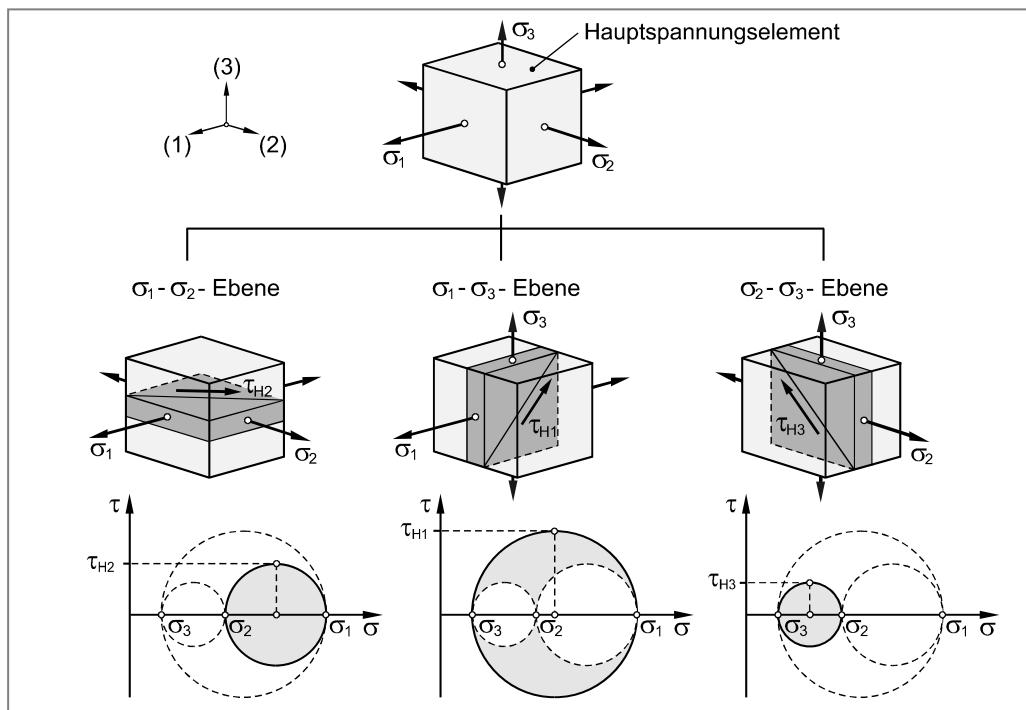


Bild 3.15 Schnittebenen grösster Schubspannungen am Hauptspannungselement

3.4.6 Graphische Ermittlung von Schnittspannungen bei dreiachsigem Spannungszustand

Unter der Voraussetzung, dass die Hauptnormalspannungen (σ_1 , σ_2 und σ_3) in einem Punkt P eines beliebig beanspruchten Bauteil bekannt sind, kann die Normalspannung σ_ϕ sowie die Schubspannung τ_ϕ in einer beliebigen Schnittebene E auch graphisch ermittelt werden. Die Vorgehensweise soll nachfolgend (ohne Beweis der Konstruktionsbeschreibung) aufgezeigt werden. Die Normale \vec{n} der räumlichen Schnittebene E schließt mit den *Hauptspannungsrichtungen* (1, 2 und 3) die Winkel α , β , und γ ein (Bild 3.16a)

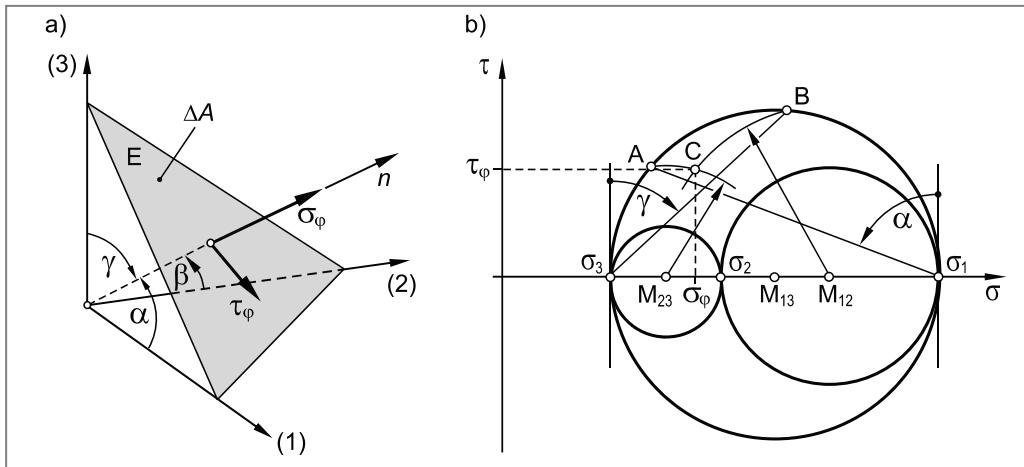


Bild 3.16 Graphische Ermittlung von Schnittspannungen bei dreiachsigem Spannungszustand

Konstruktionsbeschreibung:

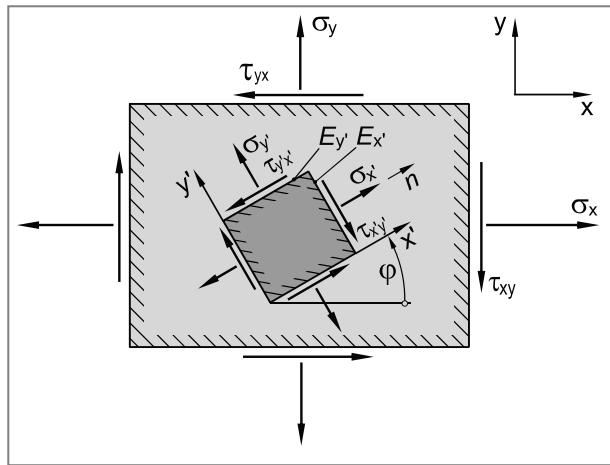
1. Konstruktion der Mohrschen Spannungskreise für die drei Hauptspannungsebenen.
2. Die Normale \vec{n} schließt mit der ersten Hauptspannungsrichtung (1) den Winkel α ein. Dementsprechend trägt man zu einer Parallel zur τ -Achse durch σ_1 den Richtungswinkel α ab und bringt dessen Schenkel zum Schnitt mit dem Mohrschen Spannungskreis der $\sigma_1 - \sigma_3$ -Ebene (Schnittpunkt A).
3. Die Normale \vec{n} schließt mit der dritten Hauptspannungsrichtung (3) den Winkel γ ein. Dementsprechend trägt man zu einer Parallel zur τ -Achse durch σ_3 den Richtungswinkel γ ab und bringt dessen Schenkel zum Schnitt mit dem Mohrschen Spannungskreis der $\sigma_1 - \sigma_3$ -Ebene (Schnittpunkt B).
4. Kreisbögen um M_{23} (Mittelpunkt des Mohrschen Spannungskreises der $\sigma_2 - \sigma_3$ -Ebene) mit Radius $\overline{M_{23}A}$ und Kreisbögen um M_{12} (Mittelpunkt des Mohrschen Spannungskreises der $\sigma_1 - \sigma_2$ -Ebene) mit Radius $\overline{M_{12}B}$ schneiden sich im Punkt C .
5. Die Koordinaten des Schnittpunktes C ($\sigma_\phi \mid \tau_\phi$) charakterisieren die Spannungen in der Schnittebene E . Ist die Normalspannung σ_ϕ positiv, dann liegt eine Zugbeanspruchung vor, ist sie hingegen negativ, dann herrscht in der Schnittebene E eine Druckspannung. Die Wirkrichtung der Schubspannung τ_ϕ kann dieser Konstruktion allerdings nicht entnommen werden.

3.5 Aufgaben

Aufgabe 3.1

Die Abbildung zeigt ein durch die Spannungen $\sigma_x = 200 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_y = 100 \text{ N/mm}^2$ und $\tau_{xy} = 75 \text{ N/mm}^2$ zweiachsig beanspruchtes Scheibenelement aus Werkstoff S235JR.

- Zeichnen Sie maßstäblich den Mohrschen Spannungskreis in der x-y-Ebene.
- Berechnen Sie die Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2} sowie die Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Hauptspannungsrichtungen.
- Ermitteln Sie die Spannungen σ_x' und $\tau_{x'y'}$ in der Schnittebene E_x' sowie σ_y' und $\tau_{y'x'}$ in der Schnittebene E_y' eines um den Winkel $\varphi = 30^\circ$ zur x-Richtung gedrehten Flächenelementes (siehe Abbildung).

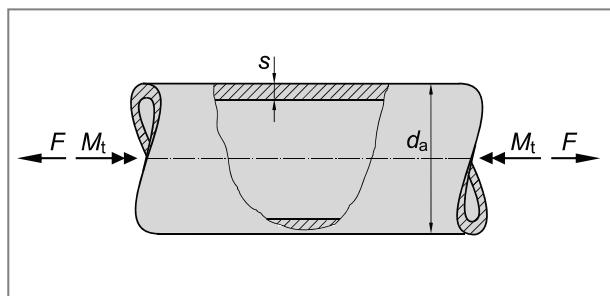


Aufgabe 3.2



Ein Stahlrohr mit einem Außen-durchmesser $d_a = 100 \text{ mm}$ und einer Wandstärke $s = 10 \text{ mm}$ wird gleichzeitig durch die Zugkraft $F = 425 \text{ kN}$ und das Torsionsmoment $M_t = 9250 \text{ Nm}$ statisch beansprucht.

- Skizzieren Sie den Mohrschen Spannungskreis für die höchst beanspruchte Stelle.
- Ermitteln Sie die Hauptnormalspannungen, die Hauptschubspannungen und die jeweiligen Richtungswinkel zur x-Achse.



Aufgabe 3.3



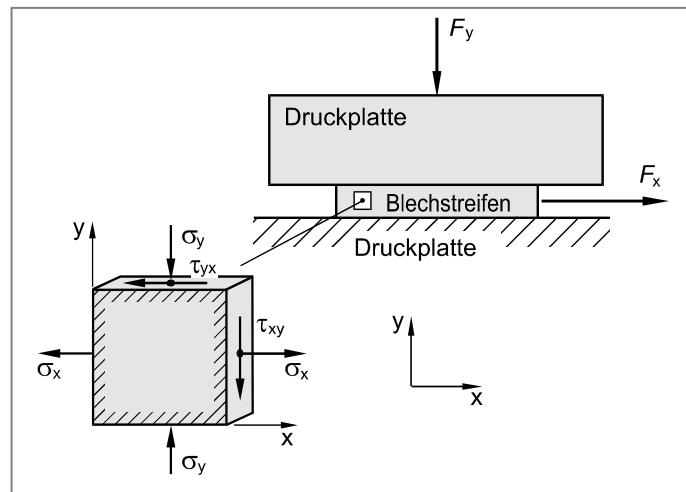
Ein Blechstreifen wird zwischen zwei Druckplatten hindurch gezogen. Dabei entstehen an der höchst beanspruchten Stelle des Bleches die folgenden Spannungen:

aus Zug: $\sigma_x = 200 \text{ N/mm}^2$

aus Druck: $\sigma_y = -100 \text{ N/mm}^2$

aus Reibung: $\tau_{xy} = 40 \text{ N/mm}^2$

- a) Berechnen Sie die im Blech auftretenden größten Zug- bzw. Druckspannungen d. h. die Hauptnormalspannungen.
- b) Ermitteln Sie die Lage derjenigen Schnittebenen, in denen die größten Zug- bzw. Druckspannungen auftreten (Winkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Normalen zu diesen Schnittebenen).



Aufgabe 3.4



Die Abbildung zeigt das Maschinengestell für eine Einpressvorrichtung aus dem Gusseisenwerkstoff EN-GJL-350 (alle Maßangaben in mm). Das Maschinengestell wird durch die statisch wirkenden Arbeitskräfte F belastet.

Zur Ermittlung der unbekannten Arbeitskräfte F wird in der Säulenmitte ein Dehnungsmessstreifen (DMS) appliziert. Aufgrund einer Montagegenauigkeit schließt die Messrichtung des DMS einen Winkel von 10° zur Säulenlängsachse ein.

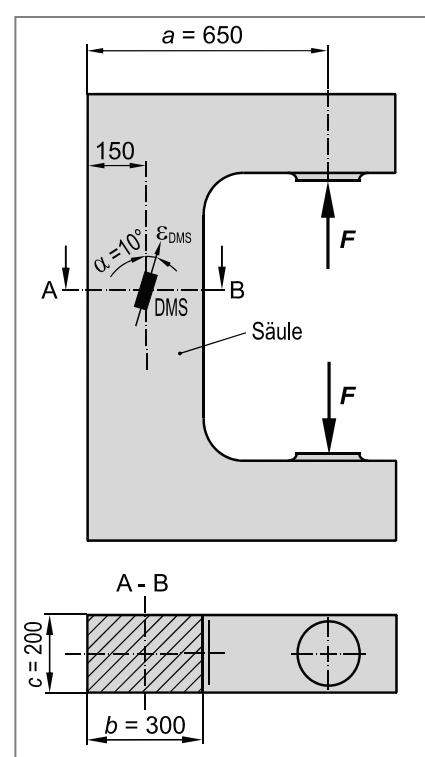
Werkstoffkennwerte EN-GJL-350:

$$R_m = 350 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 108000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,25$$

- a) Auf welche Weise wird der Querschnitt A-B durch die Arbeitskräfte F beansprucht?
- b) Ermitteln Sie den Betrag der Arbeitskräfte F für eine Dehnungsanzeige von $\varepsilon_{\text{DMS}} = 0,1485 \%$
- c) Ermitteln Sie für die höchst beanspruchte Stelle (im Querschnitt A-B) die Sicherheit gegen Bruch. Ist die Sicherheit ausreichend?

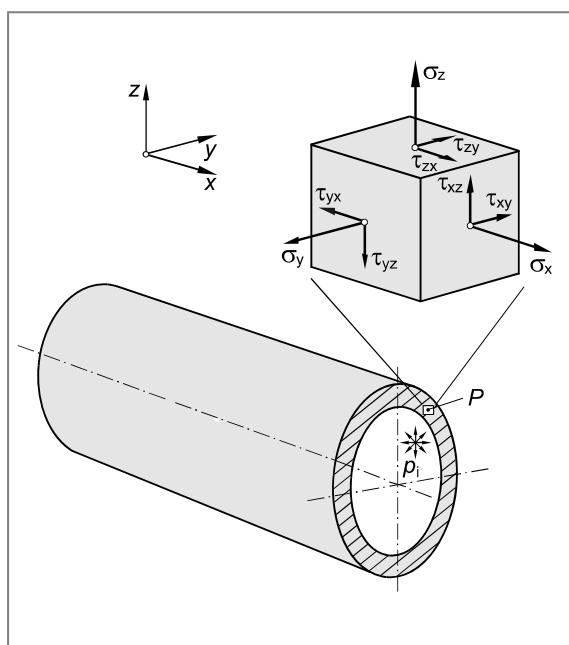


Aufgabe 3.5

Der Spannungszustand im Punkt P einer Hochdruckleitung wird durch die folgenden Spannungskomponenten beschrieben:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 500 \text{ N/mm}^2 & \tau_{xy} &= 250 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_y &= 200 \text{ N/mm}^2 & \tau_{yz} &= 100 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_z &= 300 \text{ N/mm}^2 & \tau_{zx} &= 400 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

- a) Berechnen Sie die Normal- und Schubspannung in einer Schnittebene E_1 , deren Normalenvektor mit dem x - y - z -Koordinatensystem die Winkel $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$ und $\gamma = 45^\circ$ einschließt.
- b) Berechnen Sie die Normalspannung und die Schubspannung in einer Schnittebene E_2 , deren Normalenvektor mit dem x - y - z -Koordinatensystem die Winkel $\alpha = 40,833^\circ$, $\beta = 69,773^\circ$ und $\gamma = 56,291^\circ$ einschließt.
- c) Berechnen Sie die Hauptnormalspannungen σ_{H1} , σ_{H2} und σ_{H3} .
- d) Ermitteln Sie die Hauptspannungsrichtungen im x - y - z -Koordinatensystem.
- e) Bestimmen Sie rechnerisch und graphisch die Spannungen σ_{E3} und τ_{E3} in einer Schnittebene E_3 , deren Normalenvektor zu den *Hauptspannungsrichtungen* (zum *Hauptachsen-*system) die Winkel $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 50^\circ$ und $\gamma = 65,4^\circ$ einschließt.



4 Verformungszustand

Wirken an einem Bauteil äußere Kräfte oder Momente, dann treten im Innern des Bauteils Spannungen auf. Für Festigkeitsnachweise ist es dabei zweckmäßig, Normalspannungen (σ) und Schubspannungen (τ) zu unterscheiden (Kapitel 3). Unter der Wirkung von Spannungen werden die Atome eines Festkörpers aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und das Bauteil verformt sich elastisch.

In den vorangegangenen Kapiteln wurde bereits dargelegt, dass Normalspannungen (σ) zu Längenänderungen (Dehnungen ε) führen, Schubspannungen (τ) hingegen Winkeländerungen (Schiebungen γ) zur Folge haben. Dehnungen (ε) und Schiebungen (γ) kennzeichnen den **Verformungszustand** eines Bauteils.

Ausgehend von einem bekannten Verformungszustand ist es das Ziel von Kapitel 4, Methoden bereitzustellen, mit deren Hilfe Verformungen (Dehnungen und Schiebungen) in beliebigen Schnittrichtungen ermittelt werden können.

Die Erläuterung der Problemstellung soll am Beispiel des bereits aus Bild 3.1 bekannten dünnwandigen Behälters unter Innendruck (p_i) mit überlagerter Torsionsbeanspruchung (Torsionsmoment M_t) erfolgen (Bild 4.1a). Schneidet man aus dem Bauteil ein Flächenelement in geeigneter Weise heraus (in Bild 4.1 parallel zu den Koordinatenachsen), dann ist es zunächst auf einfache Weise möglich, die Lastspannungen (σ_x , σ_y und τ_{xy} bzw. τ_{yx}) in den entsprechenden Schnittebenen

zu ermitteln. Diese Lastspannungen bewirken eine (elastische) Formänderung (ε_x , ε_y und γ_{xy} bzw. γ_{yx}) des Flächenelementes (Bild 4.1b). Mit Hilfe entsprechender Stoffgesetze (Hooke'sches Gesetz, Kapitel 5) können diese Formänderungen aus den Lastspannungen berechnet werden.

Häufig, wie zum Beispiel im Rahmen experimenteller Spannungsanalysen (Kapitel 4.4), ist es erforderlich, die Verformungsgrößen in beliebigen Schnittrichtungen (ε_x' , ε_y' und $\gamma_{x'y'}$ bzw. $\gamma_{y'x'}$) zu ermitteln, in Bild 4.1c beispielsweise für ein um den Winkel φ gedrehtes Flächenelement. Die Vorgehensweise soll nachfolgend erläutert werden.

Die folgenden Betrachtungen beschränken sich auf Verformungen in der Ebene. Außerdem sollen nur kleine Deformationen betrachtet werden, wie sie beispielsweise bei einer elastischen Verformung metallischer Bauteile auftreten. Trotz dieser Einschränkungen wird es mit Hilfe der nachfolgend zu erarbeitenden Verfahren möglich sein, eine Vielzahl praxisrelevanter Problemstellungen zu lösen.

Verformungszustand

Unter dem Begriff „Verformungszustand“ versteht man alle Formänderungen (Dehnungen und Schiebungen bzw. Winkelverzerrungen), die an einem beliebigen Ort eines Körpers wirken.

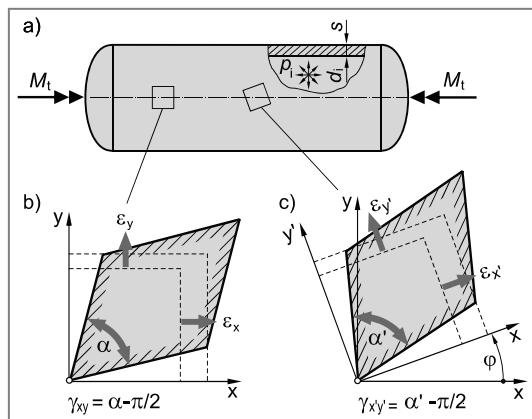


Bild 4.1 Dehnungen und Schiebungen in unterschiedlichen Richtungen am Beispiel eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck mit überlagerter Torsion

4.1 Verformungsgrößen

Zur Ermittlung der Verformungsgrößen (Dehnungen und Schiebungen) betrachtet man die relative Lage zweier benachbarter Punkte z. B. A und B im unverformten bzw. A^* und B^* im verformten Zustand eines Bauteils (Bild 4.2).

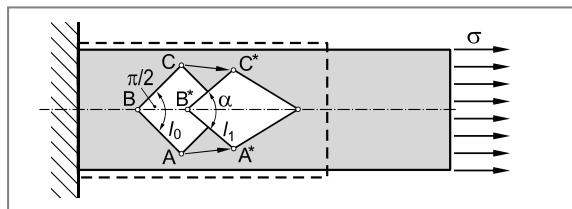


Bild 4.2 Verformung einer quadratischen Scheibe am Beispiel eines Zugstabes

4.1.1 Dehnung

Unter der (**technischen**) **Dehnung** ε versteht man definitionsgemäß die Längenänderung Δl zweier benachbarter Punkte bezogen auf die Ausgangslänge l_0 im unbelasteten Zustand (z. B. A und B bzw. A^* und B^*):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \quad \text{Definition der (technischen) Dehnung} \quad (4.1)$$

Die Dehnung ist dimensionslos, sie wird bisweilen jedoch auch in Prozent (%) oder Promille (‰) angegeben. Mitunter ist auch die Angabe m/m, mm/mm oder $\mu\text{m}/\text{m}$ gebräuchlich.

4.1.2 Schiebung (Winkelverzerrung)

Unter der **Schiebung** oder **Winkelverzerrung** γ (mitunter auch als **Schubverzerrung** oder **Scherung** bezeichnet) versteht man die Winkeländerung eines ursprünglich rechtwinkeligen Winkelementes (z. B. $\angle ABC$ und $\angle A^*B^*C^*$ in Bild 4.2). Der mitunter auch verwendete Begriff „**Gleitung**“ soll nach DIN 13316 nicht angewandt werden, da dieser Begriff bleibenden Verformungen vorbehalten ist.

$$\gamma = \angle A^*B^*C^* - \angle ABC = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad \text{Definition der Schiebung (Winkelverzerrung)} \quad (4.2)$$

Die Schiebung wird im Bogenmaß (rad) angegeben, sie ist daher dimensionslos. Bisweilen wird die Schiebung jedoch auch in Prozent (%) oder Promille (‰) angegeben.

4.1.3 Vorzeichenregelung für Dehnungen und Schiebungen

Die Vorzeichen von Dehnungen und Schiebungen lassen sich unmittelbar aus den Gleichungen 4.1 und 4.2 ableiten:

1. Verlängert sich ein betrachtetes Linienelement ($l_1 > l_0$), dann wird die Dehnung positiv angesetzt, verkürzt es sich hingegen, dann ist die Dehnung negativ (**Stauchung**), Bild 4.3.
2. Für die Lösung *ebener Probleme* ist es zweckmäßig, das Vorzeichen der Schiebung γ positiv anzusetzen, falls sich der ursprünglich rechte Winkel des Winkelementes vergrößert. Verkleinert sich der Winkel hingegen, dann ist die Schiebung negativ anzusetzen (Bild 4.3). Bei der Anwendung dieser Vorzeichendefinition für Schiebungen werden positiven Schubspannungen (definiert gemäß der speziellen Vorzeichenregelung für Schubspannungen entsprechend Gleichung 2.43) ebenfalls positive Schiebungen zugeordnet (und umgekehrt).

4.1.4 Indizierung von Dehnungen und Schiebungen

Die Indizierung der Verformungsgrößen ε und γ erfolgt nach der Richtung des Linienelementes im nicht beanspruchten Bauteil (**Bezugsrichtung**). Bild 4.4 zeigt einige Beispiele.

Beispiel 1:

Das Linienelement OA in Bild 4.4b zeigt in x-Richtung. Eine Dehnung dieses Linienelementes ($OA \rightarrow OA^*$) wird dementsprechend mit ε_x bezeichnet. Die zugehörige Schiebung mit der *x-Richtung als Bezugsrichtung* wird mit γ_{xy} bezeichnet. Der 1. Index kennzeichnet dabei die Bezugsrichtung (hier: x-Richtung) der 2. Index die Koordinatenrichtung die sich ausgehend von der Bezugsrichtung bei Drehung im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) um 90° ergibt. Hier also die y-Richtung.

Die Schiebung γ_{xy} ist dementsprechend die Winkeländerung des rechten Winkels $\angle AOB$, also:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \angle A^*OB^* - \angle AOB \\ &= \alpha - \pi/2\end{aligned}$$

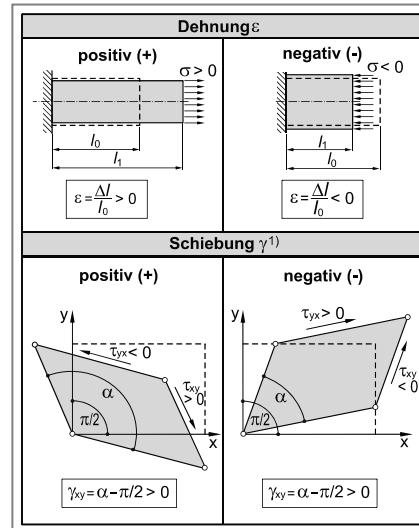
Im dargestellten Beispiel handelt es sich um eine Winkelverkleinerung, so dass γ_{xy} definitionsgemäß negativ anzusetzen ist (Kapitel 4.1.3).

Beispiel 2:

Das Linienelement OB in Bild 4.4b zeigt in y-Richtung. Die Dehnung dieses Linienelementes ($OB \rightarrow OB^*$) wird dementsprechend mit ε_y bezeichnet. Die zugehörige Schiebung mit der *y-Richtung als Bezugsrichtung* wird entsprechend der Festlegung in Beispiel 1 mit γ_{yx} bezeichnet ($\gamma_{yx} = \angle B^*OD^* - \angle BOD = \beta - \pi/2$). Da sich der ursprüngliche rechte Winkel ($\angle BOD$) vergrößert ist γ_{yx} positiv anzusetzen.

Beispiel 3:

Das Linienelement OA in Bild 4.4c zeigt in x'-Richtung. Die Dehnung dieses Linienelementes ($OA \rightarrow OA^*$) wird dementsprechend mit $\varepsilon_{x'}$ bezeichnet. Die zugehörige Schiebung mit der *x'-Richtung als Bezugsrichtung* wird mit $\gamma_{x'y'}$ bezeichnet ($\gamma_{x'y'} = \alpha' - \pi/2$).



¹⁾ Anwendung zweckmäßig für die Lösung ebener Probleme

Bild 4.3 Vorzeichendefinition für Dehnungen und Schiebungen

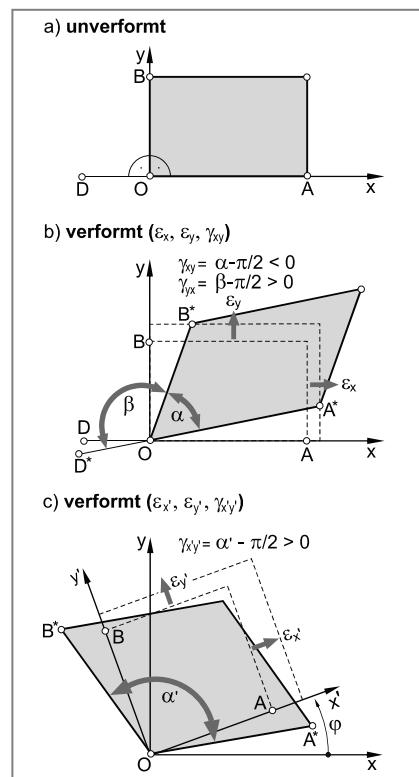


Bild 4.4 Indizierung von Dehnungen und Schiebungen

4.2 Verformungszustand und Schnittrichtung

Für Festigkeitsnachweise ist die Kenntnis des Spannungszustandes (Normal- und Schubspannungen) an der höchst beanspruchten Stelle eines Bauteiles erforderlich. Häufig ist der Spannungszustand jedoch unbekannt und kann nicht oder nur sehr schwierig aus der äußeren Beanspruchung (Kräfte, Momente, Drücke, usw.) abgeleitet werden. Dies ist beispielsweise bei unbekannter äußerer Beanspruchung oder komplexen geometrischen Verhältnissen der Fall. Ein Festigkeitsnachweis kann unter diesen Bedingungen dennoch erfolgen, sofern der Verformungszustand an der zu untersuchenden Stelle bekannt ist. Letzterer lässt sich experimentell beispielsweise mit Hilfe von Dehnungsmessstreifen (Kapitel 4.5) relativ einfach erfassen.

Zur Ermittlung der äußeren Beanspruchung bzw. zur Durchführung eines Festigkeitsnachweises ist in der Regel die Kenntnis der Verformungsgrößen in bestimmte Bauteilrichtungen erforderlich. Diese Verformungsgrößen sind jedoch häufig nicht bekannt bzw. messtechnisch nicht erfassbar. Daher sollen nachfolgend geometrische Beziehungen abgeleitet werden, die es ermöglichen, ausgehend von bekannten Verformungsgrößen in einem Punkt (ε_x , ε_y , γ_{xy}), Verformungen wie zum Beispiel die Dehnung ε_x in x' -Richtung oder die Schiebung γ_x mit der x' -Richtung als Bezug zu berechnen (Bild 4.1c). Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich, wie bereits erwähnt, auf ebene Probleme.

4.2.1 Berechnung der Dehnung ε_x

Zur Ermittlung der Dehnung ε_x (siehe Bild 4.1) betrachtet man zunächst ein (unendlich) kleines Rechteck OABC, dessen Kanten (Kantenlängen Δx und Δy) parallel zu den Koordinatenachsen x und y ausgerichtet sind (Bild 4.5). Bekannt sei der Verformungszustand durch die Verformungsgrößen ε_x , ε_y und γ_{xy} . Hierdurch wird das Rechteck deformiert und geht in die Lage $O^*A^*B^*C^*$ über. Da die Translation mit dem Translationsvektor \vec{v} alle Eckpunkte (O , A , B und C) betrifft, wird dadurch keine Verformung hervorgerufen. Man kann also das Element $O^*A^*B^*C^*$ nach O verschieben (Bild 4.6).

Zur Ermittlung der Dehnung in x' -Richtung betrachtet man das Linienelement OB im unverformten und im verformten Zustand (OB^*). Aus Bild 4.6 leitet man unter Berücksichtigung kleiner Verschiebungen und Winkeländerungen die folgenden Beziehungen ab:

$$\Delta u_1 = \varepsilon_x \cdot \Delta x \quad (4.3)$$

$$\Delta v_1 = \varepsilon_y \cdot \Delta y \quad (4.4)$$

$$\Delta u_2 = \tan \alpha_y \cdot (\Delta y + \Delta v_1)$$

mit $\Delta v_1 \ll \Delta y$ und $\tan \alpha_y \approx \alpha_y$ (kleiner Winkel α_y) folgt für Δu_2 :

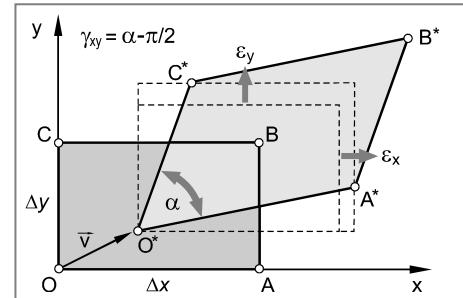


Bild 4.5 Verformung eines rechtwinkligen Elements durch die Verformungsgrößen ε_x , ε_y und γ_{xy}

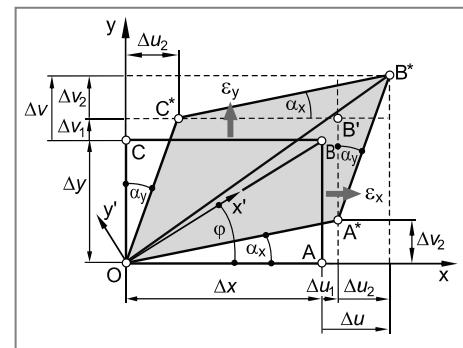


Bild 4.6 Geometrische Beziehungen zur Ermittlung der Dehnung ε_x (Dehnung in x' -Richtung)

$$\Delta u_2 \approx \alpha_y \cdot \Delta y \quad (4.5)$$

Weiterhin gilt:

$$\Delta v_2 = \tan \alpha_x \cdot (\Delta x + \Delta u_1)$$

da $\Delta u_1 \ll \Delta x$ und $\tan \alpha_x \approx \alpha_x$ (kleiner Winkel α_x) folgt für Δv_2 :

$$\Delta v_2 \approx \alpha_x \cdot \Delta x \quad (4.6)$$

Somit ergibt sich für die x- und y-Komponenten der Verschiebung $B \rightarrow B^*$ (Bild 4.7):

$$\Delta u = \Delta u_1 + \Delta u_2 = \varepsilon_x \cdot \Delta x + \alpha_y \cdot \Delta y \quad (4.7)$$

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \varepsilon_y \cdot \Delta y + \alpha_x \cdot \Delta x \quad (4.8)$$

Für die Dehnung in x' -Richtung folgt näherungsweise (Bild 4.7):

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\overline{BB^*}}{\overline{OB}} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (4.9)$$

mit $\Delta l \approx \Delta u \cdot \cos \varphi + \Delta v \cdot \sin \varphi$

und $\Delta u = \varepsilon_x \cdot \Delta x + \alpha_y \cdot \Delta y$ bzw. $\Delta v = \varepsilon_y \cdot \Delta y + \alpha_x \cdot \Delta x$

$$\text{folgt } \varepsilon_{x'} = \left(\varepsilon_x \cdot \frac{\Delta x}{l_0} + \alpha_y \cdot \frac{\Delta y}{l_0} \right) \cdot \cos \varphi + \left(\varepsilon_y \cdot \frac{\Delta y}{l_0} + \alpha_x \cdot \frac{\Delta x}{l_0} \right) \cdot \sin \varphi \quad (4.10)$$

$$\text{Weiterhin gilt: } \frac{\Delta x}{l_0} = \cos \varphi \text{ und } \frac{\Delta y}{l_0} = \sin \varphi$$

Damit folgt aus Gleichung 4.10:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \varepsilon_x \cdot \cos^2 \varphi + \alpha_y \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \varepsilon_y \cdot \sin^2 \varphi + \alpha_x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ &= \varepsilon_x \cdot \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \cdot \sin^2 \varphi + (\alpha_x + \alpha_y) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (4.11)$$

Der ursprünglich rechte Winkel $\angle AOC = \pi/2$ verkleinert sich zum Winkel $\angle A^*OC^*$. Es gilt dabei definitionsgemäß für die Schiebung γ_{xy} (Kapitel 4.1.2):

$$\gamma_{xy} = \angle A^*OC^* - \angle AOC = \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha_x + \alpha_y) \right] - \frac{\pi}{2} = -(\alpha_x + \alpha_y) \quad (4.12)$$

Damit folgt aus Gleichung 4.11:

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cdot \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \cdot \sin^2 \varphi - \gamma_{xy} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad (4.13)$$

Mit den trigonometrischen Beziehungen:

$$\cos^2 \varphi = 0,5 \cdot (1 + \cos 2\varphi)$$

$$\sin^2 \varphi = 0,5 \cdot (1 - \cos 2\varphi)$$

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0,5 \cdot \sin 2\varphi$$

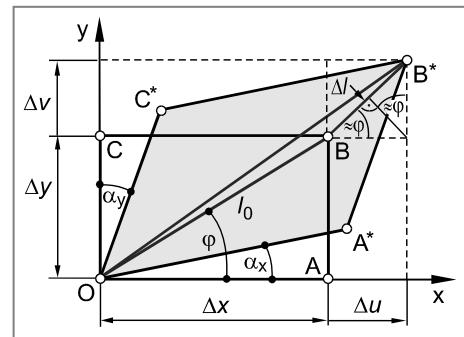


Bild 4.7 Geometrische Beziehungen zur Herleitung der Dehnung ε_x .

folgt schließlich aus Gleichung 4.13:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

Dehnung in x' -Richtung.

Vorzeichen von γ_{xy} entsprechend (4.14)
Bild 4.3

4.2.2 Berechnung der Schiebung $\gamma_{x'y'}$

Zur Ermittlung der Schiebung $\gamma_{x'y'}$ mit der x' -Richtung als Bezug (siehe Bild 4.1) betrachtet man zweckmäßigerweise die Veränderung des ursprünglich rechten Winkels $\angle BOD$ im unverformten Zustand und im verformten Zustand ($\angle B^*OD^*$). Die Winkelveränderung des Winkelementes BOD d. h. die Schiebung $\gamma_{x'y'}$ ergibt sich aus der Differenz der Drehwinkel von $OB \rightarrow OB^*$ (Winkel β_φ) und von $OD \rightarrow OD^*$ (Winkel $\beta_{\varphi+\pi/2}$).

$$\gamma_{x'y'} = \beta_{\varphi+\pi/2} - \beta_\varphi \quad (4.15)$$

Für den Winkel β_φ des Schenkels OB gilt:

$$\tan \beta_\varphi = \frac{\Delta b}{l_0} \quad (4.16)$$

mit $\Delta b = \Delta v \cdot \cos \varphi - \Delta u \cdot \sin \varphi$

und $\tan \beta_\varphi \approx \beta_\varphi$ (da kleiner Winkel φ), folgt aus Gleichung 4.16:

$$\beta_\varphi = \frac{\Delta v \cdot \cos \varphi - \Delta u \cdot \sin \varphi}{l_0} \quad (4.17)$$

Mit Gleichung 4.7 und Gleichung 4.8 folgt weiter:

$$\beta_\varphi = \left(\varepsilon_y \cdot \frac{\Delta y}{l_0} + \alpha_x \cdot \frac{\Delta x}{l_0} \right) \cdot \cos \varphi - \left(\varepsilon_x \cdot \frac{\Delta x}{l_0} + \alpha_y \cdot \frac{\Delta y}{l_0} \right) \cdot \sin \varphi \quad (4.18)$$

Weiterhin gilt (Bild 4.7):

$$\frac{\Delta x}{l_0} = \cos \varphi \quad \text{und} \quad \frac{\Delta y}{l_0} = \sin \varphi$$

Damit ergibt sich aus Gleichung 4.18:

$$\begin{aligned} \beta_\varphi &= \varepsilon_y \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \alpha_x \cdot \cos^2 \varphi - \varepsilon_x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \alpha_y \cdot \sin^2 \varphi \\ &= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \alpha_x \cdot \cos^2 \varphi - \alpha_y \cdot \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (4.19)$$

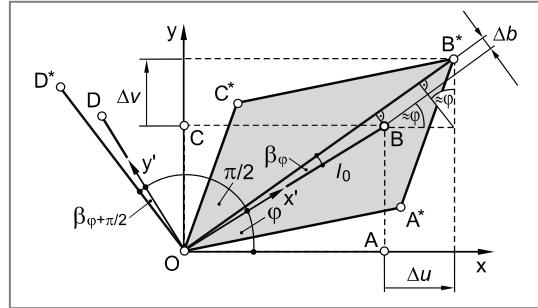


Bild 4.8 Geometrische Beziehungen zur Ermittlung der Schiebung $\gamma_{x'y'}$ mit der x' -Richtung als Bezug

Zur Berechnung des Winkels $\beta_{\varphi+\pi/2}$ in y' -Richtung ersetzt man in Gleichung 4.19 den Winkel φ durch $\varphi + \pi/2$ und erhält:

$$\beta_{\varphi+\pi/2} = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cdot \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \alpha_x \cdot \cos^2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - \alpha_y \cdot \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Mit $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi$ und $\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi$ und folgt:

$$\beta_{\varphi+\pi/2} = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cdot \cos\varphi \cdot (-\sin\varphi) + \alpha_x \cdot \sin^2\varphi - \alpha_y \cdot \cos^2\varphi$$

$$\beta_{\varphi+\pi/2} = (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \alpha_x \cdot \sin^2\varphi - \alpha_y \cdot \cos^2\varphi \quad (4.20)$$

Für die Schiebung $\gamma_{x'y'}$ folgt dann mit Gleichung 4.19 und 4.20 aus Gleichung 4.15:

$$\begin{aligned} \gamma_{x'y'} &= \beta_{\varphi+\pi/2} - \beta_\varphi \\ &= (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \alpha_x \cdot \sin^2\varphi - \alpha_y \cdot \cos^2\varphi \\ &\quad - [(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \alpha_x \cdot \cos^2\varphi - \alpha_y \cdot \sin^2\varphi] \\ &= (\alpha_x + \alpha_y) \cdot \sin^2\varphi - (\alpha_x + \alpha_y) \cdot \cos^2\varphi + 2 \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \end{aligned}$$

Mit $\gamma_{xy} = -(\alpha_x + \alpha_y)$ folgt weiterhin (siehe Gleichung 4.12):

$$\gamma_{x'y'} = -\gamma_{xy} \cdot \sin^2\varphi + \gamma_{xy} \cdot \cos^2\varphi + 2 \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \quad (4.21)$$

Mit den trigonometrischen Beziehungen:

$$\cos^2\varphi = 0,5 \cdot (1 + \cos 2\varphi)$$

$$\sin^2\varphi = 0,5 \cdot (1 - \cos 2\varphi)$$

$$\sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0,5 \cdot \sin 2\varphi$$

folgt aus Gleichung 4.21 schließlich:

$$\begin{aligned} \gamma_{x'y'} &= (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin 2\varphi - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot (1 - \cos 2\varphi) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot (1 + \cos 2\varphi) \\ &= (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin 2\varphi + \gamma_{xy} \cdot \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (4.22)$$

Gleichung 4.22 dividiert man letztlich noch durch 2, um eine mit Gleichung 4.14 vergleichbare Form zu erhalten:

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \cos 2\varphi$$

Schiebung mit der x' -Richtung als Bezug. Vorzeichen von γ_{xy} entsprechend Bild 4.3 (4.23)

4.3 Mohrscher Verformungskreis

Zur Ermittlung der Verformungsgrößen wie zum Beispiel ε_x' oder $\gamma_{x'y'}$ (siehe Bild 4.1) können die Gleichungen 4.14 und 4.23 herangezogen werden. Eine anschaulichere Möglichkeit, derartige Fragestellungen zu beantworten bietet in Analogie zum Mohrschen Spannungskreis (Kapitel 3.3.4), der **Mohrsche Verformungskreis**. Zur Bestimmung von Mittelpunkt und Radius des Mohrschen Verformungskreises eliminiert man aus den Gleichungen 4.14 und 4.23 den Winkel φ und erhält dann die Gleichung eines Kreises in der $\varepsilon - \gamma/2$ -Ebene (Mohrscher Verformungskreis). Um den Winkel φ zu eliminieren, werden die Gleichungen 4.14 und 4.23 quadriert und addiert:

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon_{x'} - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2} \right)^2 &= \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\varphi \right)^2 + \\ &\quad \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \cos 2\varphi \right)^2 \\ \left(\varepsilon_{x'} - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2} \right)^2 &= \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 \cdot (\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi) + \\ &\quad \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 \cdot (\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Gleichung des Mohrschen Verformungskreises lautet dann:

$$\left(\varepsilon_{x'} - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 \quad \text{Gleichung des Mohrschen Verformungskreises in der } \varepsilon - \gamma/2\text{-Ebene} \quad (4.25)$$

Für den Mittelpunkt des Mohrschen Verformungskreises folgt:

$$M = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \mid 0 \right) \quad \text{Mittelpunkt des Mohrschen Verformungskreises} \quad (4.26)$$

Der Radius des Mohrschen Verformungskreises ergibt sich zu:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2} \quad \text{Radius des Mohrschen Verformungskreises} \quad (4.27)$$

Mit Hilfe des Mohrschen Verformungskreises können (in Analogie zum Mohrschen Spannungskreis, Kapitel 3.3.4) die Verformungsgrößen (Dehnungen und Schiebungen) in beliebiger Richtung auf einfache Weise ermittelt werden.

4.3.1 Konstruktion des Mohrschen Verformungskreises

Gegeben sei ein durch die Verformungsgrößen ε_x , ε_y und γ_{xy} gekennzeichneter Verformungszustand (Bild 4.9a). Gesucht sind der Mohrsche Verformungskreis sowie die Dehnungen $\varepsilon_{x'}$ und $\varepsilon_{y'}$ in x' - bzw. y' -Richtung sowie die Schiebungen $\gamma_{x'y'}$ und $\gamma_{y'x'}$ mit der x' - bzw. y' -Richtung als Bezug (Bild 4.9c).

Zur Konstruktion des Mohrschen Verformungskreises geht man wie folgt vor:

1. Zeichnen eines ε - γ / 2-Koordinatensystems.
2. Eintragen des Bildpunktes P_x ($\varepsilon_x \mid 0,5 \cdot \gamma_{xy}$) in das Koordinatensystem. Die Dehnung ε_x und die Schiebung γ_{xy} kennzeichnen die Verformungsgrößen mit der x -Richtung als Bezug. In Analogie zum Mohrschen Spannungskreis (Kapitel 3.3.4.1) wird bei der Konstruktion des Mohrschen Verformungskreises die folgende **Vorzeichenregelung** eingeführt (siehe auch Bild 4.3):

Eine Schiebung ist positiv (negativ) anzusetzen, falls sich der ursprünglich rechte Winkel des betrachteten Winkelementes vergrößert (verkleinert).

Die Schiebung γ_{xy} in Bild 4.9a ist dementsprechend bei der Konstruktion des Mohrschen Verformungskreises negativ anzusetzen, da sich der ursprünglich rechte Winkel verkleinert ($\alpha < \pi/2$).

3. Eintragen des Bildpunktes P_y ($\varepsilon_y \mid 0,5 \cdot \gamma_{yx}$) in das Koordinatensystem. Die Dehnung ε_y und die Schiebung γ_{yx} kennzeichnen die Verformungsgrößen mit der y -Richtung als Bezug. Die Schiebung γ_{yx} ist positiv anzusetzen, da der ursprünglich rechte Winkel vergrößert wird ($\alpha' > \pi/2$).
4. Die x - und y -Richtung stehen senkrecht zueinander (siehe Lageplan). Da die Bildpunkte zweier senkrechter Richtungen auf einem Kreisdurchmesser liegen, schneidet die Strecke $P_x P_y$ die ε -Achse im Kreismittelpunkt M .
5. Kreis um M durch die Bildpunkte P_x oder P_y ist der gesuchte Mohrsche Verformungskreis.

Zur Ermittlung der Verformungsgrößen $\varepsilon_{x'}$ in x' -Richtung und $\gamma_{x'y'}$ mit der x' -Richtung als Bezug, überträgt man, ausgehend von einer bekannten Bezugsrichtung (z. B. x -Richtung), den *doppelten* Richtungswinkel (2φ) in den Mohrschen Verformungskreis (Bild 4.9b). Der Drehssinn muss dabei dem Lageplan entsprechen. Die Koordinaten des Bildpunktes P_x ($\varepsilon_x \mid \gamma_{x'y'}/2$) kennzeichnen die Verformungsgrößen in x' -Richtung (Bild 4.9c). In analoger Weise erhält man die Verformungsgrößen $\varepsilon_{y'}$ in y' -Richtung und $\gamma_{y'x'}$ mit der y' -Richtung als Bezug.

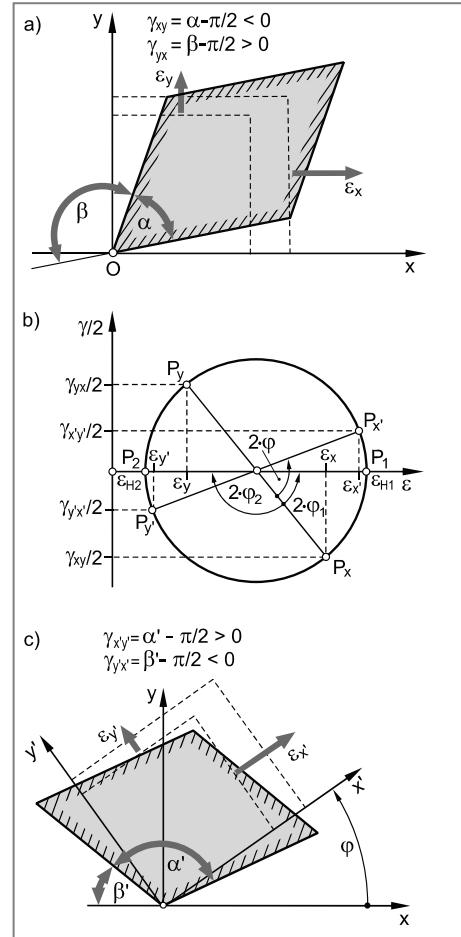


Bild 4.9 Konstruktion und Anwendung des Mohrschen Verformungskreises

4.3.2 Hauptdehnungen und Hauptdehnungsrichtungen

Aus dem Mohrschen Verformungskreis (z. B. Bild 4.9b) ist ersichtlich, dass eine maximale Dehnung ε_{H1} und eine minimale Dehnung ε_{H2} existiert (Bildpunkte P_1 und P_2 in Bild 4.9b). Diese beiden extremalen Dehnungen werden als **Hauptdehnungen** bezeichnet. Die Richtungen zu den Hauptdehnungen (Winkel φ_1 und φ_2) nennt man dementsprechend **Hauptdehnungsrichtungen**. In Richtung der Hauptdehnungen treten keine Schiebungen (Winkelverzerrungen) auf.

Die Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2} ergeben sich rechnerisch zu (vgl. Bild 4.9b):

$$\varepsilon_{H1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (4.28)$$

$$\varepsilon_{H2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (4.29)$$

Die Winkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Hauptdehnungsrichtungen (ε_{H1} und ε_{H2}) lassen sich auch rechnerisch ermitteln. Man erhält die Richtungswinkel φ_1 bzw. φ_2 aus Gleichung 4.23 mit der Bedingung $\gamma_{x'y'} = 0$, da in Richtung der Hauptdehnungen voraussetzungsgemäß keine Schiebungen auftreten:

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right) \quad \begin{array}{l} \text{Richtungswinkel zwischen der x-Achse und} \\ \text{der ersten oder der zweiten Hauptdehnungs-} \\ \text{richtung. Vorzeichen von } \gamma_{xy} \text{ entsprechend} \\ \text{Bild 4.3} \end{array} \quad (4.30)$$

Der mit Hilfe von Gleichung 4.30 errechnete Winkel kann der Richtungswinkel zwischen der x-Achse und der ersten *oder* der zweiten Hauptdehnungsrichtung sein. Eine Entscheidung kann mit Hilfe von Tabelle 4.1 erfolgen.

Aufgrund der π -Periodizität des Tangens ergibt sich der zweite Winkel zu:

$$\varphi_{2;1} = \varphi_{1,2} + \frac{\pi}{2} \quad (4.31)$$

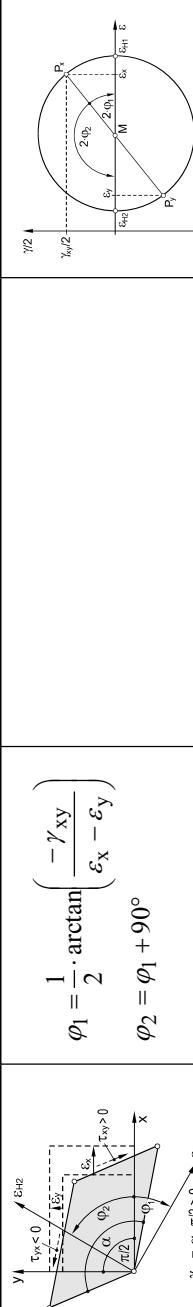
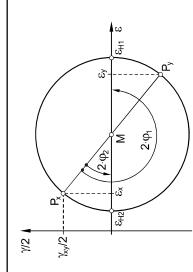
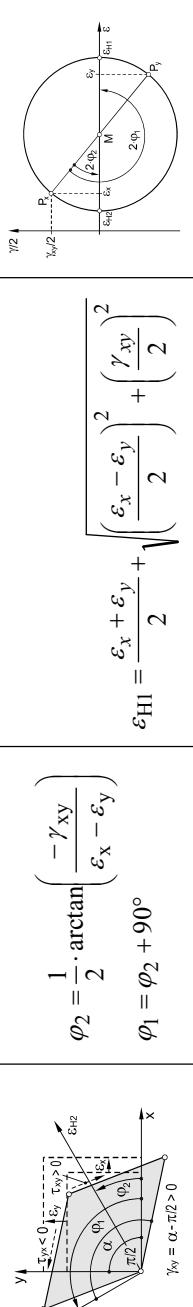
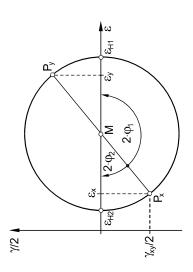
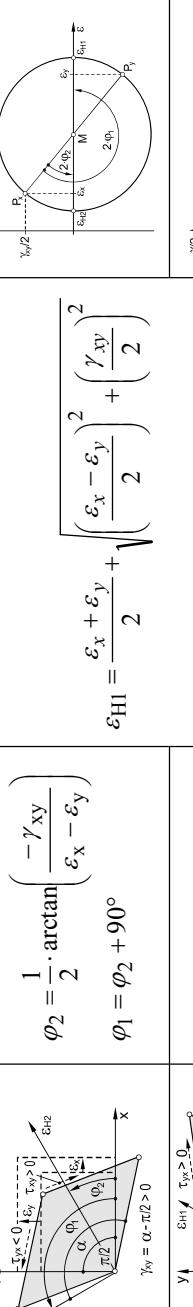
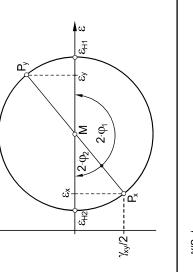
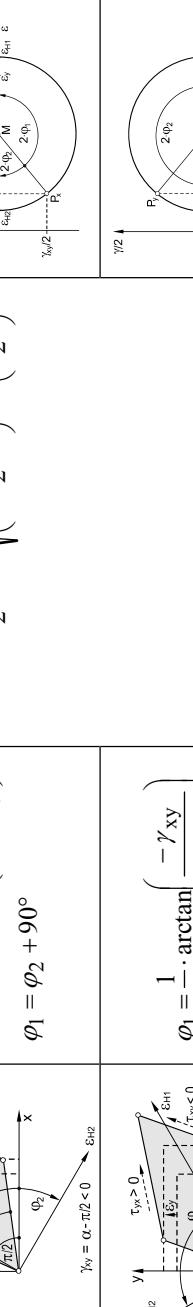
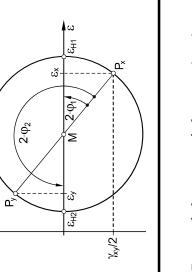
4.3.3 Verformungszustand

Entsprechend der Anzahl der von Null verschiedenen Hauptdehnungen definiert man den Verformungszustand:

- **einachsiger Verformungszustand:** Eine Hauptdehnung ist ungleich Null
- **zweiachsiger Verformungszustand:** Zwei Hauptdehnungen sind ungleich Null
- **dreiachsiger Verformungszustand:** Drei Hauptdehnungen sind ungleich Null

Der zweiachsige Verformungszustand wird bisweilen auch als **ebener Dehnungszustand (EDZ)** bezeichnet. Ein zweiachsiger Verformungszustand tritt an technischen Bauteilen unter anderem in Bereichen einer behinderten Dehnung in Dickenrichtung (**Querdehnungsbehinderung**) auf und begünstigt ein sprödes Werkstoffversagen (z. B. im Bereich von Rissen oder bei dickwandigen Bauteilen).

Tabelle 4.1 Rechnerische Ermittlung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Hauptrichtungen ε_{H1} und ε_{H2}

Fall ¹⁾	Lageplan	Winkel zu den Hauptdehnungsrichtungen ^{1), 2)}	Hauptdehnungen	Mohrscher Verformungskreis ¹⁾
Fall 1: $\varepsilon_x > \varepsilon_y$ $\chi_{xy} > 0$		$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right)$ $\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ$	$\gamma_{xy} = \alpha - \pi/2 > 0$	
Fall 2: $\varepsilon_x < \varepsilon_y$ $\chi_{xy} > 0$		$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right)$ $\varphi_1 = \varphi_2 + 90^\circ$	$\gamma_{xy} = \alpha - \pi/2 > 0$	
Fall 3: $\varepsilon_x < \varepsilon_y$ $\chi_{xy} < 0$		$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right)$ $\varphi_1 = \varphi_2 + 90^\circ$	$\gamma_{xy} = \alpha - \pi/2 > 0$	
Fall 4: $\varepsilon_x > \varepsilon_y$ $\chi_{xy} < 0$		$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right)$ $\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ$	$\gamma_{xy} = \alpha - \pi/2 < 0$	

¹⁾ Vorzeichenregelung für Schiebungen entsprechend Kapitel 4.1.3²⁾ φ_1 : Winkel zwischen der x-Richtung und der ersten Hauptrichtung (ε_{H1}) , φ_2 : Winkel zwischen der x-Richtung und der zweiten Hauptrichtung (ε_{H2}) .

4.4 Praktische Anwendung des Mohrschen Verformungskreises

Für Festigkeitsnachweise ist die Kenntnis des Spannungszustandes an den höchst beanspruchten Stellen eines Bauteils von Interesse. Aufgrund einer komplizierten Bauteilgeometrie sowie einer mitunter komplexen Beanspruchung durch äußere Kräfte oder Momente, können die Lastspannungen und damit der Spannungszustand häufig nur mit einem sehr hohen Berechnungsaufwand ermittelt werden. Zur Lösung des Problems werden im Rahmen einer **experimentellen Spannungsanalyse** an der höchst beanspruchten Stelle der Bauteilloberfläche Dehnungsmessstreifen (DMS) appliziert, um den Verformungszustand zu ermitteln. Bei bekanntem Verformungszustand kann dann der Spannungszustand ermittelt und ein Festigkeitsnachweis geführt werden (Bild 4.10).

Entsprechend den Ausführungen in Kapitel 3 ist der Verformungszustand an einer bestimmten Stelle der Werkstückoberfläche eindeutig gekennzeichnet, falls die Verformungsgrößen (ε_x und γ_{xy} sowie ε_y und γ_{yx}) in zwei zueinander senkrechten Bezugsrichtungen bekannt sind (Kapitel 4.3.1). Da Dehnungsmessstreifen allerdings nur Längenänderungen (Dehnungen) nicht jedoch Winkeländerungen (Schiebungen) erfassen können, können die Verformungsgrößen γ_{xy} bzw. γ_{yx} experimentell nicht ermittelt werden. Die Bestimmung des Verformungszustandes ist dennoch möglich, falls die Dehnungen sowie die zugehörigen Richtungswinkel in *drei* unterschiedlichen Messrichtungen bekannt sind.

Die Vorgehensweise zur graphischen und rechnerischen Ermittlung des Mohrschen Verformungskreises soll, ausgehend von drei experimentell ermittelten Dehnungen, nachfolgend erläutert werden. Zweckmäßigerweise wird dabei unterschieden, ob die Dehnungsmessstreifen einen Winkel von jeweils 45° (**$0^\circ-45^\circ-90^\circ$ DMS-Rosette**) oder aber beliebige Winkel zueinander einschließen (allgemeiner Fall).

4.4.1 Auswertung dreier beliebig orientierter Dehnungsmessstreifen

An der Oberfläche eines Bauteils seien die Dehnungen in drei unterschiedliche Richtungen (ε_A , ε_B und ε_C) gegeben. Die Messrichtungen schließen zur x-Richtung die Winkel α , β und γ ein (Bild 4.11a). Die Auswertung soll graphisch und rechnerisch erfolgen.

Graphisches Auswerteverfahren

Zur graphischen Bestimmung der Lage des Mohrschen Verformungskreises aus den drei bekannten Dehnungen sowie der relativen Lage der Messrichtungen zueinander, zeichnet man zunächst die zueinander und zur γ /2-Achse parallelen Geraden (g_A , g_B und g_C) im Abstand ε_A , ε_B und ε_C von der Ordinate (Bild 4.11b).

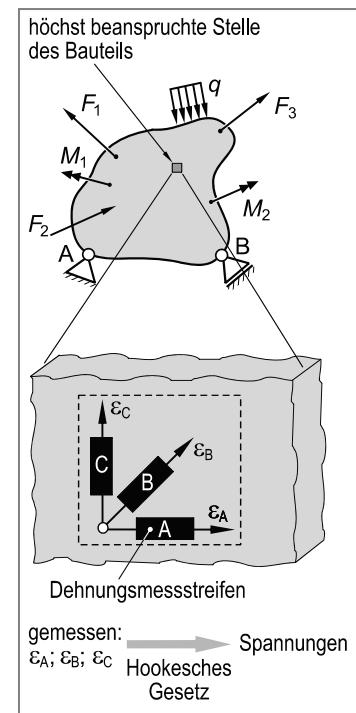


Bild 4.10 Prinzip der experimentellen Spannungsanalyse mit Hilfe von Dehnungsmessstreifen (schematisch)

Auf einer der drei Geraden (z. B. g_B) markiert man an einer beliebigen Stelle einen Bezugspunkt P . Ausgehend vom Bezugspunkt P trägt man in der dargestellten Weise die Richtungswinkel (hier: ψ_A und ψ_C) zu den beiden übrigen Messrichtungen (hier: A- und C-Richtung) ab. Der Drehsinn muss dabei dem Lageplan entsprechen. Die Drehwinkel dürfen außerdem *nicht* verdoppelt werden.

Die Richtungsgeraden r_A und r_C schneiden die Geraden g_A und g_C in den Punkten P_A und P_C . Die Punkte P_A und P_C repräsentieren bereits die Verformungsgrößen in A- und C-Richtung. Da die Punkte P , P_A und P_C auf dem Mohrschen Verformungskreis liegen, erhält man dessen Mittelpunkt M als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Die Lage der ε -Achse ergibt sich als Senkrechte zur $\gamma / 2$ -Achse durch M und der Mohrsche Verformungskreis als Kreis um M durch die Punkte P_A , P_C oder P . Die Verformungsgrößen in B-Richtung werden durch den Bildpunkt P_B repräsentiert. Man erhält ihn als zweiten Schnittpunkt der Geraden g_B mit dem Verformungskreis.

Die Verformungsgrößen mit beliebiger Richtung x' als Bezug, erhält man, indem man den doppelten Richtungswinkel φ , ausgehend von einer bekannten Messrichtung (hier: A), mit im Vergleich zum Lageplan gleichem Drehsinn abträgt (Bild 4.11a und Bild 4.12). Die Koordinaten $\varepsilon_{x'}$ und $\gamma_{x'y}/2$ des Punktes P_φ kennzeichnen dann die Verformungsgrößen in φ -Richtung (Bild 4.12).

Zur Prüfung der Richtigkeit des Mohrschen Verformungskreises müssen Betrag und Richtungssinn der Winkel zwischen den Messrichtungen im Lageplan und der (verdoppelten) Winkellage im Verformungskreis übereinstimmen.

Rechnerisches Auswerteverfahren

Ist der Verformungszustand (ε_x , ε_y und γ_{xy}) in einem Punkt eines Bauteils bekannt, dann kann mit Hilfe von Gleichung 4.14 die Dehnung in beliebige Bauteilrichtungen φ ermittelt werden. Sind umgekehrt die Richtungswinkel (α , β , γ) und die zugehörigen Dehnungen (ε_A , ε_B , ε_C) bekannt, dann erhält man durch Anwendung von Gleichung 4.32 ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen für die drei unbekannten Größen (ε_x , ε_y und γ_{xy}), Bild 4-13:

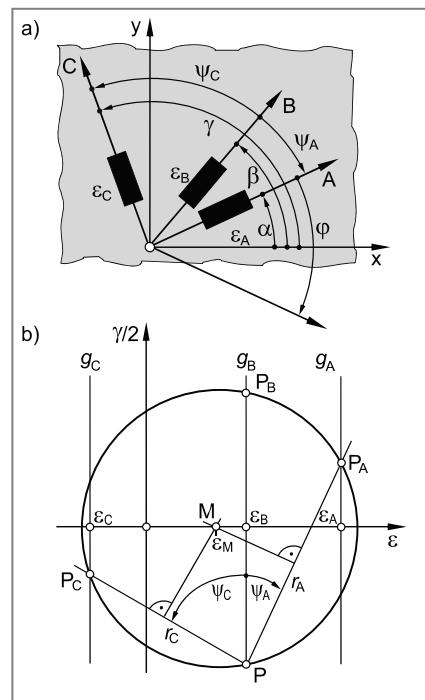


Bild 4.11 Konstruktion des Mohrschen Verformungskreises aus drei beliebig orientierten Dehnungsmessstreifen

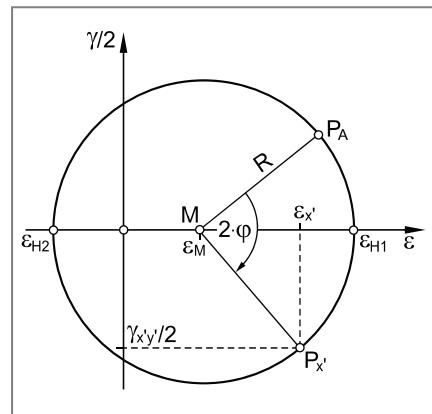


Bild 4.12 Ermittlung der Verformungsgrößen für eine beliebige Richtung x'

$$\begin{aligned}\varepsilon_A &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\alpha \\ \varepsilon_B &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\beta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\beta \\ \varepsilon_C &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\gamma - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\gamma\end{aligned}\quad (4.32)$$

Lösen des Gleichungssystems liefert die gesuchten Verformungsgrößen (ε_x , ε_y und γ_{xy}) und damit den Mohrschen Verformungskreis. Eine allgemeine Lösung soll hier nicht angegeben, sondern stattdessen auf die Aufgaben 4.3 und 4.4 verwiesen werden.

4.4.2 Auswertung einer 0° - 45° - 90° DMS-Rosette

In der Praxis werden im Rahmen experimenteller Spannungsanalysen häufig handelsübliche 0° - 45° - 90° DMS-Rosetten verwendet. Für diese besonderen Winkel zwischen den Messrichtungen kann der Mohrsche Verformungskreis auf sehr einfache Weise ermittelt werden. Wie Bild 4.14 zeigt, nutzt man die Tatsache, dass die grau markierten Dreiecke kongruent und rechtwinkelig sind. Damit erhält man für die Lage ε_M des Mittelpunktes M (Bezeichnungen siehe Bild 4.14):

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} \quad (4.33)$$

und für den Radius R durch Anwendung des Satzes von Pythagoras:

$$R = \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_M)^2 + (\varepsilon_M - \varepsilon_B)^2} \quad (4.34)$$

Bei der Konstruktion des Mohrschen Verformungskreises ist auch hier zu beachten, dass Betrag und Richtungssinn der Winkel zwischen den Messrichtungen im Lageplan und der (verdoppelten) Winkellage im Verformungskreis übereinstimmen müssen.

Aufgabe 4.2 gibt ein Beispiel für die Anwendung des genannten Verfahrens.

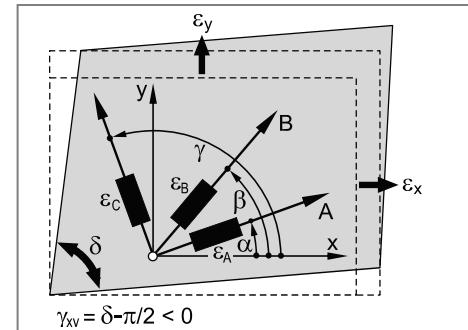


Bild 4.13 Rechnerische Auswertung dreier beliebig orientierter Dehnungsmessstreifen

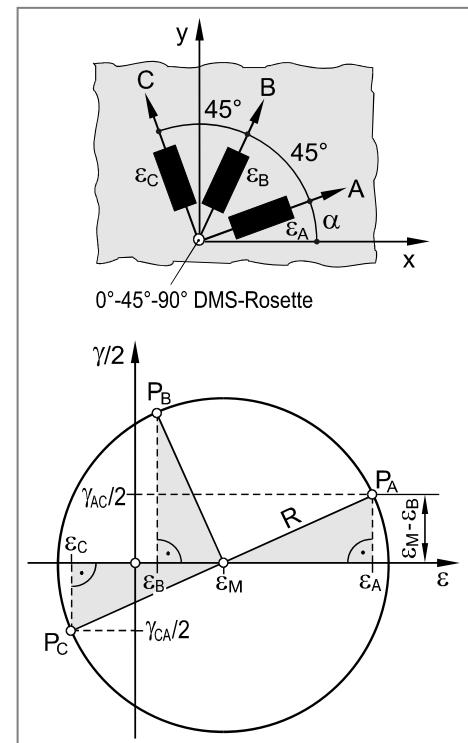


Bild 4.14 Anwendung des Mohrschen Verformungskreises für eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette

4.5 Grundlagen der Dehnungsmesstechnik

Technische Bauteile unterliegen häufig komplexen und zum Teil unbekannten Beanspruchungen. Sie sind dementsprechend schwierig zu berechnen. Es ist daher zweckmäßig, den Verformungszustand experimentell zu ermitteln und mit Hilfe der gemessenen Verformungsgrößen sowie der elastischen Kennwerte auf den Spannungszustand und damit auf die äußereren Beanspruchungen zu schließen (siehe auch Übungsaufgaben). Zur Ermittlung der Verformungsgrößen (wie z. B. die Dehnung ε) stehen unterschiedliche Messverfahren zur Verfügung. Weit verbreitet und in der Anwendung vergleichsweise einfach sind technische **Dehnungsmessstreifen** (kurz DMS).

Eine weite Verbreitung finden **Folien-Dehnungsmessstreifen**. Sie bestehen aus einem dünnen Draht, der in der Regel in eine Trägerfolie aus Kunststoff eingebettet ist. Um bei kleiner Baugröße eine ausreichende Empfindlichkeit zu erreichen, ist der Messdraht mäanderförmig angeordnet und erreicht dadurch eine große Leiterlänge (Bild 4.15). Als Leiterwerkstoff dient meist Konstantan (60% Cu, 40% Ni) oder eine Cr-Ni-Legierung mit 80% Cr, 20% Ni. Am Ende der Messdrähte befinden sich elektrische Kontakte zum Anschluss eines Messgerätes.

Der Dehnungsmessstreifen wird auf die vorbereitete Bauteiloberfläche aufgeklebt (Folien-Dehnungsmessstreifen), bei höheren Betriebstemperaturen auch aufgeschweißt. Die Längsrichtung des Messgitters entspricht dabei der Messrichtung. Hinsichtlich der unterschiedlichen Messaufgaben (Zug-, Druck-, Biege-, Torsions- oder Schubbeanspruchung) unterscheidet man verschiedene DMS-Formen.

Erfährt die Bauteiloberfläche unter dem Dehnungsmessstreifen eine Längenänderung ($0,1 \mu\text{m} \dots 1 \mu\text{m}$), dann ändert sich auch die Länge des Messdrahtes und damit wegen

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \quad (4.35)$$

auch sein elektrischer Widerstand R (ρ = spezifischer elektrischer Widerstand, l = Drahlänge, A = Querschnittsfläche des Drahtes).

Die Zuordnung der Widerstandsänderung ΔR zur Dehnung ε erfolgt durch den ***k*-Faktor** (Herstellerangabe). Es gilt:

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon \quad (4.36)$$

Der *k*-Faktor eines Dehnungsmessstreifens, seine Empfindlichkeit also, beträgt in der Regel um 2,0.

Die Messung der Widerstandsänderung ΔR erfolgt mit Hilfe einer **Wheatstoneschen Brückenschaltung** (Bild 4.16). Aus der Elektrotechnik ist bekannt, dass die Brücke abgeglichen d. h. die Ausgangsspannung Null ist, falls gilt:

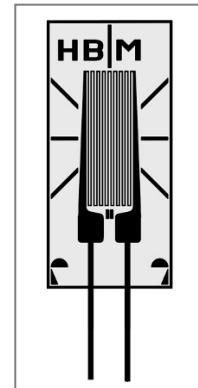


Bild 4.15
Folien-DMS
Foto: Fa. HBM,
Darmstadt

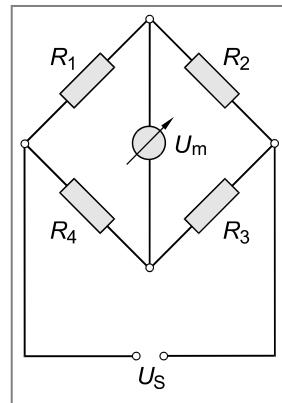


Bild 4.16
Wheatstonesche Brückenschaltung
 U_m = Messspannung
 U_S = Speisespannung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} \quad (4.37)$$

Ändern sich die Widerstände der Brücke, dann gilt für kleine $\Delta R/R$ für die Messspannung U_m (Brückenverstimmung):

$$U_m = \frac{U_S}{4} \cdot \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (4.38)$$

Zwischen Messspannung U_m , Speisespannung U_S und den Dehnungen ε_1 bis ε_4 an den jeweiligen Messstellen ergibt sich dann für kleine $\Delta R/R$ der folgende Zusammenhang (baugleiche Dehnungsmessstreifen vorausgesetzt):

$$\frac{U_m}{U_S} = \frac{k}{4} \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \quad \text{Zusammenhang zwischen Mess- und Speisespannung sowie den Dehnungen bei einer Vollbrückenschaltung} \quad (4.39)$$

Für eine Viertelbrücke folgt insbesondere wegen $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$.

$$\frac{U_m}{U_S} = \frac{k}{4} \cdot \varepsilon_1 \quad \text{Zusammenhang zwischen Mess- und Speisespannung sowie der Dehnung bei einer Viertelbrückenschaltung} \quad (4.40)$$

In Abhängigkeit der Anzahl eingesetzter Dehnungsmessstreifen sind die in Tabelle 4.2 zusammengestellten Bezeichnungen für die Brückenschaltungen gebräuchlich. Die Vollbrücke sollte dabei bevorzugt angestrebt werden.

Dehnungen eines Bauteils können nicht nur durch mechanische Spannungen sondern auch durch Temperaturänderungen hervorgerufen werden. Ändert sich die Temperatur während der Messung, dann ist eine eindeutige Zuordnung des Messsignals zur mechanischen Beanspruchung nicht möglich. Dieser Effekt ist beispielsweise bei Langzeitmessungen, oder falls Temperaturänderungen während der Messung auftreten, unerwünscht. Um den Temperatureinfluss zu kompensieren, wird ein **passiver Dehnungsmessstreifen** auf einem unbelasteten Vergleichsstück aus einem dem Bauteil entsprechenden Werkstoff appliziert und entsprechend Bild 4.17 in die Messbrücke geschaltet.

Tabelle 4.2 Bezeichnung von Brückenschaltungen

Anzahl aktiver DMS	Anzahl Ergänzungswiderstände	Bezeichnung der Brückenschaltung
1	3	Viertelbrücke
2	2	Halbbrücke
4	0	Vollbrücke

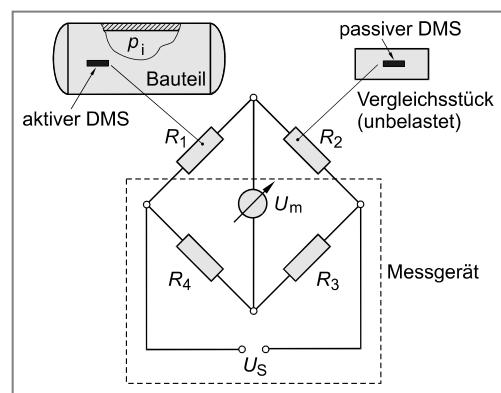


Bild 4.17 Versuchsanordnung zur Kompensation von Temperaturänderungen

Aus Gleichung 4.39 folgt mit $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ für die Messspannung U_m :

$$\frac{U_m}{U_S} = \frac{k}{4} \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (4.41)$$

Für die Dehnung ε_1 (aktiver DMS am Bauteil) und ε_2 (passiver DMS) und gilt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{\text{Temp}} + \varepsilon_{\text{Last}} \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{\text{Temp}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Eingesetzt in Gleichung 4.42 folgt:

$$\frac{U_m}{U_S} = \frac{k}{4} \cdot (\varepsilon_{\text{Temp}} + \varepsilon_{\text{Last}} - \varepsilon_{\text{Temp}}) = \frac{k}{4} \cdot \varepsilon_{\text{Last}} \quad (4.43)$$

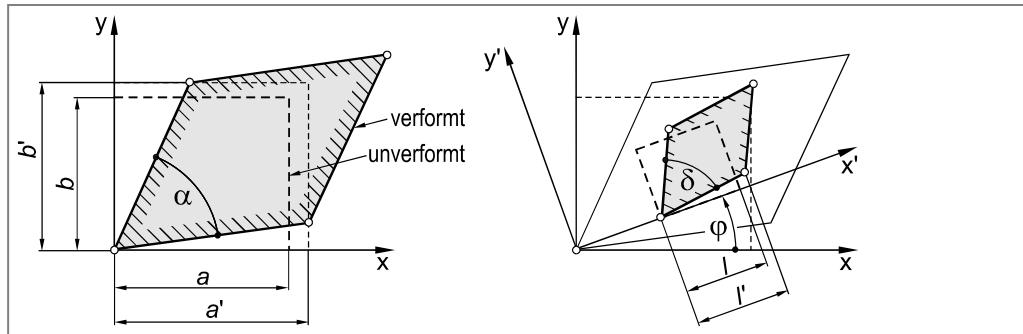
Gleichung 4.43 zeigt also, dass die Messspannung U_m bei Verwendung eines passiven Dehnungsmessstreifens und einer Verschaltung entsprechend Bild 4.17 von der Temperatur bzw. von Temperaturänderungen unabhängig ist.

4.6 Aufgaben

Aufgabe 4.1



Eine Rechteckscheibe ($a = 10 \text{ mm}$; $b = 8 \text{ mm}$) aus dem Vergütungsstahl 42CrMo4 wird in der dargestellten Weise elastisch verformt ($a' = 10,02 \text{ mm}$; $b' = 8,01 \text{ mm}$; $\alpha = 89,75^\circ$).



- Berechnen Sie die Dehnungen ε_x und ε_y in x- und y-Richtung sowie die Schiebung γ_{xy} .
- Ermitteln Sie die Dehnungen $\varepsilon_{x'}$ und $\varepsilon_{y'}$ sowie die Schiebungen $\gamma_{x'y'}$ und $\gamma_{y'x'}$ für ein um den Winkel $\varphi = 30^\circ$ gedrehtes Flächenelement
 - rechnerisch,
 - graphisch.
- Berechnen Sie die Länge l' sowie den Winkel δ des elastisch verformten, ursprünglich rechteckigen Flächenelementes mit der Seitenlänge $l = 5 \text{ mm}$.

Aufgabe 4.2

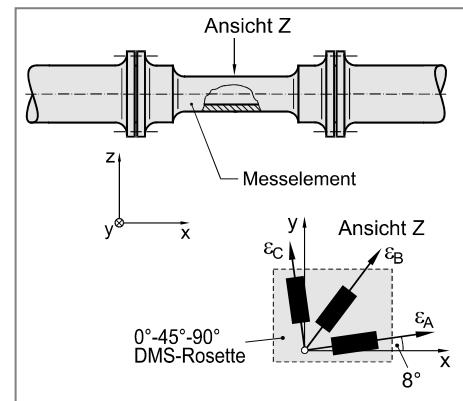


Zur experimentellen Spannungsanalyse an Gas hochdruckleitungen sollen die in der Abbildung dargestellten Messelemente eingesetzt werden.

Am Messelement wurde eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette appliziert. Infolge einer Fertigungsunge nauigkeit bei der Applikation schließt die A-Richtung der DMS-Rosette mit der Rohrachse (x-Richtung) einen Winkel von 8° ein.

Nach Aufbringung des Innendrucks werden die folgenden Dehnungen gemessen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_A &= 0,862 \%\ \\ \varepsilon_B &= 0,224 \%\ \\ \varepsilon_C &= 0,472 \%\end{aligned}$$



- Skizzieren Sie den Mohrschen Verformungskreis und ermitteln Sie die Dehnungen in x- und y-Richtung (ε_x und ε_y) sowie die Schiebung γ_{xy} mit der x-Richtung als Bezug.
- Ermitteln Sie die Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2} in der x-y-Ebene sowie die Winkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Hauptdehnungsrichtungen.

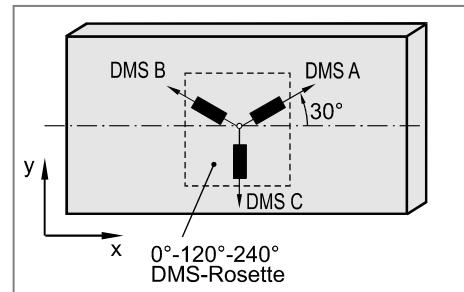
Aufgabe 4.3

Im Rahmen einer experimentellen Spannungsanalyse wird an einer Stahlplatte eine 0° - 120° - 240° DMS-Rosette in der dargestellten Weise (siehe Abbildung) appliziert. Unter Betriebsbeanspruchung werden die folgenden Dehnungen gemessen:

$$\varepsilon_A = 0,0146 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_B = 1,6230 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_C = 0,2619 \text{ \%}$$



- Zeichnen Sie maßstäblich den Mohrschen Verformungskreis und ermitteln Sie *graphisch* die Dehnungen in x - und y -Richtung (ε_x und ε_y) sowie die Schiebung γ_{xy} .
- Bestimmen Sie *graphisch* die Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2} in der x - y -Ebene. Unter welchen Winkeln φ_1 und φ_2 zur x -Richtung wirken sie?
- Ermitteln Sie *rechnerisch*:
 - die Dehnungen ε_x und ε_y in x - und y -Richtung sowie die Schiebung γ_{xy} .
 - die Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2} in der x - y -Ebene sowie die Winkel φ_1 und φ_2 zwischen der x -Richtung und den Hauptdehnungsrichtungen.

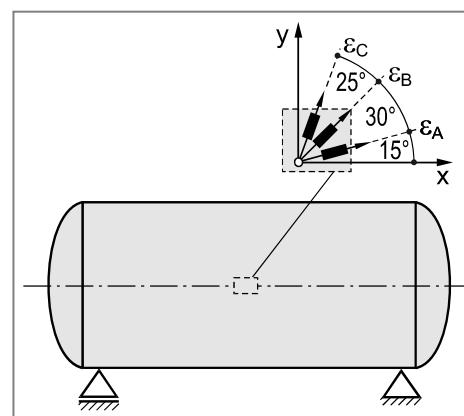
Aufgabe 4.4

Zur Ermittlung des Verformungszustandes (ε_x , ε_y und γ_{xy}) eines durch Innendruck beanspruchten Behälters, werden an dessen Außenoberfläche drei Dehnungsmessstreifen in der dargestellten Weise appliziert. Unter Belastung werden die folgenden Dehnungen gemessen:

$$\varepsilon_A = 3,665 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_B = 1,500 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_C = -0,415 \text{ \%}$$



- Zeichnen Sie maßstäblich den Mohrschen Verformungskreis und ermitteln Sie *graphisch* die Dehnungen in x - und y -Richtung (ε_x und ε_y) sowie die Schiebung γ_{xy} .
- Bestimmen Sie *graphisch* die Hauptdehnungen in der x - y -Ebene. Unter welchen Winkeln φ_1 und φ_2 zur x -Richtung wirken die Hauptdehnungen?
- Ermitteln Sie *rechnerisch*:
 - die Dehnungen ε_x und ε_y in x - und y -Richtung sowie die Schiebung γ_{xy} .
 - die Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2} in der x - y -Ebene sowie die Winkel φ_1 und φ_2 zwischen der x -Richtung und den Hauptdehnungsrichtungen.

5 Elastizitätsgesetze

Mechanische Spannungen bewirken in einem deformierbaren Festkörper Formänderungen, die sich durch Längen- und/oder Winkeländerungen äußern können. Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Formänderungen wird durch **Stoffgesetze** beschrieben.

Die bereits in Kapitel 2.1.2 besprochenen Spannungs-Dehnungs-Diagramme charakterisieren das Werkstoffverhalten unter (einachsiger) Zugbeanspruchung. Prinzipiell unterscheidet man:

- linear-elastisches Werkstoffverhalten wie z. B. keramische Werkstoffe (Kurve 1 in Bild 5.1)
- nicht linear-elastisches Werkstoffverhalten wie z. B. Gusseisen mit Lamellengraphit (Kurve 2 in Bild 5.1)
- linear-elastisch plastisches Werkstoffverhalten wie z. B. viele Stähle (Kurve 3 in Bild 5.1)
- nicht linear-elastisch plastisches Werkstoffverhalten wie z. B. Reinaluminium (Kurve 4 in Bild 5.1)

Für einen Festigkeitsnachweis an Bauteilen aus (duktilen) metallischen Werkstoffen ist als Grenzwert für die Beanspruchbarkeit in der Regel die Streck- bzw. Dehngrenze maßgebend. Werden Bauteile über diese Grenze hinaus beansprucht, dann treten plastische Verformungen auf, die in der Regel die Funktionsfähigkeit der Bauteile beeinträchtigen. Für die nachfolgenden Ausführungen soll ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt werden.

Das linear-elastische Werkstoffverhalten ist durch eine Proportionalität zwischen Spannungen σ bzw. τ und Verformungen ε bzw. γ gekennzeichnet ($\sigma \sim \varepsilon$ bzw. $\tau \sim \gamma$).

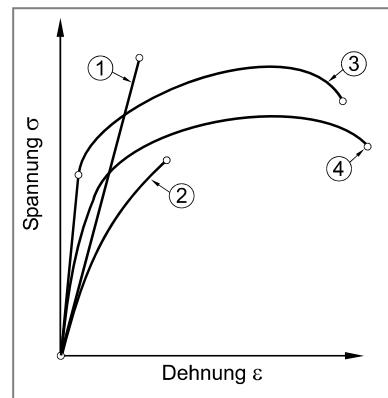


Bild 5.1 Spannungs-Dehnungs-Diagramme verschiedener Werkstoffgruppen

5.1 Formänderungen durch einachsige Normalspannung

Unter einachsiger Beanspruchung durch eine Normalspannung (z. B. $\sigma_{H1} \neq 0$ und $\sigma_{H2} = \sigma_{H3} = 0$) erfährt ein elastisch beanspruchter Festkörper eine Längs- und eine Querverformung (Bild 5.2). Der Zusammenhang zwischen Normalspannung σ und Dehnung ε wird durch das **Hooke'sche Gesetz** beschrieben (Kapitel 2.1.4.1).

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{l_1 - l_0}{l_0} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad (5.1)$$

**Hooke'sches Gesetz für Normalspannungen
(einachsiger Spannungszustand)**

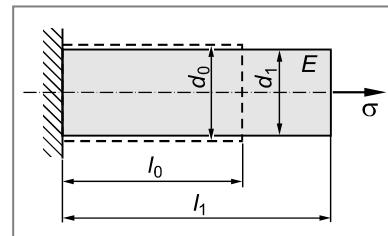


Bild 5.2 Formänderung durch einachsige Normalspannung

Der Proportionalitätsfaktor E heißt **Elastizitätsmodul** oder kurz **E-Modul** (Kapitel 2.1.4.1).

Zwischen Längsdehnung ($\varepsilon_l \equiv \varepsilon$) und Querdehnung (ε_q) gilt das Poissonsche Gesetz (Kapitel 2.1.4.3):

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon_l \quad \text{und} \quad \varepsilon_q = \frac{d_1 - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0} \quad \text{Poissonsches Gesetz} \quad (5.2)$$

Der Proportionalitätsfaktor μ wird als **Querkontraktionszahl** bezeichnet.

5.2 Formänderung durch Schubspannungen

Unter einer Schubbeanspruchung erfährt ein elastisch beanspruchter Festkörper eine Winkelveränderung (Bild 5.3). Zwischen Schubspannung τ und Schiebung (Winkelverzerrung) γ gilt bei elastischer Beanspruchung eines Festkörpers das Hookesche Gesetz für Schubbeanspruchung (Kapitel 2.4.3):

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \text{Hooke'sches Gesetz für Schubbeanspruchung} \quad (5.3)$$

Der Proportionalitätsfaktor G heißt **Schubmodul**.

Zwischen den drei elastischen Größen E , G und μ gilt für elastisch beanspruchte, isotrope Werkstoffe der Zusammenhang (siehe auch Gleichung 2.45):

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad \text{Zusammenhang zwischen den elastischen Werkstoffkonstanten } E, G \text{ und } \mu \quad (5.4)$$

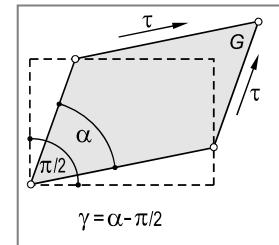


Bild 5.3 Formänderung durch Schubspannungen

5.3 Formänderungen beim allgemeinen (dreiachsigem) Spannungszustand

Das Hookesche Gesetz entsprechend Gleichung 5.1 gilt nur bei einachsiger Beanspruchung durch Normalspannungen. Betrachtet man einen allgemeinen (dreiachsigem) Spannungszustand, so lassen sich unter der Voraussetzung eines linear-elastischen Werkstoffverhaltens Beziehungen zwischen den Spannungen und Dehnungen herleiten (**verallgemeinertes Hookesches Gesetz**).

Zur Ermittlung der entsprechenden Beziehungen zwischen den Normalspannungen und den Dehnungen betrachtet man das Verformungsverhalten eines elastisch beanspruchten würffelförmigen Volumenelementes, welches nacheinander durch die Normalspannungen σ_x , σ_y und σ_z beansprucht wird (Bild 5.4). Es wird ein isotroper Werkstoff vorausgesetzt, d. h. die Beiträge der elastischen Konstanten E , G und μ sind richtungsunabhängig.

Verformungen infolge Beanspruchung durch σ_x (Bild 5.4a):

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\sigma_x}{E} \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_{y1} = -\mu \cdot \varepsilon_{x1} = -\mu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_{z1} = -\mu \cdot \varepsilon_{x1} = -\mu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \quad (5.7)$$

Verformungen infolge Beanspruchung durch σ_y (Bild 5.4b):

$$\varepsilon_{y2} = \frac{\sigma_y}{E} \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_{x2} = -\mu \cdot \varepsilon_{y2} = -\mu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_{z2} = -\mu \cdot \varepsilon_{y2} = -\mu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \quad (5.10)$$

Verformungen infolge Beanspruchung durch σ_z (Bild 5.4c):

$$\varepsilon_{z3} = \frac{\sigma_z}{E} \quad (5.11)$$

$$\varepsilon_{x3} = -\mu \cdot \varepsilon_{z3} = -\mu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \quad (5.12)$$

$$\varepsilon_{y3} = -\mu \cdot \varepsilon_{z3} = -\mu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \quad (5.13)$$

Wird das Volumenelement durch alle drei Normalspannungen gleichzeitig beansprucht (Bild 5.5), dann erhält man die Gesamtdehnung durch lineare Superposition. Für die Gesamtdehnung in x-Richtung folgt beispielsweise:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2} + \varepsilon_{x3} \\ &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \end{aligned}$$

Auf analoge Weise erhält man auch die Gesamtdehnungen in y- und z-Richtung.

Insgesamt lautet also das Hookesche Gesetz für den allgemeinen (dreiachsigem) Spannungszustand in Dehnungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Hookesches Gesetz für Normalspannungen (nach den Dehnungen aufgelöst) für den allgemeinen (dreiachsigem) Spannungszustand

Bild 5.5 veranschaulicht die Formänderung eines elastisch beanspruchten Festkörpers unter der Wirkung eines allgemeinen (dreiachsigem) Spannungszustandes.

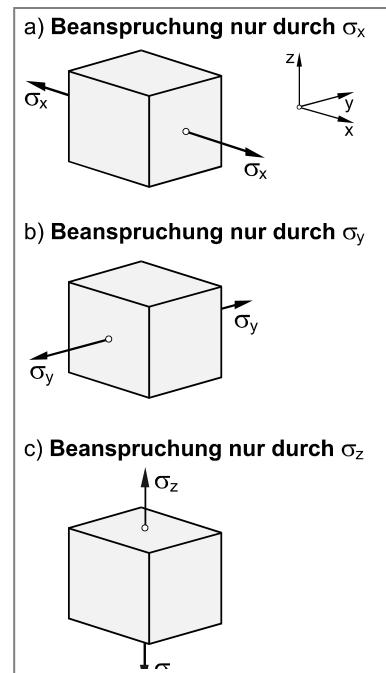


Bild 5.4 Elastisch beanspruchtes Volumenelement

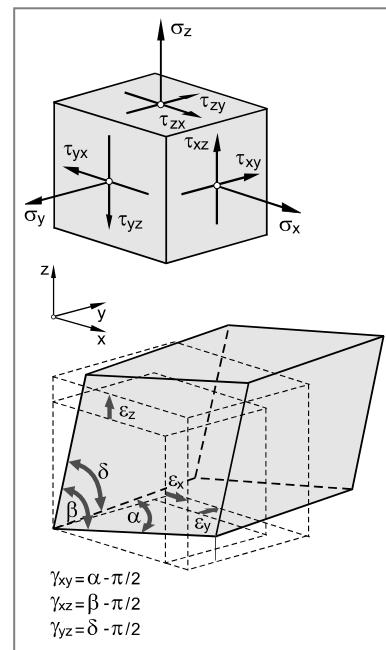


Bild 5.5 Formänderung beim allgemeinen (dreiachsigem) Spannungszustand

Löst man die Gleichungen 5.14 nach den Spannungen auf, dann erhält man das verallgemeinerte Hookesche Gesetz in Spannungen ausgedrückt:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

Hookesches Gesetz für Normalspannungen (nach den Spannungen aufgelöst) für den allgemeinen (dreiachsisigen) Spannungszustand (5.15)

Bei linear-elastischem Werkstoffverhalten und unter der Voraussetzung eines isotropen Werkstoffs haben die Normalspannungen (σ_x , σ_y und σ_z) keinen Einfluss auf die Schiebungen (γ_{xy} , γ_{xz} und γ_{yz}). Umgekehrt können Schubspannungen (τ_{xy} , τ_{xz} und τ_{yz}) keine Dehnungen (ε_x , ε_y und ε_z) hervorrufen. Das Hookesche Gesetz für Schubbeanspruchung kann also unabhängig vom Hookeschen Gesetz für Normalspannungen (Gleichung 5.14 bzw. 5.15) angewandt werden. Man erhält dementsprechend:

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \text{ bzw. } \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \text{ bzw. } \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \text{ bzw. } \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Hookesches Gesetz für Schubbeanspruchung für den allgemeinen (dreiachsisigen) Spannungszustand (5.16)

5.4 Formänderungen beim ebenen (zweiachsigen) Spannungszustand

Aus dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz für den dreiachsisigen Spannungszustand (Gleichungen 5.14 bis 5.16) lassen sich die entsprechenden Beziehungen für den ebenen Spannungszustand (Bild 5.6) unter Berücksichtigung von $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ableiten:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

Hookesches Gesetz für Normalspannungen (nach den Dehnungen aufgelöst) für den ebenen (zweiachsigen) Spannungszustand

(5.17)

bzw. nach den Spannungen aufgelöst:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x)$$

$$\sigma_z = 0$$

Hookesches Gesetz für Normalspannungen (nach den Spannungen aufgelöst) für den ebenen (zweiachsigen) Spannungszustand

(5.18)

Bild 5.6 veranschaulicht die Formänderung eines elastisch beanspruchten Festkörpers unter der Wirkung eines ebenen (zweiachsigen) Spannungszustandes.

Das Hookesche Gesetz für Schubbeanspruchung ergibt sich für den zweiachsigen Spannungszustand aus Gleichung 5.16:

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad \text{bzw. } \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (5.19)$$

Hookesches Gesetz für Schubspannungen für den ebenen (zweiachsigen) Spannungszustand

Die Gleichungen 5.17 bis 5.19 haben für praktische Anwendungen eine besonders große Bedeutung, da ein zweiachsiger Spannungszustand unter anderem an lastfreien Oberflächen vorliegt und insbesondere diese Stellen häufig höchst beansprucht sind (z. B. durch Biege- oder Torsionsbeanspruchung). Bauteiloberflächen sind außerdem einer experimentellen Spannungsanalyse (Kapitel 4.4) zugänglich.

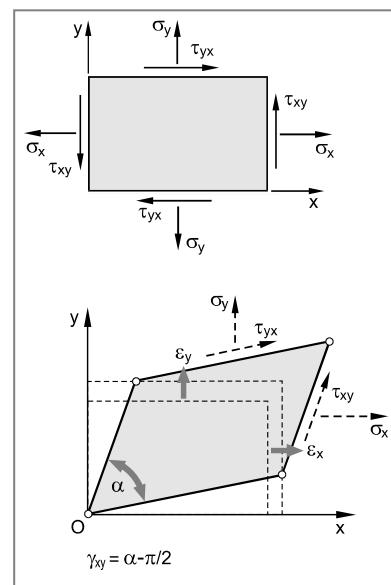


Bild 5.6 Formänderung beim ebenen (zweiachsigen) Spannungszustand

5.5 Aufgaben

Aufgabe 5.1

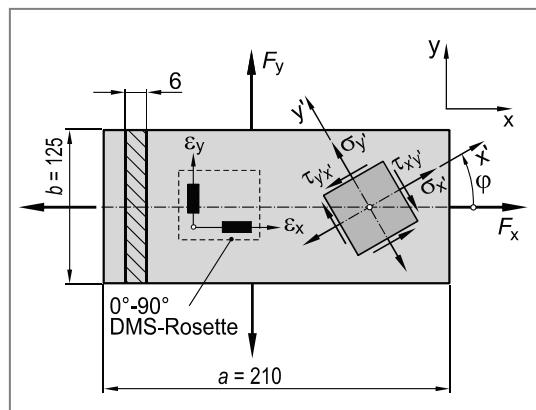


Eine rechteckige Scheibe aus unlegiertem Baustahl ($E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,30$) mit den Seitenlängen $a = 210 \text{ mm}$ und $b = 125 \text{ mm}$ sowie der Dicke $t = 6 \text{ mm}$ wird durch die unbekannten Kräfte F_x und F_y statisch belastet (siehe Abbildung). Zwei an der Oberfläche der Scheibe applizierte Dehnungsmessstreifen liefern die folgenden Werte:

$$\text{DMS A: } \varepsilon_x = 0,743 \text{ \%}$$

$$\text{DMS B: } \varepsilon_y = 0,124 \text{ \%}$$

- Berechnen Sie aus den Dehnungen die unbekannten Kräfte F_x und F_y .
- Skizzieren Sie den Mohrschen Spannungskreis für die x-y-Ebene. Ermitteln Sie die Spannungen $\sigma_{x'}$, σ_y sowie $\tau_{x'y}$ und $\tau_{y'x}$ eines um den Winkel $\varphi = 30^\circ$ zur x-Richtung gedrehten Flächenelementes (siehe Abbildung).



Aufgabe 5.2

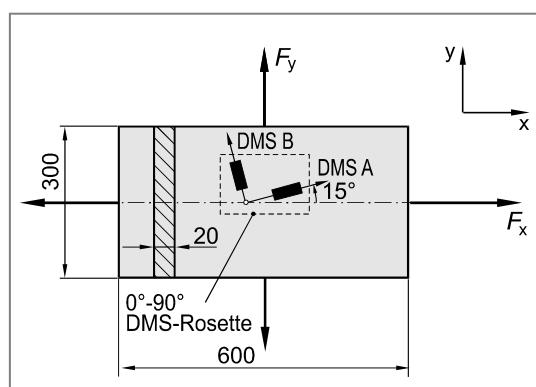


Eine Scheibe aus Werkstoff 15MnNi6-3 mit einer Dicke von 20 mm wird durch die unbekannten Kräfte F_x und F_y statisch beansprucht.

Zur Spannungsermittlung wurde eine $0^\circ-90^\circ$ DMS-Rosette appliziert. Die Messrichtung von DMS A schließt dabei mit der x-Achse einen Winkel von $\alpha = 15^\circ$ ein (siehe Abbildung). Unter Belastung werden die folgenden Dehnungen gemessen:

$$\text{DMS A: } \varepsilon_A = 0,275 \text{ \%}$$

$$\text{DMS B: } \varepsilon_B = -0,530 \text{ \%}$$



Werkstoffkennwerte 15MnNi6-3:

$$R_e = 400 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 580 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- Skizzieren Sie den Mohrschen Verformungskreis und berechnen Sie seinen Mittelpunkt (ε_M) und Radius (R).
- Berechnen Sie die unbekannten Kräfte F_x und F_y .

Aufgabe 5.3

Ein scheibenförmiges Bauteil aus der legierten Einsatzstahlsorte 15MnNi6-3 wird im Betrieb einer statischen Beanspruchung unterworfen. Es herrscht ein ebener Spannungszustand.

Werkstoffkennwerte 15MnNi6-3:

$$R_c = 430 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 660 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

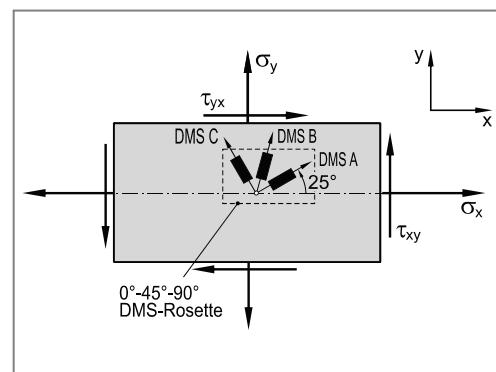
Mit Hilfe einer $0^\circ-45^\circ-90^\circ$ DMS-Rosette werden bei einer unbekannten Belastung die folgenden Dehnungen gemessen:

$$\text{DMS A: } \varepsilon_A = 0,702 \text{ \%}$$

$$\text{DMS B: } \varepsilon_B = -0,012 \text{ \%}$$

$$\text{DMS C: } \varepsilon_C = -0,364 \text{ \%}$$

Berechnen Sie die an der Scheibe angreifenden Spannungen σ_x , σ_y sowie τ_{xy} .

**Aufgabe 5.4**

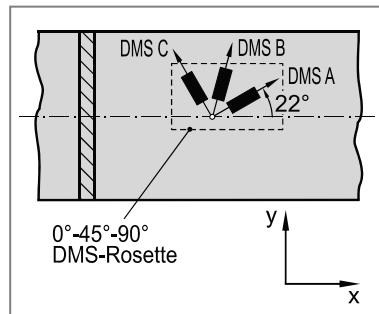
An der Oberfläche einer Stahlplatte aus der Baustahlsorte S275JR ($E = 210000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,30$) wurde eine $0^\circ-45^\circ-90^\circ$ DMS-Rosette appliziert, die mit der x-Richtung einen Winkel von 22° einschließt (siehe Abbildung). Unter Belastung wurden die folgenden Dehnungen gemessen:

$$\text{DMS A: } \varepsilon_A = -0,251 \text{ \%}$$

$$\text{DMS B: } \varepsilon_B = -0,410 \text{ \%}$$

$$\text{DMS C: } \varepsilon_C = 0,368 \text{ \%}$$

- Ermitteln Sie die Dehnungen ε_x und ε_y in x- und y-Richtung sowie die Schiebung γ_{xy} .
- Berechnen Sie die Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2} . Unter welchen Winkeln φ_1 und φ_2 (zur x-Richtung gemessen) wirken die Hauptdehnungen?
- Berechnen Sie die Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2} in der x-y-Ebene.



Aufgabe 5.5

Eine Stahlplatte aus Werkstoff S275J0 (Dicke $t = 15$ mm) wird durch die unbekannten Kräfte F_x und F_y belastet (siehe Abbildung). Zur Ermittlung der Kräfte wird eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette in der skizzierten Weise auf der Oberfläche appliziert.

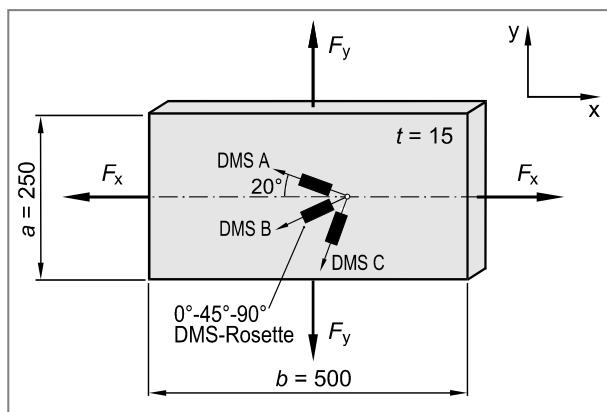
Werkstoffkennwerte S275J0:

$$R_m = 275 \text{ N/mm}^2$$

$$R_{p0,2} = 520 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 205000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- a) Berechnen Sie die unbekannten Kräfte F_x und F_y für eine Dehnungsanzeige von:

DMS A: $\varepsilon_A = 0,7551 \%$

DMS B: $\varepsilon_B = 0,7160 \%$

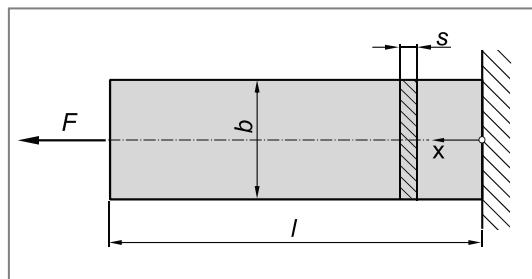
DMS C: $\varepsilon_C = 0,2693 \%$

- b) Berechnen Sie die Dehnungen ε_A , ε_B und ε_C für $F_x = F_y = 500 \text{ kN}$.

- c) Ermitteln Sie die Dickenänderung Δt der Stahlplatte aufgrund der Beanspruchung gemäß Aufgabenteil b ($F_x = F_y = 500 \text{ kN}$).

Aufgabe 5.6

Eine einseitig eingespannte Platte aus der Aluminium-Legierung EN AW-AlCuMg1 ($R_{p0,2} = 250 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 380 \text{ N/mm}^2$; $E = 72000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,33$) mit der Länge $l = 650 \text{ mm}$, der Breite $b = 150 \text{ mm}$ und der Dicke $s = 5 \text{ mm}$ wird in Längsrichtung durch die Kraft $F = 112,5 \text{ kN}$ belastet (siehe Abbildung).

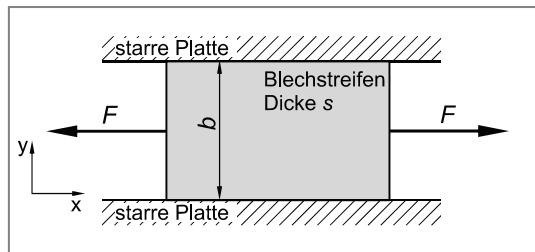


- a) Berechnen Sie die Längenänderung Δl der Platte in x-Richtung.

- b) Ermitteln Sie die Verlängerung Δl^* der Platte in x-Richtung für den Fall, dass die Längskanten so geführt werden, dass die Breite b konstant bleibt.

Aufgabe 5.7

Ein Blechstreifen aus unlegiertem Bau-
stahl ($E = 210000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,30$) be-
sitzt eine Dicke von $s = 25 \text{ mm}$ und eine
Breite von $b = 80 \text{ mm}$ (siehe Abbildung).
Der Blechstreifen kann sich in x- und z-
Richtung reibungsfrei verformen, wird
aber zwischen zwei starren Platten so ge-
führt, dass eine Verformung in y-Rich-
tung nicht möglich ist.



Berechnen Sie die Spannungen in x- und y-Richtung (σ_x und σ_y) sowie die Dehnungen in x-
und z-Richtung (ε_x und ε_z), falls der Blechstreifen mit einer Zugkraft von $F = 420 \text{ kN}$ in x-
Richtung belastet wird.

Aufgabe 5.8

Auf einem polierten Rundstab aus einer Kupfer-Zinn-Legierung mit dem Durch-
messer $d = 50,00 \text{ mm}$ gleitet ein Ring mit dem Innendurchmesser $d_i = 50,015 \text{ mm}$.
Der Stab ist durch die axiale Druckkraft F
belastet.

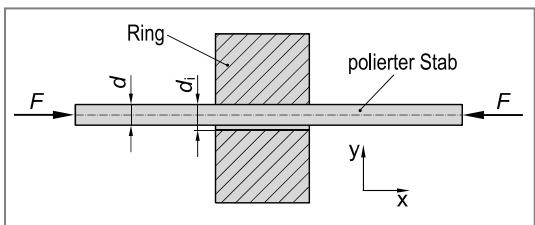
Werkstoffkennwerte der Kupfer-Zinn-
Legierung:

$$R_c = 250 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 450 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 116000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,35$$



Berechnen Sie die Druckkraft F die gerade zu einer Blockierung der Gleitbewegung des Rin-
ges führt.

6 Festigkeitshypothesen

Bauteile, die einer einachsigen Zugbeanspruchung unterliegen, versagen unter statischer Beanspruchung, falls die wirkende Spannung im Bauteil die Streck- bzw. Dehngrenze (Fließen) oder die Zugfestigkeit (Bruch) erreicht (Kapitel 2.1). Reale Bauteile unterliegen bei Betriebsbeanspruchung meist einem mehrachsigen Spannungszustand (z. B. Biegung mit überlagerter Torsion oder mehrachsige Zug- bzw. Druckbeanspruchung). Es stellt sich dabei die Frage, welche der Beanspruchungen bzw. in welcher Kombination die wirkenden Beanspruchungen zu einem Versagen des Bauteils führen. Eine Versuchsanordnung, die es erlaubt, diese Frage allgemein zu beantworten, gibt es nicht.

Zur Lösung des Problems wurden verschiedene **Festigkeitshypothesen** entwickelt. Eine Festigkeitshypothese ist eine Übertragungsfunktion (Berechnungsvorschrift), mit deren Hilfe ein mehrachsiger Spannungszustand in einen äquivalenten einachsigen Spannungszustand (σ_V) überführt werden kann (Bild 6.1). Die mit Hilfe einer Festigkeitshypothese berechnete fiktiv einachsige Spannung σ_V kann dann, analog zum Zugstab, mit den im einachsigen Zugversuch ermittelten Werkstoffkennwerten (R_c bzw. $R_{p0,2}$ und R_m) verglichen werden (Bild 6.1). Man nennt sie dementsprechend **Vergleichsspannung** (σ_V).

Vergleichsspannung

Die Vergleichsspannung σ_V ist eine Rechengröße, die es erlaubt, auf Basis von Festigkeitshypothesen, mehrachsige Spannungszustände auf eine werkstoffmechanisch äquivalente, einachsige Normalspannung umzurechnen. Für Festigkeitsnachweise kann die Vergleichsspannung dann wie eine einachsige Zug- oder Druckspannung behandelt werden. Die Vergleichsspannung repräsentiert also den Gesamtspannungszustand und erlaubt daher einen unmittelbaren Vergleich mit den einachsig ermittelten Kennwerten des Zugversuchs.

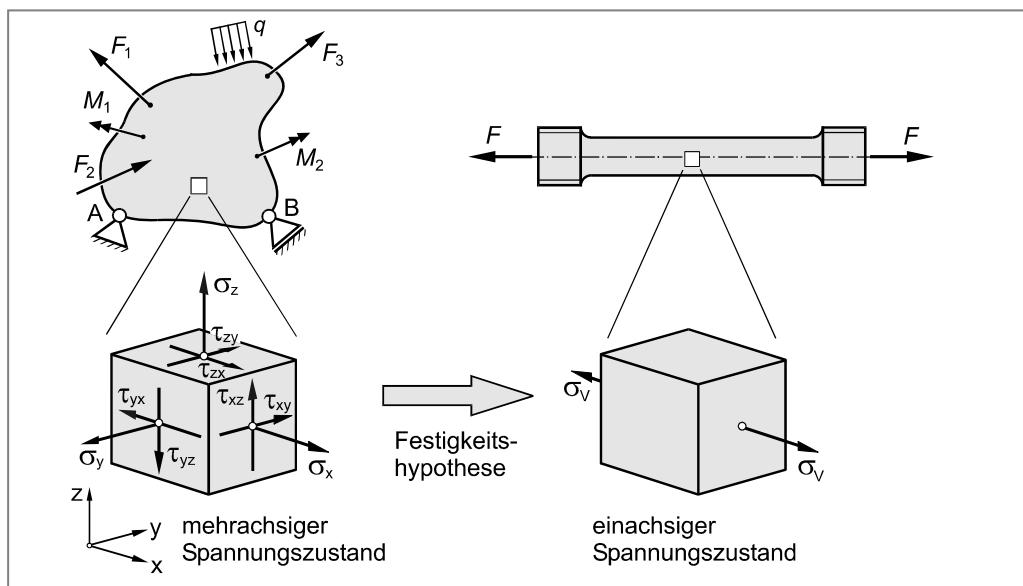


Bild 6.1 Festigkeitsnachweis mehrachsig beanspruchter Bauteile mit Hilfe einer Festigkeitshypothese

Damit kein Versagen des Bauteils eintritt, muss gelten:

$$\sigma_V \leq \sigma_{zul} \quad \text{Festigkeitsbedingung mehrachsig beanspruchter Bauteile} \quad (6.1)$$

mit $\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F}$ oder $\frac{R_{p0,2}}{S_F}$ (Fließen)

bzw. $\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B}$ (Bruch).

Zur Ermittlung der Vergleichsspannung σ_V geht man zweckmäßigerweise wie folgt vor (siehe auch Übungsaufgaben in Kapitel 6.5):

1. Berechnung der Lastspannungen (σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} und τ_{yz}) im x-y-z-Koordinatensystem aus der äußereren Belastung (z. B. Zugkraft F , Biegemoment M_b , Torsionsmoment M_t oder Innendruck p_i).
2. Berechnung der Hauptnormalspannungen (σ_{H1} , σ_{H2} und σ_{H3}) aus den Lastspannungen (σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} und τ_{yz}) beispielsweise mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises.
3. Ordnen der Hauptnormalspannungen nach ihrer algebraischen Größe, wobei definitionsgemäß gelten soll (siehe auch Gleichung 3.78):

$$\sigma_1 := \max \{ \sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3} \} \quad (6.2)$$

$$\sigma_3 := \min \{ \sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3} \} \quad (6.3)$$

$$\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 \quad (6.4)$$

4. Berechnung der Vergleichsspannung σ_V aus den geordneten Hauptnormalspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 mit Hilfe einer geeigneten Festigkeitshypothese (s. u.). Mitunter kann die Vergleichsspannung unter Benutzung der entsprechenden Formeln auch direkt aus den Lastspannungen (σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} und τ_{yz}) ermittelt werden (Kapitel 6.2 bis 6.4).

Die Anwendung von Festigkeitshypothesen setzt die Berücksichtigung des Werkstoffverhaltens voraus. Dementsprechend werden verschiedene Festigkeitshypothesen unterschieden. Für praktische Anwendungen wird in der Regel zwischen spröden Werkstoffen bzw. sprödem Werkstoffverhalten und duktilen Werkstoffen unterschieden.

Die für praktische Berechnungen wichtigsten Festigkeitshypothesen sind:

- **Normalspannungshypothese (NH)**
- **Schubspannungshypothese (SH)**
- **Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)**

Neben den drei genannten Festigkeitshypothesen wurden noch eine Reihe weiterer Hypothesen entwickelt, die jedoch für praktische Berechnungen, insbesondere im Bereich des Maschinenbaus, kaum Anwendung finden und daher nicht besprochen werden sollen.

6.1 Normalspannungshypothese (NH)

Die Anwendung der Normalspannungshypothese (NH), die bereits 1861 von **William John Macquorn Rankine** (schottischer Ingenieur und Physiker 1820 ... 1872) formuliert wurde und damit die älteste Festigkeitshypothese darstellt, setzt einen spröden Werkstoff (z. B. Gusseisen mit Lamellengraphit oder keramische Werkstoffe) bzw. sprödes Werkstoffverhalten (z. B. martensitisch gehärteter Stahl) voraus. Zumindest muss jedoch ein eingeschränktes Verformungsvermögen des Werkstoffs vorliegen.

Nach der Normalspannungshypothese tritt bei statischer Beanspruchung ein verformungsloser (spröder) Trennbruch ein, sobald die größte Normalspannung (σ_1) die Trennfestigkeit σ_T des Werkstoffs erreicht. Die Vergleichsspannung nach der Normalspannungshypothese lautet also (in Hauptnormalspannungen ausgedrückt):

$$\sigma_{V\text{NH}} = \sigma_1 \quad \text{Vergleichsspannung nach der NH in Hauptnormalspannungen} \quad (6.5)$$

Für ideal spröde Werkstoffe entspricht die Trennfestigkeit der Zugfestigkeit ($\sigma_T = R_m$). Die Festigkeitsbedingung nach der Normalspannungshypothese lautet demnach:

$$\sigma_{V\text{NH}} \leq \frac{R_m}{S_B} \quad \text{Festigkeitsbedingung nach der NH} \quad (6.6)$$

Für die Anwendung der Normalspannungshypothese benötigt man die größte Normalspannung σ_1 , die jedoch in der Regel nicht gegeben ist. Sie muss vor der Anwendung der NH aus den gegebenen Lastspannungen errechnet werden.

6.1.1 Normalspannungshypothese in Lastspannungen für den zweiachsigen Spannungszustand

Für den technisch wichtigen Sonderfall der *zweiachsigen Beanspruchung* kann die Vergleichsspannung auch direkt in Lastspannungen (σ_x , σ_y und τ_{xy}) ausgedrückt werden. Aus dem Mohrschen Spannungskreis (Bild 6.2) folgt für die Hauptnormalspannung σ_1 und damit für die Vergleichsspannung nach der Normalspannungshypothese ($\sigma_{V\text{NH}} \equiv \sigma_1$):

$$\sigma_{V\text{NH}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.7)$$

Vergleichsspannung nach der NH in Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand

Bei der Anwendung der Normalspannungshypothese ist zu berücksichtigen, dass nur Zugspannungen einen verformungslosen Trennbruch auslösen können. Dementsprechend muss bei der Anwendung von Gleichung 6.5 bzw. 6.7 gelten: $\sigma_1 > 0$ (siehe auch Kapitel 6.1.3).

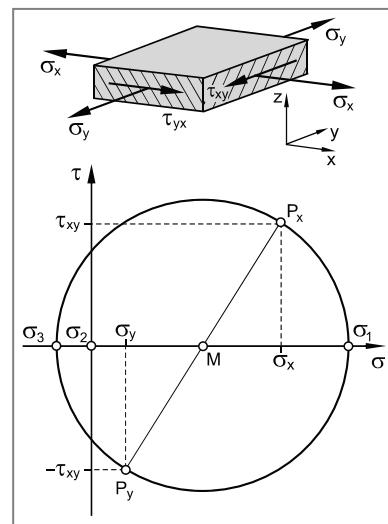


Bild 6.2 Herleitung von Gleichung 6.7

6.1.2 Normalspannungshypothese bei Zug- oder Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion

Für den bedeutsamen Fall einer Zug- bzw. Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsions- oder Abscherbeanspruchung folgt mit $\sigma_x \equiv \sigma_b$, $\sigma_y = 0$ und $\tau_{xy} \equiv \tau_t$ aus Gleichung 6.7:

$$\sigma_{VNH} = \frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau_t^2}$$

Vergleichsspannung nach der NH in Lastspannungen bei Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion (6.8)

Bei Zugbeanspruchung ist σ_b sinngemäß durch σ_z zu ersetzen. Bei Abscherbeanspruchung ersetzt man τ_t durch τ_a . Für eine zusammengesetzte Beanspruchung aus Druck und Torsion bzw. Abscherung ist Kapitel 6.1.3 zu beachten.

6.1.3 Grenzkurve für das Werkstoffversagen spröder Werkstoffe bei zweiachsigem Spannungszustand

Normalspannungshypothese

Bei spröden Werkstoffen tritt gemäß der Normalspannungshypothese ein Versagen durch Trennbruch ein, sobald die größte Normalspannung (σ_1) die Trennfestigkeit σ_T (bei ideal spröden Werkstoffen ist dies die Zugfestigkeit R_m) des Werkstoffs erreicht. Da eine Materialtrennung nur unter Zugbeanspruchung stattfinden kann, muss hierbei $\sigma_1 > 0$ sein.

Überträgt man diese Tatsache in ein $\sigma_{H1}-\sigma_{H2}$ -Hauptspannungsdiagramm und setzt ein isotropes Werkstoffverhalten voraus, dann erhält man als Grenzkurve im 1. Quadranten zunächst ein Quadrat in den Grenzen R_m .

Experimentelle Untersuchungen zeigen weiterhin, dass bei Werkstoffen ohne ausgeprägte Zug-Druck-Anisotropie unter Torsionsbeanspruchung ein spröder Trennbruch ebenfalls stattfindet, sobald die größte Normalspannung (σ_1) die Trennfestigkeit (σ_T bzw. R_m) erreicht, also durch die begleitende Druckspannung nicht signifikant beeinflusst wird. Dementsprechend kann die Grenzkurve für Versagen nach der NH gemäß Bild 6.3 in den 2. und 4. Quadranten hinein erweitert werden.

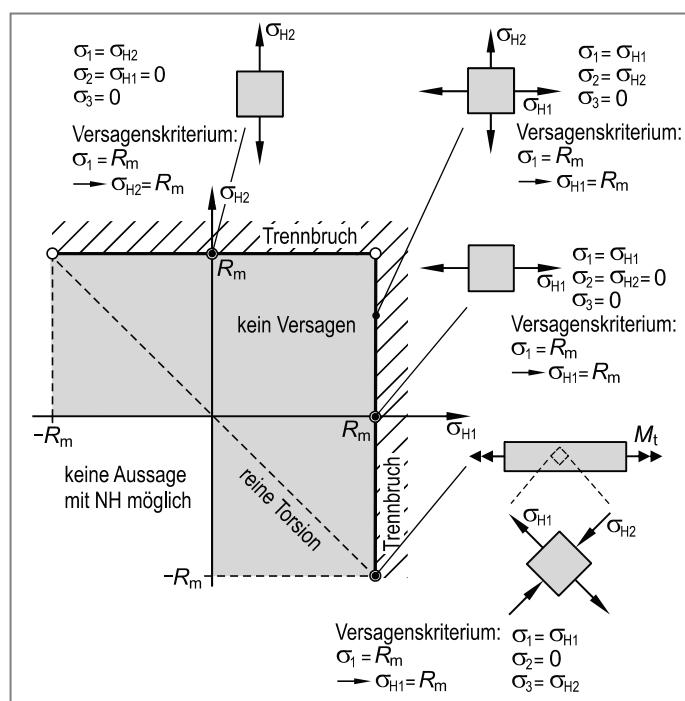


Bild 6.3 Grenzkurve für das Versagen spröder Werkstoffe unter Zugrundelegung der Normalspannungshypothese bei zweiachsigem Spannungszustand

Mohrsche Versagenshypothese

Einige spröde Werkstoffe, wie zum Beispiel Gusseisen mit Lamellengraphit, ertragen unter Druckbeanspruchung deutlich höhere Spannungen im Vergleich zu einer Zuglast ($|\sigma_{dB}| > R_m$). Außerdem ändert sich unter Druckbeanspruchung der Versagensmechanismus. Während unter Zugbeanspruchung ein Versagen durch Trennbruch erfolgt, beobachtet man unter Druckbeanspruchung hingegen Versagen durch Abscherung (Schiebungsbruch), sobald die maximale Schubspannung einen kritischen Wert (τ_B) überschreitet (siehe auch Bild 2.15).

Um das Werkstoffverhalten zu beschreiben, reicht die NH alleine nicht aus, da sie das Versagen eines spröden Werkstoffs unter Druckbeanspruchung durch Abgleiten nicht zu erklären vermag. Andererseits muss bei Anwendung der Schubspannungshypothese (Kapitel 6.2) berücksichtigt werden, dass senkrecht zur Gleitebene wirkende Spannungen die kritische Schubspannung für das Abgleiten der Gitterebenen beeinflussen. Die **Mohrsche Versagenshypothese** versucht beide Versagensarten, den Trennbruch und den Schiebungsbruch, zu kombinieren.

Für den zweiachsigen Spannungszustand kann man sich die Grenzkurve für das Werkstoffversagen nach der Mohrschen Hypothese herleiten, indem man Proben aus demselben Werkstoff beispielsweise auf Zug, Druck und Torsion bis zum Bruch beansprucht. Für jede dieser drei Beanspruchungsarten kann man die Mohrschen Spannungskreise zeichnen und durch eine Hüllkurve verbinden (Bild 6.4a). Liegt ein zweiachsiger Spannungszustand vor, dessen Mohrscher Spannungskreis innerhalb der Hüllkurve liegt, dann muss nicht mit einem Versagen gerechnet werden. Überträgt man dieses Kriterium in ein σ_{H1} - σ_{H2} -Hauptspannungsdiagramm, dann erhält man die Versagensgrenzkurve für spröde Werkstoffe mit ausgeprägter Zug-Druck-Anisotropie (Bild 6.4b).

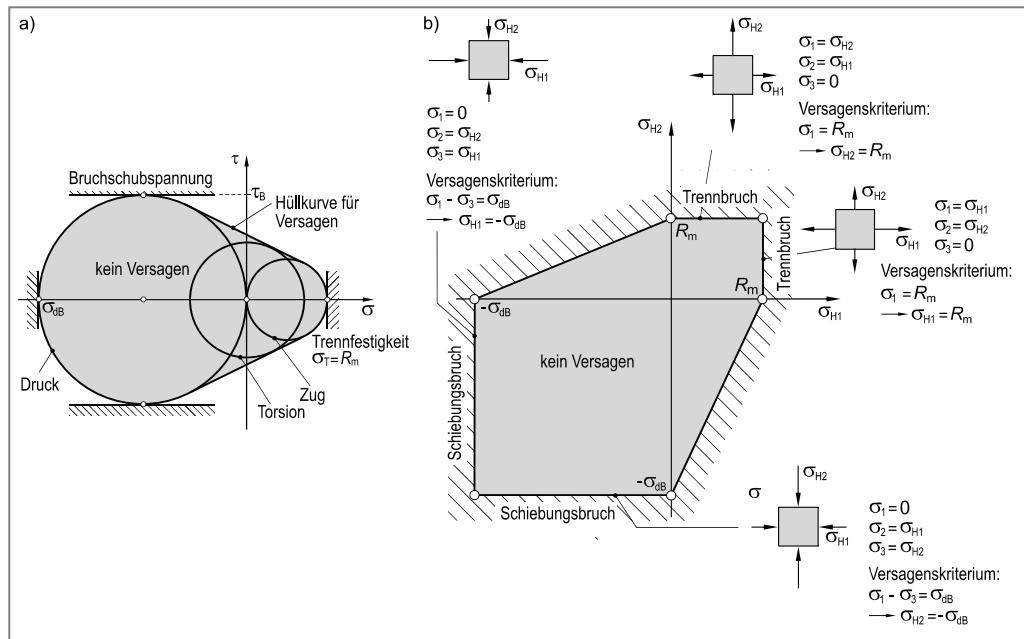


Bild 6.4 Grenzkurve für das Versagen spröder Werkstoffe mit ausgeprägter Zug-Druck-Anisotropie unter Zugrundelegung der Mohrschen Versagenshypothese bei zweiachsigem Spannungszustand

6.2 Schubspannungshypothese (SH)

Die 1864 von **Henri Edouard Tresca** (1814 ... 1885) aufgestellte Schubspannungshypothese geht von der Vorstellung aus, dass plastische Formänderungen als Gleitvorgänge im Kristallgitter erfolgen und durch Schubspannungen ausgelöst werden. Die Anwendung setzt dementsprechend einen duktilen Werkstoff bzw. duktile Werkstoffverhalten und damit Versagen durch Fließen voraus. Die Schubspannungshypothese kann jedoch auch für Festigkeitsnachweise bei spröden Werkstoffen unter mehrachsiger Druckbeanspruchung eingesetzt werden, da letztere unter Druckbeanspruchung ebenfalls durch einen Scher- bzw. Schiebungsbruch versagen (Kapitel 6.1.3).

Nach der Schubspannungshypothese (SH) ist die größte im Bauteil auftretende Schubspannung (τ_{\max}) für das Versagen verantwortlich. Der (duktile) Werkstoff versagt somit durch plastisches Fließen, sobald die größte Schubspannung τ_{\max} die Fließschubspannung τ_F erreicht (Bild 6.5a):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_F \quad (6.9)$$

Die Fließschubspannung τ_F kann im einachsigen Zugversuch einfach ermittelt werden. Entsprechend Bild 6.5b gilt der folgende Zusammenhang:

$$\tau_F = \frac{R_e}{2} \quad (6.10)$$

Mit Gleichung (6.9) und (6.10) ergibt sich somit:

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{R_e}{2} \quad (6.11)$$

Die Vergleichsspannung σ_V errechnet sich nach der Schubspannungshypothese damit zu:

$$\sigma_{V\text{ SH}} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Vergleichsspannung nach der SH in Hauptnormalspannungen (6.12)

Die Festigkeitsbedingung nach der Schubspannungshypothese lautet dementsprechend:

$$\sigma_{V\text{ SH}} \leq \frac{R_e}{S_F} \text{ bzw. } \frac{R_{p0,2}}{S_F} \quad \text{Festigkeitsbedingung nach der SH} \quad (6.13)$$

Abhängig von der Größe der an einem Volumenelement wirkenden Hauptnormalspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 , kann die größte Schubspannung in unterschiedlichen Diagonalebenen des durch die Hauptnormalspannungen gekennzeichneten

Volumenelements (Hauptspannungselement) auftreten. Für ein Versagen ist immer die größte der drei Hauptschubspannungen (τ_{H1} , τ_{H2} oder τ_{H3}) entscheidend (in Bild 6.6 also $\tau_{\max} = \tau_{H1}$).

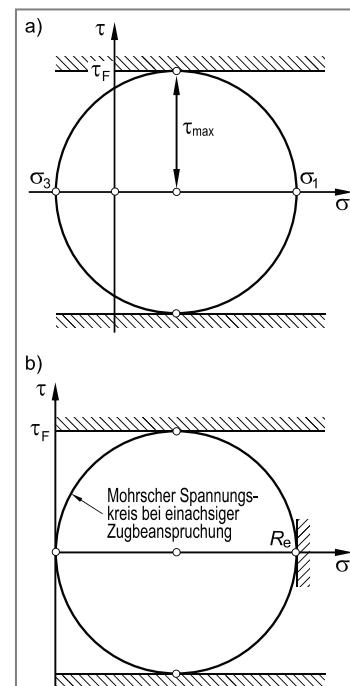


Bild 6.5 Beziehung zwischen Fließschubspannung (τ_F) und Streckgrenze (R_e)

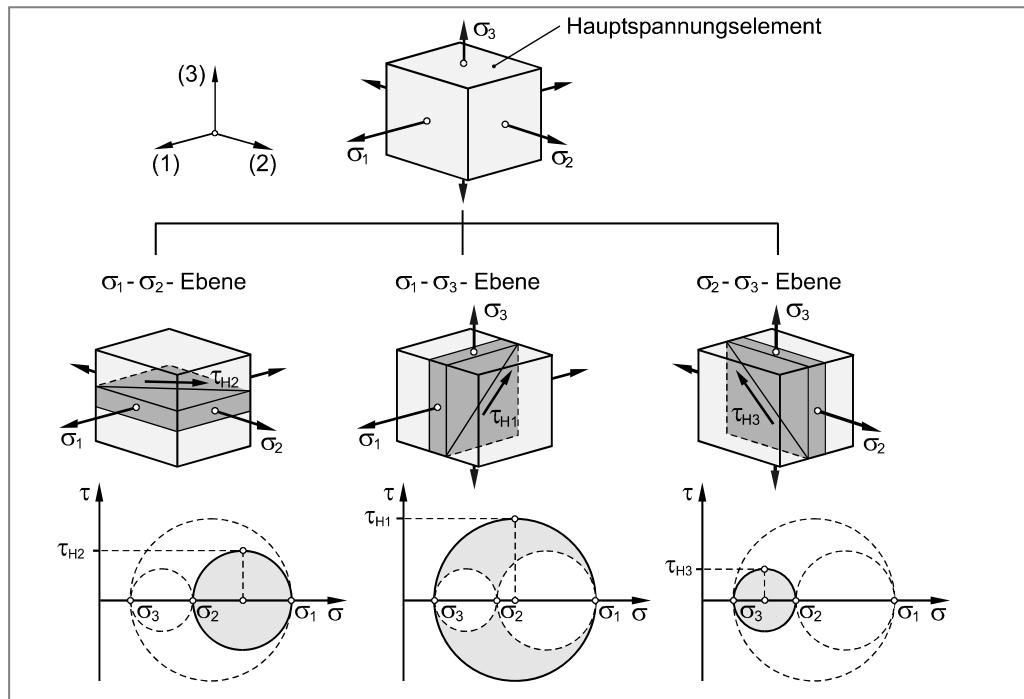


Bild 6.6 Ebenen maximaler Schubspannungen am Hauptspannungselement

Bei der Anwendung der Schubspannungshypothese bei zweiachsigem Spannungszustand muss außerdem berücksichtigt werden, dass auch Hauptnormalspannungen mit Wert Null als maximale oder minimale Hauptnormalspannung auftreten können. Als Vergleichsspannung ist also stets die *maximale* Hauptspannungsdifferenz zu verwenden. Bild 6.7 veranschaulicht diesen wichtigen Sachverhalt anhand von zwei Beispielen.

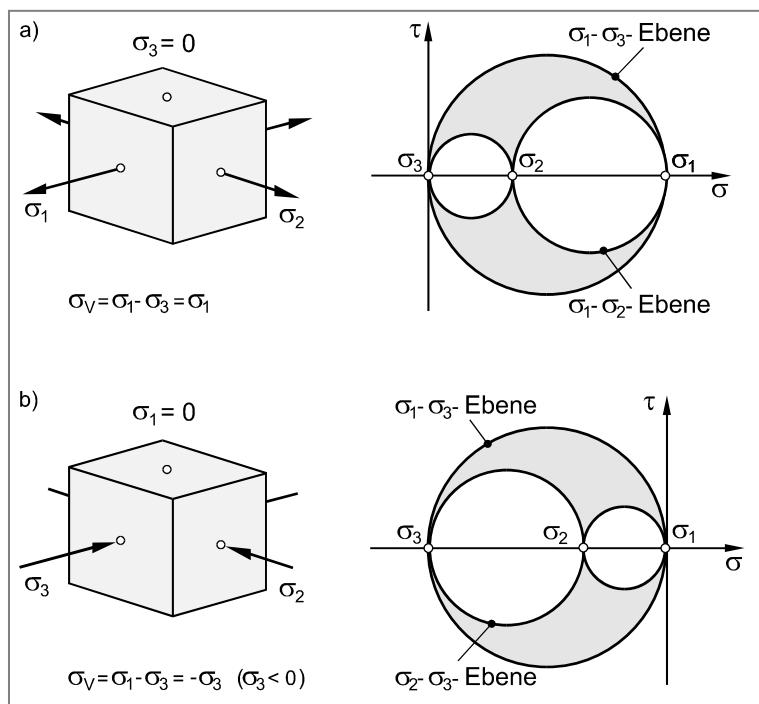


Bild 6.7 Ermittlung der maximalen Hauptspannungsdifferenz bei zweiachsigem Spannungszustand (Beispiele)

6.2.1 Schubspannungshypothese in Lastspannungen für den zweiachsigen Spannungszustand

Unter der Voraussetzung des technisch bedeutsamen zweiachsigen Spannungszustandes (σ_x , σ_y und τ_{xy}) kann, analog zur Normalspannungshypothese, die Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese auch in Lastspannungen ausgedrückt werden.

Bei *zweiachsigem Spannungszustand* folgt für die Hauptnormalspannungen (Bild 6.2):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Vor dem Ansetzen der Schubspannungshypothese müssen jedoch zwei unterschiedliche Fälle berücksichtigt werden.

1. Die beiden von Null verschiedenen Hauptnormalspannungen haben *unterschiedliches Vorzeichen* (z. B. Welle unter Zug-, Druck- oder Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion, Bild 6.8). Dies ist der Fall, falls gilt:

$$|\sigma_M| \leq R$$

$$\left| \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right| \leq \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Hieraus folgt nach Umformung die Bedingung:

$$\sigma_x \cdot \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$$

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für die Vergleichsspannung σ_{VSH} :

$$\begin{aligned} \sigma_{VSH} &= \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \right) \\ &= 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned}$$

also:

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

Vergleichsspannung nach der SH in Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand (6.14)

Gilt nur, falls $\sigma_x \cdot \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$

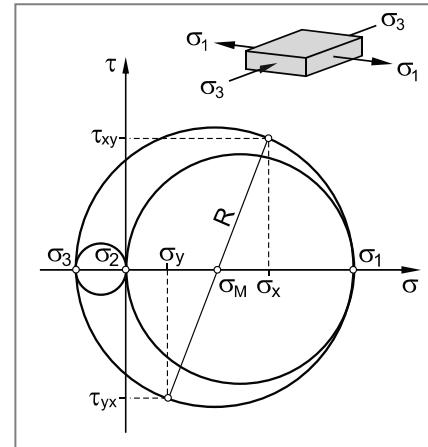


Bild 6.8 Lage des Mohrschen Spannungskreises bei *unterschiedlichem Vorzeichen* der von Null verschiedenen Hauptnormalspannungen

2. Die beiden von Null verschiedenen Hauptnormalspannungen haben *gleiches Vorzeichen*. Dies ist der Fall, falls gilt (Bild 6.9):

$$\left| \sigma_M \right| > R$$

$$\left| \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right| > \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.15)$$

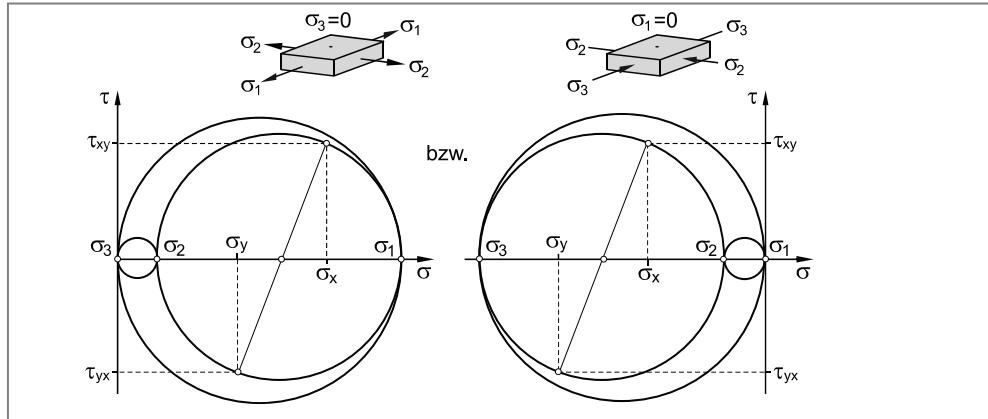


Bild 6.9 Lage des Mohrschen Spannungskreises bei *gleichem Vorzeichen* der von Null verschiedenen Hauptnormalspannungen

Aus Gleichung 6.15 folgt nach Umformung die Bedingung:

$$\sigma_x \cdot \sigma_y > \tau_{xy}^2$$

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für die Vergleichsspannung σ_{VSH} :

$$\sigma_{VSH} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1 - 0 = \sigma_1$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\sigma_x \geq 0 \text{ und } \sigma_y \geq 0)$$

bzw.

$$\sigma_{VSH} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - \sigma_3 = -\sigma_3$$

$$= - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right)$$

$$= - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\sigma_x < 0 \text{ und } \sigma_y < 0)$$

also:

$$\sigma_{VSH} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \begin{aligned} &\text{Vergleichsspannung nach der SH} \\ &\text{in Lastspannungen bei zweiachs-} \\ &\text{sigem Spannungszustand} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Gilt nur, falls $\sigma_x \cdot \sigma_y > \tau_{xy}^2$

6.2.2 Schubspannungshypothese bei Zug-, Druck- oder Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion

Für den technisch bedeutsamen Sonderfall einer Zug-, Druck- oder Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsions- oder Abscherbeanspruchung folgt mit $\sigma_x \equiv \sigma_b$, $\sigma_y = 0$ und $\tau_{xy} \equiv \tau_t$ aus Gleichung 6.14:

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2} \quad \text{Vergleichsspannung nach der SH in Lastspannungen bei Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion} \quad (6.17)$$

Bei Zugbeanspruchung ist σ_b sinngemäß durch σ_z und bei Druckbeanspruchung durch σ_d zu ersetzen. Bei Abscherbeanspruchung ersetzt man τ_t durch τ_a .

6.2.3 Grenzkurve für das Werkstoffversagen nach der SH für den zweiachsigen Spannungszustand

Duktile Werkstoffe versagen nach der Schubspannungshypothese (SH) sobald die Vergleichsspannung σ_{VSH} die Streck- oder Dehgrenze des Werkstoffs überschreitet, falls also gilt $\sigma_{VSH} = \sigma_1 + \sigma_3 > R_e$ bzw. $R_{p0,2}$. Für alle möglichen Kombinationen der Hauptspannungen lässt sich dieses Kriterium als Grenzkurve im σ_{H1} - σ_{H2} -Hauptspannungsdiagramm darstellen. Man erhält als Grenzkurve ein Sechseck (Tresca-Sechseck), Bild 6.10. Demnach tritt keine plastische Verformung (Fließen) ein, falls sich der durch die beiden (von Null verschiedenen) Hauptspannungen gekennzeichnete Spannungszustand innerhalb der Grenzkurve befindet.

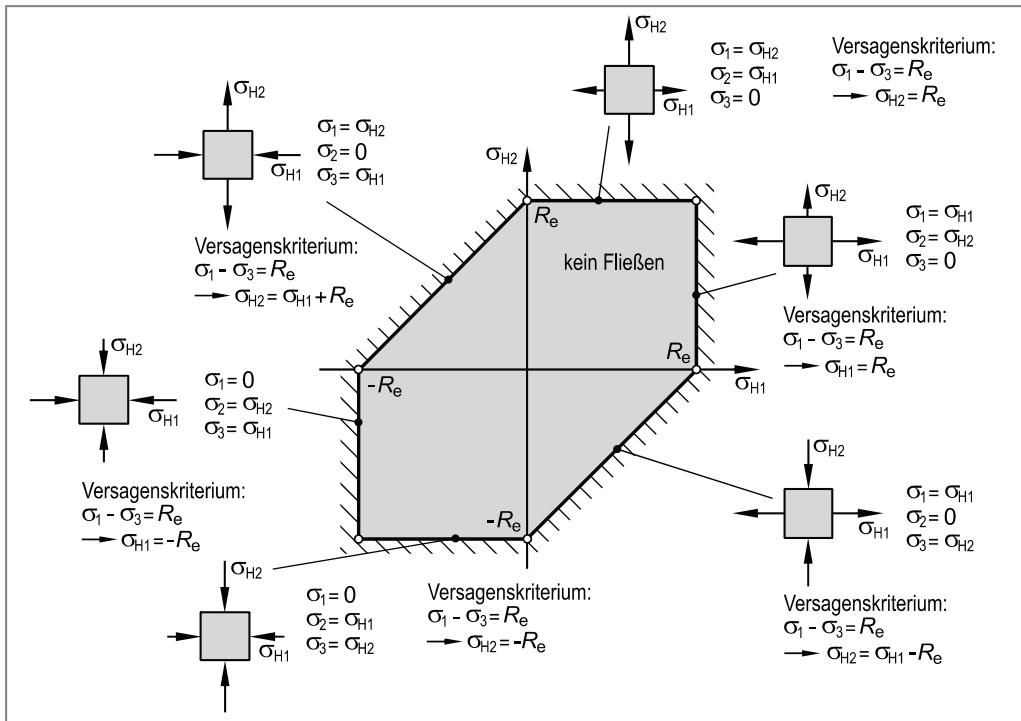


Bild 6.10 Grenzkurve für das Versagen duktiler Werkstoffe unter Zugrundelegung der Schubspannungshypothese bei zweiachsigem Spannungszustand (Tresca-Sechseck)

6.3 Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)

Ein Körperelement, das durch allseitig gleiche Zug- oder Druckspannung belastet wird (hydrostatischer Spannungszustand) ändert lediglich sein Volumen, nicht aber seine Form. Subtrahiert man von der gesamten Formänderungsarbeit denjenigen Anteil, der zur Volumenänderung erforderlich ist, dann verbleibt der für die Gestaltänderung verantwortliche Anteil, die **Gestaltänderungsarbeit** oder **Gestaltänderungsenergie**.

Nach der Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH), die auf **Maksymilian Tytus Huber** (1872 ... 1950), **Richard Edler von Mises** (1883 ... 1953) und **H. Hencky** (1885 ... 1951) zurückgeht, ist für die Werkstoffbeanspruchung die in einem elastisch verformten Volumenelement gespeicherte Gestaltänderungsenergie maßgebend. Die Gestaltänderungsenergie ist hierbei die bei einem räumlichen Spannungszustand für die Gestaltänderung erforderliche Energie. Sobald diese einen werkstoffabhängigen Grenzwert erreicht, der sich aus dem Vergleich mit der einachsigen Beanspruchung im Zugversuch ergibt, versagt der Werkstoff durch Auftreten plastischer Verformungen. Drückt man diesen Grenzwert in den geordneten Hauptnormalspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 aus (Gleichungen 6.2 bis 6.4), dann erhält man für die Vergleichsspannung σ_V nach der GEH (ohne Herleitung):

$$\sigma_{VGEH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

**Vergleichsspannung nach
der GEH in Hauptnor- (6.18)
malspannungen**

Für die Ermittlung der geordneten Hauptnormalspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 gilt das bereits Gesagte (Gleichungen 6.2 bis 6.4).

Der Werkstoff versagt, sobald die nach der GEH errechnete Vergleichsspannung σ_V die Streck- bzw. Dehngrenze erreicht. Die Festigkeitsbedingung nach der GEH lautet demnach:

$$\sigma_{VGEH} \leq \frac{R_e}{S_F} \text{ bzw. } \frac{R_{p0,2}}{S_F} \quad \text{Festigkeitsbedingung nach der GEH} \quad (6.19)$$

Nach der Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) liegt die Versagensursache, analog zur Schubspannungshypothese (SH), im Auftreten plastischer Verformungen. Sie wird deshalb ebenfalls nur für duktile Werkstoffe angewandt.

Bei Vorliegen eines **hydrostatischen Spannungszustandes** ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) tritt auch bei sehr hohen Spannungen kein Fließen ein ($\sigma_{VGEH} = 0$). Es muss jedoch berücksichtigt werden, dass bei einem hydrostatischen Zugspannungszustand ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$) ein spröder Trennbruch eintritt, sobald die wirkenden Spannungen die Trennfestigkeit des Werkstoff erreichen, d. h. die atomaren Bindungskräfte überschritten werden.

Da sowohl die SH als auch die GEH von ähnlichen Vorstellungen ausgehen, liefern sie auch vergleichbare Ergebnisse. Es lässt sich für alle möglichen Kombinationen der drei Hauptnormalspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 zeigen, dass der größte Unterschied zwischen GEH und SH etwa 15,5% beträgt, wobei die nach der SH errechnete Vergleichsspannung (σ_{VSH}) stets größer ist, als die nach der GEH errechnete Vergleichsspannung (σ_{VGEH}). Die maximale Abweichung zwischen GEH und SH ergibt sich für $\sigma_2 = 0,5 \cdot \sigma_1$ (z. B. dünnwandiger Behälter unter Innendruck, Kapitel 12.1) sowie für $\sigma_2 = -\sigma_1$ (z. B. Rundstab unter Torsion), Bild 6.11.

Sofern in technischen Regelwerken die Verwendung der Festigkeitshypothese (SH oder GEH) nicht vorgeschrieben ist, kann man einen Festigkeitsnachweis mit beiden Hypothesen führen. Vorteil der GEH ist eine experimentell bessere Bestätigung und sie erlaubt eine wirtschaftlichere Bauteilauslegung. Eine Fallunterscheidung im Hinblick auf die größten Hauptspannungsdifferenzen ist ebenfalls nicht erforderlich. Mit der SH ist allerdings die Berechnung meist einfacher und es ergibt sich allenfalls ein Fehler zur sichereren Seite hin.

6.3.1 Gestaltänderungsenergiehypothese in Lastspannungen für den zweiachsigen Spannungszustand

Liegt ein zweiachsiger Spannungszustand vor, dann kann analog zur Normalspannungshypothese (NH) bzw. Schubspannungshypothese (SH), die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese auch in Lastspannungen ausgedrückt werden.

Bei *zweiachsigem Spannungszustand* folgt für die Hauptnormalspannungen (Bild 6.2):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Setzt man diese Beziehungen in Gleichung 6.18 ein, dann erhält man nach Umformung und Zusammenfassung die Vergleichsspannung nach der GEH in Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand:

$$\sigma_{VGEH} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$

Vergleichsspannung nach der GEH in
Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand (6.20)

6.3.2 Gestaltänderungsenergiehypothese bei Zug-, Druck- oder Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion

Für den technisch bedeutsamen Sonderfall einer Zug-, Druck- oder Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsions- oder Abscherbeanspruchung folgt mit $\sigma_x \equiv \sigma_b$, $\sigma_y = 0$ und $\tau_{xy} \equiv \tau_t$ aus Gleichung 6.20:

$$\sigma_{VGEH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2}$$

Vergleichsspannung nach der GEH in Lastspannungen bei Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion (6.21)

Bei Zugbeanspruchung ist σ_b sinngemäß durch σ_z und bei Druckbeanspruchung durch σ_d zu ersetzen. Bei Abscherbeanspruchung ersetzt man τ_t durch τ_a .

6.3.3 Grenzkurve für das Werkstoffversagen nach der GEH für den zweiachsigen Spannungszustand

Duktile Werkstoffe versagen nach der Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) sobald die Vergleichsspannung σ_{VGEH} die Streck- oder Dehngrenze des Werkstoffs überschreitet. Für den zweiachsigem Spannungszustand folgt beispielsweise mit $\sigma_3 = 0$ aus Gleichung 6.18:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2} = R_e$$

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 = R_e^2 \quad (6.22)$$

Gleichung 6.22 beschreibt eine elliptische Grenzkurve im σ_{H1} - σ_{H2} -Hauptspannungsdiagramm (Bild 6.11). Die Länge der großen Halbachse beträgt dabei $\sqrt{2} \cdot R_e$, die Länge der kleinen Hauptachse $\sqrt{2/3} \cdot R_e$. Die Grenzkurve schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $(R_e | 0)$ und $(0 | R_e)$. Befindet sich der durch die beiden (von Null verschiedenen) Hauptnormalspannungen gekennzeichnete Spannungszustand innerhalb der Grenzkurve, dann tritt kein Werkstoffversagen durch plastische Verformung ein.

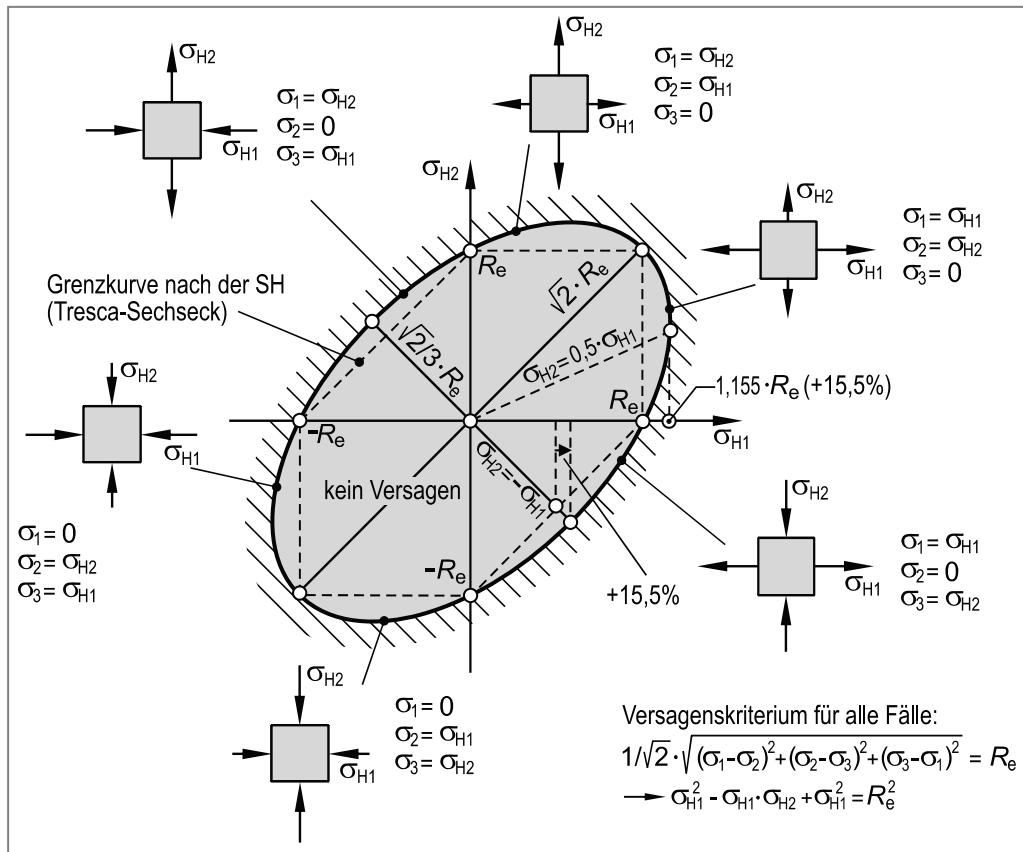


Bild 6.11 Grenzkurve für das Versagen duktiler Werkstoffe unter Zugrundelegung der Gestaltänderungsenergiehypothese bei zweiachsigem Spannungszustand

6.4 Zusammenfassung der Festigkeitshypothesen

Tabelle 6.1 Zusammenfassung der Festigkeitshypothesen

Festigkeitshypothese	Dreiachsiger Spannungszustand in Hauptspannungen	Vergleichsspannung σ_{NH} , σ_{SH} , σ_{GEH} in Lastspannungen	Zweiachsiger Spannungszustand in Lastspannungen	Sonderfall ²⁾ Biegung u. Torsion
Normalspannungshypothese (NH)	σ_1 ¹⁾	σ_1	$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	$\frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau_t^2}$
Schubspannungshypothese (SH)	$\sigma_1 - \sigma_3$	$\sigma_1 - \sigma_3$	falls $\sigma_x \cdot \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$: $\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$ falls $\sigma_x \cdot \sigma_y > \tau_{xy}^2$: $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	$\sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2}$
Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$		falls $\sigma_3 = 0$: $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2}$ falls $\sigma_2 = 0$: $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3}$ falls $\sigma_1 = 0$: $\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3}$	$\sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2}$

¹⁾ nur gültig falls $\sigma_1 > 0$

²⁾ oder Zug (σ_z) bzw. Druck (σ_d) und Torsion (τ_t) bzw. Abscherung (τ_a)

Festlegung der Hauptnormalspannungen

$$\sigma_1 := \max \{ \sigma_{\text{H1}}, \sigma_{\text{H2}}, \sigma_{\text{H3}} \}$$

$$\sigma_3 := \min \{ \sigma_{\text{H1}}, \sigma_{\text{H2}}, \sigma_{\text{H3}} \}$$

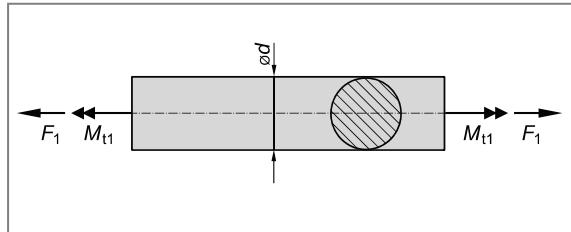
$$\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$$

6.5 Aufgaben

Aufgabe 6.1



Ein Rundstab aus der Gusseisensorte EN-GJL-300 mit einem Durchmesser von $d = 30 \text{ mm}$ (Vollkreisquerschnitt) wird durch die statisch wirkende Längskraft $F_1 = 50 \text{ kN}$ und das statische Torsionsmoment $M_{t1} = 450 \text{ Nm}$ belastet. Die Zugfestigkeit des Werkstoffes beträgt $R_m = 370 \text{ N/mm}^2$.



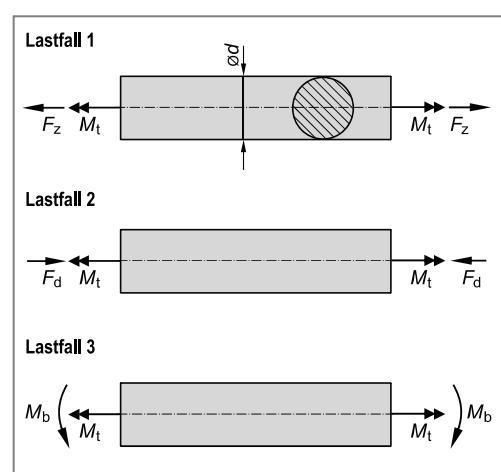
- Ermitteln Sie die höchst beanspruchten Stellen im Stabquerschnitt.
- Berechnen Sie die Zugspannung σ_x im Stabquerschnitt.
- Ermitteln Sie die maximale Schubspannung τ_{xy} im Stabquerschnitt.
- Charakterisieren Sie den Spannungszustand an der höchst beanspruchten Stelle, indem Sie den Mohrschen Spannungskreis skizzieren (qualitativ).
- Berechnen Sie die Sicherheit gegen Versagen. Ist die Sicherheit ausreichend?
- Berechnen Sie die statische Längskraft F_2 , die bei gleichbleibendem, statisch wirkendem Torsionsmoment $M_{t1} = 450 \text{ Nm}$ zu einem Bruch des Rundstabes führt.
- Ermitteln Sie das statische Torsionsmoment M_{t2} , welches bei gleichbleibender, statisch wirkender Längskraft $F_1 = 50 \text{ kN}$ zum Bruch führt.
- Ermitteln Sie die Kurvengleichung aller σ - τ -Kombinationen, die zu einem Bruch des Stabes führen würden. Zeichnen Sie diese Kurve in das σ - τ -Koordinatensystem aus Abschnitt d) ein.

Aufgabe 6.2



Eine vergütete Welle mit Vollkreisquerschnitt aus der Vergütungsstahlsorte C35E ($R_e = 410 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 660 \text{ N/mm}^2$) mit einem Durchmesser von $d = 50 \text{ mm}$ wird auf unterschiedliche Weise beansprucht:

- Durch das statisch wirkende Torsionsmoment $M_t = 1500 \text{ Nm}$ und die statische Zugkraft $F_z = 100 \text{ kN}$,
- durch das statisch wirkende Torsionsmoment $M_t = 1500 \text{ Nm}$ und die statische Druckkraft $F_d = -100 \text{ kN}$,
- durch das statisch wirkende Torsionsmoment $M_t = 1500 \text{ Nm}$ und das statische Biegemoment $M_b = 1000 \text{ Nm}$.



- Berechnen Sie die durch die Einzelbelastungen (F_z , F_d , M_t und M_b) erzeugten Lastspannungen an der höchst beanspruchten Stelle.
- Skizzieren Sie jeweils maßstäblich für die drei Belastungsfälle den Mohrschen Spannungskreis.
- Ermitteln Sie für alle drei Belastungsfälle die Hauptnormalspannungen an der höchst beanspruchten Stelle.

Berechnen Sie jeweils getrennt für die drei Belastungsfälle:

- Die Vergleichsspannung σ_V an der höchst beanspruchten Stelle nach der GEH und der SH.
- Ermitteln Sie für die einzelnen Belastungsfälle, unter Zugrundelegung der GEH, die Sicherheit gegen Fließen.

Aufgabe 6.3

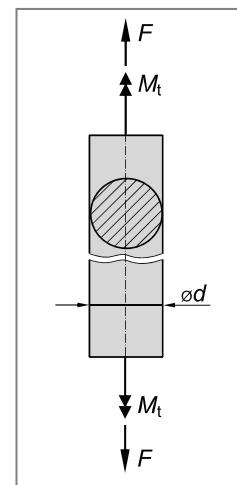


Auf eine vertikale Turbinenwelle mit dem Durchmesser $d = 90 \text{ mm}$ (Vollkreisquerschnitt) aus Vergütungsstahl C45E ($R_e = 490 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 710 \text{ N/mm}^2$) wirkt im Betrieb ein statisches Torsionsmoment von $M_t = 14000 \text{ Nm}$ und eine statische Zugkraft von $F = 890 \text{ kN}$.

- Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen. Ist die Sicherheit ausreichend?

Um ein höheres Torsionsmoment aufnehmen zu können, wird eine vergütete Welle aus der legierten Vergütungsstahlsorte 30CrMoV9 ($R_{p0,2} = 900 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 1100 \text{ N/mm}^2$) eingebaut.

- Auf welchen Betrag M_t^* kann dadurch das Torsionsmoment bei gleicher Zugkraft ($F = 890 \text{ kN}$) und gleicher Sicherheit gesteigert werden, falls Fließen ausgeschlossen werden soll?



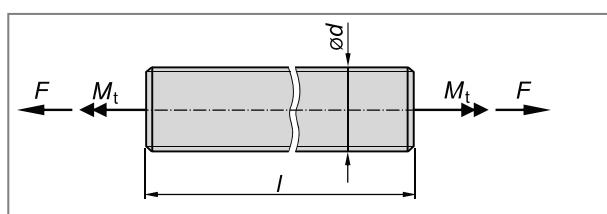
Aufgabe 6.4



Eine Stellspindel aus dem legierten Vergütungsstahl 34CrNiMo6 hat einen zylindrischen Schaft mit dem Durchmesser $d = 30 \text{ mm}$ und eine Länge von $l = 650 \text{ mm}$. Die Kerbwirkung des Gewindes soll unberücksichtigt bleiben.

Werkstoffkennwerte 34CrNiMo6:

$$\begin{aligned} R_{p0,2} &= 1000 \text{ N/mm}^2 \\ R_m &= 1200 \text{ N/mm}^2 \\ E &= 210000 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$



- a) Im Normalbetrieb ist die Spindel durch die Zugkraft $F = 280$ kN statisch beansprucht. Berechnen Sie die Zugspannung in der Spindel. Um welchen Betrag verlängert sich die Spindel dabei?
- b) Beim Verstellen der Spindel wirkt zusätzlich zu der Kraft F noch ein statisches Torsionsmoment, dessen Größe mit $M_t = 2000$ Nm angenommen wird. Berechnen Sie die durch das Torsionsmoment M_t erzeugte Schubspannung τ_t in der Spindel.
- c) Zeichnen Sie für die Beanspruchung aus F und M_t maßstäblich den Mohrschen Spannungskreis und berechnen Sie die Hauptnormalspannungen.

Bei einem Verstellvorgang klemmte die Spindel und brach. Die Untersuchung der Bruchfläche ergab, dass der Werkstoff offenbar durch eine falsche Wärmebehandlung versprödet wurde (Anlassversprödung). Die Zugfestigkeit R_m der versprödeten Spindel betrug 1800 N/mm 2 .

- d) Berechnen Sie unter der Voraussetzung einer unveränderten Zugkraft von $F = 280$ kN das Torsionsmoment beim Bruch.

Aufgabe 6.5



Eine Platte aus der Aluminium-Legierung EN AW-Al Zn5Mg3Cu mit einer Dicke von $t = 15$ mm wird durch die unbekannten Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} elastisch beansprucht (siehe Abbildung). Zur Ermittlung der Spannungen wird eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette in der skizzierten Weise auf der Oberfläche appliziert.

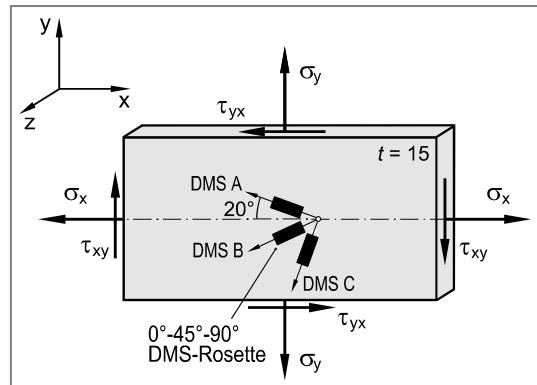
Werkstoffkennwerte für die Aluminiumlegierung EN AW-Al Zn5Mg3Cu:

$$R_{p0,2} = 380 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 550 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 75000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,33$$



- a) Berechnen Sie die unbekannten Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} für eine Dehnungsanzeige von:
 DMS A: $\epsilon_A = 3,159\%$
 DMS B: $\epsilon_B = 0,552\%$
 DMS C: $\epsilon_C = -0,479\%$
- b) Bestimmen Sie Richtung und Betrag der Hauptnormalspannungen.
- c) Ermitteln Sie die Dickenänderung der Aluminiumplatte aufgrund der Beanspruchung gemäß Aufgabenteil a).
- d) Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen (S_F). Ist die Sicherheit ausreichend? Das Werkstoffverhalten kann annähernd als duktil angesehen werden.

Aufgabe 6.6

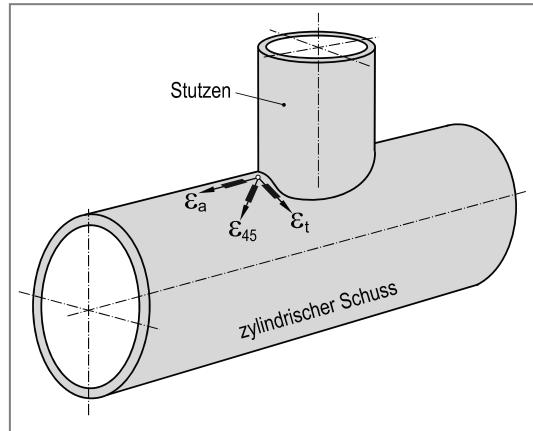
Im Rahmen einer experimentellen Spannungsanalyse wurde am Übergang zwischen Zylinder und Stutzen eines Druckbehälters aus der Stahlsorte 36CrNiMo4 ($R_m = 1150 \text{ N/mm}^2$; $R_{p0,2} = 850 \text{ N/mm}^2$; $E = 210000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,30$) die folgenden Dehnungen gemessen:

$$\varepsilon_t = 0,900 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_a = -0,500 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_{45} = 0,840 \text{ \%}$$

- Berechnen Sie mit Hilfe der gemessenen Dehnungen die Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2} sowie die HauptNormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2} . Ermitteln Sie außerdem die Winkel der Hauptdehnungen bzw. HauptNormalspannungen zur Behälterlängssachse (Axialrichtung).
- Berechnen Sie an der Messstelle die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese (GEH).
- Ermitteln Sie für die Stutzenabzweigung die Sicherheit gegen Fließen. Ist die Sicherheit ausreichend?

**Aufgabe 6.7**

Zur Überprüfung der Belastung eines Zugankers mit Vollkreisquerschnitt ($\varnothing 30\text{mm}$) aus der Vergütungsstahlsorte 30CrNiMo8 wird ein Dehnungsmessstreifen appliziert. Verschentlich wird der Dehnungsmessstreifen schräg ($\alpha = 15^\circ$) zur Längsachse angebracht (siehe Abbildung).

Werkstoffkennwerte 30CrNiMo8:

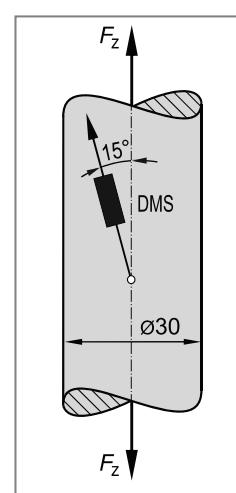
$$R_{p0,2} = 1020 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1390 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 204000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- Berechnen Sie für eine Zugkraft von $F_1 = 320 \text{ kN}$ die Dehnungsanzeige (ε_{DMS}).
- Bestimmen Sie die Zugkraft F_2 bei einer Dehnungsanzeige von $\varepsilon_{DMS} = 3,000 \text{ \%}$.
- Ermitteln Sie die Zugkraft F_3 bei Fließbeginn des Zugankers sowie die zugehörige Anzeige des Dehnungsmessstreifens.

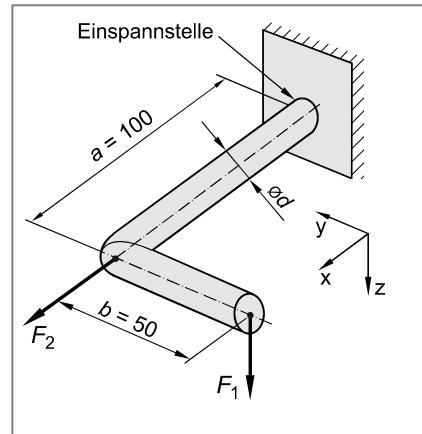


Aufgabe 6.8

Ein einseitig eingespannter, abgewinkelter Rundstab mit Vollkreisquerschnitt ($d = 30 \text{ mm}$) aus der legierten Vergütungsstahlsorte 41Cr4 ($R_{p0,2} = 780 \text{ N/mm}^2$, $R_m = 1050 \text{ N/mm}^2$) wird zunächst nur durch die statisch wirkende Einzelkraft $F_1 = 5 \text{ kN}$ beansprucht ($F_2 = 0$).

Die Kerbwirkung an der Einspannstelle sowie Schubspannungen durch Querkräfte sind für alle Aufgabenteile zu vernachlässigen.

- Berechnen Sie das Biegemoment M_b und das Torsionsmoment M_t an der Einspannstelle.
- Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen an der Einspannstelle. Ist die Sicherheit ausreichend?
- Berechnen Sie die zusätzliche, statisch wirkende Kraft F_2 , die zu einem Bruch des Stabes an der Einspannstelle führt.



Bei einer preisgünstigeren Ausführung wurde für den gebogenen Rundstab der Baustahl S235JR ($R_e = 245 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 440 \text{ N/mm}^2$) verwendet.

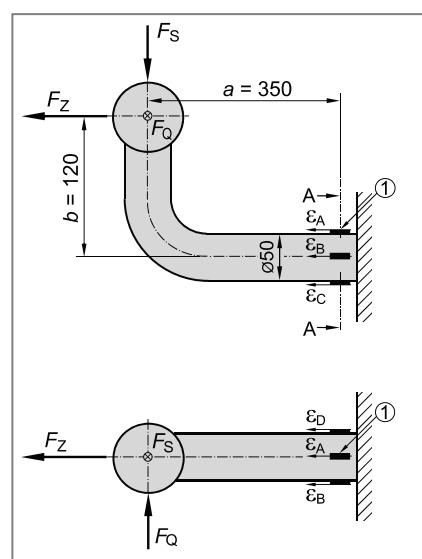
- Berechnen Sie den Durchmesser d so, dass bei ansonsten gleichen Abmessungen, die Kraft $F_1 = 5 \text{ kN}$ mit Sicherheit ($S_B = 2$) aufgenommen werden kann, d. h. kein Bruch eintritt. Die Kraft F_2 soll nicht mehr wirken ($F_2 = 0$).

Aufgabe 6.9

Die Abbildung zeigt eine Anhängerkupplung für Kraftfahrzeuge (Seitenansicht und Draufsicht) mit Vollkreisquerschnitt aus der Vergütungsstahlsorte 34CrMo4 ($R_{p0,2} = 800 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 1080 \text{ N/mm}^2$; $E = 210000 \text{ N/mm}^2$).

Um während eines Fahrversuchs die Stützkraft F_S , die Zugkraft F_Z und die Querkraft F_Q zu ermitteln, wurden im Querschnitt A-A Dehnungsmessstreifen in Achsrichtung in der dargestellten Weise appliziert. Bei der Auswertung des Versuchs ergaben sich die folgenden maximalen Dehnungswerte:

- DMS A: $\varepsilon_A = 2,2312 \text{ \%}$
 DMS B: $\varepsilon_B = 0,7761 \text{ \%}$
 DMS C: $\varepsilon_C = -2,0372 \text{ \%}$
 DMS D: $\varepsilon_D = -0,5821 \text{ \%}$



Die Kerbwirkung an der Einspannstelle sowie eine Schubbeanspruchung aus F_S und F_Q sind zu vernachlässigen.

- Berechnen Sie die Zugkraft F_Z .
- Berechnen Sie die Stützkraft F_S .
- Berechnen Sie die Querkraft F_Q .
- Für einen Sicherheitsnachweis an der Stelle 1 (bei DMS A, siehe Abbildung) im Querschnitt A-A werden die folgenden statisch wirkenden Kräfte angenommen:

$$F_S = 2 \text{ kN}$$

$$F_Z = 40 \text{ kN}$$

$$F_Q = 5 \text{ kN}$$

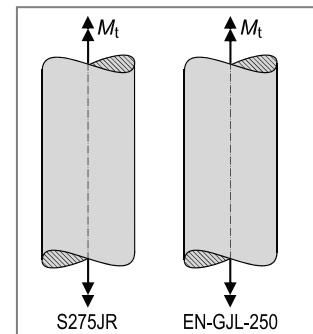
Ermitteln Sie für die Stelle 1 die Sicherheiten gegen Fließen und Bruch.

Aufgabe 6.10



Zwei identische Stäbe mit Vollkreisquerschnitt werden mit einem stetig zunehmenden Torsionsmoment M_t bis zum Bruch belastet. Der linke Stab wurde aus dem unlegierten Baustahl S275JR gefertigt, der rechte Stab hingegen aus der Gusseisen sorte EN-GJL-250.

Zeichnen Sie den zu erwartenden Bruchverlauf in die Abbildung ein und erklären Sie mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises und der in Betracht kommenden Festigkeitshypothese die unterschiedlichen Bruchformen.



Aufgabe 6.11



Der dargestellte Winkelhebel mit Vollkreisquerschnitt ($d = 50 \text{ mm}$) aus dem Vergütungsstahl C45E wird durch die senkrecht wirkende Kraft $F = 10 \text{ kN}$ statisch beansprucht.

Werkstoffkennwerte C45E (vergütet):

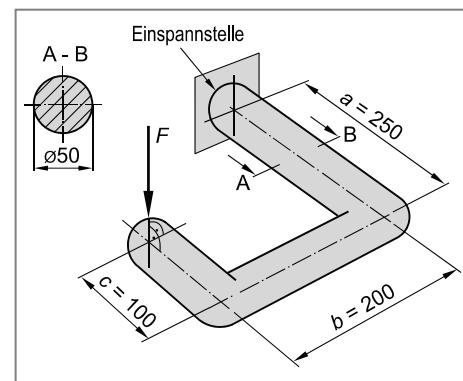
$$R_{p0,2} = 460 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 750 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 209000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen (S_F) an der Einspannstelle. Ist die Sicherheit ausreichend?



Die Kerbwirkung an der Einspannstelle sowie Schubspannungen durch Querkräfte können vernachlässigt werden. Alle Maßangaben in mm.

Aufgabe 6.12

An einem plattenförmigen Bauteil aus Werkstoff C60E wurde für eine experimentelle Spannungsanalyse eine 0° - 120° - 240° DMS-Rosette appliziert, deren A-Richtung mit der x-Richtung einen Winkel von 30° einschließt. Unter Belastung wirken am Bauteil die folgenden Spannungen (Vorzeichen für Schubspannung gemäß spezieller Vorzeichenregelung):

$$\sigma_x = 250 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_y = 130 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{xy} = 150 \text{ N/mm}^2$$

Werkstoffkennwerte C60E:

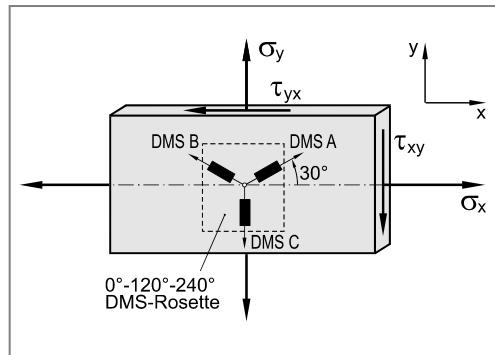
$$R_{p0,2} = 570 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 780 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

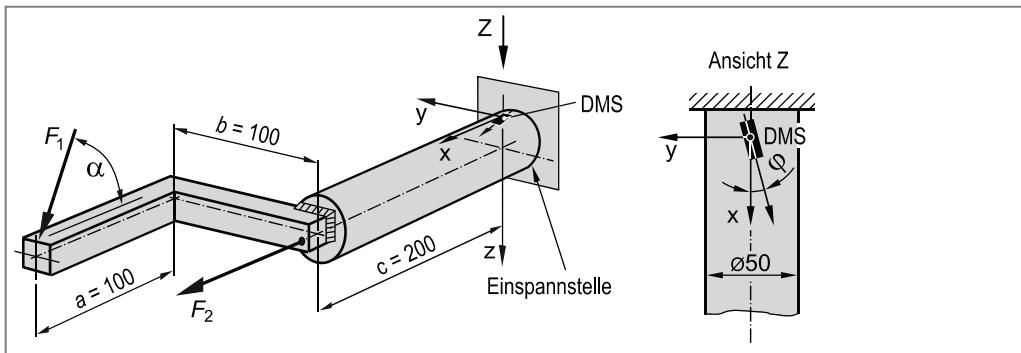
$$\mu = 0,30$$

- Ermitteln Sie die Dehnungen in A-, B- und C-Richtung (Messrichtung der Dehnungsmessstreifen).
- Berechnen Sie die Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2} . Welchen Winkel schließen die Hauptnormalspannungen zur x-Richtung ein?
- Berechnen Sie die Sicherheit der Stahlplatte gegen Fließen. Ist die Sicherheit ausreichend?
- Berechnen Sie den Betrag der Schubspannung τ_{xy} , die bei gleich bleibender Normalspannung ($\sigma_x = 250 \text{ N/mm}^2$ und $\sigma_y = 130 \text{ N/mm}^2$) zu einem Fließen der Stahlplatte führt.

**Aufgabe 6.13**

Ein zweifach abgewinkelter Hebel aus dem Vergütungsstahl 30CrNiMo8 wird durch die Kräfte $F_1 = 25 \text{ kN}$ und $F_2 = 200 \text{ kN}$ statisch beansprucht. Die Kraft F_1 wirkt unter einem Winkel von $\alpha = 60^\circ$ zur Horizontalen, während die Kraft F_2 in Achsrichtung (x-Richtung) wirkt (siehe Abbildung).

Schubspannungen durch Querkräfte sowie Kerbwirkung im Bereich des Einspannquerschnitts sollen für alle Aufgabenteile vernachlässigt werden. Der Winkelhebel hat im Bereich des Einspannquerschnitts einen Vollkreisquerschnitt ($\varnothing 50 \text{ mm}$).



Werkstoffkennwerte 30CrNiMo8 (vergütet):

$$R_{p0,2} = 1050 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1420 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 209000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- a) Ermitteln Sie die Lastspannungen im Bereich des Einspannquerschnitts ($x = 0$).
 - b) Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen (S_F) an der höchst beanspruchten Stelle des Einspannquerschnitts. Ist die Sicherheit ausreichend?
- Zur Kontrolle der Beanspruchung wird auf der Oberseite des Hebels im Bereich des Einspannquerschnitts ($x = 0$) ein Dehnungsmessstreifen (DMS) appliziert. Infolge einer Fertigungsungenauigkeit schließt die Messrichtung des DMS mit der Längsachse des Hebels (x -Achse) einen Winkel von $\varphi = 15^\circ$ ein (siehe Abbildung).
- c) Berechnen Sie die Anzeige des Dehnungsmessstreifens für die gleichzeitige statische Belastung aus $F_1 = 25 \text{ kN}$ und $F_2 = 200 \text{ kN}$.

7 Kerbwirkung

In den vorangegangenen Kapiteln wurden homogene Bauteile mit konstanten Querschnittsabmessungen betrachtet. Derartige (ungekerbte) Bauteile kommen jedoch in der Technik kaum vor. Aufgrund konstruktiver Gegebenheiten (Veränderung der Querschnittsabmessungen) aber auch bedingt durch Fertigungsfehler kann lokal die Spannung überhöht, ungünstige (mehrachsige Spannungszustände) erzeugt und damit ein vorzeitiges Materialversagen begünstigt werden.

7.1 Technische Kerben

Technische Bauteile weisen stets Stellen mit einer mehr oder weniger abrupten Veränderung der inneren oder äußeren Kontur auf (Bild 7.1), die zu einer Störung des „Kraftflusses“ führen (Bild 7.2). Diese Stellen sollen im folgenden als **technische Kerben** bezeichnet werden.

Technische Kerben sind nicht nur konstruktiv bedingt, auch innere Fehlstellen (z. B. Einschlüsse) oder Fügestellen (z. B. Schweißnähte) können im Sinne technischer Kerben wirken (Tabelle 7.1). Wie später noch eingehender gezeigt wird, geht das Versagen eines Bauteils unter statischer und insbesondere zeitlich veränderlicher Beanspruchung häufig von derartigen Kerbstellen aus, da in ihrer Umgebung der Werkstoff besonders hoch und ungünstig (mehrachsig) beansprucht wird (Kapitel 13.2). Die örtliche Überhöhung der Beanspruchung und die hieraus resultierende, einen Bruch begünstigende Wirkungsweise technischer Kerben, bezeichnet man als **Kerbwirkung**.

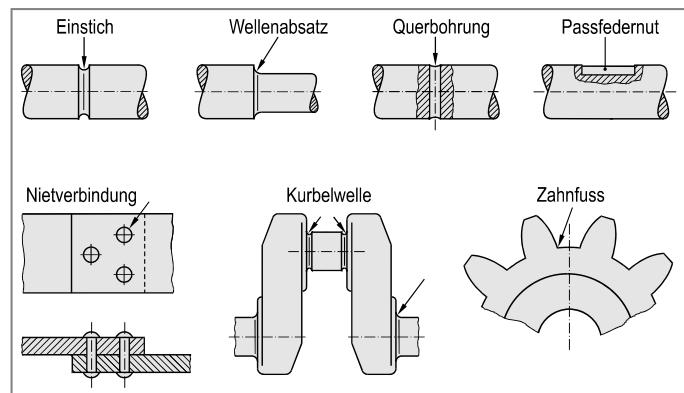


Bild 7.1 Bauteile mit technischen Kerben (Beispiele)

Technische Kerben sind nicht nur konstruktiv bedingt, auch innere Fehlstellen (z. B. Einschlüsse) oder Fügestellen (z. B. Schweißnähte) können im Sinne technischer Kerben wirken (Tabelle 7.1). Wie später noch eingehender gezeigt wird, geht das Versagen eines Bauteils unter statischer und insbesondere zeitlich veränderlicher Beanspruchung häufig von derartigen Kerbstellen aus, da in ihrer Umgebung der Werkstoff besonders hoch und ungünstig (mehrachsig) beansprucht wird (Kapitel 13.2). Die örtliche Überhöhung der Beanspruchung und die hieraus resultierende, einen Bruch begünstigende Wirkungsweise technischer Kerben, bezeichnet man als **Kerbwirkung**.

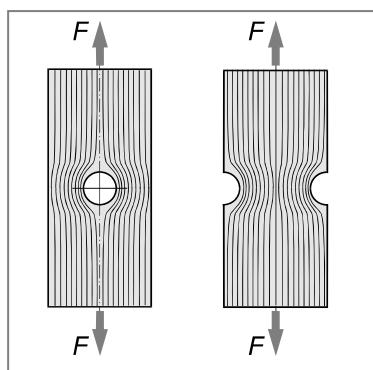


Bild 7.2 Störung des „Kraftflusses“ durch technische Kerben (Stromlinienanalogie)

Tabelle 7.1: Beispiele für technische Kerben

Kerbart	Beispiel
Konstruktive Kerben	<ul style="list-style-type: none"> • Querbohrungen • Einstiche • Gewinde • Querschnittsveränderungen
Fügestellen	<ul style="list-style-type: none"> • Schweißnähte • Lötverbindungen • Nietverbindungen
Innere Fehlstellen	<ul style="list-style-type: none"> • Poren • Einschlüsse • Risse

7.2 Auswirkungen technischer Kerben (Formkerben)

Kerbwirkung kann auf unterschiedliche Weise hervorgerufen werden. Im Einzelnen sind dies:

- **Verminderung der tragenden Querschnittsfläche** und damit Erhöhung der (Nenn-)Spannung (Bild 7.3a).
- **Spannungsüberhöhung im Kerbgrund**. Durch eine Kerbe wird der „Kraftfluss“ gestört (Bild 7.2). In Analogie zur Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit eines von einer inkompressiblen Flüssigkeit durchströmten Kanals, wird auch die Spannung im Kerbgrund überhöht. Die Spannungsüberhöhung ist umso ausgeprägter, je geringer der Kerbradius und je tiefer die Kerbe ist. Da sich im Bauteil unmittelbar hinter der Kerbstelle, im **Kerbgrund** also, eine mehr oder weniger ausgeprägte Spannungsüberhöhung einstellt, muss wegen $\int \sigma \cdot dA = F$ die Spannung im Inneren des Bauteils unter die Nennspannung absinken, d. h. es stellt sich ein von Belastungsart und Bauteilgeometrie abhängiger Spannungsverlauf ein (Bild 7.3b).
- **Ausbildung eines mehrachsigen Spannungszustandes**. Kerben behindern die freie Verformung des Werkstoffs. Infolge dieser Querdehnungsbehinderung bildet sich ein mehrachsiger Spannungszustand aus. Neben einer Längsspannung treten nunmehr weitere Spannungskomponenten (z. B. Normalspannungen in radialer und tangentialer Richtung) auf, die zusätzlich zur Längsspannung wirken (Bild 7.3c).
- **Ausbildung von Sekundärspannungen** bei unsymmetrischer Lage der Kerbstelle in Bezug auf den ungestörten Querschnitt (z. B. einseitige Lage der Kerbe). Hierbei fällt die Wirkungslinie der Kraft nicht mehr mit dem Flächenschwerpunkt S zusammen (Exzentrizität e). Es entsteht ein Biegemoment und demzufolge Biegespannungen, die sich der Nennspannung linear überlagern (Bild 7.3d).

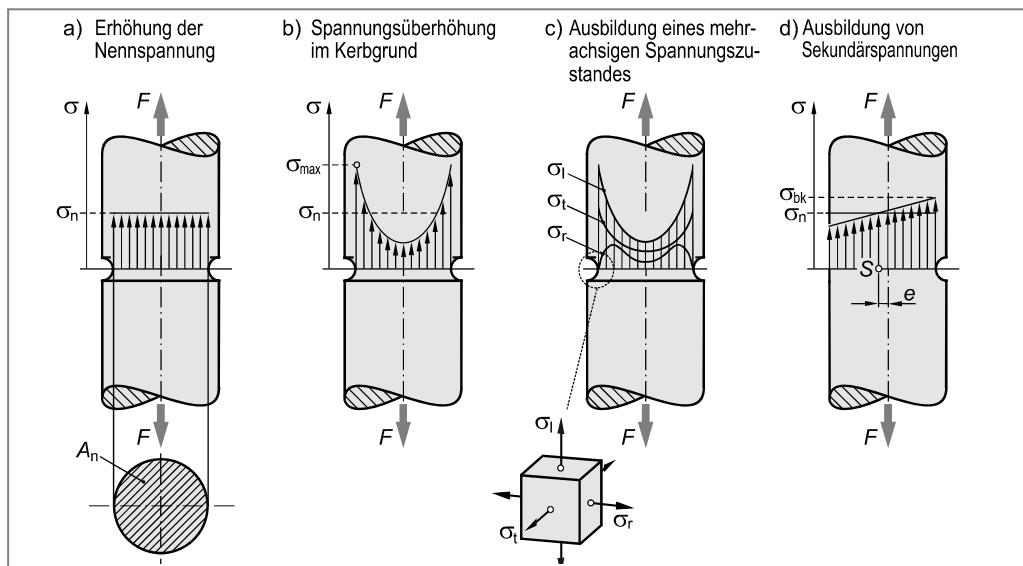


Bild 7.3 Auswirkungen technischer Kerben (Formkerben)

7.3 Nennspannung und Formzahl

In Kapitel 7.2 wurden vier wesentliche, die Kerbwirkung beeinflussenden Faktoren genannt. Bei Festigkeitsnachweisen ist es in der Regel nur erforderlich, die Nennspannung (Bild 7.3a) sowie die Spannungsüberhöhung im Kerbgrund (Bild 7.3b) zu berücksichtigen. Die Ausbildung eines mehrachsigen Spannungszustandes (Bild 7.3c) sowie die Auswirkung von Sekundärspannungen (Bild 7.3d) können im Hinblick auf den Berechnungsaufwand in der Regel vernachlässigt werden, ohne das Ergebnis wesentlich zu verfälschen bzw. sind mitunter durch die gewählten Sicherheitsfaktoren bereits berücksichtigt. Die nachfolgenden Ausführungen sollen sich daher auf die Ermittlung der Nennspannung (σ_n) sowie der maximalen Spannung (σ_{\max}) im Kerbgrund beschränken.

7.3.1 Nennspannung

In geraden, prismatischen bzw. runden Bauteilen wie Stäben, Balken oder Wellen stellt sich bei einer Beanspruchung entsprechend den Grundbelastungsarten ein über die Querschnittsfläche konstanter Spannungsverlauf ein (Zug oder Druck) oder die Spannung nimmt ausgehend von der neutralen Faser (Biegung) bzw. der Drehachse (Torsion) zu den höchst beanspruchten Randfasern hin linear zu bzw. ab. Die entsprechenden Nennspannungen σ_n erhält man entsprechend Kapitel 2 nach den folgenden Grundgleichungen:

$$\text{Zug: } \sigma_n = \frac{F}{A_n} \quad (7.1)$$

$$\text{Druck: } \sigma_{dn} = \frac{F_d}{A_n} \quad (7.2)$$

$$\text{Schub: } \tau_{an} = \frac{F_a}{A_n} \quad (7.3)$$

$$\text{Biegung: } \sigma_{bn} = \frac{M_b}{W_{bn}} \quad (7.4)$$

$$\text{Torsion: } \tau_{tn} = \frac{M_t}{W_{tn}} \quad (7.5)$$

Unter einer **Nennspannung** σ_n bzw. τ_n versteht man eine Spannung, die sich im betrachteten Querschnitt einstellen würde, sofern ein ungestörter Spannungsverlauf vorliegt.

7.3.2 Formzahl

Zur Erfassung der Spannungsspitze im Kerbgrund führt man die **Formzahl** ein. Als Formelzeichen für die Formzahl wird im Rahmen dieses Lehrbuches α_k verwendet. Andere Bezeichnungen, wie zum Beispiel K_t (FKM-Richtlinie [2]) oder α_σ bzw. α_τ (DIN 743-1 [4]), sind ebenfalls gebräuchlich.

Die Formzahl α_k ist definiert als Quotient aus der maximalen Spannung im Kerbgrund σ_{\max} bzw. τ_{\max} und der Nennspannung im Kerbquerschnitt σ_n bzw. τ_n :

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} \text{ bzw. } \alpha_k = \frac{\tau_{\max}}{\tau_n} \quad (7.6)$$

Die Formzahl ist also ein dimensionsloser Faktor und kennzeichnet die Überhöhung der Nennspannung.

Unter der Voraussetzung einer elastischen Beanspruchung, also $\sigma_{\max} < R_e$ bzw. $\sigma_{\max} < R_{p0,2}$ ist die Formzahl im Wesentlichen abhängig von der Geometrie der Kerbe und des Bauteils sowie von der Belastungsart (Zug, Druck, Biegung, Torsion). Bei gleicher Geometrie von Kerbe und Bauteil wird die Nennspannung durch eine Zugbeanspruchung stärker überhöht im Vergleich zu einer Biegebeanspruchung. Torsion führt in der Regel zur geringsten Überhöhung der Nennspannung, d. h. es gilt: $\alpha_{kz} > \alpha_{kb} > \alpha_{kt}$.

Im Kerbgrund treten mehrachsigige Spannungszustände auf, so dass nicht nur eine Überhöhung der Längsspannung stattfindet, sondern auch der Einfluss einer Umfangs- und Radialspannung berücksichtigt werden müsste (Bild 7.3c). Da die Berechnung dieser Spannungskomponenten schwierig ist und das Ergebnis dadurch nur unwesentlich verändert wird, kann ihr Einfluss, zumindest bei zähen Werkstoffen, vernachlässigt werden. Man macht dabei lediglich einen Fehler zur sicheren Seite hin. Bei spröden Werkstoffen wird hingegen die tatsächliche Beanspruchung unterschätzt. Dennoch können aufgrund ihres geringen Einflusses die Umfangs- und Radialspannungen auch in diesem Fall häufig vernachlässigt werden.

7.3.3 Ermittlung von Formzahlen

Um die Formzahl α_k zu ermitteln, muss nach Gleichung (7.6) die maximale Spannung σ_{\max} oder τ_{\max} errechnet und auf die Nennspannung σ_n bzw. τ_n bezogen werden. Dies kann auf unterschiedliche Weise erfolgen:

1. Ermittlung einer geschlossenen Lösung:

Die Ermittlung einer geschlossenen Lösung, also eines formelmäßigen Zusammenhangs zwischen α_k und den geometrischen Kenngrößen des Bauteils gelingt nur für relativ einfache Geometrien, wie zum Beispiel eine abgesetzte Welle (siehe auch Anhang 4).

2. Numerische Lösung:

Für die meisten technischen Kerbfälle können keine geschlossenen Lösungen für die Formzahl α_k formuliert werden, so dass numerische Näherungslösungen herangezogen werden müssen. Viele numerische Rechenverfahren basieren dabei auf der **Finite-Elemente-Methode (FEM)**.

3. Experimentelle Methoden:

Die Formzahl α_k kann auch experimentell ermittelt werden. Hierzu bedient man sich häufig der **Spannungsoptik** oder der **DMS-Technik** (siehe zum Beispiel Aufgabe 7.2 und 7.3).

7.3.4 Formzahldiagramme

Für praktische Anwendungen stehen die nach einem der vorgenannten Verfahren ermittelten Formzahlen in Form von Gleichungen oder Diagrammen, den **Formzahldiagrammen**, zur Verfügung. Aus den Formzahldiagrammen lassen sich in Abhängigkeit von Geometrie und Belastungsart die Formzahlen ablesen. Bild 7.4 zeigt beispielhaft ein Formzahldiagramm für einen Rundstab mit Umdrehungskerbe unter Zug- oder Druckbeanspruchung. Weitere Formzahldiagramme technisch wichtiger Kerbfälle finden sich im Anhang 3 sowie in einer Vielzahl von Fachbüchern und Richtlinien wie zum Beispiel [2; 4 bis 8]:

- Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile aus Stahl, Eisenguss und Aluminiumwerkstoffen
Hrsg: Forschungskuratorium Maschinenbau (FKM)
VDMA-Verlag, 5. Auflage 2003
- DIN 743 (10/2000):
Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen. Teil 2: Formzahlen und Kerbwirkungszahlen
- Wellinger, K.; H. Dietmann:
Festigkeitsberechnung - Grundlagen und technische Anwendung
Kröner-Verlag, 3. Auflage 1976
- Pilkey, W.D.; D.F. Pilkey:
Peterson's Stress Concentration Factors
John Wiley & Sons, 3rd Edition 2008
- Young, W.C.; R.G. Budynas:
Roark's Formulas for Stress and Strain,
McGraw-Hill, 7th Edition 2002
- Muhs, D.; H. Wittel, D. Jannasch, J. Voßiek:
Roloff/Matek Maschinenelemente.
Tabellen
Vieweg-Verlag, 18. Auflage 2007

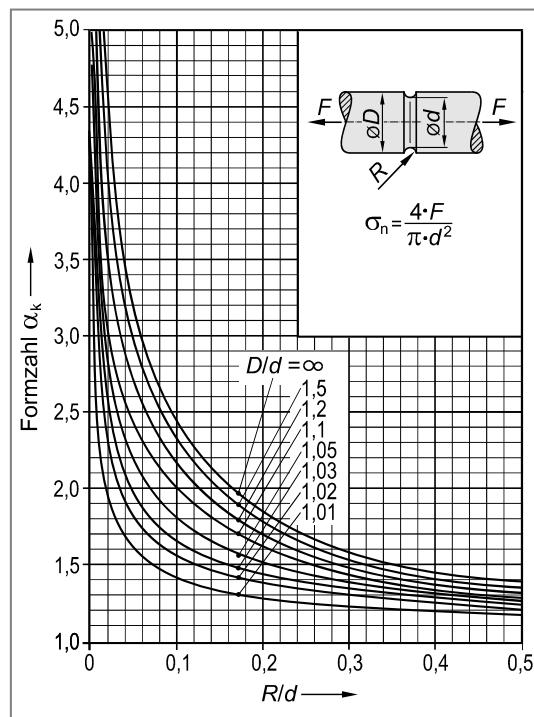


Bild 7.4 Formzahldiagramm am Beispiel eines auf Zug beanspruchten Rundstabes mit Umdrehungskerbe (Einstich)

7.4 Kerbwirkung und Bauteilverhalten

Kerben beeinflussen das Bauteilverhalten in entscheidender Weise. Nachfolgend werden die Auswirkungen von Kerben für duktile und für spröde Werkstoffe untersucht und Festigkeitsbedingungen für gekerbte Bauteile aufgestellt. Die nachfolgenden Aussagen gelten sinngemäß auch unter der Wirkung von Schubspannungen, falls die Normalspannung (σ) durch die Schubspannung (τ) ersetzt und die Werkstoffkennwerte entsprechend der Belastungsart verwendet werden.

7.4.1 Kerbwirkung bei spröden Werkstoffen

Spröde Werkstoffe verhalten sich mehr oder weniger elastisch bis zum Bruch. Erreicht die maximale Spannung die Zugfestigkeit R_m des Werkstoffs, dann entsteht im Kerbgrund ein Riss. Hierdurch wird nicht nur die tragende Querschnittsfläche geschwächt, sondern auch die Kerbwirkung deutlich verschärft, da die Formzahl an der Riss spitze sehr hohe Werte annehmen kann ($\alpha_k > 20$). Die Folge ist eine rasche Rissausbreitung, die zu einem katastrophalen Bruch führen kann.

Mit dem Versagen (Bruch) eines gekerbten Bauteils aus einem spröden Werkstoff ist zu rechnen, sobald gilt:

$$\sigma_{\max} = R_m \quad (7.7)$$

Um einen Bruch mit Sicherheit auszuschließen, muss demzufolge gelten ($\sigma_{\text{zul}} =$ zulässige Spannung):

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

$$\sigma_n \cdot \alpha_k \leq \frac{R_m}{S_B}$$

$$\sigma_n \leq \frac{R_m}{\alpha_k \cdot S_B}$$

Festigkeitsbedingung gekerbter Bauteile aus spröden Werkstoffen (7.8)

7.4.2 Kerbwirkung bei duktilen Werkstoffen

Wird ein gekerbtes Bauteil aus einem duktilen Werkstoff beansprucht (in Bild 7.5 beispielsweise ein durch die Zugkraft F beanspruchter Flachstab), dann verformt sich das Bauteil zunächst elastisch. Der Zusammenhang zwischen der äußeren Beanspruchung (hier: Zugkraft F) und der Dehnung ε_{\max} an der höchst beanspruchten Stelle (im Kerbgrund) stellt sich zunächst als Gerade dar (OA in Bild 7.5). Plastische Verformung (Fließen) setzt ein, sobald die Spannungsspitze (σ_{\max}) die Streck- bzw. Dehngrenze (R_e bzw. $R_{p0,2}$) erreicht:

$$\sigma_{\max} = R_e \quad (7.9)$$

$$\sigma_n \cdot \alpha_k = R_e$$

$$\frac{F_F}{A_n} \cdot \alpha_k = R_e$$

$$F_F = \frac{R_e}{\alpha_k} \cdot A_n$$

Äußere Beanspruchung bei Fließbeginn eines gekerbten Bauteils (7.10)

Die Beanspruchbarkeit eines gekerbten Bauteils (hier durch die Zugkraft F) ist also um den Betrag der Formzahl α_k niedriger im Vergleich zu einem ungekerbten Bauteil.

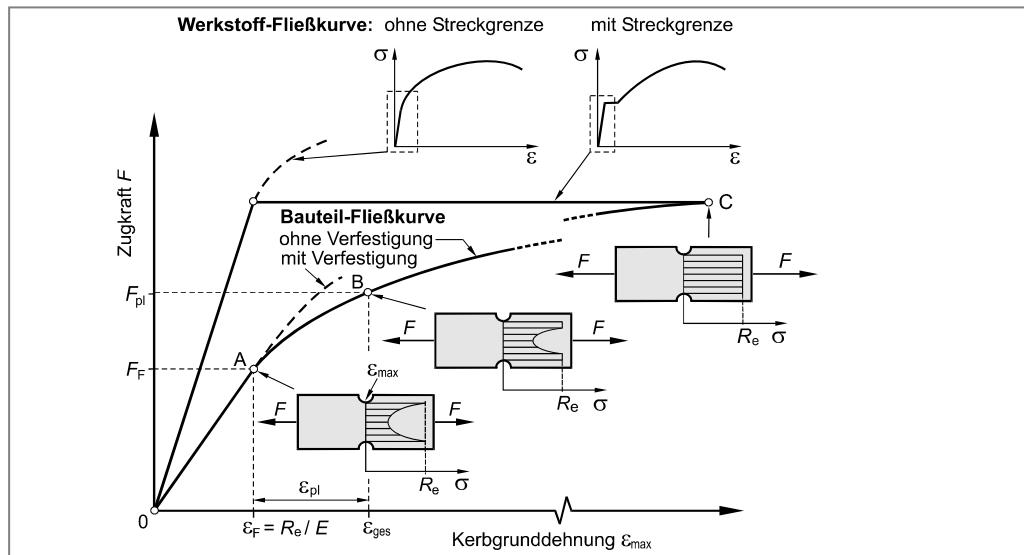


Bild 7.5 Werkstoff- und Bauteilfließkurven

Nimmt die äußere Beanspruchung weiter zu, dann beginnt der Kerbgrund zu plastifizieren. Die plastischen Verformungen breiten sich mit zunehmender Beanspruchung in das Innere des Bauteils aus. Da anfänglich größere Bereiche der tragenden Querschnittsfläche noch elastisch beansprucht sind, kann die äußere Belastung (z. B. die Zugkraft F) weiter gesteigert werden. Hierbei nimmt jedoch die Kerbgrunddehnung ε_{\max} rascher zu, da die plastifizierten Bereiche, unter der Voraussetzung eines linear-elastisch idealplastischen Werkstoffverhaltens, keine weitere Lastaufnahme mehr ermöglichen. Aufgrund des stoffschlüssigen Zusammenhangs übt der elastische Kern eine **Stützwirkung** auf die bereits plastifizierten Randfasern aus, so dass die äußere Beanspruchung weiter gesteigert werden kann (in Bild 7.5 über F_F hinaus). Die Bauteilfließkurve weicht daher zunehmend vom linearen Verlauf ab (Kurvenzug A-B-C in Bild 7.5). Ausgehend vom Kerbgrund breiten sich die plastischen Zonen so weit aus, bis die gesamte Querschnittsfläche plastisch ist d. h. der **vollplastische Zustand** erreicht wird (Punkt C in Bild 7.5).

Bei der Auslegung gekerbter Bauteile ist es üblich, örtliche plastische Verformungen zuzulassen, um den Werkstoff besser auszunutzen. Das Bauteil wird also nicht gegen Fließbeginn, sondern gegen ein vorgegebenes Maß an plastischer Verformung ausgelegt. Die Größe der zugestandenen plastischen Dehnung ε_{pl} richtet sich im Wesentlichen nach der Verformungsfähigkeit des eingesetzten Werkstoffs. Häufig geht man dabei von einem festen Betrag der Gesamtdehnung ε_{ges} (Kerbgrunddehnung) aus, weil das plastische Formänderungsvermögen der Metalle mit zunehmender Streck- bzw. Dehngrenze abnimmt. Bei Werkstoffen mit hoher Streck- bzw. Dehngrenze erhält man wegen $\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{ges} - \varepsilon_F = \varepsilon_{ges} - R_e/E$ (bzw. $\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{ges} - R_{p0,2}/E$) eine geringere plastische Dehnung (Bild 7.5). Für ferritisch-perlitische Stähle hat sich eine Gesamtdehnung von $\varepsilon_{ges} = 0,5\%$ und für austenitische Stähle eine Gesamtdehnung von $\varepsilon_{ges} = 1,0\%$ als zweckmäßig erwiesen.

Bei der überelastischen Auslegung gekerbter Bauteile sollte jedoch stets beachtet werden, dass die zugestandene Kerbgrunddehnung nicht die Funktionsfähigkeit des Bauteils oder die Korrosionsanfälligkeit durch lokale Schädigung von Schutzschichten beeinträchtigt. Auch muss stets die Sicherheit gegen Bruch sowie ein eventuelles Versagen durch Werkstoffermüdung berücksichtigt werden.

Gibt man sich bei der Festigkeitsberechnung gekerbter Bauteile eine bestimmte Gesamtdehnung ε_{ges} vor, dann wird die dadurch ermöglichte Steigerung der äußeren Belastung (in Bild 7.5 von F_F auf F_{pl}) durch die **plastische Stützziffer** (oder **Stützzahl**) n_{pl} gekennzeichnet. Es gilt definitionsgemäß:

$$n_{\text{pl}} = \frac{F_{\text{pl}}}{F_F} \quad \text{Definition der plastischen Stützziffer} \quad (7.11)$$

Bei bekannter plastischer Stützziffer n_{pl} kann aus Gleichung 7.11 die ertragbare Beanspruchung (F_{pl}) errechnet werden. In Gleichung 7.11 kann anstelle der Zugkraft F auch eine andere äußere Belastung wie zum Beispiel das Biege- oder Torsionsmoment (M_b oder M_t) oder der Innendruck (p_i) stehen.

Die Ermittlung der plastischen Stützziffer setzt die Kenntnis der **Bauteilfließkurve** voraus. Die nachfolgenden Ausführungen sollen ein linear-elastisch idealplastisches Werkstoffverhalten zugrunde legen d. h. der Werkstoff soll im Bereich der Kerbgrunddehnung nicht verfestigen. Dieses Verhalten findet sich annähernd bei Stählen mit ausgeprägter Streckgrenze (z. B. unlegierte Baustähle). Auf die Berechnung von Fließkurven gekerbter Bauteile mit einem durch Verfestigung gekennzeichneten Werkstoffverhalten (gestrichelte Kurve in Bild 7.5) soll im Rahmen dieses Buches verzichtet werden.

Bauteilfließkurve

Unter einer Bauteilfließkurve versteht man den Zusammenhang zwischen der Dehnung ε_{ges} an der höchst beanspruchten Stelle (bei gekerbten Bauteilen die Kerbgrunddehnung) und der äußeren Beanspruchung (z. B. Kraft, Moment, Innendruck).

Im Falle eines linear-elastisch idealplastischen Werkstoffverhaltens d. h. bei Stählen mit ausgeprägter Streckgrenze, erhält man für die plastische Stützziffer die folgende Beziehung:

$$n_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\text{ges}}}{\varepsilon_F}} \quad \text{Plastische Stützziffer} \quad (7.12)$$

bzw. da $\varepsilon_{\text{ges}} = \varepsilon_F + \varepsilon_{\text{pl}}$

$$n_{\text{pl}} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{\text{pl}}}{\varepsilon_F}} \quad (7.13)$$

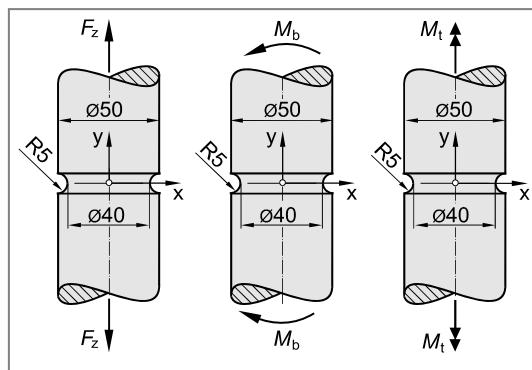
Die Gleichungen 7.12 bzw. 7.13 können auch als konservativer Näherungswert für Metalle ohne ausgeprägte Streckgrenze herangezogen werden.

7.5 Aufgaben

Aufgabe 7.1

Die Abbildung zeigt drei gekerbte Rundstäbe aus dem Vergütungsstahl 42CrMo4, die auf unterschiedliche Weise elastisch beansprucht werden ($F_z = 500 \text{ kN}$ sowie $M_b = 2500 \text{ Nm}$ und $M_t = 5000 \text{ Nm}$).

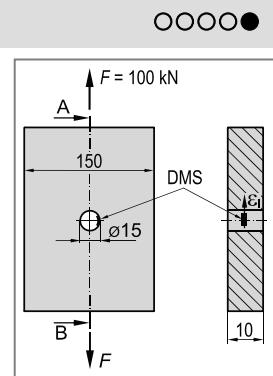
- Ermitteln Sie die Formzahlen α_k für die drei Kerbstäbe mit Hilfe geeigneter Formzahldiagramme.
- Berechnen Sie die Nennspannungen σ_n und die maximalen Spannungen σ_{\max} und skizzieren Sie die jeweiligen Spannungsverläufe.



Aufgabe 7.2

Ein mittig gelochter Flachstab aus Werkstoff 17MnMoV6-4 ($E = 203000 \text{ N/mm}^2$) wird durch die statisch wirkende Zugkraft $F = 100 \text{ kN}$ belastet. Im Kerbgrund wurde ein Dehnungsmessstreifen zur Ermittlung der Längsdehnung ε_l appliziert (siehe Abbildung). Bei der Zugkraft von $F = 100 \text{ kN}$ wird eine Längsdehnung von $\varepsilon_l = 1,00 \%$ gemessen.

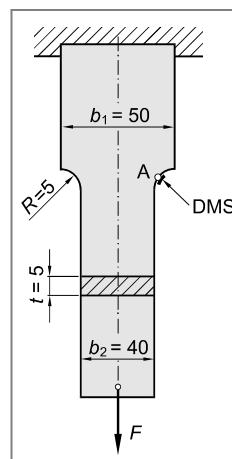
Berechnen Sie aus dem Messwert für die Dehnung die Formzahl α_k und überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe eines geeigneten Formzahldiagrammes.



Aufgabe 7.3

Ein Halteband aus unlegiertem Baustahl S275JR ($E = 210000 \text{ N/mm}^2$; $R_c = 430 \text{ N/mm}^2$) ist an seinem oberen Ende fest eingespannt und am unteren Ende durch die Kraft F statisch belastet (siehe Abbildung). Bei der Kraft $F = 25 \text{ kN}$ wurde an der höchst beanspruchten Stelle A in Längsrichtung die Dehnung $\varepsilon_l = 1,042 \%$ gemessen.

- Berechnen Sie die Formzahl α_k .
- Ermitteln Sie die Sicherheit gegen Fließen.
- Berechnen Sie die Zugkraft F_F , die zum Fließen des Bandes führt.
- Um den Werkstoff besser auszunutzen, soll an der höchst beanspruchten Stelle des Haltebandes (im Kerbgrund) eine Gesamtdehnung von $\varepsilon_{\text{ges}} = 0,30 \%$ zugelassen werden.
- Mit welcher Kraft F_{pl} kann das Halteband dann beansprucht werden (linear-elastisch idealplastisches Werkstoffverhalten)?
- Berechnen Sie die Kraft F_{vpl} , die zum vollplastischen Zustand des Haltebandes führt.



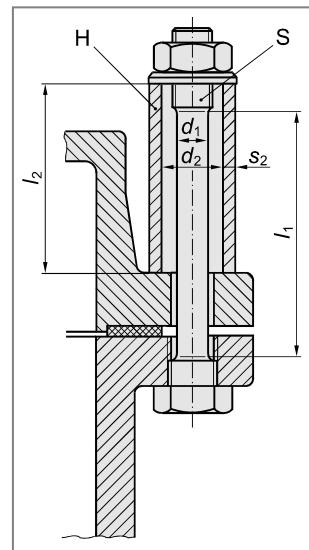
Aufgabe 7.4

Der Deckel eines Druckbehälters ist mit Hilfe von Dehn-schrauben (S) aus Vergütungsstahl C45E ($R_{p0,2} = 490 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 710 \text{ N/mm}^2$; $E = 210000 \text{ N/mm}^2$) und Hülsen (H) aus der unlegierten Baustahlsorte S275JR ($R_e = 260 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 420 \text{ N/mm}^2$; $E = 210000 \text{ N/mm}^2$) befestigt (siehe Abbildung).

Schraube: $d_1 = 12 \text{ mm}$
 $l_1 = 128 \text{ mm}$

Hülse: $d_2 = 24 \text{ mm}$
 $s_2 = 3 \text{ mm}$
 $l_2 = 84 \text{ mm}$

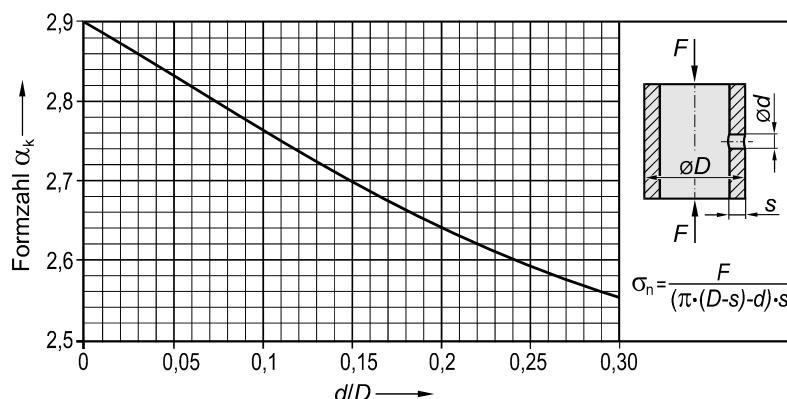
- a) Im drucklosen Zustand wird jede Schraube mit einer statischen Zugkraft von $F_V = 24 \text{ kN}$ vorgespannt.
- Berechnen Sie die Längenänderung der Schraube sowie die Höhenänderung der Hülse.
 - Führt eine Steigerung der Vorspannkraft F_V zuerst zu plastischen Verformungen in der Hülse oder in der Schraube?



- b) Während des Anziehens wird zusätzlich zu der als konstant anzunehmenden Vorspannkraft $F_V = 24 \text{ kN}$ infolge Reibung noch ein Torsionsmoment M_t auf die Schrauben übertragen, das mit 40% des Anzugsmomentes M_A anzunehmen ist. Berechnen Sie das maximal zulässige Anzugsmoment M_A , falls die Gesamtbeanspruchung der Schrauben auf 2/3 ihrer 0,2%-Dehngrenze $R_{p0,2}$ begrenzt werden muss.

Nach Druckaufbringung erhöht sich die Zugkraft auf $F_{\text{ges}} = 36,5 \text{ kN}$ je Schraube. In die Hülse muss außerdem nachträglich eine Querbohrung von 4,5 mm Durchmesser eingebbracht werden.

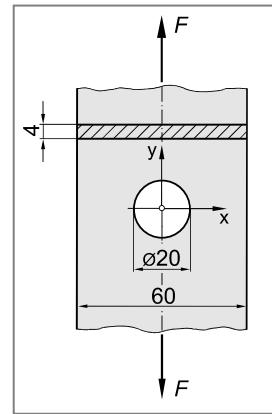
- c) Überprüfen Sie, ob unter diesen Bedingungen noch ein sicherer Betrieb (Belastung durch F_{ges}) gewährleistet ist, falls lokale Dehnungen bis $\varepsilon_{\text{ges}} = 0,5 \%$ als zulässig erachtet werden und eine Mindestsicherheit von $S_{pl} = 1,5$ gefordert wird (das Torsionsmoment soll unberücksichtigt bleiben). Falls nein, auf welchen Wert muss dann die Schraubenkraft im Betrieb reduziert werden?



Aufgabe 7.5

Ein Halteband mit Querbohrung ($d = 20 \text{ mm}$, $b = 60 \text{ mm}$) aus der unlegierten Vergütungsstahlsorte C45E wird durch die Kraft F statisch auf Zug belastet ($E = 210000 \text{ N/mm}^2$; $R_e = 490 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 710 \text{ N/mm}^2$).

- Berechnen Sie die Kraft F_F bei Fließbeginn des Haltebandes.
- Errechnen Sie die Nennspannung σ_n bei Fließbeginn und skizzieren Sie die Spannungsverteilung.
- Die Gesamtdehnung an der höchst beanspruchten Stelle soll auf $\varepsilon_{\text{ges}} = 0,5\%$ beschränkt werden. Berechnen Sie für diesen Fall die zulässige Kraft F_{zul} ($S_{\text{pl}} = 1,5$).
- Bei welcher Kraft F_B ist mit dem Bruch des Haltebandes zu rechnen?

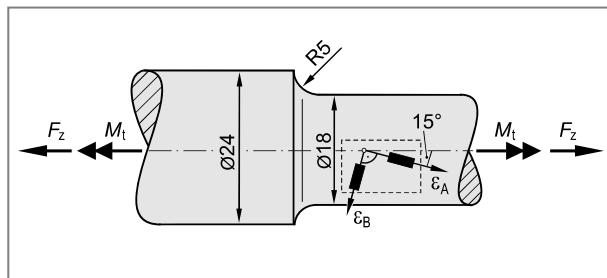
**Aufgabe 7.6**

Die dargestellte abgesetzte Welle aus Werkstoff 38Cr2 wird durch die statisch wirkende Kraft F_Z und das statisch wirkende Torsionsmoment M_t beansprucht. Zur Ermittlung der Belastung wurden außerdem in hinreichendem Abstand vom Wellenabsatz zwei Dehnungsmessstreifen (DMS) in der dargestellten Weise appliziert. Die beiden Dehnungsmessstreifen stehen senkrecht zueinander.

Werkstoffkennwerte 38Cr2:

$$\begin{aligned} R_{p0,2} &= 510 \text{ N/mm}^2 \\ R_m &= 760 \text{ N/mm}^2 \\ E &= 210000 \text{ N/mm}^2 \\ \mu &= 0,30 \end{aligned}$$

- Berechnen Sie die Dehnungen ε_A und ε_B in Messrichtung der DMS bei einer Belastung von $F_Z = 30 \text{ kN}$ und $M_t = 100 \text{ Nm}$.
- Ermitteln Sie für den Wellenabsatz für eine Beanspruchung gemäß Aufgabenteil a) die Sicherheit gegen Fließen. Ist die Sicherheit ausreichend?
- Bestimmen Sie das maximal übertragbare Torsionsmoment M_t^* damit bei gleich bleibender Zugkraft ($F_Z = 30 \text{ kN}$) am Wellenabsatz Fließen mit Sicherheit ($S_F = 1,35$) ausgeschlossen werden kann.



Aufgabe 7.7

Ein Rundstab mit Vollkreisquerschnitt aus der unlegierten Vergütungsstahlsorte C45E ($D = 32 \text{ mm}$, $l = 420 \text{ mm}$, $c = 120 \text{ mm}$) ist an seinem oberen Ende fest eingespannt und am unteren Ende mit einer Lasche verbunden (siehe Abbildung). Über die Lasche kann der Rundstab auf unterschiedliche Weise beansprucht werden. Die Kerbwirkung an der Einspannstelle soll vernachlässigt werden.

Werkstoffkennwerte C45E:

$$R_c = 490 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 720 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

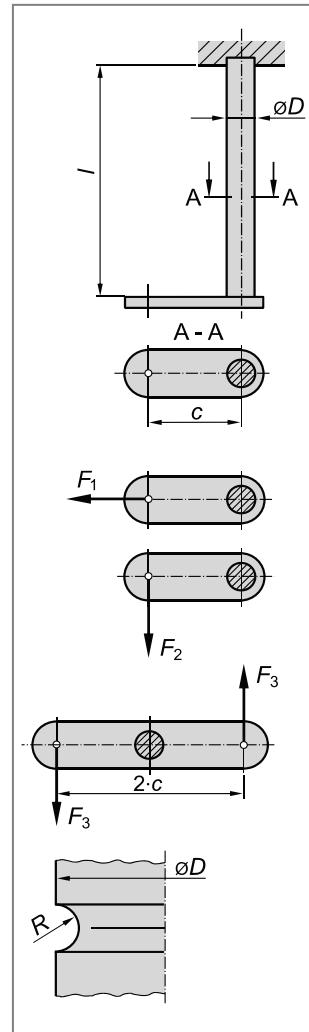
$$\mu = 0,30$$

Es sind verschiedene Lastfälle zu untersuchen:

- An der Lasche greift die statische Kraft $F_1 = 1250 \text{ N}$ an (siehe Abbildung). Berechnen Sie die Spannung und die Dehnung an der höchst beanspruchten Stelle des Rundstabes.
- An der Lasche greift die statische Kraft $F_2 = 2250 \text{ N}$ entsprechend der Abbildung an. Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen. Ist die Sicherheit ausreichend?

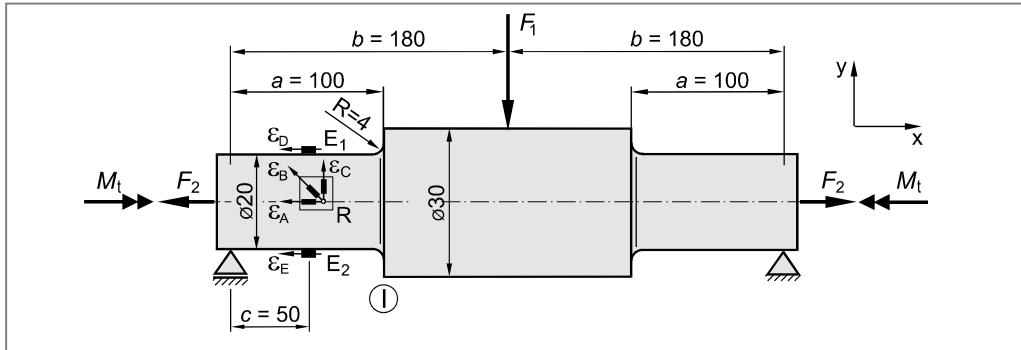
Anstelle der einseitigen wird eine symmetrische Lasche angebracht. Die Lasche wird durch die beiden statischen Kräfte F_3 beansprucht. Außerdem wird in Stabmitte ein halbkreisförmiger Einstich mit dem Radius $R = 3,2 \text{ mm}$ eingearbeitet (siehe Abbildung).

- Berechnen Sie die zulässigen Kräfte F_3 , falls mit 1,4-facher Sicherheit keine plastische Verformungen auftreten dürfen.
- Berechnen Sie die zulässigen Kräfte F_3 falls mit 1,4-facher Sicherheit die plastische Dehnung an der höchst beanspruchten Stelle auf $\varepsilon_{pl} = 0,2\%$ begrenzt werden soll.



Aufgabe 7.8

Die Abbildung zeigt eine abgesetzte Welle mit Vollkreisquerschnitt aus unlegiertem Vergütungsstahl C45E ($R_c = 340 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 620 \text{ N/mm}^2$; $E = 205000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,30$).



Die Welle wird durch die mittig angreifende Querkraft $F_1 = 1050 \text{ N}$ und das Torsionsmoment $M_t = 72 \text{ Nm}$ statisch beansprucht. Die Zugkraft F_2 wirkt zunächst nicht ($F_2 = 0$).

- Berechnen Sie das Biegemoment im Kerbgrund (Stelle I).
- Bestimmen Sie für die Kerbstelle I die Sicherheiten gegen Fließen (S_F) und Gewaltbruch (S_B). Sind die Sicherheiten ausreichend?
- Ermitteln Sie das maximal übertragbare Torsionsmoment M_t^* damit bei gleichbleibender Querkraft F_1 kein Fließen im Kerbgrund eintritt (Zugkraft $F_2 = 0$).

Die Welle unterliegt nun einer unbekannten Betriebsbeanspruchung. Die Querkraft F_1 und die Zugkraft F_2 sowie das Torsionsmoment M_t sind nicht bekannt. Zur Ermittlung der Kräfte und des Torsionsmomentes werden in hinreichendem Abstand vom Wellenabsatz (die Kerbwirkung kann unberücksichtigt bleiben) in der skizzierten Weise eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette (R) sowie zwei einzelne DMS ($E1$ und $E2$) in Längsrichtung appliziert. Unter Belastung werden die folgenden Dehnungen ermittelt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_A &= 1,300 \% \\ \varepsilon_B &= 0,065 \% \\ \varepsilon_C &= -0,390 \% \\ \varepsilon_D &= 1,050 \% \\ \varepsilon_E &= 1,550 \%\end{aligned}$$

- Ermitteln Sie anhand der Dehnungswerte die Zugkraft F_2 .
- Berechnen Sie die Querkraft F_1 .
- Ermitteln Sie Betrag und Drehsinn des Torsionsmomentes M_t .
- Berechnen Sie unter Betriebsbeanspruchung die Sicherheit S_F gegen Fließen im Kerbquerschnitt I ($R_{p0,2} = 900 \text{ N/mm}^2$).

Aufgabe 7.9

An einem Bauteil ist eine Dehnschraube aus dem Vergütungsstahl C35E zu überprüfen. Der gefährdete Querschnitt liegt im glatten, zylindrischen Teil des Schraubenbolzens (siehe Abbildung).

Werkstoffkennwerte C35E (vergütet):

$$R_{p0,2} = 430 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 740 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

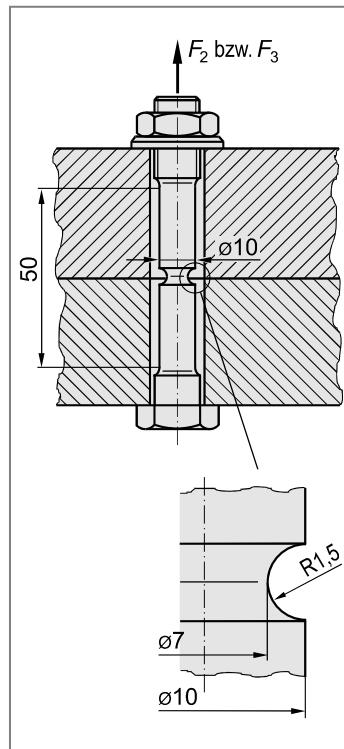
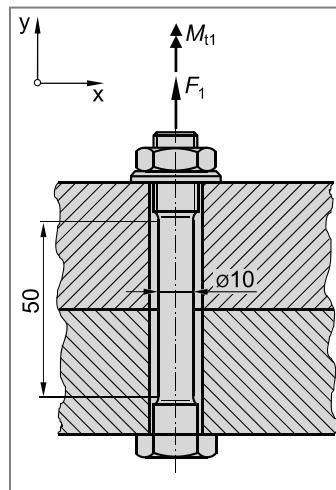
$$\mu = 0,30$$

Der Schraubenbolzen wird zunächst durch die Vorspannkraft $F_1 = 7860 \text{ N}$ und zusätzlich durch das Torsionsmoment $M_{t1} = 11,78 \text{ Nm}$ (bedingt durch das Anziehen der Schraube) beansprucht.

- Berechnen Sie die durch die Vorspannkraft F_1 im gefährdeten Querschnitt ($d_0 = 10 \text{ mm}$) erzeugte Zugspannung σ_z . Um welchen Betrag verlängert sich dabei der zylindrische Teil des Schraubenbolzens ($l_0 = 50 \text{ mm}$)?
- Berechnen Sie die durch das Torsionsmoment M_{t1} im gefährdeten Querschnitt erzeugte maximale Schubspannung τ_t . Um welchen Winkel φ wird der zylindrische Teil des Schraubenbolzens dabei verdreht?
- Skizzieren Sie den Mohrschen Spannungskreis für die Außenoberfläche im glatten zylindrischen Teil des Schraubenbolzens. Ermitteln Sie die Hauptnormalspannungen sowie die Winkel zwischen den Hauptspannungsrichtungen und der Schraubenlängsachse.
- Berechnen Sie für den zylindrischen Teil der Dehnschraube das Torsionsmoment M_{t2} bei Fließbeginn. Die Vorspannkraft soll als konstant angenommen werden ($F_1 = 7860 \text{ N}$).

Die Schraube wird nun mit einer hydraulischen Vorspanneinrichtung eingebaut, so dass kein Drehmoment übertragen werden kann ($M_t = 0$). Außerdem werden jetzt Dehnschrauben mit einem halbkreisförmigen Einstich eingesetzt. Der Kerbradius R beträgt 1,5 mm (siehe Abbildung).

- Berechnen Sie zu zulässige Vorspannkraft F_2 , falls mit 1,5-facher Sicherheit ($S_F = 1,5$) keinerlei plastische Verformungen auftreten sollen.
- Ermitteln Sie die Vorspannkraft F_3 , falls mit 1,5-facher Sicherheit die plastische Dehnung (ε_{pl}) an der höchst beanspruchten Stelle auf 0,3 % beschränkt werden soll.



Aufgabe 7.10

Der dargestellte Ausleger aus den Werkstoffen E295 (Vierkanthrohr) und S275JR (Vierkantprofilstab) wird an seinem rechten Ende durch die Einzelkraft F belastet.

Kerbwirkung an der Einspannstelle sowie Schubspannungen durch Querkräfte sind bei den nachfolgenden Berechnungen zu vernachlässigen. Die Enden des Auslegers können als ideal starr betrachtet werden. Das Eigengewicht des Auslegers wird vernachlässigt. Für beide Werkstoffe (E295 und S275JR) soll linear-elastisch idealplastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt werden.

Werkstoffkennwerte:

Vierkantprofilstab S275JR:

$$R_{e1} = 275 \text{ N/mm}^2$$

$$R_{m1} = 500 \text{ N/mm}^2$$

$$E_1 = 209000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu_1 = 0,30$$

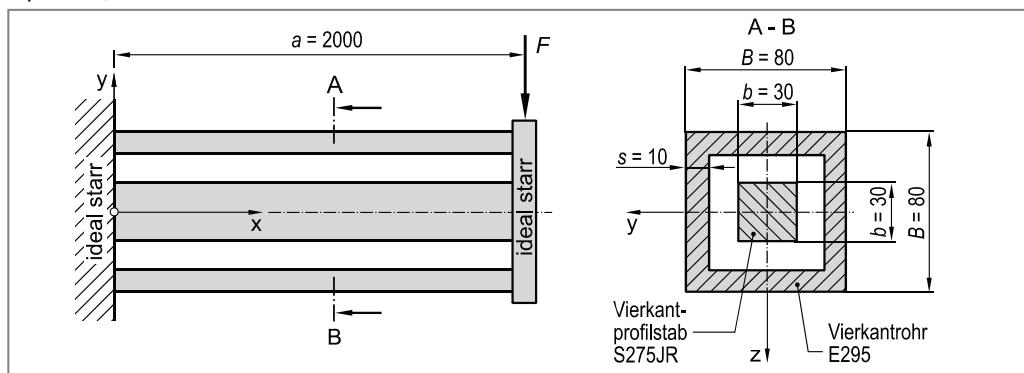
Vierkanthrohr E295:

$$R_{e2} = 295 \text{ N/mm}^2$$

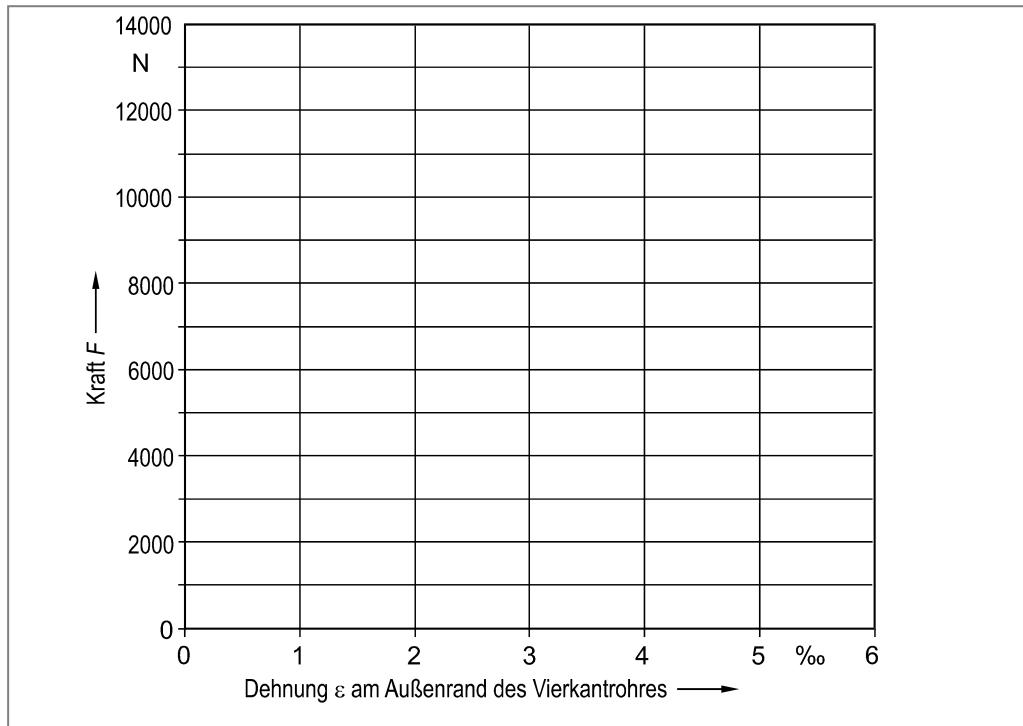
$$R_{m2} = 750 \text{ N/mm}^2$$

$$E_2 = 209000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu_2 = 0,30$$



- Berechnen Sie das axiale Flächenmoment 2. Ordnung (I_y) sowie das axiale Widerstandsmoment (W_{by}) des Auslegers bezüglich der y-Achse.
- Ermitteln Sie diejenige Stelle am Ausleger, die mit zunehmender Erhöhung der Kraft F erstmals Fließen zeigt (Begründung!). Beachten Sie, dass der Vierkantprofilstab sowie das Rohr unterschiedliche Werkstoffkennwerte haben. Berechnen Sie die Kraft F_F bei Fließbeginn des Auslegers.
- Berechnen Sie die Kraft F_{pl} , die erforderlich ist, um das Vierkanthrohr bis $z_{pl} = 30 \text{ mm}$ zu plastifizieren.
- Berechnen Sie die Kraft F_{pl}^* bei Fließbeginn des Vierkantprofilstabes.
- Ermitteln Sie die Kraft F_{vpl} mit Erreichen des vollplastischen Zustandes des Auslegers.
- Skizzieren Sie mit Hilfe der in Aufgabenteil b) bis e) berechneten Werte die Bauteilfließkurve des Auslegers in das vorbereitete Diagramm.



Aufgabe 7.11



Der dargestellte Lagerzapfen aus dem legierten Vergütungsstahl 34CrMo4 ($R_{p0,2} = 800 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 1000 \text{ N/mm}^2$; $E = 205000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,30$) wird durch die statischen Kräfte F_1 und F_2 sowie durch das statische Torsionsmoment M_t belastet. Zur Ermittlung der unbekannten Kräfte und des Torsionsmomentes werden in der skizzierter Weise eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette (R) sowie zwei einzelne DMS (E_1 und E_2) in Längsrichtung appliziert. Unter Belastung werden die folgenden Dehnungen ermittelt:

$$\varepsilon_A = 1,60 \%$$

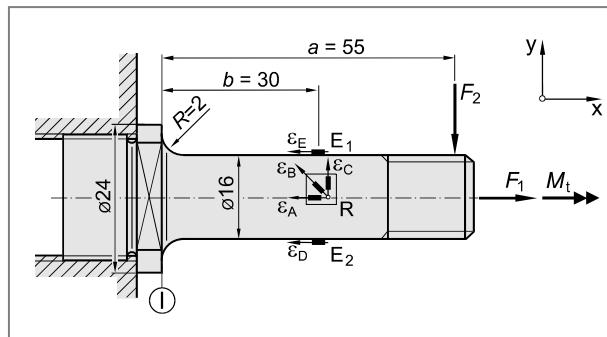
$$\varepsilon_B = 0,00 \%$$

$$\varepsilon_C = -0,48 \%$$

$$\varepsilon_D = 1,40 \%$$

$$\varepsilon_E = 1,80 \%$$

- Ermitteln Sie anhand der Dehnungswerte die Zugkraft F_1 .
- Berechnen Sie die Querkraft F_2 .
- Ermitteln Sie Betrag und Richtung des Torsionsmomentes M_t .
- Bestimmen Sie die Sicherheit gegen Fließen im Kerbquerschnitt I. Ist die Sicherheit ausreichend?



8 Knickung von Stäben

Bauteile die auf Zug beansprucht werden, können ihre Funktion sicher erfüllen, solange die Zugspannung σ_z die Streck- oder Dehngrenze des Werkstoffs nicht überschreitet ($\sigma_z \leq R_c$ bzw. $\sigma_z \leq R_{p0,2}$). Werden Bauteile hingegen auf Druck beansprucht, dann können bereits vor Erreichen der Quetsch- oder Stauchgrenze, auch bei mittig angreifender Druckkraft, seitliche Ausbiegungen auftreten. Man spricht dann von **Knickung**. Diejenige Kraft F , die zur Knickung führt, wird als **Knickkraft F_K** bezeichnet und soll nachfolgend ermittelt werden.

8.1 Knickkraft (Eulersche Knickfälle)

Die Berechnung der Knickkraft eines auf Druck beanspruchten Stabes soll zunächst für einen außermittigen Kraftangriff erfolgen. Hieraus soll dann auf die Verhältnisse mittig beanspruchter Druckstäbe geschlossen werden.

8.1.1 Knickung bei außermittigem Kraftangriff

Zur Herleitung der Knickkraft F_K wird zunächst ein beidseitig gelenkig gelagerter, jedoch quer zur Stablängsachse nicht verschiebbarer Stab betrachtet, dessen Querabmessungen klein gegenüber seiner Länge sein sollen (Bild 8.1a). Der Kraftangriffspunkt soll sich voraussetzungsgemäß außerhalb der Stabmitte (Exzentrizität e zur Stabachse) befinden. Diese Voraussetzung ist häufig gerechtfertigt, da auch in der Praxis, selbst bei mittig auf Druck beanspruchten Stäben, eine geringe Exzentrizität e auftritt (z. B. Montageungenauigkeiten).

Die Kraft F bewirkt ein in Stablängsrichtung veränderliches Biegemoment $M_{by}(x)$ und führt zu einer Durchbiegung $w(x)$ des Stabes (Bild 8.1b).

Für das Biegemoment M_{by} um die zur Zeichenebene senkrechte y-Achse durch den Flächenschwerpunkt S des Querschnitts gilt (Bild 8.1c):

$$M_{by}(x) = F \cdot (w(x) + e) \quad (8.1)$$

Zur Berechnung der Knickkraft F_K muss die Durchbiegung $w(x)$ des Stabes bereits berücksichtigt werden, da man aus der Voraussetzung eines geraden Stabes keine Aussagen für einen gebogenen Stab ableiten kann.

Für kleine Durchbiegungen $w(x)$ lautet die Differentialgleichung der Biegelinie:

$$\frac{M_{by}(x)}{E \cdot I_y} = -w''(x) \quad (8.2)$$

Zur Herleitung der Differentialgleichung der Biegelinie siehe zum Beispiel [9].

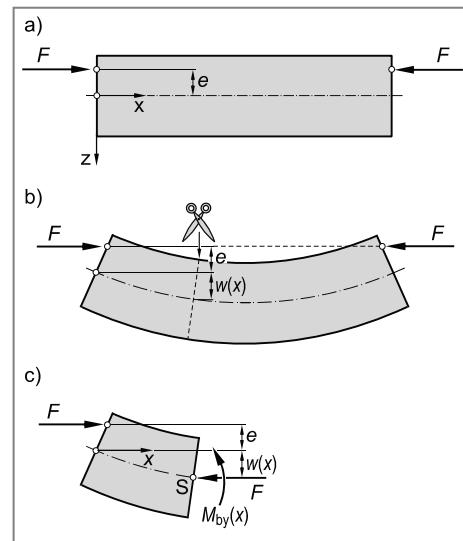


Bild 8.1 Druckstab mit außermittiger Belastung
 a) gerader Stab
 b) gebogener Stab
 c) Kräfte und Momente am frei geschnittenen Stab

Gleichung 8.1 in Gleichung 8.2 eingesetzt ergibt:

$$\frac{F \cdot (w(x) + e)}{E \cdot I_y} = -w''(x) \quad (8.3)$$

bzw. umgeformt:

$$w''(x) + \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot (w(x) + e) = 0 \quad (8.4)$$

Führt man zur Lösung dieser Differentialgleichung die neue Veränderliche $u(x)$ ein, wobei gelten soll:

$$\begin{aligned} u(x) &= w(x) + e \\ u''(x) &= w''(x) \end{aligned} \quad (8.5)$$

und definiert außerdem zur Vereinfachung

$$\eta = \sqrt{\frac{F}{E \cdot I_y}} \quad (8.6)$$

dann folgt aus Gleichung 8.4:

$$u''(x) + \eta^2 \cdot u(x) = 0 \quad (8.7)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$u(x) = C_1 \sin(\eta \cdot x) + C_2 \cos(\eta \cdot x) \quad (8.8)$$

bzw. wegen $w(x) = u(x) - e$ schließlich:

$$w(x) = C_1 \sin(\eta \cdot x) + C_2 \cos(\eta \cdot x) - e \quad (8.9)$$

Voraussetzungsgemäß sollen die beiden Enden des Stabes gelenkig gelagert, jedoch senkrecht zur Stabachse nicht verschiebbar sein. Damit ergeben sich die folgenden Randbedingungen:

$$\begin{aligned} w(x=0) &= 0 \\ w(x=l) &= 0 \end{aligned}$$

Setzt man diese Randbedingungen in die Lösung der Differentialgleichung (Gleichung 8.9) ein, dann lassen sich die Konstanten C_1 und C_2 einfach ermitteln. Man erhält:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \cdot \sin(\eta \cdot 0) + C_2 \cdot \cos(\eta \cdot 0) - e \\ 0 &= C_2 - e \\ C_2 &= e \end{aligned} \quad (8.10)$$

und

$$0 = C_1 \cdot \sin(\eta \cdot l) + C_2 \cdot \cos(\eta \cdot l) - e$$

$$0 = C_1 \cdot \sin(\eta \cdot l) + e \cdot \cos(\eta \cdot l) - e$$

$$C_1 = e \cdot \frac{1 - \cos(\eta \cdot l)}{\sin(\eta \cdot l)} = e \cdot \frac{2 \cdot \sin^2\left(\frac{\eta \cdot l}{2}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\eta \cdot l}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\eta \cdot l}{2}\right)} = e \cdot \tan\left(\frac{\eta \cdot l}{2}\right) \quad (8.11)$$

Die Gleichung der Biegelinie $w(x)$ lautet somit (Gleichung 8.9):

$$\begin{aligned} w(x) &= e \cdot \tan\left(\frac{\eta \cdot l}{2}\right) \cdot \sin(\eta \cdot x) + e \cdot \cos(\eta \cdot x) - e \\ &= e \cdot \left(\tan\left(\frac{\eta \cdot l}{2}\right) \cdot \sin(\eta \cdot x) + \cos(\eta \cdot x) - 1 \right) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Zur Vereinfachung von Gleichung 8.12 wendet man das folgende Additionstheorem an:

$$\begin{aligned} \tan x \cdot \sin y + \cos y &= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin y + \cos y = \frac{\sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \cos y}{\cos x} \\ &= \frac{\cos(x - y)}{\cos x} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Damit lässt sich Gleichung 8.12 (Biegelinie) wie folgt umformen:

$$w(x) = e \cdot \left(\frac{\cos\left(\frac{\eta \cdot l}{2} - \eta \cdot x\right)}{\cos\left(\frac{\eta \cdot l}{2}\right)} - 1 \right) = e \cdot \left(\frac{\cos\left(\eta \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right)\right)}{\cos\left(\frac{\eta \cdot l}{2}\right)} - 1 \right) \quad (8.14)$$

Aus Symmetriegründen erhält man die maximale Durchbiegung $w(x)$ in der Stabmitte, also für $x = l / 2$. Damit folgt aus Gleichung 8.14:

$$w\left(x = \frac{l}{2}\right) = w_{\max} = e \cdot \frac{\cos(\eta \cdot 0)}{\cos\left(\frac{\eta \cdot l}{2}\right)} - e = \frac{e}{\cos\left(\frac{\eta \cdot l}{2}\right)} - e \quad (8.15)$$

Mit einem Versagen des Stabes durch ein seitliches Ausknicken ist dann zu rechnen, sobald w_{\max} „unendlich“ wird. Dies ist der Fall, sobald gilt:

$$\cos\left(\frac{\eta \cdot l}{2}\right) = 0 \quad (8.16)$$

und damit:

$$\frac{\eta \cdot l}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Die Fälle $n \cdot \pi/2$ mit $n = 3, 5, \text{ usw.}$ müssen nicht betrachtet werden, da nur die kleinste, zum Ausknicken führende Kraft (Knickkraft) ermittelt werden soll.

Mit $\eta = \sqrt{\frac{F}{E \cdot I_y}}$ (Gleichung 8.6) erhält man damit letztlich diejenige Kraft $F = F_K$ die w_{\max} „unendlich“ werden lässt, d. h. eine Knickung des Stabes verursacht:

$$\sqrt{\frac{F_K}{E \cdot I_y}} \cdot \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{l^2}$$

Knickkraft eines beidseitig gelenkig gelagerten und außermittig beanspruchten Stabes

(8.17)

Man nennt F_K nach ihrem Entdecker **Leonhard Euler** (1707 ... 1783) auch **Eulersche Knickkraft**.

Löst man Gleichung 8.17 nach $E \cdot I_y$ auf und setzt das Ergebnis in Gleichung 8.6 ein, dann erhält man:

$$\eta = \sqrt{\frac{F}{E \cdot I_y}} = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{F}{F_K}} \quad (8.18)$$

und damit:

$$\frac{\eta \cdot l}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{F_K}} \quad (8.19)$$

Setzt man Gleichung 8.19 in Gleichung 8.15 ein, dann erhält man für die maximale Durchbiegung w_{\max} :

$$w_{\max} = \frac{e}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{F_K}}\right)} - e \quad \text{Maximale Durchbiegung eines an beiden Enden gelenkig gelagerten und außermittig beanspruchten Stabes} \quad (8.20)$$

Trägt man die maximale Durchbiegung w_{\max} in Abhängigkeit der bezogenen Kraft F/F_K für verschiedene Werte der Exzentrizität e auf, dann erkennt man, dass mit abnehmender Exzentrizität der Übergang zu größeren Durchbiegungen abrupter erfolgt (Bild 8.2). Im Grenzfall $e = 0$ beobachtet man mit Erreichen der Knickkraft ($F = F_K$) einen sofortigen, unstetigen Anstieg der Durchbiegung d. h. es sind beliebige Durchbiegungen möglich.

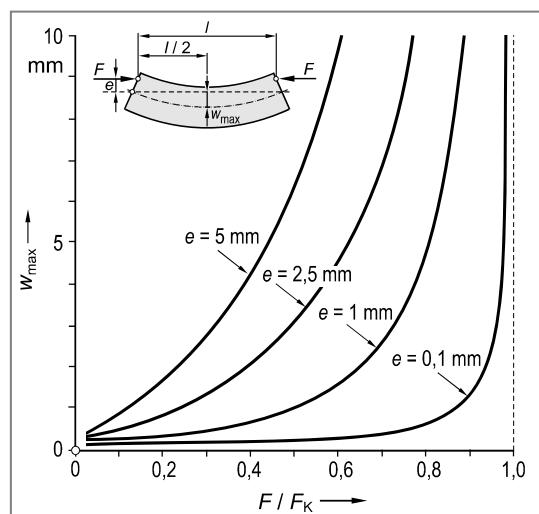


Bild 8.2 Maximale Durchbiegung w_{\max} in Abhängigkeit der bezogenen Druckkraft für unterschiedliche Exzentrizitäten e

8.1.2 Knickung bei mittigem Kraftangriff

Die Herleitung der Knickkraft F_K erfolgte im vorangegangenen Kapitel für einen außermittig beanspruchten und beidseitig gelenkig gelagerten Stab (Exzentrizität $e \neq 0$). Es ist zu prüfen, ob und in welcher Weise sich die Eulersche Knickkraft (Gleichung 8.17) bei mittigem Kraftangriff ($e = 0$) ändert.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (Gleichung 8.9) lautet für $e = 0$:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin(\eta \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\eta \cdot x) \quad (8.21)$$

mit den Randbedingungen

$$w(x = 0) = 0$$

$$w(x = l) = 0$$

erhält man:

$$C_2 = 0 \quad (8.22)$$

und

$$0 = C_1 \cdot \sin(\eta \cdot l) + C_2 \cdot \cos(\eta \cdot l)$$

$$0 = C_1 \cdot \sin(\eta \cdot l) \quad (8.23)$$

Die Bedingung 8.23 kann nur erfüllt werden, falls gilt¹⁾:

$$\begin{aligned} \eta \cdot l &= \pi \\ \sqrt{\frac{F}{E \cdot I_y}} \cdot l &= \pi \\ F &= \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{l^2} \equiv F_K \end{aligned} \quad (8.24)$$

Eine Lösung der Differentialgleichung (Gleichung 8.21) kann physikalisch als Beginn des Ausknickens des Stabes gedeutet werden. Dies geschieht mit Erreichen der Kraft F_K (Eulersche Knickkraft). Ein mittig beanspruchter und an seinen beiden Enden gelenkig gelagerter Stab beginnt nach obiger Berechnung also dann auszuknickeln, sobald die Druckkraft F die Eulersche Knickkraft F_K erreicht:

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{l^2}$$

Knickkraft eines beidseitig gelenkig gelagerten und mittig beanspruchten Stabes

(8.25)

Im Falle eines außermittigen Kraftangriffs ($e \neq 0$) war der Zusammenhang zwischen Kraft F und Durchbiegung w eindeutig. Das Gleichgewicht war also stabil. Erreichte die Druckkraft F die (Eulersche) Knickkraft F_K , dann wurde w_{\max} „unendlich“. Bei mittigem Kraftangriff ($e = 0$) ist mit Erreichen von F_K das Gleichgewicht indifferent, d. h. jede beliebige Durchbiegung ist möglich.

Unabhängig davon, ob ein mittiger oder ein außermittiger Kraftangriff erfolgt, kennzeichnet die Eulersche Knickkraft gemäß Gleichung 8.25 diejenige Belastung, bei der ein beidseitig gelenkig gelagerter Stab durch Knickung versagt.

¹⁾ Die Lösung $C_1 = 0$ würde die hier nicht interessierende Gleichgewichtslage des geraden Stabes beschreiben. Die Fälle $\eta \cdot l = n \cdot \pi$ mit $n = 2, 3, \text{ usw.}$ müssen nicht betrachtet werden, da nur diejenige Kraft ermittelt werden soll, die zum Ausknicken führt.

Zur Herleitung der Knickkraft F_K wurde vorausgesetzt, dass der Druckstab nur in der Ebene senkrecht zur y-Achse des Stabquerschnittes, der Zeichenebene also, ausknicken kann. Bei einem räumlich (z. B. in einer Kugelpfanne) gelagerten Stab kann ein Ausknicken jedoch in jeder die x-Achse beinhaltenden Ebene erfolgen. Falls nicht durch konstruktive Maßnahmen die Biegeebene vorgegeben ist bzw. erzwungen wird, erhält man die kleinste Knickkraft für das Ausknicken senkrecht zur Querschnittsachse mit dem kleinsten axialen Flächenmoment 2. Ordnung ($I = I_{\min}$).

Die Herleitung der Eulerschen Knickkraft (Gleichung 8.25) setzte einen an beiden Enden gelenkig gelagerten Druckstab voraus. Bei veränderten Randbedingungen kann man in analoger Weise ebenfalls Differentialgleichungen aufstellen und die zugehörigen Knickkräfte F_K berechnen [9]. Man unterscheidet in der Regel die vier in Bild 8.3 dargestellten Knickfälle (Einspannbedingungen), die nach Leonhard Euler auch als **Eulersche Knickfälle** bezeichnet werden.

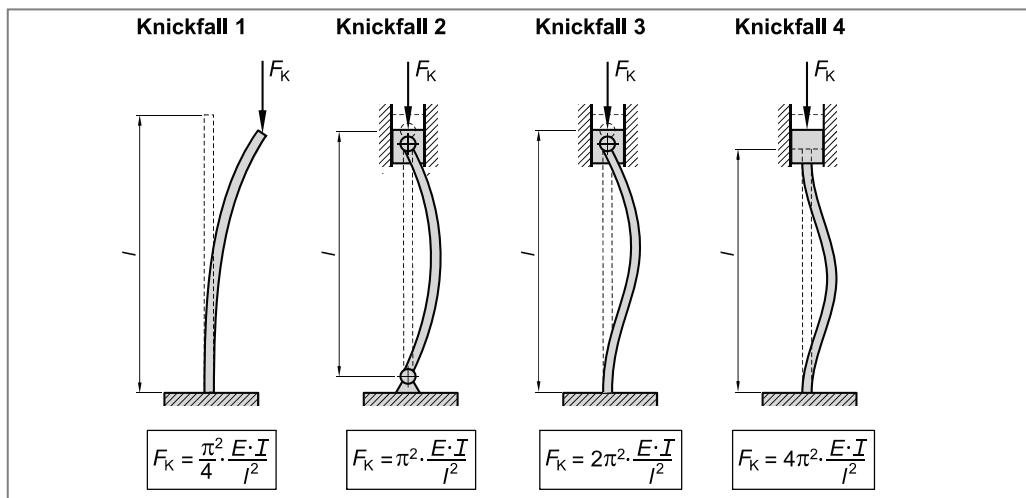


Bild 8.3 Eulersche Knickfälle

Fall 1: Der Stab ist an einem Ende fest eingespannt. Er kann dort weder zur Seite hin ausweichen noch kann er sich schräg stellen. Die Einspanntangente bleibt vertikal. Das andere Ende des Stabes ist hingegen frei beweglich d. h. ohne äußere Führung oder Einspannung. Die Knickkraft F_K berechnet sich unter diesen Bedingungen zu:

$$F_K = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \quad \text{Knickkraft eines an einem Ende fest eingespannten, am anderen Ende frei beweglichen Stabes} \quad (8.26)$$

Fall 2: Der Stab ist an beiden Enden gelenkig gelagert. Er kann dort nicht zur Seite hin ausweichen, wohl aber können sich die Stabenden schräg stellen, die Einspanntangente bleibt nicht vertikal. Die Knickkraft berechnet sich in diesem Fall (wie bereits bekannt) zu:

$$F_K = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \quad \text{Knickkraft eines an beiden Enden gelenkig gelagerten Stabes} \quad (8.27)$$

Fall 3: Der Stab ist an einem Ende fest eingespannt und an seinem anderen Ende gelenkig gelagert. Die Knickkraft errechnet sich unter diesen Einspannbedingungen zu:

$$F_K = 2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \quad \text{Knickkraft eines an einem Ende fest eingespannten, am anderen Ende gelenkig gelagerten Stabes} \quad (8.28)$$

Fall 4: Beide Stabenden sind fest eingespannt. Diese Einspannbedingungen führen zur höchsten Belastbarkeit des Stabes. Die Knickkraft F_K errechnet sich zu:

$$F_K = 4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \quad \text{Knickkraft eines beidseitig fest eingespannten Stabes} \quad (8.29)$$

Die Gleichungen 8.26 bis 8.29 zeigen, dass die Knickkraft F_K vom Elastizitätsmodul (E), von der Geometrie der Querschnittsfläche, gekennzeichnet durch das axiale Flächenmoment 2. Ordnung (I) sowie von der Stablänge (l) abhängen. Einen besonderen Einfluss auf die Knickkraft übt hierbei die Stablänge l aus, da sie in den Gleichungen im Quadrat erscheint. Eine Verdoppelung der Stablänge bedeutet damit beispielsweise, dass die Knickkraft auf ein Viertel ihres ursprünglichen Wertes abnimmt. Weiterhin hängt die Knickkraft F_K in hohem Maße von den Einspannungsbedingungen ab. So ist bei gleicher Stabgeometrie die Knickkraft eines beidseitig fest eingespannten Stabes (Knickfall 4) 16mal so hoch im Vergleich zu einem an einem Ende fest eingespannten, am anderen Ende frei beweglichen Stab (Knickfall 1).

Die Gleichungen 8.26 bis 8.29 beinhalten außerdem keine Festigkeitskennwerte wie die Streck- bzw. Dehngrenze oder die Zugfestigkeit. Die Knickung ist, ebenso wie das hier nicht besprochene **Beulen**, ein Instabilitätsvorgang und wird daher im Wesentlichen nur von der geometrischen Form des Bauteils bestimmt.

In der Praxis ist es häufig schwierig, die Einspannbedingungen der Druckstäbe einem der Eulerschen Knickfälle zuzuordnen. Betrachtet man beispielsweise die Stäbe eines Fachwerks, dann sind die Stabenden elastisch durch Knotenbleche miteinander verbunden. Der Grad der Einspannung in der Fachwerkebene wird daher auch von der Biegesteifigkeit $E \cdot I$ der Nachbarstäbe mitbestimmt und liegt zwischen dem Eulerschen Knickfall 2 und 4.

8.2 Spannungsermittlung bei Knickung

Die **Knickspannung**, also die Druckspannung unmittelbar im Moment des Ausknickens, errechnet sich zu:

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A} \quad \text{Knickspannung} \quad (8.30)$$

Die Knickkraft F_K erhält man in Abhängigkeit der Einspannbedingungen aus den Gleichungen 8.26 bis 8.29.

8.3 Zulässige Spannung bei Knickung

Ein Stab unter Druckbeanspruchung kann nicht nur durch Knickung sondern auch durch Fließen oder durch Bruch versagen. Bei der Berechnung der zulässigen Spannung müssen daher ggf. alle drei Fälle (Fließen, Bruch und Knickung) berücksichtigt werden.

Tabelle 8.1 Kennwerte zur Bestimmung der zulässigen Spannung unter reiner Druckbeanspruchung

Werkstoff bzw. Werkstoffzustand	Versagensart	Werkstoffkennwert	Ersatzwert	Sicherheitsbeiwert ¹⁾
duktil	Fließen	σ_{dF} bzw. $\sigma_{d0,2}$	R_e bzw. $R_{p0,2}$	$S_F = 1,2 \dots 2,0$
	Knickung	σ_K	----	$S_K = 2,5 \dots 5,0$
spröde	Bruch	σ_{dB}	2)	$S_B = 4,0 \dots 9,0$
	Knickung	σ_K	----	$S_K = 2,5 \dots 5,0$

¹⁾ Anhaltswerte, falls keine einschlägigen Berechnungsvorschriften vorliegen.

²⁾ In der Regel ist bei spröden Werkstoffen $\sigma_{dB} > R_m$

Zusammenfassend errechnet sich die zulässige Spannung σ_{zul} unter Druckbeanspruchung also wie folgt:

Bauteile aus duktilen Werkstoffen bzw. duktile Werkstoffverhalten

- Fließen:
$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \text{ bzw. } \frac{\sigma_{d0,2}}{S_F} \quad \text{mit } S_F = 1,2 \dots 2,0$$
 (8.31)

- Knickung:
$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K} \quad \text{mit } S_K = 2,5 \dots 5,0$$
 (8.32)

Maßgebend für den Festigkeitsnachweis ist der niedrigere der beiden Werte.

Bauteile aus spröden Werkstoffen bzw. spröder Werkstoffzustand

- Bruch:
$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dB}}{S_B} \quad \text{mit } S_B = 4,0 \dots 9,0$$
 (8.33)

- Knickung:
$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K} \quad \text{mit } S_K = 2,5 \dots 5,0$$
 (8.34)

Maßgebend für den Festigkeitsnachweis ist der niedrigere der beiden Werte.

8.4 Knicklänge

Vergleicht man die Biegelinien der Knickfälle 1, 3 und 4 mit der Biegelinie des beidseitig gelenkig gelagerten Stabes (Knickfall 2), dann fällt folgendes auf (Bild 8.4):

Knickfall 1: Eine Spiegelung der Biegelinie am fest eingespannten Ende ergibt die Biegelinie des beidseitig gelenkig gelagerten Druckstabes (Knickfall 2).

- Knickfall 3: Die Biegelinie von Knickfall 3 hat einen Wendepunkt. Am Wendepunkt ist $w''(x) = 0$ und damit $M_{by} = 0$ (Gleichung 8.2). Damit kann man sich den Wendepunkt von Knickfall 3 auch durch eine gelenkige Einspannung ersetzt denken. Daher entspricht die Biegelinie zwischen Wendepunkt und der oberen, gelenkigen Einspannung der Biegelinie des beidseitig gelenkig gelagerten Stabes (Knickfall 2).
- Knickfall 4: Auch hier gilt an den Wendepunkten $w''(x) = 0$ und dementsprechend $M_{by} = 0$, so dass die Biegelinie zwischen den Wendepunkten von Knickfall 4 wieder der Biegelinie von Knickfall 2 entspricht.

Die Länge der Abschnitte innerhalb derer die Biegelinien mit denjenigen des beidseitig gelenkig gelagerten Stabes übereinstimmen, wird als **Knicklänge** l_K bezeichnet (Bild 8.4). Für den Zusammenhang zwischen Knicklänge l_K und Stablänge l folgt dann:

$$\text{Knickfall 1: } l_K = 2 \cdot l \quad (8.35)$$

$$\text{Knickfall 2: } l_K = l \quad (8.36)$$

$$\text{Knickfall 3: } l_K \approx 0,7 \cdot l \quad (8.37)$$

$$\text{Knickfall 4: } l_K = 0,5 \cdot l \quad (8.38)$$

Damit können die Gleichungen 8.26 bis 8.29 auch durch *eine* Gleichung ersetzt werden, indem man die Stablänge l durch die Knicklänge l_K ersetzt.

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2} \quad (8.39)$$

Man überzeugt sich leicht, dass man durch Einsetzen der Knicklängen l_K (Gleichungen 8.35 bis 8.38) in Gleichung 8.39 wieder die bekannten Gleichungen 8.26 bis 8.29 erhält. Für den Knickfall 2 entspricht die Knicklänge l_K der Stablänge l , so dass Gleichung 8.39 mit Gleichung 8.27 übereinstimmt.

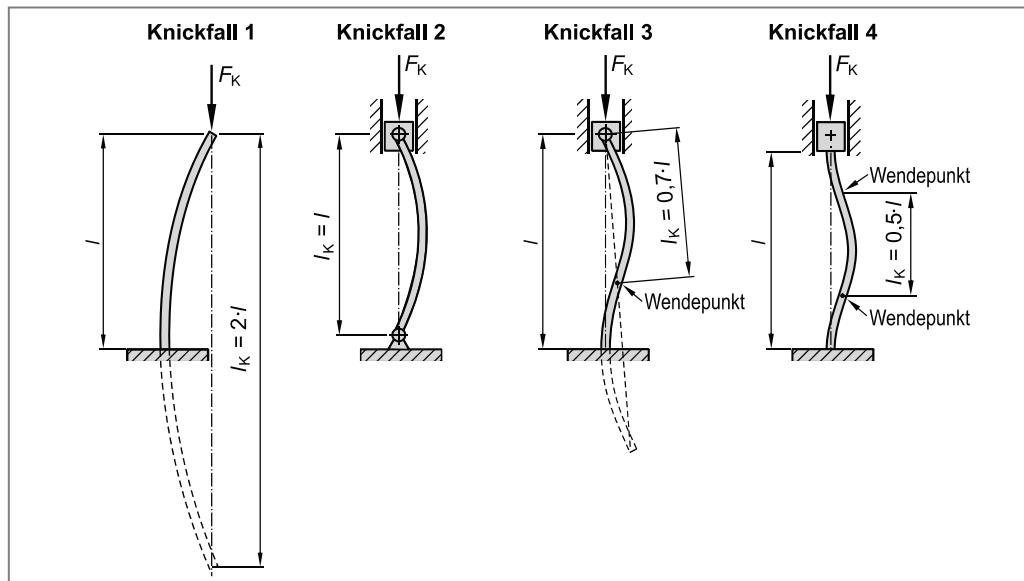


Bild 8.4 Biegelinien und Knicklängen für unterschiedliche Einspannbedingungen (Eulersche Knickfälle)

8.5 Knickspannungsdiagramme

Die Knickspannung σ_K errechnet sich entsprechend Gleichung 8.30 zu:

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A} \quad (8.40)$$

mit der Knickkraft F_K gemäß Gleichung 8.39 folgt:

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2 \cdot A} \quad (8.41)$$

Definiert man für die Geometrie des Stabes den **Schlankheitsgrad** λ zu (mit $I = I_{\min}$):

$$\lambda = \frac{l_K}{\sqrt{I/A}} \quad \text{Definition des Schlankheitsgrades} \quad (8.42)$$

dann folgt aus Gleichung 8.41:

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad \text{Gleichung der Euler-Kurve} \quad (8.43)$$

Trägt man diese Gleichung in einem σ - λ -Diagramm, dem so genannten **Knickspannungsdiagramm** auf, dann erhält man eine Hyperbel, die als **Euler-Kurve** bezeichnet wird (Bild 8.5).

Erreicht die Knickspannung σ_K mit abnehmendem Schlankheitsgrad λ die Proportionalitätsgrenze für Druckbeanspruchung (σ_{dp}), dann verliert Gleichung 8.43 ihre Gültigkeit, da oberhalb von σ_{dp} das Hookesche Gesetz nicht mehr gilt. Der **Grenzschlankheitsgrad** λ_G lässt sich dann einfach berechnen:

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_G^2} = \sigma_{dp} \quad (8.44)$$

Damit ergibt sich der Grenzschlankheitsgrad λ_G :

$$\lambda_G = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{dp}}} \quad \text{Grenzschlankheitsgrad für elastische Knickung (Euler-Bereich)} \quad (8.45)$$

Da die Proportionalitätsgrenze σ_{dp} experimentell praktisch nicht ermittelt werden kann, ist ersatzweise auch eine Berechnung mit Hilfe der technischen Elastizitätsgrenze $R_{p0,01}$ (Kapitel 2.2.2.1) möglich.

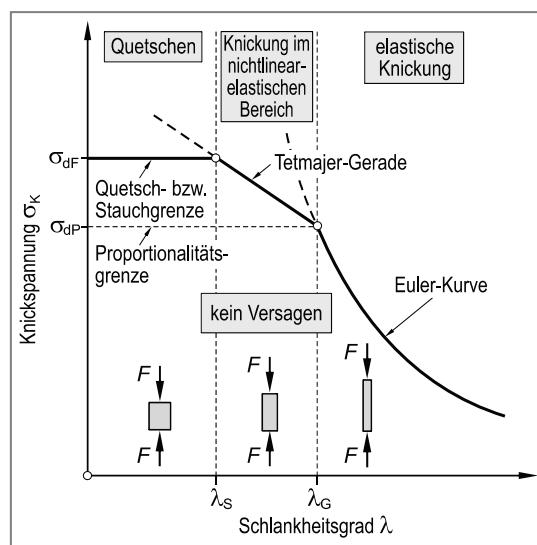


Bild 8.5 Knickspannungsdiagramm

Im Euler-Bereich, also für Stäbe mit einem Schlankheitsgrad $\lambda > \lambda_G$ (Bild 8.5) ist die Knickspannung nur vom Elastizitätsmodul E des Werkstoffs und von der Stabgeometrie (Schlankheitsgrad λ) abhängig. Eine höhere Festigkeit des Werkstoffs (σ_{dp} bzw. $R_{p0,0,1}$) liefert hierbei keine zusätzliche Sicherheit, da innerhalb einer Werkstoffgruppe der Elastizitätsmodul E nur wenig variiert (Kapitel 2.1.4.1). Daher lässt sich durch die Wahl eines höherfesten Werkstoffs (in der Regel auch höhere Werkstoff- und Bearbeitungskosten!) keine Verbesserung im Hinblick auf das Ausknicken erreichen d. h. die Tragfähigkeit des Druckstabes wird nicht erhöht. Wohl aber führt gemäß Gleichung 8.45 eine höhere Festigkeit zu kleineren Grenzschlankheitsgraden λ_G und erweitert dadurch den Euler-Bereich, so dass bei einer zusätzlichen, konstruktiven Verminderung des Schlankheitsgrades (z. B. Verminderung der Stablänge unter Beibehaltung der Querschnittsgeometrie) die Knickspannung und damit die Tragfähigkeit erhöht werden kann.

Während lange, dünne Stäbe ($\lambda > \lambda_G$) mit steigender Druckbeanspruchung durch **elastische Knickung** versagen, werden kurze, dicke Stäbe ($\lambda < \lambda_S$) mit Überschreiten der Quetsch- bzw. Stauchgrenze (σ_{df} bzw. $\sigma_{d0,2}$, siehe Kapitel 2.2.2.1) plastisch verformt (zusammengedrückt) ohne zu knicken. Für mittellange Stäbe, mit Schlankheitsgraden nur wenig unter λ_G ($\lambda_S < \lambda < \lambda_G$) kommt es hingegen zur **Knickung im nichtlinear-elastischen Bereich**. Experimentelle Untersuchungen ergeben für diesen Bereich eine Übergangskurve, die näherungsweise unter anderem durch die **Tetmajer-Gleichung** (*Ludwig von Tetmajer*, 1850 ... 1905) beschrieben werden kann. Die empirisch ermittelte Tetmajer-Gleichung schneidet für duktile Werkstoffe die Euler-Kurve in $\lambda = \lambda_G$ und $\sigma = \sigma_{dp}$ und kann wie folgt beschrieben werden:

$$\sigma_K = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2 \quad \text{Tetmajer-Gleichung} \quad (8.46)$$

Tabelle 8.2 Koeffizienten der Tetmajer-Gleichung

Werkstoff	a	b N/mm ²	c	Gültigkeit
EN-GJL-200	776	12	0,053	$0 < \lambda < 80$
S235JR	310	1,14	0	$60 < \lambda < 104$
E335	335	0,62	0	$0 < \lambda < 88$

8.6 Biegeknickung

Die bisherigen Betrachtungen sind davon ausgegangen, dass die auf Druck beanspruchten Stäbe keine Biegung erfahren, die Exzentrizität e also Null ist. Durch Fertigungs- oder Montagegenauigkeiten ist in der Praxis jedoch stets mit einer gewissen Exzentrizität e der Druckkraft zu rechnen (Bild 8.6). Dann überlagert sich der Druckspannung $\sigma_d = F / A$ noch ein Biegeanteil $\sigma_b = M_{b \max} / W_b$. Die Gesamtspannung σ_{ges} ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ges}} &= \sigma_d + \sigma_b \\ &= \frac{F}{A} + \frac{M_{b \max}}{W_b} \\ \sigma_{\text{ges}} &= \frac{F}{A} + \frac{F \cdot (w_{\max} + e)}{W_b} \quad (8.47)\end{aligned}$$

Mit Gleichung 8.15 folgt:

$$\sigma_{\text{ges}} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e}{W_b \cdot \cos\left(\frac{\eta \cdot l}{2}\right)} \quad (8.48)$$

und mit Gleichung 8.6 schließlich:

$$\sigma_{\text{ges}} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e}{W_b \cdot \cos\left(\frac{l}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}}\right)} \quad (8.49)$$

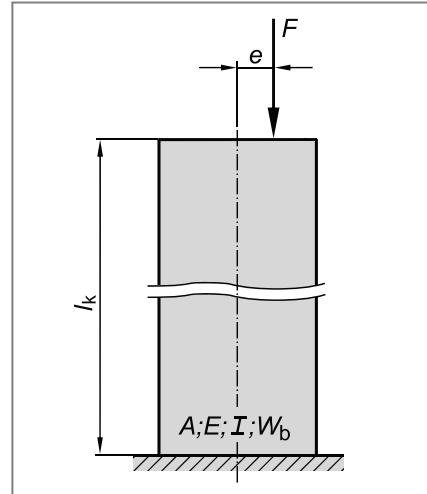


Bild 8.6 Exzentrisch angreifende Druckkraft

Gleichung 8.49 gilt zunächst für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab (Knickfall 2). Ersetzt man jedoch die Stablänge l durch die Knicklänge l_K , dann kann die Beziehung unter Berücksichtigung der Gleichungen 8.35 bis 8.38 für alle Knickfälle angewandt werden.

$$\sigma_{\text{ges}} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e}{W_b \cdot \cos\left(\frac{l_K}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}}\right)} \quad (8.50)$$

Gleichung 8.50 zeigt, dass bei Druckstäben mit außermittigem Kraftangriff (Wirkungslinie der Druckkraft fällt nicht mit dem Flächenschwerpunkt des Stabquerschnitts zusammen) zusätzlich zur Druckspannung noch ein nicht unerheblicher Biegeanteil zu berücksichtigen ist. Bei größerer Exzentrizität e kann daher die Spannung σ_{ges} bereits lange vor einer Knickung unzulässig hohe Werte erreichen. Da bei Druckstäben die Exzentrizität e nur schwer abzuschätzen ist, wird in der Praxis daher meist mit hohen Sicherheitsbeiwerten gegen Knickung gerechnet (Tabelle 8.1).

8.7 Aufgaben

Aufgabe 8.1

Ein beidseitig gelenkig gelagerter Profilstab aus dem Vergütungsstahl C22 mit einer Länge von $l = 2 \text{ m}$ und einer quadratischen Querschnittsfläche ($a = 50 \text{ mm}$) wird durch die im Flächenschwerpunkt angreifende, statisch wirkende Druckkraft $F_d = 50 \text{ kN}$ mittig beansprucht.

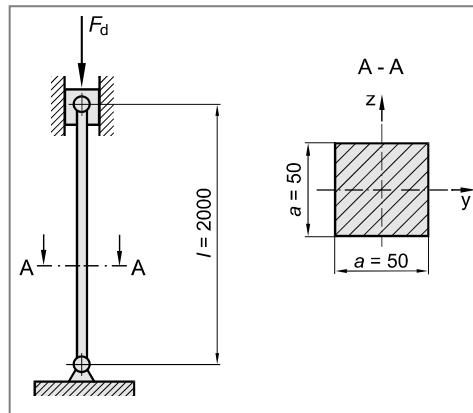
Werkstoffkennwerte C22 (vergütet):

$$R_{p0,2} = 320 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 460 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



Berechnen Sie die Knickkraft F_K sowie die Sicherheit gegen Knickung (S_K) und gegen Fließen (S_F).

Aufgabe 8.2

Ein Profilstab aus der unlegierten Baustahlsorte S275JR mit einer Länge von $l = 1200 \text{ mm}$ und der dargestellten Querschnittsfläche, wird durch eine im Flächenschwerpunkt S angreifende Druckkraft F_d statisch beansprucht. Der Profilstab ist an beiden Enden gelenkig gelagert.

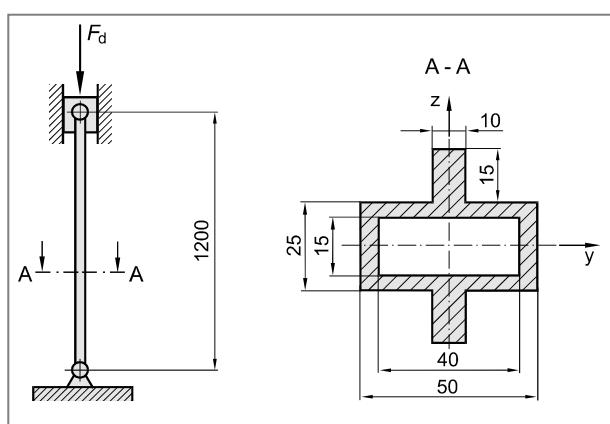
Werkstoffkennwerte S275JR:

$$R_e = 255 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 510 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

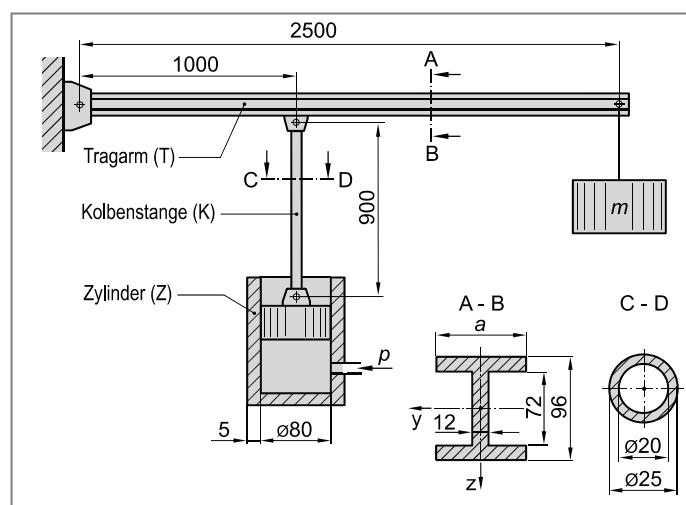


- Berechnen Sie für den dargestellten Querschnitt die axialen Flächenmomente 2. Ordnung bezüglich der y -Achse (I_y) sowie bezüglich der z -Achse (I_z).
- Ermitteln Sie die zulässige Druckbelastung F_d des Profilstabes ($S_K = 4$ und $S_F = 1,5$).
- Berechnen Sie die Verkürzung Δl des Profilstabes unmittelbar vor dem Versagen.

Aufgabe 8.3

Die Abbildung zeigt eine einfache hydraulische Hebevorrichtung bestehend aus Tragarm (T), einer beidseitig gelenkig gelagerten Kolbenstange (K) und einem Hydraulikzylinder (Z). Durch Veränderung des Drucks im Zylinder kann die Masse m am Ende des Tragarms angehoben oder abgesenkt werden. Das Eigengewicht von Tragarm und Kolbenstange darf vernachlässigt werden.

Werkstoffkennwerte:



- | Werkstoffkennwerte | Tragarm
(S235JR) | Kolbenstange
(C35E) | Zylinder
(EN-GJL-350) |
|----------------------------|---------------------|------------------------|--------------------------|
| R_e [N/mm ²] | 235 | 355 | --- |
| R_m [N/mm ²] | 360 | 470 | 350 |
| E [N/mm ²] | 210000 | 210000 | 115000 |
| μ [-] | 0,30 | 0,30 | 0,26 |
- Berechnen Sie die Druckkraft F_d auf die Kolbenstange, falls die an den Tragarm angehängte Masse $m = 1000$ kg beträgt.
 - Ermitteln Sie die Sicherheiten gegen Fließen (S_F) und Knickung (S_K) für die beidseitig gelenkig gelagerte Kolbenstange (K). Sind die Sicherheiten ausreichend?
 - Berechnen Sie für die höchst beanspruchte Stelle des Tragarms (T) das Biegemoment $M_{b \max}$. Berechnen Sie außerdem das Maß a des I-Profils des Tragarms, so dass die Sicherheit gegen Fließen an der höchst beanspruchten Stelle $S_F = 1,5$ beträgt.

Aufgabe 8.4

Der dargestellte Wandkran ist an seinem linken Ende gelenkig gelagert. An seinem freien, rechten Ende greift eine statisch wirkende Kraft $F = 800 \text{ kN}$ an. Der Kranausleger wird durch einen Stützstab aus unlegiertem Baustahl (S235JR) abgestützt und kann als beidseitig gelenkig gelagert angesehen werden.

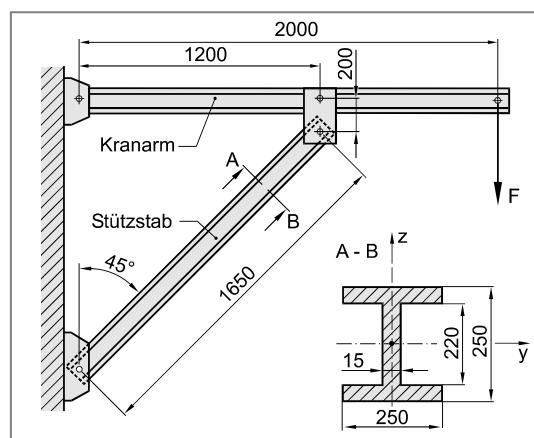
Werkstoffkennwerte S235JR:

$$R_e = 235 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 440 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- Berechnen Sie die Druckkraft F_d , die auf den Stützstab wirkt.
- Bestimmen Sie für die Querschnittsfläche des Stützstabes das axiale Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der y-Achse (I_y).
- Ermitteln Sie für den Stützstab die Sicherheiten gegen Fließen und gegen Knickung. Sind die Sicherheiten ausreichend?

Aufgabe 8.5

Eine Stahlstütze aus der unlegierten Baustahlsorte S235JR mit kreisförmigem Querschnitt ($d_i = 50 \text{ mm}$; $s = 5 \text{ mm}$) und einer Länge von $l = 2500 \text{ mm}$ wird durch die statisch wirkende, mittig angreifende Druckkraft F beansprucht. Die Stahlstütze kann an ihrem unteren Ende als fest eingespannt, an ihrem oberen Ende hingegen als frei beweglich betrachtet werden.

Am oberen Ende der Stütze wurde außerdem eine Druckplatte montiert, die mittels eines Bolzens mit der Stütze verbunden ist. Der Bolzen aus dem unlegierten Vergütungsstahl C45E hat einen Vollkreisquerschnitt.

Werkstoffkennwerte:

$$\text{S235JR: } R_e = 235 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 380 \text{ N/mm}^2$$

$$A = 26 \%$$

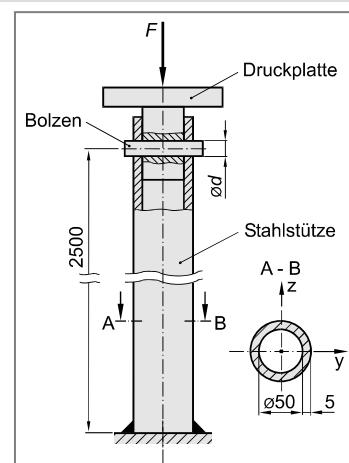
$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{C45E: } R_{p0,2} = 310 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 620 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{ab} = 490 \text{ N/mm}^2$$

$$A = 16 \%$$



- Berechnen Sie die zulässige Druckkraft F_d , damit Fließen der Stahlstütze mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden kann.
- Ermitteln Sie die Druckkraft F_d^* , die zu einer Knickung der Stahlstütze führt.
- Berechnen Sie den erforderlichen Durchmesser d des Bolzens, damit bei einer Belastung von $F = 25 \text{ kN}$ ein Abscheren mit einer Sicherheit von $S_B = 2,0$ ausgeschlossen werden kann.

Aufgabe 8.6

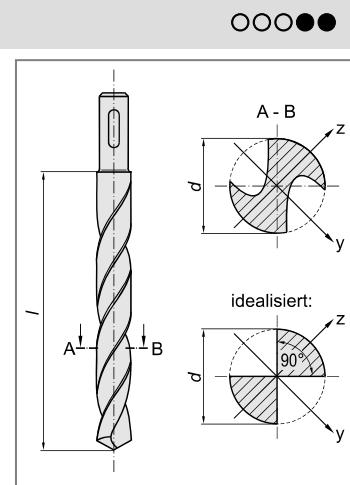
Ein Wendelbohrer (Durchmesser $d = 12 \text{ mm}$) aus Schnellarbeitsstahl HS 6-5-2 ($E = 208000 \text{ N/mm}^2$) hat den in der Abbildung dargestellten idealisierten Querschnitt.

Ermitteln Sie die maximale Länge l des Bohrers, damit die Knickkraft F_K mindestens 2 kN beträgt.

Hinweis:

Das kleinste Flächenmoment 2. Ordnung (bezüglich der z -Achse) ergibt sich für den idealisierten Querschnitt zu:

$$I_z = \frac{d^4}{64} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$



Aufgabe 8.7

Die Stütze eines Stahlgerüsts aus Werkstoff S275J0 hat einen Kreisringquerschnitt und soll eine axiale Druckkraft von $F = 150 \text{ kN}$ aufnehmen. Die Länge der Stütze beträgt $l = 1500 \text{ mm}$ und der Außendurchmesser $d_a = 100 \text{ mm}$. Die Stütze kann an ihrem unteren Ende als fest eingespannt und am oberen Enden als frei beweglich betrachtet werden.

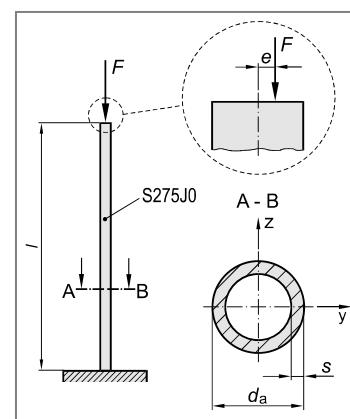
- Berechnen Sie die mindestens erforderliche Wandstärke s , damit die Belastung von $F = 150 \text{ kN}$ mit der notwendigen Sicherheit ($S_F = 1,5$ und $S_K = 3,0$) ertragen werden kann. Die Druckkraft F soll zunächst als mittig angreifend ($e = 0$) betrachtet werden.
- Aufgrund von Montagegenauigkeiten ist es möglich, dass die Druckkraft außermittig angreift ($e \neq 0$). Bestimmen Sie die maximal zulässige Exzentrizität e , damit eine Sicherheit von $S_F = 1,2$ gegen Fließen gegeben ist. Die Wandstärke der rohrförmigen Stütze soll $s = 5 \text{ mm}$ betragen.

Werkstoffkennwerte S275J0:

$$R_e = 290 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 560 \text{ N/mm}^2$$

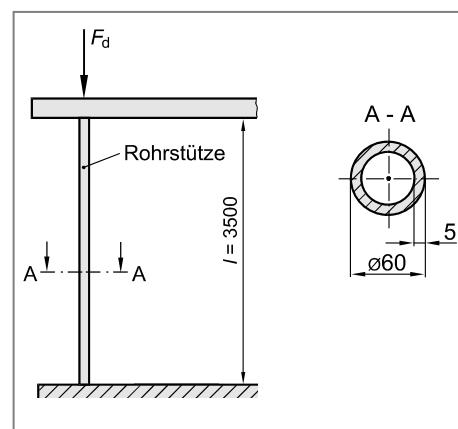
$$E = 208000 \text{ N/mm}^2$$



Aufgabe 8.8

Für ein Baugerüst werden Rohrstützen aus S235JR ($R_c = 240 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 420 \text{ N/mm}^2$ und $E = 210000 \text{ N/mm}^2$) verwendet. Die Länge der Stützen beträgt $l = 3,50 \text{ m}$, der Außendurchmesser $d_a = 60 \text{ mm}$ und die Wandstärke $s = 5 \text{ mm}$. Die Stützen werden statisch auf Druck beansprucht und sind so eingebaut, dass beide Enden als fest eingespannt betrachtet werden können ($S_F = 1,5$; $S_K = 4,0$).

- Berechnen Sie ist die zulässige Druckkraft F_d auf die Rohrstütze.
- Ermitteln Sie die Verkürzung Δl der Rohrstütze für die zulässige Belastung aus Aufgabenteil a).

**Aufgabe 8.9**

Ein warm gewalzter Stahlträger (IPE 300) aus S235JR hat eine Länge von $l = 3,5 \text{ m}$ und wird durch eine statisch wirkende, mittig angreifende, axiale Druckkraft $F = 1300 \text{ kN}$ belastet. Der Träger ist an seinem unteren Ende in einer Kugelpfanne gelagert und am oberen Ende vertikal geführt.

Ermitteln Sie die Sicherheiten gegen Versagen.

Werkstoffkennwerte:

$$R_c = 300 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 530 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

Kenndaten zum Stahlträger (IPE 300):

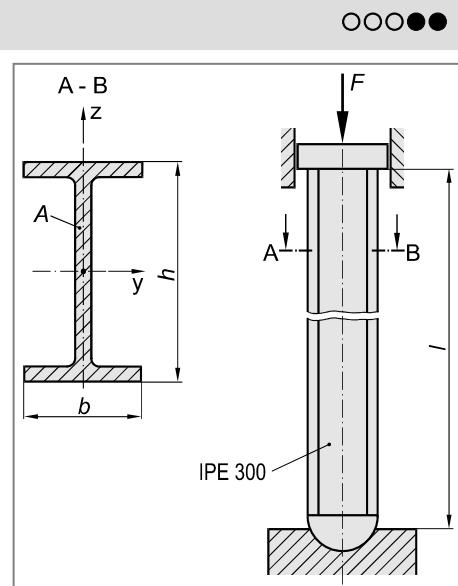
$$h = 300 \text{ mm}$$

$$b = 150 \text{ mm}$$

$$A = 53,8 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 8360 \text{ cm}^4$$

$$I_x = 604 \text{ cm}^4$$



9 Schiefe Biegung

Von **schiefer Biegung** (mitunter auch als **zweiachsige Biegung** oder **allgemeine Biegung** bezeichnet) spricht man, sofern an einem Balken Kräfte (Einzelkräfte oder Streckenlasten) oder Momente angreifen, deren Momentenvektor M_b nicht mit einer der beiden Hauptachsen des Balkenquerschnitts zusammenfällt. Dies ist der Fall:

- bei Balken mit symmetrischem Querschnitt falls der Biegemomentenvektor schräg zur Symmetrieebene wirkt d. h. nicht mit der Symmetrieebene oder ihrer Senkrechten durch den Flächenschwerpunkt zusammenfällt (Bild 2.18c).
- bei Balken mit unsymmetrischem Querschnitt sofern der Biegemomentenvektor nicht mit einer der Hauptachsen zusammenfällt (Bild 2.18d).

Ziel dieses Kapitels ist die Ermittlung der Biegespannung in jedem Punkt der Querschnittsfläche eines biegebeanspruchten Balkens und damit auch Ort und Betrag der maximalen Biegespannung. Zur Lösung dieser Aufgabe ist es zunächst erforderlich, die Begriffe „Flächenmoment“ und „Hauptachsen“ einer Fläche zu erläutern.

9.1 Flächenmomente

Flächenmomente sind Rechengrößen in Form von Integralen. Ein Flächenmoment kann man sich dadurch veranschaulichen, indem man eine Querschnittsfläche A in unendlich viele kleine Flächenelemente dA aufteilt, den Abstand (oder das Quadrat des Abstands) eines jeden Elementes von den Bezugssachsen (z. B. y oder z in Bild 9.1) mit seinem Flächeninhalt multipliziert und alle so gewonnenen Produkte über die gesamte Querschnittsfläche summiert (integriert).

Man unterscheidet:

- Flächenmomente 1. Ordnung
- Flächenmomente 2. Ordnung

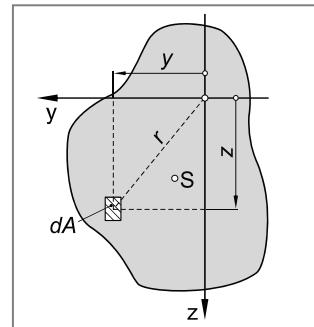


Bild 9.1 Aufteilung einer Querschnittsfläche in unendlich kleine Flächenelemente dA

9.1.1 Flächenmomente 1. Ordnung

Unter einem Flächenmoment 1. Ordnung (mitunter auch als **statisches Moment** bezeichnet) versteht man einen mathematischen Ausdruck der Form:

$$H_y = \int_A z \cdot dA \quad \text{Flächenmoment 1. Ordnung bezüglich der y-Achse} \quad (9.1)$$

bzw.

$$H_z = \int_A y \cdot dA \quad \text{Flächenmoment 1. Ordnung bezüglich der z-Achse} \quad (9.2)$$

Die Flächenmomente sind von erster Ordnung, da die Integranden (z. B. die Koordinaten y oder z) in der ersten Potenz auftreten. Die Dimension des Flächenmomentes 1. Ordnung ist beispielsweise m^3 , cm^3 oder mm^3 . Für praktische Berechnungen verwendet man in der Regel jedoch mm^3 .

Flächenmomente 1. Ordnung benötigt man unter anderem zur Berechnung von Flächenschwerpunkten oder bei der Ermittlung von Schubspannungen, die durch Querkräfte (Querkraftschub) hervorgerufen werden (Kapitel 10.1).

Für die Ermittlung von Flächenmomenten 1. Ordnung gelten die folgenden Aussagen:

1. Flächenmomente 1. Ordnung können in Abhängigkeit der Lage der Bezugsachse positive oder negative Zahlenwerte annehmen.
2. Flächenmomente 1. Ordnung sind von der Lage der Bezugsachsen abhängig. Bezuglich Achsen durch den Flächenschwerpunkt S (Schwereachsen) sind die Flächenmomente 1. Ordnung Null. Damit sind bei symmetrischen Querschnittsflächen die Flächenmomente 1. Ordnung auch bezüglich der Symmetriearchse(n) Null. Bild 9.2 verdeutlicht diesen Sachverhalt: für jedes positive Produkt ($y \cdot dA$) existiert ein entsprechend negatives Produkt ($-y \cdot dA$) auf der jeweils der Symmetriearchse gegenüberliegenden Seite. Nach einer Summation bzw. Integration heben sich die Zahlenwerte gegenseitig auf.

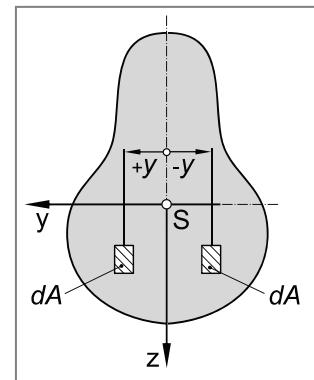


Bild 9.2 Flächenmomente 1. Ordnung bei symmetrischen Querschnittsflächen

9.1.2 Flächenmomente 2. Ordnung

Flächenmomente 2. Ordnung kennzeichnen die Steifigkeit einer Querschnittsfläche beispielsweise in Bezug auf Biegung, Torsion oder Knickung. Aus Kapitel 2.3 und 2.5 ist bereits bekannt, dass Flächenmomente 2. Ordnung als Rechengrößen bei der Spannungsermittlung unter Biege- und Torsionsbeanspruchung benötigt werden. In Kapitel 8 wurden Flächenmomente 2. Ordnung zur Berechnung der Knickkraft benötigt.

Flächenmomente 2. Ordnung werden unterschieden in:

- Axiale Flächenmomente 2. Ordnung (z. B. I_y und I_z)
- Polare Flächenmomente (z. B. I_p)
- Gemischte Flächenmomente (z. B. I_{yz})

9.1.2.1 Axiale Flächenmomente 2. Ordnung

Unter einem axialen Flächenmoment 2. Ordnung versteht man einen mathematischen Ausdruck der Form:

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA \quad \text{Axiales Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der y-Achse} \quad (9.3)$$

bzw.

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA \quad \text{Axiales Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der z-Achse} \quad (9.4)$$

Die Zahlenwerte axialer Flächenmomente 2. Ordnung sind von der Geometrie der Querschnittsfläche sowie von der Lage der Bezugsachse abhängig und nehmen stets positive Werte an.

Vielfach werden die axialen Flächenmomente 2. Ordnung aufgrund ihrer mathematischen Ähnlichkeit zu den Massenträgheitsmomenten der Dynamik als **axiale Flächenträgheitsmomente** bezeichnet. Da Flächen jedoch keine Massenträgheit haben, sollte diese Bezeichnung vermieden werden.

9.1.2.2 Polare Flächenmomente

Addiert man die beiden axialen Flächenmomente I_y und I_z dann erhält man:

$$I_y + I_z = \int_A z^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA = \int_A (z^2 + y^2) \cdot dA$$

und wegen $y^2 + z^2 = r^2$ (Bild 9.1) folgt:

$$I_y + I_z = \int_A r^2 \cdot dA$$

Damit erhält man das **polare Flächenmoment** I_p :

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA \quad \text{Polares Flächenmoment} \quad (9.5)$$

Das polare Flächemoment I_p hat eine Bedeutung in Bezug auf die Berechnung von Schubspannungen bei Torsion kreissymmetrischer Querschnitte (Kapitel 2.5).

9.1.2.3 Gemischte Flächenmomente

Neben den beiden axialen Flächenmomenten (I_y und I_z) entsprechend Gleichung 9.3 und 9.4 und dem polaren Flächenmoment I_p (Gleichung 9.5) unterscheidet man noch das **gemischte Flächenmoment** I_{yz} :

$$I_{yz} = - \int_A y \cdot z \cdot dA \quad \text{Gemischtes Flächenmoment bezüglich dem y-z-Koordinaten-} \quad (9.6)$$

Die für das gemischte Flächenmoment in Anlehnung an die Dynamik mitunter gewählten Bezeichnungen (**Flächen-Deviationsmoment** oder (**Flächen-Zentrifugalmoment**) sollten aus dem oben genannten Grund ebenfalls nicht verwendet werden. Das gemischte Flächenmoment I_{yz} wird üblicherweise negativ definiert. Damit ergibt sich bei tensorieller Darstellung eine formale Übereinstimmung mit dem Spannungs- bzw. Dehnungstensor.

Während die axialen Flächenmomente 2. Ordnung und das polare Flächenmoment stets Werte größer oder gleich Null annehmen, kann das gemischte Flächenmoment, abhängig von der Verteilung der Querschnittsfläche über die einzelnen Quadranten des Koordinatensystems, Werte annehmen, die größer, gleich oder kleiner Null sind.

Da bei symmetrischen Flächen jedem Flächenelement dA mit positivem gemischem Flächenmoment ein Flächenelement mit negativem gemischem Flächenmoment entspricht, ist das gemischte Flächenmoment I_{yz} in Bezug auf eine die Symmetrieachse beinhaltende Koordinatensystem Null. Dies lässt sich leicht verstehen, da jedem Flächenelement dA (Koordinaten y und z) ein symmetrisch gelegenes Flächenelement (Koordinaten $-y$ und z) entspricht. Bei der Summation bzw. Integration heben sich ihre Beiträge gegenseitig auf (Bild 9.3).

9.1.3 Abhängigkeit der Flächenmomente 2. Ordnung von der Lage des Koordinatensystems

Der Betrag eines Flächenmomentes 2. Ordnung hängt von der Lage der Bezugsachsen ab. Bei einer Parallelverschiebung der Koordinatenachsen oder bei einer Drehung des Koordinatensystems um den Flächenschwerpunkt ändert sich auch der Betrag der Flächenmomente I_y , I_z und I_{yz} .

9.1.3.1 Parallelverschiebung des Koordinatensystems

Durch eine Parallelverschiebung der Koordinatenachsen ändert sich der Betrag der axialen und des gemischten Flächenmomentes. Die Zusammenhänge werden nachfolgend erläutert.

a) Axiale Flächenmomente

Es sei

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA \quad (9.7)$$

das axiale Flächenmoment 2. Ordnung der in Bild 9.4 dargestellten Fläche in Bezug auf die y -Achse durch den Flächenschwerpunkt S . Führt man eine Parallelverschiebung der y' -Achse um den Betrag z_s durch (y' -Achse), dann folgt aus Gleichung 9.7 mit der Transformationsgleichung $z' = z + z_s$:

$$I_{y'} = \int_A z'^2 \cdot dA = \int_A (z + z_s)^2 \cdot dA = \int_A z^2 \cdot dA + 2 \cdot z_s \int_A z \cdot dA + z_s^2 \int_A dA$$

Da das Flächenmoment 1. Ordnung in Bezug auf das y - z -Koordinatensystem durch den Flächenschwerpunkt Null ist (Kapitel 9.1.1), folgt schließlich:

$$I_{y'} = \int_A z^2 \cdot dA + z_s^2 \cdot A$$

und damit für das axiale Flächenmoment 2. Ordnung in Bezug auf die y' -Achse:

$$I_{y'} = I_y + z_s^2 \cdot A \quad \text{Axiales Flächenmoment 2. Ordnung bei einer Parallelverschiebung der Koordinatenachsen} \quad (9.8)$$

Auf analoge Weise kann auch aus dem axialen Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der z -Achse (I_z), das auf eine beliebige Achse bezogene Flächenmoment (I_z') berechnet werden.

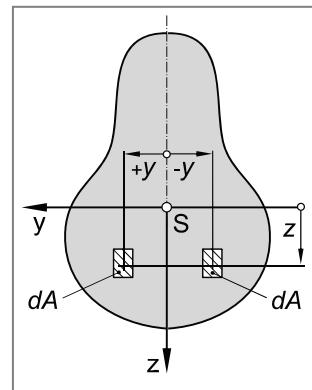


Bild 9.3 Gemischtes Flächenmoment bei symmetrischen Querschnittsflächen

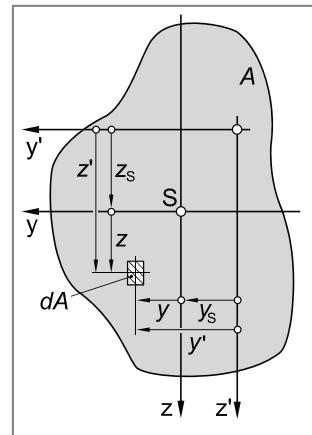


Bild 9.4 Parallelverschiebung des Koordinatensystems

b) Gemischte Flächenmomente

Eine Parallelverschiebung der Bezugssachsen führt auch zu einer Änderung des Betrags des gemischten Flächenmomentes. Es sei

$$I_{yz} = - \int_A y \cdot z \cdot dA$$

das gemischte Flächenmoment der in Bild 9.4 dargestellten Fläche in Bezug auf das y-z-Koordinatensystem. Für das gemischte Flächenmoment in Bezug auf das parallel verschobene y'-z'-Koordinatensystem folgt mit den Transformationsbeziehungen $y' = y + y_S$ und $z' = z + z_S$:

$$\begin{aligned} I_{y'z'} &= - \int_A (y + y_S) \cdot (z + z_S) \cdot dA \\ &= - \int_A y \cdot z \cdot dA - \int_A y_S \cdot z \cdot dA - \int_A z_S \cdot y \cdot dA - \int_A y_S \cdot z_S \cdot dA \\ &= I_{yz} - y_S \int_A z \cdot dA - z_S \int_A y \cdot dA - z_S \cdot y_S \int_A dA \end{aligned}$$

Da die Flächenmomente 1. Ordnung in Bezug auf das y-z-Koordinatensystem durch den Flächenschwerpunkt Null sind (Kapitel 9.1.1), folgt schließlich:

$$I_{y'z'} = I_{yz} - 0 - 0 - z_S \cdot y_S \cdot A$$

$$I_{y'z'} = I_{yz} - y_S \cdot z_S \cdot A$$

Gemischtes Flächenmoment bei einer Parallelverschiebung der Koordinatenachsen (9.9)

Bei der Anwendung von Gleichung 9.9 sind die Vorzeichen von y_S und z_S in Bezug auf das gewählte Koordinatensystem zu berücksichtigen.

Die Gleichungen 9.8 und 9.9 wurden bereits um 1850 von **Jakob Steiner** (1796 ... 1863) formuliert und sind in verbaler Form als „**Satz von Steiner**“ bekannt geworden.

Aus Gleichung 9.8 und 9.9 lassen sich die folgenden Erkenntnisse ableiten:

1. Axiale Flächenmomente 2. Ordnung (I_y und I_z) haben in Bezug auf Achsen durch den Flächenschwerpunkt Kleinstwerte im Vergleich zu parallel verschobenen Bezugssachsen.
2. Das gemischte Flächenmoment (I_{yz}) ändert seinen Betrag nicht, falls nur eine Achse parallel verschoben wird.

Bei der Anwendung des Steinerschen Satzes ist weiterhin zu beachten:

1. Axiale Flächenmomente 2. Ordnung, die sich auf dieselbe Achse beziehen bzw. gemischte Flächenmomente die sich auf dasselbe Koordinatensystem beziehen, dürfen addiert oder subtrahiert werden.
2. Der Steinersche Satz stellt stets einen Zusammenhang zwischen den Flächenmomenten bezüglich einer Achse durch den Flächenschwerpunkt bzw. eines Koordinatensystems mit Ursprung im Flächenschwerpunkt und einer dazu parallelen Achse bzw. eines parallel verschobenen Koordinatensystems her. Der Steinersche Satz darf hingegen *nicht* angewandt werden, um eine Beziehung zwischen den Flächenmomenten bezüglich beliebiger Achsen bzw. Koordinatensysteme herzustellen (siehe auch Aufgabe 2.17).

9.1.3.2 Drehung des Koordinatensystems um den Flächenschwerpunkt

Der Betrag eines Flächenmomentes 2. Ordnung ändert sich nicht nur bei einer Parallelverschiebung der Bezugssachsen, sondern auch bei einer Drehung des (rechteckigen) Koordinatensystems um den Flächenschwerpunkt S .

Gegeben sei eine Fläche A sowie ein rechtwinkliges Koordinatensystem (y und z) durch den Flächenschwerpunkt S . Weiterhin seien die Flächenmomente 2. Ordnung in Bezug auf das y - z -Koordinatensystem bekannt (I_y , I_z und I_{yz}), Bild 9.5.

Bei einer Drehung des Koordinatensystems um den Flächenschwerpunkt S mit Drehwinkel φ ändert sich auch der Betrag der Flächenmomente. Ohne auf die Herleitung einzugehen (siehe hierzu beispielsweise [9]) ergeben sich zwischen den Flächenmomenten in Bezug auf das ursprüngliche y - z -Koordinatensystem (I_y , I_z und I_{yz}) und den Flächenmomenten 2. Ordnung bezogen auf das gedrehte η - ζ -System (I_η , I_ζ und $I_{\eta\zeta}$) die folgenden Transformationsbeziehungen:

$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\varphi + I_{yz} \cdot \sin 2\varphi \quad (9.10)$$

$$I_\zeta = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\varphi - I_{yz} \cdot \sin 2\varphi \quad (9.11)$$

$$I_{\eta\zeta} = -\frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin 2\varphi + I_{yz} \cdot \cos 2\varphi \quad (9.12)$$

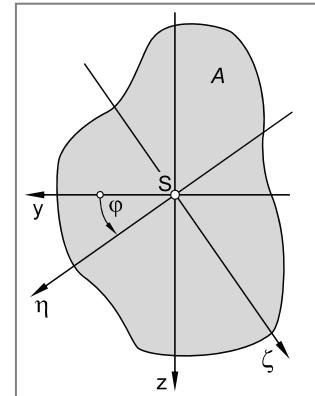


Bild 9.5 Drehung des Koordinatensystems um den Flächenschwerpunkt

Für die Spannungsermittlung, insbesondere bei schiefer Biegung, ist diejenige Lage des Koordinatensystems von Interesse für die das gemischte Flächenmoment ($I_{\eta\zeta}$) Null wird. Gleichzeitig nehmen bezüglich dieses gedrehten Koordinatensystems die axialen Flächenmomente 2. Ordnung Extremwerte an. Diese neuen Koordinatenachsen werden daher als **Hauptachsen** der Fläche und das aus ihnen gebildete Koordinatensystem als **Hauptachsensystem** bezeichnet. Die entsprechenden axialen Flächenmomente 2. Ordnung bezeichnet man als **Hauptflächenmomente**.

a) Bestimmung der Richtungswinkel zu den Hauptachsen

Den Richtungswinkel zu den Hauptachsen erhält man aus Gleichung 9.12 mit der Bedingung $I_{\eta\zeta} = 0$:

$$\tan 2\varphi = \frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (9.13)$$

Damit ergibt sich der Richtungswinkel φ zu:

$$\varphi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z} \right) \quad \text{Richtungswinkel zwischen der y-Achse und der ersten oder zweiten Hauptachse} \quad (9.14)$$

Der mit Hilfe von Gleichung 9.14 errechnete Winkel φ kann der Richtungswinkel zwischen der ersten oder der zweiten Hauptachse sein. Eine Entscheidung kann mit Hilfe der zweiten Ableitung von Gleichung 9.10 erfolgen:

$$\frac{d^2 I_\eta}{d\varphi^2} = -2 \cdot (I_y - I_z) \cdot \cos 2\varphi - 4 \cdot I_{yz} \cdot \sin 2\varphi \quad (9.15)$$

Setzt man den gemäß Gleichung 9.14 ermittelten Richtungswinkel in Gleichung 9.15 ein und erhält für die zweite Ableitung ein negatives Ergebnis, dann ist $\varphi = \varphi_1$ der Richtungswinkel zwischen der y-Achse und der ersten Hauptachse. Bezuglich der ersten Hauptachse hat das axiale Flächenmoment 2. Ordnung ein Maximum. Erhält man hingegen ein positives Ergebnis, dann ist $\varphi = \varphi_2$ der Richtungswinkel zwischen der y-Achse und der zweiten Hauptachse. Bezuglich der zweiten Hauptachse hat das axiale Flächenmoment 2. Ordnung ein Minimum.

Aufgrund der π -Periodizität des Tangens ergibt sich der zweite Winkel zu:

$$\varphi_{2;1} = \varphi_{1;2} + 90^\circ \quad (9.16)$$

Bei Anwendung von Gleichung 9.14 ist zu berücksichtigen, dass I_y bzw. I_z die axialen Flächenmomente 2. Ordnung bezüglich der y-Achse bzw. der z-Achse sind. I_{yz} ist das gemischte Flächenmoment bezüglich des y-z-Koordinatensystems. Weiterhin ergibt sich die z-Richtung des Bezugssystems, ausgehend von der y-Richtung, stets durch eine Drehung um 90° im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn).

Bei symmetrischen Flächen ist das gemischte Flächenmoment (I_{yz}) in Bezug auf ein die Symmetrieachse beinhaltendes Achsen system Null. Die Symmetrieachse und die hierzu senkrechte Achse durch den Flächenschwerpunkt S sind also stets Hauptachsen.

Auffinden von Hauptachsen bei symmetrischen Flächen

Bei symmetrischen Flächen sind die Symmetrieachse und die hierzu senkrechte Achse durch den Flächenschwerpunkt S stets Hauptachsen.

b) Berechnung der Hauptflächenmomente

Zur Berechnung der Hauptflächenmomente ist es zweckmäßig, die trigonometrischen Beziehungen

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}} \quad (9.17)$$

und

$$\sin 2\varphi = \frac{\tan 2\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}} \quad (9.18)$$

anzuwenden.

Gleichung 9.13 in 9.17 eingesetzt ergibt:

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z}\right)^2}} = \frac{I_y - I_z}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 \cdot I_{yz}^2}} \quad (9.19)$$

Gleichung 9.13 in 9.18 eingesetzt liefert:

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \cdot I_{yz}}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 \cdot I_{yz}^2}} \quad (9.20)$$

Setzt man schließlich die Gleichungen 9.19 und 9.20 in Gleichung 9.10 ein, dann erhält man für das maximale Flächenmoment 2. Ordnung (I_1):

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \frac{I_y - I_z}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 \cdot I_{yz}^2}} + I_{yz} \cdot \frac{2 \cdot I_{yz}}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 \cdot I_{yz}^2}} \\ &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{[(I_y - I_z)^2 + 4 \cdot I_{yz}^2]}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 \cdot I_{yz}^2}} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 \cdot I_{yz}^2} \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad \text{Maximales Flächenmoment 2. Ordnung (Hauptflächenmoment)} \quad (9.21)$$

Setzt man schließlich die Gleichungen 9.17 und 9.18 in Gleichung 9.11 ein, dann erhält man nach Umformung in analoger Weise für das minimale Flächenmoment 2. Ordnung:

$$I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad \text{Minimales Flächenmoment 2. Ordnung (Hauptflächenmoment)} \quad (9.22)$$

9.2 Spannungsermittlung bei schiefer Biegung

Von schiefer Biegung spricht man, sofern der Biegemomentenvektor nicht mit einer der beiden Hauptachsen der Fläche zusammenfällt. Zerlegt man den Biegemomentenvektor M_b in Komponenten in Richtung der Hauptachsen (1) und (2), dann kann man die schiefe Biegung als Überlagerung zweier gerader Biegungen auffassen, daher auch die Bezeichnung „zweiachsige Biegung“. Bild 9.6 veranschaulicht diesen Sachverhalt.

Gegeben sei eine beliebige Querschnittsfläche eines biegebeanspruchten Balkens. Die Balkenachse soll voraussetzungsgemäß in der Lastebene liegen. Zur Ermittlung der Biegespannungen geht man schrittweise wie folgt vor:

- Ermittlung der Lage der beiden Hauptachsen (1) und (2) der Querschnittsfläche sowie der zugehörigen Hauptflächenmomente I_1 und I_2 (Kapitel 9.1.3). Mit dem Index „1“ soll vereinbarungsgemäß diejenige Hauptachse bezeichnet werden, bezüglich derer das axiale Flächenmoment 2. Ordnung ein Maximum hat („große Hauptachse“). Mit dem Index „2“ wird hingegen diejenige Hauptachse bezeichnet, bezüglich derer das axiale Flächenmoment 2. Ordnung ein Minimum hat („kleine Hauptachse“).
- Festlegung eines a-b-Koordinatensystems. Es ist zweckmäßig den Hauptachsen einen Richtungssinn zuzuordnen bzw. ein mit den Hauptachsen zusammenfallendes a-b-Koordinatensystem wie folgt einzuführen: Die a-Koordinatenrichtung soll mit der Richtung der großen Hauptachse ($a \equiv (1)$), die b-Koordinatenrichtung mit der kleinen Hauptachse zusammenfallen ($b \equiv (2)$). Die b-Richtung muss dabei aus der a-Richtung durch eine Drehung um 90° im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) hervorgehen.
- Einführung des Richtungswinkels α zwischen der a-Achse und dem Biegemomentenvektor M_b . Der Winkel wird von der positiven a-Achse aus abgetragen und ist im mathematisch positiven Sinn positiv und in die Gegenrichtung negativ zu berücksichtigen.

Um die in Kapitel 2.3.1 abgeleitete Grundgleichung 2.32 bzw. 2.33 für die Berechnung der Biegespannung bei gerader Biegung auch bei schiefer Biegung anwenden zu können, wird der Biegemomentenvektor M_b in Komponenten in Richtung der beiden Hauptachsen (M_{b1} und M_{b2}) zerlegt:

$$M_{b1} = M_b \cdot \cos \alpha \quad (9.23)$$

$$M_{b2} = M_b \cdot \sin \alpha \quad (9.24)$$

Damit folgt für die Biegespannungen in einem Flächenelement dA mit den Koordinaten a und b (siehe auch Gleichung 2.32):

$$\sigma_x(b) = \frac{M_{b1}}{I_1} \cdot b \quad (9.25)$$

$$\text{und } \sigma_x(a) = \frac{M_{b2}}{I_2} \cdot a \quad (9.26)$$

Die resultierende Biegespannung im Flächenelement dA erhält man durch Superposition der Spannungskomponenten $\sigma_x(a)$ und $\sigma_x(b)$:

$$\sigma_x = \sigma_x(b) - \sigma_x(a)$$

$$\sigma_x = \frac{M_{b1}}{I_1} \cdot b - \frac{M_{b2}}{I_2} \cdot a$$

$$\sigma_x = M_b \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{I_1} \cdot b - \frac{\sin \alpha}{I_2} \cdot a \right)$$

Resultierende Biegespannung in einem Flächenelement dA (Koordinaten a und b bezüglich des Hauptachsensystems) (9.27)

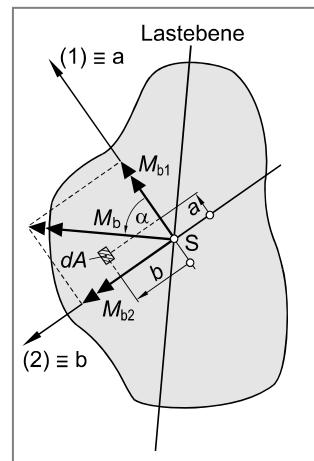


Bild 9.6 Zerlegung des Biegemomentenvektors in Richtung der Hauptachsen

Die Abstände a und b sind bei Anwendung von Gleichung 9.27 entsprechend des festgelegten a-b-Koordinatensystems (Hauptachsensystem) *vorzeichengerecht* einzusetzen. Ebenso ist für den Winkel α das Vorzeichen zu beachten.

9.3 Nulllinie

Unter der **(Spannungs-)Nulllinie** bei Biegung versteht man denjenigen geometrischen Ort aller Punkte innerhalb der Querschnittsfläche, an deren Stelle die Biegespannung zu Null wird. Sie ist die Schnittgerade der neutralen Faser mit der Querschnittsfläche.

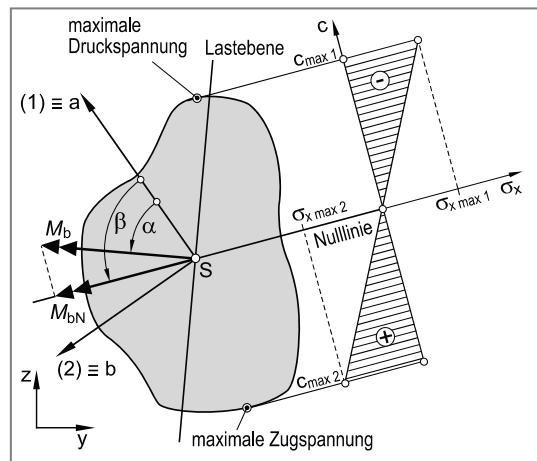


Bild 9.7 Lage der Nulllinie

Zur Bestimmung der Lage der Nulllinie setzt man in Gleichung 9.27 die Biegespannung σ_b zu Null:

$$\sigma_x = M_b \cdot \left(\frac{\cos \alpha \cdot b - \sin \alpha \cdot a}{I_1} \right) = 0 \quad (9.27)$$

Damit erhält man die Kurvengleichung der (Spannung-)Nulllinie in a-b-Koordinatensystem:

$$b(a) = \frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha \cdot a \quad \text{Gleichung der Nulllinie im a-b-Koordinatensystem} \quad (9.28)$$

Der Winkel β zwischen der a -Achse und der Nulllinie ergibt sich aus der Geradensteigung zu:

$$\beta = \arctan \left(\frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha \right) \quad \text{Winkel zwischen a-Achse und Nulllinie} \quad (9.29)$$

Da in der Regel $I_1 \neq I_2$ gilt, ist auch $\beta \neq \alpha$, so dass die Nulllinie nicht mit dem Biegemomentenvektor zusammenfällt, daher auch die Bezeichnung „schiefe Biegung“. Nur für Querschnitte mit gleichen Hauptflächenmomenten ($I_1 = I_2$) wie zum Beispiel Kreis, Kreisring oder Quadrat fallen Momentenvektor und Nulllinie zusammen ($\beta = \alpha$).

Bei bekannter Lage der Nulllinie kann die Biegespannung an einem beliebigen Ort der Querschnittsfläche, und damit auch die maximale Biegespannung, auf einfache Weise ermittelt werden. Bild 9.7 zeigt, dass sich die Biegespannung linear mit dem Abstand zur Nulllinie verändert. Es gilt (Strahlensatz):

$$\sigma_x(c) = \sigma_{x \max} \cdot \frac{c}{c_{\max}} \quad (9.30)$$

Die Biegespannung $\sigma_x(c)$ erzeugt im Abstand c von der Nulllinie das Moment:

$$dM = \sigma_x(c) \cdot dA \cdot c = \frac{\sigma_{x \max}}{c_{\max}} \cdot c^2 \cdot dA \quad (9.31)$$

Das Gesamtmoment M ergibt sich als Summe aller Teilmomente dM über die gesamte Querschnittsfläche A , d. h. als Integral über die Querschnittsfläche A :

$$M = \int_A dM = \frac{\sigma_{x \max}}{c_{\max}} \int_A c^2 \cdot dA = \frac{\sigma_{x \max}}{c_{\max}} \cdot I_N \quad (9.32)$$

Aus Gründen des Momentengleichgewichts muss das Moment M der Komponente des Biegemomentenvektors in Richtung der Nulllinie M_{bN} (Biegemoment um die Nulllinie) entsprechen. Für den Biegemomentenvektor M_{bN} in Bezug auf die Nulllinie gilt (Bild 9.7):

$$M_{bN} = M_b \cdot \cos(\beta - \alpha) \quad \text{Biegemoment in Bezug auf die Nulllinie} \quad (9.33)$$

Für die Anwendung von Gleichung 9.33 ist zu berücksichtigen, dass die Winkel α und β gleichsinnig von der a-Achse aus angebrachten werden müssen. Gegebenenfalls muss anstelle des mit Hilfe von Gleichung 9.29 errechneten Winkels β sein Nebenwinkel eingesetzt werden.

Aus Gleichung 9.32 folgt damit für die maximale Biegespannung $\sigma_{x \max}$ im maximalen senkrechten Abstand c_{\max} von der Nulllinie:

$$\sigma_{x \ max} = \frac{M_{bN}}{I_N} \cdot c_{\max} \quad \text{Maximale Biegespannung in der Querschnittsfläche} \quad (9.34)$$

Das axiale Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der Nulllinie (I_N) erhält man aus der Transformationsgleichung 9.10, wobei der Drehwinkel (φ) dem Winkel zwischen der großen Hauptachse (1) und der Nulllinie entspricht, also $\varphi \equiv \beta$. Da das gemischte Flächenmoment in Bezug auf das Hauptachsensystem Null ist, entfällt der zweite Summand in Gleichung 9.10 und es folgt:

$$I_N = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cdot \cos 2\beta \quad \text{Axiales Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der Nulllinie} \quad (9.35)$$

Gleichung 9.34 stellt mit den Gleichungen 9.33 und 9.35 eine alternative Methode dar, die Biegespannung an einer beliebigen Stelle der Querschnittsfläche, insbesondere jedoch die maximale Biegespannung $\sigma_{x \ max}$ zu ermitteln.

9.4 Aufgaben

Aufgabe 9.1



Die Abbildung zeigt einen einseitig eingespannten Kastenträger mit Rechteckquerschnitt aus einem vergüteten Feinkornbaustahl (S890QL). Der Träger wird durch eine unter dem Winkel $\varphi = 30^\circ$ schräg zur z-Achse angreifende Kraft $F = 100 \text{ kN}$ auf Biegung beansprucht. Die Wirkungslinie der Kraft geht durch den Flächenschwerpunkt. Schubspannungen durch Querkräfte, das Eigengewicht des Kastenträgers sowie eine eventuelle Kerbwirkung am Einspannquerschnitt sind zu vernachlässigen.

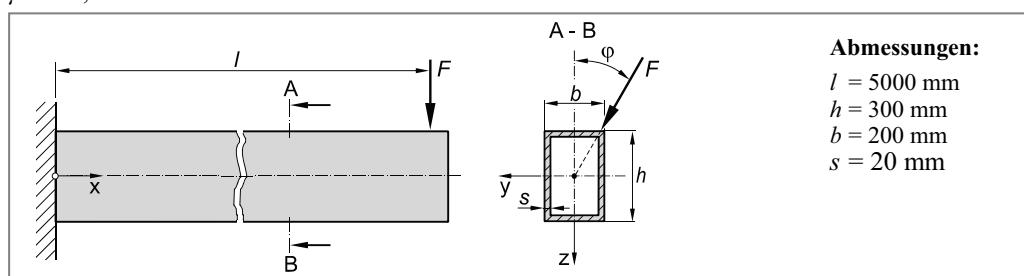
Werkstoffkennwerte S890QL:

$$R_e = 890 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1050 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

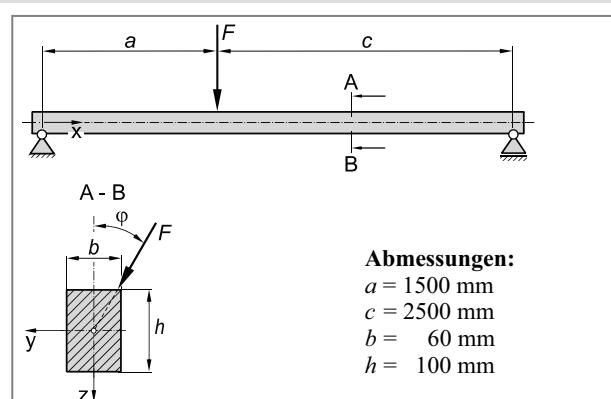


- Ermitteln Sie die Lage der beiden Hauptachsen für die gegebene Querschnittsfläche.
- Berechnen Sie die axialen Flächenmomente zweiter Ordnung bezüglich der beiden Hauptachsen (Hauptflächenmomente I_1 und I_2).
- Ermitteln Sie die Lage der Nulllinie und bestimmen Sie Ort und Betrag der maximalen Biegespannung.
- Berechnen Sie für die gefährdete Stelle die Sicherheit gegen Fließen.

Aufgabe 9.2



Der abgebildete Träger aus einem warmgewalzten Flachstahl mit Rechteckquerschnitt (Flachstab EN 10058 - 100x60x4000 F - S235JR) wird durch eine unter dem Winkel $\varphi = 22^\circ$ schräg zur z-Achse angreifende Querkraft $F = 10 \text{ kN}$ auf Biegung beansprucht. Die Wirkungslinie der Kraft geht dabei durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche.



Schubspannungen durch Querkräfte sowie das Eigengewicht des Trägers sind zu vernachlässigen.

Werkstoffkennwerte S235JR:

$$R_e = 245 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 440 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- Ermitteln Sie Ort und Betrag des maximalen Biegemomentes.
- Bestimmen Sie die Lage der beiden Hauptachsen des Rechteckquerschnitts.
- Ermitteln Sie die Lage der Nulllinie und bestimmen Sie Ort und Betrag der maximalen Biegesspannung.
- Berechnen Sie für die höchst beanspruchte Stelle die Sicherheit gegen Fließen.

Aufgabe 9.3



Ein einseitig eingespannter, gleichschenklicher T-Profilstahl nach DIN 59051 (TPS 40) aus S355JR mit einer Länge von $l = 2 \text{ m}$ wird durch eine unter dem Winkel $\varphi = 20^\circ$ schräg zur z-Achse angreifende Kraft $F = 250 \text{ N}$ auf Biegung beansprucht. Die Wirkungslinie der Kraft geht durch den Flächenschwerpunkt. Schubspannungen durch Querkräfte, das Eigengewicht des Bauteils sowie Kerbwirkung am Einspannquerschnitt sind zu vernachlässigen.

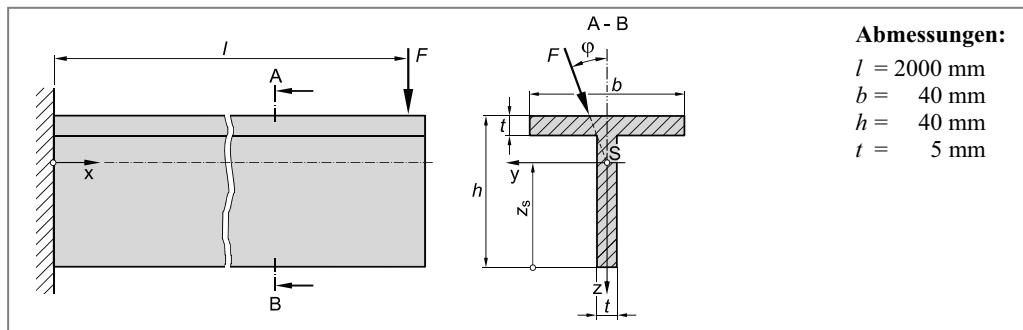
Werkstoffkennwerte S355JR:

$$R_e = 360 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 610 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 207000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- Ermitteln Sie die Lage des Flächenschwerpunktes (z_s) sowie die Lage der beiden Hauptachsen für die gegebene Querschnittsfläche.
- Berechnen Sie die axialen Flächenmomente zweiter Ordnung bezüglich der beiden Hauptachsen (Hauptflächenmomente I_1 und I_2).
- Ermitteln Sie die Lage der Nulllinie und bestimmen Sie Ort und Betrag der maximalen Zugspannung sowie der maximalen Druckspannung.
- Berechnen Sie für die gefährdete Stelle die Sicherheit gegen Fließen.

Aufgabe 9.4

Ein einseitig eingespannter ungleichschenkelig Winkelträger aus C60E+QT wird durch eine Einzelkraft $F = 7000 \text{ N}$ an seinem freien Ende belastet. Die Wirkungslinie der Kraft geht durch den Flächenschwerpunkt. Schubspannungen durch Querkräfte, das Eigengewicht des Winkelträgers sowie Kerbwirkung am Einspannquerschnitt sind zu vernachlässigen.

Werkstoffkennwerte S355JR:

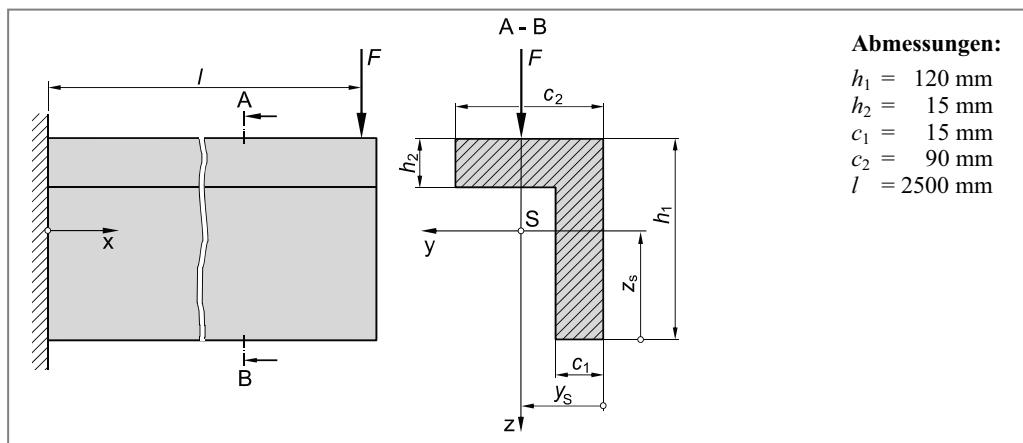
$$R_e = 590 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 890 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{dF} \approx R_e = 590 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 209000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- Ermitteln Sie die Lage des Flächenschwerpunktes (y_s und z_s) sowie die Lage der ersten und zweiten Hauptachse für die gegebene Querschnittsfläche.
- Berechnen Sie die axialen Flächenmomente zweiter Ordnung bezüglich der beiden Hauptachsen (Hauptflächenmomente I_1 und I_2).
- Bestimmen Sie den Ort und berechnen Sie den Betrag der maximalen Zugspannung sowie der maximalen Druckspannung.
- Berechnen Sie für die gefährdete Stelle die Sicherheit gegen Fließen.

Aufgabe 9.5

Ein einseitig eingespannter T-Profilstab aus der legierten Vergütungsstahlsorte 25CrMo4 ($\rho = 7,78 \text{ g/cm}^3$) wird durch zwei statisch wirkende Kräfte $F_1 = 1,5 \text{ kN}$ und $F_2 = 4 \text{ kN}$ beansprucht. Die Wirkungslinien der Kräfte gehen jeweils durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche. Schubbeanspruchung durch Querkräfte und Kerbwirkung an der Einspannstelle sind zu vernachlässigen. Das Eigengewicht des Profilstabes muss jedoch berücksichtigt werden.

Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen an der höchst beanspruchten Stelle. Ist die Sicherheit ausreichend?

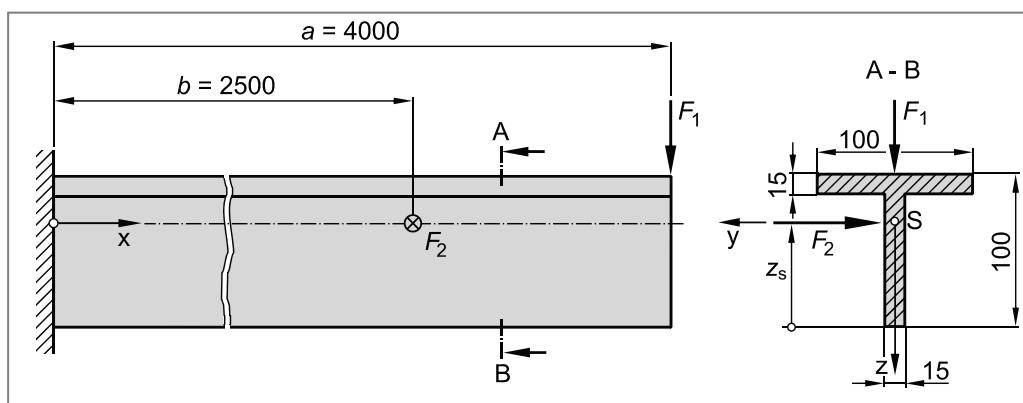
Werkstoffkennwerte S235JR:

$$R_c = 600 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 830 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 209000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



10 Schubspannungen durch Querkräfte bei Biegung

Wird ein Balken durch ein veränderliches Biegemoment $M_b(x)$ beansprucht, dann treten in jeder Querschnittsfläche des Balkens Querkräfte (Q) auf, die sich bei bekanntem Verlauf des Biegemomentes $M_b(x)$ entsprechend $Q(x) = dM_b(x) / dx$ berechnen lassen (Bild 10.1). Diese Querkräfte erzeugen Schubspannungen τ_q (**Querkraftschub**). Zwischen den Schubspannungen τ_q in einer bestimmten Querschnittsfläche und der dort herrschenden Querkraft Q gilt:

$$Q = \int_{A} \tau_q \cdot dA \quad (10.1)$$

Aus Kapitel 2.4.1 ist bekannt, dass Schubspannungen immer paarweise auftreten (zugeordnete Schubspannungen). Dementsprechend treten Schubspannungen in Querrichtung (τ_q) und Längsrichtung (τ_l) auf (Bild 10.2).

Das Auftreten von Schubspannungen in Längsrichtung (τ_l) kann man sich auch veranschaulichen, indem man sich den Balken in Längsrichtung aufgeschnitten bzw. aus lose aufeinander gelegten Brettern aufgebaut denkt (Bild 10.3). Unter einer Biegebeanspruchung gleiten die Bretter aufeinander ab, eine vorher aufgebrachte Markierung wird dementsprechend verschoben. Dieses Abgleiten wird beim massiven Balken durch die Längsschubspannungen τ_l verhindert.

10.1 Spannungsermittlung bei Querkraftschub

Zur Ermittlung der Schubspannungsverteilung sollen zunächst die folgenden Voraussetzungen gelten:

1. An lastfreien Oberflächen treten keine Schubspannungen auf ($\tau_q = \tau_l = 0$). Bei gekrümmten Querschnittsflächen verlaufen die Schubspannungen dementsprechend tangential zum Rand. Bei dünnwandigen Profilen verläuft die Schubspannung tangential zur Mittellinie der Querschnittsfläche (Bild 10.4a). Bei dicken Bauteilen schneiden sich die Schubspannungen einer Faser $z = \text{konst.}$ in einem Pol (Bild 10.4b).
2. Die parallel zur Querkraft gerichteten Vertikalkomponenten τ_p der Schubspannung τ_{ges} sollen nur in

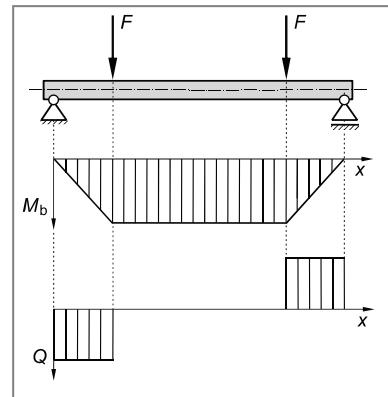


Bild 10.1 Momenten- und Querkraftverlauf am biegebeanspruchten Balken (Beispiel)

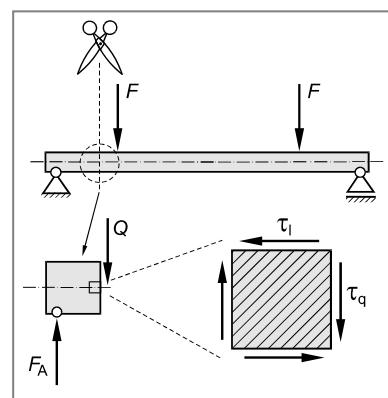


Bild 10.2 Entstehung von Längsschubspannungen

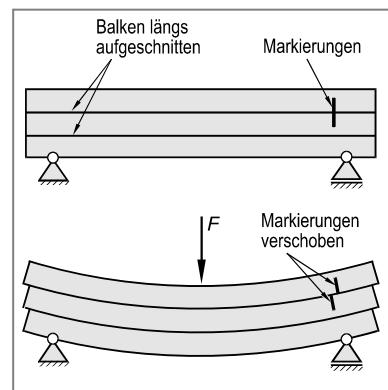


Bild 10.3 Veranschaulichung für das Auftreten von Längsschubspannungen

z -Richtung, nicht jedoch in y -Richtung veränderlich sein, d. h. τ_p soll über die gesamte Breite der Querschnittsfläche als konstant angenommen werden. Diese Annahme trifft allerdings nicht exakt zu, da die Schubspannung am Rand einer beliebig geformten Querschnittsfläche immer tangential zur Oberfläche verläuft. Dementsprechend ist τ_p eine mittlere Schubspannung in Bezug auf die Breite der Querschnittsfläche (Bild 10.4b).

Zur Ermittlung der Schubspannungen durch Querkräfte bei Biegung betrachtet man den in Bild 10.5a auf Biegung und Querkraftschub beanspruchten Balken. Die Querkraft Q soll dabei in Richtung der z -Achse wirken (gerade Biegung).

Zur Ermittlung der Schubspannungsverteilung wird ein Volumenelement der Länge dx herausgeschnitten (Bild 10.5b). Von diesem Volumenelement wird weiterhin an einer beliebigen Stelle z senkrecht zur z -Achse ein Teilelement abgetrennt (Bild 10.5c).

Ansetzen des Kräftegleichgewichts in x -Richtung an diesem Teilelement liefert:

$$\frac{\int_{A_R} (\sigma(z) + d\sigma) \cdot dA}{A_R} - \frac{\int_{A_R} \sigma(z) \cdot dA - \tau_1(z) \cdot b(z) \cdot dx}{A_R} = 0 \quad (10.2)$$

Normalkraft in der
vorderen Schnittfläche Normalkraft in der hinteren Schnittfläche Tangentialkraft F_t in Längsrichtung

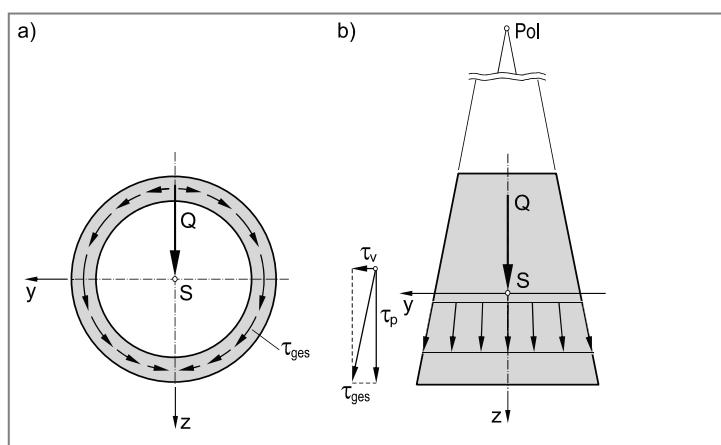


Bild 10.4 Schubspannungsverlauf durch Querkräfte in unterschiedlichen Querschnitten

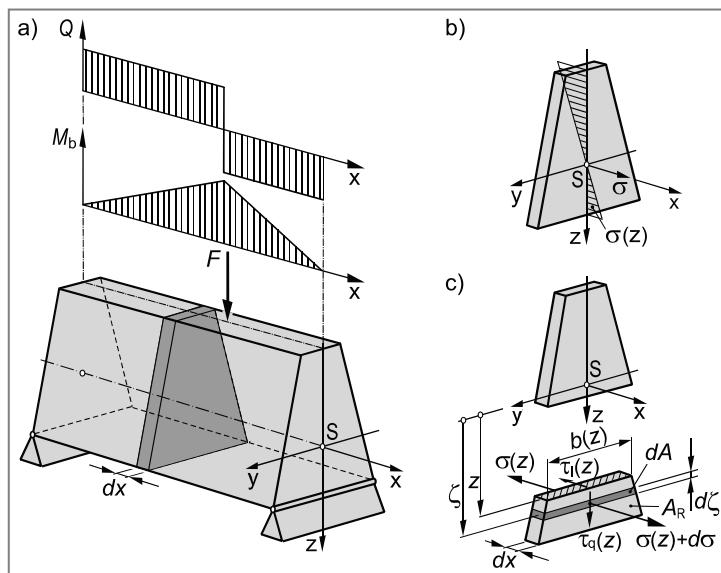


Bild 10.5 Kräfte- bzw. Spannungsverhältnisse am Teilelement eines auf Biegung und Querkraftschub beanspruchten Balkens

Die Differenz der Normalkräfte in der linken und der rechten Schnittfläche kann also nur durch eine Tangentialkraft in Längsrichtung ($F_t = \tau_l(z) \cdot b(z) \cdot dx$) ausgeglichen werden. Ursache für die unterschiedlichen Normalkräfte in der linken und rechten Schnittfläche des Teilelementes ist das in x-Richtung veränderliche Biegemoment (Bild 10.5a).

Aus Gleichung 10.2 folgt:

$$\int_{A_R} d\sigma \cdot dA = \tau_l(z) \cdot b(z) \cdot dx \quad (10.3)$$

und damit:

$$\tau_l(z) = \frac{1}{b(z)} \int_{A_R} \frac{d\sigma}{dx} dA \quad (10.4)$$

Für die Biegespannung $\sigma(\zeta)$ im Abstand ζ von der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt gilt (Gleichung 2.32):

$$\sigma(\zeta) = \frac{M_b(x)}{I_y} \cdot \zeta \quad (10.5)$$

Gleichung 10.5 nach x differenziert liefert mit $dM_b(x) / dx = Q = \text{konst.}$:

$$\frac{d\sigma(\zeta)}{dx} = \frac{dM_b(x)}{dx} \cdot \frac{\zeta}{I_y} = Q \cdot \frac{\zeta}{I_y} \quad (10.6)$$

Gleichung 10.6 in Gleichung 10.4 eingesetzt ergibt schließlich für die Längsschubspannung:

$$\tau_l(z) = \frac{Q}{b(z) \cdot I_y} \int_{A_R} \zeta \cdot dA \quad (10.7)$$

Der Integralausdruck $\int_{A_R} \zeta \cdot dA = H_y(z)$

ist das **Flächenmoment 1. Ordnung (statisches Moment)** der Restfläche A_R bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt (Kapitel 9.1.1). Damit folgt schließlich für die Längsschubspannung:

$$\tau_l(z) = \tau_q(z) = \frac{Q \cdot H_y(z)}{b(z) \cdot I_y} \quad \text{Grundgleichung zur Ermittlung der Schubspannungen durch Querkräfte bei Biegung} \quad (10.8)$$

Q Querkraft

$H_y(z)$ Flächenmoment 1. Ordnung der Restfläche A_R bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt. $H_y(z)$ ist mit der Koordinate z veränderlich.

A_R Restfläche d. h. Fläche zwischen der Koordinate z an deren Stelle die Schubspannung τ_l bzw. τ_q ermittelt werden soll und dem Rand (Bild 10.5c).

$b(z)$ Breite des Teilelements an der Stelle z (Bild 10.5c).

I_y Axiales Flächenmoment 2. Ordnung der gesamten Querschnittsfläche bzgl. der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt.

In Tabelle 10.1 ist die Verteilung der Längs- bzw. Querschubspannungen ausgewählter Querschnittsflächen zusammengestellt. Die Spannungsverläufe erhält man durch Berechnung des

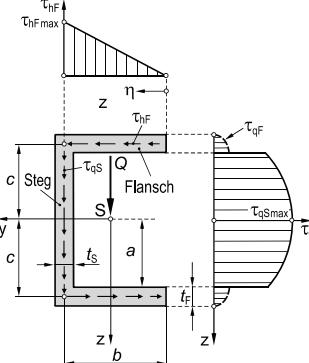
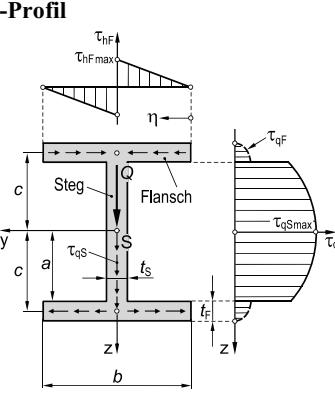
Flächenmomente 1. Ordnung $H_y(z)$ sowie des axialen Flächenmomentes I_y für die entsprechenden Querschnittsgeometrien (siehe auch Aufgaben 10.1 bis 10.3).

Der Einfluss von Schubspannungen durch Querkräfte bei Biegung soll am Beispiel dünnwandiger Profilträger (Kapitel 10.2) sowie genieteter bzw. geschweißter dünnwandiger Profilträger (Kapitel 10.3) detaillierter untersucht werden.

Tabelle 10.1 Schubspannungsverteilung durch Querkraftschub ausgewählter Querschnitte

Querschnittsfläche	Schubspannungsverteilung	Maximale Schubspannung
Rechteckquerschnitt 	$\tau_q(z) = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{h^2} \right)$	$\tau_{q\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \tau_m$ mit $\tau_m = \frac{Q}{A}$
Vollkreisquerschnitt 	Vertikalkomponente: $\tau_q(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right)$ Resultierende Randschubspannung: $\tau_r(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}$	$\tau_{q\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} = \frac{4}{3} \cdot \tau_m$ mit $\tau_m = \frac{Q}{A}$
Kreisring (dünnwandig) 	$\tau(\phi) = \frac{Q}{\pi \cdot r \cdot t} \cdot \cos \phi$	$\tau_{\max} = \frac{Q}{\pi \cdot r \cdot t} = 2 \cdot \tau_m$ mit $\tau_m = \frac{Q}{A}$

Fortsetzung Tabelle 10.1 Schubspannungsverteilung durch Querkraftschub ausgewählter Querschnitte

C-Profil  <p>The diagram shows a C-profile cross-section with dimensions: height c, width b, thickness of the flange t_F, and thickness of the web t_S. The coordinate system (y-axis) is at the center of the flange. The flange has a trapezoidal shape with a maximum thickness t_F at the top and zero at the bottom. The web has a rectangular shape with height a and thickness t_S. The distance from the center of the flange to the center of the web is c. The total height of the profile is $2c$. The horizontal shear stress in the flange varies linearly from zero at the top to $\tau_{hF\max}$ at the bottom. The vertical shear stress in the web varies parabolically from zero at the top and bottom to a maximum of $\tau_{qS\max}$ at the center of the web.</p>	Horizontale Schubspannungen im Flansch $\tau_{hF}(\eta) = \frac{Q \cdot c}{I_y} \cdot \eta$ $\tau_{hF\max} = \frac{Q \cdot b}{I_y} \cdot \eta$ Vertikale Schubspannungen im Steg ($-a \leq z \leq a$) $\tau_{qS}(z) = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \right]$ $\tau_{qS\max} = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \right]$
I-Profil  <p>The diagram shows an I-profile cross-section with dimensions: height c, width b, thickness of the flange t_F, and thickness of the web t_S. The coordinate system (y-axis) is at the center of the flange. The flange has a trapezoidal shape with a maximum thickness t_F at the top and zero at the bottom. The web has a rectangular shape with height a and thickness t_S. The distance from the center of the flange to the center of the web is c. The total height of the profile is $2c$. The horizontal shear stress in the flange varies linearly from zero at the top to $\tau_{hF\max}$ at the bottom. The vertical shear stress in the web varies parabolically from zero at the top and bottom to a maximum of $\tau_{qS\max}$ at the center of the web.</p>	Horizontale Schubspannungen im Flansch ($0 \leq \eta \leq b/2$) $\tau_{hF}(\eta) = \frac{Q \cdot c}{I_y} \cdot \eta$ $\tau_{hF\max} = \frac{Q \cdot c}{I_y} \cdot \frac{b}{2}$ Vertikale Schubspannungen im Steg ($-a \leq z \leq a$) $\tau_{qS}(z) = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \right]$ $\tau_{qS\max} = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \right]$

10.2 Schubspannungen in dünnwandigen Profilträgern

Im Stahlbau werden häufig Profilträger mit I-, U- oder C-Profil eingesetzt. Da ihre Wanddicke im Verhältnis zu den Querschnittsabmessungen (Breite und Höhe) in der Regel gering ist, können die Schubspannungen vereinfacht als zur Querschnittsberandung parallel verlaufend und konstant über der Wanddicke angesehen werden. Vertikale Schubspannungen im Flansch sowie horizontale Schubspannungen im Steg können dementsprechend vernachlässigt werden.

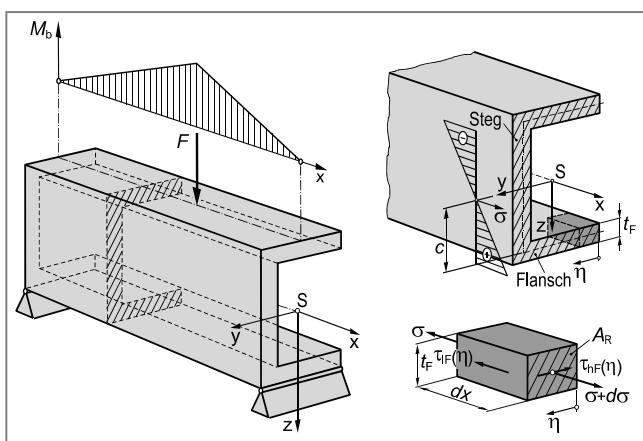


Bild 10.6 Beispiel zur Ermittlung der horizontalen Schubspannungen im Flansch eines dünnwandigen Profilträgers

10.2.1 Horizontale Schubspannungen im Flansch

Zur Ermittlung der **horizontalen Schubspannungen im Flansch** $\tau_{hF}(\eta)$ betrachtet man ein herausgeschnittenes Teilelement der Länge dx und setzt das Kräftegleichgewicht in x-Richtung an (Bild 10.6):

$$\int_{A_R} (\sigma(z) + d\sigma) \cdot dA - \int_{A_R} \sigma(z) \cdot dA - \tau_{IF}(\eta) \cdot t_F \cdot dx = 0 \quad (10.9)$$

Aus Gleichung 10.9 folgt:

$$\int_{A_R} d\sigma \cdot dA = \tau_{IF}(\eta) \cdot t_F \cdot dx \quad (10.10)$$

$$\tau_{IF}(\eta) = \frac{1}{t_F} \int_{A_R} \frac{d\sigma}{dx} \cdot dA \quad (10.11)$$

Für die in y-Richtung konstante Biegespannung im Abstand c von der Biegeachse gilt:

$$\sigma(z = c) = \frac{M_b(x)}{I_y} \cdot c \quad (10.12)$$

und damit:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{dM_b}{dx} \cdot \frac{c}{I_y} = \frac{Q \cdot c}{I_y} \quad (10.13)$$

Mit $\tau_{IF}(\eta) = \tau_{hF}(\eta)$ und Gleichung 10.13 folgt aus Gleichung 10.11:

$$\tau_{hF}(\eta) = \frac{Q \cdot c}{I_y \cdot t_F} \int_{A_R} dA = \frac{Q \cdot c}{I_y \cdot t_F} \cdot A_R = \frac{Q \cdot c}{I_y \cdot t_F} \cdot t_F \cdot \eta \quad (10.14)$$

$$\tau_{hF}(\eta) = \frac{Q \cdot c}{I_y} \cdot \eta \quad \text{Horizontale Schubspannungen im Flansch eines dünnwandigen C-Profils} \quad (10.15)$$

10.2.2 Vertikale Schubspannungen im Steg

Zur Ermittlung der **vertikalen Schubspannungen im Steg** $\tau_{qs}(z)$ schneidet man den Profilträger entsprechend Bild 10.7 frei und setzt ebenfalls das Kräftegleichgewicht in x-Richtung für das abgeschnittene Volumenelement an ($0 \leq z \leq a$):

$$\int_{A_R} (\sigma(z) + d\sigma) \cdot dA - \int_{A_R} \sigma(z) \cdot dA - \tau_{IS}(z) \cdot t_S \cdot dx = 0 \quad (10.16)$$

Aus Gleichung 10.16 folgt:

$$\int_{A_R} d\sigma \cdot dA = \tau_{IS}(z) \cdot t_S \cdot dx \quad (10.17)$$

$$\tau_{IS}(z) = \frac{1}{t_S} \int_{A_R} \frac{d\sigma}{dx} \cdot dA \quad (10.18)$$

Für die Biegespannung $\sigma(\zeta)$ im Abstand ζ von der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt gilt:

$$\sigma(\zeta) = \frac{M_b(x)}{I_y} \cdot \zeta \quad (10.19)$$

und damit:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\zeta)}{dx} &= \frac{dM_b(x)}{dx} \cdot \frac{\zeta}{I_y} \\ &= Q \cdot \frac{\zeta}{I_y} \end{aligned} \quad (10.20)$$

Gleichung 10.20 in Gleichung 10.18 eingesetzt ergibt:

$$\tau_{IS}(z) = \frac{Q}{t_S \cdot I_y} \int_A \zeta \cdot dA \quad (10.21)$$

Der Integralausdruck ist das Flächenmoment 1. Ordnung (statisches Moment) der Restfläche A_R , d. h. von Flansch und Steg. Es muss nachfolgend noch gelöst werden:

$$\begin{aligned} \int_A \zeta \cdot dA &= b \int_a^{a+t_F} \zeta \cdot d\zeta + t_S \int_z^a \zeta \cdot d\zeta = \frac{b}{2} [\zeta^2]_a^{a+t_F} + \frac{t_S}{2} [\zeta^2]_z^a \\ &= \frac{b}{2} \cdot ((a+t_F)^2 - a^2) + \frac{t_S}{2} \cdot (a^2 - z^2) = \frac{b}{2} \cdot (2at_F + t_F^2) + \frac{t_S}{2} \cdot (a^2 - z^2) \\ &= t_F \cdot b \cdot \left(a + \frac{t_F}{2} \right) + \frac{t_S}{2} \cdot (a^2 - z^2) = b \cdot c \cdot t_F + \frac{t_S}{2} \cdot (a^2 - z^2) \end{aligned} \quad (10.22)$$

Damit folgt für die Spannungsverteilung im Steg $\tau_{IS}(z)$:

$$\tau_{IS}(z) = \frac{Q}{t_S \cdot I_y} \cdot \left[b \cdot c \cdot t_F + \frac{t_S}{2} \cdot (a^2 - z^2) \right] \quad (10.23)$$

Mit $\tau_{IS}(z) = \tau_{QS}(z)$ folgt damit letztlich:

$$\tau_{QS}(z) = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \right] \quad \text{Vertikale Schubspannungen im Steg eines dünnwandigen C-Profil} \quad (10.24)$$

Die Gleichungen 10.15 und 10.24 lassen sich auch auf die für die Praxis wichtigen I-Profilen übertragen (Tabelle 10.1).

10.2.3 Schubmittelpunkt

In dünnwandigen, offenen Profilen (z. B. Abkantprofile aus Blech) können die Schubspannungen im Flansch (τ_{hf}) eine Verdrehung um die Längsachse bewirken. Bild 10.8 veranschaulicht diesen Sachverhalt am Beispiel eines dünnwandigen C-Profil. Die aus den Schubspannungen

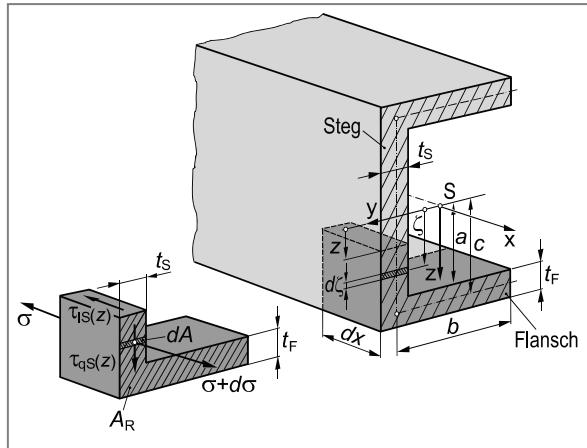


Bild 10.7 Ermittlung der vertikalen Schubspannungen im Steg eines dünnwandigen Profilträgers

im Flansch (Bild 10.8a) resultierenden Flansch-Schubkräfte bewirken ein Kräftepaar, die eine Verdrehung des Profils um die Längsachse verursachen (Bild 10.8b). Diese Verdrehung kann verhindert werden, sofern die Wirkungslinie der Kraft F durch den **Schubmittelpunkt M** geht und dadurch ein den Flansch-Schubkräften entgegengesetzt wirkendes Drehmoment erzeugt (Bild 10.8c). Bei dünnwandigen, offenen Profilen sollte daher die Belastungsebene durch den Schubmittelpunkt gelegt werden. Auf die Berechnung der Lage des Schubmittelpunktes soll nicht näher eingegangen werden [9].

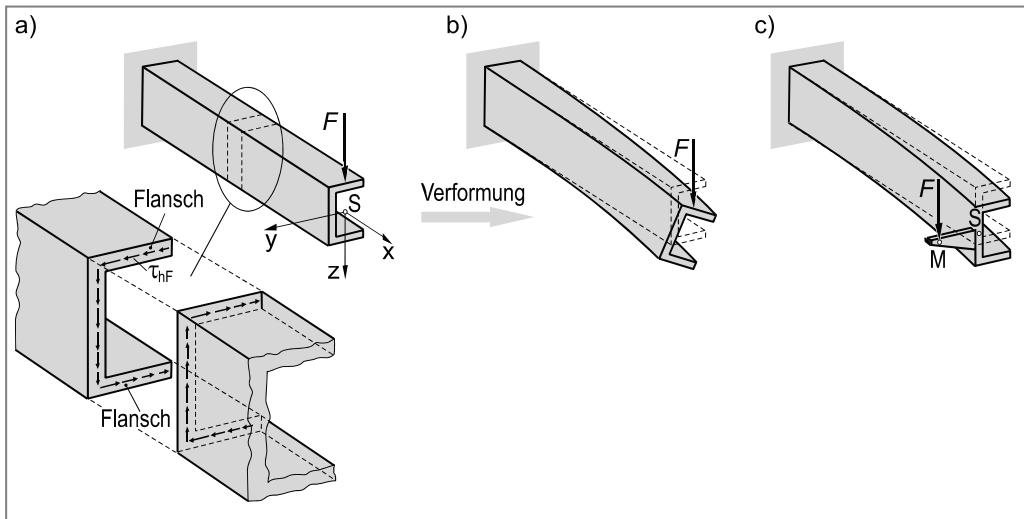


Bild 10.8 Verdrehung dünnwandiger, offener Profile unter Schubbeanspruchung

10.3 Schubspannungen in genieteten oder geschweißten Profilträgern

Schneidet man gemäß Bild 10.9 aus einem biegebeanspruchten Balken mit veränderlichem Biegemoment ein schmales Volumenelement heraus, dann muss die Differenz der Normalkräfte in der linken und rechten Schnittfläche durch eine Tangentialkraft F_t in Längsrichtung (Längsschubkraft) ausgeglichen werden. Diese Tangentialkräfte müssen von den Verbindungsmitteln wie Nieten oder Bolzen aber auch von Schweißnähten oder Klebstoffsichten aufgenommen werden (als Beispiele siehe Aufgabe 10.4 bis 10.6). Von Bedeutung sind diese Längsschubkräfte aber auch bei Holzkonstruktionen, da die erzeugten Schubkräfte von Nägeln oder Leimschichten übertragen werden müssen.

10.3.1 Genietete Träger

Zur Veranschaulichung soll der in Bild 10.9 dargestellte einseitig eingespannte Freiträger mit konstanter Breite betrachtet werden. Zur Erhöhung der Beanspruchbarkeit werden beidseitig Verstärkungsbleche aufgenietet. Um die Schubspannungen im Nietquerschnitt zu ermitteln, schneidet man ein Stück der Länge t ($t = \text{Nietteilung}$) des Verstärkungsbleches frei und betrachtet das Kräftegleichgewicht in x-Richtung. Aufgrund des veränderlichen Biegemomentes muss die Differenz der Normalspannungen an beiden Schnittflächen durch eine Tangentialkraft $F_t = \tau_l(z) \cdot A$ ausgeglichen werden.

Mit Gleichung 10.8 gilt damit für die Längsschubkraft F_t :

$$F_t = \frac{Q \cdot H_y(z)}{b(z) \cdot I_y} \cdot A \quad (10.25)$$

Für $b(x) = b(z) = b = \text{konst.}$ folgt weiter mit $A = b \cdot t$:

$$F_t = \frac{Q \cdot H_y(z)}{I_y} \cdot t \quad (10.26)$$

Im Falle einer Nietverbindung mit n parallelen Nieten wirkt auf jede Niete die Schubkraft:

$$F_N = \frac{F_t}{n} \quad (10.27)$$

Die maximale Schubspannung $\tau_{N \max}$ im Niet beträgt (Tabelle 10.1):

$$\tau_{N \max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{F_N}{\pi r^2} \quad (10.28)$$

und mit Gleichung 10.26 und 10.27 schließlich:

$$\tau_{N \max} = \frac{4}{3 \cdot n} \cdot \frac{Q \cdot H_y(z) \cdot t}{I_y \cdot \pi r^2}$$

Maximale Schubspannung in den Gurtnieten eines Profilträgers unter Querkraftschub (gilt nur für die in Bild 10.9 dargestellten geometrischen Verhältnisse)

Q Querkraft

$H_y(z)$ Flächenmoment 1. Ordnung (statisches Moment) der Restfläche A_R bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

I_y Axiales Flächenmoment der gesamten Querschnittsfläche bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

t Nietteilung (Bild 10.9)

n Anzahl paralleler Nieten

r Radius des Niets

$\tau_{N \max}$ darf die zul. Schubspannung τ_{zul} des Nietwerkstoffes nicht überschreiten.

10.3.2 Geschweißte Träger

Betrachtet man anstelle einer Nietverbindung eine **Schweißverbindung** mit zwei parallelen unterbrochenen Nähten (Nahtlänge l_s) oder zwei parallelen durchgehenden Nähten, dann errechnet sich die Schubspannung in der Schweißnaht zu:

$$\tau_s = \frac{F_t / 2}{a \cdot l_s} \quad (10.30)$$

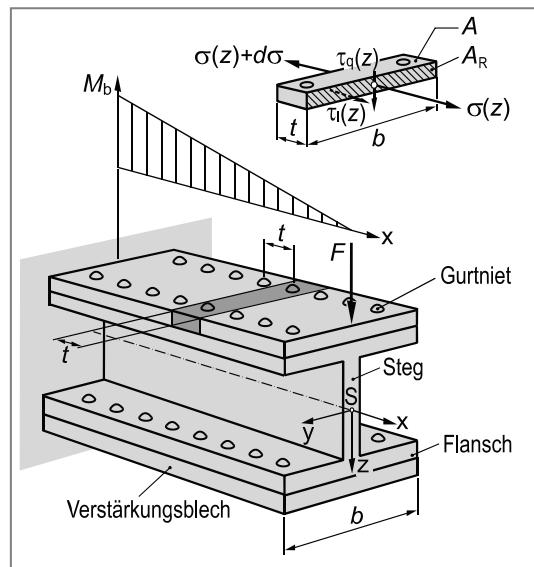


Bild 10.9 Träger mit genieteten Verstärkungsblechen

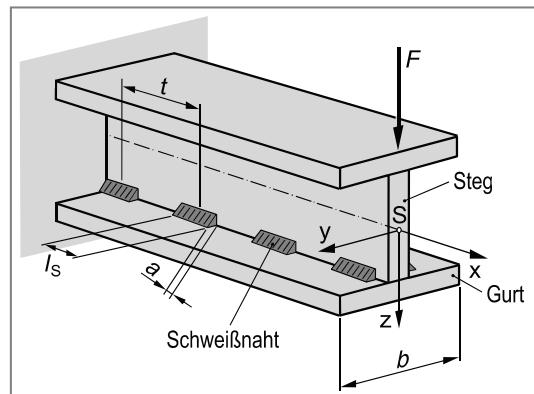


Bild 10.10 Geschweißter Profilträger

und mit Gleichung 10.26 schließlich:

$$\tau_s = \frac{Q \cdot H_y(z)}{2a \cdot I_y} \cdot \frac{t}{l_s} \quad \text{Schubspannung in der Schweißnaht zwischen Gurt- und Stegblech eines Profilträgers unter Querkraftschub (zwei parallele Schweißnähte)} \quad (10.31)$$

Hierbei ist a die Nahtdicke. Bei Kehlnähten wird für Festigkeitsbetrachtungen in der Regel das Diagonalmaß a verwendet (Bild 10.10). Für durchgehende Nähte ist $t = l_s$, also $t / l_s = 1$. τ_s darf die zulässige Schubspannung τ_{zul} der Naht nicht überschreiten.

Für die Auslegung von Schweißverbindungen muss zusätzlich berücksichtigt werden, dass in der Schweißnaht neben den genannten Schubspannungen auch Zug- bzw. Druckspannungen infolge der zusätzlichen Biegebeanspruchung auftreten. Maßgebend für ein Versagen ist daher insgesamt die **Vergleichsspannung** σ_v , wobei nach der Gestaltänderungsenergiehypothese (Kapitel 6.3) gilt:

$$\sigma_{v\text{GEH}} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_s^2} \quad \text{Vergleichsspannung in der Schweißnaht zwischen Gurt- und Stegblech eines Profilträgers unter Querkraftschub (zwei parallele Schweißnähte)} \quad (10.32)$$

mit $\sigma_b = \frac{M_b}{I} \cdot z$ nach Gleichung 2.32 und τ_s nach Gleichung 10.31.

10.4 Berücksichtigung von Schub- und Normalspannungen bei biegebeanspruchten Balken

Balken, die durch ein veränderliches Biegemoment beansprucht werden (z. B. Bild 10.11) erfahren Schubspannungen durch Querkräfte *und* Normalspannungen aufgrund der Biegebeanspruchung. In den vorangegangenen Kapiteln 10.1 bis 10.3 wurden die in biegebeanspruchten Balken auftretenden Schubspannungen ermittelt, in Kapitel 2.3.1 wurden hingegen nur die Normalspannungen durch Biegung berücksichtigt (reine Biegung).

Nachfolgend soll der gemeinsame Einfluss von Schub- und Biegenormalspannungen betrachtet und anschließend am Beispiel eines einseitig eingespannten Trägers mit Rechteckquerschnitt (Bild 10.11) quantifiziert werden.

Die größte Schubspannung eines biegebeanspruchten Balkens mit veränderlichem Biegemoment tritt nach Gleichung 10.8 bei $z = 0$ auf, da das Flächenmoment 1. Ordnung dort maximal wird (Restfläche A_R wird maximal).

Für die maximale Schubspannung $\tau_q(z = 0) = \tau_{q\text{max}}$ gilt also:

$$\tau_{q\text{max}} = \tau_{1\text{max}} = \frac{\Omega_{\text{max}} \cdot H_y(0)}{b(0) \cdot I_y} \quad (10.33)$$

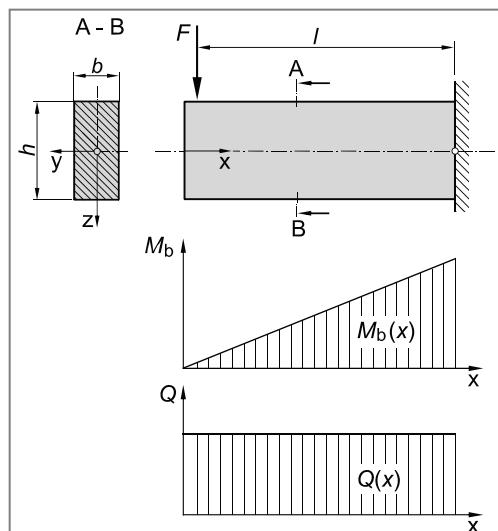


Bild 10.11 Einseitig eingespannter Träger mit Rechteckquerschnitt

Die größte Biegespannung $\sigma_{b \max}$ errechnet sich nach Gleichung 2.35 zu:

$$\sigma_{b \max} = \frac{M_{b \max}}{W_{by}} \quad (10.34)$$

Das Verhältnis der maximalen Schubspannung zur maximalen Biegespannung beträgt dann:

$$\frac{\tau_{q \max}}{\sigma_{b \max}} = \frac{Q_{\max}}{M_{b \max}} \cdot \frac{H_y(0)}{b(0) \cdot (I_y / W_{by})} \quad (10.35)$$

Das Verhältnis $\tau_{q \max} / \sigma_{b \max}$ soll am Beispiel eines einseitig eingespannten Trägers mit Rechteckquerschnitt entsprechend Bild 10.11 quantifiziert werden.

Es gilt mit $Q = F$:

$$\tau_{q \max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{b \cdot h} \quad (\text{Tabelle 10.1}) \quad (10.36)$$

$$\sigma_{b \max} = \frac{M_{b \max}}{W_{by}} = \frac{F \cdot l}{b \cdot h^2 / 6} = \frac{6 \cdot F \cdot l}{b \cdot h^2} \quad (10.37)$$

damit folgt:

$$\frac{\tau_{q \max}}{\sigma_{b \max}} = \frac{h}{4 \cdot l} \quad (10.38)$$

Aus Gleichung 10.38 lässt sich der folgende wichtige Sachverhalt ableiten:

Schubspannungen und Normalspannungen in einem biegebeanspruchten Balken haben etwa dieselbe Größenordnung, falls Balkenhöhe und Balkenlänge etwa dieselbe Größenordnung haben (kurzer Balken). In diesem Fall darf bei einer Festigkeitsberechnung der Einfluss der Schubspannungen nicht vernachlässigt werden. Bei langen Balken können die Schubspannungen gegenüber den Normalspannungen hingegen vernachlässigt werden. So beträgt beispielsweise für einen einseitig eingespannten Balken mit Rechteckquerschnitt (Bild 10.11) und $l = 5 \cdot h$ die Schubspannung $\tau_{q \max}$ nur 5% der (Biege-)Normalspannung $\sigma_{b \max}$ und ist damit vernachlässigbar.

10.5 Verformung unter Schubbeanspruchung (Schubverformung)

In den vorangegangenen Kapiteln 10.1 bis 10.3 wurde die Verteilung der Schubspannungen für unterschiedliche Querschnittsgeometrien ermittelt. Es zeigte sich dabei, dass die Schubspannungen ungleichmäßig über der Querschnittsfläche verteilt sind (Tabelle 10.1). Gemäß dem Hookeschen Gesetz für Schubspannungen ($\tau = G \cdot \gamma$) sind dann aber auch die Winkeländerungen (Schiebungen) ungleichmäßig verteilt d. h. jedes Volumenelement erfährt in Abhängigkeit seiner Lage eine unterschiedliche Winkelverzerrung (Schiefstellung). Der gesamte Querschnitt verwölbt sich dadurch. Damit ist die in Kapitel 2.3.1 getroffene Annahme, dass die Querschnitte eben bleiben (Bernoullische Hypothese) zumindest für kurze, biegebeanspruchte Balken nicht zutreffend. Auf die Ermittlung der durch Schubspannungen verursachten Durchbiegung soll allerdings verzichtet und stattdessen auf die weiterführende Literatur wie z.B. [9] verwiesen werden.

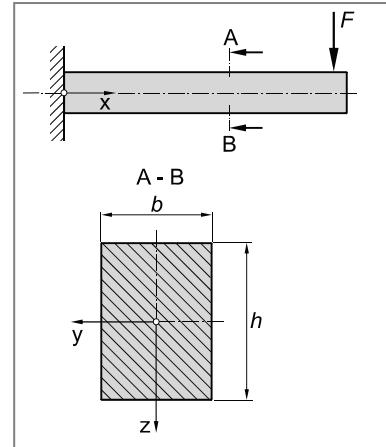
10.6 Aufgaben

Aufgabe 10.1



Der dargestellte kurze Freiträger mit Rechteckquerschnitt der Breite b und der Höhe h wird an seinem rechten Ende durch die Einzelkraft F beansprucht. Berechnen Sie die Spannungsverteilung $\tau(z)$ durch Querkraftschub in Abhängigkeit der Koordinate z und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Tabelle 10.1.

Kerbwirkung an der Einspannstelle ist zu vernachlässigen.

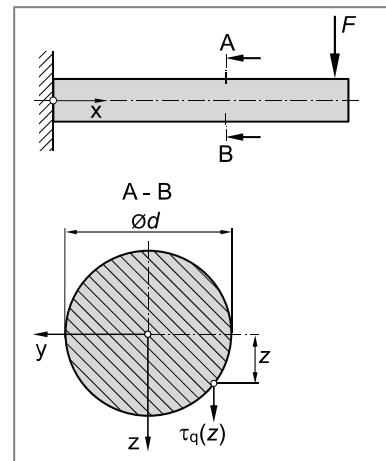


Aufgabe 10.2



Der dargestellte kurze Freiträger mit Vollkreisquerschnitt (Durchmesser d) wird an seinem rechten Ende durch die Einzelkraft F beansprucht. Berechnen Sie die Spannungsverteilung $\tau_q(z)$ durch Querkraftschub in Abhängigkeit der Koordinate z und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Tabelle 10.1.

Kerbwirkung an der Einspannstelle ist zu vernachlässigen.

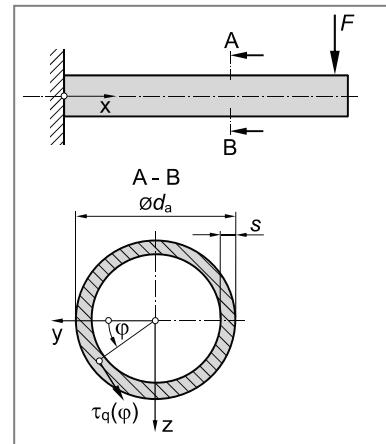


Aufgabe 10.3



Das dargestellte dünnwandige Kreisrohr (Außendurchmesser d_a , Wandstärke s) wird an seinem rechten Ende durch die Einzelkraft F beansprucht. Berechnen Sie die Spannungsverteilung $\tau(\varphi)$ durch Querkraftschub in Abhängigkeit der Koordinate φ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Tabelle 10.1.

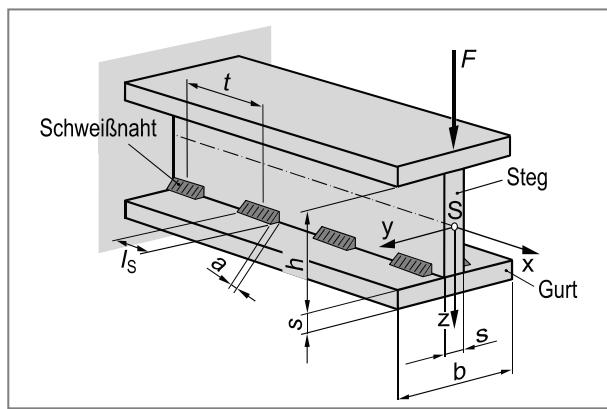
Kerbwirkung an der Einspannstelle ist zu vernachlässigen.



Aufgabe 10.4

Der dargestellte kurze Freiträger ist aus drei gleichen Stahlblechen ($h = b = 300 \text{ mm}$, $s = 30 \text{ mm}$) zusammengeschweißt. Die Nahtdicke beträgt $a = 7 \text{ mm}$, die Nahtlängen jeweils $l_s = 30 \text{ mm}$ und die Teilung $t = 50 \text{ mm}$. Der Träger ist an seinem linken Ende fest eingespannt und an seinem rechten Ende durch die Kraft $F = 100 \text{ kN}$ belastet.

- a) Berechnen Sie die Schubspannung τ_s in der Schweißnaht.

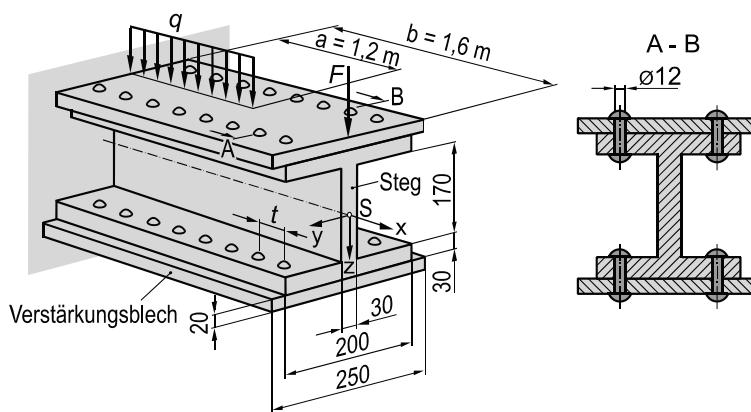


Normalspannungen in der Schweißnaht aufgrund der Biegebeanspruchung sowie Kerbwirkung an der Einspannstelle sollen vernachlässigt werden.

- b) Ist die Beanspruchung der Schweißnaht noch zulässig, falls die Schubspannung in der Naht $\tau_{zul} = 85 \text{ N/mm}^2$ nicht überschreiten darf?

Aufgabe 10.5

Zur Erhöhung der Beanspruchbarkeit eines einseitig eingespannten Trägers werden an der Ober- und Unterseite zusätzliche Verstärkungsbleche (250 mm x 20 mm) aufgenietet. Die Gurtnieten haben einen Durchmesser von $d_N = 12 \text{ mm}$. Die zulässige Spannung für den Nietwerkstoff beträgt $\tau_{zul} = 120 \text{ N/mm}^2$. Der Träger wird entsprechend der Abbildung durch die konstante Querkraft $F = 60 \text{ kN}$ sowie die konstante Streckenlast $q = 25 \text{ kN/m}$ belastet. Ermitteln Sie die mindestens erforderliche Nietteilung t , damit ein Abscheren der Gurtnieten vermieden wird.



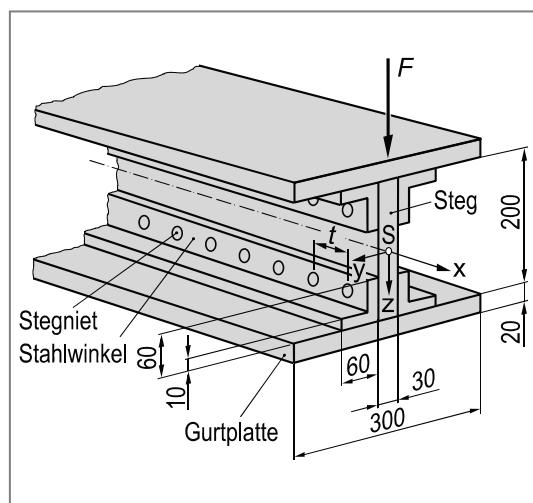
Aufgabe 10.6

Zum Bau einer Stahlbrücke sollen Träger entsprechend der Abbildung eingesetzt werden. Die zulässige Kraft F soll auf 150 kN begrenzt werden.

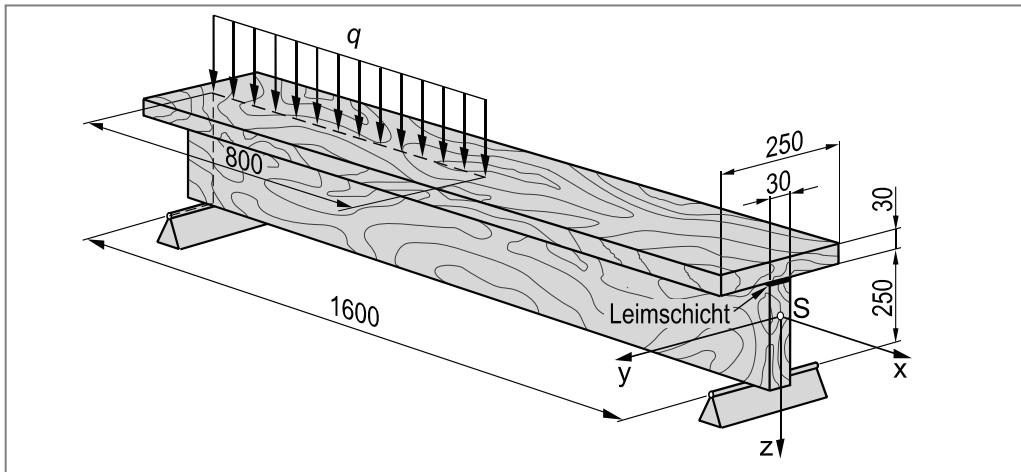
Die Gurtplatten (300 x 20 mm) und die Stahlwinkel (60 x 60 x 10 mm) sind fest miteinander verschweißt. Die Stahlwinkel sollen hingegen mit dem Stegblech (200 x 30 mm) vernietet werden. Der Nietdurchmesser wurde mit $d = 15$ mm festgelegt.

Die zulässige Schubspannung des Nietwerkstoffes beträgt $\tau_{zul} = 150 \text{ N/mm}^2$.

Berechnen Sie die erforderliche Teilung t der Stegnieten, damit ein Abscheren ausgeschlossen werden kann.

**Aufgabe 10.7**

Für eine einfache Dachkonstruktion sollen zwei Bretter (250 x 30 mm) T-förmig miteinander verleimt werden. Die hieraus entstehenden T-Profile werden auf ihrer linken Hälfte durch die Streckenlast $q = 100 \text{ kN/m}$ belastet (siehe Abbildung).



- Ermitteln Sie die Lage des Flächenschwerpunktes des T-Profil.
- Berechnen Sie das axiale Flächenmoment zweiter Ordnung bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt des T-Profil.
- Überprüfen Sie, ob die Belastung zulässig ist, falls die Schubspannung in der Leimschicht $\tau = 25 \text{ N/mm}^2$ nicht überschreiten darf.

11 Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

Werden Stäbe mit nicht kreisförmigen Querschnitten (z. B. Rechteckquerschnitte) auf Torsion beansprucht, dann beobachtet man eine Verwölbung d. h. die Querschnittsflächen bleiben nicht eben (Bild 11.1). Es muss daher unterschieden werden, ob sich eine freie Verwölbung einstellen kann. Wird eine freie Verwölbung der Querschnittsflächen beispielsweise durch eine beidseitige Einspannung verhindert, dann kann eine freie Verschiebung von Werkstoffteilchen in Richtung der Stabachse nicht erfolgen, es treten zusätzlich Normalspannungen auf. Diese wölbbehinderte Torsion, die auch als **Wölkrafttorsion** bezeichnet wird, ist jedoch schwierig zu berechnen und soll im Rahmen dieses Buches daher nicht weiter betrachtet werden.

Sofern sich eine freie Verwölbung der Querschnitte einstellen kann und keine Querkräfte auftreten, spricht man von **reiner Torsion** oder **Saint-Venantscher Torsion**. Jedoch auch unter der Voraussetzung einer freien Verwölbung der Querschnittsflächen ist die Berechnung von Spannungen und Verformungen bei Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte mit elementaren Mitteln häufig nicht möglich. Die nachfolgenden Ausführungen sollen sich daher auf einige ausgewählte technisch bedeutsame Fälle beschränken.

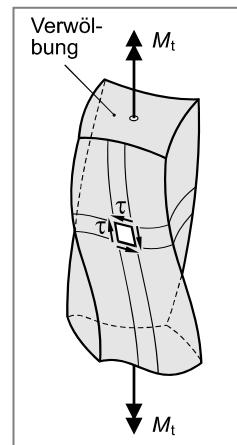


Bild 11.1
Torsion eines nicht kreisförmigen Querschnitts

11.1 Torsion dünnwandiger, geschlossener Hohlprofile

Die Spannungsermittlung torsionsbeanspruchter beliebiger Querschnitte ist, wie eingangs erwähnt, im Allgemeinen komplex. Eine Ausnahme bilden die kreisförmigen Querschnitte (Kapitel 2.5.1) sowie die dünnwandigen Hohlquerschnitte. Letztere haben in der Technik eine nicht unerhebliche Bedeutung, beispielsweise für Stahlkonstruktionen.

In die Gruppe der dünnwandigen Hohlquerschnitte fallen alle Profile deren Wanddicke t klein gegenüber den übrigen Querschnittsabmessungen ist. Unter der Annahme, dass:

1. die Belastung durch ein Drehmoment um die Stabachse erfolgt, Querkräfte nicht auftreten und die Verwölbung der Querschnitte ungehindert stattfinden kann d. h. keine Normalspannungen in Längsrichtung auftreten (reine Torsion oder Saint-Venantsche Torsion),
2. die Wanddicke t klein gegenüber den Querschnittsabmessungen und nur wenig veränderlich ist, d. h. die Schubspannungen konstant verteilt sind und tangential zum Rand verlaufen,
3. die Gestalt der Querschnittsfläche bei der Verformung erhalten bleibt (analog zum Vollkreis- bzw. Kreisringquerschnitt),

dann ist der **Schubfluss** $T = \tau(s) \cdot t$ an jeder Stelle des Querschnitts gleich groß, also:

$$T = \tau(s) \cdot t = \text{konstant} \quad (11.1)$$

Die Beziehung zwischen dem Schubfluss T und dem Torsionsmoment M_t stellt die **erste Bredtsche Formel** (**Rudolph Bredt**, 1842 ... 1900) her:

$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{2 \cdot A_m \cdot t_{\min}} \quad \text{1. Bredtsche Formel} \quad (11.2)$$

τ_t Maximale Schubspannung im Hohlquerschnitt (N/mm^2)

M_t Torsionsmoment (Nm)

A_m Fläche, die von der Profilmittellinie umschlossen wird (mm^2). Sie darf nicht mit der Querschnittsfläche A verwechselt werden (siehe Bild 11.2)

t_{\min} kleinste Wanddicke (mm)

Die maximale Schubspannung tritt an der Stelle mit der kleinsten Wanddicke (t_{\min}) auf.

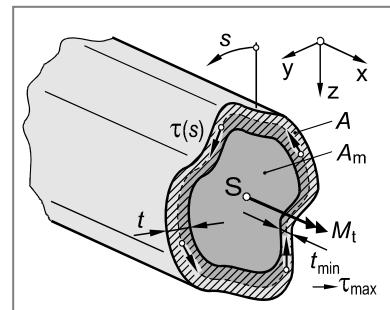


Bild 11.2 Torsion dünnwandiger, geschlossener Hohlprofile

11.2 Torsion dünnwandiger, offener Hohlprofile

Die Ermittlung von Schubspannungen in dünnwandigen, offenen (einzelligen) Hohlprofilen soll sich auf Profile beschränken, die sich aus schmalen Rechtecken zusammensetzen wie z. B. T-, U-, L- oder Z-Profilen, Bild 11.3. Die Berechnung kann ebenfalls noch mit elementaren Mitteln erfolgen. Ohne auf die Herleitung (z. B. [9]) einzugehen, folgt für das **Torsionsflächenmoment**¹⁾ oder den **Drillwiderstand** I_t :

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3 \quad \text{Torsionsflächenmoment eines aus schmalen Rechtecken zusammengesetzten offenen Hohlprofils} \quad (11.3)$$

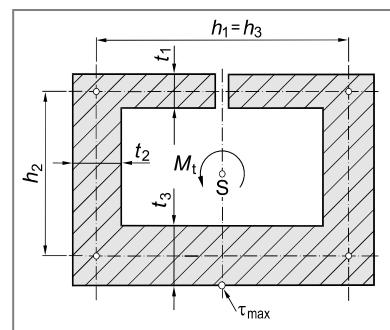


Bild 11.3 Torsion dünnwandiger, offener Hohlprofile

In Analogie zur Torsion kreisförmiger Querschnitte führt man das **Torsionswiderstandsmoment** W_t ein und errechnet analog zu Gleichung 2.64:

$$W_t = \frac{I_t}{t_{\max}} = \frac{1}{3 \cdot t_{\max}} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3 \quad (11.4)$$

Damit ergibt sich die maximale Schubspannung $\tau_{\max} = \tau_t$ zu:

$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{3 \cdot t_{\max}}{\sum_i h_i \cdot t_i^3} \cdot M_t \quad \text{Maximale Schubspannung bei Torsion eines aus schmalen Rechtecken zusammengesetzten offenen Hohlprofils} \quad (11.5)$$

Der Ort maximaler Schubspannung findet sich am Rechteck mit der größten Breite (t_{\max}) und zwar an seinem Außenrand in der Mitte der längeren Seite (Bild 11.3). Falls das Profil Querschnitte mit gekrümmter Mittellinie enthält, dann können diese Flächen näherungsweise wie gestreckte Rechtecke mit der Länge der abgewickelten Mittellinie betrachtet werden (siehe Aufgabe 11.4).

¹⁾ Im Sinne einer einheitlichen Bezeichnung soll bei beliebigen Querschnitten vom **Torsionsflächenmoment** gesprochen und das Formelzeichen I_t verwendet werden. Im Falle von Vollkreis- und Kreisringquerschnitten wird vom **polaren Flächenmoment** gesprochen und das Formelzeichen I_p verwendet (siehe Kapitel 2.5).

11.3 Torsion beliebiger Vollquerschnitte

Die für dünnwandige geschlossene und offene Profile abgeleiteten Beziehungen dürfen nicht auf beliebige nicht kreisförmige Vollquerschnitte übertragen werden. Zur Ermittlung von Betrag und Richtung der Schubspannung in einem beliebigen Punkt eines nicht kreisförmigen Vollquerschnitts benötigt man die **Torsionsfunktion** $\Phi(y,z)$. Man erhält sie durch Lösen einer Poissonschen Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta \Phi = \text{konst.} \quad (11.6)$$

für die jeweilige Querschnittsfläche unter Beachtung der Randbedingung $\Phi_{\text{Rand}} = 0$. Falls für eine Querschnittsfläche die Torsionsfunktion $\Phi(y,z)$ gefunden wurde, dann erhält man die Komponenten der Schubspannung durch partielle Differentiation der Torsionsfunktion nach den Koordinaten y bzw. z :

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{und} \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (11.7)$$

Die Torsionsfunktion $\Phi(y,z)$ lässt sich anschaulich als Fläche über der toradierten Querschnittsfläche interpretieren (Bild 11.4). Die *Richtung* der Schubspannung in einem beliebigen Punkt $P(y_P | z_P)$ erhält man, indem man im Durchstoßpunkt der Senkrechten zur Querschnittsfläche (Punkt P^*) die Tangente an die entsprechende Höhenlinie h^* ermittelt. Den *Betrag* der Schubspannungen erhält man aus der Steilheit der Fläche. Die höchste Schubspannung tritt dementsprechend an der steilsten Stelle auf.

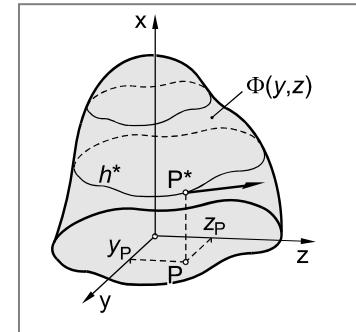


Bild 11.4 Veranschaulichung der Torsionsfunktion

11.3.1 Membran-Analogie von Prandtl

Die mathematische Lösung der Poissonschen Differentialgleichung 11.6 ist im Allgemeinen schwierig und erfordert weiterführende mathematische Kenntnisse. Dennoch ist es mit entsprechenden Analogien möglich, sich einen Überblick über den Spannungsverlauf und die Orte der größten Schubspannung, die potentiellen Versagensstellen also, zu verschaffen. Hierzu bedient man sich beispielsweise der **Membran-Analogie von Prandtl** (Ludwig Prandtl, 1875 ... 1953, Veröffentlichung der Membran-Analogie 1904).

Man denkt sich zunächst den Vollkreisquerschnitt beispielsweise aus einer ebenen Blechplatte ausgeschnitten und mit einer Membran (z. B. Seifenhaut) überspannt. Bei einem geringen Überdruck wölbt sich diese Membran zu einer räumlich gekrümmten Fläche $u(y,z)$, die analog der Torsionsfunktion einer Poissonschen Differentialgleichung genügt (Bild 11.5):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u = \text{konst.} \quad (11.8)$$

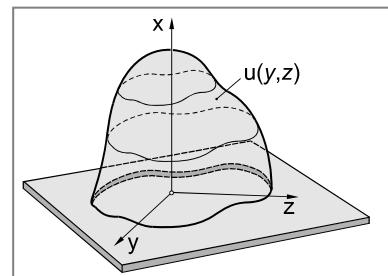


Bild 11.5 Membran-Analogie von Prandtl

Aufgrund der mathematischen Identität der Gleichungen 11.6 und 11.8 findet man in Analogie zur Torsionsfunktion die höchste Schubspannung an der steilsten Stelle des Seifenhautberges. Der **Drillwiderstand** I_t ist proportional zum Volumen der verformten Membran. Ein zunehmender Drillwiderstand führt zu einer geringeren Verdrehung des Stabes.

11.3.2 Strömungsanalogie von Thomson

Ähnlich der Membran-Analogie von Prandtl lässt sich das Torsionsproblem qualitativ auch mit Hilfe der **Strömungsanalogie von Thomson** (*W. Thomson*, 1824 ... 1907) veranschaulichen.

Denkt man sich einen tordierten Stab von einer reibungsfreien, inkompressiblen Flüssigkeit mit konstanter Zirkulation durchströmt, dann stimmen die Richtung der Stromlinien mit der Richtung der resultierenden Schubspannung überein und die Strömungsgeschwindigkeit (Abstand der Stromlinien) ist proportional zur Schubspannung an derselben Stelle im tordierten Querschnitt.

Die Strömungsanalogie zeigt insbesondere, dass mit enger werdendem Querschnitt die Strömungsgeschwindigkeit und dementsprechend die Schubspannung steigt. Die höchsten Schubspannungen treten dabei immer am Querschnittsrand der engsten Stelle auf (Bild 11.6).

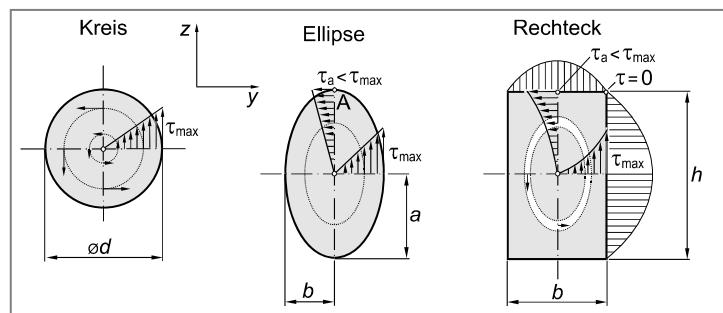


Bild 11.6 Schubspannungsverlauf nach der Strömungsanalogie von Thomson in ausgewählten Vollquerschnitten

Die Strömungsanalogie zeigt weiterhin, dass an der Ecke eines tordierten Stabes (z. B. eines Rechteckquerschnittes) die Schubspannung Null sein muss, da ein unstetiger Richtungswechsel der Strömung physikalisch nicht möglich ist. Im Bereich scharfkantiger Ecken erfolgt eine „schroffe“ Umlenkung der Strömungsrichtung d. h. an diesen Stellen sind eine hohe Strömungsgeschwindigkeit und dementsprechend hohe Schubspannungen zu erwarten (Bild 11.7). Bei spröden Werkstoffen können sich dabei Risse bilden, zähe Werkstoffe werden sich hingegen plastisch verformen (Ausrundung der Ecke und dementsprechend Spannungsabbau).

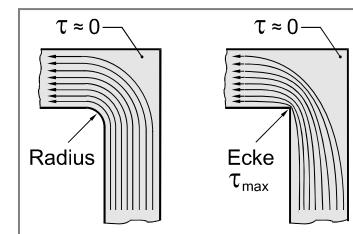


Bild 11.7 Schubspannungsverlauf nach der Strömungsanalogie von Thomson im Bereich von Ecken

11.4 Grundgleichungen zur Torsion ausgewählter Querschnitte

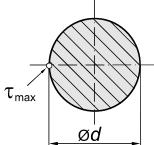
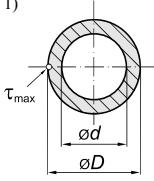
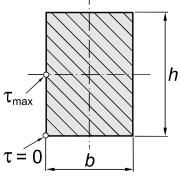
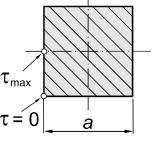
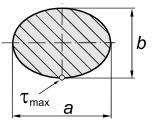
Für die Berechnung von Stäben mit beliebiger Querschnittsform ist es zweckmäßig, die Berechnungsformeln auf die Form entsprechend des Kreisquerschnitts zu bringen (Gleichung 2.65). Die maximale Spannung τ_{\max} ($\equiv \tau_t$) errechnet sich dann gemäß:

$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{Maximale Torsionsschubspannung in einem geraden prismatischen Stab mit beliebiger Querschnittsform} \quad (11.9)$$

W_t Torsions-Widerstandsmoment (aus Tabelle 11.1)

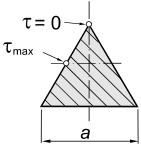
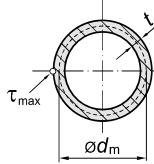
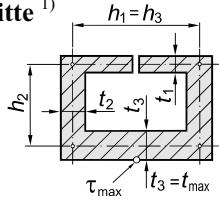
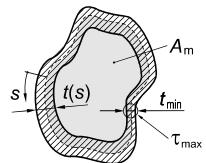
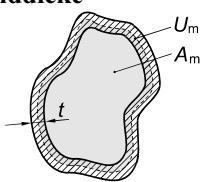
M_t Torsionsmoment

Tabelle 11.1 Torsionsflächenmomente I_t und Torsionswiderstandsmomente W_t technisch bedeutsamer Querschnittsflächen

Profil	Torsionsflächenmoment I_t	Torsionswiderstandsmoment W_t
Vollkreis 	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$
Kreisring ¹⁾ 	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4)$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$
Rechteck 	$I_t = c_1 \cdot h \cdot b^3$ mit $c_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{0,630}{h/b} + \frac{0,052}{(h/b)^5} \right)$ und $c_2 = 1 - \frac{0,650}{1 + (h/b)^3}$	$W_t = \frac{c_1}{c_2} \cdot h \cdot b^2$
Quadrat 	$I_t = 0,141 \cdot a^4$	$W_t = 0,208 \cdot a^3$
Ellipse 	$I_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2}$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot a \cdot b^2$

¹⁾ dickwandig

Fortsetzung Tabelle 11.1 Torsionsflächenmomente I_t und Torsionswiderstandsmomente W_t technisch bedeutsamer Querschnittsflächen

Profil	Torsionsflächenmoment I_t	Torsionswiderstandsmoment W_t
Gleichseitiges Dreieck 	$I_t = \frac{a^4}{46,2}$	$W_t = \frac{a^3}{20}$
Dünnwandiges, geschlossenes Kreisrohr ($t = \text{konst.}$) 	$I_t = \frac{\pi}{4} \cdot d_m^3 \cdot t$	$W_t = \frac{\pi}{2} \cdot d_m^2 \cdot t$
Dünnwandige offene Hohlquerschnitte¹⁾ 	$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$	$W_t = \frac{1}{3 \cdot t_{\max}} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$
Dünnwandige, geschlossene Hohlquerschnitte mit veränderlicher Wanddicke²⁾ 	$I_t = \frac{4 \cdot A_m^2}{\oint ds / t(s)}$	$W_t = 2 \cdot A_m \cdot t_{\min}$
Dünnwandige, geschlossene Hohlquerschnitte mit konstanter Wanddicke³⁾ 	$I_t = \frac{4 \cdot A_m^2 \cdot t}{U_m}$	$W_t = 2 \cdot A_m \cdot t$

¹⁾ aus Rechteckquerschnitten zusammengesetzt
³⁾ U_m ist die Länge der Mittellinie

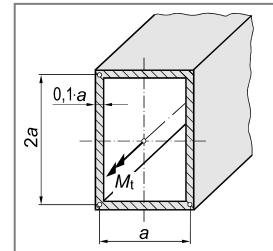
²⁾ $\oint ds / t(s)$ ist das Linienintegral längs der Profilmittellinie

11.5 Aufgaben

Aufgabe 11.1

Der dargestellte Kastenträger aus dem unlegierten Baustahl S235JR ($R_e = 240 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 440 \text{ N/mm}^2$) hat einen dünnwandigen Rechteckquerschnitt und wird durch das Torsionsmoment $M_t = 500 \text{ Nm}$ um die Stabachse statisch beansprucht.

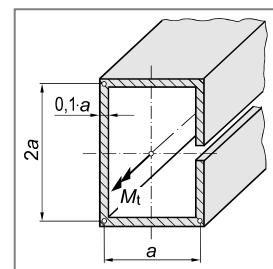
Berechnen Sie das Maß a , damit Fließen mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden kann.



Aufgabe 11.2

Der dünnwandige Kastenträger aus Aufgabe 11.1 (Werkstoff S235JR; $R_e = 240 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 440 \text{ N/mm}^2$) erhält einen schmalen, durchgehenden seitlichen Schlitz (siehe Abbildung). Das statisch wirkende Torsionsmoment $M_t = 500 \text{ Nm}$ um die Stabachse soll unverändert bleiben.

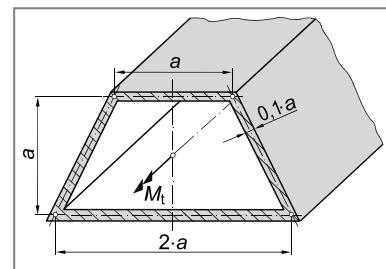
Berechnen Sie für diese Variante das Maß a , damit Fließen mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden kann.



Aufgabe 11.3

Das dargestellte dünnwandige, geschlossene Trapezprofil aus EN AW-Al Zn5Mg3Cu -T6 ($R_{p0,2} = 500 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 680 \text{ N/mm}^2$) wird durch das statisch wirkende Torsionsmoment $M_t = 250 \text{ kNm}$ um die Stabachse beansprucht.

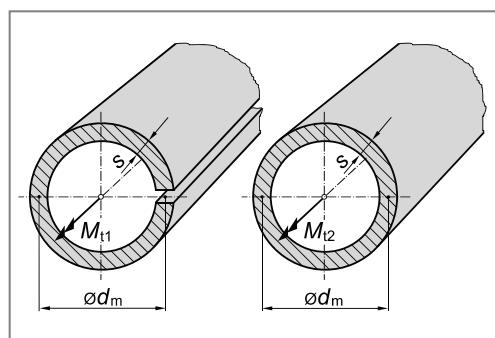
Berechnen Sie das Maß a , damit Fließen mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden kann.



Aufgabe 11.4

Zwei dünnwandige Stahlrohre mit Kreisringquerschnitt (Werkstoff S355J0) werden durch die um die Stabachse wirkenden Momente M_{t1} und M_{t2} auf Torsion beansprucht (siehe Abbildung). Während eines der beiden Stahlrohre einen durchgehenden Schlitz hat, ist das andere Stahlrohr geschlossen.

Berechnen Sie das Verhältnis M_{t2} / M_{t1} der übertragbaren Torsionsmomente, so dass kein Fließen eintritt.



12 Behälter unter Innen- und Außendruck

Eine Vielzahl technischer Bauteile wie zum Beispiel Druckbehälter, Dampf- und Gasleitungen, Pipelines, Hydraulik- und Pneumatikzylinder aber auch Bremsleitungen in Fahrzeugen, werden durch einen inneren Überdruck beansprucht. Mitunter erfolgt jedoch auch eine Beanspruchung durch einen äußeren Überdruck. Als Beispiele können Ansaug- oder Kondensationsleitungen genannt werden. Da ein Versagen derartiger, insbesondere durch Innendruck beanspruchter Bauteile zumeist mit erheblichen Schäden einher geht (man denke beispielsweise an eine Dampfkessellexplosion), ist ein sorgfältiger Festigkeitsnachweis aus Sicherheitsgründen von größter Bedeutung.

Ziel dieses Kapitels ist die Spannungsermittlung und der Festigkeitsnachweis von Behältern unter einem inneren oder äußeren Überdruck. Unter dem Begriff "Behälter" sollen dabei offene Hohlzylinder wie zum Beispiel Rohrleitungen, geschlossene Hohlzylinder wie Druckbehälter sowie Hohlkugeln verstanden werden.

Vielfach ist die Wandstärke von Druckbehältern und Rohrleitungen klein gegenüber ihrem Durchmesser, so dass die Tangentialspannung in der Behälterwand als konstant angesehen werden kann. Außerdem kann die Radialspannung vernachlässigt oder ein linearer Spannungsverlauf zugrunde gelegt werden. Dementsprechend ist es aus Gründen des Berechnungsaufwandes zweckmäßig, zwischen dünnwandigen und dickwandigen Behältern zu unterscheiden.

12.1 Dünnwandige Behälter

Ein Behälter wird nach DIN 2413 als dünnwandig bezeichnet, falls für sein Durchmesserverhältnis gilt:

$$\frac{d_a}{d_i} \leq 1,2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{s}{d_i} \leq 0,1 \quad (12.1)$$

Bei einem dünnwandigen Behälter kann dann, wie bereits erwähnt, die Tangentialspannung in der Behälterwand als konstant angesehen werden. Außerdem kann die Radialspannung vernachlässigt oder ein linearer Spannungsverlauf zugrunde gelegt werden, so dass sich der Berechnungsaufwand zur Spannungsermittlung erheblich reduziert.

12.1.1 Dünnwandige Behälter unter Innendruck

Ein innerer Überdruck (p_i), nachfolgend kurz als "Innendruck" bezeichnet, weitet den Behälter zunächst auf, d. h. sein Durchmesser bzw. Umfang wird vergrößert. Hierdurch entstehen Spannungen in Umfangsrichtung die im Folgenden als **Umfangsspannungen** oder **Tangentialspannungen** σ_t bezeichnet werden sollen.

Sofern der Behälter beidseitig verschlossen ist (z. B. Druckbehälter) oder eine abgewinkelte Rohrleitung vorliegt, wirkt der Innendruck auch auf die Böden bzw. die Leitungsbögen und führt zu einer Verlängerung des Behälters in Axialrichtung. Hierbei entstehen Spannungen in Längsrichtung, die als **Längsspannungen** oder **Axialspannungen** σ_a bezeichnet werden.

Letztlich wirkt der Innendruck auch auf die Innenoberfläche des Behälters und erzeugt eine Spannung in radialer Richtung, also senkrecht zur Behälterwand, die **Radialspannung** σ_r .

Zur Spannungsermittlung wendet man das Schnittprinzip an, indem man ein Flächenelement senkrecht zur wirkenden Tangential- bzw. Axialspannung herausschneidet (Bild 12.1).

Die nachfolgenden Beziehungen beschränken sich, mit Ausnahme der Hohlkugel, auf den zylindrischen Teil des Behälters, d. h. es soll ein ausreichender Abstand von seinen Enden angenommen werden. Eine Beeinflussung durch die komplexen, einer elementaren Berechnung nicht zugänglichen Spannungsverhältnisse im Bereich der Endböden von Druckbehältern oder Bögen von Rohrleitungen ist dementsprechend nicht zu erwarten (Prinzip von *de Saint-Venant*).

Tangentialspannung (Umfangsspannung)

Zur Ermittlung der Tangentialspannung (σ_t) führt man einen Schnitt längs der Behälterachse durch und betrachtet den in Bild 12.2 dargestellten Halbring. Ansetzen des Kräftegleichgewichts ergibt ($l = \text{Länge des Behälters}$):

$$p_i \cdot d_i \cdot l = 2 \cdot \sigma_t \cdot s \cdot l$$

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} \quad \begin{array}{l} \text{Tangentialspannung eines} \\ \text{dünnwandigen Behälters} \\ \text{unter Innendruck} \end{array}$$
(12.2)

Axialspannung (Längsspannung)

Zur Berechnung der Axialspannung (σ_a) führt man einen Querschnitt senkrecht zur Behälterachse durch (Bild 12.3). Das Kräftegleichgewicht in Axialrichtung liefert:

$$\begin{aligned} p_i \cdot \frac{\pi \cdot d_i^2}{4} &= \sigma_a \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2) \\ &= \sigma_a \cdot \frac{\pi}{4} \cdot ((d_i + 2s)^2 - d_i^2) \\ &= \sigma_a \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d_i^2 + 4 \cdot d_i \cdot s + 4 \cdot s^2 - d_i^2) \end{aligned}$$

Da die Wandstärke s voraussetzungsgemäß klein sein soll, kann man s^2 vernachlässigen und erhält:

$$p_i \cdot \frac{\pi \cdot d_i^2}{4} = \sigma_a \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4 \cdot d_i \cdot s$$

$$\sigma_a = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} = \frac{\sigma_t}{2} \quad \begin{array}{l} \text{Axialspannung eines} \\ \text{dünnwandigen Behälters} \\ \text{unter Innendruck} \end{array} \quad (12.3)$$

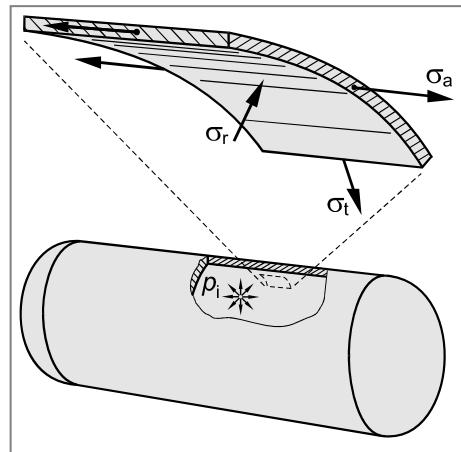


Bild 12.1 Spannungskomponenten an einem Schnittelement aus der Wand eines durch Innendruck beanspruchten, dünnwandigen Behälters

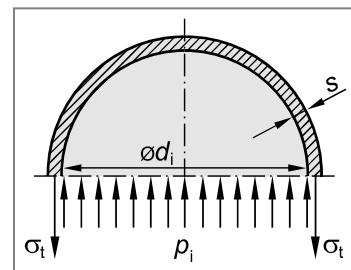


Bild 12.2 Längsschnitt am dünnwandigen Behälter unter Innendruck

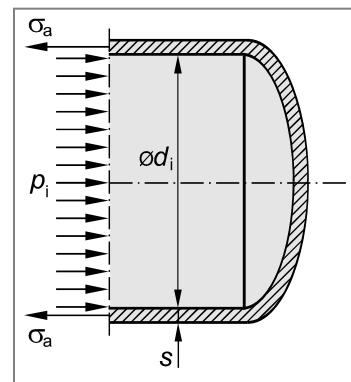


Bild 12.3 Querschnitt am dünnwandigen Behälter unter Innendruck

Die Gleichungen 12.2 und 12.3 werden in der Praxis auch als "**Kesselformeln**" bezeichnet.

Radialspannung

Da der Innendruck unmittelbar auf die Innenoberfläche der Behälterwand wirkt, entsteht dort eine radiale Druckspannung vom Betrag des Innendrucks, also $\sigma_{ri} = -p_i$ (Hinweis: 1 bar = 0,1 N/mm² = 0,1 MPa). An der lastfreien Außenoberfläche ist die Radialspannung Null ($\sigma_{ra} = 0$). Üblicherweise rechnet man beim dünnwandigen Behälter mit einem konstanten Mittelwert und erhält dann für die Radialspannung σ_r :

$$\sigma_r = -\frac{p_i}{2} \quad \text{Radialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck (Mittelwert)} \quad (12.4)$$

Da die Radialspannung sehr viel kleiner ist im Vergleich zur Tangential- oder Axialspannung wird sie mitunter auch vernachlässigt und ein näherungsweise zweiachsiger Spannungszustand zugrunde gelegt.

Für einen Festigkeitsnachweis müssen noch die Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 bestimmt werden. Da die gewählten Schnittflächen Symmetrieebenen von Form und Belastung sind, können dort keine Schubspannungen wirken. Das Vorhandensein von Schubspannungen würde gemäß dem Hookeschen Gesetz für Schubbeanspruchung (Gleichung 2.44) in den Schnittflächen Schiebungen (Winkelverzerrungen) hervorrufen und damit zu einer unsymmetrischen Verformung führen. Dies ist jedoch bei reiner Innendruckbeanspruchung nicht der Fall. Normalspannungen, die in schubspannungsfreien Symmetrieschnitten auftreten, müssen daher zugleich Hauptspannungen sein. Dementsprechend sind also σ_t und σ_a Hauptspannungen. Damit muss aber auch σ_r eine Hauptspannung sein, da die drei Hauptspannungen stets senkrecht zueinander sind. Mit der Indizierungsregel gemäß den Gleichungen 6.2 bis 6.4 folgt dann:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} \quad (12.5)$$

$$\sigma_2 \equiv \sigma_a = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} \quad (12.6)$$

$$\sigma_3 \equiv \sigma_r = -\frac{p_i}{2} \quad (12.7)$$

In der Wand eines dünnwandigen, kreiszylindrischen Behälters unter Innendruck herrscht ein dreiaachsiger Spannungszustand. Falls die Radialspannung vernachlässigt wird, kann der Spannungszustand, wie bereits erwähnt, näherungsweise auch als zweiachsig angesehen werden.

Zur Durchführung eines Festigkeitsnachweises, muss der dreiachsige Spannungszustand mit Hilfe einer geeigneten Festigkeitshypothese (Kapitel 6) in einen äquivalenten, fiktiv einachsigen Spannungszustand überführt werden. Da Druckbehälter üblicherweise aus duktilen Werkstoffen hergestellt werden, stehen hierfür die Schubspannungshypothese (SH) oder die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) zur Verfügung. Da die Schubspannungshypothese im Vergleich zur Gestaltänderungsenergiehypothese höhere Vergleichsspannungen und damit konservative Ergebnisse liefert, wird sie, auch der Einfachheit halber, häufig zur Berechnung dünnwandiger Druckbehälter herangezogen. Man erhält damit die Beziehung:

$$\sigma_{V SH} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - \sigma_r = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} - \left(-\frac{p_i}{2} \right) = p_i \cdot \frac{d_i + s}{2 \cdot s}$$

$$\sigma_{V SH} = p_i \cdot \frac{d_m}{2 \cdot s} \quad \text{Vergleichsspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck unter Anwendung der Schubspannungshypothese} \quad (12.8)$$

Bild 12.4 zeigt den wahren Verlauf der Spannungskomponenten (Gleichungen 12.53 bis 12.55) in Wand eines durch Innendruck beanspruchten Behälters, im Vergleich zu den vereinfacht berechneten Verläufen gemäß den Gleichungen 12.2 bis 12.4.

Errechnet man aus den vereinfacht ermittelten Spannungskomponenten die Vergleichsspannung (Gleichung 12.8) und vergleicht diese mit den Vergleichsspannungen die sich aus dem wahren Verlauf der Spannungskomponenten ergeben würde, dann erkennt man, dass bis zu einem Verhältnis von $d_a/d_i = 1,16$ Gleichung 12.8 konservative Ergebnisse liefert (Bild 12.4c). Die vereinfachte Berechnung der Spannungskomponenten bis zu einem Verhältnis von $d_a/d_i = 1,2$ (Gleichung 12.1) ist also durchaus gerechtfertigt.

12.1.2 Dünnewandige Behälter unter Außendruck

Werden dünnewandige Behälter durch einen äußeren Überdruck (p_a), nachfolgend kurz als "Außendruck" bezeichnet, beansprucht, dann können die Herleitungen aus Kapitel 12.1.1 sinngemäß übernommen werden und man erhält für die Spannungskomponenten in der Behälterwand die folgenden Beziehungen:

Tangentialspannung:

$$\sigma_t = -p_a \cdot \frac{d_a}{2 \cdot s} \quad (12.9)$$

Tangentialspannung eines dünnewandigen Behälters unter Außendruck

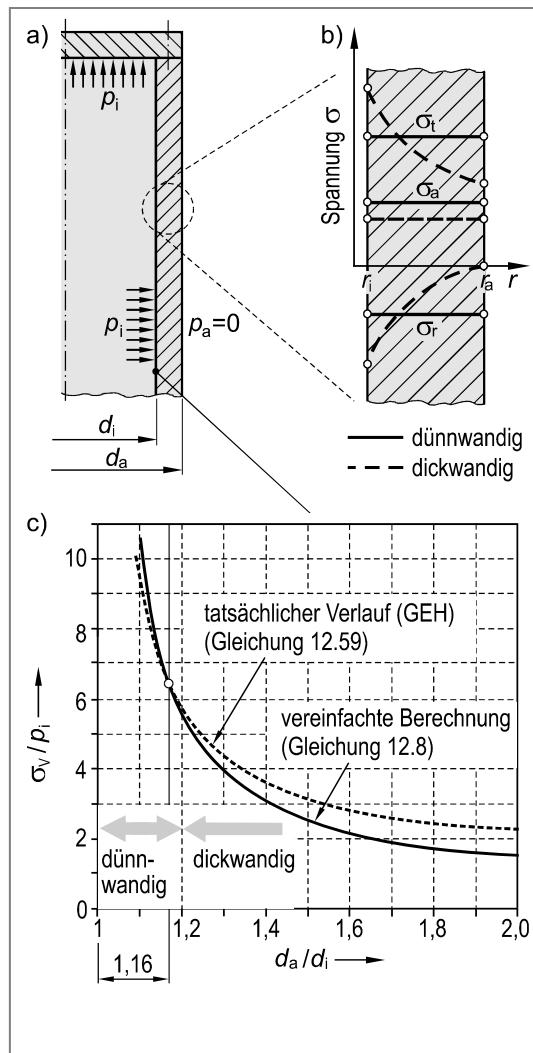


Bild 12.4 Spannungsverläufe in der Behälterwand unter Innendruck

- a) Übersicht
- b) Vergleich der vereinfacht berechneten mit den wahren Spannungskomponenten
- c) Vergleich der vereinfacht berechneten mit der wahren Vergleichsspannung am Innenrand des Behälters

Axialspannung:

$$\sigma_a = -p_a \cdot \frac{d_a}{4 \cdot s} \quad \text{Axialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Außendruck (Mittelwert)} \quad (12.10)$$

Radialspannung:

$$\sigma_r = -\frac{p_a}{2} \quad \text{Radialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Außendruck} \quad (12.11)$$

In Analogie zum dünnwandigen Behälter unter Innendruck und unter Beachtung der Indizierungsregel entsprechend den Gleichungen 6.2 bis 6.4 folgt für die Hauptspannungen:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_r = -\frac{p_a}{2} \quad (12.12)$$

$$\sigma_2 \equiv \sigma_a = -p_a \cdot \frac{d_a}{4 \cdot s} \quad (12.13)$$

$$\sigma_3 \equiv \sigma_t = -p_a \cdot \frac{d_a}{2 \cdot s} \quad (12.14)$$

12.1.3 Dünnwandige Hohlkugel unter Innen- bzw. Außendruck

Schneidet man eine dünnwandige Hohlkugel längs einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt, dann liegen im Hinblick auf die Schnittspannungen dieselben Verhältnisse vor, verglichen mit dem Querschnitt durch einen zylindrischen Behälter (Bild 12.5). Dementsprechend gilt an der aufgeschnittenen Kugelhälfte unter der Wirkung eines inneren Überdrucks (Innendruck):

$$\begin{aligned} p_i \cdot \frac{\pi \cdot d_i^2}{4} &= \sigma_t \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2) \\ &= \sigma_t \cdot \frac{\pi}{4} \cdot ((d_i + 2s)^2 - d_i^2) \\ &= \sigma_t \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d_i^2 + 4 \cdot d_i \cdot s + 4 \cdot s^2 - d_i^2) \end{aligned}$$

Da die Wandstärke s voraussetzungsgemäß klein sein soll, kann man s^2 vernachlässigen und erhält:

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} \quad \text{Tangentialspannung einer dünnwandigen Hohlkugel unter Innendruck} \quad (12.15)$$

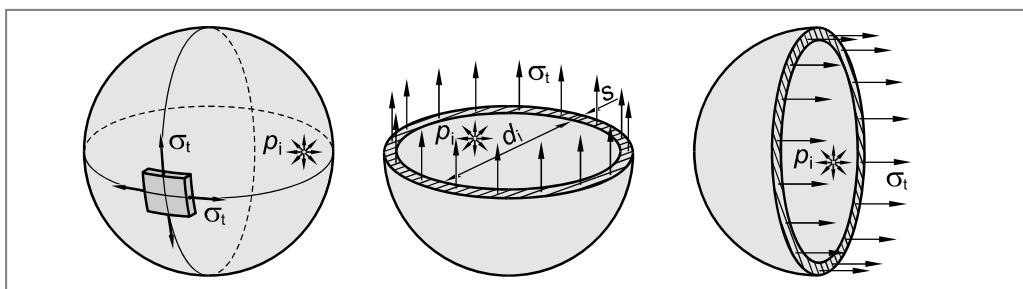


Bild 12.5 Längs- und Querschnitt an einer dünnwandigen Hohlkugel unter Innendruck

In analoger Weise erhält man für die Druckspannung in der Wand einer dünnwandigen Hohlkugel unter der Wirkung eines äußeren Überdrucks (Außendruck):

$$\sigma_t = -p_a \cdot \frac{d_a}{4 \cdot s} \quad \text{Tangentialspannung einer dünnwandigen Hohlkugel unter Außendruck} \quad (12.16)$$

Die beschriebenen Spannungsverhältnisse sind aus Gründen der Kugelsymmetrie in jeder den Kugelmittelpunkt beinhaltenden Schnittebene identisch, d. h. an jeder beliebigen Stelle der Kugelwand sind die Spannungen gleich groß.

12.1.4 Dünnwandige Behälter mit elliptischer Unrundheit

Hohlzylinder sind aus fertigungs-technischen Gründen in der Regel nicht exakt kreisförmig, sondern mehr oder weniger unrund.

Wird ein unrunder Behälter durch Innendruck beansprucht, dann versucht der Behälter die Kreisform anzunehmen. Hierbei entsteht eine zusätzliche Biegespannung in Umfangsrichtung in der Behälterwand. Die Biegespannung überlagert sich der Tangentialspannung.

Unter der Voraussetzung einer elliptischen Unrundheit berechnet sich die zusätzliche Biegespannung σ_b zu:

$$\sigma_b = \pm \frac{3}{4} \cdot p_i \cdot \left(\frac{d_i}{s} \right)^2 \cdot \kappa \cdot f \quad (12.17)$$

Biegespannung in der Wand eines unrunden, dünnwandigen Behälters

$$\text{mit } \kappa = \frac{2 \cdot (d_{\max} - d_{\min})}{d_{\max} + d_{\min}} \quad (12.18)$$

$$\text{und } f = \frac{1}{1 + \frac{1 - \mu^2}{2 \cdot E} \cdot p_i \cdot \left(\frac{d_i}{s} \right)^3} \quad (12.19)$$

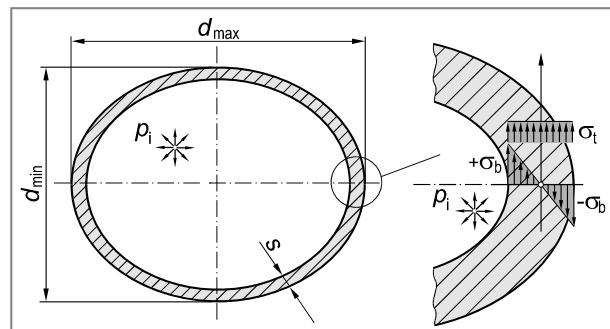


Bild 12.6 Spannungsverhältnisse in unrunderen, dünnwandigen Behältern unter Innendruck

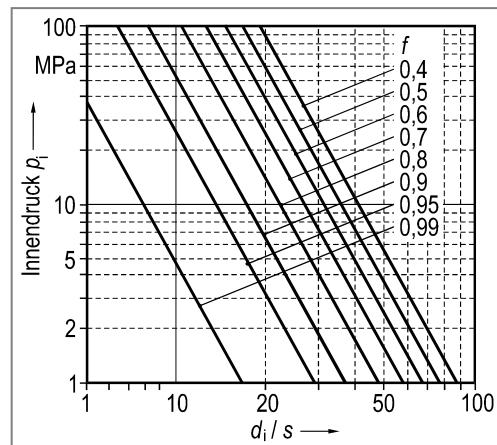


Bild 12.7 Korrekturfaktor f für die Biegespannung unrunder, dünnwandiger Behälter

Der Korrekturfaktor f berücksichtigt, dass mit zunehmender Annäherung des Behälters an die Kreisform, die tatsächlich auftretende Biegespannung σ_b abnimmt. Der Korrekturfaktor f kann für elliptisch unrunde Stahlbehälter ($E = 210000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,30$) auch aus Bild 12.7 abgeschätzt werden.

12.2 Dickwandige Behälter

Im Unterschied zum dünnwandigen Behälter muss bei der Berechnung dickwandiger Behälter unter Innen- bzw. Außendruck eine ungleichmäßige Spannungsverteilung über der Wanddicke berücksichtigt werden.

Voraussetzung für die nachfolgenden Berechnungen sind:

- eine große Länge des Zylinders (keine Randeinflüsse)
- linear-elastisches ideal-plastisches Werkstoffverhalten
- Vernachlässigung von Volumenkräften (Eigengewicht)

Zur Spannungsermittlung dickwandiger Behälter ist es sinnvoll, die folgenden Zustände getrennt zu betrachten:

- **Elastischer Zustand:** der gesamte Behälter bzw. die gesamte Behälterwand ist elastisch beansprucht.
- **Teilplastischer Zustand:** der innere Teil der Behälterwand ist elastisch beansprucht (elastischer Innenring), während der übrige Wandteil bereits plastifiziert ist (vollplastischer Außenring).
- **Vollplastischer Zustand:** die gesamte Behälterwand ist plastifiziert.

12.2.1 Elastischer Zustand unter Innen- und Außendruck

Ein elastischer Zustand liegt vor, sofern an keiner Stelle der Behälterwand plastische Verformungen auftreten.

12.2.1.1 Spannungsermittlung

Da aus Symmetriegründen die Lastspannungen unabhängig vom Winkel φ sind, empfiehlt es sich, Polarkoordinaten einzuführen. Dann sind die Spannungen nur noch vom Radius r abhängig (Bild 12.8a).

Zur Spannungsermittlung wird entsprechend Bild 12.8b ein Segment aus der Behälterwand herausgeschnitten und das Kräftegleichgewicht betrachtet. Am herausgeschnittenen Segment wirken die Schnittspannungen σ_t , σ_r und $\sigma_r + d\sigma_r$. Diese Schnittspannungen sind unbekannt und sollen nachfolgend in Abhängigkeit vom Radius r sowie der äußeren Belastung durch den Innendruck p_i bzw. den Außendruck p_a ermittelt werden.

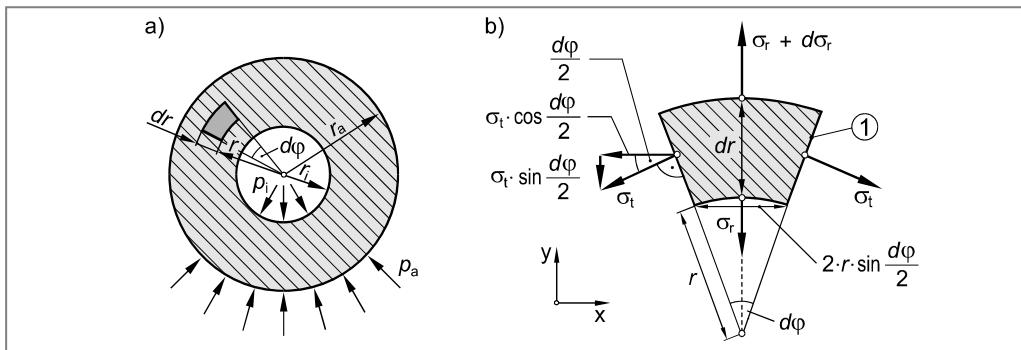


Bild 12.8 Kräftegleichgewicht an einem frei geschnittenen Segment eines dickwandigen Behälters unter Innen- und Außendruck

Die **Tangentialspannung** σ_t wirkt in der Schnittfläche 1 (Bild 12.8b). Hieraus resultiert die Schnittkraft F_t :

$$F_t = \sigma_t \cdot dr \cdot l \quad (l = \text{Länge des zylindrischen Behälters}) \quad (12.20)$$

Die Schnittkraft F_t kann in die Komponenten F_{tx} in x-Richtung und F_{ty} in y-Richtung zerlegt werden. Für die Komponenten der Tangentialkraft in y-Richtung gilt:

$$F_{ty} = \sigma_t \cdot dr \cdot l \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \quad (12.21)$$

Für kleine Winkel kann näherungsweise $\sin(d\varphi / 2) \approx d\varphi / 2$ gesetzt werden. Damit folgt aus Gleichung 12.21:

$$F_{ty} = \sigma_t \cdot dr \cdot l \cdot \frac{d\varphi}{2} \quad (12.22)$$

Der Innen- bzw. Außendruck erzeugt weiterhin eine **Radialspannung** σ_r in der Mantelfläche des herausgeschnittenen Segments und damit eine Radialkraft F_r . Die aus der Radialspannung σ_r resultierende radiale Kraftkomponente in y-Richtung errechnet sich zu:

$$F_{ry} = \sigma_r \cdot 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \cdot l \quad (12.23)$$

Für kleine Winkel kann wiederum $\sin(d\varphi / 2) \approx d\varphi / 2$ gesetzt werden. Damit folgt aus Gleichung 12.23:

$$F_{ry} = \sigma_r \cdot r \cdot d\varphi \cdot l \quad (12.24)$$

In analoger Weise liefert auch die Radialspannung $\sigma_r + d\sigma_r$ eine Kraftkomponente in y-Richtung:

$$F_{ry}^* = (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi \cdot l \quad (12.25)$$

Kräftegleichgewicht in y-Richtung liefert:

$$\begin{aligned} F_{ry}^* &= F_{ry} + 2 \cdot F_{ty} \\ (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi \cdot l &= \sigma_r \cdot r \cdot d\varphi \cdot l + 2 \cdot \sigma_t \cdot dr \cdot \frac{d\varphi}{2} \cdot l \quad | : (l \cdot d\varphi) \\ \sigma_r \cdot r + d\sigma_r \cdot r + \sigma_r \cdot dr + d\sigma_r \cdot dr &= \sigma_r \cdot r + \sigma_t \cdot dr \end{aligned} \quad (12.26)$$

Mit $d\varphi \cdot dr \approx 0$ folgt aus Gleichung 12.26 eine lineare Differentialgleichung zwischen den gesuchten Spannungen $\sigma_t(r)$ und $\sigma_r(r)$:

$$\sigma_t - \sigma_r - r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad \text{Kräftegleichgewicht} \quad (12.27)$$

Gleichung 12.27 genügt zur Ermittlung der beiden unbekannten Funktionen $\sigma_t(r)$ und $\sigma_r(r)$ nicht. Das Kräftegleichgewicht in x-Richtung, das Kräftegleichgewicht in Richtung der Behälterachse sowie das Momentengleichgewicht sind identisch erfüllt und liefern daher keinen weiteren Beitrag zur Lösung.

Eine zweite unabhängige Gleichung erhält man aus der geometrischen Verträglichkeit. Damit unter dem Einfluss der Spannungen σ_t und σ_r keine Klaffungen oder Überdeckungen im Zylinder auftreten, ist nur die in Bild 12.9 dargestellte Verformung des Elements möglich. Die nach außen (radial) gerichtete Verschiebung sei u , deren Änderung zwischen Außen- und Innenrand des Volumenelements du . Die Verschiebungen in radialer Richtung am herausgeschnittenen Segment betragen somit (Bild 12.9):

- am Innenrand : u
- am Außenrand: $u + du$

Damit errechnen sich die Dehnungen $\varepsilon_r(r)$ in radialer Richtung zu:

$$\varepsilon_r(r) = \frac{u + du - u}{dr} = \frac{du}{dr} \quad (12.28)$$

und in Umfangsrichtung $\varepsilon_t(r)$ am Innenrand:

$$\varepsilon_t(r) = \frac{(r + u) \cdot d\phi - r \cdot d\phi}{r \cdot d\phi} = \frac{u}{r} \quad (12.29)$$

Um einen Zusammenhang zwischen der Radialdehnung $\varepsilon_r(r)$ und der Tangentialdehnung $\varepsilon_t(r)$ zu erhalten, werden die Gleichungen 12.28 und 12.29 miteinander kombiniert. Hierzu löst man Gleichung 12.29 zunächst nach u auf:

$$u = \varepsilon_t(r) \cdot r \quad (12.30)$$

Differentiation von Gleichung 12.30 nach r unter Beachtung der Produktregel ergibt:

$$\frac{du}{dr} = r \cdot \frac{d\varepsilon_t}{dr} + \varepsilon_t \quad (12.31)$$

Einsetzen von Gleichung 12.31 in Gleichung 12.28:

$$\varepsilon_r = r \cdot \frac{d\varepsilon_t}{dr} + \varepsilon_t \quad (12.32)$$

$$r \cdot \frac{d\varepsilon_t}{dr} + \varepsilon_t - \varepsilon_r = 0 \quad (12.33)$$

Unter Anwendung des allgemeinen Hookeschen Gesetzes können schließlich die Spannungen $\sigma_t(r)$ und $\sigma_r(r)$ mit den Dehnungen $\varepsilon_t(r)$ und $\varepsilon_r(r)$ verknüpft werden. Zu berücksichtigen ist dabei noch die Längsspannung σ_a , die beispielsweise bei einem beidseitig verschlossenen Zylinder oder einer abgewinkelten Rohrleitung auftritt. Die Längsspannung ist über den Querschnitt konstant, also keine Funktion vom Radius r . Das allgemeine Hookesche Gesetz lautet für die Dehnungen in Tangential- und Radialrichtung (Gleichungen 5.14):

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot (\sigma_r + \sigma_a)) \quad (12.34)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \mu \cdot (\sigma_t + \sigma_a)) \quad (12.35)$$

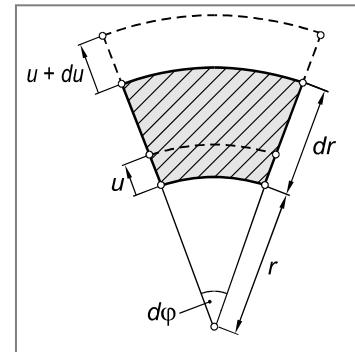


Bild 12.9 Verschiebungen an einem herausgeschnittenen Segment eines dickwandigen Behälters

Differentiation von Gleichung 12.34 nach r liefert unter Berücksichtigung von $d\sigma_a/dr = 0$ (da $\sigma_a = \text{konstant}$):

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr} = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{d\sigma_t}{dr} - \mu \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} \right) \quad (12.36)$$

Setzt man die Gleichungen 12.34, 12.35 und 12.36 in Gleichung 12.33 ein, dann erhält man:

$$\begin{aligned} r \cdot \left(\frac{d\sigma_t}{dr} - \mu \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} \right) + \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot (\sigma_r + \sigma_a)) - \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \mu \cdot (\sigma_t + \sigma_a)) &= 0 \quad | \cdot E \\ -r \cdot \left(\mu \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{d\sigma_t}{dr} \right) + \sigma_t - \mu \cdot \sigma_r - \mu \cdot \sigma_a - \sigma_r + \mu \cdot \sigma_t + \mu \cdot \sigma_a &= 0 \\ -r \cdot \left(\mu \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{d\sigma_t}{dr} \right) - (\sigma_r - \sigma_t) - \mu \cdot (\sigma_r - \sigma_t) &= 0 \quad | \cdot (-1) \\ r \cdot \left(\mu \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{d\sigma_t}{dr} \right) + (1 + \mu) \cdot (\sigma_r - \sigma_t) &= 0 \quad \text{Verträglichkeitsbedingung} \quad (12.37) \end{aligned}$$

Gleichung 12.37 (Verträglichkeitsbedingung) ist die noch fehlende zweite Differentialgleichung zwischen den Spannungen $\sigma_t(r)$ und $\sigma_r(r)$. Das System der beiden Differentialgleichungen 12.27 und 12.37 wird wie ein System gewöhnlicher Gleichungen gelöst, d. h. eine der beiden unbekannten Funktionen wird eliminiert. Hierbei ist es zweckmäßig, Gleichung 12.27 nach σ_t aufzulösen, nach r zu differenzieren (Beachtung der Produktregel !) und schließlich σ_t sowie $d\sigma_t/dr$ in Gleichung 12.37 einzusetzen.

Aus Gleichung 12.27 folgt:

$$\sigma_t = \sigma_r + r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} \quad (12.38)$$

Differentiation von Gleichung 12.38 nach r liefert unter Beachtung der Produktregel:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_t}{dr} &= \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_r}{dr} + r \cdot \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} \\ \frac{d\sigma_t}{dr} &= 2 \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} + r \cdot \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} \quad (12.39) \end{aligned}$$

Gleichung 12.38 und 12.39 in Gleichung 12.37 (Verträglichkeitsbedingung) eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned} r \cdot \left(\mu \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} - 2 \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} - r \cdot \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} \right) + (1 + \mu) \cdot \left(\sigma_r - \sigma_r - r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} \right) &= 0 \\ r \cdot \left(\mu \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} - 2 \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} - r \cdot \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} \right) - (1 + \mu) \cdot r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} &= 0 \quad | : r \\ \mu \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} - 2 \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} - r \cdot \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} - \frac{d\sigma_r}{dr} - \mu \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} &= 0 \quad | \cdot (-r) \\ r^2 \cdot \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3 \cdot r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} &= 0 \quad (12.40) \end{aligned}$$

Gleichung 12.40 ist eine homogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (Eulersche Differentialgleichung) für die unbekannte Radialspannung $\sigma_r(r)$. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich aus dem Potenzansatz:

$$\sigma_r = C_1 \cdot r^n + C_2 \quad (12.41)$$

Ein- bzw. zweimalige Differentiation von Gleichung 12.41 ergibt:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = C_1 \cdot n \cdot r^{n-1} \quad (12.42)$$

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} = C_1 \cdot n \cdot (n-1) \cdot r^{n-2} \quad (12.43)$$

Setzt man die Gleichungen 12.42 und 12.43 in Gleichung 12.40 ein, dann erhält man:

$$\begin{aligned} r^2 \cdot C_1 \cdot n \cdot (n-1) \cdot r^{n-2} + 3 \cdot r \cdot C_1 \cdot n \cdot r^{n-1} &= 0 & | : C_1 \quad (C_1 \neq 0) \\ n \cdot (n-1) \cdot r^n + 3 \cdot n \cdot r^n &= 0 \\ r^n \cdot (n \cdot (n-1) + 3 \cdot n) &= 0 \\ r^n \cdot (n^2 + 2 \cdot n) &= 0 \\ r^n \cdot n \cdot (n+2) &= 0 \end{aligned} \quad (12.44)$$

Gleichung 12.44 ist erfüllt für $n = 0$ und für $n = -2$. Die Lösung $n = 0$ ist trivial, da sie eine identisch erfüllte Gleichung liefert, während $n = -2$ zur gesuchten Lösung führt. Mit $n = -2$ ergibt sich aus Gleichung 12.41:

$$\sigma_r = C_2 + \frac{C_1}{r^2} \quad (12.45)$$

Die Tangentialspannung σ_t erhält man, indem man Gleichung 12.45 in Gleichung 12.38 einsetzt:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= C_2 + \frac{C_1}{r^2} + r \cdot \left(-2 \cdot \frac{C_1}{r^3} \right) \\ \sigma_t &= C_2 - \frac{C_1}{r^2} \end{aligned} \quad (12.46)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 erhält man aus den Randbedingungen:

- für den Innenrand ($r = r_i$): $\sigma_r(r = r_i) = -p_i$
- für den Außenrand ($r = r_a$): $\sigma_r(r = r_a) = -p_a$

Einsetzen der Randbedingung in Gleichung 12.45 ergibt:

$$-p_i = C_2 + \frac{C_1}{r_i^2} \quad (12.47)$$

und

$$-p_a = C_2 + \frac{C_1}{r_a^2} \quad (12.48)$$

Subtrahiert man Gleichung 12.48 von Gleichung 12.47 dann folgt:

$$\begin{aligned} -p_i + p_a &= \frac{C_1}{r_i^2} - \frac{C_1}{r_a^2} \\ C_1 &= \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot (p_a - p_i) \end{aligned} \quad (12.49)$$

Gleichung 12.49 in Gleichung 12.47 eingesetzt liefert für C_2 :

$$\begin{aligned} C_2 &= -p_i - \frac{C_1}{r_i^2} \\ &= -p_i - \frac{1}{r_i^2} \cdot \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot (p_a - p_i) \\ &= \frac{-p_i \cdot (r_a^2 - r_i^2) - p_a \cdot r_a^2 + p_i \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \\ C_2 &= \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \end{aligned} \quad (12.50)$$

Setzt man die Gleichungen 12.49 und 12.50 schließlich in 12.45 und 12.46 ein, dann erhält man:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_2 + \frac{C_1}{r^2} \\ \sigma_r &= \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \frac{p_a - p_i}{r^2} \end{aligned} \quad (12.51)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_t &= C_2 - \frac{C_1}{r^2} \\ \sigma_t &= \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \frac{p_a - p_i}{r^2} \end{aligned} \quad (12.52)$$

Formt man die Gleichungen 12.51 und 12.52 weiter um, dann erhält man schließlich:

$$\sigma_r = -p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right) - p_a \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Radialspannung unter} \\ \text{Innen- und Außendruck im} \\ \text{elastischen Zustand eines} \\ \text{dickwandigen Behälters} \end{array} \quad (12.53)$$

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) - p_a \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Tangentialspannung unter} \\ \text{Innen- und Außendruck im} \\ \text{elastischen Zustand eines} \\ \text{dickwandigen Behälters} \end{array} \quad (12.54)$$

Ist der Hohlzylinder an beiden Enden verschlossen bzw. handelt es sich um eine abgewinkelte Rohrleitung, dann tritt zusätzlich zur Tangential- und Radialspannung noch eine über den Querschnitt konstante Axialspannung σ_a auf. Sie hat in hinreichender Entfernung von den Enden des Zylinders, also im Bereich der Zylindermitte, keinen Einfluss mehr auf Tangential- und Radialspannung. Die Axialspannung σ_a errechnet sich zu (Bild 12.10):

$$\sigma_a = \frac{F_a}{A} = \frac{\pi \cdot r_i^2 \cdot p_i - \pi \cdot r_a^2 \cdot p_a}{\pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)}$$

$$\sigma_a = \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \quad (12.55)$$

Axialspannung unter Innen- und Außendruck im elastischen Zustand eines dickwandigen Behälters

Zur Veranschaulichung der Gleichungen 12.53, 12.54 und 12.55 sind in Bild 12.11 die Verläufe der Tangential-, Axial- und Radialspannung in der Zylinderwand am Beispiel eines elastisch beanspruchten, dickwandigen Behälters mit $r_a / r_i = 2$ unter Innen- und Außendruck graphisch dargestellt.

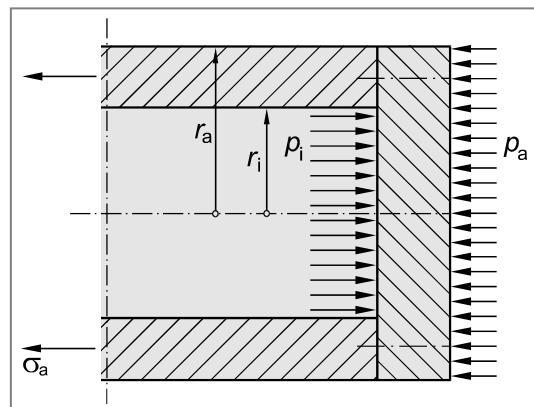


Bild 12.10 Querschnitt am dickwandigen Behälter unter Innen- und Außendruck

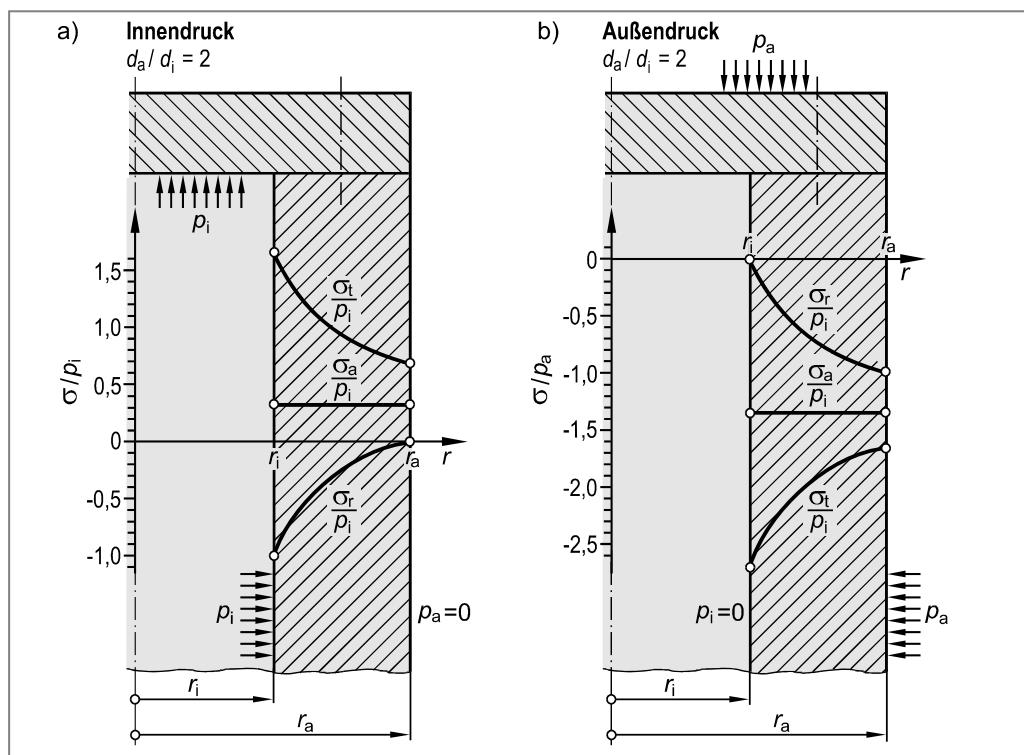


Bild 12.11 Abhängigkeit der Radial-, Tangential- und Axialspannung vom Radius r eines elastisch beanspruchten, dickwandigen Behälters

a) unter Innendruck für $d_a / d_i = 2$

b) unter Außendruck für $d_a / d_i = 2$

Die Gleichungen 12.53 bis 12.55 zeigen auch, dass die Spannungskomponenten σ_t , σ_r und σ_a in zylindrischen Behältern nicht von der absoluten Größe des Behälters sondern nur von seinem Durchmesserverhältnis r_a / r_i abhängen. Es gilt daher die folgende Aussage:

Geometrisch ähnliche zylindrische Hohlzylinder ($r_a / r_i = \text{konstant}$) unter Innen- und/oder Außendruck sind bei gleicher Druckbelastung gleich hoch beansprucht.

Man überzeugt sich leicht von dieser Tatsache, indem man beispielsweise für zwei verschiedenen großen Behälter mit gleichem Durchmesserverhältnis d_a / d_i an einer beliebigen Stelle der Behälterwand die Spannungskomponenten berechnet und vergleicht (das Verhältnis r_a / r bzw. r / r_i muss bei beiden Behältern gleich sein).

12.2.1.2 Vergleichsspannungen

Mit Hilfe von Gleichung 12.53 bis 12.55 können die Spannungskomponenten σ_t , σ_r und σ_a an einer beliebigen Stelle der Wand eines durch Innen- und/oder Außendruck beanspruchten Behälters berechnet werden. Da die Schnittflächen in Bild 12.8b aus Gründen der Symmetrie von Form und Belastung keine Schubspannungen enthalten, sind die Lastspannungen σ_t , σ_r und σ_a gleichzeitig Hauptspannungen.

Für $p_i > p_a$ gilt entsprechend der Indizierungsregel für Hauptnormalspannungen (Gleichungen 6.2 bis 6.4):

$$\begin{aligned}\sigma_t &\equiv \sigma_1 \\ \sigma_a &\equiv \sigma_2 \\ \sigma_r &\equiv \sigma_3\end{aligned}\tag{12.56}$$

Für $p_i < p_a$ folgt:

$$\begin{aligned}\sigma_r &\equiv \sigma_1 \\ \sigma_a &\equiv \sigma_2 \\ \sigma_t &\equiv \sigma_3\end{aligned}\tag{12.57}$$

Der Spannungszustand in einem dickwandigen Druckbehälter unter Innen- und/oder Außen- druck ist also in der Regel dreiachsig. Falls kein Außendruck wirkt, herrscht am Außenrand ein zweiachsiger Spannungszustand bzw. falls kein Innendruck wirkt, herrscht am Innenrand ein zweiachsiger Spannungszustand. Für Festigkeitsnachweise ist die Berechnung der Vergleichsspannung σ_V unter Zugrundelegung einer geeigneten Festigkeitshypothese (NH, SH oder GEH, siehe auch Kapitel 6) erforderlich.

a) Normalspannungshypothese (NH)

Ein Versagen von Druckbehältern, insbesondere bei hohem Druck, kann zu katastrophalen Schäden führen. Daher werden diese Bauteile aus sicherheitstechnischen Gründen in der Regel aus duktilen Werkstoffen gefertigt. Ein Druckbehälter oder eine Druckleitung aus einem spröden oder versprödeten Werkstoff und damit die Notwendigkeit der Anwendung der Normalspannungshypothese ist in der Praxis selten anzutreffen.

Bei spröden Werkstoffen bzw. bei einem spröden Werkstoffverhalten und für den Fall, dass alle Hauptnormalspannungen positiv sind (Behälter unter Innendruck) tritt unter statischer Zugbeanspruchung ein verformungsloser Trennbruch ein, sobald die größte Normalspannung

(σ_1) die Trennfestigkeit des Werkstoffs erreicht (Kapitel 6.1). Die Vergleichsspannung nach der Normalspannungshypothese entspricht also σ_1 :

$$\sigma_{VNH} = \sigma_1 \quad (12.58)$$

Die größte Normalspannung herrscht unabhängig vom Durchmesserverhältnis sowie von der Höhe des Drucks stets am Innenrand des Behälters ($r = r_i$). Ein Bruch tritt unter Innendruck ein, sobald gilt:

$$\sigma_{VNH} \geq R_m \quad (12.59)$$

Für den seltenen Fall, dass positive und negative Hauptnormalspannungen (Behälter unter Innen- und Außendruck) bzw. nur negative Hauptnormalspannungen (Behälter unter Außendruck) auftreten sind die Grenzen der Anwendbarkeit der Normalspannungshypothese zu beachten (Kapitel 6.1.3).

b) Schubspannungshypothese (SH)

Zur Berechnung der Vergleichsspannung σ_V kann bei duktilen Werkstoffen die Schubspannungshypothese (SH) herangezogen werden. Im Vergleich zur Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) führt die in der Anwendung einfachere Schubspannungshypothese zu konservativen Ergebnissen (Kapitel 6.3). Gemäß der Schubspannungshypothese gilt für die Vergleichsspannung:

$$\sigma_{VSH} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (12.60)$$

Die Festlegung von σ_1 und σ_3 folgt entsprechend Gleichung 12.56 bzw. 12.57.

Mit plastischen Verformungen (Fließen) ist zu rechnen, sobald gilt:

$$\sigma_{VSH} \geq R_e \text{ bzw. } R_{p0,2} \quad (12.61)$$

c) Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)

Neben der Schubspannungshypothese kann bei duktilen Werkstoffen auch die zu genaueren Ergebnissen führende Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) zur Berechnung der Vergleichsspannung σ_V herangezogen werden:

$$\sigma_{VGEH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (12.62)$$

Zur Indizierung der Hauptnormalspannungen sind ebenfalls die Gleichungen 12.56 bzw. 12.57 zu beachten.

Mit plastischen Verformungen (Fließen) ist zu rechnen, sobald gilt:

$$\sigma_{V GEH} \geq R_e \text{ bzw. } R_{p0,2} \quad (12.63)$$

In Bild 12.12 ist die Vergleichsspannung nach der NH, SH und GEH für einen dickwandigen Behälter unter Innendruck (Bild 12.12a) bzw. Außendruck (Bild 10.12b) im elastischen Zustand in Abhängigkeit der Ortskoordinate r graphisch dargestellt. Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass die höchste Beanspruchung an der Innenwand ($r = r_i$) herrscht, und zwar unabhängig davon, ob der Behälter nur durch Innendruck, Innen- und Außendruck oder nur durch Außendruck beansprucht wird. Für den Festigkeitsnachweis eines dickwandigen zylindrischen Behälters ist also die Beanspruchung der Innenwand maßgebend.

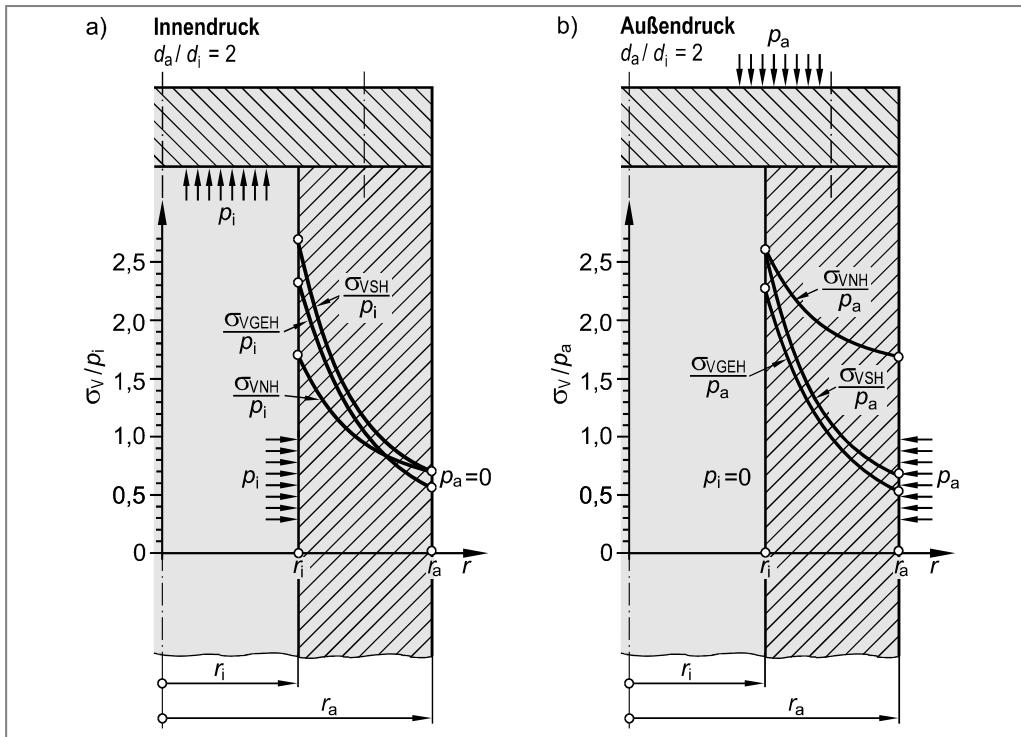


Bild 12.12 Abhängigkeit der Vergleichsspannungen $\sigma_{V\text{NH}}$, $\sigma_{V\text{SH}}$ und $\sigma_{V\text{GEH}}$ vom Radius r eines dickwandigen Behälters unter Innendruck bzw. Außendruck im elastischen Zustand

12.2.1.3 Fließbeginn unter Innendruck

Mit steigendem Innendruck setzt eine Plastifizierung des Hohlzylinders zuerst am Innenrand ein, sobald die Vergleichsspannung ($\sigma_{V\text{GEH}}$) die Streck- bzw. Dehngrenze erreicht. Der zum Fließen führende Innendruck ($p_{i\text{FB}}$) soll nachfolgend berechnet werden.

Der Übersichtlichkeit halber sollen sich die nachfolgenden Ausführungen auf den in der Praxis wichtigsten Fall eines durch Innendruck beanspruchten Behälters beschränken. Für Druckbehälter welche durch Innen- und Außendruck bzw. nur durch Außendruck beansprucht sind, können die nachfolgenden Rechenschritte analog durchgeführt werden. Außerdem soll die zu genaueren Ergebnissen führende GEH Anwendung finden.

Die maximale Vergleichsspannung tritt bei einem dickwandigen Behälter stets am Innenrand ($r = r_i$) auf (Kapitel 12.2.1.2). Der (duktile) Werkstoff plastifiziert also dort zuerst. Damit eine Plastifizierung des Werkstoffs mit Sicherheit vermieden wird, muss für die Vergleichsspannung am Innenrand gelten:

$$\sigma_{V\text{ GEH}}(r = r_i) \leq \frac{R_e}{S_F} \text{ bzw. } \frac{R_{p0,2}}{S_F} \quad (12.64)$$

Zur Berechnung der Vergleichsspannung, müssen zunächst die Spannungskomponenten am Innenrand ermittelt werden. Aus den Gleichungen 12.53, 12.54 und 12.55 erhält man für $r = r_i$:

Tangentialspannung am Innenrand:

$$\sigma_t(r_i) = p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r_i^2} + 1 \right) = p_i \cdot \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \quad (12.65)$$

Axialspannung am Innenrand:

$$\sigma_a(r_i) = p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \quad (12.66)$$

Radialspannung am Innenrand:

$$\sigma_r(r_i) = -p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r_i^2} - 1 \right) = -p_i \quad (12.67)$$

Für die Vergleichsspannung nach der GEH gilt (Gleichung 12.62):

$$\sigma_{V\text{GEH}}(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1(r_i) - \sigma_2(r_i))^2 + (\sigma_2(r_i) - \sigma_3(r_i))^2 + (\sigma_3(r_i) - \sigma_1(r_i))^2} \quad (12.68)$$

Unter Berücksichtigung der Indizierung der Hauptnormalspannungen entsprechend Gleichung 12.56 folgt:

$$\sigma_{V\text{GEH}}(r_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_t(r_i) - \sigma_a(r_i))^2 + (\sigma_a(r_i) - \sigma_r(r_i))^2 + (\sigma_r(r_i) - \sigma_t(r_i))^2} \quad (12.69)$$

Setzt man die Gleichungen 12.65 bis 12.67 in Gleichung 12.69 ein, dann erhält man:

$$\begin{aligned} \sigma_{V\text{GEH}}(r_i) &= \frac{p_i}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \right)^2 + \left(\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + 1 \right)^2 + \left(-1 - \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \right)^2} \\ \sigma_{V\text{GEH}}(r_i) &= \frac{p_i}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \right)^2 + \left(\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \right)^2 + \left(\frac{-2 \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \right)^2} \\ \sigma_{V\text{GEH}}(r_i) &= \frac{p_i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \sqrt{6} \\ \sigma_{V\text{GEH}}(r_i) &= p_i \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \end{aligned} \quad (12.70)$$

Damit an der höchst beanspruchten Stelle (Innenrand) eines durch Innendruck beanspruchten Behälters keine plastischen Verformungen auftreten, muss also gelten (Gleichung 12.70 in Gleichung 12.64 eingesetzt):

$$p_i \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \leq \frac{R_e}{S_F} \text{ bzw. } \frac{R_{p0,2}}{S_F} \quad (12.71)$$

Den zum Fließen führenden Innendruck erhält man damit aus Gleichung 12.71 mit $p_i \equiv p_{i\text{ FB}}$:

$$p_{i\text{ FB}} = R_e \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{\sqrt{3} \cdot r_a^2} \quad \begin{array}{l} \text{Innendruck mit Erreichen des Fließbeginns} \\ (\text{am Innenrand}) \text{ eines dickwandigen Behälters} \end{array} \quad (12.72)$$

Für Festigkeitsnachweise druckbeanspruchter Behälter sollte der Sicherheitsbeiwert gegen Fließen (S_F) größer 1,5 gewählt werden.

12.2.2 Vollplastischer Zustand unter Innendruck

Der Übersichtlichkeit halber sollen sich auch hier die nachfolgenden Ausführungen auf den in der Praxis wichtigsten Fall eines durch Innendruck beanspruchten Behälters beschränken. Für Druckbehälter welche durch Innen- und Außendruck bzw. nur durch Außendruck beansprucht sind, können die nachfolgenden Rechenschritte analog durchgeführt werden. Außerdem soll die zu genaueren Ergebnissen führende GEH Anwendung finden.

Wird ein Behälter einer stetig zunehmenden Beanspruchung durch Innendruck ausgesetzt, dann setzt am Innenrand die Plastifizierung ein, sobald der Innendruck p_i den Grenzwert $p_{i\text{ FB}}$ (Gleichung 12.72) erreicht. Steigert man den Innendruck weiter, dann schreitet die Plastifizierung bis zum Außenrand fort. Sobald auch dort Fließen eintritt, wird der vollplastische Zustand erreicht. Zur Berechnung der Spannungskomponenten für den vollplastischen Zustand geht man von Gleichung 12.27 aus. Die Beziehung wurde aus dem Kräftegleichgewicht hergeleitet und hat daher, unter der Voraussetzung kleiner Verformungen, auch für den vollplastischen Zustand Gültigkeit. Das Kräftegleichgewicht lautet (Gleichung 12.27):

$$\sigma_t - \sigma_r - r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (12.73)$$

12.2.2.1 Spannungsermittlung

Liegt ein mehrachsiger Spannungszustand vor, dann ist mit einer Plastifizierung des Bauteils zu rechnen, sobald die Vergleichsspannung (σ_V) die Streck- bzw. Dehngrenze (R_e bzw. $R_{p0,2}$) erreicht. Unter der Voraussetzung eines linear-elastischen ideal-plastischen Werkstoffverhaltens ist die Vergleichsspannung im vollplastischen Zustand an jeder Stelle r des zylindrischen Behälters konstant.

Die Ermittlung der Spannungskomponenten in der Behälterwand kann entweder unter Zugrundelegung der Schubspannungshypothese oder der Gestaltänderungsenergiehypothese erfolgen. Nachfolgend soll, wie bereits erwähnt, die zu genaueren Ergebnissen führende GEH zugrunde gelegt werden.

Im vollplastischen Zustand muss die nach der GEH errechnete Vergleichsspannung $\sigma_{V\text{ GEH}}$ an jeder Stelle r des zylindrischen Behälters konstant sein. Es muss also gelten:

$$\sigma_{VGEH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_t - \sigma_a)^2 + (\sigma_a - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_t)^2} = R_e \text{ bzw. } R_{p0,2} \quad (12.74)$$

Anhand der Gleichungen 12.53, 12.54 und 12.55 lässt sich leicht überprüfen, dass bei einer rein elastischen Beanspruchung zwischen den Spannungskomponenten σ_t , σ_r und σ_a die Beziehung gilt:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2} \quad (12.75)$$

Geht man von einer näherungsweisen Gültigkeit dieser Beziehungen auch im plastischen Zustand aus, dann erhält man (näherungsweise) im vollplastischen Zustand aus Gleichung 12.74:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\sigma_t - \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t + \sigma_r}{2} - \sigma_r\right)^2 + (\sigma_r - \sigma_t)^2} = R_e \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{(\sigma_t - \sigma_r)^2}{2^2} + \frac{(\sigma_t - \sigma_r)^2}{2^2} + \frac{4 \cdot (\sigma_t - \sigma_r)^2}{2^2}} = R_e \\ & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sigma_t - \sigma_r) = R_e \\ & \sigma_t - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \end{aligned} \quad (12.76)$$

Gleichung 12.76 in Gleichung 12.73 (Kräftegleichgewicht) eingesetzt ergibt:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e - r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (12.77)$$

Separation und Integration der Veränderlichen liefert:

$$\begin{aligned} \int d\sigma_r &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \int \frac{1}{r} dr \\ \sigma_r &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln r + C \end{aligned} \quad (12.78)$$

Die Integrationskonstante C ergibt sich aus der Randbedingung $\sigma_r(r = r_a) = 0$. Damit folgt aus Gleichung 12.78:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln r_a + C \\ C &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln r_a \end{aligned} \quad (12.79)$$

Gleichung 12.79 in Gleichung 12.78 eingesetzt ergibt schließlich für die **Radialspannung** σ_r :

$$\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r}\right) \quad \text{Radialspannung unter Innendruck im vollplastischen Zustand eines dickwandigen Behälters} \quad (12.80)$$

Aus Gleichung 12.76 folgt dann für die **Tangentialspannung**:

$$\sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e + \sigma_r$$

$$\sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \left(1 - \ln\left(\frac{r_a}{r}\right)\right) \quad (12.81)$$

Tangentialspannung unter Innendruck im vollplastischen Zustand eines dickwandigen Behälters

Aufgrund der bereits erwähnten, näherungsweisen Gültigkeit von Gleichung 12.75 auch im vollplastischen Zustand, ergibt sich schließlich für die **Axialspannung** σ_a :

$$\sigma_a = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - 2 \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r}\right)\right) \quad (12.82)$$

Axialspannung unter Innendruck im vollplastischen Zustand eines dickwandigen Behälters

Vergleicht man den Verlauf der Tangentialspannungen für den elastischen und den vollplastischen Zustand eines Behälters unter Innendruck (Bild 12.12a und Bild 12.13), dann wird deutlich, dass im vollplastischen Zustand die größte

Tangentialspannung am Außenrand auftritt. Steigert man also den Innendruck über p_i VPL (Gleichung 12.83) hinaus, dann tritt an der Außenseite des dickwandigen Behälters der Trennbruch ein. Diese Beobachtung wurde auch durch Versuche bestätigt.

12.2.2.2 Innendruck zum Erreichen des vollplastischen Zustandes

Den zum Erreichen des vollplastischen Zustandes erforderlichen Innendruck p_i VPL erhält man aus der Bedingung:

$$\sigma_r(r = r_i) = -p_i \text{ VPL}$$

Mit Gleichung 12.80 folgt damit letztlich:

$$p_i \text{ VPL} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \quad \text{Innendruck zum Erreichen des vollplastischen Zustandes eines dickwandigen Behälters} \quad (12.83)$$

Bild 12.14 veranschaulicht die Spannungskomponenten in Abhängigkeit vom Radius r für den vollplastischen Zustand eines zylindrischen Behälters ($r_a / r_i = 2$) unter Innendruck (p_i).

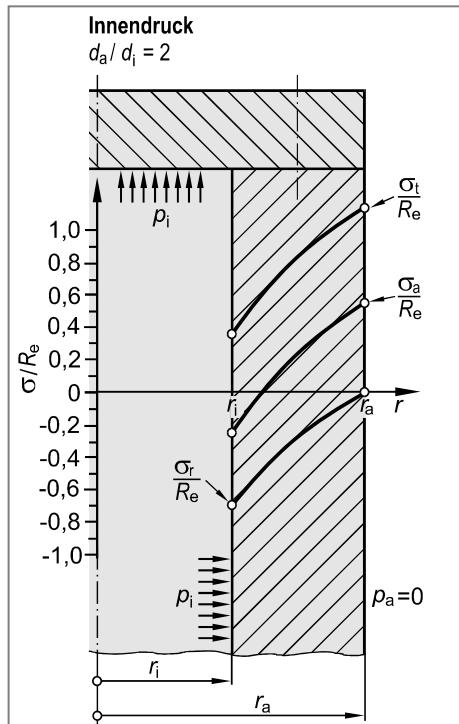


Bild 12.13 Verlauf von Radial-, Tangential- und Axialspannung eines dickwandigen Behälters unter Innendruck im vollplastischen Zustand

Trägt man die auf die Streck- bzw. Dehngrenze (R_e bzw. $R_{p0,2}$) bezogenen Innendrücke $p_i \text{ FB}$ und $p_i \text{ VPL}$ (Gleichung 12.72 und 12.83) über dem Durchmesserverhältnis d_a / d_i auf, dann erhält man zwei Grenzkurven I und II. Unterhalb der Grenzkurve I ist der Behälter elastisch beansprucht, oberhalb von Grenzkurve II hingegen vollplastisch (Bild 12.14). Dazwischen befindet sich der teilplastische Bereich, der im nachfolgenden Kapitel 12.2.3 besprochen wird.

Zum Vergleich sind in Bild 12.14 zusätzlich die nach der SH berechneten Drücke für den Beginn der Plastifizierung sowie für das Erreichen des vollplastischen Zustandes mit eingetragen. Man erkennt auch hier, dass die Anwendung der SH konservative Ergebnisse liefert.

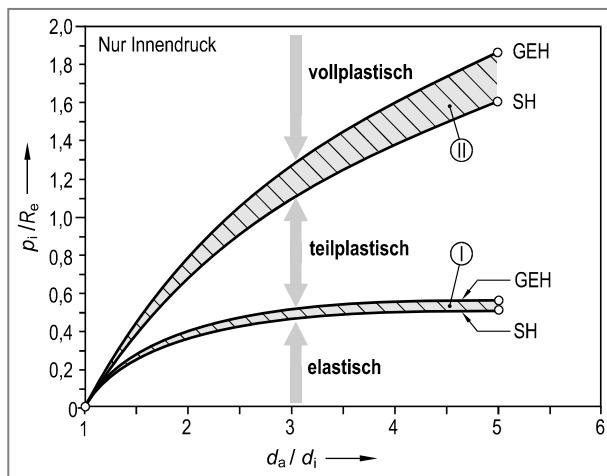


Bild 12.14 Grenzkurven des bezogenen Innendrucks (p_i / R_e) in Abhängigkeit vom Durchmesserverhältnis (d_a / d_i) für den elastischen, teilplastischen und vollplastischen Zustand

12.2.3 Teilplastischer Zustand unter Innendruck

Überschreitet der Innendruck den Grenzwert p_{iFB} (Gleichung 12.72), dann beginnt der Hohlzylinder an der Innenseite (entspricht der höchst beanspruchten Stelle) zu plastifizieren. Mit steigendem Innendruck schreitet die plastische Verformung von innen nach außen fort, bis schließlich der Innendruck den Wert p_{iVPL} (Gleichung 12.83) erreicht und der vollplastische Zustand eintritt. Innendrücke zwischen p_{iFB} und p_{iVPL} führen zum teilplastischen Zustand (siehe auch Bild 12.14).

Der teilplastische Zustand ist dadurch gekennzeichnet, dass zwischen Innenrand ($r = r_i$) und Radius $r = c$ ($r_i < c < r_a$) ein **plastischer Innenring**, zwischen Radius $r = c$ und dem Außenrand ($r = r_a$) hingegen ein **elastischer Außenring** vorliegt (Bild 12.15). Der zu einer Plastifizierung bis zum Radius $r = c$ führende Innendruck soll im Folgenden mit p_{ic} bezeichnet.

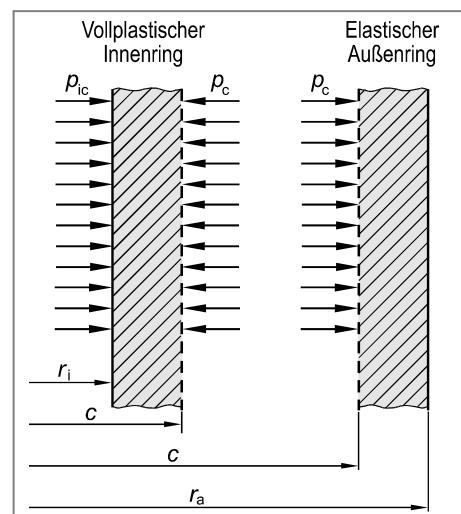


Bild 12.15 Vollplastischer Innenring und elastischer Außenring im teilplastischen Zustand eines durch Innendruck beanspruchten dickwandigen Behälters

Für die nachfolgenden Ausführungen soll wiederum die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) als Fließbedingung zugrunde gelegt werden. Elastischer Außenring und plastischer Innenring werden getrennt betrachtet. Der Übersichtlichkeit halber soll nur eine Beanspruchung durch Innendruck zugrunde gelegt werden ($p_a = 0$).

12.2.3.1 Elastischer Außenring

Für den Verlauf der Spannungskomponenten in Abhängigkeit der Koordinate r im elastischen Außenring erhält man aus den Gleichungen 12.53 bis 12.55 mit $p_i = p_c$, $p_a = 0$ und $r_i = c$:

$$\sigma_t = p_c \cdot \frac{c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) \quad (12.84)$$

$$\sigma_r = -p_c \cdot \frac{c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right) \quad (12.85)$$

$$\sigma_a = \frac{p_c \cdot c^2}{r_a^2 - c^2} \quad (12.86)$$

Setzt man die Gleichungen 12.84 bis 12.86 unter Berücksichtigung der Indizierungsregel (Gleichung 12.56) in Gleichung 12.62 (GEH) ein, dann erhält man:

$$\begin{aligned} \sigma_{VGEH} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{p_c \cdot c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) - \frac{p_c \cdot c^2}{r_a^2 - c^2} \right)^2 + \left(\frac{p_c \cdot c^2}{r_a^2 - c^2} + \frac{p_c \cdot c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right) \right)^2 +} \\ &\quad \left(\frac{-p_c \cdot c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right) - \frac{p_c \cdot c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) \right)^2 \\ \sigma_{VGEH} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{p_c \cdot c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \frac{r_a^2}{r^2} \right)^2 + \left(\frac{p_c \cdot c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \frac{r_a^2}{r^2} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{p_c \cdot c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \frac{r_a^2}{r^2} \right)^2} \\ \sigma_{VGEH} &= p_c \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{r_a^2 \cdot c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (12.87)$$

Am Innenrand des elastischen Außenrings treten plastische Verformungen ein, falls gilt:

$$\sigma_{VGEH}(r = c) = R_e \text{ bzw. } R_{p0,2}$$

Damit folgt aus Gleichung 12.87:

$$\begin{aligned} p_c \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - c^2} &= R_e \\ p_c &= \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{c^2}{r_a^2} \right) \end{aligned} \quad (12.88)$$

Die Spannungsverläufe im elastischen Außenring erhält man letztlich durch Einsetzen von Gleichung 12.88 in die Gleichungen 12.84 bis 12.86.

Für die **Tangentialspannung** im elastischen Außenring ergibt sich aus Gleichung 12.84:

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{c^2}{r_a^2}\right) \cdot \frac{c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1\right) \\ &= \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{r_a^2 - c^2}{r_a^2} \cdot \frac{c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1\right) \\ \sigma_t &= \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1\right)\end{aligned}\quad \text{Tangentialspannung unter Innendruck im elastischen Außenring eines dickwandigen Behälters} \quad (12.89)$$

Für die **Radialspannung** im elastischen Außenring folgt aus Gleichung 12.85:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{c^2}{r_a^2}\right) \cdot \frac{c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1\right) \\ &= -\frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{r_a^2 - c^2}{r_a^2} \cdot \frac{c^2}{r_a^2 - c^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1\right) \\ \sigma_r &= -\frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1\right)\end{aligned}\quad \text{Radialspannung unter Innendruck im elastischen Außenring eines dickwandigen Behälters} \quad (12.90)$$

Für die **Axialspannung** im elastischen Außenring folgt schließlich aus Gleichung 12.86:

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{c^2}{r_a^2}\right) \cdot \frac{c^2}{r_a^2 - c^2} \\ &= \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{r_a^2 - c^2}{r_a^2} \cdot \frac{c^2}{r_a^2 - c^2} \\ \sigma_a &= \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}\end{aligned}\quad \text{Axialspannung unter Innendruck im elastischen Außenring eines dickwandigen Behälters} \quad (12.91)$$

12.2.3.2 Vollplastischer Innenring

Für die Radialspannung im vollplastischen Zustand wurde unter Zugrundelegung der GEH bereits in Kapitel 12.2.2.1 die folgende Beziehung hergeleitet (Gleichung 12.78):

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln r + C \quad (12.92)$$

Für den vollplastischen Innenring gelten nunmehr die folgenden Randbedingungen (Bild 12.15):

$$\sigma_r(r = r_i) = -p_{ic} \quad (12.93)$$

$$\sigma_r(r = c) = -p_c \quad (12.94)$$

Die Integrationskonstante C in Gleichung 12.92 erhält man unter Berücksichtigung von Gleichung 12.93 zu:

$$\begin{aligned} -p_{ic} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln r_i + C \\ C &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln r_i - p_{ic} \end{aligned} \quad (12.95)$$

Gleichung 12.95 in Gleichung 12.92 eingesetzt, ergibt für die radiale Spannungskomponente σ_r im vollplastischen Innenring:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} R_e \cdot \ln \left(\frac{r}{r_i} \right) - p_{ic} \quad (12.96)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingung aus Gleichung 12.94 erhält man aus Gleichung 12.96 schließlich einen Zusammenhang zwischen dem wirkenden Innendruck p_{ic} und dem Grenzradius c zwischen dem plastischen Innenring und dem elastischen Außenring:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r = c) &= -p_c \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln \left(\frac{c}{r_i} \right) - p_{ic} &= -p_c \\ p_{ic} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln \left(\frac{c}{r_i} \right) + p_c \end{aligned} \quad (12.97)$$

Mit Gleichung 12.88 erhält man schließlich aus Gleichung 12.97:

$$p_{ic} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln \left(\frac{c}{r_i} \right) + \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{c^2}{r_a^2} \right) \quad (12.98)$$

und umgeformt:

$$p_{ic} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{c}{r_i} \right)^2 - \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 + 1 \right) \quad \text{Zusammenhang zwischen wirkendem Innendruck } p_{ic} \text{ und dem Grenzradius } c \text{ zwischen plastischem Innenring und elastischem Außenring} \quad (12.99)$$

Die **Radialspannungskomponente** σ_r im vollplastischen Innenring erhält man schließlich durch Einsetzen von Gleichung 12.99 in Gleichung 12.96:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r}{r_i} \right)^2 - \ln \left(\frac{c}{r_i} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 - 1 \right) \\ \sigma_r &= \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r}{c} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 - 1 \right) \quad \text{Radialspannung unter Innendruck im plastischen Innenring eines dickwandigen Behälters} \end{aligned} \quad (12.100)$$

Die **Tangentialspannung** σ_t ergibt sich durch Einsetzen von Gleichung 12.100 in Gleichung 12.76 zu:

$$\sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e + \sigma_r$$

$$\sigma_t = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{r}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{r_a}\right)^2 + 1 \right)$$

Tangentialspannung unter Innendruck im plastischen Innenring eines dickwandigen Behälters (12.101)

Im plastischen Zustand gilt näherungsweise für die Axialspannung σ_a (siehe Gleichung 12.75):

$$\sigma_a = \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2}$$

Durch Einsetzen und Umformen der Gleichungen 12.100 und 12.101 folgt schließlich für die **Axialspannung** im plastischen Innenring:

$$\sigma_a = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{r}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{r_a}\right)^2 \right)$$

Axialspannung unter Innendruck im plastischen Innenring eines dickwandigen Behälters (12.102)

In Tabelle 12.1 sind abschließend die Berechnungsformeln für die Spannungskomponenten eines dickwandigen Behälters im elastischen, teilplastischen und vollplastischen Zustand zusammengefasst.

Tabelle 12.1 Zusammenfassung der Berechnungsformeln für den dickwandigen Behälter

Elastischer Zustand unter Innen- und Außendruck		
Spannungsverläufe		Spannungen am Außenrand ($r = r_a$)
Tangentialspannung	$\sigma_t = p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2 + 1}{r^2} \right) - p_a \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right)$	$\sigma_{ti} = p_i \cdot \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - p_a \cdot \frac{2 \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$ $\sigma_{ta} = p_i \cdot \frac{2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - p_a \cdot \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$
Axialspannung	$\sigma_a = \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$	$\sigma_{ai} = \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$ $\sigma_{aa} = \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$
Radialspannung	$\sigma_r = -p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_i^2}{r^2} - 1 \right) - p_a \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right)$	$\sigma_{ri} = -p_i$ $\sigma_{ra} = -p_a$
Teilplastischer Zustand unter Innendruck - vollplastischer Innenring ($r_i \leq r \leq c$)		
Innendruck bei Fließbeginn:		Spannungen am Außenrand ($r = r_a$)
$p_{FB} = R_c \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{\sqrt{3} \cdot r_a^2}$		$\sigma_{ta} = \frac{R_c}{\sqrt{3}} \cdot \left(\left(\frac{c}{r_a} \right)^2 + 1 \right)$
Tangentialspannung	$\sigma_t = \frac{R_c}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r}{c} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 + 1 \right)$	$\sigma_{ti} = \frac{R_c}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r_i}{c} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 + 1 \right)$ $\sigma_{ta} = \frac{R_c}{\sqrt{3}} \cdot \left(\left(\frac{c}{r_a} \right)^2 + 1 \right)$
Axialspannung	$\sigma_a = \frac{R_c}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r}{c} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 \right)$	$\sigma_{ai} = \frac{R_c}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r_i}{c} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 \right)$ $\sigma_{aa} = \frac{R_c}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{c}{r_a} \right)^2$
Radialspannung	$\sigma_r = \frac{R_c}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r}{c} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 - 1 \right)$	$\sigma_{ri} = \frac{R_c}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r_i}{c} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 - 1 \right)$ $\sigma_{ra} = \frac{R_c}{\sqrt{3}} \cdot \left(\left(\frac{c}{r_a} \right)^2 - 1 \right)$

Fortsetzung Tabelle 12.1 Zusammenfassung der Berechnungsformeln für den dickwandigen Behälter

Teiplastischer Zustand unter Innendruck - elastischer Außenring ($c < r \leq r_a$)		Spannungen am Außenrand ($r = r_a$)	
Zusammenhang zwischen Innendruck und Grenzradius c:	$P_{ic} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{c}{r_i}\right)^2 - \left(\frac{c}{r_a}\right)^2 + 1 \right)$	Spannungen am Innenrand ($r = c$)	Spannungen am Außenrand ($r = r_a$)
Tangentialspannung	$\sigma_t = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right)$	$\sigma_{ti} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{c^2} + 1 \right)$	$\sigma_{ta} = 2 \cdot \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}$
Axialspannung	$\sigma_a = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}$	$\sigma_{ai} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}$	$\sigma_{aa} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}$
Radialspannung	$\sigma_r = -\frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right)$	$\sigma_{ri} = -\frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{c^2} - 1 \right)$	$\sigma_{ra} = 0$
Vollplastischer Zustand unter Innendruck		Spannungen am Außenrand ($r = r_a$)	
Innendruck mit Erreichen des vollplastischen Zustandes:	$P_{i,VPL} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$	Spannungen am Innenrand ($r = r_i$)	Spannungen am Außenrand ($r = r_a$)
Tangentialspannung	$\sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \left(1 - \ln\left(\frac{r_a}{r}\right) \right)$	$\sigma_{ti} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \left(1 - \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \right)$	$\sigma_{ta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e$
Axialspannung	$\sigma_a = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - 2 \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r}\right) \right)$	$\sigma_{ai} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - 2 \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \right)$	$\sigma_{aa} = \frac{R_e}{\sqrt{3}}$
Radialspannung	$\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r}\right)$	$\sigma_{ri} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$	$\sigma_{ra} = 0$

12.3 Aufgaben

Aufgabe 12.1

○○○○●

Ein Hochdruck-Hydraulikzylinder (Außendurchmesser $d_a = 50$ mm; Wandstärke $s = 2,5$ mm) aus 42CrMo4 ist für einen maximalen statischen Innendruck von $p_i = 25$ MPa ausgelegt. Berechnen Sie die Spannungskomponenten in der Zylinderwand.

Aufgabe 12.2

○○○●●

Ein Druckspeichergefäß mit einem Innendurchmesser von $d_i = 150$ mm und einer Wandstärke von $s = 10$ mm soll in eine hydraulische Anlage eingebaut werden.

- Berechnen Sie den zulässigen statischen Innendruck p_i , falls der Zylinder aus:
 - der unlegierten Baustahlsorte P295GH (Berechnung gegen Fließen; $S_F = 1,5$)
 - der Graugusssorte EN-GJL-200 (Berechnung gegen Bruch; $S_B = 4,0$) gefertigt werden soll.
- Ermitteln Sie für beide Werkstoffvarianten jeweils die mittlere Aufweitung des Behälters, d. h. die Vergrößerung des mittleren Behälterdurchmessers.

Werkstoffkennwerte P295GH:

$$R_e = 310 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 550 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

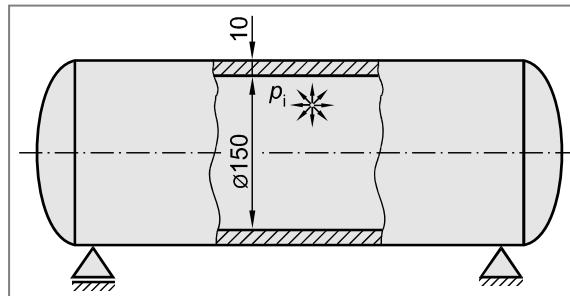
$$\mu = 0,30$$

Werkstoffkennwerte EN-GJL-200:

$$R_m = 200 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 100000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,25$$



Aufgabe 12.3

○○○●●

An einem beidseitig verschlossenen Rohr aus der unlegierten Stahlsorte C45E+QT mit einem Innendurchmesser von $d_i = 140$ mm und einer Wandstärke von $s = 5$ mm werden in Tangentialrichtung und in Axialrichtung Dehnungsmessungen durchgeführt.

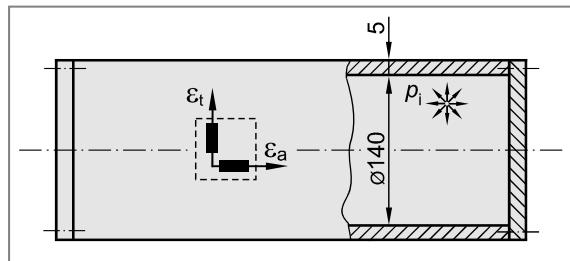
Werkstoffkennwerte C45E+QT:

$$R_{p0,2} = 420 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 750 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- Berechnen Sie den Innendruck p_i , falls mit Hilfe der Dehnungsmessstreifen in Tangentialrichtung eine Dehnung von $\varepsilon_{t1} = 0,8095 \text{ \%}$ und in Axialrichtung $\varepsilon_{a1} = 0,1905 \text{ \%}$ ermittelt wird.
- Zusätzlich zum Innendruck p_i soll eine statische Zugkraft F_1 in Axialrichtung des Rohres wirken. Berechnen Sie die zulässige statische Zugkraft F_1 , falls Fließen mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden soll.
- Bei einem zweiten Versuch wird der Druckbehälter durch einen unbekannten Innendruck p_2 und eine unbekannte Längskraft F_2 statisch beansprucht. Berechnen Sie den Innendruck und die Längskraft für eine Dehnungsanzeige von $\varepsilon_{t2} = 0,2524 \text{ \%}$ und $\varepsilon_{a2} = 0,5743 \text{ \%}$.

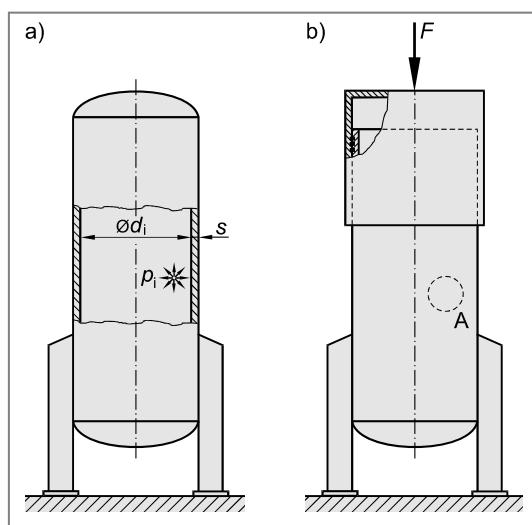
Aufgabe 12.4



Ein zylindrischer Druckbehälter mit einem Innendurchmesser von $d_i = 500 \text{ mm}$ und einer Wandstärke von $s = 8 \text{ mm}$ aus der Stahlsorte P355GH ($R_c = 355 \text{ N/mm}^2$; $R_m = 620 \text{ N/mm}^2$; $E = 210000 \text{ N/mm}^2$; $\mu = 0,30$) wird durch den Innendruck p_i statisch beansprucht (Abbildung a).

Die zulässige Tangentialspannung σ_t im zylindrischen Mantel muss aus Sicherheitsgründen auf $\sigma_t = 250 \text{ N/mm}^2$ beschränkt werden.

- Berechnen Sie den zulässigen statischen Innendruck.
- Ermitteln Sie die Axialspannung σ_a und die Radialspannung σ_r in der Behälterwand.
- Berechnen Sie die Aufweitung des Druckbehälters am Außenrand, d. h. die Vergrößerung des äußeren Zylinderdurchmessers.
- Überprüfen Sie, ob eine ausreichende Sicherheit gegen Fließen vorliegt.



Bei einer Variante des Druckbehälters wird ein axial beweglicher, druckdichter Deckel verwendet (Abbildung b).

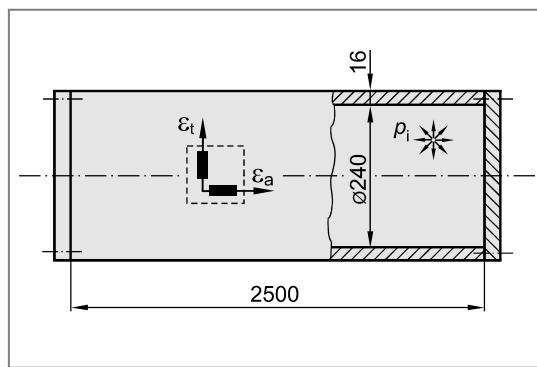
- Berechnen Sie die erforderliche Haltekraft F , damit der Deckel keine axiale Verschiebung erfährt ($p_i = 8 \text{ MPa}$).
- Berechnen Sie für diese Variante die Tangential-, die Axial- und die Radialspannung im Bereich A der zylindrischen Behälterwand.
- Bestimmen Sie mit Hilfe des Mohr'schen Spannungskreises die maximale Schubspannung in der von σ_t und σ_a aufgespannten Ebene (Zylindermantelfläche) für den geschlossenen Behälter sowie für den Behälter mit Deckel.

Aufgabe 12.5

Ein beidseitig verschlossenes Rohrstück einer Hochdruck-Dampfleitung aus der warmfesten Stahlsorte 16Mo3 wird für eine Materialuntersuchung durch einen statischen Innendruck p_i beansprucht.

Der Innendurchmesser des Rohres beträgt $d_i = 240 \text{ mm}$, die Wandstärke $s = 16 \text{ mm}$ und die Länge $l = 2500 \text{ mm}$.

An der Außenoberfläche des Rohres werden die Dehnungen $\varepsilon_t = 0,4048 \text{ \%}$ (in tangentialer Richtung) und $\varepsilon_a = 0,0952 \text{ \%}$ (in axialer Richtung) gemessen.



Werkstoffkennwerte 16Mo3:

$$R_{p0,2} = 280 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 570 \text{ N/mm}^2$$

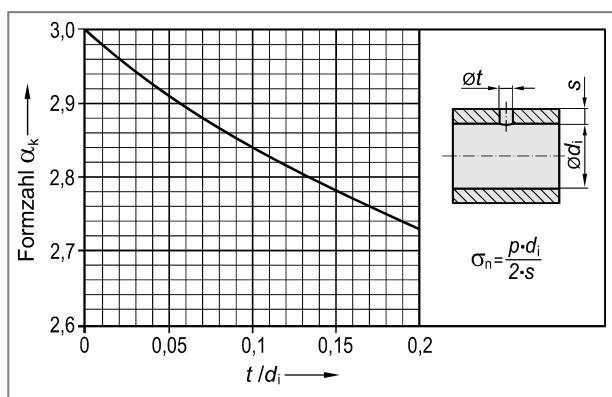
$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- Berechnen Sie aus den experimentell ermittelten Dehnungswerten (ε_t und ε_a) die Tangentialspannung σ_t und die Axialspannung σ_a .
- Ermitteln Sie den wirkenden statischen Innendruck p_i .
- Berechnen Sie den zulässigen Innendruck, falls eine Sicherheit gegen Fließen von $S_F = 1,6$ gefordert wird.

Für eine zusätzliche Druckzuführung muss das Rohr mit einer Querbohrung mit $t = 24 \text{ mm}$ Durchmesser versehen werden.

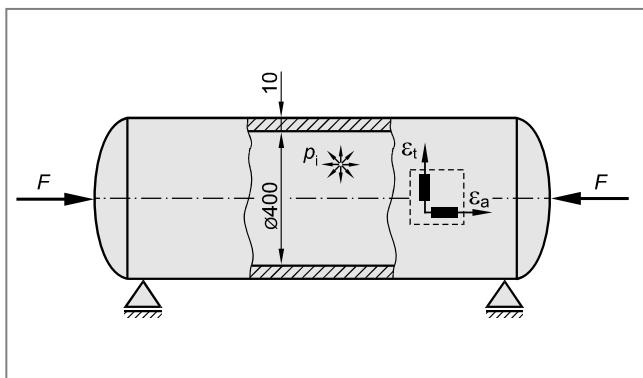
- Berechnen für einen statischen Innendruck von $p_i = 10 \text{ MPa}$ jeweils für die höchst beanspruchte Stelle:
 - die Sicherheit gegen Fließen,
 - die Sicherheit gegen das Erreichen einer plastischen Dehnung von $\varepsilon_{pl} = 0,30 \text{ \%}$.



Aufgabe 12.6

An der Außenoberfläche eines Druckbehälters ($d_i = 400$ mm; $s = 10$ mm) aus der legierten Stahlsorte 13CrMo4-5 werden die Dehnungen $\varepsilon_t = 0,929 \text{ \%}$ (in tangentialer Richtung) und $\varepsilon_a = -0,929 \text{ \%}$ (in axialer Richtung) gemessen.

Der Druckbehälter wird durch einen unbekannten Innendruck p_i und eine unbekannte axiale Druckkraft F statisch beansprucht.



Werkstoffkennwerte 13CrMo4-5:

$$R_{p0,2} = 380 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 620 \text{ N/mm}^2$$

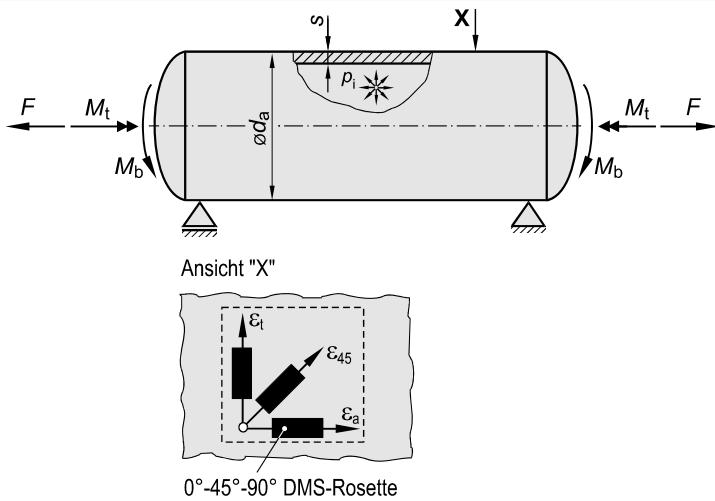
$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- Berechnen Sie aus den experimentell ermittelten Dehnungswerten (ε_t und ε_a) die Tangentialspannung σ_t und die Axialspannung σ_a .
- Zeichnen Sie den Mohr'schen Spannungskreis für die durch σ_t und σ_a aufgespannte Ebene (Zylindermantelfläche). Ermitteln Sie diejenigen Schnittflächen dieser Ebene, die keine Schubspannungen beinhalten. Welche Schnittflächen enthalten hingegen keine Normalspannungen?
- Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen. Ist die Sicherheit ausreichend?
- Ermitteln Sie den Innendruck p_i und die axiale Druckkraft F , die gemeinsam die Dehnungen ε_t und ε_a verursachen.
- Anstelle einer Beanspruchung aus Innendruck p_i mit überlagerter Druckkraft F , kann der selbe Spannungszustand in der Behälterwand auch durch eine andere Beanspruchungsart erzeugt werden. Nennen Sie eine mögliche Beanspruchung und berechnen Sie deren Größe.

Aufgabe 12.7

Die Abbildung zeigt einen beidseitig verschlossenen, dünnwandigen Hochdruckbehälter aus der unlegierten Vergütungsstahlsorte C45E ($E = 210000 \text{ N/mm}^2$, $\mu = 0,30$). Der Außendurchmesser des Druckbehälters beträgt $d_a = 160 \text{ mm}$ und die Wandstärke $s = 10 \text{ mm}$. An der markierten Stelle ("X") des Druckbehälters wird eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette appliziert. Der Behälter wird auf unterschiedliche Weise beansprucht.



Bei einem ersten Versuch wird der (drucklose) Behälter mit einer statischen Zugkraft von $F = 500 \text{ kN}$ belastet.

- Ermitteln Sie die Dehnungen in Axial-, Tangential- und in 45° -Richtung.
- Zeichnen Sie für die Beanspruchung durch die Zugkraft F den Mohr'schen Spannungskreis sowie den Mohr'schen Verformungskreis.

Bei einem zweiten Versuch wird der Hochdruckbehälter mit einem statischen Innendruck von $p_i = 15 \text{ MPa}$ beaufschlagt.

- Ermitteln Sie die Dehnungen in Axial-, Tangential- und in 45° -Richtung.
- Zeichnen Sie für die Beanspruchung durch den Innendruck p_i den Mohr'schen Spannungskreis sowie den Mohr'schen Verformungskreis.

Bei einem dritten Versuch wird der Behälter mit einem statisch wirkenden Biegemoment von $M_b = 13500 \text{ Nm}$ belastet.

- Ermitteln Sie die Dehnungen in Axial-, Tangential- und in 45° -Richtung.
- Zeichnen Sie für die Beanspruchung durch das Biegemoment M_b den Mohr'schen Spannungskreis sowie den Mohr'schen Verformungskreis.

Bei einem vierten Versuch wird der Behälter schließlich mit einem statischen Torsionsmoment von $M_t = 15000 \text{ Nm}$ belastet.

- Ermitteln Sie die Dehnungen in Axial-, Tangential- und in 45° -Richtung.
- Zeichnen Sie für die Beanspruchung durch das Torsionsmoment M_t den Mohr'schen Spannungskreis sowie den Mohr'schen Verformungskreis.

Aufgabe 12.8

Am Umfang eines dünnwandigen, beidseitig verschlossenen Hohlzyinders aus Werkstoff 34CrNiMo6 wurden an vier jeweils um 90° zueinander versetzten Stellen Dehnungsmessstreifen in gleicher Weise appliziert (siehe Abbildung). Der Hohlzylinder wird durch den Innendruck p_i , das Biegemoment M_b und das Torsionsmoment M_t statisch beansprucht.

Messstelle	1	2 und 4	3
ε_a [%]	0,449	0,146	-0,156
ε_t [%]	0,531	0,622	0,713
ε_{45} [%]	0,785	0,679	0,573

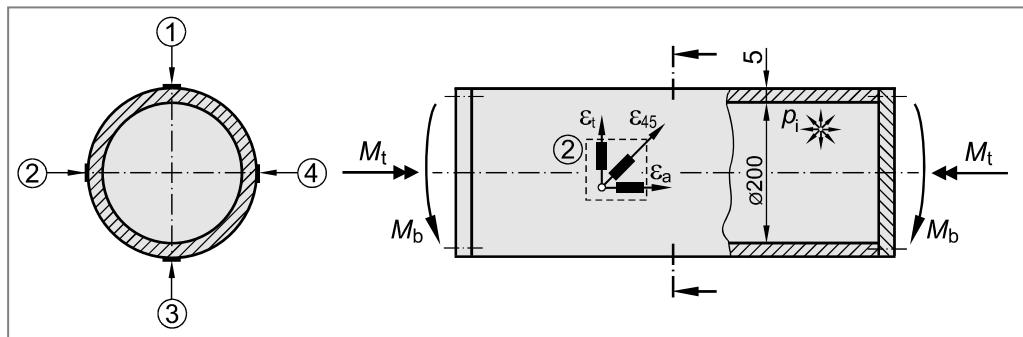
Werkstoffkennwerte 34CrNiMo6:

$$R_e = 270 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 420 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 205000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

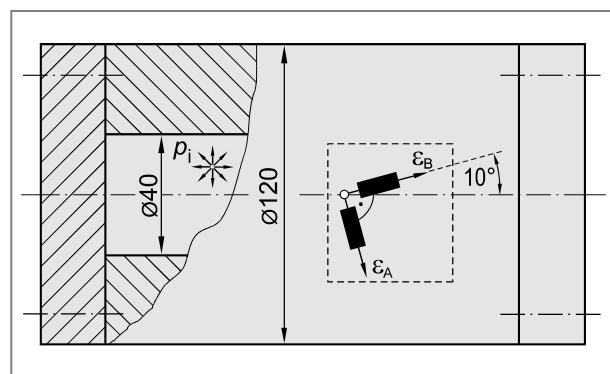


Berechnen Sie aus den Messergebnissen (siehe Tabelle) den Innendruck p_i , das Biegemoment M_b und das Torsionsmoment M_t .

Aufgabe 12.9

Ein dickwandiges, an beiden Enden verschlossenes Rohrstück aus dem niedrig legierten Vergütungsstahl 20MnMoNi5-5 wird durch einen statischen Innendruck beansprucht.

Zur Überwachung des Innendrucks sind auf der Außenoberfläche des Rohres zwei Dehnungsmessstreifen in der dargestellten Weise appliziert worden (siehe Abbildung).



Werkstoffkennwerte 20MnMoNi5-5:

$$R_{p0,2} = 340 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 650 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- Berechnen Sie den statisch wirkenden Innendruck, falls an der Außenoberfläche die Dehnungen $\varepsilon_A = 0,158 \text{ \%}$ und $\varepsilon_B = 0,042 \text{ \%}$ gemessen werden. Bestimmen Sie außerdem die Hauptnormalspannungen sowie die Hauptspannungsrichtungen. Das Rohrstück kann zunächst als elastisch beansprucht angesehen werden.
- Ermitteln Sie den Innendruck p_{iFB} bei Fließbeginn des Rohres.
- Um das Rohr höher auszunutzen, wird ein plastischer Bereich bis zum Radius $c = 30 \text{ mm}$ zugelassen. Berechnen Sie den nunmehr zulässigen Innendruck p_{ic} . Es kann ein linear-elastisch ideal-plastisches Werkstoffverhalten angenommen werden.
- Ermitteln Sie die Messwerte der Dehnungsmessstreifen an der Außenoberfläche (ε_A^* und ε_B^*) sofern der Innendruck p_{ic} aus Aufgabenteil c) wirkt.
- Skizzieren Sie mit Hilfe der Spannungswerte am Innenrand, am Radius c und am Außenrand, maßstäblich den Verlauf der Tangential-, Axial- und Radialspannung über der Wanddicke bei der Beanspruchung mit p_{ic} .
- Berechnen Sie die Eigenspannungen nach dem Entlasten an der Innenseite sowie an der Außenseite des Rohres.

Aufgabe 12.10



Ein dickwandiger Druckbehälter aus Werkstoff 30CrNiMo8 wird durch einen unbekannten statischen Innendruck p_i und ein unbekanntes statisches Torsionsmoment M_t belastet. Zur Ermittlung der Belastung wird eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette unter 45° zur Rohrachse appliziert (siehe Abbildung). Nach dem Aufbringen der Belastung (p_i und M_t) werden die folgenden Dehnungen ermittelt:

$$\text{DMS A: } \varepsilon_A = 0,1496 \text{ \%}$$

$$\text{DMS B: } \varepsilon_B = 1,1657 \text{ \%}$$

$$\text{DMS C: } \varepsilon_C = 1,2904 \text{ \%}$$

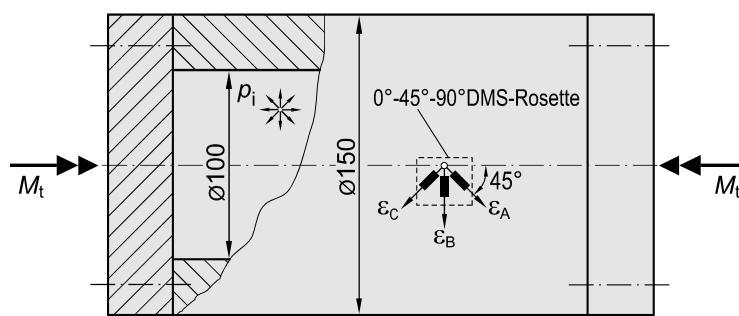
Werkstoffkennwerte 30CrNiMo8:

$$R_{p0,2} = 980 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1450 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- a) Berechnen Sie aus den experimentell ermittelten Dehnungen den Innendruck p_i und das Torsionsmoment M_t unter der Voraussetzung eines elastisch beanspruchten Druckbehälters.

- b) Überprüfen Sie, unter Zugrundelegung der Gestaltänderungsenergiehypothese, ob bei der Belastung gemäß Aufgabenteil a), der Behälter überhaupt noch vollelastisch beansprucht war. Führen Sie den Nachweis für die Innen- und die Außenoberfläche des Rohres durch.

Der Druckbehälter wird in einer zweiten Versuchsreihe nur noch durch einen statisch wirkenden Innendruck p_i beaufschlagt. Das Torsionsmoment M_t wirkt nicht mehr ($M_t = 0$).

- c) Ermitteln Sie den Innendruck $p_{i\text{ FB}}$ der zum Fließen des Druckbehälters führt. Verwenden Sie für Ihre Berechnung die Gestaltänderungsenergiehypothese.
- d) Bestimmen Sie den Innendruck p_{ic} der erforderlich ist, um den inneren Teil der Behälterwand bis in eine Tiefe von 10 mm ($c = 60 \text{ mm}$) zu plastifizieren. Es kann ein linear-elastisches ideal-plastisches Werkstoffverhalten angenommen werden.
- e) Bestimmen Sie für den Innendruck p_{ic} (siehe Aufgabenteil d) die Dehnungsanzeigen von DMS A, DMS B und DMS C.

Aufgabe 12.11



Ein Druckbehälter mit $d_i = 600 \text{ mm}$ und $s = 12 \text{ mm}$ aus dem legierten Vergütungsstahl 50CrMo4 wird im Betrieb durch den statisch wirkenden Innendruck $p_i = 20 \text{ MPa}$ sowie durch die statisch wirkenden Kräfte $F_1 = 900 \text{ kN}$ und $F_2 = 1500 \text{ kN}$ belastet.

Im Rahmen einer experimentellen Spannungsanalyse werden vier Dehnungsmessstreifen appliziert. Die Messebenen von DMS B und DMS C fallen hierbei mit der neutralen Faser zusammen (siehe Abbildung).

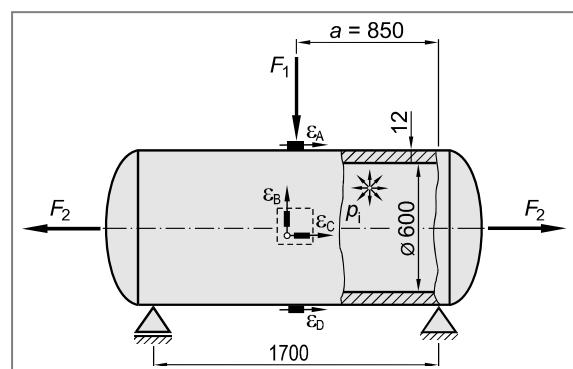
Werkstoffkennwerte 50CrMo4:

$$R_{p0,2} = 870 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1080 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- a) Berechnen Sie die Dehnungsanzeigen der vier Dehnungsmessstreifen, falls der Druckbehälter durch den Innendruck p_i sowie durch die Kräfte F_1 und F_2 beansprucht wird. Schubspannungen durch Querkräfte sollen vernachlässigt werden.
- b) Berechnen Sie, unter Verwendung der Schubspannungshypothese, die Sicherheit gegen Fließen an der höchst beanspruchten Stelle der Außenoberfläche. Ist die Sicherheit ausreichend?

Hinweis: Versuchen Sie, zur weiteren Übung, aus den in Aufgabenteil a) errechneten Dehnungen die Kräfte F_1 und F_2 sowie den Innendruck p_i zu berechnen.

Aufgabe 12.12

Zur Ermittlung des unbekannten Innendrucks p_i werden an einem dünnwandigen Hochdruckbehälter ($d_i = 450 \text{ mm}$; $s = 15 \text{ mm}$) aus Werkstoff P355GH zwei Dehnungsmessstreifen appliziert (siehe Abbildung).

Ermitteln Sie den statisch wirkenden Innendruck

p_i für die folgenden Dehnungswerte:

$$\text{DMS A: } \varepsilon_A = 0,1972 \text{ \%}$$

$$\text{DMS B: } \varepsilon_B = 0,5528 \text{ \%}$$

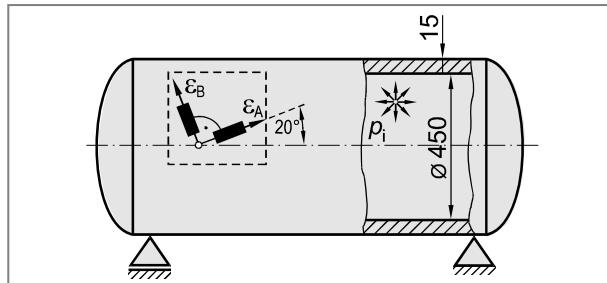
Werkstoffkennwerte P355GH:

$$R_{p0,2} = 400 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 630 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

**Aufgabe 12.13**

Ein Druckbehälter aus Werkstoff 16Mo3 ($d_i = 300 \text{ mm}$; $s = 15 \text{ mm}$) wird durch einen unbekannten Innendruck p_i und ein zusätzliches, unbekanntes Torsionsmoment M_t beansprucht.

Ermitteln Sie den Innendruck p_i sowie den Betrag und die Wirkungsrichtung des Torsionsmoments M_t , falls die auf der Behälteroberfläche applizierte DMS-Rosette (siehe Abbildung) die folgenden Messwerte liefert:

$$\varepsilon_A = 0,2011 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_B = 0,5715 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_C = 0,3989 \text{ \%}$$

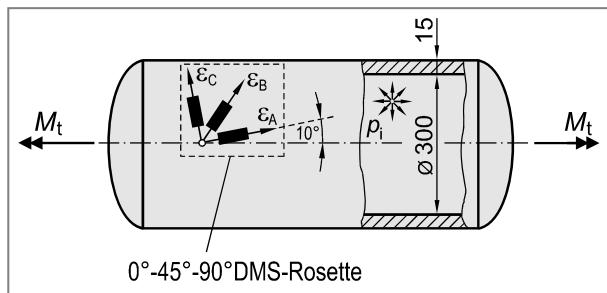
Werkstoffkennwerte 16Mo3:

$$R_{p0,2} = 275 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 510 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

**Aufgabe 12.14**

Für den Teleskopzylinder einer Aufzugsanlage soll ein Festigkeitsnachweis für die Stellen 1 bis 4 (siehe Abbildung) erbracht werden.

Der Teleskopzylinder besteht im Wesentlichen aus zwei ineinander geführten Stahlrohren aus Werkstoff 42CrMo4 ($d_{i1} = 60 \text{ mm}$; $s_1 = 5 \text{ mm}$; $d_{i2} = 80 \text{ mm}$). Reibung sowie radiale Druckkräfte im Bereich der Dichtstellen können vernachlässigt werden. Außerdem soll das Eigengewicht vernachlässigt werden.

Werkstoffkennwerte 42CrMo4:

$$R_{p0,2} = 780 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1090 \text{ N/mm}^2$$

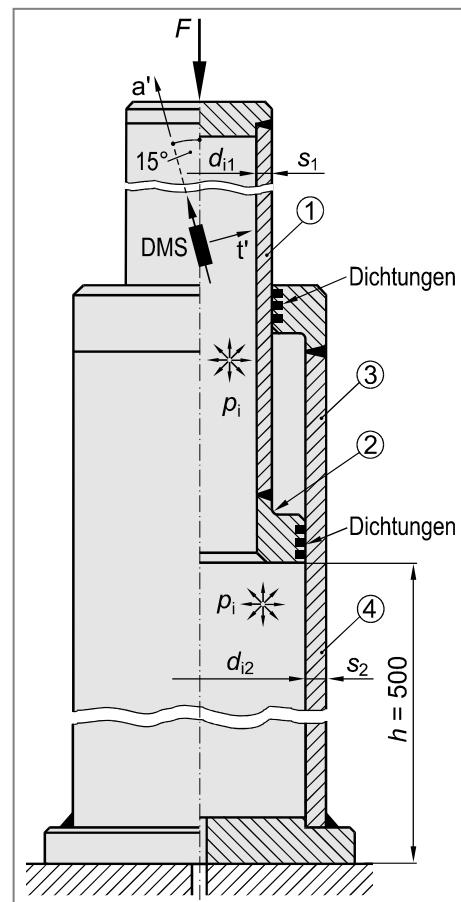
$$E = 208000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- a) Berechnen Sie den erforderlichen Innendruck p_i , um die Last $F = 150 \text{ kN}$ in einer Höhe von $h = 500 \text{ mm}$ im Gleichgewicht zu halten.
- b) Ermitteln Sie unter Verwendung der Schubspannungshypothese die Sicherheit gegen Fließen (S_F) in der Zylinderwand an der Stelle 1 für den Innendruck p_i (siehe Aufgabenteil a). Ist die Sicherheit ausreichend, falls $S_F \geq 1,5$ gefordert wird?
- c) Dimensionieren Sie für den in Aufgabenteil a) errechneten Innendruck p_i , die Dicke s_2 der äußeren Zylinderwand so, dass die Sicherheit gegen Fließen an der Stelle 4 der Sicherheit gegen Fließen an der Stelle 1 entspricht.
- d) Ermitteln Sie für den in Aufgabenteil a) errechneten Innendruck p_i und die in Aufgabenteil c) berechnete Wanddicke s_2 die Sicherheit gegen Versagen an der Stelle 3 des äußeren Zylinders.

Zur Kontrolle des Innendrucks wird auf der Außenoberfläche des inneren Zylinders ein Dehnungsmessstreifen (DMS) appliziert. Durch eine Montagegenauigkeit schließt der DMS mit der Zylinderlängssachse einen Winkel von $\alpha = 15^\circ$ ein (siehe Abbildung).

- e) Berechnen Sie den Messwert des Dehnungsmessstreifens für den Innendruck p_i aus Aufgabenteil a).



Der maximale Innendruck wird durch ein Überdruckventil auf $p_{\max} = 40 \text{ MPa}$ begrenzt. Die Wanddicke des äußeren Zylinders wird zu $s_2 = 6 \text{ mm}$ gewählt.

- f) Berechnen Sie für den Innendruck $p_{\max} = 40 \text{ MPa}$ und eine Last von $F = 150 \text{ kN}$ die Sicherheiten gegen Fließen an den Stellen 1 und 4. Sind die Sicherheiten ausreichend, falls $S_F \geq 1,50$ gefordert wird?

Hinweis: Berücksichtigen Sie bei der Berechnung der Sicherheiten gegen Fließen die neue Position des inneren Zylinders und die mögliche Auswirkung auf die Spannungs komponenten.

Für den Radius an der Stelle 2 kann eine Formzahl von $\alpha_k = 2,25$ angenommen werden, die sich außerdem nur auf die Axialspannung überhöhend auswirken soll.

- g) Überprüfen Sie, ob für den Innendruck $p_{\max} = 40 \text{ MPa}$ an der Kerbstelle 2 noch eine ausreichende Sicherheit gegen Fließen gegeben ist.

Aufgabe 12.15

Weisen Sie rechnerisch für die Außenoberfläche eines dünnwandigen Druckbehälters aus einem duktilen Werkstoff (Streckgrenze R_e) unter Innendruck nach, dass Fließen erst eintritt, falls die Tangentialspannung das 1,155-fache der Streckgrenze des Behälterwerkstoffs erreicht.

13 Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

In den vorangegangenen Kapiteln wurde ausschließlich eine statische (ruhende) Beanspruchung zugrunde gelegt. Die äußere Belastung wird einmal aufgebracht und wirkt dann mit konstanter, zeitlich unveränderlicher Größe.

Während bei statischer oder quasi-statischer Beanspruchung und Temperaturen (T) die etwa 40% der absoluten Schmelztemperatur (T_S) des Werkstoffs nicht überschreiten, ein Festigkeitsnachweis gegen unzulässige plastische Verformungen oder Gewaltbruch erfolgt, muss bei zeitlich veränderlicher Beanspruchung ein Nachweis der Dauer-, Zeit- oder Betriebsfestigkeit geführt werden (Bild 13.1).

Die Mehrzahl der technischen Bauteile unterliegt im Betrieb einer zeitlich veränderlichen Beanspruchung. Eine derartige Schwingbeanspruchung kann entstehen durch:

- Umlaufbiegung rotierender Wellen,
- Vibratoren, insbesondere in oder in der Nähe der Resonanzfrequenz,
- An- und Abfahrvorgänge von Maschinen und Anlagen,
- Straßenunebenheiten bei Fahrzeugen,
- Seegang bei Schiffen und Off-Shore-Strukturen,
- Turbulenzen, Start- und Landevorgänge bei Flugzeugen.

Häufig beobachtet man eine statische Grundbeanspruchung, der sich eine zeitlich veränderliche Beanspruchung überlagert. Die Frequenz einer solchen Schwingbeanspruchung kann sich dabei von einer Schwingung pro Tag (z. B. Temperaturschwankungen) bis in den kHz-Bereich (z. B. Resonanzschwingungen) erstrecken (Bild 13.2).

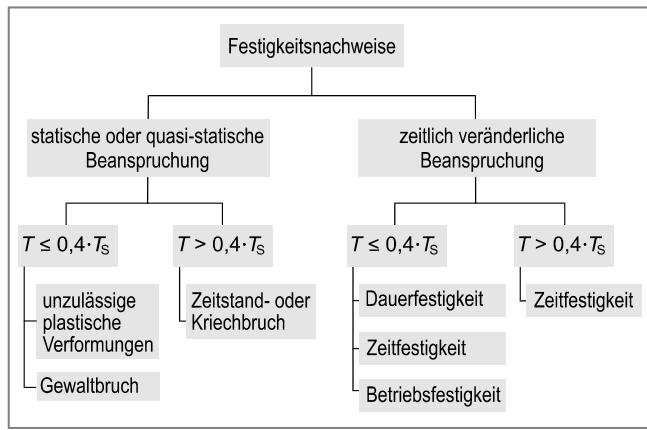


Bild 13.1 Festigkeitsnachweise für metallische Werkstoffe in Abhängigkeit von Beanspruchungsart und Temperatur

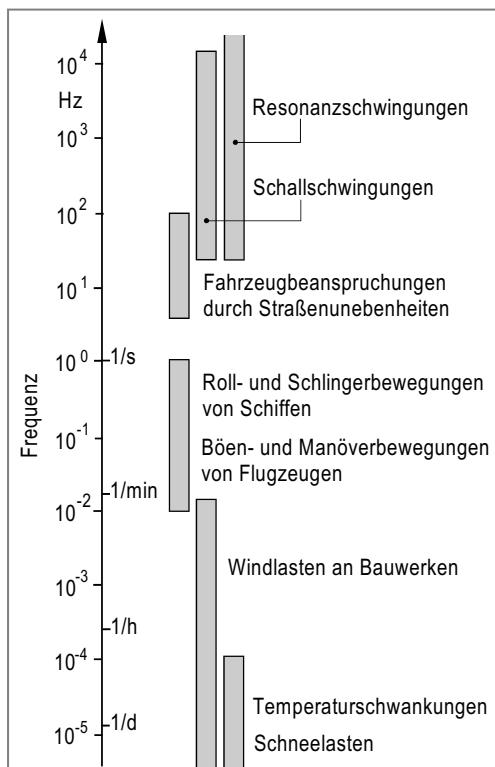


Bild 13.2 Frequenzbereiche schwingbruchgefährdeter Maschinenteile und Bauwerke (nach Jacoby)

Die Erfahrung zeigt, dass Bauteile unter schwingender Beanspruchung bereits bei weitaus geringeren Belastungen als der im (quasi-)statischen Zugversuch ermittelten Zugfestigkeit zu Bruch gehen können. Man spricht dann von einem **Ermüdungsbruch**. Werkstoffkennwerte, die mit statischen Prüfverfahren ermittelt wurden, dürfen daher keinesfalls zur Dimensionierung zeitlich veränderlich beanspruchter Bauteile herangezogen werden. Ein Nachweis der Dauer-, Zeit- oder Betriebsfestigkeit muss in diesem Fall separat geführt werden.

Den beschriebenen Sachverhalt veranschaulicht Bild 13.3 am Beispiel eines Bauteils aus S235JR. Während die vom Hersteller angegebene statische Zugfestigkeit bei etwa 340 N/mm^2 liegt, muss bei schwingender Beanspruchung bereits bei Spannungen oberhalb der Dauerfestigkeit des Bauteils von etwa 60 N/mm^2 nach einer endlichen Schwingpielzahl mit einem Bruch gerechnet werden. Die auf Dauer ohne Versagen ertragbare Nennspannung liegt damit deutlich unter der statischen Festigkeit!

Im Gegensatz zu einem Gewaltbruch, der bei einer einmaligen Überbeanspruchung auftreten kann, ist es für den Schwingbruch kennzeichnend, dass er im Laufe der Zeit unter zeitlich veränderlicher Betriebsbeanspruchung entsteht. Die Zeit, die das Bauteil unter Einwirkung der Schwingungsbeanspruchung bis zum Bruch erträgt, wird als **Lebensdauer** bezeichnet.

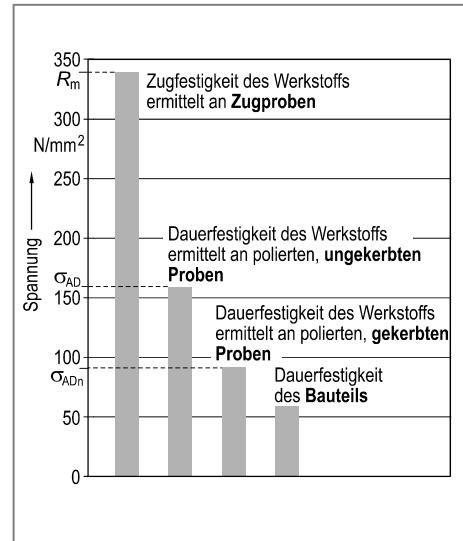


Bild 13.3 Bruchnennspannungen am Beispiel eines Bauteils aus S235JR

13.1 Schadensfälle infolge Werkstoffermüdung

Mehr als ein Drittel aller bekannten Werkstoffschäden können auf Materialermüdung zurückgeführt werden (Bild 13.4). Die ersten durch Werkstoffermüdung verursachten Schäden an Eisenbahnachsen wurden bereits Mitte des 19. Jahrhunderts beschrieben. Bis heute ereignete sich eine Vielzahl ermüdungsbedingter Schäden mit zum Teil katastrophalem Ausmaß (Tabelle 13.1).

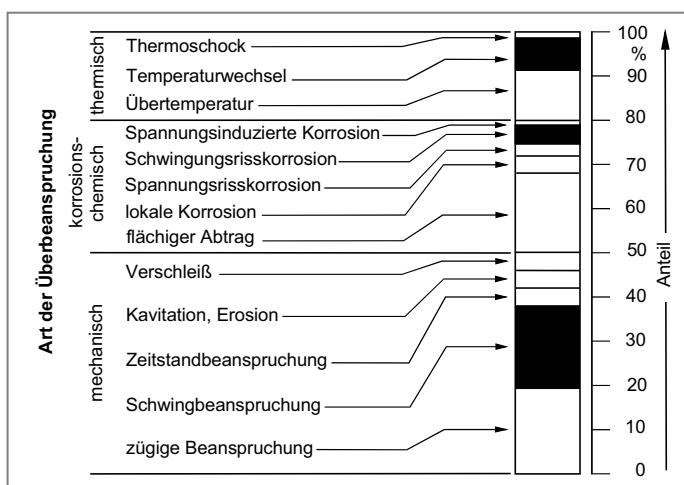


Bild 13.4 Ergebnis einer statistischen Auswertung von 1002 Schadensfällen nach [10]. Versagensfälle infolge Werkstoffermüdung sind schwarz gekennzeichnet

Tabelle 13.1 Beispiele für teilweise katastrophale Schadensfälle infolge Materialermüdung

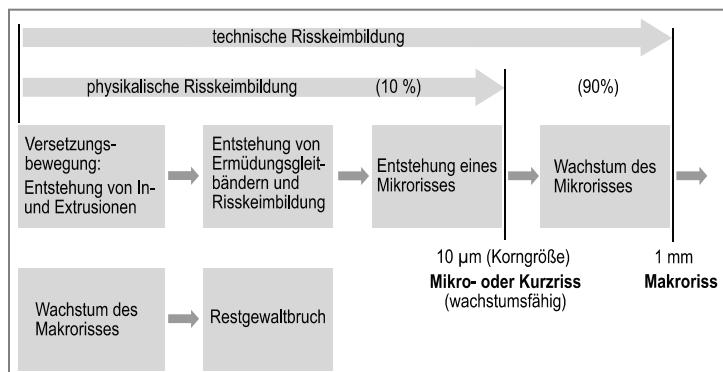
Datum	Schadensfall	Ursache
1842	Zugunglück auf der Versailler Bahn.	Ermüdungsbruch an den Achsen.
1927	Auf der Fahrt nach USA fallen am Luftschiff LZ 127 ("Graf Zeppelin") innerhalb von nur wenigen Stunden vier der fünf Motoren aus. Nur durch den fünften, noch intakten Motor gelingt es, Luftschiff und Passagiere zu retten.	Torsionsschwingungen führen zu Schwingbrüchen an den Kurbelwellen.
10.01.1954 08.04.1954	Absturz zweier Passagierflugzeuge des Typs „De Havilland Comet“ aus großer Höhe bereits nach kurzer Betriebszeit.	Aufreissen des Rumpfes ausgehend von einem Ermüdungsriß u. a. an einer Fensteröffnung.
27.03.1980	Kentern der halbtauchenden Bohrplattform „Alexander L. Kielland“.	Ermüdungsbruch einer Rohrstrebe zwischen den Pontonsäulen ausgehend von einem eingeschweißten Hydrophonstutzen.
4.10.1992	Absturz eines voll betankten Großraumfrachtflugzeuges vom Typ Boeing 747-200 in einen Wohnblock in Amsterdam kurz nach dem Start.	Ermüdungsbruch an einem Bolzen der Triebwerkaufhängung. Durch das Abreißen zweier Triebwerke wurde der Flügel beschädigt, sodass die Steuerbarkeit verloren ging. Der Ermüdungsriß mit einer Tiefe von etwa 3,5 mm wurde wahrscheinlich bei der Inspektion übersehen.
03.06.1998	ICE Unglück bei Eschede.	Ermüdungsbruch an einem Radreifen.

13.2 Mechanismen der Entstehung eines ErmüdungsriSES

Die Entstehung eines ErmüdungsriSES kann in die Phasen der Riss-einleitung, des stabilen Risswachstums und des instabilen Rissfortschritts, der schließlich zum Restgewaltbruch führt, unterteilt werden (Bild 13.5).

Risseinleitung

Überschreiten die mechanischen Spannungen im Innern eines Bauteils die Proportionalitätsgrenze, dann treten im Werkstoff plastische Verformungen auf (Kapitel 2.1.2.3). Auch relativ niedrige Beanspruchungen, die makroskopisch lediglich eine elastische Verformung des Bauteils hervorrufen würden, können im Mikrobereich irreversible Abgleitungen durch Versetzungsbewegungen auslösen und dabei zu plastischen Verformungen führen.

**Bild 13.5** Phasen der Entstehung eines ErmüdungsriSES

Versetzungen können an der Bauteiloberfläche austreten und dort z. B. während der ersten Zugphase eine Gleitstufe erzeugen. Bei der Umkehrung der Belastungsrichtung werden in diesem Bereich erneut Versetzungen aktiviert, die in der Regel jedoch auf parallelen Ebenen abgleiten. Auf diese Weise bilden sich mit zunehmender Schwingspielzahl an der Proben- oder Bauteiloberfläche zunächst **Extrusionen** und **Intrusionen** (Bild 13.6).

Mit steigender Schwingspielzahl bilden sich aus diesen Extrusionen bzw. Intrusionen in Richtung der maximalen Schubspannung **Ermüdungsgleitbänder** (Bild 13.7), die nach einer ausreichend hohen Schwingspielzahl Risskeime, also Ausgangspunkte für eine Rissentstehung darstellen. Aus den Risskeimen entsteht ein wachstumsfähiger **Mikroriss (Kurzriss)**, sobald die Risslänge etwa der Korngröße entspricht (Bild 13.8). Man spricht von **physikalischer Risskeimbildung**.

Ermüdungsgleitbänder entstehen bevorzugt an Stellen örtlicher Spannungsüberhöhung wie Formkerben, Einschlüssen, Hohlräumen oder bereits vorhandenen Rissen (z. B. Aufhärtungsrisse beim Schweißen). Aus diesen Gründen gehen Ermüdungsrisse in der Regel von der Oberfläche aus. Allerdings können auch nichtmetallische Einschlüsse (z. B. Mangansulfide), Ausscheidungen oder Korngrenzen Ausgangspunkte einer Ermüdungsrißbildung darstellen. In diesem Fall können Risse auch unterhalb der Oberfläche entstehen.

Stabiles Risswachstum

Im Anschluss an die physikalische Risskeimbildung breiten sich die Ermüdungsrisse zunächst entlang der Gleitebene aus, bis sie auf ein Hindernis, in der Regel eine Korngrenze, stoßen. Dann erfolgt die Riss-

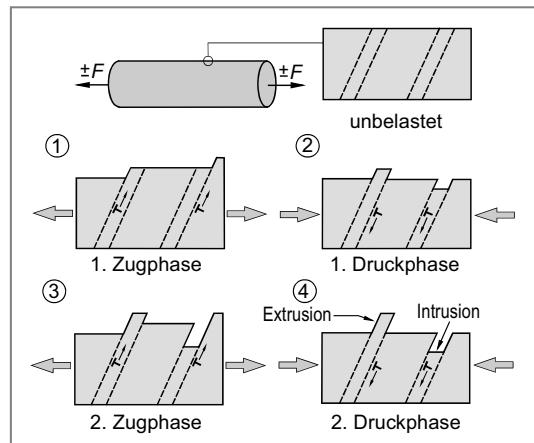


Bild 13.6 Entstehung von Extrusionen und Intrusionen bei Schwingbeanspruchung

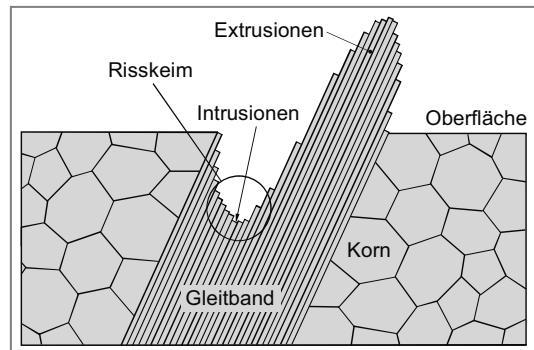


Bild 13.7 Entstehung von Ermüdungsgleitbändern und Risskeimbildung

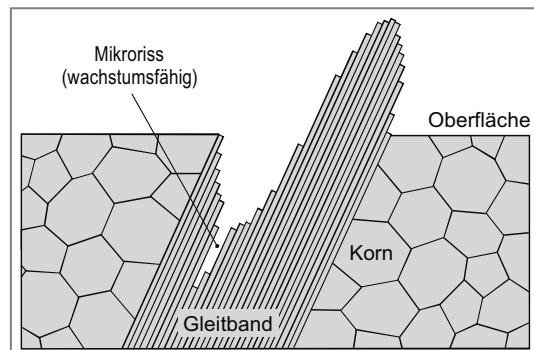


Bild 13.8 Entstehung eines wachstumsfähigen Mikrorisses (Kurzriss). Voraussetzung: Risslänge \geq Korngröße

ausbreitung senkrecht zur größten Normalspannung. In dieser Phase schreitet der Riß bei jedem Lastwechsel um einen bestimmten Betrag voran (stabiles Risswachstum), Bild 13.9.

Von **technischer Risskeimbildung** spricht man, sobald die Risslänge eine Größe von etwa 1 mm erreicht hat (**Makroriß**). Ein Riß dieser Größenordnung kann in der Regel mit Hilfe betrieblich anwendbarer Inspektionsverfahren wie z. B. Eindringprüfung oder Ultraschallprüfung vor Ort nachgewiesen werden.

Der Makroriß breite sich aus, bis die verbleibende Querschnittsfläche die Beanspruchung nicht mehr aufnehmen kann und schließlich ein Restgewaltbruch eintritt.

Mit Hilfe experimenteller Untersuchungen an ungekerbten Proben konnte nachgewiesen werden, dass etwa 10% der Zeitdauer bis zum Erreichen eines technischen Anrisses von 1 mm Tiefe, der Entstehung eines Mikrorisses (physikalische Risskeimbildung) und etwa 90% dem Wachstum des Mikrorisses zugeordnet werden können (Bild 13.5).

Betrachtet man die Zeitspannen bis zum Ermüdungsbruch, dann entfallen etwa 60% bis 90% der Lebensdauer auf das Wachstum des Mikrorisses, während die Zeitdauer für das Wachstum des Makrorisses (Risslänge > 1 mm) nur noch einen relativ geringen Anteil an der gesamten Lebensdauer einnimmt (Bild 13.10). Diese Beobachtung ist insofern von Bedeutung, als ein bereits vorhandener Riß, wie er zum Beispiel beim Schweißen entstehen kann (z. B. Aufhärtungsriß), die Lebensdauer eines Bauteils erheblich reduziert.

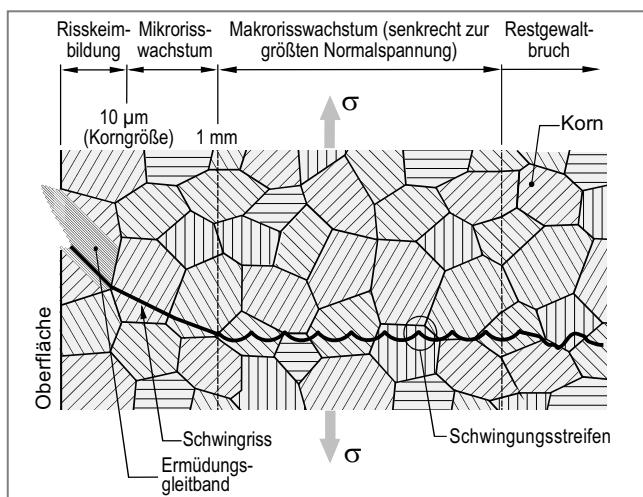


Bild 13.9 Stabiles Risswachstum und Restgewaltbruch

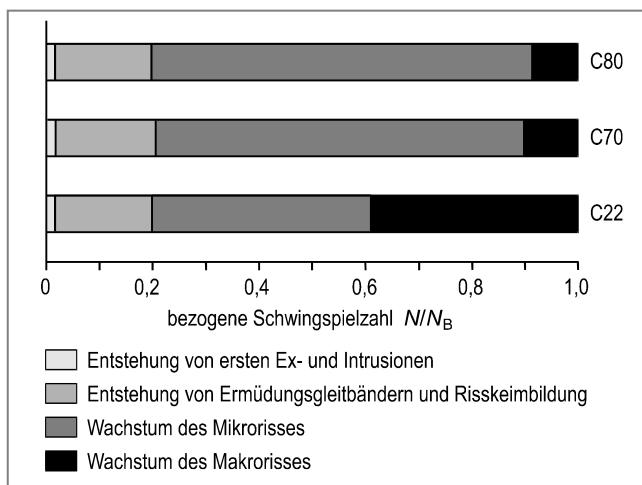


Bild 13.10 Zeitliche Anteile der einzelnen Phasen der Werkstoffermüdung bis zum Ermüdungsbruch (N_B = Anzahl der Lastwechsel bis zum Bruch)

13.3 Ermüdungsbruchflächen

Ein Ermüdungsriss breite sich in der Regel transkristallin (also durch das Korn hindurch) aus. Der Rissfortschritt erfolgt allerdings nicht in einer Ebene, sondern aufgrund des vielkristallinen Gefüges entlang von parallel verlaufenden **Bruchbahnen**. Bei mikroskopischer Betrachtung erkennt man auf der Ermüdungsbruchfläche feine, parallel zueinander verlaufende **Schwingungsstreifen** (Bild 13.11).

Anhand dieser typischen Strukturmerkmale können Ermüdungsbrüche in der Regel eindeutig identifiziert werden.

Bild 13.12 zeigt den Entstehungsmechanismus von Schwingungsstreifen. Während der Belastungsphase tritt eine Plastifizierung des Riss spitzenbereiches und damit eine Abstumpfung

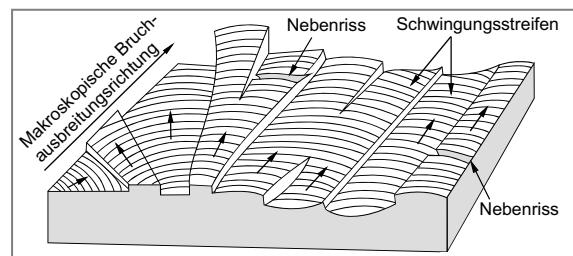


Bild 13.11 Ermüdungsbruchfläche

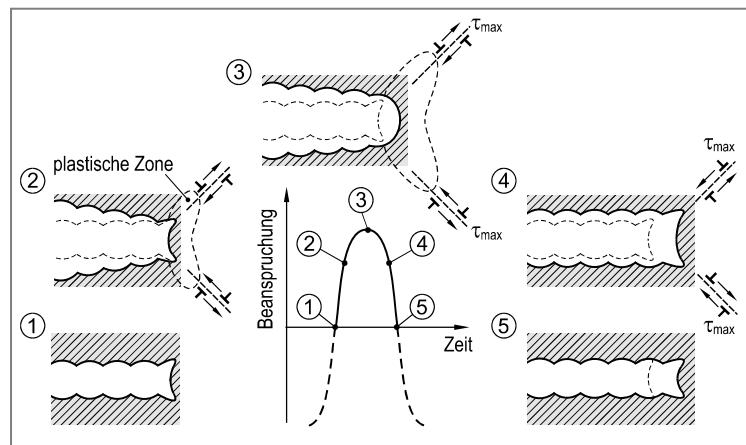


Bild 13.12 Entstehungsmechanismus für Schwingungsstreifen

der Riss spitze ein (Teilbild 3 in Bild 13.12). Der Riss erweitert sich in Richtung der maximalen Schubspannungen (τ_{\max}), sodass sich beidseitig zwei Riss spitzen ausbilden (Teilbild 4 in Bild 13.12). Bei der anschließenden Entlastung werden die beiden Riss spitzen zusammengefaltet, sodass sich die typische wellenartige Bruchfläche (Bild 13.11) ausbildet.

13.4 Begriffsdefinitionen

Für die nachfolgenden Ausführungen ist es sinnvoll, zwischen den Begriffen Ermüdungs-, Schwing- und Betriebsfestigkeit zu unterscheiden. Von **Schwingfestigkeit** soll gesprochen werden, falls es sich um einen periodisch veränderlichen Beanspruchungs-Zeit-Verlauf handelt (z. B. eine sinusförmige Funktion). Der Begriff **Betriebsfestigkeit** soll hingegen verwendet werden, falls eine zeitlich veränderliche Beanspruchung zugrunde liegt. **Ermüdungsfestigkeit** findet als Überbegriff Anwendung (Bild 13.13).

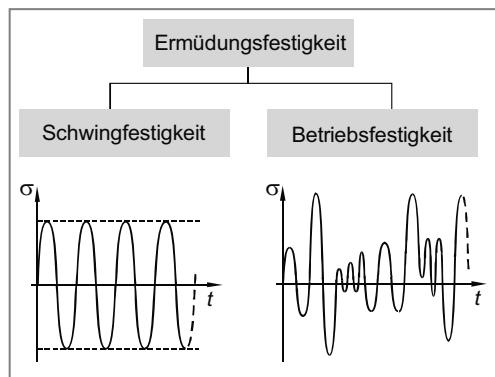


Bild 13.13 Ermüdungs-, Schwing- und Betriebsfestigkeit

Der zeitliche Verlauf einer sinusförmigen Schwingbeanspruchung wird üblicherweise festgelegt durch die **Mittelspannung** σ_m und die **Spannungsamplitude** σ_a . Die höchste Spannung wird als **Oberspannung** σ_o , die niedrigste Spannung als **Unterspannung** σ_u bezeichnet. Alternativ können auch die mittlere Dehnung ε_m und die Dehnungsamplitude ε_a zur Begriffsbestimmung herangezogen werden.

Es gelten die Beziehungen (Bild 13.14):

$$\sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2} \quad \text{Mittelspannung (13.1)}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2} \quad \text{Spannungs- amplitude (13.2)}$$

Anstelle der Spannungsamplitude σ_a wird alternativ auch die **Schwingbreite** $\Delta\sigma$ verwendet, wobei gilt:

$$\Delta\sigma = \sigma_o - \sigma_u = 2 \cdot \sigma_a \quad (13.3)$$

Den Quotienten aus Unter- und Oberspannung nennt man **Spannungsverhältnis** R :

$$R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}$$

Definition des Spannungsverhältnisses (13.4)

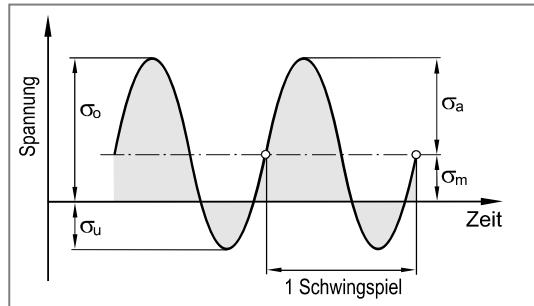


Bild 13.14 Begriffsfestlegungen nach DIN 50 100

Zwischen dem Spannungsverhältnis R , der Spannungsamplitude σ_a und der Mittelspannung σ_m besteht der Zusammenhang:

$$\sigma_a = \frac{1-R}{1+R} \cdot \sigma_m \quad \text{Zusammenhang zwischen Spannungsamplitude, Mittelspannung und Spannungsverhältnis (13.5)}$$

Ein vollständiger Zyklus wird als **Schwingspiel** oder **Lastspiel** bezeichnet. Die Anzahl der Schwingungen in einem vorgegebenen Zeitintervall Δt nennt man **Schwingspielzahl** N (oder **Lastspielzahl**). Bei bekannter **Schwingungs-** oder **Schwingspielfrequenz** f (Bild 13.14) ergibt sich zwischen der Zeitspanne der Schwingbeanspruchung (Δt) und der Schwingspielzahl (N) der Zusammenhang:

$$N = f \cdot \Delta t \quad \text{Schwingspielzahl (13.6)}$$

Entsprechend der Lage der Mittelspannung sowie der Höhe der Spannungsamplitude bzw. dem Vorzeichen von Ober- und Unterspannung unterscheidet man die in Bild 13.15 dargestellten Beanspruchungsbereiche.

- Zug-Schwellbereich: $\sigma_o > 0$ und $\sigma_u > 0$ bzw. $0 \leq R < 1$
- Wechselbereich: $\sigma_o > 0$ und $\sigma_u < 0$ bzw. $-\infty < R < 0$
- Druck-Schwellbereich: $\sigma_o < 0$ und $\sigma_u < 0$ bzw. $1 < R \leq \infty$

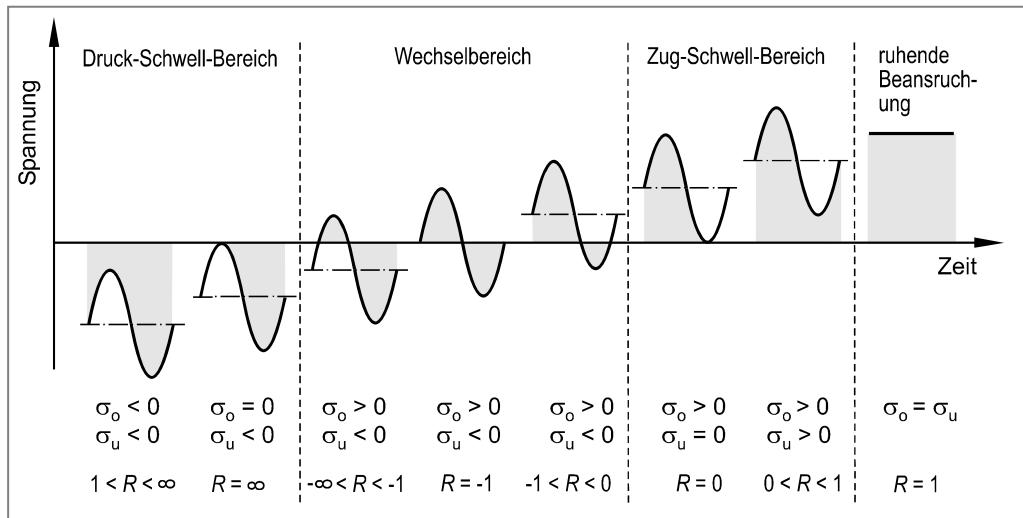


Bild 13.15 Begriffsfestlegungen nach DIN 50 100

13.5 Werkstoffverhalten und Kennwerte

Zur Beurteilung des Werkstoffverhaltens unter einstufiger Schwingbeanspruchung hat die nach **August Wöhler** (1819 ... 1914) benannte Wöhlerkurve (oder Wöhlerlinie) eine zentrale Bedeutung.

13.5.1 Wöhlersversuch und Wöhlerkurve

Beim **Wöhlersversuch** werden hinsichtlich Werkstoff, Geometrie und Bearbeitung gleichwertige, ungekerbte oder gekerbte Proben oder Bauteile nacheinander mit (für alle Proben) gleicher Mittelspannung σ_m und jeweils gestaffelter Spannungsamplitude σ_a solange einer meist sinusförmigen Schwingbeanspruchung unterworfen, bis ein Ermüdungsbruch eintritt. Mitunter werden Wöhlersversuche auch mit konstantem Spannungsverhältnis R und gestufter Schwingbreite $\Delta\sigma = 2 \cdot \sigma_a$ durchgeführt. Üblicherweise wird eine sinusförmige Schwingbeanspruchung gewählt, jedoch werden bisweilen auch Versuche mit dreieckigem oder trapezförmigem Belastungsverlauf realisiert.

Werden die jeweiligen Spannungsamplituden σ_a bzw. die Schwingbreiten $\Delta\sigma = 2 \cdot \sigma_a$ über der bis zum Bruch ertragbaren Schwingspielzahl N_B in einem Diagramm aufgetragen und eine ausreichende Anzahl von Messpunkten miteinander verbunden, dann erhält man eine Kurve, die als **Wöhlerkurve** (oder **Wöhlerlinie** bzw. **Wöhlerdiagramm**) bezeichnet wird (Bild 13.16). Bei Verwendung von bauteilähnlichen Proben oder gar von Bauteilen spricht man auch von der **Bauteil-Wöhlerkurve**. August Wöhler erklärte erstmals diese Zusammenhänge, nachdem sich in zunehmendem Maße Eisenbahnunglücke durch Materialfehler an Schienen, Achsen und Radreifen ereignet hatten.

Es soll an dieser Stelle vereinbart werden, dass *Beanspruchungswerte* Kleinbuchstaben als Index (z. B. σ_a , σ_o oder σ_u), *Festigkeitskennwerte* hingegen Großbuchstaben (z. B. σ_A , σ_W , σ_0 oder σ_U) erhalten sollen.

Üblicherweise trägt man in der Wöhlerkurve sowohl die Schwingspielzahl als auch die Spannungsamplitude bzw. die Schwingbreite logarithmisch auf, da bei linearer Aufteilung keine sinnvolle Auflösung der Versuchsergebnisse möglich ist. Eine einfach logarithmische Auftragung (Schwingspielzahl logarithmisch, Spannungsamplitude linear) ist jedoch auch möglich.

Die Ordinatenbezeichnung der Wöhlerkurve muss näher erläutert werden. Aus Sicht der Versuchsauswertung handelt es sich bei der Wöhlerkurve um eine Grenzlinie der Bruchschwingspielzahl N_B in Abhängigkeit der Spannungsamplitude σ_a , allerdings in horizontaler Auftragung, also um ein σ_a - N_B -Diagramm. Im Hinblick auf die Anwendung (z. B für Festigkeitsnachweise) ist die Wöhlerkurve eine Grenzlinie der ertragbaren Spannungsamplitude σ_A (zyklische Festigkeit des Werkstoffs) in Abhängigkeit der Schwingpielzahl N , also ein σ_A - N -Diagramm. Je nachdem, ob die Versuchsauswertung oder die Anwendung im Vordergrund steht, wird bei den nachfolgend dargestellten Wöhlerkurven als Ordinatenbezeichnung entweder σ_a (z. B. Bild 13.16 und Bild 13.17) oder σ_A (z. B. Bild 13.18) gewählt.

Für eine statistisch ausreichend abgesicherte Wöhlerkurve sollten zweckmäßigerweise etwa vier Lastniveaus mit mindestens jeweils fünf Prüflingen geprüft werden. Sofern große Streuungen zu erwarten sind, werden in der Praxis im Hinblick auf eine statistische Auswertung der Ergebnisse mitunter auch deutlich mehr Proben geprüft (siehe auch Kapitel 13.5.5)

Die Belastungsart (Zug, Druck, Biegung, Torsion, Innendruck) und die Art und Höhe der Beanspruchung (wie z. B. konstante Mittelspannung, konstante Unterspannung, konstantes Spannungsverhältnis) müssen entsprechend den Betriebsbedingungen gewählt werden. Mitunter ist es erforderlich, die Umgebungsbedingungen des Bauteils (z. B. Temperatur oder korrosive Medien) bei der Durchführung des Wöhlerversuchs zu berücksichtigen.

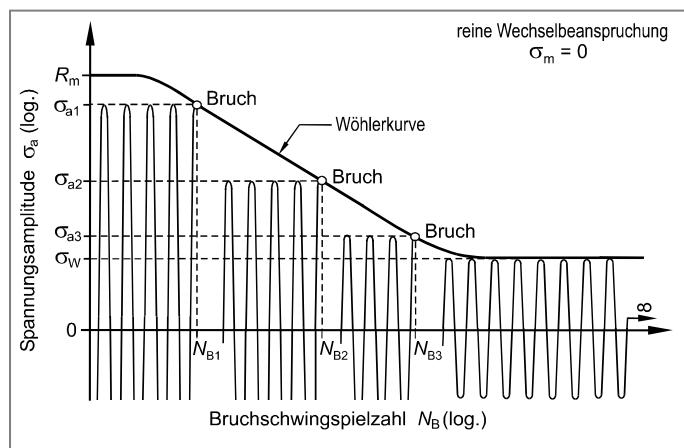


Bild 13.16 Wöhlerkurve für den Fall einer Schwingbeanspruchung ohne Mittelspannung ($\sigma_m = 0$)

Es ist zu beachten, dass Wöhlerkurven nur für die Bedingungen gelten, unter denen sie aufgestellt wurden, also beispielsweise konstante Mittelspannung oder konstantes Spannungsverhältnis. Diese wichtigen Parameter müssen bei der Darstellung einer Wöhlerkurve bzw. mit den Ergebnissen des Wöhlerversuchs angegeben werden. Bild 13.17 zeigt beispielhaft die Erstellung einer Wöhlerkurve bei konstanter Mittelspannung ($\sigma_m \neq 0$).

Das Ende des Wöhlerversuches ist erreicht, sobald erste Anrisse zu beobachten sind, oder der Bruch eintritt. Im Hinblick auf eine sichere Auslegung wäre eigentlich das Auftreten erster Anrisse als Versagenskriterium zu definieren. Bei der praktischen Durchführung lastkontrollierter Wöhlerversuche dient jedoch aus Gründen einer einfacheren Versuchsdurchführung der Bruch als Versagenskriterium.

Mit der entsprechenden Messtechnik ist jedoch auch eine Anrisserkennung möglich (z. B. Potentialsondenmesstechnik, Beobachtung der Veränderung der Probensteifigkeit während des Versuches, Frequenzabfall bei Resonanzprüfmaschinen).

Anstelle einer last- bzw. spannungsgeregelten Versuchsdurchführung können Wöhlerkurven auch mit geregelter Verformung bzw. Dehnung durchgeführt werden. Man spricht dann von **Dehnungs-Wöhlerkurven**.

Wird nicht der Bruch sondern der Anriß der Probe oder des Bauteils als Versagenskriterium gewählt, dann spricht man von einer **Anriß-Wöhlerkurve** (im Unterschied zur **Bruch-Wöhlerkurve**). Bei einer Anriß-Wöhlerkurve ist jedoch zu beachten, dass die Lage der Kurve von der ausgewerteten Anrißgröße abhängt.

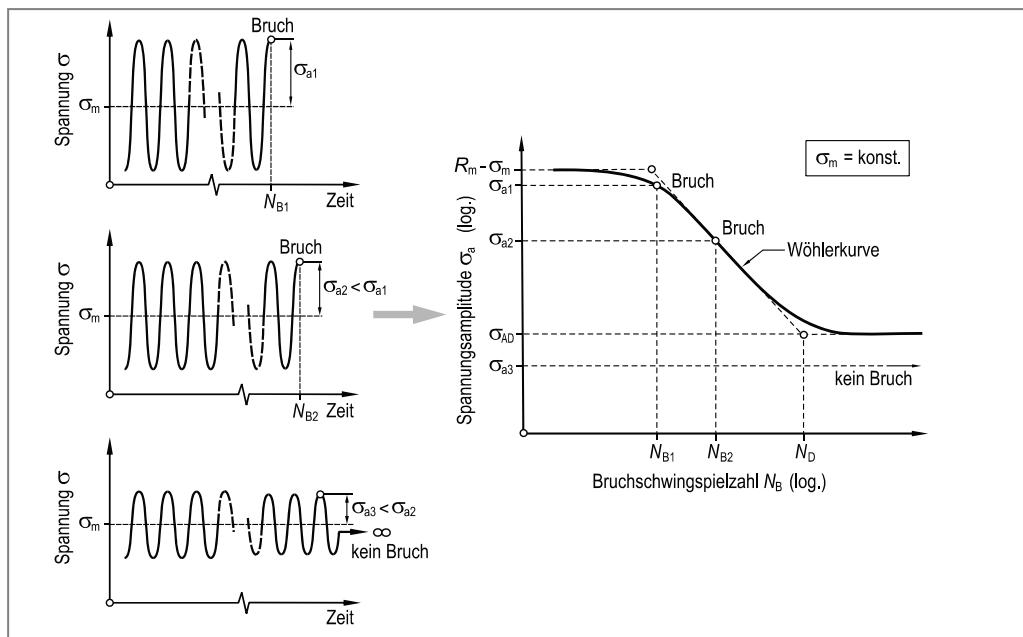


Bild 13.17 Prinzip der Erstellung einer Wöhlerkurve bei konstanter Mittelspannung σ_m

13.5.2 Einteilung der Wöhlerkurve

Mit Hilfe der Wöhlerkurve können verschiedene Gebiete voneinander abgegrenzt werden. Üblicherweise unterscheidet man (Bild 13.18):

- Kurzzeitfestigkeit (quasi-statische Festigkeit)
- Zeitfestigkeit
- Dauerfestigkeit
- Betriebsfestigkeit

Kurzzeitfestigkeit

Bei einer einstufigen Schwingbeanspruchung mit Oberspannungen im Bereich zwischen der Dehngrenze und der Zugfestigkeit können nur etwa 100 ... 10000 Schwingspiele bis zum Bruch ertragen werden. Dieser nach oben durch die Zugfestigkeit (R_m) begrenzte Bereich bezeichnet man als das Gebiet der **Kurzzeitfestigkeit** oder der **quasi-statischen Festigkeit**.

Zeitfestigkeit

Der Bereich unterhalb der Kurzzeitfestigkeit wird als das Gebiet der **Zeitfestigkeit** bezeichnet. Mit sinkender Beanspruchung nimmt dort die ertragbare Schwingsspielzahl stetig zu. Die Anzahl der ertragbaren Schwingungen hängt in hohem Maße von der Beanspruchungshöhe ab.

Dauerfestigkeit

Mit weiter abnehmender Belastung wird in Abhängigkeit des Werkstoffes bzw. des Werkstoffzustandes zwischen zwei Kurvenverläufen unterschieden:

- Bei ferritisch-perlitischen Stählen und Titanlegierungen geht die Wöhlerkurve bei etwa $2 \cdot 10^6$ bis 10^7 Schwingspielen in eine Parallele zur Abszisse über. Spannungsamplituden kleiner als σ_{AD} können demnach beliebig oft ertragen werden, ohne dass ein Bruch eintritt. Die Wöhlerkurve hat das Gebiet der **Dauerfestigkeit** erreicht. Dieser Kurvenverlauf wird auch als **Wöhler-Kurventyp I** bezeichnet (Bild 13.19a).
- Kubisch-flächenzentrierte Metalle wie Aluminium oder Kupfer sowie die meisten ihrer Legierungen, austenitische Stähle aber auch gehärtete Stähle sowie Werkstoffe in korrosiver Umgebung oder bei erhöhten Temperaturen, weisen keine ausgeprägte („echte“) Dauerschwingfestigkeit auf. Die Wöhlerkurve geht auch bei sehr niedrigen Spannungsamplituden nicht mehr in eine horizontale Linie über, sondern fällt stetig ab. Die ertragbare Schwingsspielzahl bleibt von der Spannungsamplitude abhängig. Man spricht auch vom **Wöhler-Kurventyp II** (Bild 13.19b).

Betriebsfestigkeit

Der Wöhlersversuch besteht aus einer Folge von Einstufenversuchen. Jeder dieser Einstufenversuche wird mit über die gesamte Versuchsdauer konstanter Spannungsamplitude durchgeführt. Die tatsächliche Betriebsbelastung ist demgegenüber jedoch eine zufallsartige Folge unterschiedlicher Spannungsamplituden mit zudem veränderlicher Mittelspannung. Die unter diesen Bedingungen bis zum Bruch ertragbare Schwingsspielzahl, die Betriebslebensdauer,

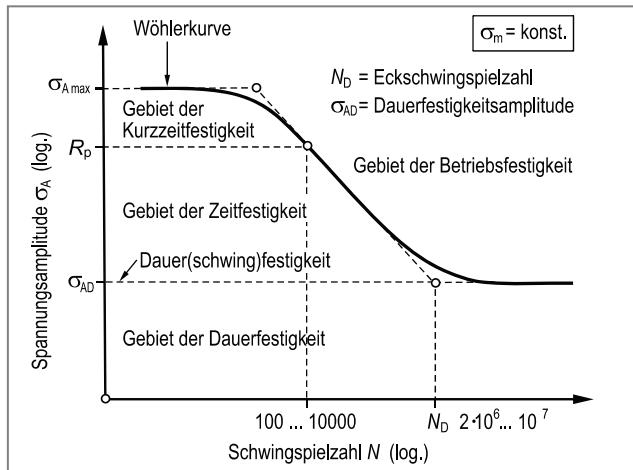


Bild 13.18 Einteilung der Wöhlerkurve

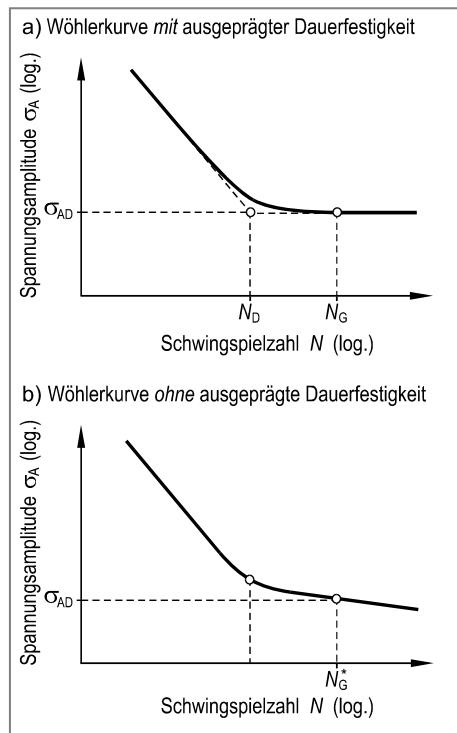


Bild 13.19 Wöhlerkurven mit und ohne Dauerfestigkeit

kann die Bruchschwingspielzahl des Wöhlerversuchs um mehrere Größenordnungen überschreiten und liegt damit deutlich rechts der Wöhlerkurve (Bild 13.18). Der Bereich rechts der Wöhlerkurve wird daher auch als das Gebiet der Betriebsfestigkeit bezeichnet.

Versuche, bei denen die Höhe der Beanspruchung nach einem bestimmten Programm oder zufallsartig verändert wird, bezeichnet man als **Betriebsfestigkeitsversuche**. Sie erlauben eine wirklichkeitsgetreue Prüfung schwingend beanspruchter Bauteile. Ausführliche Abhandlungen zur Betriebsfestigkeit und Werkstoffermüdung finden sich beispielsweise in [11-19].

13.5.3 Grenzschwingspielzahl

Mit abnehmender Spannungsamplitude steigt die bis zum Bruch ertragbare Schwingspielzahl bzw. es tritt beim Wöhler-Kurventyp I letztlich überhaupt kein Bruch mehr ein (Dauerfestigkeit). Bei sehr niedriger Beanspruchung sind dementsprechend sehr hohe Schwingspielzahlen d. h. sehr lange bzw. unendlich lange Versuchzeiten erforderlich. Da die zu prüfenden Proben oder Bauteile aus Zeit- und Kostengründen jedoch nicht unendlich lange einer schwingenden Beanspruchung ausgesetzt werden können, führt man Wöhlerversuche in der Regel bis zu einer bestimmten **Grenzschwingspielzahl** N_G durch.

Wöhlerkurven vom Typ I zeigen bei hohen Schwingspielzahlen ($N_D = 2 \cdot 10^6 \dots 10^7$) einen horizontalen Verlauf (Bild 13.19a), daher genügt es bei diesen Werkstoffen bis maximal $N_G = 10^7$ Schwingspiele zu prüfen.

Wöhlerkurven vom Typ II (Bild 13.19b) zeigen auch bei sehr hohen Schwingspielzahlen keinen horizontalen Verlauf, sondern einen weiteren, stetigen Festigkeitsabfall. In diesem Fall wird ersatzweise bis zu einer Schwingspielzahl von $N_G^* = 10^7$ bis maximal $N_G^* = 10^8$ geprüft.

Tritt mit Erreichen der Grenzschwingspielzahl N_G bzw. N_G^* noch kein Bruch ein, dann bezeichnet man die zugehörige Spannungsamplitude σ_{AD} (bei vorgegebener Mittelspannung) als **(technische) Dauerschwingfestigkeit** (kurz: **Dauerfestigkeit**).

Nach DIN 50 100 wird, insbesondere im Hinblick auf Wöhlerkurven von Typ II empfohlen, die Grenzschwingspielzahl N_G bzw. N_G^* bei der Angabe des (technischen) Dauerfestigkeitswertes mit zu vermerken, also z. B. $\sigma_{AD(10^7)}$. Proben, die die Grenzschwingspielzahl N_G ohne Bruch erreicht haben, bezeichnet man üblicherweise als „**Dauerläufer**“ oder „**Durchläufer**“.

13.5.4 Analytische Beschreibung der Wöhlerkurve

Bei doppeltlogarithmischer Auftragung der Ergebnisse des Wöhlerversuchs kann die Wöhlerkurve durch Geradenabschnitte angenähert und analytisch beschrieben werden (Bild 13.20).

- **Quasi-statische Festigkeit:**

Erreicht die Oberspannung σ_o die Zugfestigkeit R_m , dann muss mit einem Bruch gerechnet werden. Mit $\sigma_o = R_m$ und $R = \sigma_u / \sigma_o$ d. h. $\sigma_u = R \cdot R_m$ folgt aus Gleichung 13.2 für die zum Bruch führende Amplitude $\sigma_{A\max}$:

$$\sigma_{A\max} = R_m \cdot \frac{1-R}{2} \quad \text{Zum Bruch führende Spannungsamplitude} \quad (13.7)$$

• Zeitfestigkeit

Wöhlerversuche mit unterschiedlichen Werkstoffen, Probenformen bzw. Bauteilgeometrien und Belastungsarten haben gezeigt, dass sich die Bruchschwingpielzahlen im Gebiet der Zeitfestigkeit bei doppeltlogarithmischer Auftragung durch eine Gerade annähern lassen. Man erhält für die Geradengleichung der Wöhlerkurve für den Bereich der Zeitfestigkeit:

$$\lg \sigma_A = -m \cdot \lg N + \lg C \quad (13.8)$$

Unter Verwendung des **Neigungsexponenten** $k = 1/m$ (auch als **k-Faktor** bezeichnet) folgt:

$$\lg \sigma_A = -\frac{1}{k} \cdot \lg N + \lg C \quad (13.9)$$

Einsetzen der Koordinaten des Stützpunktes $P_1(N_1, \sigma_{A1})$ in Gleichung 13.9 liefert:

$$\begin{aligned} \lg \sigma_{A1} - \lg(N_1^{-\frac{1}{k}}) &= \lg C \\ \lg \left(\frac{\sigma_{A1}}{N_1^{-\frac{1}{k}}} \right) &= \lg C \end{aligned} \quad (13.10)$$

Gleichung 13.10 in Gleichung 13.9 eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned} \lg \sigma_A &= \lg N^{-\frac{1}{k}} + \lg \left(\frac{\sigma_{A1}}{N_1^{-\frac{1}{k}}} \right) \\ \lg \sigma_A - \lg \sigma_{A1} &= \lg N^{-\frac{1}{k}} - \lg N_1^{-\frac{1}{k}} \\ \lg \left(\frac{\sigma_A}{\sigma_{A1}} \right) &= \lg \left(\frac{N^{-\frac{1}{k}}}{N_1^{-\frac{1}{k}}} \right) \\ \sigma_A &= \sigma_{A1} \cdot \left(\frac{N}{N_1} \right)^{-\frac{1}{k}} \end{aligned} \quad \text{Gleichung der Wöhlerkurve im Zeitfestigkeitsbereich} \quad (13.11)$$

bzw. nach der Schwingpielzahl N aufgelöst:

$$\left(\frac{\sigma_A}{\sigma_{A1}} \right)^{-k} = \frac{N}{N_1} \quad (13.12)$$

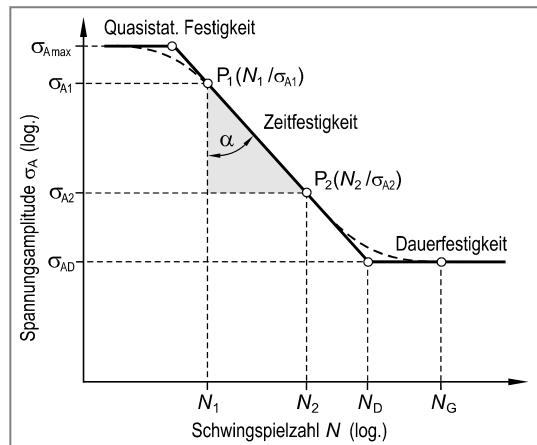


Bild 13.20 Idealisierte Wöhlerkurve in doppelt-logarithmischer Auftragung

$$N = N_1 \cdot \left(\frac{\sigma_A}{\sigma_{A1}} \right)^{-k}$$

Gleichung der Wöhlerkurve im Zeitfestigkeitsbereich

(13.13)

Den Neigungsexponenten k der Wöhlerkurve erhält man, sofern zwei Stützpunkte $P_1 (N_1, \sigma_{A1})$ und $P_2 (N_2, \sigma_{A2})$ im Bereich der Zeitfestigkeit bekannt sind. Aus Gleichung 13.13 folgt dann:

$$k = - \frac{\lg \left(\frac{N_1}{N_2} \right)}{\lg \left(\frac{\sigma_{A1}}{\sigma_{A2}} \right)}$$

Ermittlung des Neigungsexponenten der Wöhlerkurve

(13.14)

Aus Gleichung 3.14 folgt weiterhin:

$$k = - \frac{\lg N_1 - \lg N_2}{\lg \sigma_{A1} - \lg \sigma_{A2}} = \frac{\lg N_2 - \lg N_1}{\lg \sigma_{A1} - \lg \sigma_{A2}} = \tan \alpha \quad (13.15)$$

Bei gleicher Teilung des Abszissen- und Ordinatenmaßstabes kann der Neigungsexponent k aus dem Steigungswinkel α ermittelt werden (Bild 13.20):

$$k = \tan \alpha \quad \text{Berechnung des Neigungsexponenten aus dem Steigungswinkel} \quad (13.16)$$

Je größer der Betrag des Neigungsexponenten k ist, desto flacher verläuft die Wöhlerkurve.

• Dauerfestigkeit

Ein horizontaler Verlauf des Dauerfestigkeitsastes der Wöhlerkurve ergibt sich nur bei Vorliegen einer „echten“ Dauerfestigkeit (Bild 13.19a). In diesem Fall kann die horizontale Linie in Höhe der dauernd ertragbaren Amplitude σ_{AD} wie folgt beschrieben werden:

$$\sigma_{AD} = \text{konstant} \quad (13.17)$$

13.5.5 Statistische Auswertung von Wöhlerversuchen

Die praktische Durchführung von Wöhlerversuchen zeigt, dass die Schwingspielzahlen im Zeitfestigkeitsgebiet, auch unter genau definierten Prüfbedingungen, erheblichen Streuungen unterliegen.

Auch am Übergang zur Dauerfestigkeit beobachtet man mit sinkender Spannungsamplitude keinen abrupten

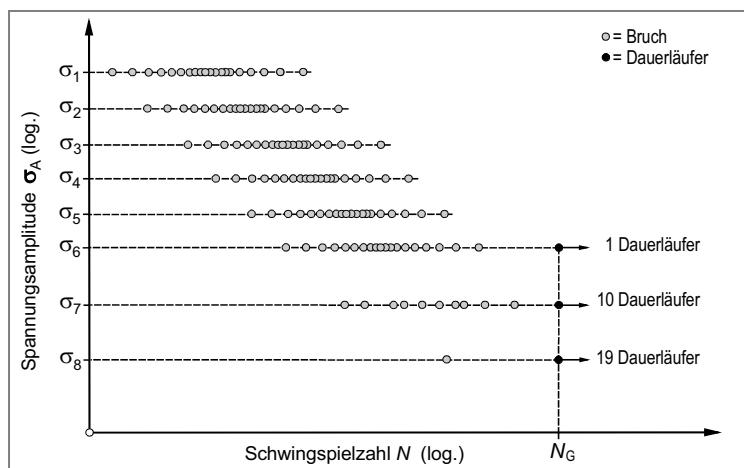


Bild 13.21 Streuung der Ergebnisse eines Wöhlerversuchs (Beispiel)

Wechsel von 100% Brüchen zu 100% Dauerläufern. Vielmehr nimmt die Anzahl der Dauerläufer stetig zu, bis schließlich alle geprüften Proben oder Bauteile die Grenzschwingspielzahl N_G bzw. N_G^* ohne Bruch erreichen (Bild 13.21).

Die Ursachen der genannten Streuungen liegen einerseits in einer unvermeidlichen, zufälligen Abweichung der Prüfstücke zueinander (z. B. unterschiedliche Oberflächenrauigkeiten, Werkstoffinhomogenitäten) und andererseits in gewissen Ungenauigkeiten bei der Lastaufbringung (z. B. Einspannung und Lastregelung). Dies bedeutet, dass die Schwankungen der Versuchsergebnisse nicht das Resultat einer einzigen Veränderlichen sondern vielmehr das Produkt einer Vielzahl von Zufallsvariablen ist, deren Beitrag zur resultierenden Streuung von Fall zu Fall unterschiedlich sein kann.

Früher entsprach es dem Stand der Technik, die Versuchsergebnisse durch eine mittelnde Kurve anzugeben und versuchte die Unsicherheiten durch Sicherheitsfaktoren abzudecken. Je nach Auswertungsmethodik kann es dabei zu sehr unterschiedlichen Einschätzungen des Kurvenverlaufs und damit letztlich auch zu verschiedenen Versuchsergebnissen kommen. Um der wachsenden Forderung nach zuverlässigen Unterlagen für die sichere Bemessung tragender Bauteile gerecht zu werden, wurden von einer Reihe von Forschern wie z. B. **W. Weibull** etwa ab 1950 statistische Verfahren für die Auswertung der Versuchsergebnisse eingeführt.

Um die Ergebnisse einer statistischen Auswertung nach Mittelwert und Streubreite unterziehen zu können, ist man zunächst gezwungen, eine Mindestanzahl gleicher Proben unter gleichen Bedingungen (z. B. gleicher Belastungshorizont) zu prüfen. Heute prüft man je Spannungshorizont etwa 10 bis 20 Proben d. h. 100 bis 200 Proben für den gesamten Wöhlerversuch (DIN 50 100 fordert hingegen nur 6 bis 10 Proben für den gesamten Wöhlerversuch).

Führt man mit den experimentellen Ergebnissen des Wöhlerversuches eine statistische Auswertung durch, dann gewinnt man Ergebnisse über den prozentualen Anteil der Proben, die bei konstanten Bedingungen eine bestimmte Schwingspielzahl mindestens ertragen, man nennt sie die **Überlebenswahrscheinlichkeit P_U** der geprüften Probe bzw. des Werkstücks, den dazu komplementären Prozentsatz bezeichnet man als **Bruch- oder Ausfallwahrscheinlichkeit P_A** .

Es ist heute Stand der Technik, Wöhlerversuche statistisch auszuwerten und den Ergebnissen durch Angabe der Überlebenswahrscheinlichkeit P_U (oder der Ausfallwahrscheinlichkeit $P_A = 100\% - P_U$) eine größere Aussagefähigkeit zu verleihen. Es hat sich dabei eingebürgert, eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 10% als untere Streugrenze und eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 90% als obere Streugrenze anzugeben.

Die Streugrenzen können nur durch eine statistische Auswertung der experimentellen Ergebnisse ermittelt werden. Hierzu sucht man im Zeitfestigkeitsgebiet nach einem geeigneten Verteilungsgesetz für die Streuung der Bruchschwingspielzahlen, am Übergang zur Dauerfestigkeit dagegen nach einem entsprechenden Verteilungsgesetz für das Verhältnis der Anzahl der Brüche je Lasthorizont zur Gesamtzahl der Prüfkörper (auf diesem Lasthorizont). Häufig findet man als Verteilungsgesetz eine logarithmische Normalverteilung.

Die Angabe einer Wahrscheinlichkeit hat im Gebiet der Zeitfestigkeit eine völlig andere Bedeutung als am Übergang zur Dauerfestigkeit. Während die prozentuale Angabe im Bereich der Zeitfestigkeit die Ausfallwahrscheinlichkeit bei einer bestimmten Schwingspielzahl kennzeichnet (das statistische Merkmal ist dort also die Bruchschwingspielzahl), gibt die Prozentzahl im Übergangsgebiet die Häufigkeit des Auftretens von Brüchen bei einem bestimmten

Belastungsniveau an (als statistisches Merkmal dient hier also das Verhältnis der Anzahl der Brüche je Lastebene zur Gesamtzahl der Prüfkörper auf dieser Lastebene).

Eine Wöhlerkurve, die durch Angabe der Ausfallwahrscheinlichkeiten (z. B. 10%, 50% und 90%) ergänzt ist, zeigt Bild 13.22. Demzufolge erreichen beispielsweise bei der Spannungsamplitude σ_{A1} 90% aller Prüflinge N_1 Schwingspiele. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% können bei dieser Beanspruchung N_2 Schwingspiele ertragen werden. N_3 Lastwechsel werden bei dieser Belastungsspannung nur noch von 10% aller Prüflinge überschritten, d. h. bereits 90% der Proben sind bis dahin gebrochen.

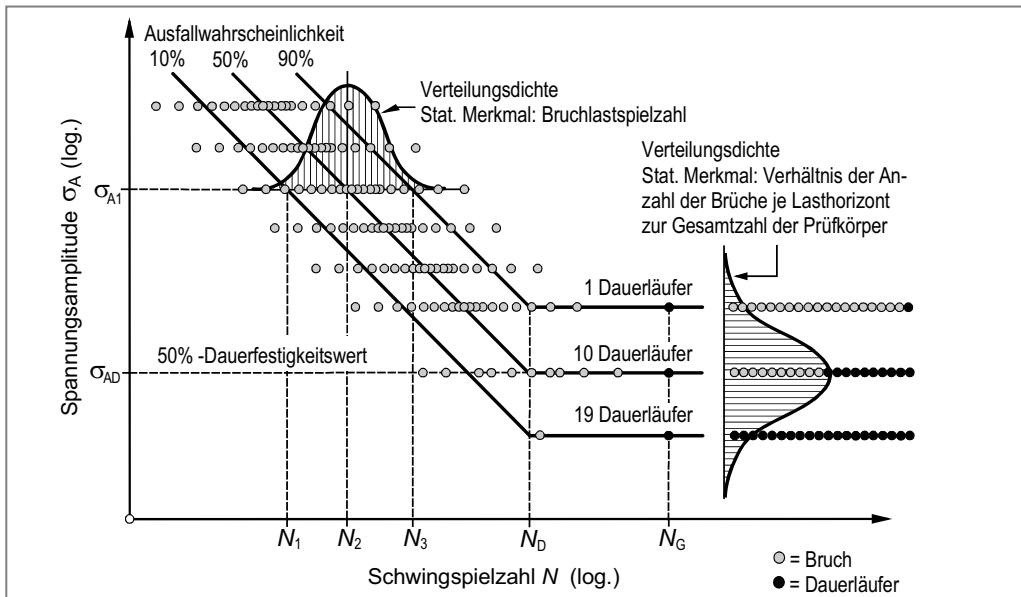


Bild 13.22 Statistisch ausgewertete Wöhlerkurve (Beispiel)

Fehlt die Angabe der Ausfall- oder Überlebenswahrscheinlichkeit einer Wöhlerkurve (z. B. in älteren Veröffentlichungen), dann kann günstigstenfalls mit einer Überlebenswahrscheinlichkeit von 50% gerechnet werden.

Auf die Verfahren der statistischen Auswertung von Wöhlerversuchen kann im Rahmen dieses einführenden Lehrbuches nicht näher eingegangen werden. Statt dessen wird auf die weiterführende Literatur zur Ermüdungs- bzw. Betriebsfestigkeit verweisen [11,13,16 bis 18, 21].

13.5.6 Dauerfestigkeitskennwerte

Der wichtigste Kennwert zum Nachweis der Dauerfestigkeit eines Bauteils ist die **Wechselfestigkeit** σ_w . Die Wechselfestigkeit σ_w ist die auf Dauer ertragbare Spannungsamplitude σ_{AD} bei rein wechselnder Beanspruchung ($\sigma_m = 0$).

Zur Ermittlung der Wechselfestigkeit werden eine Reihe von Wöhlerversuchen mit unterschiedlich hoher Spannungsamplitude σ_a und Mittelspannung $\sigma_m = 0$ durchgeführt. Diejenige Spannungsamplitude die „unendlich oft“ d. h. praktisch bis zur Grenzschwingpielzahl N_G bzw. N_G^* ohne Bruch ertragen werden kann, wird als Wechselfestigkeit σ_w bezeichnet. In Bild 13.16 entspricht die Dauerfestigkeitsamplitude σ_{AD} der Wechselfestigkeit σ_w , also $\sigma_{AD} \equiv \sigma_w$ (da $\sigma_m = 0$). Zur Durchführung der Versuche verwendet man in der Regel glatte, polierte

Kleinproben. Die Wechselfestigkeit kann unter Zug-, Druck-, Biege-, Schub- oder Torsionsbeanspruchung ermittelt werden. Dementsprechend unterscheidet man die **Zug-Druck-Wechselfestigkeit** σ_{zdW} , die **Biegewechselfestigkeit** σ_{bw} , die **Schubwechselfestigkeit** τ_{sw} und die **Torsionswechselfestigkeit** τ_{tw} .

Stehen experimentell ermittelte Dauerfestigkeitskennwerte nicht zur Verfügung, dann kann auch eine Abschätzung unter Verwendung der Streck- bzw. Dehngrenze oder der Zugfestigkeit des Werkstoffs durchgeführt werden. Hierzu findet man in der Literatur verschiedene Vorschläge. In Tabelle 13.2 sind die wichtigsten Korrelationsvorschläge zusammengestellt. Hierbei handelt es sich um empirisch ermittelte Näherungswerte. Teilweise werden allerdings erhebliche Abweichungen von den angegebenen Werten festgestellt, sodass eine experimentelle Ermittlung der Wechselfestigkeit empfehlenswert ist.

Tabelle 13.2 Empirisch ermittelte Beziehungen zur Abschätzung von Dauerfestigkeitskennwerten unter rein wechselnder Beanspruchung (Anhaltswerte für ungekerbte Proben mit polierter Oberfläche)

Werkstoffsorte / Werkstoffgruppe	Dauerfestigkeitskennwert ¹⁾			
	Zug-Druck-Wechselfestigkeit σ_{zdW} ²⁾	Biege-wechselfestigkeit σ_{bw} ^{7) 8)}	Schub-wechselfestigkeit τ_{sw} ²⁾	Torsions-wechselfestigkeit τ_{tw} ^{7) 8) 9)}
Walzstahl, allgemein ^{3) 4)}	$0,45 \cdot R_m$	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{bw}$
Einsatzstahl ⁴⁾	$0,40 \cdot R_m$ ⁵⁾	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$ ⁵⁾	$0,577 \cdot \sigma_{bw}$
Nichtrostender Stahl	$0,40 \cdot R_m$ ⁶⁾	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{bw}$
Schmiedestahl ⁴⁾	$0,40 \cdot R_m$ ⁶⁾	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{bw}$
Stahlguss	$0,34 \cdot R_m$	$1,15 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.
Gusseisen mit Lamellengraphit	$0,30 \cdot R_m$	$1,50 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,850 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,8 \dots 0,9 \cdot \sigma_{zdW}$
Gusseisen mit Kugelgraphit	$0,34 \cdot R_m$	$1,30 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,650 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.
Temperguss	$0,30 \cdot R_m$	$1,40 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,750 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.
Al-Knetlegierungen	$0,30 \cdot R_m$	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.
Al-Gusslegierungen	$0,30 \cdot R_m$	k. A.	$0,750 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.

¹⁾ Werkstoffkennwerte sind in N/mm² einzusetzen.

²⁾ Werte nach [2]. Für $N = 10^6$ Schwingspiele.

³⁾ Außer Einsatzstahl, nichtrostender Stahl und Schmiedestahl.

⁴⁾ Nach DIN 743-3: $\sigma_{zdW} \approx 0,4 \cdot R_m$; $\sigma_{bw} \approx 0,5 \cdot R_m$; $\tau_{tw} \approx 0,3 \cdot R_m$ (Torsionswechselfestigkeit).

⁵⁾ Blindgehärtet. Der Einfluss einer Einsatzhärtung wird durch den Randschichtfaktor (Tabelle 13.4) berücksichtigt.

⁶⁾ Vorläufiger Wert.

⁷⁾ Anhaltswerte für zähe Werkstoffe [22].

⁸⁾ $0,577 = 1/\sqrt{3}$ (Gestaltänderungsenergiyhypothese).

⁹⁾ Experimentelle Ergebnisse deuten eher auf ein Verhältnis von $\tau_{tw} = 0,62 \cdot \sigma_{bw}$ hin [22].

k. A. = keine Angabe

Es bleibt anzumerken, dass in der FKM-Richtlinie [2] ein Verfahren zur Ermittlung der Biegewechselfestigkeit (σ_{bw}) aus der Zug-Druck-Wechselfestigkeit (σ_{zdW}) bzw. der Torsionswechselfestigkeit (τ_{tw}) aus der Schubwechselfestigkeit (τ_{sw}) genannt wird. Hierauf soll jedoch im Rahmen dieses einführenden Lehrbuches nicht näher eingegangen werden.

Neben den in Tabelle 13.2 zusammengestellten Korrelationsgleichungen sind in der Literatur für nicht geschweißte Bauteile noch weitere Beziehungen bekannt geworden.

Stähle [16] bzw. [20]:

$$\sigma_{zdW} = 0,385 \cdot R_m + 30 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{Streubreite } \pm 15\%) \text{ bzw.} \quad (13.18)$$

$$\sigma_{zdW} = 0,436 \cdot R_{p0,2} + 77 \text{ N/mm}^2 \quad (13.19)$$

Stahlguss [15,20]:

$$\sigma_{zdW} = 0,27 \cdot R_m + 85 \text{ N/mm}^2 \quad (13.20)$$

Gusseisen mit Lamellengraphit [15,20]:

$$\sigma_{zdW} = 0,39 \cdot R_m \quad (13.21)$$

Gusseisen mit Kugelgraphit [15]:

$$\sigma_{zdW} = 0,27 \cdot R_m + 100 \text{ N/mm}^2 \quad (13.22)$$

Schwarzer Temperguss [15]:

$$\sigma_{zdW} = 0,27 \cdot R_m + 110 \text{ N/mm}^2 \quad (13.23)$$

Aluminium, Magnesium und deren Legierungen [16]

$$R_m \leq 330 \text{ N/mm}^2 : \quad \sigma_{zdW} \approx 0,35 \cdot R_m \dots 0,50 \cdot R_m \quad (N_D = 10^8) \quad (13.24)$$

$$R_m > 330 \text{ N/mm}^2 : \quad \sigma_{zdW} \approx 130 \text{ N/mm}^2 \quad (13.25)$$

Titan und Titanlegierungen [16]

$$R_m \leq 1100 \text{ N/mm}^2 : \quad \sigma_{zdW} = 0,45 \cdot R_m \dots 0,65 \cdot R_m \quad (N_D = 10^6 \dots 10^7) \quad (13.26)$$

$$R_m > 1100 \text{ N/mm}^2 : \quad \sigma_{zdW} \approx 620 \text{ N/mm}^2 \quad (13.27)$$

Kupfer und Kupferlegierungen [16]

$$R_m \leq 750 \text{ N/mm}^2 : \quad \sigma_{zdW} = 0,30 \cdot R_m \dots 0,50 \cdot R_m \quad (N_D = 10^8) \quad (13.28)$$

$$R_m > 750 \text{ N/mm}^2 : \quad \sigma_{zdW} \approx 300 \text{ N/mm}^2 \quad (13.29)$$

Für den Schweißnahtquerschnitt (Schweißgut) und für den Schweißnahtübergangsquerschnitt (Wärmeeinflusszone) fachgerecht geschweißter Bauteile sind die nachfolgenden Werkstoffkennwerte zugrunde zu legen [2]:

*Für schweißbare Stähle*¹⁾:

$$\sigma_{zdW} = 92 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{für } N = 5 \cdot 10^6 \text{ Schwingspiele}) \quad (13.30)$$

$$\tau_W = 37 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{für } N = 10^8 \text{ Schwingspiele}) \quad (13.31)$$

Für bedingt schweißbare Stähle, nichtrostende Stähle und schweißbare Eisengusswerkstoffe sind diese Werte nach [2] als vorläufig zu betrachten.

Für Aluminiumwerkstoffe:

$$\sigma_{zdW} = 33 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{für } N = 5 \cdot 10^6 \text{ Schwingspiele}) \quad (13.32)$$

$$\tau_W = 13 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{für } N = 10^8 \text{ Schwingspiele}) \quad (13.33)$$

¹⁾ Für bedingt schweißbare Stähle, nichtrostende Stähle und schweißbare Eisengusswerkstoffe sind diese Werte als vorläufig zu betrachten und mit Vorsicht anzuwenden.

13.6 Spannungsermittlung bei Schwingbeanspruchung

Im Vergleich zu einem statischen Festigkeitsnachweis ist der Nachweis der Ermüdungsfestigkeit in der Regel weitaus schwieriger, wie die in Tabelle 13.1 beispielhaft zusammengestellten Schadensfälle sowie die nachfolgende Gegenüberstellung eines statischen Festigkeitsnachweises mit dem Nachweis der Ermüdungsfestigkeit zeigen. Dementsprechend ist es verständlich, dass ein nicht unerheblicher Anteil der bekannt gewordenen Schadensfälle an Maschinen und Anlagen durch Werkstoffermüdung verursacht wird (Bild 13.4).

Statischer Festigkeitsnachweis:

- Der Werkstoff kann als diskretes Kontinuum angesehen werden.
- Stoffgesetze sind bekannt oder in Versuchen (z. B. Zugversuch) relativ einfach zu ermitteln.
- Berechnung von Spannungen oder Verformungen ist mit Hilfe elementarer Gleichungen oder beispielsweise mittels Finite-Element-Methode möglich.
- Vergleich der maximalen Spannung bzw. Dehnung (Beanspruchung) mit geeigneten Werkstoffkennwerten (Beanspruchbarkeit) liefert den Nachweis.

Nachweis der Ermüdungsfestigkeit (Dauer-, Zeit- oder Betriebsfestigkeit):

- Werkstoffverhalten (Anriss- und Risswachstum) ist mathematisch nur bedingt oder nicht formulierbar.
- Einflüsse auf die Entstehung und das Wachstum eines Ermüdungsriesses sind außerordentlich vielfältig und teilweise nicht quantifizierbar. Darüber hinaus überlagern sich der Werkstoffermüdung weitere Einflüsse wie Korrosion oder erhöhte Temperaturen (Kriechen), so dass die Versagensmechanismen zusätzlich zeitabhängig werden (z. B. Schwingungsrißkorrosion).
- Es gibt kein allgemein gültiges Konzept für den Ermüdungsfestigkeitsnachweis, vielmehr steht eine Vielzahl von Berechnungsmethoden zur Verfügung. Außerdem sind die Konzepte zur Formulierung der Festigkeitsbedingungen unter zeitlich veränderlicher Beanspruchung (z. B. Festigkeitshypothesen, Schadensakkumulationshypothese) zum Teil noch lückenhaft.
- Jede einzelne kritische Stelle muss in der Regel hinsichtlich der relevanten, die Ermüdung beeinflussenden Faktoren, sowie hinsichtlich der Anwendung geeigneter Berechnungskonzepte individuell betrachtet werden.
- Der zeitliche Verlauf der betrieblichen Beanspruchung ist teilweise nur unzureichend oder überhaupt nicht bekannt bzw. muss durch aufwändige Versuche ermittelt werden.
- Schwingfestigkeitskennwerte unterliegen aufgrund der hohen Anzahl von Einflussparametern erheblich größeren Streuungen, verglichen mit den statischen Kennwerten (siehe beispielsweise Bild 13.21). Außerdem sind, im Gegensatz zu den statischen Festigkeitskennwerten, nur relativ wenige Schwingfestigkeitskennwerte verfügbar. Die experimentelle Ermittlung statistisch abgesicherter Kennwerte ist äußerst aufwändig und verursacht mitunter hohe Kosten.
- Fehlstellen wie Kerben oder Riefen im Bereich der Oberfläche sowie Werkstoffinhomogenitäten (Poren, Einschlüsse, usw.) können die Ermüdungsfestigkeit zum Teil erheblich verschlechtern.

13.6.1 Nachweis der Dauerfestigkeit

Für die Auslegung zahlreicher Bauteile insbesondere im Maschinen- und Anlagenbau sowie für eine Abschätzung des Ermüdungsverhaltens im Rahmen von Konstruktionsentwürfen ist der mit relativ geringem Aufwand verbundene Nachweis der Dauerfestigkeit häufig ausreichend. Steht allerdings im Rahmen von Leichtbaukonzepten die Massenreduktion im Vordergrund (z. B. im Fahrzeugbau oder beim Bau von Luft- und Raumfahrzeugen), dann muss ein Nachweis der Zeit- oder der Betriebsfestigkeit erfolgen. Insbesondere der Betriebsfestigkeitsnachweis ist hierbei mit einem zum Teil erheblichen rechnerischen und experimentellen Aufwand verbunden.

Um den Rahmen dieses Kapitels nicht zu sprengen, beschränken sich die nachfolgenden Ausführungen auf den Nachweis der Dauerfestigkeit. Konzepte zum Nachweis der Zeit- sowie der Betriebsfestigkeit sind der weiterführenden Literatur wie zum Beispiel [11-18] zu entnehmen.

Für den Nachweis der Dauerfestigkeit sollen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

- Es liegt eine synchrone Beanspruchung vor, d. h. bei mehrachsiger Beanspruchung sind die Phasenlagen der Spannungskomponenten gleich (Richtung des Hauptspannungsvektors bleibt unverändert). Bei einer nicht synchronen mehrachsigen Beanspruchung können die klassischen Festigkeitshypothesen nicht mehr angewandt werden, da nicht nur der Betrag sondern auch die Richtung des Hauptspannungsvektors einer zeitlichen Veränderung unterliegt. Die Vergleichsspannung ist damit keine skalare Größe mehr.
- Es wird ein linear-elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt (keine überelastische Beanspruchung).
- Fehlstellen sind geometrisch beschreibbar, d. h. es werden keine angerissenen Bauteile betrachtet.
- Es soll ein sinusförmiger Beanspruchungs-Zeit-Verlauf vorausgesetzt werden.

Sofern sich die äußere Beanspruchung nicht zu schnell ändert, muss die Spannung im Innern des Werkstücks in jedem Augenblick der äußeren Belastung proportional sein. Damit kann man aber den zeitlichen Verlauf der äußeren Belastung und der Spannung im Bauteilinnern durch die gleiche Sinusschwingung darstellen. Die bereits in Kapitel 2 (Grundbelastungsarten) abgeleiteten Beziehungen zwischen äußerer und innerer Beanspruchung müssen dementsprechend auch bei Schwingbeanspruchung gültig sein:

$$\sigma = F / A \quad (\text{Zug bzw. Druck}) \quad (13.34)$$

$$\sigma_b = M_b / W_b \quad (\text{gerade Biegung}) \quad (13.35)$$

$$\tau_a = F / A \quad (\text{Abscherbeanspruchung}) \quad (13.36)$$

$$\tau_t = M_t / W_t \quad (\text{Torsion}) \quad (13.37)$$

Bei nichtsynchroner mehrachsiger Beanspruchung oder bei beliebiger Beanspruchungs-Zeit-Funktion (nicht durch eine zwischen zwei Grenzen periodisch verlaufende Funktion beschreibbar) gelten diese Zusammenhänge allerdings nicht mehr.

13.6.2 Festigkeitsbedingung

Ein Bauteil kann als dauerfest angesehen werden, falls die (Last-)Spannungsamplitude σ_a an der höchst beanspruchten Stelle, unter Berücksichtigung eines angemessenen Sicherheitsfaktors gegen Schwingbruch (S_D), die dauernd ertragbare Spannungsamplitude (Wechselfestigkeit σ_w) nicht überschreitet. Die **Festigkeitsbedingung** lautet also:

$$\sigma_a \leq \sigma_{a\text{ zul}} = \frac{\sigma_w}{S_D} \quad \text{Festigkeitsbedingung für ungekerbte Bauteile mit polierter Oberfläche unter reiner Wechselbeanspruchung} \quad (13.38)$$

σ_a = (Last-)Spannungsamplitude

$\sigma_{a\text{ zul}}$ = zulässige Spannungsamplitude

σ_w = Wechselfestigkeit (Kapitel 13.5.6)

S_D = Sicherheitsbeiwert gegen Schwingbruch ($S_D \geq 2,5$)

Für die Sicherheit gegen Dauerbruch sollte in der Regel ein Wert von $S_D \geq 2,5$ gewählt werden.

Gleichung 13.38 kann in dieser Form nur für ungekerbte Bauteile mit polierter Oberfläche unter reiner Wechselbeanspruchung angewandt werden. In der Regel treten jedoch eine Vielzahl von Einflussfaktoren auf, die sowohl die (Last-)Spannungsamplitude σ_a (Beanspruchung) als auch die dauernd ertragbare Spannungsamplitude σ_{AD} (Beanspruchbarkeit) beeinflussen. Die wichtigsten Einflussfaktoren sollen nachfolgend besprochen und quantifiziert werden.

13.7 Einflussgrößen auf die Schwingfestigkeit von Metallen

Eine Reihe von Einflussfaktoren können zu einer teilweise erheblichen Veränderung (zumeist Verminderung) der Dauerfestigkeit führen. Die wichtigsten herstellungs-, konstruktions- und einsatzbedingten Einflussgrößen sind in Bild 13.23 zusammengestellt.

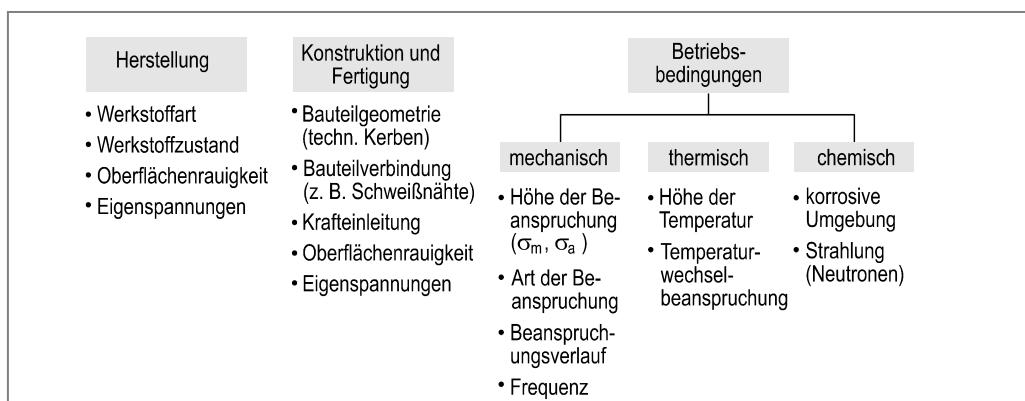


Bild 13.23 Einflüsse auf die Schwingfestigkeit metallischer Werkstoffe

Die wichtigsten der in Bild 13.23 genannten Einflussgrößen sollen nachfolgend beschrieben und ihr Einfluss auf die Schwingfestigkeit quantifiziert werden.

13.7.1 Mittelspannungseinfluss (Dauerfestigkeitsschaubilder)

Der aufwändige und teure Wöhlerversuch liefert jeweils nur für einen Belastungsfall (z. B. für eine Mittelspannung oder ein konstantes Spannungsverhältnis) einen Werkstoffkennwert für die Dauerschwingfestigkeit. Wöhlerkurven gelten also jeweils nur für eine konstante Mittelspannung σ_m oder ein konstantes Spannungsverhältnis R (Kapitel 13.5.1).

Führt man Schwingfestigkeitsversuche mit systematisch veränderten Mittelspannungen σ_m bzw. Spannungsverhältnissen R durch, dann stellt man fest, dass eine Zugmittelspannung in der Regel die dauernd ertragbare Spannungsamplitude σ_{AD} erniedrigt. Eine Druckmittelspannung führt hingegen zu einer Verbesserung der Schwingfestigkeit (Bild 13.24).

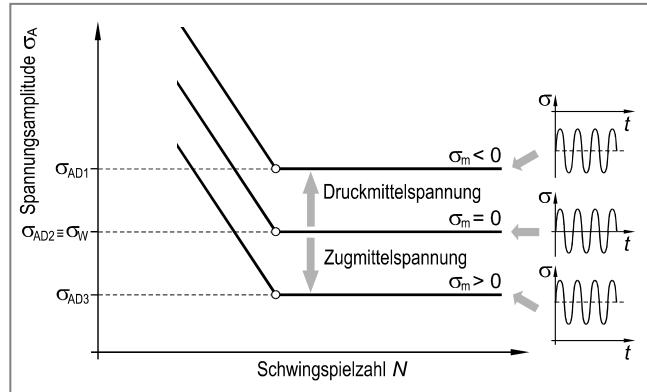


Bild 13.24 Einfluss einer Mittelspannung auf die Schwingfestigkeit

Diese Beobachtung kann ver einfacht dadurch erklärt werden, dass die zum Dauerbruch

führenden Werkstoffgleitungen durch eine gleichzeitig auf der Gleitebene wirkende Normalspannung erleichtert, durch eine Druckspannung hingegen erschwert wird. Die Zusammenhänge zwischen Mittelspannung σ_m und dauernd ertragbarer Spannungsamplitude σ_{AD} bzw. dauernd ertragbarer Ober- und Unterspannung (σ_O und σ_U) stellt man üblicherweise in **Dauerfestigkeitsschaubildern (DFS)** dar.

Das Dauerfestigkeitsschaubild ist die bildliche Darstellung aller aus einer Anzahl von Wöhlerkurven gewonnenen Werte der Dauerfestigkeit. Es lässt auf besonders anschauliche Weise die Zusammenhänge zwischen Mittelspannung σ_m , der dauernd ertragbaren Spannungsamplitude σ_A sowie ggf. der dauernd ertragbaren Oberspannung σ_O bzw. Unterspannung σ_U erkennen.

Man unterscheidet im Wesentlichen die folgenden Dauerfestigkeitsschaubilder bzw. Darstellungen:

- nach Smith
- nach Haigh
- neuere Vorschläge für Dauerfestigkeitsschaubilder (z. B. nach FKM-Richtlinie)
- nach Gerber, Goodman, Kommerell
- nach Moore, Kommers, Jasper, Pohl

13.7.1.1 Dauerfestigkeitsschaubild nach Smith

Das DFS nach Smith hatte früher vor allem in Deutschland für den Maschinenbau und für die Werkstoffprüfung eine große Bedeutung. Gegenüber der Darstellung nach Haigh (Kapitel 13.7.1.2) hat es insbesondere den Vorteil, dass der zeitliche Verlauf der Spannung direkt dem Schaubild zugeordnet werden kann.

a) Deutung des Dauerfestigkeitsschaubildes nach Smith

Zur Aufstellung eines Dauerfestigkeitsschaubildes führt man Wöhler-Versuche durch, wobei innerhalb einer Versuchsreihe die Mittelspannung konstant gehalten, von Versuchsreihe zu Versuchsreihe aber systematisch abgestuft wird. Man erhält auf diese Weise die dauernd ertragbare Spannungsamplitude σ_{AD} mit der Mittelspannung σ_m als Versuchsparameter.

Bei der Darstellung nach *Smith* wird auf der Abszisse die Mittelspannung σ_m aufgetragen und auf der Ordinate im gleichen Achsenmaßstab die dauernd ertragbare Oberspannung σ_o bzw. Unterspannung σ_u . Da die Achsenmaßstäbe gleich gewählt wurden, fallen die Mittelwerte mit der ersten Winkelhalbierenden zusammen d. h. $\sigma_m = (\sigma_u + \sigma_o) / 2$. Der Abstand von σ_o bzw. σ_u zur 1. Winkelhalbierenden ist dann die bei der jeweiligen Mittelspannung σ_m dauernd ertragbare Spannungsamplitude σ_{AD} .

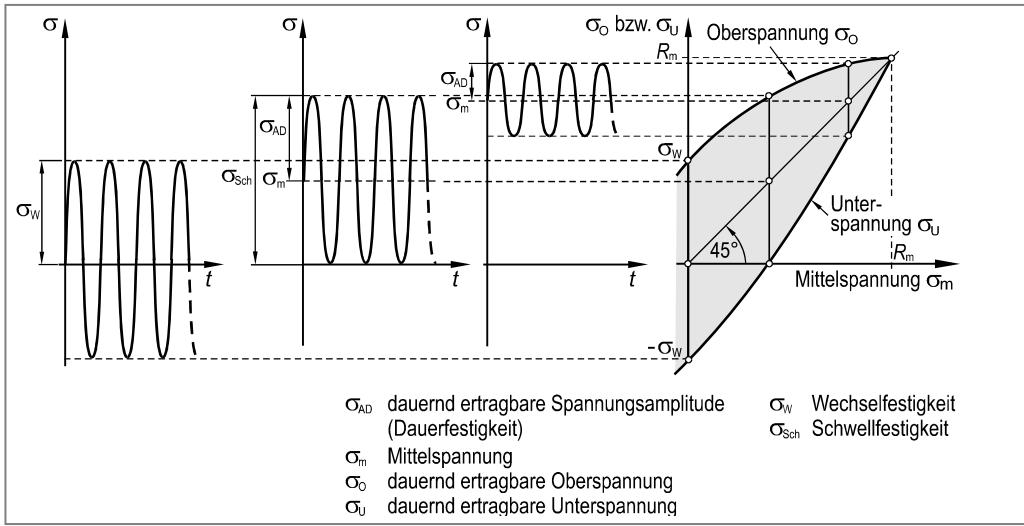


Bild 13.25 Entstehung des Dauerfestigkeitsschaubildes nach Smith für Normalspannungen und duktile Werkstoffe

Abbildung 13.25 zeigt, dass mit zunehmender Mittelspannung σ_m die dauernd ertragbare Amplitude σ_{AD} abnimmt und mit Erreichen der Zugfestigkeit R_m schließlich zu Null wird. Dort tritt wegen $\sigma_m = R_m$ der Bruch bereits bei der ersten Belastung ein.

b) Näherungskonstruktionen für das Dauerfestigkeitsschaubild nach Smith

Die Aufstellung von Dauerfestigkeitsschaubildern setzt eine Vielzahl statistisch abgesicherter Wöhlerkurven voraus und erfordert demzufolge einen sehr hohen experimentellen Aufwand. Dauerfestigkeitsschaubilder sind daher nur für sehr wenige Werkstoffe verfügbar. Nachfolgend soll eine Möglichkeit aufgezeigt werden, das Dauerfestigkeitsschaubild aus einigen wenigen Werkstoffkennwerten wie der Zugfestigkeit R_m , der Streckgrenze R_e bzw. der Dehngrenze R_p und der Wechselfestigkeit (Zug-Druck-Wechselfestigkeit σ_{zw} , Biegeweichselfestigkeit σ_{bw} , Schubweichselfestigkeit τ_{sw} oder Torsionsweichselfestigkeit τ_{tw}) zu konstruieren. Für die Näherungskonstruktion ist zwischen duktilen und spröden Werkstoffen zu unterscheiden.

Duktile Werkstoffe:

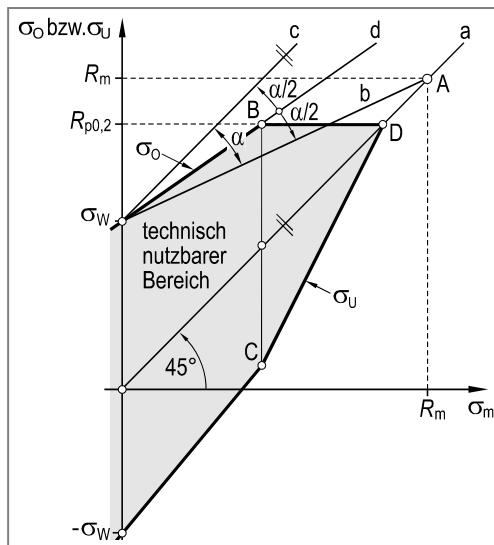


Bild 13.26 Näherungskonstruktion des DFS nach Smith für duktile Werkstoffe

Spröde Werkstoffe:

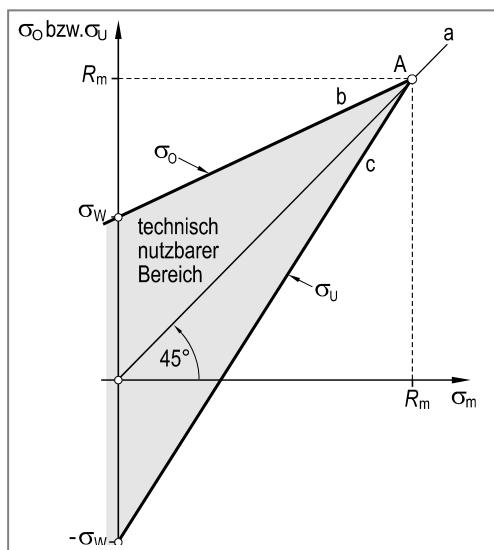


Bild 13.27 Näherungskonstruktion des DFS nach Smith für spröde Werkstoffe

Auf analoge Weise konstruiert man auch die Dauerfestigkeitsschaubilder für duktile und spröde Werkstoffe unter der Wirkung von Schubspannungen. Im Falle einer Torsionsbeanspruchung ist die Zugfestigkeit R_m durch die Torsionsfestigkeit τ_{tB} , die Dehngrenze $R_{p0,2}$ durch die Torsionsfließgrenze τ_{tf} (Kapitel 2.5.3) und die Zug-Druck- bzw. Biegeweichselfestigkeit durch die Schubwechselfestigkeit τ_w (Tabelle 13.2) zu ersetzen.

Konstruktionsbeschreibung (Bild 13-26):

1. Zeichnen eines σ - σ_m -Koordinatensystems und Einzeichnen der ersten Winkelhalbierenden (Gerade a).
2. Einzeichnen der Wechselfestigkeit (σ_w bzw. $-\sigma_w$).
3. Einzeichnen der Verbindungsgeraden (Gerade b) zwischen σ_w und dem Schnittpunkt einer Parallelen zur Abszisse durch R_m mit der Linie a (Schnittpunkt A).
4. Konstruktion einer Parallelen zur Geraden a durch σ_w (Gerade c).
5. Konstruktion der Winkelhalbierenden zum Winkel α (Gerade d).
6. Gerade d schneidet Parallelen zur Abszisse durch $R_{p0,2}$ im Punkt B (Begrenzung der Oberspannung durch die Streck- bzw. Dehngrenze).
7. Spiegelung des Punktes B an der Geraden a ergibt den Punkt C .
8. Linienzug $\sigma_w - B - D - C - -\sigma_w$ ist die gesuchte Näherungskonstruktion des DFS nach Smith für duktile Werkstoffe.

Konstruktionsbeschreibung (Bild 13-27):

1. Zeichnen eines σ - σ_m -Koordinatensystems und Einzeichnen der ersten Winkelhalbierenden (Gerade a).
2. Einzeichnen der Wechselfestigkeit (σ_w bzw. $-\sigma_w$).
3. Einzeichnen der Verbindungsgeraden (Gerade b) zwischen σ_w und dem Schnittpunkt einer Parallelen zur Abszisse durch R_m mit der Linie a (Schnittpunkt A).
4. Verbinden des Schnittpunktes A mit der Wechselfestigkeit $-\sigma_w$ (Gerade c).
5. Linienzug $\sigma_w - A - -\sigma_w$ ist die gesuchte Näherungskonstruktion des DFS nach Smith für spröde Werkstoffe.

13.7.1.2 Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh

Die Darstellung nach Haigh (Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh) ist heute aufgrund der Übersichtlichkeit und der Möglichkeit zur analytischen Formulierung der Grenzkurve üblich.

a) Deutung des Dauerfestigkeitsschaubildes nach Haigh

Trägt man für unterschiedliche Mittelspannungen die jeweils zugehörigen, dauernd ertragbaren Spannungssamplituden σ_{AD} über der entsprechenden Mittelspannung σ_m auf, dann erhält man das Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh, Bild 13.28. Diese Art der Auftragung hat sich, wie bereits erwähnt, aufgrund der übersichtlichen grafischen Darstellung und der Möglichkeit zur einfachen analytischen Formulierung der Grenzlinie weitgehend durchgesetzt.

Die Benennung der Ordinate des Dauerfestigkeitsschaubildes muss näher erläutert werden. Ein DFS beinhaltet neben der Grenzkurve für die dauernd ertragbare Spannungssamplitude $\sigma_{AD} = f(\sigma_m)$ häufig noch Betriebspunkte ($\sigma_m | \sigma_a$) und ggf. diverse Grenz- und Hilfslinien $\sigma_a = f(\sigma_m)$ wie zum Beispiel Linien mit $R = \text{konstant}$ sowie Grenzkurven für plastische Verformung und Bruch. Dementsprechend stehen der Eindeutigkeit halber (zumindest im Rahmen dieses Lehrbuches) an der Ordinate zuerst die Bezeichnungen σ_{AD} (dauernd ertragbare Spannungssamplitude) und σ_a (beliebige Spannungssamplitude).

Aus dem Dauerfestigkeitsschaubild wird ersichtlich, dass die dauernd ertragbare Spannungssamplitude σ_{AD} bei Vorhandensein einer Zugmittelspannung abnimmt, bei einer Druckmittelspannung hingegen zunimmt. Für $\sigma_m = 0$, also für eine reine Wechselbeanspruchung, wird $\sigma_{AD} = \sigma_W$. Erreicht die Mittelspannung die Zugfestigkeit ($\sigma_m = R_m$), dann kann keine zusätzliche Amplitude mehr aufgenommen werden, d. h. $\sigma_{AD} = 0$. Der Schnittpunkt der Grenzkurve $\sigma_{AD}(\sigma_m)$ mit der Winkelhalbierenden im 1. Quadranten führt auf die halbe Zugschwellfestigkeit $\sigma_{Sch}/2$.

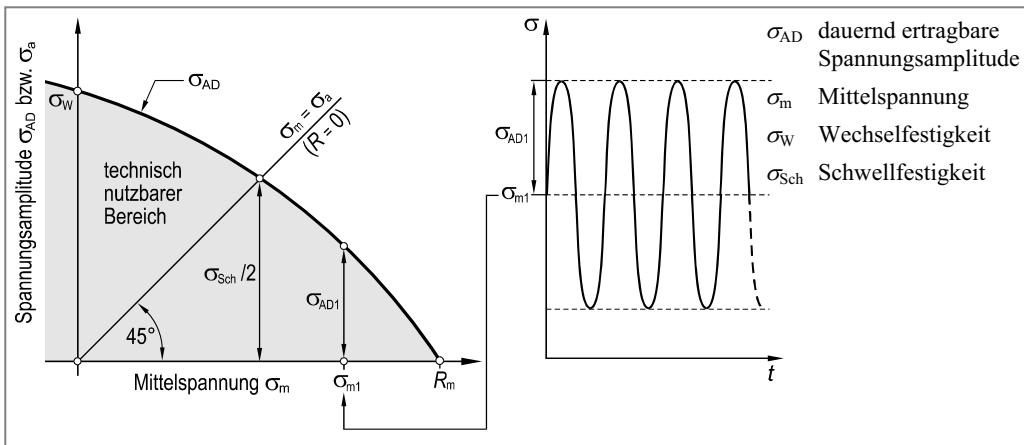


Bild 13.28 Entstehung des Dauerfestigkeitsschaubildes nach Haigh für Normalspannungen und duktile Werkstoffe unter der Wirkung von Normalspannungen

Beanspruchungen mit konstantem Spannungsverhältnis R erscheinen im DFS nach Haigh als Ursprungsgerade. Es gilt:

$$R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o} = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_m + \sigma_a} \quad (13.39)$$

aus Gleichung 13.39 folgt nach Umformung:

$$\sigma_a = \frac{1-R}{1+R} \cdot \sigma_m \quad (13.40)$$

Die Steigung der Ursprungsgeraden ergibt sich dann unter der Voraussetzung gleicher Teilung des Abszissen- und Ordinatenmaßstabes zu:

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R} \quad \text{Ursprungsgerade mit konstantem Spannungsverhältnis im DFS nach Haigh} \quad (13.41)$$

b) Mittelspannungsempfindlichkeit

Zur Kennzeichnung des Einflusses der Mittelspannung auf die dauernd ertragbare Spannungsamplitude wird die **Mittelspannungsempfindlichkeit M** eingeführt.

Die Mittelspannungsempfindlichkeit M ist definiert als die Neigung der Sekante zwischen der Wechselfestigkeit σ_w und der halben Zugschwellfestigkeit ($\sigma_{sch}/2$). Sofern der Winkel α im DFS eingezeichnet bzw. aus dem DFS entnommen werden muss, ist auf gleiche Achseinteilung von Abszisse und Ordinate zu achten (Bild 13.29).

Für die Mittelspannungsempfindlichkeit gilt:

$$M = \tan \alpha = \frac{\sigma_w - \sigma_{sch}/2}{\sigma_{sch}/2} \quad \text{Definition der Mittelspannungsempfindlichkeit} \quad (13.42)$$

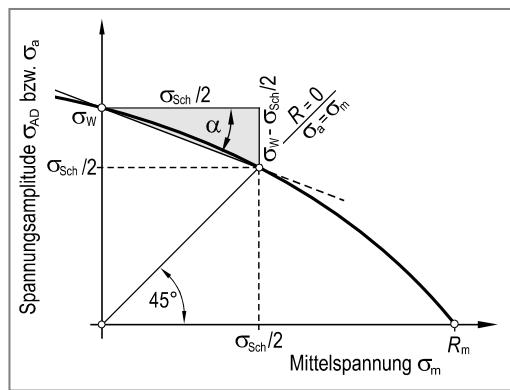


Bild 13.29 Definition der Mittelspannungsempfindlichkeit im DFS nach Haigh

Gleichung 13.42 gilt in analoger Weise für die Wirkung von Schubspannungen, falls die Normalspannung σ durch die Schubspannung τ ersetzt wird.

Eine geringe Empfindlichkeit der dauernd ertragbaren Spannungsamplitude auf die Mittelspannung (eine geringe Mittelspannungsempfindlichkeit also) äußert sich in einer relativ flachen Neigung, eine hohe Mittelspannungsempfindlichkeit dementsprechend in einer steilen Neigung der Sekante zwischen σ_w und $\sigma_{sch}/2$. Bei metallischen Werkstoffen nimmt die Mittelspannungsempfindlichkeit (für glatte und gekerbte Proben) mit steigender Werkstofffestigkeit zu. Höherfeste Al-Legierungen oder hochfeste Stähle ($R_m > 1800$ MPa) zeigen daher hohe Mittelspannungsempfindlichkeiten von $M = 0,5 \dots 0,7$ (Bild 13.30).

Die Mittelspannungsempfindlichkeit ist streng genommen kein echter Werkstoffkennwert, da insbesondere bei gekerbten Bauteilen aus Werkstoffen mit niedriger und mittlerer Festigkeit im Kerbgrund mit zunehmender Mittelspannung örtliches Fließen eintritt. Dies führt zur Ausbildung von Druckeigenspannungen, deren Größe u. a. von der Höhe der Mittelspannung abhängen. Diese Druckeigenspannungen überlagern sich der Zugmittelspannung aus der äußeren Belastung und vermindern dementsprechend deren Wirkung im Bereich des Kerbgrundes.

Zur rechnerischen Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit muss zwischen der Wirkung von Normalspannungen und Schubspannungen unterschieden werden.

Wirkung von Normalspannungen:

Unter der Wirkung von Normalspannungen errechnet sich die Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ für nicht geschweißte Bauteile zu [2]:

$$\bullet \text{ Stahl: } ^{1)} \quad M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,10 \quad (13.43)$$

$$\bullet \text{ Stahlguss: } \quad M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m + 0,05 \quad (13.44)$$

$$\bullet \text{ GJL: } ^{2)} \quad M_\sigma = 0,5 \quad (13.45)$$

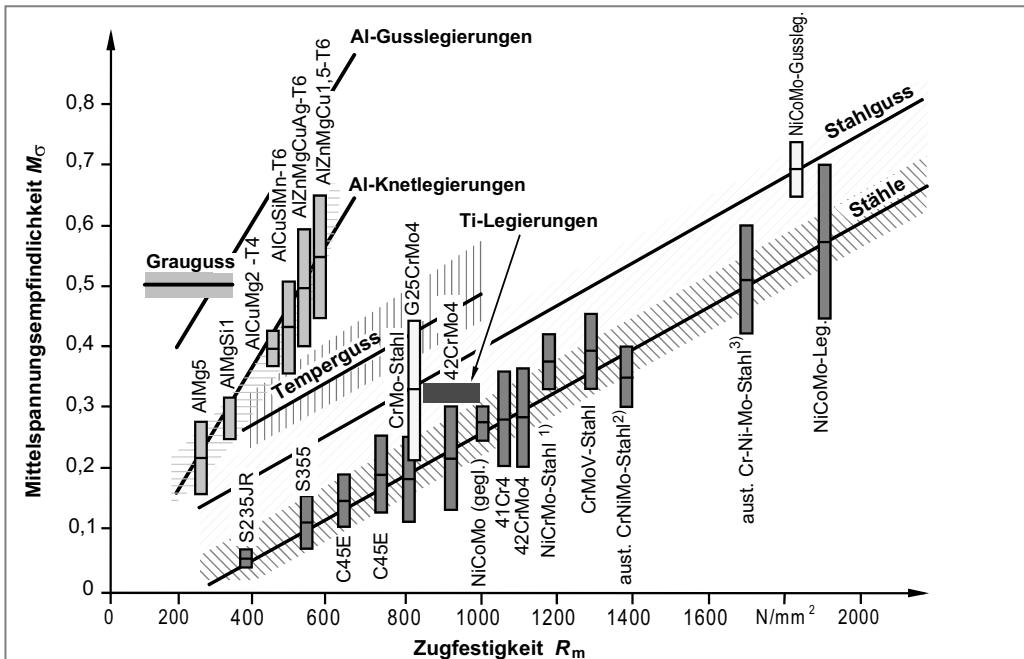
$$\bullet \text{ GJS: } ^{3)} \quad M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m + 0,08 \quad (13.46)$$

$$\bullet \text{ Temperi-guss: } \quad M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m + 0,13 \quad (13.47)$$

$$\bullet \text{ Al-Knetlegierungen: } M_\sigma = 0,001 \cdot R_m - 0,04 \quad (13.48)$$

$$\bullet \text{ Al-Gusslegierungen: } M_\sigma = 0,001 \cdot R_m + 0,20 \quad (13.49)$$

In Bild 13.30 ist die Mittelspannungsempfindlichkeit unter der Wirkung von Normalspannungen (M_σ) technisch wichtiger Konstruktionswerkstoffe veranschaulicht. Mit eingezeichnet sind die gemäß FKM-Richtlinie [2] vorgeschlagenen Gleichungen 13.43 bis 13.45 und Gleichungen 13.47 bis 13.49.



¹⁾ etwa 0,3% C, 2% Cr, 2% Ni, 0,4% Mo

²⁾ 15% Cr, 7% Ni, 2,2% Mo

³⁾ 15,5% Cr, 4,25% Ni, 2,75% Mo

T4 = kalt ausgehärtete Al-Legierung

T6 = warm ausgehärtete Al-Legierung

Streubereich für:

- gekerbte Flachstäbe ($\alpha_k = 1,0 \dots 5,0$)
 - axiale Beanspruchung
 - $N_D = 10^4 \dots 10^6$ ($P_A = 50\%$)

Bild 13.30 Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ wichtiger Konstruktionswerkstoffe mit Beispielen (Anhaltswerten). Durchgezogene Linien nach FKM-Richtlinie [2].

¹⁾ auch für nichtrostende Stähle

²⁾ GJL: Gusseisen mit Lamellengraphit

³⁾ GJS: Gusseisen mit Kugelgraphit

Unter der Wirkung von Schubspannungen errechnet sich die Mittelspannungsempfindlichkeit M_t für nicht geschweißte Bauteile zu [2]:

- Stahl¹⁾ $M_t = 0,577 \cdot M_\sigma$ (13.50)

- Stahlguss: $M_t = 0,577 \cdot M_\sigma$ (13.51)

- GJL:²⁾ $M_t = 0,850 \cdot M_\sigma$ (13.52)

- GJS:³⁾ $M_t = 0,650 \cdot M_\sigma$ (13.53)

- Temperguss: $M_t = 0,750 \cdot M_\sigma$ (13.54)

- Al-Knetlegierungen: $M_t = 0,577 \cdot M_\sigma$ (13.55)

- Al-Gusslegierungen: $M_t = 0,750 \cdot M_\sigma$ (13.56)

c) Näherungskonstruktion für das Dauerfestigkeitschaubild nach Haigh

Auch für das Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh kann eine Näherungskonstruktion bzw. eine Näherungsgleichung angegeben werden. Hierbei ist ebenfalls zu unterscheiden zwischen duktilen und spröden Werkstoffen sowie zwischen Normal- und Schubspannungen.

Wirkung von Normalspannungen:

Für **duktile Werkstoffe** kann unter der Wirkung von Normalspannungen das DFS nach Haigh durch eine Parabel mit Scheitel im Punkt $(R_m | 0)$ angenähert werden (Bild 13.31a).

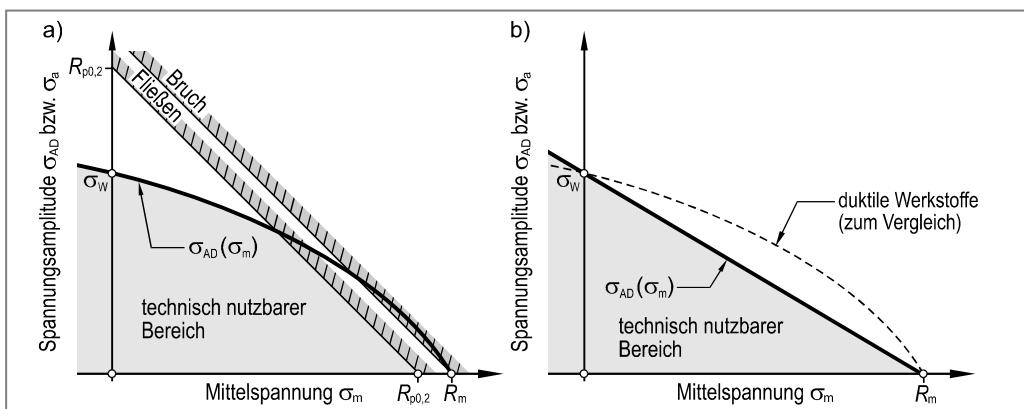


Bild 13.31 Näherungskonstruktionen für das DFS nach Haigh für duktile und spröde Werkstoffe unter der Wirkung von Normalspannungen

Bei duktilen Werkstoffen ist es sinnvoll, im DFS nach Haigh die Grenzkurve für plastische Verformung (statische Fließgrenze) bzw. die Grenzkurve für Zähbruch zu ergänzen. Bei Zugbeanspruchung ist mit plastischen Verformungen zu rechnen, sobald die Oberspannung $\sigma_o = \sigma_a + \sigma_m$ die Streck- bzw. Dehngrenze (R_e bzw. $R_{p0,2}$) erreicht. Die Fließbedingung lautet damit:

$$\sigma_a + \sigma_m = R_{p0,2}$$

hieraus folgt nach Umformung die Grenzkurve für plastische Verformung im DFS nach Haigh:

$$\sigma_a(\sigma_m) = R_{p0,2} - \sigma_m \quad \text{Grenzkurve für plastische Verformung im DFS nach Haigh} \quad (13.57)$$

Gleichung 13.57 stellt im σ_a - σ_m -Diagramm (Haigh-Diagramm) eine Gerade mit Achsenabschnitt $R_{p0,2}$ und Steigung -1 dar (Grenzkurve für plastische Verformung).

¹⁾ auch für nichtrostende Stähle

²⁾ GJL: Gusseisen mit Lamellengraphit

³⁾ GJS: Gusseisen mit Kugelgraphit

Bei Druckbeanspruchung erhält man in analoger Weise mit der Druckfließgrenze σ_{dF} anstelle der Dehngrenze $R_{p0,2}$ die Beziehung:

$$\sigma_a(\sigma_m) = \sigma_{dF} - \sigma_m \quad \text{mit } \sigma_m < 0 \quad (13.58)$$

Auf analoge Weise erhält man die Grenzkurve für Zähbruch zu:

$$\sigma_a(\sigma_m) = R_m - \sigma_m \quad \text{Grenzkurve für Bruch im DFS nach Haigh} \quad (13.59)$$

Die (dauernd ertragbare Spannungssamplitude σ_{AD}) kann für duktile Werkstoffe unter der Wirkung von Normalspannungen (bis zum Eintritt erster plastischer Verformungen) durch die folgende Näherungsgleichung beschrieben werden:

$$\sigma_{AD} = \sigma_W \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}} \quad \text{Dauernd ertragbare Normalspannungssamplitude für duktile Werkstoffe} \quad (13.60)$$

σ_W = Zug-Druck- oder Biegewechselfestigkeit (Kapitel 13.5.6)

σ_{AD} = dauernd ertragbare (Normal-)Spannungssamplitude

σ_m = Mittelspannung

R_m = Zugfestigkeit

Für **spröde Werkstoffe** wird unter der Wirkung von Normalspannungen die dauernd ertragbare Spannungssamplitude σ_{AD} im DFS nach Haigh durch eine Gerade durch die Punkte $(0 | \sigma_W)$ und $(R_m | 0)$ angenähert (Bild 13.31b). Dieser auf **J. Goodman** zurückgehende Vorschlag bezeichnet man deshalb auch als **Goodman-Gerade**. Der geradlinige Verlauf trägt dem experimentellen Befund Rechnung, dass spröde Werkstoffe eine höhere Mittelspannungsempfindlichkeit haben gegenüber den duktilen Werkstoffen. Für spröde Werkstoffe kann unter der Wirkung von Normalspannungen die Grenzlinie des DFS nach Haigh demnach durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\sigma_{AD} = \sigma_W \cdot \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right) \quad \text{Dauernd ertragbare Normalspannungssamplitude für spröde Werkstoffe} \quad (13.61)$$

Wirkung von Schubspannungen:

Wird einem statisch vorgespannten Torsionsstab eine Torsionsschwingung überlagert, dann hat die Richtung der statischen Vorspannung auf die dauernd ertragbare Amplitude keinen Einfluss. Dementsprechend ist das DFS nach Haigh für Schubbeanspruchung sowohl für duktile als auch für spröde Werkstoffe symmetrisch zur Ordinate (τ_{AD} -Achse).

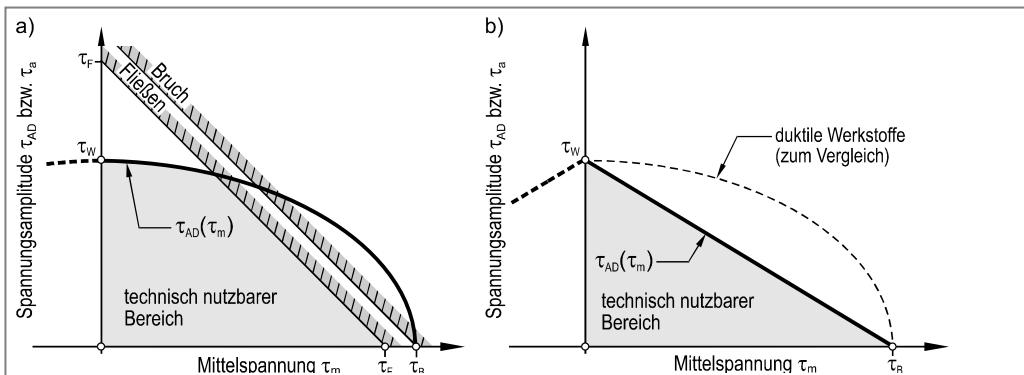


Bild 13.32 Näherungskonstruktionen für das DFS nach Haigh für duktile und spröde Werkstoffe unter der Wirkung von Schubspannungen

Für **duktile Werkstoffe** kann unter der Wirkung von Schubspannungen die dauernd ertragbare Schubspannungsamplitude τ_{AD} im DFS nach Haigh durch eine Ellipse angenähert (Bild 13.32a) und dementsprechend durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\tau_{AD} = \tau_W \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_m}{\tau_B} \right)^2} \quad \text{Dauernd ertragbare Schubspannungsamplitude für duktile Werkstoffe} \quad (13.62)$$

τ_W = Schub- oder Torsionswechselfestigkeit (Kapitel 13.5.6)

τ_{AD} = dauernd ertragbare Schubspannungsamplitude

τ_m = Schubmittelpreßspannung

τ_B = Torsionsfestigkeit bei Torsionsbeanspruchung (Kapitel 2.5.3) bzw. Abscherfestigkeit bei Abscherbeanspruchung (Kapitel 2.4.5)

Für **spröde Werkstoffe** wird unter der Wirkung von Schubspannungen die dauernd ertragbare Spannungsamplitude τ_{AD} in DFS nach Haigh ebenfalls durch eine Gerade durch die Punkte $(0 \mid \tau_W)$ und $(R_m \mid 0)$ angenähert (Bild 13.32b). Die Grenzkurve kann dementsprechend für spröde Werkstoffe unter der Wirkung von Schubspannungen wie folgt beschrieben werden:

$$\tau_{AD} = \tau_W \cdot \left(1 - \frac{|\tau_m|}{\tau_B} \right) \quad \text{Dauernd ertragbare Schubspannungsamplitude für spröde Werkstoffe} \quad (13.63)$$

Das DFS nach Haigh lässt sich aus dem DFS nach Smith ableiten, falls man bei einer gegebenen Mittelpreßspannung die dauernd ertragbare Amplitude nicht an der 45° -Linie sondern an der Abszisse aufträgt. Die Vorteile des DFS nach Haigh sind eine einfache analytische Formulierung der Grenzkurven und ein einfaches Eintragen von Betriebspunkten. Das DFS in der Darstellung nach Smith erlaubt hingegen eine anschauliche Zuordnung des Beanspruchungsniveaus der Schwingung zum Schaubild. Außerdem erscheinen die Grenzlinien für plastische Verformung in der Darstellung nach Smith anschaulich als Parallelen zur Abszisse.

13.7.1.3 Neue Vorschläge für das Dauerfestigkeitsschaubild für duktile Stähle

Das Dauerfestigkeitsschaubild in der Darstellung nach Haigh wurde für *duktile Stähle* zwischenzeitlich weiterentwickelt. Anstelle eines parabolischen oder elliptischen Verlaufes der Grenzkurven (Bild 13.31a und 13.32a) ist es heute in Übereinstimmung mit experimentellen Beobachtungen üblich, das Dauerfestigkeitsschaubild durch Geradenstücke anzunähern. Hierbei ist zu unterscheiden zwischen der Wirkung von Normal- und Schubspannungen.

Wirkung von Normalspannungen

Für duktile Stähle unter der Wirkung von Normalspannungen ist in Bild 13.33 eine neuere Variante des DFS nach Haigh [2] wiedergegeben.

Im Bereich zwischen reiner Druckschwellbeanspruchung ($R = -\infty$) und reiner Zugschwellbeanspruchung ($R = 0$), also im Zug-Druck-Wechselbereich, wird das DFS durch eine Gerade mit der Steigung $-M_\sigma$ (M_σ = Mittelpreßspannungsempfindlichkeit für Normalspannungen, Kapitel 13.7.1.2) angenähert.

Oberhalb von $R = 0$ (niedriger Zugschwellbereich) treten zunehmend Plastifizierungen auf, da die Oberspannung σ_o die Streck- bzw. Dehngrenze lokal überschreitet. In der Folge entstehen Druckeigenspannungen, die sich der Zugmittelspannung überlagern und dementsprechend zu

einer Verbesserung der Schwingfestigkeit führen. Daher verläuft das DFS oberhalb von $R = 0$ mit einer geringeren Steigung $M'_\sigma < M_\sigma$. Häufig wird $M'_\sigma = M_\sigma / 3$ vorgeschlagen (z. B. [2]).

Mit Überschreiten von $R = 0,5$ (hoher Zugschwellbereich) ist schließlich keine signifikante Abhängigkeit der dauernd ertragbaren Spannungssamplitude von der Mittelspannung mehr zu beobachten, so dass sich ein horizontaler Verlauf einstellt ($M_{\sigma} = 0$). Nach oben wird das DFS durch die Formdehngrenze (Fließbeginn) bzw. durch den Zähbruch begrenzt.

Im Druckschwellbereich ($1 < R \leq \infty$) wird die ertragbare Spannungsspannungsamplitude unabhängig von der Mittelspannung ($M_\sigma = 0$). Das DFS stellt sich dort also ebenfalls als Gerade mit horizontalem Verlauf dar.

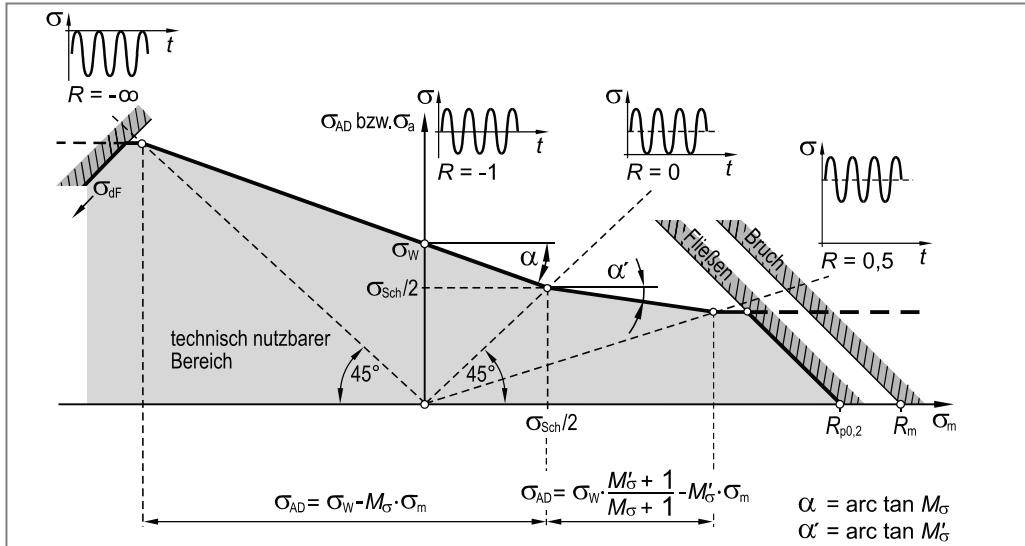


Bild 13.33 Weiterentwickeltes Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh für duktile Stähle unter der Wirkung von Normalspannungen

Das weiterentwickelte DFS kann unter der Wirkung von Normalspannungen dementsprechend durch die nachfolgenden Gleichungen beschrieben werden.

Für $\frac{\sigma_w}{M_g - 1} \leq \sigma_m \leq \frac{\sigma_w}{M_g + 1}$:

$$\sigma_{AD} = \sigma_W - M_g \cdot \sigma_m \quad \text{Dauernd ertragbare Normalspannungssamplitude für duktile Stähle} \quad (13.64)$$

$$\text{Für } \frac{\sigma_W}{M_\sigma + 1} < \sigma_m \leq \frac{3 \cdot \sigma_W}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1} :$$

$$\sigma_{AD} = \sigma_W \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1} - M'_\sigma \cdot \sigma_m \quad \text{Dauernd ertragbare Normalspannungssamplitude für duktile Stähle} \quad (13.65)$$

Für $\frac{3 \cdot \sigma_W}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1} < \sigma_m < \infty$:

$$\sigma_{AD} = \frac{\sigma_W}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1} \quad \text{Dauernd ertragbare Normalspannungsamplitude für duktile Stähle} \quad (13.66)$$

Für $-\infty < \sigma_m < \frac{\sigma_W}{M_\sigma - 1}$:

$$\sigma_{AD} = \frac{\sigma_W}{1 - M_\sigma} \quad \text{Dauernd ertragbare Normalspannungsamplitude für duktile Stähle} \quad (13.67)$$

Wirkung von Schubspannungen:

Unter der Wirkung von Schubspannungen stellt sich das weiterentwickelte DFS nach Haigh für duktile Werkstoffe analog zu Bild 13.33 dar. Aufgrund der Tatsache, dass die Richtung der statischen Vorspannung keinen Einfluss auf die dauernd ertragbare Spannungsamplitude hat (s. o.), ist die Grenzlinie des DFS symmetrisch zur Ordinate (τ_A -Achse) bzw. der Bereich für ein Spannungsverhältnis $R < -1$ entfällt in der Darstellung (Bild 13.34).

Die Gleichungen 13.64, 13.65 und 13.66 können sinngemäß auch unter der Wirkung von Schubspannungen angewandt werden, falls σ_{AD} durch τ_{AD} , σ_m durch τ_m und M_σ bzw. M'_σ durch M_t bzw. M'_t ersetzt werden.

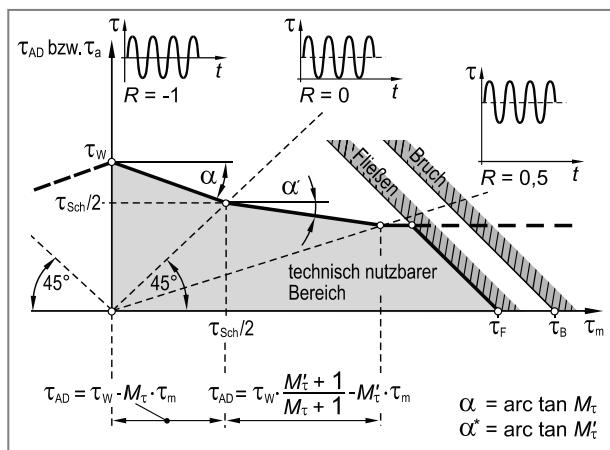


Bild 13.34 Weiterentwickeltes Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh für duktile Stähle unter der Wirkung von Schubspannungen

13.7.1.4 Berücksichtigung der Mittelspannung im Festigkeitsnachweis

Liegt eine mittelspannungsbehaftete Schwingbeanspruchung vor, dann kann Gleichung 13.38 sinngemäß angewandt werden, falls die Wechselfestigkeit σ_W durch die dauernd ertragbare Spannungsamplitude σ_{AD} ersetzt wird.

$$\sigma_a \leq \sigma_{a \text{ zul}} = \frac{\sigma_{AD}}{S_D} \quad \text{Festigkeitsbedingung unter Schwingbeanspruchung ungebremster Bauteile mit polierter Oberfläche unter der Wirkung einer von Null verschiedenen Mittelspannung} \quad (13.68)$$

σ_a = (Last-)Spannungsamplitude

$\sigma_{a \text{ zul}}$ = zulässige Spannungsamplitude

σ_{AD} = dauernd ertragbare (Normal-)Spannungsamplitude entsprechend Kapitel 13.7.1.1 bis 13.7.1.3

S_D = Sicherheitsbeiwert gegen Schwingbruch ($S_D \geq 2,5$)

13.7.2 Einfluss der Oberflächenrauigkeit

Während bei statischer Beanspruchung eine geringe Abhängigkeit der Werkstoffkennwerte (R_m , $R_{p0,2}$ bzw. R_e) von der Oberflächenrauigkeit zu beobachten ist, ist der Zustand der Oberfläche (Oberflächenrauigkeit) auf die Kennwerte der Schwingfestigkeit (z. B. σ_w) von erheblicher Bedeutung. Hierfür gibt es mehrere Ursachen:

1. Die maximale Spannung tritt in der Regel an der Oberfläche auf (z. B. bei Biegung und Torsion).
2. Das Oberflächenprofil begünstigt infolge Mikrokerbwirkung eine oberflächliche Mikrorissbildung.
3. Die Oberflächen sind häufig Riss erzeugenden Einflüssen wie z. B. Korrosion ausgesetzt.

Der Einfluss der Oberfläche wird rechnerisch durch einen Korrekturfaktor, den **Oberflächenfaktor C_o** (bisweilen auch als **Rauheitsfaktor** bezeichnet) berücksichtigt. Mit diesem Faktor wird allerdings nur der zeitlich veränderliche Anteil einer Schwingbeanspruchung, die Amplitude also, korrigiert. Für eine polierte Oberfläche ($R_z \leq 1\mu\text{m}$) als Referenzzustand gilt: $C_o = 1$.

Zur Quantifizierung des Oberflächenfaktors muss zwischen Normal- und Schubspannungen unterschieden werden.

13.7.2.1 Oberflächenfaktor unter der Wirkung von Normalspannungen

Unter der Wirkung von Normalspannungen kann der Betrag des Oberflächenfaktors $C_{o\sigma}$ in Abhängigkeit der Zugfestigkeit des Werkstoffs sowie des Oberflächenzustandes (R_z -Wert) für Walzstähle, Eisengusswerkstoffe und Gusseisen mit Lamellengraphit aus Bild 13.35 entnommen werden.

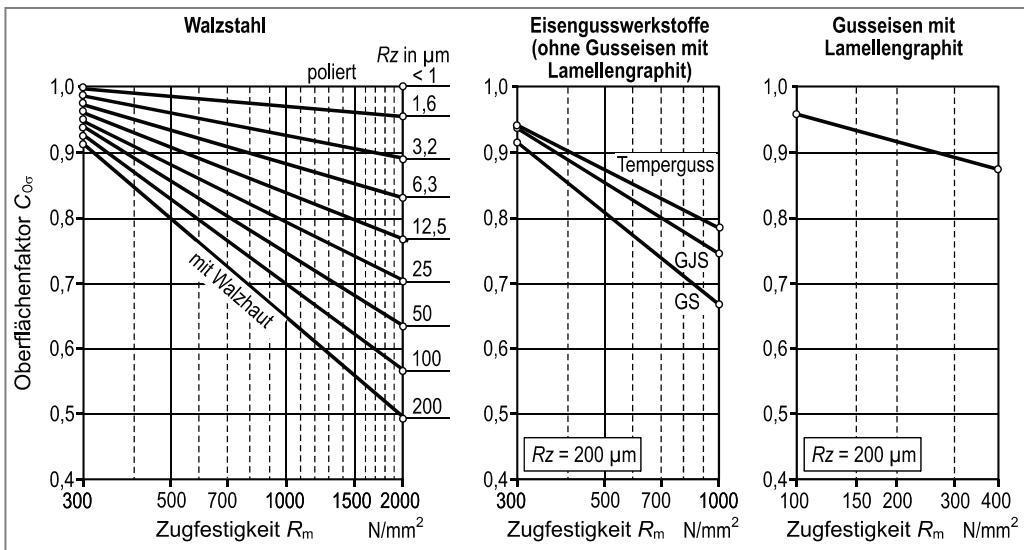


Bild 13.35 Oberflächenfaktor $C_{o\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen für Walzstahl, Temperguss, Gusseisen mit Kugelgraphit (GJS), Stahlguss (GS) und Gusseisen mit Lamellengraphit [2]

Alternativ kann der Oberflächenfaktor $C_{O\sigma}$ für Stähle und Eisengusswerkstoffe auch mit Hilfe der nachfolgenden der Korrelationsgleichung nach *Hück* [20] abgeschätzt werden:

$$C_{O\sigma} = 1 - 0,22 \cdot (\lg R_z)^{0,64} \cdot \lg R_m + 0,45 \cdot (\lg R_z)^{0,53} \quad \text{Rauheitsfaktor nach Hück} \quad (13.69)$$

$C_{O\sigma}$ = Oberflächenfaktor unter der Wirkung von Normalspannungen

R_z = Rz-Wert (μm)

R_m = Zugfestigkeit (N/mm^2)

Für Aluminiumknetlegierungen ergibt sich der Oberflächenfaktor $C_{O\sigma}$ unter Wirkung von Normalspannungen näherungsweise nach FKM-Richtlinie [2]:

$$C_{O\sigma} = 1 - 0,22 \cdot \lg R_z \cdot \lg \left(\frac{2 \cdot R_m}{133} \right) \quad \text{Rauheitsfaktor für Aluminiumknetlegierungen unter der Wirkung von Normalspannungen} \quad (13.70)$$

Für Aluminiumgusslegierungen folgt entsprechend [2]:

$$C_{O\sigma} = 1 - 0,20 \cdot \lg R_z \cdot \lg \left(\frac{2 \cdot R_m}{133} \right) \quad \text{Rauheitsfaktor für Aluminiumgusslegierungen unter der Wirkung von Normalspannungen} \quad (13.71)$$

Bild 13.35 bzw. Gleichung 13.69 bis 13.71 lassen erkennen, dass mit zunehmender Festigkeit des Werkstoffs der Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit auf die Schwingfestigkeit zunimmt (C_O sinkt mit zunehmendem R_m). Ursache ist eine mit steigender Festigkeit in der Regel abnehmende plastische Verformungsfähigkeit des Werkstoffs. Ein verminderter Verformungsvermögen führt aber zu einer höheren Kerbempfindlichkeit. Die Schwingfestigkeit hochfester Werkstoffe wird damit durch Kerben und auch durch die Oberflächenrauhigkeit („Mikrokerben“) besonders stark vermindert.

13.7.2.2 Oberflächenfaktor unter der Wirkung von Schubspannungen

Unter der Wirkung von Schubspannungen kann der Betrag des Oberflächenfaktors C_{Ot} in Abhängigkeit der Werkstoffart aus Bild 13.36 entnommen werden.

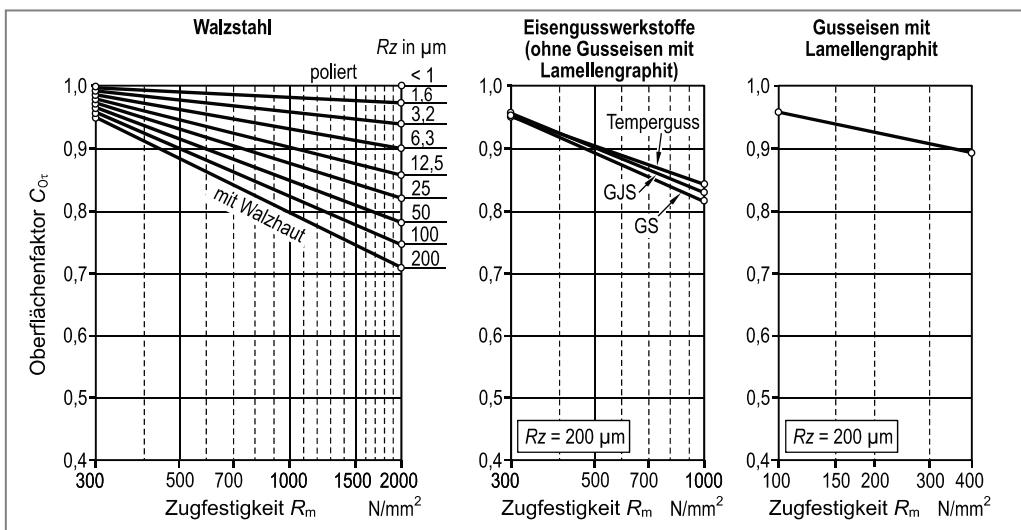


Bild 13.36 Oberflächenfaktor C_{Ot} unter der Wirkung von Schubspannungen für Walzstahl, Temperguss, Gusseisen mit Kugelgraphit (GJS), Stahlguss (GS) und Gusseisen mit Lamellengraphit [2]

Für Aluminiumknetlegierungen kann der Oberflächenfaktor $C_{O\tau}$ unter Wirkung von Schubspannungen aus der nachfolgenden Korrelationsgleichung nach FKM-Richtline [2] abgeschätzt werden:

$$C_{O\tau} = 1 - 0,127 \cdot \lg R_z \cdot \lg \left(\frac{2 \cdot R_m}{133} \right) \quad \text{Rauheitsfaktor für Aluminiumknetlegierungen unter der Wirkung von Schubspannungen} \quad (13.72)$$

$C_{O\tau}$ = Oberflächenfaktor unter der Wirkung von Schubspannungen

R_z = Rz-Wert (μm)

R_m = Zugfestigkeit (N/mm^2)

Für Aluminiumgusslegierungen folgt [2]:

$$C_{O\tau} = 1 - 0,150 \cdot \lg R_z \cdot \lg \left(\frac{2 \cdot R_m}{133} \right) \quad \text{Rauheitsfaktor für Aluminiumgusslegierungen unter der Wirkung von Schubspannungen} \quad (13.73)$$

13.7.2.3 Berücksichtigung des Oberflächeneinflusses im Festigkeitsnachweis

Eine raue Oberfläche ($Rz > 1 \mu\text{m}$) führt zu einer Verminderung der dauernd ertragbaren Spannungsspannungsamplitude, also zu einer Verminderung der Beanspruchbarkeit (Bild 13.37).

Im Rahmen eines Festigkeitsnachweises wird dementsprechend (unter der Wirkung von Normalspannungen) die Wechselfestigkeit σ_w mit dem Größenfaktor $C_{O\sigma}$ multipliziert und erhält auf diese Weise die **korrigierte Wechselfestigkeit σ_w^*** (Zug-Druck- oder Biegewechselfestigkeit):

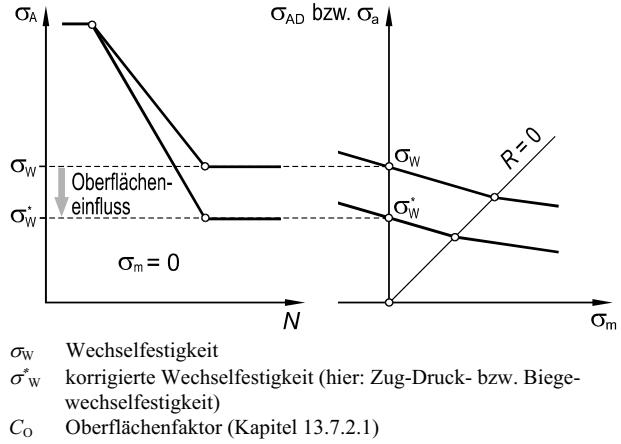


Bild 13.37 Ermittlung der korrigierten Wechselfestigkeit

$$\sigma_w^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_w \quad \text{Korrigierte Zug-Druck- bzw. Biegewechselfestigkeit} \quad (13.74)$$

In analoger Weise erhält man bei Schubbeanspruchung (z. B. Torsion) die korrigierte Schubwechselfestigkeit τ_w^* zu:

$$\tau_w^* = C_{O\tau} \cdot \tau_w \quad \text{Korrigierte Schubwechselfestigkeit} \quad (13.75)$$

Die korrigierte Wechselfestigkeit σ_w^* bzw. τ_w^* wird in den entsprechenden Gleichung (z. B. Gleichung 13.42 oder Gleichungen 13.60 bis 13.67 anstelle der Wechselfestigkeit σ_w bzw. τ_w eingesetzt.

13.7.3 Einfluss der Proben- bzw. Bauteilgröße - Größeneinfluss

Ergebnisse aus Schwingfestigkeitsversuchen, die an geometrisch ähnlichen, jedoch unterschiedlich großen Proben bzw. Bauteilen ermittelt werden, stimmen in der Regel nicht überein.

Überträgt man die an kleinen Proben bzw. Bauteilen ermittelten Ergebnisse auf große Proben bzw. Bauteile, so führt dies häufig zu einer Über- schätzung des tatsächlichen Werkstoffverhaltens d. h. mit zunehmender Bauteilgröße verschlechtert sich die Schwingfestigkeit (Bild 13.38). Hierfür gibt es im Wesentlichen drei Ursachen:

- Spannungsmechanischer (geometrischer) Größeneinfluss
- Statistischer Größeneinfluss
- Technologischer Größeneinfluss.

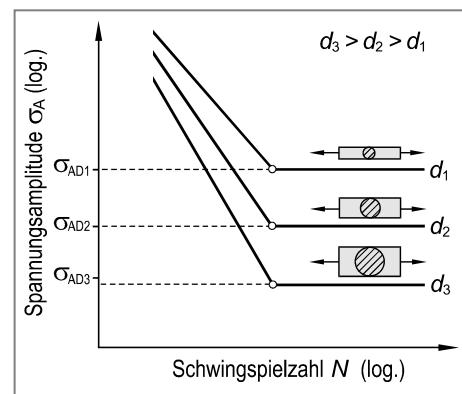


Bild 13.38 Einfluss der Probengröße auf die Schwingfestigkeit am Beispiel des Probendurchmessers

13.7.3.1 Spannungsmechanischer (geometrischer) Größeneinfluss

Für ungekerbte Bauteile, die einer äußeren Beanspruchung unterliegen, die zu einer inhomogenen Spannungsverteilung führt (z. B. Biegung oder Torsion), nimmt bei gleicher Randspannung σ_{\max} der Spannungsgradient $\chi = d\sigma / dx$ mit abnehmender Probengröße zu (Bild 13.39a).

Entscheidend für eine Rissinitiierung ist hierbei die Ausdehnung s derjenigen Werkstoffschicht, die mit der Maximalspannung von beispielsweise $0,9 \dots 1,0 \cdot \sigma_{\max}$ beaufschlagt ist. Diese „hoch beanspruchte Schicht“ (bzw. das hoch beanspruchte Volumen) hat bei der großen Probe aufgrund ihres flacheren Spannungsgradienten eine größere Ausdehnung ($s_1 > s_2$), Bild 13.39a (gleiche Randspannung vorausgesetzt). Mit zunehmender Größe des hoch beanspruchten Volumens steigt die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein einer Riss auslösenden Fehlstelle (Kapitel 13.7.3.2). Anders formuliert, ist bei einer milden Kerbe mehr Werkstoffvolumen einer hohen Spannung ausgesetzt. Die Schwingfestigkeit verschlechtert sich dementsprechend. Daher verhalten sich kleine Proben (steiler Spannungsgradient bzw. kleines hoch beanspruchtes Volumen) unter Schwingbeanspruchung günstiger.

Vergleichbare Verhältnisse liegen auch bei gekerbten Proben vor. Auch hier nimmt, gleiche Randspannung vorausgesetzt, mit abnehmender Probengröße der Spannungsgradient zu und damit das hoch beanspruchte Volumen ab (Bild 13.39b).

Der spannungsmechanische Größeneinfluss ist teilweise bereits mit dem Werkstoffkennwert berücksichtigt. So hat zum Beispiel bei ungekerbten Proben bzw. Bauteilen die Biege-Wechselfestigkeit (σ_{bw}) im Vergleich zur Zug-Druck-Wechselfestigkeit (σ_{zdW}) einen um etwa 10% bis 30% höheren Wert (Tabelle 13.2). Bei gekerbten Proben wird hingegen die Probengröße bei der Ermittlung der Kerbwirkungszahl β_k berücksichtigt (siehe Kapitel 13.7.8.2).

Der spannungsmechanische Größeneinfluss ist bei kleinen Proben (bis etwa 50 mm) besonders ausgeprägt, während bei größeren Proben aufgrund der nur noch geringfügigen Veränderung des Spannungsgradienten ein signifikanter Größeneinfluss kaum mehr zu beobachten ist.

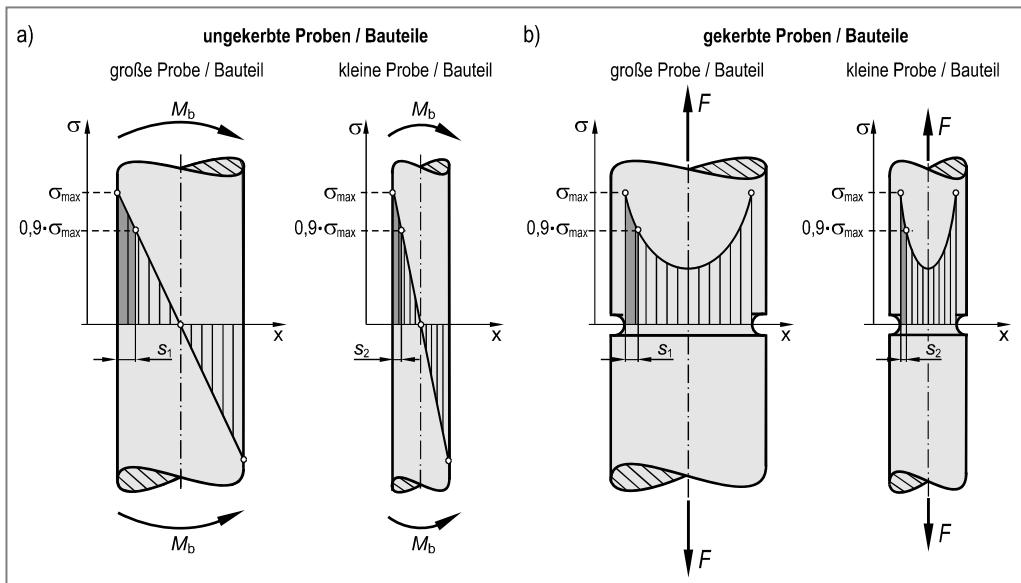


Bild 13.39 Veranschaulichung des spannungsmechanischen Größeneinflusses auf die Schwingfestigkeit

13.7.3.2 Statistischer Größeneinfluss

Mit zunehmender Proben- bzw. Bauteilgröße nimmt auch die Oberfläche bzw. das Volumen zu. Damit steigt die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein einer Schwingbruch auslösenden Fehlstelle im oberflächennahen, hoch beanspruchten Werkstoffvolumen (Bild 13.40).

Mit Ausnahme axial beanspruchter ungekerbter Proben (kein Spannungsgefälle) wird der statistische Größeneinfluss vom geometrischen Größeneinfluss zahlenmäßig nicht getrennt berücksichtigt, da eine Vergrößerung der Probenabmessungen das Spannungsgefälle vermindert und damit zu einer Vergrößerung des hoch beanspruchten Werkstoffvolumens führt.

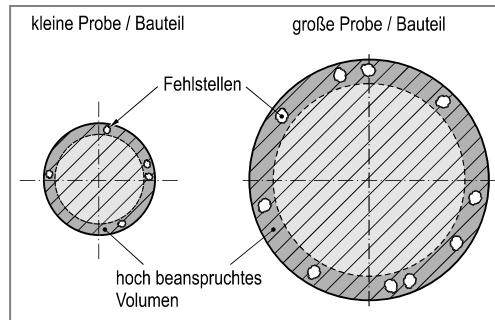


Bild 13.40 Veranschaulichung des statistischen Größeneinflusses

13.7.3.3 Technologischer Größeneinfluss

Die Herstellungstechnologie großer bzw. dickwandiger Bauteile, beispielsweise durch Gießen, Umformen oder Wärmebehandeln, unterscheidet sich in der Regel von der Herstellung kleiner bzw. dünnwandiger Bauteile. Aufgrund von größenabhängigen Effekten wie zum Beispiel der Abkühlgeschwindigkeit (und der davon abhängigen Gefügeausbildung) oder des Umformgrades, liegt in Abhängigkeit der Bauteilgröße ein unterschiedlicher Werkstoff- und Eigenspannungszustand und somit ein verändertes Schwingfestigkeitsverhalten vor. So erhält man beispielsweise beim Vergüten dünnwandiger Proben bzw. Bauteile ein Vergütungsgefüge über die gesamte Querschnittsfläche, während sich bei dickwandigen Proben bzw. Bauteilen zum

Kern hin ein Gefüge mit geringerer Festigkeit (Perlit, Ferrit) ausbildet. Dementsprechend zeigen kleine Proben bzw. Bauteile eine höhere Festigkeit und somit auch ein günstigeres Schwingfestigkeitsverhalten im Vergleich zu Proben aus der Rand- oder Kernzone dickwandiger Bauteile (Bild 13.41).

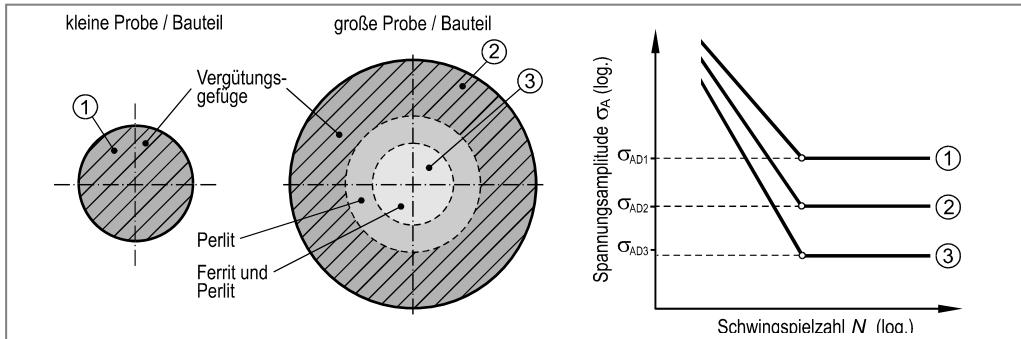


Bild 13.41 Veranschaulichung des technologischen Größeneinflusses am Beispiel eines vergüteten Bauteils

Da der technologische Größeneinfluss den geometrischen und den statistischen Größeneinfluss teilweise deutlich überwiegt, ist es empfehlenswert, diese Einflussgröße besonders sorgfältig zu ermitteln.

Da Schwingrisse in der Regel von der Bauteiloberfläche ausgehen, sollten die Kennwerte der Schwingfestigkeit an Proben ermittelt werden, die hinsichtlich Festigkeit und Werkstoffzustand dem oberflächennahen Bauteilbereich entsprechen. In diesem Fall muss ein technologischer Größeneinfluss auf die Schwingfestigkeit nicht mehr berücksichtigt werden.

13.7.3.4 Quantifizierung des Größeneinflusses und Berücksichtigung im Festigkeitsnachweis

Die oben genannten Grundmechanismen lassen sich nicht eindeutig voneinander trennen. So hat beispielsweise ein großes, biegebeanspruchtes Bauteil gegenüber einer kleinen Probe einen geringen Spannungsgradienten, aufgrund der großen Oberfläche ein großes hoch beanspruchtes Volumen sowie unterschiedliche herstellungs- und verarbeitungsbedingte Werkstoffeigenschaften. Nicht zuletzt aufgrund der teilweisen Abhängigkeit der Grundmechanismen voneinander, ist es in der Praxis daher häufig schwierig und aufwändig, den Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit quantitativ zu erfassen.

Falls zur Ermittlung des Schwingfestigkeitsverhaltens keine hinsichtlich Probengröße und Herstellungsverfahren bauteilähnliche Proben verwendet werden, so kann der Größeneinfluss bei gekerbten Bauteilen über die Kerbwirkungszahl β_k (Kapitel 13.7.8.1) erfasst werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, in Analogie zum Oberflächeneinfluss, den Größeneinfluss pauschal durch Einführung eines **Größenfaktors C_G** zu berücksichtigen. In der Literatur finden sich zahlreiche Ansätze den Größenfaktor C_G zu quantifizieren. Hierauf kann im Rahmen dieses einführenden Lehrbuches allerdings nicht näher eingegangen werden. Ein Überblick findet sich beispielsweise in [22].

Sofern das höchst beanspruchte Volumen der Probe ($V_{90\% \text{ Probe}}$) sowie des Bauteils ($V_{90\% \text{ Bauteil}}$) ermittelt werden können, dann ist beispielsweise mit Hilfe von Bild 13.42 eine grobe Abschätzung des Größenfaktors C_G möglich.

Analog zum Oberflächeneinfluss (Kapitel 13.7.2.3) führt auch der Größeneinfluss zu einer Verminderung der dauernd ertragbaren Amplitude. Dementsprechend erhält man die korrigierte Wechselfestigkeit σ_w^* bzw. τ_w^* durch Multiplikation der Wechselfestigkeit σ_w bzw. τ_w mit dem Größenfaktor C_G :

$$\sigma_w^* = C_G \cdot \sigma_w \quad (13.76)$$

In analoger Weise erhält man bei Schubbeanspruchung (z. B. Torsion) die korrigierte Schubwechselfestigkeit τ_w^* zu:

$$\tau_w^* = C_G \cdot \tau_w \quad (13.77)$$

Die korrigierte Wechselfestigkeit σ_w^* bzw. τ_w^* wird in den entsprechenden Gleichungen (z. B. Gleichung 13.42 und Gleichungen 13.60 bis 13.67) anstelle der Wechselfestigkeit σ_w bzw. τ_w eingesetzt. Bei gleichzeitigem Oberflächen- und Größeneinfluss wird die Wechselfestigkeit σ_w^* bzw. τ_w^* sinngemäß mit dem Oberflächenfaktor C_O und dem Größenfaktor C_G multipliziert. Abschließend ist noch zu erwähnen, dass eine Reihe von Autoren wie zum Beispiel [13] einen Größeneinfluss nicht berücksichtigt.

13.7.4 Einfluss der Temperatur

Eine steigende Temperatur führt in der Regel zu einer Verminderung der Beanspruchbarkeit. Dementsprechend vermindert sich mit steigender Temperatur auch die Wechselfestigkeit σ_w bzw. τ_w . Der Einfluss der Temperatur auf die Wechselfestigkeit des Werkstoffes wird durch einen **Temperaturfaktor C_T** berücksichtigt. Übliche Werte in Abhängigkeit der Werkstoffart sind in Tabelle 13.3 zusammengestellt [2].

Tabelle 13.3 Temperaturfaktor in Abhängigkeit der Werkstoffart nach [2]

Werkstoffart	Temperatur °C ¹⁾	Temperaturfaktor $C_T^{2)}$
Stähle außer Feinkornbaustähle und nichtrostende Stähle ³⁾	100 ... 500	$C_T = 1 - 1,4 \cdot 10^{-3} \cdot (\vartheta - 100^\circ\text{C})$
Feinkornbaustähle	60 ... 500	$C_T = 1 - 10^{-3} \cdot \vartheta$
Stahlguss	100 ... 500	$C_T = 1 - 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot (\vartheta - 100^\circ\text{C})$
Gusseisen mit Lamellengraphit	100 ... 500	$C_T = 1 - (10^{-3} \cdot \vartheta)^2$
Gusseisen mit Kugelgraphit	100 ... 500	$C_T = 1 - 1,6 \cdot (10^{-3} \cdot \vartheta)^2$
Temperguss	100 ... 500	$C_T = 1 - 1,3 \cdot (10^{-3} \cdot \vartheta)^2$
Aluminiumwerkstoffe	50 ... 200	$C_T = 1 - 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot (\vartheta - 50^\circ\text{C})$

¹⁾ Bereich der Gültigkeit des Temperaturfaktors C_T

²⁾ ϑ = Betriebstemperatur in °C

³⁾ Für nichtrostende Stähle sind keine Temperaturfaktoren bekannt

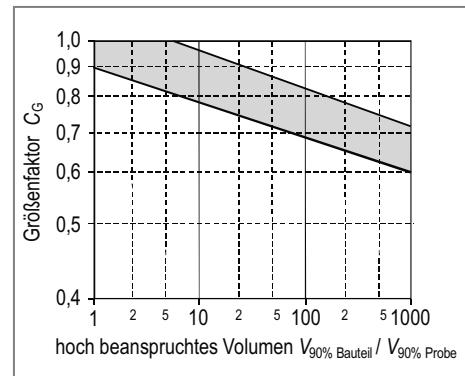


Bild 13.42 Diagramm zur Abschätzung des Größenfaktors C_G nach [22]

Analog zum Oberflächen- bzw. zum Größeneinfluss (Kapitel 13.7.2 und 13.7.3) führt auch der Temperatureinfluss zu einer Verminderung der dauernd ertragbaren Amplitude. Dementsprechend erhält man die korrigierte Wechselfestigkeit σ_w^* bzw. τ_w^* durch Multiplikation der Wechselfestigkeit σ_w bzw. τ_w mit dem Temperaturfaktor C_T .

Bei erhöhter Temperatur und insbesondere einer Zugmittelspannung ($\sigma_m > 0$) ist außerdem zu berücksichtigen, dass die maximale Spannung (Oberspannung) die statischen Werkstoffkennwerte d. h. die Warmdehngrenze bzw. die Warmzugfestigkeit oder sogar die Zeitdehngrenze bzw. die Zeitstandfestigkeit überschreiten und damit Bauteilversagen auslösen kann.

13.7.5 Einfluss einer Oberflächenverfestigung (Randschichteinfluss)

Der Zustand der Bauteiloberfläche (bis in eine Tiefe, die der technischen Anrißphase entspricht, also etwa 0,5 mm ... 1 mm) hat einen erheblichen Einfluss auf die Schwingfestigkeit, da Ermüdungsrisse meist von der Oberfläche bzw. der oberflächennahen Schicht ausgehen. Mit einer Verbesserung der Schwingfestigkeit ist dann zu rechnen, falls durch das angewandte Verfahren in der Oberflächenschicht die Werkstofffestigkeit örtlich verbessert und Druckeigenspannungen eingebracht werden. Hierzu zählen insbesondere die folgenden Verfahren:

- Nitrieren und Nitrocarburieren
- Einsatzhärten und Carbonitrieren
- Flamm- und Induktionshärten
- Festwalzen und Kugelstrahlen

Der Einfluss einer Oberflächenverfestigung (Randschichteinfluss) wird durch den **Randschichtfaktor C_V** erfasst. Übliche Werte des Randschichtfaktors nach DIN 743-2 sind in Abhängigkeit des angewandten Verfahrens für ungekerbte und gekerbte Proben in den Tabellen 13.4 und 13.5 zusammengestellt. Vergleichbare Zahlenwerte finden sich auch in [2].

Die erzielbare Steigerung der Beanspruchbarkeit durch die genannten Verfahren der Oberflächenverfestigung ist umso ausgeprägter, je steiler der Spannungsgradient senkrecht zur Oberfläche ist. Die genannten Verfahren der Oberflächenverfestigung sind demnach, wie die Zahlenwerte in den Tabellen 13.4 und 13.5 zeigen, bei gekerbten Proben oder Bauteilen deutlich wirkungsvoller. Die Ursachen sind, wie bereits erwähnt, einerseits in einer signifikanten Anhebung der lokalen Werkstofffestigkeit und andererseits in der Einbringung hoher Druckeigenspannungen im Kerbgrund zu sehen. Auch bei dünnen, auf Biegung oder Torsion beanspruchten Bauteilen ist aus den genannten Gründen eine signifikante Steigerung der Beanspruchbarkeit festzustellen.

In der Praxis können jedoch auch Oberflächenzustände auftreten, die zu einer Verschlechterung der Schwingfestigkeit führen. Dies ist insbesondere immer dann der Fall, falls Zug-eigenspannungen eingebracht werden. Hierzu zählen die folgenden Verfahren:

- Umformen
- Gießen
- spanende Bearbeitung wie Drehen oder Fräsen (sofern Zugeigenspannungen entstehen)

Die Berücksichtigung eines Randschichteinflusses im Rahmen eines Festigkeitsnachweises erfolgt in analoger Weise zum Oberflächen-, Größen- oder Temperatureinfluss durch Multiplikation der Wechselfestigkeit σ_w bzw. τ_w mit dem Randschichtfaktor C_V .

Abschließend bleibt noch anzumerken, dass die Verfahren der Oberflächenverfestigung im Bereich der Dauerfestigkeit besonders effektiv sind. Im Bereich der Zeit-, Kurzzeit- oder Betriebsfestigkeit liegen hingegen deutlich höhere Beanspruchungen vor, die zu einem teilweisen Abbau der durch diese Verfahren eingebrachten Druckeigenspannungen führen.

Tabelle 13.4 Kennzahlen zum Einfluss einer Oberflächenhärtung für Stähle nach DIN 743-2

Verfahren	Randschichtfaktor C_V ¹⁾ ungekerbt	Randschichtfaktor C_V ¹⁾ gekerbt	Bemerkungen
Nitrieren Nitrierhärtetiefe: 0,1 ... 0,4 mm Oberflächenhärte: 700 ... 1000 HV10	1,10 ... 1,15 (1,15 ... 1,25)	1,20 ... 2,00 (1,50 ... 2,50)	<ul style="list-style-type: none"> • Aufbau hoher Druckeigenspannungen. • Steigerung der Dauerfestigkeit mit zunehmender Nitrierhärtetiefe erzielbar.
Einsatzhärten Einsatzhärtetiefe: 0,2 ... 0,8 mm Oberflächenhärte: 670 ... 750 HV10	1,10 ... 1,50 (1,20 ... 2,10)	1,20 ... 2,00 (1,50 ... 2,50)	<ul style="list-style-type: none"> • Aufbau hoher Druckeigenspannungen. • Steigerung der Dauerfestigkeit mit zunehmender Einsatzhärtungstiefe erzielbar.
Carbonitrieren Einsatzhärtetiefe: 0,2 ... 0,4 mm Oberflächenhärte: 670 HV10	1,00 ... 1,40 (1,10 ... 1,90)	1,10 ... 1,80 (1,40 ... 2,25)	
Flamm- und Induktionshärten Einhärtungstiefe: 0,9 ... 1,5 mm Oberflächenhärte: 51 ... 64 HRC	1,10 ... 1,40 (1,20 ... 1,60)	1,20 ... 1,80 (1,40 ... 2,00)	<ul style="list-style-type: none"> • Aufbau hoher Druckeigenspannungen durch Austenit-Martensit-Umwandlung (effektive Volumenvergrößerung 1% ... 2%) • Achtung: Anrißbildung möglich!

¹⁾ Richtwerte, gültig für die Bauteil-Dauerfestigkeit

Werte ohne Klammern: Probendurchmesser 25 mm ... 40 mm

Werte in Klammern: Probendurchmesser 8 mm ... 25 mm für Nitrieren, Einsatzhärten und Carbonitrieren
Probendurchmesser 7 mm ... 25 mm für Flamm- und Induktionshärten

Tabelle 13.5 Kennzahlen zum Einfluss einer mechanischen Verfestigung der Bauteilloberfläche für Stähle nach DIN 743-2

Verfahren	Randschichtfaktor C_V ¹⁾ ungekerbt	Randschichtfaktor C_V ¹⁾ gekerbt	Bemerkungen
Festwalzen (Rollen)	1,10 ... 1,25 (1,20 ... 1,40)	1,30 ... 1,80 (1,50 ... 2,20)	Wirkungsweise: <ul style="list-style-type: none"> • Aufbau hoher Druckeigenspannungen. • Glättung der Oberfläche (Rauigkeit). • Zusammendrücken von Poren. • Achtung: Anrißbildung möglich !
Kugelstrahlen	1,10 ... 1,20 (1,10 ... 1,30)	1,10 ... 1,50 (1,40 ... 2,50)	<ul style="list-style-type: none"> • Stahl-, Keramik-, Glaskugeln (0,2 ... 4 mm). • Druckeigenspannungsschicht: 0,02 ... 0,2 mm. • Druckeigenspannungen können bis zur Hälfte der Werkstofffließgrenze erreichen. • Höherfeste Werkstoffe besser geeignet, da Druckeigenspannungszustand dort besser aufgebaut und erhalten wird.

¹⁾ Richtwerte, gültig für die Bauteil-Dauerfestigkeit

Werte ohne Klammern: Probendurchmesser 25 mm ... 40 mm

Werte in Klammern: Probendurchmesser 7 mm ... 25 mm

13.7.6 Einfluss von Eigenspannungen

Eigenspannungen sind Spannungen im Innern eines Bauteils, ohne das Vorhandensein einer äußeren Beanspruchung. Eigenspannungen befinden sich stets im inneren Gleichgewicht und sind daher inhomogen verteilt. Eigenspannungen überlagern sich den Lastspannungen. Hinsichtlich der räumlichen Ausdehnung unterscheidet man **Eigenspannungen erster Art** (Ausdehnung über makroskopische Bereiche), **Eigenspannungen zweiter Art** (Ausdehnung über einige Kristallite) und **Eigenspannungen dritter Art** (wirken innerhalb eines Kristalliten). Im Hinblick auf die Schwingfestigkeit sind insbesondere Eigenspannungen erster Art von Bedeutung.

Anstelle einer pauschalen Berücksichtigung von Eigenspannungen mit Hilfe entsprechender Kennzahlen, kann bei bekannter oder abschätzbarer Größe der Eigenspannungen (σ_{Ei}), ihr Einfluss auch mit Hilfe des Dauerfestigkeitsschaubildes quantifiziert werden. Entscheidend ist hierbei der Betrag der Eigenspannungen im Bereich der Oberfläche, da Ermüdungsrisse in der Regel von der Proben- oder Bauteilloberfläche ausgehen.

Analog zur Mittelspannungsempfindlichkeit M (Kapitel 13.7.1.2) nimmt die Eigenspannungsempfindlichkeit M_{Ei} mit steigender Zugfestigkeit des Werkstoffs

zu, da der Abbau von Eigenspannungen mit zunehmender Werkstofffestigkeit erschwert wird (Bild 13.43). Im Vergleich zur Mittelspannungsempfindlichkeit M ist der Betrag der Eigenspannungsempfindlichkeit M_{Ei} etwas geringer. Eine Erklärung für diese Beobachtung ist in einer lokalen Plastifizierung des Werkstoffs, verbunden mit einem Abbau der inhomogen verteilten Eigenspannungen zu sehen. Die besonders starke Verminderung der Mittelspannungsempfindlichkeit bei hochfesten Stählen ($R_m > 1500 \text{ N/mm}^2$) ist ungeklärt. Bild 13.44 zeigt den Einfluss von Eigenspannungen (σ_{Ei}) auf die dauernd ertragbare Spannungsamplitude.

Liegt eine eigenspannungsbehaftete Schwingbeanspruchung vor, der sich ggf. noch eine Mittelspannung aus der äußeren Belastung überlagert, dann wird ausgehend von der Wechselfestigkeit σ_w mit Hilfe des Dauerfestigkeitsschaubildes zunächst die dauernd ertragbare Spannungsamplitude σ_{AD} für die gegebene Mittelspannung bestimmt (Punkt A in Bild 13.44). Die dauernd ertragbare Spannungsamplitude unter zusätzlicher Berücksichtigung des Eigenspannungseinflusses ($\sigma_{AD,Ei}$) erhält man schließlich, indem man ausgehend vom Punkt A und unter Berücksichtigung der Eigenspannungsempfindlichkeit M_{Ei} gemäß Bild 13.43 eine weitere Spannungstransformation durchführt. Für die dauernd ertragbare Spannungsamplitude gilt dann:

$$\sigma_{AD,Ei} = \sigma_w - M_\sigma \cdot \sigma_m - M_{\sigma,Ei} \cdot \sigma_{\text{Ei}} \quad \text{Dauernd ertragbare Spannungsamplitude unter Mittel- und Eigenspannungseinfluss} \quad (13.78)$$

Für Zugeigenspannungen ist σ_{Ei} in Gleichung 13.78 positiv und für Druckeigenspannungen negativ einzusetzen.

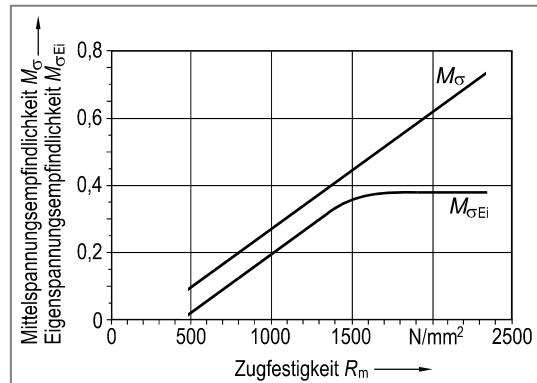


Bild 13.43 Mittelspannungs- und Eigenspannungsempfindlichkeit [16]

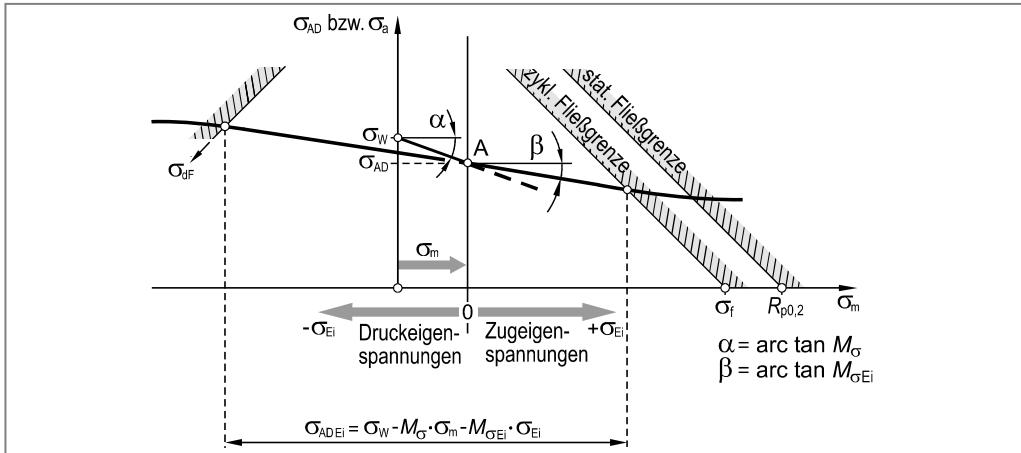


Bild 13.44 Einfluss von Eigenspannungen auf die dauernd ertragbare Spannungsamplitude am Beispiel der Wirkung von Normalspannungen

13.7.7 Frequenzeinfluss

Die Frequenz der Schwingbeanspruchung (Bild 13.45) hat bei Stählen im Bereich zwischen 1 Hz und 1000 Hz keinen nennenswerten Einfluss auf die Schwingfestigkeit, vorausgesetzt es treten keine erhöhten Temperaturen, keine Korrosion sowie keine Beanspruchungen bis nahe der Dehngrenze auf.

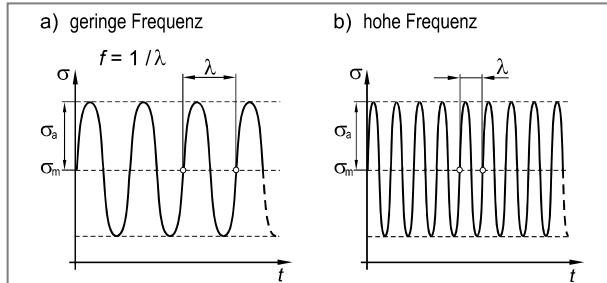


Bild 13.45 Niedrig- und hochfrequente Schwingbeanspruchung

Bei Temperaturen oberhalb der Kristallerholung überlagert sich der Werkstoffermüdung eine Werkstoffschädigung durch Kriechen. Unter diesen Bedingungen beobachtet man eine verringerte Lebensdauer des Bauteils mit sinkender Frequenz, da bei gleicher Schwingspielzahl aufgrund der längeren Versuchsdauer eine stärkere Schädigung durch Kriechen eintreten kann.

Auch unter dem Einfluss eines korrosiven Mediums, wie zum Beispiel Luftfeuchtigkeit oder Wasser, ist ein Frequenzeinfluss bei der Werkstoffermüdung zu beobachten. Mit abnehmender Frequenz der Schwingbeanspruchung steht für einen Korrosionsangriff (anodischer Teilprozess der Metallauflösung) mehr Zeit zur Verfügung. Außerdem bewirkt der Korrosionseinfluss eine Veränderung der Oberfläche im Sinne einer Erhöhung der Oberflächenrauigkeit sowie der Bildung von Mikrokerbstellen. Dementsprechend verringert sich unter Korrosionseinfluss die Bruchschwingspielzahl. Weiterhin ist unter diesen Bedingungen in der Regel keine ausgeprägte Dauerfestigkeit mehr zu erwarten (Bild 13.19b). Der kombinierte Einfluss von Werkstoffermüdung und Korrosion wird als **Korrosionsermüdung** oder **Schwingungsrisskorrosion** bezeichnet.

Während man bei Stählen in inerter Umgebung und Temperaturen unterhalb der Kristallerholung keinen nennenswerten Frequenzeinfluss auf das Ermüdungsverhalten feststellt, beobachtet man bei Leichtmetalllegierungen, wie zum Beispiel beim Aluminium, einen Anstieg der Schwingfestigkeit mit zunehmender Frequenz [16].

13.7.8 Kerbwirkung bei schwingender Beanspruchung

Ungekerbte Bauteile versagen durch Schwingbruch, falls die (Last-)Spannungsamplitude σ_a die dauernd ertragbare Spannungsamplitude σ_{AD} erreicht. Entsprechend den Erkenntnissen aus Kapitel 7 (Kerbwirkung) müsste bei einem gekerbten Bauteil hingegen mit einem Schwingbruch gerechnet werden, sobald die maximale Spannungsamplitude $\sigma_{a \max}$ die dauernd ertragbare Amplitude σ_{AD} erreicht, falls also gilt: $\sigma_{a \max} = \alpha_k \cdot \sigma_{an} = \sigma_{AD}$ bzw. $\sigma_{an} = \sigma_{AD} / \alpha_k$.

Diese theoretische Vorstellung entspricht allerdings nicht dem realen Werkstoffverhalten, da experimentelle Untersuchungen zeigen, dass eine gekerbte Probe bzw. ein gekerbtes Bauteil in der Regel eine höhere Nennspannung ertragen kann, als gemäß der Formzahl α_k zu erwarten wäre ($\sigma_{an} > \sigma_{AD} / \alpha_k$).

Aus dieser Beobachtung schließt man, dass die Maximalspannung $\sigma_{a \ max}$ bei schwingender Beanspruchung im Gebiet der Dauerfestigkeit nicht mit dem „statischen“ Wert $\sigma_{a \ max} = \alpha_k \cdot \sigma_{an}$, sondern mit einem vermindernden Betrag $\sigma_{a \ max} = \beta_k \cdot \sigma_{an}$ schädigungswirksam wird (Bild 13.46). Die effektive Spannungsüberhöhung bei Schwingbeanspruchung ist dementsprechend geringer als die theoretische Spannungsüberhöhung bei statischer Beanspruchung. Den Faktor β_k nennt man **Kerbwirkungszahl**. Anstelle von β_k wird für die Kerbwirkungszahl mitunter auch das Formelzeichen K_f (f steht für fatigue, engl.: Ermüdung) [2] oder β_c bzw. β_t [4] verwendet. Für die Dauerschwingfestigkeit von gekerbten Bauteilen ist dementsprechend nicht die Formzahl α_k sondern die Kerbwirkungszahl β_k maßgebend.

13.7.8.1 Definition der Kerbwirkungszahl

Die Kerbwirkungszahl β_k ist definiert als das Verhältnis der Dauerfestigkeit der ungekerbten, polierten Probe ($\sigma_{AD}(\alpha_k = 1)$) zur Dauerfestigkeit der gekerbten, polierten Probe, ausgedrückt durch die Nennspannung ($\sigma_{ADn}(\alpha_k > 1)$), Bild 13.47:

$$\beta_k = \frac{\sigma_{AD}(\alpha_k = 1)}{\sigma_{ADn}(\alpha_k > 1)} \quad (13.79)$$

β_k Kerbwirkungszahl

σ_{AD} dauernd ertragbare Spannungsamplitude (ungekerbte Probe)

σ_{ADn} dauernd ertragbare Nennspannungsamplitude (gekerbte Probe)

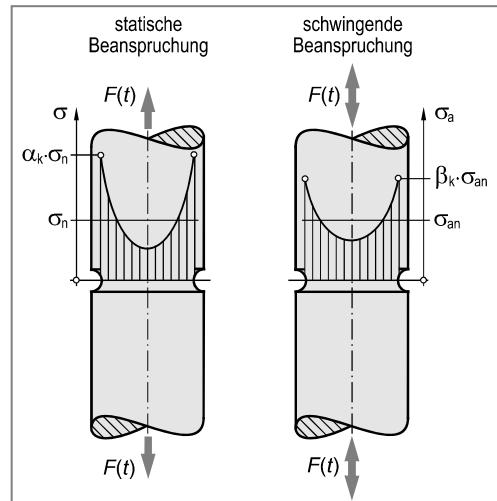


Bild 13.46 Schädigungswirksame Spannungsverteilung unter statischer und schwingender Beanspruchung am Beispiel eines gekerbten Rundstabes unter Zugbeanspruchung

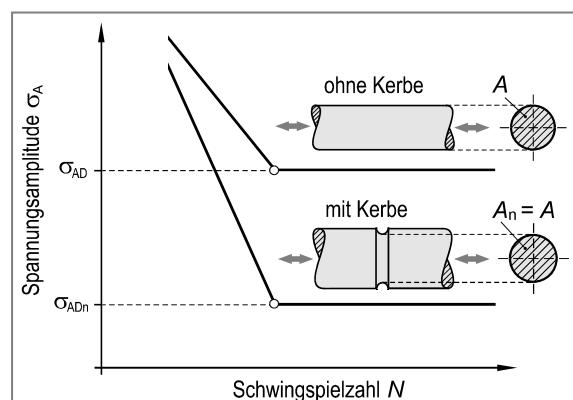


Bild 13.47 Vergleich der Wöhlerkurven eines ungekerbten und eines gekerbten Stabes (gleiche Nennspannung)

Eine Kerbe wirkt sich also weniger stark mindernd auf die Dauerfestigkeit aus, als dies durch die elastische Formzahl α_k zu erwarten wäre. Diese Feststellung ist dadurch erklärbar, dass nicht die maximale Spannung die Dauerfestigkeit bestimmt, sondern das einer hohen Spannung ausgesetzte Werkstoffvolumen. Da dieses hoch beanspruchte Werkstoffvolumen einer scharfen Kerbe (steiler Spannungsgradient) geringer ist im Vergleich zu einer milden Kerbe, ist die Kerbwirkungszahl β_k stets kleiner als die Formzahl α_k .

Der Unterschied zwischen β_k und α_k wird umso größer, je schärfere die Kerbe (d. h. die Formzahl α_k) wird, da mit zunehmender Kerbschärfe das hoch beanspruchte Volumen sinkt (Bild 13.48). Dementsprechend ist eine Rissinitierung bei der mild gekerbten Probe wahrscheinlicher.

Aus dem beschriebenen **Konzept der Mikrostützwirkung** lassen sich die folgenden Erkenntnisse ableiten:

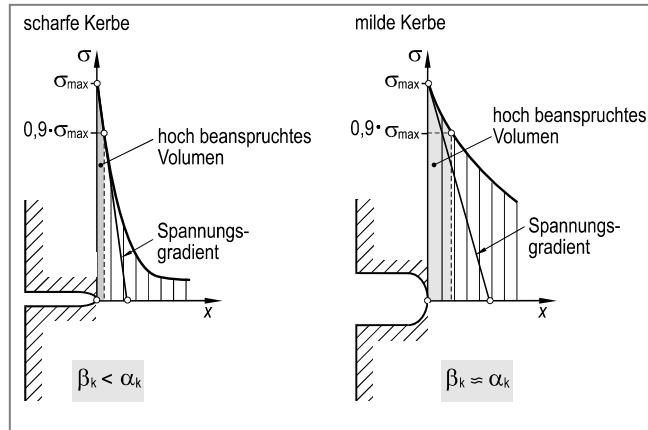


Bild 13.48 Vergleich des schädigungsrelevanten, hoch beanspruchten Volumens einer scharf und einer mild gekerbten Probe bzw. Bauteil

1. Scharfe Kerben mit hoher Formzahl zeigen einen besonders großen Unterschied zwischen der Formzahl α_k und der Kerbwirkungszahl β_k .
2. Während die Formzahl α_k mit abnehmendem Kerbradius gegen unendlich geht (siehe Formzahldiagramme), übersteigt die Kerbwirkungszahl einen Betrag von $\beta_k \approx 6$ nur selten.
3. Bei geometrisch ähnlichen Proben (gleiche Formzahl α_k) hat die große Probe (geringerer Spannungsgradient) die höhere Kerbwirkungszahl.
4. Biege- oder torsionsbeanspruchte, gekerbte Proben oder Bauteile weisen einen größeren Unterschied zwischen α_k und β_k auf, im Vergleich zu einer Zug-Druck-Bearbeitung.
5. Bei sehr kleinen Kerbamessungen ergibt sich infolge der Mikrostützwirkung auch bei milden Kerben eine signifikante Abminderung der Kerbwirkung.

13.7.8.2 Berechnungsverfahren für die Kerbwirkungszahl β_k

Entscheidend für eine Rissinitiierung ist der Spannungsgradient im Kerbgrund. Eine weit verbreitete empirische Methode zur Ermittlung der Kerbwirkungszahl β_k stellt der **Spannungsgradientenansatz** nach Siebel, Meuth und Stieler dar [23 bis 26]. Nach dieser Methode geht man zur Ermittlung der Kerbwirkungszahl β_k wie nachfolgend beschrieben vor.

1. Berechnung des (bezogenen) Spannungsgradienten χ^+

Der bezogene Spannungsgradient ist definiert als das Spannungsgefälle ($d\sigma / dx$) im Kerbgrund ($x = 0$) bezogen auf die maximale Spannung σ_{\max} (Spannungsspitze im Kerbgrund), Bild 13.49:

$$\chi^+ = \frac{1}{\sigma_{\max}} \cdot \frac{d\sigma}{dx} \quad (13.80)$$

Zur Ermittlung des bezogenen Spannungsgradienten stehen verschiedene Möglichkeiten zu Verfügung:

- Für einfache Geometrien stehen elementare Gleichungen für die Abschätzung des bezogenen Spannungsgradienten zur Verfügung. In Bild 13.50 ist eine Auswahl zusammengestellt. Der bezogene Spannungsgradient setzt sich dabei zusammen aus einem Anteil der sich ohne Kerbe, also allein aus der Beanspruchungsart ergibt (bei Zug- bzw. Druckbeanspruchung ist dieser Anteil Null) und einem zusätzlichen nur durch die Formkerbe verursachten Anteil.
- Für komplexe Geometrien können die bezogenen Spannungsgradienten beispielsweise mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente ermittelt werden (FEM-Analyse).
- Auf experimenteller Ebene kann der Spannungsgradient mit Hilfe der DMS-Messtechnik ermittelt werden (experimentelle Spannungsanalyse).

2. Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ

Mit zunehmendem Spannungsgradienten wird die Ausbreitung eines Schwingrisses bzw. eines bereits eingeleiteten Kurzrisses wirksam verzögert, d. h. die Stützwirkung nimmt zu. Neben dem Spannungsgradienten wird die ausgeübte Stützwirkung jedoch zusätzlich von der Werkstoffart beeinflusst. Hierbei beobachtet man mit zunehmender Werkstofffestigkeit eine abnehmende Stützwirkung.

Gemäß der beschriebenen Abhängigkeit der Stützwirkung vom Spannungsgradienten und von der Werkstoffart kann die **dynamische Stützziffer n_χ (Stützfaktor)** mit Hilfe von Bild 13.51 abgeschätzt werden.

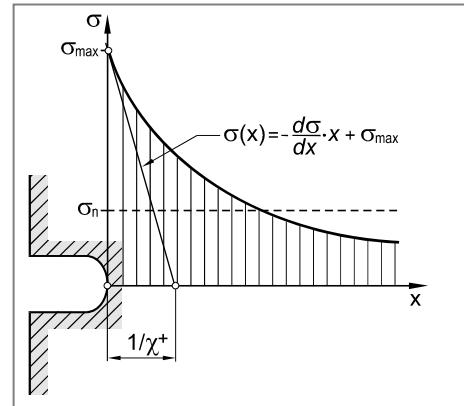


Bild 13.49 Veranschaulichung des bezogenen Spannungsgradienten χ^+

Kerbgeometrie	Beanspruchungsart	$\chi^+ / \text{1/mm}$
	Zug bzw. Druck	$\frac{2}{R}$
	Zug bzw. Druck	$\frac{2}{R}$
	Biegung	$\frac{2}{R} + \frac{2}{b}$
	Zug bzw. Druck	$\frac{2}{R}$
	Biegung	$\frac{2}{a} + \frac{2}{R}$
	Torsion	$\frac{2}{d} + \frac{1}{R}$
	Zug bzw. Druck	$\frac{2}{R}$
	Biegung	$\frac{4}{D+d} + \frac{2}{R}$
	Torsion	$\frac{4}{D+d} + \frac{1}{R}$
	Biegung	$\frac{2}{D} + \frac{8}{d_B}$
	Torsion	$\frac{2}{D} + \frac{6}{d_B}$

Bild 13.50 Bezogener Spannungsgradient χ^+ für unterschiedliche Kerbformen und Beanspruchungsarten nach [5,27]

Eine Besonderheit stellt hierbei das Gusseisen mit Lamellengraphit dar. Es hat aufgrund seiner Graphitform eine hohe **innere Kerbwirkung**, d. h. eine äußere Formkerbe wirkt sich kaum mehr auf die Schwingfestigkeit aus. Die Kerbwirkungszahl β_k unterscheidet sich dementsprechend sehr stark von der Formzahl α_k .

Ergibt sich für die dynamische Stützziffer n_χ ein Wert nahe 1,0 (z. B. hochfeste Stähle), dann liegt eine volle Kerbempfindlichkeit bei Schwingbeanspruchung vor, während ein hoher Wert für n_χ ($n_\chi \approx \alpha_k$) eine weitgehende Kerbunempfindlichkeit bedeutet (z. B. Gusseisen mit Lamellengraphit).

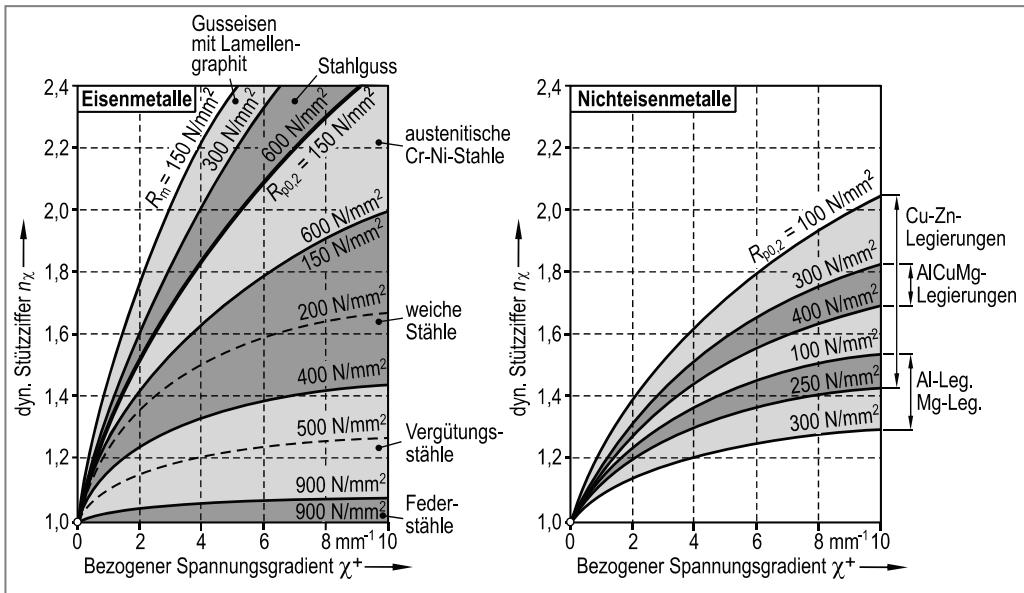


Bild 13.51 Dynamische Stützziffer (Stützfaktor) in Abhängigkeit des bezogenen Spannungsgradienten χ^+ sowie der Werkstoffart nach [5,27]

Zur Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ kann auch die nachfolgende Näherungsgleichung verwendet werden [27]:

$$n_\chi = 1 + \left(\frac{c_1}{K} \right)^m \cdot \sqrt{\frac{c_2}{R}} \quad (13.81)$$

n_χ dynamische Stützziffer (dimensionslos)

K Konstante (Werkstoffkennwert), siehe Tabelle 13.6

c_1 Konstante (Tabelle 13.6)

c_2 Konstante für die Beanspruchungsart (mm)

$c_2 = 2$ für Zug-Druck- oder Biegebeanspruchung

$c_2 = 1$ für Torsion oder Schubbeanspruchung

R Kerbradius (mm)

m Exponent (dimensionslos)

Tabelle 13.6 Berechnungsgrößen für die dynamische Stützziffer [27]

Werkstoffart	c_1 N/mm ²	K N/mm ²	m
Ferritisch-perlitische Stähle	55	$R_{p0,2}$	1,00
Austenitische Stähle	28	$R_{p0,2}$	0,45
Gusseisen mit Lamellengraphit und Stahlguss	12	R_m	0,20

3. Berechnung der Kerbwirkungszahl β_k

Entsprechend dem beschriebenen Konzept ergibt sich die Kerbwirkungszahl β_k letztlich als Quotient aus Formzahl α_k und dynamischer Stützziffer n_χ :

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{n_\chi} \quad (13.82)$$

β_k Kerbwirkungszahl

α_k Formzahl

n_χ dynamische Stützziffer

13.8 Aufgaben

Aufgabe 13.1



Die Abbildung zeigt die Wöhlerkurve eines glatten, polierten Rundstabes aus der Vergütungsstahlsorte 25CrMo4 mit Vollkreisquerschnitt ($d = 10 \text{ mm}$) für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 50\%$. Der Rundstab unterliegt einer Zug-Druck-Wechselbeanspruchung.

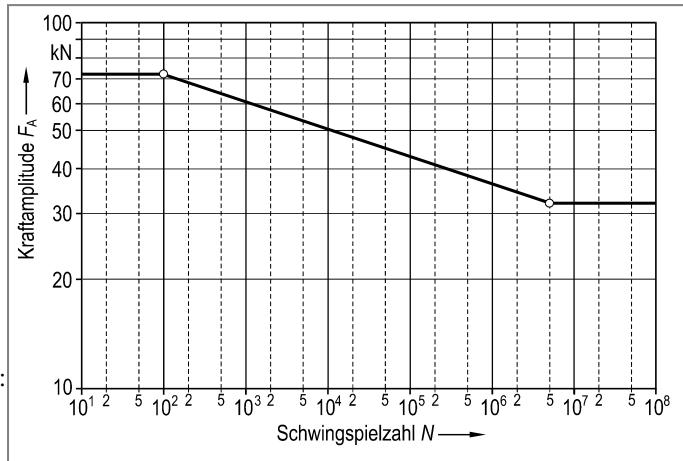
Werkstoffkennwerte 25CrMo4:

$$R_{p0,2} = 700 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 900 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 208000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

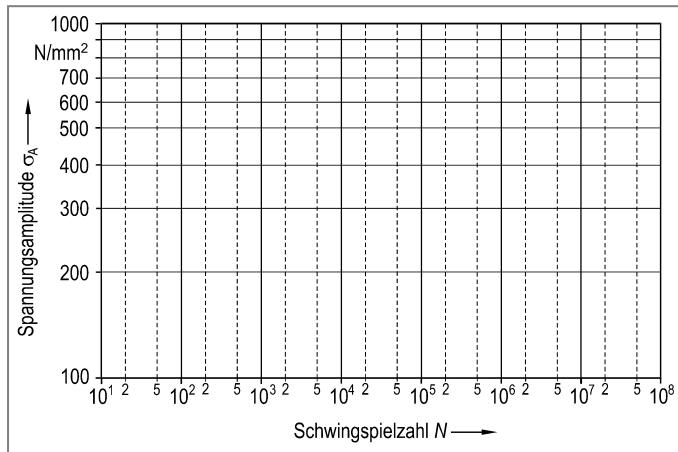


- Ermitteln Sie anhand der Wöhlerkurve die Zug-Druck-Wechselfestigkeit des Werkstoffs.
- Berechnen Sie den Neigungsexponenten k (k-Faktor) der Wöhlerkurve.
- Berechnen Sie die dauernd ertragbare Kraftamplitude F_{AD1} bei reiner Zugschwellbeanspruchung.
- Konstruieren Sie aus den gegebenen Daten das weiterentwickelte Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh und überprüfen Sie graphisch das Ergebnis aus Aufgabenteil c).
- Der Stab sei nun mit einer statischen Zugkraft von $F = 20 \text{ kN}$ vorgespannt. Berechnen Sie für diese Vorspannung die dauernd ertragbare Kraftamplitude F_{AD2} .

Aufgabe 13.2



Für die unlegierte Vergütungsstahlsorte C45E+QT ($R_m = 850 \text{ N/mm}^2$) wurde an glatten, polierten Rundproben mit Vollkreisquerschnitt ($d = 10 \text{ mm}$) eine Wöhlerkurve unter reiner Wechselbeanspruchung ermittelt.



Eine statistische Auswertung ergab für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 50\%$ die folgenden Werte:

$$\sigma_{zdW} = 350 \text{ N/mm}^2$$

$$k = 12,5$$

$$N_D = 3 \cdot 10^6$$

- Konstruieren Sie aus den gegebenen Zahlenwerten die Wöhlerkurve in das vorbereitete Diagramm.
- Berechnen Sie für eine Spannungsamplitude von $\sigma_A = 450 \text{ N/mm}^2$ und eine Prüffrequenz von $f = 15 \text{ Hz}$ die erforderliche Versuchsdauer bis zum Ausfall von 50% der bei dieser Beanspruchung geprüften Proben.
- Berechnen Sie die dauernd ertragbare Spannungsamplitude für eine statisch wirkende Mittelspannung von $\sigma_m = 150 \text{ N/mm}^2$.

Aufgabe 13.3

○○○○●

Nennen Sie je ein Beispiel aus der technischen Praxis, für die nachfolgend genannten Beanspruchungsarten.

- Zug-Schwellbeanspruchung ($\sigma_u > 0$).
- Reine Zug-Schwellbeanspruchung ($\sigma_u = 0$).
- Reine Wechselbeanspruchung ($\sigma_u = -\sigma_o$).
- Druck-Schwellbeanspruchung ($\sigma_o < 0$).
- Reine Druck-Schwellbeanspruchung ($\sigma_o = 0$)

Aufgabe 13.4

○○○●●

In einem dünnwandigen Gashochdruckbehälter ($d_i = 800 \text{ mm}$, $s = 10 \text{ mm}$) aus Werkstoff S620QL herrscht ein zeitlich veränderlicher Innendruck p_i (siehe Abbildung).

Werkstoffkennwerte S620QL:

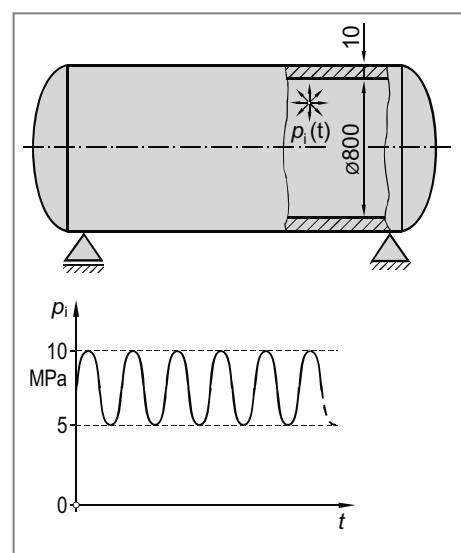
$$R_{p0,2} = 620 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 870 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- Berechnen Sie für die Tangential-, für die Axial- und für die Radialspannungskomponente jeweils die Oberspannung σ_o und die Unterspannung σ_u .
- Berechnen Sie für die Tangentialspannung σ_t :
 - die Spannungsamplitude σ_{ta}
 - die Mittelspannung σ_{tm}
 - das Spannungsverhältnis R



c) Zeichnen Sie ein σ_a - σ_m - Diagramm und kennzeichnen Sie dort die Orte mit:

- $R = -1$
- $R = -0,5$
- $R = 0$
- $R = 0,5$
- $R = 1$
- $R = \infty$

Aufgabe 13.5



Ein einseitig eingespannter Rundstab mit Vollkreisquerschnitt ($d = 25 \text{ mm}$) und einer Länge von $l = 500 \text{ mm}$ aus der legierten Vergütungsstahlsorte 37Cr4 kann auf unterschiedliche Weise beansprucht werden.

Die Oberfläche des Rundstabes ist gedreht ($Rz = 12,5 \mu\text{m}$). Kerbwirkung an der Einspannstelle, Schubspannungen durch Querkräfte (Aufgabenteil b) sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit dürfen vernachlässigt werden.

Werkstoffkennwerte 37Cr4:

$$R_{p0,2} = 820 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 950 \text{ N/mm}^2$$

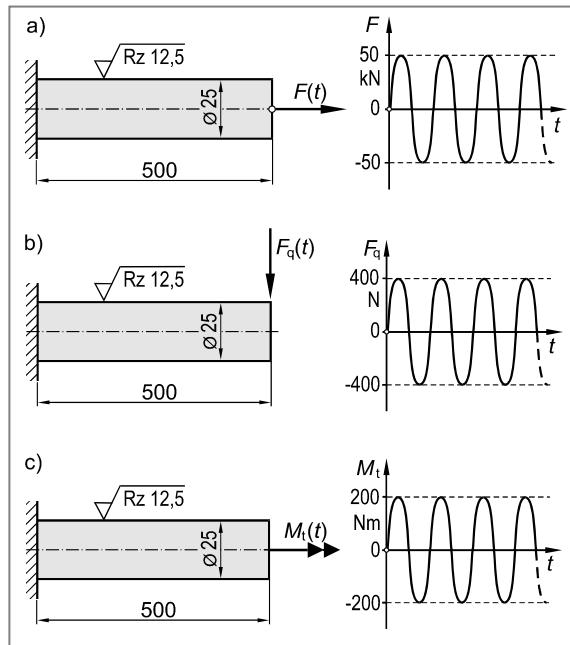
$$\sigma_{zdW} = 415 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bw} = 480 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{tw} = 240 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 212000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



Berechnen Sie die Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D) für die nachfolgenden Lastfälle.

- Rein wechselnde Zugkraft F .
- Rein wechselnde Querkraft F_q .
- Rein wechselndes Torsionsmoment M_t .

Aufgabe 13.6



Ein einseitig eingespannter Rundstab mit Vollkreisquerschnitt ($d = 30 \text{ mm}$) aus der unlegierten Baustahlsorte S275JR unterliegt einer zeitlich veränderlichen Beanspruchung.

Die Oberfläche der Welle ist gedreht ($Rz = 6,3 \mu\text{m}$). Kerbwirkung an der Einspannstelle sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit dürfen vernachlässigt werden.

Werkstoffkennwerte S275JR:

$$R_{p0,2} = 290 \text{ N/mm}^2$$

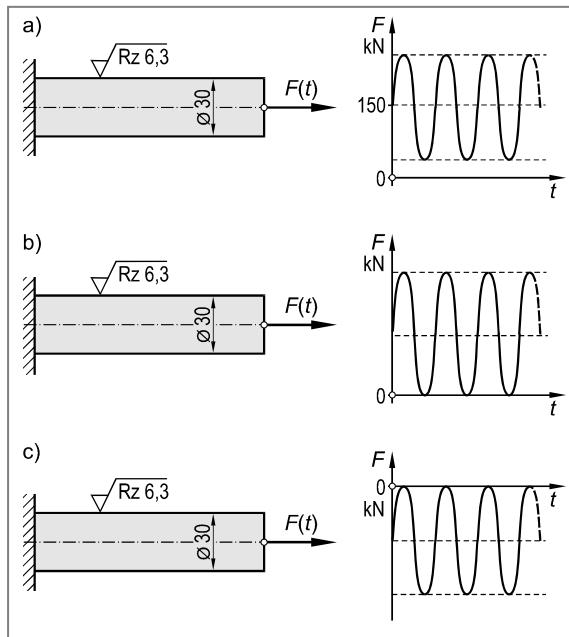
$$R_m = 540 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{zdW} = 240 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- Berechnen Sie die dauernd ertragbare Kraftamplitude F_{A1} für eine Schwingbeanspruchung mit einer statisch wirkenden Vorspannkraft von $F_m = 150 \text{ kN}$ (Abbildung a).
- Berechnen Sie die dauernd ertragbare Kraftamplitude F_{A2} für eine reine Zugschwellbeanspruchung (Abbildung b).
- Berechnen Sie die dauernd ertragbare Kraftamplitude F_{A3} für eine reine Druckschwellbeanspruchung (Abbildung c).



Aufgabe 13.7



Eine Dehschraube aus der warmfesten, legierten Stahlsorte 13CrMo4-4 mit Vollkreisquerschnitt und geschliffener Oberfläche ($Rz = 4 \mu\text{m}$) steht im Zylinderblock eines Motors unter einer statischen Vorspannung von $F_1 = 12000 \text{ N}$. Bei jedem Arbeitstakt wird die Dehschraube zusätzlich schwellend mit $F_2 = 25000 \text{ N}$ belastet.

Werkstoffkennwerte 13CrMo4-4:

$$R_{p0,2} = 300 \text{ N/mm}^2$$

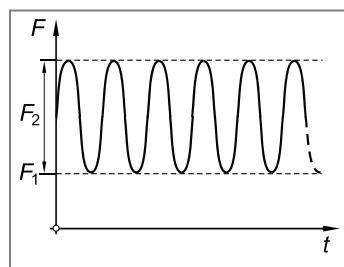
$$R_m = 560 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{zdW} = 250 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 209000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- Berechnen Sie den erforderlichen Durchmesser d der Dehschraube, falls eine Sicherheit gegen Fließen von $S_F = 1,20$ gefordert wird.
- Ermitteln Sie den notwendigen Durchmesser d , falls eine Sicherheit von $S_D = 2,80$ gegen Dauerbruch gefordert wird.



Aufgabe 13.8

Ein einseitig eingespannter Freiträger ($l = 200 \text{ mm}$) mit rechteckiger Querschnittsfläche ($a = 25 \text{ mm}$; $b = 50 \text{ mm}$) aus der Gusseisensorte EN-GJL-350 wird durch die statisch wirkende Kraft $F_1 = 120 \text{ kN}$ sowie durch die zeitlich veränderliche, rein wechselnd wirkende Kraft F_2 beansprucht. Die Oberflächenrauigkeit des Stabes kann mit $R_z = 200 \mu\text{m}$ angenommen werden.

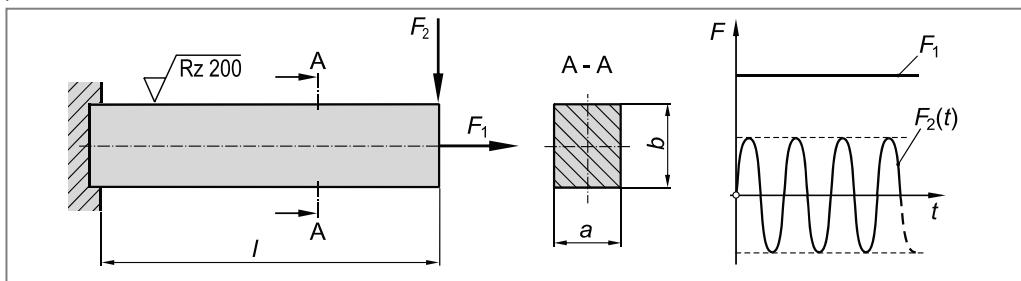
Werkstoffkennwerte EN-GJL-350:

$$R_m = 400 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bw} = 130 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 108000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,25$$



Berechnen Sie die dauernd ertragbare Kraftamplitude F_2 damit kein Dauerbruch eintritt. Es wird eine Sicherheit von $S_D = 5,0$ gefordert.

Kerbwirkung an der Einspannstelle, Schubspannungen durch Querkräfte sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit dürfen vernachlässigt werden.

Aufgabe 13.9

Eine statisch vorgespannte, abgesetzte Torsionsfeder mit gedrehter Oberfläche ($R_z = 25 \mu\text{m}$) aus der Federstahlsorte 61SiCr7 wird im Betrieb durch ein zeitlich veränderliches Torsionsmoment beansprucht (siehe Abbildung). Ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit muss nicht berücksichtigt werden.

Werkstoffkennwerte 61SiCr7:

$$R_{p0,2} = 1400 \text{ N/mm}^2$$

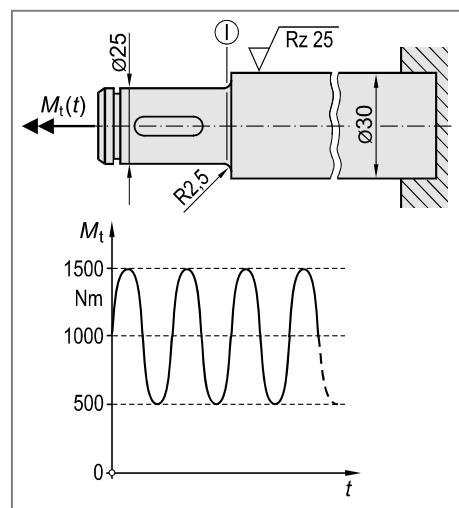
$$R_m = 1830 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_w = 490 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 211000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

Hat die Torsionsfeder im Bereich des Absatzes (Querschnitt I) eine ausreichende Sicherheit gegenüber Dauerbruch?



Aufgabe 13.10

Der abgebildete, abgesetzte Bolzen aus der Feinkornbaustahlsorte S890QL mit polierter Oberfläche ($D = 50 \text{ mm}$; $d = 25 \text{ mm}$) wird einer Zug-Druck-Wechselbeanspruchung ausgesetzt.

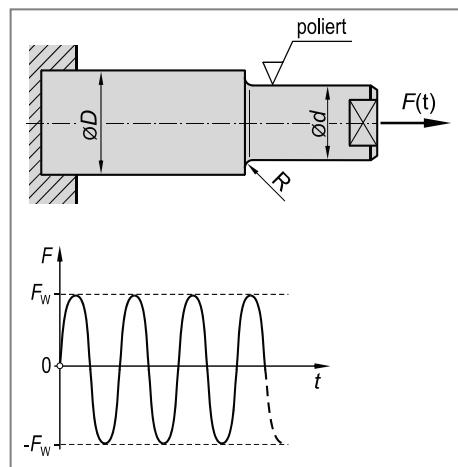
- Berechnen Sie den erforderlichen Radius R so, dass die Formzahl $\alpha_k = 2,0$ wird.
- Ermitteln Sie die zulässige, rein wechselnd wirkende Zugkraft F_W so, dass ein Dauerbruch mit einer Sicherheit von $S_D = 2,50$ ausgeschlossen werden kann.

Werkstoffkennwerte S890QL:

$$R_m = 1050 \text{ N/mm}^2$$

$$R_{p0,2} = 920 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{zdW} = 480 \text{ N/mm}^2$$



- Berechnen Sie die zulässige Zugkraft F_W , falls der baugleiche Bolzen aus der Gusseisensorte EN-GJL-300 hergestellt wurde. Es wird eine Sicherheit gegenüber Dauerbruch von $S_D = 4,0$ gefordert. Die Oberfläche des Bolzens sei poliert.

Werkstoffkennwerte EN-GJL-300:

$$R_m = 320 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{zdW} = 100 \text{ N/mm}^2$$

Aufgabe 13.11

Der abgebildete Hebel mit Vollkreisquerschnitt aus einem schweißgeeigneten Feinkornbau- stahl (S890QL) und gedrehter Oberfläche ($Rz = 10 \mu\text{m}$) ist auf der einen Seite mit einer dickwandigen Stahlplatte verschweißt. An seinem freien, rechten Ende wurde eine symmetrische Querlasche angebracht. Der Hebel kann durch die Querkraft F_1 sowie durch das Kräftepaar F_2 beansprucht werden. Es sind unterschiedliche Lastfälle zu untersuchen.

Werkstoffkennwerte S890QL:

$$R_{p0,2} = 900 \text{ N/mm}^2$$

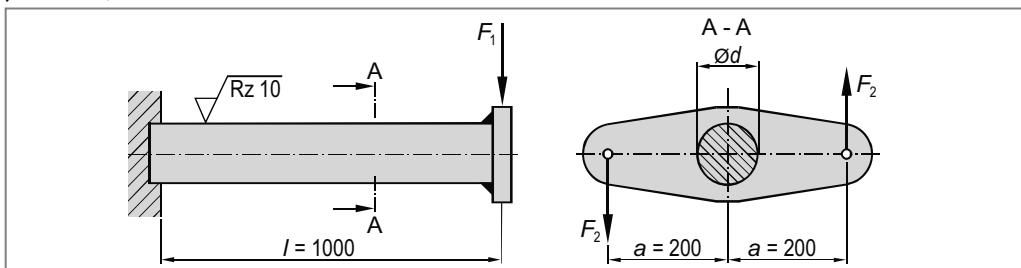
$$R_m = 1050 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bw} = 480 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{tw} = 275 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 212000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

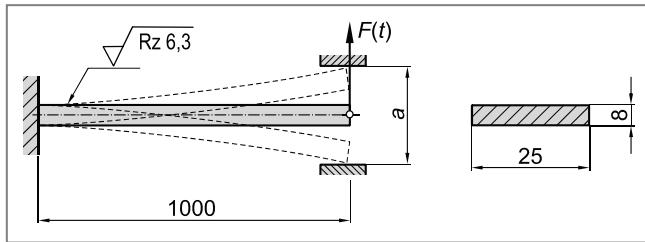


- a) Die Kraft F_1 wirkt rein schwellend zwischen 0 und 10 kN. Das Kräftepaar F_2 wirkt zunächst nicht ($F_2 = 0$). Berechnen Sie den mindestens erforderlichen Durchmesser d des Stabes, damit ein Dauerbruch mit einer Sicherheit von $S_D = 2,5$ ausgeschlossen werden kann.
- b) Das Kräftepaar F_2 wirkt rein wechselnd mit $F_2 = \pm 15$ kN. Die Querkraft F_1 wirkt nicht ($F_1 = 0$). Berechnen Sie auch für diese Beanspruchung den mindestens erforderlichen Durchmesser d des Stabes, damit ein Dauerbruch mit einer Sicherheit von $S_D = 3,0$ nicht auftritt.
- c) Die Kräfte F_1 und F_2 wirken statisch und treten gemeinsam auf, wobei stets gilt $F_1 = F_2$. Berechnen Sie die zulässigen Kräfte $F_1 = F_2$, damit bei einem Stab mit $d = 60$ mm kein Fließen eintritt ($S_F = 1,20$).

Aufgabe 13.12



Eine einseitig eingespannte Blattfeder mit Rechteckquerschnitt (Breite $b = 25$ mm; Dicke $t = 8$ mm) und einer Länge von $l = 1000$ mm aus der vergüteten Federstahlsorte 54SiCr6 wird unter Einwirkung der Kraft F rein wechselnd beansprucht.



Die maximale Durchbiegung der Feder wird durch zwei Anschläge (Abstand a) begrenzt. Die Oberfläche der Feder ist geschliffen ($Rz = 6,3 \mu\text{m}$).

Werkstoffkennwerte 54SiCr6:

$$R_{p0,2} = 1300 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1550 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bw} = 750 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 207000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

Berechnen Sie den maximal zulässigen Abstand a der Anschläge, so dass die Blattfeder dauerfest ist ($S_D = 2,5$).

Hinweis: Die Durchbiegung f eines einseitig eingespannten Balkens berechnet sich zu:

$$f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

Aufgabe 13.13

Eine Torsionsfeder aus der legierten Federstahlsorte 51CrV4 mit geschliffener Oberfläche ($R_z = 4 \mu\text{m}$) hat einen Kreisringquerschnitt. Der Außendurchmesser beträgt $d_a = 25 \text{ mm}$, die Wandstärke $s = 2,5 \text{ mm}$ die Länge $l = 1000 \text{ mm}$. Kerbwirkung an der Einspannstelle kann vernachlässigt werden.

Werkstoffkennwerte 51CrV4:

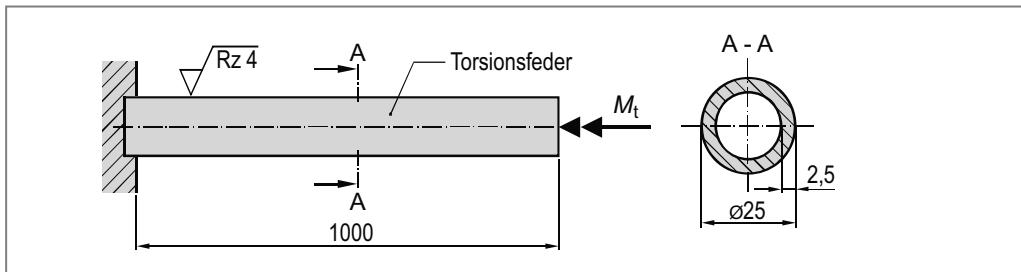
$$R_{p0,2} = 1250 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1620 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{tW} = 420 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 211000 \text{ N/mm}^2$$

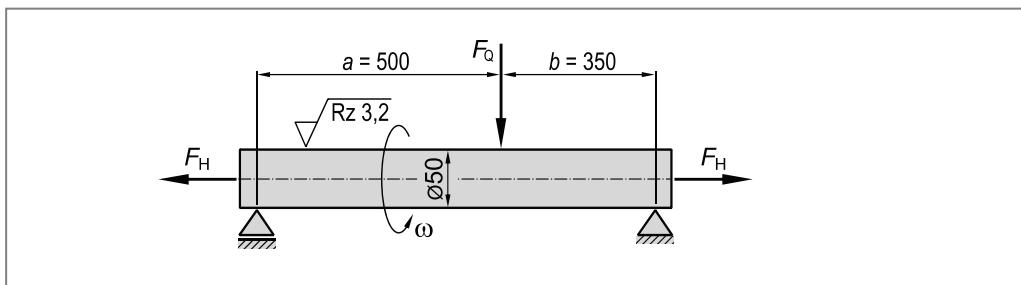
$$\mu = 0,30$$



- Berechnen Sie das maximal zulässige statische Torsionsmoment M_t , damit kein Fließen eintritt ($S_F = 1,5$).
- Berechnen Sie das maximal zulässige, rein wechselnd wirkende Torsionsmoment (M_{ta}) damit ein Dauerbruch mit einer Sicherheit von $S_D = 2,2$ ausgeschlossen werden kann. Ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit kann vernachlässigt werden.
- Berechnen Sie für die in Aufgabenteil a) und b) ermittelten Torsionsmomente die jeweiligen Verdrehwinkel φ der Torsionsfeder.

Aufgabe 13.14

Ein Welle mit Vollkreisquerschnitt aus der Vergütungsstahlsorte 42CrMo4 mit geschliffener Oberfläche ($R_z = 3,2 \mu\text{m}$) und einem Durchmesser von $d = 50 \text{ mm}$ ist im Betrieb durch die statisch wirkende, außermittig angreifende Querkraft $F_Q = 10 \text{ kN}$ beansprucht. Weiterhin kann eine horizontale Zugkraft F_H auftreten. Schubspannungen durch Querkräfte sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit können vernachlässigt werden.



Werkstoffkennwerte 42CrMo4:

$$R_{p0,2} = 980 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1070 \text{ N/mm}^2$$

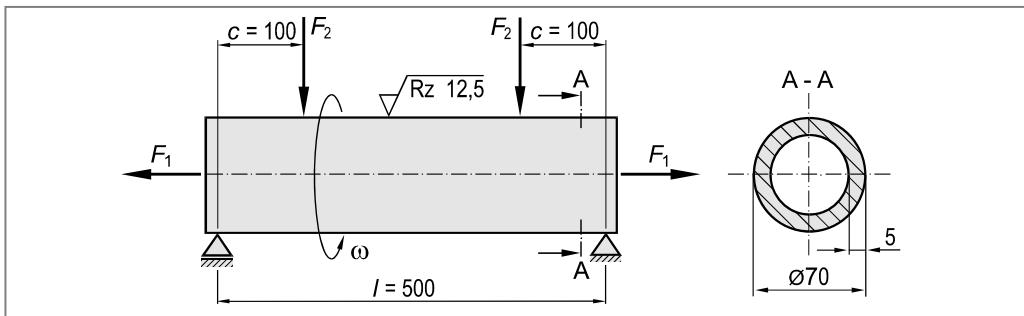
$$\sigma_{bw} = 530 \text{ N/mm}^2$$

- Skizzieren Sie den Beanspruchungs-Zeit-Verlauf für die höchst beanspruchte Stelle bei umlaufender Welle. Berechnen Sie außerdem die maximale Spannungsamplitude. Die horizontale Zugkraft F_H wirkt zunächst nicht ($F_H = 0$).
- Überprüfen Sie, ob die Welle dauerfest ist, falls ein Sicherheitsfaktor gegen Dauerbruch (S_D) von mindestens 3,50 gefordert wird ($F_H = 0$).
- Berechnen Sie die Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D), falls die umlaufende Welle zusätzlich mit einer horizontalen Zugkraft von $F_H = 350 \text{ kN}$ vorgespannt ist.

Aufgabe 13.15



Eine umlaufende Hohlwelle ($d_a = 70 \text{ mm}$; $s = 5 \text{ mm}$; $l = 500 \text{ mm}$) aus der Vergütungsstahlsorte 42CrMo4 ($R_m = 1180 \text{ N/mm}^2$; $R_{p0,2} = 810 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{bw} = 590 \text{ N/mm}^2$) mit gedrehter Oberfläche ($Rz = 12,5 \mu\text{m}$) wird durch die axiale Zugkraft $F_1 = 100 \text{ kN}$ statisch beansprucht.

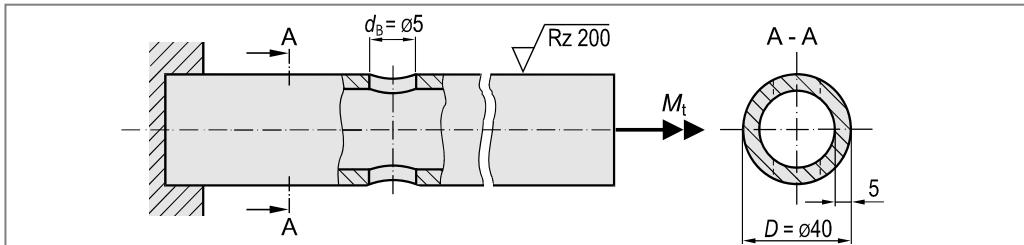


Ermitteln Sie den maximal zulässigen Betrag zweier zusätzlicher, im Abstand $c = 100 \text{ mm}$ von den Lagerstellen wirkenden Querkräfte F_2 , damit ein Dauerbruch mit Sicherheit vermieden wird ($S_D = 2,50$). Schubspannungen durch Querkräfte sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit können vernachlässigt werden.

Aufgabe 13.16



Ein Rohr (Durchmesser $D = 40 \text{ mm}$; Wandstärke $s = 5 \text{ mm}$) mit Querbohrung ($d_B = 5 \text{ mm}$) aus der Gusseisensorte EN-GJL-300 wird auf Torsion beansprucht. Die Oberflächenrauigkeit des Rohres beträgt $Rz = 200 \mu\text{m}$. Kerbwirkung an der Einspannstelle sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit können vernachlässigt werden.



Werkstoffkennwerte EN-GJL-300:

$$R_m = 320 \text{ N/mm}^2$$

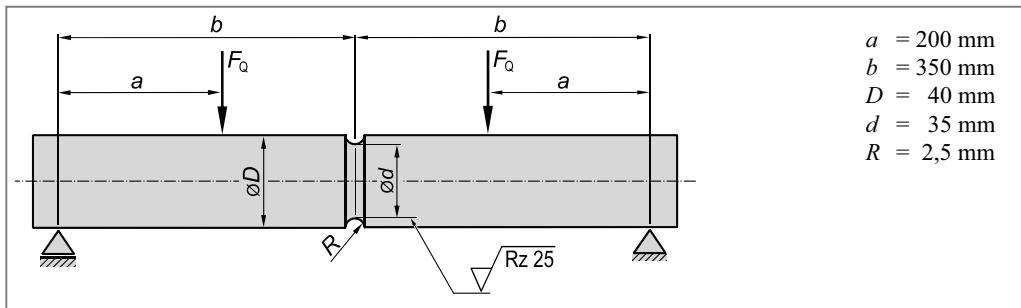
$$\tau_{tw} = 80 \text{ N/mm}^2$$

- Ermitteln Sie das zulässige Torsionsmoment M_t bei statischer Beanspruchung ($S_B = 4,0$).
- Berechnen Sie das zulässige Torsionsmoment M_{ta} bei einer rein wechselnden Beanspruchung, so dass kein Dauerbruch eintritt ($S_D = 2,50$).

Aufgabe 13.17



Die Welle einer Werkzeugmaschine aus Werkstoff 38Cr2 wird durch die beiden Querkräfte F_Q in der dargestellten Weise belastet. In der Mitte der Welle befindet sich ein halbkreisförmiger Einstich. Die Oberfläche der Welle ist gedreht ($Rz = 25 \mu\text{m}$). Ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit sowie Schubspannungen durch Querkräfte müssen nicht berücksichtigt werden.



Werkstoffkennwerte 38Cr2 (vergütet):

$$R_{p0,2} = 550 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 780 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bw} = 390 \text{ N/mm}^2$$

Die Welle steht still. Die beiden statisch wirkenden Querkräfte betragen jeweils $F_Q = 3900 \text{ N}$.

- Skizzieren Sie den Verlauf des Biegemomentes M_b und berechnen Sie das maximale Biegemoment $M_{b,\max}$.
- Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen (S_F) an der höchst beanspruchten Stelle. Ist die Sicherheit ausreichend?

Die Welle läuft um. Die Kräfte F_Q wirken statisch.

- Auf welche Weise kann die Welle nunmehr versagen?
- Berechnen Sie die Kerbwirkungszahl β_{kb} .
- Skizzieren Sie qualitativ den zeitlichen Verlauf der Biegespannung für die höchst beanspruchte Stelle.
- Berechnen Sie den zulässigen Betrag der Querkraft F_Q , damit ein Versagen durch Dauerbruch mit Sicherheit ausgeschlossen werden kann ($S_D = 2,50$)

Aufgabe 13.18

Die dargestellte abgesetzte Antriebswelle aus der Feinkornbaustahlsorte S460M mit geschliffener Oberfläche ($Rz = 12,5 \mu\text{m}$) kann durch die beiden statisch wirkenden Kräfte F_1 und F_2 belastet werden. Ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit sowie Schubspannungen durch Querkräfte müssen nicht berücksichtigt werden.

Werkstoffkennwerte S460M:

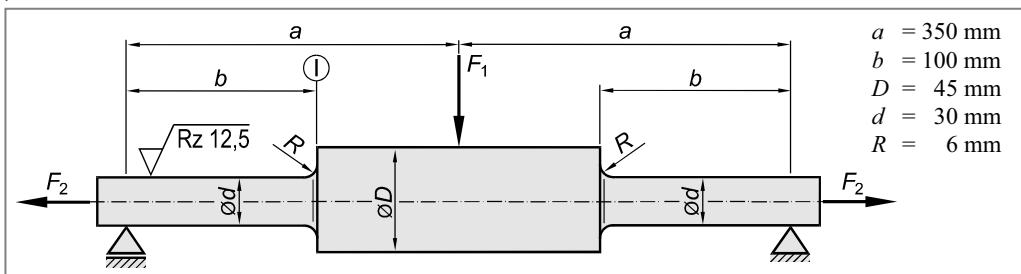
$$R_e = 460 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 530 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bw} = 280 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 207000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



Die Welle steht zunächst still und es wirkt nur die statische Querkraft $F_1 = 10 \text{ kN}$ ($F_2 = 0$).

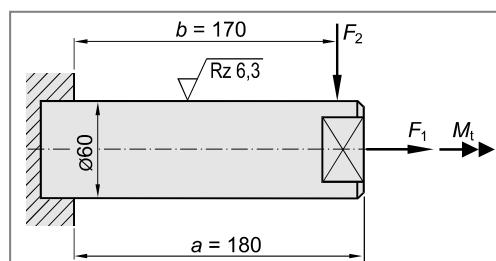
- Berechnen Sie das Biegemoment am linken Wellenabsatz (Stelle I).
- Ermitteln Sie für den Wellenabsatz (Stelle I) die Formzahlen für Zug- und für Biegebeanspruchung (α_{kz} und α_{kb}).
- Bestimmen Sie die Sicherheit gegen Fließen (S_F) am Wellenabsatz. Ist die Sicherheit ausreichend?
- Berechnen Sie die maximal mögliche, zusätzliche, statisch wirkende Zugkraft F_2 so dass Fließen am Wellenabsatz gerade noch nicht eintritt.

Die Welle läuft um. Es wirkt nur die statische Querkraft $F_1 = 10 \text{ kN}$ ($F_2 = 0$).

- Berechnen Sie die Kerbwirkungszahl β_{kb} für den Wellenabsatz (Stelle I).
- Skizzieren Sie quantitativ den zeitlichen Verlauf der Biegespannung am Wellenabsatz.
- Berechnen Sie die Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D). Ist die Sicherheit ausreichend?

Aufgabe 13.19

Der abgebildete Bolzen mit Vollkreisquerschnitt aus der Vergütungsstahlsorte 25CrMo4 hat eine geschliffene Oberfläche ($Rz = 6,3 \mu\text{m}$) und ist am linken Ende fest eingespannt. Am rechten Ende kann der Bolzen durch die Kräfte F_1 und F_2 sowie durch das Torsionsmoment M_t beansprucht werden.



Kerbwirkung an der Einspannstelle sowie Schubspannungen durch Querkräfte sind zu vernachlässigen. Ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit muss nicht berücksichtigt werden.

Werkstoffkennwerte 25CrMo4 (vergütet):

$$R_{p0,2} = 620 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 920 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bw} = 450 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

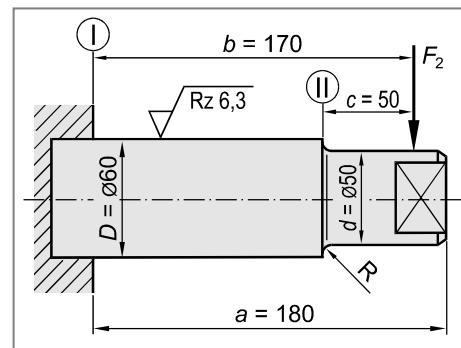
- Es wirkt zunächst nur die statische Zugkraft $F_1 = 700 \text{ kN}$.
 - Berechnen Sie die Zugspannung im Bolzen.
 - Ermitteln Sie die Verlängerung des Bolzens infolge der Zugkraft F_1 .
 - Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen (S_F). Ist die Sicherheit ausreichend?
- Es wirkt die rein wechselnde Kraft $F_2 = \pm 12,5 \text{ kN}$. Ermitteln Sie für die höchst beanspruchte Stelle die Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D). Ist die Sicherheit ausreichend?
- Es wirken nunmehr gleichzeitig die statische Kraft $F_1 = 700 \text{ kN}$ und die rein wechselnde Kraft $F_2 = \pm 12,5 \text{ kN}$. Berechnen Sie die Sicherheiten gegen Fließen (S_F) und gegen Dauerbruch (S_D).
- Es wirkt nur das statische Torsionsmoment M_t .
 - Berechnen Sie das zulässige Torsionsmoment M_t damit Fließen des Bolzens an der höchst beanspruchten Stelle nicht eintritt.
 - Ermitteln Sie für das Torsionsmoment M_t den Verdrehwinkel φ des Bolzens.
- Es wirken gleichzeitig die statische Kraft $F_1 = 700 \text{ kN}$ und ein statisches Torsionsmoment M_t . Auf welchen Wert ist M_t zu begrenzen, falls eine Sicherheit gegen Fließen von $S_F = 1,5$ gefordert wird?

Für eine Konstruktionsvariante erhält der Bolzen an seinem rechten Ende einen Absatz.

- Es wirkt nur die statische Kraft $F_2 = 12,5 \text{ kN}$.

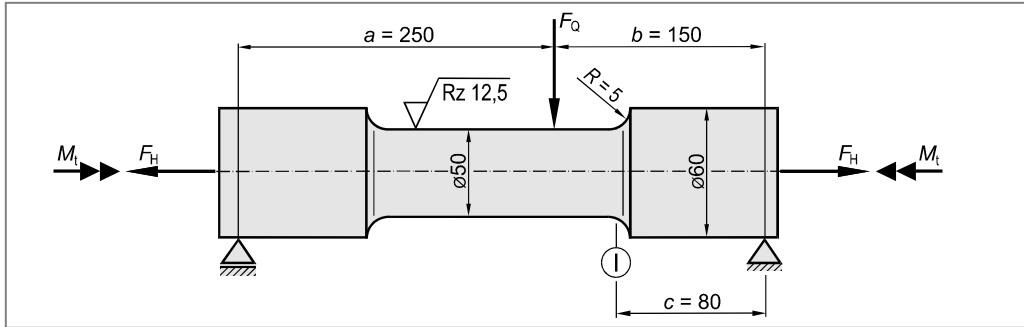
Mit welchem Radius R muss der Absatz ausgeführt werden, damit die maximalen Spannungen in den Querschnitten I und II gleich groß werden?

- Es soll nun eine rein wechselnde Biegekraft $F_3 = \pm 12,5 \text{ kN}$ wirken. Berechnen Sie für den Querschnitt II die Sicherheit gegen Dauerbruch, falls der Absatz mit einem Radius von $R = 2,5 \text{ mm}$ ausgeführt wird.



Aufgabe 13.20

Eine Antriebswelle mit geschliffener Oberfläche ($Rz = 12,5 \mu\text{m}$) aus der legierten Vergütungsstahlsorte 51CrV4 ist im Hinblick auf eine sichere Dimensionierung unter statischer und schwingender Beanspruchung an der Kerbstelle I zu überprüfen (siehe Abbildung). Ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit sowie Schubspannungen durch Querkräfte müssen nicht berücksichtigt werden.



Werkstoffkennwerte 51CrV4:

$$R_{p0,2} = 930 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1150 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bw} = 570 \text{ N/mm}^2$$

Die Welle steht zunächst still. An der Welle greifen die statisch wirkenden Kräfte $F_Q = 50 \text{ kN}$ und $F_H = 100 \text{ kN}$ an (siehe Abbildung).

- Berechnen Sie das Biegemoment an der Kerbstelle I.
- Berechnen Sie das zusätzlich übertragbare statische Torsionsmoment M_t (bei gleichzeitiger Einwirkung der beiden Kräfte F_Q und F_H), damit Fließen im Kerbquerschnitt I mit Sicherheit ($S_F = 1,50$) ausgeschlossen werden kann.

In einem anderen Betriebszustand ist die Schwingfestigkeit der *umlaufenden* Antriebswelle zu überprüfen. Das Torsionsmoment soll hierbei vernachlässigt werden ($M_t = 0$). Die beiden Kräfte $F_Q = 50 \text{ kN}$ und $F_H = 100 \text{ kN}$ bleiben hingegen unverändert.

- Skizzieren Sie qualitativ den Spannungsverlauf in Abhängigkeit der Zeit im Kerbgrund bei umlaufender Welle.
- Ermitteln Sie die Kerbwirkungszahl β_{kb} für die Biegebeanspruchung.
- Berechnen Sie die Sicherheit S_D gegen Dauerbruch. Ist die Sicherheit ausreichend?

Aufgabe 13.21

Eine an beiden Enden gelagerte, umlaufende Antriebswelle aus der legierten Vergütungsstahlsorte 36NiCrMo16 ($D = 100 \text{ mm}$; $a = 1000 \text{ mm}$) wird im Betrieb durch die statisch wirkenden Kräfte $F_1 = 70 \text{ kN}$ und $F_2 = 480 \text{ kN}$ belastet (siehe Abbildung). Die Welle hat eine gedrehte Oberfläche ($Rz = 25 \mu\text{m}$). Die Querbohrung sei zunächst (Aufgabenteile a und b) nicht vorhanden. Schubspannungen durch Querkräfte sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit muss nicht berücksichtigt werden.

Werkstoffkennwerte 36NiCrMo16:

$$R_{p0,2} = 900 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1420 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bw} = 710 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 211000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

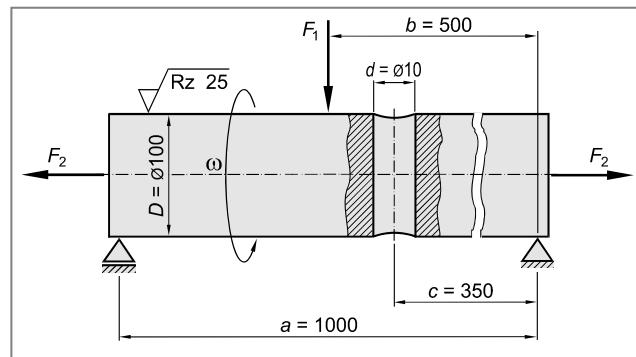
- a) Skizzieren Sie quantitativ den zeitlichen Verlauf der Spannung an der höchst beanspruchten Stelle (umlaufende Welle).

- b) Berechnen Sie die Sicherheiten gegen Fließen und gegen Dauerbruch für die umlaufende Welle. Sind die Sicherheiten ausreichend?

Für eine Konstruktionsvariante erhält die Welle eine Querbohrung ($d = 10 \text{ mm}$) an der in der Abbildung dargestellten Stelle. Die beiden Kräfte $F_1 = 70 \text{ kN}$ und $F_2 = 480 \text{ kN}$ bleiben unverändert.

- c) Ermitteln Sie die Kerbwirkungszahl β_{kb} für die Welle mit Querbohrung.

- d) Berechnen Sie die Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D) an der höchst beanspruchten Stelle. Ist die Sicherheit ausreichend?



Aufgabe 13.22



Zur Befestigung von Lagerdeckeln an Pleuelstangen sollen Dehnschrauben aus der Vergütungsstahlsorte 34CrNiMo6 verwendet werden. Für die Erprobung wird ein Dehnungsmessstreifen (DMS) am zylindrischen Schaft der Dehnschraube appliziert. Der Dehnungsmessstreifen schließt mit der Schraubenlängsachse einen Winkel von 12° ein (siehe Abbildung). Ein Torsionsmoment durch das Anziehen der Schraube soll zunächst nicht auftreten.

Werkstoffkennwerte 34CrNiMo6:

$$R_{p0,2} = 1050 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1400 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{zdW} = 630 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- a) Berechnen Sie die Dehnung in Messrichtung des DMS (ε_{DMS}) bei einer statischen Vorspannkraft von $F_V = 100 \text{ kN}$.
- b) Berechnen Sie den Betrag der zu F_V zusätzlich wirksamen Betriebskraft F_B bei einer Dehnung von $\varepsilon_{DMS} = 2,500 \%$ in Messrichtung des DMS.
- c) Die Vorspannkraft $F_V = 100 \text{ kN}$ soll weiterhin wirken. Ermitteln Sie die zusätzlich mögliche Betriebskraft F_{B1} damit im Kerbquerschnitt I keine plastischen Verformungen auftreten.

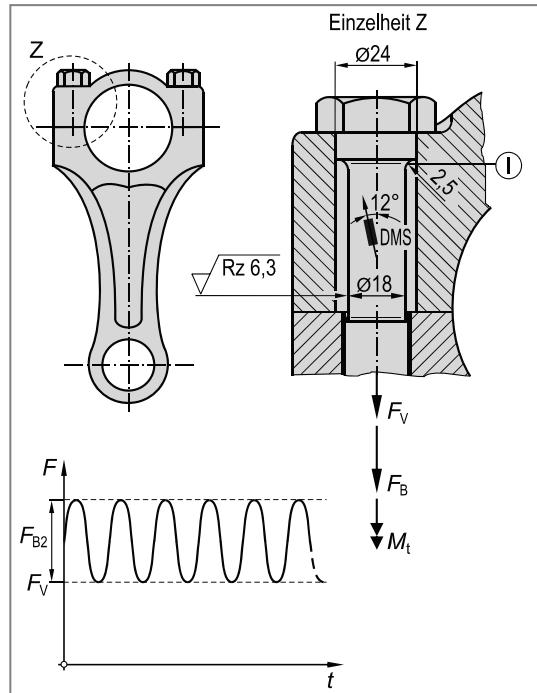
Im Betrieb überlagert sich der statischen Vorspannkraft $F_V = 100 \text{ kN}$ eine schwelende Betriebskraft $F_{B2} = 50 \text{ kN}$ (siehe Abbildung).

- d) Bestimmen Sie die Kerbwirkungszahl β_k für die Kerbstelle I der Dehnschraube.

- e) Ermitteln Sie für die Kerbstelle I die Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D). Ist die Sicherheit ausreichend?

Die Oberfläche sei gedreht ($Rz = 6,3 \mu\text{m}$). Der Lagerdeckel kann als ideal starr angenommen werden. Ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit muss nicht berücksichtigt werden.

Im Rahmen eines statischen Festigkeitsnachweises für die Dehnschraube soll zur Vorspannkraft $F_V = 100 \text{ kN}$ ein zusätzliches Torsionsmoment $M_t = 63 \text{ Nm}$ (beide statisch wirkend) aufgebracht werden.



- f) Berechnen Sie die zulässige (zusätzlich zur Vorspannkraft wirkende) statische Betriebskraft F_{B3} , damit Fließen an der Kerbstelle I der Dehnschraube mit Sicherheit ($S_F = 1,20$) ausgeschlossen werden kann.

Aufgabe 13.23



Die dargestellte Antriebswelle mit gedrehter Oberfläche ($Rz = 4 \mu\text{m}$) aus der legierten Vergütungsstahlsorte 34Cr4 wird durch die statisch wirkende Zugkraft F_1 und das statische Antriebsmoment M_t belastet. Außerdem kann im Betrieb noch eine Querkraft F_2 auftreten (siehe Abbildung). Um eine Überbeanspruchung der Welle zu vermeiden, werden am zylindrischen Teil des Schaftes zwei Dehnungsmessstreifen (DMS A und DMS B) in der abgebildeten Weise appliziert.

Werkstoffkennwerte 34Cr4:

$$R_{p0,2} = 690 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 870 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bw} = 430 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

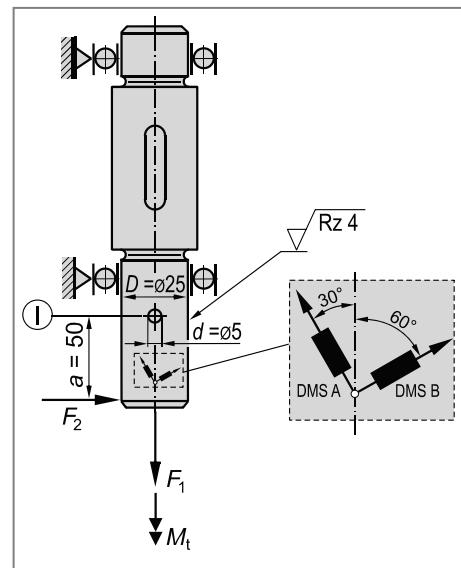
$$\mu = 0,30$$

- a) Während eines Probebetriebs betrug die statische Zugkraft $F_1 = 50 \text{ kN}$ und das statische Torsionsmoment $M_{tl} = 500 \text{ Nm}$. Eine Querkraft F_2 trat zunächst nicht auf ($F_2 = 0$). Berechnen Sie die Dehnungen in Messrichtung der beiden Dehnungsmessstreifen (DMS A und DMS B).

- b) Ermitteln Sie für die Kerbstelle I (durchgehende Querbohrung) die Formzahlen für Zugbeanspruchung (α_{kz}) und für Torsionsbeanspruchung (α_{kt}).
- c) Berechnen Sie das zulässige, statisch wirkende Antriebsmoment M_{t2} , damit bei der gegebenen statischen Zugkraft ($F_1 = 50 \text{ kN}$) an der Kerbstelle I plastische Verformungen mit Sicherheit ($S_F = 1,20$) ausgeschlossen werden können ($F_2 = 0$).

In einem anderen Betriebszustand wird die umlaufende Welle durch die statisch wirkenden Kräfte $F_1 = 50 \text{ kN}$ und $F_2 = 2,5 \text{ kN}$ beansprucht. Das Antriebsmoment kann vernachlässigt werden ($M_t = 0$).

- d) Ermitteln Sie die Kerbwirkungszahl β_{kb} für die Biegebeanspruchung.
- e) Berechnen Sie die Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D). Ist die Sicherheit ausreichend? Schubspannungen durch Querkräfte sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit muss nicht berücksichtigt werden.



Aufgabe 13.24



Eine Welle aus der unlegierten Baustahlsorte E335 mit polierter Oberfläche kann durch die beiden Kräfte F_1 und F_2 beansprucht werden (siehe Abbildung). Zu untersuchen sind unterschiedliche Belastungsfälle.

Werkstoffkennwerte E335:

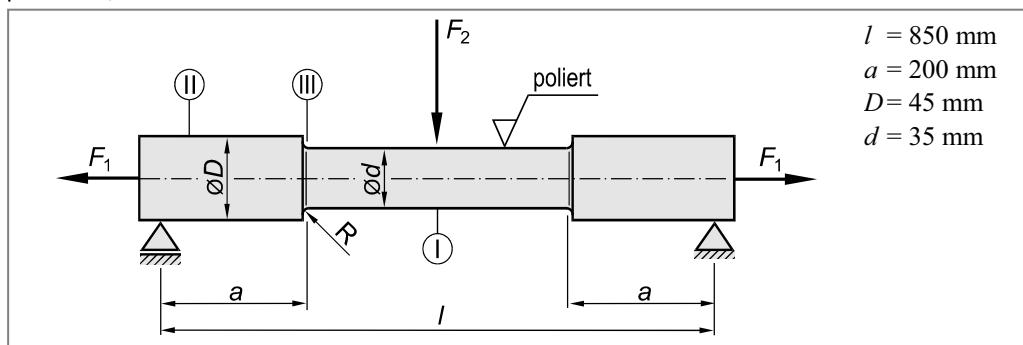
$$R_c = 340 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 600 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bw} = 300 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



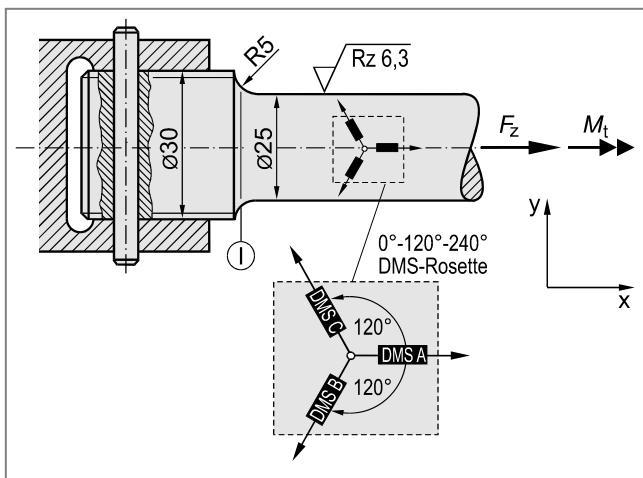
- a) Stillstehende Welle, $F_1 = 50 \text{ kN}$ (statisch), $F_2 = 0$.
- Berechnen Sie die Spannungen und Dehnungen in den Querschnitten I und II.
 - Ermitteln Sie den Betrag der Verlängerung der Welle (ohne Berücksichtigung der Kerbwirkung an den Wellenabsätzen).
 - Bestimmen Sie die Sicherheit gegen Fließen in den Querschnitten I und II. Sind die Sicherheiten jeweils ausreichend?
- b) Stillstehende Welle, $F_1 = 0$, $F_2 = 5 \text{ kN}$ (statisch).
- Berechnen Sie die Spannungen im Querschnitt I sowie die Nennspannung im Querschnitt III (Kerbgrund).
- c) Ermitteln Sie für die Beanspruchung gemäß Aufgabenteil b) den erforderlichen Radius R der Kerbstelle so, dass die maximale Spannung an der Kerbstelle (Querschnitt III), die Spannung im Querschnitt I nicht übersteigt.
- d) Umlaufende Welle, $F_1 = 50 \text{ kN}$ (statisch).
- Berechnen Sie für eine umlaufende Welle die zulässige, statisch wirkende Querkraft F_2 , sodass an der Kerbstelle (Querschnitt III) kein Dauerbruch eintritt ($S_D = 3,0$). Schubspannungen durch Querkräfte sowie ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit muss nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 13.25



Die Dimensionierung eines abgesetzten Bolzens mit geschliffener Oberfläche ($Rz = 6,3 \mu\text{m}$) und Vollkreisquerschnitt aus der legierten Vergütungsstahlsorte 30NiCrMo8 soll überprüft werden.

Um die Beanspruchung durch die Zugkraft F_Z und das Torsionsmoment M_t zu ermitteln, wurden drei Dehnungsmessstreifen in hinreichender Entfernung von der Kerbstelle I in der dargestellten Weise appliziert (0° - 120° - 240° -DMS-Rosette).



Werkstoffkennwerte 30NiCrMo8:

$$R_{p0,2} = 1180 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1520 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{zdW} = 690 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- a) Zur Überprüfung der Dehnungsmessstreifen wird eine statische Belastung von $F_{z1} = 170 \text{ kN}$ und $M_{t1} = 500 \text{ Nm}$ aufgebracht. Ermitteln Sie die Dehnungsanzeigen von DMS A, DMS B und DMS C.
- b) Im Betrieb wird der Bolzen einer unbekannten Betriebsbeanspruchung aus einer Zugkraft (F_{z2}) und einem unbekannten Torsionsmoment (M_{t2}) ausgesetzt. Es werden dabei die folgenden Dehnungen gemessen:

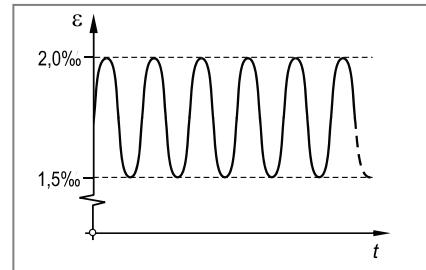
$$\varepsilon_A = 1,798 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_C = 0,816 \text{ \%}$$

DMS B fiel leider aus und lieferte keine Messwerte. Ermitteln Sie aus den beiden verbliebenen Dehnungsmesswerten die Zugkraft F_{z2} sowie Betrag und Drehrichtung des Torsionsmomentes M_{t2} .

- c) Ermitteln Sie für die Beanspruchung gemäß Aufgabenteil b) an der Kerbstelle I die Sicherheit gegen Fließen (S_F). Ist die Sicherheit ausreichend?

Bei einer anderen Betriebsbeanspruchung tritt nur noch eine zeitlich veränderliche Zugkraft F_{z3} , jedoch kein Torsionsmoment mehr auf ($M_t = 0$). Eine Messung ergab den in der Abbildung dargestellten, sinusförmigen Dehnungs-Zeit-Verlauf am Dehnungsmessstreifen A.

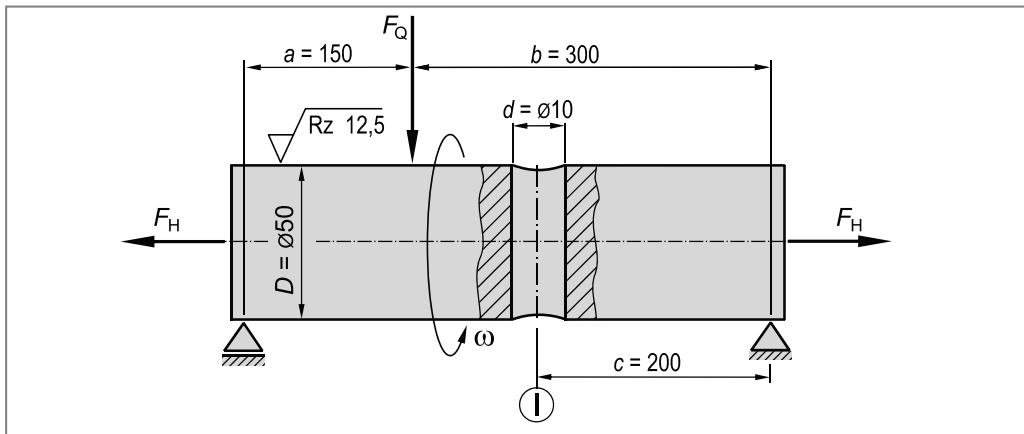


- d) Überprüfen Sie, ob der Bolzen bei dieser Belastung im Bereich der Kerbstelle I eine ausreichende Dauerfestigkeit hat, falls $S_D > 3,0$ wird gefordert wird. Ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit muss nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 13.26



Die Abbildung zeigt eine umlaufende Antriebswelle ($\varnothing 50 \text{ mm}$) mit Querbohrung ($\varnothing 10 \text{ mm}$) aus Werkstoff 34CrMo4. Die Welle hat eine gedrehte Oberfläche ($Rz = 12,5 \mu\text{m}$). Es soll überprüft werden, ob die Antriebswelle gegenüber unzulässiger plastischer Verformung und gegenüber Dauerbruch ausreichend dimensioniert ist. Während des Betriebs (umlaufende Welle) wirken die Kräfte $F_Q = 15 \text{ kN}$ und $F_H = 250 \text{ kN}$ (siehe Abbildung).



Werkstoffkennwerte 34CrMo4:

$$R_{p0,2} = 820 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1050 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bw} = 520 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$

- a) Berechnen Sie für die Kerbstelle I (Querbohrung) die Sicherheit gegen Fließen (S_F). Ist die Sicherheit ausreichend?
- b) Berechnen Sie für die Kerbstelle I (Querbohrung) die Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D). Ist die Sicherheit ausreichend? Ein Einfluss der Bauteilgröße auf die Schwingfestigkeit sowie Schubspannungen durch Querkräfte müssen nicht berücksichtigt zu werden.
- c) Ermitteln Sie die zulässige Querkraft F_{Q1} , damit bei einer gleich bleibenden Zugkraft von $F_H = 250 \text{ kN}$ kein Fließen an der Kerbstelle eintritt (stillstehende Welle in der dargestellten Lage).
- d) Bestimmen Sie die zulässige Zugkraft F_{H1} , damit bei einer gleich bleibenden Querkraft von $F_Q = 15 \text{ kN}$ kein Fließen an der Kerbstelle eintritt (stillstehende Welle in der dargestellten Lage).

Anhang 1: Werkstoffkennwerte

Tabelle A1-1 Mechanische Eigenschaften für **unlegierte Baustähle** nach DIN EN 10025-2

Werkstoffsorte		Werkstoff nummer	Mechanische Eigenschaften						
Kurzname neu ¹⁾	alt ²⁾		R _e ³⁾ N/mm ² min.	R _m ⁴⁾ N/mm ²	A ⁵⁾ % min.	σ _{zdW} ⁶⁾ N/mm ²	σ _{bW} ⁶⁾ N/mm ²	τ _{tw} ⁶⁾ N/mm ²	
S185	St 33	1.0035	185	290 ... 510	18	140	155	90	80
S235JR	RSt 37-2	1.0038	235	360 ... 510	26	160	180	105	95
S235J0	St 37-3 U	1.0114			26				
S235J2	---	1.0117			24				
S275JR	St 44-2	1.0044	275	410 ... 560	23	195	215	125	110
S275J0	St 44-3 U	1.0143			23				
S275J2	---	1.0145			21				
S355JR	---	1.0045	355	470 ... 630	22	230	255	150	130
S355J0	St 52-3 U	1.0553			22				
S355J2	St 52-3 N	1.0577			22				
S355K2	---	1.0596			20				
S450J0	---	1.0590	450	550 ... 720	17	---	---	---	---
E295	St 50-2	1.0050	295	470 ... 610	20	220	245	145	125
E355	St 60-2	1.0060	355	570 ... 710	16	265	290	170	155
E360	St 70-2	1.0070	360	670 ... 830	11	310	340	200	180

¹⁾ nach DIN 10027-1

²⁾ nach DIN 17006

³⁾ Kennwerte für Nenndicken ≤ 16 mm. Kennwerte für Nenndicken > 16 mm siehe DIN EN 10025-2.

⁴⁾ Kennwerte für Nenndicken von 3 mm ... 100 mm. Kennwerte für Nenndicken < 3 mm oder > 100 mm siehe DIN EN 10025-2.

⁵⁾ Kurzer Proportionalstab ($L_0 = 5,65 \cdot \sqrt{S_0}$). Kennwerte gültig für Nenndicken von 3 mm ... 40 mm. Kennwerte für Nenndicken > 40 mm siehe DIN EN 10025-2.

⁶⁾ Kennwerte nach FKM-Richtlinie [2].

Tabelle A1-2 Mechanische Eigenschaften für **normalgeglühte, schweißgeeignete Feinkornbaustähle** nach DIN EN 10025-3

Werkstoffsorte		Werkstoff nummer	Mechanische Eigenschaften						
Kurzname neu ¹⁾	alt ²⁾		R _e ³⁾ N/mm ² min.	R _m ⁴⁾ N/mm ²	A ⁵⁾ % min.	σ _{zdW} ⁶⁾ N/mm ²	σ _{bW} ⁶⁾ N/mm ²	τ _{tw} ⁶⁾ N/mm ²	
S275N	StE 285	1.0490	275	370 ... 510	24	165	185	110	95
S275NL	TStE 285	1.0491			22				
S355N	StE 355	1.0545	355	470 ... 630	22	210	235	140	120
S355NL	TStE 355	1.0546			19				
S420N	StE 420	1.8902	420	520 ... 680	17	235	260	150	135
S420NL	TStE 420	1.8912			17				
S460N	StE 460	1.8901	460	550 ... 720	17	245	275	160	140
S460NL	TStE 460	1.8903			17				

¹⁾ nach DIN 10027-1

²⁾ nach DIN 17006

³⁾ Kennwerte für Nenndicken ≤ 16 mm. Kennwerte für Nenndicken > 16 mm siehe DIN EN 10025-3.

⁴⁾ Kennwerte für Nenndicken ≤ 100 mm. Kennwerte für Nenndicken > 100 mm siehe DIN EN 10025-3.

⁵⁾ Kennwerte für Nenndicken ≤ 16 mm. Kennwerte für Nenndicken > 16 mm siehe DIN EN 10025-3.

⁶⁾ Kennwerte nach FKM-Richtlinie [2].

Tabelle A1-3 Mechanische Eigenschaften für **thermomechanisch gewalzte, schweißgeeignete Feinkornbaustähle** nach DIN EN 10025-4

Werkstoffsorte		Werkstoffnummer	Mechanische Eigenschaften					
Kurzname neu ¹⁾	Kurzname alt ²⁾		R _e ³⁾ N/mm ² min.	R _m ⁴⁾ N/mm ²	A ⁵⁾ %	σ _{zdW} ⁶⁾ N/mm ²	σ _{bW} ⁶⁾ N/mm ²	τ _{zW} ⁶⁾ N/mm ²
S275M	----	1.8818	275	370 ... 530	24	160	180	105
S275ML	----	1.8819						95
S355M	StE 355 TM	1.8823	355	470 ... 630	22	205	225	130
S355ML	TStE 355 TM	1.8834						115
S420M	StE 420 TM	1.8825	420	520 ... 680	19	225	250	145
S420ML	TStE 420 TM	1.8836						130
S460M	StE 460 TM	1.8827	460	550 ... 720	17	240	265	155
S460ML	TStE 460 TM	1.8838						140

¹⁾ nach DIN 10027-1

²⁾ nach DIN 17006

³⁾ Kennwerte für Nenndicken \leq 16 mm. Kennwerte für Nenndicken $>$ 16 mm siehe DIN EN 10025-4.

4) Kennwerte für Nenndicken ≤ 10 mm, Kennwerte für Nenndicken > 10 mm siehe DIN EN 10025-4

⁵⁾ Kurzer Proportionalstab ($L_0 = 5,65 \cdot \sqrt{S_0}$).

⁶⁾ Kennwerte nach FKM-Richtlinie [2].

Tabelle A1-4 Mechanische Eigenschaften für Vergütungsstähle im vergüteten Zustand nach DIN EN 10083-2 und -3

Werkstoffsorte		Werkstoffnummer	Mechanische Eigenschaften						
Kurzname neu ¹⁾	alt ²⁾		R _{p0,2} ³⁾ N/mm ²	R _m ³⁾ N/mm ²	A ^{3) 4)} %	σ _{zdW} ⁵⁾ N/mm ²	σ _{bw} ⁵⁾ N/mm ²	τ _{tw} ⁵⁾ N/mm ²	τ _{sw} ⁵⁾ N/mm ²
Unlegierte Vergütungsstähle									
C22E C22R	Ck 22 Cm 22	1.1151 1.1149	340	500 ... 650	20	225	250	145	130
C35E C35R C35	Ck 35 Cm 35 C 35	1.1181 1.1180 1.0501	430	630 ... 780	17	285	310	185	165
C40E C40R C40	Ck 40 Cm 40 C 40	1.1186 1.1189 1.0511	460	650 ... 800	16	295	320	190	170
C45E C45R C45	Ck 45 Cm 45 C 45	1.1191 1.1201 1.0503	490	700 ... 850	14	315	345	205	185
C50E C50R	Ck 50 Cm 50	1.1206 1.1241	520	750 ... 900	13	340	365	215	195
C55E C55R C55	Ck 55 Cm 55 C 55	1.1203 1.1209 1.0535	550	800 ... 950	12	360	390	230	210
C60E C60R C60	Ck 60 Cm 60 C 60	1.1221 1.1223 1.0601	580	850 ... 1000	11	385	415	245	220
28Mn6	28 Mn 6	1.1170	590	800 ... 950	13	360	390	230	210

Fortsetzung Tabelle A1-4 Mechanische Eigenschaften für **Vergütungsstähle im vergüteten Zustand** nach DIN EN 10083-2 und -3

Werkstoffsorte		Werkstoffnummer	Mechanische Eigenschaften						
Kurzname	neu ¹⁾		R _{p0,2} ³⁾	R _m ³⁾	A ^{3) 4)}	σ _{zdW} ⁵⁾	σ _{bW} ⁵⁾	τ _W ⁵⁾	τ _w ⁵⁾
	alt ²⁾		N/mm ² min.	N/mm ²	% min.	N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²
Legierte Vergütungsstähle									
38Cr2	38 Cr 2	1.7003	550	800 ... 950	14	360	390	230	210
38CrS2	38 CrS 2	1.7023							
46Cr2	46 Cr 2	1.7006	650	900 ... 1100	12	405	435	260	235
46CrS2	46 CrS 2	1.7025							
34Cr4	34 Cr 4	1.7033	700	900 ... 1100	12	405	435	260	235
34CrS4	34 CrS 4	1.7037							
37Cr4	37 Cr 4	1.7034	750	950 ... 1150	11	430	460	270	245
37CrS4	37 CrS 4	1.7038							
41Cr4	41 Cr 4	1.7035	800	1000 ... 1200	11	450	480	285	260
41CrS4	41 CrS 4	1.7039							
25CrMo4	25 CrMo 4	1.7218	700	900 ... 1100	12	405	435	260	235
25CrMoS4	25 CrMoS 4	1.7213							
34CrMo4	34 CrMo 4	1.7220	800	1000 ... 1200	11	450	480	285	260
34CrMoS4	34 CrMoS 4	1.7226							
42CrMo4	42 CrMo 4	1.7225	900	1100 ... 1300	10	495	525	315	285
42CrMoS4	42 CrMoS 4	1.7227							
50CrMo4	50 CrMo 4	1.7228	900	1100 ... 1300	9	495	525	315	285
34CrNiMo6	34 CrNiMo 6	1.6582	1000	1200 ... 1400	6	540	570	340	310
30CrNiMo8	30 CrNiMo 8	1.6580	1050	1250 ... 1450	9	565	595	355	325
36CrNiMo16	----	1.6773	740	880 ... 1180	12	565	595	355	325
39NiCrMo3	----	----	785	980 ... 1180	11	----	----	----	----
30NiCrMo16-6	----	1.6747	880	1080 ... 1230	10	----	----	----	----
51CrV4	50CrV4	1.8159	900	1100 ... 1300	9	495	525	315	285
20MnB5	----	1.5530	700	900 ... 1050	14	----	----	----	----
30MnB5	----	1.5531	800	950 ... 1150	13	----	----	----	----

¹⁾ nach DIN 10027-1

²⁾ nach DIN 17006

³⁾ Kennwerte für maßgebliche Querschnitte ≤ 16 mm bzw. für Flacherzeugnisse mit Dicken ≤ 8 mm. Kennwerte für Querschnitte > 16 mm bzw. Dicken > 8 mm siehe DIN EN 10083-2 bzw. -3.

⁴⁾ Kurzer Proportionalstab ($L_0 = 5,65 \cdot \sqrt{S_0}$). Kennwerte für Nenndicken von 3 mm ... 40 mm. Kennwerte für Nenndicken > 40 mm siehe DIN EN 10083-2 bzw. -3.

⁵⁾ Kennwerte nach FKM-Richtlinie [2]. Falls keine Werte angegeben, erfolgt die Berechnung gemäß Tabelle 13.2.

Tabelle A1-5 Mechanische Eigenschaften für **Einsatzstähle** nach DIN EN 10084 (Auswahl)

Werkstoffsorte		Werkstoffnummer	Mechanische Eigenschaften					
Kurzname neu ¹⁾	alt ²⁾		$R_{p0,2}^{3)}$ N/mm ² min.	R_m N/mm ² min.	A %	$\sigma_{zdW}^{3)}$ N/mm ²	$\sigma_{bw}^{3)}$ N/mm ²	$\tau_w^{3)}$ N/mm ²
Unlegierte Einsatzstähle								
C10E	Ck 10	1.1121	310	500	k.A.	200	220	130
C10R	----	1.1207						115
C15E	Ck 15	1.1141	545	750	k.A.	320	345	205
C15R	Cm 15	1.1140						
C16E	----	1.1148	545	780	k.A.	320	345	205
C16R	----	1.1208						
Legierte Einsatzstähle								
17Cr3	17 Cr 3	1.7016	545	780	k.A.	320	345	205
28Cr4	28 Cr 4	1.7030	620	870	k.A.	360	385	230
16MnCr5	16 MnCr 5	1.7131	695	1000	k.A.	400	430	255
20MnCr5	20 MnCr 5	1.7147	850	1200	k.A.	480	510	305
18CrMo4	---	1.7243	775	1100	k.A.	440	470	280
22CrMoS3-5	22 CrMoS 3-5	1.7333	775	1100	k.A.	440	470	280
20MoCr3	---	1.7320	620	880	k.A.	360	385	230
20MoCr4	20 MoCr 4	1.7321	620	880	k.A.	360	385	230
16NiCr4	---	1.5714	695	950	k.A.	400	430	255
10NiCr5-4	---	1.5805	620	850	k.A.	360	385	230
18NiCr5-4	---	1.5810	850	1200	k.A.	480	510	305
17CrNi6-6	---	1.5918	850	1200	k.A.	480	510	305
15NiCr13	---	1.5752	695	1000	k.A.	400	430	255
20NiCrMo2-2	21 NiCrMo 2	1.6523	775	1100	k.A.	440	470	280
17NiCrMo6-4	---	1.6566	850	1200	k.A.	480	510	305
20NiCrMoS6-4	---	1.6571	850	1200	k.A.	480	510	305
18CrNiMo7-6	17 CrNiMo 6	1.6587	850	1200	k.A.	480	510	305
14NiCrMo13-4	---	1.6657	850	1200	k.A.	480	510	305

¹⁾ nach DIN 10027-1²⁾ nach DIN 17006³⁾ Kennwerte für nach FKM-Richtlinie [2].

k.A. = keine Angabe

Tabelle A1-6 Mechanische Eigenschaften für Nitrierstähle nach DIN EN 10085

Werkstoffsorte		Mechanische Eigenschaften (im vergüteten Zustand)						
Kurzname	Werkstoffnummer	$R_{p0,2}^{1)}$ N/mm ² min.	$R_m^{1)}$ N/mm ²	$A^{1)}$ % min.	$\sigma_{zdW}^{2)}$ N/mm ²	$\sigma_{bw}^{2)}$ N/mm ²	$\tau_w^{2)}$ N/mm ²	$\tau_s^{2)}$ N/mm ²
24CrMo3-6	1.8516	800	1000 ... 1200	10	450	480	285	260
31CrMo12	1.8515	835	1030 ... 1230	10	465	495	295	270
32CrAlMo7-10	1.8505	835	1030 ... 1230	10	465	495	295	270
31CrMoV9	1.8519	900	1100 ... 1300	9	495	525	315	285
33CrMoV12-9	1.8522	950	1150 ... 1350	11	520	550	330	300
34CrAlNi7-10	1.8550	680	900 ... 1100	10	405	435	260	235
41CrAlMo7-10	1.8509	750	950 ... 1150	11	430	460	275	250
40CrMoV13-9	1.8523	750	950 ... 1100	11	430	460	275	250
34CrAlMo5-10	1.8807	600	800 ... 1000	14	360	390	230	210

¹⁾ Kennwerte für Dicken von 16 mm ... 40 mm. Kennwerte für Dicken > 40 mm siehe DIN EN 10085.²⁾ Kennwerte nach FKM-Richtlinie [2].**Tabelle A1-7** Mechanische Eigenschaften für nichtrostende Stähle nach DIN EN 10088

Werkstoffsorte		Mechanische Eigenschaften ¹⁾						
Kurzname	Werkstoffnummer	$R_{p0,2}^{2)}$ N/mm ² min.	$R_m^{2)}$ N/mm ²	$A^{2,3)}$ % min.	$\sigma_{zdW}^{4)}$ N/mm ²	$\sigma_{bw}^{4)}$ N/mm ²	$\tau_w^{4)}$ N/mm ²	$\tau_s^{4)}$ N/mm ²
Nichtrostende ferritische Stähle (geglühter Zustand)								
X2CrNi12	1.4003	250	450 ... 650	18	180	205	120	105
X6CrAl13	1.4002	210	400 ... 600	17	160	180	110	90
X6Cr17	1.4016	240	430 ... 630	20	170	195	115	100
X6CrMo17-1	1.4113	260	450 ... 630	18	180	205	120	105
X6CrNi17-1	1.4017	330	500 ... 750	12	260	290	175	150
X2CrTiNb18	1.4509	230	430 ... 630	18	170	195	115	100
Nichtrostende austenitische Stähle (lösungsgeglühter Zustand)								
X10CrNi18-8	1.4310	250	600 ... 950	40	240	270	160	140
X2CrNiN18-10	1.4311	270	550 ... 750	40	220	245	145	125
X5CrNi18-10	1.4301	210	520 ... 720	45	230	235	140	120
X6CrNiTi18-10	1.4541	200	500 ... 700	40	200	225	135	115
X6CrNiMoTi17-12-2	1.4571	220	520 ... 670	40	210	235	140	120
X2CrNiMoN17-13-5	1.4439	270	580 ... 780	40	230	260	155	135
X1NiCrMoCuN25-20-7	1.4529	300	650 ... 850	40	260	290	170	150
Nichtrostende austenitisch-ferritische Stähle (lösungsgeglühter Zustand)								
X2CrNiN23-4	1.4362	400	630 ... 800	25	250	280	165	145
X2CrNiMoN25-7-4	1.4410	530	730 ... 930	20	290	320	190	170
Nichtrostende martensitische Stähle (vergüteter Zustand)								
X20Cr13	1.4021	550	750 ... 950	10	300	330	195	175
X4CrNiMo16-5-1	1.4418	660	840 ... 1100	14	335	410	220	195

¹⁾ Für Blech und Band für die allgemeine Verwendung.

- ²⁾ • Ferritische Stähle: Warmgewalztes Blech bis 25 mm Dicke. Längsproben. Für X6CrNi17-1 warmgewalztes Band bis 13,5 mm Dicke.
- Austenitische Stähle: Warmgewalztes Blech bis 75 mm Dicke. Querproben. Für X10CrNi18-8 kaltgewalztes Band bis 8 mm Dicke. Querproben.
- Austenitisch-ferritische Stähle: Werte gültig für warmgewalztes Band bis 75 mm Dicke. Querproben.
- Martensitische Stähle: für X20Cr13 vergüteter Zustand (+QT750) und für X4CrNiMo16-5-1 vergüteter Zustand (+QT840). Warmgewalztes Band mit Dicken bis 75 mm. Längsproben.

³⁾ Kurzer Proportionalstab ($L_0 = 5,65 \cdot \sqrt{S_0}$). Kennwerte für Dicken > 3 mm.⁴⁾ Kennwerte nach FKM-Richtlinie [2].

Tabelle A1-8 Mechanische Eigenschaften für **Stahlguss für allgemeine Anwendungen** nach DIN EN 10293

neu ¹⁾	Kurzname alt ²⁾	Werkstoffnummer	Mechanische Eigenschaften						
			$R_{p0,2}$ ³⁾ N/mm ² min.	R_m ³⁾ N/mm ²	A ³⁾ % min.	σ_{zdW} ^{4) 5)} N/mm ²	σ_{bw} ⁴⁾ N/mm ²	τ_w ⁴⁾ N/mm ²	τ_s ⁴⁾ N/mm ²
GE200	GS-38	1.0420	200	380 ... 530	25	130	150	90	75
GE240	GS-45	1.0446	240	450 ... 600	22	150	180	105	90
GE300	GS-60	1.0558	300	600 ... 750	15	205	235	140	120
G28Mn6	GS-30 Mn 5	1.1165	260	520 ... 670	18	175	205	125	100
G26CrMo4	GS-25 CrMo 4	1.7221	300	550 ... 700	14	185	215	130	110
G34CrMo4	GS-34 CrMo 4	1.7230	480	620 ... 770	10	220	250	150	130
G42CrMo4	GS-42 CrMo 4	1.7231	550	700 ... 850	10	240	270	160	135
G30CrMoV6-4	GS-30 CrMoV 6 4	1.7725	550	750 ... 900	12	220	250	150	130
G35CrNiMo6-6	GS-34 CrNiMo 6	1.6579	650	800 ... 950	12	270	305	185	155
G32NiCrMo8-5-4	GS-30 NiCrMo 8 5	1.6570	650	820 ... 970	14	270	305	185	155

¹⁾ nach DIN EN 10027-1²⁾ nach DIN 17006-4³⁾ GE200, GE240: normalgeglüht, Kennwerte für Nenndicken bis 300 mm.

GE300: normalgeglüht, Kennwerte für Nenndicken bis 30 mm.

G28Mn6: normalgeglüht, Kennwerte für Nenndicken bis 250 mm.

G26CrMo4: vergütet (+QT1), Kennwerte für Nenndicken bis 250 mm.

G34CrMo4, G42CrMo4, G30CrMoV6-4 und G35CrNiMo6-6: vergütet (+QT1), Kennwerte für Nenndicken von 100 mm ... 150 mm.

G32NiCrMo8-5-4: vergütet (+QT1), Kennwerte für Nenndicken von 100 mm ... 250 mm.

⁴⁾ Kennwerte nach FKM-Richtlinie [2].**Tabelle A1-9** Mechanische Eigenschaften für **Gusseisen mit Lamellengraphit** nach DIN EN 1561

neu ¹⁾	Kurzname alt ²⁾	Werkstoffnummer	Mechanische Eigenschaften						
			$R_{p0,2}$ ³⁾ N/mm ² min.	R_m ³⁾ N/mm ²	A ³⁾ % min.	σ_{zdW} ^{4) 5)} N/mm ²	σ_{bw} ^{4) 6)} N/mm ²	τ_w ⁴⁾ N/mm ²	τ_s ⁴⁾ N/mm ²
EN-GJL-100	GG-10	EN-JL-1010	---	100 ... 200	0,3 ... 0,8	30	45	40	25
EN-GJL-150	GG-15	EN-JL-1020	---	150 ... 250	0,3 ... 0,8	45	70	60	40
EN-GJL-200	GG-20	EN-JL-1030	---	200 ... 300	0,3 ... 0,8	60	90	75	50
EN-GJL-250	GG-25	EN-JL-1040	---	250 ... 350	0,3 ... 0,8	75	110	95	65
EN-GJL-300	GG-30	EN-JL-1050	---	300 ... 400	0,3 ... 0,8	90	140	115	75
EN-GJL-350	GG-35	EN-JL-1060	---	350 ... 450	0,3 ... 0,8	105	145	130	90

¹⁾ nach DIN EN 1560²⁾ nach DIN 17006-4³⁾ Mechanische Eigenschaften gemessen an Proben aus getrennt gegossenen Probestücken. Rohgussdurchmesser 30 mm bzw. maßgebende Wanddicke 15 mm. Kennwerte für abweichende Wanddicken siehe DIN EN 1561.⁴⁾ Kennwerte nach FKM-Richtlinie [2].⁵⁾ Weitere Kennwerte siehe DIN EN 1561. Näherungsweise wird dort angegeben: $\sigma_{zdW} = 0,26 \cdot R_m$ ⁶⁾ Weitere Kennwerte siehe DIN EN 1561. Näherungsweise wird dort angegeben: $\sigma_{bw} = 0,35 \dots 0,5 \cdot R_m$

Tabelle A1-10 Mechanische Eigenschaften für **Gusseisen mit Kugelgraphit** nach DIN EN 1563

Werkstoffsorte		Werkstoff nummer	Mechanische Eigenschaften					
Kurzname neu ¹⁾	alt ²⁾		R _{p0,2} ³⁾ N/mm ² min.	R _m ³⁾ N/mm ² min.	A ³⁾ %	σ _{zdW} ⁴⁾ N/mm ²	σ _{bW} ⁴⁾ N/mm ²	τ _w ⁴⁾ N/mm ²
EN-GJS-350-22	---	EN-JS-1010	220	350	22	120	160	110
EN-GJS-400-18	---	EN-JS-1020	250	400	18	135	185	120
EN-GJS-400-15	GGG-40	EN-JS-1030	250	400	15	135	185	120
EN-GJS-450-10	---	EN-JS-1040	310	450	10	155	205	135
EN-GJS-500-7	GGG-50	EN-JS-1050	320	500	7	170	225	150
EN-GJS-600-3	GGG-60	EN-JS-1060	370	600	3	205	265	180
EN-GJS-700-2	GGG-70	EN-JS-1070	420	700	2	240	305	205
EN-GJS-800-2	GGG-80	EN-JS-1080	480	800	2	270	340	235
EN-GJS-900-2	---	EN-JS-1090	600	900	2	305	380	260
EN-GJS-900-2								
EN-GJS-900-2								

¹⁾ nach DIN EN 1560²⁾ nach DIN 17006-4³⁾ Mechanische Eigenschaften gemessen an Proben aus getrennt gegossenen Probestücken.⁴⁾ Kennwerte nach FKM-Richtlinie [2].**Tabelle A1-11** Mechanische Eigenschaften für **Temperguss** nach DIN EN 1562

Werkstoffsorte		Werkstoff nummer	Mechanische Eigenschaften					
Kurzname neu ¹⁾	alt ²⁾		R _{p0,2} ³⁾ N/mm ² min.	R _m ³⁾ N/mm ² min.	A ³⁾ %	σ _{zdW} ⁴⁾ N/mm ²	σ _{bW} ⁴⁾ N/mm ²	τ _w ⁴⁾ N/mm ²
Weißer Temperguss								
EN-GJMW-350-4	GTW-35-04	EN-JM-1010	---	350	4	105	150	115
EN-GJMW-360-12	GTW-S-38-12	EN-JM-1020	190	360	12	110	155	120
EN-GJMW-400-5	GTW-40-05	EN-JM-1030	220	400	5	120	170	130
EN-GJMW-450-7	GTW-45-07	EN-JM-1040	260	450	7	135	190	145
EN-GJMW-550-4	---	EN-JM-1050	340	550	4	165	230	175
Schwarzer Temperguss								
EN-GJMB-300-6	---	EN-JM-1110	---	300	6	90	130	100
EN-GJMB-350-10	GTS-35-10	EN-JM-1130	200	350	10	105	150	115
EN-GJMB-450-6	GTS-45-06	EN-JM-1140	270	450	6	135	190	145
EN-GJMB-500-5	---	EN-JM-1150	300	500	5	150	210	160
EN-GJMB-550-4	GTS-55-04	EN-JM-1160	340	550	4	165	230	175
EN-GJMB-600-3	---	EN-JM-1170	390	600	3	180	250	190
EN-GJMB-650-2	GTS-65-02	EN-JM-1180	430	650	2	195	265	205
EN-GJMB-700-2	GTS-70-02	EN-JM-1190	530	700	2	210	285	220
EN-GJMB-800-1	---	EN-JM-1200	600	800	1	240	320	250
EN-GJMB-800-1								

¹⁾ nach DIN EN 1560²⁾ nach DIN 17006-4³⁾ Mechanische Eigenschaften für einen Probendurchmesser von 12 mm bei weißem Temperguss und 12 mm oder 15 mm bei schwarzem Temperguss. Kennwerte für abweichende Probendurchmesser siehe DIN EN 1562.⁴⁾ Kennwerte nach FKM-Richtlinie [2].

Tabelle A1-12 Mechanische Eigenschaften für **Aluminiumknetlegierungen** nach DIN EN 485-2 (Auswahl)

Kurzname ¹⁾	Werkstoffsorte Numerische Bezeichnung ²⁾	Wst.-zustand ³⁾	Mechanische Eigenschaften						
			$R_{p0,2}^{(4)}$ N/mm ²	$R_m^{(4)}$ N/mm ²	$A_{50}^{(4)}$ % min.	$\sigma_{zdW}^{(5)}$ N/mm ²	$\sigma_{bw}^{(5)}$ N/mm ²	$\tau_w^{(5)}$ N/mm ²	$\tau_s^{(5)}$ N/mm ²
EN-AW Al Cu4SiMg	EN AW-2014	T451	240	395	14	120	140	85	70
		T651	390	440	7	130	150	95	75
EN-AW Al Cu4Mg	EN AW-2024	T4	275	425	14	130	145	90	75
		T62	345	440	5	130	150	95	75
EN-AW Al Si1Fe	EN AW-4006	H14	120	140	3	40	55	35	25
		T4	55	120	18	35	50	30	20
EN-AW Al Mg2,5	EN AW-5052	O	65	170	16	50	65	40	30
		H12	160	210	8	65	85	50	35
		H18	240	270	2	80	100	60	45
EN-AW Al Mg3	EN AW-5754	O	80	190	16	55	75	45	35
		H12	170	220	6	65	85	50	40
		H18	250	290	2	85	105	65	50
EN-AW Al Mg4,5Mn0,7	EN AW-5083	O	125	275	13	85	100	60	45
		H12	250	315	5	95	115	70	55
		H16	300	360	2	110	130	80	60
EN-AW Al Si1MgMn	EN AW-6082	T451	110	205	14	60	80	50	35
		T651	260	310	7	95	110	70	55
EN-AW Al Zn4,5Mg1	EN AW-7020	T451	210	320	12	95	115	70	55
		T651	280	350	8	105	125	75	60
EN-AW Al Zn5,5MgCu	EN AW-7075	T62	470	540	7	160	180	115	95

¹⁾ nach DIN EN 573-2 ²⁾ nach DIN EN 573-1 ³⁾ nach DIN EN 515⁴⁾ Kennwerte für Bänder, Bleche und Platten mit einer Nenndicke von 1,5 mm ... 3 mm. Für EN AW Al Cu4SiMg-T451 und -T651 sowie EN-AW Al Cu4Mg-T4 Nenndicke 1,5 mm ... 6 mm. Für EN-AW Al Cu4Mg-T62 Nenndicke 0,4 mm ... 12,5 mm.⁵⁾ Kennwerte nach FKM-Richtlinie [2].**Tabelle A1-13** Mechanische Eigenschaften für **Aluminiumgusslegierungen** nach DIN EN 1706 (Auswahl)

Kurzname ¹⁾	Werkstoffsorte Numerische Bezeichnung ²⁾	Wst.-zustand ³⁾	Mechanische Eigenschaften						
			$R_{p0,2}^{(4)}$ N/mm ²	$R_m^{(4)}$ N/mm ²	$A_{50}^{(4)}$ % min.	$\sigma_{zdW}^{(5)}$ N/mm ²	$\sigma_{bw}^{(5)}$ N/mm ²	$\tau_w^{(5)}$ N/mm ²	$\tau_s^{(5)}$ N/mm ²
EN-AC Al Cu4MgTi	AC-21000	T4	200	320	8	95	140	105	70
EN-AC Al Cu4Ti	AC-21100	T6	220	330	7	100	145	110	75
EN-AC Al Si7Mg	AC-42000	T6	220	260	1	80	115	90	60
EN-AC Al Si10Mg	AC-43000	T6	220	260	1	80	115	90	60
EN-AC Al Si9Mg	AC-43300	T6	210	290	4	85	130	100	65
EN-AC Al Si11	AC-44000	F	80	170	7	50	75	60	40
EN-AC Al Si12	AC-44100	F	80	170	5	50	75	60	40
EN-AC Al Si5Cu1Mg	AC-45300	T4	140	230	3	70	105	80	50
		T6	210	280	< 1	85	125	95	65
EN-AC Al Mg3	AC-51100	F	70	150	5	45	70	50	35
EN-AC Al Mg5	AC-51300	F	100	180	4	55	80	60	40
EN-AC Al Zn5Mg	AC-71000	T1	130	210	4	65	95	70	45

¹⁾ nach DIN EN 573-2 ²⁾ nach DIN EN 573-1 ³⁾ nach DIN EN 515⁴⁾ Mechanische Eigenschaften für Kokillengusslegierungen und getrennt gegossene Probestücke.⁵⁾ Kennwerte nach FKM-Richtlinie [2].

Tabelle A1-14 Elastische Werkstoffkennwerte (Anhaltswerte)

Werkstoff / Werkstoffgruppe	Elastizitätsmodul <i>E</i> GPa	Querkontraktions- zahl <i>μ</i>	Schubmodul <i>G</i> GPa
Metalle			
Eisen	210	0,29	81
Ferritisch-perlitischer Stahl	200 ... 216	0,30	77 ... 83
Austenitischer Stahl	190 ... 203	0,30	73 ... 78
Gusseisen mit Lamellengraphit ¹⁾	78 ... 143	0,26	31 ... 57
Gusseisen mit Kugelgraphit ²⁾	169 ... 176	0,275	65 ... 72
Al und Al-Legierungen	60 ... 80	0,33	23 ... 30
Mg und Mg-Legierungen	40 ... 45	0,30	15 ... 17
Unlegiertes Kupfer	125	0,34	47
Cu-Zn-Legierungen (Messing)	80 ... 125	0,35	30 ... 46
Cu-Sn-Legierungen (Bronze)	110 ... 125	0,35	41 ... 46
Ti und Ti-Legierungen	112 ... 130	0,32 ... 0,38	42 ... 47
Blei	17,5	0,42	6,2
Silber	80	0,38	29
Zink	94	0,29	36
Zinn	55	0,33	21
Nichtmetalle			
Polyethylen			
• PE-LD	1,0 ... 1,5	0,38	0,36 ... 0,54
• PE-HD	0,28	0,38	0,10
Polypropylen (PP)	0,7 ... 1,4	0,34	0,3 ... 0,5
Polyamid 6 (PA6)			
• feucht ... trocken	1,5 ... 3,2	0,32	0,6 ... 3,2
• Glasfaser verstärkt (30 %)	6,5	0,32	10
• Kohlefaser verstärkt (30 %)	18	0,32	6,8
Polycarbonat (PC)	2,0 ... 2,5	0,32	0,6 ... 1,2
Polymethylmethacrylat (PMMA)	2,4 ... 4,5	0,32	0,9 ... 1,7
Polyoxymethylen (POM)	2,5 ... 3,6	0,32	1,0 ... 1,4
Polytetrafluorethylen (PTFE)	0,4 ... 0,7	k.A.	k.A.
Polystyrol (PS)	3,0 ... 3,6	0,33	1,1 ... 1,4
Polyvinylchlorid			
• PVC-P (Weich-PVC)	0,45 ... 0,60	0,36	0,17 ... 0,22
• PVC-U (Hart-PVC)	3,0 ... 3,5	0,36	1,1 ... 1,3
Expoxidharz (EP)	2,6 ... 3,5	k.A.	k.A.
Ungesättigtes Polyesterharz (UP)	3,7	k.A.	k.A.
Phenolharz	8,8	k.A.	k.A.
Elastomere	k.A.	0,50	k.A.
Porzellan	70 ... 80	k.A.	k.A.
Glas	70 ... 80	0,17	30 ... 34
Beton	25 ... 30	0,15	11 ... 13
Diamant	1000	k.A.	k.A.
Glasfaser	70 ... 85	0,18	30 ... 36
Holz (Fichte)	10	0,33	k.A.
Eis (Firm, 10 m Tiefe)	2,5	0,29	k.A.

¹⁾ siehe auch DIN EN 1561²⁾ siehe auch DIN EN 1563

k.A. = keine Angabe

Anhang 2: Sicherheitsfaktoren

Tabelle A2-1 Empfohlene Sicherheitsfaktoren bei statischer Beanspruchung nach FKM-Richtlinie (gültig für normale Temperaturen¹⁾) [2]

Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Lastspannung	Schadensfolge ²⁾	
	gering	hoch
Stahl und Aluminiumknetwerkstoffe ($A \geq 12,5\%$³⁾		
gering	$S_F = 1,20 \cdot R_m/R_p$ $S_B = 1,60$	$S_F = 1,35 \cdot R_m/R_p$ $S_B = 1,80$
hoch	$S_F = 1,30 \cdot R_m/R_p$ $S_B = 1,75$	$S_F = 1,50 \cdot R_m/R_p$ $S_B = 2,00$
Stahlguss ($A \geq 12,5\%$³⁾ und Gusseisen mit Kugelgraphit ($A \geq 12,5\%$³⁾) Gussstücke <i>nicht</i> zerstörungsfrei geprüft		
gering	$S_F = 1,65 \cdot R_m/R_p$ $S_B = 2,20$	$S_F = 1,90 \cdot R_m/R_p$ $S_B = 2,55$
hoch	$S_F = 1,80 \cdot R_m/R_p$ $S_B = 2,45$	$S_F = 2,10 \cdot R_m/R_p$ $S_B = 2,80$
Stahlguss ($A \geq 12,5\%$³⁾ und Gusseisen mit Kugelgraphit ($A \geq 12,5\%$³⁾) Gussstücke zerstörungsfrei geprüft		
gering	$S_F = 1,50 \cdot R_m/R_p$ $S_B = 2,00$	$S_F = 1,70 \cdot R_m/R_p$ $S_B = 2,25$
hoch	$S_F = 1,65 \cdot R_m/R_p$ $S_B = 2,20$	$S_F = 1,90 \cdot R_m/R_p$ $S_B = 2,50$

¹⁾ Normale Temperaturen: Stähle außer Feinkornbaustähle: -40°C ... 100°C

Feinkornbaustähle: -40°C ... 60°C

Eisengusswerkstoffe: -25°C ... 100°C

aushärtbare Aluminiumwerkstoffe: -25°C ... 50°C

nicht aushärtbare Aluminiumwerkstoffe: -25°C ... 100°C

²⁾ R_p = Dehngrenze (z. B. $R_{p0,2}$) oder Streckgrenze (R_c); R_m = Zugfestigkeit

³⁾ Bruchdehnungswerte A für kurzen Proportionalstab ($L_0 = 5,65 \cdot \sqrt{S_0}$)

Hinweis:

- Nach FKM-Richtlinie sind die Sicherheitsfaktoren S_F und S_B wie folgt zu verwenden:
 - S_F falls $R_p \leq 0,75 \cdot R_m$
 - S_B falls $R_p > 0,75 \cdot R_m$
- Die Sicherheitsfaktoren gelten *nicht*, für:
 - Aluminiumknetwerkstoffe mit $A < 12,5\%$
 - Aluminiumgusswerkstoffe
 - Eisengusswerkstoffe mit $A < 12,5\%$ wie z. B. Gusseisen mit Lamellengraphit

Anhang 3: Formzahldiagramme

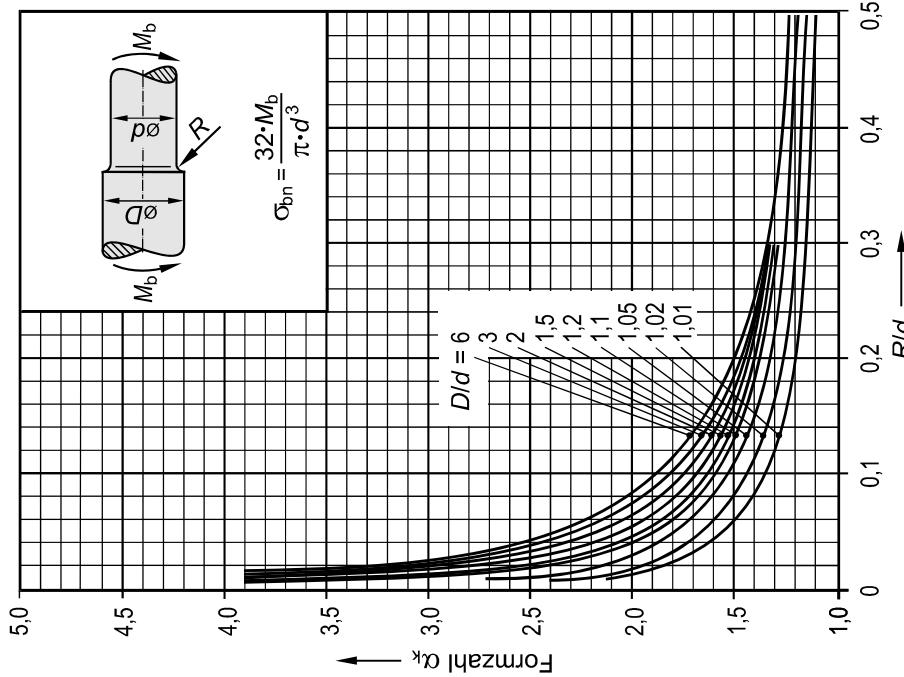


Bild A2.2 Formzahldiagramm für abgesetzten Rundstab unter Biegung nach [5]

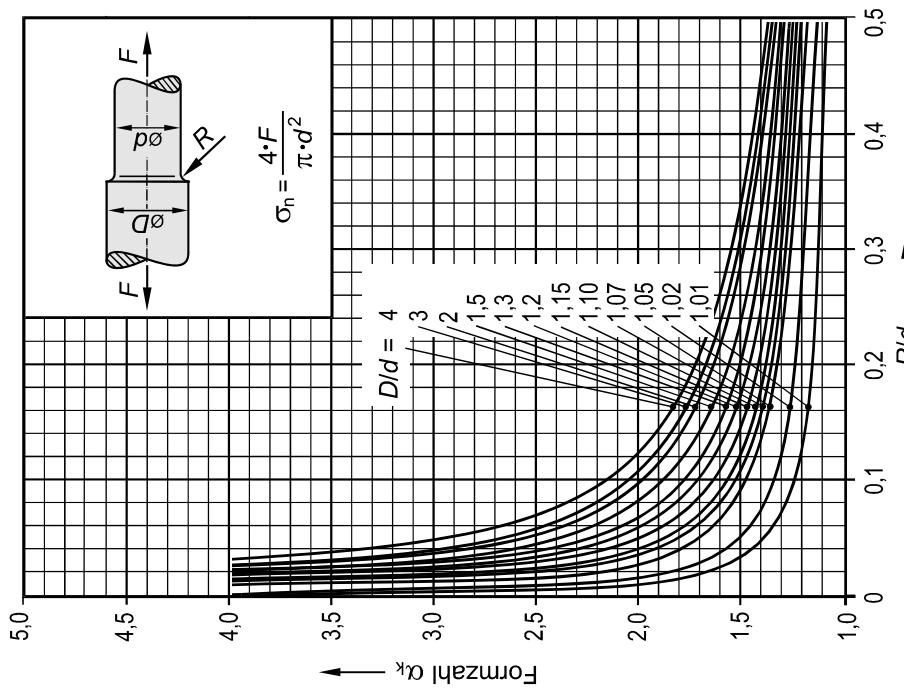


Bild A2.1 Formzahldiagramm für abgesetzten Rundstab unter Zugbeanspruchung nach [5]

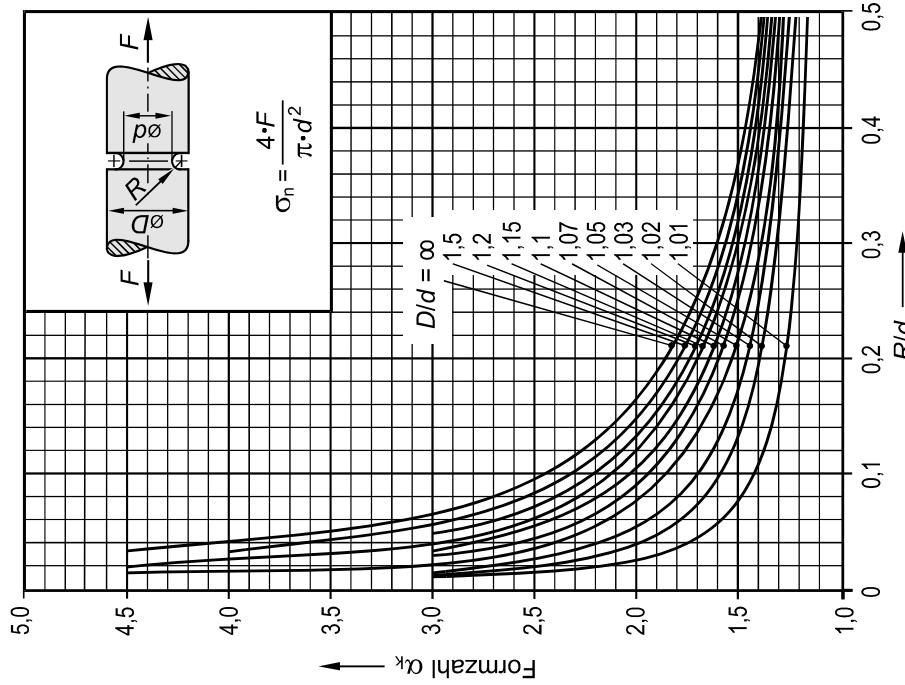


Bild A2.4 Formzahldiagramm für Rundstab mit Umdrehungskerbe unter Zugbeanspruchung nach [5]

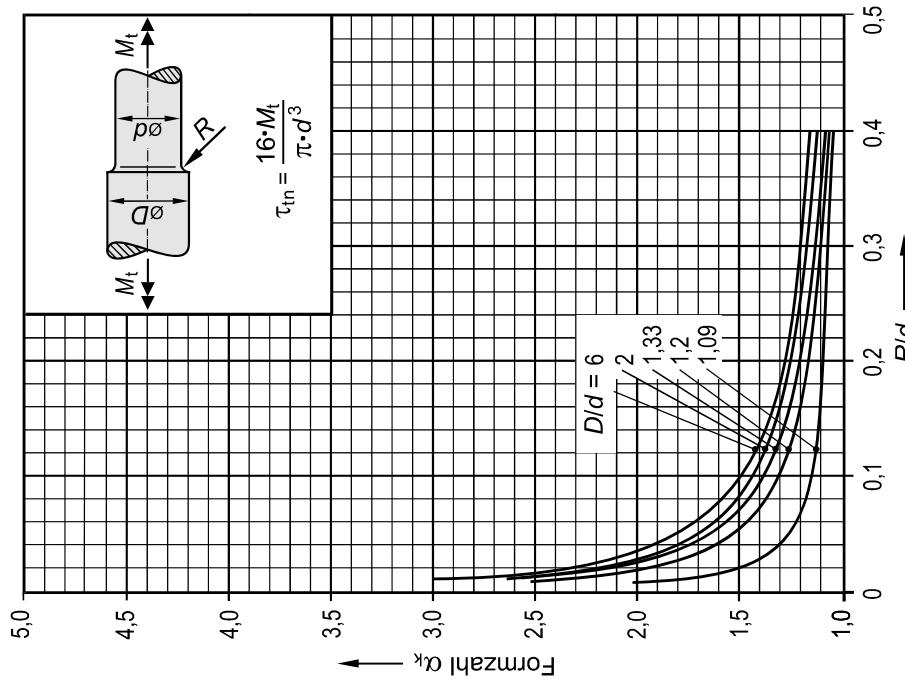
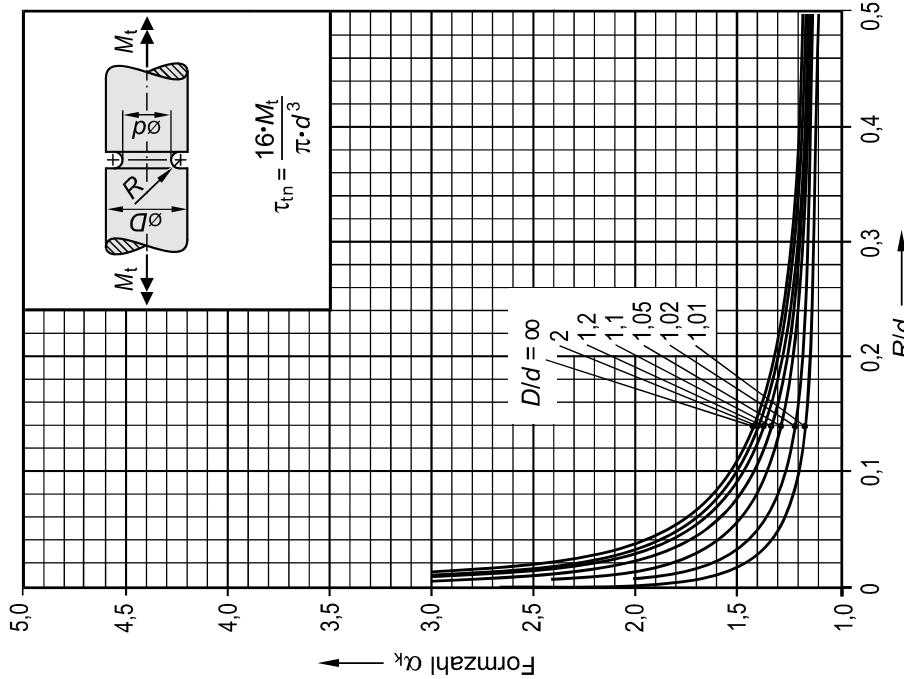
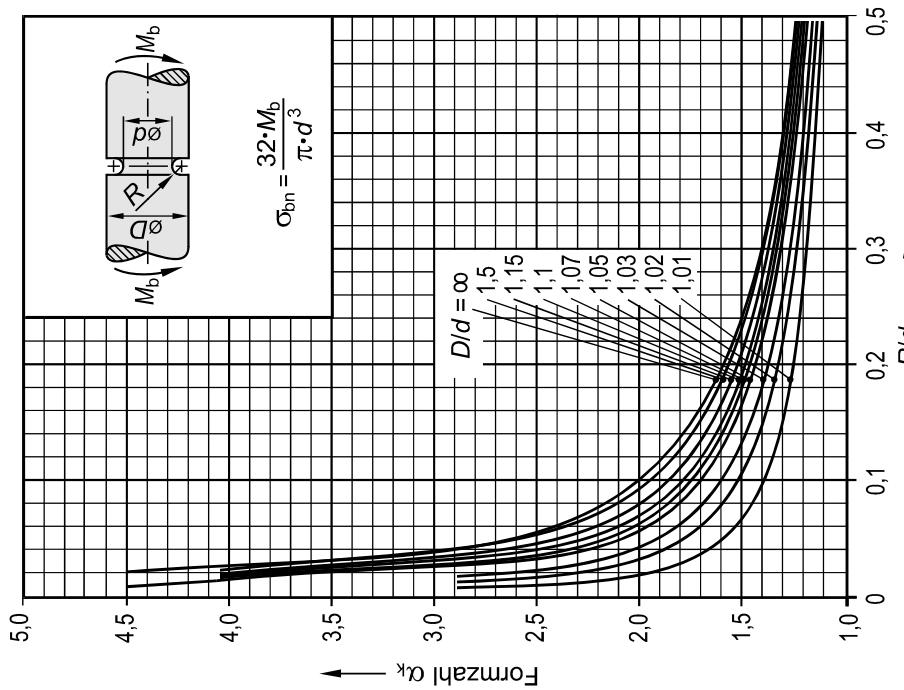


Bild A2.3 Formzahldiagramm für abgesetzten Rundstab unter Torsion nach [5]



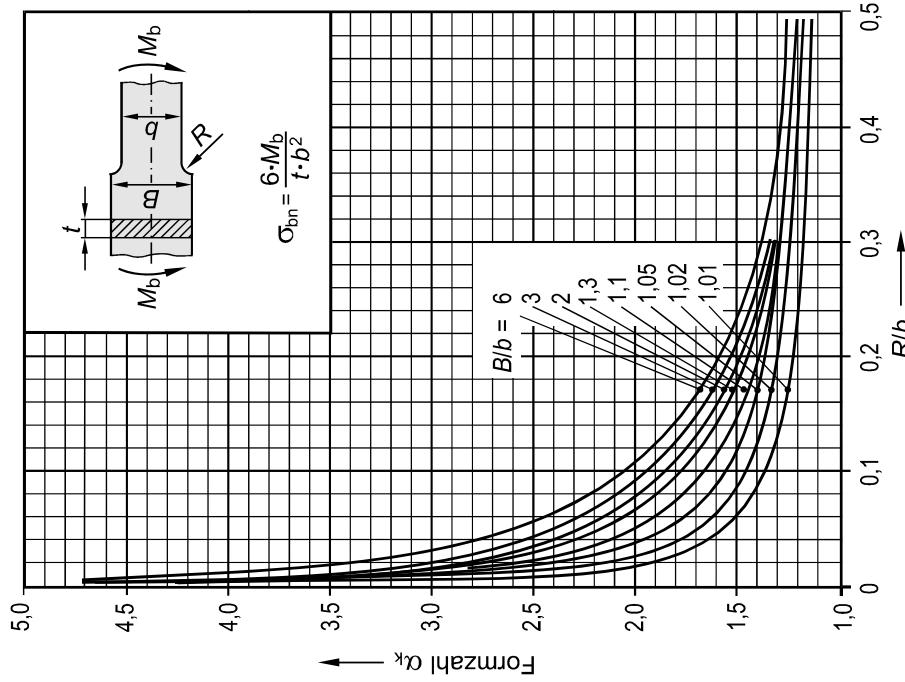


Bild A2.7 Formzahldiagramm für abgesetzten Flachstab unter Zugbeanspruchung nach [5]

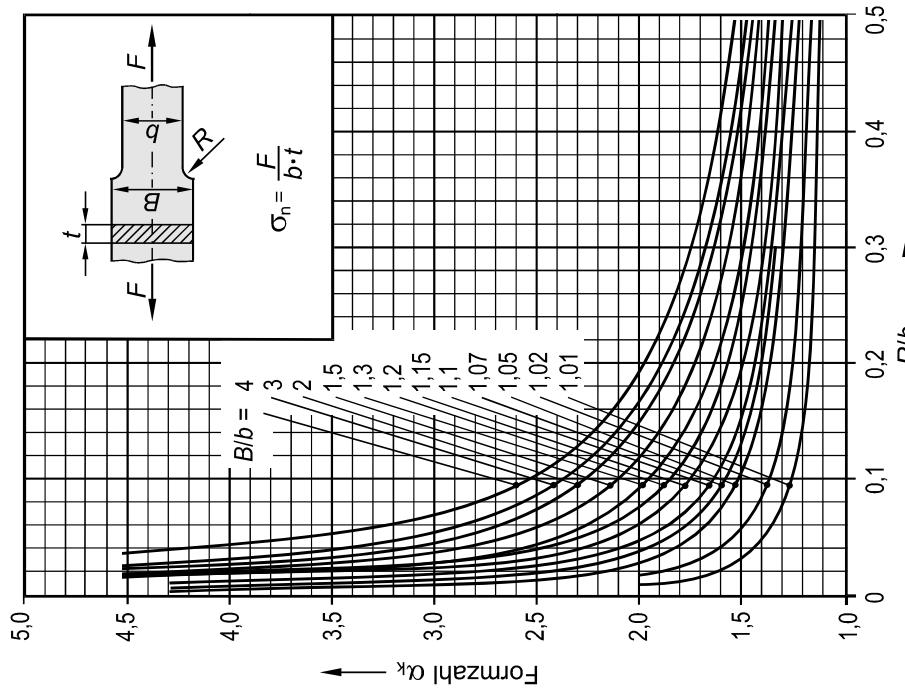


Bild A2.8 Formzahldiagramm für abgesetzten Flachstab unter Biegung nach [5]

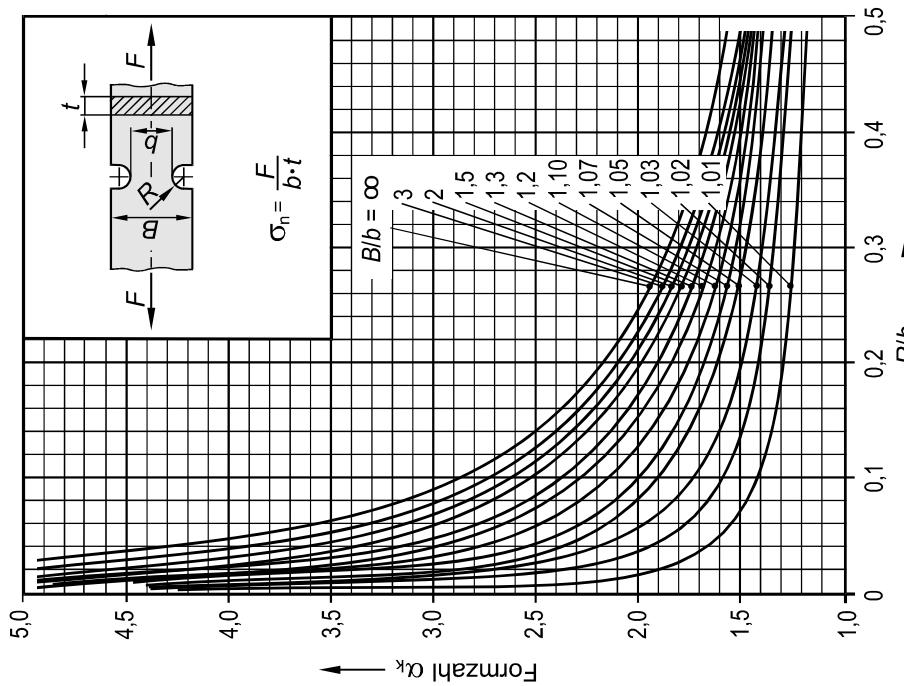


Bild A2.9 Formzahldiagramm für Flachstab mit Außenkerben unter Zugbeanspruchung nach [5]

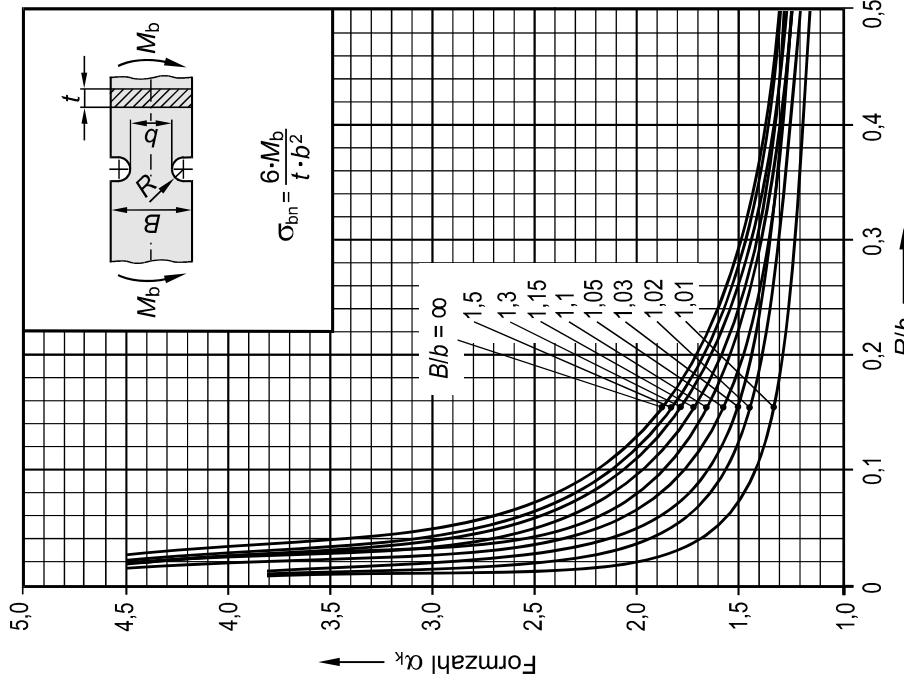


Bild A2.10 Formzahldiagramm für Flachstab mit Außenkerben unter Biegung nach [5]

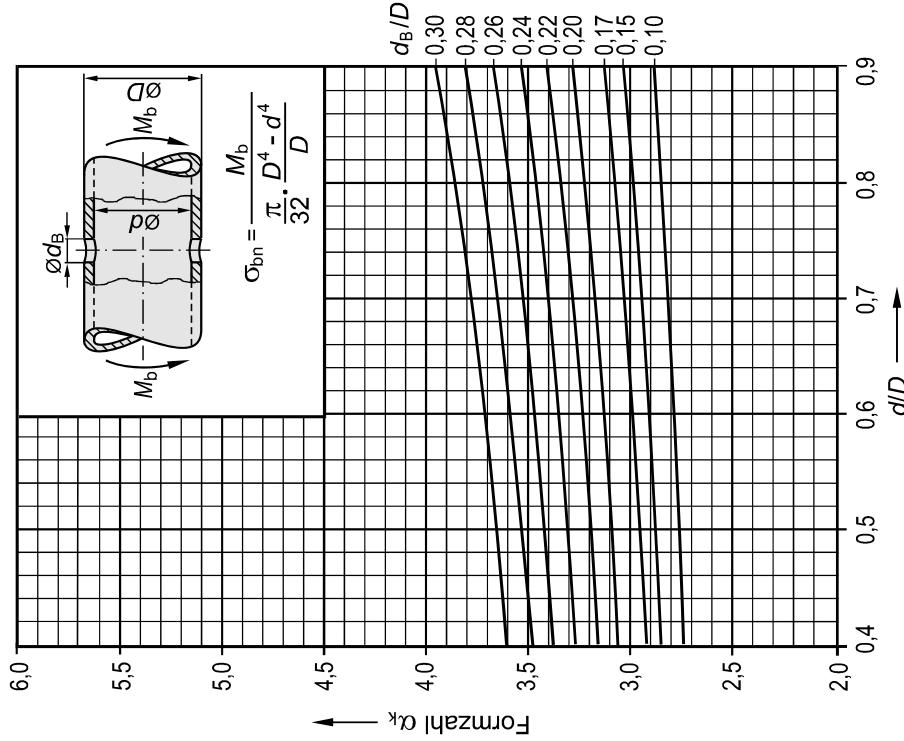


Bild A2.12 Formzahlendiagramm für Rohr mit Querbohrung unter Biegung nach [22]

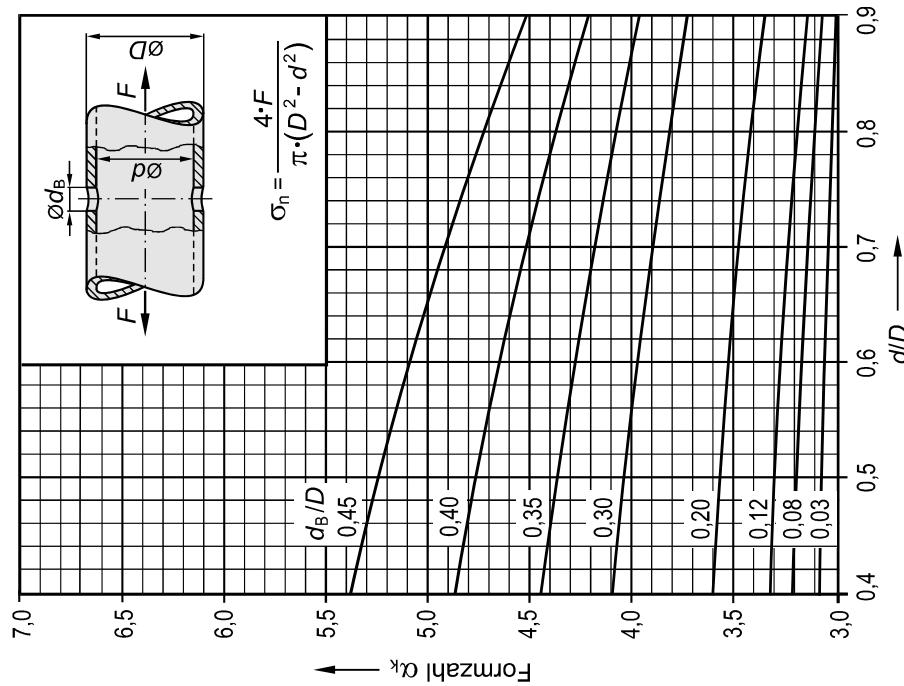


Bild A2.11 Formzahlendiagramm für Rohr mit Querbohrung unter Zugbeanspruchung nach [22]

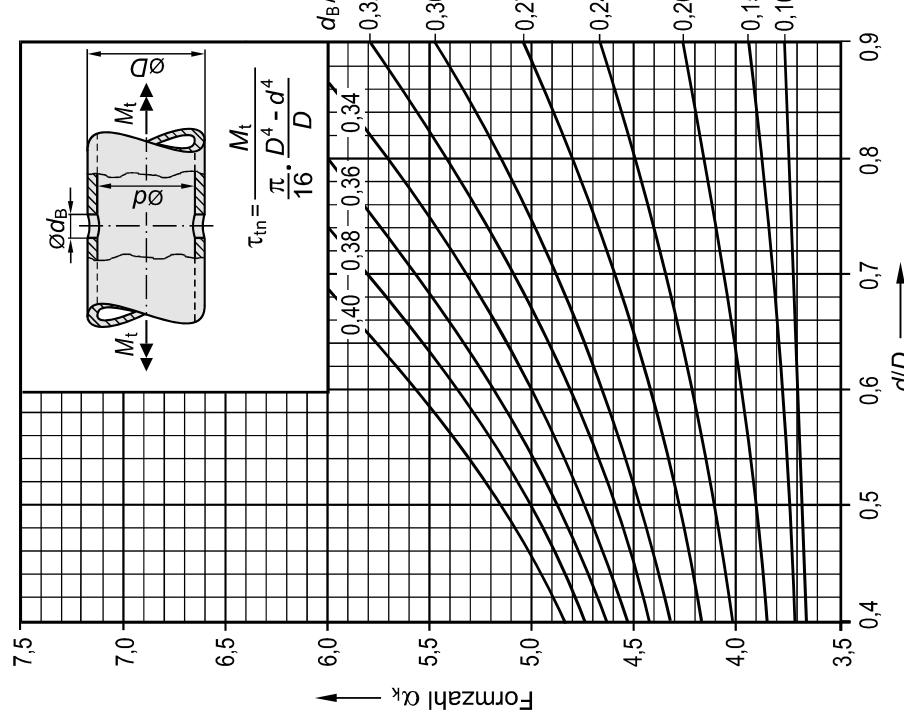


Bild A2.13 Formzahldiagramm für Rohr mit Querbohrung unter Torsion nach [22]

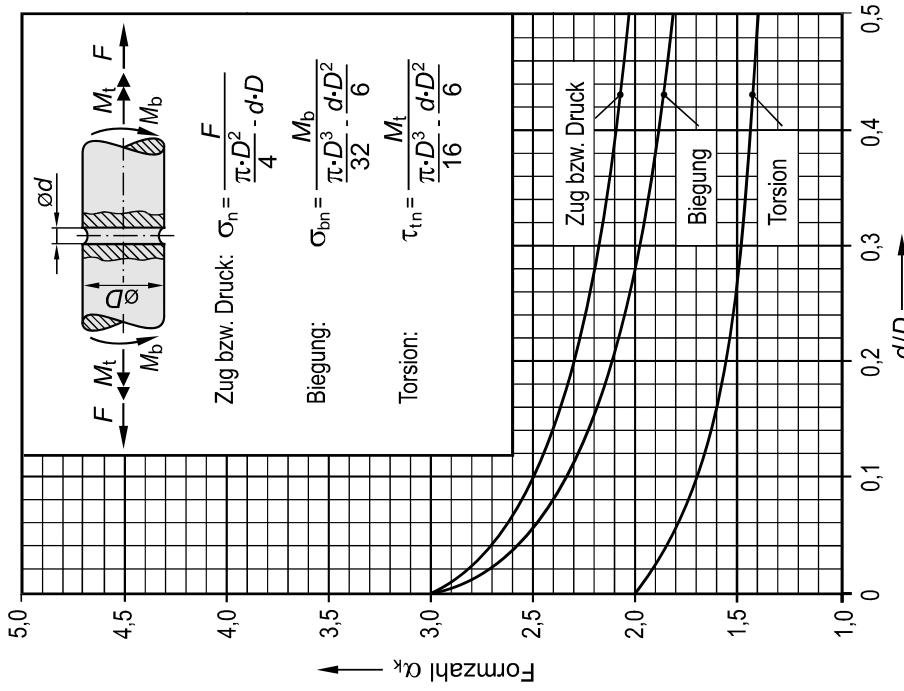


Bild A2.14 Formzahldiagramm für Rundstab mit Querbohrung nach [5]

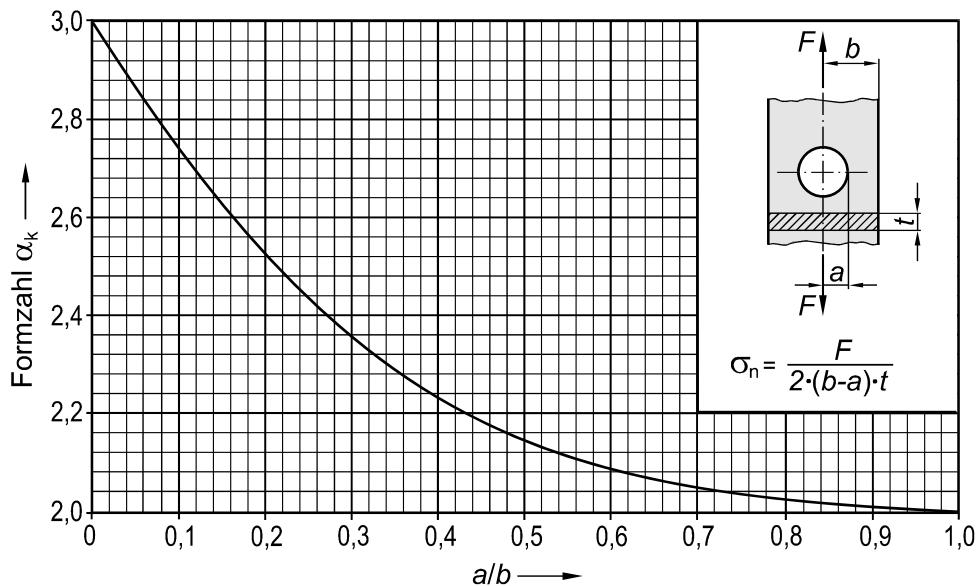


Bild A2.15 Formzahldiagramm für Flachstab mit Querbohrung unter Zugbeanspruchung nach [5]

Anhang 4: Lösungen zu den Aufgaben

Die ausführlichen Lösungen (Rechenwege) sowie alternative Lösungsvorschläge finden Sie im separat verfügbaren **Lösungsbuch zur Einführung in die Festigkeitslehre**.

Lösungen zu Kapitel 2

Lösung zu Aufgabe 2.1

- a) $\sigma = 339,53 \text{ N/mm}^2$
- b) $S_F = 2,00$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
 $S_B = 3,09$ (ausreichend, da $S_B > 2,0$)
- c) $\Delta l = 1,96 \text{ mm}$
- d) $F = 49008 \text{ N} \approx 49 \text{ kN}$
- e) $s = 4,89 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 2.2

- a) $d = 8,29 \text{ mm}$ (Berechnung gegen Fließen)
- b) $\varepsilon = 1,37 \%$
 $\Delta l = 2,05 \text{ mm}$
- c) $F_B = 34064 \text{ N}$

Lösung zu Aufgabe 2.3

- a) Leerer Wassertank: $\sigma_L = 49,05 \text{ N/mm}^2$
Voller Wassertank: $\sigma_V = 88,29 \text{ N/mm}^2$
- b) $S_F = 3,00$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
 $S_B = 5,32$ (ausreichend, da $S_B > 2,0$)
- c) $\Delta l = 0,28 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 2.4

- a) $d = 13,42 \text{ mm}$
- b) $S_B = 3,84$ (nicht ausreichend, da $S_B < 4,0$)
- c) $m = 2402 \text{ kg}$

Lösung zu Aufgabe 2.5

- a) $F_S = 35195 \text{ N}$
- b) $\sigma_S = 49,8 \text{ N/mm}^2$
- c) Stahl: $\Delta l = 0,64 \text{ mm}$
Al-Legierung: $\Delta l = 1,91 \text{ mm}$

- d) Stahl: $m_1 = 15364 \text{ kg}$
 Al-Legierung: $m_1 = 10544 \text{ kg}$
- e) Stahl: $s = 3,07 \text{ mm}$
 Al-Legierung: $s = 3,21 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 2.6

$$F = 2090,4 \text{ N}$$

Lösung zu Aufgabe 2.7

- a) $F_1 = 428,6 \text{ kN}$
- b) $F_2 = 600 \text{ kN}$
- c) $\sigma_{\text{PL}} = 240 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{\text{VK}} = 394,32 \text{ N/mm}^2$
- d) $F_4 = 783,5 \text{ kN}$

Lösung zu Aufgabe 2.8

$$\Delta l = 221,9 \text{ mm}$$

$$\sigma_K = 627,2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_M = 37,0 \text{ N/mm}^2$$

Lösung zu Aufgabe 2.9

- a) Fließen oder Knickung
- b) $s = 2,5 \text{ mm}$
- c) $\Delta l = 1,19 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 2.10

- a) $d = 28,7 \text{ mm}$
- b) $\Delta l = 3,45 \text{ mm}$
- c) $m^* = 21065 \text{ kg}$

Lösung zu Aufgabe 2.11

- a) $F = 349,2 \text{ kN}$
- b) $\sigma_d = \sigma_{d1} = \sigma_{d2} = \sigma_{d3} = 177,8 \text{ N/mm}^2$
- c) Scheibe 1 (Mg): $\Delta l_1 = 0,148 \text{ mm}$
 Scheibe 2 (Cu): $\Delta l_2 = 0,075 \text{ mm}$
 Scheibe 3 (Stahl): $\Delta l_3 = 0,027 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 2.12

$$s = 15,3 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.13

a) $z_S = 38 \text{ mm}$

$$I_{yS} = 578667 \text{ mm}^4$$

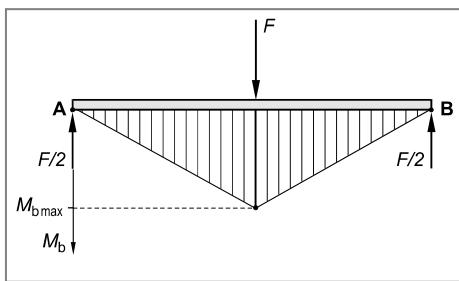
$$W_{by} = 15228 \text{ mm}^3$$

b) $S_F = 5,41$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

c) $W^*_{by} = 6338,0 \text{ mm}^3$

Lösung zu Aufgabe 2.14

a) $M_{b \max} = F \cdot l / 4$



b) $f_{\max} = 9,09 \text{ mm}$

c) $f^*_{\max} = 18,23 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 2.15

$$l = 16630 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.16

a) $W_b = 14,96 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$

b) $m^* = 47,95 \text{ kg}$

Lösung zu Aufgabe 2.17

a) $I_y = \frac{b \cdot h^3}{36}$

$$W_{by} = \frac{b \cdot h^2}{24}$$

b) $I_y = \frac{b^4}{32\sqrt{3}}$

$$W_{by} = \frac{b^3}{32}$$

c) $I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$

$$W_{by} = \frac{b \cdot h^2}{12}$$

Lösung zu Aufgabe 2.18

a) $I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$

$$W_{by} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

b) $I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$

$$W_{bz} = \frac{h \cdot b^2}{6}$$

Lösung zu Aufgabe 2.19

$$I_{yb} = 1152 \text{ cm}^4$$

Lösung zu Aufgabe 2.20

a) $z_S = 43,33 \text{ mm}$

b) $I_{yS} = 4426667 \text{ mm}^4$

Lösung zu Aufgabe 2.21

a) $I_{yS} = 1568 \text{ cm}^4$
 $W_{byS} = 224 \text{ cm}^3$

b) $I_{zS} = 2368 \text{ cm}^4$
 $W_{bzS} = 338,3 \text{ cm}^3$

Lösung zu Aufgabe 2.22

- a) $z_S = 14,11 \text{ mm}$
 $I_y = 180721 \text{ mm}^4$
- b) $F = 69,6 \text{ kN}$
- c) $F = 12,1 \text{ kN}$

Lösung zu Aufgabe 2.23

- a) $d = 17,24 \text{ mm}$
- b) $\sigma_b = 696,2 \text{ N/mm}^2 (> R_c)$
- c) $p = 101,5 \text{ N/mm}^2$

Lösung zu Aufgabe 2.24

- a) $S_B = 3,04$ (ausreichend, da $S_B > 2,0$)
Für τ_{ab} wurde gewählt: $\tau_{ab} = 0,8 \cdot R_m = 464 \text{ N/mm}^2$
- b) $l_K = 53,1 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 2.25

- $h = 26,0 \text{ mm}$
Für τ_{ab} wurde gewählt: $\tau_{ab} = 0,8 \cdot R_m = 600 \text{ N/mm}^2$

Lösung zu Aufgabe 2.26

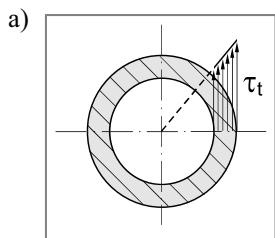
$$F_S = 226,2 \text{ kN}$$

Lösung zu Aufgabe 2.27

$$d = 19,60 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.28

$$d = 22,42 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.29

- b) $M_t = 2010 \text{ Nm}$
 c) $\tau_i = 122,9 \text{ N/mm}^2$

Lösung zu Aufgabe 2.30

- a) $d = 44,31 \text{ mm}$
 b) $d^* = 47,47 \text{ mm}$
 c) S275JR: $\varphi = 4,72^\circ$
 EN-GJL-300: $\varphi = 6,58^\circ$

Lösung zu Aufgabe 2.31

- a) $F = 21530 \text{ N}$
 b) 1. Abschnitt: $S_{F1} = 4,08$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
 2. Abschnitt: $S_{F2} = 4,16$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
 3. Abschnitt: $S_{F3} = 1,02$ (nicht ausreichend, da $S_F < 1,20$)

Lösung zu Aufgabe 2.32

a) $I_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4$

$$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$$

b) $I_p = \frac{\pi}{32} \cdot (d_a^4 - d_i^4)$

$$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}$$

Lösung zu Aufgabe 2.33

- a) $M_{t1} = M_{t2} \cdot \frac{D_1}{D_2}$
 b) $M_{t2} = 2054 \text{ Nm}$

Lösung zu Aufgabe 2.34

$$M_t = 1328,9 \text{ Nm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.35

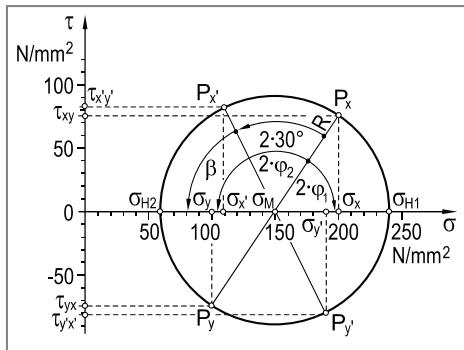
$$M_{t \text{ zul}} = 402,6 \text{ Nm}$$

$$\varphi_{\text{zul}} = 1,435^\circ$$

Lösungen zu Kapitel 3

Lösung zu Aufgabe 3.1

a)



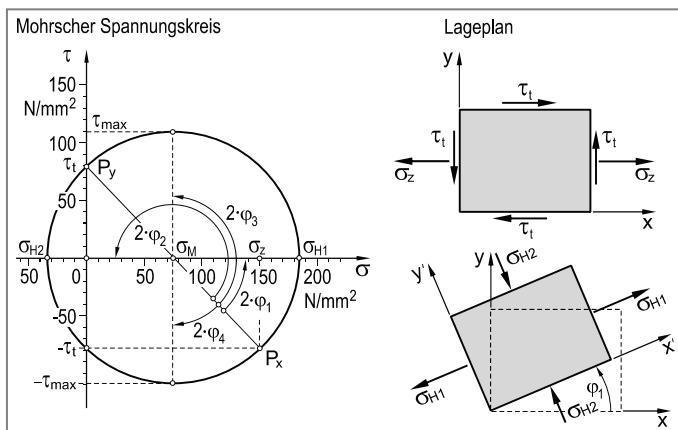
b) $\sigma_{H1} = 240,1 \text{ N/mm}^2 \quad \varphi_1 = -28,15^\circ$
 $\sigma_{H2} = 59,9 \text{ N/mm}^2 \quad \varphi_2 = 61,85^\circ$

c) Schnittebene E_x' : $\sigma_{x'} = 110,0 \text{ N/mm}^2$
 $\tau_{x'y'} = 80,8 \text{ N/mm}^2$

Schnittebene E_y' : $\sigma_{y'} = 189,9 \text{ N/mm}^2$
 $\tau_{y'x'} = -80,8 \text{ N/mm}^2$

Lösung zu Aufgabe 3.2

a) Lastspannungen: $\sigma_z = 150,3 \text{ N/mm}^2$
 $\tau_t = 79,8 \text{ N/mm}^2$



b) $\sigma_{H1} = 184,8 \text{ N/mm}^2 \quad \varphi_1 = 23,4^\circ$
 $\sigma_{H2} = -34,5 \text{ N/mm}^2 \quad \varphi_2 = 113,4^\circ \text{ (oder } -66,6^\circ\text{)}$
 $\tau_{\max} = \pm 109,6 \text{ N/mm}^2 \quad \varphi_3 = 68,4^\circ \text{ und } \varphi_4 = -21,6^\circ$

Lösung zu Aufgabe 3.3

a) $\sigma_{H1} = 205,24 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{H2} = -105,20 \text{ N/mm}^2$

b) $\varphi_1 = -7,47^\circ$
 $\varphi_2 = 82,53^\circ$

Lösung zu Aufgabe 3.4

- a) Zug und Biegung
b) $F = 1000 \text{ kN}$
c) $S_B = 1,31$ (nicht ausreichend, da $S_B < 4,0$)

Lösung zu Aufgabe 3.5

a) $\sigma = 803,55 \text{ N/mm}^2$
 $\tau = 296,77 \text{ N/mm}^2$

b) $\sigma = 907,63 \text{ N/mm}^2$
 $\tau = 0$

c) $\sigma_1 = 907,63 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_2 = 138,21 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_3 = -45,84 \text{ N/mm}^2$

d) Richtungswinkel zur ersten Hauptnormalspannung (σ_1): $\alpha_1 = 40,83^\circ$
 $\beta_1 = 69,79^\circ$
 $\gamma_1 = 56,29^\circ$

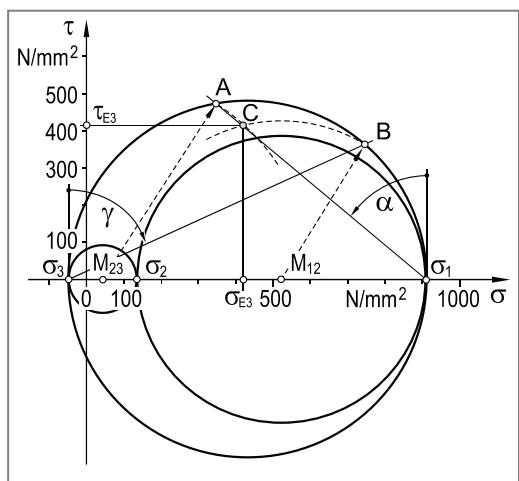
Richtungswinkel zur zweiten Hauptnormalspannung (σ_2): $\alpha_2 = 89,78^\circ$
 $\beta_2 = 32,17^\circ$
 $\gamma_2 = 122,16^\circ$

Richtungswinkel zur dritten Hauptnormalspannung (σ_3): $\alpha_3 = 49,17^\circ$
 $\beta_3 = 113,89^\circ$
 $\gamma_3 = 50,27^\circ$

e) Rechnerische Lösung

$\sigma_{E3} = 424,17 \text{ N/mm}^2$
 $\tau_{E3} = 410,74 \text{ N/mm}^2$

Graphische Lösung



abgelesen: $\sigma_{E3} = 425 \text{ N/mm}^2$
 $\tau_{E3} = 410 \text{ N/mm}^2$

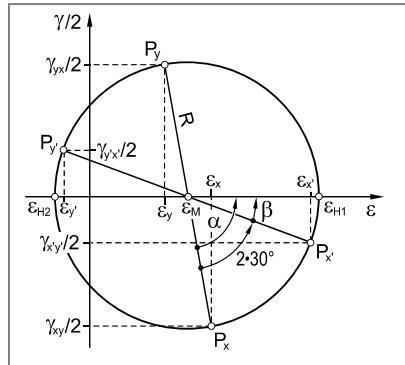
Lösungen zu Kapitel 4

Lösung zu Aufgabe 4.1

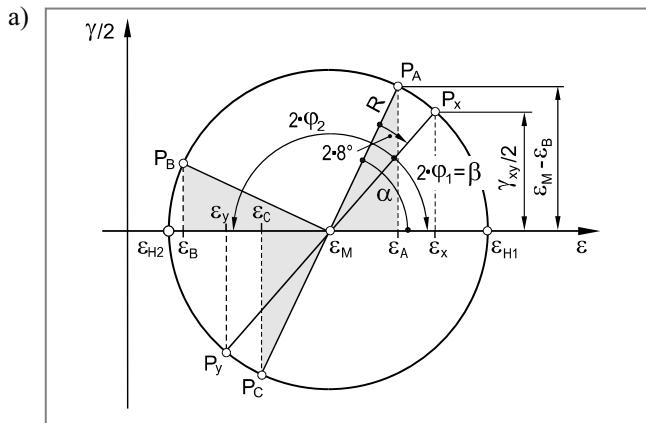
a) $\varepsilon_x = 2\%$
 $\varepsilon_y = 1,25\%$
 $\gamma_{xy} = -4,36\%$

b) $\varepsilon_x' = 3,7\%$
 $\varepsilon_y' = -0,45\%$
 $\gamma_{x'y'} = -1,53\%$
 $\gamma_{y'x'} = 1,53\%$

c) $l' = 5,0185 \text{ mm}$
 $\delta = 89,91^\circ$



Lösung zu Aufgabe 4.2



$\varepsilon_x = 0,977\%$

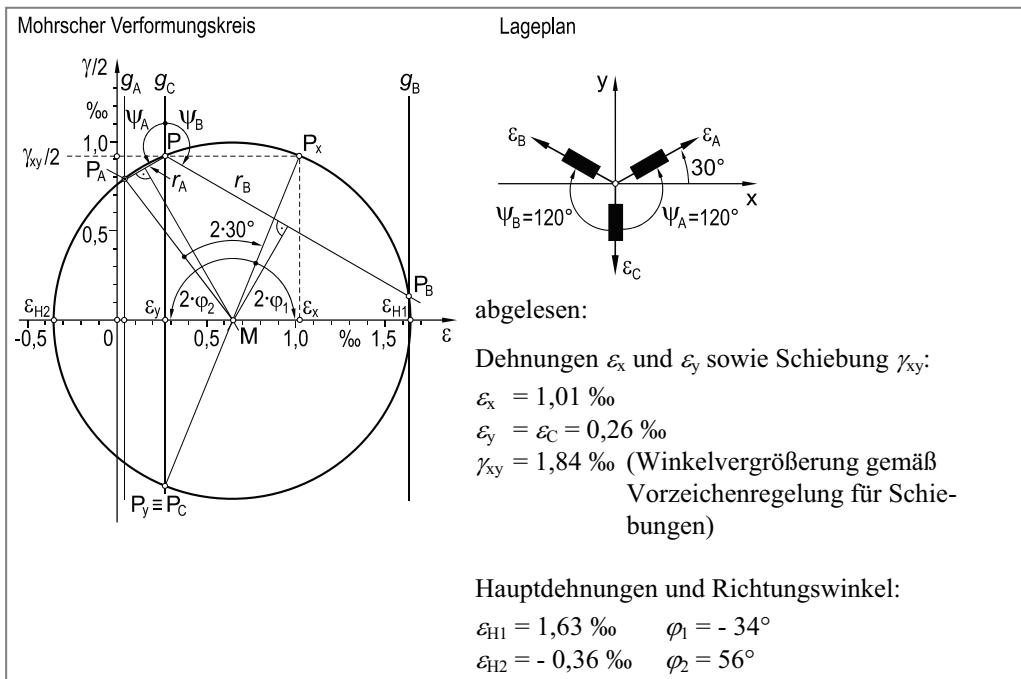
$\varepsilon_y = 0,357\%$

$\gamma_{xy} = 0,744\%$ (Winkelvergrößerung gemäß spezieller Vorzeichenregelung)

b) $\varepsilon_{H1} = 1,151\%$ $\varphi_1 = -25,12^\circ$
 $\varepsilon_{H2} = 0,183\%$ $\varphi_2 = 64,88^\circ$

Lösung zu Aufgabe 4.3

a) + b)



c) Rechnerische Lösung:

$$\varepsilon_x = 1,004 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_y = 0,2619 \text{ \%}$$

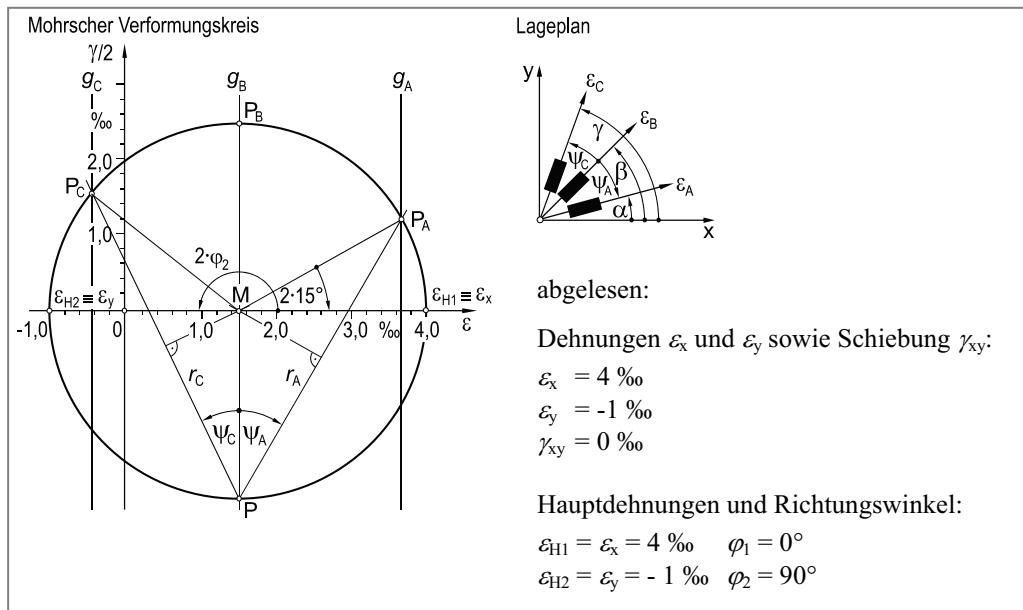
$$\gamma_{xy} = 1,8572 \text{ \%} \text{ (Winkelvergrößerung gemäß Vorzeichenregelung für Schiebungen)}$$

$$\varepsilon_{H1} = 1,6332 \text{ \%} \quad \varphi_1 = -34,10^\circ$$

$$\varepsilon_{H2} = -0,3669 \text{ \%} \quad \varphi_2 = 55,90^\circ$$

Lösung zu Aufgabe 4.4

a) + b)



c) Rechnerische Lösung

$$\varepsilon_x = 4\%$$

$$\varepsilon_y = -1\%$$

$$\gamma_{xy} = 0\%$$

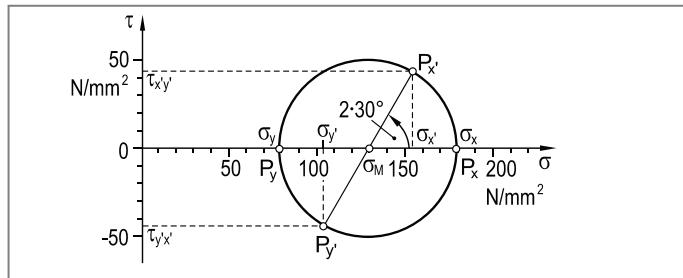
$$\varepsilon_{H1} = \varepsilon_x = 4\% \quad \varphi_1 = 0^\circ$$

$$\varepsilon_{H2} = \varepsilon_y = -1\% \quad \varphi_2 = 90^\circ$$

Lösungen zu Kapitel 5

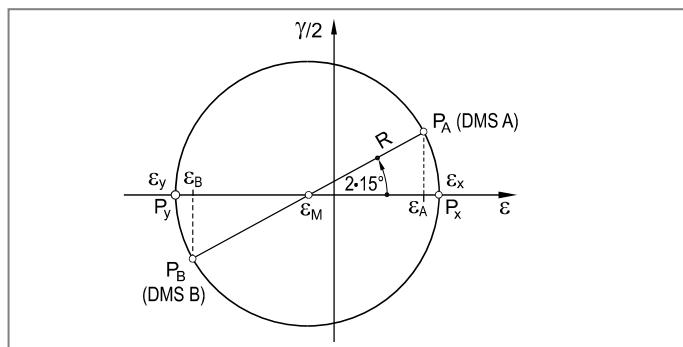
Lösung zu Aufgabe 5.1

- a) $F_x = 135,0 \text{ kN}$
 $F_y = 100,9 \text{ kN}$
- b) $\sigma_{x'} = 155,0 \text{ N/mm}^2$
 $\tau_{x'y'} = 43,3 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_y' = 105,0 \text{ N/mm}^2$
 $\tau_{y'x'} = -43,3 \text{ N/mm}^2$



Lösung zu Aufgabe 5.2

- a) $\varepsilon_M = -0,1275 \%$
 $R = 0,4648 \%$
- b) $F_x = 220,8 \text{ kN}$
 $F_y = -1359,6 \text{ kN}$



Lösung zu Aufgabe 5.3

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 128,4 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_y &= -27,0 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{xy} &= -47,2 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5.4

a) $\varepsilon_x = 0,161 \text{ \%}$

$\varepsilon_y = -0,044 \text{ \%}$

$\gamma_{xy} = 1,104 \text{ \%}$

b) $\varepsilon_{H1} = 0,620 \text{ \%}$

$\varepsilon_{H2} = -0,503 \text{ \%}$

$\varphi_1 = -39,72^\circ$

$\varphi_2 = 50,28^\circ$

c) $\sigma_{H1} = 108,3 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{H2} = -73,2 \text{ N/mm}^2$

Lösung zu Aufgabe 5.5

a) $F_x = 750 \text{ kN}$

$F_y = 750 \text{ kN}$

b) $\varepsilon_A = 0,503 \text{ \%}$

$\varepsilon_B = 0,477 \text{ \%}$

$\varepsilon_C = 0,179 \text{ \%}$

c) $\Delta t = -4,4 \mu\text{m}$

Lösung zu Aufgabe 5.6

a) $\Delta l = 1,354 \text{ mm}$

b) $\Delta l^* = 1,207 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 5.7

$\sigma_x = 210 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_y = 63 \text{ N/mm}^2$

$\varepsilon_x = 0,91 \text{ \%}$

$\varepsilon_z = -0,39 \text{ \%}$

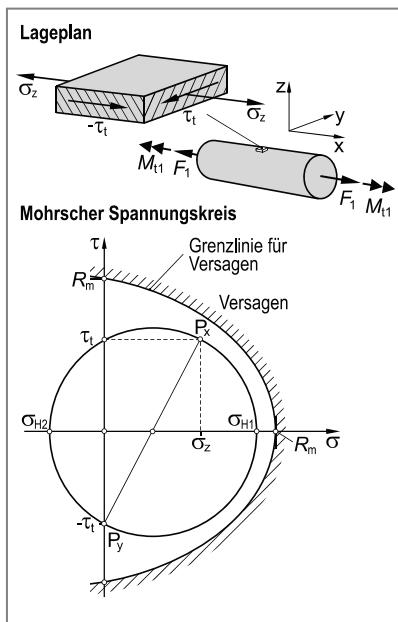
Lösung zu Aufgabe 5.8

$F = -195,2 \text{ kN}$

Lösungen zu Kapitel 6

Lösung zu Aufgabe 6.1

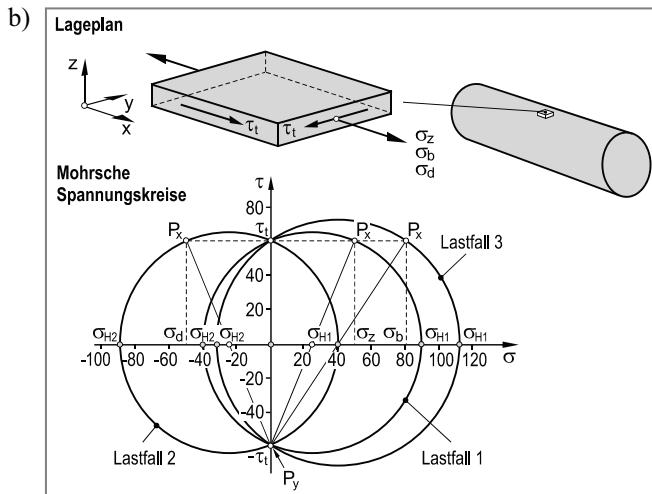
- a) Die höchst beanspruchten Stellen befinden sich an der **Außenoberfläche**, da die Torsionsschubspannung τ_t nach außen hin linear zunimmt.
- b) $\sigma_x \equiv \sigma_z = 70,7 \text{ N/mm}^2$
- c) $\tau_{xy} \equiv \tau_t = 84,9 \text{ N/mm}^2$
- d)



- e) $S_B = 2,91$ (nicht ausreichend, da $S_B < 4,0$)
- f) $F_2 = 247,8 \text{ kN}$
- g) $M_{t2} = 1764,1 \text{ Nm}$
- h) $\tau_t(\sigma_z) = \sqrt{R_m \cdot (R_m - \sigma_z)}$
Grenzlinie siehe Aufgabenteil d)

Lösung zu Aufgabe 6.2

- a)
- $$\sigma_x \equiv \sigma_z = 50,9 \text{ N/mm}^2$$
- $$\sigma_x \equiv \sigma_d = -50,9 \text{ N/mm}^2$$
- $$\tau_{xy} \equiv \tau_t = 61,1 \text{ N/mm}^2$$
- $$\sigma_x \equiv \sigma_b = 81,5 \text{ N/mm}^2$$



c)

Hauptnormalspannung	Lastfall 1	Lastfall 2	Lastfall 3
σ_{H1}	91,7 N/mm²	40,7 N/mm²	114,2 N/mm²
σ_{H2}	-40,7 N/mm²	-91,7 N/mm²	-37,2 N/mm²
σ_{H3}	0	0	0

d) + e)

	Lastfall 1 $\sigma_1 = 91,7 \text{ N/mm}^2$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = -40,7 \text{ N/mm}^2$	Lastfall 2 $\sigma_1 = 40,7 \text{ N/mm}^2$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = -91,7 \text{ N/mm}^2$	Lastfall 3 $\sigma_1 = 114,2 \text{ N/mm}^2$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = -32,7 \text{ N/mm}^2$
$\sigma_{V\text{ SH}}$	132,4 N/mm²	132,4 N/mm²	146,9 N/mm²
$\sigma_{V\text{ GEH}}$	117,5 N/mm²	117,5 N/mm²	133,6 N/mm²
$S_F = R_{p0,2} / \sigma_{V\text{ GEH}}$	3,49	3,49	3,07

Lösung zu Aufgabe 6.3

- a) $S_F = 2,04$ unter Verwendung der SH (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
falls mit der GEH gerechnet wurde: $S_F\text{ GEH} = 2,23$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
- b) $M_t^* = 29\,946,9 \text{ Nm}$ unter Verwendung der SH
falls mit der GEH gerechnet wurde: $M_t^* = 31\,286,1 \text{ Nm}$

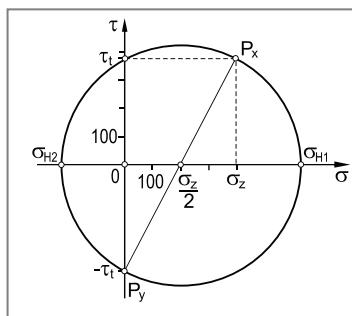
Lösung zu Aufgabe 6.4

a) $\sigma_x \equiv \sigma_z = 396,1 \text{ N/mm}^2$
 $\Delta l = 1,226 \text{ mm}$

b) $\tau_{xy} \equiv \tau_t = 377,3 \text{ N/mm}^2$

c) $\sigma_{H1} = 624,2 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{H2} = -228,1 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{H3} = 0$

d) $M_t = 8427,5 \text{ Nm}$

**Lösung zu Aufgabe 6.5**

a) $\sigma_x = 200 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_y = 100 \text{ N/mm}^2$
 $\tau_{xy} = 100 \text{ N/mm}^2$

b) $\varphi_1 = -31,71^\circ$
 $\varphi_1 = 58,29^\circ$
 $\sigma_{H1} = 261,77 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{H2} = 38,23 \text{ N/mm}^2$

c) $\Delta t = -19,8 \mu\text{m}$

d) $S_F = 1,45$ unter Verwendung der SH (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

Lösung zu Aufgabe 6.6

a) $\varepsilon_{H1} = 1,149 \%$
 $\varepsilon_{H2} = -0,749 \%$
 $\varphi_1 = 68,78^\circ$
 $\varphi_2 = -21,22^\circ$
 $\sigma_{H1} = 213,2 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{H2} = -93,2 \text{ N/mm}^2$

b) $\sigma_{V GEH} = 272,1 \text{ N/mm}^2$

c) $S_F = 3,12$ unter Verwendung der GEH (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

Lösung zu Aufgabe 6.7

- a) $\varepsilon_{\text{DMS}} = 2,026 \%$
 b) $F_2 = 473,9 \text{ kN}$
 c) $F_3 = 720,9 \text{ kN}$
 $\varepsilon_{\text{DMS}} = 4,564 \%$

Lösung zu Aufgabe 6.8

- a) $M_b = 500 \text{ Nm}$
 $M_t = 250 \text{ Nm}$
 b) $S_F = 3,69$ unter Verwendung der SH (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
 c) $F_2 = 605,87 \text{ kN}$
 d) $d = 29,58 \text{ mm}$

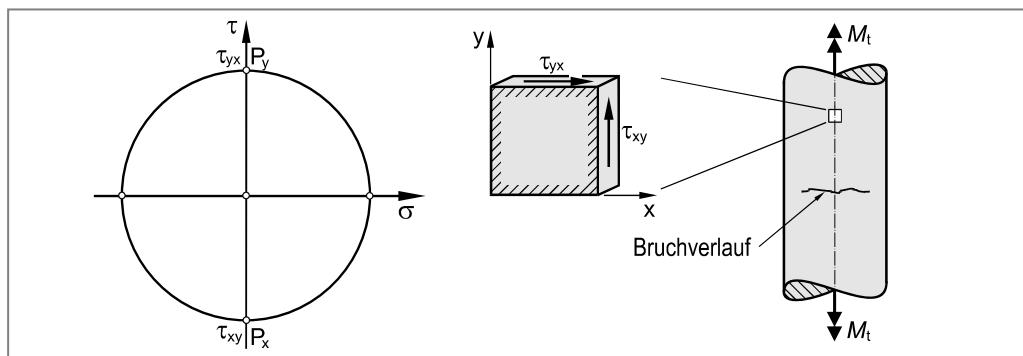
Lösung zu Aufgabe 6.9

- a) $F_Z = 39996 \text{ N}$
 b) $F_S = 2001 \text{ N}$
 c) $F_Q = 5000 \text{ N}$
 d) $S_F = 1,69$ unter Verwendung der SH (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
 $S_B = 2,29$ unter Verwendung der SH (ausreichend, da $S_B > 2,00$)

Lösung zu Aufgabe 6.10

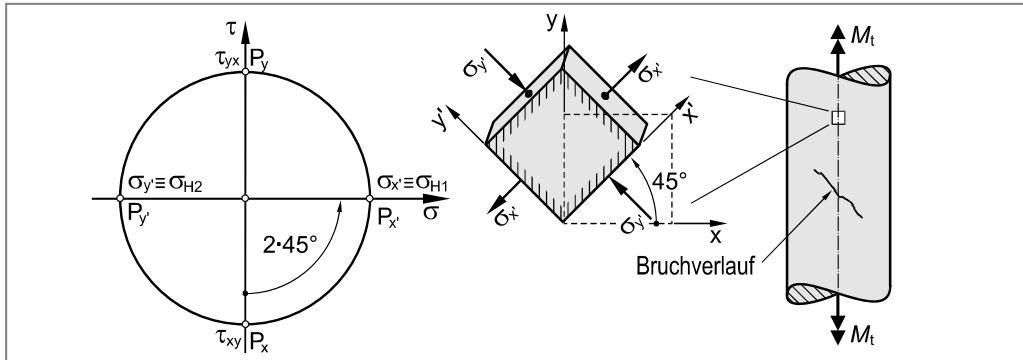
Der unlegierte (allgemeine) Baustahl **S235JR** ist ein duktiler Werkstoff. Das Versagen erfolgt durch einen (duktilen) Verformungsbruch nach vorausgegangener plastischer Verformung. Die plastische Verformung infolge von Versetzungsbewegungen, findet bevorzugt in Ebenen mit der größten Schubspannung statt.

Aus dem Mohrschen Spannungskreis ist ersichtlich, dass bei reiner Torsionsbeanspruchung die Ebenen mit der größten Schubbeanspruchung die x- bzw. y-Achse als Normale besitzen (Bildpunkte P_x und P_y im Mohrschen Spannungskreis). Ein Bruch ist demzufolge in diesen Ebenen zu erwarten.



Die Graugusssorte **EN-GJL-250** ist ein spröder Werkstoff. Das Versagen erfolgt durch einen (spröden) Trennbruch. Derartige Trennbrüche verlaufen stets senkrecht zur größten Normalspannung.

Aus dem Mohrschen Spannungskreis ist ersichtlich, dass bei reiner Torsionsbeanspruchung diese Ebenen die x'- bzw. y'-Achse als Normale besitzen (Bildpunkte P_x' und P_y' im Mohrschen Spannungskreis). Ein Bruch ist demzufolge in Ebenen, die um 45° zur Längsachse gedreht sind, zu erwarten.



Lösung zu Aufgabe 6.11

$S_F = 2,26$ unter Verwendung der SH (ausreichend, da $S_F \geq 1,20$)

Lösung zu Aufgabe 6.12

- $\varepsilon_A = 0,0148\%$
 $\varepsilon_B = 1,6230\%$
 $\varepsilon_C = 0,2619\%$
- $\sigma_{H1} = 351,55 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{H2} = 28,45 \text{ N/mm}^2$
 $\varphi_1 = -34,10^\circ$
 $\varphi_2 = 55,90^\circ$
- $S_F = 1,62$ unter Verwendung der SH (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
alternativ: $S_{F\text{ GEH}} = 1,68$ unter Verwendung der GEH (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
- $\tau_{xy} = 304,41 \text{ N/mm}^2$

Lösung zu Aufgabe 6.13

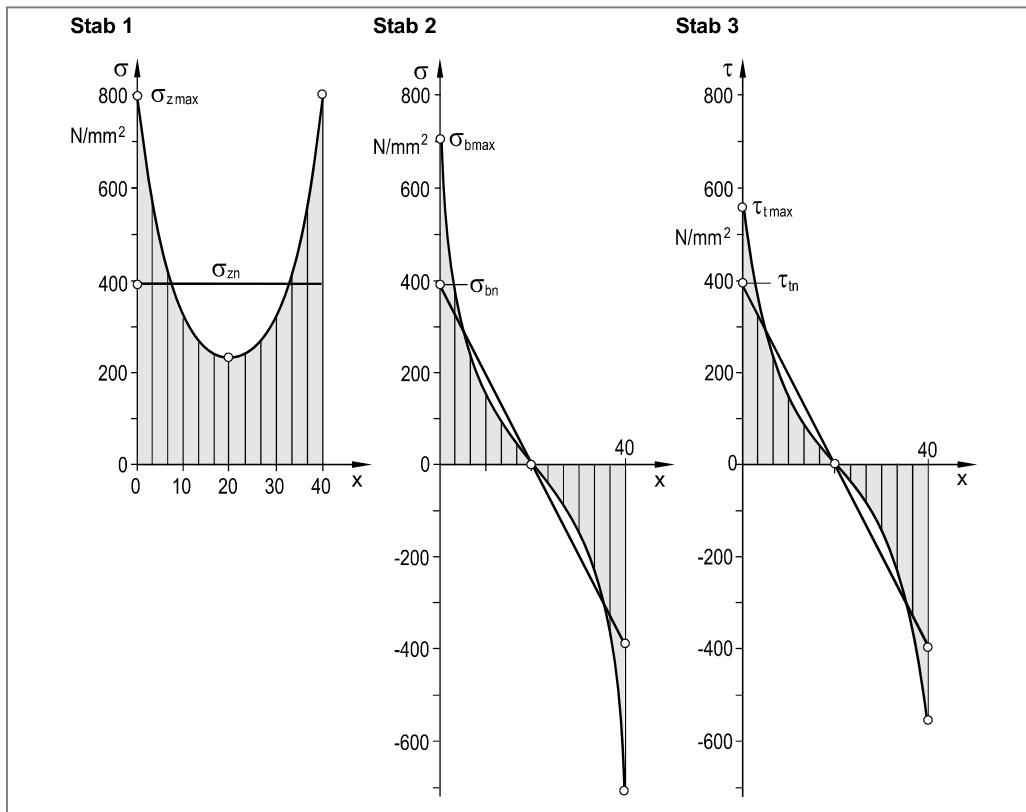
- $\sigma_Z = 108,23 \text{ N/mm}^2$
 $\tau_t = 88,21 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{by} = 101,86 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{bz} = 529,28 \text{ N/mm}^2$
- $S_F = 1,57$ unter Verwendung der SH (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
- $\varepsilon_{DMS} = 2,510\%$

Lösungen zu Kapitel 7

Lösung zu Aufgabe 7.1

- a) Stab 1: $\alpha_{kz} = 2,03$
 Stab 2: $\alpha_{kb} = 1,78$
 Stab 3: $\alpha_{kt} = 1,40$
- b) Stab 1: $\sigma_{zn} = 397,9 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{z \max} = 807,7 \text{ N/mm}^2$
 Stab 2: $\sigma_{bn} = 397,7 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{b \max} = 708,2 \text{ N/mm}^2$
 Stab 3: $\tau_{tn} = 397,9 \text{ N/mm}^2$
 $\tau_{t \max} = 557,0 \text{ N/mm}^2$

Spannungsverläufe:

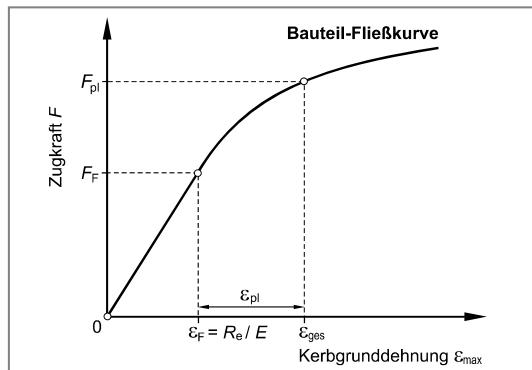


Lösung zu Aufgabe 7.2

$$\alpha_k = 2,74$$

Lösung zu Aufgabe 7.3

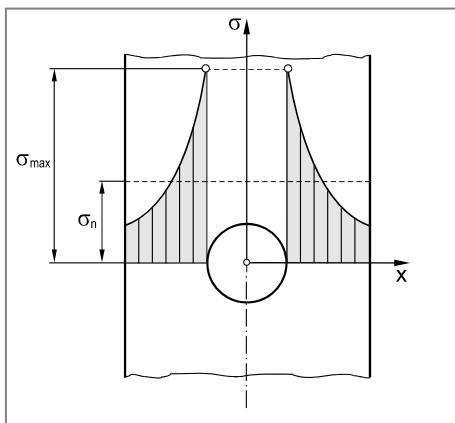
- a) $\alpha_k = 1,75$
 b) $S_F = 1,97$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
 c) $F_F = 49143 \text{ N}$
 d) $F_{pl} = 59484 \text{ N}$
 e) $F_{vpl} = 86000 \text{ N}$

**Lösung zu Aufgabe 7.4**

- a) $\Delta l_1 = 0,129 \text{ mm}$
 $\Delta l_2 = 0,038 \text{ mm}$
 Schraube plastifiziert zuerst.
 b) $M_A = 105,33 \text{ Nm}$
 c) $F_{pl} = 46408 \text{ N}$
 Wird eine Sicherheit von $S_{pl} = 1,5$ gefordert, dann ist die Beanspruchung auf $F_{zul} = F_{pl} / S_{pl} = 46408 / 1,5 = 30939 \text{ N}$ zu begrenzen. Da die Betriebsbeanspruchung $F = 36500 \text{ N}$ beträgt, ist ein sicherer Betrieb nicht möglich.

Lösung zu Aufgabe 7.5

- a) $F_F = 33793 \text{ N}$
 b) $\sigma_n = 211,2 \text{ N/mm}^2$



- c) $F_{zul} = 32979 \text{ N}$
 d) $F_B = 113600 \text{ N}$

Lösung zu Aufgabe 7.6

- a) $\varepsilon_A = 0,783 \%$
 $\varepsilon_B = -0,389 \%$
- b) $S_F = 1,95$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
- c) $M_t^* = 167,7 \text{ Nm}$

Lösung zu Aufgabe 7.7

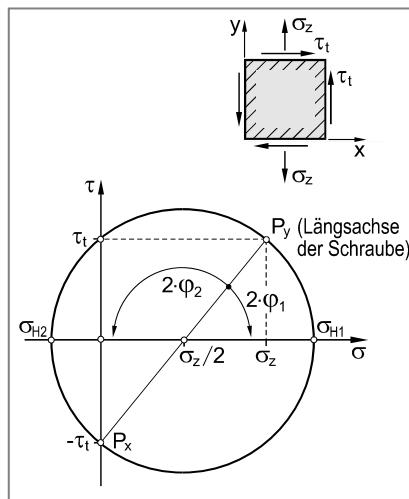
- a) $\sigma_b = 163,2 \text{ N/mm}^2$
 $\varepsilon = 0,78 \%$
- b) $S_F = 1,60$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
- c) $F_3 = 1715,7 \text{ N}$
- d) $F_{\text{pl zul}} = 2338,5 \text{ N}$

Lösung zu Aufgabe 7.8

- a) $M_b = 52,5 \text{ Nm}$
- b) $S_F = 2,33$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
 $S_B = 4,25$ (ausreichend, da $S_B > 1,20$)
- c) $M_t^* = 580,9 \text{ Nm}$
- d) $F_2 = 83723 \text{ N}$
- e) $F_1 = 1610,1 \text{ N}$
- f) $M_t = 96,6 \text{ Nm}$
- Die Drehrichtung des Torsionsmomentes M_t ist bei Blick von rechts auf den Wellenzapfen im Uhrzeigersinn (also entsprechend der Richtung der eingezeichneten Momentenpfeile in der Aufgabenstellung).
- g) $S_F = 1,55$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

Lösung zu Aufgabe 7.9

- a) $\sigma_z = 100 \text{ N/mm}^2$
 $\Delta l = 0,024 \text{ mm}$
- b) $\tau_t = 60 \text{ N/mm}^2$
 $\varphi = 0,4256^\circ$
- c) $\sigma_{H1} = 128,1 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{H2} = -28,1 \text{ N/mm}^2$
 $\varphi_1 = -25,1^\circ$
 $\varphi_2 = 64,9^\circ$
- d) $M_{l2} = 41,06 \text{ Nm}$
- e) $\alpha_{kz} = 1,75$
 $F_2 = 6304 \text{ N}$
- f) $F_3 = 9897 \text{ N}$



Lösung zu Aufgabe 7.10

a) $I_y = 2\,400\,833 \text{ mm}^4$
 $W_{by} = 60\,020,8 \text{ mm}^3$

b) $F_F = 8853,1 \text{ N}$

c) $F_{pl} = 10361,9 \text{ N}$

d) $F_{pl}^* = 11279,2 \text{ N}$

e) $F_{vpl} = 11843,1 \text{ N}$

f) $\varepsilon_1 = 1,411 \text{ \%}$

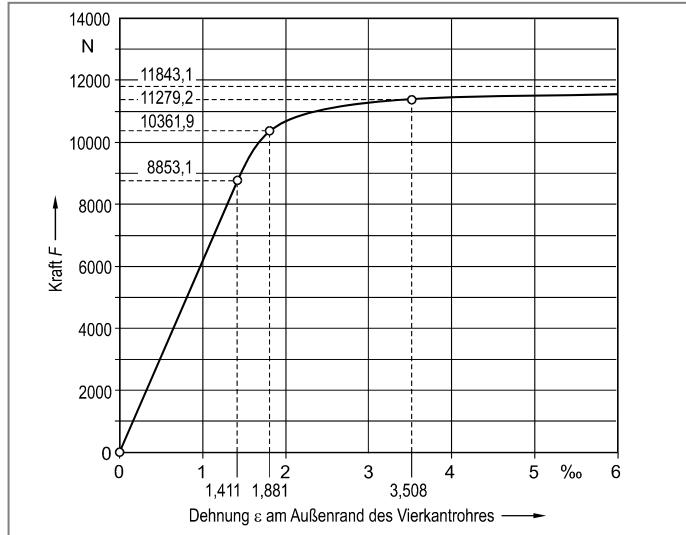
$\varepsilon_2 = 1,881 \text{ \%}$

$\varepsilon_3 = 3,508 \text{ \%}$

$\varepsilon_{vpl} = \infty$

$\varepsilon^{1)}$ %	F N
1,411	8853,1
1,881	10361,9
3,508	11279,2
∞	11843,1

¹⁾ Außenrand Vierkantröhre

**Lösung zu Aufgabe 7.11**

a) $F_1 = 65948 \text{ N}$

b) $F_2 = 659,5 \text{ N}$

c) $M_t = 71,02 \text{ Nm}$

d) $S_F = 1,06$ (nicht ausreichend, da $S_F < 1,20$)

Lösungen zu Kapitel 8

Lösung zu Aufgabe 8.1

$$\begin{aligned}F_K &= 269872 \text{ N} \\S_K &= 5,40 \text{ (ausreichend, da } S_K > 2,50) \\S_F &= 16 \text{ (ausreichend, da } S_F > 1,20)\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8.2

- $I_{yS} = 179479,2 \text{ mm}^4$
 $I_{zS} = 182916,7 \text{ mm}^4$
- Knickung: $F_d = 64582 \text{ N}$
Fließen: $F_d = 161500 \text{ N}$
Die zulässige Druckkraft beträgt damit $F_d = 64582 \text{ N}$
- $\Delta l = -1,46 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 8.3

- $F_d = 24525 \text{ N}$
- $S_F = 2,56 \text{ (ausreichend, da } S_F > 1,20)$
 $S_K = 1,18 \text{ (nicht ausreichend, da } S_K < 2,50)$
- $M_{b\max} = 14715 \text{ Nm}$
 $a = 97,0 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 8.4

- $F_d = 1616,2 \text{ kN}$
- $I_y = 11699,75 \text{ cm}^4$
- $S_F = 1,57 \text{ (ausreichend, da } S_F > 1,20)$
 $S_K = 55,1 \text{ (ausreichend, da } S_K > 2,50)$

Lösung zu Aufgabe 8.5

- $F_d = 135,35 \text{ kN}$
- $F_d^* = 27,307 \text{ kN}$
- $d = 8,06 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 8.6

$$l \leq 616,2 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 8.7

- a) Fließen: $s = 2,53 \text{ mm}$
Knickung: $s = 6,03 \text{ mm}$
- b) $e = 17,69 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 8.8

- a) Fließen: $F = 138,2 \text{ kN}$
Knickung: $F = 55,73 \text{ kN}$
Zulässige Druckkraft: $F_d = 55,73 \text{ kN}$
- b) $\Delta l = -1,075 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 8.9

Fließen: $S_F = 1,24$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
Knickung: $S_K = 1,57$ (nicht ausreichend, da $S_K < 2,50$)

Kurzlösungen zu Kapitel 9

Lösung zu Aufgabe 9.1

- a) Rechteckquerschnitt (symmetrische Querschnittsfläche): Hauptachsen fallen mit den Symmetrieachsen zusammen, d. h. das y-z-Koordinatensystem ist gleichzeitig Hauptachsensystem (y-Achse ≡ große Hauptachse; z-Achse ≡ kleine Hauptachse).
- b) $I_1 \equiv I_y = 215\,653\,333 \text{ mm}^4$
 $I_2 \equiv I_z = 111\,253\,333 \text{ mm}^4$
- c) $\beta = -48,22^\circ$
 $\sigma_{xA} = 525,89 \text{ N/mm}^2$
- d) $S_F = 1,69$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

Lösung zu Aufgabe 9.2

- a) $M_{b\max} = 9\,375 \text{ Nm}$
Das maximale Biegemoment wirkt in der den Kraftangriffspunkt beinhaltenden Ebene.
- b) Rechteckquerschnitt (symmetrische Querschnittsfläche): Hauptachsen fallen mit den Symmetrieachsen zusammen, d. h. das y-z-Koordinatensystem ist gleichzeitig Hauptachsensystem (y-Achse ≡ große Hauptachse; z-Achse ≡ kleine Hauptachse).
 $I_1 \equiv I_y = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$
 $I_2 \equiv I_z = 1,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$
- c) $\beta = -48,29^\circ$
 $\sigma_{xB} = 145,46 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{xA} = -\sigma_{xB} = -145,46 \text{ N/mm}^2$
- d) $S_F = 1,68$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

Lösung zu Aufgabe 9.3

- a) Da es sich um eine symmetrische Querschnittsfläche handelt, fällt eine der beiden Hauptachsen mit der Symmetrieebene zusammen. Die zweite Hauptachse ergibt sich als Senkrechte zur ersten Hauptachse durch den Flächenschwerpunkt.
 $z_S = 28,17 \text{ mm}$
- b) $I_1 \equiv I_y = 55\,614,6 \text{ mm}^4$
 $I_2 \equiv I_z = 27\,031,3 \text{ mm}^4$
- c) $\beta = 36,83^\circ$
 $\sigma_{xA} = 226,5 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_{xB} = -253,8 \text{ N/mm}^2$
- d) $S_F = 1,42$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

Lösung zu Aufgabe 9.4

- a) $y_S = 24,81 \text{ mm}$
 $z_S = 80,19 \text{ mm}$
 $\varphi_1 = 28,49^\circ$
 $\varphi_2 = 118,49^\circ$
- b) $I_1 = 4\ 976\ 871,6 \text{ mm}^4$
 $I_2 = 1\ 075\ 412,1 \text{ mm}^4$
 $\beta = -68,29^\circ$
- c) Profileckpunkt A: $\sigma_{xA} = 388,17 \text{ N/mm}^2$
Profileckpunkt B: $\sigma_{xB} = -462,26 \text{ N/mm}^2$
- d) $S_F = 1,28$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

Lösung zu Aufgabe 9.5

$S_F = 1,24$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

Lösungen zu Kapitel 10

Lösung zu Aufgabe 10.1

$$\tau_q(z) = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{h^2} \right)$$

Lösung zu Aufgabe 10.2

$$\tau_q(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right)$$

Lösung zu Aufgabe 10.3

$$\tau(\varphi) = \frac{Q}{\pi \cdot r \cdot t} \cdot \cos \varphi$$

Lösung zu Aufgabe 10.4

- a) $\tau_s = 31,6 \text{ N/mm}^2$
- b) $\tau_s < 85 \text{ N/mm}^2$. Die Beanspruchung in der Schweißnaht ist zulässig.

Lösung zu Aufgabe 10.5

$$t = 104,9 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 10.6

$$t = 61,97 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 10.7

- a) $z_s = 195 \text{ mm}$
- b) $I_y = 113\,125\,000 \text{ mm}^4$
- c) $\tau_{Leim} = 9,28 \text{ N/mm}^2$. Da $\tau_{Leim} < 25 \text{ N/mm}^2$ ist die Beanspruchung zulässig.

Lösungen zu Kapitel 11

Lösung zu Aufgabe 11.1

$$a = 25 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 11.2

$$a = 67,9 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 11.3

$$a = 171 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 11.4

$$\frac{M_{t2}}{M_{tl}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{d_m}{s}$$

Lösungen zu Kapitel 12

Lösung zu Aufgabe 12.1

$$\sigma_t = 225 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_a = 112,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_r = -12,5 \text{ N/mm}^2$$

Lösung zu Aufgabe 12.2

a) P295GH: $p_i = 25,83 \text{ MPa}$
 EN-GJL-200: $p_i = 6,67 \text{ MPa}$

b) P295GH: $\Delta d_m = 0,128 \text{ mm}$
 EN-GJL-200: $\Delta d_m = 0,071 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 12.3

a) $p_1 = 14,29 \text{ MPa}$

b) $F_1 = 393,7 \text{ kN}$

c) $p_2 = 7 \text{ MPa}$

$F_2 = 230 \text{ kN}$

Lösung zu Aufgabe 12.4

a) $p_i = 8 \text{ MPa}$

b) $\sigma_a = 125 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_r = -4 \text{ N/mm}^2$

c) $\Delta d_a = 0,522 \text{ mm}$

d) $S_F = 1,40$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

e) $F = 1672,9 \text{ kN}$

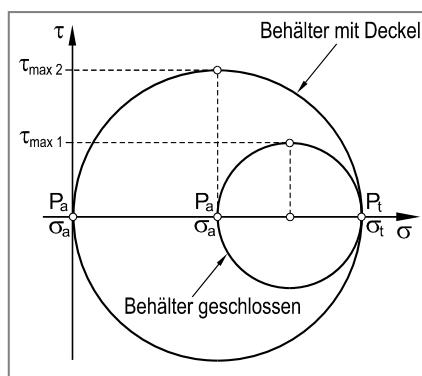
f) $\sigma_t = 250 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_a = 0$

$\sigma_r = -4 \text{ N/mm}^2$

g) $\tau_{\max 1} = 62,5 \text{ N/mm}^2$

$\tau_{\max 2} = 125 \text{ N/mm}^2$

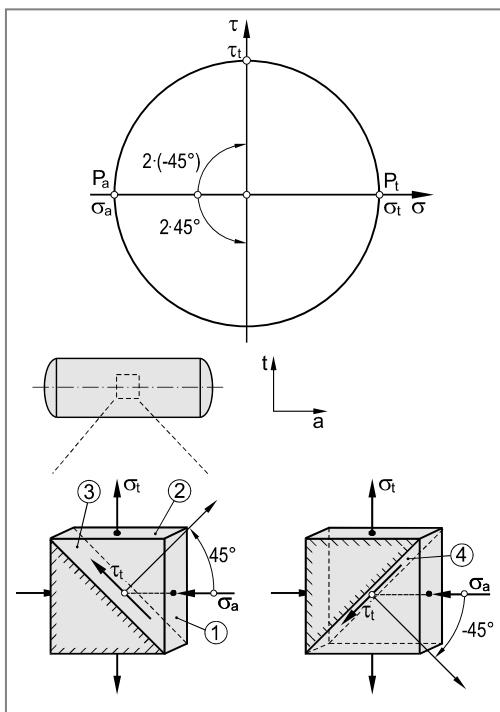


Lösung zu Aufgabe 12.5

- a) $\sigma_t = 100 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_a = 50 \text{ N/mm}^2$
- b) $p_i = 13,33 \text{ MPa}$
- c) $p_i = 21,88 \text{ MPa}$
- d) $S_F = 1,31$ (ausreichend, da $S_F \geq 1,20$)
 $S_{pl} = 2,37$

Lösung zu Aufgabe 12.6

- a) $\sigma_t = 150,1 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_a = -150,1 \text{ N/mm}^2$
- b)
- Ebene 1 und Ebene 2 sind schubspannungsfrei.
 - Ebene 3 und Ebene 4 sind frei von Normalspannungen.



- c) $S_F = 1,27$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
- d) $p_i = 7,50 \text{ MPa}$
 $F = -2899,5 \text{ N}$
- e) Mögliche Beanspruchung zur Erzeugung desselben Spannungszustandes: **Torsion** (siehe Mohrscher Spannungskreis in Aufgabenteil b)
 $M_t = 387,1 \text{ kNm}$

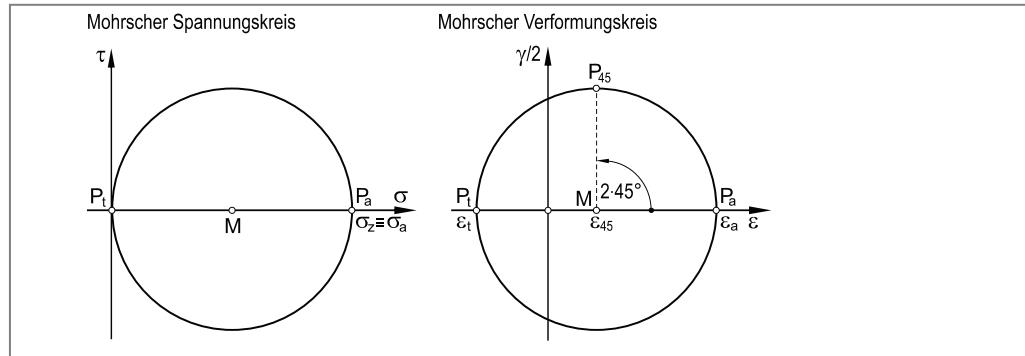
Lösung zu Aufgabe 12.7

a) $\varepsilon_a = 0,505 \%$

$\varepsilon_t = -0,152 \%$

$\varepsilon_{45} = 0,177 \%$

b)

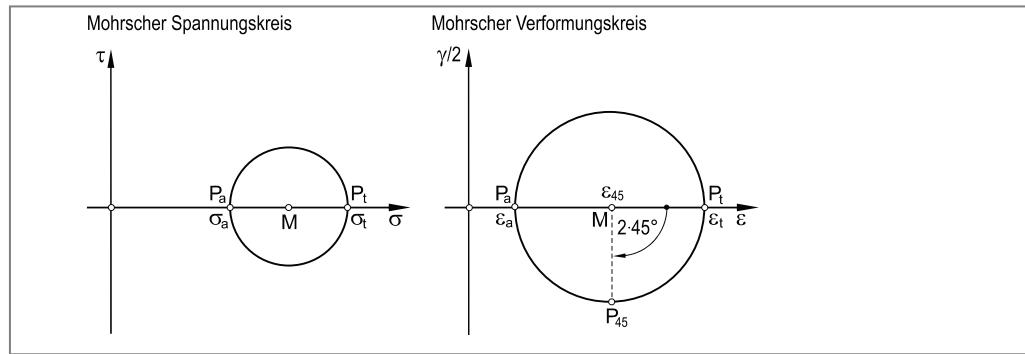


c) $\varepsilon_a = 0,1 \%$

$\varepsilon_t = 0,425 \%$

$\varepsilon_{45} = 0,263 \%$

d)

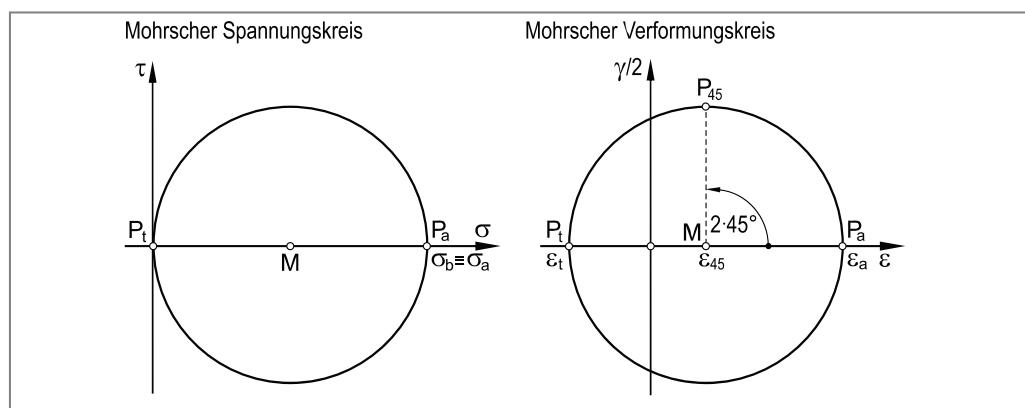


e) $\varepsilon_a = 0,386 \%$

$\varepsilon_t = -0,116 \%$

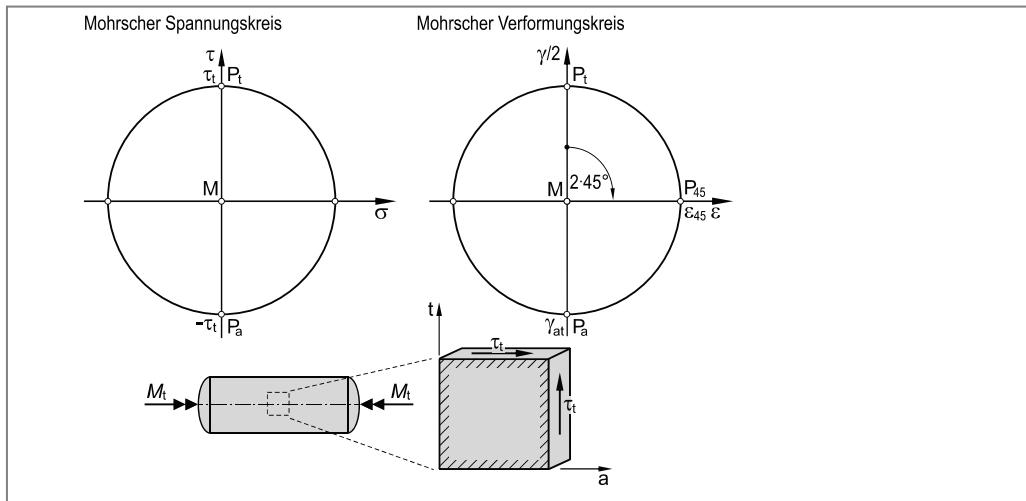
$\varepsilon_{45} = 0,135 \%$

f)



g) $\varepsilon_a = 0$
 $\varepsilon_t = 0$
 $\varepsilon_{45} = 0,279 \%$

h)



Lösung zu Aufgabe 12.8

$p_i = 7,50 \text{ MPa}$
 $M_t = 14998 \text{ Nm}$
 $M_b = 10000 \text{ Nm}$

Lösung zu Aufgabe 12.9

a) $\sigma_t \equiv \sigma_1 = 39,97 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_a \equiv \sigma_2 = 20,03 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_r \equiv \sigma_3 = 0 \text{ N/mm}^2$

Da keine Schubspannungen wirken, fallen die Hauptnormalspannungen mit der Tangential-, der Axial- und der Radialrichtung des Behälters zusammen.

$p_i = 159,88 \text{ MPa}$

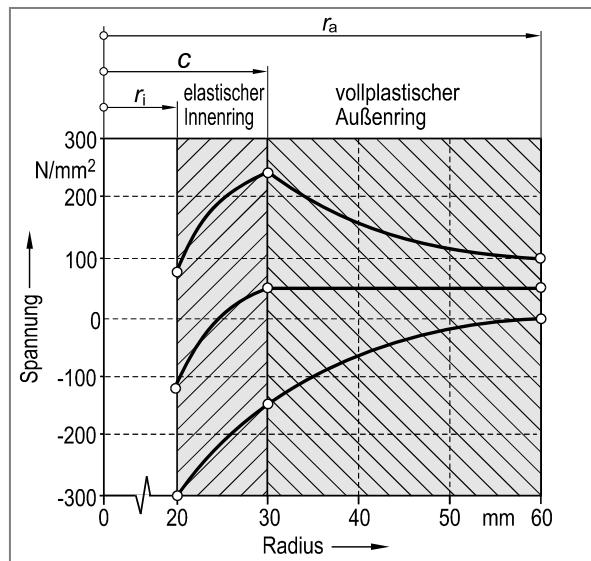
b) $p_{i FB} = 174,49 \text{ MPa}$

c) $p_{ic} = 306,41 \text{ MPa}$

d) $\varepsilon_A^* = 0,388 \%$
 $\varepsilon_B^* = 0,103 \%$

e)

Spannungskomponente	vollplastischer Innenring		elastischer Außenring	
	$r = r_i = 20 \text{ mm}$	$r = c = 30 \text{ mm}$	$r = c = 30 \text{ mm}$	$r = r_a = 60 \text{ mm}$
Tangentialspannung	$86,19 \text{ N/mm}^2$	$245,37 \text{ N/mm}^2$	$245,37 \text{ N/mm}^2$	$98,15 \text{ N/mm}^2$
Axialspannung	$-110,11 \text{ N/mm}^2$	$49,07 \text{ N/mm}^2$	$49,07 \text{ N/mm}^2$	$49,07 \text{ N/mm}^2$
Radialspannung	$-306,41 \text{ N/mm}^2$	$-147,22 \text{ N/mm}^2$	$-147,22 \text{ N/mm}^2$	0 N/mm^2



f) Innenrand

$$\sigma_{t\text{ ei}} = -296,86 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{a\text{ ei}} = -148,41 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{r\text{ ei}} = 0$$

Außenrand

$$\sigma_{t\text{ ei}} = 21,55 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{a\text{ ei}} = 10,77 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{r\text{ ei}} = 0$$

Lösung zu Aufgabe 12.10

a) $p_i = 180 \text{ MPa}$

$$M_t = 49000 \text{ Nm}$$

b) Innenrand: $\sigma_{V\text{ GEH}} = 571,91 \text{ N/mm}^2$

da $\sigma_{V\text{ GEH}} < R_{p0,2}$ ist der Behälter am Innenrand elastisch beansprucht.

Außenrand: $\sigma_{V\text{ GEH}} = 296,10 \text{ N/mm}^2$

da $\sigma_{V\text{ GEH}} < R_{p0,2}$ ist der Behälter am Außenrand elastisch beansprucht.

c) $p_{iFB} = 314,4 \text{ MPa}$

d) $p_{ic} = 410,0 \text{ MPa}$

e) $\varepsilon_A = \varepsilon_C = 1,8106 \%$

$$\varepsilon_B = 2,9314 \%$$

Lösung zu Aufgabe 12.11

- a) $\varepsilon_A = 0,2599 \%$
 $\varepsilon_B = 1,9309 \%$
 $\varepsilon_C = 0,7858 \%$
 $\varepsilon_D = 1,3117 \%$
- b) $S_F = 1,74$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

Lösung zu Aufgabe 12.12

$$p_i = 10 \text{ MPa}$$

Lösung zu Aufgabe 12.13

$$p_i = 12 \text{ MPa}$$

$$M_t = 80000 \text{ Nm}$$

Das Torsionsmoment wirkt entgegen der in der Aufgabenstellung eingezeichneten Richtung.

Lösung zu Aufgabe 12.14

- a) $p_i = 29,84 \text{ MPa}$
- b) $S_F = 3,21$ (ausreichend, da $S_F > 1,50$)
- c) $s_2 = 5,23 \text{ mm}$
- d) An der Stelle 3 herrscht kein Innendruck (Dichtungen), daher sind dort keine Spannungskomponenten aus Innendruck vorhanden. Da voraussetzungsgemäß außerdem keine Reibung auftritt, liegen auch keine Axialspannungen vor. Die Stelle 3 ist also **spannungsfrei**, d. h. $\sigma_v = 0$. Die Sicherheit gegen Fließen ist dementsprechend **unendlich**.
- e) $\varepsilon_{DMS} = -0,465 \%$
- f) Stelle 1: $S_F = 2,83$ (ausreichend, da $S_F > 1,50$)
 Stelle 4: $S_F = 2,72$ (ausreichend, da $S_F > 1,50$)
- g) $S_F = 2,43$ (ausreichend, da $S_F > 1,50$)

Lösung zu Aufgabe 12.15

$$\sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e = 1,155 \cdot R_e$$

Lösungen zu Kapitel 13

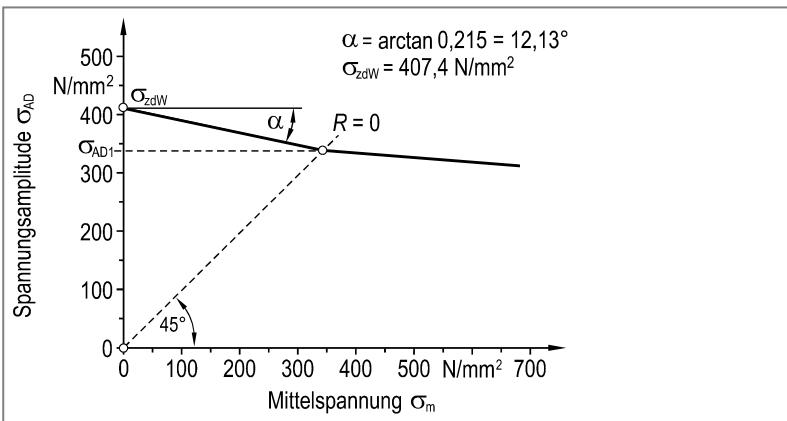
Lösung zu Aufgabe 13.1

a) $\sigma_{zdW} = 407,4 \text{ N/mm}^2$

b) $k = 13,65$

c) $F_{AD1} = 26337 \text{ N}$

d)

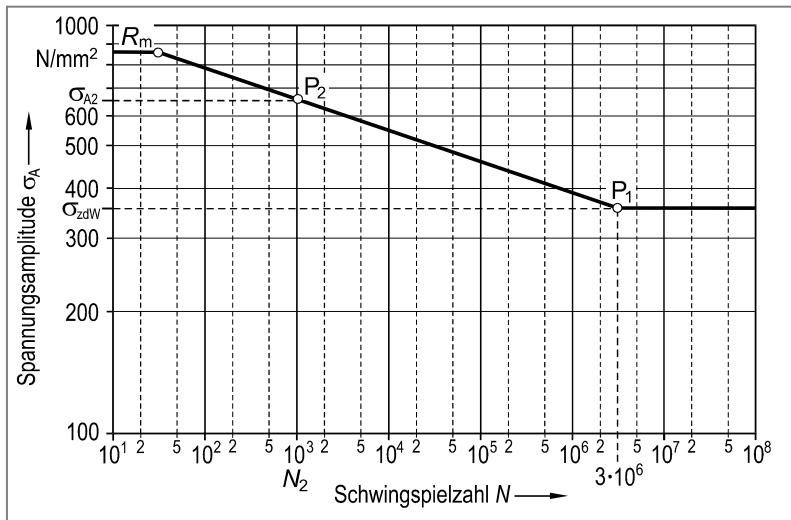


Abgelesen: $\sigma_{AD} = 340 \text{ N/mm}^2$

e) $F_{AD2} = 27700 \text{ N}$

Lösung zu Aufgabe 13.2

a) Darstellung der Wöhlerkurve



Stützpunkte für die Zeitfestigkeitsgerade

Punkt P_1 : $N_1 = N_D = 3 \cdot 10^6$

$$\sigma_{A1} = \sigma_{zdW} = 350 \text{ N/mm}^2$$

Punkt P_2 : $N_2 = 10^3$ (gewählt)

$$\sigma_{A2} = 664,12 \text{ N/mm}^2$$

b) $t = 2,40 \text{ h}$

c) $\sigma_{AD} = 320,4 \text{ N/mm}^2$

Lösung zu Aufgabe 13.3

- a) Die Zylinderkopfschrauben eines Motors erfahren infolge statischer Vorspannung und rein schwellendem Arbeitsdruck eine Zugschwellbeanspruchung.
- b) Ein rein schwellender Innendruck führt in einem Behälter in axialer, tangentialer und radialer Richtung zu einer reinen Zugschwellbeanspruchung (z. B. Befüll- und Entleerungsvorgänge einer Gasflasche).
- c) Eine umlaufende, durch eine statische Radialkraft beanspruchte Welle unterliegt einer reinen Wechselbeanspruchung, sofern keine statische Vorspannung wirkt (Umlaufbiegung).
- d) Ein Brückenpfeiler erfährt durch das Eigengewicht der Brücke und die zusätzliche, zeitlich veränderliche Verkehrsbelastung eine Druckschwellbeanspruchung.
- e) Die Kolbenstange eines einseitig wirkenden Hydraulikzylinders unterliegt einer reinen Druckschwellbeanspruchung, sofern bei jedem Lastwechsel der Innendruck p_i zu Null wird.

Lösung zu Aufgabe 13.4

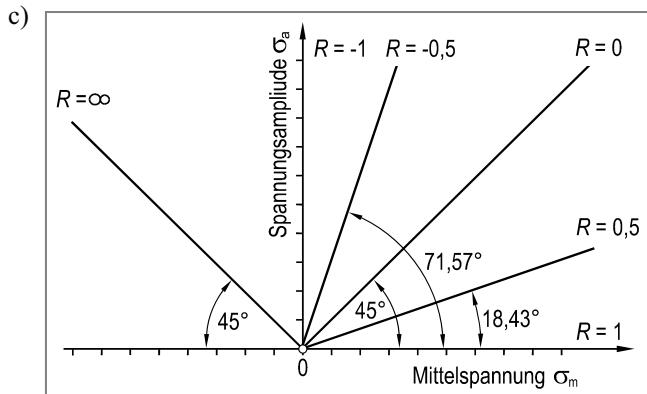
a)

Spannungs-komponente	Ober-spannung σ_o	Unter-spannung σ_u
$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s}$	400 N/mm ²	200 N/mm ²
$\sigma_a = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s}$	200 N/mm ²	100 N/mm ²
$\sigma_r = -p_i$	-10 N/mm ²	-5 N/mm ²

b) $\sigma_{ta} = 100 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{tm} = 300 \text{ N/mm}^2$

$R = 0,5$



für $R = -1$ folgt:

$$\sigma_m = 0 \text{ (Ordinate)}$$

für $R = -0,5$ folgt:

$$\sigma_a = 3 \cdot \sigma_m \quad (\alpha = 71,57^\circ)$$

für $R = 0$ folgt:

$$\sigma_a = \sigma_m \quad (\text{erste Winkelhalbierende})$$

für $R = 0,5$ folgt:

$$\sigma_a = \frac{1}{3} \cdot \sigma_m \quad (\alpha = 18,43^\circ)$$

für $R = 1$ folgt:

$$\sigma_a = 0 \quad (\text{Abszisse, d. h. statische Beanspruchung})$$

für $R = \infty$ folgt:

$$\sigma_a = -\sigma_m$$

Lösung zu Aufgabe 13.5

- a) $S_D = 3,38$ (ausreichend, da $S_D > 2,50$)
- b) $S_D = 3,06$ (ausreichend, da $S_D > 2,50$)
- c) $S_D = 3,35$ (ausreichend, da $S_D > 2,50$)

Lösung zu Aufgabe 13.6

- a) $F_{A1} = 144,6 \text{ kN}$
- b) $F_{A2} = 144,9 \text{ kN}$
- c) $F_{A3} = 173,2 \text{ kN}$

Lösung zu Aufgabe 13.7

- a) $d = 13,73 \text{ mm}$
 b) $d = 14,23 \text{ mm}$

Lösung zu Aufgabe 13.8

$$F_2 = 905,7 \text{ N}$$

Lösung zu Aufgabe 13.9

$$S_D = 1,40 \text{ (nicht ausreichend, da } S_D < 2,50)$$

Lösung zu Aufgabe 13.10

- a) $R = 2,5 \text{ mm}$
 b) $F_W = 48,6 \text{ kN}$
 c) $F_W = 7,97 \text{ kN}$

Lösung zu Aufgabe 13.11

- a) $d = 70,19 \text{ mm}$
 b) $d = 71,82 \text{ mm}$
 c) $F = 14,8 \text{ kN}$

Lösung zu Aufgabe 13.12

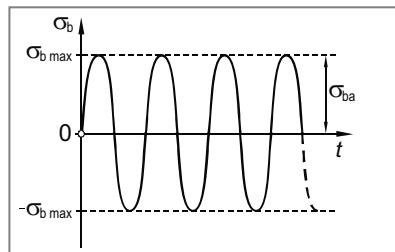
$$a = 213,3 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 13.13

- a) $M_t = 754,7 \text{ Nm}$
 b) $M_{ta} = 325,1 \text{ Nm}$
 c) statische Beanspruchung: $\varphi = 23,53^\circ$
 Schwingbeanspruchung: $\varphi = 10,14^\circ$

Lösung zu Aufgabe 13.14

- a) $\sigma_a = \sigma_{b \max} = 167,77 \text{ N/mm}^2$
 b) $S_D = 2,91 \text{ (nicht ausreichend, da } S_D > 3,50 \text{ gefordert)}$
 c) $S_D = 2,61 \text{ (ausreichend, da } S_D > 2,50)$



Lösung zu Aufgabe 13.15

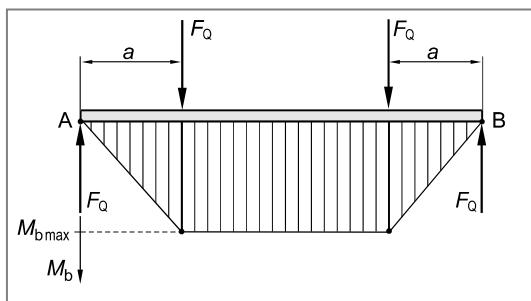
$$F_2 = 28,1 \text{ kN}$$

Lösung zu Aufgabe 13.16

- a) $M_t = 180,8 \text{ Nm}$
 b) $M_{ta} = 94,4 \text{ Nm}$

Lösung zu Aufgabe 13.17

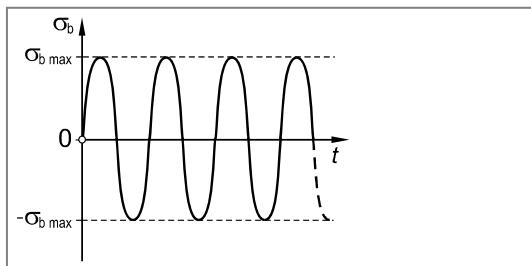
a)



$$M_{b \max} = 780 \text{ Nm}$$

- b) $S_F = 1,41$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
 c) Zusätzlich mögliche Versagensart: **Dauerbruch** infolge Umlaufbiegung.
 d) $\beta_{kb} = 1,91$

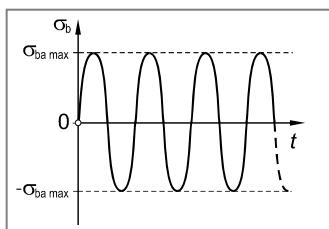
e)



$$f) F_Q = 1409,6 \text{ N}$$

Lösung zu Aufgabe 13.18

- a) $M_{bl} = 500 \text{ Nm}$
 b) $\alpha_{kz} = 1,55$
 $\alpha_{kb} = 1,42$
 c) $S_F = 1,72$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
 d) $F_2 = 87627 \text{ N}$
 e) $\beta_{kb} = 1,35$
 f) $\sigma_{ba \max} = 254,65 \text{ N/mm}^2$



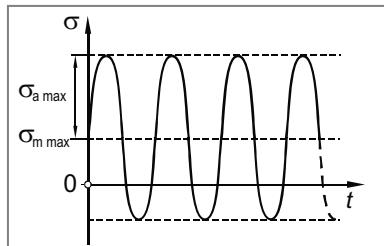
- g) $S_D = 0,99$ (nicht ausreichend, da $S_D < 2,50$)

Lösung zu Aufgabe 13.19

- a) $\sigma_z = 247,57 \text{ N/mm}^2$
 $\Delta l = 0,2122 \text{ mm}$
 $S_F = 2,50$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
 b) $S_D = 4,00$ (ausreichend, da $S_D > 2,50$)
 c) $S_F = 1,78$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
 $S_D = 3,45$ (ausreichend, da $S_D > 2,50$)
 d) $M_t = 13147,6 \text{ Nm}$
 $\phi = 1,32^\circ$
 e) $M_t = 7018,9 \text{ Nm}$
 f) $R = 2,5 \text{ mm}$
 g) $S_D = 4,27$ (ausreichend, da $S_D > 2,50$)

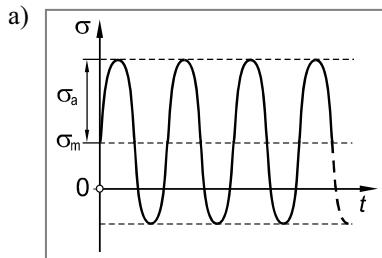
Lösung zu Aufgabe 13.20

- a) $M_{bl} = 2500 \text{ Nm}$
 b) $M_t = 4334,6 \text{ Nm}$



- d) $\beta_{kb} = 1,59$
e) $S_D = 1,36$ (nicht ausreichend, da $S_D < 2,50$)

Lösung zu Aufgabe 13.21



$$\sigma_m \equiv \sigma_z = 61,12 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_a \equiv \sigma_b = 178,25 \text{ N/mm}^2$$

- b) $S_F = 3,76$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)
 $S_D = 2,85$ (ausreichend, da $S_D > 2,50$)
c) $\beta_{kb} = 2,13$
d) $S_D = 1,35$ (nicht ausreichend, da $S_D < 2,50$)

Lösung zu Aufgabe 13.22

- a) $\varepsilon_{DMS} = 1,766 \%$
b) $F_B = 41551 \text{ N}$
c) $F_{B1} = 64934 \text{ N}$
d) $\beta_k = 1,59$
e) $S_D = 2,22$ (nicht ausreichend, da $S_D < 2,50$)
f) $F_{B3} = 35596 \text{ N}$

Lösung zu Aufgabe 13.23

- a) $\varepsilon_{DMS A} = -0,546 \%$
 $\varepsilon_{DMS B} = 0,885 \%$
b) $\alpha_{kz} = 2,30$
 $\alpha_{kt} = 1,55$
c) $M_{l2} = 395,6 \text{ Nm}$
d) $\beta_{kb} = 1,91$
e) $S_D = 1,40$ (nicht ausreichend, da $S_D < 2,50$)

Lösung zu Aufgabe 13.24

- a) $\sigma_{z1} = 51,96 \text{ N/mm}^2$
 $\varepsilon_{l1} = 0,248 \%$

$$\varepsilon_{qI} = -0,074 \text{ \%}$$

$$\sigma_{zII} = 31,44 \text{ N/mm}^2$$

$$\varepsilon_{lII} = 0,149 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_{qII} = -0,045 \text{ \%}$$

$$\Delta l = 0,171 \text{ mm}$$

Querschnittsfläche I: $S_F = 6,54$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

Querschnittsfläche II: $S_F = 10,81$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

b) $\sigma_{bI} = 252,42 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma_{bIII} = 118,79 \text{ N/mm}^2$$

c) $R = 1,4 \text{ mm}$

d) $F_2 = 2360 \text{ N}$

Lösung zu Aufgabe 13.25

a) $\varepsilon_A = 1,649 \text{ \%}$

$$\varepsilon_B = -0,833 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_C = 0,915 \text{ \%}$$

b) $F_{z2} = 185,3 \text{ kN}$

$$M_{t2} = 441,2 \text{ Nm}$$

c) $S_F = 1,83$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

d) $S_D = 5,18$ (ausreichend, da $S_D > 3,0$)

Lösung zu Aufgabe 13.26

a) $S_F = 1,26$ (ausreichend, da $S_F > 1,20$)

b) $S_D = 1,36$ (nicht ausreichend, da $S_D < 2,50$)

c) $F_{Q1} = 24,7 \text{ kN}$

d) $F_{H1} = 356,9 \text{ kN}$

Anhang 5: Musterklausur 1

Bearbeitungsdauer: 120 min.

Punkteverteilung:	1 a	14 Punkte
	b	4 Punkte
	c	7 Punkte
	2 a	6 Punkte
	b	14 Punkte
	c	20 Punkte
	3 a	4 Punkte
	b	2 Punkte
	c	10 Punkte
	d	15 Punkte
	e	4 Punkte

Gesamtpunktzahl: 100 Punkte

Erlaubte Hilfsmittel: alle

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt einen abgesetzten Stab mit Vollkreisquerschnitt aus der legierten Vergütungsstahlsorte 42CrMo4. Der Stab ist an seinen beiden Enden fest eingespannt und wird über eine Querlasche durch das Kräftepaar $F = 2 \text{ kN}$ auf Torsion beansprucht.

- Berechnen Sie die Torsionsmomente an den beiden Einspannstellen. Beachten Sie, dass die linke und die rechte Stabhälfte einen unterschiedlichen Durchmesser sowie eine unterschiedliche Länge haben.
- Ermitteln Sie die maximale Schubspannung im Stab und berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen. Ist die Sicherheit ausreichend? Kerbwirkung muss nicht berücksichtigt werden.
- Berechnen Sie den Verdrehwinkel φ der Querlasche.

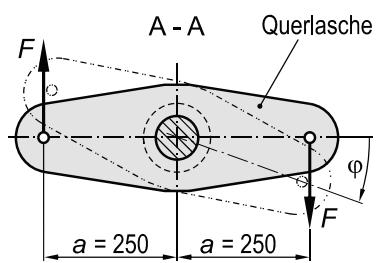
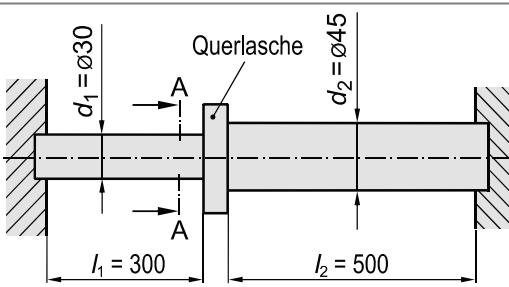
Werkstoffkennwerte 42CrMo4:

$$R_{p0,2} = 780 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1220 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



Aufgabe 2

Zur Messung von Torsionsmomenten soll das dargestellte Messelement mit Vollkreisquerschnitt aus der legierten Stahlsorte 36CrNiMo4 eingesetzt werden. Auf dem Messelement wurden drei Dehnungsmessstreifen in der dargestellten Weise appliziert.

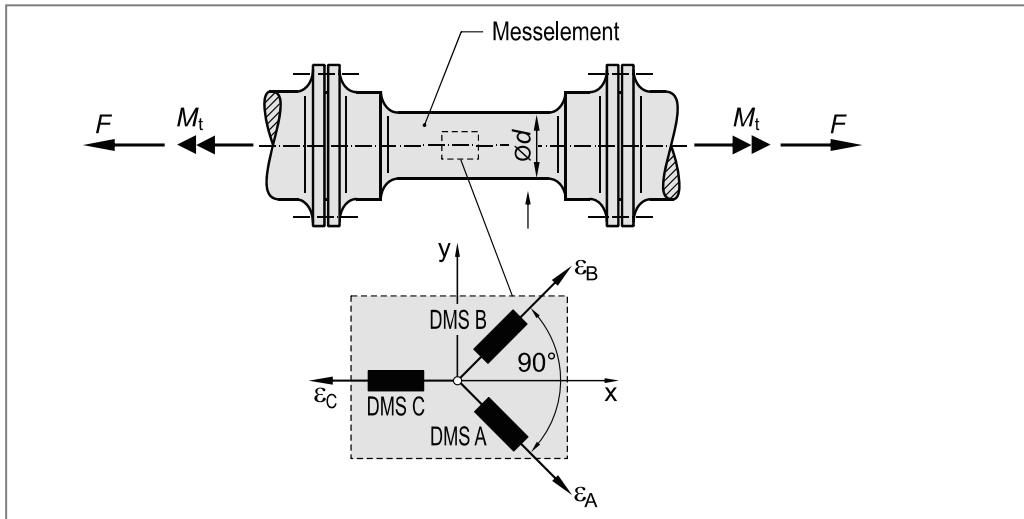
Werkstoffkennwerte 36CrNiMo4:

$$R_{p0,2} = 680 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 1070 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- Mit Hilfe des dargestellten Messelementes sollen Torsionsmomente bis 10000 Nm gemessen werden. Berechnen Sie den erforderlichen Mindestdurchmesser d des zylindrischen Teils des Messelementes, damit Fließen mit einer Sicherheit von $S_F = 2,50$ ausgeschlossen werden kann. Kerbwirkung muss nicht berücksichtigt werden.
- Für das Messelement wird ein Durchmesser von $d = 75 \text{ mm}$ gewählt. Berechnen Sie die Dehnungen in A-, B- und C-Richtung (Messrichtung der Dehnungsmessstreifen) bei einem Torsionsmoment von $M_t = 10000 \text{ Nm}$. Das Torsionsmoment hat den in der Abbildung angegebenen Drehsinn. Eine axiale Zugkraft ist zunächst nicht vorhanden ($F = 0$).
- Das Messelement ($d = 75 \text{ mm}$) kann im Betrieb neben einem Torsionsmoment M_t zusätzlich einer axialen Zugkraft F ausgesetzt sein. Während einer Messung werden die folgenden Dehnungen ermittelt:

$$\text{DMS A: } \varepsilon_A = 1,3096 \text{ \%}$$

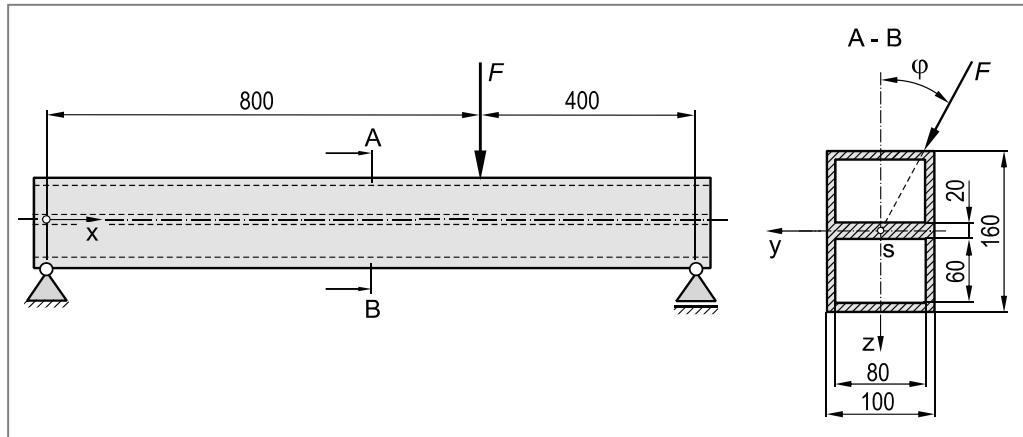
$$\text{DMS B: } \varepsilon_B = -0,9324 \text{ \%}$$

$$\text{DMS C: } \varepsilon_C = 0,5389 \text{ \%}$$

Berechnen Sie aus den gemessenen Dehnungen das unbekannte Torsionsmoment M_t sowie die unbekannte Zugkraft F .

Aufgabe 3

Ein beidseitig gelenkig gelagertes, symmetrisches Aluminium-Strangpressprofil (EN AW-Al Mg3-H14) wird durch eine unter einem Winkel von $\varphi = 28^\circ$ angreifende Querkraft $F = 25 \text{ kN}$ auf Biegung beansprucht. Die Wirkungslinie der Kraft verläuft durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche. Schubspannungen durch Querkräfte sowie das Eigengewicht des Profils können vernachlässigt werden.



Werkstoffkennwerte EN AW-Al Mg3-H14:

$$R_{p0,2} = 220 \text{ N/mm}^2$$

$$R_m = 280 \text{ N/mm}^2$$

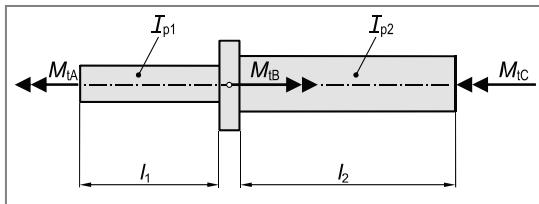
$$E = 73000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,33$$

- Bestimmen Sie Ort und Betrag des maximalen Biegemomentes.
- Ermitteln Sie die Lage der beiden Hauptachsen der Querschnittsfläche.
- Berechnen Sie die axialen Flächenmomente zweiter Ordnung bezüglich der beiden Hauptachsen (Hauptflächenmomente I_1 und I_2).
- Ermitteln Sie die Lage der Nulllinie und bestimmen Sie Ort und Betrag der maximalen Zugspannung sowie der maximalen Druckspannung.
- Berechnen Sie für die gefährdete Stelle die Sicherheit gegen Fließen. Ist die Sicherheit ausreichend?

Lösung zu Aufgabe 1

a) Freischneiden des Stabes



Berechnung des Torsionsmomentes M_{tB}

$$M_{tB} = 2 \cdot F \cdot a = 2 \cdot 2000 \text{ N} \cdot 0,25 \text{ m} = 1000 \text{ Nm}$$

Ansetzen des Momentengleichgewichts

$$M_{tA} + M_{tC} = M_{tB} \quad (\text{Momentengleichgewicht}) \quad (1)$$

Mit Hilfe von Gleichung 1 können die Torsionsmomente M_{tA} und M_{tC} noch nicht berechnet werden. Es wird eine zweite Gleichung (Verträglichkeitsbedingung) benötigt.

Da die Verdrehwinkel der linken und der rechten Stabhälfte gleich groß sein müssen, gilt:

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\frac{M_{tA} \cdot l_1}{G \cdot I_{p1}} = \frac{M_{tC} \cdot l_2}{G \cdot I_{p2}}$$

$$M_{tA} = M_{tC} \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{I_{p1}}{I_{p2}} \quad (\text{Verträglichkeitsbedingung}) \quad (2)$$

Gleichung 1 in Gleichung 2 eingesetzt liefert:

$$M_{tA} = (M_{tB} - M_{tA}) \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{I_{p1}}{I_{p2}} = (M_{tB} - M_{tA}) \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{\frac{\pi}{32} \cdot d_1^4}{\frac{\pi}{32} \cdot d_2^4} = (M_{tB} - M_{tA}) \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{d_1^4}{d_2^4}$$

$$M_{tA} = M_{tB} \cdot \frac{\frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{d_1^4}{d_2^4}}{1 + \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{d_1^4}{d_2^4}} = 1000 \text{ Nm} \cdot \frac{\frac{500 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} \cdot \frac{(30 \text{ mm})^4}{(45 \text{ mm})^4}}{1 + \frac{500 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} \cdot \frac{(30 \text{ mm})^4}{(45 \text{ mm})^4}} = 247,68 \text{ Nm}$$

An der rechten Einspannstelle folgt schließlich für das Torsionsmoment M_{tC} :

$$M_{tC} = M_{tB} - M_{tA} = 1000 \text{ Nm} - 247,68 \text{ Nm} = 752,32 \text{ Nm}$$

b) Berechnung der Schubspannungen in den beiden Stabhälften

Schubspannung in der linken Stabhälfte:

$$\tau_{t1} = \frac{M_{tA}}{W_{t1}} = \frac{M_{tA}}{\frac{\pi}{16} \cdot d_1^3} = \frac{247680 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (30 \text{ mm})^3} = 46,72 \text{ N/mm}^2$$

Schubspannung in der rechten Stabhälfte:

$$\tau_{t2} = \frac{M_{tC}}{W_{t2}} = \frac{M_{tC}}{\frac{\pi}{16} \cdot d_3^3} = \frac{752320 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (45 \text{ mm})^3} = 42,05 \text{ N/mm}^2$$

Die maximale Schubspannung im linken Stab beträgt also $\tau_t = 46,72 \text{ N/mm}^2$

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

Festigkeitsbedingung:

$$\tau_t \leq \tau_{t \text{ zul}}$$

$$\tau_t = \frac{\tau_{tf}}{S_F}$$

$$\tau_t = \frac{R_{p0,2} / 2}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{2 \cdot \tau_t} = \frac{780 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot 46,72 \text{ N/mm}^2} = 8,35 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

c) Berechnung des Verdrehwinkels der Querlasche

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_{tA} \cdot l_1}{G \cdot I_{p1}} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_{tA} \cdot l_1}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d_1^4} \\ &= \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{247680 \text{ Nmm} \cdot 300 \text{ mm}}{\frac{210000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (30 \text{ mm})^4} = 0,663^\circ \end{aligned}$$

Kontrolle:

Der Verdrehwinkel φ_2 muss betragsmäßig dem Verdrehwinkel φ_1 entsprechen.

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_{tC} \cdot l_2}{G \cdot I_{p2}} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_{tC} \cdot l_2}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d_2^4} \\ &= \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{752320 \text{ Nmm} \cdot 500 \text{ mm}}{\frac{210000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (45 \text{ mm})^4} = 0,663^\circ \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Berechnung der Mindestdicke des Messelements

Festigkeitsbedingung:

$$\tau_t \leq \tau_{t,zul}$$

$$\frac{M_t}{W_t} = \frac{\tau_{t,F}}{S_F} = \frac{R_{p0,2}}{2 \cdot S_F}$$

$$\frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{R_{p0,2}}{2 \cdot S_F}$$

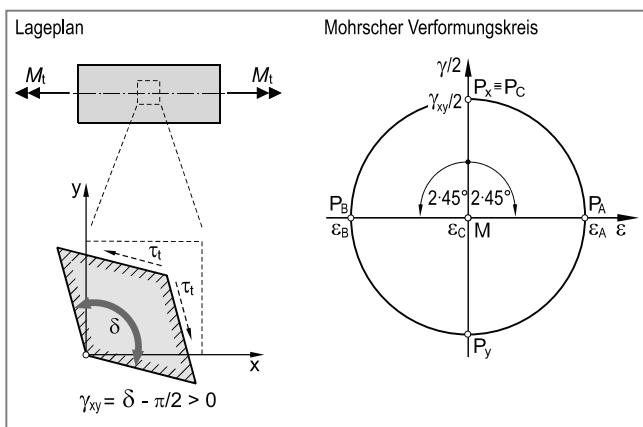
$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_t \cdot S_F}{\pi \cdot R_{p0,2}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10000000 \text{ Nmm} \cdot 2,5}{\pi \cdot 680 \text{ N/mm}^2}} = 72,1 \text{ mm}$$

b) 1. Lösungsmöglichkeit: Mohrscher Verformungskreis

Konstruktion des Mohrschen Verformungskreises

Zur Konstruktion des Mohrschen Verformungskreises benötigt man die Verformungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen. Bekannt sind die Verformungen mit der x- bzw. y-Richtung als Bezugsrichtung.

Einzeichnen der entsprechenden Bildpunkte P_x ($0 | \gamma_{xy}/2$) und P_y ($0 | -\gamma_{xy}/2$) in das $\varepsilon-\gamma/2$ -Koordinatensystem unter Berücksichtigung der Vorzeichenregelung für Schiebungen.



Da die x- und die y-Richtung einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser liegen. Die Strecke P_xP_y schneidet die ε -Achse im Kreismittelpunkt M . Kreis um M durch die Bildpunkte P_x bzw. P_y ist der gesuchte Mohrsche Verformungskreis (siehe Abbildung).

Berechnung der Schiebung γ_{xy} mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes für Schubbeanspr.

$$\tau_t \equiv \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \gamma_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} \cdot \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{E} = \frac{10000000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (75 \text{ mm})^3} \cdot \frac{2 \cdot (1 + 0,30)}{210000 \text{ N/mm}^2} = 0,001495 \\ = 1,495 \text{ %}$$

Berechnung der Dehnungen in A-, B- und C-Richtung

$$\varepsilon_A = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1,495 \%}{2} = 0,747 \%$$

$$\varepsilon_B = -\varepsilon_A = -0,747 \%$$

$$\varepsilon_C = 0$$

2. Lösungsmöglichkeit: Rechnerische Auswertung¹⁾

Die Dehnungen in Messrichtung der Dehnungsmessstreifen (ε_A , ε_B und ε_C) lassen sich auch mit Hilfe von Gleichung 4.32 (siehe Lehrbuch) berechnen.

Es gilt:

$$\varepsilon_A = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\beta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\beta$$

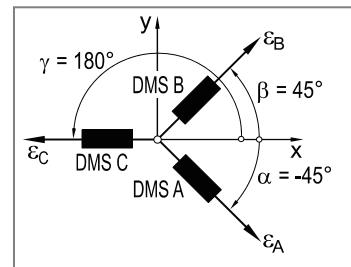
$$\varepsilon_C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\gamma - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\gamma$$

Mit $\alpha = -45^\circ$, $\beta = 45^\circ$ und $\gamma = 180^\circ$ sowie $\varepsilon_x = 0$, $\varepsilon_y = 0$ und $\gamma_{xy} = 1,495 \%$ folgt:

$$\varepsilon_A = -\frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin(2 \cdot (-45^\circ)) = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1,495 \%}{2} = 0,747 \%$$

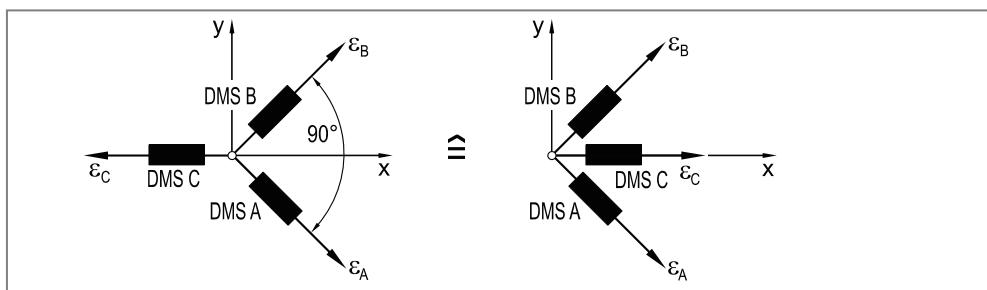
$$\varepsilon_B = \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ) = -\frac{\gamma_{xy}}{2} = -\frac{1,495 \%}{2} = -0,747 \%$$

$$\varepsilon_C = \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 0 = 0$$



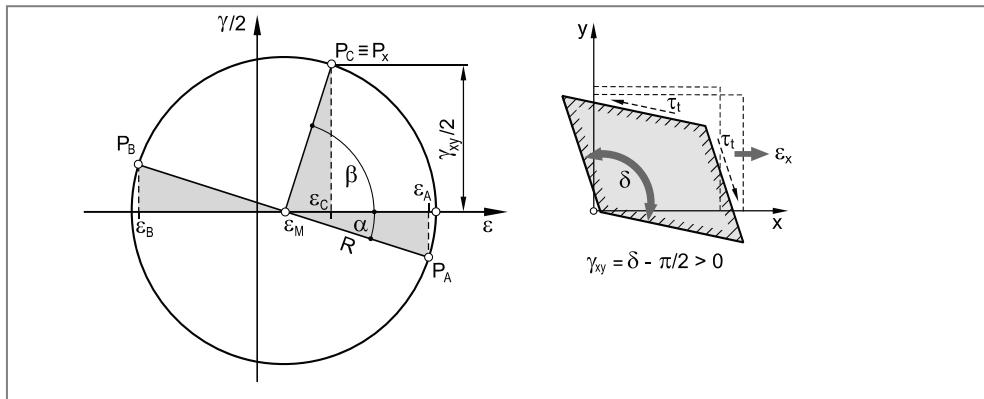
c) 1. Lösungsmöglichkeit: Mohrscher Verformungskreis

Verschiebt man DMS C längs der x-Achse (der Messwert ε_C ändert sich hierdurch nicht), dann erhält man eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette (siehe Abbildung).



Der Mohrsche Verformungskreis kann damit entsprechend Kapitel 4.4.2 (siehe Lehrbuch) auf einfache Weise konstruiert werden.

¹⁾ Siehe Gleichung 4.32 im Lehrbuch auf Seite 101



Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohrschen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2} = \frac{1,3096\% + (-0,9324\%)}{2} = 0,1886\%$$

$$R = \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_M)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_M)^2}$$

$$= \sqrt{(1,3096\% - 0,1886\%)^2 + (0,5389\% - 0,1886\%)^2} = 1,1745\%$$

Berechnung des Winkels α zwischen der Messrichtung von DMS A und der Hauptdehnungsrichtung

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\varepsilon_C - \varepsilon_M}{\varepsilon_A - \varepsilon_M} \right) = \arctan \left(\frac{0,5389\% - 0,1886\%}{1,3096\% - 0,1886\%} \right) = \arctan 0,312 = 17,35^\circ$$

Damit folgt für den Richtungswinkel β :

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 17,35^\circ = 72,65^\circ$$

Berechnung der Dehnung in x-Richtung

$$\varepsilon_x \equiv \varepsilon_C = 0,5389\%$$

Berechnung der Normalspannung in x-Richtung mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes

Das Torsionsmoment bewirkt keine Dehnung in Messrichtung des DMS C. Die von DMS C registrierte Dehnung kann daher nur von der Zugspannung verursacht werden. Es gilt daher:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,5389\% \cdot 10^{-3} = 113,17 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Zugkraft F

$$F = \sigma_x \cdot A = \sigma_x \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 113,17 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (75 \text{ mm})^2 = 499965 \text{ N} \approx 500 \text{ kN}$$

Berechnung der Schiebung γ_{xy} mit der x-Richtung als Bezugsrichtung

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = R \cdot \sin \beta = 1,1745\% \cdot \sin 72,65^\circ = 1,121\%$$

$$\gamma_{xy} = 2,242\% \quad (\text{Winkelvergrößerung gemäß Vorzeichenregelung für Schiebungen})$$

Berechnung der Schubspannung τ_t durch Anwendung des Hookeschen Gesetzes für Schubbeanspruchung

$$\tau_{xy} \equiv \tau_t = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \gamma_{xy} = \frac{210000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot 2,242\% \cdot 10^{-3} = 181,09 \text{ N/mm}^2$$

Damit folgt für das Torsionsmoment M_t :

$$M_t = \tau_t \cdot W_t = \tau_t \cdot \frac{\pi}{16} \cdot d^3 = 181,09 \cdot \text{N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{16} \cdot (75 \text{ mm})^3$$

$$M_t = 149\,999\,936 \text{ Nmm} \approx \mathbf{15\,000 \text{ Nm}}$$

2. Lösungsmöglichkeit: Rechnerische Auswertung¹⁾

Die Dehnungen in x- und y-Richtung (ε_x und ε_y) lassen sich auch mit Hilfe von Gleichung 4.32 (siehe Lehrbuch) berechnen.

Es gilt:

$$\varepsilon_A = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\beta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\beta$$

$$\varepsilon_C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\gamma - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\gamma$$

Mit $\alpha = -45^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 180^\circ$ sowie $\varepsilon_A = 1,3096\%$, $\varepsilon_B = -0,9324\%$ und $\varepsilon_C = 0,5389\%$ folgt:

$$1,3096\% = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot (-45^\circ)) - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin(2 \cdot (-45^\circ))$$

$$-0,9324\% = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot 45^\circ) - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ)$$

$$0,5389\% = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot 180^\circ) - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin(2 \cdot 180^\circ)$$

Damit folgt:

$$1,3096\% = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (1)$$

$$-0,9324\% = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (2)$$

$$0,5389\% = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \varepsilon_x \quad (3)$$

¹⁾ Siehe Gleichung 4.32 im Lehrbuch auf Seite 101

Berechnung der Zugkraft F

Das Torsionsmoment bewirkt keine Dehnung in Messrichtung des DMS C. Die von DMS C registrierte Dehnung kann daher nur von der Zugspannung verursacht werden. Es gilt daher:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,5389\% \cdot 10^{-3} = 113,17 \text{ N/mm}^2$$

und damit:

$$F = \sigma_x \cdot A = \sigma_x \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 113,17 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (75 \text{ mm})^2 = 499965 \text{ N} \approx 500 \text{ kN}$$

Berechnung des Torsionsmomentes M_t

Gleichung 1 und Gleichung 2 addiert liefern:

$$0,3772\% = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_y = 0,3772\% - \varepsilon_x = 0,3772\% - 0,5389\% = -0,1617\% \quad (= -\mu \cdot \varepsilon_x)$$

Aus Gleichung 2 folgt schließlich:

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + 2 \cdot 0,9324\%$$

$$= 0,5389\% + (-0,1617\%) + 2 \cdot 0,9324\%$$

$$= 2,242\%$$

Damit folgt für das Torsionsmoment M_t :

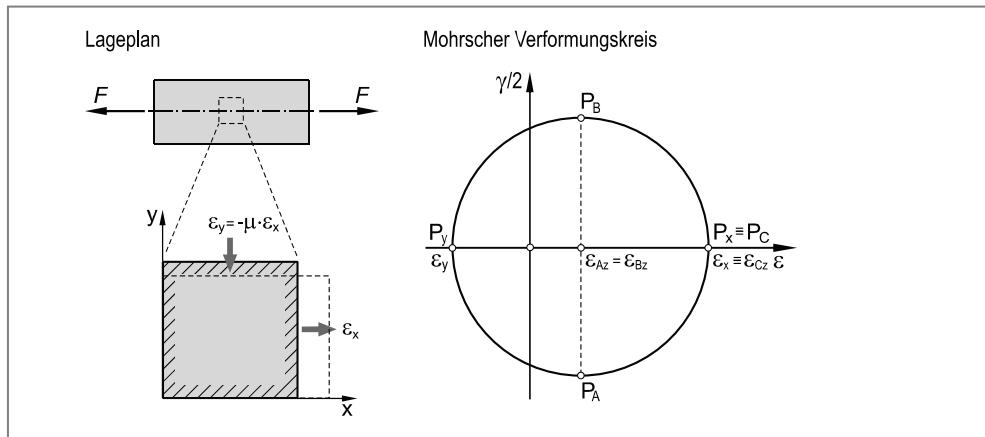
$$M_t = W_t \cdot G \cdot \gamma_{xy} = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cdot \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \gamma_{xy} = \frac{\pi \cdot (75 \text{ mm})^3}{16} \cdot \frac{210000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot \frac{2,24197}{1000}$$

$$M_t = 149999936 \text{ Nmm} \approx 15000 \text{ Nm}$$

3. Lösungsmöglichkeit: Superpositionsprinzip

Man kann sich die Gesamtverformung zusammengesetzt denken, aus einer Verformung durch Zugbeanspruchung und einer Verformung aus Torsion. Man betrachtet also die Verformungen aus Zug und Torsion zunächst getrennt.

Konstruktion des Mohrschen Verformungskreises, falls nur die Zugkraft F wirkt



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{F}{A \cdot E} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2 \cdot E}$$

$$\varepsilon_y = -\mu \cdot \varepsilon_x$$

Berechnung der Dehnungsanzeigen, falls nur die Zugkraft F wirkt

$$\varepsilon_{Az} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{\varepsilon_x - \mu \cdot \varepsilon_x}{2} = \varepsilon_x \cdot \frac{1 - \mu}{2}$$

$$\varepsilon_{Bz} = \varepsilon_{Az}$$

$$\varepsilon_{Cz} = \varepsilon_x$$

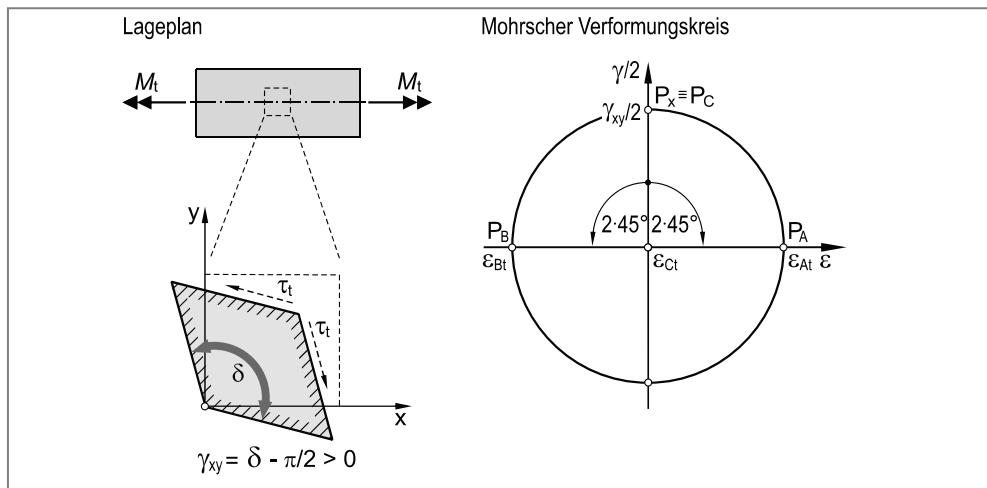
Konstruktion des Mohrschen Verformungskreises, falls nur das Torsionsmoment M_t wirkt

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_t}{G} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3} \cdot \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{E}$$

$$\varepsilon_{At} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\varepsilon_{Bt} = -\frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\varepsilon_{Ct} = 0$$



Wirken Zugkraft F und Torsionsmoment M_t gleichzeitig, dann erhält man die Dehnungen in Messrichtung der Dehnungsmessstreifen durch lineare Superposition der o. g. Einzeldehnungen. Es gilt also:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_{Az} + \varepsilon_{At} \quad (1)$$

$$\varepsilon_B = \varepsilon_{Bz} + \varepsilon_{Bt} \quad (2)$$

$$\varepsilon_C = \varepsilon_{Cz} + \varepsilon_{Ct} = \varepsilon_{Cz} + 0 = \varepsilon_{Cz} \quad (3)$$

Gleichung 3 zeigt, dass die Anzeige von DMS C erwartungsgemäß nur von der Zugkraft F verursacht wird.

Berechnung der Zugkraft F

$$\varepsilon_C = \varepsilon_{Cz} = \varepsilon_x = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2 \cdot E}$$

$$F = \varepsilon_C \cdot \frac{\pi \cdot d^2 \cdot E}{4} = \frac{0,5389}{1000} \cdot \frac{\pi \cdot (75 \text{ mm})^2 \cdot 210000 \text{ N/mm}^2}{4} = 499965 \text{ N} \approx 500 \text{ kN}$$

Berechnung des Torsionsmomentes M_t

Für die Dehnungen in Messrichtung von DMS A gilt entsprechend Gleichung 1:

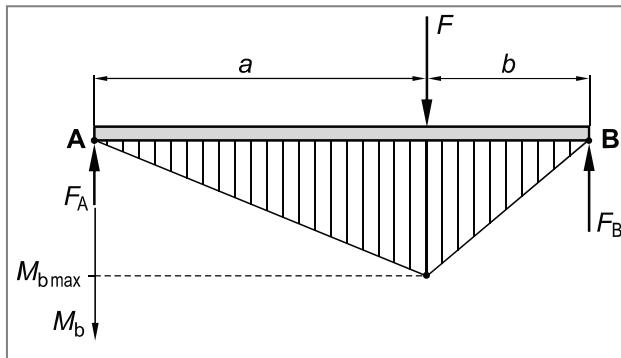
$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \varepsilon_{Az} + \varepsilon_{At} \\ &= \varepsilon_x \cdot \frac{1-\mu}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} = \varepsilon_C \cdot \frac{1-\mu}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \gamma_{xy} &= 2 \cdot \left(\varepsilon_A - \varepsilon_C \cdot \frac{1-\mu}{2} \right) = 2 \cdot \left(1,3096 \% - 0,5389 \% \cdot \frac{1-0,30}{2} \right) = 2,24197 \% \end{aligned}$$

Damit folgt für das Torsionsmoment M_t :

$$\begin{aligned} M_t &= W_t \cdot G \cdot \gamma_{xy} = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cdot \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} \cdot \gamma_{xy} = \frac{\pi \cdot (75 \text{ mm})^3}{16} \cdot \frac{210000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1+0,30)} \cdot \frac{2,24197}{1000} \\ M_t &= 149999936 \text{ Nmm} \approx 15000 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Berechnung des maximalen Biegemomentes



Ansetzen des Momentengleichgewichtes um den Lagerpunkt A

$$\Sigma M_A = 0$$

$$F_B \cdot (a + b) - F \cdot a = 0$$

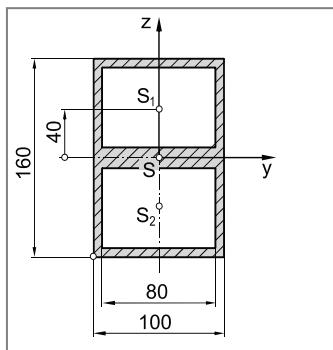
$$F_B = F \cdot \frac{a}{a + b} = 25000 \text{ N} \cdot \frac{800 \text{ mm}}{800 \text{ mm} + 400 \text{ mm}} = 16\,666,67 \text{ N}$$

$$M_{b\max} = F_B \cdot b = 16\,666,67 \text{ N} \cdot 400 \text{ mm} = 6666666,67 \text{ Nmm} = \mathbf{6\,666,67 \text{ Nm}}$$

Das maximale Biegemoment wirkt in der den Kraftangriffspunkt beinhaltenden Querschnittsfläche.

- b) Da es sich um eine symmetrische Querschnittsfläche handelt, fallen die Hauptachsen mit den Symmetrieachsen zusammen, d. h. das y-z-Koordinatensystem ist gleichzeitig Hauptachsensystem. Das maximale Flächenmoment 2. Ordnung ergibt sich bezüglich der y-Achse, das minimale Flächenmoment 2. Ordnung hingegen bezüglich der z-Achse.

c) Berechnung der Hauptflächenmomente

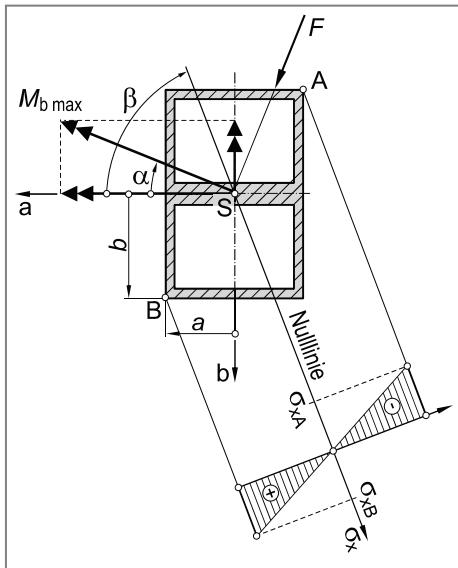


$$I_1 \equiv I_y = \frac{100 \text{ mm} \cdot (160 \text{ mm})^3}{12} - 2 \cdot \left(\frac{80 \text{ mm} \cdot (60 \text{ mm})^3}{12} + (40 \text{ mm})^2 \cdot 80 \text{ mm} \cdot 60 \text{ mm} \right)$$

$$= 15893333 \text{ mm}^4$$

$$I_2 \equiv I_z = \frac{160 \text{ mm} \cdot (100 \text{ mm})^3}{12} - 2 \cdot \frac{60 \text{ mm} \cdot (80 \text{ mm})^3}{12} = 8213333 \text{ mm}^4$$

d) Momentenverhältnisse an der höchst beanspruchten Stelle:



Berechnung des Winkels β zwischen der a-Achse und der Nulllinie

$$\beta = \arctan\left(\frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha\right) = \arctan\left(\frac{15893333 \text{ mm}^4}{8213333 \text{ mm}^4} \cdot \tan(-28^\circ)\right) = -45,82^\circ$$

Die maximalen Biegespannungen befinden sich an denjenigen Orten der Querschnittsfläche, die einen maximalen Abstand zur Nulllinie haben, hier also an den Profileckpunkten B (σ_{xB}) und A ($\sigma_{xA} = -\sigma_{xB}$).

Berechnung der Biegespannung am Profileckpunkt B der Querschnittsfläche (maximale Zugspannung)

$$\begin{aligned} \sigma_{xB} &= M_{b\max} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{I_1} \cdot b - \frac{\sin \alpha}{I_2} \cdot a \right) \\ &= 6666666,67 \text{ Nmm} \cdot \left(\frac{\cos(-28^\circ)}{15893333 \text{ mm}^4} \cdot 80 \text{ mm} - \frac{\sin(-28^\circ)}{8213333 \text{ mm}^4} \cdot 50 \text{ mm} \right) \\ &= 48,68 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Damit folgt für die maximale Druckspannung am Profileckpunkt A:

$$\sigma_{xA} = -\sigma_{xB} = -48,68 \text{ N/mm}^2$$

e) **Berechnung der Sicherheit gegen Fließen**

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{xB} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{220 \text{ N/mm}^2}{48,68 \text{ N/mm}^2} = 4,52 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Anhang 6: Musterklausur 2

Bearbeitungsdauer: 120 min.

Punkteverteilung:	1 a	2 Punkte
	b	4 Punkte
	c	19 Punkte
	2 a	21 Punkte
	b	14 Punkte
	3 a	3 Punkte
	b	16 Punkte
	c	15 Punkte
	d	6 Punkte

Gesamtpunktzahl: 100 Punkte

Erlaubte Hilfsmittel: alle

Aufgabe 1

Eine einfache Seilrolle aus der Vergütungsstahlsorte 50CrMo4 wird in der dargestellten Weise statisch beansprucht. Um die Masse m ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) im Gleichgewicht zu halten, wirkt am linken Wellenende ein Torsionsmoment M_t ($M_t = m \cdot g \cdot c$).

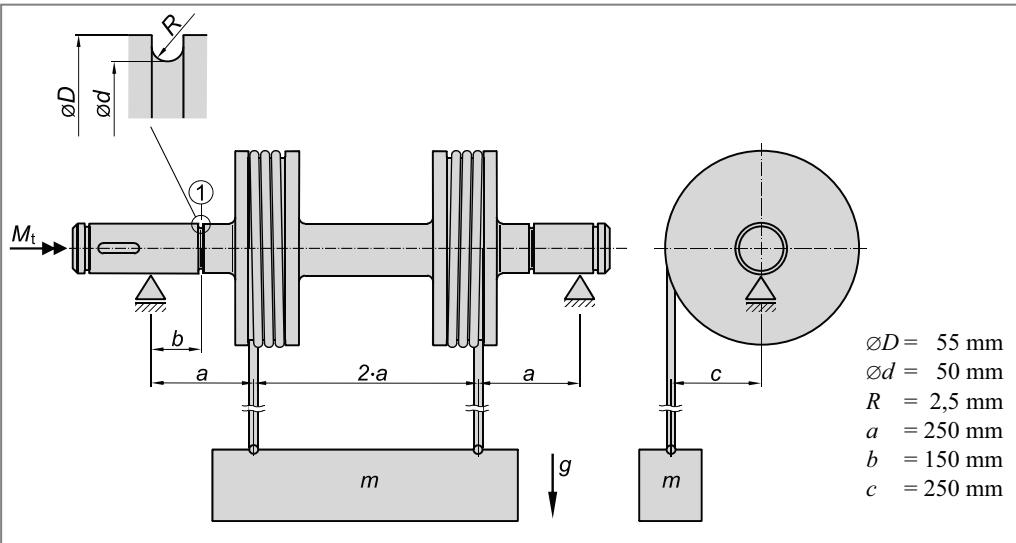
Werkstoffkennwerte 50CrMo4 (vergütet):

$$R_m = 1170 \text{ N/mm}^2$$

$$R_{p0,2} = 920 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 209000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,30$$



- Skizzieren Sie den Verlauf des Biegemomentes über der Länge der Welle und berechnen Sie das Biegemoment an der Kerbstelle 1 in Abhängigkeit der Masse m .
- Berechnen Sie für den halbkreisförmigen Einstich an der Kerbstelle 1 die Formzahl für Biege- und für Torsionsbeanspruchung (α_{kb} und α_{kt}).
- Berechnen Sie die maximal zulässige Masse m , falls Fließen an der Kerbstelle 1 mit einer Sicherheit von $S_F = 1,5$ ausgeschlossen werden soll.

Aufgabe 2

Zur Ermittlung des Innendrucks in einer dünnwandigen Getränkendose (Innendurchmesser $d_i = 67 \text{ mm}$, Wandstärke $s = 0,15 \text{ mm}$) aus Aluminiumblech (EN AW-Al 99,5) werden an der Außenoberfläche zwei Dehnungsmessstreifen (DMS) in der skizzierten Weise appliziert. Vor dem Öffnen der Dose werden die DMS auf den Wert Null abgeglichen. Nach dem Öffnen der Getränkendose zeigen die Dehnungsmessstreifen die folgenden Werte an:

$$\text{DMS A: } \varepsilon_A = -0,1664 \text{ \%}$$

$$\text{DMS B: } \varepsilon_B = -0,6129 \text{ \%}$$

Werkstoffkennwerte für EN AW-Al 99,5:

$$R_m = 150 \text{ N/mm}^2$$

$$R_{p0,2} = 120 \text{ N/mm}^2$$

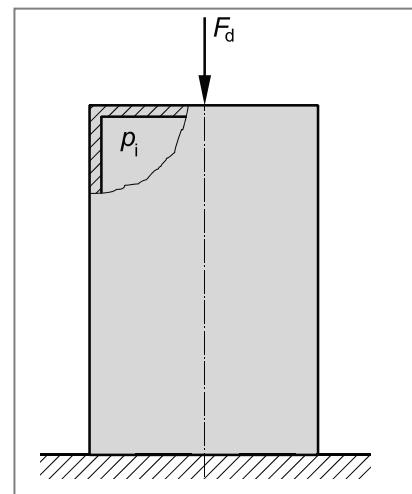
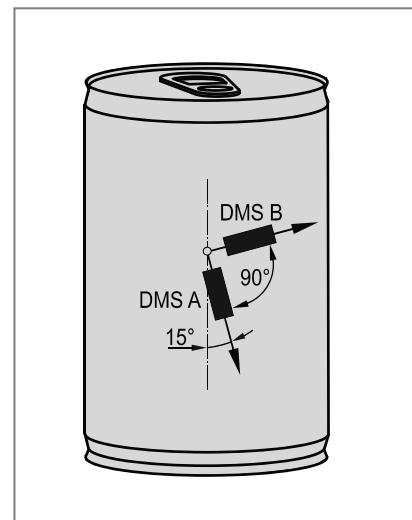
$$E = 72000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,33$$

- Berechnen Sie anhand der experimentell ermittelten Dehnungswerte (ε_A und ε_B) den Innendruck in der Getränkendose vor dem Öffnen.

Bei der Lagerung werden die Getränkendosen übereinander gestapelt. Hierbei werden die Dosen zusätzlich mit einer statisch wirkenden, mittig angreifenden, axialen Druckkraft F_d beansprucht (siehe Abbildung).

- Berechnen Sie die zulässige Druckkraft F_d , falls bei einem angenommenen maximalen Innendruck von $p_i = 0,3 \text{ MPa}$ Fließen des Werkstoffs mit einer Sicherheit von $S_F = 1,20$ ausgeschlossen werden soll.



Aufgabe 3

Eine rohrförmige Abschleppstange aus der warm ausgehärteten Aluminiumlegierung EN AW-Al Cu4 SiMg-T6 hat einen Innendurchmesser von $d_i = 30 \text{ mm}$ und eine Wanddicke von $s = 5 \text{ mm}$. Die Länge der Abschleppstange beträgt $l = 3,2 \text{ m}$. Der Oberflächenfaktor kann mit $C_{O\sigma} = 0,85$ angenommen werden.

Im Abschleppbetrieb wird eine Belastung angenommen, die sich aus einer statischen Zugkraft von $F_1 = 40 \text{ kN}$ und einer überlagerten rein wechselnden Zugkraft von $F_2 = \pm 15 \text{ kN}$ (sinusförmig) zusammensetzt.

Werkstoffkennwerte der Legierung EN AW-Al Cu4Si Mg-T6:

$$R_m = 540 \text{ N/mm}^2$$

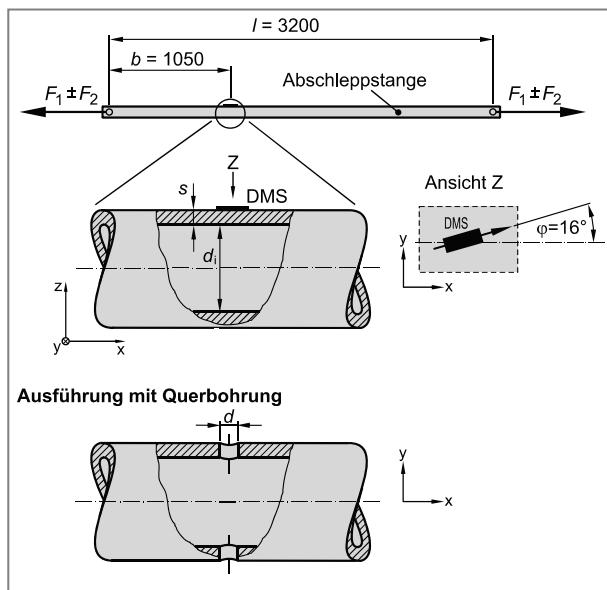
$$R_{p0,2} = 410 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{zdW} = 180 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 72000 \text{ N/mm}^2$$

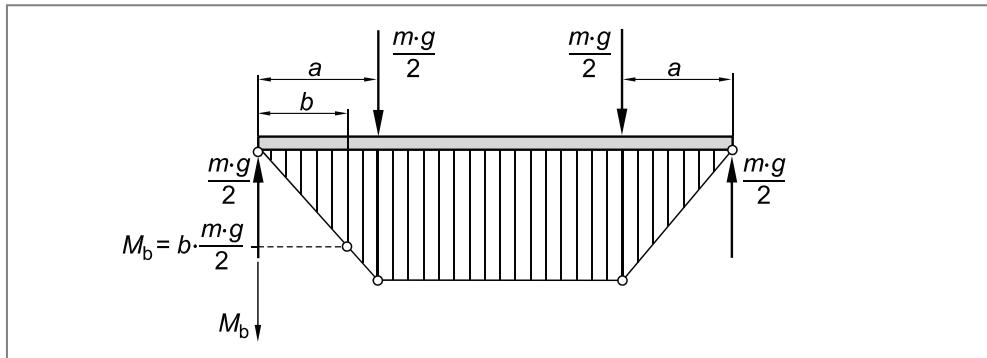
$$\mu = 0,33$$

- Skizzieren Sie das Kraft-Zeit-Diagramm.
- Auf welche Weise könnte die Stange versagen? Ermitteln Sie hierfür die entsprechenden Sicherheiten. Sind die Sicherheiten ausreichend?
- Zur Kontrolle der Belastung wird in einem Abstand von $b = 1050 \text{ mm}$ vom linken Stangenende, an dessen Oberseite ein Dehnungsmessstreifen (DMS) angebracht. Aufgrund einer Fertigungsungenauigkeit schließt der DMS mit der Längsachse der Stange einen Winkel von $\varphi = 16^\circ$ ein (siehe Abbildung). Ermitteln Sie die maximale Dehnungsanzeige ε_{DMS} für die Belastung aus F_1 und F_2 .
- Eine alternative Ausführung der Abschleppstange hat eine Querbohrung mit einem Durchmesser von $d = 5 \text{ mm}$ (siehe Abbildung). Ermitteln Sie, ob auch für diese Ausführung eine ausreichende Sicherheit gegen Dauerbruch (S_D) besteht ($F_1 = 40 \text{ kN}$, $F_2 = \pm 15 \text{ kN}$). Die Formzahl kann für den rohrförmigen Rundstab mit Querbohrung zu $\alpha_k = 1,4$ und die Kerbwirkungszahl zu $\beta_k = 1,25$ angenommen werden. Für die Berechnung der Nennspannungen kann die Querbohrung vernachlässigt werden.



Lösung zu Aufgabe 1

a) Freischneiden der Seilrolle



Berechnung des Biegemomentes in Abhängigkeit der Masse m

$$M_b = \frac{m \cdot g}{2} \cdot b$$

b) Ermittlung der Verhältniszahlen

$$\frac{D}{d} = \frac{55}{50} = 1,1$$

$$\frac{R}{d} = \frac{2,5}{50} = 0,05$$

Damit entnimmt man geeigneten Formzahldiagrammen:

$$\alpha_{kb} = 2,25$$

$$\alpha_{kt} = 1,65$$

c) Berechnung der Nennspannungen an der Kerbstelle 1

Biegung:

$$\sigma_{bn} = \frac{M_b}{W_{bn}} = \frac{\frac{m \cdot g}{2} \cdot b}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{16 \cdot m \cdot g \cdot b}{\pi \cdot d^3}$$

Torsion:

$$\tau_{tn} = \frac{M_t}{W_{tn}} = \frac{m \cdot g \cdot c}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{16 \cdot m \cdot g \cdot c}{\pi \cdot d^3}$$

d) Berechnung der maximalen Spannungen an der Kerbstelle 1

Biegung:

$$\sigma_{b\max} = \sigma_{bn} \cdot \alpha_{kb} = \frac{16 \cdot m \cdot g \cdot b}{\pi \cdot d^3} \cdot \alpha_{kb}$$

Torsion:

$$\tau_{t\max} = \tau_{tn} \cdot \alpha_{kt} = \frac{16 \cdot m \cdot g \cdot c}{\pi \cdot d^3} \cdot \alpha_{kt}$$

Berechnung der Vergleichsspannung σ_V mit Hilfe der Schubspannungshypothese

Da es sich um eine Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion handelt, ergibt sich die Vergleichsspannung nach der SH zu (siehe Gleichung 6.14 im Lehrbuch):

$$\begin{aligned}\sigma_{V\text{ SH}} &= \sqrt{\sigma_{b\max}^2 + 4 \cdot \tau_{t\max}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{16 \cdot m \cdot g \cdot b}{\pi \cdot d^3} \cdot \alpha_{kb}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{16 \cdot m \cdot g \cdot c}{\pi \cdot d^3} \cdot \alpha_{kt}\right)^2} \\ &= \frac{16 \cdot m \cdot g}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{(b \cdot \alpha_{kb})^2 + 4 \cdot (c \cdot \alpha_{kt})^2}\end{aligned}$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{V\text{SH}} \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{16 \cdot m \cdot g}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{(b \cdot \alpha_{kb})^2 + 4 \cdot (c \cdot \alpha_{kt})^2} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$m = \frac{\pi \cdot d^3}{16 \cdot g \cdot \sqrt{(b \cdot \alpha_{kb})^2 + 4 \cdot (c \cdot \alpha_{kt})^2}} \cdot \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$m = \frac{\pi \cdot (50 \text{ mm})^3}{16 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \sqrt{(150 \text{ mm} \cdot 2,25)^2 + 4 \cdot (250 \text{ mm} \cdot 1,65)^2}} \cdot \frac{920 \text{ N/mm}^2}{1,5}$$

$$m = \mathbf{1721,5 \text{ kg}}$$

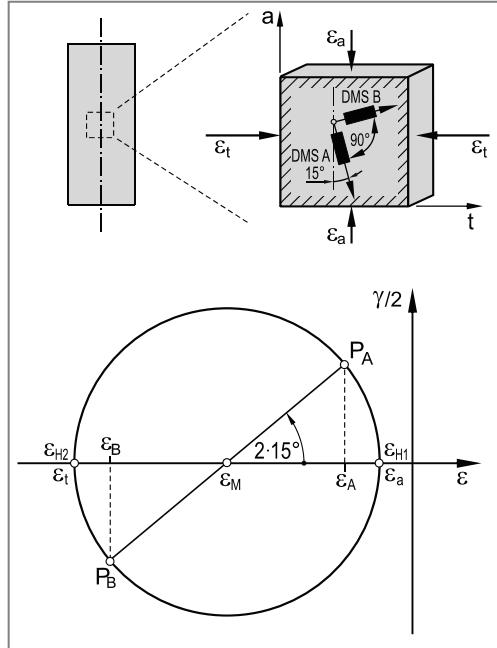
Lösung zu Aufgabe 2

Berechnung des Durchmesserverhältnisses

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{67,3 \text{ mm}}{67 \text{ mm}} = 1,005 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

Die Schnittflächen mit der Axial- und Tangentialrichtung als Normale sind schubspannungsfrei (nur Innendruck). Daher erfährt ein achsparalleles Flächenelement auch keine Schiebung (Winkelverzerrung). Die Bildpunkte P_a und P_t , welche die Verformungen mit der Axial- bzw. Tangentialrichtung als Bezugsrichtung repräsentieren, fallen mit der ε -Achse zusammen, d. h. die Axial- und die Tangentialrichtung sind gleichzeitig Hauptdehnungsrichtungen. Der Mohrsche Verformungskreis lässt sich damit entsprechend der Abbildung auf einfache Weise konstruieren.

Die Bildpunkte P_A und P_B , welche die Verformungen mit der A- bzw. B-Richtung als Bezugsrichtung repräsentieren, erhält man durch Abtragen der Richtungswinkel $2 \cdot 15^\circ$ bzw. $2 \cdot 15^\circ + 180^\circ$ ausgehend von der nunmehr bekannten Axialrichtung (gleicher Drehsinn zum Lageplan).



Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohrschen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2} = \frac{-0,1664\% + (-0,6129\%)}{2} = -0,38965\%$$

$$R = \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_M}{\cos(2 \cdot 15^\circ)} = \frac{-0,1664\% - (-0,38965\%)}{\cos(2 \cdot 15^\circ)} = 0,25779\%$$

Berechnung der Dehnungen in Tangential- und Axialrichtung (ε_t und ε_a)

$$\varepsilon_a = \varepsilon_M + R = -0,38965\% + 0,25779\% = -0,13186\%$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_M - R = -0,38965\% - 0,25779\% = -0,64744\%$$

Berechnung der Spannungen in Tangentialrichtung durch Anwendung des Hookeschen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_a) = \frac{72\,000 \text{ N/mm}^2}{1 - 0,33^2} \cdot (-0,64744\% + 0,33 \cdot (-0,13186\%)) \cdot 10^{-3}$$

$$= -55,83 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Innendrucks p_i (dünnwandiger Druckbehälter)

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s}$$

$$p_i = |\sigma_t| \cdot \frac{2 \cdot s}{d_i} = 53,83 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{2 \cdot 0,15 \text{ mm}}{67 \text{ mm}} = 0,25 \text{ N/mm}^2 = 0,25 \text{ MPa}$$

b) Berechnung der Lastspannungen

Aus Innendruck:

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} = 0,3 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{67 \text{ mm}}{2 \cdot 0,15 \text{ mm}} = 67 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_a = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} = \frac{67 \text{ N/mm}^2}{2} = 33,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_r = -\frac{p_i}{2} = -\frac{0,3 \text{ N/mm}^2}{2} = -0,15 \text{ N/mm}^2$$

Aus Druckkraft:

$$\sigma_d = -\frac{F_d}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)}$$

Die Druckspannung σ_d aus der unbekannten Druckkraft F_d überlagert sich linear der Axialspannung aus Innendruck, so dass die gesamte Axialspannung kleiner wird, im Vergleich zur Radialspannung. Es folgt dann für die Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_1 = \sigma_t$$

$$\sigma_3 \equiv \sigma_a + \sigma_d = \sigma_a + \frac{F_d}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)}$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

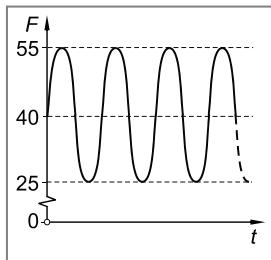
$$\sigma_t - \left(\sigma_a + \frac{F_d}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} \right) = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\frac{F_d}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \sigma_t - \sigma_a - \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\begin{aligned}F_d &= \frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2) \cdot \left(\sigma_t - \sigma_a - \frac{R_{p0,2}}{S_F} \right) \\&= \frac{\pi}{4} \cdot (67,3^2 - 67^2) \text{mm}^2 \cdot \left(67 \text{ N/mm}^2 - 33,5 \text{ N/mm}^2 - \frac{120 \text{ N/mm}^2}{1,20} \right) \\&= -\mathbf{2104,3 \text{ N}}$$

Lösung zu Aufgabe 3

a)



Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_z \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{F_1 + F_2}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2} \cdot \pi \cdot (d_a^2 - d_i^2)}{4 \cdot (F_1 + F_2)}$$

$$= \frac{410 \text{ N/mm}^2 \cdot \pi \cdot (40^2 - 30^2) \text{ mm}^2}{4 \cdot (40000 + 15000) \text{ N}} = 4,10 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Berechnung der Sicherheit gegen Bruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_z \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{F_1 + F_2}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{R_m}{S_B}$$

$$S_B = \frac{R_m \cdot \pi \cdot (d_a^2 - d_i^2)}{4 \cdot (F_1 + F_2)}$$

$$= \frac{540 \text{ N/mm}^2 \cdot \pi \cdot (40^2 - 30^2) \text{ mm}^2}{4 \cdot (40000 + 15000) \text{ N}} = 5,40 \quad (\text{ausreichend, da } S_B > 2,0)$$

Berechnung der Mittelspannung

$$\sigma_m = \frac{F_1}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{40000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (40^2 - 30^2) \text{ mm}^2} = 72,76 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Spannungsamplitude

$$\sigma_a = \frac{F_a}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{15000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (40^2 - 30^2) \text{ mm}^2} = 27,28 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$C_{O\sigma} = 0,85$ (aus Aufgabenstellung)

Berechnung der korrigierten Biegewechselfestigkeit

$$\sigma_{zdW}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{zdW} = 0,85 \cdot 180 \text{ N/mm}^2 = 153 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{zdW}^* \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}} = 153 \text{ N/mm}^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{72,76 \text{ N/mm}^2}{540 \text{ N/mm}^2}} = 142,32 \text{ N/mm}^2$$

Anmerkung: Das Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh entsprechend Bild 13.33 (Seite 275 im Lehrbuch) darf nur für duktile Stähle angewandt werden.

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_a \leq \sigma_{a \text{ zul}}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{AD}^*}{\sigma_a} = \frac{142,32 \text{ N/mm}^2}{27,28 \text{ N/mm}^2} = 5,22 \quad (\text{ausreichend, da } S_D > 2,50)$$

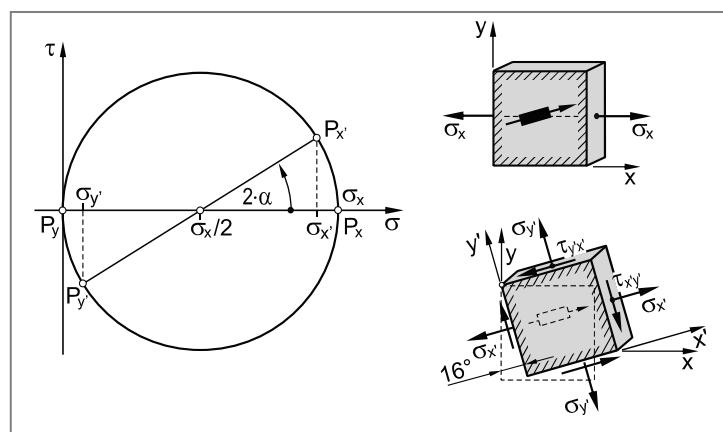
c) Berechnung der Spannung in Längsrichtung (Zugrichtung)

$$\sigma_x = \frac{F_1 + F_2}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{40000 \text{ N} + 15000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (40^2 - 30^2) \text{ mm}^2} = 100,04 \text{ N/mm}^2$$

Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises

Zur Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises benötigt man die Spannungen in zwei zueinander senkrechten Schnittflächen. Bekannt sind die Spannungen in den Schnittflächen mit der x- und der y-Richtung als Normale.

Eintragen der entsprechenden Bildpunkte P_x ($\sigma_x \mid 0$) und P_y ($0 \mid 0$). P_x und P_y repräsentieren die Spannungen in den Schnittflächen mit der x- und der y-Richtung als Normale.



Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, liegen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser. Damit ist der Mohrsche Spannungskreis festgelegt (siehe Abbildung).

Die Bildpunkte $P_{x'}$ und $P_{y'}$, welche die Spannungen in den Schnittflächen mit der x' - bzw. y' -Richtung als Normale repräsentieren, erhält man ausgehend vom Bildpunkt P_x , durch Abtragen der Richtungswinkel $2 \cdot \alpha$ bzw. $2 \cdot \alpha + 180^\circ$, (gleicher Drehsinn zum Lageplan).

Aus dem Mohrschen Spannungskreis folgt für die Normalspannungen $\sigma_{x'}$ und $\sigma_{y'}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha) \\ &= \frac{100,04 \text{ N/mm}^2}{2} \cdot (1 + \cos(2 \cdot 16^\circ)) = 92,44 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha) \\ &= \frac{100,04 \text{ N/mm}^2}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot 16^\circ)) = 7,60 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Berechnung der Dehnung in x' -Richtung (Messrichtung des DMS) durch Anwendung des Hookeschen Gesetzes für den zweiachsigen Spannungszustand

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} \equiv \varepsilon_{\text{DMS}} &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{x'} - \mu \cdot \sigma_{y'}) = \frac{92,44 \text{ N/mm}^2 - 0,33 \cdot 7,60 \text{ N/mm}^2}{72\,000 \text{ N/mm}^2} \\ &= 0,001249 = \mathbf{1,249 \%}\end{aligned}$$

d) Berechnung der maximalen Mittelspannung

$$\sigma_{m \max} = \alpha_k \cdot \sigma_{mn} = 1,4 \cdot 72,76 \text{ N/mm}^2 = 101,86 \text{ N/mm}^2 \quad (\sigma_{mn} = 72,76 \text{ N/mm}^2)$$

Berechnung der maximalen Spannungsamplitude

$$\sigma_{a \max} = \beta_k \cdot \sigma_{an} = 1,25 \cdot 27,28 \text{ N/mm}^2 = 34,10 \text{ N/mm}^2 \quad (\sigma_{an} = 27,28 \text{ N/mm}^2)$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{zdW}^* \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_{m \max}}{R_m}} = 153 \text{ N/mm}^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{101,86 \text{ N/mm}^2}{540 \text{ N/mm}^2}} = 137,82 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{a \max} \leq \sigma_{a \text{ zul}}$$

$$\sigma_{a \max} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{AD}^*}{\sigma_{a \max}} = \frac{137,86 \text{ N/mm}^2}{34,10 \text{ N/mm}^2} = \mathbf{4,04} \quad (\text{ausreichend, da } S_D > 2,50)$$

Anhang 7: Englische Fachausdrücke

Deutsch - Englisch

A		Betriebsfestigkeit	structural durability
Abscherspannung	shear stress	Betriebsfestigkeitsversuch	fatigue test,
Abscherung	shearing	Betriebsstörung	endurance test
Achse	shaft, axle		interruption, disturbance
Alterung	ageing, aging	Betriebsverhalten	operating behaviour
Aluminium	aluminium	Beulen	buckling
Amplitude	amplitude	Bewegung	motion
Amplitudenverhältnis	amplitude ratio	Bezugssystem	frame of reference
Anfälligkeit	susceptibility	Biegelinie	deflection curve
Anisotropie	anisotropy	Biegemoment	bending moment
Anriss	incipient crack	Biegespannung	bending stress
Antriebswelle	output shaft	Biegesteifigkeit	bending stiffness
Aufhärtungsriß	age-hardening crack	Biegeversuch	bending test
Auflager	bearing	Biegewechselfestigkeit	bending fatigue strength
Ausdehnungskoeffizient	expansion coefficient	Biegung	bending
Ausfallwahrscheinlichkeit	failure probability	- gerade	ordinary bending
Auslenkung	excursion	- reine	pure bending
Austenit	austenite	- schiefe	oblique bending
Axialspannung	axial stress	Bindung	binding
		- chemische	chemical bond
		- atomare	atomic bond
		Bindungsenergie	nuclear binding energy
B			
Balken	beam	Blech	sheet (metal)
- beidseitig gelenkig	simple beam	Blechdicke	plate thickness
gelagerter		Blei	lead
- einseitig eingespannter	cantilever beam	bohren	drill
- gekrümmter	curved beam	Bohrloch	bore-hole
- gerader	straight beam	Bohrsches Atommodell	Bohr atom model
Balkentheorie	theory of beams	Bohrung	cylindrical bore-hole
Baustahl	construction steel, mild steel	Bredtsche Formel	Bredt's formula
Bauteil-Wöhlerkurve	structural S-N-curve	Bruch	fracture
Bauteil	component	Bruchdehnung	percentage elongation after fracture
Beanspruchbarkeit	load capacity	Brucheinschnürung	percentage reduction of area after fracture
Beanspruchung	load	Bruchmechanik	fracture mechanics
Behälter	vessel, boiler	Bruchstelle	location of rupture
Behälterstützen	vessel nozzle	Bruchwahrscheinlichkeit	fracture probability
Beispiel	example	Bruch-Wöhlerkurve	fracture S-N-curve
Belastung	load	Bruchzähigkeit	fracture toughness
benachbart	adjacent	Brückenschaltung	bridge circuit
Berechnungsformel	formula		
Bereich	region, area, domain		
Beschädigung	damage		
Beschichtung	coating		
Beton	concrete		
Betrag	amount, quantity		
Betrieb	operation, in service	Curietemperatur	Curie temperature
Betriebsbedingung	operation condition, service condition		
Betriebsdaten	operating data		

D		E	F
Dampfkessel	steam boiler	Einkristall	single crystal
Dauerfestigkeit	fatigue strength, fatigue limit	Einsatzhärten	case-hardening
Dauerfestigkeitsprüfung	fatigue test, endurance test	Einschluss	inclusion
Dehgrenze	proof stress	Einschnürung	reduction of area
Dehnung, technische	strain	Einschnürdehnung	percentage elongation
Dehnungsmessstreifen	strain gauge(s)	Einzelkraft	after reduction of area
Dehnungsmesstechnik	strain measurement	Eisen	concentrated load
Dehnungszustand, ebener	plane strain state	Eisenblech	iron
Dekade	decade	Eisenrost	iron sheet
denitrieren	denitrify	Elastizität	iron rust
Determinante	determinant	Elastizitätsgrenze	elasticity
Dicke	thickness	Elastizitätsmodul	elastic limit, limit of elasticity
dickwandig	thick-walled	Elektron	Young's modulus
Diffusion	diffusion	Element	electron
Dimensionieren	dimensioning	Elementarteilchen	element
dimensionslos	dimensionless	Ellipse	elementary particle
Dose	can, box, case	elliptisch	ellipse
Draht	wire	Empfindlichkeit	elliptic(al)
Drahtseil	wire rope	Erdanziehung	sensitivity, suscepti-
drehbar	rotatable	Ermüdungsbruchfläche	bility
Drehbewegung	rotation	Ermüdungsfestigkeit	gravitation
Drehsinn	sense of rotation	Ermüdungsriß	fatigue
Drehwinkel	angle of revolution	Ermüdungsrißwachstum	fracture surface
dreiachsig	triaxial	Ermüdungstest	fatigue strength
Dreieck	triangle	Ermüdungsverhalten	fatigue crack
Druck (mech.)	compression	Erstarrungsriss	fatigue crack growth
Druck (phys.)	pressure	erwärmern	fatigue test,
Druckbehälter	pressure vessel	erweichen	endurance test
Druckfestigkeit	compressive strength	Eulersche Knickfälle	fatigue behaviour
Druckkraft	compressive force	Eulersche Kurve	solidification crack
Druckleitung	pressure pipe	Exponent	heating, warming
Druckspannung	compressive stress	Exponentialgesetz	soften
Druckversuch	compression test	Extremwert	Euler's buckling load
duktil	ductile	Extrusion	Euler's curve
Duktilität	ductility, plasticity	Exzentrizität	exponent
dünn	thin		exponential law
dünnewandig	thin-walled		extreme value,
Durchbiegung	deflection		extremum
Durchläufer	run through specimen		extrusion
Durchmesser	diameter		eccentricity
E		F	
Ebene	plane	Faser, neutrale	neutral axis
Eigenfrequenz	natural frequency	Faserverbundwerkstoff	fiber composite
Eigenspannung	residual stress	faserverstärkt	material
Eigenspannungs- empfindlichkeit	residual stress sensi- tivity	Fehler (Irrtum)	fiber-reinforced
einachsig	uniaxial	Fehler (Werkstoff)	error, mistake
eingespannt	clamped, built-in	Feinkorn	defect, flaw, void
Einhüllende	envelope	Feinkornbaustahl	fine grain
		Ferrit	fine-grained
		Ferritkorn	structural steel
			ferrite
			ferrite grain

fest	solid	Graphik	graph, graphik(al)
Festigkeit	strength, resistance		representation
Festigkeitsrechnung	calculation of strength	Graphit	graphite
Festigkeitshypothese	failure theory	Grenzlast	limit load,
Festigkeitsprüfung	strength test		maximum charge
Finite-Element-Methode	finite element method	Grenzschlankheitsgrad	slenderness ratio limit
Flächenelement	surface element	Grenzschwingspielzahl	maximum numbers of load cycles
Flächenmoment	moment of an area		quantity
- axiales, 2. Ordnung	second moment of an area, areal moment of inertia	Größe	influence of size
- gemischtes	product moment of an area	Größeneinfluss	size factor
- polares	polar second moment of an area	Größenfaktor	basic load types
- 1. Ordnung	first moment of an area	Grundbelastungsarten	cast iron
- 2. Ordnung	second moment of an area	Gusseisen	grey cast iron,
Flächennormale	surface normal	Gusseisen mit Lamellen-graphit	cast iron with lamellar graphite
Flächenschwerpunkt	centroid		
Flansch	flange, collar, nozzle		
Fließbeginn	yield point		
Fließspannung	yield stress		
flüssig	liquid		
Formänderungsenergie	strain energy		
Freiheitsgrad	degree of freedom		
freischneiden	isolate		
freitragend	self-contained		
Frequenz	frequency		

G

Gefüge	microstructure	H	microcrack
Gefügebestandteil	structural component		semi-finished product
Gegenuhrzeigersinn	counterclockwise		hardening
Gelenk	joint, hinge		abundance distribution
Gerade	straight line		principal axis
Geschwindigkeit	velocity		principal strain
Gestaltänderungsenergie	strain energy		principal strain direction
Gestaltänderungsenergie-hypothese	strain energy theory		principal moment of area
Gewicht	weight		principal normal stress
Gewinde	thread		principal stress direction
Gießen	cast, casting		
Gleichgewicht	equilibrium		
Gleichgewichtsbedingung	equilibrium condition		
Gleichmaßdehnung	percentage elongation before reduction of area		
Gleichung	equation		
Glühen	annealing		
Glühtemperatur	annealing temperature		
Goodman Gerade	Goodman's line		
Gradient	gradient		

H

Haarriss	microcrack
Halbzeug	semi-finished product
Härten	hardening
Häufigkeitsverteilung	abundance distribution
Hauptachse	principal axis
Hauptdehnung	principal strain
Hauptdehnungsrichtung	principal strain direction
Hauptflächenelement	principal moment of area
Hauptnormalspannung	principal normal stress
Hauptspannungsrichtung	principal stress direction

Hauptschubspannung	principal shearing stress
Hauptspannung	principal stress
Hauptspannungsebene	principal stress plane
Hauptspannungselement	principal stress element
Hebel	lever
Hebelarm	lever arm
Heißriss	hot crack
Hochdruckbehälter	high pressure vessel
hochfest	high-resistant
hochlegiert	high-alloyed
Höchstlast	maximum load
Hohlkugel	hollow sphere
Hohlzylinder	hollow cylinder
homogen	homogeneous
Hooke'sche Gerade	Hooke's line
Hooke'sches Gesetz	Hooke's law
Hüllkurve	envelope
hydraulisch	hydraulic
hydrostatischer Druck	hydrostatic pressure
hydrostatischer Spannungszustand	hydrostatic stress state
Hypothese	theory

I	L
Innendruck	interior pressure
Innendurchmesser	internal diameter
Innenfläche	inner surface
instabil	unstable
Integral	integral
Intrusion	intrusion
isotrop	isotropic
Invariante	invariant
K	M
kaltgewalzt	cold rolled
Kaltverfestigung	cold work hardening
Kaltverformbarkeit	cold formability
Kaltverformung	cold forming
Kaltziehen	cold (wire) drawing
Kerbe	notch
Kerbempfindlichkeit	notch sensitivity
Kerbgrund	notch root
Kerbstelle	notch point
Kerbwirkung	notch sensitivity
Kerbwirkungszahl	stress concentration factor
Kessel	vessel, boiler
Kette	chain
Knetlegierung	wrought alloy
Knicken	buckling
Knickkraft	buckling load
Knickspannung	buckling stress
Koeffizient	coefficient
Konstruktion	construction, building-up
Koordinate	coordinate
Korngrenze	grain boundary
Kornwachstum	grain growth
Korrosion	corrosion
Korrosionsermüdung	corrosion fatigue
Korrosionsriss	corrosion crack
Korrosionsrissbildung	corrosion cracking
Kraft	force
- äußere	extrenal force
- innere	internal force
Kraftvektor	force vector
Kraft-Verlängerungs-Diagramm	load-elongation-diagram
Kreisquerschnitt	circular cross-section
Kreisring	circular disk
Kreisrohr	circular tube
Kriechen	creep
Kristallgitter	crystal lattice
Krümmung	curvature
Krümmungsradius	radius of curvature
Kugelbehälter	spherical tank
Kunststoff	plastics
L	
Lager	bearing
Lagerung, gelenkig	pin connection
Last	load
Lastebene	load plane
Lastspielzahl	number of load cycles
Lebensdauer	fatigue life, product life
Lebensdauervorhersage	(fatigue) life prediction
Legierung	alloy
Lehrsatz	theorem, principle
logarithmisch	logarithmic(al)
Loslager	roller support
M	
Makroriss	macrocrack
Maschinenbau	mechanical engineering
Masse	mass
Maßeinheit	unit
Massenpunkt	point mass
Massenträgheitsmoment	axial moment of inertia
Material	material
Materialeinsparung	saving of material
Materialkonstante	material property
Materialprüfung	material test
Mechanik	mechanics
mehrachsig	multiaxial
Metallkunde	metallurgy
Metallography	metallography
Mikroriss	microcrack
Mittelpunkt	centre, center (am.)
Mittelspannung	mean stress
Mittelspannungs-empfindlichkeit	mean stress susceptibility
Modell	model
Mohrscher Spannungskreis	Mohr's stress circle
Mohrscher Verformungskreis	Mohr's strain circle
Mutter (für Schraube)	nut
N	
Nichteisenmetall	non-ferrous metal
Neigungsexponent	inclination exponent
Nennspannung	nominal stress
neutrale Faser	neutral axis
niedriglegiert	low-alloyed
Niet	rivet
Nietverbindung	rivet joint
Normalkraft	normal force
Normalspannung	normal stress
Normalspannungs-hypothese	maximum principle stress theory

Nulllinie	zero line, base line	rechteckig	rectangular
numerisch	numerical	Rechte-Hand-Regel	right-hand-rule
Nut	notch, slot	Resultierende	resultant
O			
Oberfläche	surface	Riss	crack
Oberflächenrauigkeit	surface roughness	Risseinleitung	crack initiation
Oberspannung	maximum stress	Risskeimbildung	crack nucleation
P			
Periode	period	Risswachstum	crack propagation, crack growth
perlitisch	perlitic	Rohr	tube
phasengleich	in phase	- dickwandiges	thick-walled tube
Phasengleichheit	phase coincidence	- dünnwandiges	thin-walled tube
Phasenunterschied	phase difference		
Phasenverschiebung	phase displacement, phase shift		
plastisch	plastic	S	
Plastizität	plasticity	Satz von Pythagoras	Pythagoras theorem
Platte	plate	Satz von Steiner	parallel axis theorem
Plattierung	cladding	Schaden	damage
Poissonsche Zahl	Poisson's number	Schadenfall	failure
polares Flächenmoment	polar second moment of area	Scherbruch	shear fracture
Polarkoordinaten	polar coordinates	Scherfestigkeit	shear strength
Probe(körper)	specimen	Scherung	shear strain
Proportionalität	proportionality	Scherversuch	shear(ing) test
Proportionalitätsgrenze	limit of proportionality	Schiebung	shear strain
Prüfdauer	test duration	Schiebungsbruch	shear fracture
Prüffrequenz	test frequency	Schlankheitsgrad	slenderness ratio
Q			
Querkontraktionszahl	Poisson's ratio	Schnittfläche	intersection
Querkraft	shear(ing) force	Schnittgrößen	internal forces and moments
Querkraftschub	shear in beams	Schnittlinie	intersection line
Querkraftverlauf	shear force distribution	Schnittprinzip	method of section
Querschnitt	cross section	Schnittpunkt	point of intersection
Querschnittsfläche	cross-sectional area	Schraube	screw
Quetschgrenze	compression limit	Schraubverbindung	screw connection
R			
Radialkomponente	radial component	Schub	shear
Radialspannung	radial stress	Schubfluss	shear flow
Radius	radius	Schubmittelpunkt	shear center
Randfaser	extreme fiber	Schubmodul	shear modulus, modulus of rigidity
Randschicht	peripheral layer, exterior layer	Schubspannung	shear(ing) stress
Rauigkeit	roughness	Schubspannungs- hypothese	maximum shear
Raumtemperatur	room temperature	Schubspannungs- verteilung	stress theory
Rechteck	rectangle	Schubverformung	distribution of shearing stress
		Schweißeigenspannung	shear strain
		Schweißgut	residual welding stress
		Schweißkonstruktion	weld material
		Schweißnaht	welded structure
		Schwerkraft	weld(ing) seam, welded joint
		Schwerpunkt	weight force
		Schwingbeanspruchung	center of mass, center of gravity
		Schwingfestigkeit	dynamic load
			fatigue strength

Schwingfestigkeitsuntersuchung	fatigue test, endurance test	Streckgrenze - obere - untere	yield strength upper yield strength lower yield strength
Schwingprüfmaschine	fatigue testing machine	Stutzen	nozzle
Schwingspiel	load cycle	Symmetrie	symmetry
Schwingspielfrequenz	load cycle frequency	Symmetriearchse	symmetry axis, axis of symmetry
Schwingspielzahl	number of load cycles	symmetrisch	symmetric(al)
Schwingungsamplitude	amplitude of oscillation		
Schwingungsform	mode of oscillation		
Schwingungsfrequenz	frequency of oscillation		
Schwingungsrisskorrosion	corrosion fatigue		
Schwingungsstreifen	fatigue striation(s)		
Seil	rope, cable	Tabelle	table
senkrecht	perpendicular	tangential	tangential
Sicherheitsbeiwert	safety factor	Tangentialspannung	circumferential stress, hoop stress
Sicherheitsfaktor	safety factor	Temperatur	temperature
Spannung, mechanisch	stress	Temperaturwechselbeanspruchung	thermal cycling
Spannungsarmglühen	stress-relieving	Torsion	torsion
Spannungsanalyse	stress analysis	Torsionsmoment	torsional moment, twisting moment
Spannungs-Dehnungs-Diagramm	stress-strain-diagram	Torsionsschwingung	torsional vibration
Spannungs-Dehnungskurve	stress-strain-curve	Torsionsstab	torsion bar
Spannungsgradient	stress gradient	Torsionssteifigkeit	torsion(al) stiffness, torsional rigidity
Spannungsnulllinie	neutral axis	Torsionsversuch	torsion test
Spannungstensor	stress tensor	Torsionswinkel	angle of twist
Spannungsvektor	stress vector	Träger	beam, support
Spannungsverhältnis	stress ratio	Trennbruch	cleavage fracture
Spannungszustand	state of stress	Turbinenwelle	turbine axis
- ebener	plane stress state		
spröde	brittle		
Stab	rod, bar		
Stabachse	rod axis		
stabil	stable		
stabiles Gleichgewicht	stable equilibrium		
Stabilität	stability		
Stahl	steel		
- austenitischer	austenitic steel	Überlagerung	superposition
- ferritisch-perlitisch	ferritic-perlitic steel	Überlastung	overload
- nicht rostend	stainless steel	Uhrzeigersinn	clockwise
- perlitisch	perlitic steel	Umfangsspannung	circumferential stress, hoop stress
Stahlguss	steel casting	Umgebungseinfluss	environmental influence
Stahlkonstruktion	steel structure	Umlaufbiegung	rotating bending
Stahlplatte	steel plate	Umrechnung	conversion
Stahlseil	steel rope, steel cable	Unabhängigkeit	independence
Stahlträger	steel beam	unendlich	infinite
Stange	bar, rod	Unterspannung	minimum stress
starr	rigid	unsymmetrisch	asymmetric(al)
starrer Körper	rigid body		
Statik	statics		
statisch bestimmt	statically determined	Vektor	vector
statisch unbestimmt	statically indeterminate	Verdrehung	twist
statisches Moment	static moment	Verdrehversuch	torsion test
Steinerscher Satz	parallel axis theorem	Verdrehwinkel	angle of twist
Stoffgesetz	material law		
Streckenlast	distributed force		

T

Tabelle	table
tangential	tangential
Tangentialspannung	circumferential stress, hoop stress
Temperatur	temperature
Temperaturwechselbeanspruchung	thermal cycling
Torsion	torsion
Torsionsmoment	torsional moment, twisting moment
Torsionsschwingung	torsional vibration
Torsionsstab	torsion bar
Torsionssteifigkeit	torsion(al) stiffness, torsional rigidity
Torsionsversuch	torsion test
Torsionswinkel	angle of twist
Träger	beam, support
Trennbruch	cleavage fracture
Turbinenwelle	turbine axis

U

Überlagerung	superposition
Überlastung	overload
Uhrzeigersinn	clockwise
Umfangsspannung	circumferential stress, hoop stress
Umgebungseinfluss	environmental influence
Umlaufbiegung	rotating bending
Umrechnung	conversion
Unabhängigkeit	independence
unendlich	infinite
Unterspannung	minimum stress
unsymmetrisch	asymmetric(al)

V

Vektor	vector
Verdrehung	twist
Verdrehversuch	torsion test
Verdrehwinkel	angle of twist

Verfestigung	strain hardening, work-hardening	Werkstoffverhalten	behaviour of material
Verformbarkeit	ductility, deformability	Widerstandsmoment	
- elastische	elasticity	- axiales	elastic section modulus
- plastische	ductility	Winkelhalbierende	bisector
Verformungsgröße	deformation quantity	Wirkungslinie	line of action
Verformungszustand	state of strain, state of deformation	Wöhlerkurve	S-N-curve
Vergleichsspannung	comparative stress, effective stress	Wöhlersuch	fatigue test, endurance test
Vergüten	tempering	Wölbung	curvature
Verhältnis	ratio		
Verlängerung	elongation		Z
Verminderung	decrease		
Verschiebung	displacement	zäh	ductile, tough
Verschiebungsvektor	displacement vector	Zahnrad	gear
Versetzung	dislocation	Zug(spannung)	tension
Versetzungsbewegung	dislocation movement	zugeordnete Schub- spannung	complementary shear stress
Versprödung	embrittlement	Zugfestigkeit	tensile strength
Versuch	test, experiment	Zugkraft	tensile force, tensile load
Versuchsaufbau	experimental setup	Zugprüfmaschine	tensile testing machine
vertikal	vertical	Zugschwellbeanspruchung	pulsating tensile stress
Vertikalkomponente	vertical component	Zugspannung	tensile stress
verträglich	compatible	Zugstab	tensile bar
Verträglichkeitsbedingung	compatibility condition	Zugversuch	tensile test
Verwölbung	warping	zweiachsig	biaxial
Verzerrung	strain	Zylinderkoordinaten	cylinder coordinates
Verzerrungstensor	strain tensor	zylindrisch	cylindric(al)
Verzerrungszustand	state of strain, state of deformation		
Vollbrücke	full bridge		
Volumendehnung	dilatation		
vorgespannt	prestressed		
Vorspannung	initial tension		
Vorzeichen	sign		
Vorzeichenkonvention	sign convention		

W

Wandstärke	wall thickness
Wärmeausdehnungskoeffizient	coefficient of thermal expansion
Wärmebehandlung	heat treatment
Wärmedehnung	thermal strain
Wärmespannung	thermal stress
Wasserstoffversprödung	hydrogen embrittlement
Wechselbeanspruchung	alternating stress
Wendepunkt	point of inflection
Werkstoff	material
Werkstoffeigenschaft	material property
Werkstoffermüdung	fatigue of material
Werkstoffkennwert	material property
Werkstoffkonstante	material constant
Werkstoffkunde	materials science
Werkstoffprüfung	testing of materials

Englisch - Deutsch

A	C
abundance distribution	Häufigkeitsverteilung
adjacent	benachbart
age-hardening crack	Aufhärtungsriß
ageing	Alterung (BE)
aging	Alterung (AE)
alternating stress	Wechselbeanspruchung
aluminium	Aluminium
amount	Betrag
amplitude of oscillation	Schwingungsamplitude
amplitude ratio	Amplitudenverhältnis
amplitude	Amplitude
angle of revolution	Drehwinkel
angle of twist	Torsionswinkel, Ver-drehwinkel
anisotropy	Anisotropie
annealing	Glühen
annealing temperature	Glühtemperatur
area	Bereich
areal moment of inertia	axiales Flächenmoment 2. Ordnung
asymmetric(al)	unsymmetrisch
atomic bond	atomare Bindung
austenite	Austenit
austenitic steel	austenitischer Stahl
axial moment of inertia	Massenträgheitsmoment
axial stress	Axialspannung
axis of symmetry	Symmetrieachse
axle	Achse
B	
bar	Stab, Stange
base line	Nulllinie
basic load types	Grundbelastungsarten
beam	Balken, Träger
bearing	Lager, Auflager
behaviour of material	Werkstoffverhalten
bending	Biegung
bending fatigue strength	Biegewechselfestigkeit
bending moment	Biegemoment
bending stiffness	Biegesteifigkeit
bending stress	Biegespannung
bending test	Biegeversuch
biaxial	zweiachsig
binding	Bindung
bisector	Winkelhalbierende
Bohr atom model	Bohrsches Atommmodell
boiler	Kessel, Behälter
bore-hole	Bohrloch
box	Dose
Bredt's formula	Bredtsche Formel
bridge circuit	Brückenschaltung
brittle	spröde
buckling	Knicken, Beulen
buckling load	Knickkraft
buckling stress	Knickspannung
built-in	eingespannt
cable	Seil
calculation of strength	Festigkeitsrechnung
can	Dose
cantilever beam	einseitig eingespannter Balken
case	Dose
case-hardening	Einsatzhärten
cast iron	Gusseisen
cast iron with lamellar graphite	Gusseisen mit Lamellen-graphit
cast	Gießen
casting	Gießen
chemical bond	chemische Bindung
center (AE)	Mittelpunkt
center of gravity	Schwerpunkt
center of mass	Schwerpunkt
centre (BE)	Mittelpunkt
centroid	Flächenschwerpunkt
chain	Kette
circular cross-section	Kreisquerschnitt
circular disk	Kreisring
circular tube	Kreisrohr
circumferential stress	Tangentialspannung, Umfangsspannung
cladding	Plattierung
clamped	eingespannt
cleavage fracture	Trennbruch
clockwise	Uhrzeigersinn
coating	Beschichtung
coefficient	Koeffizient
coefficient of thermal expansion	Wärmeausdehnungskoeffizient
cold (wire) drawing	Kaltziehen
cold formability	Kaltverformbarkeit
cold forming	Kaltverformung
cold rolled	kaltgewalzt
cold work hardening	Kaltverfestigung
collar	Flansch
comparative stress	Vergleichsspannung
compatibility condition	Verträglichkeitsbedingung
compatible	verträglich
complementary shear stress	zugeordnete Schubspannung
component	Bauteil
compression	Druck (mech.)

compression limit	Quetschgrenze	displacement	Verschiebung
compression test	Druckversuch	displacement vector	Verschiebungsvektor
compressive force	Druckkraft	distribution of shearing stress	Schubspannungsverteilung
compressive strength	Druckfestigkeit	distributed force	Streckenlast
compressive stress	Druckspannung	disturbance	Betriebsstörung
concentrated load	Einzelkraft	domain	Bereich
concrete	Beton	drill	böhrn
construction steel	Baustahl	ductile	duktil, zäh
construction	Konstruktion	ductility	Duktilität, plastische Verformbarkeit
conversion	Umrechnung	dynamic load	Schwingbeanspruchung
coordinate	Koordinate		
corrosion	Korrosion		
corrosion crack	Korrosionsriss		
corrosion cracking	Korrosionsrissbildung		
corrosion fatigue	Korrosionermüdung		
corrosion fatigue	Schwingungsrikkorrosion		
counterclockwise	Gegenuhzeigersinn	eccentricity	Exzentrizität
crack	Riss	effective stress	Vergleichsspannung
crack growth	Risswachstum	elastic limit	Elastizitätsgrenze
crack initiation	Risseinleitung	elastic section modulus	axiales Widerstandsmoment
crack nucleation	Risskeimbildung	elasticity	elastische Verformbarkeit
crack propagation	Risswachstum	elasticity	Elastizität
creep	Kriechen	electron	Elektron
cross section	Querschnitt	element	Element
cross-sectional area	Querschnittsfläche	elementary particle	Elementarteilchen
crystal lattice	Kristallgitter	ellipse	Ellipse
Curie temperature	Curietemperatur	elliptic(al)	elliptisch
curvature	Krümmung, Wölbung	elongation	Verlängerung
curved beam	gekrümpter Balken	embrittlement	Versprödung
cylinder coordinates	Zylinderkoordinaten	endurance test	Dauerfestigkeitsprüfung, Ermüdungsversuch, Schwingfestigkeitsversuch, Wöhlerversuch, Betriebsfestigkeitsversuch
cylindric(al)	zylindrisch		
cylindrical bore-hole	Bohrung		

D

damage	Beschädigung, Schaden	envelope	Einhüllende, Hüllkurve
decade	Dekade	environmental influence	Umgebungseinfluss
decrease	Verminderung	equation	Gleichung
defect	Fehler (Werkstoff)	equilibrium	Gleichgewicht
deflection	Durchbiegung	equilibrium condition	Gleichgewichtsbedingung
deflection curve	Biegelinie	error	Fehler (Irrtum)
deformability	Verformbarkeit	Euler's buckling load	Eulersche Knickfälle
deformation quantity	Verformungsgröße	Euler's curve	Eulersche Kurve
degree of freedom	Freiheitsgrad	example	Beispiel
denitrate	denitrieren	excursion	Auslenkung
denitrify	denitrieren	expansion coefficient	Ausdehnungskoeffizient
determinant	Determinante	experiment	Versuch
diameter	Durchmesser	experimental setup	Versuchsaufbau
diffusion	Diffusion	exponent	Exponent
dilatation	Volumendehnung	exponential law	Exponentialgesetz
dimensioning	Dimensionieren	exterior layer	Randschicht
dimensionless	dimensionslos	extreme fiber	Randfaser
dislocation	Versetzung	extreme value	Extremwert
dislocation movement	Versetzungsbewegung		

extremum	Extremwert	
extrenal force	äußere Kraft	
extrusion	Extrusion	
	F	G
failure	Schadenfall	gear
failure theory	Festigkeitshypothese	Goodman's line
failure probability	Ausfallwahrscheinlichkeit	gradient
fatigue behaviour	Ermüdungsverhalten	grain boundary
fatigue crack	Ermüdungsriss	grain growth
fatigue crack growth	Ermüdungsrisswachstum	graph
fatigue fracture surface	Ermüdungsbruchfläche	graphic(al) representation
fatigue life	Lebensdauer	graphite
fatigue limit	Dauerfestigkeit	gravitation
fatigue of material	Werkstoffermüdung	grey cast iron
fatigue strength	Dauerfestigkeit, Ermüdungsfestigkeit, Schwingfestigkeit	Zahnrad
fatigue striation(s)	Schwingungsstreifen	Goodman Gerade
fatigue test	Dauerfestigkeitsprüfung, Ermüdungsversuch, Schwingfestigkeits- versuch, Wöhlerver- such, Betriebsfestig- keitsversuch	Gradient
fatigue testing machine	Schwingprüfmaschine	Korngrenze
ferrite	Ferrit	Kornwachstum
ferrite grain	Ferritkorn	Graphik
ferritic-perlitic steel	ferritisch-perlitischer Stahl	Graphit
fiber composite	Faserverbundwerkstoff	Erdanziehung
fiber-reinforced	faserverstärkt	Gusseisen mit Lamellen- graphit
fine grain	Feinkorn	
fine-grained structural steel	Feinkornbaustahl	
finite element method	Finite-Element-Methode	
first moment of an area	Flächenmoment 1. Ordnung	
flange	Flansch	
flaw	Fehler (Werkstoff)	
force	Kraft	in phase
force vector	Kraftvektor	incipient crack
formula	Berechnungsformel	inclination exponent
fracture	Bruch	inclusion
fracture mechanics	Bruchmechanik	independence
fracture probability	Bruchwahrscheinlichkeit	infinite
fracture S-N-curve	Bruch-Wöhlerkurve	influence of size
fracture toughness	Bruchzähigkeit	initial tension
frame of reference	Bezugssystem	inner surface
frequency	Frequenz	integral
frequency of oscillation	Schwingungsfrequenz	interior pressure
full bridge	Vollbrücke	internal diameter
		internal force
		internal forces and moments
		H
		harden
		heat treatment
		heating
		high pressure vessel
		high-alloyed
		high-resistant
		hinge
		hollow cylinder
		hollow sphere
		homogeneous
		Hooke's law
		Hooke's line
		hoop stress
		hot crack
		hydraulic
		hydrogen embrittlement
		hydrostatic pressure
		hydrostatic stress state
		I
		in phase
		incipient crack
		inclination exponent
		inclusion
		independence
		infinite
		influence of size
		initial tension
		inner surface
		integral
		interior pressure
		internal diameter
		internal force
		internal forces and moments

interruption	Betriebsstörung	load cycles	
intersection	Schnittfläche	maximum principle	Normalspannungshypothesen
intersection line	Schnittlinie	stress theory	Schubspannungshypothesen
intrusion	Intrusion	maximum shear	Oberspannung
invariant	Invariante	stress theory	Mittelspannung
iron rust	Eisenrost	maximum stress	Mittelspannungs-
iron	Eisen	mean stress	empfindlichkeit
iron sheet	Eisenblech	mean stress susceptibility	Maschinenbau
isolate	freischneiden	mechanical engineering	Mechanik
isotropic	isotrop	mechanics	Metallography
J			
joint	Gelenk	metallography	Metallkunde
L			
lead	Blei	method of section	Schnittprinzip
lever	Hebel	microcrack	Mikroriss, Haarriss
lever arm	Hebelarm	microstructure	Gefüge
life prediction	Lebensdauervorhersage	mild steel	Baustahl
alloy	Legierung	minimum stress	Unterspannung
limit load	Grenzlast	mistake	Fehler (Irrtum)
limit of elasticity	Elastizitätsgrenze	mode of oscillation	Schwingungsform
limit of proportionality	Proportionalitätsgrenze	model	Modell
line of action	Wirkungslinie	modulus of rigidity	Schubmodul
liquid	flüssig	Mohr's strain circle	Mohrscher Verformungskreis
load	Beanspruchung, Last, Belastung	Mohr's stress circle	Mohrscher Spannungskreis
load capacity	Beanspruchbarkeit	moment of an area	Flächenmoment
load cycle frequency	Schwingspielfrequenz	motion	Bewegung
load cycle	Schwingspiel	multiaxial	mehrachsig
load plane	Lastebene		
load-elongation-diagram	Kraft-Verlängerungs-Diagramm		
location of rupture	Bruchstelle		
logarithmic(al)	logarithmisch		
low-alloyed	niedriglegiert		
lower yield strength	untere Streckgrenze		
M			
macrocrack	Makroriss	natural frequency	Eigenfrequenz
mass	Masse	neutral axis	neutrale Faser, Spannungsnulllinie
material	Werkstoff, Material	nominal stress	Nennspannung
material constant	Werkstoffkonstante	non-ferrous metal	Nichteisenmetall
material law	Stoffgesetz	normal force	Normalkraft
material property	Werkstoffeigenschaft, Werkstoffkennwert	normal stress	Normalspannung
material test	Materialprüfung	notch	Kerbe, Nut
materials science	Werkstoffkunde	notch point	Kerbstelle
maximum charge	Grenzlast	notch root	Kerbgrund
maximum load	Höchstlast	notch sensitivity	Kerbempfindlichkeit, Kerbwirkung
maximum numbers of	Grenzschwingspielzahl	nozzle	Flansch, Stutzen
O			
oblique bending		oblique bending	schiefe Biegung
		operating behaviour	Betriebsverhalten
		operating data	Betriebsdaten

operation	Betrieb	principal stress direction	Hauptspannungsrichtung
operation condition	Betriebsbedingung	principal stress plane	Hauptspannungsebene
ordinary bending	gerade Biegung	principal stress element	Hauptspannungselement
output shaft	Antriebswelle	principle	Lehrsatz
overload	Überlastung	product life	Lebensdauer
P			
parallel axis theorem	Satz von Steiner	product moment of an area	gemischtes Flächenmoment
percentage elongation after fracture	Bruchdehnung	proof stress	Dehngrenze
percentage elongation after reduction of area	Einschnürdehnung	proportionality	Proportionalität
percentage elongation before reduction of area	Gleichmaßdehnung	pulsating tensile stress	Zugschwellbeanspruchung
percentage reduction of area after fracture	Brucheinschnürung	pure bending	reine Biegung
period	Periode	Pythagoras theorem	Satz von Pythagoras
peripheral layer	Randschicht		
perlitic steel	perlitischer Stahl		
perpendicular	senkrecht		
phase coincidence	Phasengleichheit		
phase difference	Phasenunterschied		
phase displacement	Phasenverschiebung		
phase shift	Phasenverschiebung		
pin connection	Lagerung, gelenkig		
plane	Ebene		
plane strain state	ebener Dehnungszustand		
plane stress state	ebener Spannungszustand		
plastic	plastisch		
plasticity	Duktilität, Plastizität		
plastics	Kunststoff		
plate thickness	Blechdicke		
plate	Platte		
point mass	Massenpunkt		
point of inflection	Wendepunkt		
point of intersection	Schnittpunkt		
Poisson's number	Poissonsche Zahl		
Poisson's ratio	Querkontraktionszahl		
polar coordinates	Polarkoordinaten		
polar second moment of an area	polares Flächenmoment		
pressure	Druck (phys.)	room temperature	Raumtemperatur
pressure pipe	Druckleitung	rope	Seil
pressure vessel	Druckbehälter	rotatable	drehbar
prestressed	vorgespannt	rotating bending	Umlaufbiegung
principal axis	Hauptachse	rotation	Drehbewegung
principal moment of area	Hauptflächenelement	roughness	Rauigkeit
principal normal stress	Hauptnormalspannung	run through specimen	Durchläufer
principal shearing stress	Hauptschubspannung		
principal strain	Hauptdehnung		
principal strain direction	Hauptdehnungsrichtung		
principal stress	Hauptspannung		
Q			
quantity		Betrag, Größe	
R			
radial component		Radialkomponente	
radial stress		Radialspannung	
radius of curvature		Krümmungsradius	
radius		Radius	
ratio		Verhältnis	
rectangle		Rechteck	
rectangular		rechteckig	
reduction of area		Einschnürung	
region		Bereich	
residual stress		Eigenspannung	
residual stress sensitivity		Eigenspannungsempfindlichkeit	
resistance		Festigkeit	
resultant		Resultierende	
right-hand-rule		Rechte-Hand-Regel	
rigid		starr	
rigid body		starrer Körper	
rivet		Niet	
rivet joint		Nietverbindung	
rod		Stab, Stange	
rod axis		Stabachse	
roller support		Loslager	
room temperature		Raumtemperatur	
rope		Seil	
rotatable		drehbar	
rotating bending		Umlaufbiegung	
rotation		Drehbewegung	
roughness		Rauigkeit	
run through specimen		Durchläufer	

S			
safety factor	Sicherheitsbeiwert, Sicherheitsfaktor	state of stress static moment statical determined statical indetermined statics	Spannungszustand statisches Moment statisch bestimmt statisch unbestimmt
saving of material	Materialeinsparung	steam boiler	Statik Dampfkessel
Schweißeigenspannung	residual welding stress	steel	Stahl
screw	Schraube	steel beam	Stahlträger
screw connection	Schraubverbindung	steel cable	Stahlseil
second moment of an area	axiales Flächenmoment 2. Ordnung	steel casting	Stahlguss
self-contained	freitragend	steel plate	Stahlplatte
semi-finished product	Halbzeug	steel rope	Stahlseil
sense of rotation	Drehsinn	steel structure	Stahlkonstruktion
sensitivity	Empfindlichkeit	straight beam	gerader Balken
service condition	Betriebsbedingung	straight line	Gerade
shaft	Achse	strain	Dehnung, Verzerrung
shear	Schub	strain energy	Formänderungsenergie, Gestaltänderungs - energie
shear center	Schubmittelpunkt	strain energy theory	Gestaltänderungsenergiehypothese
shear flow	Schubfluss		Dehnungsmessstreifen
shear force distribution	Querkraftverlauf		Dehnungsmesstechnik
shear fracture	Scherbruch, Schiebungsbruch	strain gauge(s)	Verfestigung
shear in beams	Querkraftschub	strain measurement	Verzerrungstensor
shear modulus	Schubmodul	strain hardening	Festigkeit
shear strain	Scherung, Schiebung, Schubverformung	strain tensor	Festigkeitsprüfung
shear strength	Scherfestigkeit	strength	Spannung, mechanisch
shear stress	Abscherspannung	strength test	Spannungsanalyse
shearing	Abscherung	stress	Kerbwirkungszahl
shear(ing) force	Querkraft	stress analysis	
shear(ing) stress	Schubspannung	stress concentration	
shear(ing) test	Scherversuch	factor	
sheet (metal)	Blech	stress gradient	Spannungsgradient
sign	Vorzeichen	stress ratio	Spannungsverhältnis
sign convention	Vorzeichenkonvention	stress tensor	Spannungstensor
simple beam	beidseitig gelenkig gelagerter Balken	stress vector	Spannungsvektor
single crystal	Einkristall	stress-relieving	Spannungsglähen
size factor	Größenfaktor	stress-strain-curve	Spannungs-Dehnungskurve
slenderness ratio	Schiebungsbruch	stress-strain-diagram	Spannungs-Dehnungs-Diagramm
slenderness ratio limit	Grenzschlankheitsgrad		Gefügebestandteil
slot	Nut	structural component	Betriebsfestigkeit
S-N-curve	Wöhlerkurve	structural durability	Bauteil-Wöhlerkurve
soften	erweichen	structural S-N-curve	Überlagerung
solid	fest	superposition	Träger
solidification crack	Erstarrungsriss	support	Oberfläche
specimen	Probe(körper)	surface	Flächenelement
spherical tank	Kugelbehälter	surface element	Flächennormale
stability	Stabilität	surface normal	Oberflächenrauigkeit
stable	stabil	surface roughness	Anfälligkeit, Empfindlichkeit
stable equilibrium	stabiles Gleichgewicht	susceptibility	
stainless steel	nichtrostender Stahl		
state of deformation	Verformungszustand, Verzerrungszustand	symmetric(al)	
state of strain	Verformungszustand, Verzerrungszustand	symmetry	
		symmetry axis	Symmetrie Symmetriearchse

T	V
table	Tabelle
tangential	tangential
temperature	Temperatur
tempering	Vergüten
tensile bar	Zugstab
tensile force	Zugkraft
tensile load	Zugkraft
tensile strength	Zugfestigkeit
tensile stress	Zugspannung
tensile test	Zugversuch
tensile testing machine	Zugprüfmaschine
tension	Zug(spannung)
test	Versuch
test duration	Prüfdauer
test frequency	Prüffrequenz
testing of materials	Werkstoffprüfung
theorem	Lehrsatz
theory	Hypothese
theory of beams	Balkentheorie
thermal cycling	Temperaturwechselbeanspruchung
thermal strain	Wärmedehnung
thermal stress	Wärmespannung
thickness	Dicke
thick-walled	dickwandig
thick-walled tube	dickwandiges Rohr
thin	dünn
thin-walled	dünnwandig
thin-walled tube	dünnwandiges Rohr
thread	Gewinde
torsion	Torsion
torsion bar	Torsionsstab
torsion test	Torsionsversuch, Verdrehversuch
torsion(al) stiffness	Torsionssteifigkeit
torsional moment	Torsionsmoment
torsional rigidity	Torsionssteifigkeit
torsional vibration	Torsionsschwingung
tough	zäh
triangle	Dreieck
triaxial	dreiachsig
tube	Rohr
turbine axis	Turbinenwelle
twist	Verdrehung
twisting moment	Torsionsmoment
U	Z
uniaxial	einachsig
unit	Maßeinheit
unstable	instabil
upper yield strength	obere Streckgrenze

Literaturverzeichnis

- [1] **Läpple, V.; B. Drube, H.-G. Wittke, C. Kammer:**
Werkstofftechnik Maschinenbau
Verlag Europa-Lehrmittel, 1. Auflage 2007
- [2] **FKM-Richtlinie**
Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile aus Stahl, Eisenguss- und Aluminiumwerkstoffen
Hrsg: Forschungskuratorium Maschinenbau (FKM), Frankfurt/Main
VDMA-Verlag GmbH, Frankfurt/Main, 5. Auflage 2003
- [3] **Papula, L.:**
Mathematik für Ingenieure, Band 2
Vieweg Verlag, 11. Auflage 2007
- [4] **DIN 743-1:** Tragfähigkeitsberechnungen von Wellen und Achsen (10/2007)
Teil 1: Einführung, Grundlagen
Teil 2: Formzahlen und Kerbwirkungszahlen
Teil 3: Werkstoff-Festigkeitswerte
- [5] **Wellinger, K.; H. Dietmann:**
Festigkeitsberechnung - Grundlagen und technische Anwendung
Kröner-Verlag, 3. Auflage 1976
- [6] **Pilkey, W.D.; D.F. Pilkey:**
Peterson's Stress Concentration Factors
John Wiley & Sons, 3rd Edition 2008
- [7] **Young, W.C.; R.G. Budynas:**
Roark's Formulas for Stress and Strain
McGraw-Hill, 7th Edition 2002
- [8] **Muhs, D.; H. Wittel, D. Jannasch, J. Voßiek:**
Roloff/Matek Maschinenelemente. Normung, Berechnung, Gestaltung
Lehr- und Tabellenbuch
Vieweg Verlag, 18. Auflage 2007
- [9] **Berger, J.**
Technische Mechanik für Ingenieure - Band 2: Festigkeitslehre
Vieweg Verlag, 1994
- [10] **Hagn, L.; H.-J. Schüller:**
Analyse von Schadensfällen
in: Dahl, W.; W. Anton: Werkstoffkunde Eisen und Stahl, Band 2
Verlag Stahleisen mbH, Düsseldorf, S. 792 - 815
- [11] **Zammert, W.-U.:**
Betriebsfestigkeitsrechnung
Vieweg Verlag, 1985

- [12] **Buxbaum, O.; V. Grubisic, H. Huth, D. Schütz:**
Betriebsfestigkeit
Stahleisen-Verlag, 2. Auflage 1992
- [13] **Haibach, E.:**
Betriebsfestigkeit
Springer-Verlag, 3. Auflage 2006
- [14] **Cottin, D.; E. Puls:**
Angewandte Betriebsfestigkeit
Hanser-Verlag, 2. Auflage 1992
- [15] **Gudehus, H.; H. Zenner:**
Leitfaden für eine Betriebsfestigkeitsrechnung
Stahleisen-Verlag, 4. Auflage 1999
- [16] **Radaj, D.; M. Vormwald:**
Ermüdungsfestigkeit
Springer-Verlag, 3. Auflage 2007
- [17] **Schott, G.; M. Schaper, H. Worch:**
Werkstoffermüdung - Ermüdungsfestigkeit
Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 4. Auflage 1997
- [18] **Naubereit, H.; J. Weihert:**
Einführung in die Ermüdungsfestigkeit
Hanser-Verlag, 1999
- [19] **Fuchs, H. O.; R. J. Stephens:**
Metal Fatigue in Engineering
John Wiley, New York 1980
- [20] **Hück, M.; L. Thrainer, W. Schütz:**
Berechnung von Wöhlerlinien für Bauteile aus Stahl, Stahlguss und Grauguss - Synthetische Wöhler-Linien.
VDEh-Bericht Nr. ABF 11 (1981)
- [21] **Juvinal, R. C.:**
Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength
McGraw-Hill, New York 1967
- [22] **Issler, L; H. Ruß, P. Häfele:**
Festigkeitslehre - Grundlagen
Springer-Verlag, 2. Auflage 1997 (korr. Nachdruck 2006)
- [23] **Siebel, E.:**
Neue Wege der Festigkeitsrechnung
VDI-Zeitschrift 90 (1948), Nr. 5, S. 135 - 139
- [24] **Siebel, E.; H. Meuth:**
Die Wirkung von Kerben bei schwingender Beanspruchung
VDI-Zeitschrift 91 (1949), Nr. 13, S. 319 - 323

- [25] **Stieler, M:**
Untersuchungen über die Dauerschwingfestigkeit metallischer Bauteile bei Raumtemperatur, Dissertation TH Stuttgart, 1954
- [26] **Siebel, E.; M. Stieler:**
Ungleichförmige Spannungsverteilung bei schwingender Beanspruchung
VDI-Zeitschrift 97 (1955), Nr. 5, S. 121 - 126
- [27] **Dietmann, H:**
Zur Berechnung von Kerbwirkungszahlen
Konstruktion 37 (1985), Nr. 2, S. 67 - 71

Sachwortverzeichnis

0,01%-Dehngrenze → Elastizitätsgrenze	
0,2%-Dehngrenze	12
0,2%-Stauchgrenze	24
2%-Stauchgrenze	24

A

Abscherspannung, mittlere	46
Abscherung → Schub	
Anriss-Wöhlerkurve	254
Ausfallwahrscheinlichkeit	259
Axialspannung	207

B

Balken	28
Balkenachse	28
Bauteilfließkurve	145
Bauteil-Wöhlerkurve	252
Beanspruchbarkeit	1
Beanspruchung	1
Behälter	
- dickwandiger	213
- dickwandiger, elastischer Zustand	213
- dickwandiger, teilplastischer Zustand	227
- dickwandiger, vollplastischer Zustand	224
- dünnwandiger	207
- dünnwandiger, unter Außendruck	210
- dünnwandiger, unter Innendruck	207
- elastischer Außenring	228
- Spannungsverlauf i. d. Behälterwand	210
- unrunder	212
- unter Innen- und Außendruck	207
- vollplastischer Innenring	229
- zusammenfassende Tabellen	232
Bernoulli'sche Hypothese	29
Betriebsfestigkeit	250, 255
Betriebsfestigkeitsversuch	256
Biegefestigkeit	38
Biegefließgrenze	37
Biegeknickung	165
Biegewechselfestigkeit	261
Biegung	28
- gerade	28
- mit Schub- und Normalspannungen	195
- reine	29
- schiefe	171
- Spannungsermittlung, gerade Biegung	29
- Spannungsermittlung, schiefe Biegung	178

- Werkstoffkennwerte	37
- Werkstoffverhalten	37
- zulässige Spannung	38

Biegung, allgemeine → Biegung, schiefe	
Biegung, einachsige → Biegung, gerade	
Biegung, querkraftfreie → Biegung, reine	
Biegung, zweiachsige → Biegung, schiefe	
Bredtsche Formel, erste	201
Bruchbahn	250
Bruchdehnung, Definition	10
Brucheinschnürung, Definition	10
Bruchschubspannung	119
Bruchwahrscheinlichkeit → Ausfallwahrscheinl.	
Bruch-Wöhlerkurve	254

C

charakteristische Gleichung	79
-----------------------------------	----

D

Dauerfestigkeit	255
Dauerfestigkeitskennwerte	260
Dauerfestigkeitsschaubilder (DFS)	266
- DFS nach Smith	266
- DFS nach Haigh	269
- DFS nach FKM-Richtlinie	274
Dauerläufer	256
Durchläufer → Dauerläufer	
Dauerschwingfestigkeit → Dauerfestigkeit	
de Saint-Venant, Prinzip von	4
Dehngrenze	11
Dehnung, technische	5, 89
- Indizierung	90
- Vorzeichenregelung	89
Dehnungsmessstreifen	102
- aktiver	103
- passiver	103
Dehnungsmesstechnik	102
Dehnungs-Wöhlerkurve	254
Dehnungszustand, ebener	97
Deviationsmoment → Flächenmoment, gemischtes	
DMS → Dehnungsmessstreifen	
DMS-Rosette, Auswertung	101
Drillwiderstand	201
Druck	22
- Spannungsermittlung	22
- Werkstoffkennwerte	22

- Werkstoffverhalten	22
- zulässige Spannung	25
Druckbehälter → Behälter	
Druckfestigkeit.....	24
Druckfließgrenze → Quetschgrenze	
Druckspannung	22
Druckspannung-Stauchungs-Kurve	22
Druckversuch	22
Dynamische Stützziffer → Stützziffer, dyn.	

E

EDZ → Dehnungszustand, ebener	
Eigenspannungen	
- 1. Art	286
- 2. Art	286
- 3. Art	286
Eigenspannungseinfluss	286
Eigenspannungsempfindlichkeit	286
Eigenwertgleichung	80
Einschnürdehnung.....	9
Elastizität, nicht linear	15
Elastizitätsgesetze	107
Elastizitätsgrenze	8
- technische	8
Elastizitätsmodul.....	10, 15
E-Modul → Elastizitätsmodul	
Ermüdungsbruch	246
Ermüdungsbruchfläche	250
Ermüdungsfestigkeit	250
Ermüdungsgleitband	248
Ermüdungsriss	247
- Entstehungsmechanismus	247
Eulersche Knickfälle	159
Eulersche Knickkraft → Knickkraft	
Euler-Kurve	163
Extrusion	248

F

Feindehnungsdiagramm	12
Festigkeitshypothese	116
Flächenmoment	
- 1. Ordnung	171
- axiales, 2. Ordnung	31, 172
- axiales, Tabelle	33
- bei Drehung der Achsen	176
- bei Parallelverschiebung der Achsen	174
- polares, 2. Ordnung	52, 173
- polares, Tabelle	53
- gemischtes	173
Fließen	8
Folien-Dehnungsmessstreifen	102

Formänderung

- bei dreiachsigem SPZ	108
- bei einachsigem SPZ	107
- bei zweiachsigem SPZ	111
- durch Schubspannungen	108

Formkerbe

Formzahl

Formzahlendiagramm

Frequenzeinfluss

G

Geometrischer Größeneinfluss	280
Gestaltänderungsarbeit	126
Gestaltänderungsenergie	126
Gestaltänderungsenergiehypothese	126
- bei zweiachsigem Spannungszustand	127
- bei Zug, Druck, Biegung mit Torsion	127
- Grenzkurve für Werkstoffversagen	128
- in Hauptnormalspannungen	127
Gleichmaßdehnung	9
Gleitmodul → Schubmodul	
Gleitung	45
Goodman-Gerade	273
Grenzschlankheitsgrad	163
Grenzschwingspielzahl	256
Größeneinfluss	280
Größenfaktor	282
Grundbelastungsarten	2
- Übersicht	2
- Zusammenfassung	61

H

Halbbrücke	103
Hauptachse	176
Hauptachsensystem	176
Hauptdehnung	97
Hauptdehnungsrichtung	97
Hauptebene → Hauptspannungsebene	
Hauptflächenmoment	176
Hauptnormalspannung	72
Hauptnormalspannungsrichtung	72
Hauptrichtung → Hauptnormalspannungsrichtung	
Hauptschubspannung	73, 83
Hauptspannungselement	78
Hauptspannung → Hauptnormalspannung	
Hauptspannungsebene	73
Hauptspannungsrichtung → Hauptnormalspannungsrichtung	
Hohlkugel, dünnwandig	211
Hookesche Gerade	7

Hookesches Gesetz	7, 15
- bei ebenem Spannungszustand	111
- für Normalspannungen	15
- für Schubbeanspruchung	45
- verallgemeinert	108

I

Intrusion	248
Invariante	80

K

Kerbe, technische	138
- Auswirkung	139
- Bauteilverhalten	143
Kerbgrund	139
Kerbwirkung	138
- bei duktilen Werkstoffen	143
- bei spröden Werkstoffen	143
- bei statischer Beanspruchung	138
- bei schwingender Beanspruchung	288
Kerbwirkungszahl	288
Kesselformel	208
k-Faktor (für DMS).....	102
k-Faktor → Neigungsexponent	
Knickkraft	154
Knicklänge	161
Knickspannung	160
Knickspannungsdiagramm	163
Knickung	154
- bei außermittiger Belastung	154
- bei mittiger Belastung	158
- elastische	164
- plastische	164
- Spannungsermittlung	160
- zulässige Spannung	161
Korrosionsermüdung	287
Kraft-Verlängerungs-Diagramm.....	4
Kurzriss → Mikroriss	
Kurzzeitfestigkeit	254

L

Längsspannung → Axialspannung	
Lastebene	28
Lastspiel → Schwingspiel	
Lastspielzahl → Schwingspielzahl	
Lebensdauer	246
Lüders-Dehnung	8

M

Makroriss	249
Membranalogie	202
Mikroriss	248
Mikrostützwirkung, Konzept der	289
Mittelspannung	251
Mittelspannungseinfluss	266
Mittelspannungsempfindlichkeit	270
Mohrscher Spannungskreis	67, 70
- bei ebenem Spannungszustand.....	70
- bei dreiachsigem Spannungszustand	82
- Hauptkreis	82
- Mittelpunkt und Radius	71
- Konstruktion	71
- Nebenkreis	82
Mohrscher Verformungskreis	95
- Anwendungen	99
- Radius und Mittelpunkt	95
- Konstruktion	96
Mohrsche Versagenshypothese	120

N

Neigungsexponent	257
Nennspannung	140
neutrale Faser	30
Normalspannung	
- Definition	63
- Indizierung	64
- Vorzeichenregelung	64
Normalspannungshypothese	118
- bei zweiachsigem Spannungszustand	118
- bei Zug oder Biegung mit Torsion	119
- Grenzkurve für Werkstoffversagen	119
- in Hauptnormalspannungen	118
Nulllinie	180

O

Oberflächenfaktor	277
- Wirkung von Normalspannungen	277
- Wirkung von Schubspannungen	278
Oberflächenrauigkeit	277
Oberspannung	251

P

Plastische Stützziffer → Stützziffer, plastische Poisson-Zahl	16
Poissonsches Gesetz	16, 108
Proportionalitätsgrenze	8

Q

Quasi-statische Festigkeit → Kurzzeitfestigkeit	
Querdehnungsbehinderung	97
Querkontraktionszahl	11, 16
Querkraftschub	186
- Spannungsermittlung	186
- Spannungsverteilung	189
Querzahl → Querkontraktionszahl	
Quetschgrenze, natürliche	23

R

Radialspannung	207
Randschichteneinfluss	284
Randschichtfaktor	284
Rauheitsfaktor → Oberflächenfaktor	
Risseinleitung	247
Risskeimbildung	
- technisch	249
- physikalisch	248
Risswachstum, stabiles	248

S

Scherbruch	24, 119
Scherfestigkeit	47
Scherung → Schiebung	
Scherversuch	46
Schiebung	
- Definition	45
- Indizierung	90
- Vorzeichenregelung	89
Schiebungsbruch → Scherbruch	
Schlankheitsgrad	163
Schnittprinzip	3
Spannungsamplitude	251
Schub	44
- Spannungsermittlung	46
- Werkstoffkennwerte	46
- zulässige Spannung	47
Schubfluss	200
Schubmittelpunkt	192
Schubmodul	45
Schubspannung	
- Definition	44, 63
- durch Querkräfte bei Biegung	186
- Formänderung	45
- in dünnwandigen Profilträgern	190
- in geschweißten Profilträgern	193
- in genieteten Profilträgern	194
- Indizierung	64
- Vorzeichenregelung, allgemein	64

- Vorzeichenregelung, speziell	64
- zugeordnete	45, 65
Schubspannungshypothese	121
- bei zweiachsigem Spannungszustand	123
- bei Zug, Druck, Biegung mit Torsion	125
- Grenzkurve für Werkstoffversagen	125
- in Hauptnormalspannungen	121
Schubverformung	196
Schubverzerrung → Schiebung	
Schubwechselfestigkeit	261
Schwingbeanspruchung	
- Spannungsermittlung	263
- Kennwerte	261
Schwingbreite	251
Schwingfestigkeit	
- Definition	245, 250
- Einflussgrößen	265
- Einfluss von Eigenspannungen	286
- Einfluss der Mittelspannung	266
- Einfluss der Oberflächenrauigkeit	277
- Einfluss einer Oberflächenverfest.	284
- Einfluss der Proben-/Bauteilgröße	280
- Einfluss der Temperatur	283
- Frequenzeinfluss	287
Schwingspiel	251
Schwingspielfrequenz → Schwingungsfrequenz	
Schwingspielzahl	251
Schwingungsfrequenz	251
Schwingungsrißkorrosion → Korrosionsermüd.	
Schwingungsstreifen	250
Sicherheitsbeiwert	1, 61, 321
Spannung, Definition	4, 63
Spannungsanalyse, experimentelle	99
Spannungs-Dehnungs-Diagramm	5
- Grundtypen	6
- mit ausgeprägter Streckgrenze	8
- ohne ausgeprägte Streckgrenze	11
Spannungsgradient, bezogener	290
Spannungsgradientenansatz	289
Spannungsmechanischer Größeneinfluss	280
Spannungsnulllinie → Nulllinie	
Spannungstensor	75
Spannungsverhältnis	251
Spannungszustand	62
- dreiachsig	75
- ebener	68
- einachsig	65
- hydrostatisch	126
- zweiachsig	68
SPZ → Spannungszustand	
Stab	2
Statistischer Größeneinfluss	281
Stauchgrenze	23
Stauchung	89

Steiner, Satz von	36, 175
Streckgrenze	8
- obere	9
- untere	9
Strömungsanalogie	203
Stützfaktor → Stützziffer, dynamische	
Stützwirkung	37, 144
Stützziffer, dynamische	290
Stützziffer, plastische	145
Stützzahl → Stützziffer, plastische	

T

Tangentialspannung	207
Technologischer Größeneinfluss	281
Teilschwerpunktsatz	35
Temperatureinfluss	283
Temperaturfaktor	283
Tetmajer-Gleichung	164
Torsion	50
- beliebiger Vollquerschnitte	202
- dünnwandiger, geschl. Hohlprofile	200
- dünnwandiger, offener Hohlprofile	201
- nicht kreisförmiger Querschnitte	200
- reine	200
- Saint-Venantsche → Torsion, reine	
- Spannungsermittlung	50
- Verdrehwinkel	53
- Werkstoffkennwerte	54
- Werkstoffverhalten	54
- zulässige Spannung	56
Torsionsfestigkeit	55
Torsionsflächenmoment	201
Torsionsfließgrenze	55
Torsionsfunktion	202
Torsionsversuch	54
Torsionswiderstandsmoment	201
Trennbruch	24
Tresca-Sechseck	125

U

Überlebenswahrscheinlichkeit	259
Umfangsspannung → Tangentialspannung	
Unterspannung	251
Unrundheit, elliptische	212

V

Verdrehversuch → Torsionsversuch	
Verdrehwinkel	53
Verformungsgröße	89
Verformungszustand	88

- dreiachsig	97
- einachsig	97
- zweiachsig	97
Vergleichsspannung	116
Viertelbrücke	103
Vollbrücke	103

W

Wechselfestigkeit	260
Werkstoffermüdung	245
- Schadensfälle	246
- Werkstoffverhalten	252
Wheatstonesche Brücke	102
Widerstandsmoment	
- axiales	32
- polares	53
Winkelverzerrung → Schiebung	
Wöhler, August	252
Wöhlerdiagramm	252
Wöhlerkurve	252
- analytische Beschreibung	256
- Bereichseinteilung	254
- statistische Auswertung	258
- Typ I	254
- Typ II	254
Wöhlerlinie → Wöhlerkurve	
Wöhlersversuch	252
Wölbkrafttorsion	200

Z

Zeitfestigkeit	255
Zentrifugalmoment → Flächenmoment, gemischtes	
Zug	3
- Formänderung	15
- Spannungsermittlung	3
- Werkstoffkennwerte	7
- Werkstoffverhalten	4
- zulässige Spannung	13
Zug-Druck-Wechselfestigkeit	261
Zugfestigkeit	9
Zugspannung	4
Zugversuch	4