



---

# Oldenbourg Lehrbücher für Ingenieure

Herausgegeben von

Prof. Dr.-Ing. Helmut Geupel

---

---

Das Gesamtwerk

Assmann/Selke, Technische Mechanik  
umfasst folgende Bände:

Band 1: Statik (incl. Aufgaben)

Band 2: Festigkeitslehre

Band 3: Kinematik und Kinetik

Aufgaben zur Festigkeitslehre

Aufgaben zur Kinematik und Kinetik

---

---

# Technische Mechanik 2

---

Festigkeitslehre

---

von

Prof. Bruno Assmann und

Prof. Dr.-Ing. Peter Selke

---

17., überarbeitete Auflage

---

Oldenbourg Verlag München

---

---

**Prof. Bruno Assmann** lehrte über 30 Jahre lang an der Fachhochschule Frankfurt am Main. Sein Wissen und seine Erfahrungen aus der Lehre hat er in die drei Bände zur „Technischen Mechanik“ und die dazugehörigen Aufgabensammlungen einfließen lassen.

**Prof. Dr.-Ing. Peter Selke** lehrt seit 1992 Technische Mechanik, Maschinendynamik und Finite-Elemente-Methode an der Technischen Fachhochschule Wildau.

#### Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

© 2009 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH  
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München  
Telefon: (089) 4 50 51-0  
[oldenbourg.de](http://oldenbourg.de)

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Anton Schmid  
Herstellung: Anna Grosser  
Coverentwurf: Kochan & Partner, München  
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier  
Druck: Grafik + Druck, München  
Bindung: Thomas Buchbinderei GmbH, Augsburg

ISBN 978-3-486-58791-3

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>IX</b>
<b>Verwendete Bezeichnungen</b>	<b>XI</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Aufgabe der Festigkeitsberechnung .....	1
1.2 Einiges zur Lösung von Aufgaben .....	4
<b>2 Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1 Einführung .....	7
2.2 Normal- und Schubspannungen .....	8
2.3 Der einachsige Spannungszustand .....	9
2.3.1 Spannung, Formänderung, das HOOKEsche Gesetz .....	9
2.3.2 Das Festigkeitsverhalten verschiedener Werkstoffe .....	12
2.4 Der ebene Spannungszustand für Schubspannung.....	15
2.5 Die Belastungsfälle nach BACH .....	16
2.6 Die Dauer-, Zeit- und Betriebsfestigkeit .....	19
2.7 Die Kerbwirkung .....	22
2.8 Die Bauteilsicherheit .....	25
2.9 Zusammenfassung .....	28
<b>3 Zug und Druck</b>	<b>31</b>
3.1 Einführung .....	31
3.2 Die Spannung .....	31
3.2.1 Schnitt senkrecht zur Achse.....	31
3.2.2 Beliebiger Schnitt .....	33
3.3 Die Formänderung.....	41
3.4 Die Formänderungsarbeit .....	51
3.5 Flächenpressung, Lochleibung .....	56
3.6 Zusammenfassung .....	58
<b>4 Biegung</b>	<b>61</b>
4.1 Einführung .....	61
4.2 Allgemeines .....	62
4.3 Die Grundgleichung der Biegung .....	64
4.4 Das Biegemoment und die Querkraft .....	77
4.4.1 Analytische Lösung für Träger auf zwei Stützen und eingespannten Träger	77
4.4.2 Rahmen .....	100

4.5	Axiale Flächenmomente und Widerstandsmomente .....	108
4.5.1	Flächenmomente einfacher Flächen für eine vorgegebene Achse .....	108
4.5.2	Umrechnung eines Flächenmoments auf eine parallele Achse (STEINERScher Satz) .....	110
4.5.3	Flächenmomente zusammengesetzter Flächen .....	114
4.5.4	Das Widerstandsmoment .....	120
4.6	Die Formänderung .....	128
4.6.1	Die Integrationsmethode .....	128
4.6.2	Überlagerung einzelner Belastungsfälle .....	138
4.6.3	Bestimmung der Deformation aus der Formänderungsarbeit (Satz von CASTIGLIANO)/Kraftgrößenverfahren .....	143
4.6.4	Verfahren nach MOHR und FÖPPL .....	150
4.7	Die schiefe Biegung .....	160
4.7.1	Profile mit zwei senkrecht zueinander stehenden Symmetrieachsen .....	160
4.7.2	Symmetrieachse senkrecht zur Belastungsebene .....	165
4.7.3	Unsymmetrische Profile und Hauptachsen .....	167
4.8	Zusammenfassung .....	184
<b>5</b>	<b>Schub</b>	<b>189</b>
5.1	Einführung .....	189
5.2	Der Satz von den zugeordneten Schubspannungen .....	189
5.3	Schubspannungen in einem auf Biegung beanspruchten Träger .....	191
5.4	Der Schubmittelpunkt .....	199
5.5	Abscheren .....	200
5.6	Zusammenfassung .....	203
<b>6</b>	<b>Verdrehung</b>	<b>205</b>
6.1	Einführung .....	205
6.2	Verdrehung eines Kreiszylinders .....	206
6.2.1	Die Spannungen .....	206
6.2.2	Die Formänderung .....	213
6.3	Verdrehung beliebiger Querschnitte .....	220
6.3.1	Der Vollquerschnitt .....	220
6.3.2	Der Hohlquerschnitt .....	225
6.4	Die Formänderungsarbeit .....	229
6.5	Zusammenfassung .....	231
<b>7</b>	<b>Das Stabilitätsproblem Knickung</b>	<b>233</b>
7.1	Einführung .....	233
7.2	Stabilität eines Druckstabes .....	233
7.3	Die Knickspannung und der Schlankheitsgrad .....	236
7.4	Die elastische Knickung nach EULER .....	239
7.5	Die elastisch-plastische Knickung .....	246
7.6	Allgemeine Hinweise zur Stabilitätsberechnung .....	248
7.7	Beispiele .....	249
7.8	Zusammenfassung .....	256

<b>8</b>	<b>Der ebene Spannungszustand</b>	<b>259</b>
8.1	Einführung .....	259
8.2	Das Hauptachsenproblem; der MOHRSCHE Spannungskreis .....	260
8.3	Die verschiedenen Beanspruchungsarten .....	271
8.3.1	Zug .....	271
8.3.2	Druck .....	271
8.3.3	Verdrehung .....	273
8.4	Zusammenfassung .....	274
<b>9</b>	<b>Zusammengesetzte Beanspruchung</b>	<b>275</b>
9.1	Einführung .....	275
9.2	Addition von Normalspannungen .....	276
9.2.1	Zug und Biegung .....	276
9.2.2	Druck und Biegung .....	279
9.3	Zusammensetzung von Normal- und Schubspannung .....	279
9.3.1	Bruchhypthesen und Vergleichsspannungen .....	279
9.3.2	Biegung und Verdrehung .....	288
9.3.3	Biegung und Schub .....	294
9.3.4	Verdrehung und Zug/Druck .....	296
9.3.5	Mehrachsiger Zug/Druck .....	299
9.4	Zusammenfassung .....	299
<b>10</b>	<b>Versuch einer wirklichkeitsnahen Festigkeitsberechnung</b>	<b>301</b>
10.1	Einführung .....	301
10.2	Problembeschreibung .....	302
10.3	Der Festigkeitsnachweis .....	310
10.3.1	Berechnungskonzepte .....	310
10.3.2	Der statische Festigkeitsnachweis .....	314
10.3.3	Der Dauerfestigkeitsnachweis .....	320
10.3.4	Hinweis zum Betriebsfestigkeitsnachweis .....	342
10.4	Zusammenfassung .....	348
<b>11</b>	<b>Die statisch unbestimmten Systeme</b>	<b>353</b>
11.1	Einführung .....	353
11.2	Reduktion von statisch unbestimmten Systemen .....	353
11.3	Zug .....	357
11.4	Biegung .....	363
11.4.1	Integrations-Verfahren .....	363
11.4.2	Das Kraftgrößenverfahren .....	366
11.4.3	Überlagerung bekannter Belastungsfälle .....	370
11.5	Zusammenfassung .....	372
<b>12</b>	<b>Verschiedene Anwendungen</b>	<b>373</b>
12.1	Einführung .....	373
12.2	Die Wärmespannung .....	373
12.2.1	Die Wärmedehnungszahl .....	373
12.2.2	Die Spannungen .....	374

12.3	Umlaufende Bauteile .....	380
12.3.1	Der umlaufende Stab .....	380
12.3.2	Der umlaufende Ring .....	381
12.3.3	Die umlaufende Scheibe gleicher Dicke .....	382
12.3.4	Scheibe gleicher Festigkeit .....	388
12.4	Zylinder und Kugel unter Innendruck .....	388
12.4.1	Der dünnwandige Behälter .....	388
12.4.2	Der dickwandige Zylinder .....	391
<b>Anhang</b>		<b>393</b>
Differentiation und Integration mit Hilfe des FÖPPL-Symbols .....		393
<b>Tabellenanhang</b>		<b>397</b>
<b>Literatur</b>		<b>423</b>
<b>Index</b>		<b>427</b>

# Vorwort

Dieses Buch ist die Fortsetzung des Buches „Technische Mechanik; Band 1; Statik“ vom Erstverfasser. Wie jenes ist es als Lehrbuch für Fachhochschulen in die neu entstehende Lehrbuchreihe Maschinenbau des Oldenbourg Wissenschaftsverlags eingebaut. Eindeutige Grenzen zwischen einzelnen Grundlagenfächern des Maschinenbaus gibt es nicht. Eine Überlappung der Darstellung ist durchaus gewollt. Sie soll sowohl eine gute Verzahnung des Wissens fördern als auch eine zu enge fachbezogene Sichtweise vermeiden. In diesem Zusammenhang sei auf die Bücher Werkstoffkunde – Metalle (J. Gobrecht) und Maschinenelemente 1 und 2 (H. Hinzen) der oben genannten Buchreihe hingewiesen.

Welches Lernziel versuchen wir mit diesem Lehrbuch zu erreichen? Jeder praktisch arbeitende Ingenieur weiß, dass man gerade in der Festigkeitslehre mit einer Fülle von Formeln auch ohne viel Verständnis für die Probleme und die tatsächlichen Vorgänge im Werkstoff rechnen und sogar zu verwendbaren Ergebnissen kommen kann. Dieser Arbeitsmethode sind natürlich enge Grenzen gesetzt. Nur wenn man diese Grenzen bzw. die vielen vereinfachenden Voraussetzungen, unter denen praktisch alle Gleichungen der Festigkeitslehre gelten, kennt, kann man u.U. gefährliche Irrtümer vermeiden. Aus diesem Grunde haben wir uns bemüht, die physikalischen Zusammenhänge ausführlich darzustellen und die Vorgänge im Werkstoff – soweit mit einfachen Mitteln überhaupt möglich – verständlich zu machen. Daran anknüpfend haben wir auch der Diskussion über die Voraussetzungen, unter denen die einzelnen Gleichungen gelten, breiten Raum eingeräumt.

Nach diesen Ausführungen ist es klar, dass dieses Buch kein Rezeptbuch für die Lösung von Standardaufgaben aus dem Bereich der Festigkeitslehre sein soll. Im Band 1 (Statik) sollte neben der rechnerischen Lösung von Problemen aus der Statik dem Studenten ein Gefühl für Kräfte und Belastungen an technischen Gebilden vermittelt werden. Die Festigkeitslehre geht einen Schritt weiter. *Nachdem die Belastung bekannt ist, muss man sich über deren Wirkung im Bauteil sowie auch über die Verformung*, die ja bei der Betrachtung des starren Körpers in der Statik „nicht vorhanden“ klar werden. Häufig genug begrenzt eine im Sinne der Funktion zu große, wenn auch elastische Verformung die Belastbarkeit des Bauteils und bestimmt die Abmessungen. Es ist ein Hauptanliegen

dieses Buches, über das rein Rechnerische hinaus, dem zukünftigen Ingenieur ein Gefühl für die Wirkungen von Spannungen (z.B. Kraftfluss, Spannungskonzentration) mitzugeben. In diesem Zusammenhang sind die Kapitel 2 (Grundlagen), Kapitel 8 (Der ebene Spannungszustand), Kapitel 9 (Zusammengesetzte Beanspruchung, Spannungshypothesen), Kapitel 10 (Versuch einer wirklichkeitsnahen Festigkeitsberechnung) besonders wichtig. Dieses Gefühl entwickelt sich erst nach vielfältiger Anwendung der einzelnen Gleichungen und dem Durchdenken und kritischen Verarbeiten der Ergebnisse. Die Beispiele und die getrennt herausgegebenen Übungsaufgaben sind aus dem oben beschriebenen Bestreben heraus ausgewählt worden.

Im ständigen Bemühen um eine Verbesserung der Werkstoffausnutzung und Betriebssicherheit haben sich in den Jahren die Berechnungsverfahren – auch im Zusammenhang mit der Weiterentwicklung der Rechentechnik – kontinuierlich verfeinert. Dies machte die Überarbeitung des Kapitels 10 erforderlich. Der Co-Autor hat es neu konzipiert und erweitert sowie im Zusammenhang damit den Abschnitt 2.9 neu gefasst. Als Konsequenz daraus wurden auch die Sicherheitszahlen (Tabelle 5) und die Formzahlen gekerbter Bauteile (Tabellen 17 und 18) auf der Grundlage der FKM-Richtlinie dem aktuellen Stand angepasst. Bei der Darstellung einer zeitgemäßen Festigkeitsberechnung konnten viele inzwischen eigenständige Sachgebiete nur angerissen werden. An diesen Stellen werden die neugierig gewordenen Leser über ein deutlich erweitertes Literaturverzeichnis auf die Spezialliteratur verwiesen.

Das Stabilitätsproblem (Kapitel 7) wurde durch den Co-Autor hinsichtlich des Bezeichnungsaufbaus und auch inhaltlich überarbeitet.

An dieser Stelle danken die Autoren dem VDMA-Verlag GmbH, Frankfurt/Main, für die Freigabe der Daten aus der FKM-Richtlinie, insbesondere Herrn Thomas Roggel, für seine tatkräftige Unterstützung.

Frau Dipl.-Ing. (FH) Gabriele Wille, TFH Wildau, dankt der Co-Autor für die Anfertigung der in den Kapiteln 7 und 10 neu erstellen Zeichnungen einschließlich der vielen Kennlinien der Tabelle 17.

Die 16. Auflage wurde einer größeren Umarbeitung unterzogen. Deshalb können wir uns hier im Wesentlichen auf Korrekturen und eine allgemeine Durchsicht beschränken.

Nicht zuletzt bedanken wir uns bei dem Verlag für die stetige und gute Betreuung nicht nur dieses Buches.

Bruno Assmann  
Peter Selke

## Verwendete Bezeichnungen

$A$	Fläche; Bruchdehnung
$a, b$	Konstanten (Mittelspannung)
$a, b, h, l, s$	Längen allgemein
$C$	Integrationskonstante
$D, d$	Durchmesser
$E$	Elastizitätsmodul
$F$	Kraft
$f$	Spannungsfaktor
$G$	Gleitmodul
$I$	Flächenmoment 2. Ordnung
$i$	Trägheitsradius
$K$	Faktor; Beiwert
$M$	Moment
$M$	Mittelspannungsempfindlichkeit
$m$	Masse; Maßstabsbeiwert
$N, n$	Anzahl
$n$	Stützzahl
$P$	Leistung
$p$	Flächenpressung
$q$	Streckenlast; Zähigkeitskoeffizient
$R, r$	Radius
$R$	Zugfestigkeitskennwert
$R$	Rauheit
$S$	Schadenssumme
$S$	Seil- bzw. Stabkraft
$S$	Sicherheitszahl
$T$	Sicherheitskennzahl; statisches Moment
$u$	bezogene Formänderungsarbeit
$V$	Volumen
$W$	Widerstandsmoment; Formänderungsarbeit
$w$	Durchbiegung
$x, y, z$	Koordinaten
$\alpha$	Winkel; Formzahl; lineare Ausdehnungszahl
$\beta$	Kerbwirkungszahl
$\gamma$	Winkeländerung; Volumendehnungszahl
$\varepsilon$	Dehnung; Kürzung
$\varphi$	Winkeländerung Biegelinie; Verdrehwinkel
$\eta, \xi$	Koordinaten
$\lambda$	Schlankheitsgrad
$\mu$	Querkontraktionszahl (POISSONSche Zahl)
$\varrho$	Krümmungsradius; Dichte
$\sigma$	Normalspannung
$\tau$	Schubspannung (Tangentialspannung)
$\chi$	bezogenes Spannungsgefälle
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit

## Indizes

A, B, C, D	bezogen auf die so bezeichneten Punkte
A	Ausschlag; Anisotropie
a	Abscheren; Ausschlag
B	Bruch
b	Biegung
D	Dauer
d	Druck; Größenabhängigkeit
el	elastisch
erf	erforderlich
F	Formänderung
G	Gewicht
Grenz	Grenz(wert)
g	Gestalt; Größeneinfluss
gef	gefordert
K	Knick; Kerb(e); gekerbt
L	Lochleibung
M, m	mittlere; Mittel...
max	maximal
min	minimal
N	Normwert
n	normal; Nenn...
O	Oberfläche; Rauheit
o	Oberspannung; Ausgangszustand
p	polar
pl	plastisch
q	quer/Querkraft
r	radial
res	resultierend
S	Schwerpunkt
s	Schub
Sch	Schwell...
T	Temperatur
t	Torsion; tangential; Zeit
u	Umfang; Unterspannung
V	Verfestigung; Oberflächenverfestigung
v	Vergleich; Volumen
W	Wechsel
z	Zug
zd	Zugdruck
zul	zulässig
x, y, z	Richtungssinn nach vorgegebenem Koordinatensystem
$a, \xi, \eta$	Normalspannung
$\sigma$	Tangentialspannung (Schubspannung)
$\tau$	

# 1 Einführung

## 1.1 Aufgabe der Festigkeitsberechnung

In der *Statik* wurde die Wirkung von Kräften auf starre Körper behandelt. Es zeigte sich, dass es einen absolut starren Körper nicht gibt. Jeder Stoff deформiert sich unter der Einwirkung von Kräften. Sind diese Deformationen sehr klein verglichen mit den Gesamtabmessungen des Bauteils, dann kann man sie in vielen Fällen vernachlässigen.

Die Aufgaben der Statik (im Rahmen der Technischen Mechanik) beschränken sich im Wesentlichen auf Bestimmung von Auflager-, Gelenk- und Stabkräften von statisch bestimmten Systemen.

Die Festigkeitslehre geht einen Schritt weiter und stellt zunächst die Frage nach den durch diese Kräfte verursachten Wirkungen im Bauteil.

Was zu diesem Thema bereits im Band 1 ausgeführt wurde, wird hier vertieft. Aus den Gleichgewichtsbedingungen am Teilabschnitt eines Bauteils (Schnitteinheit) werden die Schnittreaktionen berechnet. Das sind Momente und Kräfte, die bei vorgegebener Belastung des Bauteils im betrachteten Schnitt übertragen werden müssen. Die Kenntnis dieser Größen reicht jedoch nicht aus, um Aussagen über die Beanspruchung des Werkstoffs zu machen. Konkret: Es ist z.B. nicht möglich, einen Biegeträger zu dimensionieren oder ausreichende Festigkeit eines vorgegebenen Biegeträgers rechnerisch nachzuweisen. In einem weiteren Schritt muss von der Schnittreaktion auf die Belastungsintensität im Querschnitt geschlossen werden. Ein Maß für diese Belastungsintensität ist die *Spannung*. Die Herstellung einer Beziehung zwischen den Schnittreaktionen und der Spannung ist nur möglich, wenn es gelingt, Aussagen über die *Deformation* des Bauteiles zu machen. Das ist der Punkt, wo die Vorstellung vom starren Körper nicht mehr aufrecht erhalten werden kann. Die konstante Zugspannung in einem zylindrischen Stab unter zentrischem Zug resultiert aus der Überlegung, dass sich alle gedachten Längsfasern um den gleichen Betrag dehnen. Die maximale Spannung in den Außenfasern eines gebogenen Trägers haben ihren Grund in der Tatsache, dass dort die Verlängerung bzw. Zusammendrückung der Fasern am größten ist.

Die somit unumgänglich notwendige Betrachtung der u.U. sehr kleinen Defor-

mation gestattet es, *statisch unbestimmte Systeme* zu behandeln. Ein System ist statisch unbestimmt, wenn die Zahl der Auflagerreaktionen größer ist als die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen. Als Beispiel soll ein dreifach gelagerter Träger betrachtet werden. Wird dieser als völlig starr betrachtet, ist eine Lösung unmöglich, denn schon eine beliebig geringe Abweichung eines Lagers von der Verbindungslinie der beiden anderen Lager hat zur Folge, dass der völlig starre Träger nur auf zwei Stützen liegt und somit statisch bestimmt geworden ist. Das entspricht aber nicht dem tatsächlichen Verhalten. Die von einem überschüssigen Lager auf den Träger übertragene Kraft ist gerade so groß, dass sie die dort ohne dieses Lager vorhandene Durchbiegung wieder rückgängig macht. *Die Berechnung von Lagerkräften statisch unbestimmter Systeme setzt also voraus, die Werkstoffe als nicht starr anzusehen.*

Die wichtigste *Aufgabe der Festigkeitslehre* ist es, *Grundlagen für eine Berechnung von Bau- und Maschinenteilen* zu schaffen. Danach soll ein Konstrukteur in der Lage sein, z.B. die Abmessungen einer Welle so festzulegen, dass sie ohne Schaden die geforderte Leistung bei einer bestimmten Drehzahl übertragen kann. Das setzt voraus, dass einmal eine *Beziehung zwischen den Schnittreaktionen* im Bauteil *und den Spannungen* im betrachteten Querschnitt abgeleitet wurde (z.B.  $\sigma = F/A$ ) und zum anderen, dass für die in Frage kommenden Werkstoffe die *Belastbarkeiten*, d.h. die zulässigen Spannungen aus Versuchen bekannt sind. Hier ist die Nahtstelle zwischen Werkstoffkunde, Werkstoffprüfung und Festigkeitslehre.

Die Beziehungen zwischen den Schnittreaktionen und den Spannungen (z.B. zwischen Biegemoment und Biegespannung usw.) werden in der einfachen Festigkeitslehre, wie sie in diesem Buch fast ausschließlich behandelt wird, unter einer Vielzahl von einschränkenden Bedingungen aufgestellt. Nur einige sollen an dieser Stelle genannt werden.

1. Das Bauteil ist im unbelasteten Zustand spannungsfrei.

Diese Bedingung ist z.B. bei kalt verformten Teilen, bei Gussstücken und Schweißkonstruktionen (sofern nicht spannungsfrei geglättet) nicht erfüllt.

2. Die Beziehungen gelten mathematisch exakt für unendlich weit entfernte Einleitung der Kräfte und Momente. Für eine Welle heißt das, Lager und Zahnräder sind von der untersuchten Stelle sehr weit entfernt.

Auch diese Bedingung ist in den meisten, den Konstrukteur interessierenden Fällen, nicht erfüllt.

3. Vorausgesetzt ist (außer in Kapitel 10), dass keine schroffen Querschnittsübergänge vorhanden sind (Kerbwirkung).

Für sehr viele Bauteile (z.B. Schraube) ist die Bedingung nicht erfüllt.

Weitere Einschränkungen werden an den betreffenden Stellen des Buches behandelt. Es stellt sich die Frage, ob es überhaupt sinnvoll ist, mit Gleichungen zu arbeiten, die die Verhältnisse nur bedingt beschreiben.

Die einfachen Formeln der elementaren Festigkeitslehre wären in der Tat für die Ingenieurpraxis unbrauchbar, wollte man sie in der Anwendung auf Fälle beschränken, für die sie exakt gelten. Gerade deshalb ist es besonders wichtig, die *Grenzen der Berechnungsgleichungen* zu wissen. Durch vorsichtige Wahl z.B. der zulässigen Spannung können sie auf Fälle übertragen werden, die außerhalb des exakten Geltungsbereichs liegen.

Die mit Hilfe der elementaren Festigkeitslehre berechneten Spannungen können sehr erheblich von den tatsächlichen Spannungen abweichen. Auf der anderen Seite sind die zulässigen Festigkeitswerte für die verschiedenen Stoffe unter idealisierten Verhältnissen gewonnen (zylindrische Form, polierte Oberfläche usw.). Hinzu kommt, dass die berechnete Spannung nicht unmittelbar selbst Ursache einer zu vermeidenden Zerstörung sein muss (Festigkeitshypothesen).

Es mag überraschen, dass demnach in den meisten Anwendungsfällen weder die tatsächlichen Spannungen, noch die wirkliche Festigkeit und nicht einmal die Größe bekannt ist, die bei Überschreitung eines kritischen Wertes zur Zerstörung führt. Viele Berechnungsverfahren der elementaren Festigkeitslehre erfassen nur sehr ungenau die tatsächlichen Vorgänge im Werkstoff. Nur auf Grund von Kenngrößen, die das Ergebnis langer Erfahrung sind (z.B. Vergleichsspannungen), führen sie zu brauchbaren Ergebnissen.

Der Ingenieur sollte sich davor hüten, schematisch ohne Verständnis zu rechnen. Das kann man aber nur vermeiden, wenn man sich in die Vorgänge hineindenkt und den Ursprung und die Grenzen von verwendeten Gleichungen und Formeln verstanden hat und sie immer beachtet.

## 1.2 Einiges zur Lösung von Aufgaben

Der angehende Ingenieur sollte sich möglichst früh das exakte und systematische Arbeiten beim Lösen einer technischen Aufgabe aneignen. Dadurch werden Fehler vermieden und Kontrollen sind viel leichter, auch von anderen Personen, durchführbar. Nachfolgend sollen dafür einige Hinweise gegeben werden, die sinngemäß angewendet, für alle technischen Aufgaben gelten.

Nach dem Durchdenken der Aufgabe sollte immer eine Skizze angefertigt werden, die in den Proportionen möglichst genau sein sollte, um Täuschungen vorzu-beugen. Die wirkenden Kräfte werden eingetragen. Oft ist es der besseren Über-sichtlichkeit wegen zweckmäßig, mit mehreren Farben zu arbeiten. Die Skizze soll so groß sein, dass Bezeichnungen eingetragen werden können.

Zur Bestimmung der Schnittreaktionen sollte vor allem der im Stoff Ungeübte für jeden freigemachten Teilabschnitt eine neue Skizze anfertigen. Die verwendeten Gleichungen sollen in allgemeiner Form, am besten links außen, geschrieben werden, z.B.

$$\begin{aligned}\sum M_x &= 0; \quad aF_1 - bF_2 = 0 \\ \sigma &= \frac{M_b}{W}; \\ \sigma &= \frac{12 \cdot 10^4 \text{ Ncm}}{12,0 \text{ cm}^3} \cdot \frac{1 \text{ cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.\end{aligned}$$

Es sollte soweit wie möglich mit allgemeinen Größen gearbeitet werden, da die Rechnung damit leichter kontrollierbar ist. Bei der Ausarbeitung der Lösung soll kein Schritt übersprungen werden, eventuell sind einzelne Schritte durch kurze Bemerkungen zu erläutern. Bei Auswertungen von Gleichungen sollen die Einheiten mitgeschrieben werden (siehe Beispiel oben).

Die reine Zahlenrechnung kann durch Anwendung der 10er-Potenzen übersichtlicher gehalten werden.

Ein Ergebnis muss immer kritisch und mit dem gesunden Menschenverstand daraufhin untersucht werden, ob es überhaupt technisch möglich ist. Zur Kon-trolle sollten nach Möglichkeit die errechneten Werte in noch nicht benutzten Gleichungen eingesetzt werden. Auch ist manchmal eine Kontrolle durch eine andere Lösungsmethode möglich.

Bei Kräften muss neben dem Betrag auch eindeutig die Wirkungsrichtung angegeben werden. Am besten geschieht das durch einen Pfeil, der in Klammern hinter der Maßzahl und der Einheit erscheint, z.B.

$$\begin{array}{ll} F_x = 125 \text{ kN } (\leftarrow) & 125 \text{ kN nach links wirkend} \\ F_y = -230 \text{ kN } (\uparrow \text{ am Teil II}) & 230 \text{ kN nach oben wirkend.} \end{array}$$

Für Kräfte senkrecht zur Zeichenebene benutzt man

- aus der Ebene herausragend ,
- ⊗ in die Ebene hineinragend.

# 2 Grundlagen

## 2.1 Einführung

Die Festigkeitslehre überlappt sich sowohl mit der Werkstoffkunde als auch mit dem Fach Maschinenteile. Deshalb enthalten Bücher aus diesen Bereichen auch Grundlegendes aus der Festigkeitslehre, jeweils aus der Sicht dieser Fächer dargestellt. Eine „mehrspurige“ Einarbeitung in ein neues Gebiet ist immer vom Vorteil. Deshalb sei hier auf die Lit. [34], [42], [52], [55], [56] hingewiesen.

Aufgabe der Festigkeitslehre ist die Dimensionierung von Bauteilen. Dazu muss zunächst der Begriff *Spannung* definiert werden (Abschnitt 2.2). Im Rahmen des *einachsigen Spannungszustands* kommen die Größen *Verlängerung* und *Dehnung* hinzu. Das HOOKEsche Gesetz verbindet diese mit dem *E-Modul*, der eine wichtige Stoffgröße ist. Analoges gilt für *Schubbeanspruchung* mit *Winkeländerung* und *G-Modul*.

Das *Spannungs-Dehnungs-Diagramm*, das die Auswertung eines Zugversuchs darstellt, ermöglicht Aussagen über *Werkstoffeigenschaften* deren Kenntnis für einen Festigkeitsnachweis notwendig sind. Wichtige Größen in diesem Zusammenhang sind z.B. *Zugfestigkeit*, *Streckgrenze*, *0,2-Grenze*, *0,01-Grenze*.

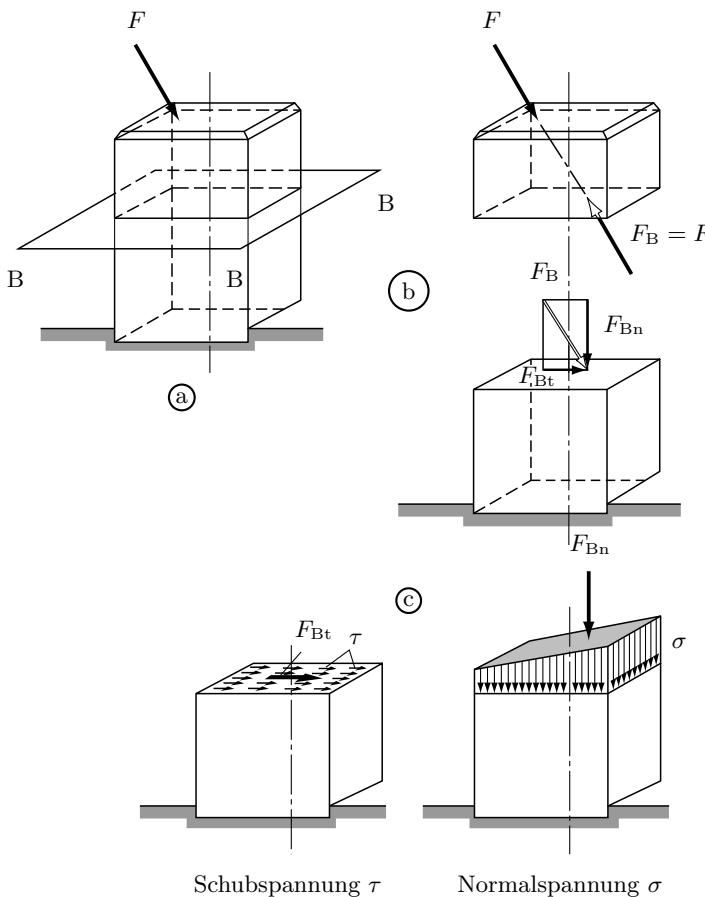
BACH hat ein System in die Vielfalt der *schwingenden Belastungen* eingeführt. Damit sind u.a. die Begriffe *Schwell- und Wechselfestigkeit* definiert. Eine besondere Bedeutung in diesem Zusammenhang hat das *WÖHLER-Diagramm*, mit dessen Hilfe *Zeit- und Dauerfestigkeit* von Bauteilen und genormten Proben ermittelt werden. Eine Vielzahl solcher Diagramme ergibt das *Dauerfestigungsschaubild* nach SMITH.

Bei schroffen Querschnittsübergängen am Bauteil entstehen u.U. gefährliche Spannungsspitzen. Damit befasst sich qualitativ der Abschnitt *Kerbwirkung*. Abgeschlossen wird das Kapitel mit Ausführungen über die *Bauteilsicherheit*. *Grenzspannungen*, *zulässige Spannungen* und *Sicherheitszahl* sind hier wichtige Begriffe.

## 2.2 Normal- und Schubspannungen

An einem Körper *außen* angreifende Kräfte bzw. Momente (Belastungen) haben eine Beanspruchung der *inneren* Materialteile zur Folge. Eine auf den Block Abb. 2-1 wirkende Kraft wird durch den Block hindurch auf das Fundament übertragen. Es soll untersucht werden, welche Kräfte z.B. im Querschnitt *BB* dieses Blockes wirksam sind. Zu diesem Zwecke muss man durch diese Ebene einen gedachten Schnitt legen. Der fragliche Teilabschnitt des Blockes muss freigemacht werden (Abb. 2-1b). Die Gleichgewichtsbedingungen an diesem Teilabschnitt ergeben die Größe der Kraft  $F_B$ , die in die Komponenten tangential und normal zur Ebene *BB* zerlegt werden kann.

Es ist einleuchtend, dass die angreifende Kraft im Block nicht entlang einer Linie übertragen wird, sondern dass sie sich innerhalb des Körpers verteilt und die einzelnen Teile verschieden beansprucht. Die vorhin ermittelten Komponen-



**Abb. 2-1:** Zur Definition des Begriffs Spannung

ten der Kraft  $F_B$  sind die Resultierenden einer auf den Querschnitt verteilten *Flächenbelastung* nach Abb. 2-1c. Diese Flächenbelastung ist um so größer, je größer die durch eine bestimmte Flächeneinheit des Querschnitts übertragene Kraft ist, d.h. je größer der *Quotient Kraft pro Flächeneinheit* ist. Diese Größe wird *Spannung* genannt. Sie kann sich von Punkt zu Punkt eines betrachteten Querschnitts ändern. Für die durch die Normalkraft verursachte *Normalspannung*  $\sigma$  gilt danach allgemein:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA}.$$

und analog für die durch die Tangentialkraft verursachte *Schubspannung*  $\tau$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA}$$

Sind die Spannungen über einen Querschnitt konstant, dann erhält man

$$\sigma = \frac{F_n}{A}; \quad F_n \perp A \quad \tau = \frac{F_t}{A}; \quad F_t \parallel A \quad (2-1)$$

Die Dimension der Spannung ist Kraft pro Fläche, als Maßeinheit ist in der Festigkeitslehre N/mm<sup>2</sup> üblich.

Verwendet wird auch

$$1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pascal}^1 = 1 \text{ Pa} \text{ bzw. } 1 \text{ N/mm}^2 = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ MPa}.$$

Aus den Gleichungen 2-1 folgt, dass zur Übertragung einer Kraft immer eine bestimmte Querschnittsfläche notwendig ist, denn für  $A \rightarrow 0$  wird  $\sigma \rightarrow \infty$ . Die Übertragung entlang einer Wirkungslinie ist demnach nicht möglich. Die Kraft wird in Wirklichkeit z.B. von einem Seil oder einem Stab übertragen, dessen Querschnittsabmessungen klein gegenüber den Gesamtabmessungen des Systems sind.

Für alle Belastungsarten kann die Beanspruchung des Materials auf die Normal- und/oder Schubspannung zurückgeführt werden.

## 2.3 Der einachsige Spannungszustand

### 2.3.1 Spannung, Formänderung, das HOOKESche<sup>2</sup> Gesetz

Ein zylindrischer Stab, der unbelastet die Länge  $L_0$  hat, wird mit der axialen Kraft  $F$  gezogen (Abb. 2-2). Diese Zugbeanspruchung hat eine Verlängerung des

---

<sup>1</sup>PASCAL, Blaise (1623–1662), französischer Mathematiker und Physiker

<sup>2</sup>HOOKE, Robert (1635–1703), englischer Physiker

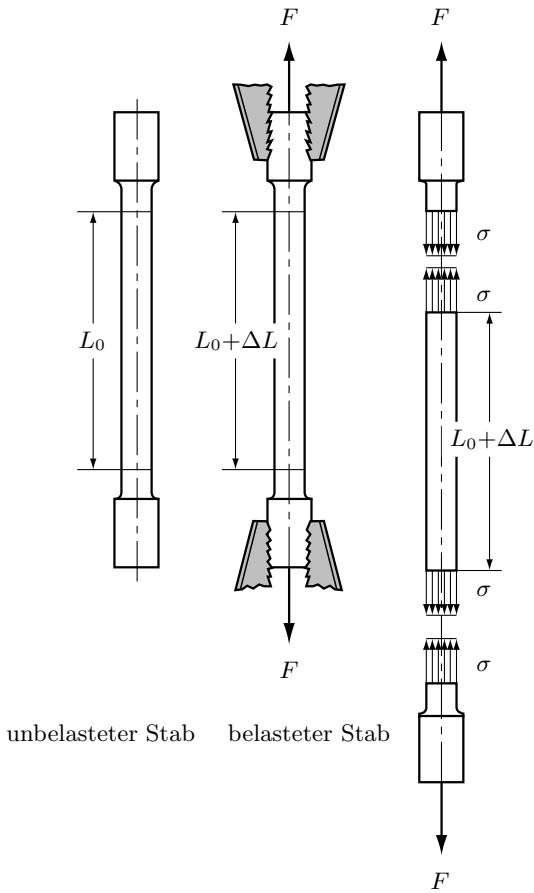


Abb. 2-2: Zugversuch

Stabes um den Betrag  $\Delta L$  zur Folge. Setzt man eine konstante Spannungsverteilung voraus, dann hat die durch die Kraft  $F$  verursachte Spannung  $\sigma$  in allen Querschnitten die Größe

$$\sigma = \frac{F}{A}.$$

Die oben gemachte Voraussetzung ist gerechtfertigt. Man kann sich den Stab aus vielen parallelen Drähten gleicher Länge und gleicher Querschnittsfläche zusammengesetzt denken. Es ist offensichtlich, dass für diesen Fall durch eine zentral eingeleitete Zugkraft alle Drähte gleich beansprucht werden. Sie stehen unter gleicher Spannung.

Die Verlängerung  $\Delta L$  eines Stabes wird um so größer sein, je größer die angreifende Kraft  $F$  und die Ausgangslänge  $L_0$  des Stabes sind. Sie wird um so kleiner sein, je größer die Querschnittsfläche  $A$  ist. Setzt man voraus, dass die

oben angegebenen Abhängigkeiten einem linearen Gesetz folgen (z.B. doppelte Kraft bedingt doppelte Verlängerung), dann kann man eine Proportion folgendermaßen formulieren

$$\Delta L \sim \frac{L_0 \cdot F}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta L}{L_0} \sim \sigma.$$

Das Verhältnis Verlängerung zur Ausgangslänge nennt man *Dehnung* und bezeichnet die Größe mit

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}.$$

Es gilt demnach

$$\sigma \sim \varepsilon.$$

Nach Einführung der Proportionalitätskonstante  $E$  erhält man

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{2-2}$$

Die Gleichung 2-2 formuliert das HOOKEsche Gesetz für Normalspannung. Dieses Gesetz sagt aus, dass die *Spannung proportional zur Dehnung* ist. In dem Maße, in dem in einem Stab die Spannung zunimmt, wird auch die Dehnung größer. Diesem Gesetz folgen die meisten Metalle bei nicht zu hoher Beanspruchung.

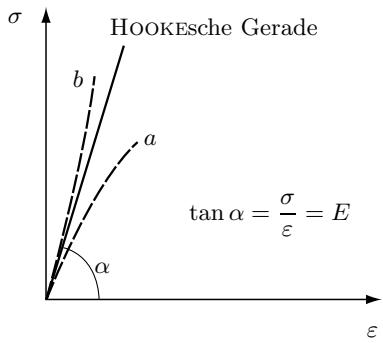
Man kann die Gleichung 2-2 in der Form

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

schreiben. Je größer die zur Erreichung einer bestimmten Dehnung  $\varepsilon$  aufzubringende Spannung  $\sigma$  ist, um so größer ist der Quotient  $\sigma/\varepsilon$  und damit der Elastizitätsmodul  $E$ . Der *E-Modul* ist demnach *eine Maßzahl für die Starrheit eines Werkstoffes*. *Je schwerer elastisch deformierbar ein Werkstoff ist, um so größer ist der E-Modul* (siehe Tabelle 2).

In einem  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm nach Abb. 2-3, ergibt das HOOKEsche Gesetz eine vom Ursprungspunkt des Koordinatensystems ausgehende Gerade, die HOOKEsche Gerade genannt wird. Der Tangens des Steigungswinkels entspricht dem *E-Modul*.

Viele Werkstoffe deformieren sich nicht nach dem HOOKEschen Gesetz. Beton, Kupfer, Gusseisen z.B. folgen einem durch die Linie  $a$  angedeuteten Verlauf,

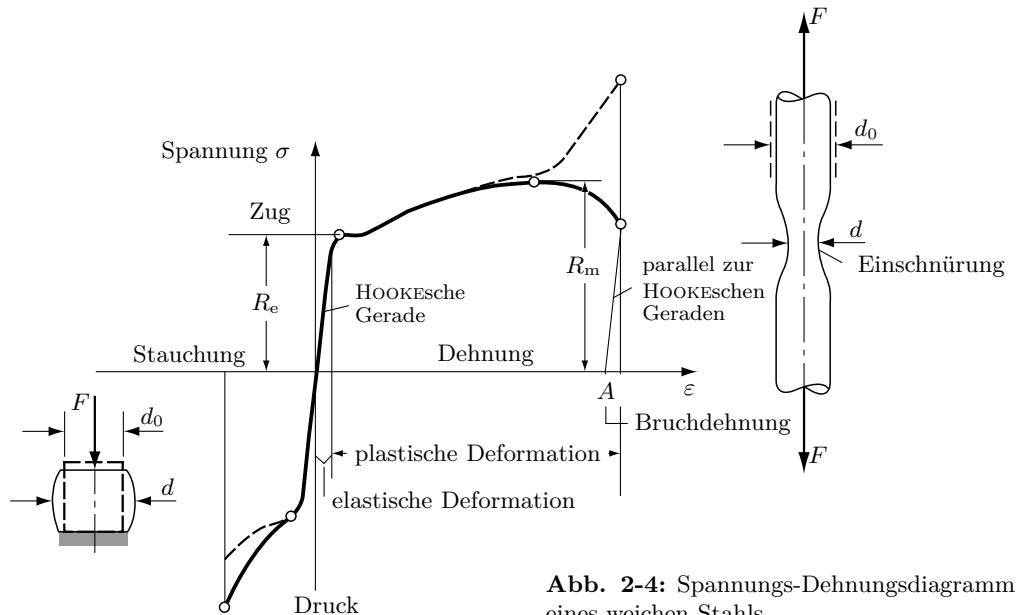


**Abb. 2-3:** Spannungs-Dehnungsdiagramm und Definition des E-Moduls

während Leder bei zunehmender Dehnung immer schwerer deformierbar wird. Dieses Verhalten entspricht dem Linienzug  $b$ . Wegen der Einfachheit der Berechnung ersetzt man in vielen Fällen die Kurvenzüge durch Gerade und gibt damit einen etwa mittleren E-Modul an (siehe Tabelle 2).

### 2.3.2 Das Festigkeitsverhalten verschiedener Werkstoffe

Das bei einem Zug- bzw. Druckversuch aufgenommene  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm lässt Rückschlüsse auf das Festigkeitsverhalten eines Werkstoffes ziehen. Die Abb. 2-4 zeigt das  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm für einen weichen Stahl.



**Abb. 2-4:** Spannungs-Dehnungsdiagramm eines weichen Stahls

Bei einem Zugversuch erfolgt die Dehnung des Stabes zunächst linear nach dem HOOKESchen Gesetz. Wird in diesem Bereich der Stab entlastet, geht er auf die Ausgangslänge zurück. Die Grenze für die Gültigkeit des HOOKESchen Gesetzes ist schwierig zu bestimmen. Man legt als Grenze die Spannung fest, die eine 0,01 %-ige bleibende Dehnung verursacht: 0,01-Grenze  $R_{p0,01}$ . Nach Erreichen der *Streckgrenze* ( $R_e$ ) nimmt die Dehnung merklich zu, obwohl die Spannung zunächst konstant ist oder kleiner wird. Diesen Vorgang nennt man *Fließen*. Der Werkstoff verhält sich jetzt bei der Deformation *plastisch*. Die vorher polierte Oberfläche wird matt und rauh und es erscheinen z.T. Linien unter einem Winkel von ca.  $45^\circ$  zur Achse. Diese Linien werden *Fließlinien* genannt. Verursacht wird diese Erscheinung durch das Abgleiten der ineinander verhakten Gefügeteile unter einem Winkel von ca.  $45^\circ$ . Auf diesen Vorgang wird im Kapitel 3 eingegangen.

Nach der nach dem Fließen einsetzenden *Kaltverfestigung* (ansteigender Kurvenverlauf) erfolgte die Zerstörung des Stabes an einer Stelle, die durch eine vorher erfolgte Einschnürung geschwächt wurde (*Gewaltbruch*). Es ergeben sich im Diagramm zwei Linienzüge, je nachdem, ob bei der Berechnung der Spannung die Kraft auf den Ausgangsquerschnitt  $\pi \cdot d_0^2/4$  oder auf den an der Stelle der Einschnürung minimalen Querschnitt  $\pi \cdot d^2/4$  bezogen wird (gestrichelte Linie). Die Einschnürung setzt etwa bei der maximalen Spannung  $R_m$  ein (*Zugfestigkeit*).

Eine vom Endpunkt des Diagrammes gezogene Parallele zur HOOKESchen Geraden schneidet die Abszisse im Punkt A. Das ist die bleibende Dehnung des gebrochenen Stabes (*Bruchdehnung A*). Da die Verlängerung im plastischen Bereich jedoch hauptsächlich auf das Gebiet der Einschnürstelle konzentriert ist, erhält man verschiedene Werte, je nachdem, ob bei einem kurzen Stab auf eine kleine oder bei einem langen Stab auf eine große Ausgangslänge bezogen wird. Das ist ein Grund für die Normung der Stababmessungen für den Zugversuch (DIN EN 10002-1).

Es gibt Stähle, die keine ausgeprägte Streckgrenze haben. Für diese wird ersetztweise die Spannung bestimmt, bei der eine bleibende Dehnung von 0,2 % nach der Entlastung zurückbleibt. Diese nennt man 0,2-Grenze  $R_{p0,2}$  (s. Tabelle 4).

Wenn der Zugversuch sehr schnell durchgeführt wird, die Belastung eher schlagartig erfolgt, ergeben sich deutlich abweichende  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramme. Das Fließen, das eine bestimmte Zeit erfordert, wird z.T. unterdrückt bzw. zu höheren Belastungen verschoben. Das ist der Grund für die Zunahme der Festigkeit bei dieser Belastungsart. Die für den Zugversuch aufzuwendende Zeit ist deshalb so festgelegt, dass ein Einfluss nicht mehr messbar ist.

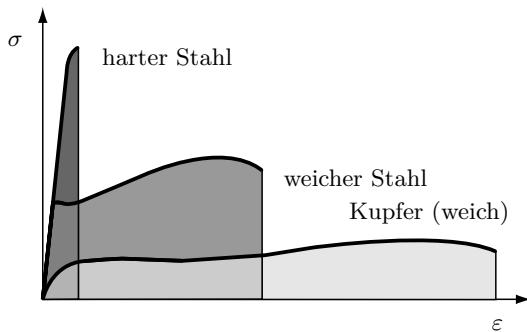
Einen weiteren Einfluss auf den Verlauf des Diagramms stellt die *Versuchstem-*

peratur dar. Sehr kalte Proben eines weichen Stahls tendieren im Verhalten zum härteren Stahl, während bei erhöhten Temperaturen die Festigkeit abnimmt. Für den Versuch ist eine Temperatur von 20°C genormt.

Der Druckversuch wird vom linken Ast des Diagramms Abb. 2-4 dargestellt. Die Quetschgrenze (Punkt S) entspricht der Streckgrenze. Dieser Versuch ist vor allem für Werkstoffe wichtig, die ein stark unterschiedliches Verhalten bei Druck- und Zugbeanspruchung aufweisen. Das sind vor allem Gusseisen, Beton, Stein, Keramik, Porzellan, die bei Druck z.T. weit höher belastbar sind als bei Zug.

Die vom  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm *eingeschlossene Fläche* kann als die zur Zerstörung des Werkstoffes *aufgebrachte Arbeit* pro Volumeneinheit gedeutet werden. Das Produkt  $\sigma \cdot \varepsilon$  hat die Maßeinheit Nmm/mm<sup>3</sup>. Darauf wird ausführlich in Abschnitt 3.4 eingegangen.

Die Abb. 2-5 zeigt die Zerreißdiagramme von Werkstoffen mit verschiedenen Eigenschaften. Ein harter Stahl erreicht die höchsten Spannungswerte und wird fast ohne Fließen und bleibende Dehnung zerstört. Auf der anderen Seite erreicht weichgeglühtes Kupfer bei geringer Festigkeit hohe bleibende Dehnung.



**Abb. 2-5:** Spannungs-Dehnungsdiagramme verschiedener Werkstoffe

Besonders wichtig in Bezug auf das Festigkeitsverhalten ist der Vergleich der zur Zerstörung notwendigen *Arbeiten*, die durch die im  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm eingeschlossenen Flächen dargestellt werden. Es ergibt sich die zunächst überraschende Tatsache, dass der harte Stahl mit hoher Festigkeit u.U. mit weniger *Arbeit* zerstört werden kann als der weiche Stahl mit kleineren Festigkeitswerten. Bedingt ist dieses Verhalten durch die geringe bleibende Dehnung eines hochfesten oder durchgehärteten Stahls. Einen Werkstoff dieser Eigenschaft nennt man *spröde*, im Gegensatz zu einem *zähen* Werkstoff, der erst nach größerer Deformation zerstört wird. Wie oben ausgeführt, spielen auch die Belastungsgeschwindigkeit und die Temperatur eine Rolle. Ein weicher Stahl kann sich bei schlagartiger Beanspruchung bei tiefen Temperaturen wie ein sprödes Material verhalten, da

das Fließen und damit die große bleibende Deformation verbunden mit der Aufnahme einer großen Formänderungsarbeit nicht auftritt.

Viele Anwendungen in der Technik erfordern in erster Linie einen Werkstoff, der in der Lage ist, verhältnismäßig viel Energie schadlos zu absorbieren. Bei stoßartiger Beanspruchung wird z.B. ein Maschinenteil trotz hoher Festigkeitswerte zerstört, wenn es nicht in der Lage ist, die Stoßenergie aufzunehmen. Eine klare Unterscheidung der verschiedenen Werkstoffeigenschaften ist hier besonders wichtig. Aus diesem Grunde sind diese in der Tabelle 1 zusammengefasst.

## 2.4 Der ebene Spannungszustand für Schubspannung

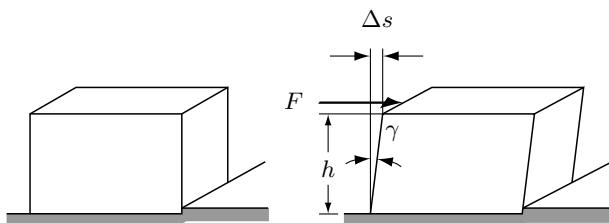
An einem Block der Höhe  $h$  greift, wie in Abb. 2-6 gezeigt, eine Kraft an. Dabei wird der vorher quadratische Block zu einem Parallelepiped deformiert. Der Winkel  $\gamma$  ist um so größer, je größer die Kraft  $F$  ist und je kleiner die Querschnittsfläche  $A$  senkrecht zur Zeichenebene ist. Setzt man auch hier eine lineare Abhängigkeit voraus, dann erhält man

$$\gamma \sim \frac{F}{A}.$$

Die Gleichung 2-1 liefert unter der weiteren Voraussetzung einer idealisierten konstanten Spannungsverteilung die Beziehung

$$\begin{aligned} \tau &\sim \gamma \\ \tau &= G \cdot \gamma \end{aligned} \tag{2-3}$$

Die Größe  $G$  wird *Gleitmodul* genannt. Ihre Dimension ist Kraft pro Fläche, die gebräuchliche Einheit  $\text{N/mm}^2$ . Aus versuchstechnischen Gründen wird der Gleitmodul im Torsionsversuch (Abschnitt 6.2.2) und nicht wie in der Abb. 2-6 angedeutet, ermittelt.



**Abb. 2-6:** Zur Definition des Gleitmoduls  $G$

Die Gleichung 2-3 formuliert das HOOKEsche Gesetz für Schubspannung. Der Gleitmodul  $G$  entspricht dem  $E$ -Modul in Gleichung 2-2, der Winkel  $\gamma$  der Dehnung  $\varepsilon$ . Für kleine Deformationen kann  $\gamma$  genau wie  $\varepsilon$  als Verhältnis zweier Längen definiert werden, denn es gilt für kleine Winkel

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{\Delta s}{h}.$$

Genau wie der  $E$ -Modul ist auch der *Gleitmodul* eine *Maßzahl für die Starrheit* eines Stoffes, hier jedoch bei einer *elastischen Deformation durch Schubspannungen*.

Für verschiedene Werkstoffe sind die Elastizitäts- und Gleitmoduln in der Tabelle 2 gegeben.

## 2.5 Die Belastungsfälle nach BACH<sup>3</sup>

Man kann grundsätzlich zwischen einer zügigen, d.h. *ruhenden Belastung* und einer *schwingenden Belastung* unterscheiden.

Für den ersten Fall bleibt eine einmal aufgebrachte Last konstant und damit auch die durch die Last verursachte Spannung. Eine solche Beanspruchung wird z.B. durch die Eigengewichte eines Bauwerks verursacht.

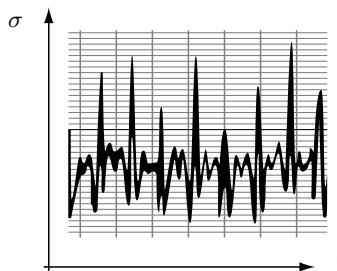


Abb. 2-7: Schwingende Belastung eines Maschinenteils

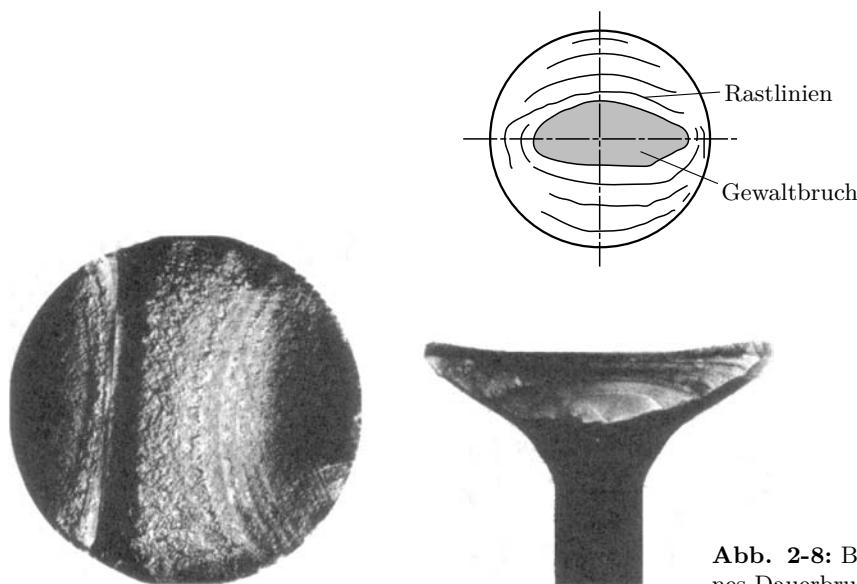
Maschinenteile sind fast nie ruhend, d.h. statisch belastet. Normalerweise ergeben sich je nach Maschine, Bauteil usw. zeitlich veränderliche Belastungen, wie sie als Beispiel Abb. 2-7 zeigt. In vielen Fällen ist es kaum möglich, eine mittlere Spannung oder mittlere Belastung anzugeben. Die Belastungsrichtung kann wechseln, an der gleichen Stelle im Bauteil treten dann nacheinander wechselnd Zug- und Druckspannungen auf.

<sup>3</sup>BACH, Carl Julius von (1847–1931), deutscher Ingenieur

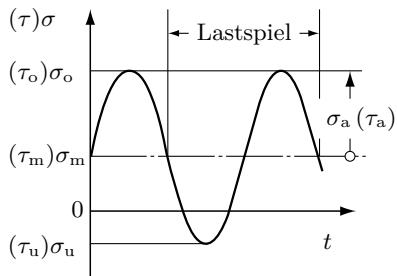
Die Zerstörung hat bei dieser Beanspruchungsart grundsätzlich andere Ursachen als bei der ruhenden Belastung. Die schwingende Beanspruchung hat bei genügend hoher Anzahl von Lastwechsel eine *Zerrützung des Gefüges* zur Folge, die zum Bruch führen kann, obwohl die auftretende Maximalspannung kleiner als die Streckgrenze, geschweige denn die Bruchgrenze ist. Man beachte dabei auch, dass bei sich sehr schnell ändernden Belastungen das Fließen entweder ganz unterdrückt oder nach oben verschoben wird (siehe Abschn. 2.3.2). Da die Streckgrenze nicht erreicht wird, mithin Fließen nicht eintreten kann, erfolgt der *Bruch* auch eines zähen Materials *ohne plastische Deformation*. Die Bruchstelle sieht aus wie die eines spröden Materials. Ein solcher Bruch – er wird *Dauerbruch* genannt – geht von der Oberfläche aus und führt durch allmählich weiterlaufende Risse schließlich zu einer kritischen Querschnittsminderung, bei der ein Gewaltbruch eintritt.

Ein Bruchbild dieser Art zeigt Abb. 2-8. Die außen liegenden, älteren Bruchflächen sind dunkler und können Korrosionserscheinungen zeigen. Die erkennbaren Linien – *Rastlinien* genannt – zeigen an, wie die einzelnen Risse zum Stillstand gekommen sind. Der durch den Gewaltbruch zerstörte Querschnitt hat ein größeres Korn.

Um das Verhalten von Werkstoffen bei schwingender Beanspruchung zu untersuchen, ist es notwendig, von idealisierten Belastungen auszugehen. Besonders einfach lässt sich in einer Prüfmaschine eine Belastungsänderung nach einer



**Abb. 2-8:** Bruchflächen eines Dauerbruchs



**Abb. 2-9:** Schwingende Belastung nach einer sin-Funktion

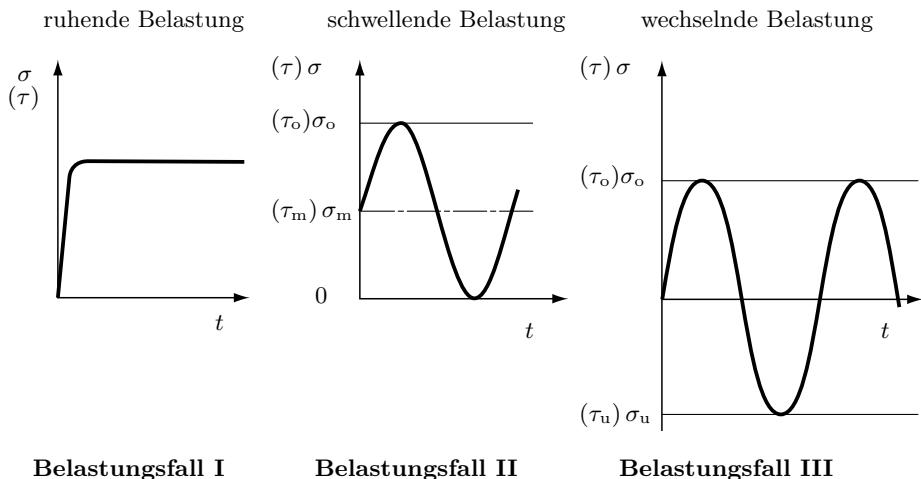
sin-Funktion realisieren. Man unterscheidet nach Abb. 2-9 folgende Begriffe

Mittelspannung	$\sigma_m$ bzw. $\tau_m$
Oberspannung	$\sigma_o$ bzw. $\tau_o$
Unterspannung	$\sigma_u$ bzw. $\tau_u$
Spannungsausschlag	$\sigma_a$ bzw. $\tau_a$

Aus der Vielzahl der möglichen Varianten wählt man nach BACH drei typische Fälle aus. Sie sind in der Abb. 2-10 dargestellt.

### ***Belastungsfall I – Ruhende Belastung***

$$\sigma_o = \sigma_u = \sigma_m \quad \sigma_a = 0$$



**Abb. 2-10:** Belastungsfälle nach BACH

***Belastungsfall II – Schwellende Belastung***

Die Belastung schwankt zwischen Null und einem Maximalwert

$$\sigma_o = \sigma_{\max} = 2\sigma_a \quad \sigma_m = \sigma_a \quad \sigma_u = 0$$

***Belastungsfall III – Wechselnde Belastung***

Es liegt ein Richtungswechsel der Belastung vor. Die Spannung wechselt zwischen einem positiven und gleich großen negativen Wert.

$$\sigma_o = \sigma_{\max} = \sigma_a \quad \sigma_u = -\sigma_{\max} \quad \sigma_m = 0$$

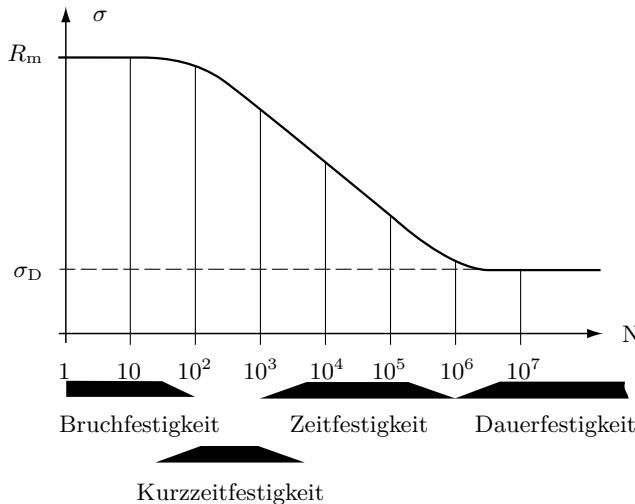
## 2.6 Die Dauer-, Zeit- und Betriebsfestigkeit

Wie im vorigen Abschnitt erläutert, kann eine wechselnde Beanspruchung zur Zerstörung des Materials führen, obwohl die maximal auftretenden Spannungen die Fließgrenze bzw. Zugfestigkeit nicht erreichen. Aus diesem Grunde kann für diesen Fall ein Zugversuch nach Abschnitt 2.3 keinen ausreichenden Aufschluss über das Festigkeitsverhalten geben.

Das Verhalten der Werkstoffe bei schwingender Beanspruchung wird folgendermaßen untersucht. Probestäbe genormter Abmessungen werden bei konstanter Mittelspannung mit einer überlagerten Schwingungsamplitude belastet. Wird diese Amplitude groß gewählt, kommt es bei verhältnismäßig wenig Lastspielen zum Bruch der Probe. Es bietet sich deshalb an, die Oberspannung in einem Diagramm über der Anzahl der ertragenen Lastspiele  $N$  aufzutragen. Man erhält so das WÖHLER-Diagramm<sup>4)</sup> nach Abb. 2-11. Wegen des großen Bereichs der Lastspiele erfolgt die Auftragung logarithmisch. Die Spannungsachse kann logarithmisch oder linear geteilt sein. Bis zu einer Lastspielzahl von etwa 10 bis 100 erfolgt die Zerstörung bei einer Oberspannung, die der Bruchfestigkeit  $R_m$  bei ruhender Beanspruchung entspricht. Im Bereich von ca. 100 bis 1000 bzw. 10 000 Lastwechseln spricht man von *Kurzzeitfestigkeit*. Die zur Zerstörung führende Spannung hat sich verringert. Die Proben werden teilweise plastisch deformiert. Höhere Lastwechselzahlen – bis etwa 1 Million – führen bei weiterhin abnehmenden Spannungen zu verformungsfreien Brüchen. Das ist der Bereich *Zeitfestigkeit*. Eine Oberspannung, die von Stahl bei ca. 10 Millionen Lastwechseln gerade noch ertragen wird, führt erfahrungsgemäß auch bei noch höheren Lastwechselzahlen nicht zum Bruch. Diese Spannung entspricht der Asymptote im WÖHLER-Diagramm. Sie wird *Dauerfestigkeit*  $\sigma_D$  ( $\tau_D$ ) genannt. Leichtmetalle verhalten sich anders. Die Dauerfestigkeit liegt bei wesentlich höheren

---

<sup>4)</sup>WÖHLER, August (1819–1914), deutscher Ingenieur



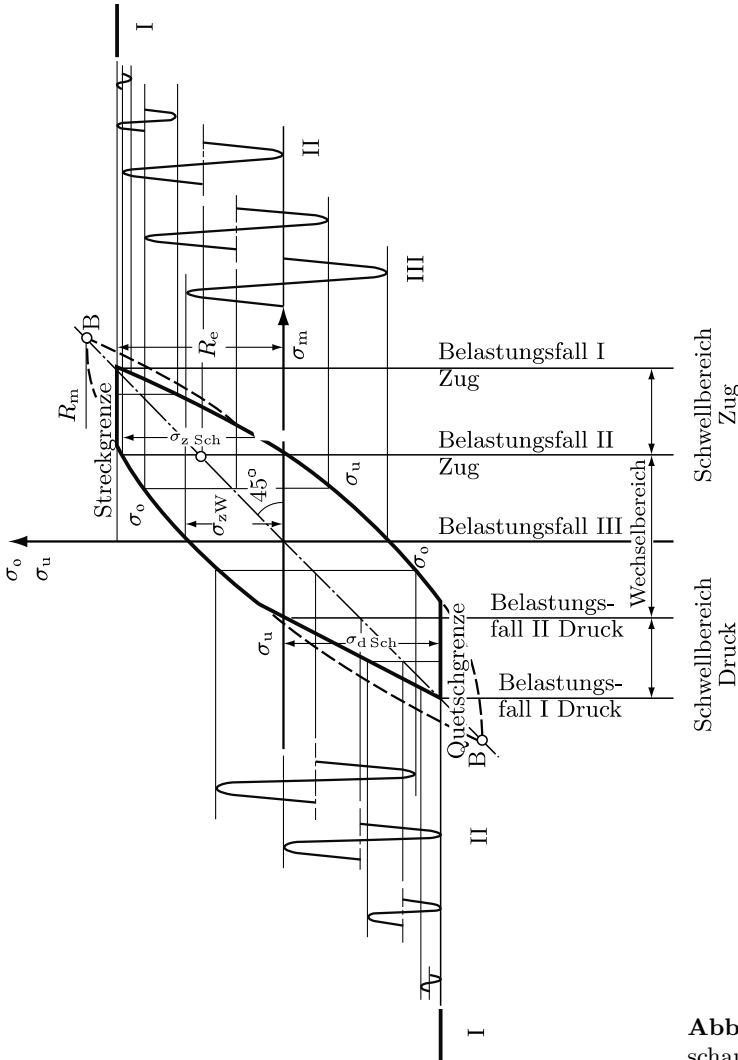
**Abb. 2-11:** WÖHLER-Diagramm

Lastspielzahlen. Das Arbeiten mit den WÖHLER-Diagrammen wird durch sehr starke Streuungen der Messwerte erschwert. Es ist notwendig, für jeden Belastungsfall eine Vielzahl von Probestäben zu untersuchen, um zu verwertbaren Ergebnissen zu kommen.

Die Dauerfestigkeit  $\sigma_D$  bzw.  $\tau_D$  ist eine besonders wichtige Größe, die man dem WÖHLER-Diagramm entnehmen kann. Sie hängt von der Größe der Mittelspannung ab, z.B. für schwellende oder wechselnde Belastung. Es liegt nahe, für einen Werkstoff und eine Beanspruchungsart (Zug-Druck, Biegung oder Torsion) die aus der Vielzahl der WÖHLER-Diagramme ermittelten Dauerfestigkeiten in einem einzigen Diagramm zusammenzufassen. Dieses nennt man *Dauerfestigkeitsschaubild*. Die Abb. 2-12 zeigt den grundsätzlichen Aufbau des Diagramms nach SMITH.

In diesem Diagramm sind die Grenzspannungen  $\sigma_o, \sigma_u$  über der Mittelspannung  $\sigma_m$  aufgetragen. Die beiden Kurvenzüge  $\sigma_o$  und  $\sigma_u$  geben an, in welchem Bereich in Abhängigkeit von  $\sigma_m$  die wechselnde Beanspruchung schwanken kann, so dass eine Zerstörung trotz beliebig hoher Lastwechsel gerade noch nicht eintritt. Bei zähen Werkstoffen kann wegen der vorher eintretenden bleibenden Deformation die Zugfestigkeit für eine Dimensionierung nicht zu Grunde gelegt werden. Deshalb wird das Dauerfestigkeitsschaubild solcher Werkstoffe oben von der Streckgrenze, unten von der Quetschgrenze begrenzt. Für Werkstoffe mit unterschiedlichem Verhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung (z.B. Gusseisen) ergeben sich unsymmetrische Dauerfestigkeitsschaubilder.

Die Dauerfestigkeit für den Belastungsfall III wird *Wechselseitigkeit*  $\sigma_w$  und für



**Abb. 2-12:** Dauerfestigkeits-schaubild nach SMITH

den Belastungsfall II *Schwellfestigkeit*  $\sigma_{Sch}$  genannt, wobei man im letzten Fall zwischen Druck- und Zugbereich unterscheidet  $\sigma_{zSch}$  und  $\sigma_{dSch}$ . Die Wechselfestigkeit für Normalspannungen kann man sowohl im Zug-Druck- als auch im Biegeversuch ermitteln. Es ergeben sich z.T. unterschiedliche Werte. Deshalb muss man zwischen Zug-Druck-Wechselfestigkeit  $\sigma_{zdW}$  und Biegeweichsfähigkeit  $\sigma_{bw}$  unterscheiden. Dabei kennzeichnen die kleinen Buchstaben: z = Zug; d = Druck; b = Biegung; t = Torsion. Eine Zusammenstellung ist in der Tabelle 4 gegeben.

Grundsätzlich erhält man auch für Schubspannungen ein entsprechendes Diagramm.

Wie bereits im Abschnitt 2.5 dargestellt, entspricht die tatsächliche Beanspruchung in einer Maschine normalerweise weder einer sin-Schwingung noch ist die Spannungsamplitude konstant. Um die eher zufälligen Belastungen rechnerisch erfassen zu können, verfährt man folgendermaßen. Von Versuchen, bzw. von Annahmen ausgehend, legt man fest, wie oft eine bestimmte Spannungsspitze zu erwarten ist. Zugehörige Wertepaare Spannung – Anzahl werden in einem Diagramm dargestellt. Dieses nennt man *Beanspruchungskollektiv*. Liegt ein Teil der Spannungen über der Dauerfestigkeit, muss untersucht werden, ob die Gefahr eines Bruches besteht. Man spricht von *Betriebsfestigkeit*. Dazu wird im Kapitel 10 etwas ausgeführt.

## 2.7 Die Kerbwirkung

In diesem Abschnitt soll qualitativ untersucht werden, welchen *Einfluss eine Querschnittsänderung* eines z.B. auf Zug beanspruchten Stabes auf die Spannungsverteilung im Querschnitt hat. Zu diesem Zwecke kann man sich folgendes Gedankenmodell schaffen (Abb. 2-13).

Man denkt sich einen Flachstab zunächst durch Einsägen von Schlitten in einzelne Vierkantstäbe vom Querschnitt  $\Delta A$  aufgeteilt. Diese Vierkantstäbeersetzt man wiederum durch einzelne Drähte. Durch das Einsägen sind vorher vorhandene Querverbindungen zerstört worden. Die durch diese möglicherweise übertragenen Kräfte sollen jetzt von quer gespannten Federn aufgenommen werden.

Für den Stab ohne Querschnittsänderung ergibt sich, wie schon oben erläutert, eine konstante Spannungsverteilung. Alle Drähte sind bei einer Zugbeanspruchung des Systems gleich gespannt.

Ein Modell für einen gelochten Stab erhält man, wenn bei entsprechender Anordnung der Drähte und Querfedern ein Zylinder durch das System Abb. 2-13 gesteckt wird. Das Ergebnis ist in der Abb. 2-14 dargestellt. Dieses Modell wird einer Zugbeanspruchung unterworfen. Dabei kann man beobachten, dass der Zylinder zu einem Oval deformiert wird, weil die benachbarten Drähte zur Zylindermitte ausweichen. Der Abstand der Drähte zueinander verringert sich dabei. Das heißt aber, die *Kraftübertragung* ist an dieser Stelle *konzentriert* und damit muss die Spannung in diesem Bereich größer sein als in den Außenbereichen. Diesen Effekt einer Spannungserhöhung in der Nähe von verhältnismäßig schroffen Querschnittsübergängen nennt man *Kerbwirkung*. Die ohne Berück-

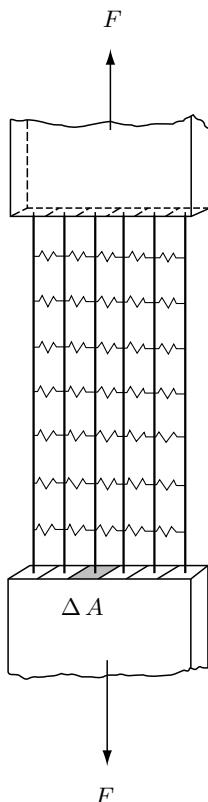


Abb. 2-13: Modell eines Zugstabes

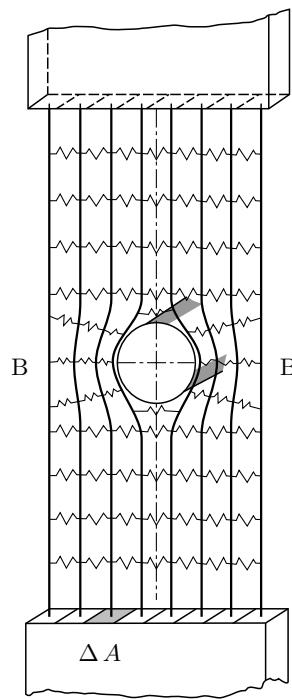
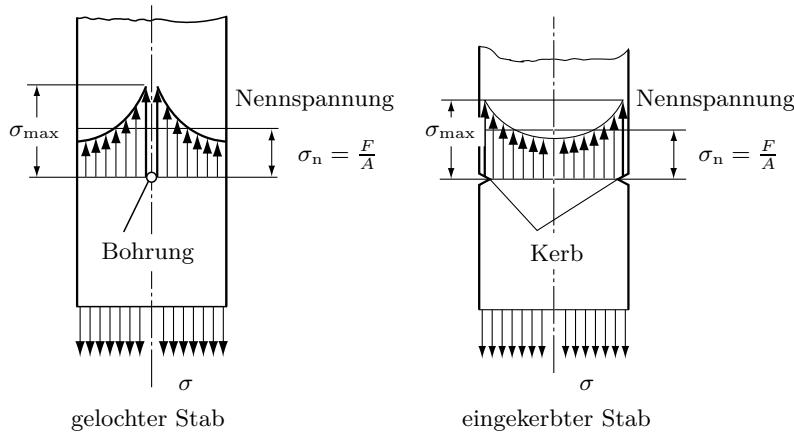


Abb. 2-14: Modell eines gelochten Zugstabes

sichtigung der Kerbwirkung nach der elementaren Festigkeitslehre berechneten Spannungen bezeichnet man auch als *Nennspannungen*. Sie können u.U. wesentlich unter den tatsächlichen Werten liegen. Für einen gezogenen, gelochten bzw. gekerbten Stab zeigt Abb. 2-15 die Verteilung der Spannungen.

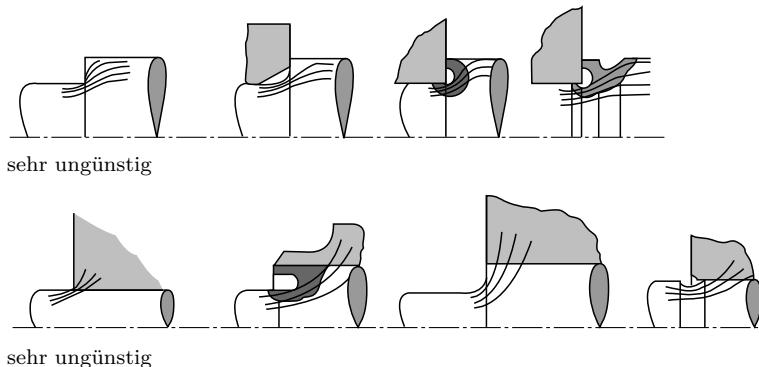
Die Spannungserhöhung ist um so größer, je kleiner der Krümmungsradius des Kerbgrundes ist. Da eine ungleichmäßige Spannungsverteilung eine ungleichmäßige Werkstoffausnutzung zur Folge hat, ist sie unerwünscht und sollte nach Möglichkeit vermieden werden. Deshalb sollten Querschnittsübergänge immer mit möglichst großen Abrundungsradien ausgeführt werden. Einige Beispiele zeigt Abb. 2-16. Eine Verminderung der Kerbwirkung einer scharfen Kerbe lässt sich durch *Entlastungskerben* nach Abb. 2-17 erreichen. Die in Abb. 2-16/2-17 eingezeichneten Linien veranschaulichen den Kraftfluss. Eine Konzentration dieser Linien deutet auf eine Spannungserhöhung hin. Sie sind vergleichbar mit Stromlinien in einem entsprechend geformten, von Flüssigkeit durchströmten Kanal.



**Abb. 2-15:** Durch Kerbwirkung verursachte Spannungsverteilung im gebohrten und gekerbten Stab

Bei zähen Werkstoffen kann u.U. im Kerbgrund Fließen einsetzen, wodurch Spannungen abgebaut werden. Deshalb sind diese Werkstoffe im Gegensatz zu spröden nicht so kerbempfindlich.

Das Verhalten eines Werkstoffes in der Nähe einer Kerbe wird wesentlich von den dort wirkenden Spannungen in Querrichtung beherrscht. Im oben angeführten Modell sind sie durch Kräfte dargestellt, die von den Querfedern in der Nähe



**Abb. 2-16:** Kraftfluss in einer abgesetzten Welle und in einer Welle-Nabe-Verbindung



**Abb. 2-17:** Spannungsminderung im Kerbgrund durch Entlastungskerbe

des Zylinders übertragen werden. Eine Deformation des Zylinders durch Zug ist nur möglich bei einer Verlängerung, d.h. Belastung der Querfedern. Es handelt sich in diesem Gebiet nicht mehr um einen einachsigen Spannungszustand. Das ist der Grund dafür, dass ein eingekerbter Stab aus zähem Material ohne Einschnürung und bleibende Dehnung wie sprödes Material reißt. Seine Festigkeit nimmt beim Zerreißversuch zu, da das Fließen unterdrückt wird und damit die Querschnittsverminderung durch Einschnürung unterbunden ist. Demgegenüber steht eine erhebliche Herabsetzung der Dauerfestigkeit. Dabei machen sich kleinste Kerben bemerkbar, so dass dieser Effekt schon eintritt, wenn die Probestücke nicht poliert, sondern nur geschlichtet oder geschruppt sind oder wenn die Oberfläche korrodiert ist (siehe Abschnitt 8.3.1).

Genau genommen kann man also die *Begriffe spröde und zäh nur im Zusammenhang mit der Beanspruchungsart und der Gestalt des Bauteiles benutzen.*

## 2.8 Die Bauteilsicherheit

Um das Versagen des Bauteils mit großer statistischer Wahrscheinlichkeit auszuschließen, muss die *Bauteilbeanspruchung* (auftretende Spannung) kleiner sein, als die *Bauteifestigkeit* (ertragbare Spannung). Die **zulässige Spannung** ist die Spannung, die vom Bauteil auf Dauer ertragen werden kann, ohne dass es zu bleibenden Verformungen oder gar zum Bruch kommt. Sie muss demnach kleiner als die ertragbare Spannung sein. Sie darf nicht zu hoch gewählt werden. Wird sie auf der anderen Seite zu niedrig festgelegt, erhält man zu schwere Bauteile, deren Werkstoff ungenügend genutzt ist. Der Kompromiss zwischen den Forderungen nach Sicherheit und Wirtschaftlichkeit ist die Berücksichtigung der zahlreichen, die Festigkeit beeinflussenden Faktoren wie ungleichmäßige Spannungsverteilung, Kerbwirkung, Oberflächenbeschaffenheit, Fertigungstoleranzen, Abweichung von den angenommenen Belastungen, Streuung der Werkstoffkennwerte usw. (Diese Problematik wird ausführlich im Kapitel 10 behandelt).

Eine grobe, die verschiedenen Einflüsse nur pauschal berücksichtigende Methode der Ermittlung der zulässigen Spannung ist die Minderung der im Versuch ermittelten *Grenzspannungen* durch eine auf Erfahrungen basierende Zahl.

Mit diesem als **Sicherheitszahl**  $S$ <sup>5</sup> (auch Sicherheitsfaktor) bezeichneten Wert größer Eins wird die zulässige Spannung

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{zul}} &= \frac{\sigma_{\text{Grenz}}}{S} \\ \tau_{\text{zul}} &= \frac{\tau_{\text{Grenz}}}{S}.\end{aligned}\tag{2-4}$$

Als Grenzspannung wählt man bei ruhender Belastung für Stähle mit ausgeprägter Fließgrenze die Streckgrenze  $R_e$ , sonst die Dehngrenze  $R_{p0,2}$  für spröde Werkstoffe die Zugfestigkeit  $R_m$ . Für die dynamische Beanspruchung wird je nach Belastungsfall die Schwellfestigkeit  $\sigma_{\text{sch}}$ , die Wechselfestigkeit  $\sigma_w$ , bzw. die Dauerfestigkeit  $\sigma_D$  zugrunde gelegt. Mit Gleichung 2-4 wird der Spannungsnachweis

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{vorh}} &\leq \sigma_{\text{zul}} \\ \tau_{\text{vorh}} &\leq \tau_{\text{zul}}\end{aligned}\tag{2-5}$$

geführt.

Zunehmend, vor allem bei dynamischer Beanspruchung, wird der Spannungsnachweis durch einen sog. Sicherheitsnachweis

$$\begin{aligned}\text{Sicherheit} &= \frac{\text{Bauteilfestigkeit}}{\text{Bauteilbeanspruchung}} \geq \text{Mindestsicherheit} \\ S &= \frac{\sigma_{\text{Grenz}}}{\sigma_{\text{vorh}}} \geq S_{\min} \\ S &= \frac{\tau_{\text{Grenz}}}{\tau_{\text{vorh}}} \geq S_{\min}.\end{aligned}\tag{2-6}$$

ersetzt. Damit wird die Aussage des Spannungsnachweises (die zulässigen Werte werden eingehalten) durch einen Faktor konkretisiert, der definiert, welche rechnerische Reserve das Bauteil gegenüber der Grenzlast hat. Es darf aber nicht übersehen werden, dass sowohl die Bauteilfestigkeit als auch die zugrunde gelegten Bauteilbeanspruchungen mit Unsicherheiten und Streuungen behaftet sind, die an der „rechnerischen Reserve“ zehren. Kleine Werte für die Mindestsicherheit bedeuten grundsätzlich **nicht** eine Verminderung der Sicherheit des betreffenden Bauteils. Eine kleinere Sicherheitszahl, begründet z.B. durch treffsichere Angaben über die Bauteilfestigkeit (Tragfähigkeit) aus Betriebsfestigkeitsversuchen mit dem Originalbauteil und die Ermittlung der Bauteilbeanspruchung auf

---

<sup>5</sup>Im Bauingenieurwesen (früher auch im Stahlbau und im Maschinenbau) ist der griechische Buchstabe  $\nu$  als Symbol für die Sicherheit üblich

der Basis eines gemessenen Lastkollektivs, auf statistisch verlässliche Weise bestimmt, verbürgt im Gegenteil eine erhöhte Sicherheit. Ein solches Vorgehen ist aber meist nur bei großen Stückzahlen praktisch möglich. Aus Kostengründen stehen häufig nur Festigkeitswerte aus Werkstoffnormen zur Verfügung, während die Lastannahmen idealisiert werden. Die daraus resultierenden **Unsicherheiten der Berechnung** müssen durch eine **höhere Sicherheitszahl** ausgeglichen werden.

Der Grundwert der Sicherheitszahlen gegenüber der Zugfestigkeit ist der praxisübliche Wert  $S_B = 2,0$ . Bei Werkstoffen mit einem Verhältnis  $R_p/R_m < 0,75$  gilt  $S_B = 1,5$  (siehe auch Tabelle 6). Für Gusseisenwerkstoffe ist er um das 1,4fache erhöht. Unter günstigen Umständen dürfen diese Sicherheitszahlen vermindert werden.

Aktuelle Werte für die Mindestsicherheit  $S_{\min}$  in Gl. 2-6, abhängig vom Verformungsvermögen des Werkstoffs, der Inspektionshäufigkeit und des Schadensrisikos, sind in der Tabelle 5 nach der FKM-Richtlinie<sup>6</sup> [23] angegeben.

In vielen Fällen genügen die von BACH angegebenen Werte für die zulässigen Spannungen (siehe Tabelle 3). Sie liegen im Allgemeinen verhältnismäßig niedrig. Oft ist es zweckmäßig, den Zusammenhang zwischen der Streckgrenze und der Zugfestigkeit zu kennen. Für Stähle und Leichtmetalle ist das Verhältnis beider Spannungen in Tabelle 6 gegeben.

Für einige Bereiche der Technik sind Berechnungsgleichungen und zulässige Spannungen vorgeschrieben. Im Allgemeinen jedoch muss der Konstrukteur Rechenverfahren und zulässige Spannungen festlegen.

Für den Bereich des Stahlbaus gilt die DIN 18 800 in ihrer Fassung von 1990 (seit 1997 darf die „alte Norm“, außer im Kran- und Brückenbau, nicht mehr angewendet werden). Wesentlich in dieser Neufassung, basierend auf einem neuen Sicherheitskonzept nach Eurocode 3, ist die Abkehr vom Nachweis der zulässigen Spannungen zugunsten der Gegenüberstellung von Beanspruchung und Beanspruchbarkeit

$$\frac{\text{Beanspruchung}}{\text{Beanspruchbarkeit}} \leq 1.$$

Da Bezeichnungsaufbau, Grenzzustände sowie der Berechnungsablauf im Allgemeinen nicht mit dem im Maschinenbau üblichen Vorgehen übereinstimmen, sollte sich der interessierte Leser anhand der Regelwerke und der einschlägigen Literatur (z.B. [47], [53]) mit der Problematik vertraut machen.

---

<sup>6</sup>FKM: Forschungskuratorium Maschinenbau

## 2.9 Zusammenfassung

An einem Körper außen angreifende Kräfte bzw. Momente haben eine Beanspruchung der inneren Materialteile zur Folge. Ein Maß für diese Beanspruchung ist die Spannung. Je nachdem, ob innere Kräfte an einem betrachteten Schnitt senkrecht oder tangential angreifen, entstehen Normalspannungen  $\sigma$  oder Schubspannungen  $\tau$ .

Die Normalspannungen  $\sigma$  verursachen eine Verlängerung bzw. Verkürzung eines Teilelementes, während die Schubspannung eine Winkeländerung zur Folge hat.

Das HOOKESche Gesetz besagt:

$$\text{Normalspannung} \sim \text{Dehnung}$$

$$\text{Schubspannung} \sim \text{Winkeländerung}.$$

Mathematisch formuliert

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2-2)$$

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (2-3)$$

Diesen Gesetzen folgen vor allem Metalle. Die Elastizitätsmoduln  $E$  und die Gleitmoduln  $G$  sind für verschiedene Werkstoffe in Tabelle 2 gegeben.

Der wichtigste Versuch zur Beurteilung verschiedener Werkstoffeigenschaften ist der Zugversuch. Zusammengestellt und erklärt sind die wichtigsten Begriffe in Tabelle 1. Man sollte sich darüber im Klaren sein, dass sich ein Werkstoff je nach Belastungsfall (z.B. ruhend, wechselnd), nach Belastungsgeschwindigkeit (z.B. zügige oder schlagartige Belastung), nach Form (z.B. Kerbwirkung) und Temperatur (z.B. starke Unterkühlung) einmal mehr oder weniger zäh bzw. spröde verhalten kann. Für die Auswahl von Werkstoffen für Konstruktionsteile ist es wichtig zu bedenken, dass hochfeste Stähle wegen ihrer geringen bleibenden Dehnung mit geringerem Energieaufwand zerstört werden können als weichere Stähle geringerer Festigkeit.

Eine schwingende Beanspruchung in Maschinen erfolgt in der Regel ungeordnet. Für Festigkeitsuntersuchungen hat man nach BACH idealisierte Belastungen durch konstante Mittelspannung und überlagerte sinus-Belastung eingeführt. Das führt auf die Begriffe Schwellfestigkeit und Wechselfestigkeit (Tabelle 4). Das sind jeweils Dauerfestigkeiten, die der Asymptote im WÖHLER-Diagramm entsprechen. Dargestellt werden sie im Dauerfestigkeitsschaubild nach SMITH (Abb. 2-12).

Schroffe Querschnittsübergänge und Kerbe führen zu örtlichen Spannungskonzentrationen, die möglichst zu vermeiden sind (Kerbwirkung; siehe Kapitel 10).

Für die Dimensionierung von Bauteilen ist eine zulässige Spannung so festzulegen, dass weder eine bleibende Deformation noch ein Bruch zu erwarten ist. Wegen der Unmöglichkeit, alle Einflüsse in einer Festigkeitsberechnung zu erfassen, ist so notwendig, nur einen gewissen Teil einer Grenzspannung als zulässige Spannung für eine Dimensionierung zu Grunde zu legen. Sie wird folgendermaßen definiert

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_{\text{Grenz}}}{S}; \quad \tau_{\text{zul}} = \frac{\tau_{\text{Grenz}}}{S} \quad (2-4)$$

Die Wahl der Grenzspannung und der Sicherheitszahl hängt vom Belastungsfall und Werkstoff ab. Anhaltswerte gibt die Tabelle 5.

# 3 Zug und Druck

## 3.1 Einführung

Ausgegangen wird von *Normalspannungen* in senkrechten Schnitten eines gezogenen oder gedrückten Stabes. Dabei ist es notwendig, bei Druck die Aussagen auf kurze Blöcke zu beschränken (s. Kapitel 7 „Knickung“). In *beliebigen Schnitten* treten zusätzlich *Schubspannungen* auf. Ihr Einfluss auf die Zerstörung von gezogenen (gedrückten) Bauteilen wird dargestellt und begründet. Es folgt ein Abschnitt, in dem vom HOOKEschen Gesetz ausgehend eine Gleichung für die *Formänderung* abgeleitet wird. In diesem Zusammenhang ist es möglich, eine Beziehung zwischen den wichtigen Stoffgrößen *Elastizitätsmodul E*, *Gleitmodul G* und *Querzahl μ* aufzustellen.

Bei Zug-(Druck-)Beanspruchung eines Stabes verändert sich dessen Form. Die dazu aufzuwendende *Formänderungsarbeit* kann man in die Anteile *Volumen- und Gestaltänderungsarbeit* zerlegen. Der zweite Anteil ist eine wichtige Größe bei der Berechnung von Bauteilen, die einer zusammengesetzten Beanspruchung unterliegen. Abgeschlossen wird das Kapitel mit der Definition der Begriffe *Flächenpressung* und *Lochleibung*.

## 3.2 Die Spannung

### 3.2.1 Schnitt senkrecht zur Achse

An einem prismatischen Stab greift zentrisch eine Kraft nach Abb. 3-1 an. Zur Ermittlung der Spannung im Schnitt BB wird ein entsprechendes Teilstück herausgetrennt, d.h. freigemacht. Die Gleichgewichtsbedingung ergibt

$$\sum F = 0 \quad -\sigma A + F = 0$$

und damit für die Spannung

$$\sigma_{z;d} = \frac{F}{A} \tag{3-1}$$

Index *z* für Zug, Index *d* für Druck.

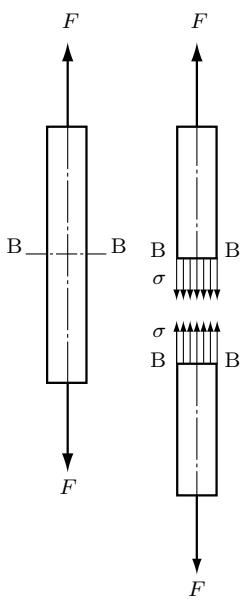
Diese Gleichung gilt unter den folgenden Voraussetzungen:

1. Die Querschnittfläche  $A$  steht senkrecht zur Achse des Stabes.
2. Die Wirkungslinie der Kraft fällt mit der Schwerpunktachse zusammen.
3. Die Spannungsverteilung über dem Querschnitt ist konstant.

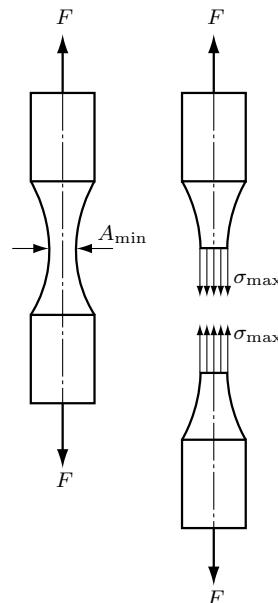
Für Stäbe mit veränderlichem Querschnitt gilt

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A_{\min}} \quad (3-2)$$

Für diesen Fall trifft die 3. der vorher aufgeführten Bedingungen nur bedingt zu. Ist der Querschnittsübergang sehr schroff, muss die Kerbwirkung berücksichtigt werden (siehe Abschnitt 2.7 und Kapitel 10).



**Abb. 3-1:** Geschnittener Zugstab



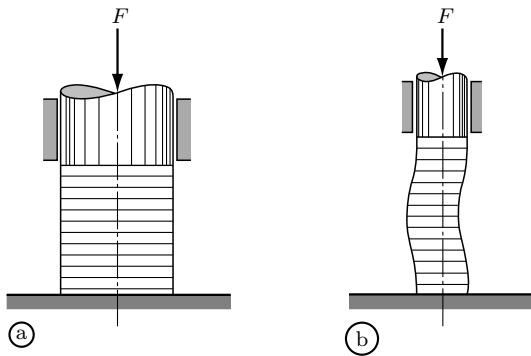
**Abb. 3-2:** Zugstab mit veränderlichem Querschnitt

Für die Dimensionierung z.B. einer Zugstange wird die oben angegebene Gleichung in der Form

$$A_{\text{erf}} = \frac{F}{\sigma_{z;d \text{ zul}}}$$

benutzt. Man berechnet demnach den mindestens erforderlichen Stabquerschnitt unter Zugrundelegung einer zulässigen Spannung, die nach den im Abschnitt 2.9 diskutierten Gesichtspunkten festgelegt wird.

Die oben angegebenen Gleichungen gelten auch für eine Druckbeanspruchung jedoch unter einer zusätzlichen Voraussetzung. Die Form des gedrückten Prismas muss so sein, dass unter der gegebenen Belastung ein seitliches Ausweichen nicht eintritt (Abb. 3-3). Für welche Stabformen bzw. Belastungen ein solches Ausweichen zu erwarten ist, wird im Kapitel 7 (Knickung) behandelt. Die Gefahr des Knickens eines Druckstabes ist in erster Näherung um so größer, je länger er ist und je kleiner die Querschnittsfläche bei einer gegebenen Querschnittsform ist. Demnach gelten die in dem Abschnitt angegebenen Gleichungen im Wesentlichen für auf Druck beanspruchte Blöcke.



**Abb. 3-3:** Gedrungener und schlanker Block auf Druck beansprucht

### 3.2.2 Beliebiger Schnitt

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welche Spannungen in einem beliebigen Schnitt eines auf Zug oder Druck beanspruchten Stabes auftreten. Zu diesem Zweck wird durch einen gezogenen Stab nach Abb. 3-4a ein Schnitt B–B gelegt, der unter dem Winkel  $\alpha$  zu dem vorher untersuchten senkrechten Schnitt liegt. Das so abgetrennte, d.h. freigemachte Teilsystem muss im Gleichgewicht sein. Es müssen die Gleichungen  $\sum F_x = 0$  und  $\sum F_y = 0$  erfüllt sein. Das ist nur möglich, wenn in der gedachten Schnittfläche sowohl die Normalspannungen  $\sigma$  als auch die Schubspannungen  $\tau$  wirksam sind. Das Bild c zeigt das freigemachte System mit den eingetragenen Schnittkräften  $\sigma \cdot A$  und  $\tau \cdot A$  für das die Gleichgewichtsbedingungen für ein gedrehtes Koordinatensystem aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ F \cdot \cos \alpha - \sigma \cdot A &= 0.\end{aligned}$$

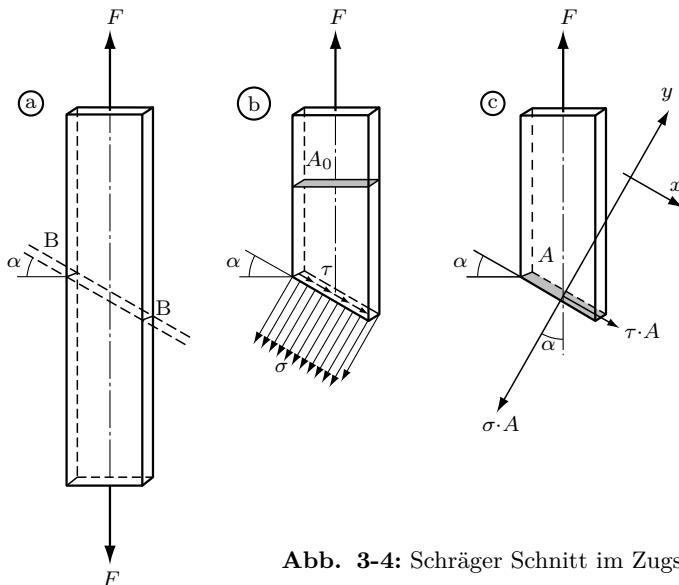


Abb. 3-4: Schräger Schnitt im Zugstab

Daraus folgt nach Einsetzen von  $A = \frac{A_0}{\cos \alpha}$ .

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \cos^2 \alpha.$$

Der Quotient  $F/A_0$  ist die Spannung im Schnitt senkrecht zur Achse. Diese Spannung soll mit  $\sigma_0$  bezeichnet werden.

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \cos^2 \alpha \quad (3-3)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \tau A - F \sin \alpha = 0$$

$$\tau = \frac{F}{A_0} \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{F}{A_0} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\alpha \quad (3-4)$$

Die Gleichungen 3-3/4 zeigen die Abhängigkeit von  $\sigma$  und  $\tau$  vom Neigungswinkel  $\alpha$  der Schnittebene. Für den Fall  $\alpha = 0$  erhält man, wie zu erwarten

$$\sigma = \sigma_0 \quad \text{und} \quad \tau = 0.$$

Besonders interessant ist der Schnitt unter dem Winkel von  $45^\circ$ . Man erhält für

$$\sigma_{45^\circ} = \sigma_0 \cdot \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2} \sigma_0$$

und für

$$\tau_{45^\circ} = \frac{1}{2} \sigma_0 = \tau_{\max}.$$

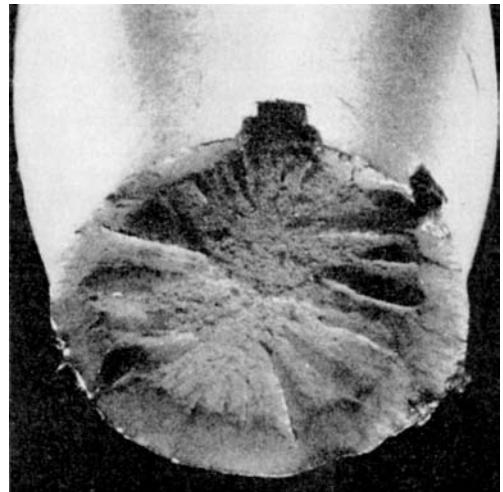
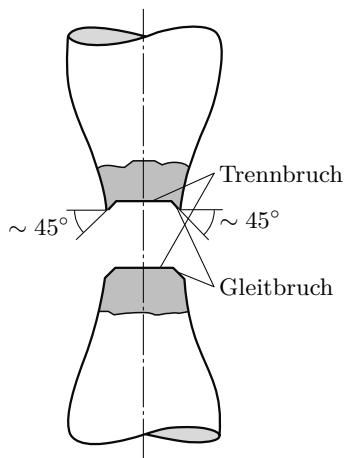
Da  $\sin 2\alpha$  nicht größer als 1 sein kann, ist die Schubspannung unter  $45^\circ$  die maximale Schubspannung.

In einem gezogenen oder gedrückten Stab sind in einem *Schnitt unter  $45^\circ$  zur Stabachse* die maximale Schubspannung  $\tau_{\max} = \sigma_0/2$  zusammen mit einer Normalspannung von  $\sigma_0/2$  wirksam.

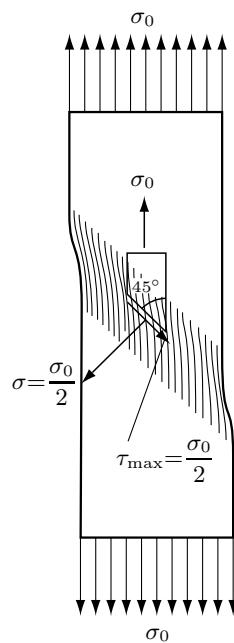
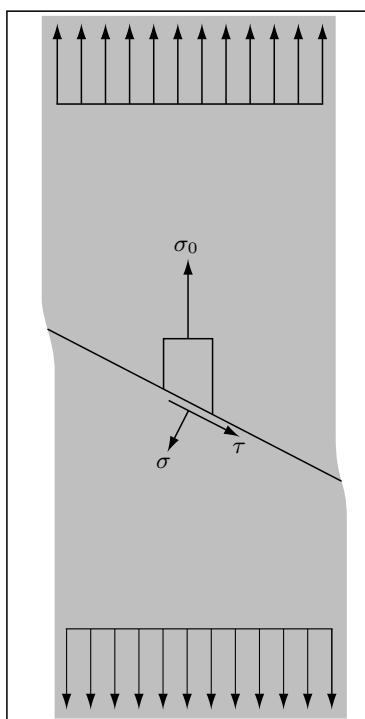
*Diese maximale Schubspannung ist von außerordentlicher Bedeutung für die Zerstörung eines Bauteils.* Es soll an den im Abschnitt 2.3.2 erläuterten Zugversuch eines weichen Stahls angeknüpft werden. Vor dem Bruch beginnt sich der Versuchsstab an einer vorher nicht bestimmbareren Stelle einzuschnüren. Einzelne Gefügeteile gleiten unter  $45^\circ$  aneinander ab. An der Oberfläche erscheinen z.T. Linien in dieser Richtung, die man als Fließlinien bezeichnet. Diese Einschnürung führt zu einer erheblichen Minderung des Stabquerschnitts. Verbunden damit ist eine Zunahme der örtlichen Spannung, die letztlich zum Bruch führt. Dieser wird durch Abgleiten und einen Anriß unter  $45^\circ$  eingeleitet. Die Abb. 3-5 zeigt eine Bruchfläche der beschriebenen Art. Hier soll festgehalten werden, dass der Einfluss der Schubspannung für die Zerstörung von Bauteilen aus weichem Stahl besonders groß ist. Darauf wird im Abschnitt 9.2.1 (Bruchhypthesen) genauer eingegangen.

Wie im Abschnitt 2.7 bereits erläutert, erhöht eine Kerbe die Festigkeit eines Zugstabes. Dabei entspricht die Querschnittsfläche im Kerbgrund der des ungekerbten Stabes. Im Bereich des Kerbgrundes wirken auch in Querrichtung Normalspannungen. Diese vermindern die Schubspannung unter  $45^\circ$  z.T. erheblich. Im Abschnitt 8.3.1 wird dieser Effekt ausführlich beschrieben. Die Ursache des Fließens und damit der Einschnürung entfällt. Der Querschnitt bleibt erhalten, deshalb kann eine höhere Kraft übertragen werden als im ungekerbten Stab. Wegen des völlig anderen Zerstörmechanismus gilt das nicht für schwingende Beanspruchung. Hier führt ein Kerb immer zur Verminderung der Festigkeit.

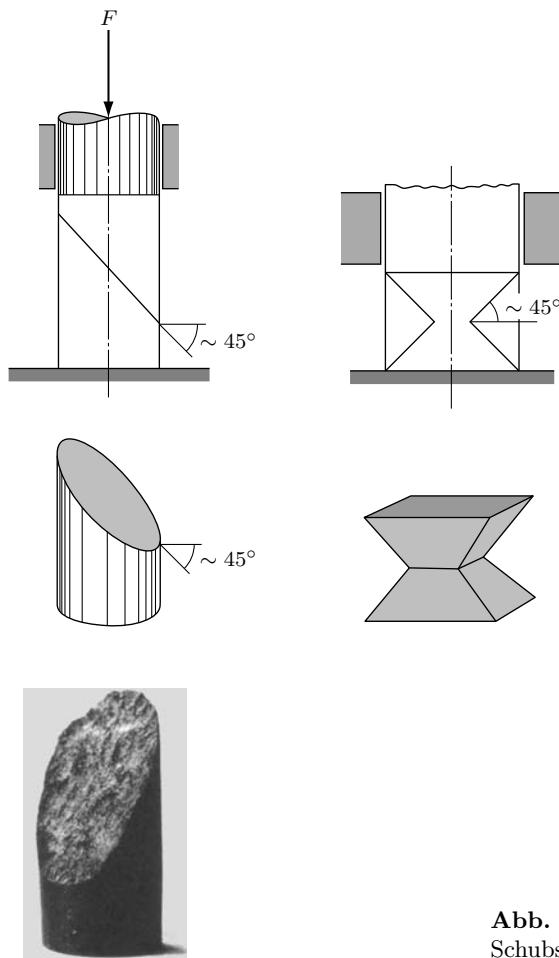
In Abb. 3-6 wird die durch die maximale Schubspannung verursachte Deformation eines auf Zug beanspruchten Bandes gezeigt. Grauguss, Porzellan, Stein, Beton usw. werden im Druckversuch bei genügender Länge des Versuchsstückes in einer etwa unter  $45^\circ$  liegenden Ebene zerstört. Dabei können auch seitlich keilförmige Stücke unter  $45^\circ$  zur Druckrichtung herausbrechen (Abb. 3-7). Die maximale Schubspannung leitet ein Abgleiten der einzelnen Gefügeteile in diesen Ebenen ein.



**Abb. 3-5:** Bruchflächen eines Zugstabs aus weichem Stahl



**Abb. 3-6:** Wirkung der maximalen Schubspannung bei Zug



**Abb. 3-7:** Wirkung der maximalen Schubspannung bei Druck

Die für die Berechnung zu Grunde gelegte Normalspannung  $\sigma$  ist demnach eine reine Rechengröße, die die wirkliche Ursache der Zerstörung nicht erfasst. Die Gleichung 3-1 liefert trotz dieser Tatsache brauchbare Ergebnisse, weil die Zugfestigkeit auf Grund eines Zugversuchs aus der gleichen Beziehung berechnet wird.

### **Beispiel 1 (Abb. 3-8)**

Ein Gelenkträger ist in der skizzierten Weise gelagert und belastet. Der Zuganker soll aus zwei gegeneinander gesetzten und miteinander verbundenen U-Profilen gefertigt werden. Zu bestimmen ist die notwendige Profilgröße für  $\sigma_{zul} = 140 \text{ N/mm}^2$ .

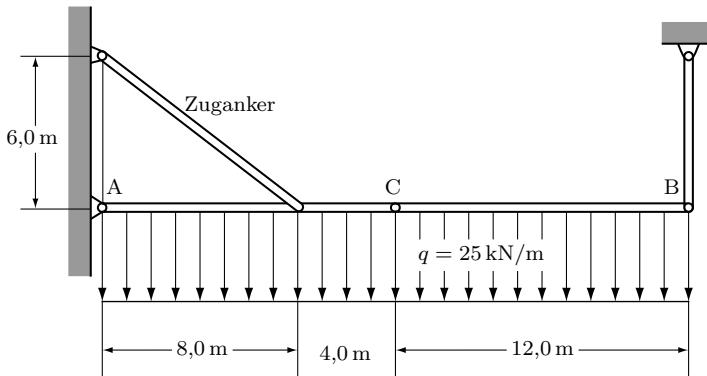


Abb. 3-8: Gelenkträger

### Lösung (Abb. 3-9)

Das System wird freigemacht. Die Gelenkkraft in C ergibt sich aus der symmetrischen Belastung des rechten Teils. Für den linken Teil wird die Momentengleichung für A aufgestellt.

$$\sum M_A = 0$$

$$F_S \cdot \sin \alpha \cdot 8,0 \text{ m} - 150 \text{ kN} \cdot 12,0 \text{ m} - 300 \text{ kN} \cdot 6,0 \text{ m} = 0$$

Mit  $\tan \alpha = \frac{6,0 \text{ m}}{8,0 \text{ m}}$  wird  $\alpha = 36,9^\circ$  ermittelt.

$$F_S = \frac{1}{8,0 \text{ m} \cdot \sin 36,9^\circ} (150 \cdot 12 + 300 \cdot 6) \text{ kNm}$$

$$F_S = 750 \text{ kN}$$

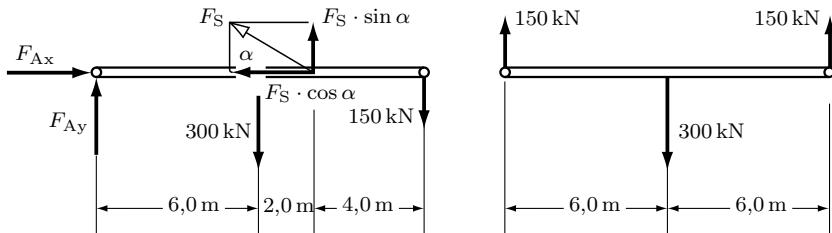


Abb. 3-9: Freigemachter Gelenkträger

Die mindestens erforderliche Querschnittsfläche beträgt für beide Profile

$$A_{\text{erf ges}} = \frac{F}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{750 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}^2}{140 \text{ N}} \cdot \frac{\text{cm}^2}{100 \text{ mm}^2} = 53,6 \text{ cm}^2.$$

Für einen Träger sind es

$$A_{\text{erf}} = 26,8 \text{ cm}^2.$$

Aus der Tabelle 10C im Anhang des Buches entnimmt man das Profil U 180 mit  $A = 28,0 \text{ cm}^2$ . Jetzt kann die tatsächlich auftretende Spannung berechnet werden.

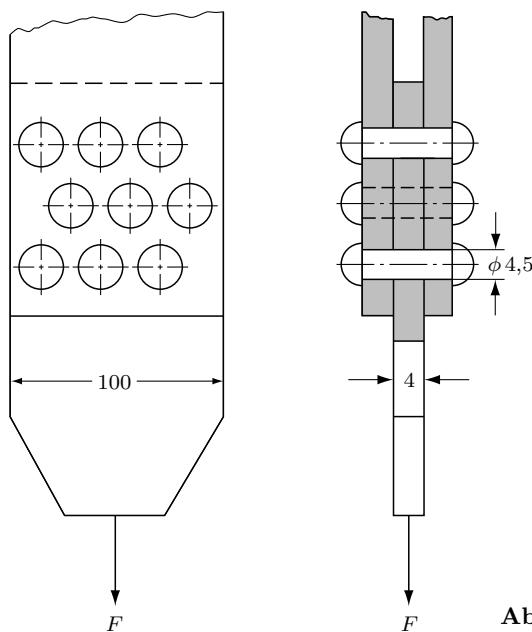
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{750 \cdot 10^3 \text{ N}}{2 \cdot 28,0 \cdot 100 \text{ mm}^2}$$

$$\underline{\sigma = 133,9 \text{ N/mm}^2 < 140 \text{ N/mm}^2}.$$

Das ist der Nachweis für die richtige Dimensionierung des Zugankers.

### **Beispiel 2 (Abb. 3-10)**

Für die abgebildete Nietverbindung ist die maximale Zugspannung  $\sigma_{\text{max}}$  für eine Belastung von  $F = 20 \text{ kN}$  zu bestimmen.



**Abb. 3-10:** Nietverbindung

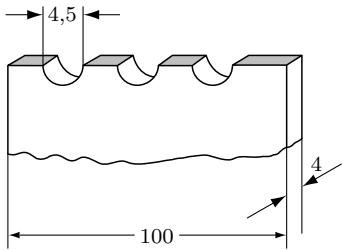


Abb. 3-11: Geschnittene Nietverbindung

**Lösung (Abb. 3-11)**

Die maximale Spannung ist im minimalen Querschnitt wirksam. Da das Band durch drei Nietbohrungen geschwächt ist, ergibt sich eine minimale Querschnittsfläche wie sie in Abb. 3-11 skizziert ist.

$$A_{\min} = (100 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 4,5) \text{ mm}^2 = 346 \text{ mm}^2$$

$$\underline{\sigma_{\max}} = \frac{F}{A_{\min}} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N}}{346 \text{ mm}^2} = \underline{57,8 \text{ N/mm}^2}$$

**Beispiel 3**

An einem zylindrischen Versuchsblock mit dem Durchmesser  $d = 30 \text{ mm}$  wird ein Druckversuch durchgeführt. Bei einer Druckbelastung von  $F = 378 \text{ kN}$  bricht der Probenkörper unter  $45^\circ$ . Zu bestimmen sind

- a) die Druckfestigkeit  $\sigma_{dB}$ ,
- b) Normal- und Schubspannung in der Bruchebene unmittelbar vor dem Bruch.

**Lösung**

zu a)

$$\underline{\sigma_{dB}} = \sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{378 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 4}{\pi \cdot 30^2 \text{ mm}^2} = \underline{535 \text{ N/mm}^2}$$

zu b) Nach den Gleichungen 3-3/4 gilt

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_0}{2} = \sigma$$

$$\underline{\tau_{\max}} = 267 \text{ N/mm}^2; \quad \underline{\sigma = 267 \text{ N/mm}^2}$$

### 3.3 Die Formänderung

Ein auf Zug beanspruchter zylindrischer Stab erfährt eine Formänderung nach Abb. 3-12. Er wird sowohl länger als auch im Durchmesser kleiner. Die auf die Ursprungslänge  $l_0$  bezogene *Verlängerung*  $\Delta l$  bezeichnet man als *Dehnung* (siehe Abschnitt 2.3).

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (3-5)$$

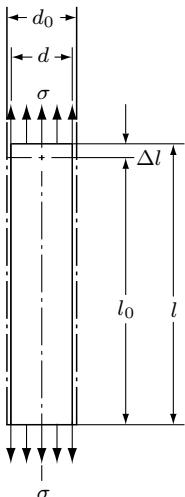


Abb. 3-12: Formänderung bei einachsigem Zug

Analog dazu bezieht man die Änderung des Durchmessers  $\Delta d = d_0 - d$  auf den ursprünglichen Durchmesser  $d_0$ . Dieser Quotient wird *Querkürzung* oder *Querkontraktion* genannt und mit  $\varepsilon_q$  bezeichnet.

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0}. \quad (3-6)$$

Das Verhältnis von Querkürzung zu Dehnung wird *Querkontraktionszahl* oder *Querzahl*  $\mu$  genannt. Auch die Bezeichnung *Poissonsche*<sup>1</sup> Zahl ist üblich, die jedoch manchmal für den Kehrwert steht.

$$\mu = \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon}. \quad (3-7)$$

Für Metalle im elastischen Bereich liegt der Wert  $\mu$  bei etwa 0,3. Es gibt für ideal elastische Stoffe eine Beziehung (3-10), die die Berechnung von  $\mu$  aus dem Elastizitäts- und Gleitmodul ermöglicht.

---

<sup>1</sup>Poisson, Simon-Denis (1781–1840), französischer Physiker

Für Druckbeanspruchung beibehalten alle Beziehungen erhalten. Die Dehnung und die Querkontraktion werden negativ wegen der negativen Werte  $\Delta l$  und  $\Delta d$ . Analog zu den obengenannten Begriffen spricht man in diesem Falle von *Verkürzung*, *Stauchung* anstatt Dehnung und *Querverlängerung* anstatt Querkürzung.

An dieser Stelle soll die Änderung des Volumens bei einer Zug- bzw. Druckbeanspruchung berechnet werden.

Das ursprüngliche Volumen betrug

$$V_0 = A_0 l_0 \quad \text{mit} \quad A_0 = \frac{\pi}{4} d_0^2.$$

Das Volumen nach der Deformation beträgt

$$V = A \cdot l \quad \text{mit} \quad A = \frac{\pi}{4} d^2.$$

Die Volumenänderung ist

$$\begin{aligned} \Delta V &= V - V_0 \\ &= Al - A_0 l_0 \quad \text{mit} \quad A = A_0 \left( \frac{d}{d_0} \right)^2 \quad \text{und} \quad l = l_0 + \Delta l \\ \Delta V &= A_0 \left( \frac{d}{d_0} \right)^2 (l_0 + \Delta l) - A_0 l_0 \end{aligned}$$

Mit  $d = d_0 - \Delta d$  erhält man

$$\begin{aligned} \Delta V &= A_0 \left[ \left( \frac{d_0}{d_0} \right)^2 - \frac{2\Delta d d_0}{d_0^2} + \left( \frac{\Delta d}{d_0} \right)^2 \right] (l_0 + \Delta l) - A_0 l_0 \\ \Delta V &= A_0 (1 - 2\varepsilon_q + \varepsilon_q^2) (l_0 + \Delta l) - A_0 l_0. \end{aligned}$$

Bei Deformation im elastischen Bereich ist die Querkontraktion  $\varepsilon_q$  sehr klein. Deshalb ist in der obigen Gleichung  $\varepsilon_q^2$  viel kleiner als  $\varepsilon_q$  und wird deshalb vernachlässigt. Nach dem Ausklammern und Zusammenfassen erhält man

$$\Delta V = A_0 (\Delta l - 2\varepsilon_q l_0 - 2\varepsilon_q \Delta l).$$

Dieser Wert wird auf das ursprüngliche Volumen bezogen

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V_0} &= \frac{A_0 (\Delta l - 2\varepsilon_q l_0 - 2\varepsilon_q \Delta l)}{A_0 l_0} \\ \frac{\Delta V}{V_0} &= \varepsilon - 2\varepsilon_q - 2\varepsilon_q \varepsilon. \end{aligned}$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes ist als Produkt von zwei Dehnungen um eine Größenordnung kleiner als die anderen Glieder. Aus diesem Grunde wird es vernachlässigt.

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon - 2\varepsilon_q.$$

Nach Einführung von  $\varepsilon_q = \mu \cdot \varepsilon$  nach Gl. 3-7 ergibt sich für die Volumenänderung

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = (1 - 2\mu)\varepsilon. \quad (3-8)$$

Es ist leicht einzusehen, dass für eine Zugbeanspruchung das Volumen größer und für eine Druckbeanspruchung kleiner werden muss. Da aber für Zug  $\varepsilon$  positiv, für Druck  $\varepsilon$  negativ ist, muss die Klammer immer positiv sein, d.h.

$$1 > 2\mu \quad \mu < \frac{1}{2}.$$

Für Werkstoffe, die unter Belastung bei gleichbleibendem Volumen nur die Gestalt ändern, ist im Extremfall  $\mu = 0,50$ . Dieser Wert gilt für Gummi. Das ist beim Einbau von O-Ringen zu beachten. Die Nut für den O-Ring muss so groß sein, dass der durch die Dichtkraft deformierte Ring genügen Platz hat, denn die Kraft kann den Ring nicht „zusammendrücken“, sondern ihn nur deformieren.

Nach dem HOOKESchen Gesetz (Abschnitt 2.3) kann man für elastische Stoffe die Verlängerung oder Verkürzung eines zug- oder druckbeanspruchten Teiles berechnen

$$\begin{aligned} \sigma &= E \cdot \varepsilon & \sigma &= E \frac{\Delta l}{l_0} \\ \Delta l &= \frac{\sigma}{E} l_0 = \frac{F \cdot l_0}{A \cdot E}. \end{aligned} \quad (3-9)$$

Diese Beziehung bestätigt die einleuchtenden Überlegungen, dass die Verlängerung bzw. Verkürzung um so größer ist, je größer die Kraft und die Ausgangslänge und je kleiner die Querschnittsfläche und der  $E$ -Modul sind.

Der  $E$ -Modul ist eine Kenngröße für das elastische Verhalten bei Normalspannung, der  $G$ -Modul bei Schubspannung. Von beiden hängt deshalb das räumliche Dehnungsverhalten ab, über das auch die Querzahl eine Aussage macht. Aus diesem Grunde muss es für elastische Stoffe einen Zusammenhang zwischen den drei Größen geben. Dieser wird nachfolgend abgeleitet.

Die Abb. 3-13 zeigt links ein unbelastetes, rechts das gleiche durch Normalspannung belastete Element. Das hochkant stehende Quadrat ABCD deformiert sich zu der Raute EHIK. Das erfolgt durch die in schrägen Schnitten wirkenden Schubspannungen. Der oben liegende *rechte* Winkel des Quadrats verringert sich um den Winkel  $\gamma$ , dessen Größe nach dem HOOKEschen Gesetz (2-3)

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

ist. Aus dem Dreieck IOH am belasteten Element der Abb. 3-13 erhält man mit  $\varepsilon_q = \mu \cdot \varepsilon$

$$\tan\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{l}{2}(1 - \mu \cdot \varepsilon)}{\frac{l}{2}(1 + \varepsilon)} = \frac{1 - \mu \cdot \varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad (1)$$

Das Additionstheorem für den Tangens führt auf

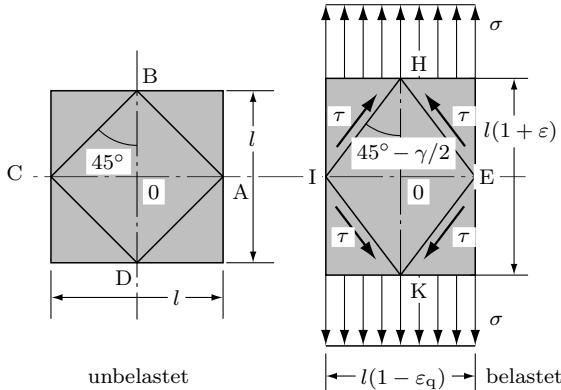
$$\tan\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan 45^\circ - \tan \frac{\gamma}{2}}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan \frac{\gamma}{2}}$$

Dabei sind  $\tan 45^\circ = 1$  und  $\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$  (sehr kleine Winkel).

$$\tan\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) werden gleichgesetzt

$$(1 - \mu \cdot \varepsilon) \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) = (1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)$$



**Abb. 3-13:** Formänderung eines Elementes bei Zugbelastung

Das Produkt  $\varepsilon \cdot \gamma$  ist von höherer Ordnung klein und wird deshalb vernachlässigt. So erhält man nach Vereinfachungen

$$\gamma = \varepsilon(1 + \mu)$$

und mit Hilfe der Hooke'schen Gesetze (Gleichung 2-2/3)

$$\frac{\tau}{G} = \frac{\sigma_0}{E}(1 + \mu)$$

Jetzt muss ein Zusammenhang zwischen der Schubspannung im Schnitt unter  $45^\circ$  und der am Element wirkenden Normalspannung hergestellt werden. Diesen liefert die Gleichung 3-4. Es gilt

$$\tau = \frac{\sigma_0}{2},$$

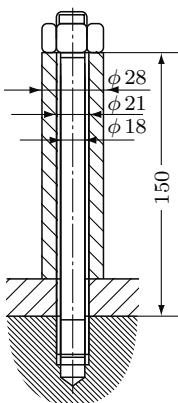
was nach einfachen Umwandlungen auf

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (3-10)$$

führt.

### **Beispiel 1 (Abb. 3-14)**

Abgebildet ist eine Dehnschraube M 20 × 1,5, die über eine Hülse einen Flansch anzieht. Die Wirkung solcher Dehnschrauben ist im nachfolgenden Abschnitt 3.4 behandelt. Nach erfolgtem Anzug der Mutter soll die Hülse mit 70 kN gegen den Flansch drücken. Für diese Bedingung ist zu ermitteln, um welchen Winkel der Schraubenschlüssel nach erfolgtem Anschlag weiter anzuziehen ist.



**Abb. 3-14:** Dehnschraube

Dieser Anschlag muss so sein, dass sich alle Auflageflächen (Gewinde, Flansch und Hülse) „setzen“. Die Zusammendrückung des Flansches soll folgendermaßen berücksichtigt werden: nur Werkstoffteile die unmittelbar unter der Aufsatzfläche der Hülse liegen, sind belastet. Es gibt genauere Verfahren, diesen Effekt zu berücksichtigen, jedoch ist bei den vorgegebenen Proportionen der Einfluss des Flansches sehr gering. Schraube, Hülse und Flansch sind aus Stahl gefertigt.

### Lösung

Es muss ermittelt werden, um welchen Betrag  $\Delta l$  sich beim Anzug nach dem Anschlag der Abstand Oberkante Mutter – Schraubenende ändert. Dieser setzt sich aus der Verlängerung der Schraube und der Verkürzung der Hülse zusammen.

$$\Delta l = \Delta l_S + \Delta l_H.$$

Nach der Gleichung 3-9 erhält man

$$\Delta l = \frac{l_S \cdot F_S}{E \cdot A_S} + \frac{l_H \cdot F_H}{E \cdot A_H}.$$

Die wirksamen Längen  $l$  und die wirkende Kraft  $F$  sind gleich

$$\begin{aligned}\Delta l &= \frac{l \cdot F}{E} \left( \frac{1}{A_S} + \frac{1}{A_H} \right) \\ &= \frac{150 \text{ mm} \cdot 70 \cdot 10^3 \text{ N}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2} \left( \frac{1}{254,5 \text{ mm}^2} + \frac{1}{269,4 \text{ mm}^2} \right) \\ \Delta l &= 0,382 \text{ mm}.\end{aligned}$$

Bei einer Gewindesteigung von 1,5 mm ergibt sich

$$\underline{Z} = \frac{\Delta l}{1,5 \text{ mm}} = \frac{0,382 \text{ mm}}{1,5 \text{ mm}} = \underline{0,25}.$$

Nach erfolgtem Anschlag muss die Mutter um etwa 1/4-Umdrehung angezogen werden, um eine axiale Belastung von 70 kN zu bewirken.

### Beispiel 2 (Abb. 3-15)

Die auf der Vertikalen liegenden Punkte A und B sollen mit den Seilen mit einer Kraft  $F$  gegeneinander verspannt werden. Diese Kraft wird durch Messung der Seilverlängerung nach erfolgtem Anschlag an der Spannvorrichtung eingestellt. Die Abmessungen von Spannvorrichtung und Rolle sind vernachlässigbar. Die Halterungen A und B sollen unnachgiebig angenommen werden. Zu bestimmen

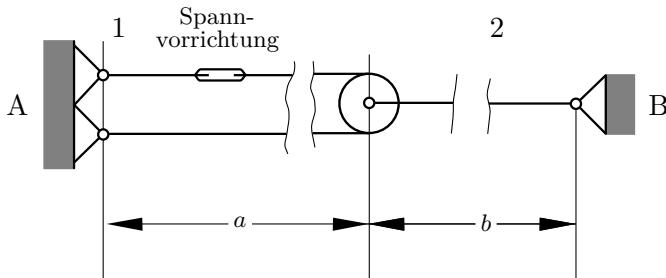


Abb. 3-15: Spannvorrichtung

ist die erforderliche Verlängerung des Seils an der Spannvorrichtung. Die Lösung soll allgemein und für die nachfolgenden Daten erfolgen.

$$F = 30 \text{ kN}; \quad a = 8,0 \text{ m}; \quad b = 4,0 \text{ m}$$

Seil 1 : Nenndurchmesser 10 mm; metallischer Querschnitt  $A = 40,0 \text{ mm}^2$

Seil 2 : Nenndurchmesser 14 mm; metallischer Querschnitt  $A = 77,0 \text{ mm}^2$

$E$ -Modul für beide Seile  $7 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$

### Lösung

Ausgegangen wird vom HOOKESchen Gesetz, Gleichung 3-9. Das Seil 1 ist mit  $F/2$  belastet und hat die Länge  $2a$ .

$$\Delta l_1 = \frac{0,50F \cdot 2a}{A_1 \cdot E}.$$

Für das Seil 2 gilt

$$\Delta l_2 = \frac{F \cdot b}{A_2 \cdot E}.$$

Die Verlängerung, die an der Spannvorrichtung gemessen wird, ist

$$\Delta l_S = \Delta l_1 + 2 \cdot \Delta l_2,$$

Der Faktor 2 berücksichtigt die Übersetzung an der Rolle. Damit erhält man

$$\underline{\Delta l_S} = \frac{F \cdot a}{A_1 \cdot E} + \frac{2F \cdot b}{A_2 \cdot E} = \frac{F}{E} \left( \frac{a}{A_1} + \frac{2b}{A_2} \right).$$

Das ist die allgemeine Lösung, deren Auswertung den folgenden Wert ergibt:

$$\underline{\Delta l_S} = \frac{3 \cdot 10^4 \text{ N}}{7 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2} \left( \frac{8,0 \cdot 10^3}{40,0} + \frac{2 \cdot 4,0 \cdot 10^3}{77,0} \right) \frac{\text{mm}}{\text{mm}^2} = \underline{130 \text{ mm}}.$$

Die Spannkraft wird im Laufe der Zeit kleiner, da die Verbindungselemente an den Berührungsstellen sich setzen und das Seil sich streckt. Die Berücksichtigung dieser Einflüsse übersteigt den Rahmen dieses Fachs.

### Beispiel 3 (Abb. 3-16)

Ein Balken ist wie abgebildet gelagert. Die zulässige Spannung für die Zugstange beträgt  $\sigma_{zul} = 140 \text{ N/mm}^2$ .

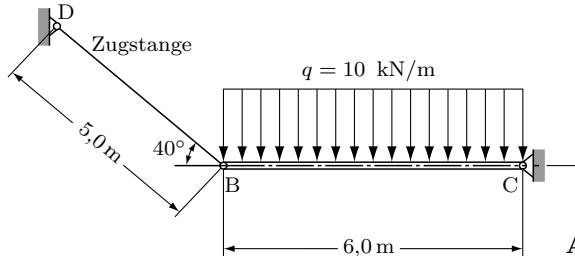


Abb. 3-16: Abgehängter Balken

Zu bestimmen sind

- der erforderliche Durchmesser der Zugstange,
- die Verschiebung des Punktes B für einen starr angenommenen Balken.

### Lösung (Abb. 3-17)

Der Kräfteplan des freigemachten Systems nach Abb. 3-17a liefert mit  $F_{\text{res}} = 60 \text{ kN}$

$$F_B = \frac{F_{\text{res}}}{2 \cdot \cos 50^\circ} = 46,67 \text{ kN}$$

Der erforderliche Querschnitt der Zugstange ist damit

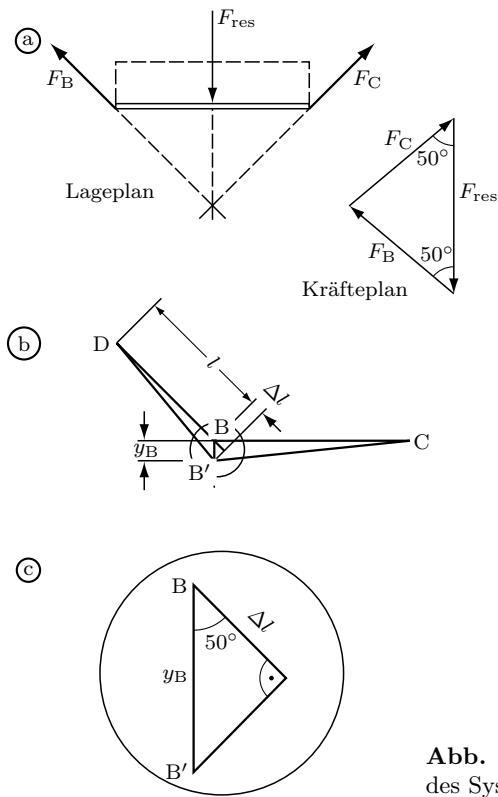
$$A_{\text{erf}} = \frac{F}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{46,67 \cdot 10^3 \text{ N}}{140 \text{ N/mm}^2} = 334 \text{ mm}^2$$

Für Rundstahl erhält man den Durchmesser

$$d_{\text{erf}} = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 20,6 \text{ mm}$$

Wird die Stange mit 22 mm ausgeführt, führt die Gleichung 3-9 auf eine Verlängerung

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{A \cdot E} = \frac{46,67 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ mm} \cdot 4}{\pi \cdot 22^2 \text{ mm}^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2} = 2,92 \text{ mm}$$



**Abb. 3-17:** Geometrie der Formänderung des Systems nach Abb. 3-16

Infolge dieser Verlängerung erfolgt eine Verschiebung des Punktes B nach B'. Der Punkt B' ist der Schnittpunkt des Kreisbogens mit dem Radius  $l_0 + \Delta l$  und des Kreisbogens mit dem Radius der Balkenlänge (Bild b). Wegen der sehr kleinen Dehnung kann man die Bögen durch Geraden ersetzen. Man erhält ein Dreieck wie es vergrößert Bild c zeigt. Aus diesem folgt für die Verschiebung

$$\underline{y_B} = \frac{\Delta l}{\cos 50^\circ} = \underline{4,54 \text{ mm}}$$

Der Punkt B verlagert sich 4,54 mm nach unten.

#### **Beispiel 4 (Abb. 3-18)**

Zwei Stahldrähte sind wie skizziert mit der Kraft  $F$  belastet. Für die unten gegebenen Daten ist die Verschiebung des Lastangriffspunktes zu bestimmen. Es handelt sich hier um das Grundelement eines Fachwerks: zwei Stäbe im belasteten Knoten vereinigt. Auf der unten erarbeiteten Methode basiert ein Verfahren

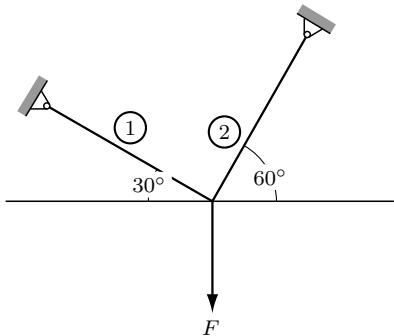


Abb. 3-18: Kraft an zwei Drähten

für die Ermittlung der Deformation von Fachwerken.

$$F = 200 \text{ N}; \quad l_1 = l_2 = 1,00 \text{ m}; \quad d_1 = d_2 = 1,0 \text{ mm}$$

### Lösung (Abb. 3-19)

Aus dem Kräftedreieck folgt

$$S_1 = F \cdot \sin 30^\circ = 100 \text{ N}$$

$$S_2 = F \cdot \cos 30^\circ = 173 \text{ N}$$

Damit ist

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A} = 127 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{A} = 221 \text{ N/mm}^2$$

und nach Gleichung 3-9

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 \cdot l}{E} = \frac{127 \text{ N/mm}^2 \cdot 1000 \text{ mm}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2} = 0,61 \text{ mm}$$

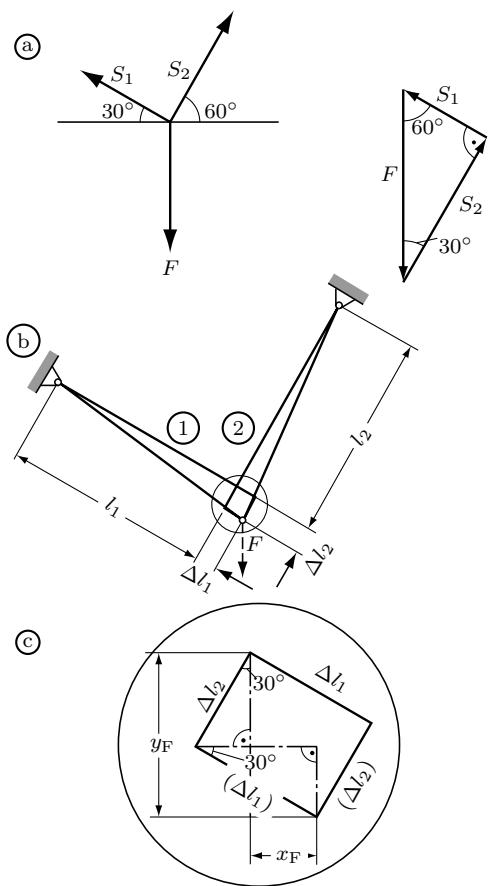
$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 \cdot l}{E} = 1,05 \text{ mm}$$

Der verlagerte Lastangriffspunkt ergibt sich nach Bild b als Schnittpunkt der beiden Kreisbögen mit den Radien  $l + \Delta l_1$  und  $l + \Delta l_2$ . Da aber  $\Delta l \ll l$  ist, kann man die Kreisbögen durch die Tangenten ersetzen und die Winkeländerung der Seile vernachlässigen. Die Strecken  $\Delta l_1$  und  $(\Delta l_1)$  bzw.  $\Delta l_2$  und  $(\Delta l_2)$  sind deshalb im vergrößert gezeichneten Ausschnitt (Bild c) parallel. Damit erhält man

$$y_F = \Delta l_1 \cdot \sin 30^\circ + \Delta l_2 \cdot \cos 30^\circ$$

$$y_F = 0,61 \text{ mm} \cdot \sin 30^\circ + 1,05 \text{ mm} \cdot \cos 30^\circ$$

$$\underline{y_F = 1,21 \text{ mm}}$$



**Abb. 3-19:** Verlagerung des Knotens von Abb. 3-18

$$x_F = \Delta l_1 \cdot \cos 30^\circ - \Delta l_2 \cdot \sin 30^\circ$$

$$x_F = 0,61 \text{ mm} \cdot \cos 30^\circ - 1,05 \text{ mm} \cdot \sin 30^\circ$$

$$\underline{x_F = 0}$$

Der Lastangriffspunkt verschiebt sich lotrecht nach unten um den Betrag  $y_F = 1,21 \text{ mm}$ .

## 3.4 Die Formänderungsarbeit

Es soll untersucht werden, welche Arbeit notwendig ist, um die im vorigen Abschnitt beschriebenen Deformationen zu bewirken. Diese Arbeit nennt man *Formänderungsarbeit*.

Die Kraft ist während eines Zugversuchs nicht konstant. Das kann man dem

Zerreißdiagramm Abb. 2-4 entnehmen. Aus diesem Grunde ist die Formänderungsarbeit

$$W_F = \int F \cdot dl$$

Analog zu  $\Delta l = l \cdot \varepsilon$  ist  $dl = l \cdot d\varepsilon$  und für  $F$  wird  $\sigma \cdot A$  eingeführt

$$W_F = A \cdot l \int \sigma \cdot d\varepsilon$$

Das Volumen des Stabes beträgt  $V = A \cdot l$ . Die pro Volumen aufgebrachte Arbeit ist damit

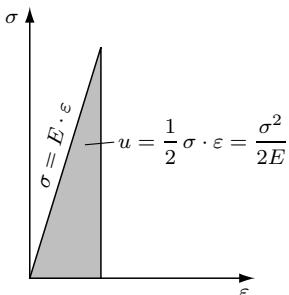
$$u = \frac{W_F}{V} = \int \sigma \cdot d\varepsilon \quad (3-11)$$

Man nennt diese Größe *bezogene Formänderungsarbeit*  $u$ . Sie entspricht der Fläche des  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramms. Falls bis zur Zerstörung belastet wird, ist es die Gesamtfläche, bei geringerer Belastung der entsprechende Teil der Fläche. Bleibt die Deformation im elastischen Bereich, gilt das HOOKESche Gesetz. Es verbleibt die Dreiecksfläche nach Abb. 3-20. Mit  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  erhält man

$$\begin{aligned} u &= E \int \varepsilon \cdot d\varepsilon = E \frac{\varepsilon^2}{2} \\ u &= \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \end{aligned} \quad (3-12)$$

Die von einem Stab aufgenommene Formänderungsarbeit im elastischen Bereich ist

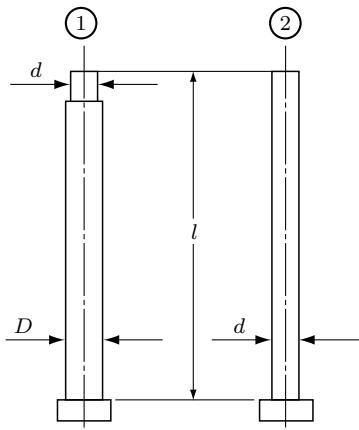
$$W_F = u \cdot V = \frac{1}{2} \frac{F^2}{A^2 \cdot E} \cdot A \cdot l$$



**Abb. 3-20:** Darstellung der Formänderungsarbeit im  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm im elastischen Bereich

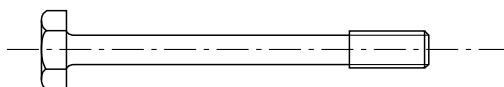
$$W_F = \frac{F^2 \cdot l}{2 \cdot A \cdot E} \quad (3-13)$$

Die physikalische Deutung der Gleichungen 3-12/13 ist: Der Stab nimmt um so mehr Formänderungsarbeit auf, je höher die Spannung ist, bzw. je kleiner die Querschnittsfläche bei vorgegebener Belastung ist. Auf diese Fähigkeit, viel Arbeit aufzunehmen, kommt es vor allem bei dynamischen Belastungen an. Das sind z.B. Stöße an einem Bauteil.



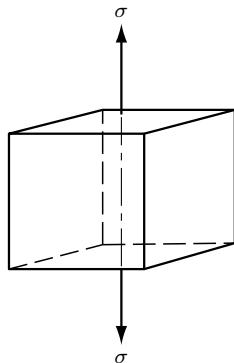
**Abb. 3-21:** Zwei Zugbolzen unterschiedlicher Formänderungsarbeit bei gleicher Belastung

Die beiden Stäbe der Abb. 3-21 seien mit der gleichen Kraft auf Zug belastet. Nach Gl. 3-13 ist die Formänderungsarbeit umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche  $A$ . Danach kann der schlanke Stab eine im Verhältnis  $(D/d)^2$  größere Formänderungsarbeit aufnehmen als der dicke. Deshalb sind Dehnschrauben (Abb. 3-22) im Schaft auf den Kerndurchmesser abgedreht. Damit erhöht man die Spannung im Schaft auf die des Kernquerschnitts im Gewinde. Bei dynamischer Belastung kann eine Dehnschraube so eine erhöhte Energie absorbieren.

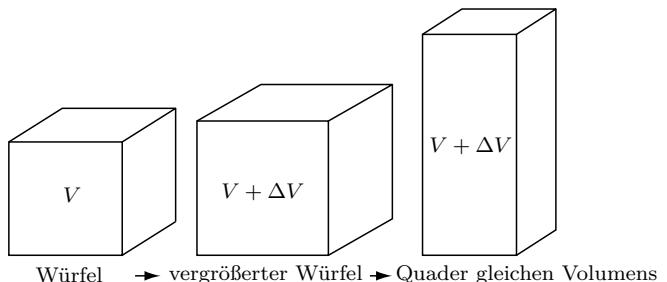


**Abb. 3-22:** Dehnschraube

Die Formungsarbeit kann in zwei Anteile zerlegt werden. Ein Teil der Energie wird aufgewendet, um das Volumen zu vergrößern bzw. zu verkleinern und ein Teil um die Gestalt zu verändern. Diese beiden Anteile werden *Volumenänderungsarbeit*  $u_v$  und *Gestaltänderungsarbeit*  $u_g$  genannt. Als Beispiel soll ein Würfel angeführt werden, der in einer Achse nach Abb. 3-23 auf Zug beansprucht wird. Dabei vergrößert sich sein Volumen und es verändert sich zu einem Quader. Man könnte den Vorgang demnach in zwei Phasen zerlegen. Im



**Abb. 3-23:** Einachsiger Zug am Element



**Abb. 3-24:** Zu den Begriffen Volumen- und Gestaltänderungsarbeit

ersten Schritt dehnt sich das Volumen unter Beibehaltung der Würfelform, im zweiten Schritt wird die Gestalt unter Beibehaltung des Volumens zum Quader umgewandelt (Abb. 3-24). Es muss demnach gelten

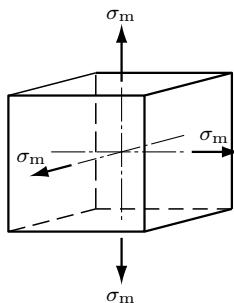
$$u = u_v + u_g$$

Zunächst soll die Volumenänderungsarbeit  $u_v$  berechnet werden. Ein Würfel kann unter Beibehaltung der Form sein Volumen nur ändern, wenn er, wie in Abb. 3-25 dargestellt, allseitig gezogen wird. Da vorher nur einachsiger Zug vorlag, gilt

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma$$

Nach Gleichung 3-8 ist mit  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$  die bezogene Volumenänderung

$$e = \frac{(1 - 2\mu)\sigma}{E}.$$



**Abb. 3-25:** Allseitiger Zug am Element

Analog zur Gleichung 3-12 kann man schreiben

$$\begin{aligned} u_v &= \frac{1}{2} \sigma_m \cdot e \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sigma \cdot \frac{1-2\mu}{E} \sigma \\ u_v &= \frac{1-2\mu}{6E} \sigma^2. \end{aligned} \tag{3-14}$$

Wie vorher ausgeführt, muss gelten

$$\begin{aligned} u &= u_g + u_v \\ u_g &= u - u_v \\ u_g &= \frac{\sigma^2}{2E} - \frac{1-2\mu}{6E} \sigma^2 \\ u_g &= \frac{\sigma^2}{E} \left( \frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{6} \right). \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Gestaltungsänderungsarbeit

$$u_g = \frac{1+\mu}{3E} \sigma^2. \tag{3-15}$$

### **Beispiel 1 (Abb. 3-18)**

Das Beispiel 4 des Abschnittes 3.3 soll mit dem Begriff der Formänderungsarbeit gelöst werden. Jedoch ist es auf diesem Wege nur möglich, die Verlagerung des Lastangriffspunktes in Krafrichtung zu bestimmen.

### **Lösung**

Nach Gleichung 3-13 wird in dem System folgende Formänderungsarbeit gespeichert

$$W_F = \frac{S_1^2 \cdot l_1}{2A_1 \cdot E_1} + \frac{S_2^2 \cdot l_2}{2A_2 \cdot E_2}.$$

Für gleiche Stäbe ist unter Beachtung  $S_1 = F \cdot \sin 30^\circ$ ;  $S_2 = F \cdot \cos 30^\circ$

$$W_F = \frac{F^2 \cdot l}{2A \cdot E} (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) = \frac{F^2 \cdot l}{2A \cdot E}.$$

Diese Arbeit wird beim Aufbringen der Kraft  $F$  am elastischen System verrichtet. Für ein elastisches System gilt allgemein (s. z.B. Abb. 3-20)

$$W_F = \frac{1}{2} \cdot F \cdot y_F.$$

Die Gleichsetzung führt auf

$$\underline{y_F} = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} = \frac{200 \text{ N} \cdot 1000 \text{ mm}}{(\pi/4)1,0^2 \text{ mm}^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2} = \underline{1,21 \text{ mm}}.$$

Die Verlagerung in  $x$ -Richtung kann hier nicht berechnet werden, da die nach unten gerichtete Kraft horizontal keine Arbeit verrichtet. Es ergeben sich bei dem oben vorgeführten Ansatz immer nur die Verlagerungen in Kraftrichtung. Besonders beachtenswert ist, dass man ohne Untersuchung einer u.U. komplizierten Geometrie nach Abb. 3-19 zum Ergebnis kommt, was einen erheblichen Vorteil bringen kann.

### **Beispiel 2**

Welche Arbeit muss etwa aufgewendet werden, um einen genormten Zerreißstab  $d = 10 \text{ mm}$ ;  $l = 100 \text{ mm}$  aus Stahl mit der Zugfestigkeit  $R_m = 398 \text{ N/mm}^2$  und der Bruchdehnung  $A = 34,8\%$  zu zerreißen?

### **Lösung**

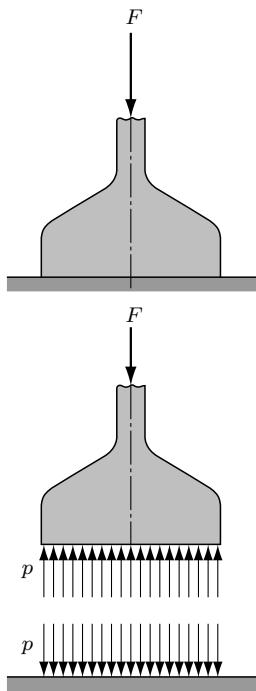
Es muss näherungsweise die vom  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm eingeschlossene Fläche bestimmt werden. Es sind nur die Abmessungen des Rechteckes bekannt, in die dieses Diagramm eingeschrieben ist, und zwar  $R_m \times A$  (s. Abb. 2-4). Für Stahl mit dieser Bruchdehnung kann man annehmen, dass etwa 80 % dieses Rechteckes von der Fläche des Zerreißdiagramms eingenommen werden.

$$\begin{aligned} W_F &= u \cdot V \approx 0,80 \cdot R_m \cdot A \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot l \\ W_F &\approx 0,8 \cdot 398 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 0,348 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 \text{ mm}^2 \cdot 100 \text{ mm} \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{mm}} \\ W_F &\approx 870 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

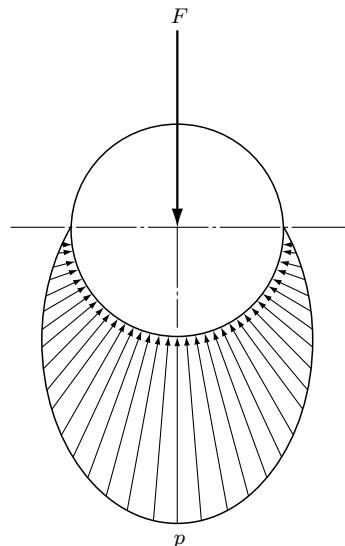
## 3.5 Flächenpressung, Lochleibung

Eine Kraft kann von einem zum anderen Bauteil nur über eine bestimmte Querschnittsfläche übertragen werden. Soll z.B. eine schwere Maschine aufgestellt werden, dann ist zu untersuchen, ob die Auflagefläche nicht so stark belastet ist, dass sie sich unzulässig deформiert. Für ebene Berührungsflächen kann man eine etwa gleichmäßige Verteilung der Kraft auf die Fläche voraussetzen (Abb. 3-26). Die *Druckbelastung pro Flächeneinheit* nennt man *Flächenpressung* und bezeichnet sie mit  $p$

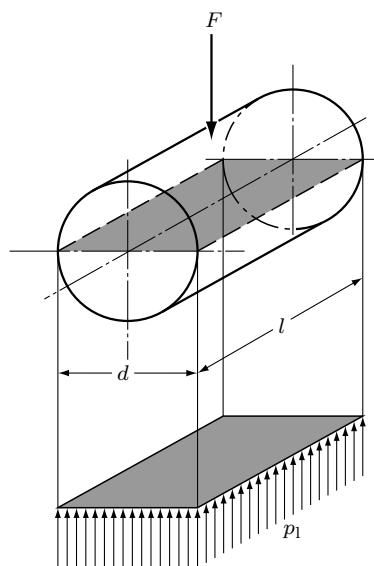
$$p = \frac{F}{A}.$$



**Abb. 3-26:** Zur Definition des Begriffs Flächenpressung



**Abb. 3-27:** Ungleichmäßige Flächenpressung an einem Bolzen



**Abb. 3-28:** Zur Definition des Begriffs Lochleibung

Die Flächenpressung hat die gleiche Dimension wie die Spannung, sie ist aber im Gegensatz zur Spannung ein Maß für eine *außen* an der Oberfläche eines Bauteils wirkende Belastung, demnach etwa mit der Streckenlast vergleichbar.

Die Flächenpressung eines in einem Zylinder eingesetzten Bolzens ist nicht konstant. In Richtung der angreifenden Kraft ist die maximale Flächenpressung wirksam. Qualitativ ist die Belastung am Bolzen in der Abb. 3-27 dargestellt. Da die komplizierte Verteilung der Pressung rechnerisch kaum erfassbar ist, führt man als Rechengröße die auf die projizierte Fläche des Bolzens nach Abb. 3-28 bezogene Kraft  $F$  ein. Man nennt diese Größe *Lochleibung*.

$$p_L = \frac{F}{d \cdot l}.$$

Durch Annahme entsprechender Werte für die zulässige Lochleibung  $p_L$  berücksichtigt man die Tatsache, dass örtlich die Flächenpressung viel größer sein kann, als diese reine Rechengröße.

### **Beispiel**

Die Lochleibung der Niete Abb. 3-10 (Beispiel 2, Abschnitt 3.2) soll unter der Annahme gleicher Lastverteilung auf alle Niete berechnet werden.

### **Lösung**

Die Belastung pro Niet beträgt

$$F = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N}}{9} = 2222 \text{ N}$$

Die Lochleibung ist damit

$$p_L = \frac{F}{A} = \frac{2222 \text{ N}}{4,0 \text{ mm} \cdot 4,5 \text{ mm}} = \underline{\underline{124 \text{ N/mm}^2}}$$

## 3.6 Zusammenfassung

Die Berechnung der Zug- oder Druckspannung im Querschnitt eines Prismas bei zentrischer Kraftein teilung erfolgt nach der Gleichung

$$\sigma_{z;d} = \frac{F}{A}. \quad (3-1)$$

Die Gleichung ist nicht anwendbar für Druckbeanspruchung von Stäben (siehe Knickung Kapitel 7) und bei Vorhandensein von Kerben (siehe Kapitel 10).

Im Schnitt, der nicht senkrecht zur Belastungssachse liegt, treten neben Normalspannungen zusätzlich Schubspannungen auf (Gl. 3-3/4). Im *Schnitt unter 45°* zur Achse wirken die maximalen Schubspannungen von der Größe

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \frac{F}{A} = \frac{1}{2} \sigma_0$$

neben den Normalspannungen

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{1}{2} \frac{F}{A} = \frac{1}{2} \sigma_0.$$

Die Schubspannungen haben eine entscheidende Bedeutung bei der Zerstörung des Werkstoffes (Fließlinien, Einschnürung, Bruch spröder Werkstoffe bei Druck; siehe auch Abschnitt 8.3 und 9.3.1).

Zugspannungen verursachen Dehnung und Querkürzung:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0}. \quad (3-5/6)$$

Das Verhältnis dieser beiden Werte ist die Querzahl

$$\mu = \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon}. \quad (3-7)$$

Für Metalle ist  $\mu \approx 0,3$ .

Zwischen den drei wichtigsten Kenngrößen eines Werkstoffs  $E$ -Modul,  $G$ -Modul und Querzahl besteht die Beziehung

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1. \quad (3-10)$$

Diese Gleichung gilt für ideal homogenes und elastisches Material.

Aus dem HOOKESchen Gesetz kann man die Verlängerung bzw. Verkürzung eines zylindrischen Stabes unter der Einwirkung einer axialen Kraft berechnen

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} \cdot l_0 = \frac{F \cdot l_0}{A \cdot E}. \quad (3-9)$$

Die bezogene Formänderungsarbeit eines im elastischen Bereich gezogenen (gedrückten) Stabes beträgt

$$u = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (3-12)$$

Daraus folgt die Formänderungsarbeit

$$W_F = \frac{F^2 \cdot l}{2A \cdot E} \quad (3-13)$$

Dieser Gleichung entnimmt man, dass ein schlanker Stab, der hoch belastet ist, eine größere Formänderungsarbeit aufnehmen kann als ein dicker bei gleicher Belastung (Anwendung: Dehnschraube).

Bei Belastung über die  $E$ -Grenze hinaus ist eine Berechnung der Formänderungsarbeit nicht möglich. In diesem Falle entspricht die vom  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm eingeschlossene Fläche der bezogenen Arbeit  $u$ .

Daraus folgt, dass hochfeste Werkstoffe mit geringer Dehnung u.U. mit weniger Arbeit – jedoch größerer Kraft – zerstört werden können als zähe Stoffe geringerer Bruchfestigkeit. Das ist bei der Auswahl von Werkstoffen zu beachten.

Die Flächenpressung, die im Gegensatz zur Spannung eine äußere Belastung ist, berechnet sich nach der Gleichung

$$p = \frac{F}{A}.$$

Die Pressung von Bolzen bezieht man auf die Fläche  $d \cdot l$ . Als Lochleibung

$$p_L = \frac{F}{d \cdot l}.$$

# 4 Biegung

## 4.1 Einführung

Das Wort „Biegung“ ist im allgemeinen Sprachgebrauch geläufig. Es gilt eher als Begriff aus der Geometrie (z.B. Straßenbiegung) als aus der Festigkeitslehre. Deshalb muss zunächst „Biegung“ für die Anwendung in der Technik definiert werden. Das geschieht über die Beanspruchungsart: An einem Träger angreifende *Momente* (Vektor senkrecht zur Trägerachse) verursachen *Biegung*. In diesem Zusammenhang werden die Begriffe „*reine Biegung*“, „*gerade Biegung*“ und „*schiefe Biegung*“ erläutert.

Es folgt die Ableitung der *Grundgleichung der Biegung*. Sie stellt den Zusammenhang zwischen folgenden Größen her: Beanspruchung (Biegemoment), geometrische Daten des Querschnitts, Biegespannung. Da es sich insgesamt um einen komplexen Vorgang handelt, ist es notwendig, für die Ableitung von einer Reihe von Voraussetzungen auszugehen. Ihre Kenntnis ist für die Beurteilung von Rechenergebnissen notwendig. Das begründet die Ausführlichkeit ihrer Darstellung.

Die Berechnung der *Biegemomente* bringt der nächste Abschnitt. Hier wird neben anderen Verfahren der Formalismus von FÖPPL eingeführt, der vor allem bei Unstetigkeitsstellen (mehrere Kräfte am Träger) vorteilhaft ist. Die o.g. geometrischen Daten des Querschnitts sind das *Flächenmoment zweiter Ordnung* und das *Widerstandsmoment*. Sie werden für Grundfiguren und zusammengesetzte Flächen berechnet und für warmgewalzte Stahlprofile den Tabellen im Anhang entnommen.

Nach den Vorarbeiten ist es möglich, Biegeträger zu dimensionieren und in den Abmessungen angenommene Träger auf ausreichende Festigkeit zu kontrollieren.

In vielen Fällen müssen Aussagen über die *Formänderung* von Bauteilen gemacht werden. Dazu ist es notwendig, die Gleichung der deformierten Trägerachse aufzustellen. Diese wird *Biegelinie* oder *elastische Linie* genannt. Die Biegelinie wird von einer Differentialgleichung dargestellt, die für konkrete Fälle unter Beachtung der Randbedingungen (z.B. Lager) integriert wird. Eine Überlagerung einfacher Belastungsfälle (Tabellenanhang) zu einem umfangreicheren Fall stellt eine andere Methode dar.

Die bei der Biegung in dem elastischen System gespeicherte *Formänderungsarbeit* ist die Ausgangsbasis für die Sätze von CASTIGLIANO<sup>1</sup>. Diese sind Grundlage des *Kraftgrößenverfahrens*, das mit Integrationstafeln arbeitet und vor allem im Stahlbau für die Bestimmung der Deformationen Anwendung findet. Im Maschinenbau ist für abgesetzte Wellen das graphische Verfahren nach MOHR eingeführt. Im Abschluss des Abschnitts „Formänderung“ wird dieses in einen gut programmierbaren Rechengang umgesetzt.

Die *schiefe Biegung* schließt das umfangreiche Kapitel ab. Für unsymmetrische Profile müssen die *Hauptachsen* und die auf diese bezogenen *Maximal- und Minimalflächenmomente* berechnet werden. Der MOHRSche Kreis der Flächenmomente (schon hier sei auf den analogen Spannungskreis im Kapitel 8 hingewiesen) ermöglicht eine anschauliche Kontrolle der Ergebnisse. Die oben genannten Größen gehen in die Grundgleichung der Biegung ein.

## 4.2 Allgemeines

*Ein Träger bzw. Balken ist auf Biegung beansprucht, wenn in der Ebene, in der die Trägerachse liegt, Momente angreifen.*

Abb. 4-1a zeigt einen unbelasteten Träger. Dieser Träger wird auf Biegung beansprucht, wenn an den beiden Trägerenden zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Momente  $M$  angreifen (Bild b). Er deFORMiert sich dabei in der skizzierten Form. Ersetzt man beide Momente durch je ein Kräftepaar, von der Größe  $F \cdot a$ , dann erhält man einen Belastungsfall, wie ihn Abb. 4-1c zeigt. Das entspricht z.B. der Belastung einer Wagenachse. Die Achse unterliegt zwischen dem Lager und dem Rad zusätzlich einer Beanspruchung durch die Kräfte  $F$ , die versuchen, die einzelnen Querschnitte gegeneinander zu verschieben. In diesem Bereich handelt es sich demnach um eine zusammengesetzte Beanspruchung. Zwischen den Lagern entspricht die Belastung der in Abb. 4-1b. Man spricht hier von *reiner Biegung*.

An einem symmetrischen Träger mit Einzellast nach Abb. 4-2 ist zunächst ein Moment nicht erkennbar. Es entstehen jedoch Kräftepaare, wenn man sich das System geteilt denkt. Das Moment dieser Kräftepaare hat die Größe  $(F/2) \cdot (l/2)$ . Da auch der Teilträger im Gleichgewicht ist, muss an der Trennstelle *im* Träger ein *inneres Moment* gleicher Größe im eingezeichneten Sinn wirken. Dieses wird *Biegemoment*  $M_b$  genannt (s. Bd. 1, Kap. 8). Der Wirkung des Biegemoments ist die der quer wirkenden Kräfte überlagert. Diese ist jedoch für einen langen

---

<sup>1</sup> CASTIGLIANO, C.A. (1847-1884), italienischer Wissenschaftler

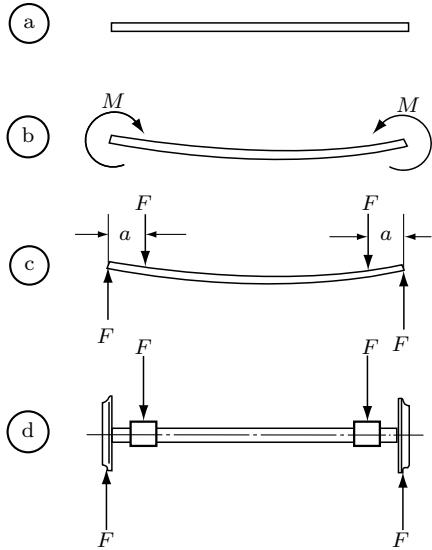


Abb. 4-1: Beanspruchung durch Biegung

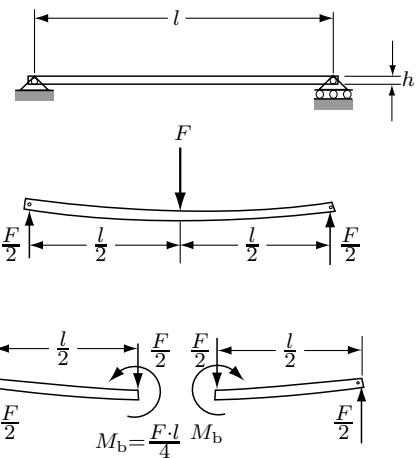


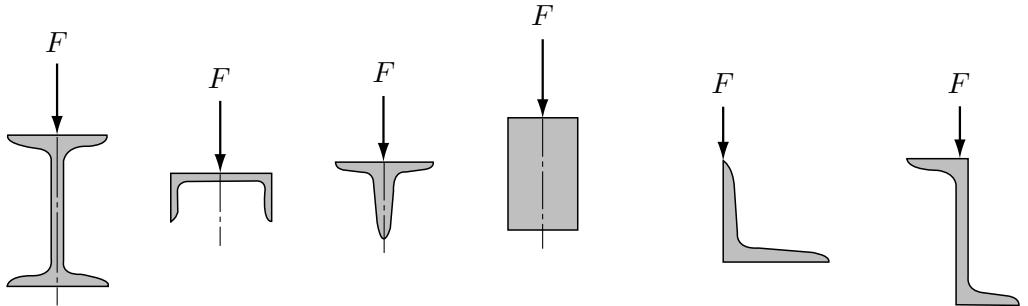
Abb. 4-2: Biegemomente in einem Träger

Träger klein. Umgekehrt formuliert: für lange Träger überwiegt bei weitem die Wirkung der Biegung, die im diskutierten Fall keine reine Biegung ist.

Als Träger bzw. Balken bezeichnet man ein Bauteil, dessen Länge wesentlich größer ist als seine Querabmessung ( $l \gg h$ ) und das durch Momente belastet wird, die in der Ebene der Trägerachse wirken. Der Momentenvektor  $\vec{M}_b$  steht senkrecht auf der Trägerachse. Im Gegensatz dazu steht z.B. ein Niet, dessen Durchmesser von gleicher Größenordnung ist wie seine Länge. Hier überwiegt die Abscherwirkung der quer angreifenden Kräfte gegenüber der Biegebeanspruchung. Dieser Fall wird im Abschnitt 5.5 dargestellt.

Die nachfolgenden Abschnitte behandeln gerade Träger. Für Trägerteile, die in der Nähe von Kraftangriffspunkten liegen, liefern die Gleichungen nur angenähert richtige Ergebnisse. An dieser Stelle sei nochmals an die Schwierigkeiten erinnert, alle Einflüsse in einer Festigkeitsrechnung richtig zu berücksichtigen. Deshalb ist es durchaus sinnvoll, eine Berechnung nur für die dominierende Beanspruchung durchzuführen. In der Regel werden z.B. Träger so berechnet, als würden sie reiner Biegung unterliegen. In diesem Zusammenhang sei auf den Abschnitt 2.9 verwiesen, in dem die richtige Wahl der Sicherheitszahl diskutiert wird.

Es wird zuerst die Biegung des Trägers dargestellt, dessen Querschnittsfläche symmetrisch in Bezug auf die Belastungsebene ist. Beispiele dafür zeigt die Abb. 4-3. Diese Belastung nennt man *gerade Biegung*. Im Gegensatz dazu steht



**Abb. 4-3:** Belastung in der Symmetrieebene (gerade Biegung)

**Abb. 4-4:** Unsymmetrische Belastung (schiefe Biegung)

die *schiefe Biegung* (Abschnitt 4.7). Hier ist die Symmetrie nicht gegeben, wofür die Abb. 4-4 Beispiele bringt.

### 4.3 Die Grundgleichung der Biegung

Es soll untersucht werden, welche Kräfte und Momente in den einzelnen Querschnitten eines auf Biegung beanspruchten Trägers wirken und welche Spannungen sie verursachen. Dabei wird auf das Schnittprinzip zurückgegriffen.

Es soll festgestellt werden, welche Kräfte von den Gefügeteilen des Trägers nach Abb. 4-5 im Querschnitt a bei der gezeichneten Belastung übertragen werden. Bei der Zerlegung des Trägers durch einen gedachten Schnitt an dieser Stelle entstehen zwei Teile. Für diese stehen jeweils zwei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung, da es sich um ein System paralleler Kräfte handelt. Am linken Abschnitt greift nur die Lagerkraft  $F_A$  an. Die Bedingung  $\sum F = 0$  ergibt eine im Querschnitt a wirkende Kraft gleicher Größe im entgegengesetzten Wirkungssinn. Dies ist die Querkraft  $F_q$ . Sie versucht, die einzelnen Querschnitte gegeneinander abzuschieben. Die Querkraft ergibt mit  $F_A$  ein Kräftepaar. Dieses kann nur durch ein im Querschnitt wirkendes Moment, nämlich das *Biegemoment*  $M_b$  ins Gleichgewicht gebracht werden ( $\sum M = 0$ ). Ersetzt man dieses seinerseits durch ein Kräftepaar, dann ergeben sich die beiden *inneren Kräfte*  $F_i$  im Abstand  $e$ . Die *Gleichgewichtsbedingungen reichen jedoch nicht aus, um die Größe von  $F_i$  und  $e$  zu bestimmen*. Lediglich das Produkt dieser beiden ist aus der Bedingung  $\sum M = 0$  bekannt:  $F_i \cdot e = F_A \cdot x$ . Trotzdem liefert die oben angestellte Überlegung die Erkenntnis, dass insgesamt im oberen Bereich des Trägers Kräfte übertragen werden müssen, die einzelne Gefügeteile auf Druck beanspruchen, während im unteren Bereich die Teile gezogen werden. Für die

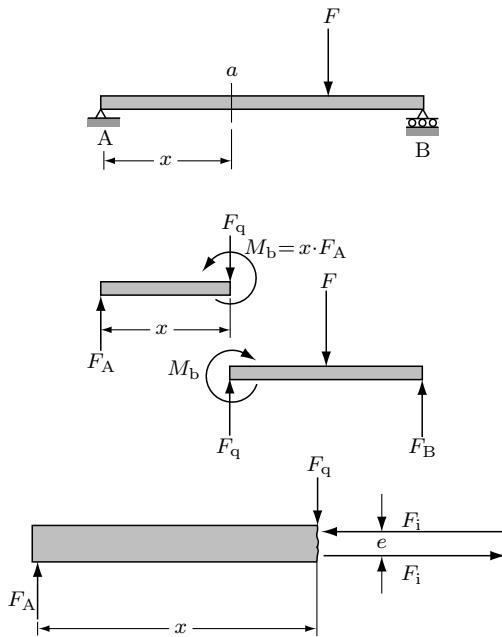
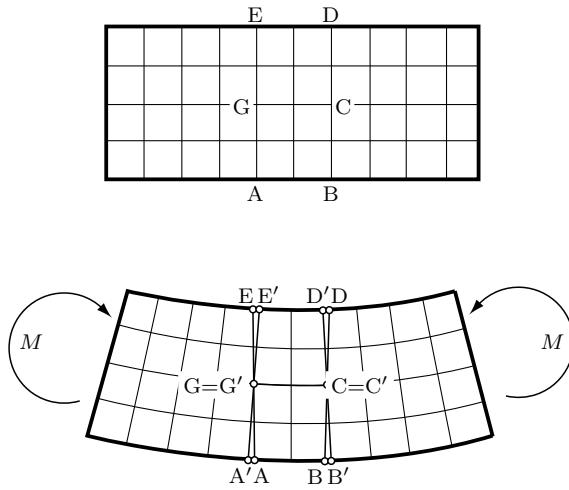


Abb. 4-5: Freiemachter Teilträger

Proportionen eines Trägers – im Gegensatz zu denen eines Niets – gilt  $x \gg e$  und damit  $F_i \gg F_A$  bzw.  $F_i \gg F_q$ . Die das Biegemoment erzeugenden Kräfte  $F_i$  sind wesentlich größer als die Querkräfte  $F_q$ . Damit sind die oben gemachten Ausführungen bestätigt, wonach die *Biegewirkung in einem Träger gegenüber der Querkraftwirkung überwiegt*. Man kann auch am rechten Teilträger der Abb. 4-5 die Gleichgewichtsbedingungen anwenden. Wenn beim Freimachen der Lehrsatz der Statik *actio = reactio* beachtet wurde, erhält man für  $M_b$  und  $F_q$  die gleichen Ergebnisse.

Nach den Ausführungen oben ergibt sich die *mathematische Bedingung für reine Biegung*  $F_q = 0$ . Für den betrachteten Träger müsste für diese Bedingung im Abschnitt  $x$  eine nach unten gerichtete äußere Kraft der Größe  $F_A$  angreifen und so ein Kräftepaar mit  $F_A$  bilden.

Die oben durchgeführten Untersuchungen haben eine Zug- bzw. Druckbeanspruchung durch die Kräfte  $F_i$  im auf Biegung beanspruchten Träger ergeben. Die *Biegung verursacht* demnach *Normalspannungen*, deren Größe und Verteilung im Querschnitt bestimmt werden sollen. Vor allem zur Klärung der zweiten Frage ist es notwendig, die *Deformation* eines gebogenen Trägers zu betrachten. Dazu wird auf einen Teilausschnitt eines elastischen Trägers mit Rechteckquerschnitt eine quadratisches Netz nach Abb. 4-6 gezeichnet. Reine Biegung verursacht folgende Deformation. Die Strecken AB und ED verformen sich zu flachen Kreis-



**Abb. 4-6:** Durch Biegung verursachte Verformung

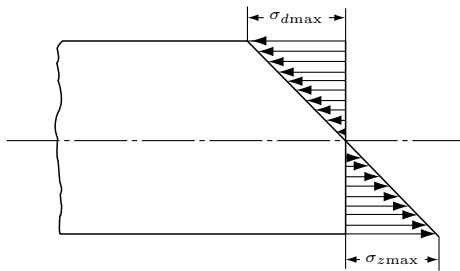
bögen. Die Strecken AE und BD bleiben als Geraden erhalten, stellen sich aber schräg. Das hat bereits JAKOB BERNOULLI<sup>2</sup> angenommen, auf den die Grundgleichung der Biegung zurückgeht. Zeichnet man das unbelastete und belastete Netz übereinander, können folgende Schlussfolgerungen gezogen werden:

1. Die Strecke DE wird auf D'E' verkürzt.
2. Die Strecke AB wird auf A'B' verlängert.
3. Die Strecke CG bleibt in der Länge erhalten.
4. Von C bzw. G ausgehend nimmt die Verlängerung bzw. Verkürzung linear zu.

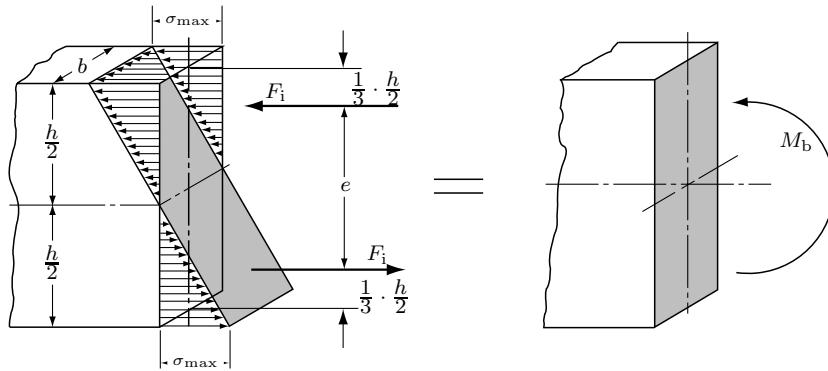
Die in der Länge unveränderte Schicht (hier CG) wird *neutrale Faser* genannt. Für Stoffe, deren Deformation dem HOOKESchen Gesetz folgt, nimmt wegen des Punktes 4 die Normalspannung von der neutralen Faser ausgehend, linear zu. *In den Außenfasern wirkt die maximale Zug- bzw. Druckspannung* nach Abb. 4-7.

Für die nunmehr bekannte Spannungsverteilung kann man in einer Gleichung die Abhängigkeit der Spannung  $\sigma_{\max}$  von dem Biegemoment  $M_b$  und von den Querschnittsabmessungen bzw. entsprechenden Querschnittswerten aufstellen. Um die Zusammenhänge besonders deutlich zu machen, soll zuerst die Ableitung für den Balken mit Rechteckquerschnitt ohne Zuhilfenahme der Integralrechnung durchgeführt werden. Ausgegangen wird dazu von der Abb. 4-8. Die

<sup>2</sup>BERNOULLI, Jakob (1655–1750), schweizer Mathematiker.



**Abb. 4-7:** Spannungsverteiler im Querschnitt



**Abb. 4-8:** Spannungsverteiler und innere Kräfte bei Biegung eines Trägers mit Rechteckquerschnitt

innere Kraft  $F_i$  ist die Resultierende der durch die Spannung verursachten Flächenbelastung.

$$F_i = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{\max} \cdot \frac{h}{2} \cdot b$$

Ihre Lage entspricht der einer dreieckförmigen Streckenlast. Das ergibt einen Abstand der inneren Kräfte

$$e = h - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{2}{3} h .$$

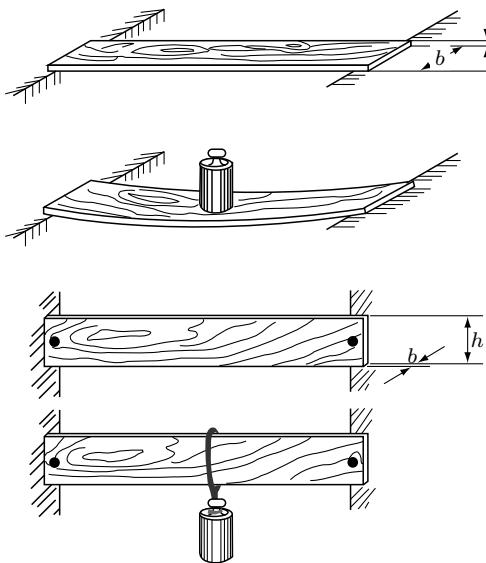
Das Moment  $M_b$  ist unter Verwendung der oben abgeleiteten Größen

$$\begin{aligned} M_b &= F_i \cdot e = \frac{1}{2} \sigma_{\max} \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{2}{3} h . \\ M_b &= \sigma_{\max} \frac{bh^2}{6} . \end{aligned}$$

Der Wert  $bh^2/6$  ist ein Maß für den Widerstand, den der Balken mit Rechteckquerschnitt der Biegebeanspruchung entgegenseetzt. Man nennt diesen Wert

deshalb das *Widerstandsmoment* des Rechteckquerschnitts. Seine Dimension ist Länge<sup>3</sup>, die übliche Maßeinheit cm<sup>3</sup>.

Die beiden Hauptabmessungen des Querschnittes  $h$  und  $b$  gehen nicht gleichberechtigt in das Widerstandsmoment ein. Die in Richtung der Belastung gemessene Höhe  $h$  geht quadratisch ein, die Breite  $b$  linear. Man weiß aus allgemeiner Erfahrung, dass ein hochkant gestelltes Brett einen weit höheren Widerstand gegen eine Biegebeanspruchung hat als ein flach hingelegtes (Abb. 4-9). Es soll jedoch hier schon angemerkt werden, dass die Durchbiegung nicht unbedingt ein Maß für die Biegespannung ist.



**Abb. 4-9:** Einfluss der Balkenhöhe auf die Steifigkeit eines Balkens

Die Bedingung  $\sigma_{z\max} = \sigma_{d\max} = \sigma_{\max}$  gilt auch für einen Kreisquerschnitt. Bei einer auf Biegung belasteten, rotierenden Welle wird die äußere Faser während einer Umdrehung einmal mit  $\sigma_{\max}$  gezogen und einmal gedrückt. Es handelt sich demnach hier um den Belastungsfall III. Das macht man sich zu Nutze, um auf entsprechenden Prüfmaschinen die Biege-Wechselfestigkeit  $\sigma_{bw}$  zu bestimmen.

Die Ableitung für beliebige Profile erfordert eine Aufteilung der Querschnittsfläche in schmale Streifen von der Größe  $dA$  senkrecht zur Belastungsebene nach Abb. 4-10. Die Gefügeteile eines jeden Streifens übertragen eine Kraft

$$dF_i = \sigma \cdot dA .$$

Für den untersuchten Schnitt muss die Gleichgewichtsbedingung  $\sum F_x = 0$  gel-

ten. Wegen der Aufteilung in Flächen- bzw. Kraftdifferentiale geht diese über in

$$\int dF_i = 0$$

$$\int \sigma \cdot dA = 0.$$

Die Spannung  $\sigma$  ist vom Abstand  $z$  abhängig. Auf Grund der ähnlichen Dreiecke (s. Abb. 4-10) kann man die Abhängigkeit folgendermaßen formulieren

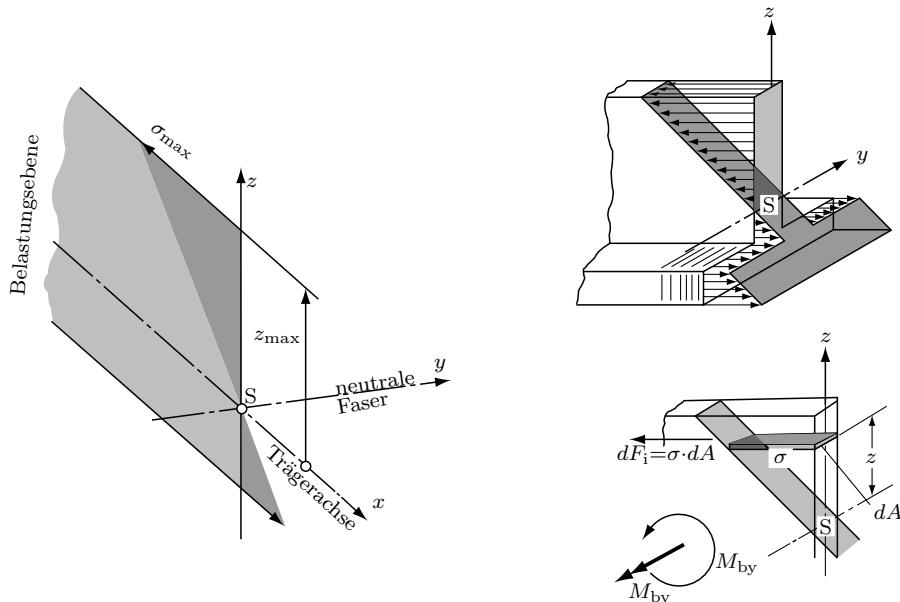
$$\frac{\sigma}{\sigma_{\max}} = \frac{z}{z_{\max}} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{z}{z_{\max}} \cdot \sigma_{\max}. \quad (1)$$

Damit erhält man

$$\int \sigma_{\max} \cdot \frac{z}{z_{\max}} \cdot dA = 0.$$

Da  $\sigma_{\max}$  und  $z_{\max}$  Konstanten sind, gilt  $\int z \cdot dA = 0$ .

Dieses Integral ist gleich Null, wenn die Koordinatenachse durch den Flächenschwerpunkt geht (siehe Band 1, Abschnitt 4.3, Gl. 4-8). Damit ist bewiesen, dass die *neutrale Faser im Schwerpunkt der Querschnittsfläche liegt*.



**Abb. 4-10:** Definition der Koordinaten im Querschnitt eines Trägers

Im Bezug auf die neutrale Faser hat die Kraft  $dF_i$  das Moment

$$dM_y = z \cdot dF_i = z \cdot \sigma \cdot dA.$$

Die Addition dieser Momente ergibt das Moment  $M_{by}$

$$M_{by} = \int dM_y = \int z \cdot \sigma \cdot dA.$$

Man ersetzt  $\sigma$  nach Gleichung (1)

$$M_b = \int \frac{z^2}{z_{max}} \cdot \sigma_{max} \cdot dA.$$

Da die Größen  $\sigma_{max}$  und  $z_{max}$  Konstanten sind, erhält man

$$M_b = \sigma_{max} \left[ \frac{\int z^2 \cdot dA}{z_{max}} \right]. \quad (2)$$

Der Wert in der eckigen Klammer ist offensichtlich – siehe Gleichung für Rechteckquerschnitt – das *Widerstandsmoment* eines beliebigen Querschnitts für Belastung in  $z$ -Richtung, wobei die neutrale Faser in  $y$ -Richtung liegt.

$$W_y = \frac{\int z^2 \cdot dA}{z_{max}}.$$

Analog ergibt sich für die Belastung in  $y$ -Richtung, d.h. durch ein Moment  $M_{bz}$

$$W_z = \frac{\int y^2 \cdot dA}{y_{max}}.$$

Die Integrale werden *Flächenmomente 2. Ordnung* genannt. Die ältere Bezeichnung ist Flächenträgheitsmoment. Wenn man in die Berechnungsgleichung für das Flächenmoment (Tabelle 9) die Fläche  $A$  durch die Masse  $m$  ersetzt, erhält man das auf die gleiche Achse bezogene Massenträgheitsmoment einer dünnen, homogenen, ebenen Scheibe gleicher Form. So hängen die Begriffe zusammen. Nachfolgend soll gelten: In dieser Darstellung ist das *Flächenmoment immer 2. Ordnung, deshalb soll auf diesen Zusatz verzichtet werden.*

$$I_y = \int z^2 \cdot dA \quad I_z = \int y^2 \cdot dA \quad (4-1)$$

Man erhält so die *Widerstandsmomente*  $W$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} \quad W_z = \frac{I_z}{y_{max}}. \quad (4-2)$$

Allgemein kann man schreiben

$$W = \frac{I_S}{e_{\max}}. \quad (4-3)$$

Dabei ist  $I_S$  das Flächenmoment der Querschnittsfläche bezogen auf die Schwerpunktachse senkrecht zur Belastungsebene (neutrale Faser). Der maximale Abstand Schwerpunkt – Außenkante  $e_{\max}$  wird senkrecht zur neutralen Faser gemessen, d.h. die Strecke  $e_{\max}$  liegt in der Belastungsebene (Abb. 4-10).

Die Vereinigung der Gleichungen (1), (2) und 4-1 ergibt die Spannung in einer Faser, die den Abstand  $z$  von der neutralen Faser hat

$$\sigma_b(z) = \frac{M_{by}}{I_y} \cdot z \quad (4-4)$$

Angewendet für eine Belastung in  $y$ -Richtung gilt (Biegemomentvektor liegt dabei in der  $z$ -Achse)

$$\sigma_b(y) = \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y \quad (4-5)$$

Allgemein ist die Spannung am Rand

$$\sigma_b = \frac{M_b}{I_S} \cdot e$$

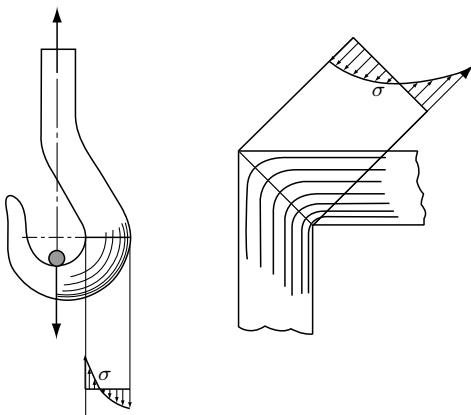
wobei auf die richtigen Bezugsachsen zu achten ist. *Die Flächenmomente sind immer auf die Schwerpunktachsen der Querschnittsfläche bezogen.*

*In den nachfolgenden Rechnungen wird die maximale Spannung mit  $\sigma_b$  ( $b = \text{Biegung}$ ) bezeichnet. Der Index „max“ kennzeichnet die Spannung im am höchsten beanspruchten Querschnitt des Trägers. Zusammenfassend kann man schreiben*

$$\sigma_b = \frac{M_b}{I_S} \cdot e_{\max} = \frac{M_b}{W} \quad (4-6)$$

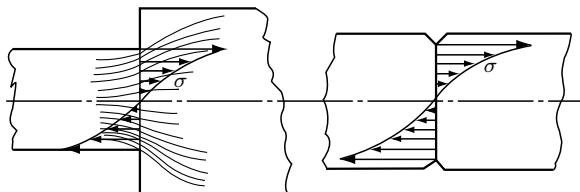
Die Gleichung 4-6 ist die *Grundgleichung der Biegung*. Sie gilt unter den folgenden Voraussetzungen, die oben z.T. bereits diskutiert wurden bzw. sich aus der Ableitung ergeben.

Eine lineare Spannungsverteilung im Trägerquerschnitt, wie sie die Ableitung voraussetzt, erfordert die Erfüllung folgender Bedingungen:



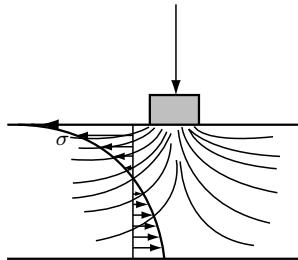
**Abb. 4-11:** Nichtlineare Spannungsverteilung in stark gekrümmten Trägern

1. Die *Trägerachse ist gerade oder nur wenig gekrümmt*. In einem stark gekrümmten Träger ist infolge der Krümmung der Spannungslinien eine Spannungskonzentration genau wie in der Nähe eines Kerbs zu verzeichnen (Abb. 4-11).
2. Der untersuchte Querschnitt liegt *nicht* in der Nähe von schroffen Übergängen, die zu einer Konzentration der Spannung führen (Kerbwirkung Abb. 4-12).

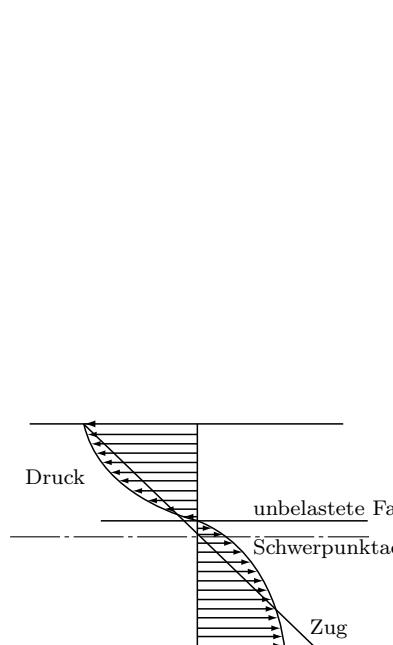


**Abb. 4-12:** Nichtlineare Spannungsverteilung bei Kerbwirkung

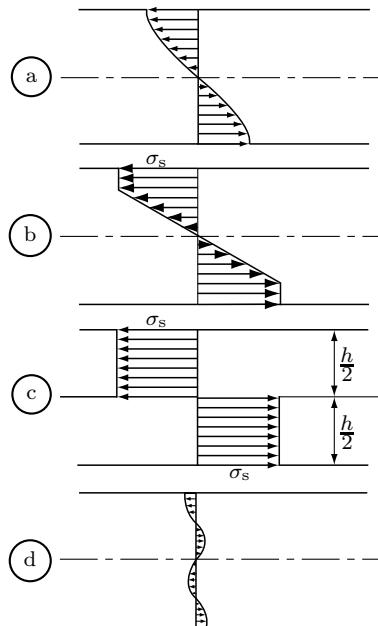
3. Der untersuchte Querschnitt liegt *nicht* in der Nähe eines Lastangriffspunktes bzw. eines Auflagers. An den Stellen der Kraftein teilung erfolgt normalerweise eine örtliche Konzentration der Werkstoffbelastung, die zu einer nichtlinearen Spannungsverteilung im Querschnitt führt (Abb. 4-13). Wie in den beiden oben ausgeführten Punkten handelt es sich hier um einen mehrachsigen Spannungszustand.
4. Der Werkstoff muss bei der *Deformation* dem **HOOKEschen Gesetz** folgen. Bei der Deformation, müssen dabei die Querschnitte eben bleiben. Diese Bedingung wird von vielen Werkstoffen (z.B. Gusseisen, Beton) nicht erfüllt. Für Gusseisen ergibt sich eine Spannungsverteilung nach Abb. 4-14. Da dieser Werkstoff außerdem ein anderes Verhalten in Bezug auf Druck-



**Abb. 4-13:** Nichtlineare Spannungsverteilung in der Nähe der Krafteinleitung



**Abb. 4-14:** Spannungsverlauf im Gusseisen



**Abb. 4-15:** Gestörte Spannungsverteilung im plastischen Bereich

und Zugbeanspruchung aufweist, verschiebt sich auch die neutrale Faser. Da die tatsächliche Spannungsverteilung rechnerisch sehr schwierig erfassbar ist, rechnet man mit der oben abgeleiteten Grundgleichung der Biegung und berücksichtigt die nichtlineare Spannungsverteilung durch eine entsprechende Festlegung der zulässigen Biegespannung.

5. Die maximal auftretende Spannung in den Randfasern darf *nicht größer als die 0,01-Dehngrenze  $R_{P0,01}$*  sein. Wird diese Bedingung nicht eingehalten, erhält man eine Spannungsverteilung wie sie Abb. 4-15a zeigt. Wegen der größeren Völligkeit der Spannungskurve wird ein größeres Moment übertragen, als es die Berechnung nach der Grundgleichung ergibt. Wird in

einem weichen Stahl in den Randzonen die Biegefließgrenze  $\sigma_{bF}$  erreicht, setzt dort Fließen ein. Ein weiterer Anstieg der Spannung ist an dieser Stelle nicht möglich. Eine solche Spannungsverteilung zeigt Abb. 4-15b. Bei weiterer Zunahme der Belastung kann sich das Gebiet der plastischen Deformation bis auf die neutrale Faser ausdehnen (Abb. 4-15c). Das bei einer solchen Beanspruchung übertragene Moment hat für den Rechteckquerschnitt  $b \cdot h$  die Größe

$$M_b = \frac{h}{2} \cdot \left( b \cdot \frac{h}{2} \right) \cdot \sigma_{bF} = \sigma_{bF} \cdot \frac{b \cdot h^2}{4}.$$

Das Widerstandsmoment eines Rechteckquerschnittes ist, wie oben abgeleitet,  $bh^2/6$ . Das bei einer vollplastischen Deformation übertragene Moment ist 1,5 mal so groß wie bei der vollelastischen Deformation.

Eine plastische Deformation der Außenzonen verursacht eine bleibende Dehnung bzw. Stauchung der dort liegenden Fasern. Bei einer Entlastung des Balkens gehen diese Teile nicht auf ihre Ursprungslänge zurück. Das hat Spannung im entlasteten Zustand zur Folge (Abb. 4-15d).

#### 6. Die *Elastizitätsmoduln für Zug und Druck sind gleich*.

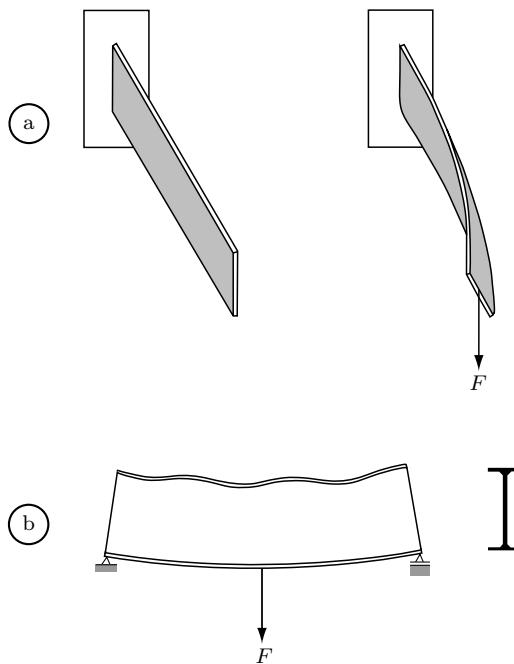
Diese Bedingung trifft nicht zu für Träger, die aus verschiedenen Werkstoffen im gezogenen bzw. gedrückten Teil bestehen. Als Beispiel soll hier der Betonträger genannt werden. Beton ist auf Druck wesentlich höher belastbar als auf Zug. Um dieses unterschiedliche Verhalten auszugleichen, werden die gezogenen Bereiche eines Betonträgers mit Stahl armiert.

Die Grundgleichung der Biegung berücksichtigt naturgemäß nur eine Biegebeanspruchung. Daraus resultieren folgende Bedingungen.

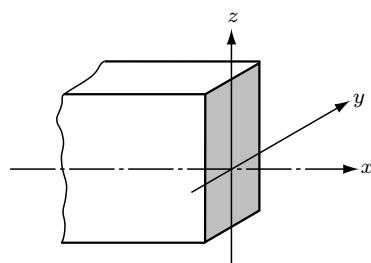
#### 7. Die *Länge des Trägers* muss mindestens um eine Größenordnung (Dezimalstelle) größer sein als die Querschnittsabmessungen.

Nur unter dieser Voraussetzung können die normalerweise auftretenden Querkräfte und damit die Beanspruchung durch Schubspannungen vernachlässigt werden.

#### 8. Die *Abmessungen des Querschnittes* müssen so sein, dass der Träger nicht schon auf andere Weise versagt, bevor die Biegespannung einen kritischen Wert erreicht. Das geschieht, wenn der Biegeträger in einen labilen Gleichgewichtszustand kommt (Stabilitätsproblem).



**Abb. 4-16:** Kippen und Beulen eines Biegeträgers



**Abb. 4-17:** Koordinaten im Trägerquerschnitt

Ein hochkant gestellter, auf Biegung beanspruchter Balken kann bei Überlastung „kippen“ (Abb. 4-16a). Der Balken kann nicht das nach Gleichung 4-6 errechnete Moment übertragen. Ein ähnlicher Fall ergibt sich für einen I-Träger mit verhältnismäßig dünnen Flanschen. Auf der auf Druck beanspruchten Seite kann der Flansch „beulen“, was zu einer vorzeitigen Zerstörung führt.

Die Grundgleichung der Biegung wurde mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung  $\sum M = 0$  abgeleitet. Für eine Belastung eines Trägers in  $z$ -Richtung nach Abb. 4-17 bezog sich die Momentengleichung auf die  $y$ -Achse. Die Gleichgewichtsbedingung muss jedoch auch für die  $z$ -Achse erfüllt sein. Daraus folgt:

9. Die Belastungsebene muss *Symmetrieebene* des Balkenquerschnitts sein. Allgemein formuliert: die Belastung muss in Richtung einer *Hauptachse* erfolgen.

Der Begriff Hauptachse wird im Abschnitt 7 dieses Kapitels definiert. Es soll hier vorweggenommen werden, dass Symmetriechsen gleichzeitig Hauptachsen sind. Wird ein Träger nach Abb. 4-18a auf Biegung in angege-

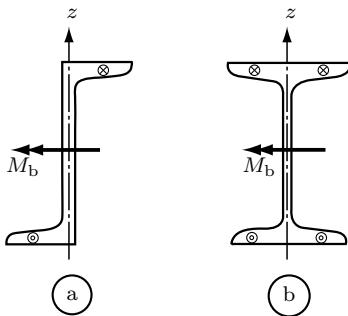


Abb. 4-18: Zum Begriff Hauptachse

bener Weise beansprucht, dann entstehen oben z.B. Druckspannungen und unten Zugspannungen. In der Zeichnung ist oben eine in die Zeichenebene hineinragende Kraft gezeichnet, unten eine aus der Ebene herausragende Kraft. Diese beiden Kräfte können die Bedingung  $\sum M_z = 0$  nicht erfüllen. Das ist nur möglich, wenn man den vorgegebenen Querschnitt zu einem I-Profil ergänzt (Abb. 4-18b).

Das Biegemoment wird durch äußere Kräfte verursacht. Daraus folgt:

10. Der Träger ist *unbelastet spannungsfrei*.

Im Bauteil bereits vorhandene Spannungen – verursacht z.B. durch Schweißen – überlagern sich mit den Biegespannungen.

In der Ableitung sind Trägheitskräfte (siehe Band 3 Kinetik) nicht berücksichtigt, deshalb gilt:

11. Der Träger unterliegt *keiner stoßartigen Belastung*.

Würde man die Grundgleichung nur für Fälle anwenden, für die die angeführten 11 Bedingungen erfüllt sind, dann wäre die Gleichung wertlos, weil kaum anwendbar. Es ist sehr wichtig, die Grenzen einer Berechnungsgleichung zu kennen. Nur dann kann man sie durch vorsichtige Wahl einer zulässigen Spannung auch außerhalb ihres eigentlichen Geltungsbereichs anwenden. Der besseren Übersichtlichkeit wegen sind die oben aufgeführten Voraussetzungen in Tabelle 8 zusammengestellt.

Die Bestimmung der Spannung nach der Grundgleichung der Biegung setzt die Berechnung folgender Größen voraus.

1. Größe des Biegemomentes,
2. Lage des Schwerpunktes der Balkenquerschnittsfläche,
3. Größe des Flächenmomentes für den Querschnitt.

Die Berechnung von Flächenschwerpunkten wurde bereits in Band 1 behandelt. Die nachfolgenden Abschnitte befassen sich deshalb mit den Punkten 1 und 3 der obigen Aufzählung.

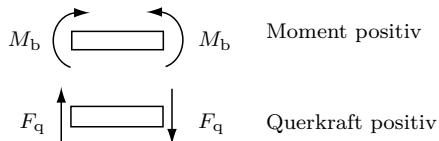
## 4.4 Das Biegemoment und die Querkraft

### 4.4.1 Analytische Lösung für Träger auf zwei Stützen und eingespannten Träger

Wie im vorigen Abschnitt ausführlich erläutert, wird die Wirkung der Querkraft bei der Berechnung der Biegespannung nach der Grundgleichung vernachlässigt. Es bestehen jedoch mathematische Zusammenhänge zwischen Querkraft und Biegemoment, die eine Berechnung des Biegemoments aus der Querkraft ermöglichen. Aus diesem Grunde sollen nachfolgend für einen Balken beide Größen für jeden Querschnitt bestimmt werden.

Dieses Problem wurde grundsätzlich im Band 1 für einen Fachwerkträger gelöst. Mit Hilfe des RITTERSchen<sup>3</sup> Schnitts (Band 1, 18. Auflage, Abschnitt 10.3.1) wurden für eine beliebige Stelle die Stabkräfte ermittelt. Das Moment (hier Biegemoment) wird in einem Fachwerk z.B. als Kräftepaar von einem Ober- und Untergurtstab aufgenommen, während die Querkraft von einem Diagonalstab übertragen wird.

Das Biegemoment und die Querkraft sind Schnittreaktionen. Es sind Momente bzw. Kräfte, die in den einzelnen Querschnitten eines belasteten, im Gleichgewicht befindlichen Trägers auftreten. Sie unterscheiden sich grundsätzlich nicht von den inneren Kräften z.B. in den Stäben eines Fachwerkes, in den Gelenken eines Dreigelenkbogens oder eines Gelenkträgers. Wie bei der Behandlung des Dreigelenkbogens die Gelenkkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen am Einzelteil berechnet wurden (Band 1), muss die Berechnung der Biegemomente und Querkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen am freigemachten Teilabschnitt des Trägers erfolgen.



**Abb. 4-19:** Vorzeichendefinition von Biegemoment und Querkraft

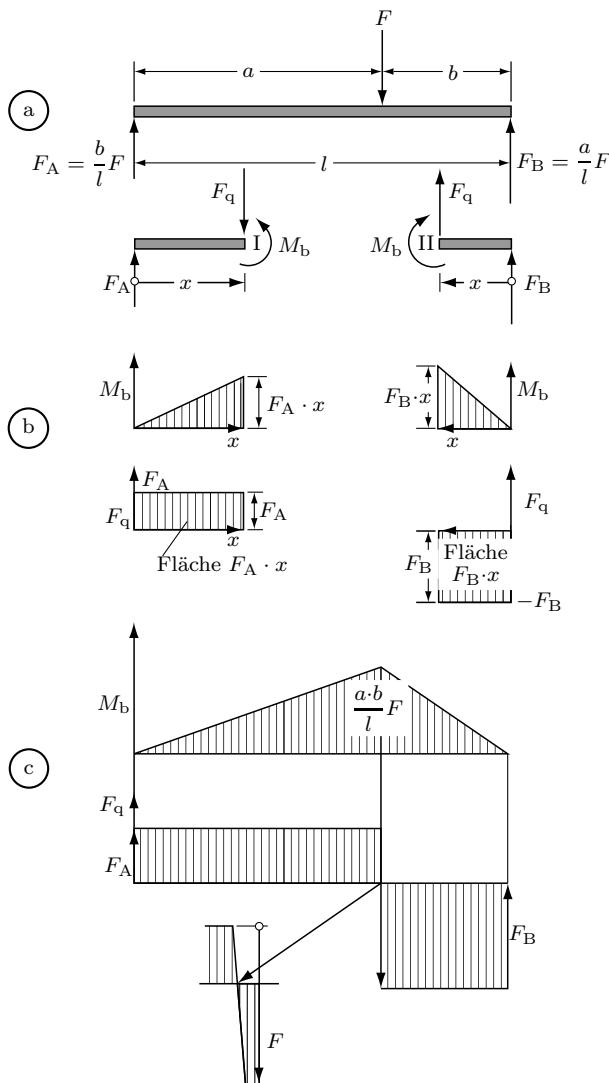
---

<sup>3</sup>RITTER, August (1826–1906), deutscher Ingenieur.

Folgende Vorzeichendefinition soll nach Abb. 4-19 für den Träger gelten (siehe auch Abschnitt 4.6.1, Gleichung 4-13):

*Für einen betrachteten Teilabschnitt des Trägers ist das Moment positiv, wenn es links vom Abschnitt im Uhrzeigersinn, rechts umgekehrt wirkt. Für einen betrachteten Teilabschnitt des Balkens ist die Querkraft positiv, wenn sie links vom Abschnitt nach oben, rechts nach unten wirkt.*

Ein unsymmetrisch belasteter Träger mit Einzellast nach Abb. 4-20 soll untersucht werden. Für den linken Teilabschnitt hat das Biegemoment im Abstand  $x$



**Abb. 4-20:** Biegemomente und Querkräfte im Träger mit Einzellast

vom Auflager A die Größe:

$$\begin{aligned}\sum M_I &= 0 \quad M_b - F_A \cdot x = 0 \\ M_b &= F_A \cdot x = \frac{b}{l} \cdot F \cdot x.\end{aligned}$$

Das ist eine Geradengleichung, die über  $x$  aufgetragen eine lineare Änderung des Momentes entlang der Achse ergibt. Die Querkraft erhält man aus

$$\sum F = 0 \quad F_q = F_A$$

Die Querkraft ist im linken Teilabschnitt konstant. Für den rechten Teilabschnitt erhält man analog

$$\begin{aligned}\sum M_{II} &= 0 \quad M_b - F_B \cdot x = 0 \\ M_b &= \frac{a}{l} \cdot x \cdot F \\ \sum F &= 0 \quad F_q + F_B = 0 \\ F_q &= -F_B\end{aligned}$$

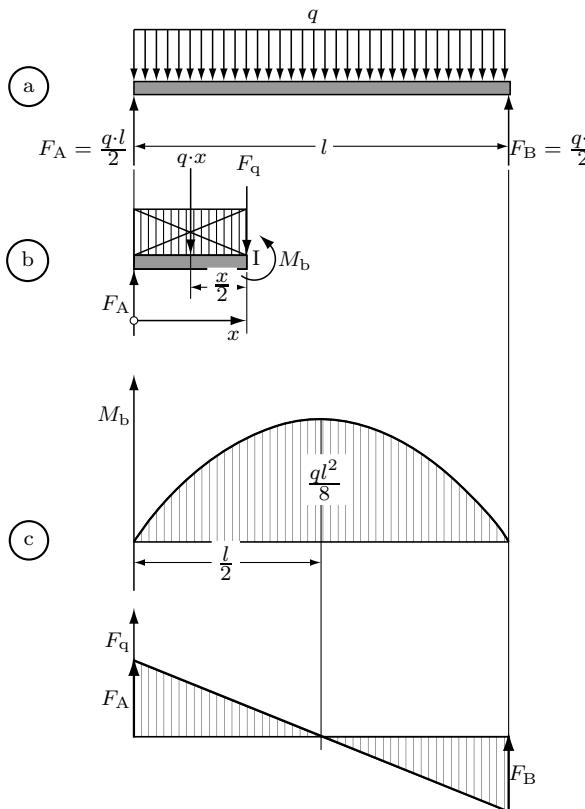
Für den Lastangriffspunkt muss sich aus beiden Abschnitten das gleiche Biegemoment ergeben.

Linker Abschnitt	Rechter Abschnitt
$x = a$	$x = b$
$M_{bF} = \frac{a \cdot b}{l} \cdot F$	$M_{bF} = \frac{a \cdot b}{l} \cdot F.$

Die Biegemomente und die Querkraft sind in Abb. 4-20c über der Achse aufgetragen.

Das maximale Biegemoment entsteht am Lastangriffspunkt. Damit herrscht dort bei konstantem Querschnitt die maximale Spannung. Das stimmt mit der Erfahrung überein, dass ein so belasteter Träger bei Überlastung am Lastangriffspunkt versagt.

Das Querkraftdiagramm ist am Lastangriffspunkt mehrdeutig. An dieser Stelle ist zu bedenken, dass die entlang einer Linie wirkende Kraft eine Abstraktion ist. In Wirklichkeit wird die Kraft einen kleinen Abschnitt des Trägers belasten. In diesem Bereich ändert sich die Querkraft von  $+F_A$  nach  $-F_B$ , wie in der Skizze unten dargelegt. Mit einer verteilten Last befasst sich die nächste Aufgabe.



**Abb. 4-21:** Biegemomente und Querkräfte im Träger mit konstanter Streckenlast

Für einen nach Abb. 4-21a mit konstanter Streckenlast beanspruchten Träger sollen der Biegemomenten- und Querkraftverlauf bestimmt werden. Dazu werden für einen Teilabschnitt nach Abb. 4-21b die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt.

$$\begin{aligned} \sum M_I &= 0 & M_b - F_A x + \frac{qx^2}{2} &= 0 \\ M_b &= F_A x - \frac{qx^2}{2}; & F_A &= \frac{q \cdot l}{2} \\ M_b &= \frac{q}{2}(lx - x^2) & & (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 & F_q - F_A + qx &= 0 \\ F_q &= F_A - qx & & \\ F_q &= \frac{q}{2}(l - 2x) & & (2) \end{aligned}$$

Nach Gleichung (1) ist das Momentendiagramm eine Parabel. An den Trägerenden ist das Moment null, in der Mitte  $x = l/2$  ist es am größten:

$$M_{b\max} = \frac{q}{2} \left[ l \cdot \frac{l}{2} - \left( \frac{l}{2} \right)^2 \right] = \frac{ql^2}{8}.$$

Den Querkraftverlauf gibt die Gleichung (2) wieder. Dargestellt ist er auch in Abb. 4-21c. Für  $x = l/2$  ergibt sich ein Nulldurchgang. An dieser Stelle ist  $F_q = 0$  und das Biegemoment ein Maximum.

Der besseren Übersichtlichkeit wegen, sollen die Gleichungen für  $M_b$  und  $F_q$  für die beiden Belastungsfälle hier zusammengefasst werden.

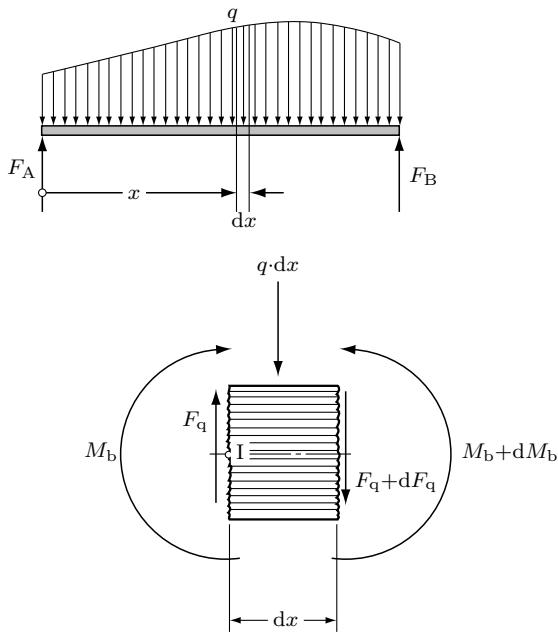
Einzellast	Streckenlast
$M_b = \frac{b}{l} \cdot x \cdot F$	$M_b = \frac{q}{2}(lx - x^2)$
$F_q = \frac{b}{l} \cdot F$	$F_q = \frac{q}{2}(l - 2x)$ .

Man erkennt, dass die *Gleichungen für  $F_q$  gleich den Ableitungen der Momen-*tengleichung sind. Auch die Diagramme Abb. 4-20c/4-21c zeigen diesen Zusammenhang. Für die Einzellast ist links vom Lastangriffspunkt die Steigung der  $M_b$ -Linie positiv und konstant, rechts negativ und konstant. Für die Streckenlast ist links die Steigung positiv, nimmt aber zur Mitte hin ab, und entsprechend ist es auf der rechten Seite.

Umgekehrt muss demnach gelten, dass die  $M_b$ -Kurve gleichzeitig die *Integralkurve des Querkraftverlaufs* ist. Die von der  $F_q$ -Linie eingeschlossene Fläche muss gleich dem Moment an dieser Stelle sein. Auch diese Bedingung ist, wie die Abbildungen zeigen, erfüllt.

Es fehlt jetzt noch der Beweis für die Allgemeingültigkeit dieser Beziehungen. Für ein Teilelement eines Trägers von der Länge  $dx$  nach Abb. 4-22 werden die Gleichgewichtsbedingungen angesetzt. Dazu muss dieses Element freigemacht werden. An der Stelle  $x$  hat das Moment die Größe  $M_b$ , an der Stelle  $(x + dx)$  hat es sich um  $dM_b$  geändert, es hat die Größe  $M_b + dM_b$ . Das Gleiche gilt für die Querkraft  $F_q$ . Als Resultierende der Streckenlast wirkt auf dem Element die Kraft  $q \cdot dx$ . Es stehen als Gleichgewichtsbeziehungen zwei Gleichungen zur Verfügung.

$$\begin{aligned} \sum M_I &= 0 \\ M_b + dM_b - M_b - (F_q + dF_q)dx - q \cdot dx \frac{dx}{2} &= 0 \\ dM_b - F_q \cdot dx - dF_q \cdot dx - \frac{q}{2}(dx)^2 &= 0. \end{aligned}$$



**Abb. 4-22:** Freigemachtes Element eines belasteten Trägers

Die Größen, in denen das Produkt von zwei Differentialen auftritt, können gegenüber den anderen Größen vernachlässigt werden.

$$dM_b - F_q \cdot dx = 0$$

$$F_q = \frac{dM_b}{dx}; \quad M_b = \int F_q \cdot dx \quad (4-7)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_q - q \cdot dx - (F_q + dF_q) = 0 \\ -q \cdot dx - dF_q = 0$$

$$q = -\frac{dF_q}{dx} = -\frac{d^2 M_b}{dx^2}; \quad F_q = -\int q \cdot dx. \quad (4-8)$$

Die Gleichungen 4-7/8 stellen den Zusammenhang zwischen Streckenlast  $q$ , Querkraft  $F_q$  und Biegemoment  $M_b$  dar. Sie sagen folgendes aus:

1. Die Integration der Streckenlastfunktion ergibt den Querkraftverlauf.
2. Die Integration des Querkraftverlaufs liefert das Biegemomentendiagramm.
3. Durch Ableitung der Biegemomentenkurve erhält man den Querkraftverlauf.

4. Die Ableitung der Querkraftkurve (2. Ableitung der Momentenkurve) führt auf die Streckenlast.

Dieser Zusammenhang zwischen Momenten- und Querkraftverlauf eignet sich einmal zur Berechnung der Biegemomente, zum anderen aber zu einer qualitativen Kontrolle.

Die Berechnung der Biegemomente und Querkräfte soll hier auf drei Arten durchgeführt werden.

1. Teilabschnitte des Trägers werden freigemacht und für verschiedene Querschnitte werden aus den Gleichgewichtsbedingungen  $M_b$  und  $F_q$  bestimmt. Bei Einzellasten bleibt zwischen zwei Lasten die Querkraft konstant, das Biegemoment ändert sich linear. Für konstante Streckenlasten ändern sich die Querkräfte linear, die Momente quadratisch. Die Gleichungen 4-7/8 dienen zur Kontrolle.
2. Es wird der Querkraftverlauf gezeichnet. Das ist vor allem für Einzellasten sehr einfach, denn dieser Verlauf ist lediglich eine zeichnerische Addition der Kräfte, z.B. in Abb. 4-20c

$$F_A - F + F_B = 0.$$

Die „Fläche“ unter der Querkraftlinie ergibt die Momente.

3. Mit Hilfe des von FÖPPL<sup>4</sup> angegebenen Verfahrens, das im Anhang dieses Buches erläutert ist, werden von der Streckenlast ausgehend, die Gleichungen 4-7/8 ausgewertet. Das führt auf je eine Berechnungsgleichung für den Querkraftverlauf und den Biegemomentenverlauf. Dieses Verfahren eignet sich hervorragend für eine Programmierung und kann besonders vorteilhaft bei der Bestimmung der Deformationen des gebogenen Trägers (Abschnitt 4.6) angewendet werden. Für verschiedene Übergangssteilen des Querkraftverlaufs sind in der Tabelle 20 die Ansätze nach FÖPPL gegeben. Sie folgen unmittelbar aus der Darstellung des Verfahrens im Anhang.

An Hand von Beispielen sollen diese Verfahren näher erläutert werden.

### ***Beispiel 1 (Abb. 4-23)***

Für den abgebildeten Träger sollen Momenten- und Querkraftdiagramm ermittelt werden.

---

<sup>4</sup>FÖPPL, August (1854–1924), deutscher Ingenieur.

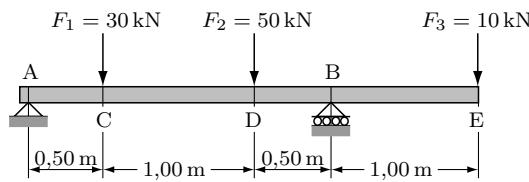


Abb. 4-23: Träger mit Einzelkräften

**Lösung**

*Methode 1 (Abb. 4-24/4-25)* Die Gleichgewichtsbedingungen für den Träger ergeben die Auflagerreaktionen

$$F_A = 30 \text{ kN}(\uparrow) \quad F_B = 60 \text{ kN}(\uparrow).$$

Der Biegemomentenverlauf hat an jeder Lastangriffsstelle eine Knick und verläuft zwischen zwei solchen Punkten linear. Die Querkraft ist zwischen zwei Kraftangriffspunkten konstant. Es genügt demnach, die Biegemomente an den Stellen C, D, B zu bestimmen. Für die Punkte A und E muss  $M_b = 0$  sein, da die Gleichgewichtsbedingungen  $\sum M = 0$  für das Gesamtsystem erfüllt ist.

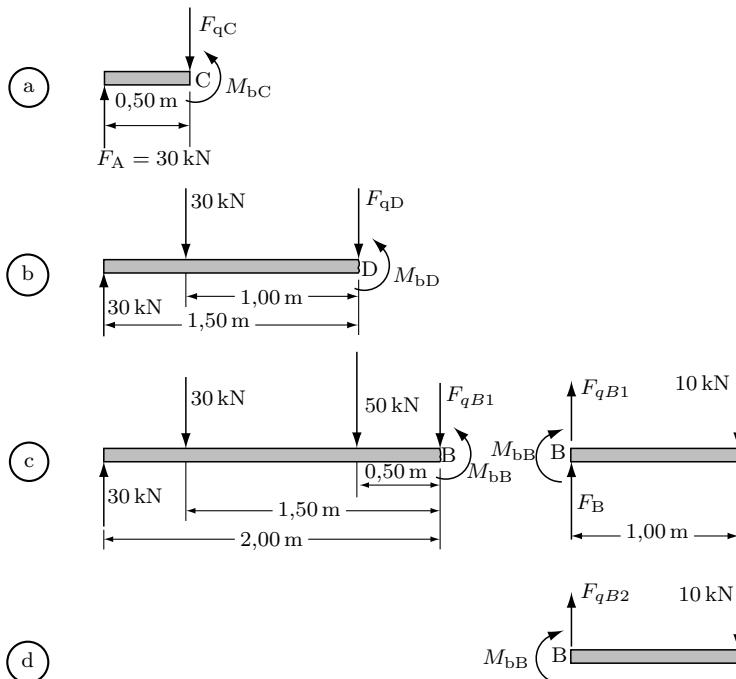
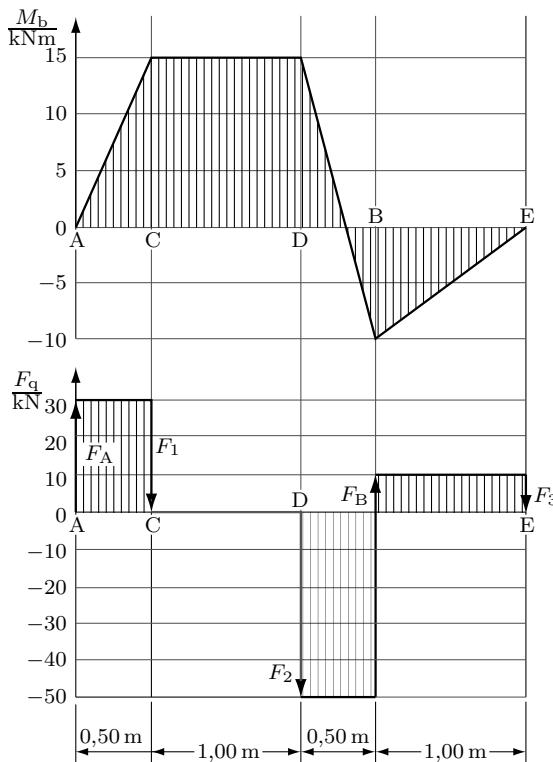


Abb. 4-24: Freigemachte Abschnitte des Trägers nach Abb. 4-23



**Abb. 4-25:**  $M_b$ - und  $F_q$ -Diagramme für den Träger nach Abb. 4-23

Der Träger wird jeweils durch Schnitte an den Stellen C, D, B freigemacht, wobei der Schnitt links von der angreifenden Kraft geführt sein soll. Moment und Querkraft werden für alle Schnitte positiv nach Abb. 4-19 eingeführt.

Die Gewichtsbedingungen ergeben für C (Abb. 4-24a)

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0 & M_{bC} &= +15 \text{ kNm} \\ \sum F &= 0 & F_{qC} &= +30 \text{ kN} \quad (\text{links von } F_1)\end{aligned}$$

für D (Abb. 4-24b)

$$\begin{aligned}\sum M_D &= 0 & M_{bD} &= +15 \text{ kNm} \quad (\text{Kräftepaar } F_A \ F_1) \\ \sum F &= 0 & F_{qD} &= 0 \quad (\text{zwischen C und D})\end{aligned}$$

für B (Abb. 4-24c)

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 & M_{bB} &= -10 \text{ kNm} \quad (\text{Kontrolle rechter Balkenabschnitt}) \\ \sum F &= 0 & F_{qB1} &= -50 \text{ kN} \quad (\text{zwischen D und B})\end{aligned}$$

Querkraft rechts von B nach Abb. 4-24d

$$\sum F = 0 \quad F_{qB2} = +10 \text{ kN}.$$

Die Ergebnisse sind in Abb. 4-25 aufgetragen. Im Bereich positiver Biegemomente sind die unteren Fasern gezogen, im Bereich negativer Werte die oberen. Das folgt sowohl aus der Definition der Vorzeichen nach Abb. 4-19, als auch aus der Anschauung im vorliegenden einfachen Belastungsfall.

Die Diagramme können folgendermaßen kontrolliert werden:

1. An den Enden muss  $M_b = 0$  sein.
2. Am Anfang geht der Querkraftverlauf von Null aus und geht am Balkenende auf den Wert Null zurück.
3. An den Stellen  $M = \text{konst.}$  muss  $\frac{dM}{dx} = 0 = F_q$  sein. Das ist hier im Bereich CD erfüllt.
4. Wo die Querkraft Null wird, muss das Moment einen Extremwert erreichen. Das ist hier im Bereich CD und B erfüllt.

### *Methode 2*

Ausgegangen wird vom Querkraftdiagramm. Nach Berechnung der Lagerkräfte wird dieses folgendermaßen gezeichnet (Abb. 4-25).

In A wird  $F_A$  dem Wirkungssinn nach gezeichnet.  $F_q$  bleibt konstant bis C, wo  $F_1$  nach unten angesetzt wird. Der sich ergebende Wert (hier Null) bleibt konstant bis D, wo wiederum  $F_2$  abgetragen wird usw. Am Trägerende muss der Linienzug bei  $F_q = 0$  schließen.

Mit Hilfe dieses Diagramms kann nach den Gleichungen 4-7 der Momentenverlauf ermittelt werden. Die von der  $F_q$ -Linie eingeschlossenen Flächen entsprechen den Momenten.

Links vom Punkt C hat die eingeschlossene Fläche die Größe  $30 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} = 15 \text{ kNm}$ ,

$$M_{bc} = +15 \text{ kNm}.$$

Bis zum Punkt D kommt keine Fläche dazu

$$M_{bd} = +15 \text{ kNm}.$$

Die Gesamtfläche links von B ist

$$M_{bB} = +15 \text{ kNm} - 50 \text{ kN} \cdot 0,50 \text{ m} = -10 \text{ kNm}.$$

Damit liegt der Biegemomentenverlauf fest. Es ist zweckmäßig,  $M_{bE} = 0$  zu kontrollieren. Die über der Null-Linie liegenden Querkraftflächen müssen gleich den unter der Null-Linie liegenden sein.

$$M_{bE} = 15 \text{ kNm} - 25 \text{ kNm} + 10 \text{ kNm} = 0.$$

### *Methode 3*

Die Gleichungen 4-7/8 werden nach dem FÖPPLschen Verfahren, das im Anhang erläutert ist, ausgewertet. Die Integration von  $q$  ergibt die Querkraft

$$F_q = - \int q \cdot dx.$$

Die Integrationskonstante wäre aus der Bedingung bei  $x = 0$  ist  $F_q = F_A$  zu bestimmen. Sie muss sicherstellen, dass der Querkraftverlauf bei  $x = 0$  mit dem Sprung von 0 auf  $F_A$  einsetzt. Ein Sprung an der Stelle 0 wird mit dem FÖPPL-Symbol durch  $\langle x \rangle^0$  dargestellt. In den weiteren Kraftangriffsstellen sind Unstetigkeitsstellen (Sprünge) der  $F_q$ -Funktion (s. Abb. 4-25). Man kann deshalb schreiben

$$F_q = - \int q \cdot dx + \langle x \rangle^0 \cdot F_A + \sum_i \langle x - a \rangle^0 \cdot F_i.$$

Integrationskonstante	restliche Kräfte
-----------------------	------------------

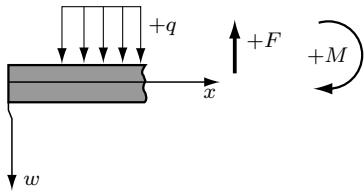
Es ist wesentlich einfacher – wie oben geschehen – die Auflagerkräfte vorher zu berechnen und sie wie die übrigen Belastungen zu behandeln. Das Integral wird als bestimmtes Integral (Grenzen von 0 bis  $x$ ) geschrieben. Damit entfällt eine aus Randbedingungen zu bestimmende Integrationskonstante. Die Auflagerkräfte werden unter dem Summenzeichen mit erfasst.

$$F_q = - \int_0^x q \cdot dx + \sum_i \langle x - a \rangle^0 \cdot F_i \quad (4-9)$$

Das gewählte Koordinatensystem erfordert eine Vorzeichenregelung für  $q$ ;  $F_q$ ; und  $M$ , wie sie die Abb. 4-26 zeigt.

Im vorliegenden Fall soll mit Zahlenwertgleichungen gerechnet werden, die für folgende Einheiten gelten.

$x$	$F_q$	$M$
m	kN	kNm



**Abb. 4-26:** Vorzeichendefinition für das FÖPPLsche Verfahren

Unter Beachtung, dass im vorliegenden Beispiel  $q = 0$  ist, erhält man aus dem Querkraftdiagramm Abb. 4-25

$$\begin{aligned} F_q &= \langle x \rangle^0 \cdot 30 + \langle x - 0,50 \rangle^0 (0 - 30) + \langle x - 1,5 \rangle^0 (-50 - 0) \\ &\quad + \langle x - 2,0 \rangle^0 (10 - (-50)) \\ F_q &= \langle x \rangle^0 \cdot 30 - \langle x - 0,50 \rangle^0 \cdot 30 - \langle x - 1,5 \rangle^0 \cdot 50 + \langle x - 2,0 \rangle^0 \cdot 60 \end{aligned} \quad (1)$$

$F_A \qquad \qquad F_1 \qquad \qquad F_2 \qquad \qquad F_B$

Diese Gleichung stellt den Querkraftverlauf dar. Es ist nicht notwendig, die Kraft  $F_3$  am Ende einzuführen, denn diese Kraft greift bei  $x = 3,0$  m an. Damit ist  $\langle x - 3,0 \text{ m} \rangle = 0$ . Der entsprechende Term hat keinen Einfluss auf das Ergebnis.

Nach Gl. 4-7 ist

$$M = \int F_q \cdot dx.$$

Sind die Auflagerkräfte richtig bestimmt, d.h. die Gewichtsbedingungen erfüllt, dann ergibt sich an den freien Enden  $M = 0$ . Das zeigen die oben durchgeführten Lösungen. Die Integrationskonstante  $M_0$  ist hier gleich Null, denn es gilt  $M = 0$  für  $x = 0$ . Da aber am Träger grundsätzlich einzelne Momente angreifen können, die im  $M_b$ -Diagramm Unstetigkeitsstellen (Sprünge) verursachen, wird geschrieben

$$M = \int_0^x F_q \cdot dx + \sum_j \langle x - a \rangle^0 \cdot M_j. \quad (4-10)$$

Für dieses Beispiel ist der zweite Term in dieser Bezeichnung gleich Null. Man erhält durch Integration aus der Gleichung (1)

$$M = \langle x \rangle \cdot 30 - \langle x - 0,5 \rangle \cdot 30 - \langle x - 1,5 \rangle \cdot 50 + \langle x - 2,0 \rangle \cdot 60 \quad (2)$$

Diese Gleichung stellt den Momentenverlauf für den ganzen Balken dar. Die Auswertung soll tabellarisch erfolgen

Stelle	A	C	D	B	E
$\langle x \rangle = x$	0	0,5	1,5	2,0	3,0
$\langle x - 0,5 \rangle$	0	0	1,0	1,5	2,5
$\langle x - 1,5 \rangle$	0	0	0	0,5	1,5
$\langle x - 2,0 \rangle$	0	0	0	0	1,0
$F_q/\text{kN}$	0/30	30/0	0/-50	-50/+10	+10
$M/\text{kNm}$	0	15	15	-10	0

An der Stelle E ergibt sich eine Querkraft, die zusammen mit  $F_3$  auf Null führt. Dort wirkt auch kein Biegemoment. Diese Bedingungen müssen an einem freien Trägerende immer erfüllt sein (Kontrolle).

An den Kraftangriffspunkten ergeben sich im Querkraftverlauf Sprünge (zwei Werte), die die FÖPPLSche Klammer mit dem Exponenten 0 darstellt. Für z.B. die Stelle B ( $x = 2,0 \text{ m}$ ) ist  $\langle x - 2 \rangle^0 = 0$ . Für einen beliebig kleinen Zuwachs zu den 2,0 m gilt jedoch  $\langle x - 2 \rangle^0 = 1$ . Einmal ist für  $x = 2$  nach Gleichung (1)

$$F_{qB} = 1 \cdot 30 - 1 \cdot 30 - 1 \cdot 50 + 0 \cdot 60 = -50 \text{ kN}$$

und zum anderen ist

$$F_{qB} = 1 \cdot 30 - 1 \cdot 30 - 1 \cdot 50 + 1 \cdot 60 = +10 \text{ kN}.$$

Zum besseren Verständnis soll hier noch das Biegemoment an der Stelle  $x = 1,70 \text{ m}$  mit Hilfe der Gleichung (2) berechnet werden:

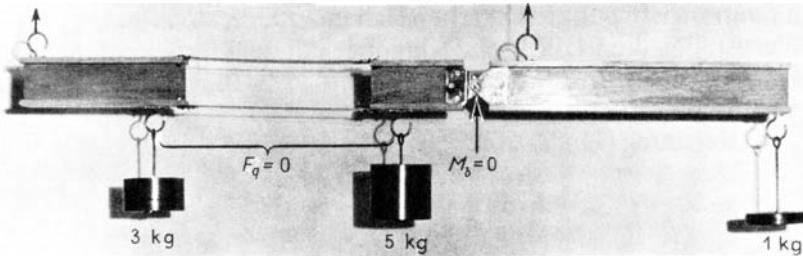
$$M_{1,7} = 1,70 \cdot 30 - 1,20 \cdot 30 - 0,20 \cdot 50 + 0 = +5,0 \text{ kNm}.$$

Analog könnten auch Querkräfte für Zwischenpunkte bestimmt werden.

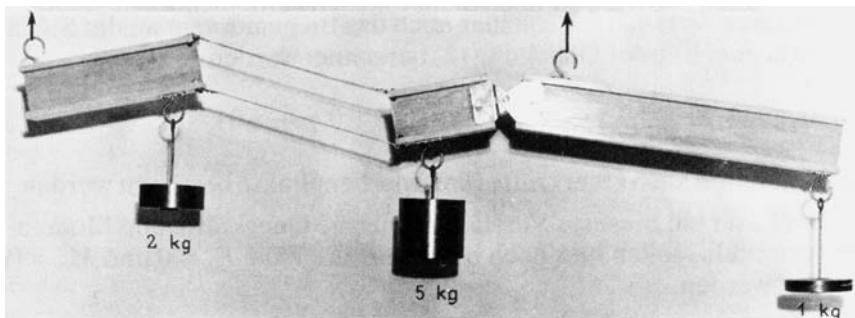
Um dem Leser ein besseres Verständnis für die Querkräfte und Momente zu vermitteln, sollen hier noch besonders die Fälle  $F_q = 0$  und  $M_b = 0$  diskutiert werden.

Wirkt ein konstantes Moment (reine Biegung), dann ist keine Querkraft vorhanden. Demnach kann eine Verschiebung einzelner Querschnitte nicht erfolgen, auch wenn man sie verschieblich gestaltet. Die Abb. 4-27 zeigt ein Modell, das in Proportionen und Belastung dem Beispiel entspricht. Zwischen C und D, wo  $F_q = 0$  ist, ist der Träger durch zwei parallele, gelenkig gelagerte Stäbe ersetzt. Diese übertragen das Biegemoment in Form eines Kräftepaars (oben Druckstab, unten Zugstab). Eine Verschiebung erfolgt nicht, obwohl sie möglich

ist. Auch ein Fachwerk kann wie ein Träger aufgefasst werden. In jedem Schnitt müssen ein Moment und eine Querkraft übertragen werden (vgl. RITTERScher Schnitt, Band 1). Ist die Querkraft an einer Stelle mit zwei parallelen Stäben gleich Null, dann sind nur diese Stäbe belastet. Ein dritter, querliegender Stab ist dann ein Blindstab (vgl. z.B. Band 1, Fachwerk Abb. A 9-5;  $S_{11} = 0$ ).



**Abb. 4-27:** Träger nach Abb. 4-23 im Modell



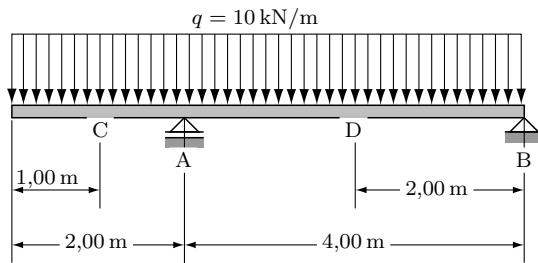
**Abb. 4-28:** Modellträger nach Abb. 4-27 bei geänderter Belastung

Ein Gelenk kann kein Moment übertragen, wohl aber im Gelenkbolzen eine Kraft. An einer Stelle, wo  $M_b = 0$  ist, kann man deshalb in den Träger ein Gelenk einbauen. Eine Verdrehung ist zwar möglich, erfolgt aber nicht. Die vorhandene Querkraft kann aufgenommen werden. Am Modell Abb. 4-27 ist auch diese Tatsache demonstriert.

Die Abb. 4-28 zeigt den gleichen Träger unter einer veränderten Belastung. Jetzt ist Gleichgewicht ohne eine entsprechend starke Verformung nicht möglich.

### **Beispiel 2 (Abb. 4-29)**

Der abgebildete Träger wird von einer konstanten Streckenlast beansprucht. Zu bestimmen sind das Biegemomenten- und Querkraftdiagramm.



**Abb. 4-29:** Träger mit konstanter Streckenlast

### Lösung (Abb. 4-30/4-31/4-32)

*Methode 1* Die Gleichgewichtsbedingungen für den Träger ergeben die Auflagerreaktionen

$$F_A = 45,0 \text{ kN}; \quad F_B = 15,0 \text{ kN}.$$

Nach Abb. 4-30 werden Teilabschnitte freigemacht und in den angegebenen Schnitten das Biegemoment und die Querkraft berechnet.

Schnitt C; Bild a

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0 & M_{bC} &= -5,0 \text{ kNm} \\ \sum F &= 0 & F_{qC} &= -10,0 \text{ kN}\end{aligned}$$

Schnitt A; Bild b

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 & M_{bA} &= -20,0 \text{ kNm} \\ \sum F &= 0 & F_{qA1} &= -20,0 \text{ kN} \quad (\text{links von A})\end{aligned}$$

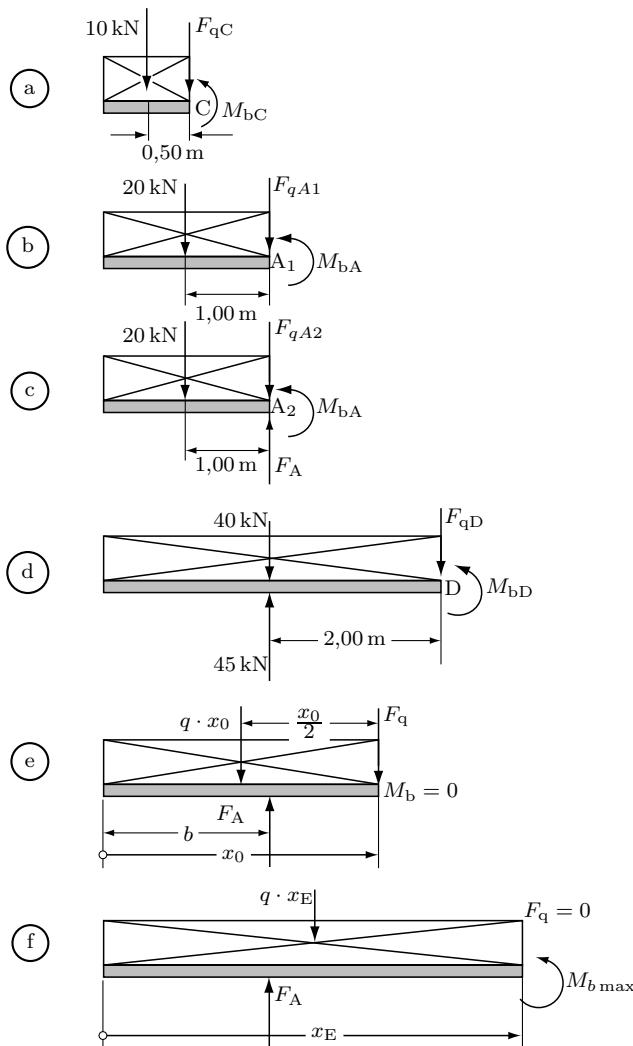
Schnitt A; Bild c

$$\sum F = 0 \quad F_{qA2} = +25,0 \text{ kN} \quad (\text{rechts von A})$$

Schnitt D; Bild d

$$\begin{aligned}\sum M_D &= 0 & M_{bD} &= +10,0 \text{ kNm} \\ \sum F &= 0 & F_{qD} &= +5,0 \text{ kN}\end{aligned}$$

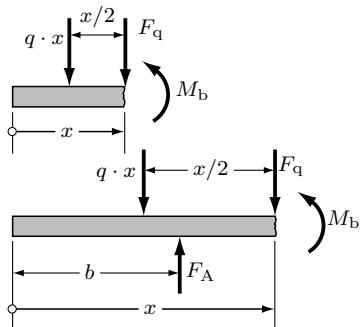
Eine Streckenlast verursacht einen parabolischen Momentenverlauf und eine lineare Änderung der Querkraft. Sowohl  $M$  als auch  $F_q$  müssen an den freien



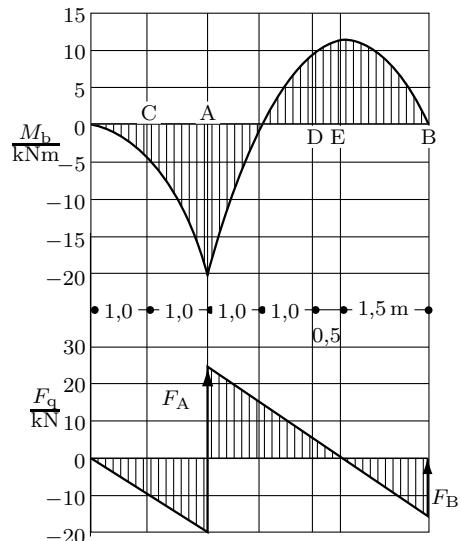
**Abb. 4-30:** Freigemachte Abschnitte des Trägers nach Abb. 4-29

Enden des Trägers Null sein. Wenn man das bedenkt, erleichtert es das Zeichnen der Diagramme. Zusätzlich zu den gerechneten Werten sollen die Nullstelle und das maximale Moment ermittelt werden. Dazu wird zunächst ein Teilabschnitt nach Bild e freigemacht, für den an der Schnittstelle  $M_b = 0$  gelten soll.

$$\sum M = 0 \quad \frac{q}{2}x_0^2 - F_A(x_0 - b) = 0$$



**Abb. 4-31:** Freigemachte Abschnitte des Trägers nach Abb. 4-29 (Allgemeine Lösung)



**Abb. 4-32:**  $M_b$ - und  $F_q$ -Diagramme für den Träger nach Abb. 4-29

$$x_0^2 - \frac{2F_A}{q}x_0 + \frac{2F_A \cdot b}{q} = 0$$

Für den vorliegenden Fall hat die Gleichung die Lösungen

$$x_{01} = 6,0 \text{ m}; \quad x_{02} = 3,0 \text{ m}.$$

Die erste Lösung bestätigt  $M_b = 0$  für das rechte Trägerende, die zweite liefert die gesuchte Nullstelle. Ein Maximum der Momentenkurve ist durch die Bedingung  $F_q = 0$  gegeben (s. Gl. 4-7). Ein entsprechend freigemachter Abschnitt nach Bild f führt auf

$$\begin{aligned} \sum F &= 0 & q \cdot x_E &= F_A \implies x_E = \frac{F_A}{q} = 4,50 \text{ m} \\ \sum M &= 0 & M_{b\max} &= F_A(x_E - b) - q \frac{x_E^2}{2} = +11,25 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Kontrolle:  $\sum M = 0$  für den rechten Abschnitt.

Die Diagramme zeigen die Abb. 4-32. Das absolut größte Moment, nach dem der Träger dimensioniert wird, wirkt im Auflager A.

Da es sich hier um einen einfachen Fall mit durchgehender Belastung handelt, hätte man für die beiden Abschnitte nach Abb. 4-31 allgemeine Gleichungen für  $M$  und  $F_q$  aufstellen können.

1. Abschnitt  $0 < x < 2,0$  m

$$\begin{aligned}\sum M &= 0 & M_b &= -\frac{q \cdot x^2}{2} \\ \sum F &= 0 & F_q &= -q \cdot x\end{aligned}$$

2. Abschnitt  $2,0 < x < 6,0$  m

$$\begin{aligned}\sum M &= 0 & M_b &= -\frac{q \cdot x^2}{2} + (x - b)F_A \\ \sum F &= 0 & F_q &= -q \cdot x + F_A\end{aligned}$$

Die Auswertung dieser Gleichungen für die verschiedenen Schnitte ergibt die Verläufe nach Abb. 4-32.

### Kontrollen

- Querkraft und Biegemoment sind an den freien Enden des Trägers Null.
- An den Stellen, wo der Querkraftverlauf eine Nullstelle hat, erreichen die Momente einen Extremwert (Schnitte A und E).
- In den Bereichen, wo die Querkraft positiv ist, ist es auch die Steigung der Momentenkurve (Bereich AE). Es gilt auch die entsprechende Umkehrung.
- Dort wo die Querkraft in  $x$ -Richtung kleiner wird, nimmt die Steigung der Momentenkurve ab, d.h. sie wird flacher. Das ist z.B. im Bereich AE der Fall. Auch hier gilt die Umkehrung.

Man sollte auf diese qualitativen Kontrollen, die auf den Gleichungen 4-7/8 beruhen, nicht verzichten.

### Methode 2

Ausgegangen wird vom Querkraftverlauf. Dieser stellt eine Addition der Kräfte dar und kann deshalb folgendermaßen gezeichnet werden. Die nach unten gerichtete Resultierende der Streckenlast bis zum Lager A beträgt 20,0 kN. Der Verlauf ist linear. In A wird anschließend  $F_A$  angetragen. In B muss der Kraftpfeil von  $F_B$  auf der Achse enden ( $F_q = 0$ ). Dazwischen ist der Verlauf linear. Nach den Gleichungen 4-7 entspricht die Fläche im  $F_q$ -x-Diagramm dem Moment.

Schnitt C:

$$M_{bC} = -\frac{1}{2} \cdot 1,0 \text{ m} \cdot 10 \text{ kN} = -5,0 \text{ kNm}$$

Schnitt A:

$$M_{bA} = -\frac{1}{2} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 20 \text{ kN} = -20,0 \text{ kNm}$$

Schnitt D: Die Querkraft in D beträgt  $F_{qD} = 5,0 \text{ kN}$ . Das kann man aus ähnlichen Dreiecken berechnen. Damit ist

$$M_{bD} = -20,0 \text{ kNm} + \frac{25,0 + 5,0}{2} \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} = +10,0 \text{ kNm}$$

Die Nullstelle des Querkraftverlaufs liegt 2,50 m rechts von A (Strahlensatz).

$$M_{b\max} = -20,0 \text{ kNm} + \frac{1}{2} \cdot 25,0 \text{ kN} \cdot 2,5 \text{ m} = +11,25 \text{ kNm}$$

Mit diesen Werten kann das Biegemomentendiagramm gezeichnet werden.

### *Methode 3*

Das FÖPPLsche Verfahren geht von der Streckenlast aus, die hier am linken Ende bei  $x = 0$  einsetzt (Tabelle 20).

$$q = \langle x \rangle^0 \cdot q^0$$

Das rechte Ende des Trägers  $x = l$ , an dem die Streckenlast auf Null zurückgeht, muss nicht eingefügt werden, da  $\langle x - l \rangle = 0$  für alle Abschnitte gilt. Es soll mit Zahlenwertgleichungen für folgende Einheiten gearbeitet werden.

$x$	$q$	$F_q$	$M$
m	kN/m	kN	kNm

Mit der Vorzeichendefinition nach Abb. 4-26 ist damit

$$q = \langle x \rangle^0 \cdot 10.$$

Die Gleichung 4-9

$$F_q = - \int_0^x q \cdot dx + \sum_i \langle x - a \rangle^0 \cdot F_i$$

führt mit  $F_A = 45,0 \text{ kN}$  und dem Abstand des Lagers  $x_A = 2,0 \text{ m}$  auf

$$F_q = -\langle x \rangle \cdot 10 + \langle x - 2,0 \rangle^0 \cdot 45,0. \quad (1)$$

Die Lagerkraft  $F_B$  muss nicht eingeführt werden, weil sie am Ende  $x = l$  wirkt. Die Gleichung (1) gibt den Querkraftverlauf wieder. Beispielhaft sollen einige Werte berechnet werden.

### Schnitt C

$$x = 1,0 \text{ m}; \quad F_{qC} = -1,0 \cdot 10 + 0 = -10,0 \text{ kN}$$

### Schnitt A

$$\begin{aligned} x = 2,0 \text{ m}; \quad F_{qA} &= -2,0 \cdot 10 = -20,0 \text{ kN} \quad \text{mit} \quad \langle x - 2 \rangle^0 = 0 \\ F_{qA} &= -2,0 \cdot 10 + 1 \cdot 45 = +25,0 \text{ kN} \quad \text{mit} \quad \langle x - 2 \rangle^0 = 1 \end{aligned}$$

### Lager B

$$x = 6,0 \text{ m}; \quad F_{qB} = -6,0 \cdot 10 + 1 \cdot 45 = -15 \text{ kN}$$

Addiert man  $F_B = 15,0 \text{ kN}$  hinzu, erhält man als Kontrolle  $F_q = 0$  rechts vom Auflager.

Die Lage der Nullstelle des Querkraftverlaufs kann man aus der Gleichung (1) berechnen ( $x = x_E$ )

$$0 = -x_E \cdot 10 + 1 \cdot 45 \quad \Rightarrow \quad x_E = 4,50 \text{ m}.$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass diese Stelle rechts von A liegt:  $\langle x_E - 2,0 \rangle^0 = 1$ . Das folgt aus der Anschauung. Hier ist ein Extremwert des Biegemomentes.

Die Gleichung 4-10 bzw. die Integration der Gleichung (1)

$$M = \int_0^x F_q \cdot dx + \sum_j \langle x - a \rangle^0 \cdot M_j$$

führt mit  $\langle x \rangle^1 = \langle x \rangle = x$  auf

$$M = -x^2 \cdot 5,0 + \langle x - 2,0 \rangle \cdot 45,0. \quad (2)$$

Das ist der Momentenverlauf für den Träger. Auch hier sollen einige Werte berechnet werden.

### Schnitt C

$$x = 1,0 \text{ m} \quad M_{bC} = -1,0^2 \cdot 5,0 + 0 = -5,0 \text{ kNm}$$

Schnitt A

$$x = 2,0 \text{ m} \quad M_{bA} = -2,0^2 \cdot 5,0 + 0 = -20,0 \text{ kNm}$$

Schnitt D

$$x = 4,0 \text{ m} \quad M_{bD} = -4,0^2 \cdot 5 + 2,0 \cdot 45,0 = +10,0 \text{ kNm} .$$

Die Nullstelle der Biegemomentenlinie muss rechts vom Auflager A liegen. Für diesen Bereich gilt  $\langle x - 2,0 \rangle = (x - 2,0)$ . Mit  $x = x_0$  erhält man aus Gleichung (2)

$$0 = -x_0^2 \cdot 5,0 + (x_0 - 2,0) \cdot 45,0 .$$

Die Normalform dieser quadratischen Gleichung

$$x_0^2 - 9,0 \cdot x_0 + 18,0 = 0$$

hat die Lösungen

$$x_{01} = 6,0 \text{ m}; \quad x_{02} = 3,0 \text{ m} .$$

Die erste Lösung entspricht dem Lager B. Da der Verlauf parabolisch ist, liegt der Scheitel in der Mitte zwischen den Nullstellen. Das ist der Schnitt E. Das maximale Moment erhält man mit  $x_E = 4,50 \text{ m}$  aus (2)

$$M_E = -4,5^2 \cdot 5,0 + 2,5 \cdot 45 = 11,25 \text{ kNm} .$$

Das ist jedoch nicht der absolut höchste Wert. Ein Träger gleichen Querschnitts müsste für das Moment  $M_A = 20,0 \text{ kNm}$  dimensioniert werden.

### **Beispiel 3 (Abb. 4-33)**

Für den eingespannten Träger sind das Momenten- und Querkraftdiagramm zu zeichnen.

### **Lösung (Abb. 4-34)**

Die Auflagerreaktionen betragen

$$\underline{F_A = 6,0 \text{ kN}(\downarrow)} \quad \text{und} \quad \underline{M_A = 36,0 \text{ kNm}(\curvearrowright)}$$

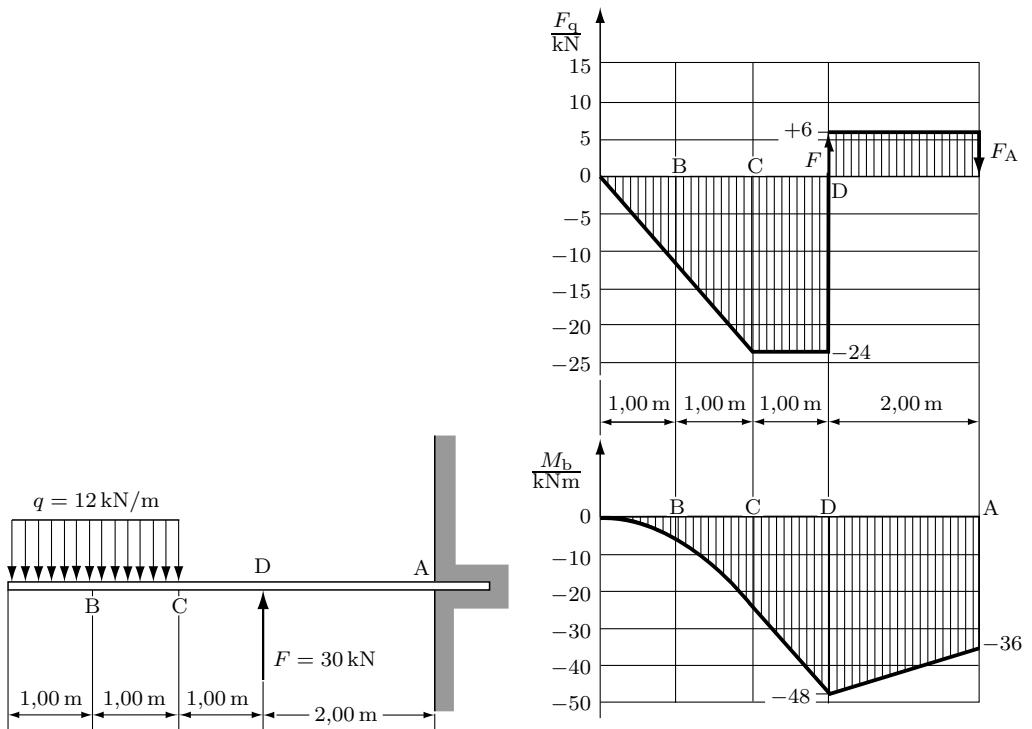


Abb. 4-33: Eingespannter Träger

Abb. 4-34:  $M_b$ - und  $F_q$ -Diagramme für den Träger nach Abb. 4-33

Der Querkraftverlauf wird analog zu dem vorigen Beispiel gezeichnet. Nach der Methode 2 erhält man mit Hilfe der Abb. 4-34 folgende Momente.

$$\text{Schnitt B} \quad M_{bB} = -\frac{1}{2} \cdot 12 \text{ kN} \cdot 1,0 \text{ m} = -6,0 \text{ kNm}$$

$$\text{Schnitt C} \quad M_{bC} = -\frac{1}{2} \cdot 24 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} = -24 \text{ kNm}$$

$$\text{Schnitt D} \quad M_{bD} = -24 \text{ kNm} - 24 \text{ kN} \cdot 1,0 \text{ m} = -48 \text{ kNm}$$

$$\text{Schnitt A} \quad M_{bA} = -48 \text{ kNm} + 6 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = -36 \text{ kNm} .$$

Mit diesen Werten kann der Momentenverlauf gezeichnet werden. Im Bereich der Streckenlast ist er parabolisch, sonst linear. Die qualitativen Kontrollen nach den Gleichungen 4-7/8, wie sie im vorigen Beispiel (Methode 1) durchgeführt wurden, sind erfüllt und sollten nachvollzogen werden. Dabei ist zu beachten, dass A hier *kein freies* Trägerende, sondern eine Einspannung bezeichnet. Deshalb ist das Biegemoment an dieser Stelle gleich dem Einspannmoment.

*Methode 3*

Nach der FÖPPLschen Methode wird von der Streckenlast ausgegangen. Dabei wird der 0-Punkt der  $x$ -Achse in das linke Trägerende gelegt. Es wird mit Zahlenwertgleichungen für folgende Einheiten gearbeitet

$x$	$q$	$F$	$M$
m	kN/m	kN	kNm

Die Vorzeichen sind in Abb. 4-26 gegeben (s. auch Tabelle 20)

$$\begin{aligned} q &= \langle x \rangle^0 \cdot 12 + \langle x - 2 \rangle^0 \cdot (0 - 12) \\ q &= \langle x \rangle^0 \cdot 12 - \langle x - 2 \rangle^0 \cdot 12 \end{aligned} \quad (1)$$

Die Integration (Gl. 4-9) liefert

$$\begin{aligned} F_q &= - \int_0^x q \cdot dx + \sum_i \langle x - a \rangle^0 \cdot F_i \\ F_q &= -x \cdot 12 + \langle x - 2 \rangle \cdot 12 + \langle x - 3 \rangle^0 \cdot 30. \end{aligned} \quad (2)$$

Den Momentenverlauf erhält man durch eine nochmalige Integration (Gl. 4-10)

$$M = \int_0^x F_q \cdot dx + \sum_j \langle x - a \rangle^0 \cdot M_j.$$

Da keine äußeren Momente angreifen, ist der zweite Term gleich Null.

$$M = -x^2 \cdot 6 + \langle x - 2 \rangle^2 \cdot 6 + \langle x - 3 \rangle \cdot 30. \quad (3)$$

Die Gleichungen (2) und (3) stellen den Querkraft- und Biegemomentenverlauf dar. Im vorliegenden Fall kann man mit diesen die Auflagerreaktionen berechnen ( $x = 5,0$  m)

$$F_{q5} = -5 \cdot 12 + 3 \cdot 12 + 1 \cdot 30 = +6,0 \text{ kN}.$$

Diese Kraft muss mit der Auflagerreaktion  $F_A = -6,0$  kN ins Gleichgewicht gebracht werden.

$$M_5 = -5^2 \cdot 6 + 3^2 \cdot 6 + 2 \cdot 30 = -36,0 \text{ kNm}.$$

Dieses Biegemoment entspricht dem Einspannmoment.

#### 4.4.2 Rahmen

Zunächst wird darauf hingewiesen, dass das Thema dieses Kapitels „Biegung“ ist. Der Abschnitt befasst sich deshalb nur mit den in den einzelnen Teilen des Rahmens wirkenden Biegemomenten. Daneben noch vorhandene Quer- und Längskräfte beeinflussen in vielen Fällen die Gesamtbeanspruchung eher wenig. Dazu wird einiges im Abschnitt 5.3 (Abb. 5-10) und Abschnitt 9.2.1 ausgeführt. Überlagerter Druck bedarf besonderer Beachtung (Kap. 7).

Ein Rahmen wie er bereits in Band 1 definiert wurde, besteht aus Einzelteilen, die in reibunglos angenommenen Gelenken verbunden sind. Zunächst ist es notwendig, die Auflagerreaktionen und Gelenkkkräfte zu bestimmen. Das ist eine Aufgabenstellung der Statik. Was bisher zum geraden Träger ausgeführt wurde, gilt unverändert. An Knoten und Kröpfungsstellen müssen die Biegemomente zusätzlich berechnet werden, auch wenn dort keine Kräfte angreifen. Das wird besonders im nachfolgenden Beispiel 3 veranschaulicht.

##### **Beispiel 1 (Abb. 4-35)**

Der skizzierte Rahmen ist mit einer Masse  $m$  belastet. Für die nachfolgend gegebenen Daten sind die Biegemomentendiagramme zu bestimmen.

$$m = 1000 \text{ kg}; \quad a = 2,0 \text{ m}; \quad r = 0,40 \text{ m}.$$

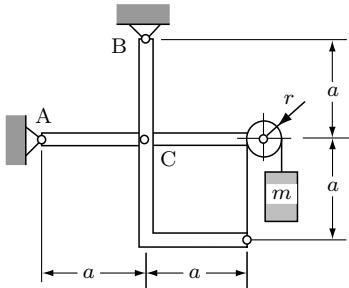


Abb. 4-35: Rahmen

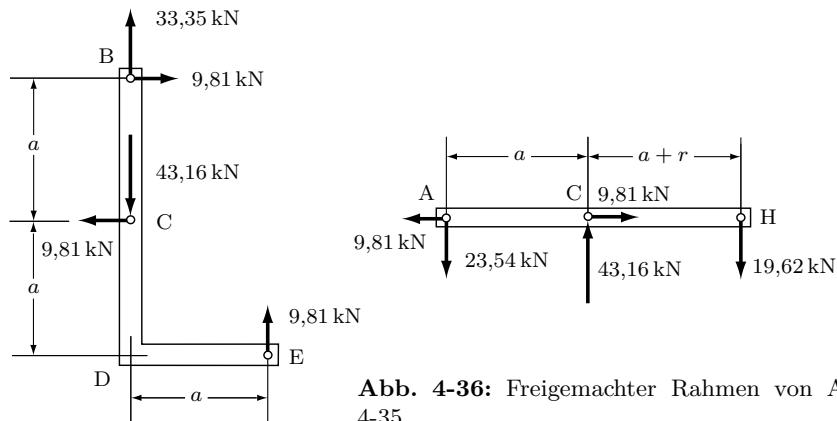
##### **Lösung (Abb. 4-36/4-37)**

Den freigemachten Rahmen zeigt die Abb. 4-36. Im Gelenk E greift die vom Seil übertragene Kraft  $m \cdot g$  an. Die Rollenachse H wird durch beide Seilkräfte mit  $2 m \cdot g$  belastet. Die Größe der eingezeichneten Kräfte ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen.

##### Teil ACH (Abb. 4-37)

Das maximale Biegemoment wirkt in C, in A und H ist  $M_b = 0$ . Der Verlauf ist linear. Der Träger wird in C geschnitten betrachtet:

$$\sum M_C = 0 \quad M_{bC} + 23,54 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} = 0 \quad M_{bC} = -47,1 \text{ kNm}.$$



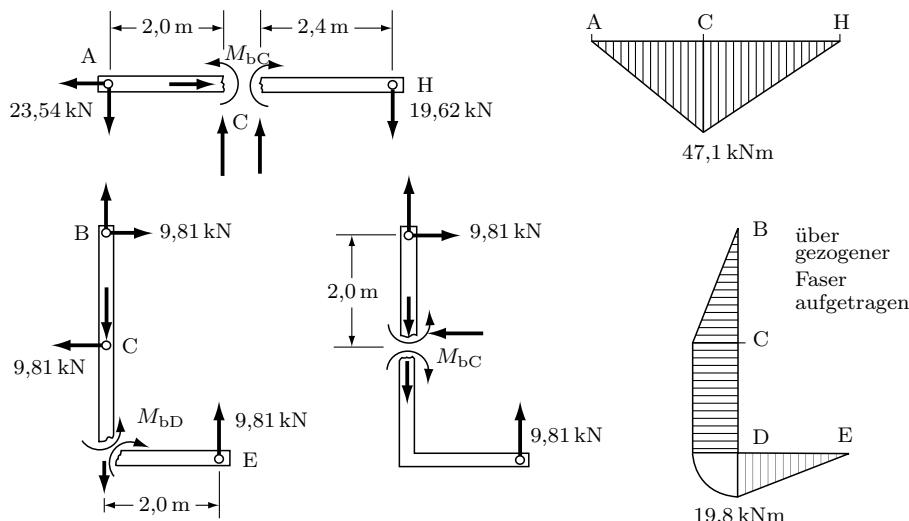
Kontrolle: Rechter Abschnitt  $\sum M_C = 0$ .

Teil BCDE

Die Berechnung des Biegemomentes muss für die Kröpfung D und das Gelenk C erfolgen.

$$\sum M_D = 0 \quad M_{bD} + 9,81 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} = 0 \quad M_{bD} = -19,62 \text{ kNm}.$$

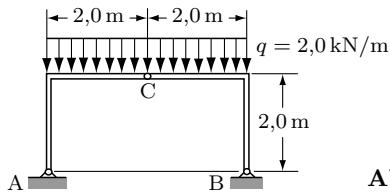
Da die Kraft in E parallel zum senkrechten Teil des Trägers ist, ändert sich das Moment bis C nicht. Kontrolle:  $\sum M_C = 0$  für den oberen oder unteren Abschnitt. In B ist das Biegemoment null. Die Diagramme zeigen die Abb. 4-37.



**Abb. 4-37:** Biegemomentendiagramme für Rahmen Abb. 4-35

**Beispiel 2 (Abb. 4-38)**

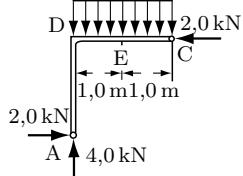
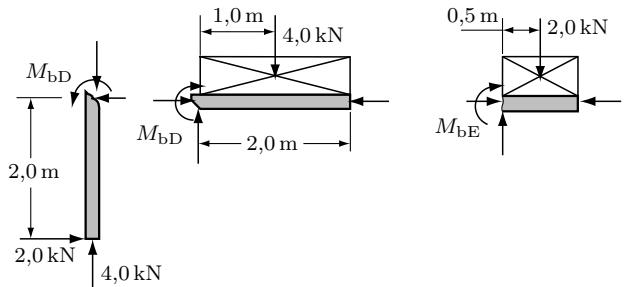
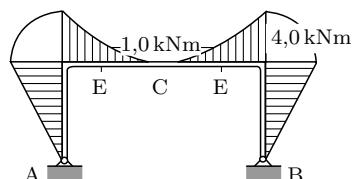
Für den abgebildeten Stahlrahmen ist das Biegemomentendiagramm zu ermitteln. Der Rahmen ist in A und B gelenkig gelagert. In der Mitte des Querholms ist ein Gelenk C eingebaut.

**Abb. 4-38:** Belasteter Dreigelenk-Rahmen**Lösung (Abb. 4-39/4-40/4-41)**

Die Auflagerreaktionen und die Gelenkkraft für das vorgegebene System ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen. Sie sind in der Abb. 4-39 eingetragen. Dabei ist zu beachten, dass das System symmetrisch ist. Freigemachte Teilabschnitte nach Abb. 4-40 führen auf

Kräpfung D:

$$\sum M_D = 0 \quad M_{bD} = -4,0 \text{ kNm}$$

**Abb. 4-39:** Freigemachte Rahmenhälfte**Abb. 4-40:** Freigemachte Teilabschnitte des Rahmens nach Abb. 4-38**Abb. 4-41:**  $M_b$ -Diagramm für den Rahmen nach Abb. 4-38 über gezogener Faser aufgetragen

Schnitt E:

$$\sum M_E = 0 \quad M_{bE} = -1,0 \text{ kNm}$$

Im Diagramm Abb. 4-41 sind die Biegemomente über der gezogenen Faser aufgetragen.

**Beispiel 3 (Abb. 4-42)**

Für den abgebildeten Rahmen ist das Biegemomentendiagramm zu bestimmen. Die Kraft  $F_2$  greift an der vertikalen Stütze an.

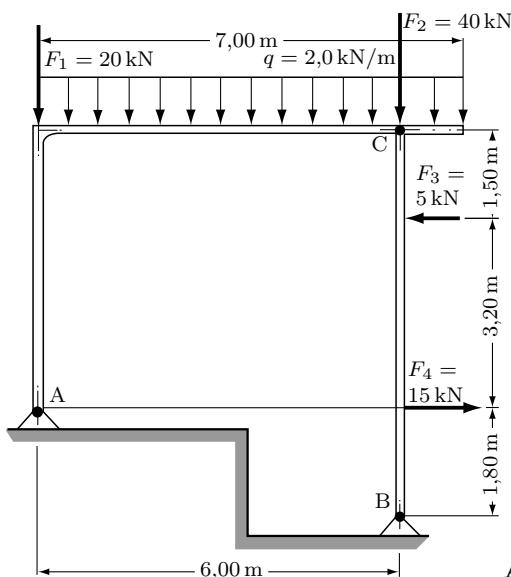


Abb. 4-42: Belasteter Rahmen

**Lösung (Abb. 4-43/4-44/4-45)**

Die aus den Gleichgewichtsbedingungen berechneten Auflagerreaktionen sind in der Abb. 4-43 eingetragen. Für Teilabschnitte nach Abb. 4-44 werden die Momentengleichungen aufgestellt.

Träger AC

Bild a)  $M_{bC} = -1,0 \text{ kNm}$

Bild b)  $M_{bD} = 16,82 \text{ kNm} - 9,0 \text{ kNm} = +7,82 \text{ kNm}$

Bild c)  $M_{bE} = 33,64 \text{ kNm} - 25,0 \text{ kNm} = +8,64 \text{ kNm}$

Bild d)  $M_{bF} = 50,46 \text{ kNm} - 49,0 \text{ kNm} = +1,46 \text{ kNm}$

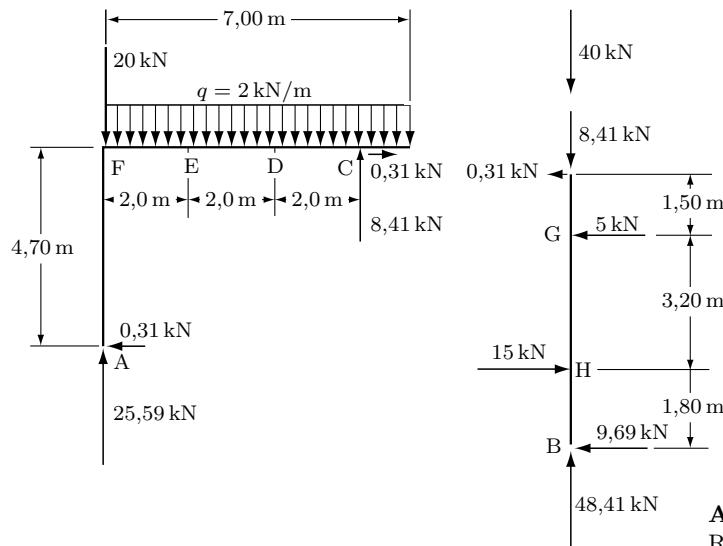


Abb. 4-43: Freigemachter Rahmen nach Abb. 4-42

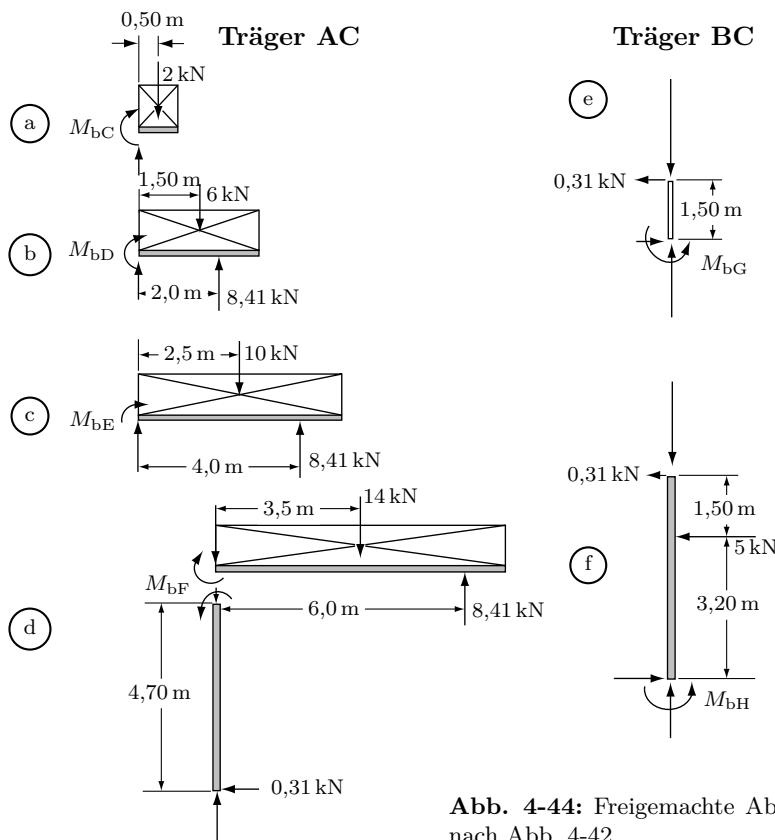
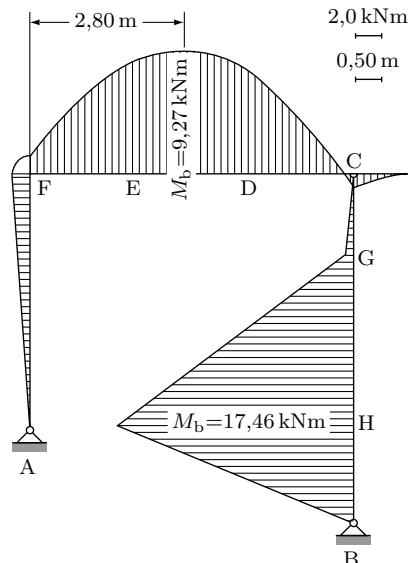


Abb. 4-44: Freigemachte Abschnitte des Rahmens nach Abb. 4-42



**Abb. 4-45:**  $M_b$ -Diagramm des Rahmens nach Abb. 4-42 über gedrückter Faser aufgetragen

Kontrolle (vertikaler Träger):

$$M_{bF} = 0,31 \text{ kN} \cdot 4,7 \text{ m} = +1,46 \text{ kNm}$$

Träger BC

Bild e)  $M_{bG} = -0,31 \text{ kN} \cdot 1,50 \text{ m} = -0,47 \text{ kNm}$

Bild f)  $M_{bH} = -1,46 \text{ kNm} - 16,0 \text{ kNm} = -17,46 \text{ kNm}$

Kontrolle:

$$M_{bH} = -9,69 \text{ kN} \cdot 1,80 \text{ m} = -17,46 \text{ kNm}.$$

Die Ergebnisse sind in Abb. 4-45 aufgetragen. Das maximale Moment im Querbalken liegt an der Stelle  $F_q = 0$ . Aus dieser Bedingung wurde die Lage ermittelt.

#### **Beispiel 4 (Abb. 4-46)**

Der Stahlrahmen ist wie abgebildet mit  $q = 25 \text{ kN/m}$  belastet. Die Abmessung  $a$  beträgt 4,0 m. Zu zeichnen ist das Biegemomentendiagramm.

#### **Lösung (Abb. 4-47/4-48/4-49)**

Aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet man die in Abb 4-47 eingetragenen Auflagerreaktionen. In der Abbildung sind die Streckenlasten durch Resultierende ersetzt.

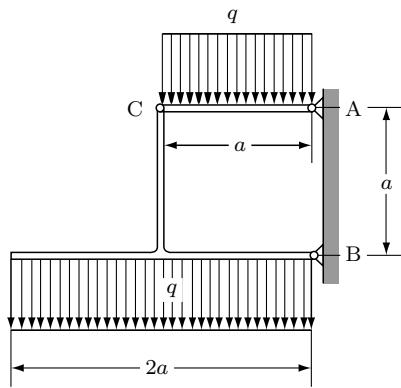


Abb. 4-46: Belasteter Rahmen

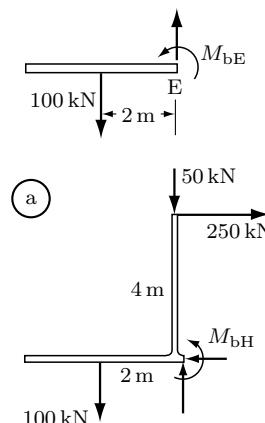
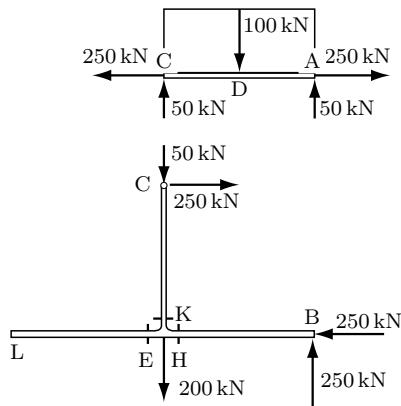


Abb. 4-47: Freigemachter Rahmen nach Abb. 4-46

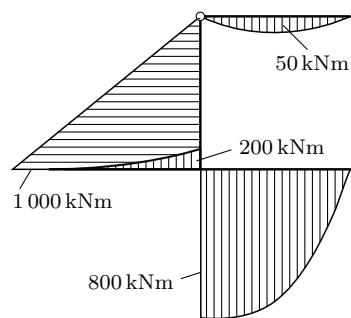
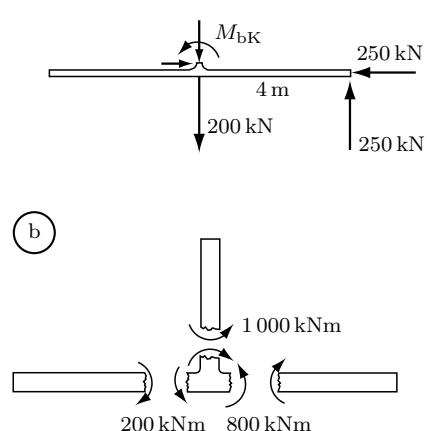
Abb. 4-49:  $M_b$ -Diagramm für Rahmen nach Abb. 4-46 über gezogener Faser aufgetragen

Abb. 4-48: Freigemachte Abschnitte des Rahmens nach Abb. 4-46

### Träger AC

Dieser Teil entspricht einem Träger auf zwei Stützen mit konstanter Streckenlast. In der Mitte ist

$$M_{bD} = 50,0 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} - 50,0 \text{ kN} \cdot 1,0 \text{ m} = 50 \text{ kNm}$$

Der Verlauf ist parabolisch und kann durch Berechnung von Zwischenwerten ergänzt werden.

### Träger BC

*Hier soll besonders auf die Verhältnisse an einem Knoten eingegangen werden.* Das ist die Verbindungsstelle mehrerer Träger. Diese muss freigeschnitten werden (Schnitte E; H; K). Welchen Teilabschnitt man für die Rechnung verwendet ist grundsätzlich gleich. Wählt man immer den Abschnitt, in dem der Knoten liegt, dann addieren sich die Momente mit den errechneten Vorzeichen zu Null (Gleichgewicht am Knoten). Für die Aufstellung der Gleichungen kann diese Vorgehensweise aufwendig sein. Aus diesem Grunde soll hier von diesem formalistischen Weg abgewichen werden. Es werden Abschnitte nach Abb. 4-48a betrachtet. Die Streckenlasten werden durch Resultierende ersetzt.

$$\sum M_E = 0 \quad M_{bE} = -100 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} = -200 \text{ kNm}$$

$$\sum M_H = 0 \quad M_{bH} = -200 \text{ kNm} + 250 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} = +800 \text{ kNm}$$

$$\sum M_K = 0 \quad M_{bK} = -250 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} = -1000 \text{ kNm}.$$

Es ist notwendig, die Vorzeichen zu deuten. Das geschieht mit Hilfe der Abb. 4-48b. Man erhält am Knoten

$$800 \text{ kNm} - 1000 \text{ kNm} + 200 \text{ kNm} = 0.$$

Diese Kontrolle sollte immer durchgeführt werden. Die Berechnung der Momente für weitere Schnitte liefert das vollständige Diagramm nach Abb. 4-49. Die Biegemomente sind über der gezogenen Faser aufgetragen.

## 4.5 Axiale Flächenmomente und Widerstandsmomente

### 4.5.1 Flächenmomente einfacher Flächen für eine vorgegebene Achse

Für den auf Biegung beanspruchten Träger gilt das Koordinatensystem nach Abb. 4-10. Auf dieses beziehen sich die Tabellen für genormte Stahlbauprofile. Die Querschnittsfläche des Trägers liegt in der  $y$ - $z$ -Ebene. Deshalb müssen die Flächenmomente für diese Achsen berechnet werden. Wie im Abschnitt 4-3 ausgeführt, handelt es sich immer um Flächenmomente 2. Ordnung. Deshalb wird auf diese zusätzliche Angabe nachfolgend verzichtet.

Nach Gleichung 4-1 ist

$$I_y = \int z^2 dA; \quad I_z = \int y^2 dA.$$

Die Dimension dieser Größe ist (Länge)<sup>4</sup>, die Einheit meistens cm<sup>4</sup>.

Ist die Fläche von mathematisch einfach erfassbaren Linien begrenzt, kann das Flächenmoment durch Integration ermittelt werden. Ist dies nicht der Fall, muss man die Fläche in parallel zur Achse liegende schmale Streifen einteilen, d.h. anstatt mit Differentialen mit Differenzen arbeiten. Man geht vom Integral zur Summenschreibweise über und wertet tabellarisch oder über akkumulierenden Speicher des Rechners aus

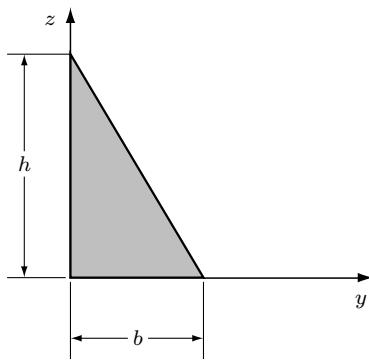
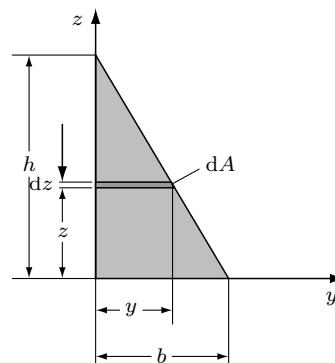
$$I_y = \sum (z^2 \cdot \Delta A) \quad I_z = \sum (y^2 \cdot \Delta A).$$

Die Berechnung kann grundsätzlich für frei wählbare Achsen erfolgen. In die Grundgleichung der Biegung (Gl. 4-6) geht das auf die Schwerpunktachse bezogene Flächenmoment ein. Diese Achse steht senkrecht zur Belastungsebene. In vielen Fällen ist es einfacher, zunächst das Flächenmoment auf eine günstig gewählte Achse zu beziehen. In einem zweiten Schritt erfolgt dann die Umrechnung auf die Schwerpunktachse (Abschnitt 4.5.2).

Die Flächenmomente einiger Grundfiguren sind in der Tabelle 9 zusammengestellt. Für Stahlbauprofile sind diese Werte in entsprechenden Tafeln enthalten. Beispiele dafür sind die Tabellen 10A bis 10D.

#### **Beispiel (Abb. 4-50)**

Für die abgebildete Dreiecksfläche ist das Flächenmoment bezogen auf die  $y$ -Achse zu bestimmen.

**Abb. 4-50:** Dreiecksfläche**Abb. 4-51:** Definition des Flächenelementes  $dA$  im Dreieck**Lösung (Abb. 4-51)**

Die Auswertung des Integrals

$$I_y = \int z^2 dA$$

erfordert die Definition des Flächenelementes  $dA$ . Dieses muss so liegen, dass alle seine Teile den (gleichen) Abstand  $z$  haben. Damit ist

$$dA = y \cdot dz \quad \text{und} \quad I_y = \int z^2 \cdot y \cdot dz.$$

Den Zusammenhang zwischen  $z$  und  $y$  liefert die Geradengleichung

$$z = -\frac{h}{b} \cdot y + h$$

Diese Beziehung könnte man auch aus ähnlichen Dreiecken gewinnen. Nach  $y$  aufgelöst erhält man

$$y = b \left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

und damit

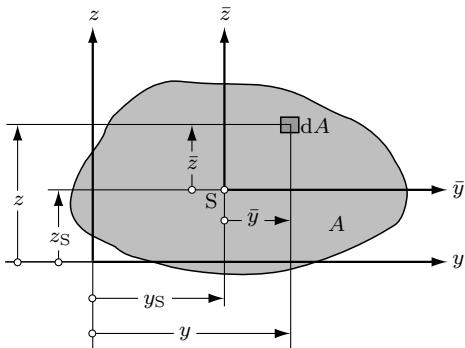
$$I_y = b \int_0^h z^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right) dz = b \left[ \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4h} \right]_0^h = b \left( \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4} \right)$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

Dieses Ergebnis gilt für jedes Dreieck mit der Höhe  $h$ . Die Spitze muss nicht auf der  $z$ -Achse liegen. Die Begründung überlege sich der Leser.

#### 4.5.2 Umrechnung eines Flächenmoments auf eine parallele Achse (STEINERScher<sup>5</sup> Satz)

In diesem Abschnitt soll eine Beziehung zwischen Flächenmomenten abgeleitet werden, die auf parallele Achsen bezogen sind. Eine von diesen soll eine Schwerpunktachse sein. Ausgegangen wird von einer Fläche  $A$  in dem Koordinatensystem  $y$ - $z$  nach Abb. 4-52. Die Koordinaten des Schwerpunktes sind  $y_S$  und  $z_S$ . Dieser Punkt ist der Ursprung des Koordinatensystems  $\bar{y}$  und  $\bar{z}$ .



**Abb. 4-52:** Zur Ableitung des Satzes von STEINER

Definitionsgemäß ist

$$I_y = \int z^2 dA \quad I_z = \int y^2 dA .$$

Die Summe beider ergibt

$$I_y + I_z = \int (z^2 + y^2) dA = \int r^2 dA = I_p .$$

Man nennt diese Größe polares Flächenmoment zur Unterscheidung der axialen Flächenmomente  $I_y$  und  $I_z$ .

*Die Summe von zwei axialen Flächenmomenten, deren Achsen senkrecht aufeinander stehen, ergibt das polare Flächenmoment bezogen auf den Schnittpunkt der Achsen.*

Diese Größe kommt im Abschnitt 4.7 „Schiefe Biegung“ und im Kapitel 6 „Verdrehung“ zur Anwendung.

---

<sup>5</sup>STEINER, Jacob (1796–1863), schweizer Geometer.

Mit

$$z = z_S + \bar{z} \quad \text{und} \quad y = y_S + \bar{y}$$

erhält man

$$\begin{aligned} I_y &= \int (\bar{z} + z_S)^2 dA \\ I_z &= \int (\bar{y} + y_S)^2 dA. \end{aligned}$$

Es wird quadriert und die Integrale werden aufgeteilt, wobei die konstanten Werte vor die Integrale geschrieben werden

$$\begin{aligned} I_y &= \int \bar{z}^2 dA + 2z_S \int \bar{z} dA + z_S^2 \int dA \\ I_z &= \int \bar{y}^2 dA + 2y_S \int \bar{y} dA + y_S^2 \int dA. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\left. \begin{array}{l} \int dA = A \\ \int \bar{z} dA = 0 \\ \int \bar{y} dA = 0 \\ \int \bar{z}^2 \cdot dA = I_{\bar{y}} \\ \int \bar{y}^2 \cdot dA = I_{\bar{z}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Schwerpunktachse (s. Band 1, Gl. 4-8)} \\ \text{nach der Definition des Flächenmomentes.} \end{array}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} I_y &= I_{\bar{y}} + z_S^2 \cdot A \\ I_z &= I_{\bar{z}} + y_S^2 \cdot A. \end{aligned}$$

Für das polare Flächenmoment gilt

$$\begin{aligned} I_y + I_z &= I_p = I_{\bar{y}} + z_S^2 \cdot A + I_{\bar{z}} + y_S^2 \cdot A \\ I_p &= I_{\bar{y}} + I_{\bar{z}} + (z_S^2 + y_S^2) \cdot A \\ I_p &= I_{pS} + r_S^2 \cdot A \end{aligned}$$

Zusammenfassend kann man schreiben

$$I_y = I_{\bar{y}} + z_S^2 \cdot A \quad (4-9)$$

$$I_z = I_{\bar{z}} + y_S^2 \cdot A \quad (4-10)$$

$$I_p = I_{pS} + r_S^2 \cdot A \quad (4-11)$$

Diese Gleichungen formulieren den STEINERSchen Satz.

Da  $y_S^2$  und  $z_S^2$  immer positiv sind, wird zu den auf die Schwerpunktachsen bezogenen Flächenmomenten immer etwas dazugezählt. *Deshalb sind die Flächenmomente für die Schwerpunktachsen die minimalen Flächenmomente aller parallelen Achsen.*

### Beispiel 1

Das Flächenmoment  $I_y$  des Dreiecks Abb. 4-50 ist auf eine parallele Achse  $y^*$  umzurechnen, die bei  $z = h$  die  $z$ -Achse schneidet (Dreiecksspitze).

### Lösung

Die direkte Umrechnung ist mit dem STEINERSchen Satz nicht möglich. In einem Zwischenschritt muss auf die Schwerpunktachse reduziert werden.

$$I_{\bar{y}} = I_y - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot A$$

$$I_{y^*} = I_{\bar{y}} + \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \cdot A = I_y - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot A + \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \cdot A.$$

Mit

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^2}{6} \cdot A \quad (\text{Beispiel Abb. 4-50})$$

erhält man  $\underline{I_{y^*} = \frac{bh^3}{4}}$ .

### Beispiel 2 (Abb. 4-53)

Für die skizzierte Rechteckfläche soll das Flächenmoment für die  $y$ -Achse berechnet werden. Dazu ist zu untersuchen, von welchem Abstand  $z_S$  an der Anteil  $I_{\bar{y}}$  vernachlässigbar klein wird. Dabei soll ein durch die Vernachlässigung verursachter Fehler von 1,0 % zugelassen werden.

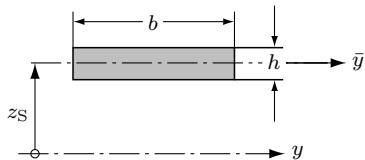


Abb. 4-53: Teilfläche im Koordinatensystem

**Lösung**

Nach Aufgabenstellung ist der Ansatz

$$\frac{I_{\text{Exakt}} - I_{\text{Näherung}}}{I_{\text{Exakt}}} = 0,01.$$

Dabei sind (Tabelle 9)

$$I_{\text{Exakt}} = I_{\bar{y}} + z_S^2 \cdot A = \frac{b \cdot h^3}{12} + z_S^2 \cdot b \cdot h$$

und

$$I_{\text{Näherung}} = z_S^2 \cdot A = z_S^2 \cdot b \cdot h.$$

Das führt auf

$$\frac{b \cdot h^3}{12} = 0,01 \left( \frac{b \cdot h^3}{12} + z_S^2 \cdot b \cdot h \right)$$

und nach einfachen Umwandlungen

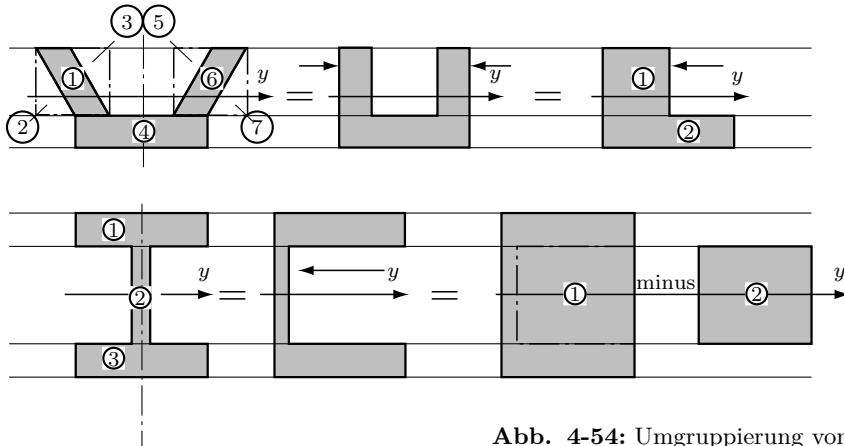
$$z_S \geq h \cdot \sqrt{\frac{99}{12}}; \quad \underline{z_S \geq 2,87 \cdot h}.$$

Die Abbildung 4-53 zeigt maßstäblich eine Anordnung, die die oben errechnete Grenzbedingung erfüllt. Schon diese kleine Verschiebung der Fläche aus der  $y$ -Achse führt dazu, dass man den Schwerachsenanteil des Flächenmomentes vernachlässigen kann. Diese Überlegungen kommen zur Anwendung bei zusammengesetzten Flächen, wie sie vor allem im Stahlbau verwendet werden (s. nächster Abschnitt). Die unvermeidbaren Fertigungstoleranzen beeinflussen das Flächenmoment u.U. wesentlich stärker (z.T. 4. Potenz!), als es dieser Anteil tut. Eine solche Vernachlässigung ist demnach kein Fehler, sondern berücksichtigt unvermeidbare Toleranzen.

### 4.5.3 Flächenmomente zusammengesetzter Flächen

Für eine aus mehreren Grundfiguren bzw. Einzelprofilen zusammengesetzte Fläche, müssen die Flächenmomente der einzelnen Teilflächen addiert werden. *Die Addition darf nur für Flächenmomente gleicher Bezugsachse durchgeführt werden.*

Der Definition des Flächenmomentes nach Gleichung 4-1 kann man folgendes entnehmen. Diese Größe hängt nur den Abständen der Flächenelemente zur Bezugsachse ab. Da dieser Abstand quadriert wird, ergibt sich unabhängig von der Lage immer ein positives Vorzeichen. Man kann deshalb Flächen um die Achse klappen. Da nur die Abstände *von* der Achse eingehen, darf man Teile parallel *zur* Achse verschieben. Beispiele dafür zeigt die Abb. 4-54. Das Ziel solcher Manipulationen ist, eine vorgegebene Fläche in möglichst wenige geometrische Grundfiguren zu zerlegen.



**Abb. 4-54:** Umgruppierung von Teilflächen

Bei Flächen, die sich aus verhältnismäßig vielen Teilen zusammensetzen, berechnet man die Flächenmomente am besten tabellarisch. Dabei muss zunächst die Lage des Schwerpunktes festgestellt werden. In manchen Fällen ist es zweckmäßig, zunächst alle Flächenmomente auf eine günstig liegende Achse zu beziehen und anschließend mit dem STEINERSchen Satz die Umrechnung auf die Schwerpunktachse durchzuführen. Der andere Weg ist, alle Flächenmomente auf die Achse des gemeinsamen Schwerpunktes zu beziehen und diese zu addieren.

#### **Beispiel 1 (Abb. 4-55)**

Für die abgebildete Fläche sind die Flächenmomente  $I_y$  und  $I_z$  zu bestimmen.

#### **Lösung (Abb. 4-56/4-57)**

Die vorgegebene Fläche wird in geometrische Grundfiguren zerlegt. Diese wer-

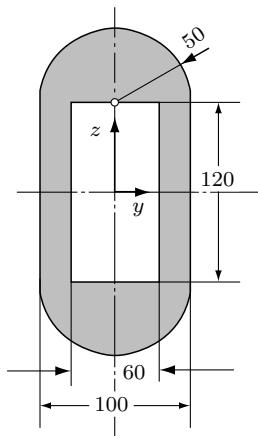


Abb. 4-55: Querschnittsfläche

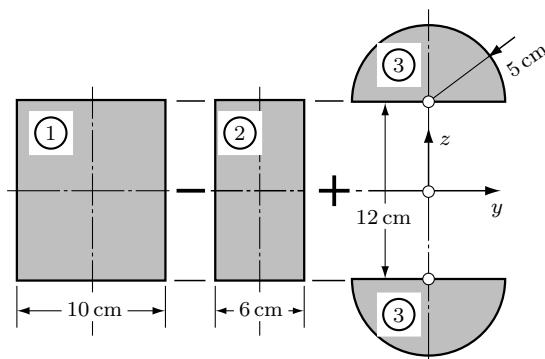


Abb. 4-56: Zerlegung der Fläche nach Abb. 4-55 in geometrische Grundfiguren

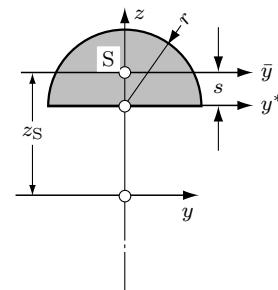


Abb. 4-57: Halbkreisfläche im Koordinatensystem

den nach Abb. 4-56 nummeriert. Die Halbkreisflächen bedürfen einer eigenen Berechnung nach Abb. 4-57. Bezogen auf die Achse  $y^*$  ist das Flächenmoment für die halbe Kreisfläche nach Tabelle 9

$$I_{y^*} = \frac{1}{2} \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 10,0^4 \text{ cm}^4}{128} = 245,4 \text{ cm}^4$$

Da diese Achse nicht im Schwerpunkt liegt, darf nicht unmittelbar auf die Achse  $y$  umgerechnet werden. Es muss zunächst der auf die Schwerpunktachse  $\bar{y}$  bezogene Wert bestimmt werden. Mit dem Schwerpunktabstand  $s$  nach Tabelle 4-II (Band 1)

$$s = \frac{2d}{3\pi} = \frac{2 \cdot 10,0 \text{ cm}}{3\pi} = 2,12 \text{ cm}$$

erhält man mit dem STEINERSchen Satz

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}} &= I_{y^*} - s^2 \cdot A = 245,4 \text{ cm}^4 - 2,12^2 \text{ cm}^2 \cdot \frac{\pi}{8} 10,0^2 \text{ cm}^2 \\ I_{\bar{y}} &= 68,6 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Jetzt liefert der erneute Ansatz des STEINERSchen Satzes

$$\begin{aligned} I_y &= I_{\bar{y}} + z_S^2 \cdot A = 68,6 \text{ cm}^4 + 8,12^2 \text{ cm}^2 \cdot \frac{\pi}{8} 10,0^2 \text{ cm}^2 \\ I_y &= 2659 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Das Gesamtflächenmoment setzt sich aus den einzelnen Anteilen zusammen.

$$I_y = I_{y1} - I_{y2} + 2I_{y3}.$$

Die beiden Halbkreisflächen haben den gleichen Abstand zur  $y$ -Achse. Sie können deshalb addiert werden. Die Flächen (1) und (2) könnte man durch ein 4,0 cm breites Rechteck ersetzen. Diese Überlegung gilt nur für die Berechnung von  $I_y$ . Mit

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

für die Rechteckfläche (Tabelle 9) erhält man

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{10,0 \text{ cm} \cdot 12,0^3 \text{ cm}^3}{12} - \frac{6,0 \text{ cm} \cdot 12,0^3 \text{ cm}^3}{12} + 2 \cdot 2659 \text{ cm}^4 \\ I_y &= \underline{\underline{5894 \text{ cm}^4}} \end{aligned}$$

Analog gilt für die  $z$ -Achse

$$I_z = I_{z1} - I_{z2} + 2I_{z3}.$$

Wie im Zusammenhang mit der Abb. 4-54 erläutert, dürfen Flächenteile parallel zur Bezugsachse verschoben werden. Deshalb werden die beiden Halbkreisflächen zur vollen Kreisfläche zusammengeschoben.

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{12,0 \text{ cm} \cdot 10,0^3 \text{ cm}^3}{12} - \frac{12,0 \text{ cm} \cdot 6,0^3 \text{ cm}^3}{12} + \frac{\pi \cdot 10,0^4 \text{ cm}^4}{64} \\ I_z &= \underline{\underline{1275 \text{ cm}^4}}. \end{aligned}$$

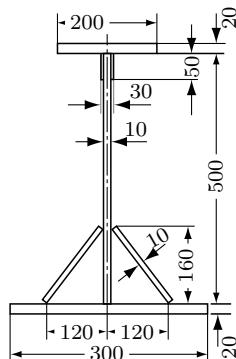


Abb. 4-58: Trägerquerschnitt

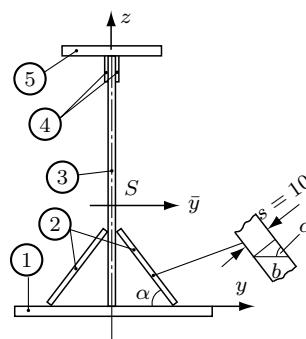


Abb. 4-59: Nummerierung der Teile des Querschnitts nach Abb. 4-58

**Beispiel 2 (Abb. 4-58)**

Für die abgebildete Fläche ist das Flächenmoment für die Schwerpunktachse  $\bar{y}$  zu bestimmen.

**Lösung (Abb. 4-59)**

Die Einzelteile werden durchnummerniert und eine für die Berechnung günstige Achse  $y$  festgelegt. Bezogen auf diese Achse werden mit Hilfe der Tabelle 9 im Anhang dieses Buches die Einzelmomente berechnet.

Fläche 1

$$I_{y1} = \frac{b \cdot h^3}{3} = \frac{30 \cdot 2^3}{3} \text{ cm}^4 = 80 \text{ cm}^4.$$

Fläche 2

Diese Fläche kann nach Abb. 4-54 „zusammengeschoben“ werden. Dabei ist  $b = s / \sin \alpha$  mit  $\alpha = \arctan 16/12$ ,  $b = 12,5 \text{ mm}$  (s. Abb. 4-58/4-59).

$$I_{y2} = 2 \cdot \frac{b \cdot h^3}{3} = 2 \cdot \frac{1,25 \cdot 16^3}{3} \text{ cm}^4 = 3413 \text{ cm}^4.$$

Fläche 3

$$I_{y3} = \frac{b \cdot h^3}{3} = \frac{1 \cdot 50^3}{3} = 41\,667 \text{ cm}^4.$$

Fläche 4

$$I_{y4} = 2 \left( \frac{b \cdot h^3}{12} + z_S^2 \cdot A \right)$$

(STEINER)

$$I_{y4} = 2 \left( \frac{1 \cdot 5^3}{12} + 47,5^2 \cdot 5 \right) \text{cm}^4$$

der 1. Term wird in solchen Berechnungen oft vernachlässigt.

$$I_{y4} = 22\,583 \text{ cm}^4.$$

Fläche 5

$$I_{y5} = \frac{b \cdot h^3}{12} + z_S^2 \cdot A$$

(STEINER) s. Bemerkung oben.

$$I_{y5} = \left( \frac{20 \cdot 2^3}{12} + 51^2 \cdot 40 \right) \text{cm}^4.$$

$$I_{y5} = 104\,053 \text{ cm}^4.$$

Die Berechnung des Flächenschwerpunktes und die Addition der Einzelflächenmomente erfolgen tabellarisch:

$i$	$\frac{A}{\text{cm}^2}$	$\frac{z_S}{\text{cm}}$	$\frac{A \cdot z_S}{\text{cm}^3}$	$\frac{I_y}{\text{cm}^4}$
1	60	-1,0	-60	80
2	40	8,0	320	3 413
3	50	25,0	1250	41 667
4	10	47,5	475	22 583
5	40	51,0	2040	104 053
$\Sigma$	200	$\Sigma$	4025	171 796

Die Schwerpunktlage errechnet sich aus (s. Band 1, Gl. 4-9)

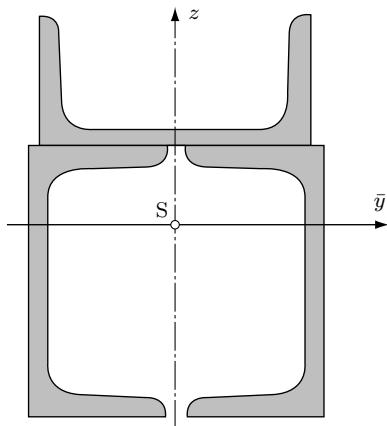
$$z_S = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i} = \frac{4025 \text{ cm}^3}{200 \text{ cm}^2} = 20,13 \text{ cm}.$$

Die Umrechnung des Flächenmomentes von der  $y$ - auf die  $\bar{y}$ -Achse erfolgt mit dem STEINERSchen Satz

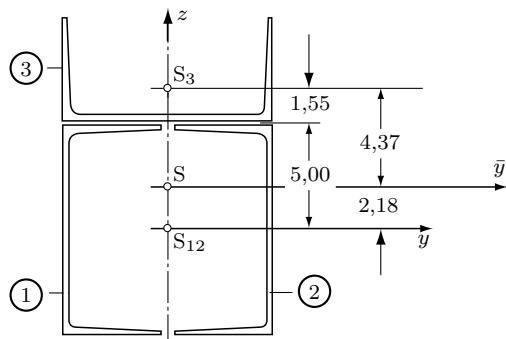
$$\begin{aligned} I_{\bar{y}} &= I_y - z_S^2 \cdot A \\ &= 171\,796 \text{ cm}^4 - 20,13^2 \text{ cm}^2 \cdot 200 \text{ cm}^2 \\ &\underline{I_{\bar{y}} = 90\,753 \text{ cm}^4}. \end{aligned}$$

### Beispiel 3 (Abb. 4-60)

Das abgebildete Profil ist aus drei gleichen U-100-Stählen zusammengesetzt. Zu bestimmen ist das Flächenmoment für die Schwerpunktachse  $\bar{y}$ .



**Abb. 4-60:** Aus U-Profilen zusammengesetzter Trägerquerschnitt



**Abb. 4-61:** Schwerpunkt der Fläche nach Abb. 4-60

### Lösung (Abb. 4-61)

Die Rechnung erfolgt tabellarisch. In den Schwerpunkt der unteren U-Stähle wird die Koordinate  $y$  gelegt. Für dieses System wird im linken Teil der Tabelle die Schwerpunktlage berechnet. Damit ist die Achse  $\bar{y}$  festgelegt und die Abstände zu den Einzelschwerpunkten können nach Abb. 4-61 vermaßt werden. Die Tabelle wird mit den aus der Tabelle 10 entnommenen Flächenmomenten und Schwerpunktabständen fortgeführt. Im letzten Teil werden die auf die  $\bar{y}$ -Achse bezogenen Flächenmomente berechnet und addiert. Die Summe stellt das Ergebnis der Rechnung dar.

<i>i</i>	Annahme der $y$ -Achse nach Abb. 4-61			Auf Einzelschwerpunkte bezogene Flächenmomente nach Tab. 10	Umrechnung von $I_{si}$ auf Schwerpunktachse $\bar{y}$		
	$A_i$ cm <sup>2</sup>	$z_i$ cm	$z_i \cdot A_i$ cm <sup>3</sup>		Abstand der Einzelschwerpunkte von $\bar{y}$		Steiner-scher Satz
1	13,5	0	0	206,0	2,18	64,1	270,1
2	13,5	0	0	206,0	2,18	64,1	270,1
3	13,5	6,55	88,4	29,3	4,37	257,8	287,1
		$\sum 40,5$	$\sum 88,4$			$\sum 827,3$	

$$z_S = \frac{88,4 \text{ cm}^3}{40,5 \text{ cm}^2} = 2,18 \text{ cm}$$

$$\underline{I_{\bar{y}} = 827 \text{ cm}^4}.$$

#### 4.5.4 Das Widerstandsmoment

Das Widerstandsmoment einer Querschnittsfläche ist nach Gleichung 4-3 folgendermaßen definiert:

$$W = \frac{I_S}{e_{\max}}.$$

Für ein Koordinatensystem nach Abb. 4-10 führt diese Definition auf

$$W_y = \frac{I_{\bar{y}}}{z_{\max}} \quad \text{für Belastung in } z\text{-Richtung (Momentenvektor } \vec{M}_{by} \text{)}$$

$$W_z = \frac{I_{\bar{z}}}{y_{\max}} \quad \text{für Belastung in } y\text{-Richtung (Momentenvektor } \vec{M}_{bz} \text{)}$$

Dabei kennzeichnet der Querstrich Schwerpunktskoordinaten. Bei einfachen Flächen kann auf diese Kennzeichnung verzichtet werden. Für unsymmetrische Profile ist  $y_{\max}$  bzw.  $z_{\max}$  der Abstand zwischen Schwerpunkt und weiter entfernt liegender Außenfaser.

*Für zusammengesetzte Profile dürfen nicht die Widerstandsmomente, sondern nur die auf gleiche Achse bezogenen Flächenmomente addiert bzw. subtrahiert werden.* Das geht aus der Definition und der Ableitung von Gleichung 4-6 hervor.

Für den Rechtsquerschnitt ist

$$W = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$$

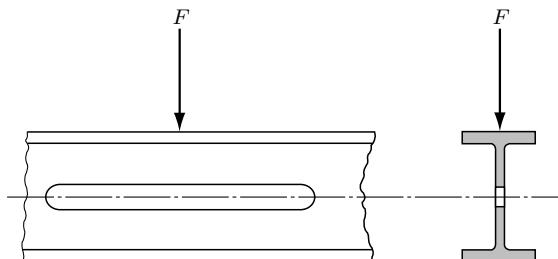
für den Kreisquerschnitt

$$W = \frac{\pi}{64} d^4 \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi}{32} d^3 \approx 0,1 d^3.$$

Weitere Formeln und Werte siehe Tabellen 9/10.

Diesen Formeln und auch der Definition von Flächen- und Widerstandsmoment kann man entnehmen, dass Biegeprofile möglichst viel Querschnittsfläche im großen Abstand von der neutralen Faser haben sollen. Teile in der Nähe der Schwerpunktachse haben nur einen geringen Anteil an der Momentenübertragung. Das ist z.B. bei den gewalzten H-Profilen und bei den geschweißten Kastenprofilen der Fall. Rechnerisch ändert sich z.B. das Widerstandsmoment eines H-Profiles, das in der Mitte des Steges durchbohrt wird, fast gar nicht. Die Be-

rechnung nach Gleichung 4-6 berücksichtigt nur die Biegebeanspruchung, der jedoch normalerweise eine Beanspruchung durch die Querkräfte überlagert ist. Diese werden hauptsächlich von den Querschnittsteilen in der Nähe der neutralen Faser übertragen. Darauf wird im nächsten Kapitel eingegangen. Besonders gefährlich ist eine Anordnung nach Abb. 4-62. Für diesen Fall kommt man der Wirklichkeit am nächsten, wenn man die Spannung aus dem Widerstandsmoment des oberen Trägerteiles berechnet.



**Abb. 4-62:** I-Träger mit teilweise herausgefrästem Steg

### Beispiel 1

Das Widerstandsmoment  $W_y$  der Fläche Abb. 4-58 ist zu berechnen.

### Lösung

Nach Beispiel 2 (Abschnitt 4.5.3) ist für die Schwerpunktachse

$$I_y = 90\,753 \text{ cm}^4.$$

Der maximale Faserabstand beträgt

$$z_{\max} = 52,0 \text{ cm} - 20,13 \text{ cm} = 31,87 \text{ cm}.$$

Damit erhält man

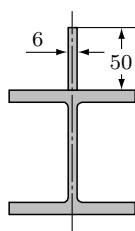
$$\underline{W_y} = \frac{I_{\bar{y}}}{z_{\max}} = \frac{90\,753 \text{ cm}^4}{31,87 \text{ cm}} = \underline{2848 \text{ cm}^3}.$$

### Beispiel 2 (Abb. 4-63)

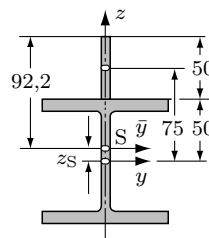
Auf den Flansch eines IPB 100-Trägers (Reihe HE-B) wird nach Skizze ein Flachstahl 50 mm × 6 mm aufgeschweißt. Wie ändert sich dadurch das Widerstandsmoment  $W_y$  des Trägers?

### Lösung (Abb. 4-64)

Daten für das Profil entnimmt man der Tabelle 10A. Das Koordinatensystem



**Abb. 4-63:** I-Träger mit aufgesetztem Flachstahl



**Abb. 4-64:** Geometrie des Trägerquerschnitts nach Abb. 4-63

$y$  wird zunächst in den Profilschwerpunkt gelegt. Die Lage des Gesamtschwerpunktes errechnet sich aus (Gl. 4-9/Band 1)

$$z_S = \frac{\sum z_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{7,5 \text{ cm} \cdot 3,0 \text{ cm}^2 + 0}{(26,0 + 3,0) \text{ cm}^2} = 0,78 \text{ cm}$$

Das Flächenmoment für das Profil nach der Tabelle ist auf die Achse  $y$  bezogen. Für den Flachstahl erfolgt die Umrechnung mit dem STEINERSchen Satz

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y \text{ Tab}} + \frac{b \cdot h^3}{12} + s^2 \cdot A \\ I_y &= 450 \text{ cm}^2 + \frac{0,6 \text{ cm} \cdot 5,0^3 \text{ cm}^3}{12} + 7,5^2 \text{ cm}^2 \cdot 3,0 \text{ cm}^2 = 625,0 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Dieser Wert muss mit dem STEINERSchen Satz auf die Schwerpunktskoordinate  $\bar{y}$  umgerechnet werden.

$$I_{\bar{y}} = I_y - z_S^2 \cdot A = 625,0 \text{ cm}^4 - 0,78^2 \text{ cm}^2 \cdot 29,0 \text{ cm}^2 = 607,4 \text{ cm}^4$$

Das Widerstandsmoment ergibt sich mit  $e_{\max} = 10,0 \text{ cm} - 0,78 \text{ cm} = 9,22 \text{ cm}$  zu

$$W_y = \frac{607,4 \text{ cm}^4}{9,22 \text{ cm}} = 65,9 \text{ cm}^3.$$

Für den Träger alleine beträgt dieser Wert  $W_y = 89,9 \text{ cm}^3$ . Das Widerstandsmoment wird demnach kleiner um

$$\frac{(89,9 - 65,9) \text{ cm}^3}{89,9 \text{ cm}^3} \cdot 100 \% = 26,7 \%.$$

Dieses Ergebnis überrascht zunächst. Der Träger ist, obwohl er mit einer Rippe „verstärkt“ wurde, gegen Biegung in  $z$ -Richtung erheblich schwächer geworden.

Der maximale Faserabstand ist, verglichen mit Trägerprofil allein, auf fast das Doppelte gestiegen (9,22 cm gegenüber 5,0 cm). Dieser Wert geht in den Nenner der Berechnungsgleichung für  $W_y$  ein. Anders ausgedrückt, ein großer Faserabstand hat wegen der linearen Spannungszunahme auch eine große Spannung in den Außenbereichen zur Folge.

Welche Schlussfolgerung muss man aus diesem Ergebnis ziehen? Außen angebrachte Flächenelemente müssen so kompakt liegen, dass das Flächenmoment stärker zunimmt als der maximale Faserabstand. *Einzelne Teile sollen nicht herausragen*. Nach diesen Überlegungen sind die für Biegebeanspruchung besonders geeigneten H und HEB-Profile entwickelt worden.

## Beispiele für die Abschnitte 4-3/4/5

### *Beispiel 1*

Der Träger Abb. 4-29 soll aus handelsüblichem Rohr hergestellt werden. An den Auflagern werden zur Vermeidung einer Linienbelastung Konsolen angeschweißt. Es ist zu untersuchen, ob für ein Rohr mit dem Außendurchmesser  $D = 168,3$  mm und der Wanddicke  $s = 8,8$  mm eine zulässige Spannung von  $\sigma_{zul} = 160 \text{ N/mm}^2$  nicht überschritten wird.

### **Lösung**

Das Widerstandsmoment eines Rohres gegen Biegung ist

$$W = \frac{I_y}{D/2} = \frac{\pi}{64} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D/2}$$

Mit  $D = 16,83$  cm und  $d = D - 2s = 15,07$  cm erhält man

$$W = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{16,83^4 \text{ cm}^4 - 15,07^4 \text{ cm}^4}{16,83 \text{ cm}} = 167,1 \text{ cm}^3$$

Der Träger muss nach der Rechnung des Beispiels 1 im Abschnitt 4.4.1 ein maximales Moment von 20 kNm übertragen. Die Grundgleichung der Biegung (Gl. 4-6) führt mit diesem Wert auf

$$\sigma_{\max} = \frac{M_b \max}{W_y} = \frac{20 \text{ kNm}}{167,1 \text{ cm}^3} \cdot \frac{10^3 \text{ N}}{\text{kN}} \cdot \frac{10^2 \text{ cm}}{\text{m}} = 1,20 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_{\max} = 120 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{zul}$$

Das vorgesehene Rohr ist damit ausreichend dimensioniert.

**Beispiel 2**

Der Träger Abb. 4-33 soll als schmaler I-Träger ausgeführt werden. Zu bestimmen sind

- das Profil für  $\sigma_{zul} = 140 \text{ N/mm}^2$ ,
- die Biegespannung im maximal beanspruchten Querschnitt.

**Lösung**

Der Träger ist an der maximal beanspruchten Stelle mit einem Biegemoment von 48,0 kNm belastet. Das entnimmt man dem Diagramm Abb. 4-34. Die Gleichung 4-6 liefert das erforderliche Widerstandsmoment

$$\sigma_b = \frac{M_{by}}{W_y} \implies W_{y \text{ erf}} = \frac{M_{by \text{ max}}}{\sigma_{zul}}$$

$$W_{y \text{ erf}} = \frac{48,0 \text{ kNm}}{1,4 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2} \cdot \frac{10^3 \text{ N}}{\text{kN}} \cdot \frac{10^2 \text{ cm}}{\text{m}} = 343 \text{ cm}^3.$$

In der Tabelle 10A muss in der Spalte  $W_y$  ein Wert gesucht werden, der am nächsten über dem errechneten liegt. Das ist hier

$$\text{I}240 \quad \text{mit} \quad W_y = 354 \text{ cm}^3$$

An der Stelle der maximalen Beanspruchung ist damit

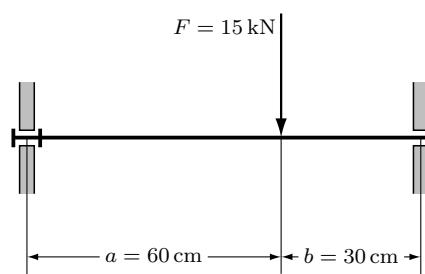
$$\sigma_b = \frac{M_{by}}{W_y} = \frac{48,0 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{354 \text{ cm}^4} = 1,36 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_b = 136 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{zul}.$$

Mit diesem Vergleich ist der Spannungsnachweis erbracht.

**Beispiel 3 (Abb. 4-65)**

Eine Achse ist wie abgebildet belastet. Für den Stahl E 295 ( $R_m = 500 \text{ N/mm}^2$ ) sollen die mindestens erforderlichen Abmessungen ermittelt werden.



**Abb. 4-65:** Belastete Achse

**Lösung**

Die Auflagerkräfte betragen

$$F_A = 5,0 \text{ kN} \quad F_B = 10,0 \text{ kN}.$$

Das maximale Biegemoment am Lastangriffspunkt ist

$$M_{b \max} = F_A \cdot a = F_B \cdot b = 3,0 \text{ kNm}.$$

Das Biegemomentendiagramm zeigt die Abb. 4-66. Es ist zweckmäßig, den Durchmesser für verschiedene Schnitte der Achse zu berechnen. Dafür wird die zulässige Spannung festgelegt. Als Grenzspannung wählt man bei dieser Belastung die Biegewechselfestigkeit. Diese ist nach Tabelle 3

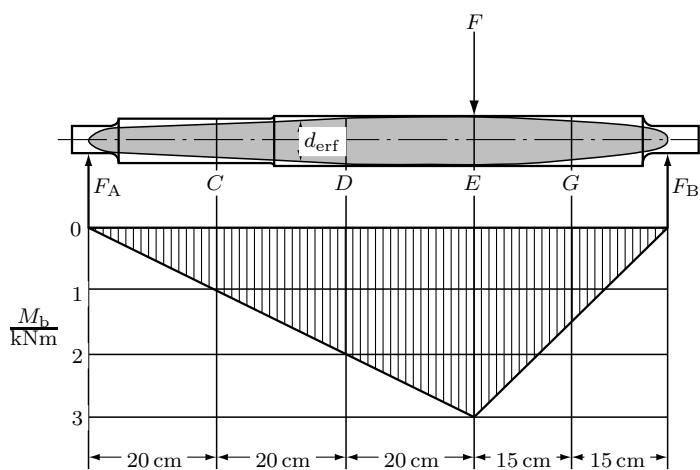
$$\sigma_{bw} = 240 \text{ N/mm}^2$$

Die Sicherheitszahl wird für die erste Berechnung mit  $S = 3$  festgelegt. Dieser Wert mag hoch erscheinen, jedoch können Spannungserhöhungen durch z.B. Kerbwirkungen erst in weiteren Schritten erfasst werden. Damit ist

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{bw}}{S} = \frac{240 \text{ N/mm}^2}{3} = 80 \text{ N/mm}^2.$$

Weiter liefert die Grundgleichung der Biegung

$$W_{erf} = \frac{M_b}{\sigma_{zul}} = \frac{\pi}{32} d_{erf}^3 \implies d_{erf} = \sqrt[3]{\frac{32 M_b}{\pi \cdot \sigma_{zul}}}$$



**Abb. 4-66:** Achse mit  $M_b$ -Diagramm

Diese Beziehung soll zu einer Zahlenwertgleichung für ein variables Moment umgewandelt werden. Mit  $1 \text{ kNm} = 10^6 \text{ Nmm}$  erhält man

$$d_{\text{erf}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10^6 \text{ Nmm/kNm}}{\pi \cdot 80 \text{ N/mm}^2}} \cdot \sqrt[3]{M_b}$$

$$d_{\text{erf}} = 50,3 \cdot \sqrt[3]{M_b} \quad \frac{M_b}{\text{kNm}} \quad \frac{d}{\text{mm}}$$

Es ist zweckmäßig, diese einfache Beziehung zu programmieren und mit Hilfe des Biegemomentendiagramms Abb. 4-66 auszuwerten. Die Ergebnisse sind nachfolgend gegeben.

Schnitt	A	C	D	E	G	B
$M_b/\text{kNm}$	0	1,0	2,0	3,0	1,5	0
$d/\text{mm}$	0	50,3	63,4	72,6	57,6	0

Diese Werte ergeben eine Kurve, die nach Abb. 4-66 innerhalb der Achse liegen muss, soll die zulässige Spannung nicht überschritten werden. Die durch Raster gekennzeichnete Kontur stellt eine „Achse gleicher Festigkeit“ dar, die gleichzeitig die Achse mit dem minimalen Gewicht für diese Spannung ist. Die Durchmesser an den Enden ergeben sich aus der Lagerdimensionierung. In diesem Bereich gilt wegen des überwiegenden Einflusses der Querkraft die Grundgleichung der Biegung nur eingeschränkt.

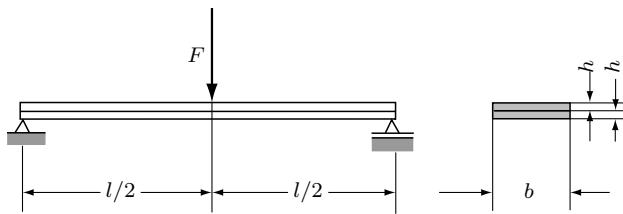
Dem Leser sei als Übungsaufgabe empfohlen, die Momentengleichung mit dem FÖPPLschen Verfahren aufzustellen und eine Zahlenwertgleichung abzuleiten, die die Berechnung des erforderlichen Durchmessers für jede Stelle  $x$  der Achse ermöglicht.

#### **Beispiel 4 (Abb. 4-67)**

Zwei Bretter liegen aufeinander und werden mittig mit der Kraft  $F$  belastet. Im Fall 1) liegen die Bretter lose aufeinander, im Fall 2) sind sie mit einer genügenden Anzahl von Nägeln fest miteinander verbunden. Für beide Fälle ist für eine zulässige Spannung  $\sigma_b$  die maximale Belastung  $F$  zu bestimmen. Die allgemeine Lösung soll für die Daten

$$l = 2,0 \text{ m}; \quad b = 20,0 \text{ cm}; \quad h = 2,0 \text{ cm}; \quad \sigma_b = 1000 \text{ N/cm}^2$$

ausgewertet werden.



**Abb. 4-67:** Zwei aufeinandergelegte Bretter mit Einzellast

### Lösung (Abb. 4-68)

Fall 1. Die Bretter können sich unabhängig voneinander deformieren. Man kann sie sich nebeneinander gelegt denken. Das ergibt ein Brett von der Breite  $2b$ .

$$M_{b \max 1} = F_{A1} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F_1 \cdot l}{4} \quad W_{y1} = \frac{2b \cdot h^2}{6}$$

$$\sigma_b = \frac{M_{b \max 1}}{W_{y1}} = \frac{F_1 \cdot l \cdot 3}{4 \cdot b \cdot h^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_1 = \frac{4 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_b}{3 \cdot l}}}$$

Fall 2. Beide Bretter bilden einen Balken in Höhe  $2h$ . Damit ist

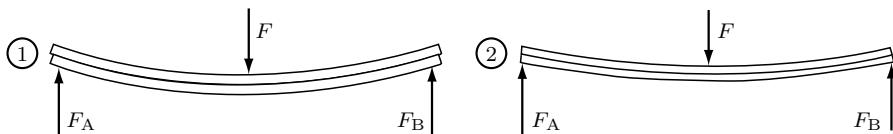
$$M_{b \max 2} = F_{A2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F_2 \cdot l}{4} \quad W_{y2} = \frac{b \cdot (2h)^2}{6}$$

$$\sigma_b = \frac{M_{b \max 2}}{W_{y2}} = \frac{F_2 \cdot l \cdot 6}{4 \cdot b \cdot 4h^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_2 = \frac{8 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_b}{3 \cdot l}}}$$

Man erkennt, dass im Fall 2 die Belastbarkeit doppelt so groß ist. Die Auswertung ergibt für die vorliegenden Daten

$$\underline{\underline{F_1 = 533 \text{ N}; \quad F_2 = 1066 \text{ N}}}.$$

Die fest miteinander verbundenen Bretter sind höher belastbar, weil sie nicht aufeinander rutschen können (s. Abb. 4-68). Dieses Rutschen verhindern die Nägel, die deshalb auf Abscherung beansprucht sein müssen. *Es wirken demnach in den Längsschnitten eines auf Biegung beanspruchten Trägers Schubspannungen.* Mit diesen befasst sich das nachfolgende Kapitel.



**Abb. 4-68:** Deformation von losen und miteinander verbundenen Brettern

## 4.6 Die Formänderung

### 4.6.1 Die Integrationsmethode

*Biegemomente verursachen die Krümmung einer vorher geraden Trägerachse.* Grundsätzlich ist der Vorgang in der Abb. 4-1a/b dargestellt. Krümmung ist als der Kehrwert des Krümmungsradius  $\varrho$  definiert. Im vorliegenden Falle ist es der Krümmungsradius der deformierten Trägerachse, die *Biegelinie* oder *elastische Linie* genannt wird.

An dieser Stelle ist es zweckmäßig, sich über den Unterschied von *Krümmung* und *Durchbiegung* klar zu werden. Als Beispiel sei der Kragträger nach Abb. 4-69 gewählt, dessen Deformation stark übertrieben dargestellt ist. An der Stelle des Lagers B ist das Biegemoment am größten. Dort ist im vorliegenden Fall die Durchbiegung null, aber die Biegelinie hat an dieser Stelle die größte Krümmung. Ein angeschmiegter Kreis hat hier den kleinsten Radius. An der Stelle der größten Durchbiegung ist hier das Biegemoment null. Es besteht demnach kein unmittelbarer Zusammenhang zwischen Biegemoment und Durchbiegung. Die Schlussfolgerung ist: *Es ist nicht möglich, von der Größe der Durchbiegung auf die Größe der Biegungsspannung zu schließen.* Man kann sich aber die Deformation elastischer Teile veranschaulichen, wenn man bedenkt, dass die Krümmung mit dem Biegemoment geht.

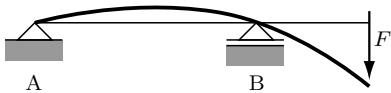


Abb. 4-69: Kragträger mit Einzellast

Die Deformation eines auf Biegung beanspruchten Trägers hängt von folgenden Größen ab:

1. von der Größe des Biegemomentes,
2. von der Starrheit des Werkstoffes gegen Zug-Druck-Bbeanspruchung,
3. von der Größe und Form des Trägerquerschnitts.

Die Krümmung selbst ist umgekehrt proportional zum Krümmungsradius  $\varrho$ , d.h. je größer die Krümmung, um so kleiner der Krümmungsradius. Für den elastischen Bereich kann man durch Überlegung folgende Proportionen aufstellen:

$$1. \quad \varrho \sim \frac{1}{M_b}$$

Je größer das Moment, um so größer die Krümmung und um so kleiner der Krümmungsradius.

$$2. \quad \varrho \sim E$$

Je schwerer deformierbar ein Werkstoff, um so kleiner die Krümmung, um so größer der Krümmungsradius.

$$3. \quad \varrho \sim I$$

Je größer die Querschnittsfläche und je weiter weg sie von der neutralen Faser angeordnet ist, um so starrer verhält sich ein Träger. Das Flächenmoment ist ein Maß für diese Eigenschaft.

Die Vereinigung dieser Proportionen ergibt

$$\varrho \sim \frac{E \cdot I}{M_b}.$$

Für die dritte Überlegung schließt eine Dimensionsbetrachtung das Widerstandsmoment aus.

Das Ziel der nachfolgenden Untersuchung ist, die Richtigkeit der obigen Überlegungen zu beweisen und die Gleichung der Biegelinie abzuleiten. Aus dieser Gleichung kann man z.B. die Durchbiegung einer Welle und deren Schiefstellung in den Lagern berechnen. Aus der Durchbiegung ergibt sich die kritische Drehzahl der Welle. Das wird in Band 3 (Kinetik) behandelt. Die Kenntnis der Schiefstellung ist für die richtige Lagerauswahl notwendig. Lange Träger und Wellen können bei Dimensionierung nach der zulässigen Spannung zu große Durchbiegungen aufweisen. In solchen Fällen muss von einer vorgegebenen Durchbiegung ausgehend dimensioniert werden. Spannungsmäßig ist ein solcher Träger nicht ausgelastet.

Die Abb. 4-70 zeigt den Teilabschnitt eines auf Biegung beanspruchten Trägers. Die Dehnung eines Bogenelementes im Abstand  $z$  von der neutralen Faser beträgt

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{z \cdot d\alpha}{ds}.$$

Das Bogenelement ist  $ds = \varrho \cdot d\alpha$

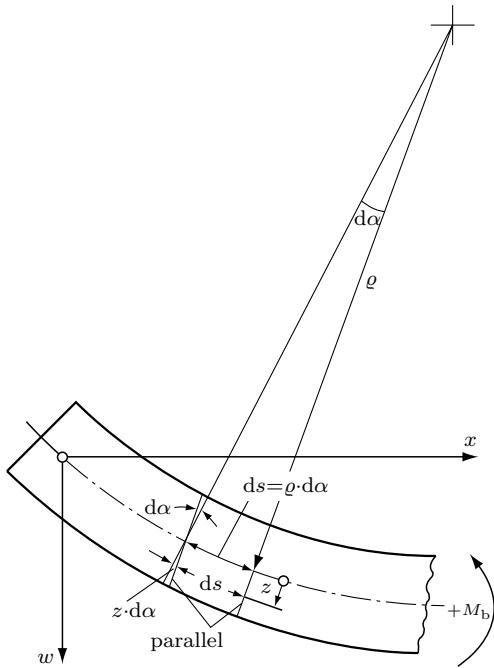
$$\varepsilon = \frac{z \cdot d\alpha}{\varrho \cdot d\alpha} = \frac{z}{\varrho}.$$

Nach dem HOOKEschen Gesetz ist

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{z}{\varrho}.$$

Nach der Gleichung 4-4 ist die Spannung im Abstand  $z$  von der neutralen Faser

$$\sigma = \frac{M_b \cdot z}{I}.$$



**Abb. 4-70:** Zur Ableitung der Biegelinie

Damit erhält man

$$\frac{M_b \cdot z}{EI} = \frac{z}{\rho}$$

$$\rho = \frac{EI}{M_b}. \quad (4-12)$$

Damit ist die Richtigkeit der oben angestellten Überlegungen bestätigt. Das Produkt  $EI$  wird *Biegesteifigkeit* genannt. Die Durchbiegung von Trägern, Wellen u.ä. kann durch die Verwendung eines Stahls höherer Festigkeit nicht verminder werden, da für alle Stahlsorten der E-Modul etwa gleich ist.

Für eine Belastung, wie sie die Abb. 4-1b darstellt, ist das Biegemoment in allen Schnitten gleich. Aus der Gleichung 4-12 erhält man mit dieser Bedingung  $\rho = \text{konst.}$  Reine Biegung deforme die Trägerachse zu einem flachen Kreisbogen.

Im allgemeinen Fall ist das Biegemoment entlang der Trägerachse nicht konstant. Die Krümmung der elastischen Linie ändert sich von Punkt zu Punkt. Es interessiert jedoch nicht die Krümmung, sondern die Durchbiegung  $w$  und die

Winkeländerung der elastischen Linie  $w'$ . Zwischen  $\varrho$  und  $w$  und den Ableitungen besteht folgende Beziehung

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}.$$

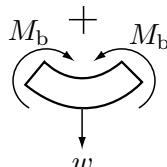
Das negative Vorzeichen resultiert aus der Lage der  $w$ -Koordinate, die wegen der am häufigsten vorkommenden Richtung einer Durchbiegung positiv nach unten eingeführt wird. Somit erhält man

$$-\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = \frac{M_b}{EI}.$$

Das ist eine Differentialgleichung. Sie ist in dieser Form für eine technische Auswertung nicht brauchbar. Für auf Biegung beanspruchte Träger, Achsen und Wellen kann man voraussetzen, dass die Durchbiegungen klein sind gegenüber den Längenabmessungen. Deshalb sind die Winkeländerungen klein. Für eine durchaus große Winkeländerung von  $1^\circ$  erhält man z.B.

$$(w')^2 = (\tan 1^\circ)^2 = 3,05 \cdot 10^{-4}.$$

Diesen Wert kann man gegenüber 1 vernachlässigen. Der Nenner der linken Seite kann gleich 1 gesetzt werden. Damit ist



$$w'' = -\frac{M_b}{EI} \quad (4-13)$$

Es gelten die Koordinaten, wie sie in den Abbildungen 4-70/4-10 festgelegt wurden. Für eine Durchbiegung  $w$  in  $z$ -Richtung ist das Flächenmoment  $I$  auf die im Flächenschwerpunkt liegende  $y$ -Achse bezogen ( $I = I_{\bar{y}}$ ). Der Momentenvektor  $\vec{M}_b = \vec{M}_{by}$  liegt in gleicher Richtung. Analoges gilt für eine Belastung durch ein Moment  $\vec{M}_{bz}$  und eine Durchbiegung  $w$  in  $y$ -Richtung. Die Festlegung eines positiven Biegemomentes nach Abb. 4-19 führt auf folgende Vorzeichenregel:

*Ein Moment, das auf der Seite der positiven  $w$ -Achse eine gezogene Faser erzeugt, ist positiv. (Merkskizze dazu neben der Gleichung.)*

Die Gleichung 4-13 darf auf Grund der in der Ableitung gemachten Voraussetzungen nur bedingt zur Berechnung von Blattfedern verwendet werden, denn die Bedingung  $w'^2 \ll 1$  ist nicht mehr erfüllt.

Die zweite Ableitung der Biegelinie eines Trägers mit konstanter Biegesteifigkeit entspricht nach Gleichung 4-13 dem Momentenverlauf. Zusammen mit den Gleichungen 4-7/8 erhält man folgenden *Zusammenhang zwischen der Streckenlast, der Querkraft, dem Momentenverlauf, dem Steigungswinkel und der elastischen Linie.*

$$q = -F_q' = -M_b'' = +\varphi'''EI = +w'''' \cdot EI. \quad (4-14)$$

Aus der Funktion für die Streckenlast erhält man nacheinander durch Integration

1. die Querkraftlinie
2. die Biegemomentenlinie
3. den Steigungswinkel der Biegelinie
4. die Biegelinie

$$\left. \begin{array}{l} F_q = - \int q \cdot dx \\ M = \int F_q \cdot dx \\ \varphi = - \int \frac{M}{EI} dx \\ w = \int \varphi \cdot dx. \end{array} \right\} \quad (4-15)$$

Diese Vorzeichen ergeben sich, weil es üblich ist, die Durchbiegung von Trägern nach unten positiv anzugeben und die positive  $x$ -Achse nach rechts zu legen. Dabei soll der Steigungswinkel dann positiv sein, wenn bei zunehmendem Wert  $x$  auch die Durchbiegung größer wird.

Die Integrationen werden für die meisten praktischen Anwendungsfälle ganz wesentlich durch die normalerweise zahlreich vorhandenen Unstetigkeitsstellen erschwert. Das Integrieren in Teilabschnitten erfordert die Berechnung u.U. vieler Integrationskonstanten mit Hilfe von Rand- und Übergangsbedingungen. Das bereits bei der Bestimmung des Querkraft- und Momentenverlaufs angewandte Verfahren nach FÖPPL kann hier besonders sinnvoll fortgeführt werden und führt immer zu einem erheblich geringeren Rechenaufwand (s. auch Anhang und Tabelle 20).

An der Stelle, wo der  $M_b$ -Verlauf die Achse schneidet, ist  $M_b = 0$  und nach Gleichung 4-13 auch  $w'' = 0$ . Das ist die Bedingung für den Wendepunkt einer Kurve, hier der Biegelinie. Man kann sich die Zusammenhänge folgendermaßen klar machen. Wo  $M_b = 0$  ist, wird keine Krümmung verursacht, die Trägerachse bleibt an dieser Stelle gerade. Da das Biegemoment beim Null-Durchgang das Vorzeichen wechselt, ändert sich der Sinn der Krümmung. Die Biegelinie geht z.B. von einer „Linkskurve“ in eine „Rechtskurve“ über. Das ist besonders in der Abb. 4-76 dargestellt.

Die nachfolgende Tabelle versucht, in komakter Form die Zusammenhänge zwischen den Schnittgrößen und der Geometrie der Biegelinie darzustellen. Mit ihrer Hilfe sollten Diagramme und Ergebnisse kontrolliert werden.

Zusammenhang zwischen dem Verlauf der Schnittgrößen im Träger und der Geometrie der Biegelinie.

								freies Träger- ende	Gelenk **) Auf- lager	Ein- span- nung
$q$			konst.	linear				0		
$F_q$		konst.	linear	$( )^2$	0			0		
$M$	konst.	linear	quadr.	$( )^3$	Maxi- mum*)	0		0	0	
$\varphi = w'$	linear	quadr.	$( )^3$	$( )^4$	Wende- punkt	Maxi- mum*)	0			0
$w$	quadr.	$( )^3$	$( )^4$	$( )^5$		Wende- punkt	Maxi- mum*)		0	0

\*) Dieser Wert ist ein Extremwert im Sinne der mathematischen Nomenklatur. Es muss nicht der absolut höchste Wert sein.

\*\*) Alle mit dem Gelenk verbundenen Teile sind gegeneinander frei drehbar.

### Beispiel 1 (Abb. 4-71)

Für einen eingespannten Träger konstanter Biegesteifigkeit, der am Ende belastet ist, sind die Gleichung der Biegelinie, die maximale Durchbiegung und Winkeländerung zu bestimmen.

### Lösung (Abb. 4-72)

Es soll ein Koordinatensystem nach Abb. 4-70 verwendet werden, das in den Kraftangriffspunkt gelegt wird. Als Übungsaufgabe sei empfohlen, das Koordinatensystem in die Einspannstelle zu legen. Dabei müsste  $x$  nach links geführt werden. Dieser zweite Weg vereinfacht die Berechnung der Integrationskonstanten.

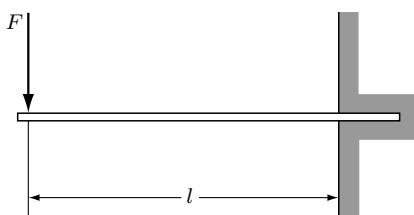


Abb. 4-71: Eingespannter Träger

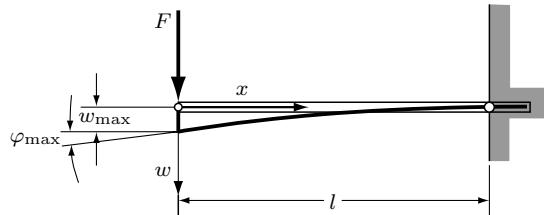


Abb. 4-72: Koordinatensystem am Träger

Die Gleichung 4-13 liefert

$$EI \cdot w'' = -M_b .$$

Die Beziehung für den  $M_b$ -Verlauf muss aufgestellt werden, wobei auf das richtige Vorzeichen zu achten ist. Auf der Seite der positiven  $w$ -Achse (unten) ist die Trägerfaser gedrückt. Nach der Definition (s. Skizze neben Gl. 4-13) ist das durch  $F$  verursachte Moment negativ.

$$M_b = -F \cdot x$$

Insgesamt erhält man

$$EI \cdot w'' = +F \cdot x$$

Es wird zweimal integriert

$$EI \cdot w' = \frac{1}{2} F \cdot x^2 + C_1 \quad (1)$$

$$EI \cdot w = \frac{1}{6} F \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2 \quad (2)$$

Die Integrationskonstanten müssen aus den Randbedingungen ermittelt werden. An der Einspannstelle verläuft die Biegelinie horizontal und es liegt keine Durchbiegung vor:

$$\text{für } x = l \text{ gilt } w = 0 \text{ und } w' = 0 \quad (\text{s. Tabelle oben}) .$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man damit

$$0 = \frac{1}{2} F \cdot l^2 + C_1 \implies C_1 = -\frac{1}{2} F \cdot l^2$$

$$0 = \frac{1}{6} F \cdot l^3 + C_1 \cdot l + C_2$$

$$C_2 = -\frac{1}{6} F \cdot l^3 - C_1 \cdot l = F \cdot l^3 \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} F \cdot l^3$$

Die Konstanten werden in (2) eingeführt und ergeben die Gleichung der Biegelinie.

$$w = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{6} F \cdot x^3 - \frac{1}{2} F \cdot l^2 \cdot x + \frac{1}{3} F \cdot l^3 \right)$$

Entsprechendes Erweitern und Ausklammern führt auf (vergl. Tabelle 11)

$$w = \frac{F \cdot l^3}{3EI} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{l} + 1 \right]$$

Die maximale Durchbiegung ist an der Kraftangriffsstelle  $x = 0$

$$w_{\max} = \frac{F \cdot l^3}{3EI}$$

Dort ergibt sich auch die größte Schiefstellung. Die Beziehung (1) führt auf

$$w'_{\max} = \frac{C_1}{EI} = -\frac{F \cdot l^2}{2EI} = \varphi_{\max}$$

Das negative Vorzeichen resultiert aus dem hier verwendeten Linkssystem.

Den Ergebnissen entnimmt man, dass die Durchbiegung von Trägern, Wellen u.ä.

1. linear proportional zur Last (elastisches System),
2. in der dritten Potenz proportional zur Längenabmessung,
3. umgekehrt proportional zur Biegesteifigkeit  $EI$  ist.

Der zweite Punkt muss besonders beachtet werden. *Lange Träger (Wellen) deformieren sich überproportional stark und müssen deshalb u.U. nach einer zulässigen Durchbiegung dimensioniert werden.* Die zulässigen Spannungen werden dabei z.T. bei weitem nicht erreicht.

Einen symmetrischen Träger auf zwei Stützen mit Einzellast  $F$  kann man nach Abb. 4-2 aus zwei gespannten Trägern, jeweils mit  $F/2$  belastet, entstanden denken. Für diesen Fall ist es deshalb möglich, aus den obigen Ergebnissen die maximale Durchbiegung und die Schiefstellung in den Auflegern zu berechnen. Man muss  $F$  durch  $F/2$  und  $l$  durch  $l/2$  ersetzen (vergl. Tabelle 11).

$$w_{\max} = \frac{\frac{F}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} = \frac{F \cdot l^3}{48EI}$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{\frac{F}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3}{2EI} = \frac{F \cdot l^2}{16EI}$$

Analoge Überlegungen führen oft zur Vereinfachung der Berechnung.

**Beispiel 2**

Für den Träger Abb. 4-23 (Beispiel 1, Abschnitt 4.4.1) sind die Gleichungen für die Biegelinie und deren Steigung aufzustellen. Weiterhin sind die maximale Durchbiegung und die Schrägstellung des Trägers im linken Auflager für den Fall zu berechnen, dass dieser als HE-B 160 Profil ausgeführt ist.

**Lösung**

Die Aufgabe soll mit dem Verfahren nach FÖPPL gelöst werden. Es wird mit Zahlenwertgleichungen für folgende Einheiten gerechnet

$x$	$w$	$F$	$M$
m	m	kN	kNm

Im oben zitierten Beispiel wurde folgende Momentengleichung aufgestellt ( $x = \langle x \rangle$ )

$$M = x \cdot 30 - \langle x - 0,50 \rangle \cdot 30 - \langle x - 1,50 \rangle \cdot 50 + \langle x - 2,0 \rangle \cdot 60 \quad (1)$$

die Integration liefert nach Gl. 4-15

$$EI \cdot \varphi = - \int M \cdot dx$$

$$EI \cdot \varphi = -x^2 \cdot 15 + \langle x - 0,5 \rangle^2 \cdot 15 + \langle x - 1,5 \rangle^2 \cdot 25 - \langle x - 2,0 \rangle^2 \cdot 30 + C_1. \quad (2)$$

Die Integrationskonstante  $C_1$  ist noch nicht bestimmbar. Es wird weiter integriert (Gl. 4-15).

$$EI \cdot w = \int EI \cdot \varphi \cdot dx$$

$$EI \cdot w = -x^3 \cdot 5 + \langle x - 0,5 \rangle^3 \cdot 5 + \langle x - 1,5 \rangle^3 \cdot \frac{25}{3} - \langle x - 2,0 \rangle^3 \cdot 10 + C_1 \cdot x + C_2. \quad (3)$$

Die Randbedingungen liefern die Lager

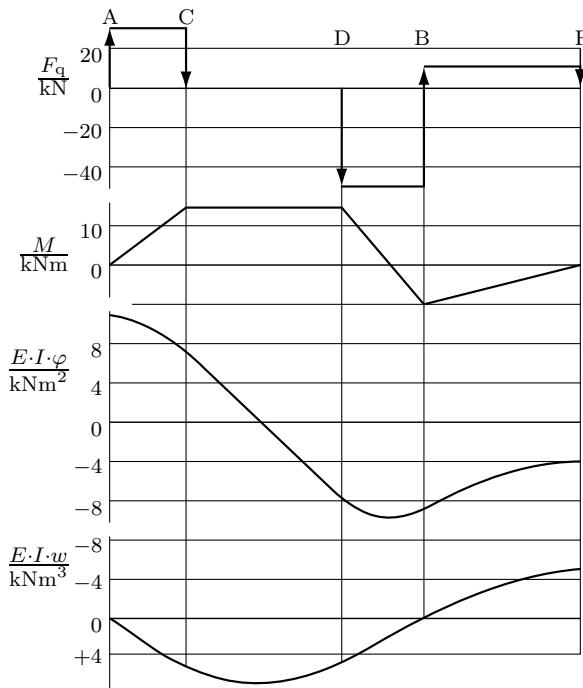
$$x = 0 \quad w = 0 \quad \text{und} \quad x = 2 \quad w = 0.$$

Aus der ersten folgt  $C_2 = 0$ , aus der zweiten

$$0 = -2^3 \cdot 5 + 1,5^3 \cdot 5 + 0,5^3 \cdot \frac{25}{3} + C_1 \cdot 2$$

mit der Lösung  $C_1 = 11,042$ .

Die Gleichungen (2) und (3) stellen die gesuchten Beziehungen dar. Sie sind in der Abb. 4-73 dargestellt. Beispielhaft sollen sie für  $x = 1,5$  m und  $x = 2,5$  m ausgewertet werden.



**Abb. 4-73:** Biegelinie des Trägers nach Abb. 4-23

$$EI \cdot \varphi_{1,5} = -1,5^2 \cdot 15 + 1^2 \cdot 15 + 0 - 0 + 11,042 = -7,708 \text{ kNm}^2$$

$$EI \cdot w_{1,5} = -1,5^3 \cdot 5 + 1^3 \cdot 5 + 0 - 0 + 11,042 \cdot 1,5 = 4,688 \text{ kNm}^3$$

$$EI \cdot \varphi_{2,5} = -2,5^2 \cdot 15 + 2^2 \cdot 15 + 1^2 \cdot 25 - 0,5^2 \cdot 30 + 11,042$$

$$= -5,208 \text{ kNm}^2$$

$$EI \cdot w_{2,5} = -2,5^3 \cdot 5 + 2^3 \cdot 5 + 1^3 \cdot \frac{25}{3} - 0,5^3 \cdot 10 + 11,042 \cdot 2,5 \\ = -3,437 \text{ kNm}^3.$$

Der verwendete Träger hat mit  $I = I_y = 2490 \text{ cm}^4$  und  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$  eine Biegesteifigkeit von

$$EI = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 2490 \text{ cm}^4 \cdot \frac{10^6 \text{ mm}^2}{1 \text{ m}^2} \cdot \frac{1 \text{ m}^4}{10^8 \text{ cm}^4} \cdot \frac{1 \text{ kN}}{10^3 \text{ N}}$$

$$EI = 5,23 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2.$$

Der Träger biegt sich an der Stelle  $w' = \varphi = 0$  maximal durch. Diese Stelle  $x_e$  liegt zwischen C und D. Das führt mit Gleichung (2) auf

$$0 = -x_e^2 \cdot 15 + (x_e - 0,50)^2 \cdot 15 + 11,042$$

mit  $x_e = 0,986 \text{ m}$  als Lösung. Dieser Wert wird in Gleichung (3) eingesetzt.

$$EI \cdot w_{\max} = -0,986^3 \cdot 5 + (0,986 - 0,5)^3 \cdot 5 + 11,042 \cdot 0,986 = 6,67 \text{ kNm}^3$$

$$\underline{w_{\max}} = \frac{6,67 \text{ kNm}^3}{5,23 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2} = 1,28 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \underline{\underline{1,28 \text{ mm}}}$$

Die Winkeländerung bei  $x = 0$  ist gleich

$$EI \cdot \varphi_A = +11,042 \text{ kNm}^2$$

$$\underline{\varphi_A} = \frac{11,042 \text{ kNm}^2}{5,23 \cdot 10^3 \text{ kNm}^2} = 2,11 \cdot 10^{-3} \hat{=} \underline{\underline{0,121^\circ}}.$$

Anschließend an diese Lösung soll im Ansatz der Rechengang ohne den FÖPPL-schen Formalismus behandelt werden. Jede Unstetigkeitsstelle (= Kraftangriffspunkt) ist die Grenze eines Integrationsabschnittes.

$$\text{Abschnitt 1: } 0 < x \leq 0,50 \text{ m}$$

$$\text{Abschnitt 2: } 0,50 \text{ m} < x \leq 1,50 \text{ m}$$

$$\text{Abschnitt 3: } 1,50 \text{ m} < x \leq 2,00 \text{ m}$$

$$\text{Abschnitt 4: } 2,00 \text{ m} < x \leq 3,00 \text{ m}$$

Damit erhält man insgesamt 8 Gleichungen mit 8 Integrationskonstanten, die aus den Randbedingungen (Lager) und Übergangsbedingungen von einem zum anderen Abschnitt berechnet werden müssen. Diese lauten

Lager $x = 0 \quad y = 0$ $x = 2 \text{ m} \quad y = 0$	Übergänge (Index = Abschnitt) $x = 0,50 \text{ m}: \quad y_1 = y_2 \quad (\text{gleiche Durchbiegung})$ $\varphi_1 = \varphi_2 \quad (\text{kein Knick})$ $x = 1,50 \text{ m}: \quad y_2 = y_3$ $\varphi_2 = \varphi_3$ $x = 2,00 \text{ m}: \quad y_3 = y_4$ $\varphi_3 = \varphi_4$
---	---

Die Überlegenheit des FÖPPL-schen Verfahrens ist offenkundig.

#### 4.6.2 Überlagerung einzelner Belastungsfälle

Für oft vorkommende Belastungsfälle sind die Gleichungen der Biegelinien für konstanten Trägerquerschnitt in der Tabelle 11 gegeben. Die Durchbiegung und

Winkeländerungen in anderen Lastfällen kann man oft durch Überlagerung dieser Systeme ermitteln. Das gilt auch für gekröpfte Träger, wie sie im nachfolgenden Beispiel 2 gezeigt werden. Mit Hilfe der hier beschriebenen Überlegungen werden die Lagerkräfte und Deformationen in statisch unbestimmten Systemen berechnet (s. Kapitel 11).

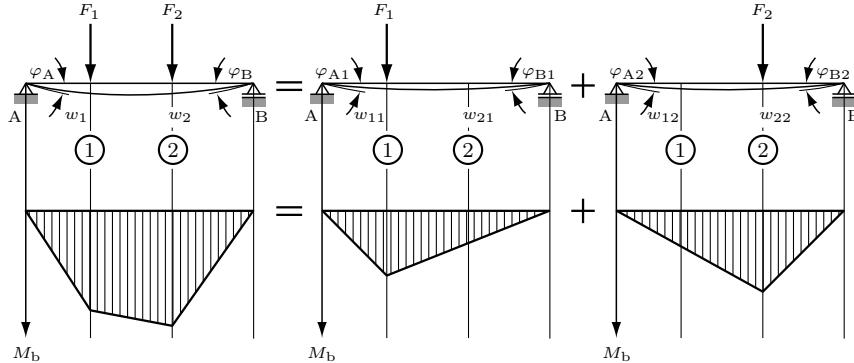


Abb. 4-74: Überlagerung einzelner Belastungsfälle

Die Abb. 4-74 zeigt einen mit zwei Kräften belasteten Träger. Die Durchbiegung an den Stellen 1 und 2 sei  $w_1$  bzw.  $w_2$ . Man kann sich die *Lasten nacheinander aufgebracht* denken und erhält damit jeweils den Belastungsfall 3 nach Tabelle 11. An der Stelle 1 verursacht die Kraft  $F_1$  allein wirkend die Durchbiegungen  $w_{11}$  und  $w_{21}$  an der Stelle 2. Der 1. Index bezieht sich auf den Ort, der 2. Index auf die verursachende Kraft. Analog dazu verursacht die Kraft  $F_2$  die Durchbiegungen  $w_{12}$  und  $w_{22}$ . Die Gesamtdurchbiegung setzt sich aus den Einzeldurchbiegungen zusammen

$$w_1 = w_{11} + w_{12}$$

$$w_2 = w_{21} + w_{22}.$$

Entsprechend addieren sich auch die Winkel

$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2}$$

$$\varphi_B = \varphi_{B1} + \varphi_{B2}.$$

Die obige Addition von Durchbiegungen kann man auch folgendermaßen schreiben

$$w_1 = \alpha_{11} \cdot F_1 + \alpha_{12} \cdot F_2$$

$$w_2 = \alpha_{21} \cdot F_1 + \alpha_{22} \cdot F_2$$

Der Faktor  $\alpha$  wird *Einflusszahl* genannt. Er ist folgendermaßen definiert

$$\alpha_{ik} = \frac{w_{ik}}{F_k} \quad \begin{matrix} i \text{ Stelle} \\ k \text{ Kraft} \end{matrix}$$

Damit erhält man die Durchbiegung an der Stelle  $i$  verursacht durch die Kräfte  $k$

$$w_i = \sum_k (\alpha_{ik} \cdot F_k) \quad (4-16)$$

Als Beispiel sei in der Abb. 4-74 die Durchbiegung  $w_{12}$  an der Stelle 1 verursacht durch die Kraft  $F_2$  betrachtet

$$\alpha_{12} = \frac{w_{12}}{F_2}$$

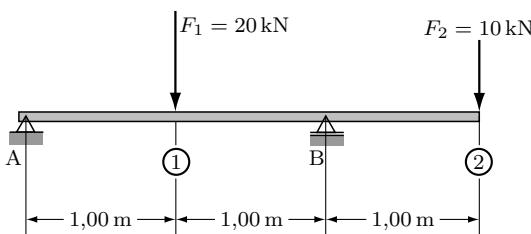
Die Einflusszahlen können mit Hilfe der Tabelle 11 für den jeweils vorliegenden Lastfall berechnet werden. Aus der Überlegung, dass die Lasten nacheinander in beliebiger Reihenfolge aufgebracht werden dürfen, kann man den „Satz von MAXWELL“<sup>6</sup> ableiten

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} .$$

Diese Beziehung sollte immer als Kontrolle benutzt werden.

### **Beispiel 1 (Abb. 4-75)**

Für den abgebildeten Träger mit dem Profil HE-B 120 sind die Durchbiegungen an den Stellen 1 und 2 und die Winkeländerungen an den Stellen A und B zu bestimmen.



**Abb. 4-75:** Träger mit Einzelkräften

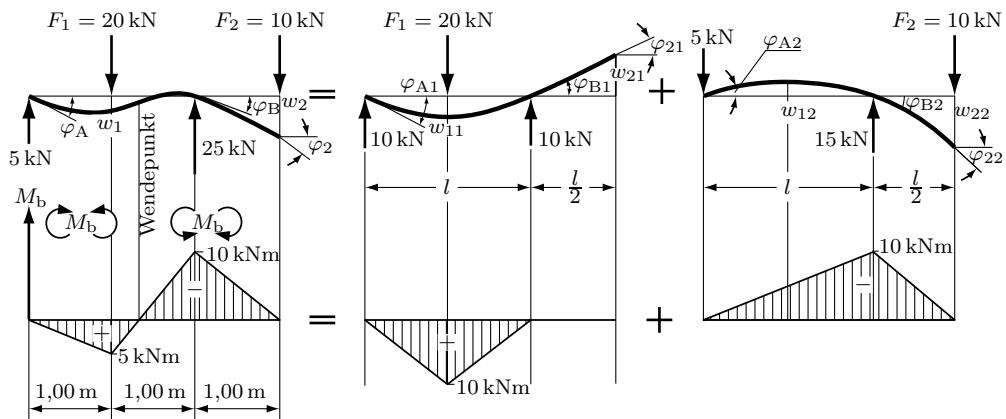
---

<sup>6</sup>MAXWELL, James Clerk (1831–1879), englischer Mathematiker.

**Lösung (Abb. 4-76)**

Die vorliegende Belastung wird aus den Fällen 2 und 4 der Tabelle 11 zusammengesetzt. Folgende Gleichungen müssen ausgewertet werden.

$$\begin{aligned} w_1 &= w_{11} - w_{12} & \varphi_A &= \varphi_{A1} - \varphi_{A2} \\ w_2 &= -w_{21} + w_{22} & \varphi_B &= -\varphi_{B1} + \varphi_{B2} \\ & & \varphi_2 &= -\varphi_{21} + \varphi_{22} \end{aligned}$$



**Abb. 4-76:** Überlagerung für den Belastungsfall nach Abb. 4-75

## Tabelle 11/Belastungsfall 2

Es empfiehlt sich, zuerst die Biegesteifigkeit auszurechnen. Mit  $I = I_y = 864 \text{ cm}^4$  nach Tabelle 10A ist

$$EI = 2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2 \cdot 864 \text{ cm}^4 = 1,81 \cdot 10^{10} \text{ Ncm}^2.$$

$$w_{11} = \frac{F_1 l^3}{48EI} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 200^3 \text{ cm}^3}{48 \cdot 1,81 \cdot 10^{10} \text{ Ncm}^2} = 0,184 \text{ cm}$$

$$\varphi_{A1} = \varphi_{B1} = \frac{F_1 l^2}{16EI} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 200^2 \text{ cm}^2}{16 \cdot 1,8 \cdot 10^{10} \text{ Ncm}^2} = 2,76 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{21} = \varphi_{B1} = 2,76 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$w_{21} = \varphi_{B1} \cdot \frac{l}{2} = 2,76 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \text{ cm} = 0,276 \text{ cm}.$$

Tabelle 11/Belastungsfall 4

$$w_{12} = \frac{F_2 l^3}{6EI} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{x}{l} \left[ 1 - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad \text{mit} \quad \frac{x}{l} = \frac{1}{2}; \quad \frac{a}{l} = \frac{1}{2}$$

$$w_{12} = \frac{F_2 l^3}{32EI} = \frac{10 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 200^3 \text{ cm}^3}{32 \cdot 1,81 \cdot 10^{10} \text{ Ncm}^2} = 0,138 \text{ cm}$$

$$w_{22} = \frac{F_2 l^3}{3EI} \cdot \left( \frac{a}{l} \right)^2 \left( 1 + \frac{a}{l} \right) \quad \text{mit} \quad \frac{a}{l} = \frac{1}{2}$$

$$w_{22} = \frac{F_2 l^3}{8EI} = \frac{10 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 200^3 \text{ cm}^3}{8 \cdot 1,81 \cdot 10^{10} \text{ Ncm}^2} = 0,552 \text{ cm}$$

$$\varphi_{A2} = \frac{F_2 l^2 a}{6EI l} = \frac{F_2 l^2}{12EI} = \frac{10 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 200^2 \text{ cm}^2}{12 \cdot 1,81 \cdot 10^{10} \text{ Ncm}^2} = 1,84 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{B2} = 2\varphi_{A2} = 3,68 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{22} &= \frac{F_2 l^2}{6EI} \cdot \frac{a}{l} \left( 2 + 3 \frac{a}{l} \right) = \frac{7F_2 l^2}{24EI} = \frac{7 \cdot 10 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 200^2 \text{ cm}^2}{24 \cdot 1,81 \cdot 10^{10} \text{ Ncm}^2} \\ &= 6,45 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

Mit diesen Einzelwerten erhält man folgende Ergebnisse:

$$\underline{w_1} = 1,84 \text{ mm} - 1,38 \text{ mm} = \underline{0,46 \text{ mm} (\downarrow)}$$

$$\underline{w_2} = -2,76 \text{ mm} + 5,52 \text{ mm} = \underline{2,76 \text{ mm} (\downarrow)}$$

$$\underline{\varphi_A} = (2,76 - 1,84)10^{-3} = 9,20 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = \underline{0,053^\circ}$$

$$\underline{\varphi_B} = (-2,76 + 3,68)10^{-3} = 9,20 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = \underline{0,053^\circ}$$

$$\underline{\varphi_2} = (-2,76 + 6,45)10^{-3} = 3,69 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = \underline{0,21^\circ}$$

Die Einflusszahlen betragen mit dem Lagerabstand  $l$

$$\alpha_{11} = \frac{l^3}{48EI}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = -\frac{l^3}{32EI}; \quad \alpha_{22} = \frac{l^3}{8EI}$$

Die Auswertung der Gleichung 4-16 für  $k = 1$  und 2 liefert die obigen Ergebnisse.

### **Beispiel 2 (Abb. 4-77)**

Für den abgebildeten, gekröpften Träger ( $EI = \text{konst.}$ ) ist in allgemeiner Form die Durchbiegung an der Lastangriffsstelle zu bestimmen.

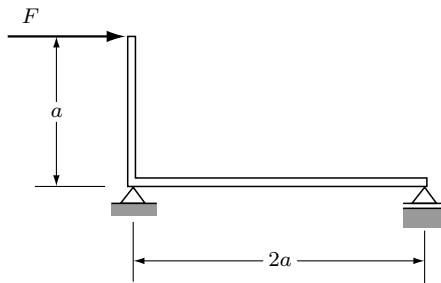


Abb. 4-77: Gekröpfter Träger

**Lösung (Abb. 4-78)**

Man kann die Deformation aus zwei Teilen zusammensetzen. Zunächst wird der Querholm als starr angesehen. Der Ständer verbiegt sich wie ein eingespannter Träger nach Belastungsfall 1 der Tabelle 11. Die Verformung des Querholms entsteht durch das Moment  $F \cdot a$ . Dabei ergibt sich eine Schiefstellung des starr angenommenen Ständers. Diese Deformation entspricht dem Fall 8.

$$\underline{w} = w_1 + w_2 = w_1 + \varphi_A \cdot a$$

$$\underline{w} = \frac{F \cdot a^3}{3EI} + \frac{M_A \cdot l}{3EI} \cdot a = \frac{F \cdot a^3}{3EI} + \frac{Fa \cdot 2a \cdot a}{3EI} = \underline{\frac{Fa^3}{EI}}$$

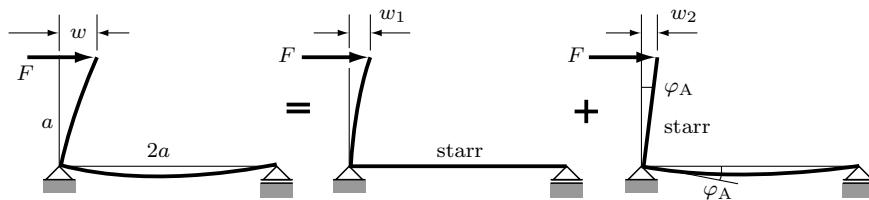
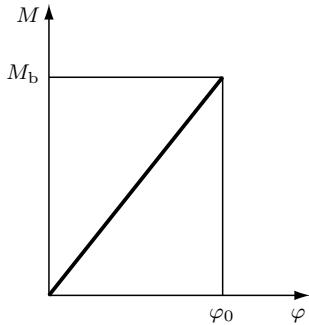


Abb. 4-78: Überlagerung für den gekröpften Träger nach Abb. 4-77

### 4.6.3 Bestimmung der Deformation aus der Formänderungsarbeit (Satz von CASTIGLIANO)/ Kraftgrößenverfahren

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welche Arbeit von einem auf Biegung beanspruchten, elastischen Träger aufgenommen und gespeichert wird.

In die Enden eines Trägers nach Abb. 4-1b wird ein Moment  $M$  eingeleitet. Auf Grund des elastischen Verhaltens des Werkstoffes muss dieses mit größer werdender Deformation linear zunehmen (Abb. 4-79).



**Abb. 4-79:** Biegemoment in Abhängigkeit von der Winkeländerung im elastischen Bereich

Für die Deformation muss eine Arbeit

$$W_F = \int M \cdot d\varphi$$

aufgewendet werden. Mit der Geradengleichung

$$M = \frac{M_b}{\varphi_0} \cdot \varphi$$

erhält man

$$W_F = \frac{M_b}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \varphi \cdot d\varphi = M_b \cdot \frac{\varphi_0}{2}.$$

Nach Gleichung 4-15 ist die Winkeländerung  $\varphi_0$ , die durch das Biegemoment  $M_b$  zwischen den beiden Enden des Balkens verursacht wird,

$$\varphi_0 = \int_0^l \frac{M_b}{EI} dx.$$

Dabei wurde das negative Vorzeichen nicht übernommen. Dieses ergab sich aus den Vorzeichendefinitionen für die Biegelinie.

$$W_F = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_b^2}{EI} dx. \quad (4-17)$$

Das ist die *Gleichung für die Formänderungsarbeit*, die bei Biegung eines Trägers von diesem gespeichert wird. Sie gilt für kleine Durchbiegungen, da in der Ableitung implizit die Biegelinie enthalten ist. Damit ist normalerweise gewährleistet,

dass die Deformation im elastischen Bereich bleibt und damit das HOOKESche Gesetz gilt. Wie aus diesen Ausführungen folgt, ist die Berechnung der von einer Blattfeder aufgenommenen Arbeit mit der Gleichung 4-17 nur bedingt möglich. Mehrere Kräfte und/oder abgesetzte Wellen erfordern wegen der Unstetigkeitsstellen abschnittsweises Integrieren.

Die hier behandelten Systeme verhalten sich elastisch. Deshalb können die Träger (Rahmen usw.) als elastische Federn mit der Federkonstanten

$$c = \frac{F}{w}$$

aufgefasst werden. Daraus folgt (zum Faktor 1/2 s. Gl. 3-12 und Ableitung)

$$w = \frac{F}{c} \quad \text{und} \quad W_F = \frac{1}{2} w F = \frac{1}{2} \frac{F^2}{c}.$$

Die Ableitung der Formänderungsarbeit nach der Kraft ist die Durchbiegung an der Angriffsstelle der Kraft. Greifen mehrere Kräfte an, muss partiell abgeleitet werden.

$$\frac{\partial W_F}{\partial F} = \frac{F}{c} = w.$$

Das ist der 1. Satz von CASTIGLIANO.

*Die Ableitung der Formänderungsarbeit nach der Kraft ergibt die Durchbiegung an der Kraftangriffsstelle in Kraftrichtung.*

Die Gleichung 4-17 wird partiell nach der Kraft abgeleitet und ergibt so die Durchbiegung an der Kraftangriffsstelle.

$$w = \int_0^l \frac{1}{EI} \cdot M_b \cdot \frac{\partial M_b}{\partial F} \cdot dx \quad (1)$$

Auf analogem Wege erhält man den 2. Satz von CASTIGLIANO

$$\frac{\partial W_F}{\partial M} = \varphi.$$

*Die Ableitung der Formänderungsarbeit nach dem Moment ergibt die Winkeländerung der elastischen Linie an der Angriffsstelle des Momentes.*

Die Winkeländerung  $\varphi$  der Biegelinie an der Stelle eines von außen angreifenden Momentes  $M$  ist

$$\varphi = \int_0^l \frac{1}{EI} \cdot M_b \cdot \frac{\partial M_b}{\partial M} \cdot dx \quad (2)$$

Beide Sätze sind die Schlussfolgerung aus CASTIGLIANOS Prinzip: Ein mechanisches System nimmt bei statischer Belastung den Gleichgewichtszustand mit der minimalen Formänderungsarbeit an.

Die Gleichungen (1) und (2) können durch Aufstellen von Biegemomentengleichungen, deren partielles Ableiten und abschnittsweises Integrieren ausgewertet werden. Dieser Weg kann vor allem bei mehreren Kräften und Abschnitten aufwendig sein. Deshalb hat man die Berechnung durch Integrationstafeln rationalisiert.

Das Verfahren soll am Beispiel eines eingespannten Trägers nach Abb. 4-71 erklärt werden. Für diesen soll die Durchbiegung an der Kraftangriffsstelle bestimmt werden. Die Momentengleichung lautet  $M_b = -F \cdot x$ . Greifen mehrere Kräfte an, muss partiell nach der Kraft abgeleitet werden, für die die Durchbiegung gesucht ist. Hier ist

$$\frac{\partial M_b}{\partial F} = \frac{dM_b}{dF} = -1 \cdot x .$$

Diese Beziehung kann man folgendermaßen deuten. Sie ist die „Momentengleichung“ einer gedachten „Kraft“ „1“, die an die Stelle eingetragen wird, für die die Durchbiegung zu bestimmen ist. Die Auswertung der Gleichung (1) führt auf

$$w_F = \frac{1}{EI} \int_0^l (-F \cdot x) \cdot (-1 \cdot x) \cdot dx$$

$$w_F = \frac{F}{EI} \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{Fl^3}{3EI} .$$

Die Funktion  $(-F \cdot x)$  entspricht dem dreieckförmigen  $M_b$ -Diagramm mit dem Maximalwert  $F \cdot l$ . Für die Funktion  $(-1 \cdot x)$  gilt das gleiche, wenn man die „1“ als „Kraft“ auffasst. Der Integrationsabschnitt hat die Länge  $l$ . Für verschiedene Momentenverläufe ist das Ergebnis der Integration in Tabellen zusammengefasst. Eine Auswahl ist in der Tabelle 12 im Anhang gegeben. Für

den vorliegenden Fall erzeugt  $F$  eine Momentenfläche nach Zeile 2 dieser Tabelle mit  $M_i = F \cdot l$ , die „Kraft“ „1“ eine solche nach Spalte  $\beta$  mit  $M_k = 1 \cdot l$ . Das Ergebnis der Integration ist im Schnittpunkt Zeile 2/Spalte  $\beta$  aufgeführt

$$\frac{1}{3} \cdot s \cdot M_i \cdot M_k$$

Damit ist

$$w_F = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot l \cdot (F \cdot l) \cdot l = \frac{Fl^3}{3EI}$$

Allgemein kann man schreiben

$$\left. \begin{array}{l} w = \int_0^l \frac{1}{EI} \cdot M_i \cdot M_k \cdot dx \\ \varphi = \int_0^l \frac{1}{EI} \cdot M_i \cdot M_k \cdot dx \end{array} \right\} \quad (4-18)$$

Die Vorzeichendefinition für die Momente entspricht der von Gleichung 4-13 (s. Skizze dort).

### Beispiel 1 (Abb. 4-80)

Für den abgebildeten Träger ( $EI = \text{konst.}$ ) sind die Durchbiegung in der Mitte und die Schiefstellung in den Auflagern in allgemeiner Form zu bestimmen.

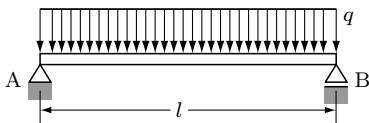


Abb. 4-80: Träger mit konstanter Streckenlast

### Lösung (Abb. 4-81/4-82)

Das Momentendiagramm ist eine Parabel mit dem Maximalwert  $q \cdot l^2/8$  ( $M_i$ -System). An der Stelle, für die die Durchbiegung bestimmt werden soll, wird die „Kraft“ „1“ eingeführt. Diese hat das „Biegemoment“  $M_k$  zur Folge (Abb. 4-81). Beide müssen mit Hilfe der Tabelle 12 gekoppelt werden. Hier sind es die Zeile 5 mit der Spalte  $\beta$ . Das System ist symmetrisch. Es wird eine Hälfte betrachtet und das Ergebnis mit 2 multipliziert.

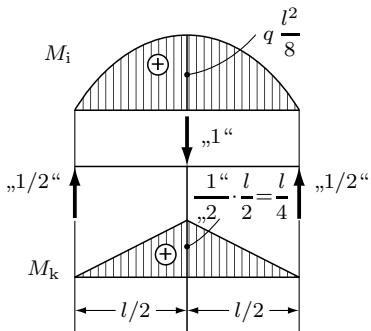
$$\begin{aligned} w_{\max} &= \frac{1}{EI} \cdot 2 \left( \frac{5}{12} \cdot s \cdot M_i \cdot M_k \right) \\ w_{\max} &= \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{4} = \underline{\underline{\frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384EI}}} \end{aligned}$$

Für die Bestimmung der Schiefstellung im Auflager muss dort das „Moment“ „1“ eingetragen werden. Dieses verursacht ein Momentendiagramm nach Abb. 4-82. Es werden die Zeilen 4 und die Spalte  $\gamma$  gekoppelt.

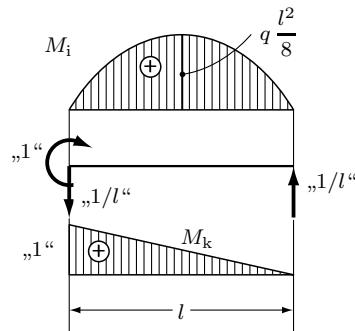
$$\varphi_{\max} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot s \cdot M_i \cdot M_k$$

$$\underline{\varphi_{\max}} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{q l^2}{8} \cdot 1 = \frac{q \cdot l^3}{24EI}$$

Die Ergebnisse können mit Hilfe der Tabelle 11 kontrolliert werden.



**Abb. 4-81:**  $M_i$ - und  $M_k$ -Diagramme für die Bestimmung von  $w_{\max}$  des Trägers nach Abb. 4-80



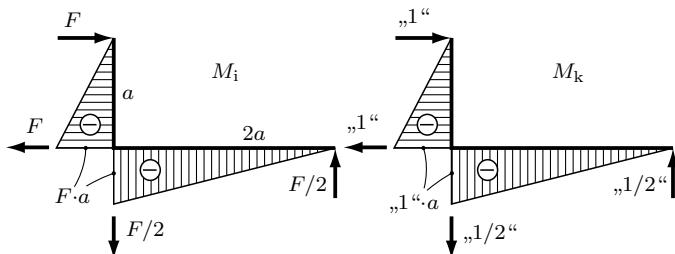
**Abb. 4-82:**  $M_i$ - und  $M_k$ -Diagramme für die Bestimmung von  $\varphi_{\text{Lager}}$  am Träger nach Abb. 4-80

### Beispiel 2 (Abb. 4-77)

Für den gekröpften Träger ist in allgemeiner Form die Durchbiegung an der Lastangriffsstelle zu bestimmen.

### Lösung

Das  $M_i$ - und  $M_k$ -System zeigt die Abb. 4-83. Alle Momente sind nach der Vor-



**Abb. 4-83:**  $M_i$ - und  $M_k$ -Diagramme für gekröpften Träger nach Abb. 4-77

zeichendefinition negativ, durch die Multiplikation ergibt sich ein positives Ergebnis. Hier erfolgt die Kopplung von Zeile 2 und Spalte  $\beta$  der Tabelle 12.

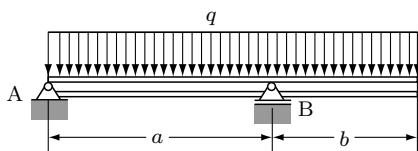
$$w_F = \frac{1}{EI} \cdot \sum \left( \frac{1}{3} \cdot s \cdot M_i \cdot M_k \right)$$

$$\underline{w_F} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \left( a \cdot Fa \cdot a + 2a \cdot Fa \cdot a \right) = \underline{\frac{F \cdot a^3}{EI}}$$

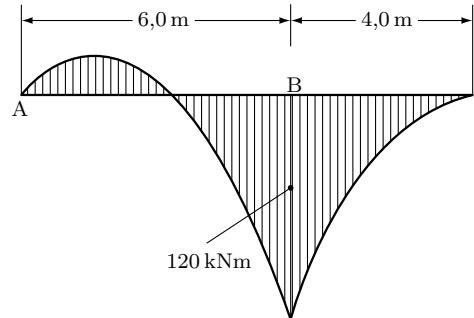
Das Kraftgrößenverfahren eignet sich besonders gut für gekröpfte Träger und Rahmen konstanter Querschnitte mit Einzellasten.

### Beispiel 3 (Abb. 4-84)

Der abgebildete Träger HE-B 400 ist mit  $q = 15 \text{ kN/m}$  belastet. Seine Abmessungen sind  $a = 6,0 \text{ m}$  und  $b = 4,0 \text{ m}$ . Zu bestimmen ist die Durchbiegung des rechten Endes.



**Abb. 4-84:** Kragträger mit konstanter Streckenlast



**Abb. 4-85:**  $M_b$ -Diagramm für Kragträger nach Abb. 4-84

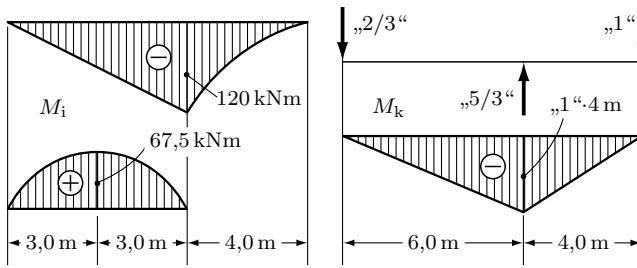
### Lösung (Abb. 4-85/4-86)

Das Momentendiagramm zeigt die Abb. 4-85. Der Momentenverlauf zwischen den Lagern muss in einen linearen und einen quadratischen Teil zerlegt werden. Für den letzten erhält man  $q \cdot a^2 / 8 = 67,5 \text{ kNm}$ . Der  $M_k$ -Verlauf ergibt sich durch die am Ende „angreifende Kraft“ „1“. Nach Abb. 4-86 müssen  $2/\beta$ ;  $4/\beta$  und  $6/\beta$  gekoppelt werden.

$$EI \cdot w = \frac{1}{3} \cdot s \cdot M_i \cdot M_k + \frac{1}{3} \cdot s \cdot M_i \cdot M_k + \frac{1}{4} \cdot s \cdot M_i \cdot M_k$$

$$EI \cdot w = \frac{1}{3} \cdot 6,0 \text{ m} \cdot (-120 \text{ kNm}) \cdot (-4,0 \text{ m}) + \frac{1}{3} \cdot 6,0 \text{ m} \cdot 67,5 \text{ kNm} \cdot (-4,0 \text{ m}) \\ + \frac{1}{4} \cdot 4,0 \text{ m} \cdot (-120 \text{ kNm}) \cdot (-4,0 \text{ m})$$

$$EI \cdot w = 900 \text{ kNm}^3 = 9 \cdot 10^5 \text{ Nm}^3$$



**Abb. 4-86:**  $M_i$ - und  $M_k$ -Diagramme für Kragträger nach Abb. 4-84

Das positive Vorzeichen zeigt an, dass die Durchbiegung nach unten erfolgt. Mit  $I = I_y = 57680 \text{ cm}^4$  nach Tabelle 10A erhält man die gesuchte Durchbiegung.

$$\underline{w} = \frac{9 \cdot 10^5 \text{ Nm}^3}{2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2 \cdot 57680 \text{ cm}^4} \cdot \frac{10^6 \text{ cm}^3}{\text{m}^3} = \underline{0,74 \text{ cm}}$$

#### 4.6.4 Verfahren nach MOHR<sup>7</sup> und FÖPPL

Es besteht eine Analogie zwischen der Gleichung für die Seillinie und der für die Biegelinie.

Ausgegangen wird von einem vertikal belasteten Seil nach Abb. 4-87. Für den Teilabschnitt  $dx$  werden die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt.

$$\sum F_y = 0 \quad V - V - dV - q \cdot dx = 0 \\ q = -\frac{dV}{dx}.$$

Diese Gleichung entspricht der Beziehung zwischen Streckenlast und Querkraft nach Gleichung 4-8.

$$\sum F_x = 0 \quad H - H - dH = 0 \\ dH = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \text{konst.}$$

Das bedeutet: der Horizontalzug eines mit senkrechten Kräften belasteten Seils ist konstant (vergl. Band 1, 18. Aufl., Abschnitt 10.3, Beispiel 3). Das Seil hat an der betrachteten Stelle die Neigung

$$\tan \varphi = \frac{V}{H} = w'$$

<sup>7</sup>MOHR, Otto (1835–1918), deutscher Ingenieur.

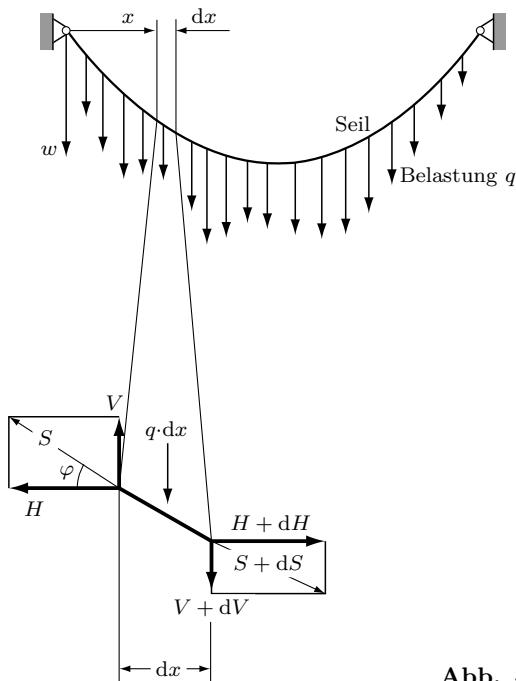


Abb. 4-87: Zur Analogie von Seil- und Biegelinie

Für  $H = \text{konst.}$  gilt

$$w'' = \frac{1}{H} \cdot \frac{dV}{dx} = -\frac{q}{H}$$

Das ist die Gleichung der Seillinie für eine Streckenlast  $q(x)$  und eine in den Lagern wirkende horizontale Spannkraft  $H$ . Die Gleichungen für die Seillinie und die Biegelinie (Gl. 4-13) sind analog aufgebaut.

$$w'' = -\frac{q}{H} \quad w'' = -\frac{M_b}{EI}$$

Folgende Größen entsprechen einander

$$q \implies M_b \quad H \implies EI$$

Die Seillinie kann man graphisch für eine vorgegebene Kraft  $H$  mit der Seileckkonstruktion ermitteln. Dazu muss die Streckenlast abschnittsweise durch die Resultierende ersetzt werden. Die Seillinie wird dabei durch ihren Tangentenzug angenähert. Grundsätzlich ist das Problem im Band 1 (Abschnitt 3.4.2 und

Beispiel 3 in Abschnitt 10.3) behandelt. Deshalb ist es möglich, auch die Biegelinie mit der Seileckkonstruktion graphisch darzustellen. Dazu wird das Biegemomentendiagramm als „Streckenlast“ aufgefasst. Mit „Teilresultierenden“ wird das Seileck gezeichnet. Nach der obigen Analogie muss  $H = EI$  gesetzt werden. Wegen der normalerweise sehr kleinen Durchbiegung und Winkel ist es jedoch zeichnerisch nicht möglich, die elastische Linie unverzerrt zu zeichnen. Der oben angegebene Weg hat einen weiteren Nachteil. Für eine abgesetzte Welle ist das Flächenmoment  $I$  nicht überall gleich. Man müsste diese Konstruktion abschnittsweise für einen Bereich gleichen Querschnitts durchführen. Die Analogie wird deshalb folgendermaßen umgestellt

$$q \rightarrow \frac{M_b}{I} \quad H \rightarrow E.$$

Als *ideelle Belastung* entsprechend der Streckenlast wird jetzt das  $\frac{M_b}{I}$ -Diagramm verwendet. Die Resultierenden von Teilabschnitten haben die Einheiten  $\frac{M_b}{I} \cdot l$  [N/cm<sup>2</sup>]. Die gleiche Einheit hat  $H$ , die „*Höhe*“ des *ideellen Kraftecks der Seileckkonstruktion*. Da es zeichnerisch unmöglich ist,  $H = E$  zu machen, wird die Konstruktion mit einer kleineren, willkürlich festgesetzten Höhe des Kraftecks gezeichnet. Damit erhält man eine verzerrte Biegelinie, deren Durchbiegung und Winkel wesentlich größer sind als die wahren Werte. Diese Größen müssen deshalb im Verhältnis  $H/E$  umgerechnet werden

$$w = w^* \cdot \frac{H}{E} \quad \tan \varphi = \tan \varphi^* \cdot \frac{H}{E}. \quad (4-19)$$

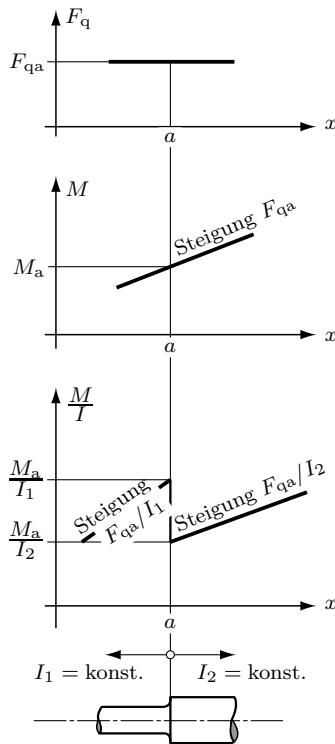
Dabei ist  $w^*$  die mit dem Längenmaßstab der Zeichnung umgerechnete Durchbiegung im Seileck. Der Winkel  $\varphi^*$  wird im gleichen Seilzug gemessen. Beispiele zeigt die Abb. 4-90.

Anschließend an das zeichnerische Verfahren soll die Lösung nach FÖPPL erfolgen. Dazu sind in Abb. 4-88 die Funktionen  $F_q$ ;  $M$ ;  $M/I$  an der Stelle  $a$  eines Wellenabsatzes dargestellt. Aus dem Diagramm folgt unmittelbar für dieses Detail

$$\frac{M}{I} = \dots \langle x - a \rangle \cdot F_{qa} \cdot \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) + \langle x - a \rangle^0 \cdot M_a \cdot \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) \dots \quad (4-20)$$

Knick	Sprung
-------	--------

Durch weitere Integrationen erhält man die Winkeländerungen und die elastische Linie.

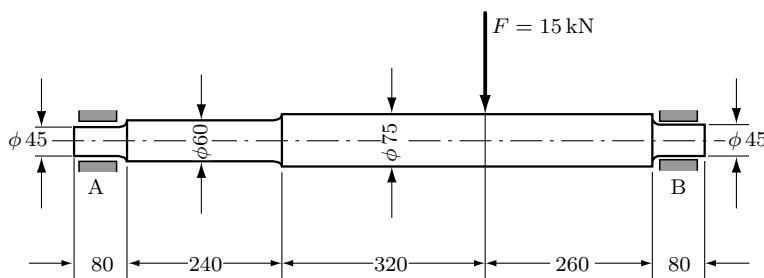


**Abb. 4-88:** Die Funktionen  $F_q$ ;  $M_b$  und  $M_b/I$  an einem Wellenabsatz

Sowohl das graphische Seileckverfahren als auch dessen Umsetzung in ein algebraisches Verfahren mit dem FÖPPLSchen Formalismus werden im nachfolgenden Beispiel angewendet.

### Beispiel (Abb. 4-89)

Die Achse von Beispiel 3 Abschnitt 4-5 (Abb. 4-65/4-66) ist wie abgebildet in den Abmessungen festgelegt worden. Für diese Achse mit der gegebenen Belas-



**Abb. 4-89:** Abgesetzte Welle mit Einzellast

tung ist die elastische Linie graphisch und nach dem FÖPPLSchen Verfahren zu ermitteln. Zu bestimmen sind

- a) die maximale Durchbiegung,
- b) die Durchbiegung des Lastangriffspunktes
- c) die Winkeländerung in den Lagern A und B.

### Lösung

Zuerst soll die Konstruktion nach MOHR durchgeführt werden. Nach der Wahl eines geeigneten Längenmaßstabes wird der *Lageplan* gezeichnet (Abb. 4-90a). Dann muss die *ideelle Belastungsfläche* konstruiert werden. Für die einzelnen Achsabschnitte werden die Flächenmomente bestimmt. Der Biegemomentenverlauf ist bekannt (Abb. 4-66). An den Absätzen ändert sich das Flächenmoment unstetig, demnach muss auch die  $M_b/I$ -Kurve in diesen Punkten eine Unstetigkeitsstelle haben. Es ist zweckmäßig, die einzelnen Punkte der Achse zu bezeichnen, wobei man für die Absätze eine zweifache Kennzeichnung braucht. Die Rechnung erfolgt tabellarisch.

Stelle	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$M_b/\text{kN cm}$	0	20		140		300	40		0
$I/\text{cm}^4$		20,1		63,6		155,3		20,1	
$\frac{M_b}{I}/\text{kN/cm}^3$	0	0,995	0,314	2,201	0,901	1,932	0,258	1,990	0

Mit diesen Werten wird die ideelle Belastungsfläche gezeichnet (Abb. 4-90c). Diese Fläche setzt sich aus zwei Dreiecken und drei Trapezen zusammen. Für diese Teilabschnitte werden genau wie für eine Streckenlast die „Resultierenden“ bestimmt. Das sind die *ideellen Kräfte*.

$$F_{\text{res } 1} = \frac{1}{2} \cdot 0,995 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^3} \cdot 4 \text{ cm} = 1,99 \text{ kN/cm}^2$$

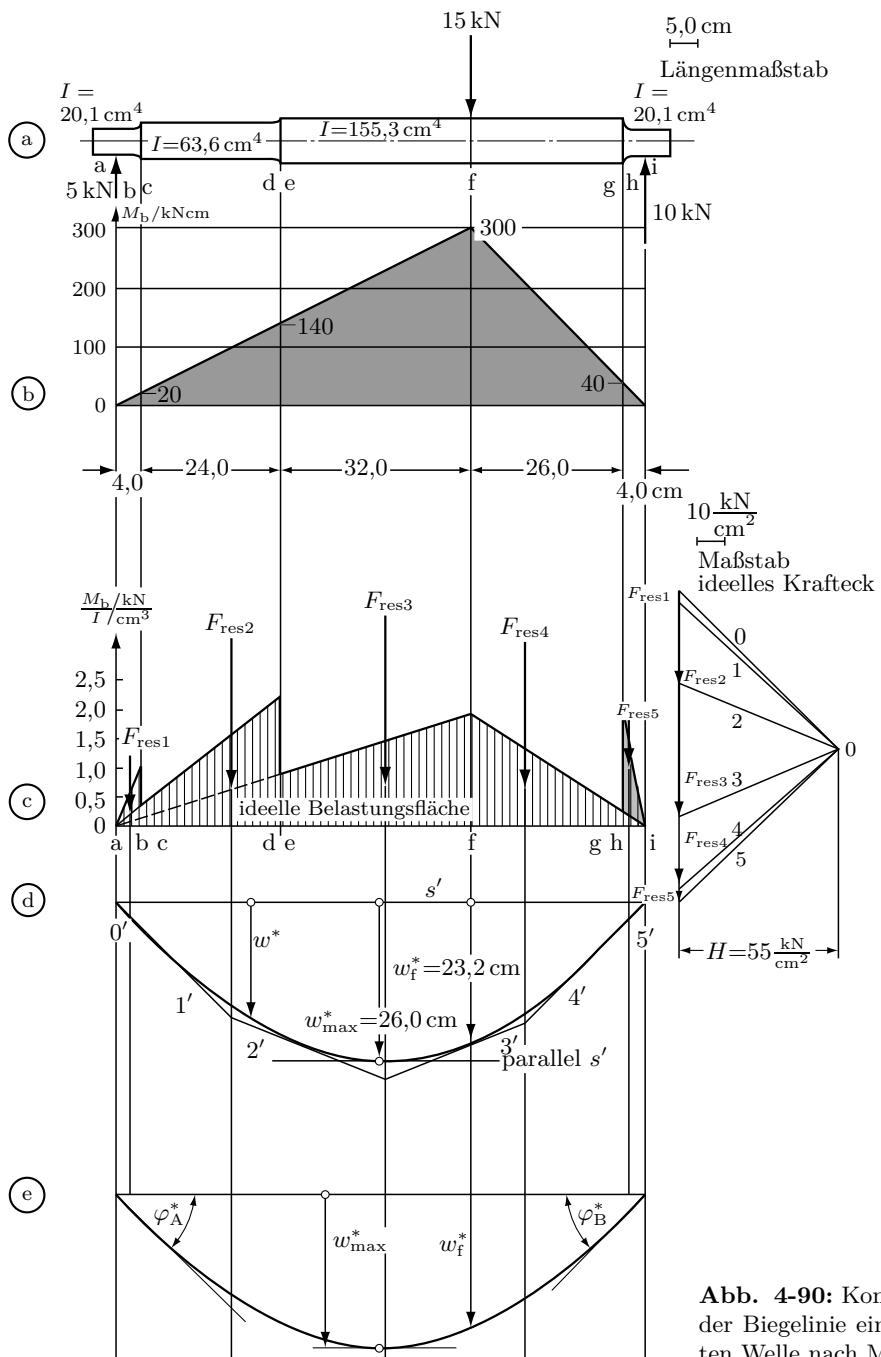
$$F_{\text{res } 2} = \frac{0,314 + 2,201}{2} \frac{\text{kN}}{\text{cm}^3} \cdot 24 \text{ cm} = 30,18 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{\text{res } 3} = \frac{0,901 + 1,932}{2} \frac{\text{kN}}{\text{cm}^3} \cdot 32 \text{ cm} = 45,33 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{\text{res } 4} = \frac{1,932 + 0,258}{2} \frac{\text{kN}}{\text{cm}^3} \cdot 26 \text{ cm} = 28,47 \text{ kN/cm}^2$$

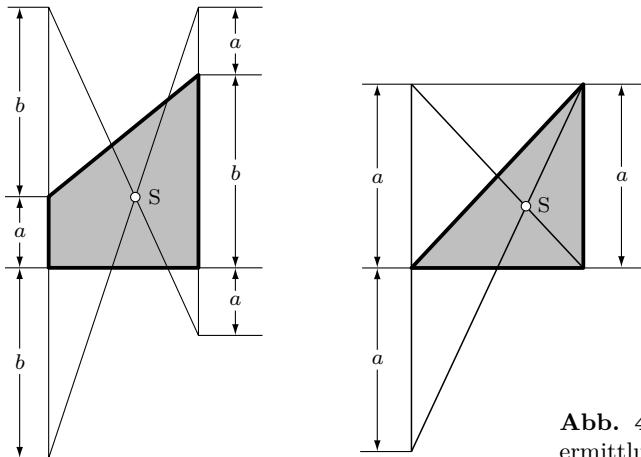
$$F_{\text{res } 5} = \frac{1}{2} \cdot 1,990 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^3} \cdot 4 \text{ cm} = 3,98 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{\text{res}} = 109,95 \text{ kN/cm}^2$$



**Abb. 4-90:** Konstruktion der Biegelinie einer abgesetzten Welle nach MOHR

Die Resultierenden gehen durch den Schwerpunkt der Teilflächen (Konstruktion nach Abb. 4-91). Es wird ein „Kräfte“-Maßstab festgelegt und die Seileckkonstruktion durchgeführt (Abb. 4-90d). Die Seilstrahlen ergeben den Tangentenzug einer verzerrten elastischen Linie. Die Schlusslinie entspricht der undeformierten Achse. Sie muss beide Lager verbinden, wie es auch bei der Bestimmung der Auflagerreaktionen der Fall ist. Die durch eine nicht horizontale Schlusslinie entstandene Verzerrung kann durch ein entsprechendes Umzeichnen wieder rückgängig gemacht werden (Abb. 4-90e).



**Abb. 4-91:** Graphische Schwerpunktermittlung für ein Trapez und Dreieck

Unter Berücksichtigung des Längenmaßstabes ergeben sich

$$w_{\max}^* = 26,0 \text{ cm} \quad w_f^* = 23,2 \text{ cm} .$$

Nach Gl. 4-19 ist für

$$\frac{H}{E} = \frac{55 \cdot 10^3 \text{ N/cm}^2}{2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2} \cdot \frac{1 \text{ cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 2,619 \cdot 10^{-3}$$

$$\underline{w_{\max}} = w_{\max}^* \cdot \frac{H}{E} = 260 \text{ mm} \cdot 2,619 \cdot 10^{-3} = \underline{0,68 \text{ mm}}$$

$$\underline{w_f} = 232 \text{ mm} \cdot 2,619 \cdot 10^{-3} = \underline{0,61 \text{ mm}} .$$

Für die Winkel erhält man im entzerrten Linienzug gemessen

$$\varphi_A^* = 44^\circ \quad \varphi_B^* = 46^\circ$$

Nach Gl. 4-19 ist

$$\tan \varphi_A = \tan 44^\circ \cdot 2,619 \cdot 10^{-3} = 2,53 \cdot 10^{-3}; \quad \underline{\varphi_A = 0,145^\circ}$$

$$\tan \varphi_B = \tan 46^\circ \cdot 2,619 \cdot 10^{-3} = 2,71 \cdot 10^{-3}; \quad \underline{\varphi_B = 0,155^\circ} .$$

Es wird dringend empfohlen, eine überschlägige Kontrolle mit Hilfe der Tabelle 11 durchzuführen. Dem Anfänger, dem noch ein Gefühl für die Größenordnung der sich ergebenden Werte fehlt, können hier leicht Dezimalstellenfehler unterlaufen.

Für den Belastungsfall 3 erhält man

$$w_f = \frac{Fl^3}{3EI} \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(\frac{b}{l}\right)^2; \quad \frac{a}{l} = \frac{2}{3} \quad \frac{b}{l} = \frac{1}{3}.$$

Geschätzter Mittelwert  $d_m = 70 \text{ cm}$        $I = 118 \text{ cm}^4$

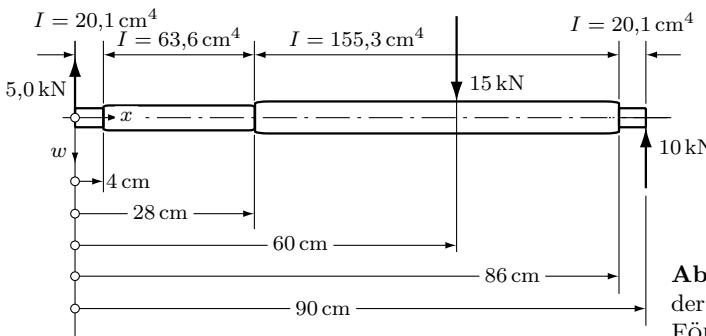
$$w_f = \frac{15 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 9^3 \cdot 10^6 \text{ mm}^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \cdot 118 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = 0,73 \text{ mm}.$$

In Anbetracht der ungenauen Schätzungen von  $d_m$  ist die Übereinstimmung ausreichend.

$$\tan \varphi_A = \frac{w_f}{a} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{l}{b}\right) = \frac{0,73}{600} \cdot \frac{1}{2} (1 + 3) = 2,4 \cdot 10^{-3}.$$

Da die Achse nach außen im Durchmesser abnimmt, ist der Winkel größer als der sich überschlägisch ergebende Wert.

Die *versteifende Wirkung von aufgeschrumpften Ringen bzw. Nabens von Radkörpern berücksichtigt man dadurch, dass man die Flächenmomente aus den Abmessungen der Ringe bzw. Nabens errechnet*. Diese Teile sind damit rechenmäßig Bestandteile der Achse.



**Abb. 4-92:** Koordinaten an der Welle nach Abb. 4-89 für das FÖPPLSche Verfahren

Für die Lösung nach FÖPPL ist es zweckmäßig, von der Abb. 4-92 auszugehen. Die Rechnung erfolgt mit Zahlenwertgleichungen für folgende Einheiten

$x$	$w$	$F$	$M$	$I$
cm	cm	kN	kNm	$\text{cm}^4$

Der Querkraftverlauf wird nach Gleichung 4-9 aufgestellt. Dabei ist die Vorzeichenregelung nach Abb. 4-26 zu beachten.

$$F_q = \langle x \rangle^0 \cdot 5 - \langle x - 60 \rangle^0 \cdot 15. \quad (1)$$

Die Wellenabsätze erhalten einen Index, der dem Abstand von der linken Kante entspricht. Für diese Stellen beträgt die Querkraft

$$F_{q4} = 5 \text{ kN} \quad F_{q28} = 5 \text{ kN} \quad F_{q86} = -10 \text{ kN}.$$

Die Integration der Querkraftgleichung (Gl. 4-15)

$$M = x \cdot 5 - \langle x - 60 \rangle \cdot 15 \quad (2)$$

mit

$$M_4 = 20 \text{ kNm} \quad M_{28} = 140 \text{ kNm} \quad M_{86} = 40 \text{ kNm}.$$

Jetzt ist es möglich, die Funktion  $M/I$  aufzustellen. Ausgegangen wird von der Gleichung (2). Jeder Absatz führt zu einer Unstetigkeitsstelle, die die Anwendung der Gleichung 4-20 erfordert. Dabei kennzeichnet  $a$  die Stelle des Absatzes, z.B. erster Absatz bei  $a = 4$  cm.

$$\begin{aligned} \frac{M}{I} &= \frac{x \cdot 5}{20,1} + \langle x - 4 \rangle \cdot 5 \cdot \left( \frac{1}{63,6} - \frac{1}{20,1} \right) + \langle x - 4 \rangle^0 \cdot 20 \cdot \left( \frac{1}{63,6} - \frac{1}{20,1} \right) \\ &\quad + \langle x - 28 \rangle \cdot 5 \cdot \left( \frac{1}{155,3} - \frac{1}{63,6} \right) + \langle x - 28 \rangle^0 \cdot 140 \cdot \left( \frac{1}{155,3} - \frac{1}{63,6} \right) \\ &\quad - \langle x - 60 \rangle \cdot \frac{15}{155,3} \\ &\quad + \underbrace{\langle x - 86 \rangle \cdot (-10) \cdot \left( \frac{1}{20,1} - \frac{1}{155,3} \right)}_{\text{Knick}} + \underbrace{\langle x - 86 \rangle^0 \cdot 40 \cdot \left( \frac{1}{20,1} - \frac{1}{155,3} \right)}_{\text{Sprung}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{I} &= x \cdot 0,2488 - \langle x - 4 \rangle \cdot 0,1701 - \langle x - 4 \rangle^0 \cdot 0,6806 - \langle x - 28 \rangle \cdot 0,0464 \\ &\quad - \langle x - 28 \rangle^0 \cdot 1,2998 - \langle x - 60 \rangle \cdot 0,0966 - \langle x - 86 \rangle \cdot 0,4331 \\ &\quad + \langle x - 86 \rangle^0 \cdot 1,7325. \end{aligned}$$

Kontrolle: rechter Rand  $x = 90$ :  $M/I = 0$

Die Integration liefert (Gl. 4-15)

$$\begin{aligned} E \cdot \varphi &= - \int \frac{M}{I} dx \\ E \cdot \varphi &= -x^2 \cdot 0,1244 + \langle x - 4 \rangle^2 \cdot 0,0851 + \langle x - 4 \rangle \cdot 0,6806 \\ &\quad + \langle x - 28 \rangle^2 \cdot 0,0232 + \langle x - 28 \rangle \cdot 1,2988 + \langle x - 60 \rangle^2 \cdot 0,0483 \\ &\quad + \langle x - 86 \rangle^2 \cdot 0,2166 - \langle x - 86 \rangle \cdot 1,7325 + K_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Eine nochmalige Integration ergibt die Gleichung für die elastische Linie (Gl. 4-15)

$$\begin{aligned} E \cdot w &= \int E \cdot \varphi \cdot dx \\ E \cdot w &= -x^3 \cdot 0,0415 + \langle x - 4 \rangle^3 \cdot 0,0284 + \langle x - 4 \rangle^2 \cdot 0,3403 + \\ &\quad + \langle x - 28 \rangle^3 \cdot 0,0077 + \langle x - 28 \rangle^2 \cdot 0,6499 + \langle x - 60 \rangle^3 \cdot 0,0161 \\ &\quad + \langle x - 86 \rangle^3 \cdot 0,0722 - \langle x - 86 \rangle^2 \cdot 0,8662 + K_1 \cdot x + K_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Die Randbedingungen sind (Lager)

$$x = 0 \quad w = 0 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 0 \quad \text{und} \quad x = 90 \quad w = 0.$$

Das führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= -90^3 \cdot 0,0415 + 86^3 \cdot 0,0284 + 86^2 \cdot 0,3403 + 62^3 \cdot 0,0077 \\ &\quad + 62^2 \cdot 0,6499 + 30^3 \cdot 0,0161 + 4^3 \cdot 0,0722 - 4^2 \cdot 0,8662 + K_1 \cdot 90. \end{aligned}$$

mit der Lösung  $K_1 = 54,48$ .

Die Gleichung (4) stellt die elastische Linie dar. Sie lässt sich leicht für die Auswertung programmieren. Die FÖPPLSchen Klammern stellen Verzweigungspunkte dar. Die maximale Durchbiegung liegt bei  $\varphi = 0$ . Man muss dazu abschätzen, dass diese Stelle bei  $x < 60$  cm liegt. Das führt mit Gleichung (3) auf ( $x = x_e$ )

$$\begin{aligned} 0 &= -x_e^2 \cdot 0,1244 + (x_e - 4)^2 \cdot 0,0851 + (x_e - 4) \cdot 0,6806 \\ &\quad + (x_e - 28)^2 \cdot 0,0232 + (x_e - 28) \cdot 1,2998 + 54,48. \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösung  $x_e = 46,6$  cm.

An dieser Stelle ist die Durchbiegung

$$E \cdot w_{\max} = -46,6^3 \cdot 0,0415 + 42,6^3 \cdot 0,0284 + 42,6^2 \cdot 0,3403 \\ + 18,6^3 \cdot 0,0077 + 18,6^2 \cdot 0,6499 + 54,48 \cdot 46,6$$

$$E \cdot w_{\max} = 1428 \text{ kN/cm}$$

$$\underline{w_{\max}} = \frac{1428 \text{ kN/cm}}{2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2} = 0,068 \text{ cm} = \underline{0,68 \text{ mm}}.$$

In den meisten Fällen wäre es nicht notwendig, die exakte Lage der maximalen Durchbiegung zu bestimmen. Nach der qualitativen Abschätzung der elastischen Linie könnte man einige Durchbiegungen berechnen und würde sehr schnell innerhalb einer vernünftigen technischen Genauigkeit  $w_{\max}$  erhalten.

Für die Bestimmung der Durchbiegung im Kraftangriffspunkt wird in die Gleichung (4)  $x = 60$  eingesetzt. Das Ergebnis ist

$$E \cdot w_F = 1279 \text{ kN/cm} \quad \text{und} \quad \underline{w_F = 0,61 \text{ mm}}.$$

Die Winkeländerung am linken Lager erhält man aus der Gleichung (1) für  $x = 0$

$$E \cdot \varphi_A = K_1 = 54,48 \text{ kN/cm}^2; \quad \underline{\varphi_A = 2,59 \cdot 10^{-3} \hat{=} 0,149^\circ}.$$

Für das rechte Lager muss  $x = 90$  eingesetzt werden

$$E \cdot \varphi_B = -55,47 \text{ kN/cm}^2 \quad \underline{\varphi_B = -2,64 \cdot 10^{-3} \hat{=} -0,151^\circ}.$$

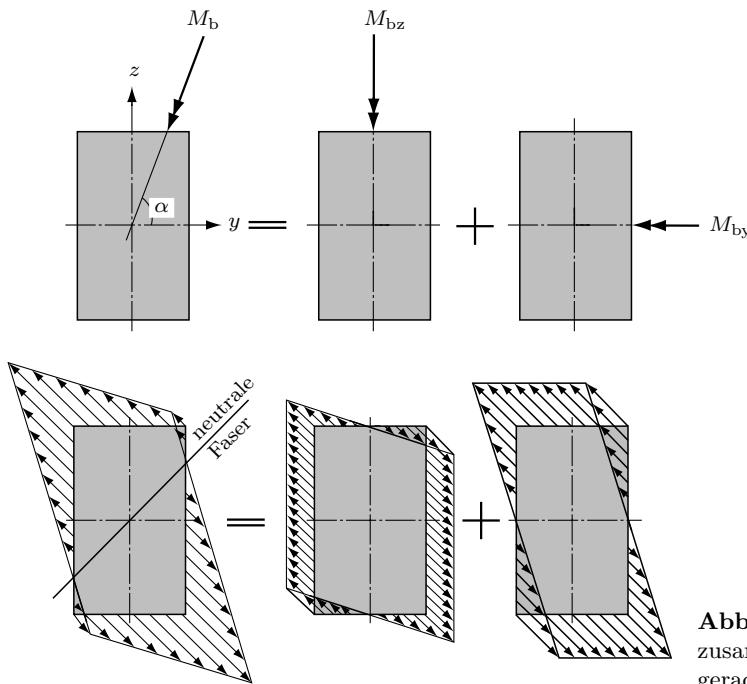
Oft ist es möglich, ohne Beeinträchtigung einer sinnvollen Genauigkeit, das System zu vereinfachen. Im vorliegenden Fall könnte man die Absätze an den Enden weglassen ( $x = 4; x = 86$ ). Man kann sich überlegen, dass sich dadurch die Winkeländerung in den Lagern unwesentlich kleiner ergibt. Das müsste man u.U. bei der Lagerwahl berücksichtigen.

Eine Integration ohne die FÖPPLSchen Klammern führt hier auf 10 Integrationskonstanten, die aus 10 Gleichungen zu bestimmen sind.

## 4.7 Die schiefe Biegung

### 4.7.1 Profile mit zwei senkrecht zueinander stehenden Symmetrieachsen

Für die Darstellung der schiefen Biegung wird das Biegemoment nach Abb. 4-93 in vektorieller Form eingeführt. *Schiefe Biegung liegt dann vor, wenn der Biegemomentenvektor nicht die Richtung einer Symmetrieachse (Hauptachse) hat.*



**Abb. 4-93:** Schiefe Biegung zusammengesetzt aus zwei geraden Biegungen

Man kann jedoch den Vektor in diese Richtungen zerlegen und erhält so zwei Fälle von gerader Biegung. Beide erzeugen Normalspannungen, die addiert werden. Die Gleichungen 4-4/5 führen auf

$$\sigma = \frac{M_{by}}{I_y} \cdot z - \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y \quad (4-21)$$

für einen Punkt des Querschnitts mit den Koordinaten  $y$  und  $z$  und einem nach diesem Koordinatensystem positiv definierten Biegemoment  $M_b$ . Für außen liegende Eckpunkte erhält man mit  $y_{\max}$  und  $z_{\max}$

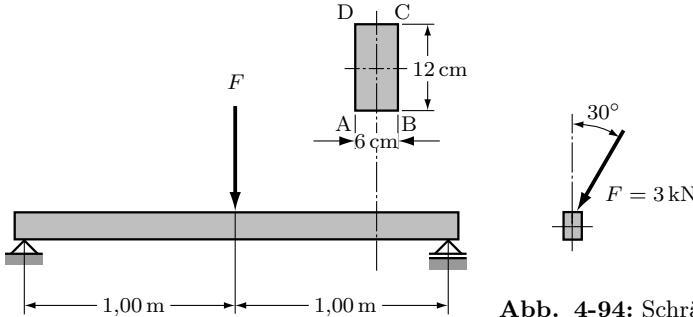
$$\sigma = \pm \frac{M_{by}}{W_y} \pm \frac{M_{bz}}{W_z} \quad (4-22)$$

Bei Anwendung dieser Gleichung muss man aus der Anschauung heraus entscheiden, welche Vorzeichen jeweils gelten. Auf diese Kontrolle sollte man auch bei Anwendung der Gleichung 4-21 nicht verzichten.

Für Querschnittsflächen, für die  $I_y = I_z$  gilt (z.B. Kreis, Quadrat), liegt die neutrale Faser in Richtung des Biegemomentenvektors. Für alle anderen Flächen wird sie aus der Bedingung  $\sigma = 0$  ermittelt.

**Beispiel 1 (Abb. 4-94)**

Ein Träger bestehend aus einem rechteckigen Stahlhohlprofil  $120 \times 60 \times 3,2$  ist nach Skizze belastet. Die Kraft ist gegen die Vertikale um  $30^\circ$  geneigt. Zu bestimmen sind die Spannungen in den Eckpunkten des maximal belasteten Querschnitts.

**Abb. 4-94:** Schräg belastetes Vierkantrohr**Lösung (Abb. 4-95/4-96)**

Das Biegemoment (Absolutbetrag)

$$M_b = F_A \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{4} F \cdot l = \frac{1}{4} \cdot 3,0 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} = 1,50 \text{ kNm}$$

wird in die Richtungen der Symmetriechsen zerlegt

$$M_{by} = -M_b \cdot \cos 30^\circ = -1,299 \text{ kNm} = -1,299 \cdot 10^5 \text{ Ncm}$$

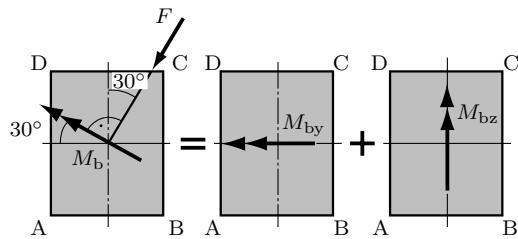
$$M_{bz} = M_b \cdot \sin 30^\circ = 0,750 \text{ kNm} = 0,75 \cdot 10^5 \text{ Ncm}.$$

Dem Normblatt DIN 59411 entnimmt man für das Profil

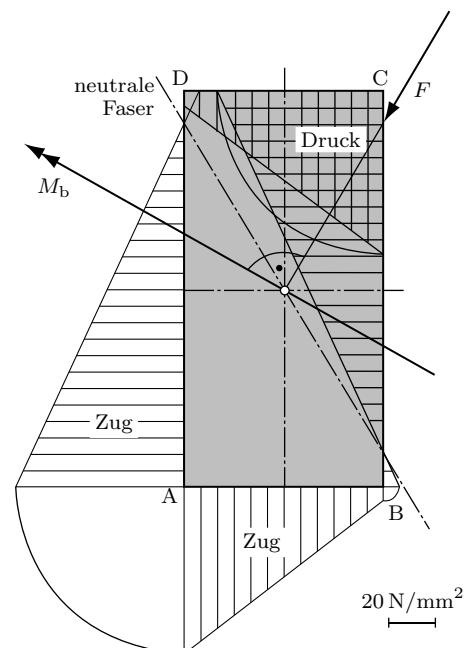
$$I_y = 200 \text{ cm}^4 \quad I_z = 67,9 \text{ cm}^4$$

Für die vier Eckpunkte wird die Gleichung 4-21 ausgewertet.

$$\begin{aligned} \sigma_{bA} &= +\frac{M_{by}}{I_y} \cdot z_A - \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y_A \\ &= \left[ \frac{-1,299 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{200 \text{ cm}^4} (-6,0 \text{ cm}) - \frac{0,75 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{67,9 \text{ cm}^4} (-3,0 \text{ cm}) \right] \frac{\text{cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} \\ \underline{\sigma_{bA}} &= (+39+33) \text{ N/mm}^2 = \underline{+72 \text{ N/mm}^2} \quad (\text{Zug}) \\ \sigma_{bB} &= \left[ \frac{-1,299 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{200 \text{ cm}^4} (-6,0 \text{ cm}) - \frac{0,75 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{67,9 \text{ cm}^4} \cdot 3,0 \text{ cm} \right] \frac{\text{cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} \\ \underline{\sigma_{bB}} &= (+39-33) \text{ N/mm}^2 = \underline{+6 \text{ N/mm}^2} \quad (\text{Zug}) \end{aligned}$$



**Abb. 4-95:** Schiefe Biegung am Vierkantrohr zusammengesetzt aus geraden Biegungen



**Abb. 4-96:** Spannungsverteilung an der maximal belasteten Stelle des Vierkantrohrs nach Abb. 4-94

Die weitere Rechnung ergibt

$$\text{mit } y_C = +3,0 \text{ cm} / z_C = +6,0 \text{ cm}$$

$$\text{mit } y_D = -3,0 \text{ cm} / z_D = +6,0 \text{ cm}$$

$$\underline{\sigma_{bC} = -72 \text{ N/mm}^2 \text{ (Druck)}} \quad \text{und} \quad \underline{\sigma_{bD} = -6 \text{ N/mm}^2 \text{ (Druck)}}$$

Diese vier Werte legen den Spannungsverlauf im Querschnitt fest. Das Ergebnis zeigt die Abb. 4-96. Die neutrale Faser verbindet die Punkte, für die  $\sigma = 0$  gilt.

### **Beispiel 2 (Abb. 4-97)**

Der abgebildete Träger HE-B 120 ist nach Skizze räumlich belastet. Es ist zu prüfen, ob die auftretende Spannung den zulässigen Wert von  $140 \text{ N/mm}^2$  nicht übersteigt.

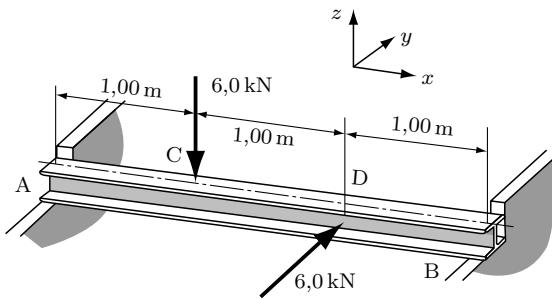


Abb. 4-97: HE-B-Träger unter räumlicher Belastung

### Lösung (Abb. 4-98)

Für die gefährdeten Querschnitte muss die Gleichung 4-22 ausgewertet werden. Dazu wird ein räumliches Koordinatensystem eingeführt, wie es in der Abb. 4-97 eingezeichnet ist. Der räumliche Belastungsfall wird in zwei ebene Fälle zerlegt. Die Biegemomentendiagramme in der  $x$ - $z$ - und  $x$ - $y$ -Ebene zeigt die Abb. 4-98.

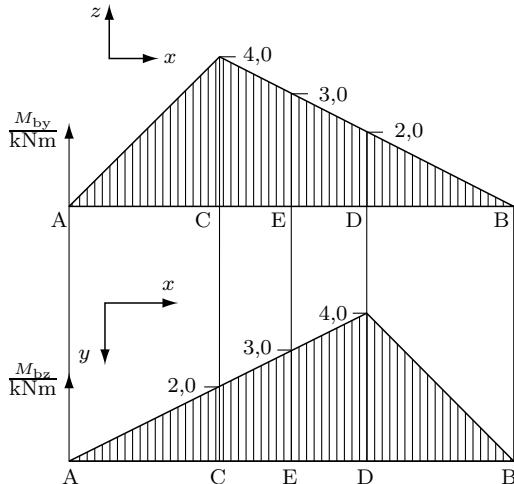


Abb. 4-98:  $M_b$ -Diagramme für den Träger nach Abb. 4-97

Es sollen die Querschnitte der Kraftangriffsstellen und sicherheitshalber ein Zwischenschnitt (E) untersucht werden. Der Tabelle 10A entnimmt man

$$W_y = 144 \text{ cm}^3; \quad W_z = 52,9 \text{ cm}^3.$$

Querschnitt C

$$M_{by} = 4,00 \text{ kNm}; \quad M_{bz} = 2,00 \text{ kNm}.$$

$$\sigma_C = \frac{M_{by}}{W_y} + \frac{M_{bz}}{W_z}$$

$$\underline{\sigma_C} = \left( \frac{4,0 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{144 \text{ cm}^3} + \frac{2,0 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{52,9 \text{ cm}^3} \right) \cdot \frac{\text{cm}^2}{100 \text{ mm}^2} = \underline{65,6 \text{ N/mm}^2}$$

Das ist die Spannung in der am höchsten beanspruchten Ecke des Profils im Schnitt C.

Querschnitt D

$$M_{by} = 2,00 \text{ kNm}; \quad M_{bz} = 4,00 \text{ kNm}.$$

$$\sigma_D = \frac{M_{by}}{W_y} + \frac{M_{bz}}{W_z}$$

$$\underline{\sigma_D} = \left( \frac{2,0 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{144 \text{ cm}^3} + \frac{4,0 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{52,9 \text{ cm}^3} \right) \cdot \frac{\text{cm}^2}{100 \text{ mm}^2} = \underline{89,5 \text{ N/mm}^2}$$

Das ist die Spannung in der am höchsten beanspruchten Ecke des Profils im Schnitt D.

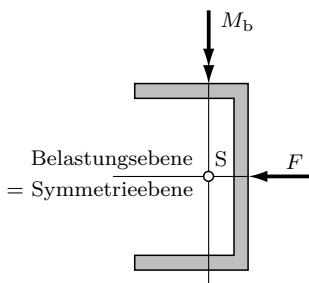
Querschnitt E

$$\underline{\sigma_E} = \left( \frac{3,0 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{144 \text{ cm}^3} + \frac{3,0 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{52,9 \text{ cm}^3} \right) \cdot \frac{\text{cm}^2}{100 \text{ mm}^2} = \underline{77,5 \text{ N/mm}^2}$$

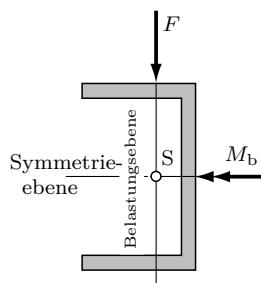
Die zulässige Spannung wird in keinem Querschnitt des Trägers überschritten.

#### 4.7.2 Symmetriearchse senkrecht zur Belastungsebene

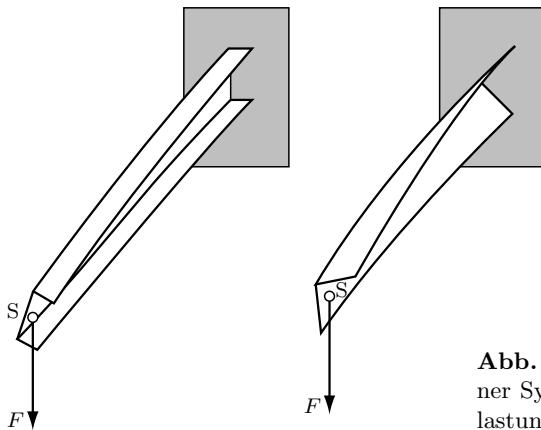
Als Beispiel für ein Profil mit nur einer Symmetriearchse soll ein U-Profil betrachtet werden. Es sind grundsätzlich zwei Belastungsfälle zu unterscheiden. Fallen Symmetrie- und Belastungsebene zusammen, gilt uneingeschränkt alles, was in den Abschnitten 4.3 bis 4.7 abgeleitet wurde. Dieser Zustand ist in der Abb. 4-99 dargestellt. *Eine Belastung in einer Ebene, die im Schwerpunkt senkrecht zur Symmetrieebene steht, verursacht im Träger zusätzlich eine Verdrehbeanspruchung.* Diesen Fall zeigt die Abb. 4-100. Die Verdrehung wird durch Schubspannungen verursacht, deren Ursache wiederum die Querkräfte sind. Im Abschnitt



**Abb. 4-99:** Symmetrisch belastetes Trägerprofil mit einer Symmetrieebene



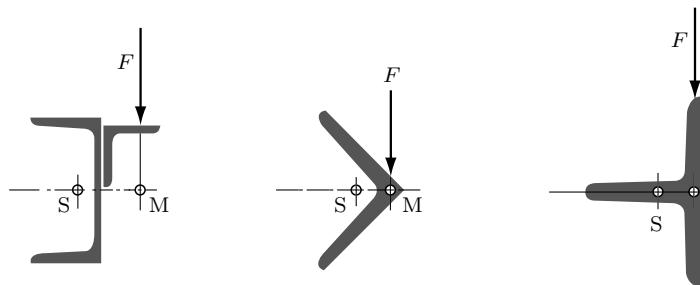
**Abb. 4-100:** Unsymmetrisch belastetes Trägerprofil mit einer Symmetrieebene



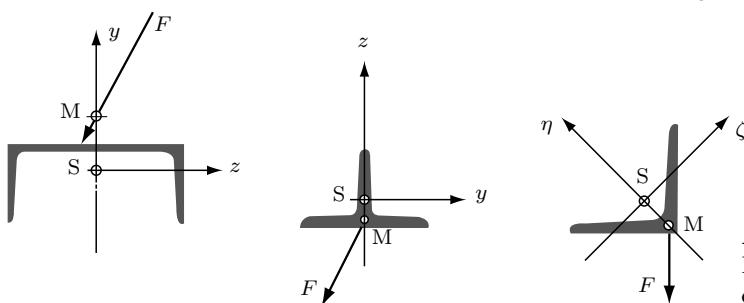
**Abb. 4-101:** Verdrehung von Trägern mit einer Symmetrieebene unter unsymmetrischer Belastung

5.4 wird dazu einiges ausgeführt. Die der Biegung überlagerte Verdrehung hat grundsätzlich eine Deformation nach Abb. 4-101 zur Folge. Man könnte sie mit dem Kippen nach Abb. 4-16a verwechseln, das jedoch ein Stabilitätsproblem ist und grundsätzlich andere Ursachen hat.

Welche Maßnahme muss getroffen werden, um bei Belastung senkrecht zur Symmetrieebene eine Verdrehbeanspruchung zu vermeiden? Die Belastungsebene muss parallel so verschoben werden, dass das dabei entstehende Moment das Torsionsmoment aufhebt. Den Punkt, durch den die Belastungsebene für diese Bedingung zu führen ist, nennt man *Schubmittelpunkt* M (Abb. 4-102). Für ge-



**Abb. 4-102:** Lage des Schubmittelpunktes für verschiedene Profile



**Abb. 4-103:** Schiefe Biegung von Profilen mit einer Symmetrieebene

walzte U-Profile sind die Schubmittelpunkte in der Tabelle 10C vermaßt. Bei L- und T-Profilen zeigen die Abb. 4-102/4-103 die Lage von M.

Die schiefe Biegung der hier besprochenen Profile setzt sich aus den beiden oben diskutierten Fällen zusammen. Zur Vermeidung einer zusätzlichen Verdrehung muss die Belastungsebene durch den Schubmittelpunkt gelegt werden. Für die Berechnung muss die Symmetrieeachse eine Koordinatenachse sein (Abb. 4-103). Zu beachten ist, dass die Flächenmomente immer auf die Schwerpunktachse zu beziehen sind, denn die neutrale Faser geht durch den Schwerpunkt.

*Belastungen, wie sie hier beschrieben wurden, sind möglichst zu vermeiden. Liegen keine besonderen Gründe vor, sollen Biegeprofile symmetrisch ausgeführt und belastet werden.*

### 4.7.3 Unsymmetrische Profile und Hauptachsen

Die Grundgleichung der Biegung ist aus der Bedingung  $\sum M = 0$  für diejenige Achse abgeleitet worden, in der der Momentenvektor  $\vec{M}_b$  liegt. Die Aussage dieser Gleichung ist: das Biegemoment und die durch die Spannung verursachten inneren Kräfte bzw. deren Momente sind im Gleichgewicht. Für die dazu senkrechte Achse – in dieser liegt kein Momentenvektor – müssen die inneren Kräfte sich gegenseitig in der Momentenwirkung aufheben. Für das System nach Abb. 4-10 heißt das: aus  $\sum M_y = 0$  erhält man die Grundgleichung der Biegung, es muss aber auch  $\sum M_z = 0$  gelten, sonst wäre das System nicht im Gleichgewicht. Diese zweite Bedingung war bei den bisher behandelten symmetrischen Profilen ohnehin erfüllt, was man an der Abb. 4-10 erkennt. Hier soll sie auf einen beliebigen Querschnitt nach Abb. 4-104 angewendet werden.

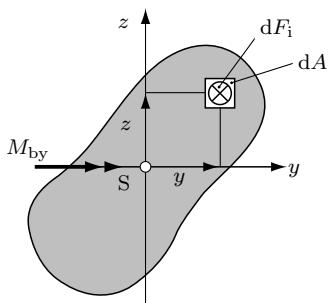


Abb. 4-104: Allgemeine Querschnittsfläche bei Biegebelastung

Die am Flächenelement wirkende Kraft  $dF_i = \sigma \cdot dA$  hat in Bezug auf die z-Achse das Moment

$$dM_z = y \cdot dF_i$$

Bei Betrachtung von Differentialen geht  $\sum M_z = 0$  über in  $\int dM_z = 0$

$$0 = \int y \cdot dF_i = \int y \cdot \sigma \cdot dA$$

Die durch  $M_{by}$  verursachte Spannung nimmt mit  $z$  linear zu

$$\begin{aligned}\sigma &= k \cdot z \\ 0 &= k \cdot \int y \cdot z \cdot dA\end{aligned}$$

Das Integral wird *biaxiales Flächenmoment* genannt. Es ist für ein Koordinatensystem  $y$ - $z$  folgendermaßen definiert

$$I_{yz} = \int y \cdot z \cdot dA \quad (4-23)$$

Dieses Integral muss null sein, soll die Gleichgewichtsbedingung  $\sum M = 0$  auch für die zum Vektor  $\vec{M}_b$  senkrechte Achse erfüllt sein. Umgekehrt formuliert, die Grundgleichung der Biegung gilt immer dann, wenn das biaxiale Flächenmoment verschwindet.

*Ein Koordinatensystem, für das das biaxiale Flächenmoment null ist, nennt man Hauptachsensystem. Für dieses gilt die Grundgleichung der Biegung. Symmetriearchsen sind Hauptachsen.*

Das Ziel der nachfolgenden Ableitung ist, die Lage der Hauptachsen zu finden und die Größe der auf diese bezogenen Flächenmomente zu berechnen. Dazu werden zwei zueinander gedrehte Koordinatensysteme nach Abb. 4-105 eingeführt.

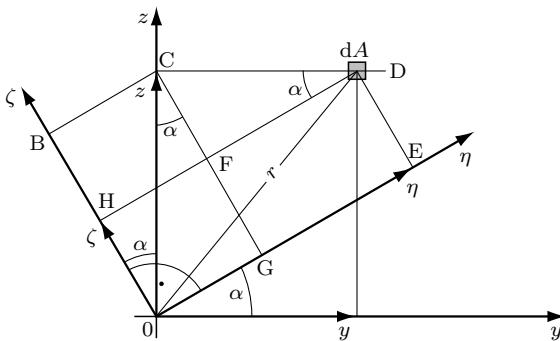


Abb. 4-105: Definition eines gedrehten Koordinatensystems

Aus geometrischen Beziehungen erhält man folgende Umrechnungen

$$\eta = \overline{OG} + \overline{GE} = \overline{BC} + \overline{FD}$$

$$\eta = z \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$\zeta = \overline{OB} - \overline{BH} = \overline{OB} - \overline{CF}$$

$$\zeta = z \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha. \quad (2)$$

Sollen die  $\eta - \zeta$  Achsen Hauptachsen sein, dann muss

$$I_{\eta\zeta} = 0$$

gelten.

Nach der Definition ist

$$I_{\eta\zeta} = \int \eta \cdot \zeta \cdot dA = \int (z \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha)(z \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha) \cdot dA$$

$$I_{\eta\zeta} = \int (z^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - y^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + y \cdot z \cdot \cos^2 \alpha - y \cdot z \cdot \sin^2 \alpha) \cdot dA$$

Nach Einführung von

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$I_y = \int z^2 \cdot dA$$

$$I_z = \int y^2 \cdot dA$$

erhält man das biaxiale Flächenmoment für ein gedrehtes Koordinatensystem

$$I_{\eta\zeta} = \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{yz} \cdot \cos 2\alpha. \quad (4-24)$$

Aus der Bedingung  $I_{\eta\zeta} = 0$  erhält man den Winkel  $\alpha = \alpha_h$ , der die Richtung der Hauptachsen angibt.

$$\tan 2\alpha_h = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}. \quad (4-25)$$

Für die Hauptachsen sollen die Flächenmomente berechnet werden. Die Gleichung (2) führt auf

$$\begin{aligned} I_\eta &= \int \zeta^2 \cdot dA \\ &= \int (z^2 \cdot \cos^2 \alpha - 2 \cdot y \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + y^2 \cdot \sin^2 \alpha) \cdot dA \\ I_\eta &= I_y \cdot \cos^2 \alpha - I_{yz} \cdot \sin 2\alpha + I_z \cdot \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Nach Einführung von

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

erhält man

$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\alpha - I_{yz} \cdot \sin 2\alpha \quad (4-26)$$

und analog dazu

$$I_\zeta = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\alpha + I_{yz} \cdot \sin 2\alpha \quad (4-27)$$

Die Gleichungen 4-26/27 werden addiert

$$I_\zeta + I_\eta = I_z + I_y = I_p. \quad (4-28)$$

Wie bereits im Abschnitt 4.5.2 ausgeführt: *Das polare Flächenmoment  $I_p$  ist die Summe von zwei axialen Flächenmomenten, deren Achsen senkrecht aufeinander stehen und sich im Pol schneiden.* Es soll bewiesen werden, dass für die Hauptachsen die Flächenmomente die Maximal- bzw. Minimalmomente sind. Die Ableitung von  $I_\eta$  nach  $\alpha$  muss null werden:

$$\frac{dI_\eta}{d\alpha} = -\frac{I_y - I_z}{2} \cdot 2 \cdot \sin 2\alpha - I_{yz} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha = 0.$$

Das ergibt

$$\tan 2\alpha = \frac{2 I_{yz}}{I_z - I_y} = \tan 2\alpha_h.$$

Das ist die Gleichung 4-25 für  $\alpha = \alpha_h$ . Die  $\tan$ -Funktion hat eine Periode von  $180^\circ$ . Die Extremwerte ergeben sich deshalb bei  $\alpha_h$  und  $\alpha_h + 90^\circ$ . Das sind zwei zueinander senkrecht stehende Achsen.

Die Größe dieser maximalen und minimalen Flächenmomente soll in Abhängigkeit von  $I_y$  und  $I_z$  berechnet werden. Dazu wird in den Gleichungen 4-26/27  $\alpha = \alpha_h$  eingesetzt. Wegen der Gleichung 4-25 muss der  $\tan$  über folgende Beziehungen eingeführt werden.

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}} \quad \sin 2\alpha = \frac{\tan 2\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}}$$

Damit ist

$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}} - I_{yz} \cdot \frac{\tan 2\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}}.$$

Für  $\alpha = \alpha_h$  wird je nach Vorzeichen der Wurzeln  $I_\eta = I_{\min}^{\max}$ .

Unter Benutzung von Gleichung 4-25

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \frac{4I_{yz}^2}{(I_z - I_y)^2}}} - I_{yz} \cdot \frac{2I_{yz}}{\pm (I_z - I_y) \sqrt{1 + \frac{4I_{yz}^2}{(I_z - I_y)^2}}}.$$

Die Wurzel wird ausgeklammert, innerhalb der Wurzel wird vereinfacht:

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{I_z - I_y}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}} \left( \frac{I_y - I_z}{2} - \frac{2I_{yz}^2}{I_z - I_y} \right)$$

Die Differenz in der Klammer wird auf den Hauptnenner gebracht. Nach weiteren Vereinfachungen ist

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{I_z - I_y}{2} \right)^2 + I_{yz}^2} = I_{1/2}. \quad (4-29)$$

Die Gleichungen lassen sich an einem Kreis nach Abb. 4-106 darstellen. Dieser wird MOHRScher Kreis genannt. Auf der Abszisse des Koordinatensystems sind die Flächenmomente, auf der Ordinate die biaxialen Flächenmomente aufgetragen. Der Mittelpunkt des Kreises M liegt im arithmetischen Mittel von  $I_y$  und  $I_z$ . Der Wurzelwert in der Gleichung 4-29 ist gleich dem Radius des Kreises. Das folgt aus dem Satz von PYTHAGORAS für das Dreieck AMD. Der Winkel AMD ist nach Gleichung 4-24 gleich  $2\alpha_h$ . Dieser Winkel ist spitz für  $I_{yz} > 0$  und  $I_z > I_y$ . Daraus folgt: *das biaxiale Flächenmoment  $I_{yz}$  ist vorzeichenrichtig dem Flächenmoment  $I_z$  zugeordnet*. Ein Peripheriewinkel ist halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel. Deshalb ist der Winkel ACD gleich dem Hauptachsenwinkel  $\alpha_h$  und die Strecke AC eine Hauptachse. Die zweite Hauptachse ist die Strecke AD, da der Winkel CAD  $90^\circ$  beträgt (Kreis des THALES). Die Punkte C und D kennzeichnen  $I_{\min}$  und  $I_{\max}$ . Für welche Achse das Flächenmoment minimal oder maximal ist, kann man aus der Anschauung erkennen. Einmal sind alle Flächenteile möglichst nah, das andere mal möglichst weit von der Achse angeordnet. Formal gilt: *die Achse, die im MOHRSchen Kreis die Abszisse bei  $I_{\min}$  schneidet, ist die Achse für  $I_{\min} = I_2$ . Analoges gilt für  $I_{\max} = I_1$* .

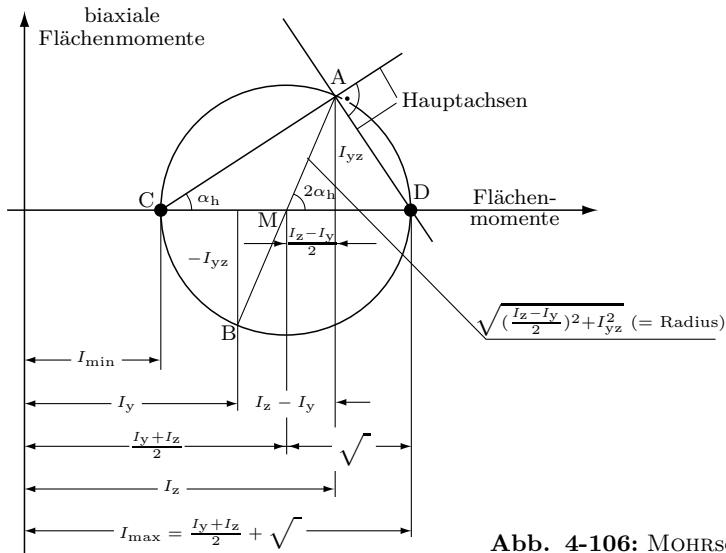


Abb. 4-106: MOHRSCHER TRÄGHEITSKREIS

Für Profile, die aus geometrischen Grundfiguren zusammengesetzt sind, müssen die biaxialen Flächenmomente auf parallele Achsen umgerechnet werden. Dazu wird das Koordinatensystem nach Abb. 4-52 verwendet.

$$I_{yz} = \int y \cdot z \cdot dA$$

Mit  $y = y_s + \bar{y}$  und  $z = z_s + \bar{z}$  ist

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \int (y_s + \bar{y})(z_s + \bar{z}) dA \\ &= \int y_s \cdot z_s \cdot dA + \int \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot dA + \int y_s \cdot \bar{z} \cdot dA + \int \bar{y} \cdot z_s \cdot dA \\ I_{yz} &= y_s \cdot z_s \cdot A + I_{\bar{y}\bar{z}} + y_s \int \bar{z} \cdot dA + z_s \int \bar{y} \cdot dA \end{aligned}$$

Für Schwerpunktachsen sind die beiden letzten Integrale null (s. Band 1; Gl. 4-8). Damit verbleibt

$$I_{yz} = I_{\bar{y}\bar{z}} + y_s \cdot z_s \cdot A \quad (4-30)$$

Das ist der STEINERSCHE SATZ für biaxiale Flächenmomente. Zu beachten ist, dass das System  $\bar{y}\bar{z}$  ein Schwerpunktsystem ist.

Für gewalzte L- und Z-Profile sind alle Werte für die Hauptachsen in den Stahltabellen gegeben. Einen Auszug bringen die Tabellen 10B/D im Anhang.

Zusammenfassend wird festgehalten:

1. Eine ebene Fläche hat zwei Hauptachsen, die sich im Schwerpunkt schneiden und die senkrecht aufeinander stehen. Für dieses System gilt:

$$\text{Biaxiales Flächenmoment} = 0$$

Flächenmomente sind maximal und minimal

2. Symmetriearchsen sind Hauptachsen
3. Aus 1.) und 2.) folgt: Hat eine Fläche nur eine Symmetriearchse, dann ist die zu dieser senkrecht stehende Schwerpunktachse auch eine Hauptachse.
4. Hat eine Fläche mehr als zwei Symmetriearchsen, dann sind alle auch Hauptachsen. Dem MOHRSchen Kreis kann man entnehmen, dass dies nur dann möglich ist, wenn der Kreis zu einem Punkt schrumpft (biaxiale Flächenmomente = 0). Daraus folgt: Alle Schwerpunktachsen sind Hauptachsen mit gleichem Flächenmoment.

Der allgemeine Fall der schiefen Biegung erfordert für die Berechnung der Biegespannung folgende Schritte (s. nachfolgendes Beispiel 3):

1. Berechnung der Lage der Hauptachsen.
2. Berechnung von  $I_{\max}$  und  $I_{\min}$ .
3. Berechnung der Abstände von den Hauptachsen zu den außenliegenden Querschnittssecken, in denen maximale Spannungen zu erwarten sind.
4. Anwendung der Grundgleichung der Biegung für jede Hauptachse mit den jeweils zugehörigen Werten.
5. Addition der Spannungen in den einzelnen Punkten unter Beachtung der Vorzeichen.

Nachfolgend werden drei Beispiele zu dem Thema Hauptachsen und schiefe Biegung gebracht. Ein zusätzliches Beispiel ist im Abschnitt 7.6 (Knickung) eingearbeitet.

### **Beispiel 1 (Abb. 4-107)**

Für die vier abgebildeten Flächen sind die Lage der Hauptachsen und die zugehörigen Flächenmomente zu berechnen. Die Ergebnisse sind mit dem MOHRSchen Kreis zu kontrollieren.

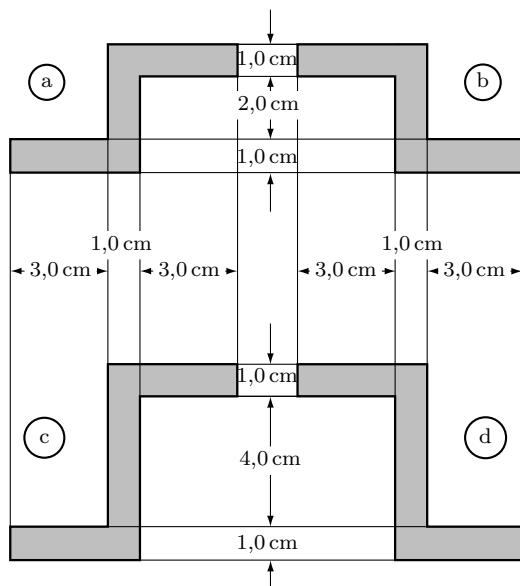


Abb. 4-107: Verschiedene Z-Profile

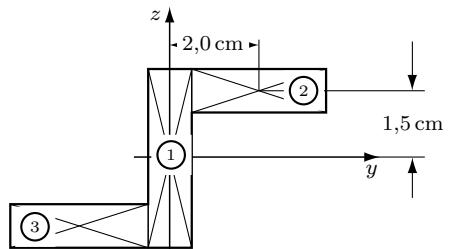


Abb. 4-108: Flächeneinteilung im Z-Profil

**Lösung (Abb. 4-108/4-109)**

Fläche a)

Nach Umgruppierung der Teilflächen nach Abb. 4-54 erhält man

$$I_y = \frac{4 \cdot 4^3}{12} \text{ cm}^4 - \frac{3 \cdot 2^3}{12} \text{ cm}^4 = 19,3 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{1 \cdot 7^3}{12} \text{ cm}^4 + \frac{3 \cdot 1^3}{12} \text{ cm}^4 = 28,8 \text{ cm}^4.$$

Für die Bestimmung des biaxialen Flächenmomentes dürfen die Teilflächen nicht umgruppert werden, da sich sonst die Vorzeichen ändern. Es werden nach Abb. 4-108 drei Teilflächen gebildet. Allgemein gilt

$$I_{yz} = I_{yz1} + I_{yz2} + I_{yz3}.$$

Alle Teilflächen sind symmetrisch, d.h. für die einzelnen Schwerpunkte gilt

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = 0.$$

Der Gesamtschwerpunkt und der Schwerpunkt der Teilfläche 1 fallen zusammen, deshalb ist  $I_{yz1} = 0$ .

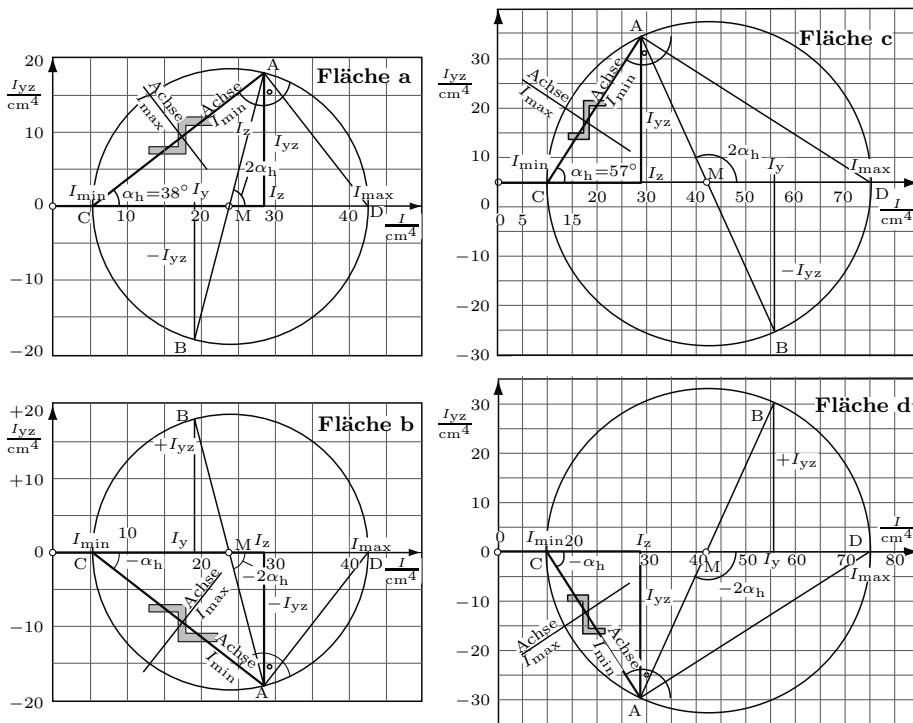


Abb. 4-109: MOHRSche Trägheitskreise für die Z-Profilen nach Abb. 4-107

Es verbleiben nach Gleichung 4-30 für die Teile 2 und 3

$$I_{yz} = y_s \cdot z_s \cdot A$$

$$I_{yz2} = 2 \text{ cm} \cdot 1,5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}^2 = 9,0 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz3} = (-2 \text{ cm})(-1.5 \text{ cm}) \cdot 3 \text{ cm}^2 = 9,0 \text{ cm}^4.$$

Insgesamt ist  $I_{yz} = +18,0 \text{ cm}^4$ .

Die Werte werden in Gleichungen 4-25/29 eingesetzt.

$$\tan 2\alpha_h = \frac{2 I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot 18,0 \text{ cm}^4}{(28,8 - 19,3) \text{ cm}^4}$$

$$2\alpha_h = 75,2^\circ; \quad \alpha_h = 37,6^\circ; \quad 127,6^\circ$$

$$I_{\min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$= \frac{(28,8 + 19,3) \text{ cm}^4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{28,8 - 19,3}{2}\right)^2 \text{ cm}^8 + 18,0^2 \text{ cm}^8}$$

$$\underline{I_{\max} = 42,7 \text{ cm}^4} \quad \underline{I_{\min} = 5,47 \text{ cm}^4}$$

Der MOHRSche Kreis wird folgendermaßen gezeichnet (Abb. 4-109). Auf der Abszisse werden  $I_y$  und  $I_z$  gekennzeichnet. Bei  $I_z$  wird  $I_{yz}$  vorzeichenrichtig eingetragen, bei  $I_y$  umgekehrt. Das ergibt die Punkte A und B. Die Strecke AB ist der Durchmesser, der Schnittpunkt M ist der Mittelpunkt des Kreises. Er schneidet die Abszisse bei  $I_{\min}$  (Punkt C) und  $I_{\max}$  (Punkt D). Die Strecke AC ist die Hauptachse für  $I_{\min}$ . Sie liegt unter dem Winkel  $\alpha_h$  zur  $y$ -Achse. Die Strecke AD ist die Hauptachse für  $I_{\max}$ .

Fläche b)

Die axialen Flächenmomente sind die gleichen wie für die Fläche a. Bei der Berechnung von  $I_{yz}$  ändern sich nur die Vorzeichen von  $y_s$  und  $z_s$ .

$$I_{yz} = -18,0 \text{ cm}^4$$

Da in die Gleichung 4-29 die Größe  $I_{yz}$  quadratisch eingeht, ändern sich die Flächenmomente nicht, der Hauptachsenwinkel wird negativ.

$$\underline{\alpha_h = -37,6^\circ}; \quad \underline{52,4^\circ}; \quad \underline{I_{\max} = 42,7 \text{ cm}^4}; \quad \underline{I_{\min} = 5,47 \text{ cm}^4}.$$

Im MOHRSchen Kreis ist der Punkt A in den vierten Quadranten gekippt.

Fläche c)

$$I_y = \frac{4 \cdot 6^3}{12} \text{ cm}^4 - \frac{3 \cdot 4^3}{12} \text{ cm}^4 = 56,0 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{1 \cdot 7^3}{12} \text{ cm}^4 + \frac{5 \cdot 1^3}{12} \text{ cm}^4 = 29,0 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = 2 \cdot 2,5 \cdot 3,0 \text{ cm}^4 + (-2)(-2,5) \cdot 3,0 \text{ cm}^4 = +30,0 \text{ cm}^4$$

Die Gleichungen 4-25/29 liefern

$$\underline{\alpha_h = -32,9^\circ}; \quad \underline{57,1^\circ}; \quad \underline{I_{\max} = 75,4 \text{ cm}^4}; \quad \underline{I_{\min} = 9,60 \text{ cm}^4}.$$

Wegen  $I_z < I_y$  liegt der Punkt A in zweiten Quadranten des MOHRSchen Kreises.

Fläche d)

Die biaxialen Flächenmomente entsprechen denen von Fläche c. Der Vorzeichenwechsel führt auf  $I_{yz} = -30,0 \text{ cm}^4$ . Damit ist

$$\underline{\alpha_h = -57,1^\circ}; \quad \underline{32,9^\circ}; \quad \underline{I_{\max} = 75,4 \text{ cm}^4}; \quad \underline{I_{\min} = 9,60 \text{ cm}^4}.$$

Der Punkt A liegt im dritten Quadranten des MOHRSchen Kreises.

Die vier Flächen sind Beispiele für die vier möglichen Kombinationen.

$$\begin{array}{c|c} \left. \begin{array}{l} I_z > I_y \\ I_{yz} \text{ positiv} \\ I_{yz} \text{ negativ} \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} I_z < I_y \\ I_{yz} \text{ positiv} \\ I_{yz} \text{ negativ} \end{array} \right\} \end{array}$$

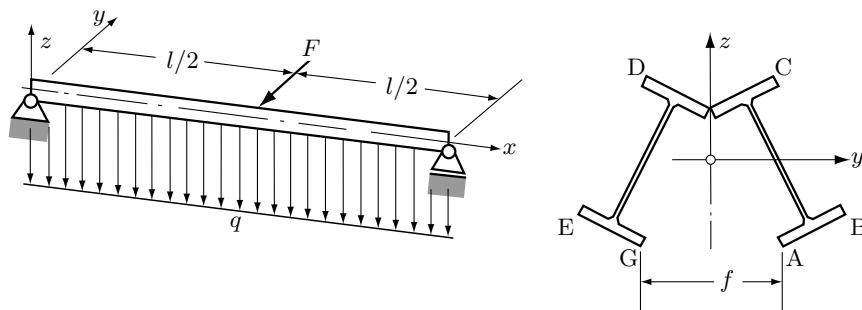
Mit der Überlegung, die Achse für  $I_{\min}$  ( $I_{\max}$ ) liegt so, dass alle Flächenelemente einen möglichst kleinen (großen) Abstand von der Achse haben, kann man verhältnismäßig genau die Achsen in die Fläche skizzieren. Damit ist eine recht gute qualitative Kontrolle möglich.

Wegen der Vieldeutigkeit der tan-Funktion sind Fehler sehr leicht möglich. Schon aus diesem Grunde sollte der MOHRSche Kreis gezeichnet werden. Dieser hat über die hier gezeigte Anwendung hinausgehende Bedeutung. Der Kreis für Massenträgheitsmomente wird in der Kinetik bei der Rotation von Massen angewendet (Band 3). Ein völlig analog aufgebauter Spannungskreis erleichtert das Verständnis von mehrachsigen Spannungszuständen (s. Kapitel 8).

### **Beispiel 2 (Abb. 4-110)**

Der abgebildete Träger ist aus zwei I-300-Profilen an den oberen Flanschen zusammen geschweißt und wird an den unteren Flanschen abschnittsweise durch Stege auf Abstand gehalten. Für die skizzierte Belastung mit den unten angegebenen Daten sind die Spannungen in den Profilecken A B C D E G zu berechnen.

$$q = 25 \text{ kN/m}; \quad F = 40 \text{ kN}; \quad l = 4,0 \text{ m}; \quad f = 260 \text{ mm}.$$



**Abb. 4-110:** Träger bestehend aus schräggestellten I-Profilen mit räumlicher Belastung

### Lösung

Das Profil des Trägers ist in Bezug auf die  $z$ -Achse symmetrisch. Da Hauptachsen senkrecht aufeinanderstehen, ist die im Schwerpunkt liegende  $y$ -Achse die zweite Hauptachse. Für die Anwendung der Hauptgleichung der Biegung müssen die Flächen- und Widerstandsmomente bezogen auf die  $y$ - $z$ -Achsen berechnet werden. Dazu ist es zunächst notwendig, die Geometrie des Profils zu erfassen. Die Hauptabmessungen entnimmt man der Tabelle 10A. Die Abb. 4-111 liefert die Dreiecksbeziehungen für die Berechnung der einzelnen Größen.

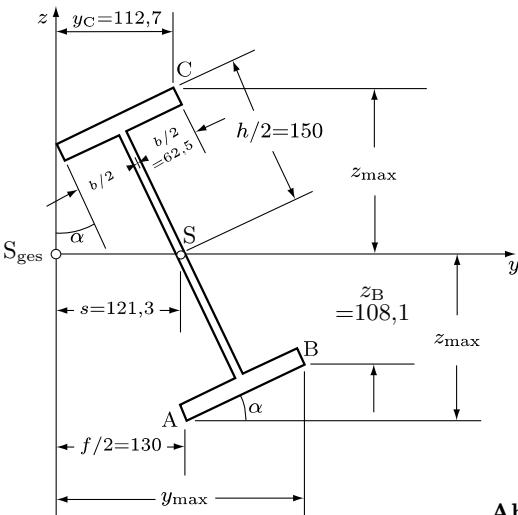


Abb. 4-111: Geometrie des Profils Abb. 4-110

Die Profile sind um den Winkel  $\alpha$  gedreht

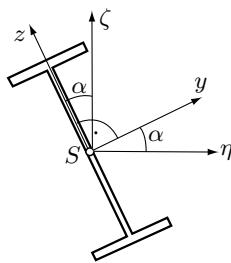
$$\sin \alpha = \frac{130 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} \quad \alpha = 25,7^\circ$$

Beispielhaft sollen hier  $y_{\max} = y_B$  und  $z_{\max} = z_A$  berechnet werden.

$$\begin{aligned} y_{\max} &= b \cdot \cos \alpha + \frac{f}{2} = 24,3 \text{ cm} \\ z_{\max} &= \frac{h}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha = 16,2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Die Anwendung der Gleichungen 4-26/27 erfordert die Festlegung von Koordinatensystemen, wie sie die Abb. 4-112 zeigt.

$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \cdot \sin 2\alpha$$



**Abb. 4-112:** Definition der Koordinaten des Profils Abb. 4-110

Mit  $I_y = 9800 \text{ cm}^4$ ;  $I_z = 451 \text{ cm}^4$  (Tabellenwerte)  $I_{yz} = 0$  (Symmetrie) und  $\alpha = 25,7^\circ$  (s.o.) erhält man

$$I_\eta = 8044 \text{ cm}^4.$$

Analog aus Gl. 4-27  $I_\zeta = 2207 \text{ cm}^4$ .

Beide Werte können mit dem MOHRSchen Kreis kontrolliert werden. Jetzt muss das Ergebnis auf das vorgegebene Doppelprofil übertragen werden.

$$\eta \rightarrow y \quad \zeta \rightarrow z$$

Da die  $y$ -Achse eine Schwerpunktachse für Einzelprofile als auch für das Gesamtprofil ist, gilt

$$I_y = 2I_\eta = 16\,088 \text{ cm}^4$$

Die  $z$ -Achse geht nicht durch den Schwerpunkt der Einzelprofile. Das erfordert die Anwendung des STEINERSchen Satzes. Mit (s. Abb. 4-111)

$$s = \frac{b}{2} \cos \alpha + \frac{h}{2} \sin \alpha = 12,1 \text{ cm}$$

erhält man mit  $A = 69,1 \text{ cm}^2$  (Tabelle) für beide I-Träger

$$I_z = 2(I_{zs} + s^2 \cdot A) = 2(2207 \text{ cm}^4 + 12,1^2 \text{ cm}^2 \cdot 69,1 \text{ cm}^2)$$

$$I_z = 24\,748 \text{ cm}^4$$

Jetzt können die Widerstandsmomente berechnet werden

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{16\,088 \text{ cm}^4}{16,2 \text{ cm}} = 991 \text{ cm}^3$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{24\,748 \text{ cm}^4}{24,3 \text{ cm}} = 1020 \text{ cm}^3$$

Die maximale Beanspruchung liegt in der Trägermitte und beträgt

$$M_{by} = \frac{ql^2}{8} = \frac{25 \cdot 10^3 \text{ N/m} \cdot 4,0^2 \text{ m}^2}{8} \cdot \frac{10^2 \text{ cm}}{\text{m}} = 5,0 \cdot 10^6 \text{ Ncm}$$

$$M_{bz} = \frac{F \cdot l}{4} = \frac{1}{4} \cdot 40 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 4,0 \text{ m} \cdot \frac{10^2 \text{ cm}}{\text{m}} = 4,0 \cdot 10^6 \text{ Ncm}$$

Die Lage der beiden Momentenvektoren zeigt die Abb. 4-113:  $\vec{M}_{by}$  erzeugt im unteren Bereich gezogene Fasern,  $M_{bz}$  im linken. Alle Daten für die Berechnung der gefragten Spannungen liegen vor. In den nachfolgenden Gleichungen werden die Momente und die Punktabstände positiv eingesetzt. Die Vorzeichen (Zug/Druck) sind in den Ansätzen berücksichtigt.

$$\sigma_A = +\frac{M_{by}}{W_y} - \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot \frac{f}{2} = +30 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{Zug})$$

$$\sigma_B = +\frac{M_{by}}{I_y} \cdot z_B - \frac{M_{bz}}{W_z} = -6 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{Druck})$$

$$\sigma_C = -\frac{M_{by}}{W_y} - \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y_C = -69 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{Druck})$$

$$\sigma_D = -\frac{M_{by}}{I_y} + \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y_D = +33 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{Zug})$$

$$\sigma_E = +\frac{M_{by}}{I_y} \cdot z_E + \frac{M_{bz}}{W_z} = +73 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{Zug})$$

$$\sigma_G = +\frac{M_{by}}{W_y} + \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot \frac{f}{2} = +72 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{Zug})$$

Zum Schluss sei auf den Abschnitt 4.7.2 „Symmetrieachsen senkrecht zur Belastungsebene“ hingewiesen. Dort wird begründet, weshalb Belastungen, die nicht in der Symmetrieebene liegen, vermieden werden sollten. Dieser Fall ist hier durch die Kraft  $F$  gegeben. In diesem Beispiel sollten Biegespannungen in schrägliegenden Walzprofilen bei räumlicher Belastung berechnet werden.

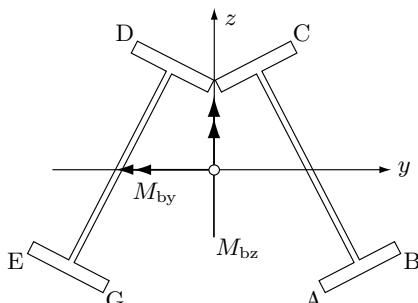
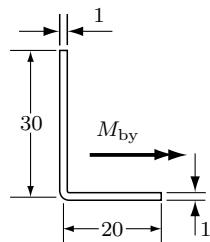


Abb. 4-113: Biegemomentenvektoren am Profil Abb. 4-110

**Beispiel 3 (Abb. 4-114)**

Das aus Blech abgewinkelte Profil soll ein Biegemoment  $M_{by} = 12,0 \text{ Nm}$  übertragen. Zu bestimmen sind die Biegespannungen in den Enden und im Winkel.



**Abb. 4-114:** Mit einem Moment  $M_{by}$  belasteter Blechwinkel

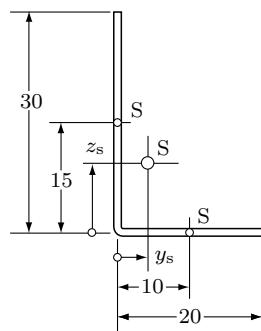
**Lösung (Abb. 4-115 bis 4-119)**

Die Blechdicke soll gegenüber den anderen Abmessungen vernachlässigt werden. Alle Werte beziehen sich auf die Mittellinie des Blechs. Zuerst muss die Schwerpunktlage des Profils berechnet werden. Nach Abb. 4-115 ist mit den Gleichungen 4-9 von Band 1

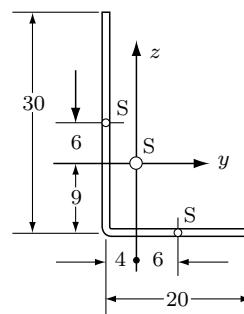
$$y_s = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{A_{\text{ges}}} = \frac{10 \text{ mm} \cdot 20 \text{ mm}^2 + 0}{50 \text{ mm}^2} = 4,0 \text{ mm}$$

$$z_s = \frac{\sum z_i \cdot A_i}{A_{\text{ges}}} = \frac{15 \text{ mm} \cdot 30 \text{ mm}^2 + 0}{50 \text{ mm}^2} = 9,0 \text{ mm}$$

Für das im Schwerpunkt liegende Koordinatensystem nach Abb. 4-116 werden alle Flächenmomente ermittelt. Unter Verwendung des STEINERSchen Satzes



**Abb. 4-115:** Zur Berechnung der Schwerpunktlage des Winkels nach Abb. 4-114



**Abb. 4-116:** Zur Berechnung der Flächenmomente des Winkels nach Abb. 4-114

(Gl. 4-11/30) und der Formel für Rechteck nach Tabelle 9 ist

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{1 \text{ mm} \cdot 30^3 \text{ mm}^3}{12} + 6^2 \text{ mm}^2 \cdot 30 \text{ mm}^2 + \frac{20 \text{ mm} \cdot 1^3 \text{ mm}^3}{12} + \\ &\quad + 9^2 \text{ mm}^2 \cdot 20 \text{ mm}^2 = 4952 \text{ mm}^4 \\ I_z &= \left( \frac{30 \cdot 1^3}{12} + 4^2 \cdot 30 + \frac{1 \cdot 20^3}{12} + 6^2 \cdot 20 \right) \text{ mm}^4 = 1869 \text{ mm}^4 \\ I_{yz} &= (-4 \text{ mm}) \cdot 6 \text{ mm} \cdot 30 \text{ mm}^2 + 6 \text{ mm}(-9 \text{ mm}) \cdot 20 \text{ mm}^2 = -1800 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Jetzt müssen die Lage der Hauptachsen und die auf diese bezogenen Flächenmomente bestimmt werden (Gl. 4-25/29)

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha_h &= \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2(-1800) \text{ mm}^4}{(1869 - 4952) \text{ mm}^4} \\ 2\alpha_h &= -130,6^\circ; \quad 49,4^\circ; \quad 229,4^\circ \dots \\ \alpha_h &= -65,3^\circ; \quad 24,7^\circ \end{aligned}$$

Diese beiden Winkel gelten für die Hauptachsen  $\zeta(I_{\min})$  und  $\eta(I_{\max})$  nach Abbildung 4-115.

$$\begin{aligned} I_{\min}^{\max} &= \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \\ &= \left( \frac{1869 + 4952}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1869 - 4952}{2}\right)^2 + (-1800)^2} \right) \text{ mm}^4 \\ I_{\max} &= 5780 \text{ mm}^4; \quad I_{\min} = 1041 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Die Kontrolle mit dem MOHRSchen Kreis ist erfüllt. Der Punkt A liegt im dritten Quadranten (s. Beispiel 1). Als nächstes werden die senkrechten Abstände von den Eckpunkten zu den Hauptachsen berechnet. Beispielhaft soll das für A und die  $\eta$ -Achse vorgeführt werden (Abb. 4-118). Aus dem rechtwinkligen Dreieck SDA können die Hypotenuse und der Winkel  $\beta$  berechnet werden.

$$r_A = 18,4 \text{ mm}; \quad \beta = 29,4^\circ.$$

Aus dem Dreieck SEA ergibt sich der gesuchte Abstand  $e_\eta$

$$e_\eta = r_A \cdot \sin(\alpha_h + \beta) = 14,9 \text{ mm}.$$

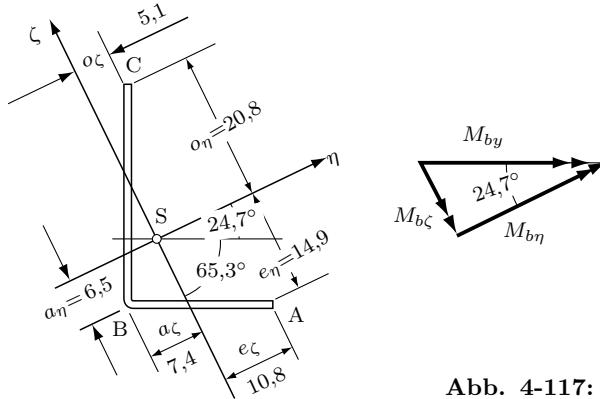


Abb. 4-117: Hauptachsen im Winkel Abb. 4-114

Alle Maße sind in der Abb. 4-117 eingetragen. Dort ist auch der Momentenvektor zerlegt.

$$\sigma_A = M_{b\zeta} \cdot \sin 24,7^\circ = 5,01 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

$$\sigma_B = M_{b\zeta} \cdot \cos 24,7^\circ = 10,90 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

Die Grundgleichung der Biegung wird auf beide Hauptachsen angewendet.

$\eta$ -Achse

$$\sigma_A = -\frac{M_{b\eta}}{I_{\max}} \cdot e_\eta = -\frac{10,90 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{5780 \text{ mm}^4} \cdot 14,9 \text{ mm} = -28,1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = -\frac{M_{b\eta}}{I_{\max}} \cdot a_\eta = -1,886 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \cdot 6,5 \text{ mm} = -12,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_C = +\frac{M_{b\eta}}{I_{\max}} \cdot o_\eta = +1,886 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \cdot 20,8 \text{ mm} = +39,2 \text{ N/mm}^2$$

$\zeta$ -Achse

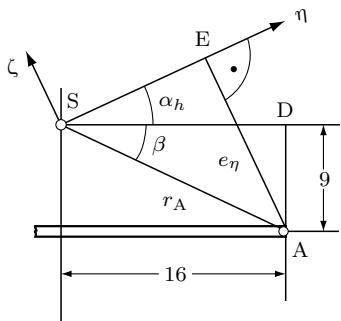
$$\sigma_A = +\frac{M_{b\zeta}}{I_{\min}} \cdot e_\zeta = \frac{5,01 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{1041 \text{ mm}^4} \cdot 10,8 \text{ mm} = +52,0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = -\frac{M_{b\zeta}}{I_{\min}} \cdot a_\zeta = -4,813 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \cdot 7,4 \text{ mm} = -35,6 \text{ N/mm}^2$$

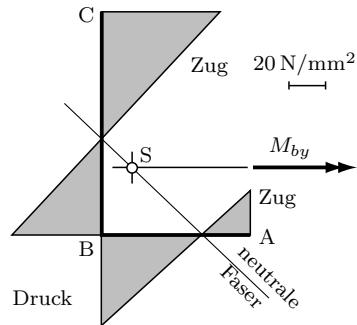
$$\sigma_C = +\frac{M_{b\zeta}}{I_{\min}} \cdot o_\zeta = +4,813 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \cdot 5,1 \text{ mm} = +24,5 \text{ N/mm}^2$$

Die Zusammensetzung führt auf

$$\underline{\sigma_A} = (-28,1 + 52,0) \text{ N/mm}^2 = +\underline{23,9 \text{ N/mm}^2}$$



**Abb. 4-118:** Zur Berechnung der Abstände im Hauptachsensystem nach Abb. 4-117



**Abb. 4-119:** Spannungsverteilung im Winkel nach Abb. 4-112

$$\underline{\sigma_B} = (-12,3 - 35,6) \text{ N/mm}^2 = -47,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\underline{\sigma_C} = (+39,2 + 24,5) \text{ N/mm}^2 = +63,7 \text{ N/mm}^2$$

Diese Spannungen sind über dem Profil in Abb. 4-119 aufgetragen. Aus der Bedingung  $\sigma = 0$  ergibt sich die Lage der neutralen Faser. Diese muss im Schwerpunkt liegen. Das ist die endgültige Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung.

## 4.8 Zusammenfassung

In einem auf Biegung beanspruchten Träger liegt die neutrale Faser ( $\sigma = 0$ ) im Flächenschwerpunkt des Querschnitts. Von dort nimmt die Spannung nach außen linear zu

$$\sigma_b(z) = \frac{M_{by}}{I_y} \cdot z \quad (4-4)$$

Den Maximalwert erreicht die Spannung in der Außenfaser, die den größten Abstand von der neutralen Faser hat. Allgemein kann man schreiben (Grundgleichung der Biegung)

$$\sigma_b = \frac{M_b}{I_s} \cdot e_{\max} = \frac{M_b}{W} \quad (4-6)$$

Die Lage der Achsen zeigt die Abb. 4-10. Die einschränkenden Bedingungen sind in Tabelle 8 zusammengestellt. *Besonders wichtig ist, die Grundgleichung der Biegung gilt nur für ein Hauptachsensystem.*

Die Flächenmomente sind in einem Koordinatensystem y; z folgendermaßen definiert:

$$\text{axial} \quad I_y = \int z^2 \cdot dA \quad I_z = \int y^2 \cdot dA \quad (4-1)$$

$$\text{polar} \quad I_p = \int r^2 \cdot dA = I_y + I_z \quad (4-28)$$

$$\text{biaxial} \quad I_{yz} = \int y \cdot z \cdot dA \quad (4-23)$$

Die Summe von zwei axialen Flächenmomenten, deren Achsen senkrecht aufeinander stehen, ergibt das polare Flächenmoment bezogen auf den Schnittpunkt der Achsen.

Mit dem STEINERSchen Satz werden die Flächenmomente auf parallele Achsen umgerechnet. Eine der Achsen muss eine Schwerpunktachse sein (gekennzeichnet durch Querstrich).

$$I_y = I_{\bar{y}} + z_s^2 \cdot A \quad I_p = I_{pS} + r_s^2 \cdot A \quad (4-11)$$

$$I_z = I_{\bar{z}} + y_s^2 \cdot A$$

$$I_{yz} = I_{\bar{y}\bar{z}} + y_s \cdot z_s \cdot A \quad (4-30)$$

Die auf die Schwerpunkte bezogenen Flächenmomente sind die minimalen Momente aller parallelen Achsen.

Das Widerstandsmoment berechnet sich aus

$$W = \frac{I_s}{e_{\max}} \quad (4-3)$$

Flächenmomente dürfen addiert werden, wenn sie auf gleiche Achsen bezogen sind. Widerstandsmomente dürfen nicht addiert werden. Für zusammengesetzte Flächen werden sie aus dem Gesamtflächenmoment nach Gleichung 4-3 berechnet.

Auf Biegung beanspruchte Profile sollten möglichst zwei zueinander senkrecht stehende Symmetrieachsen haben (z.B. I-Profil). Für solche Profile muss die Belastungsebene im Schwerpunkt der Querschnittsfläche liegen, soll eine zusätzliche Verdrehung vermieden werden. Wenn das Trägerprofil nur eine oder keine Symmetrieachse hat, muss zur Vermeidung von Torsion die Belastung durch den Schubmittelpunkt geführt werden, der im allgemeinen Fall nicht im Schwerpunkt solcher Profile liegt. Gegen Torsionsbeanspruchung sind offene Profile sehr empfindlich (s. Abschnitt 6.3.2).

Für Hauptachsen gilt:

1. Eine ebene Fläche hat zwei Hauptachsen, die sich im Schwerpunkt schneiden und senkrecht aufeinander stehen. Für dieses System gilt:

$$\text{Biaxiale Flächenmomente} = 0$$

Flächenmomente sind maximal und minimal.

2. Symmetriearchsen sind Hauptachsen
3. Hat eine Fläche nur eine Symmetriearchse, dann ist die zu dieser senkrecht stehende Schwerpunktachse auch eine Hauptachse.
4. Hat eine Fläche mehr als zwei Symmetriearchsen, dann sind alle Schwerpunktachsen Hauptachsen mit gleichem Flächenmoment.

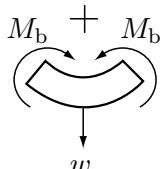
Das Hauptachsensystem  $\eta; \zeta$  ist gegenüber dem System  $y; z$  um den Winkel  $\alpha_h$  gedreht.

$$\tan 2\alpha_h = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} \quad (4-25)$$

Die Extremwerte der Flächenmomente betragen

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (4-29)$$

Die Gleichung der Biegelinie lautet



$$w'' = -\frac{M_b}{EI} \quad (4-13)$$

Die Vorzeichendefinition zeigt die Skizze neben der Gleichung.

Zwischen der Streckenlast  $q$ , den Schnittgrößen  $F_q$  und  $M_b$  und der Geometrie der Biegelinie ( $\varphi$  und  $w$ ) bestehen folgende Beziehungen

$$q = -F_q' = -M_b'' = \varphi''' \cdot EI = w'''' \cdot EI \quad (4-14)$$

Die Umkehrung führt auf

$$\begin{aligned} F_q &= - \int q \cdot dx \\ M_b &= \int F_q \cdot dx \\ \varphi &= - \int \frac{M_b}{EI} \cdot dx \\ w &= \int \varphi \cdot dx \end{aligned} \tag{4-15}$$

Aus der Funktion für die Streckenlast erhält man durch Integration nacheinander

1. das Querkraftdiagramm,
2. das Biegemomentendiagramm,
3. den Verlauf der Steigungswinkel,
4. die Gleichung der Biegelinie.

Die Biegelinie wird vorteilhaft – vor allem bei mehreren Unstetigkeitsstellen – mit dem FÖPPLschen Formalismus berechnet (Gl. 4-9/10/20). Mit Hilfe der Seileckkonstruktion nach MOHR kann die Biegelinie graphisch ermittelt werden.

Die Formänderungsarbeit

$$W_F = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_b^2}{E I} dx \tag{4-17}$$

wird im Träger als elastische Energie gespeichert. Die partielle Ableitung dieser Arbeit nach der Kraft ergibt die Durchbiegung des Trägers an der Kraftangriffsstelle. Das ist die Aussage des Satzes von CASTIGLIANO. Auf diesem beruht das Kraftgrößenverfahren, das durch Verwendung von Integrationstabellen (Tabelle 12) sehr rationell arbeitet (Gl. 4-18).

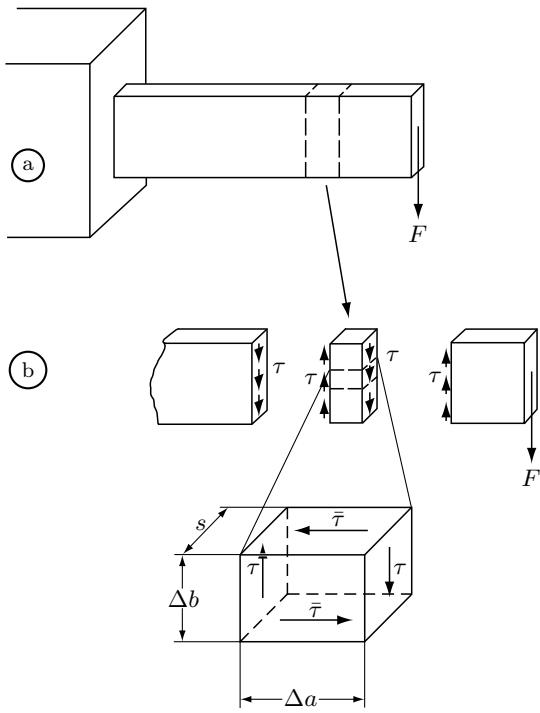
# 5 Schub

## 5.1 Einführung

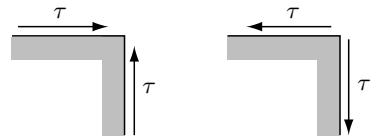
An den Anfang ist der *Satz von den zugeordneten Schubspannungen* gestellt. Anschaulich machen kann man ihn an einem Biegebalken, der aus Brettern besteht, die lose aufeinander liegen oder fest miteinander verbunden sind. Zur Vorbereitung dieses Kapitels wurde deshalb ein entsprechendes Beispiel im Abschnitt 4.5.4 bearbeitet und das Ergebnis diskutiert. Folgerichtig ist es, anschließend die Gleichung für die *Berechnung der Schubspannungen im Biegeträger* abzuleiten. Schwerpunktmaßig liegt die Anwendung im Stahlbau (*Schweißnahtberechnung*). Dort stellt sich auch die Frage der Überlagerung einer Torsion bei Biegung von Profilen, die nicht doppelsymmetrisch sind. Im Zusammenhang mit diesem Problem steht der *Schubmittelpunkt* eines Profils. Dieser Begriff wurde bereits im Abschnitt 4.7.2 eingeführt. Im Zusammenhang mit den im Träger wirkenden Schubspannungen ist eine Erklärung der Entstehung der Torsion möglich. Den Abschluss des Kapitels bildet das Thema *Abscheren*. Hierunter fallen z.B. die Nietberechnung und die Berechnung von Anschlussnähten (z.B. Fachwerkstab auf Knotenblech).

## 5.2 Der Satz von den zugeordneten Schubspannungen

Ausgangspunkt der Überlegungen ist der eingespannte Träger nach Abb. 5-1a. Ein Teilelement nach Bild b wird freigemacht. Nur die durch die Querkraft verursachten Schubspannungen werden eingetragen, nicht die Biegespannungen. Aus der Mitte dieses Abschnitts wird wiederum ein Teil herausgetrennt. An diesem ist Gleichgewicht nur möglich, wenn das durch  $\tau$  gebildete Kräftepaar kompensiert wird. Diese Überlegung erfordert die Einführung der Schubspannung  $\bar{\tau}$  in den Längsschnitten. Für sehr kleine Abmessungen des freigeschnittenen Quaders (Grenzübergang zu Differential) ist die Schubspannung konstant. Die Kraft ist jeweils das Produkt aus Spannung und Fläche. Aus der Gleichgewichtsbedingung



**Abb. 5-1:** Durch Querkräfte verursachte Schubspannungen im Träger



**Abb. 5-2:** Zum Begriff „zugeordnete Schubspannungen“

$\sum M = 0$  erhält man

$$\begin{aligned} \tau \cdot \Delta b \cdot s \cdot \Delta a - \bar{\tau} \cdot \Delta a \cdot s \cdot \Delta b &= 0 \\ \tau &= \bar{\tau} \end{aligned}$$

Die Schlussfolgerung aus diesem Ergebnis ist: *Schubspannungen in einer Ebene verursachen gleich große Schubspannungen in dazu senkrecht stehenden Ebenen. Das ist der Satz von den zugeordneten Schubspannungen.* (Siehe Abb. 5-1).

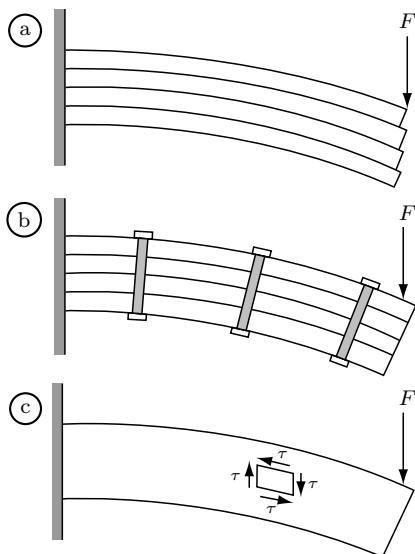
Das Gleichgewicht erfordert, dass die Spannungspfeile gleichen Sinn zur Schnittkante beider Ebenen haben. Sie sind beide auf die Kante gerichtet oder weisen beide von der Kante weg, wie in Abb. 5-2 dargestellt.

## 5.3 Schubspannungen in einem auf Biegung beanspruchten Träger

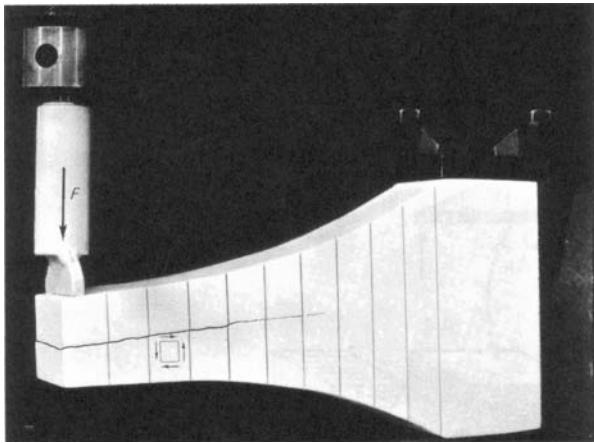
Querkräfte verursachen in einem Träger Schubspannungen in den Querschnitten. Nach dem Satz von den zugeordneten Schubspannungen müssen diese auch in den Längsschnitten wirksam werden.

Dass diese Spannungen tatsächlich wirken, kann man sich an folgendem Beispiel klarmachen. Ein Balken wird aus Brettern zusammengesetzt, die nicht miteinander verbunden sind. Er deFORMiert sich bei Biegebelastung nach Abb. 5-3a. Die einzelnen Bretter verschieben sich gegeneinander. Die sich daraus ergebenden Konsequenzen wurden als Vorbereitung für dieses Kapitel bereits im Beispiel 4 des Abschnitts 4.5.4 (Abb. 4-67/4-68) behandelt.

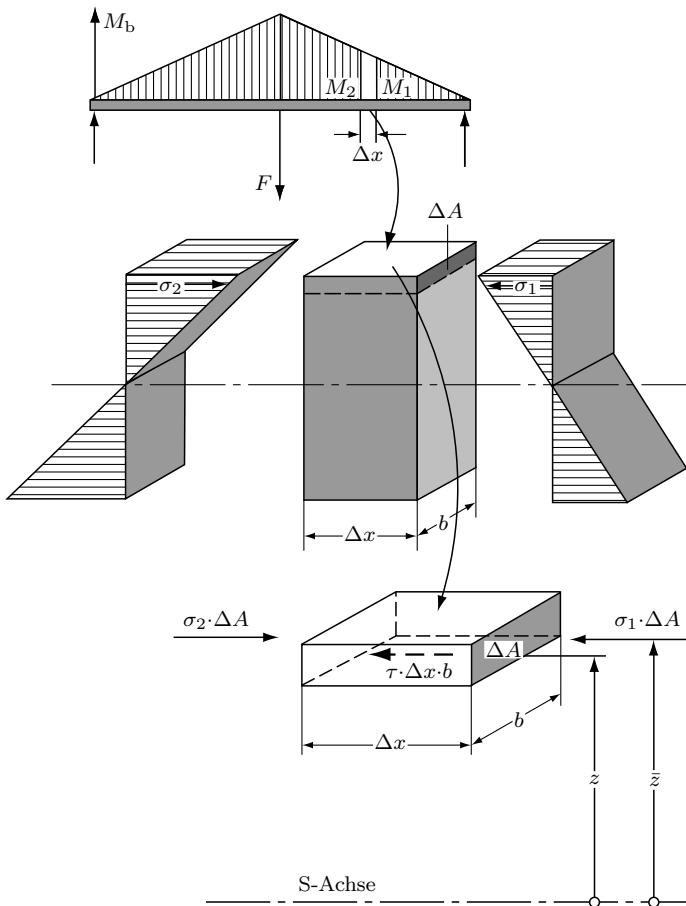
Eine Verschiebung ist nicht möglich, wenn man die Bretter fest miteinander verbindet. Infolge des jetzt vorhandenen Reibungsschlusses, bzw. der Abscherkräfte an den Schrauben deformiert sich der Balken als Ganzes. Die fest miteinander verbundenen Bretter sind aber mit einem Balken vergleichbar, in dessen Schnitten parallel zur Balkenachse Spannungen nach Abb. 5-3c vorhanden sind, die eine Verschiebung einzelner Längsschichten zueinander verhindern. Die in Längsrichtung wirkenden Schubspannungen können Holz aufspalten, da Holz in Faserrichtung nur verhältnismäßig geringe Schubfestigkeit hat. Einen Versuch dazu zeigt Abb. 5-4.



**Abb. 5-3:** Entstehung der Schubspannungen in Längsrichtung eines Biegeträgers



**Abb. 5-4:** Durch Schubspannungen verursachter *Langsriss* im Holz, das querbelastet wird



**Abb. 5-5:** Zur Ableitung der Schubspannungsverteilung im Biegeträger

In allgemeiner Form soll die Verteilung der Schubspannung im Querschnitt eines Biegeträgers bestimmt werden. Die Abb. 5-5 zeigt einen auf zwei Stützen gelagerten Träger mit Einzellast. Ein Teilelement  $\Delta x$  wird freigemacht. An seinem rechten Rand wirkt das Biegemoment  $M_1$ , am linken  $M_2$ . Die Momente haben die gezeichneten Spannungsverteilungen zur Folge. Von diesem Teilabschnitt wird die obere Schicht mit dem Querschnitt  $\Delta A$  abgetrennt. An dieser greifen die beiden durch die Normalspannung verursachten Kräfte an, die ungleich sind, da  $M_1 \neq M_2$  ist. Da die Oberseite des Trägers unbelastet ist, muss an der Unterseite des freigemachten Elements eine durch Schubspannung verursachte Kraft wirken. Diese wird aus der Gleichgewichtsbedingung berechnet.

$$\sum F_x = 0 \quad \sigma_2 \cdot \Delta A - \tau \cdot \Delta x \cdot b - \sigma_1 \cdot \Delta A = 0$$

$$\tau = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\Delta x \cdot b} \cdot \Delta A$$

mit Gl. 4-4 ist

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{I} \bar{z} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{M_2}{I} \bar{z}$$

$$\tau = \frac{M_2 - M_1}{\Delta x} \cdot \frac{\bar{z} \cdot \Delta A}{I \cdot b} = \frac{\Delta M}{\Delta x} \cdot \frac{\bar{z} \cdot \Delta A}{I \cdot b}.$$

Der Grenzübergang zum beliebig schmalen Steifen  $\Delta x \rightarrow dx$  führt nach Gleichung 4-14 auf

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{dM}{dx} = F_q$$

Das Produkt  $S = \bar{z} \cdot \Delta A$  ist das statische Moment einer Fläche bezogen auf die  $y$ -Achse (Flächenmoment 1. Ordnung).

Damit ist

$$\tau = \frac{F_q \cdot S}{I \cdot b}. \quad (5-1)$$

In dieser Gleichung sind

- |                              |  |
|------------------------------|--|
| $F_q$                        | Querkraft im Querschnitt   |
| $I$                          | Flächenmoment der gesamten Querschnittsfläche bezogen auf die Schwerpunktachse                               |
| $b$                          | Breite der Querschnittsfläche an der Stelle, für die $\tau$ berechnet wird                                   |
| $S = \bar{z} \cdot \Delta A$ | das statische Moment des Flächenelementes zwischen Außenfaser und Schnitt $b$ (angeschlossener Querschnitt). |

Die Bedingung  $F_q = 0$  ergibt  $\tau = 0$ . Das ist die Bedingung für reine Biegung mit  $M = \text{konst.}$

### Beispiel 1

Die Verteilung der Schubspannungen in einem Rechteckquerschnitt ist für eine senkrechte Querkraft zu bestimmen.

### Lösung (Abb. 5-6)

In Gleichung 5-1 wird eingesetzt

$$\bar{z} = \frac{z + \frac{h}{2}}{2}; \quad \Delta A = b\left(\frac{h}{2} - z\right); \quad I = \frac{bh^3}{12}.$$

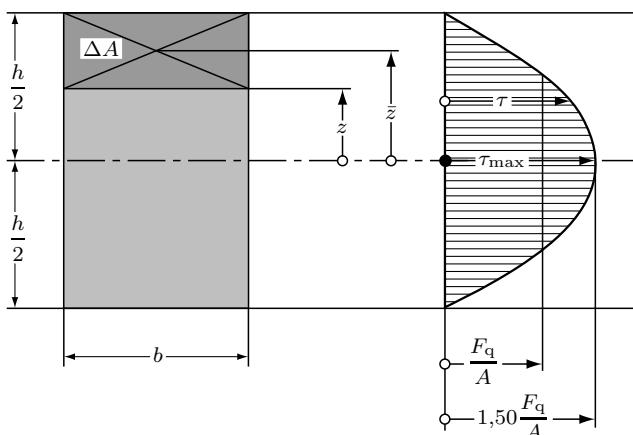
Man erhält

$$\tau = \frac{F_q \cdot 12}{b^2 h^3} \cdot \frac{z + \frac{h}{2}}{2} \cdot b\left(\frac{h}{2} - z\right) = \frac{6F_q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right).$$

Das ist eine Parabelgleichung. Die maximale Schubspannung ist an der Stelle  $z = 0$

$$\underline{\underline{\tau_{\max}}} = \frac{3}{2} \frac{F_q}{b \cdot h} = \underline{\underline{1,50 \frac{F_q}{A}}}.$$

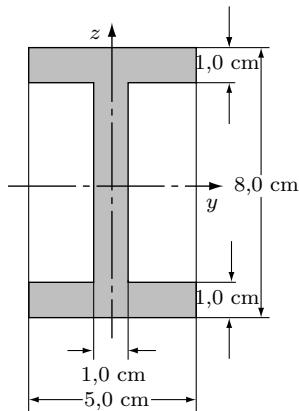
Die maximale Schubspannung ist 50 % höher als bei Annahme einer konstanten Spannungsverteilung. Da die Außenfasern nicht durch Schubspannungen belastet sind, muss dort  $\tau = 0$  sein, was auch aus der Parabelgleichung für  $y = h/2$  folgt. Im Gegensatz zu den Biegemomenten *haben bei der Übertragung der Querkräfte, die in der Nähe der neutralen Faser liegenden Querschnittsteile, den größten Anteil.*



**Abb. 5-6:** Schubspannungsverteilung im Rechteckquerschnitt

**Beispiel 2 (Abb. 5-7)**

Der skizzierte I-Querschnitt soll eine Querkraft  $F_q = 20 \text{ kN}$  in  $z$ -Richtung übertragen. Die Spannungen  $\tau$  sind über der  $z$ -Achse aufzutragen.

**Abb. 5-7:** I-Profil**Lösung (Abb. 5-8/5-9)**

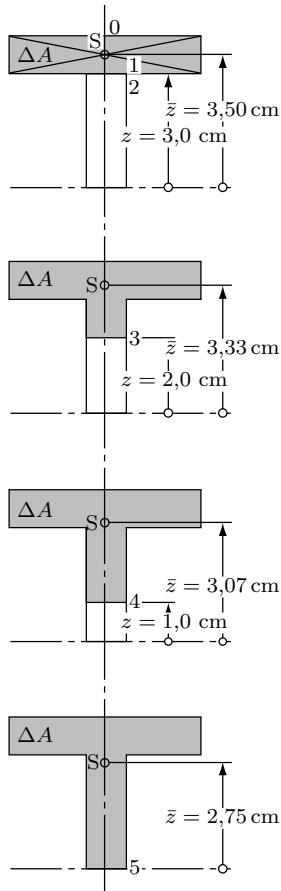
Zunächst ist es notwendig, das Flächenmoment der Fläche zu bestimmen.

$$I_y = \frac{5 \cdot 8^3}{12} \text{ cm}^4 - \frac{4 \cdot 6^3}{12} \text{ cm}^4 = 141,3 \text{ cm}^4.$$

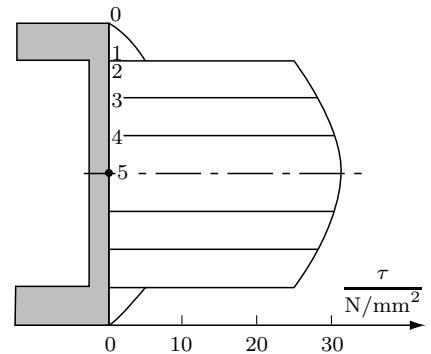
In Schritten von 1,0 cm wird, von oben beginnend, jeweils ein Schnitt gelegt. Da die Breite sich an der Stelle des Flanschansatzes unstetig ändert, muss es auch nach Gleichung 5-1 die Schubspannung  $\tau$  tun. Aus diesem Grunde werden bei Nummerierung der einzelnen Schnitte für diese Stelle zwei Zahlen eingeführt, wobei für 1 die Flanschbreite, für 2 die Stegbreite gilt. Nach Berechnung der Schwerpunkte für die einzelnen Teilflächen werden die statischen Flächenmomente und die Spannungen tabellarisch berechnet.

Stelle	$\frac{z}{\text{cm}}$	$\bar{z}$ $\frac{\text{cm}}{\text{cm}}$	$\frac{\Delta A}{\text{cm}^2}$	$\frac{\bar{z} \cdot \Delta A}{\text{cm}^3}$	$\frac{b}{\text{cm}}$	$\frac{F_q}{I} \frac{\bar{z} \cdot A}{b} = \tau$ $\text{N/mm}^2$
0	4,0	--	0	--	--	0
1	3,0	3,50	5,0	17,5	5,0	5,0
2	3,0	3,50	5,0	17,5	1,0	24,8
3	2,0	3,33	6,0	20,0	1,0	28,3
4	1,0	3,07	7,0	21,5	1,0	30,4
5	0	2,75	8,0	22,0	1,0	31,2

An der Spannungsverteilung Abb. 5-9 erkennt man, dass die *Querkräfte im Gegensatz zu den Biegemomenten hauptsächlich vom Steg übertragen werden*. Es



**Abb. 5-8:** Zur Berechnung der Schubspannungsverteilung im I-Profil



**Abb. 5-9:** Schubspannungsverteilung im I-Profil

kann aus diesem Grunde gefährlich sein, einen I-Träger in der Nähe der neutralen Faser zu durchbohren, obwohl das Widerstandsmoment sich praktisch nicht ändert. Das ist im Zusammenhang mit der Abb. 4-62 im Abschnitt 4.5.4 bereits diskutiert worden.

Da die Querkraft fast ausschließlich vom Steg übertragen wird und die Spannung hier annähernd rechteckig verteilt ist, kann man die maximale Schubspannung überschlägig berechnen, indem man die Querkraft durch die Stegquerschnittsfläche dividiert:

$$\tau_{\max} \approx \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N}}{600 \text{ mm}^2} \approx 33 \text{ N/mm}^2$$

**Beispiel 3**

Für einen mittig mit  $F = 200$  kN belasteten Träger der Länge  $l = 4,0$  m nach Abb. 4-2 sind die Biegespannung und die Schubspannung über der Trägerachse aufzutragen. Das soll für ein Profil I 400 geschehen.

**Lösung (Abb. 5-10)**

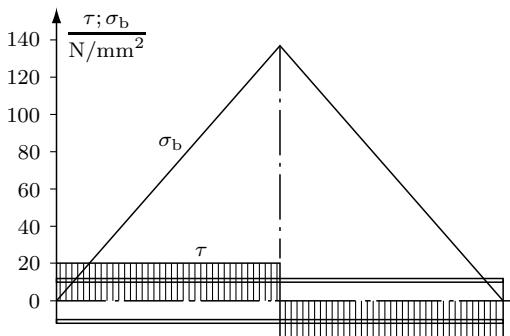
Das maximale Biegemoment ist im Lastangriffspunkt

$$M_b = \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} = 200 \text{ kNm} = 2 \cdot 10^7 \text{ Ncm}$$

Mit der Tabelle 10A erhält man

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_y} = \frac{2 \cdot 10^7 \text{ Ncm}}{1460 \text{ cm}^3} \cdot \frac{1 \text{ cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 137 \text{ N/mm}^2$$

Die Biegespannung ist vom Moment abhängig. Deshalb entspricht die Auftragung dem Biegemomentendiagramm (Abb. 5-10).



**Abb. 5-10:** Vergleich von Biege- und Schubspannungen in einem Biegeträger

Die Querkraft beträgt  $F/2$  und ist zwischen den Kraftangriffsstellen konstant. Die Gleichung 5-1 führt mit den Tabellenwerten auf

$$\tau = \frac{F_q \cdot S}{I \cdot b} = \frac{100 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 857 \text{ cm}^3}{29210 \text{ cm}^4 \cdot 1,44 \text{ cm}} \cdot \frac{1 \text{ cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 20,4 \text{ N/mm}^2$$

Das statische Moment  $S$  der halben Querschnittsfläche ist in der letzten Spalte der Tabelle gegeben. Mit diesem Wert berechnet man die maximale Schubspannung in der Schwerpunktsschicht. Die in der Gleichung 5-1 verwendete Bezeichnung  $b$  für die Breite des Querschnitts an der untersuchten Stelle entspricht hier der Stegbreite  $s$ .

Die Auftragung von  $\tau$  entspricht der Querkraft  $F_q$ . Den Träger kann man als gedrungen bezeichnen. Trotzdem ergeben sich nur in unmittelbarer Nähe der

*Auflager gleiche Größenordnung von Biege- und Schubspannung. Sonst überwiegen bei weitem die Biegespannungen. Man muss weiterhin bedenken, dass die Schubspannung am größten ist, wo die Biegespannung null ist und umgekehrt.*

#### Beispiel 4 (Abb. 5-11)

Der abgebildete Trägerquerschnitt besteht aus zwei Profilen U 200 und zwei aufgeschweißten, gleichen Platten. Zu berechnen ist die Schubspannung in den Schweißnähten für eine Querkraft in z-Richtung von 100 kN.

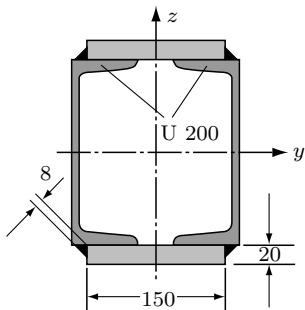


Abb. 5-11: Zusammengesetztes Profil

#### Lösung (Abb. 5-12)

Die Gleichung 5-1 muss ausgewertet werden. Dazu wird das auf die Schwerpunktachse bezogene Flächenmoment der Gesamtfläche berechnet. Mit der Tabelle 10C, den Formeln der Tabelle 9 und dem STEINERSchen Satz erhält man

$$I_y = 2 \left( I_u + I_{\text{Platte}} \right) = 2 \left( 1910 + \frac{15 \cdot 2^3}{12} + 11^2 \cdot 30 \right) \text{cm}^4 = 11\,100 \text{ cm}^4$$

Das statische Flächenmoment der angeschlossenen Fläche ist nach Abb. 5-12

$$S = \bar{z} \cdot \Delta A = 11,0 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm}^2 = 330 \text{ cm}^3$$

Nach den im Stahlbau geltenden Regeln werden die Schweißnähte in die Anschlussebene geklappt, d.h.  $b = 2a = 1,60 \text{ cm}$ .

$$\underline{\underline{\tau = \frac{F_q \cdot S}{I \cdot b} = \frac{100 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 330 \text{ cm}^3}{11\,100 \text{ cm}^4 \cdot 1,60 \text{ cm}} \cdot \frac{1 \text{ cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 18,6 \text{ N/mm}^2}}$$

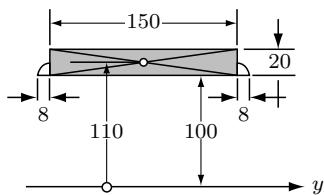
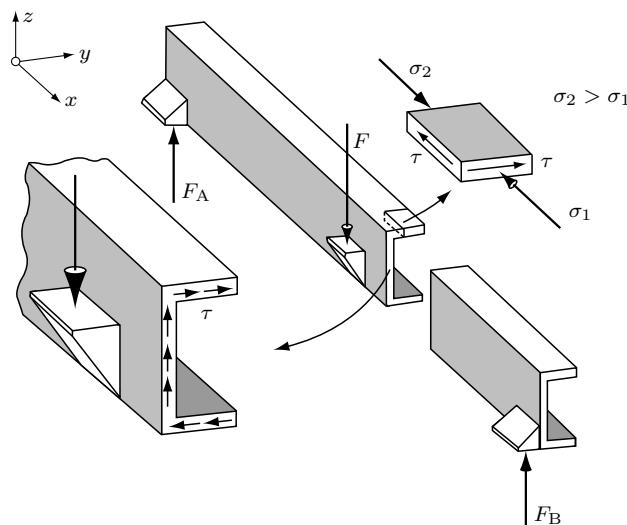


Abb. 5-12: Zur Berechnung des statischen Moments der angeschlossenen Fläche

## 5.4 Der Schubmittelpunkt

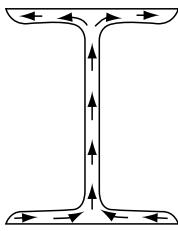
In diesem Abschnitt soll qualitativ untersucht werden, warum Profile, die nicht doppelsymmetrisch sind, zur Vermeidung einer zusätzlichen Verdrehung im Schubmittelpunkt belastet werden müssen. Dieses Problem wurde bereits im Abschnitt 4.7.2 in Zusammenhang mit den Abb. 4-101/4-102/4-103 diskutiert.

Im Beispiel 2 des Abschnitts 5.3 wurden die durch die Querkraft im I-Profil verursachten Schubspannungen ermittelt. Sie wirken auch in Längsschnitten. Das sind in der Abb. 5-7 Schnitte in der  $x$ - $y$ -Ebene. Der Flansch ist sehr viel breiter als der Steg. Deshalb sind die Schubspannungen dort sehr niedrig (s. Abb. 5-9). Diese Aussage für sich allein genommen ergibt ein unvollständiges Bild. Einen besseren Einblick in die Vorgänge gewinnt man, wenn man im Flansch Längsschnitte in der  $x$ - $z$ -Ebene untersucht. Das geschieht in der Abb. 5-13 für ein U-Profil. An dem Teilelement ist  $\sigma_2 > \sigma_1$ , da das Biegemoment in Richtung



**Abb. 5-13:** Schubspannungsverteilung im U-Profil und Ausgleich der Verdrehung durch Verschiebung der Belastung in den Schubmittelpunkt

des Lastangriffspunktes zunimmt. Die Gleichgewichtsbedingung am Element  $\sum F_x = 0$  erfordert in  $x$ -Richtung eine Schubspannung, wie sie eingezeichnet ist. Die zugeordnete Schubspannung in der  $y$ - $z$ -Ebene verursacht im Querschnitt einen Schubspannungsverlauf, der den Trägerabschnitt im Uhrzeigersinn verdreht. Durch einen Versatz der Lastebene in die Ebene des Schubmittelpunkts wird dieses Torsionsmoment ausgeglichen. Das erkennt man qualitativ am links gezeichneten Teil der Abbildung.



**Abb. 5-14:** Ausgleich der Verdrehung durch Schubspannungen in symmetrischen Profilen

Grundsätzlich die gleichen Überlegungen an einem I-Profil führen auf eine Schubspannungsverteilung im Querschnitt nach Abb. 5-14. Wegen der Symmetrie verursachen die Schubspannungen keine Verdrehung.

## 5.5 Abscheren

Für einen Träger oder Balken gilt die geometrische Bedingung  $l \gg h$ . Nur dann überwiegen die Biegespannungen so, dass ausschließlich nach dieser Größe dimensioniert werden kann. In diesem Abschnitt soll der entgegengesetzt liegende Fall behandelt werden.

Ausgegangen wird von Niet- oder Schraubenverbindung nach Abb. 5-15, die wie angegeben belastet ist. Es handelt sich um einen extrem kurzen Biegebalken, bei dem man nicht mehr von einer freien Länge zwischen den Kraftangriffspunkten sprechen kann. Deshalb überwiegen die durch die Querkräfte verursachten Schubspannungen. Eine zusätzliche Komplikation entsteht dadurch, dass alle bisher eingeführten Ansätze für eine weit entfernte Krafteinleitung gelten. Der vorliegende Fall steht im krassen Gegensatz zu dieser Voraussetzung. Um diese in der Technik sehr oft vorkommende Belastung rechnerisch in den Griff zu kriegen, muss man mit sehr starken Vereinfachungen arbeiten. Die Kraft  $F$ , die versucht den Bolzen abzuscheren, wird gleichmäßig auf den Abscherquerschnitt verteilt. Nach Abb. 5-16 ist die Abscherspannung

$$\tau_a = \frac{F}{A}. \quad (5-2)$$

Index a: Abscherung.

Die oben gemachte Voraussetzung der konstanten Spannungsverteilung trifft nur sehr unvollkommen zu. Die Gleichung 5-2 liefert trotzdem brauchbare Ergebnisse. Der Grund dafür ist: Die obige Gleichung wird sowohl für die Auswertung des Abscherversuchs als auch nach Einführung einer Sicherheitszahl für den Festigkeitsnachweis benutzt.

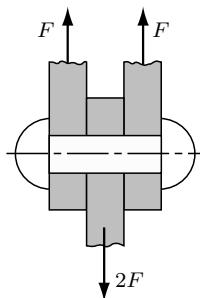


Abb. 5-15: Abscherbeanspruchung

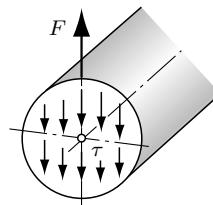


Abb. 5-16: Gleichmäßige Verteilung der Kraft auf die Querschnittsfläche

Ein richtig eingezogener Niet ist nicht auf Abscherung beansprucht. Die im Niet auftretenden Zugkräfte sollen die Teile so stark aufeinander pressen, dass die dabei entstehende Reibung zur Kraftübertragung ausreicht. Die Berechnung einer Nietverbindung auf Abscherung soll die Festigkeit für den Fall nachweisen, dass die Reibung für die Kraftübertragung nicht ausreichend ist.

Im Allgemeinen rechnet man, falls keine Vorschriften bestehen, mit den zulässigen Spannungen nach Tabelle 7.

Bei der Berechnung der zum Abscheren eines weichen Materials notwendigen Kraft legt man oft die höhere Spannung  $R_m$  anstatt  $\tau_{ab}$  zu Grunde. Man berücksichtigt damit, dass weiches Material im Gegensatz zum spröden sich sehr stark deformiert und dabei die Fasern zum großen Teil auf Zug beansprucht werden (Abb. 5-17).

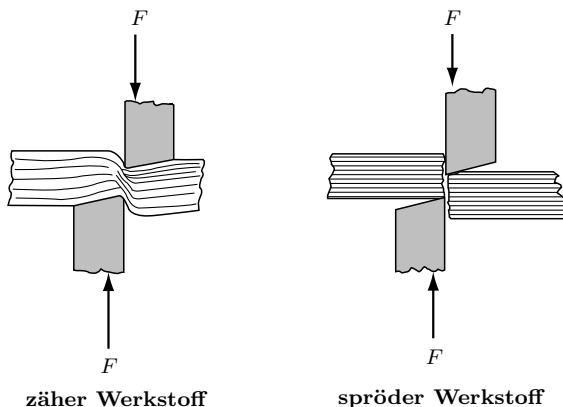


Abb. 5-17: Verhalten verschiedener Werkstoffe beim Abscheren

### Beispiel 1

Die Abscherspannung in den Nieten Abb. 3-10 (Beispiel 2; Abschnitt 3.2) ist für eine Kraft  $F = 20 \text{ kN}$  zu bestimmen.

**Lösung**

Insgesamt verteilt sich die Kraft auf zwei Abscherquerschnitte pro Niet. Bei 9 Nieten steht damit ein Gesamtquerschnitt

$$A = 2 \cdot 9 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4,5^2 \text{ mm}^2 = 286 \text{ mm}^2$$

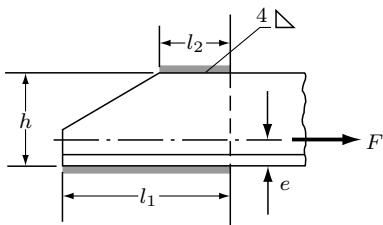
zur Verfügung. Damit ist die Spannung

$$\underline{\tau_a} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N}}{286 \text{ mm}^2} = \underline{70 \text{ N/mm}^2}$$

Dieser Wert gilt unter der Voraussetzung gleichmäßiger Auslastung.

**Beispiel 2 (Abb. 5-18)**

Ein Winkelstahl L 50 × 6 soll auf ein Knotenblech mit einer Kehlnaht  $a = 4 \text{ mm}$  aufgeschweißt werden. Der Stab ist mit einer Zugkraft  $F = 50,0 \text{ kN}$  belastet. Für eine zulässige Abscherspannung in den Nähten  $\tau_{\text{zul}} = 100 \text{ N/mm}^2$  sind die notwendigen Nahtlängen zu berechnen.



**Abb. 5-18:** Winkelstahl auf Knotenblech

**Lösung**

Die rechnerische Querschnittsfläche der Schweißnaht ist hier  $a \cdot l$ . Damit erhält die Gleichung 5-2 die Form

$$\tau_a = \frac{F}{a \cdot l}$$

Insgesamt ist für den Abschluss eine Nahtlänge

$$l_{\text{ges}} = \frac{F_{\text{ges}}}{a \cdot \tau_{\text{zul}}}$$

notwendig. Die Zahlenwerte liefern

$$l_{\text{ges}} = \frac{50 \cdot 10^3 \text{ N}}{4 \text{ mm} \cdot 100 \text{ N/mm}^2} = 125 \text{ mm}$$

Die Verteilung dieser Länge auf die beiden Seiten soll so erfolgen, dass sich eine gleichmäßige Belastung der Nähte ergibt. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man die in der Schwerpunktlinie wirkende Zugkraft so aufteilt wie bei einem Träger auf zwei Stützen.

$$F_1 = \frac{h - e}{h} F \quad ; \quad F_2 = \frac{e}{h} F$$

Der Stahltafel 10B entnimmt man  $e = 14,5$  mm. Damit sind

$$F_1 = \frac{(50 - 14,5) \text{ mm}}{50 \text{ mm}} 50 \text{ kN} = 35,5 \text{ kN} \quad ; \quad F_2 = \frac{14,5 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} \cdot 50 \text{ kN} = 14,5 \text{ kN}$$

Diese beiden Kräfte ergeben folgende Nahtlängen

$$\underline{l_1} = \frac{35,5 \cdot 10^3 \text{ N}}{4 \text{ mm} \cdot 100 \text{ N/mm}^2} = \underline{89 \text{ mm}}; \quad \underline{l_2} = \frac{14,5 \cdot 10^3 \text{ N}}{4 \text{ mm} \cdot 100 \text{ N/mm}^2} = \underline{36 \text{ mm}}$$

Die eingangs berechnete Gesamtlänge dient hier zur Kontrolle.

## 5.6 Zusammenfassung

Schubspannungen treten paarweise in zueinander senkrecht stehenden Ebenen auf. Die durch die Querkräfte verursachten Schubspannungen in Querschnitten eines Trägers haben Schubspannungen gleicher Größe in Längsschnitten zur Folge. Die Größe dieser Spannung berechnet sich aus

$$\tau = \frac{F_q \cdot S}{l \cdot b}. \tag{5-1}$$

Im Gegensatz zur Biegung werden die Querkräfte hauptsächlich von den Schichten in Schwerpunktnähe übertragen. Im I-Träger wird das Biegemoment überwiegend von den Flanschen, die Querkraft vom Steg übertragen. Hier kann man näherungsweise die Schubspannung nach

$$\tau \approx \frac{F_q}{A_{\text{Steg}}}$$

berechnen.

Werden Profile mit nur einer Symmetrieachse senkrecht zu dieser in der Schwerpunktsebene belastet, dann entsteht eine Verdrehung. Solche Belastungen sollten vermieden werden. Die Verschiebung der Lastebene in den Schubmittelpunkt hebt das Moment wieder auf.

# 6 Verdrehung

## 6.1 Einführung

Es bestehen grundsätzliche Unterschiede zwischen der *Verdrehung eines Kreiszylinders* und von Prismen mit beliebigem Querschnitt. Ausgegangen wird von der *Spannungsberechnung für einen Kreiszylinder bei Torsionsbeanspruchung*. Der Satz von den zugeordneten Schubspannungen führt zu der Erkenntnis, dass zusätzlich zu den *Schubspannungen im Querschnitt auch solche in Längsrichtung wirken*. Beide ergeben *Normalspannungen* in schrägen Schnitten. Hier ist es notwendig, auf verschiedene Werkstoffeigenschaften einzugehen. Im Abschnitt *Formänderung* bietet sich als Anwendung die Berechnung von *zylindrischen Schraubenfedern* an.

Die *Verdrehung beliebiger Querschnitte* gehört zu den sehr schwierigen mathematischen Problemen. Ausgehend von der PRANDTLSchen<sup>1</sup> Seifenhautanalogie werden die Zusammenhänge erklärt. Diese sollen den Leser in die Lage versetzen, Profile auf ihre Torsionstauglichkeit hin zu beurteilen und gefährdete Stellen zu erkennen. Die Begriffe *Wölbung* und *Wölbbehinderung* gehen hier ein. Darüber hinaus ist mit Hilfe von Tabellenwerten für geometrische Grundfiguren und in der Technik gebräuchliche Querschnitte eine Berechnung von Spannungen und Verformungen möglich. Ein wichtiges Teilgebiet bildet der *Hohlquerschnitt*. Ist er geschlossen und dünnwandig (*Kastenträger*), ermöglicht die BREDTsche<sup>2</sup> Gleichung in sehr guter Näherung die Berechnung der Spannungen in Quer- und Längsschnitten (Schweißnähte).

Das Kapitel schließt mit dem Abschnitt *Formänderungsarbeit*. Die abgeleiteten Gleichungen gelten für alle prismatischen Stäbe.

---

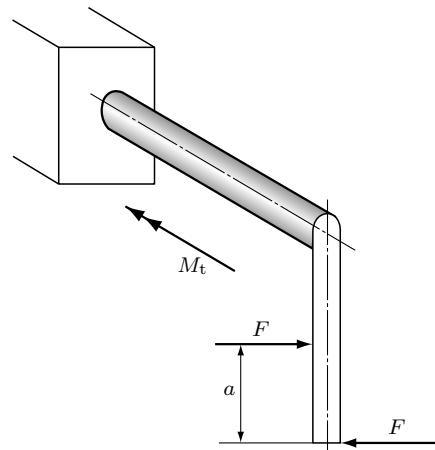
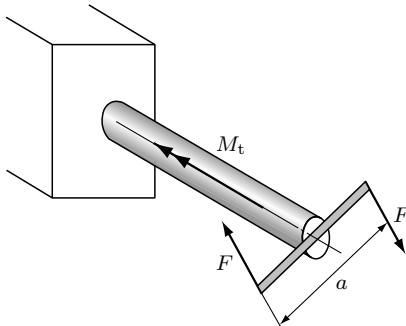
<sup>1</sup>PRANDTL, Ludwig (1875–1953), deutscher Ingenieur.

<sup>2</sup>BREDT, Rudolf (1842–1900), deutscher Ingenieur.

## 6.2 Verdrehung eines Kreiszylinders

### 6.2.1 Die Spannungen

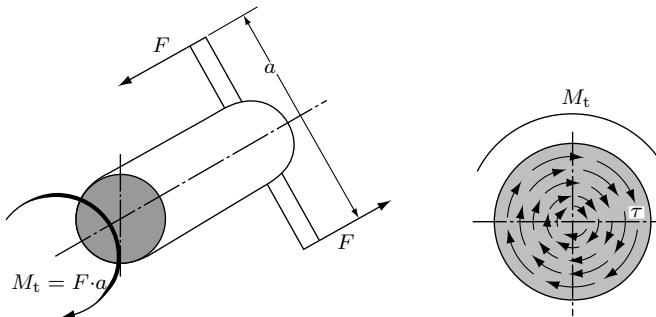
Ein Zylinder ist auf Verdrehung (Torsion) beansprucht, wenn in einer Ebene senkrecht zur Zylinderachse ein Kräftepaar (Moment) angreift. Der Momentenvektor  $\vec{M}_t$  liegt kollinear in der oder parallel zur Zylinderachse. Kräftepaare sind in ihrer Wirkungsebene, Momentenvektoren parallel verschiebbar (s. Band 1; Abschnitt 3.3.3). Deshalb unterliegen die beiden Wellenabschnitte Abb. 6-1/6-2 der gleichen Belastung.



**Abb. 6-1:** Durch Verdrehung beanspruchter Kreiszylinder

**Abb. 6-2:** Verdrehbeanspruchung durch versetztes Kräftepaar

Zur Bestimmung der Spannung wird ein Teilabschnitt der Welle nach Abb. 6-3 freigemacht. Die Gleichgewichtsbedingung  $\sum M = 0$  für die Wellenachse ergibt im Wellenquerschnitt ein Moment von der Größe  $F \cdot a$ . Dieses Moment wird *Drehmoment*  $M_t$  genannt. Die Übertragung dieses Momentes ist nur möglich,



**Abb. 6-3:** Freigemachter verdrehter Zylinder

wenn im *Querschnitt konzentrisch Schubspannungen* vorhanden sind. Die Größe und Verteilung dieser Spannungen sollen ermittelt werden.

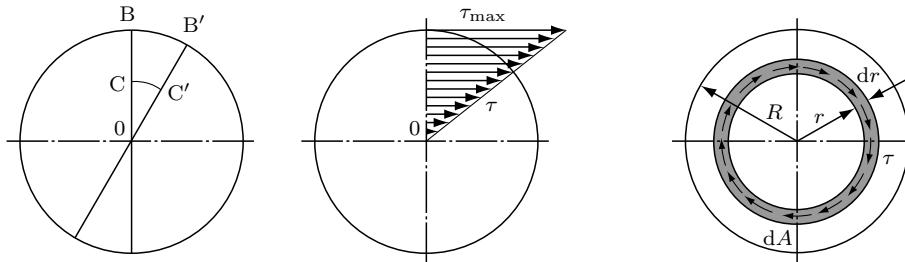
COULOMB<sup>3</sup> hat als erster das Torsionsproblem des Kreiszylinders gelöst. Dazu musste er eine Aussage über die Deformation machen. Er hat angenommen, dass bei der Verdrehung sich die einzelnen Querschnitte wie starre Scheiben verhalten, d.h.

1. Durchmesserlinien bleiben gerade,
2. Querschnitte bleiben eben.

Diese Annahme ist experimentell bestätigt. Schon an dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass sie bei beliebigen Querschnitten nicht gilt (s. nachfolgenden Abschnitt 6.3).

Wegen der ersten Bedingung, wandert in der Abb. 6-4 der Punkt B nach B'; C nach C' usw. Die Deformation nimmt von der Achse aus linear nach außen zu. Nach dem HOOKESchen Gesetz muss es auch die Spannung tun. *Die maximale Schubspannung  $\tau_{\max}$  liegt in der Außenfaser.*

Für die Auslegung einer Welle bzw. für ihre Nachrechnung ist es notwendig, diese maximale Spannung  $\tau_{\max}$  in Zusammenhang mit dem Drehmoment  $M_t$  zu bringen.



**Abb. 6-4:** Formänderung und Spannungsverteilung im verdrehten Querschnitt

**Abb. 6-5:** Zur Ableitung der Grundgleichung der Verdrehung

Dazu muss man das Moment  $M_t$  aus den von den einzelnen Kreisringen nach Abb. 6-5 übertragenen Momenten  $dM_t$  zusammensetzen

$$M_t = \int dM_t = \int r \cdot dF = \int r \cdot \tau \cdot dA .$$

<sup>3</sup>COULOMB, Charles (1736–1806), französischer Physiker.

Aus ähnlichen Dreiecken erhält man

$$\tau = \frac{r}{R} \cdot \tau_{\max}$$

Damit ist

$$M_t = \frac{\tau_{\max}}{R} \int_0^R r^2 \cdot dA. \quad (1)$$

Das Integral ist das polare Flächenmoment, das sich aus der Addition von zwei axialen Flächenmomenten ergibt (siehe Abschnitt 4.7.3)

$$I_p = \int r^2 \cdot dA = \int (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y.$$

Analog zum Biegewiderstandsmoment ist hier das Torsions-Widerstandsmoment nach der Gleichung (1)

$$W_t = \frac{I_p}{R}. \quad (\text{siehe Fußnote 4}) \quad (6-1)$$

Genau wie bei der Biegung soll der Index max für den am stärksten belasteten Querschnitt der Welle vorbehalten werden. Man erhält eine Beziehung, die analog zu der Grundgleichung der Biegung ist

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}. \quad (\text{siehe Fußnote 4}) \quad (6-2)$$

Diese Gleichung für die Torsionsspannung gilt unter den folgenden Voraussetzungen:

1. Die *Deformation* erfolgt nach dem HOOKEschen Gesetz, d.h. sie ist *elastisch*.
2. Die *maximale Spannung* ist *kleiner* als die Dehngrenze  $R_{P0,01}$ .
3. Der untersuchte Querschnitt liegt *nicht* in der *Nähe* der Stelle, *an der das Drehmoment eingeleitet* wird.
4. Das *unbelastete Werkstück* ist *spannungsfrei*. Ist das nicht der Fall, überlagern sich die Spannungen.

---

<sup>4</sup>Da sich das Widerstandsmoment nur für den Kreisquerschnitt aus dem polaren Flächenmoment berechnet, wird die Bezeichnung  $W_p$  nicht eingeführt.

5. Trägheitskräfte sind nicht berücksichtigt, das Werkstück unterliegt *keiner stoßartigen Beanspruchung*.
6. Das Widerstandsmoment darf nach *Gleichung 6-1 nur für einen Kreisquerschnitt* berechnet werden. Andere Querschnitte bleiben bei Verdrehung nicht eben, was zur Voraussetzung bei der Ableitung der Gleichung 6-2 gemacht wurde.
7. Der untersuchte Querschnitt liegt *nicht in der Nähe einer Kerbe*.

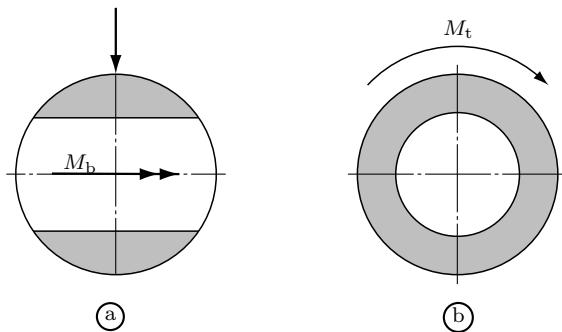
Das Drehmoment  $M_t$  erhält man aus Gleichgewichtsbedingungen am freigemachten Teilabschnitt der Welle. Genau wie die Biegemomente kann man die Drehmomente in einem Diagramm über der Wellenachse auftragen.

Das Widerstandsmoment gegen Verdrehung für den Kreisquerschnitt ist

$$I_p = I_z + I_y = 2I_z = 2 \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W_t = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{32 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{16} = 2 W.$$

Das Widerstandsmoment gegen Verdrehung ist demnach doppelt so groß wie gegen Biegung. Das kann man sich aus dem Vergleich der Spannungsverteilungen anschaulich machen. Bei der Biegung haben die von der neutralen Faser entfernten Teile den größten Anteil an der Biegemomentenübertragung (Abb. 6-6a), bei der Verdrehung die von der Achse entfernten Teile (Bild b). Es liegt demnach hier eine bessere Werkstoffausnutzung vor.



**Abb. 6-6:** Unterschiedliche Werkstoffausnutzung bei Biege- und Verdrehbeanspruchung

Aus der letzten Überlegung und den Gleichungen 6-1/2 folgt, dass der *Rohrquerschnitt optimal für die Torsionsübertragung* ist, denn die inneren Teile vermehren das Gewicht im höheren Maße, als dass sie das Widerstandsmoment erhöhen.

Für einen Rohrquerschnitt gilt

$$W_t = \frac{2I_p}{D} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}. \quad D \text{ Außendurchmesser,} \\ d \text{ Innendurchmesser}$$

Es ist falsch, die Widerstandsmomente zu subtrahieren (s. Abschnitt 4.5.4).

Für die Auslegung einer Welle werden die Gleichungen 6-1/2 in folgende Form gebracht

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t \cdot 16}{\pi \cdot d^3} \\ d_{\text{erf}} = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \cdot \tau_{t \text{ zul}}}}. \quad (6-3)$$

Nach dem Satz von den zugeordneten Schubspannungen treten diese paarweise in senkrecht zueinander stehenden Ebenen auf. Die nach Gleichung 6-2 errechneten Spannungen wirken auch in Längsschnitten nach Abb. 6-7. Das Vorhandensein dieser Spannungen kann man sich an folgendem Modell klarmachen.

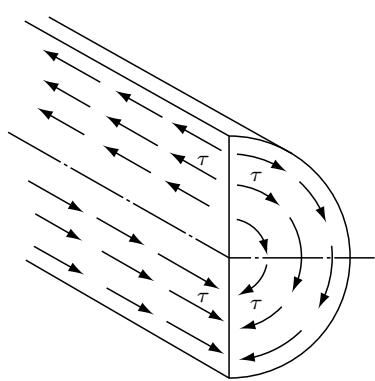
Ein geschlitztes Rohr, das verdreht wird, deFORMiert sich wie es Abb. 6-8 zeigt. Die Querschnittsebene bleibt in diesem Fall nicht eben, damit ist eine der für die Gültigkeit der Berechnung notwendigen Bedingungen nicht erfüllt. Man erkennt, dass die Kante a nach links, die Kante b nach rechts gezogen werden muss. Das erfordert Spannungen, wie sie in Abb. 6-8 eingezeichnet sind und wie sie dem Satz von den zugeordneten Schubspannungen entsprechen.

Bei einem Werkstoff, der in Längs- und Querrichtung verschiedene Schubfestigkeiten hat (z.B. Holz, faserverstärkter Kunststoff u.ä.), erfolgt der Bruch in der Richtung der kleinsten Schubfestigkeit. Abb. 6-9 zeigt den Anriß, der in einem Holzstab in Längsrichtung durch die oben beschriebene Schubspannung bewirkt wurde.

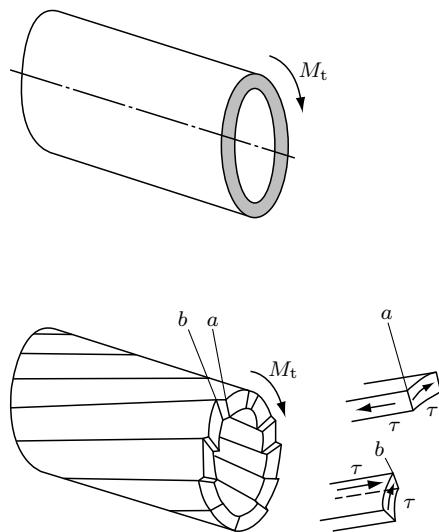
Es soll weiterhin untersucht werden, welche Spannungen in Schnitten unter  $45^\circ$  vorhanden sind. Dazu wird ein Teilelement nach Abb. 6-10b freigemacht. Dieses Teilelement wird nochmals diagonal geteilt. Die Gleichgewichtsbedingung an Teil c ergibt

$$\sum F_y = 0 \quad \sigma \cdot \sqrt{2}A - 2\tau \cdot A \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ \sigma = \tau.$$

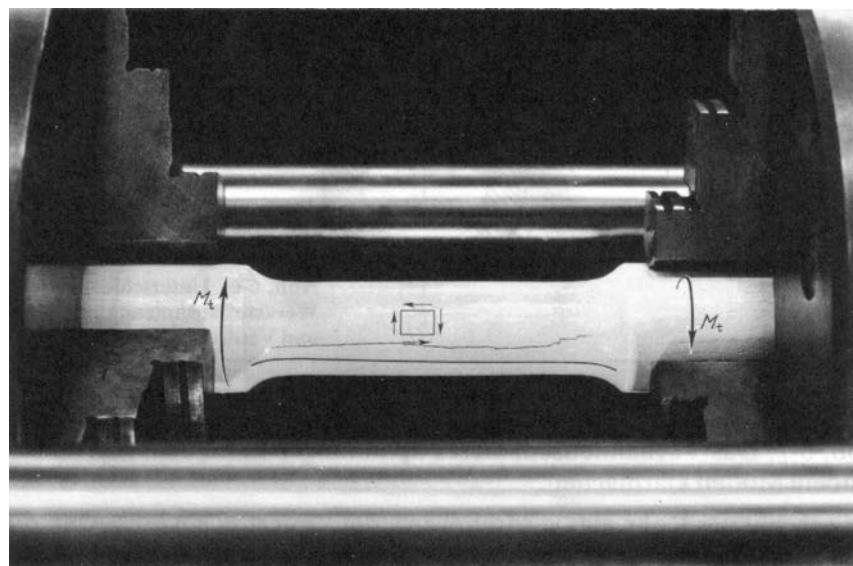
In Schnitten unter  $45^\circ$  sind Zug- (Schnitt 1-1) bzw. Druckspannungen (Schnitt 2-2) der Größe  $\tau$  nach Gleichung 6-2 vorhanden. Torsionsstäbe, die aus Werkstoffen bestehen, die gegen Zug empfindlicher sind als gegen Schub, brechen bei



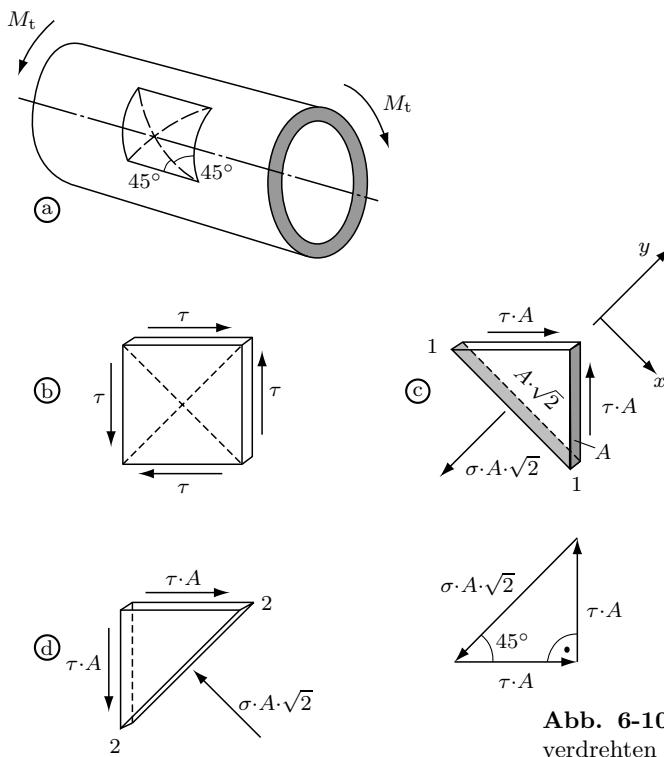
**Abb. 6-7:** Schubspannungen in Quer- und Längsschnitten eines verdrehten Zylinders



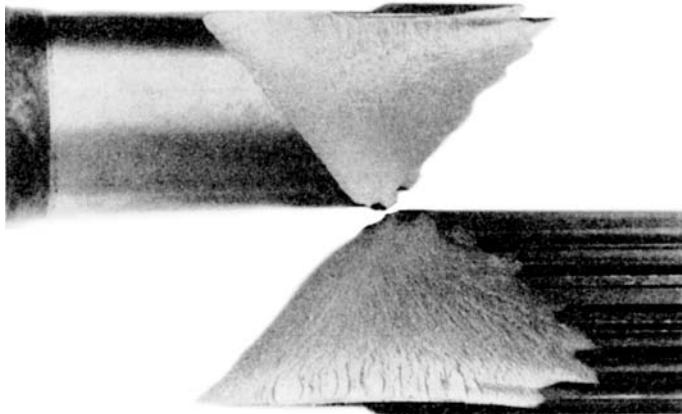
**Abb. 6-8:** Entstehung der Schubspannungen in Längs- und Querschnitten eines verdrehten Zylinders



**Abb. 6-9:** Durch Schubspannungen verursachter Längsriss im verdrehten Holzzylinder



**Abb. 6-10:** Freigemachte Elemente eines verdrehten Zylinders



**Abb. 6-11:** Durch maximale Zugspannungen unter  $45^\circ$  verursachter Bruch einer vergüteten Stahlwelle

Überlastung unter  $45^\circ$  zur Achse. Als Beispiel zeigt die Abb. 6-11 eine Welle aus vergütetem Stahl. Die Werkstoffe Grauguss, gehärteter Stahl und Beton verhalten sich in der hier beschriebenen Art.

Der gefährdete Querschnitt hängt von der Art des Werkstoffs ab. Der Wert  $\tau_{\text{zul}}$  ist eine ähnliche Rechengröße wie die zulässige Spannung  $\sigma_{\text{zul}}$ . Sie sagt nicht immer etwas über die wahre Ursache der Zerstörung aus.

### 6.2.2 Die Formänderung

In diesem Abschnitt soll der durch ein Drehmoment verursachte Verdrehwinkel einer Welle berechnet werden.

Das Moment  $M_t$  verdreht den Endquerschnitt der in Abb. 6-12 skizzierten Welle um den Winkel  $\varphi$ . Folgende Beziehung besteht zwischen den Winkeln  $\varphi$  und  $\gamma$ .

$$\varphi \cdot r = \gamma \cdot l = s \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\varphi \cdot r}{l}.$$

Die Anwendung des HOOKEschen Gesetzes für ein Teilelement nach Abb. 6-12 ergibt nach Gleichung 2-3

$$\gamma = \frac{\tau_t}{G}.$$

Für  $\tau_t$  wird Gleichung 6-2 eingeführt

$$\gamma = \frac{M_t}{W_t \cdot G}.$$

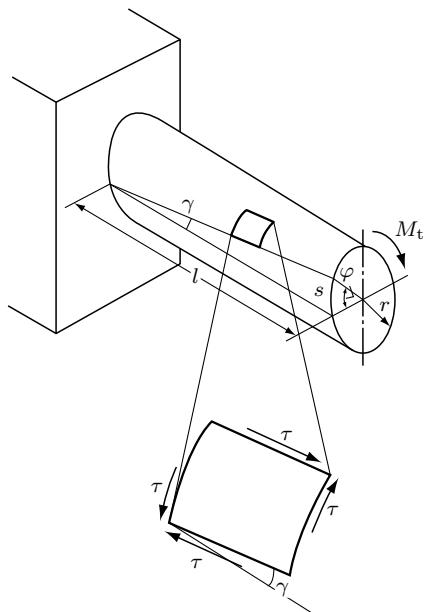


Abb. 6-12: Verformung eines verdrehten Zylinders

Nach Gleichsetzen mit der Ausgangsgleichung für  $\gamma$  ist

$$\frac{\varphi \cdot r}{l} = \frac{M_t}{W_t \cdot G} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{M_t \cdot l}{W_t \cdot r \cdot G}.$$

Nach Gleichung 6-1 ist  $W_t \cdot r = I_p$ . Das führt auf

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p}. \quad (6-4)$$

Das Produkt  $GI_p$  nennt man *Verdrehsteifigkeit* einer Welle analog zur Biegesteifigkeit  $EI$  eines Trägers.

Das absolute Maß für den Verdrehwinkel nach Gleichung 6-4 sagt nichts über das Maß der Verformung aus, weil ihr der Längenbezug fehlt. Ein bestimmter Verdrehwinkel bedeutet für einen kurzen Bauteilabschnitt eine stärkere Verformung als über eine große Länge wirkend. Durch den Bezug des Verdrehwinkels nach Gleichung 6-4 auf die Länge als *relativer Verdrehwinkel*

$$\vartheta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \quad (6-4a)$$

wird die Verformung normiert (analog der Dehnung  $\varepsilon = \Delta l/l$  bei Zugbeanspruchung). Damit wird dann auch die Festlegung zulässiger Richtwerte (z.B.  $\vartheta_{zul} = (1/4 \dots 1/3)^\circ/m$  im Maschinenbau) unabhängig von den Bauteilen möglich.

Wie aus der Ableitung hervorgeht, errechnet man den Winkel nach Gleichung 6-4 im Bogenmaß. Die Verdrehung einer Welle ist um so größer, je größer Moment und Länge sind und sie ist um so kleiner, je größer die Verdrehsteifigkeit ist.

Eine zylindrische Schraubenfeder entspricht einem aufgewickelten, auf Torsion beanspruchten Stab (Abb. 6-13). Dabei wirkt das Drehmoment  $F \cdot D/2$  in allen Querschnitten des aufgewickelten Drahtes. Der Verdrehungswinkel beträgt pro Windung nach Gleichung 6-4

$$\Delta\varphi = \frac{F \cdot (D/2) \cdot 2\pi \cdot (D/2)}{G \cdot I_p}$$

und die Verlängerung der Feder unter der Kraft  $F$  pro Windung

$$\Delta s = (D/2) \cdot \Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot F \cdot (D/2)^3}{G \cdot I_p}.$$

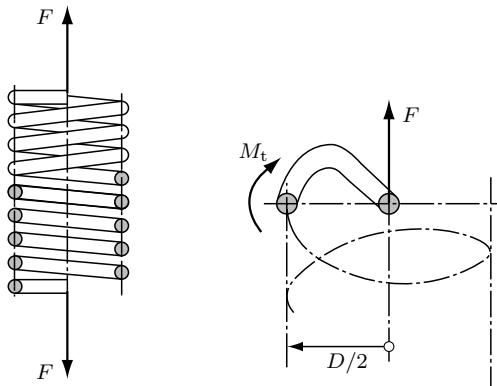


Abb. 6-13: Zugfeder

Für  $i$  Windungen ist die Verlängerung

$$s = \frac{\pi \cdot i \cdot F \cdot D^3}{4 \cdot G \cdot I_p} \quad (6-5)$$

Die Federkonstante ist definiert als das Verhältnis von Federkraft und Federverlängerung.

$$c = \frac{F}{s} = \frac{4 \cdot G \cdot I_p}{\pi \cdot i \cdot D^3} \quad (6-6)$$

Die Kraft  $F$  verursacht eine Längenänderung  $s$  der Feder. Die dabei verrichtete Arbeit ist

$$W = \frac{1}{2} \cdot F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot c \cdot s^2$$

In Abhängigkeit von der Kraft ist die Arbeit

$$W = \frac{\pi \cdot i \cdot F^2 \cdot D^3}{8 \cdot G \cdot I_p}, \quad (6-7)$$

in Abhängigkeit von der Verlängerung

$$W = \frac{2 \cdot G \cdot I_p \cdot s^2}{\pi \cdot i \cdot D^3}. \quad (6-8)$$

Für den Festigkeitsnachweis ist es notwendig, den Zusammenhang zwischen Verlängerung der Feder und Schubspannung im Drahtquerschnitt zu kennen.

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{F \cdot (D/2) \cdot 16}{\pi \cdot d^3} \quad \text{Drahtdurchmesser } d \quad W_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3.$$

Die Kraft  $F$  wird aus Gleichung 6-5 eingeführt und führt mit  $I_p = \pi \cdot d^4 / 32$  auf

$$\tau = \frac{d \cdot s \cdot G}{\pi \cdot i \cdot D^2}. \quad (6-9)$$

Die Gleichungen 6-5 bis 6-8 gelten auch für beliebigen Drahtquerschnitt, wenn für das polare Flächenmoment  $I_p$  der Verdrehwiderstand  $I_t$  eingesetzt wird. Für den Spannungsnachweis muss das Widerstandsmoment  $W_t$  nach Tabelle 12 eingeführt werden. Dazu wird im nächsten Abschnitt etwas ausgeführt.

### Beispiel 1

Vom Prototyp einer Welle ausgehend, die bei einer zulässigen Spannung  $\tau_{zul}$  eine Leistung  $P_0$  bei einer Drehzahl  $n_0$  überträgt, soll eine geometrisch ähnliche Baureihe entwickelt werden. Dazu sind das Modellgesetz abzuleiten und für die unten gegebenen Leistungen und Drehzahlen die Durchmesserverhältnisse (= Abbildungsmaßstäbe) zu berechnen. Für alle Wellen gilt die gleiche zulässige Spannung. Die Diagramme  $d/d_0 = f(n/n_0)$  für  $P = P_0 = \text{konst.}$  und  $d/d_0 = f(P/P_0)$  für  $n = n_0 = \text{konst.}$  sind zu zeichnen und zu diskutieren.

$$\begin{array}{llll} P/P_0 = & 0,30 & 1,00 & 2,00 & 3,00 \\ n/n_0 = & 0,30 & 1,00 & 2,00 & 3,00 \end{array}$$

### Lösung

Ausgegangen wird von der Grundgleichung der Torsion (Gl. 6-2).

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{mit} \quad W_t = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad \text{und} \quad M_t = \frac{P}{2\pi \cdot n}$$

Das führt nach einfachen Umwandlungen auf

$$d^3 = \frac{8P}{\pi^2 \cdot n \cdot \tau_{zul}} \quad (1)$$

Für den Prototyp gilt

$$d_0^3 = \frac{8P_0}{\pi^2 \cdot n_0 \cdot \tau_{zul}} \quad (2)$$

Die Division von (1) und (2) führt auf

$$\underline{\underline{\frac{d}{d_0} = \sqrt[3]{\frac{P/P_0}{n/n_0}}}}$$

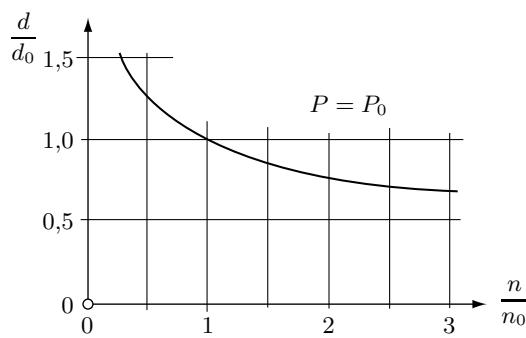
Das ist das gesuchte Modellgesetz. Die Auswertung zeigt die anschließende Tabelle.

**Abbildungsmaßstab**

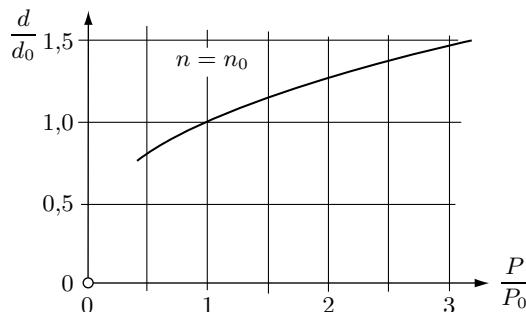
$n/n_0$	$P/P_0$			
	0,30	1,00	2,00	3,00
0,30	1,00	1,494	1,882	2,154
1,00	0,669	1,00 <sup>*)</sup>	1,260	1,442
2,00	0,531	0,794	1,00	1,145
3,00	0,464	0,693	0,874	1,00

<sup>\*)</sup> Prototyp

Die Abb. 6-14 zeigt die Diagramme. Für eine konstante Leistung führt die Auslegung mit einer höheren Drehzahl zur Verkleinerung einer Maschine. Die Wirkung ist bei niedrigen Drehzahlen am größten. Dieser grundsätzliche Zusammenhang ist der Grund für den allgemeinen Trend zu höheren Drehzahlen im Maschinenbau.



**Abb. 6-14:**  
Erforderlicher Wellendurchmesser in  
Abhängigkeit von der Auslegungsdrehzahl

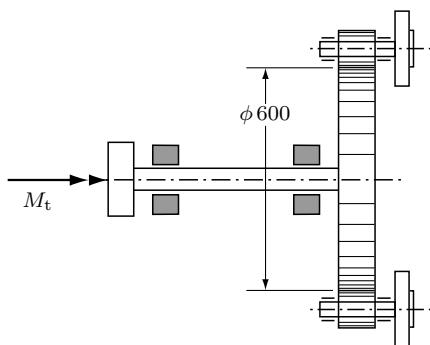


Erforderlicher Wellendurchmesser in  
Abhängigkeit von der Auslegungsleistung

Für eine vorgegebene Drehzahl erfordert eine höhere Leistung eine Vergrößerung des Wellendurchmessers. Wegen der besseren Werkstoffausnutzung in den Außenbereichen der Welle ( $d^3$ ) entspricht diese Vergrößerung bei weitem nicht der Leistungszunahme: Dreifache Leistung bei 44 % dickerer Welle.

**Beispiel 2 (Abb. 6-15)**

Die Abbildung zeigt in vereinfachter Form den Antrieb eines zweistufigen Radialverdichters. Beide Stufen, die gleiche Leistung aufnehmen, sind über die Ritzel angetrieben. Die Hauptwelle läuft mit  $n = 2930 \text{ min}^{-1}$  und soll für eine Leistung von  $P = 200 \text{ kW}$  dimensioniert werden. Da zunächst Kerbwirkungen u.ä. nicht berücksichtigt werden können, soll die erste Auslegung mit  $\tau = 30 \text{ N/mm}^2$  für eine Hohlwelle  $d/D = 0,80$  erfolgen. Zu bestimmen sind beide Durchmesser und die Umfangskraft am Zahnrad.

**Abb. 6-15:** Antriebswelle für Verdichter**Lösung**

Das Torsionsmoment beträgt

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi \cdot n} = \frac{200 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot 60 \text{ s/min}}{2\pi \cdot 2930 \text{ min}^{-1}} = 651,8 \text{ Nm}$$

Aus Gleichung 6-2 erhält man für diesen Fall

$$W_{t\text{ erf}} = \frac{M_t}{\tau_{t\text{ zul}}} = \frac{651,8 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{30 \text{ N/mm}^2} = 21,7 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

In die Beziehung

$$W_t = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D} \text{ wird } d = 0,80 \cdot D \text{ eingesetzt}$$

$$W_t = \frac{\pi}{16} (D^3 - 0,80^4 D^3) = \frac{\pi}{16} D^3 (1 - 0,80^4)$$

Das führt auf

$$D_{\text{erf}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_t}{\pi(1 - 0,80^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 21,7 \cdot 10^3 \text{ mm}^3}{\pi(1 - 0,80^4)}}$$

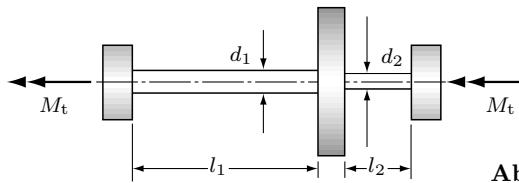
$$\underline{D_{\text{erf}} = 57,2 \text{ mm}} \quad \underline{d_{\text{erf}} = 45,7 \text{ mm}}$$

Die Umfangskräfte an den Ritzeln sind gleich, deshalb gilt hier

$$F_u = \frac{M_t}{d_{\text{Rad}}} = \frac{651,8 \text{ Nm}}{0,60 \text{ m}} \cdot \frac{\text{kN}}{10^3 \text{ N}} = 1,09 \text{ kN}$$

### **Beispiel 3 (Abb. 6-16)**

Am mittleren Zahnrad des skizzierten Systems wird ein Moment eingeleitet. An den beiden Enden werden gleich große Momente abgegriffen. In welchem Verhältnis müssen die beiden Wellendurchmesser stehen, wenn die Verdrehwinkel gleich sein sollen? Es handelt sich hier um ein Modell für einen Kranantrieb, bei dem ein Schieflaufen durch ungleichmäßige Deformation vermieden werden soll.



**Abb. 6-16:** Antriebswelle

### **Lösung**

Die Bedingung  $\varphi_1 = \varphi_2$  führt mit Gleichung 6-4 auf

$$\frac{M_t \cdot l_1}{GI_{p1}} = \frac{M_t \cdot l_2}{GI_{p2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{32 \cdot l_1}{\pi \cdot d_1^4} = \frac{32 \cdot l_2}{\pi \cdot d_2^4}$$

$$\underline{\frac{d_1}{d_2} = \sqrt[4]{\frac{l_1}{l_2}}}$$

Für ein Verhältnis von z.B.  $l_1 = 5 \cdot l_2$  erhält man  $d_1 = 1,495 \cdot d_2$ . Die dünnerne Welle 2 muss nach Gleichung 6-3 dimensioniert werden. Die Welle 1 ist, was die Festigkeit betrifft, nicht ausgelastet.

### **Beispiel 4**

Eine zylindrische Schraubenfeder soll aus Stahldraht  $d = 2,0 \text{ mm}$  auf dem mittleren Durchmesser  $D = 20 \text{ mm}$  gewickelt werden. Die Feder soll sich bei einer maximalen Belastung von  $50 \text{ N}$  um  $40 \text{ mm}$  verlängern.

Zu bestimmen sind

- a) die Anzahl der federnden Windungen,
- b) die maximale Spannung,
- c) die aufgenommene Arbeit.

## Lösung

- a) Die Gleichung 6-5 wird nach  $i$  aufgelöst und mit  $I_p = \pi \cdot d^4 / 32$  ausgewertet

$$i = \frac{4 \cdot G \cdot I_p \cdot s}{\pi \cdot F \cdot D^3} = \frac{G \cdot d^4 \cdot s}{8 \cdot F \cdot D^3}$$

$$i = \frac{8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2 \cdot 2^4 \text{ mm}^4 \cdot 40 \text{ mm}}{8 \cdot 50 \text{ N} \cdot 20^3 \text{ mm}^3} = \underline{\underline{16}}.$$

- b) Die Gleichung 6-9 liefert bei maximaler Verlängerung

$$\tau_{\max} = \frac{d \cdot s_{\max} \cdot G}{\pi \cdot i \cdot D^2} = \frac{2 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm} \cdot 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2}{\pi \cdot 16 \cdot 20^2 \text{ mm}^2}$$

$$\underline{\underline{\tau_{\max} = 318 \text{ N/mm}^2}}.$$

- c) Die aufgenommene Arbeit bei maximaler Belastung berechnet man hier am einfachsten aus dem Ansatz

$$W = \frac{1}{2} \cdot F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot 50 \text{ N} \cdot 0,040 \text{ m}$$

$$W = 1,0 \text{ Nm}.$$

Die Feder muss mit 16 federnden Windungen ausgeführt werden. Bei einer maximalen Schubspannung von  $318 \text{ N/mm}^2$  nimmt sie eine Arbeit von  $1,0 \text{ Nm}$  auf.

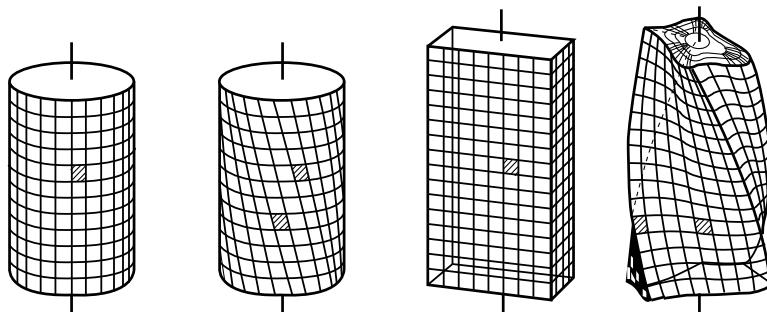
## 6.3 Verdrehung beliebiger Querschnitte

### 6.3.1 Der Vollquerschnitt

Die Abb. 6-17 zeigt die Modelle von zwei Stäben, unbelastet und durch ein Torsionsmoment deformiert. Zur Kennzeichnung der Deformation ist ein quadratisches Raster aufgezeichnet. Auf dem Stab mit Kreisquerschnitt deformieren sich alle Quadrate gleich. Die Stabenden bleiben eben. Das stimmt mit den Ausführungen des Abschnittes 6-2 überein. Völlig anders verhält sich der Stab mit quadratischem Querschnitt. Zunächst ist deutlich zu erkennen, dass die Endquerschnitte nicht eben bleiben. Man nennt diesen Vorgang *Wölbung*. Alle nachfolgenden Ausführungen setzen eine unbehinderte Wölbung voraus. Die Theorie für diesen Fall geht auf SAINT-VENANT<sup>5</sup> zurück. Man spricht deshalb

---

<sup>5</sup>SAINT-VENANT, Adhémar de (1797–1886), französischer Ingenieur.

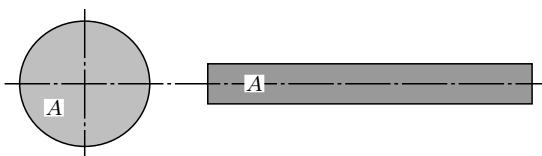


**Abb. 6-17:** Kreiszylinder und Quader bei Verdrehbeanspruchung

von SAINT-VENANTScher Torsion. In den meisten technischen Anwendungen ist mindestens an einem Ende eine freie Wölbung nicht möglich (z.B. Einspannstelle). Diese Einwirkung nennt man *Wölbbehinderung*. Darauf soll am Ende dieses Abschnittes kurz eingegangen werden.

Eine der Voraussetzungen für die Ableitung der Gleichungen 6-1/2 war: Querschnitte bleiben bei der Deformation eben, d.h. wölfbreie Verdrehung. Somit können diese Gleichungen nicht allgemein gelten. Die mathematische Behandlung der Torsion für beliebige Querschnitte ist sehr anspruchsvoll und übersteigt den Rahmen dieses Buches. Die nachfolgenden Ausführungen sollen den Leser in die Lage versetzen, in der Technik vorkommende Fälle rechnerisch zu erfassen. Darüber hinaus sollen für die Praxis wichtige Schlussfolgerungen gezogen und Hinweise gegeben werden.

Zunächst kann man sich mit einem einfachen Versuch davon überzeugen, dass im allgemeinen Fall das polare Flächenmoment kein Maß für die Verdrehsteifigkeit ist. Zwei Holzstäbe mit den Querschnitten nach Abb. 6-18 werden verdreht. Beide Flächen A sind gleich groß. Der Stab mit dem Kreisquerschnitt hat eine wesentlich höhere Steifigkeit als die flache Leiste. Deren Profil hat jedoch ein größeres polares Flächenmoment. Die Flächenelemente sind in einem größeren Abstand vom Schwerpunkt angeordnet. Das bedeutet: größeres polares Flächenmoment entspricht geringerer Steifigkeit. Überlastet man die Leiste beim Verdrehen, wird sie bei gleichmäßig gewachsenem Holz in der Mitte spal-



**Abb. 6-18:** Kreis- und Rechteckquerschnitt gleicher Flächengröße

ten. Daraus kann man zusätzlich schlussfolgern: die maximale Spannung wirkt in der Mitte und damit grundsätzlich anders als bei Biegung und Verdrehung des Kreiszylinders.

Auch für den allgemeinen Fall gelten die bekannten Abhängigkeiten zwischen Belastung ( $M$ ), Stoffwert ( $G$ ) und Spannung bzw. Deformation.

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}; \quad \varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} \quad (6-10)$$

Die Schwierigkeit liegt darin, aus der Geometrie des Querschnitts die Größen

$$W_t \text{ Torsions-Widerstandsmoment} \quad I_t \text{ Verdrehwiderstand}$$

zu bestimmen. Ihre Dimensionen entsprechen denen für Biegung  $W$  ( $\text{cm}^3$ ),  $I$  ( $\text{cm}^4$ ), was aus den Gleichungen folgt. Für die wichtigsten Anwendungsfälle sind sie in der Tabelle 13 gegeben.

Es gibt eine von PRANDTL entwickelte Analogie zwischen dem Torsionsproblem und einer unter geringem Überdruck aufgeblasenen Seifenhaut. Diese muss über einem, dem Stab entsprechenden Querschnitt gespannt sein. Die Differentialgleichungen, die beide Vorgänge beschreiben, sind analog aufgebaut. Folgende Größen entsprechen einander.

1. Für analog liegende Punkte entspricht die Spannung im verdrehten Querschnitt der Steigung des „Seifenhauthügels“ in „Wasserlaufrichtung“ gemessen. Die Höhenlinien des Hügels entsprechen Spannungslinien. Die Tangenten an diesen geben die Richtungen der Schubspannungen an.
2. Der Verdrehwiderstand  $I_t$  entspricht dem Volumen des „Seifenhauthügels“.

Diese Analogie eignet sich auch gut für die qualitative Beurteilung von torsionsbeanspruchten Querschnitten. Man muss sich dazu die über dem Querschnitt aufgeblasene Seifenhaut vorstellen. Folgende Schlussfolgerungen sind möglich.

Spannungen (Steigungen am Hügel)

1. Die maximale Spannung ist immer außen am Querschnitt (Außenfläche des Trägers).
2. Konvexe (nach außen gerichtete) Rundungen haben eine Verminderung der Spannungen zur Folge, konkave (nach innen gerichtete) Rundungen verursachen eine überproportionale Spannungserhöhung. Beispiele dazu zeigt

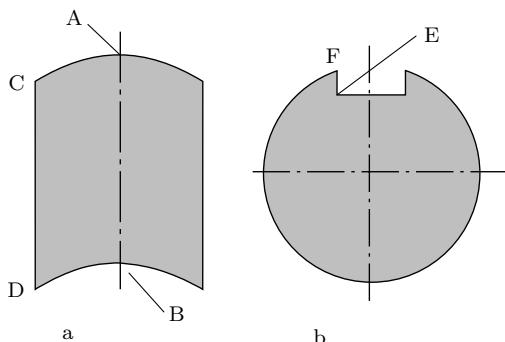


Abb. 6-19: Konvexe und konkave Formen

die Abb. 6-19. Verglichen mit einem Rechteckquerschnitt ist die Spannung in A erniedrigt, in B deutlich erhöht (Abb. 6-19a). Die Seifenhaut wird in A rausgezogen, was ihre Steigung vermindert. In B wird der Hügel eingedrückt, wodurch die Steigung größer wird. Hier sei auch auf die erhebliche Spannungszunahme an der Nut in einer Welle hingewiesen (Abb. 6-19b). Für eine einspringende Kante (Punkt E) ergibt sich für den Radius null eine nach unendlich gehende Spannung. Zum einen hat jeder Fräser ein gewisse Abrundung, zum anderen werden hohe Spannungsspitzen durch örtliches Fließen abgebaut. Die Umkehrung des gerade diskutierten Falles ist eine Außenkante. Folgerichtig ist an dieser die Spannung null. Das sind in der Abbildung die Punkte C; D; F.

3. Die maximale Spannung wirkt in der Mitte des Elementes, in das man den größten tangierenden Kreis einzeichnen kann. Dabei können Effekte hinzukommen, die unter Punkt 2 beschrieben wurden. Beispiele zeigt die Abb. 6-20. Die maximale Spannung im Rechteckquerschnitt liegt in A, im Dreieckquerschnitt in C. Für andere Flächen kann man analog verfahren. Das I-Profil ist am dickeren Flansch und nicht am Steg gefährdet.

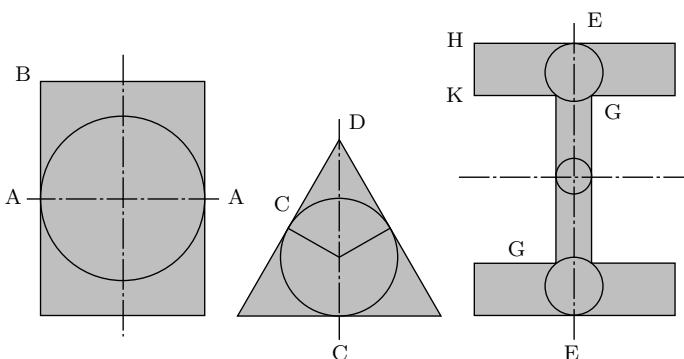
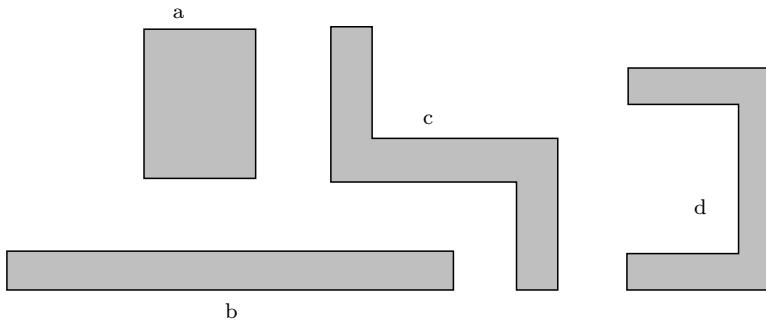


Abb. 6-20: Zur Ermittlung des Ortes der maximalen Verdrehbeanspruchung

Hier ist der Einfluss der Hohlkehle zu beachten. Grundsätzlich kann die maximale Spannung sowohl in E als auch in G liegen. Spannungsfrei sind alle Außenkanten. In dieser Abbildung sind das u.a. B; D; H; K. Es soll hier nochmals auf den deformierten Rechteckstab von Abb. 6-17 hingewiesen werden. Die schraffierten Netzquadrate zeigen deutlich: in der Mitte hat sich das Quadrat zu einer Raute deformiert, an der Kante ist eine Deformation nicht erkennbar.

Deformation (Volumen des Hügels)

1. Eine kompakt angeordnete Querschnittsfläche ergibt eine größere Verdrehsteifigkeit als die gleiche Fläche in Form eines schmalen Rechtecks angeordnet. Es ist einsichtig, dass ein Stab mit dem Querschnitt nach Abb. 6-21a der Verdrehung einen größeren Widerstand entgegengesetzt als der nach Abb. 6-21b.
2. Die aus einem schmalen Rechteck gestaltete Querschnittsfläche ergibt unabhängig von ihrer Form gleiche Verdrehsteifigkeit. Das sind z.B. die Flächen b; c; d in der Abb. 6-21.
3. Ein Einschnitt in eine Querschnittsfläche (z.B. Nut in Welle) vermindert die Steifigkeit überproportional.

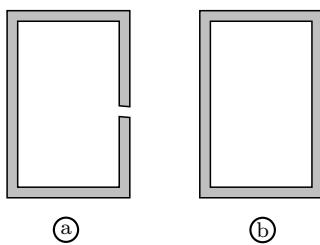


**Abb. 6-21:** Günstige (a) und ungünstige (b; c; d) Querschnittsformen für Verdrehung

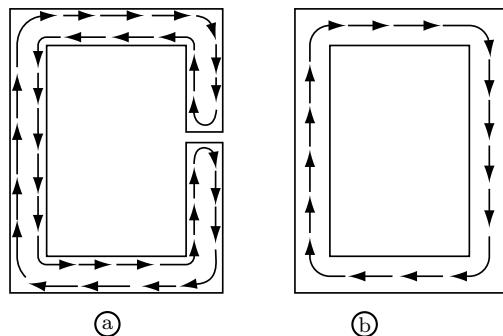
Wie oben angekündigt, soll hier noch kurz auf Effekte einer Wölbbehinderung eingegangen werden. Das Aufschweißen einer Grundplatte auf das Trägerende lässt in diesem Bereich eine axiale Verschiebung und damit Wölbung nicht zu. Das führt zu einer Versteifung, die sich durch Abbau der Schubspannungen bzw. der Erhöhung des übertragbaren Moments äußert. Erkauft wird dieses Verhalten durch entstehende Normalspannungen in den Querschnitten. Der Effekt wird in zunehmender Entfernung von der Stelle der Wölbbehinderung abgebaut. Besonders soll darauf hingewiesen werden, dass es wölbungsfreie Querschnitte gibt, an denen Maßnahmen zur Wölbbehinderung keine Wirkung haben. Das sind u.a. Winkel- und T-Profile.

### 6.3.2 Der Hohlquerschnitt

Unter einem Hohlquerschnitt versteht man einen Querschnitt mit einem eingeschlossenen Hohlraum. Danach ist der Schnitt nach Abb. 6-22a ein Voll-, nach 22b ein Hohlquerschnitt. Man verwendet aber auch die Bezeichnungen *offener* und *geschlossener Hohlquerschnitt*. Wie verhalten sich diese beiden Formen bei Torsionsbeanspruchung? Wie im vorigen Abschnitt beschrieben, entsprechen den Spannungslinien die Höhenlinien in der Seifenhautanalogie. Diese Linien sind in sich geschlossen. Das hat für die Schubspannungen und das durch diese erzeugte Moment Auswirkungen. In einem offenen, dünnwandigen Profil (Abb. 6-23a) sind die Abstände der jeweils gegeneinander gerichteten Spannungen bzw. Kräfte klein. Damit sind auch übertragbare Momente klein und Deformationen groß. *Ein Träger mit dünnwandigem, offenem Hohlquerschnitt ist auf Torsion nur gering belastbar.*



**Abb. 6-22:** Offenes und geschlossenes Hohlprofil

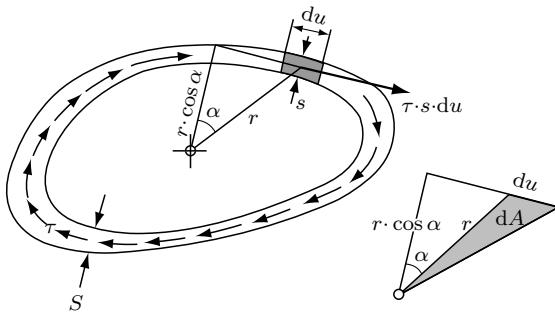


**Abb. 6-23:** Spannungsfluss im offenen und geschlossenen Hohlprofil

Grundsätzlich anders verhält sich ein geschlossenes Hohlprofil (Abb. 6-23b). Die Spannungslinien laufen um, das ergibt große Abstände und damit Momente. *Ein geschlossener Hohlquerschnitt kann bei guter Verwindungssteifheit große Torsionsmomente übertragen.* Das macht man sich im Leichtbau (z.B. Flugzeugbau) nutzbar.

Für den einfachsten Fall – keine Stege im Hohlraum – sollen Berechnungsgleichungen abgeleitet werden. Diese Ableitung geht auf BREDT zurück. Die Abb. 6-24 zeigt ein Hohlprofil mit veränderlicher Wanddicke  $s$ . Auf jedem Streckenabschnitt der Länge  $u$  muss die gleiche Kraft übertragen werden

$$\tau \cdot u \cdot s = \text{konst.}$$



**Abb. 6-24:** Zur Ableitung der BREDETSchen Formel

daraus folgt

$$\tau \cdot s = \text{konst.}$$

Dieses Produkt wird *Schubfluss* genannt. Aus seiner Konstanz folgt die einleuchtende Tatsache, dass die Schubspannung an der Stelle der kleinsten Wanddicke am größten ist.

Das übertragene Moment errechnet sich nach Abb. 6-24 aus

$$M_t = \int (r \cdot \cos \alpha) (\tau \cdot s \cdot du)$$

mit  $\tau \cdot s = \text{konst.}$

$$M_t = \tau \cdot s \int r \cdot \cos \alpha \cdot du .$$

Die gekennzeichnete Fläche hat die Größe  $dA = \frac{1}{2}r \cdot \cos \alpha \cdot du$ .

Damit

$$M_t = 2 \cdot \tau \cdot s \int dA \quad M_t = 2 \cdot \tau \cdot s \cdot A .$$

Die *maximale Spannung* erhält man sinngemäß

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 \cdot A \cdot s_{\min}} . \quad (6-11)$$

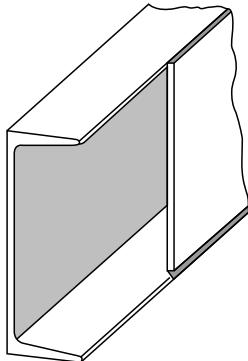
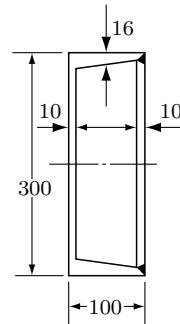
Das ist die BREDETSche Formel. Nach Gleichung 6-2 ist damit

$$W_t = 2 \cdot A \cdot s_{\min} \quad (6-12)$$

$A$  ist die von der Mittellinie umgrenzte Fläche. Die Gleichungen 6-11/12 gelten nur für dünnwandige geschlossene Hohlprofile (s. Tabelle 13).

**Beispiel 1 (Abb. 6-25)**

Ein Stahlprofil U 300 ist in einem Teilabschnitt mit einer 10 mm dicken Platte nach Skizze ausgesteift. Das ergibt an der Stelle, wo diese Aussteifung endet, eine unstetige Änderung von Verdrehwiderstand und -steifigkeit. Die Größe dieses Sprungs ist prozentual für beide Größen zu berechnen.

**Abb. 6-25:** U-Profil mit Aussteifungsblech**Abb. 6-26:** Geometrie des U-Profs von Abb. 6-25**Lösung (Abb. 6-26)**

*Geschlossenes Profil* Ein Maß für den Verdrehwiderstand ist das Widerstandsmoment  $W_t$ . Dieses wird mit der BREDTschen Formel (Gl. 6-12) berechnet. Die von der Mittellinie umgrenzte Fläche ist

$$A = A_m = \frac{1}{2}(A_a + A_i) = \frac{1}{2}(30,0 \cdot 10,0 + 26,8 \cdot 8,0) \text{ cm}^2 = 257,2 \text{ cm}^2$$

Das führt auf

$$W_t = W_{t1} = 2A \cdot s_{\min} = 2 \cdot 257,2 \text{ cm}^2 \cdot 1,0 \text{ cm} = 514,4 \text{ cm}^3$$

Ein Maß für die Verdrehsteifigkeit ist die Größe  $I_t$ . Nach Tabelle 13 ist

$$I_t = I_{t1} = 4 \cdot A^2 \cdot \frac{s_{\min}}{u_m}$$

Dabei ist  $u_m$  die Länge der Mittellinie

$$u_m = 2(30,0 - 1,6) \text{ cm} + 2(10,0 - 1,0) \text{ cm} = 74,8 \text{ cm}$$

Damit erhält man

$$I_{t1} = 4 \cdot 257,2^2 \text{ cm}^4 \cdot \frac{1,0 \text{ cm}}{74,8 \text{ cm}} = 3537 \text{ cm}^4$$

*Offenes Profil* Die beiden Größen betragen nach Tabelle 13

$$W_t = W_{t2} = \frac{\eta}{3 \cdot b_{\max}} \sum b_i^3 \cdot h_i$$

$$W_{t2} = \frac{1,12}{3 \cdot 1,6 \text{ cm}} (1,0^3 \cdot 30,0 + 2 \cdot 1,6^3 \cdot 9) \text{ cm}^4 = 24,2 \text{ cm}^3$$

$$I_t = I_{t2} = W_t \cdot b_{\max} = 24,2 \text{ cm}^3 \cdot 1,6 \text{ cm} = 38,7 \text{ cm}^4$$

Die Verhältnisse von Festigkeit und Steifigkeit sind

$$\frac{W_{t2}}{W_{t1}} = \frac{24,2 \text{ cm}^3}{514,4 \text{ cm}^3} \cdot 100 \% = 4,7 \%$$

$$\frac{I_{t2}}{I_{t1}} = \frac{38,7 \text{ cm}^4}{3537 \text{ cm}^4} \cdot 100 \% = 1,1 \%$$

An der Stelle, wo das Aussteifungsblech übergangslos aufhört, geht die Festigkeit *auf* 4,7 % und die Steifigkeit *auf* 1,1 % zurück! Solche extremen Steifigkeitssprünge sind vor allem bei dynamischer Belastung gefährlich und deshalb zu vermeiden. Das Deckblech soll auf einem längeren Übergangsstück bis zum Steg geführt werden.

### **Beispiel 2**

Ein Holm hat einen Rechteckquerschnitt 1 cm × 2 cm. Er ist aus glasfaser-verstärktem Kunststoff gefertigt, für den  $\tau_{zul} = 6 \text{ N/mm}^2$  parallel und  $\tau_{zul} = 40 \text{ N/mm}^2$  senkrecht zur Faser gilt. Welches Drehmoment kann der Holm übertragen?

### **Lösung**

Nach Tabelle 13 ist

$$W_t = 0,208 a^{1,215} \cdot b^{1,785}$$

$$W_t = 0,208 \cdot 20^{1,215} \cdot 10^{1,785} \text{ mm}^3 = 483 \text{ mm}^3 .$$

Um ein Reißen des Holmes in Längsrichtung zu vermeiden, muss mit dem kleineren Wert  $\tau_{zul}$  gerechnet werden (Satz von den zugeordneten Schub-Spannungen).

$$\underline{M_{t \max}} = W_t \cdot \tau_{zul} = 483 \text{ mm}^3 \cdot 6,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{1 \text{ m}}{10^3 \text{ mm}} = \underline{2,9 \text{ Nm}} .$$

## 6.4 Die Formänderungsarbeit

Die vom verdrehten Stab aufgenommene Formänderungsarbeit muss gleich der von außen aufgebrachten Arbeit sein. Diese ist

$$W_F = \int M \, d\varphi.$$

Ein nach Abb. 6-12 eingeleitetes Moment, das von 0 bis auf den Wert  $M_t$  steigt, verursacht eine von 0 bis  $\varphi_0$  zunehmende Verdrehung. Dieser Zusammenhang entspricht dem in der Abb. 4-79 für Biegung dargestellten.

$$M = \frac{M_t}{\varphi_0} \cdot \varphi.$$

Damit erhält man

$$W_F = \frac{M_t}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \varphi \cdot d\varphi = \frac{M_t}{\varphi_0} \cdot \frac{\varphi_0^2}{2} = \frac{M_t}{2} \varphi_0.$$

Wenn Moment und Steifigkeit nicht konstant sind, geht die Gleichung 6-10 über in

$$\varphi_0 = \int_0^l \frac{M_t}{G \cdot I_t} \cdot dx.$$

Man erhält damit für die *Formänderungsarbeit*

$$W_F = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_t^2}{GI_t} dx. \quad (6-13)$$

Für den Kreisquerschnitt ist  $I_t = I_p$ .

Diese Gleichung entspricht in ihrem Aufbau der für die Formänderungsarbeit bei Biegung (Gleichung 4-16). Sie gilt nur für *elastische Deformation*. Ändert sich das Drehmoment unstetig, muss abschnittsweise integriert werden.

### **Beispiel**

Eine aus einem Torsionsstab bestehende Drehfeder soll eine Arbeit von 20 Nm bei einem Verdrehwinkel von  $30^\circ$  aufnehmen. Welchen Durchmesser muss der Stab bei einer Länge von 50 cm haben?

**Lösung**

Es muss ein Zusammenhang zwischen dem Verdrehwinkel und der Formänderungsarbeit hergestellt werden. Dazu wird die Gleichung 6-4 nach  $M_t$  aufgelöst.

$$M_t = \frac{G \cdot I_p \cdot \varphi}{l}.$$

Dieser Wert wird in Gleichung 6-13 eingesetzt

$$W_F = \left( \frac{G \cdot I_p \cdot \varphi}{l} \right)^2 \cdot \frac{l}{2GI_p} = \frac{G \cdot I_p \cdot \varphi^2}{2l}$$

Mit  $I_p = \frac{\pi}{32}d^4$  und  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  erhält man nach einer Umstellung

$$d^4 = \frac{32 \cdot 36 \cdot 2 \cdot l \cdot W_F}{G \cdot \pi^3} = \frac{32 \cdot 36 \cdot 2 \cdot 500 \text{ mm} \cdot 20 \text{ Nm}}{8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2 \cdot \pi^3} \cdot \frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}}$$

$d = 9,8 \text{ mm}$

Das für die gegebene Bedingung notwendige Moment kann man aus der Gleichung 6-13 oder einfacher aus

$$W_F = \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot \varphi_0$$

berechnen.

$$M_t = \frac{2 \cdot W_F}{\varphi_0} = \frac{2 \cdot 20 \text{ Nm} \cdot 6}{\pi} = 76,4 \text{ Nm}$$

Mit  $W_t = \pi \cdot d^3 / 16 = 185 \text{ mm}^3$  erhält man eine Spannung von

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{76,4 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{185 \text{ mm}^3} = 413 \text{ N/mm}^3$$

Dieser Wert ist für vergüteten Federstahl möglich.

## 6.5 Zusammenfassung

Die Grundgleichung der Verdrehung entspricht der der Biegung

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}. \quad (6-2)$$

Die Verdrehung des Kreiszylinders nimmt eine Sonderstellung ein, da hier bei der Deformation einzelne Schnitte eben bleiben. In diesem Fall wird das Widerstandsmoment aus dem polaren Flächenmoment berechnet. Für eine Vollwelle gilt

$$W_t = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi}{16} d^3 \quad (6-1)$$

Das Widerstandsmoment nichtkreisförmiger Querschnitte darf nicht aus dem polaren Flächenmoment der Querschnittsfläche berechnet werden. Die wichtigsten Werte  $W_t$  sind in der Tabelle 13 zusammengefasst.

Offene Profile sollten nicht auf Verdrehung beansprucht werden, da sie nur geringe Verdrehsteifigkeit haben. Im Gegensatz dazu stehen geschlossene Hohlprofile, deren Widerstandsmoment näherungsweise nach der BRENTSchen Formel berechnet werden kann, wenn sie dünnwandig sind.

$$W_t = 2 A \cdot s_{\min}. \quad (6-12)$$

Nach dem Satz von den zugeordneten Schubspannungen treten die nach Gleichung 6-2 berechneten Spannungen auch in Längsschnitten auf. Das ist bei Werkstoffen zu beachten, die in Längsrichtung andere Schubfestigkeit haben als in Querrichtung (Holz, faserverstärkte Kunststoffe u.ä.). Normalspannungen gleicher Größe treten in Schnitten unter  $45^\circ$  auf. Sie erzeugen vor allem in spröden Werkstoffen Bruchflächen nach Abb. 6-11.

Die durch die Verdrehung hervorgerufene Winkeländerung hat die Größe

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t}. \quad (6-10)$$

Für den Kreisquerschnitt ist  $I_t = I_p$ , für andere Querschnitte sind die Werte  $I_t$  in Tabelle 13 gegeben.

Eine zylindrische Schraubenfeder entspricht einem aufgewickelten, auf Torsion beanspruchten Stab. Für ihre Berechnung sind im Abschnitt 6.2.2 eine Reihe von Gleichungen abgeleitet.

# 7 Das Stabilitätsproblem Knickung

## 7.1 Einführung

Im Gegensatz zu den vorgehend dargestellten Festigkeitsproblemen handelt es sich beim Knicken um eine Stabilitätsproblematik.

Zu Beginn wird von einem Modellfall ausgehend gezeigt, dass ein schlanker, auf Druck axial belasteter Stab in einen *labilen Gleichgewichtszustand* kommen kann. Dieser entspricht der maximalen Belastung, die zum Versagen durch Knickung führt. Für die mathematische Bearbeitung dieses Vorgangs werden zunächst die Begriffe *Knickkraft*, *Knickspannung* und *Schlankheitsgrad* definiert.

Eine geschlossene Lösung des Problems ist nur möglich, wenn eine mathematisch formulierbare Beziehung zwischen Spannung und Dehnung für den Werkstoff besteht. Diese ist das HOOKEsche Gesetz, das hier in dem Begriff Biegesteifigkeit  $E I$  steckt. Für die *elastische Knickung* nach EULER wird die Berechnungsgleichung für die Knickkraft eines beidseitig gelenkig gelagerten Druckstabes abgeleitet. Anschließend wird diese Lösung auf verschiedene Einspannbedingungen übertragen (EULERSche Knickfälle). Das Problem der *plastischen Knickung* ist wegen des Fehlens der eindeutigen Spannungs-Dehnungsfunktion nicht geschlossen lösbar. Das Näherungsverfahren nach TETMAJER<sup>1</sup> ermöglicht die Berechnung der Knickspannung für Druckstäbe in diesem Bereich.

Besonders soll darauf hingewiesen werden, dass die hier behandelten Rechenverfahren nur auf Objekte angewendet werden dürfen, die nicht der Nachweispflicht nach DIN 18800 unterliegen.

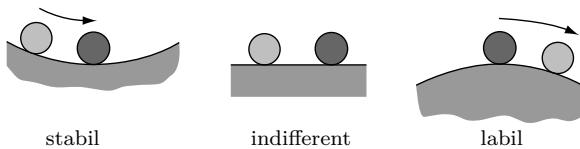
## 7.2 Stabilität eines Druckstabes

Das Bauteilversagen tritt gewöhnlich mit Erreichen einer kritischen Grenzlast ein. Für einen kurzen, gedrungenen, statisch auf Druck beanspruchten Körper

---

<sup>1</sup>TETMAJER, Ludwig von (1850–1905), österreichischer Ingenieur.

wird dies bei einem zähen Werkstoff die Quetschgrenze und beim spröden Werkstoff die Bruchgrenze sein. Bei einem langen, dünnen Stab wird dieser bei Erreichen einer konkreten Grenzlast (auch als Knickkraft bezeichnet) seitlich ausweichen (siehe Abb. 3-3) – und zwar schlagartig. Der Grund für das plötzliche Versagen ist nicht das Anwachsen der Spannung bis zum Erreichen der Materialfestigkeit, sondern das *Instabilwerden* der geradlinigen Ausgangsgeometrie des Stabes. Das bedeutet, dass dieses Ausweichen in Abhängigkeit von der Geometrie (vereinfacht: Länge im Verhältnis zum Querschnitt) auch bei Druckspannungen, die deutlich unter der Proportionalitätsgrenze  $\sigma_{dP}$  liegen, eintreten kann. Dieses Verhalten lässt sich mit der Druckspannungsgleichung  $\sigma_d = F/A$  nicht beschreiben. Es handelt sich hier um ein *Stabilitätsproblem*. Das Problem der Stabilität soll an einem anschaulichen Beispiel kurz erläutert werden.



**Abb. 7-1:** Arten des Gleichgewichts

Ausgegangen wird von einer Kugel auf Unterlagen nach Abb. 7-1. Ein System ist stabil, wenn eine Störung selbst Rückstellkräfte erzeugt. Die Kugel wird durch eine Störkraft aus der Mulde herausgedrückt. Dabei entsteht eine entgegengesetzt gerichtete Hangabtriebskraft. Diese bringt die Kugel nach der Störung wieder in die Ausgangsposition. Im labilen Fall verstärkt sich eine Störung und der Ursprungszustand wird nicht wieder eingenommen. Dieses Verhalten wird durch die Kugel auf der Kuppe demonstriert. Die Grenze zwischen „stabil“ und „labil“ ist das *indifferente Gleichgewicht*. In diesem Zustand ist eine Kugel auf einer ebenen, horizontalen Unterlage, sie bleibt in jeder Position liegen. Es gibt viele *Gleichgewichtslagen*.

Nur Systeme mit stabilem, d.h. eindeutigem Gleichgewichtszustand sind als technische Bauelemente brauchbar. Es soll nachfolgend untersucht werden, ob der gedrückte Stab in eine mehrdeutige Gleichgewichtslage kommen kann.

Dafür ist es erforderlich, die Gleichgewichtsbedingungen für das *verformte* System aufzustellen. Würde man nämlich, wie bisher praktiziert, diese am unverformten System aufstellen, erhielte man durch die Druckkraft  $F$  mit  $w = 0$  kein Moment und damit die bekannte Aussage, dass die gerade Achse des Stabes die Gleichgewichtslage ist. Dies ist keine Lösung des Problems. Eine Theorie, die mit den Gleichgewichtsbedingungen am (elastisch) verformten System arbeitet, bezeichnet man als Theorie 2. Ordnung (die Theorie 3. Ordnung „arbeitet“ mit „großen“ Verformungen).

Der nach Abb. 7-2 an beiden Enden gelenkig gelagerte Stab wird zentrisch auf Druck beansprucht. Die gelenkige Lagerung bedeutet, dass der Stab über seine gesamte Länge beweglich (Verschiebung, Winkeländerung) ist. Aus diesem Grunde bezeichnet man die Länge zwischen den Gelenken als freie Knicklänge  $l_k$ <sup>2</sup>. Als Störung soll eine mittig kurzzeitig wirkende Kraft  $F_s$  angenommen werden. Diese verursacht eine Biegelinie nach Abb. 7-3. Ist die zentrische Belastung durch  $F$  gering, ist es ohne weiteres einsichtig, dass der Stab in die Ursprungslage zurückfedert, wenn  $F_s$  nicht mehr wirkt. Das durch die Störkraft eingeleitete Biegemoment  $F_s \cdot l_k/4$  (Rückstellmoment) ist größer als das durch  $F$  bewirkte Moment  $F \cdot w$ . Nach den Ausführungen oben handelt es sich um einen stabilen Gleichgewichtszustand.

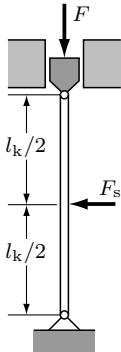


Abb. 7-2: Druckstab mit Störkraft

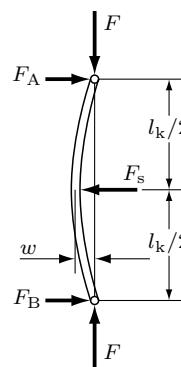


Abb. 7-3: Deformierter Druckstab mit Störkraft

Es stellt sich die Frage, unter welcher Bedingung der Stab nicht mehr in die Ausgangslage zurückkommt. Das ist der Fall, wenn das bei der Deformation entstehende Biegemoment  $F \cdot w$  dies verhindert. Anders ausgedrückt, wenn die beiden Momente gleich sind.

$$\frac{F_s \cdot l_k}{4} = F \cdot w.$$

Die Störkraft hat eine Durchbiegung (Tabelle 11)

$$w = \frac{F_s \cdot l_k^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

zur Folge. Dieser Wert wird oben eingesetzt

$$\frac{F_s \cdot l_k}{4} = \frac{F \cdot F_s \cdot l_k^3}{48 \cdot E \cdot I}. \quad (1)$$

<sup>2</sup>Im Stahlbau wird die freie Knicklänge mit  $s_K$  bezeichnet

Aus dieser Beziehung kürzt sich  $F_S$  heraus. Das bedeutet, der Gleichgewichtszustand hängt nicht von  $F_S$  und damit von der Durchbiegung  $w$  ab.

Es gibt demnach beliebig viele Biegelinien, für die die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist. Das ist aber die Definition für den indifferenten Gleichgewichtszustand. Für den hier angenommenen Fall ist das System nicht mehr stabil, wenn nach der Beziehung (1) die Druckkraft die Größe

$$F = \frac{12 \cdot E \cdot I}{l_k^2}$$

erreicht. Die Lösung dieses Problems führt auf den Faktor  $\pi^2$  anstatt 12. Die Abweichung erklärt sich daraus, dass hier zur Veranschaulichung des Problems eine Störung willkürlich angenommen wurde. Die so vorausgesetzte Biegelinie entspricht nicht der Knicklinie. Das wird im Abschnitt 7.4 gezeigt.

Zusammenfassend soll festgehalten werden:

- Ein Druckstab stellt grundsätzlich ein Stabilitätsproblem dar.
- Bei richtiger Dimensionierung, bzw. bei nicht zu hoher Belastung verhält sich ein Druckstab stabil.
- Die Grenzbelastung bei der der Stab labil wird, ist proportional abhängig von der Biegesteifigkeit  $E \cdot I$  und umgekehrt proportional vom Quadrat der freien Knicklänge.

### 7.3 Die Knickspannung und der Schlankheitsgrad

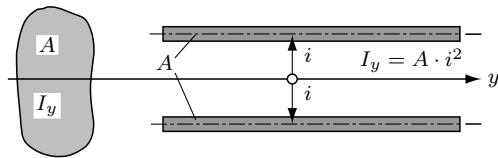
Die Grenzbelastung, bei der ein Druckstab nicht mehr stabil ist, wird *Knickkraft*  $F_K$  genannt. Wie in der Einführung dargestellt, hängt diese Größe von der Stablänge und Biegesteifigkeit nach folgender Proportion ab

$$F_K \sim \frac{E \cdot I_{\min}}{l_k^2} .$$

Dabei ist berücksichtigt, dass für den Ausknickvorgang die minimale Biegesteifigkeit maßgebend ist. Den Quotienten  $F_K/A$  bezeichnet man *Knickspannung*

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A} \sim \frac{E \cdot I_{\min}}{l_k^2 \cdot A} . \quad (1)$$

Der Quotient  $I/A$  kann folgendermaßen gedeutet werden. Eine beliebige Fläche nach Abb. 7-4 hat in Bezug auf eine vorgegebene Achse das Flächenmoment  $I$ .



**Abb. 7-4:** Zur Deutung des Begriffs Trägheitsradius

Diese Fläche wird in einem solchen Abstand  $i$  in schmalen Streifen angeordnet, dass dabei das Flächenmoment erhalten bleibt. Danach muss gelten

$$I = A \cdot i^2.$$

Der Abstand  $i$  wird *Trägheitsradius* genannt

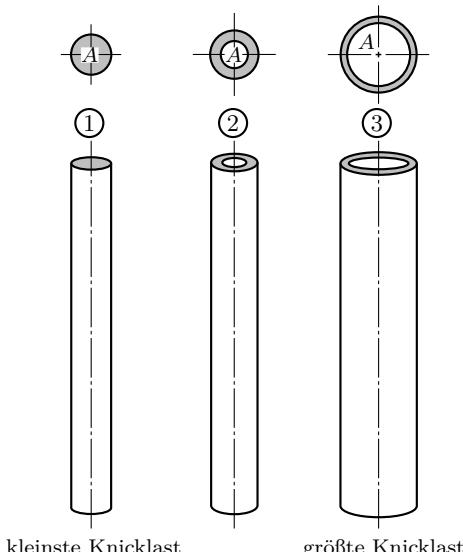
$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}. \quad (7-1)$$

Man führt diese Größe in die Proportion (1) ein

$$\sigma_K \sim E \cdot \left( \frac{i_{\min}}{l_k} \right)^2.$$

Den Kehrwert der Klammer definiert man als *Schlankheitsgrad*  $\lambda$  eines Knickstabes.

$$\lambda = \frac{l_k}{i_{\min}} = \frac{l_k}{\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}} \quad (7-2)$$

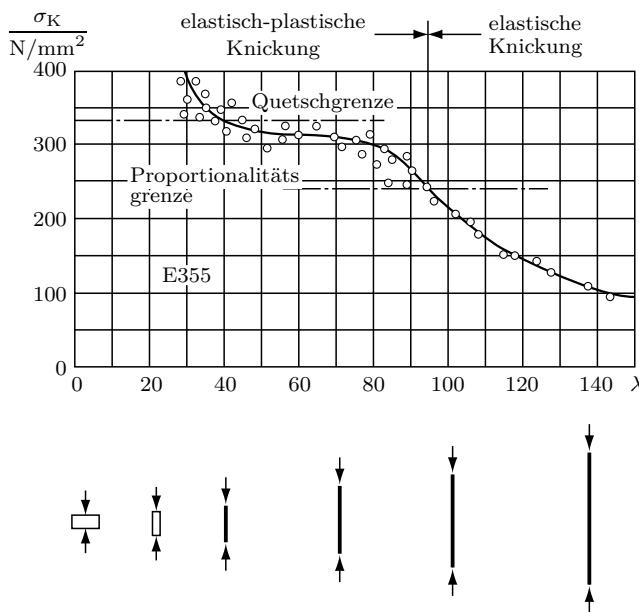


Länge	$l_1 = l_2 = l_3$
Querschnittsfläche	$A_1 = A_2 = A_3$
Flächenmoment	$I_1 < I_2 < I_3$
Schlankheitsgrad	$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$
Knicklast	$F_{K1} < F_{K2} < F_{K3}$

**Abb. 7-5:** Knickstäbe gleicher Länge und Querschnittsfläche mit zunehmender Knicklast

In dieser Größe  $\lambda$  sind alle geometrischen Eigenschaften eines Stabes verarbeitet, die sein Knickverhalten bestimmen. Es kommt bei der Knickung nicht im einzelnen auf die absolute Länge des Stabes, seine Querschnittsform und -größe an, sondern auf eine Kombination dieser Größen, wie sie im Schlankheitsgrad  $\lambda$  gegeben sind. Die Abb. 7-5 zeigt Stäbe gleicher Länge und Querschnittsfläche, aber von verschiedenen Schlankheitsgraden.

Es bietet sich an, die bei Versuchen ermittelten Knickspannungen über dem Schlankheitsgrad aufzutragen. Man erhält so praktisch gleiche Diagramme für verschiedene Querschnittsformen. Für Stahl zeigt Abb. 7-6 ein solches Diagramm.

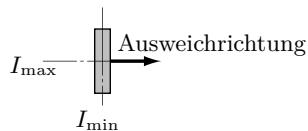
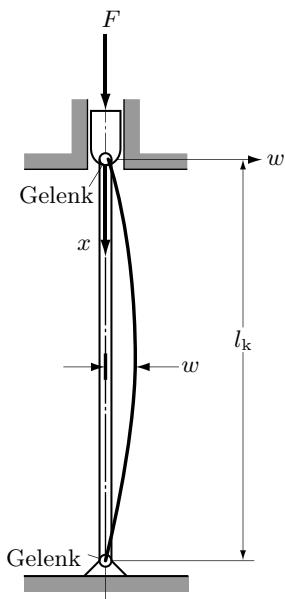


**Abb. 7-6:** Die Knickspannung in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad

Liegt die Knickspannung  $\sigma_K$  unter der Proportionalitätsgrenze  $\sigma_{dP}$ , spricht man von *elastischer Knickung*. Nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze bis zur Quetschgrenze (Druckfließgrenze  $\sigma_{dF}$ ) ist die überwiegend immer noch elastische Verformung (an der Druckfließgrenze beträgt die plastische Verformung ca. 0,2 %) nicht mehr linear, d.h. der Elastizitätsmodul ist nicht mehr konstant. Physikalisch nicht korrekt wird die elastisch-plastische Verformung in diesem Bereich in der Regel als *plastisches Knicken* bezeichnet. Stäbe mit kleinen Schlankheitsgraden werden u.U. bereits vor dem Einsetzen des Ausknickens durch Fließen zerstört. Deshalb kann man Spannungen, die über der Quetschgrenze liegen, für eine Dimensionierung von Bauteilen nicht zugrunde legen. Für  $\lambda < 20$  erübrigtsich eine Berechnung auf Knickung.

## 7.4 Die elastische Knickung nach EULER

Für den elastischen Bereich der Knickung hat zuerst EULER 1744 die Berechnung der Knicklast durchgeführt. Er geht dabei von einem ideal elastischen und zentrisch belasteten Stab nach Abb. 7-7 aus. Beide Enden sind in reibungsfreien Gelenken gelagert, der Lastangriffspunkt ist längsverschieblich. Für die Ablei-



**Abb. 7-7:** Zur Ableitung der EULERSchen Knickkraft

tung ist es jedoch notwendig, von einem seitlich ausgewichenen Stab auszugehen. Wie in der Einführung diskutiert, kommt es darauf an, ob diese Ausgangsdeformation erhalten bleibt. Das Rückstellmoment hängt von der Biegelinie nach der Gleichung 4-13 ab

$$M_b = -w'' \cdot E \cdot I_{\min} .$$

Das durch die Belastung einwirkende Moment ist

$$M_b = F \cdot w .$$

Für den Grenzfall  $F = F_K$  sind beide gleich

$$-w'' \cdot E \cdot I = F_K \cdot w \quad (1)$$

$$w'' + \frac{F_K}{E \cdot I_{\min}} \cdot w = 0. \quad (2)$$

Mit der Abkürzung

$$k^2 = \frac{F_K}{E \cdot I_{\min}} \quad (3)$$

wird die Gleichung (2) in die Form<sup>3</sup>

$$w'' + k^2 \cdot w = 0 \quad (4)$$

gebracht. Die Lösung für diese Gleichung ist

$$w = A \cdot \sin(k \cdot x) + B \cdot \cos(k \cdot x). \quad (5)$$

Die Richtigkeit dieser Lösung kann man durch zweimaliges Ableiten und Einsetzen in die Beziehung (2) nachweisen. Die elastische Linie des Knickvorgangs ist ein sin-Bogen. Die Konstanten der Gleichung (5) werden aus den Randbedingungen berechnet. Hier ist es die Aussage, dass der Stab an den Enden festgehalten wird:

$$w = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = l_k.$$

Diese Bedingungen führen auf

$$0 = A \cdot 0 + B \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$0 = A \cdot \sin(k \cdot l_k).$$

Eine nichttriviale Lösung für  $A$  existiert für

$$k \cdot l_k = \pi, 2 \cdot \pi, \dots, n \cdot \pi.$$

Damit wird die Gleichung (5)

$$w = A_n \cdot \sin(k_n \cdot x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

---

<sup>3</sup>siehe auch Band 3, Kap. 9

Dieses Ergebnis zeigt, dass die Form des gebogenen Stabes (Sinuslinie) bestimmt werden kann, nicht aber die Größe der Durchbiegung ( $A_n$ ). Dieses mathematische Problem wird als *Eigenwertproblem* bezeichnet. Die Größen  $k_n \cdot l_k$  sind *Eigenwerte* und die zugehörigen Kurven  $w_n(x)$  sind die *Eigenformen*. Zu jedem Eigenwert gehört nach Gleichung (3) eine bestimmte Kraft

$$F_n = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_k^2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Es ist einsichtig, dass der Stab bei der niedrigsten Knickkraft versagt, bevor er die mathematisch möglichen höheren Belastungen erreicht. Die technisch richtige Lösung ist deshalb  $\pi$ . Die Schlussfolgerung daraus ist, die elastische Linie entspricht dem sin-Bogen von 0 bis  $\pi$ . Von dieser Deformation ist letztlich aus gegangen worden (Abb. 7-7). Damit ergibt sich

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_k^2}. \quad (7-3)$$

Dies ist die Grenzlast, bei der der Stab bei den schon erwähnten Idealbedingungen in einen labilen Gleichgewichtszustand gerät. Allerdings ist die für die Herleitung der Gleichung zugrunde gelegte Lagerung des Druckstabes (siehe Abb. 7-7) für viele Anwendungsfälle so nicht gegeben. Aus diesem Grunde ist eine Anpassung an andere Randbedingungen erforderlich. Die in der Abb. 7-8 dargestellten, vier Einspannbedingungen für den Druckstab mit konstantem Quer-

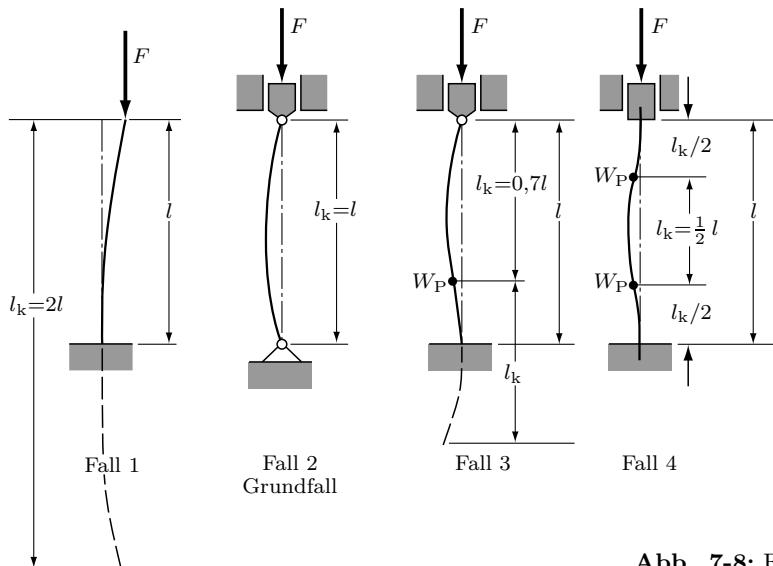


Abb. 7-8: EULERSche Knickfälle

schnitt wurden von EULER zuerst untersucht und nach ihm benannt (*EULERsche Knickfälle*).

Die Lösung für den *Fall 2* liegt bereits vor. Diese Lagerung wird *Grundfall* genannt. Die für den Grundfall ermittelten Gleichungen kann man durch eine einfache Überlegung für die anderen Fälle umwandeln. Wie im Abschnitt 7.4 gezeigt, entspricht die elastische Linie einem sin-Bogen. *Die Länge, die der sin-Linie von 0 bis  $\pi$  entspricht, nennt man freie Knicklänge  $l_k$ .* Diese ist identisch mit der Stablänge des Grundfalls. Die anderen elastischen Linien kann man nach Abb. 7-8 aus Teilen der freien Knicklänge  $l_k$  zusammensetzen (Abstand zweier benachbarter Wendepunkte der Knickbiegelinie). Man erhält folgende Beziehungen zwischen  $l_k$  und  $l$ :

Fall	1	2	3	4
$l_k =$	$2 \cdot l$	$l$	$\approx 0,7 \cdot l$	$0,5 \cdot l$

Für den entsprechenden Knickfall werden diese Beziehungen in die Gleichungen 7-2/3 eingesetzt. Diese Gleichungen sind damit allgemeingültig und nicht auf den Grundfall beschränkt.

Dass nicht nur die Knickkraft  $F_K$  sondern auch der Schlankheitsgrad  $\lambda$  umzurechnen ist, folgt aus der Ableitung der Gleichung 7-4. Eine Zusammenfassung bringt die Tabelle 15.

Aus den vier Knickfällen kann man weitere Stützarten zusammensetzen. Ein beidseitig gelagerter Stab mit einer Stützung in der Mitte nach Abb. 7-9 entspricht zwei zusammengesetzten Grundfällen. Man berechnet die Knicklast nach dem Grundfall, wobei in die Gleichung 7-3 die halbe Gesamtlänge eingesetzt

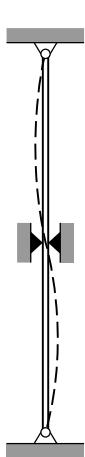


Abb. 7-9: In der Mitte fixierte Stütze

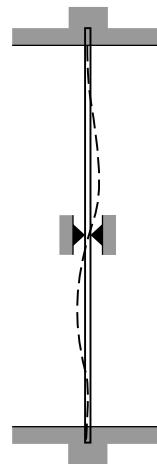
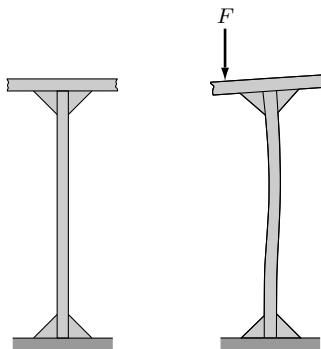


Abb. 7-10: In der Mitte fixierte eingespannte Stütze

wird. Ein beidseitig eingespannter Stab mit einer Stütze in der Mitte nach Abb. 7-10 entspricht zwei zusammengesetzten Knickfällen 3. Auch hier betrachtet man nur die Hälfte und rechnet nach den entsprechenden Gleichungen mit  $l_k = 0,7l$  ( $l$  halbe Gesamtlänge).

Rechnerisch erhält man bei Vorhandensein einer Einspannung eine erheblich erhöhte Knicklast. Man sollte jedoch dabei bedenken, dass es mathematisch exakte, d.h. unnachgiebige Einspannungen, wie sie die Rechnung voraussetzt, nicht gibt. Weiterhin können *über eine Einspannung* im Gegensatz zu Gelenken Biegemomente in den Träger, der somit kein Stab mehr ist, übertragen werden. Das ist bei knickgefährdeten Bauteilen besonders gefährlich. Ein Beispiel dafür zeigt Abb. 7-11, wo durch die Deformation ein Biegemoment in das auf Knickung beanspruchte Bauteil eingeleitet wird.



**Abb. 7-11:** Durch die Einspannstelle einer Stütze eingeleitete Biegemomente

Biegemomente werden auch bei waagerechten oder schräg liegenden „Stäben“ (streng genommen sind das dann Balken) durch das Eigengewicht eingeleitet, was zur Vorkrümmung (Abweichung von der geraden Achse) und damit zur Reduzierung der ertragbaren Knickkraft führt.

Das Stabilitätsproblem wird durch die Druckbeanspruchung des Stabes verursacht. Folglich lässt sich eine „Knickspannung“ analog zur Druckspannung

$$\frac{F_K}{A} = \sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{A \cdot l_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(l_k / \sqrt{I_{\min}/A})^2}$$

formulieren, wenn man für die Druckkraft die kritische Grenzlast einsetzt. Mit den Gleichungen 7-1 und 7-2 wird

$$\sigma_K = \pi^2 \cdot E / \lambda^2. \quad (7-4)$$

Das ist die EULERSche Gleichung für die Knickspannung. Sie gilt nach der Voraussetzung für  $\sigma_K \leq \sigma_{dP}$ , d.h. für den Gültigkeitsbereich des HOOKESchen Gesetzes.

Die minimalen Schlankheitsgrade des Gültigkeitsbereichs können aus der Bedingung  $\sigma_K = \sigma_{dP}$  berechnet werden

$$\lambda_{\min} = \lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{dP}}}.$$

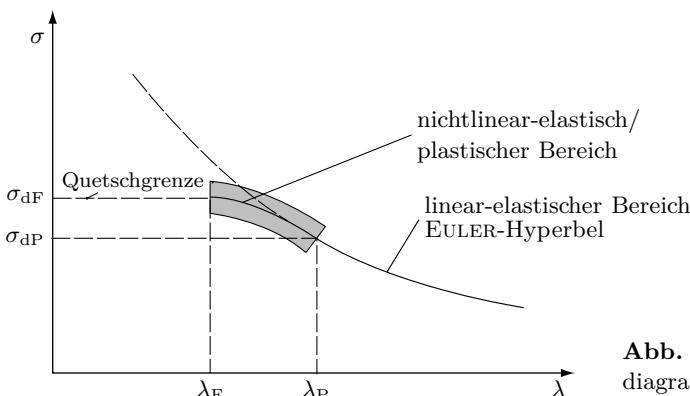
Die Schwierigkeit besteht allerdings darin, dass zur Ermittlung der Proportionalitätsgrenze (0,01 % bleibende Dehnung) eine Feindehnungsmessung aus der konkreten Charge des jeweils verwendeten Materials erforderlich wäre, was aus Aufwandsgründen in der Regel nicht geschieht. Mit Anhaltswerten erhält man für Stahl S 235 mit  $\sigma_{dP} \approx 190 \text{ N/mm}^2$  und  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$

$$\lambda_{\min} \approx \pi \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2}{1,9 \cdot 10^2 \text{ N/mm}^2}} \approx 104.$$

Analog dazu für Stahl E 335 mit  $\sigma_{dP} \approx 270 \text{ N/mm}^2$

$$\lambda_{\min} \approx \pi \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2}{2,7 \cdot 10^2 \text{ N/mm}^2}} \approx 88.$$

Die Knickspannung ergibt über dem Schlankheitsgrad bis zu  $\sigma_{dP}$ , aufgetragen einen Hyperbelast (EULER-Hyperbel; Abb. 7-12). In dem diskutierten Bereich ist diese Gleichung in guter Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen. Bemerkenswert ist, dass die *Knickspannung von der Festigkeit des Stahls praktisch unabhängig* ist. Bei sonst gleichen Bedingungen knickt ein Stab aus hochfestem Stahl bei der gleichen Last wie ein Stab aus weichem Stahl. Der Grund dafür ist, dass es hier nur auf die Biegesteifigkeit ankommt, die innerhalb technischer



**Abb. 7-12:** Knickspannungsdiagramm

Genauigkeiten für alle Stähle etwa gleich ist. Für Gusseisen und Holz muss der Gültigkeitsbereich der EULER-Hyperbel experimentell bestimmt werden, da eine Proportionalitätsgrenze nicht vorhanden ist.

Zusammengefasst sind die EULERSchen Gleichungen mit Gültigkeitsbereich in Tabelle 14 gegeben.

Die Nachweisrechnung der Knicksicherheit für die elastische Knickung wird im Maschinenbau nach erfolgter Feststellung der Gültigkeit der EULERSchen Gleichung ( $\lambda \geq \lambda_p$ ) mit der wirkenden Betriebskraft  $F$  zu

$$S_{KE} = \frac{F_K}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_k^2 \cdot F} \geq S_{K\text{ gef}} \quad (7-5)$$

geführt.

Das führt zu der Gleichung für die zulässige Belastung

$$F_{d\text{ zul}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{S_K \cdot l_k^2}. \quad (7-6)$$

Für die Dimensionierung von Stäben wird die obige Gleichung nach  $I_{min}$  aufgelöst. Man erhält mit  $F_{d\text{ zul}} = F$

$$I_{min} = \frac{F \cdot l_k^2 \cdot S_K}{\pi^2 \cdot E}. \quad (7-7)$$

Es wird das mindestens erforderliche Flächenmoment bestimmt, die entsprechenden Profilabmessungen entnimmt man einschlägigen Tabellen.

*Optimal sind Querschnittsformen, die für jede Achse das gleiche Flächenmoment haben.* Das sind Profile nach Abb. 7-13.

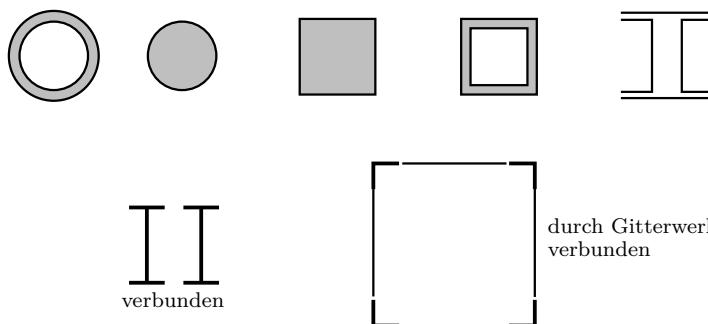


Abb. 7-13: Günstige Querschnitte für Druckbelastung

## 7.5 Die elastisch-plastische Knickung

Übersteigen die Druckspannungen im Knickstab die Proportionalitätsgrenze, *gibt es im Gegensatz zur linear-elastischen Deformation keinen linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung*. Dieser im Abschnitt 7.3 erklärte Zusammenhang wird aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Abb. 2-4) deutlich. Damit gilt die EULER-Gleichung 7-4 nicht mehr, da der Elastizitätsmodul nicht mehr konstant ist. Das erschwert theoretische Ansätze zur Erfassung der Knickung im Bereich zwischen der Proportionalitäts- und der Quetschgrenze, die im Allgemeinen als plastische Knickung bezeichnet wird, ganz erheblich (siehe hierzu [59]). Man ist weitgehend auf Messungen angewiesen, die gerade in diesem Bereich stark streuen. Es ist deshalb gerechtfertigt, einfache mathematische Beziehungen als Näherung für Messdaten einzuführen.

TETMAJER hat im Bereich der plastischen Knickung von Stahlstäben den Streubereich im  $\sigma$ - $\lambda$ -Diagramm durch Geraden ersetzt. Bei Gusseisen ergibt ein Parabelast eine gute Näherung. Nach den Gleichungen von TETMAJER, die durch viele Versuche bestätigt wurden, rechnet man vorwiegend im Maschinenbau.

Die Geradengleichungen haben die Form

$$\sigma_K = a - b \lambda.$$

Die Gleichung für Gusseisen ist

$$\sigma_K = a - b \lambda + c \lambda^2.$$

Die Größen  $a, b, c$  bzw. die Gleichungen für  $\sigma_K$  sind in Tabelle 14 gegeben.

Im Gegensatz zur EULERSchen Gleichung 7-4 bzw. zur Gleichung 7-3 kann man aus den Beziehungen nach TETMAJER das erforderliche Flächenmoment  $I_{\min}$  nicht unabhängig von der Querschnittsfläche  $A$  ausrechnen. Das hat zur Folge, dass man *für den elastisch-plastischen Bereich einen Knickstab nicht unmittelbar dimensionieren, sondern nur einen angenommenen Stabquerschnitt nachrechnen* kann. Das heißt, die Entwurfsberechnungen müssen iterativ geführt werden. Der Querschnitt wird so lange vergrößert (damit muss auch  $\lambda$  neu berechnet werden), bis die geforderte Knicksicherheit erreicht ist. Der Nachweis wird dann gewöhnlich über die Spannungen mit  $\sigma_d = F/A$  zu

$$S_{KT} = \frac{\sigma_K}{\sigma_d} \geq S_{K\text{gef}} \quad (7-8)$$

geführt.

Für Stahl S 235 liegt die Quetschgrenze im unteren Bereich von  $\lambda$  tiefer als die nach TETMAJER berechnete Knickspannung (s. Abb. 7-14). Die Gleichung für  $\sigma_K$  gilt deshalb nur bis zu einem Wert von  $\lambda$ , bei dem Quetschgrenze und Knickspannung gleich sind. Für Stahl S 235 ist die Knickspannung

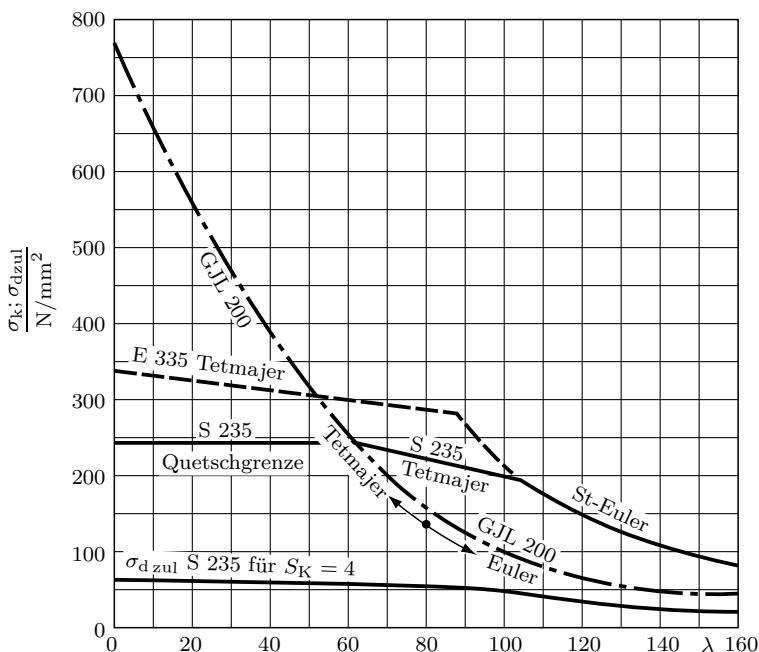
$$\sigma_K = (310 - 1,14 \cdot \lambda) \text{ N/mm}^2.$$

Die Quetschgrenze liegt bei  $\sigma_{dF} = 235 \text{ N/mm}^2$ . Für  $\sigma_{dF} = \sigma_K$  erhält man  $\lambda_{\min}$

$$235 = 310 - 1,14 \cdot \lambda_{\min}$$

$$\lambda_{\min} = \frac{310 - 235}{1,14} \approx 65.$$

In Abb. 7-14 sind die vollständigen aus TETMAJER-Geraden (-Parabel) und EULER-Hyperbeln zusammengesetzten Kurven für die Knickspannung  $\sigma_K$  für Stähle S 235, E 335 und Gusseisen GJL 200 aufgetragen. Für S 235 ist noch die Kurve  $\sigma_{d,zul}$  für die Sicherheitszahl  $S_K = 4$  eingezzeichnet.



**Abb. 7-14:** Knickspannungen für Gusseisen und Stahl in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad

Ein Problem bei der Anwendung der TETMAJER-Gleichungen ist, dass für viele Werkstoffe (z.B. gehärtete Werkzeugstähle für Schneidstempel) keine Werte für

die Geradengleichung existieren. Die wenigen in der Tabelle 14, wie auch in den einschlägigen Nachschlagewerken, z.B. DUBBEL [38], vorhandenen Gleichungen basieren überwiegend auf den Werten der zum Beginn des 20. Jahrhunderts geführten Versuche.

## 7.6 Allgemeine Hinweise zur Stabilitätsberechnung

Das vorgehend behandelte Biegeknicken von Druckstäben ist nur ein Teilbereich der Stabilitätsrechnung. Weitere Stabilitätsprobleme, auf die im Rahmen dieses Festigkeits-Lehrbuches nicht eingegangen wird, sind das Drillknicken (Belastung durch ein Drehmoment), das Biegedrillknicken (Überlagerung der beiden Belastungsarten), das Kippen und das Beulen (siehe Abb. 4-16). Während das beschriebene Biegeknicken eine ebene Problematik darstellt (gerade Stabachse und Knickbiegelinie liegen in einer Ebene), besitzt die verformte Stabachse beim Biegedrillknicken eine räumliche Figur. Mit der Theorie des ebenen Knickens erhält man eine zu große kritische Knicklast.

Bei der Berücksichtigung realer Verhältnisse im Berechnungsablauf treten unvermeidliche Abweichungen von den idealen Annahmen, sog. Imperfektionen auf:

- die Stabachse ist nicht ideal gerade;
- die Querschnitte sind nicht perfekt gleich bleibend (Versatz der Schwerachse);
- die Auflagerbedingungen entsprechen nicht den getroffenen Idealisierungen (Lasten werden nicht mittig eingeleitet);
- Verbiegung aus Eigenlast (waagerechte, schräge Stäbe) oder ungleichmäßiger Erwärmung;
- Eigenspannungen (Walzen, Schweißen, Wärmebehandlung);
- Materialfehler.

Als Folge stellt sich am realen Druckstab kein reiner Stabilitätsfall ein. Es liegt ein Spannungsproblem vor. Das heißt, es treten von Anfang an bei Laststeigerung Verformungen auf. Die elastische Grenzlast kann nie erreicht werden. Berücksichtigt man zudem ein wirklichkeitsnahe Spannungs-Dehnungsverhalten, tritt ab Erreichen der Steckgrenze im maximal belasteten Querschnitt eine Teilstäplastizierung bis zum Erreichen der Traglast (siehe hierzu auch Kapitel 10)

ein. Im Bereich des Stahlbaus wird diesem Problem in der DIN 18 800 Rechnung getragen. Auf der Grundlage von Traglastberechnungen nach der Theorie 2. Ordnung, gestützt auf mehr als 1000 weltweit geführte Großversuche unter Berücksichtigung von geometrischen (Vorkrümmung) und strukturellen (Eigen- spannungen) Imperfektionen sind die sog. Knickspannungslinien Grundlage für die Berechnung (siehe hierzu auch [47], [53]). Damit wird der gesamte Verformungsbereich bis zur Quetschgrenze stetig beschrieben. Für den Nachweis werden Beanspruchungen den Beanspruchbarkeiten gegenübergestellt.

Im allgemeinen Maschinenbau versucht man durch erhöhte Sicherheitszahlen (im elastischen Bereich  $S_{KE} = 5 \dots 10$  und im elastisch-plastischen Bereich  $S_{KT} = 3 \dots 8$ ) diese Einflüsse zu berücksichtigen. Dass durch diese pauschale Maßnahme keine höhere Sicherheit erreicht wird, sondern nur die Unsicherheiten der Annahmen und die Gefährdungen berücksichtigt werden sollen, wurde schon im Abschnitt 2.9 ausführlich dargestellt.

## 7.7 Beispiele

### *Beispiel 1*

Die Sicherheitszahl  $S_K$  wird bei Knickbeanspruchung höher gewählt als bei anderen Beanspruchungen. In diesem Beispiel soll demonstriert werden, dass dies nötig ist und der damit gegebene große Abstand der rechnerischen Spannung zur Knickspannung durch kleine Abweichungen vom Sollzustand aufgebraucht werden kann. Hier wird die Parallelverschiebung der Druckkraft aus der zentrischen Lage untersucht. Für einen Träger I 300; Grundfall  $l = 3,00 \text{ m}$  soll eine zulässige Druckkraft für die Sicherheitszahl  $S_K = 4$  berechnet werden. Anschließend ist zu untersuchen, um welchen Betrag diese Kraft parallel so verschoben werden darf, dass sich  $S_K = 1,0$  ergibt. Mit anderen Worten: Mit welcher Exzentrizität darf die Kraft angreifen, wenn die gesamte „Sicherheit“ nur für diesen Einfluss verbraucht wird und damit in einer Faser des Querschnitts die Knickspannung erreicht wird.

### **Lösung**

Hier handelt es sich um die Zusammensetzung von Normalspannungen, die von Druck und Biegung verursacht werden. Das ist ein Thema des Kapitels 9. Dieser einfache Fall der Spannungsaddition (s. Abb. 9-1) ist bereits hier verständlich.

Die Daten für I 300 sind (Tabelle 10A)  $i_{\min} = i_z = 2,56 \text{ cm}$ ;  $A = 69,1 \text{ cm}^2$ . Damit ist

$$\lambda = \frac{l_k}{i} = \frac{l}{i} = \frac{300 \text{ cm}}{2,56 \text{ cm}} = 117$$

Das ist der EULER-Fall (Gl. 7-4)

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2}{117^2} = 151 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_d = \frac{\sigma_K}{S_K} = \frac{151 \text{ N/mm}^2}{4} = 38 \text{ N/mm}^2$$

$$F_d = \sigma_d \cdot A = 38 \text{ N/mm}^2 \cdot 69,1 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 \cdot 10^{-3} \text{ kN/N}$$

$$\underline{F_d = 262 \text{ kN}}$$

Als „Reserve“ steht für die durch Parallelverschiebung entstehende Biegung eine Spannung

$$\sigma_b = \sigma_K - \sigma_d = 151 \text{ N/mm}^2 - 38 \text{ N/mm}^2 = 113 \text{ N/mm}^2$$

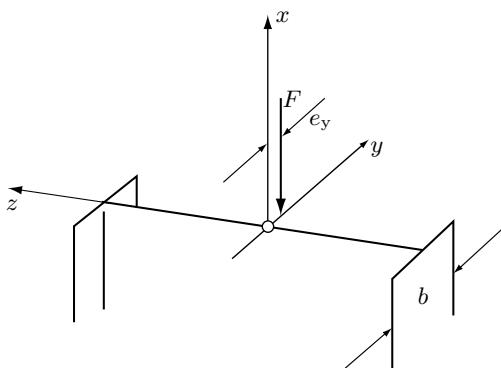
zur Verfügung. Zunächst ist zu überlegen, in welche Richtung eine Verschiebung besonders gefährlich ist (Abb. 7-15). Das ist der Fall wenn die Biegung um die Achse des minimalen Widerstandsmomentes eingeleitet wird. Diese Überlegung führt auf

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_z} = \frac{F_d \cdot e_y}{W_z} \quad \text{mit} \quad W_z = 72,2 \text{ cm}^3$$

$$e_y = \frac{\sigma_b \cdot W_z}{F_d} = \frac{113 \cdot 10^2 \text{ N/cm}^2 \cdot 72,2 \text{ cm}^3}{262 \cdot 10^3 \text{ N}}$$

$$\underline{e_y = 3,1 \text{ cm}}$$

Die Flanschbreite des Trägers  $b$  beträgt 12,5 cm. Eine Verschiebung der Kraft um etwa ein Viertel dieser Abmessung würde ohne Berücksichtigung anderer Einflüsse bereits allein die Spannungsreserve der hohen Sicherheitszahl aufzehren.



**Abb. 7-15:** Exzentrischer Kraftangriff am I-Profil

**Beispiel 2**

Welchen Durchmesser muss eine Schubstange einer Großpumpe aus Stahl E 335 mit der Länge  $l = 1650$  mm zwischen den Gelenken erhalten, wenn die maximale Betriebslast  $F = 215$  kN beträgt und eine Knicksicherheit von  $S_K = 8$  vorgeschrieben wird. Der Durchmesser ist auf glatte mm zu runden.

**Lösung**

Für eine Schubstange (beidseitig gelenkig gelagert) liegt der Knickfall 2 (Grundfall) vor. Bei einer Entwurfsberechnung kann naturgemäß kein Schlankheitsgrad zur Festlegung des Rechenverfahrens ermittelt werden, da der hierzu erforderliche Querschnitt erst berechnet werden soll. Da die TETMAJER-Gleichung hierfür nicht geeignet ist, wird die Entwurfsrechnung über die EULER-Gleichung 7-7 geführt:

$$I_{\min} = \frac{F \cdot l_k^2 \cdot S_K}{\pi^2 \cdot E} = \frac{215 \text{ kN} \cdot 165^2 \text{ cm}^2 \cdot 8}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2} = 226 \text{ cm}^4.$$

Der Mindestdurchmesser wird

$$d_{\min} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot I_{\min}}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 226 \text{ cm}^4}{\pi}} = 8,24 \text{ cm}.$$

Es wird  $d = 83$  mm festgelegt. Der Nachweis der Gültigkeit der Berechnung nach EULER mit Gl. 7-2

$$\lambda = \frac{l_k}{I_{\min}/A} = \frac{l_k}{\sqrt{\frac{\pi \cdot d \cdot 4}{64 \cdot \pi \cdot d^2}}} = \frac{4 \cdot l_k}{d} = \frac{4 \cdot 165 \text{ cm}}{8,3 \text{ cm}} = 79,5.$$

Für Stahl E 335 ist nach Tabelle 14  $\lambda_P = 88$ . Die Entwurfsrechnung ist so nicht zulässig, wie auch die Nachrechnung der Knicksicherheit nach Gleichung 7-8 (Tabelle 14)

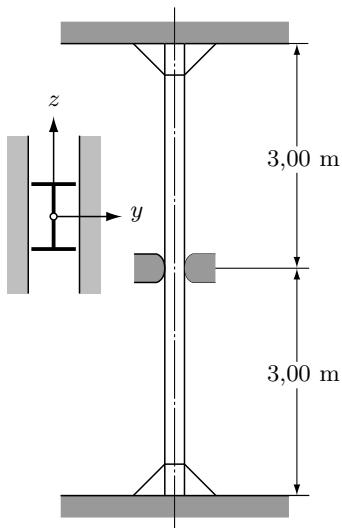
$$\begin{aligned} S_{KT} &= \frac{\sigma_K}{\sigma_d} = \frac{(335 - 0,62\lambda) \cdot A}{F} \\ &= \frac{(335 - 0,62 \cdot 79,5) \text{ N/mm}^2 \cdot 54,11 \cdot 10^2 \cdot \text{mm}^2}{215 \cdot 10^3 \text{ N}} = 7,19 < S_{K\text{gef}} \end{aligned}$$

zeigt.

Eine erste Anpassung mit  $d = 9,0$  cm liefert mit  $\lambda = 73,3$  eine Knicksicherheit von  $S_K = 8,56$ , die größer als die geforderte Sicherheit ist. Eine Verfeinerung der Iterationsrechnung führt mit  $d = 8,8$  cm ( $\lambda = 75$ ) auf eine ausreichende Knicksicherheit von  $S_K = 8,16$  bei kleinerem Durchmesser.

**Beispiel 3 (Abb. 7-16)**

Ein I-Träger 100 wird nach Skizze als Säule verwendet. Anschläge verhindern in der Mitte das Ausknicken in  $y$ -, jedoch nicht in  $z$ -Richtung. Die Knotenbleche oben und unten sollen wie eine Einspannung für die  $y$ -Richtung wirken. In  $z$ -Richtung sind an Enden Winkeländerungen möglich, deshalb soll hier für die Berechnung der Grundfall zugrunde gelegt werden. Zu prüfen ist, ob eine Belastung von 12 kN mit einer Sicherheitszahl  $S_K = 4$  möglich ist.

**Abb. 7-16:** Stütze**Lösung**

Daten für I 100:  $A = 10,6 \text{ cm}^2$ ;  $i_y = 4,01 \text{ cm}$ ;  $i_z = 1,07 \text{ cm}$ .

Ausknicken in  $y$ -Richtung (Biegung um  $z$ -Achse).

Knickfall 3 für die halbe Säule

$$\lambda \approx \frac{0,7l}{i_z} = \frac{0,7 \cdot 300 \text{ cm}}{1,07 \text{ cm}} = 196,3 \text{ (EULER)}$$

$$(Gl. 7-4) \quad \sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2}{196,3^2} = 53,8 \text{ N/mm}^2$$

$$F_K = \sigma_K \cdot A = 53,8 \text{ N/mm}^2 \cdot 1060 \text{ mm}^2 \cdot 10^{-3} \text{ kN/N} = 57,04 \text{ kN}$$

$$S_K = \frac{57,04 \text{ kN}}{12,0 \text{ kN}} = 4,75 > S_{K \text{ gef}}$$

Ausknicken in  $z$ -Richtung (Biegung um  $y$ -Achse).

Grundfall für ganze Säule

$$\lambda = \frac{l}{i_y} = \frac{600 \text{ cm}}{4,01 \text{ cm}} = 149,6 \text{ (EULER)}$$

$$(Gl. 7-4) \quad \sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2}{149,6^2} = 92,6 \text{ N/mm}^2$$

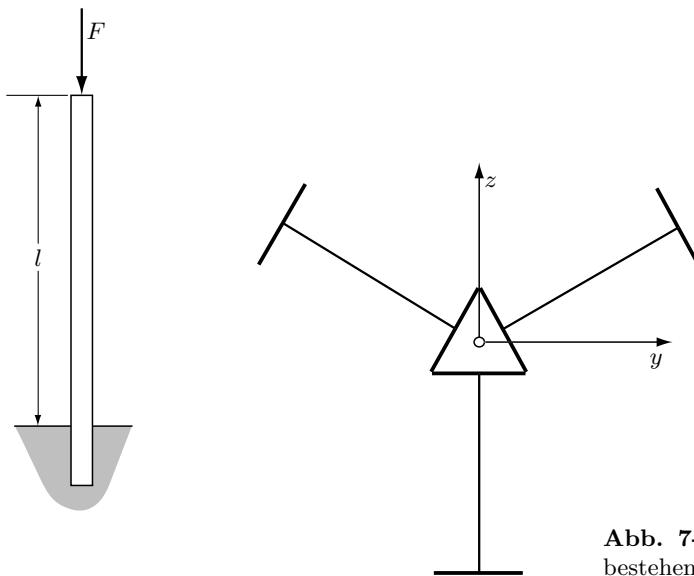
$$F_K = \sigma_K \cdot A = 92,6 \text{ N/mm}^2 \cdot 1060 \text{ mm}^2 \cdot 10^{-3} \text{ kN/N} = 98,13 \text{ kN}$$

$$S_K = \frac{98,13 \text{ kN}}{12,0 \text{ kN}} = 8,2 > S_{K \text{ gef.}}$$

Die vorgesehene Belastung ist für die gegebenen Bedingungen möglich.

#### **Beispiel 4 (Abb. 7-17)**

Die abgebildete Säule der Länge  $l = 6,00 \text{ m}$  ist zentrisch mit einer Kraft  $F = 400 \text{ kN}$  belastet. Der Querschnitt besteht aus drei zusammengeschweißten I 200 Profilen. Zu bestimmen ist die Sicherheitszahl  $S_K$ .



**Abb. 7-17:** Säule aus drei I-Profilen bestehend

#### **Lösung**

Zunächst ist es notwendig, das minimale Flächenmoment des Querschnitts zu bestimmen. Da die Profile z.T. schräggestellt sind, handelt es sich hier um ein Hauptachsenproblem nach Abschnitt 4.7.3. Jedoch ist es nicht notwendig,

die dort abgeleiteten Gleichungen auszuwerten. Die Querschnittsfläche hat drei Symmetrieachsen. Wie im o.g. Abschnitt ausgeführt, sind damit alle Schwerpunktachsen Hauptachsen mit gleichem Flächenmoment. Nachdem diese Überlegungen getroffen wurden, ist es am einfachsten,  $I_{\min} = I$  aus dem polaren Flächenmoment zu berechnen. Dabei gilt (Gl. 4-28)

$$I_y + I_z = I_p \quad \text{mit} \quad I_y = I_z = I_{\min} = \text{konst.} \quad (\text{Gesamtprofil}).$$

Das führt auf

$$I_{\min} = I_p / 2. \quad (1)$$

Die Profildaten sind (Tabelle 10A)

$$I_y = 2140 \text{ cm}^4; \quad I_z = 117 \text{ cm}^4; \quad A = 33,5 \text{ cm}^2; \quad h = 200 \text{ mm}^2.$$

Das auf den Profilschwerpunkt bezogene polare Flächenmoment des Einzelprofils ist

$$I_p = I_y + I_z = 2140 \text{ cm}^4 + 117 \text{ cm}^4 = 2257 \text{ cm}^4.$$

Dieses muss auf den Gesamtschwerpunkt der Querschnittsfläche mit dem STEINERSchen Satz umgerechnet werden. Der Abstand  $e$  beträgt (Abb. 7-18)

$$e = 4,50 \text{ cm} \cdot \tan 30^\circ = 2,60 \text{ cm}.$$

Damit ist  $s = 12,6 \text{ cm}$ . Weiter gilt (Gl. 4-11)

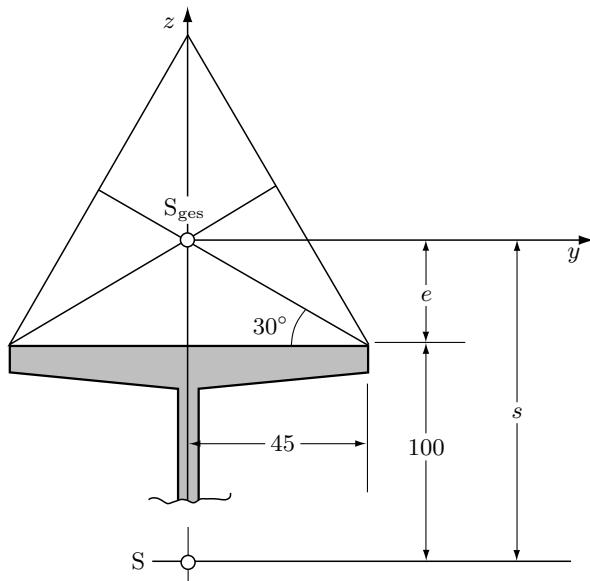
$$\begin{aligned} I_{pS} &= I_{p\text{Profil}} + s^2 \cdot A \\ I_{pS} &= 2257 \text{ cm}^4 + 12,6^2 \text{ cm}^2 \cdot 33,5 \text{ cm}^2 = 7575 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Für drei Profile

$$I_{p\text{ges}} = 22726 \text{ cm}^4$$

Das führt nach Gl. (1) auf

$$I_{\min} = I = 11363 \text{ cm}^4$$



**Abb. 7-18:** Geometrie der Schwerpunktlagen des Säulenprofils Abb. 7-14

Jetzt ist es möglich den Schlankheitsgrad der Säule zu bestimmen

$$i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{11\,363 \text{ cm}^4}{3 \cdot 33,5 \text{ cm}^2}} = 10,6 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{l_k}{i} \quad \text{mit} \quad l_k = 2l \quad \text{Knickfall 1}$$

$$\lambda = \frac{1200 \text{ cm}}{10,6 \text{ cm}} = 113$$

Damit gilt die EULERSche Knickgleichung (Gl. 7-4).

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2 \cdot 11\,363 \text{ cm}^4 \cdot 10^{-3} \text{ kN/N}}{1200^2 \text{ cm}^2}$$

$$F_K = 1633 \text{ kN}$$

$$\underline{S_k} = \frac{F_k}{F} = \frac{1635 \text{ kN}}{400 \text{ kN}} = 4,09$$

## 7.8 Zusammenfassung

Bei der Knickung handelt es sich um ein Stabilitätsproblem. Die Last, bei der der Druckstab ausknickt, hängt für einen Werkstoff nur vom Schlankheitsgrad des Stabes

$$\lambda = \frac{l_k}{i_{\min}} = \frac{l_k}{\sqrt{I_{\min}/A}} \quad (7-2)$$

ab.

Für einen Schlankheitsgrad  $\lambda < 20$  ist Knickberechnung nicht notwendig. Sind die Knickspannungen kleiner als die Proportionalitätsgrenze  $\sigma_{dP}$ , dann spricht man von einer elastischen Knickung. Die Berechnung erfolgt nach EULER.

Die Grenzlast, bei der der Druckstab in einen labilen Gleichgewichtszustand übergeht (im praktischen Fall bedeutet dies das Bauteilversagen), bezeichnet man als kritische oder EULERSche Knickkraft

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_k^2}. \quad (7-3)$$

In dieser Gleichung ist  $l_k$  die freie Knicklänge. Sie entspricht dem sin-Bogen von 0 bis  $\pi$ . Für verschiedene Halterungen eines Stabes (Länge  $l$ ) kann man die elastische Linie aus Teilen von  $l_k$  zusammensetzen. So erhält man eine Beziehung zwischen  $l_k$  und  $l$ , die in die Gleichungen 7-2/3/4 eingesetzt werden. Diese sind damit allgemeingültig und nicht auf den Grundfall beschränkt.

Aus der kritischen Knicklast lässt sich in Analogie zur Druckspannung eine kritische Knickspannung

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (7-4)$$

ableiten.

Zahlenmäßig ausgewertet ist diese Gleichung in Tabelle 14.

Die Knicksicherheit für die elastische Knickung wird zu

$$S_{KE} = \frac{F_K}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_k^2 \cdot F} \geq S_{K\text{ gef}} \quad (7-5)$$

berechnet. Im allgemeinen Maschinenbau versucht man, die diversen Abweichungen von den idealen Annahmen der EULERSchen Berechnung durch erhöhte Sicherheitszahlen  $S_{KE} = 5 \dots 10$  zu berücksichtigen.

Übersteigen die Druckspannungen im Stab die Proportionalitätsgrenze  $\sigma_{dP}$ , handelt es sich um ein nichtlineares elastisch-plastisches Knickproblem, i.d.R. als plastisches Knicken bezeichnet. In diesem Falle kann man die Knickspannungen näherungsweise nach den empirischen Gleichungen von TETMAJER berechnen. Die Gleichungen und Gültigkeitsbereiche sind in Tabelle 14 gegeben.

Die Knicksicherheit wird i.A. über die Spannungen zu

$$S_{KT} = \frac{\sigma_K}{\sigma_d} \geq S_{K\text{ gef}} \quad (7-8)$$

definiert. Im Maschinenbau wird für diesen Bereich mit Sicherheitszahlen von  $S_{KT} = 3 \dots 8$  gearbeitet.

# 8 Der ebene Spannungszustand

## 8.1 Einführung

Die Annahmen, die nur von einer Spannungsrichtung ausgehen (z.B. Zugstab im elastischen Bereich), sind für Sonderfälle gültig bzw. mehr oder weniger ge-rechtfertigte Vereinfachungen. Der allgemeine Fall ist, dass in jedem Punkt eines belasteten Bauteils Spannungen in jeder Richtung auftreten können. Diese Spannungen kann man in jeder Fläche an einem herausgeschnittenen Volumenelement in drei Koordinatenrichtungen als Normal- und Schubspannungskomponenten zerlegen. Das ist der *räumliche Spannungszustand*.

Sind in einer Koordinatenrichtung alle Spannungen null, herrscht im Körper *ebener Spannungszustand*. Dies ist bei dünnen, flächigen Bauteilen praktisch der Fall. Beispiele dafür sind die Wandungen von Behältern unter Innendruck, flache rotierende Scheiben (s. Kapitel 12), Bleche mit Kerben und Durchbrüchen unter Zug.

Für die mathematische Formulierung des *ebenen Spannungszustands* ist es notwendig, von einer Scheibe auszugehen, an der in der Ebene alle Normal- und Schubspannungen wirken. Ein schräger Schnitt zerlegt diese Scheibe in zwei Teile. Nach Einführung der Schnittreaktionen werden die Gleichgewichtsbedingungen für ein Teilelement aufgestellt. Das geschieht mit dem Ziel, folgende Größen zu berechnen:

1. Die maximale und minimale Normalspannung (Hauptspannungen),
2. die Richtungen der unter 1. berechneten Spannungen (Hauptachsen),
3. die maximalen Schubspannungen,
4. deren Wirkungsrichtung.

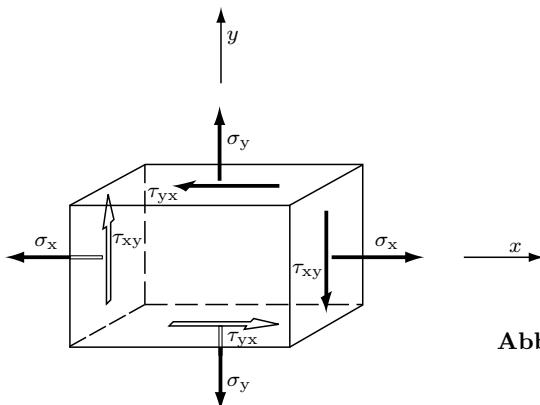
Die Gleichungen lassen sich am MOHRSchen *Spannungskreis* darstellen und die oben aufgeführten Größen dort ablesen. Der Aufbau des Diagramms ist analog zu dem des MOHRSchen Kreis der Flächenmomente (Kap. 4). Der Spannungskreis eignet sich sehr gut, die Vorgänge im Werkstoff anschaulich zu machen. Das geschieht anschließend für verschiedene Beanspruchungen.

Die hier abgeleiteten Gleichungen sind die Grundlage des nächsten Kapitels. Dessen Thema ist die Überlagerung verschiedener Belastungsarten.

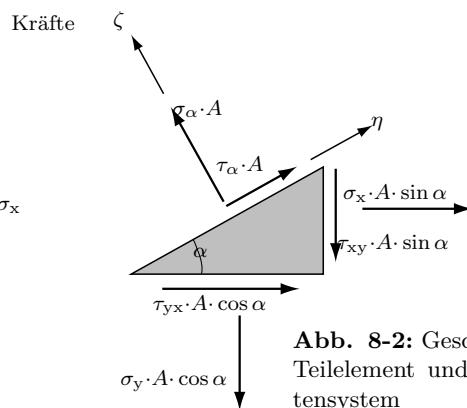
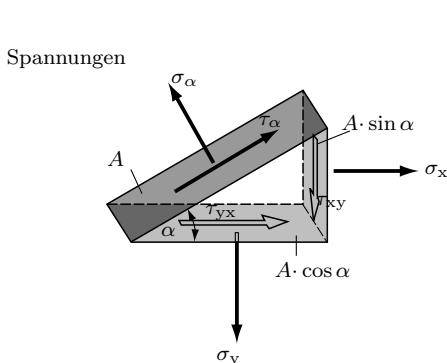
## 8.2 Das Hauptachsenproblem; der MOHRSche Spannungskreis

An einem freigemachten Element eines belasteten Bauteils nach Abb. 8-1 können in der  $x$ - $y$ -Ebene die zueinander senkrecht stehenden Normalspannungen  $\sigma_x, \sigma_y$  und die Schubspannungen  $\tau_{xy}, \tau_{yx}$  wirken. *Der erste Index für  $\tau$  gibt die Ebene an, in der  $\tau$  angreift, z.B.  $\tau_y$  heißt  $\tau$  in der Ebene senkrecht zu  $y$ -Achse; der zweite Index gibt die Richtung an.* Für  $\tau$  gilt der Satz von den zugeordneten Schubspannungen  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ .

Der Quader nach Abb. 8-1 wird unter dem Winkel  $\alpha$  geschnitten. In diese Richtung wird die Achse eines neuen Koordinatensystems gelegt. Die an den einzelnen Flächen wirkenden Spannungen und Kräfte zeigt die Abb. 8-2. Die



**Abb. 8-1:** Ebener Spannungszustand



**Abb. 8-2:** Geschnittenes Teilelement und Koordinatensystem

Gleichgewichtsbedingungen führen auf folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}\sum F_\zeta &= 0 \\ &\quad + \sigma_\alpha \cdot A - \sigma_x \cdot A \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha - \sigma_y \cdot A \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha \\ &\quad - \tau_{yx} \cdot A \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \tau_{xy} \cdot A \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0 \\ \sigma_\alpha &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + (\tau_{yx} + \tau_{xy}) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \sum F_\eta &= 0 \\ &\quad + \tau_\alpha \cdot A - \tau_{xy} \cdot A \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha + \tau_{yx} \cdot A \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha \\ &\quad + \sigma_x \cdot A \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sigma_y \cdot A \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 0 \\ \tau_\alpha &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \cdot \cos^2 \alpha.\end{aligned}$$

Nach dem Satz von den zugeordneten Schubspannungen ist  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Außerdem werden folgende trigonometrische Beziehungen eingeführt

$$\left| \begin{array}{l} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha. \end{array}$$

Damit erhält man

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\alpha + \tau_{yx} \cdot \sin 2\alpha \quad (8-1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cdot \cos 2\alpha. \quad (8-2)$$

Das ist die Normalspannung bzw. Schubspannung in einem Schnitt, der unter dem Winkel  $\alpha$  zur  $x$ -Achse im Teilelement Abb. 8-2 liegt.

Die Richtung für die maximale Normalspannung erhält man aus der Ableitung der Gleichung 8-1 nach dem Winkel  $\alpha$ . Für den Fall  $\sigma_\alpha = \sigma_{\max}$  bzw.  $\sigma_\alpha = \sigma_{\min}$  muss diese Ableitung gleich Null sein

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2 \cdot \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha + 2\tau_{yx} \cos 2\alpha.$$

Für  $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0$  wird  $\alpha = \alpha_h$  (Index  $h$  steht für *Hauptachse*)

$$\begin{aligned}-\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha_h + \tau_{yx} \cos 2\alpha_h &= 0 \\ \tan 2\alpha_h &= \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_y - \sigma_x}.\end{aligned} \quad (8-3)$$

Extremwerte  $\sigma_{\max}$  und  $\sigma_{\min}$  erhält man für  $\alpha_h$  und  $\alpha_h + 90^\circ$ , da die Tangensfunktion eine Periode von  $180^\circ$  hat. Die Achsen für  $\sigma_{\max}$  und  $\sigma_{\min}$  stehen senkrecht aufeinander.

Zur Bestimmung der Größe der maximalen bzw. minimalen Spannung setzt man diesen Winkel  $\alpha_h$  in die Gleichung 8-1 ein. Dazu ist es notwendig, folgende trigonometrische Beziehungen einzuführen

$$\sin 2\alpha = \frac{\tan 2\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}} \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}}$$

Nach einer Ableitung, die analog zu der im Abschnitt 4.6.3 für  $I_{\max}$  und  $I_{\min}$  durchgeführt wurde, ergibt sich für die maximale und minimale Spannung (*Hauptspannungen*)

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}. \quad (8-4)$$

und für die Schubspannung

$$\tau = 0.$$

Die Gleichungen 8-3/4 und 4-25/29 sind völlig analog aufgebaut. Beide behandeln das Hauptachsenproblem. Folgende Größen entsprechen einander

Normalspannung	-	Flächenmoment
Schubspannung	-	biaxiales Flächenmoment

Für die Hauptachsen des ebenen Spannungszustandes gilt

<i>Schubspannung</i>	= 0
<i>Normalspannung für eine Achse</i>	= Maximum
<i>Normalspannung für dazu senkrechte Achse</i>	= Minimum

Analog zum MOHRSchen Kreis der Flächenmomente können die abgeleiteten Beziehungen nach Abb. 8-3 am MOHRSchen Spannungskreis dargestellt werden. Der Radius dieses Kreises entspricht dem Wurzelwert in der Gleichung 8-4. Der Winkel AMD ist gleich  $2\alpha_h$  und der Winkel ACD gleich  $\alpha_h$ . Die Strecken AC und AD sind demnach die beiden Hauptachsen. Nach dem hier verwendeten Koordinatensystem liegt  $\sigma_{\max}$  in Richtung DA und  $\sigma_{\min}$  in Richtung CA. Das ist besonders einfach, da der Punkt D die Stelle  $\sigma_{\max}$  markiert und C die von  $\sigma_{\min}$ .

Nach dem Satz von den zugeordneten Schubspannungen sind die Spannungen  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$  gleich groß. Sie wirken jedoch in zueinander senkrecht stehenden Ebenen. Für die Vorzeichendefinition ist diese Unterscheidung notwendig. Der Punkt A im MOHRSchen Kreis ist gekennzeichnet durch  $\sigma_y; \tau_{yx}$ , der Punkt B durch  $\sigma_x; \tau_{xy}$ . Zwei gegenüberliegende Punkte auf dem MOHRSchen Kreis stellen den Spannungszustand am Element dar. Für das Vorzeichen von  $\tau$  gilt folgende Regel: eine positive Schubspannung erzeugt am Element ein mathematisch positives Moment (umgekehrter Uhrzeigersinn) und umgekehrt. Am Element Abb. 8-3 ist danach  $\tau_{yx}$  positiv und  $\tau_{xy}$  negativ. So liegen diese Werte im Kreis und ergeben die kennzeichnenden Punkte A und B. Die Gültigkeit dieser Vorzeichenregel erkennt man an der Gleichung 8-3. Für  $\sigma_y > \sigma_x$  und  $\tau_{yx} > 0$  muss sich für  $\alpha_h$  ein spitzer Winkel ergeben.

Analog zum Trägheitskreis im Kapitel 4 sind vier Kombinationen möglich. Dabei ist die Zuordnung  $\sigma_y; \tau_{yx}$  und  $\sigma_x; \tau_{xy}$  zu beachten.

Punkt A im Quadranten		Punkt A im Quadranten
$\tau_{yx} > 0$	1	$\tau_{yx} < 0$
$\begin{cases} \sigma_y > \sigma_x \\ \sigma_y < \sigma_x \end{cases}$	2	$\begin{cases} \sigma_y < \sigma_x \\ \sigma_y > \sigma_x \end{cases}$

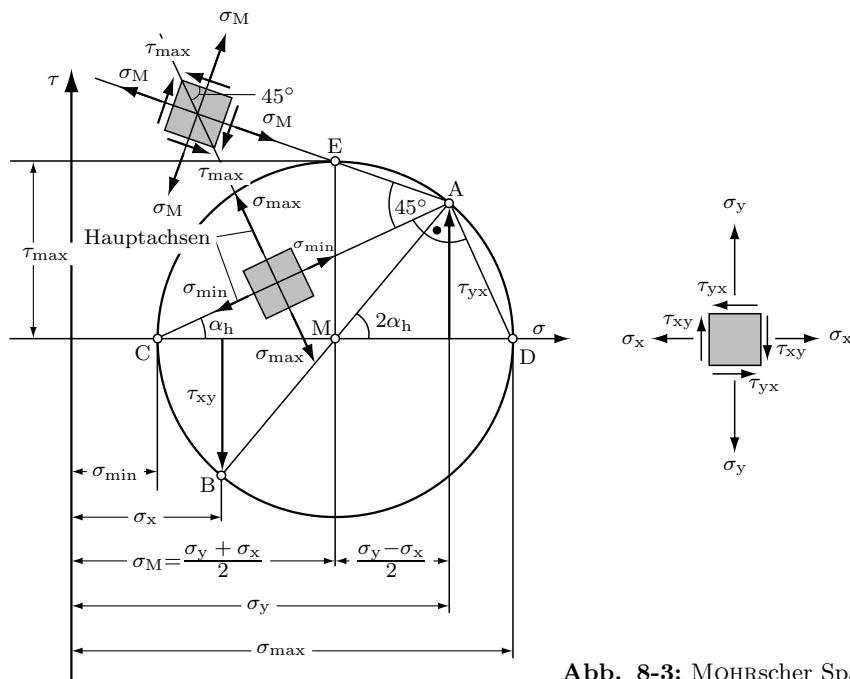


Abb. 8-3: MOHRScher Spannungskreis

Da die tan-Funktion mehrdeutig ist, entstehen bei der Bestimmung der Lage der Hauptachse leicht Fehler. Deshalb sollte der MOHRSche Kreis gezeichnet werden. Man kann auch mit der Anschauung arbeiten. Am Element Abb. 8-3 muss die maximale Spannung nach links oben gerichtet sein. Das kann man sich aus der Zusammensetzung der Kräfte am oberen Teil des Elementes überlegen.

Die Normalspannungen sind bei Druckbelastung negativ. Deshalb kann der Spannungskreis teilweise oder ganz im negativen Bereich der Abszisse liegen.

Zuletzt sollte die Größe in Richtung von  $\tau_{\max}$  bestimmt werden. Dazu ist es notwendig, die Gleichung 8-2 nach  $\alpha$  zu differenzieren und die Ableitung gleich Null zu setzen.

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 2 \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\alpha + 2\tau_{yx} \sin 2\alpha .$$

Für  $\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0$  ist  $\alpha = \alpha_\tau$ .

Damit ist

$$\tan 2\alpha_\tau = - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{yx}} . \quad (8-5)$$

Nach Gleichung 8-3 ist

$$\tan 2\alpha_\tau = - \frac{1}{\tan 2\alpha_h} = \frac{1}{\tan(-2\alpha_h)} .$$

Es muss deshalb gelten

$$2\alpha_\tau - 2\alpha_h = 90^\circ \implies \alpha_\tau = \alpha_h + 45^\circ .$$

Das heißt, dass *die Achsen für  $\tau_{\max}$  um  $45^\circ$  zu den Hauptachsen gedreht* sind.

In der Abb. 8-3 ist der Winkel *EAC* gleich  $45^\circ$  als Peripheriewinkel zum rechten Zentriwinkel *CME*. Da *CA* eine Hauptachse ist, muss deshalb *AE* die Schnittrichtung für die maximale Schubspannung  $\tau_{\max}$  sein.

Die Berechnung von  $\tau_{\max}$  erfolgt analog zu der von  $\sigma_{\max}$  bzw.  $\sigma_{\min}$ . Man erhält

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (8-6)$$

Dieser Wert entspricht, wie zu erwarten, dem Radius des MOHRSchen Spannungskreises. Die zugeordnete Normalspannung beträgt, wie aus Gleichungen 8-1 und 8-2 und dem MOHRSchen Spannungskreis folgt

$$\sigma_M = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (8-7)$$

In der Praxis ergeben sich meistens zwei grundsätzliche Aufgabenstellungen.

#### Fall 1 (Abb. 8-4a)

Es sind Normal- und Schubspannungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung bekannt. Zu bestimmen sind die maximale Normalspannung und deren Wirkungsrichtung (Hauptspannungen). Die Spannungen  $\sigma_y$  und  $\sigma_x$  werden auf der Abszisse gekennzeichnet. Bei  $\sigma_y$  wird  $\tau_{yx}$  nach der Vorzeichenregel aufgetragen. Hier erzeugen die Spannungen  $\tau_{yx}$  ein mathematisch positives Moment, deshalb ist  $\tau_{yx}$  positiv aufzutragen. Man erhält den Punkt A. Analoges gilt für B. Die Verbindung von A nach B liefert den Mittelpunkt und Durchmesser des MOHRSchen Kreises. Dessen Schnittpunkte mit der Abszisse legen die Hauptspannungen  $\sigma_{\max}$  und  $\sigma_{\min}$  fest (Punkte C und D).  $\overline{CA}$  und  $\overline{AD}$  sind Richtungen der Hauptachsen (Kreis des THALES). Die Spannung  $\sigma_{\max}$  hat die Richtung DA,  $\sigma_{\min}$  die von CA. Die Richtigkeit der Konstruktion folgt unmittelbar aus den abgeleiteten Gleichungen und der Abb. 8-3.

#### Fall 2 (Abb. 8-4b/c)

Gibt es in den vorgegebenen Richtungen  $x$  und  $y$  keine Schubspannung ( $\tau_{xy} = 0$ ) dann sind  $\sigma_y$  und  $\sigma_x$  gleichzeitig Hauptspannungen. Für diesen Fall sollen Normal- und Schubspannungen für ein um  $\alpha$  gedrehtes Koordinatensystem bestimmt werden. Die bekannten Werte  $\sigma_y = \sigma_{\max}$  und  $\sigma_x = \sigma_{\min}$  sind die Schnittpunkte des MOHRSchen Kreises mit der Abszisse. Damit liegt der Kreis fest. Der Winkel  $\alpha$  wird an die Abszisse in C angetragen und liefert den Punkt A. Dieser und der gegenüberliegende Punkt B entsprechen dem gesuchten Spannungszustand. Die Richtungen von  $\tau_\alpha$  kann man aus der Anschauung festlegen. Die Spannungen  $\sigma_\alpha$  und die beiden oben liegenden Schubspannungen müssen sich gegenseitig verstärken um  $\sigma_{\max}$  zu ergeben. Formalistisch gilt hier die Vorzeichenregel von  $\tau$  umgekehrt, da das nicht gedrehte System Hauptachsensystem ist. Im Kreis ist  $\tau_\alpha$  positiv, es erzeugt deshalb am Element ein Moment im Uhrzeigersinn. Man kann auch von einem Kreis nach Abb. 8-4c ausgehen. Hier ist das Hauptachsensystem gedreht. Da der Winkel  $\alpha$  mathematisch positiv gezählt wird, muss von der Lage A' ausgegangen werden. Jetzt ist  $\tau_\alpha$  negativ und wirkt nach der ursprünglichen Vorzeichenregelung wie angegeben. Für die meisten Anwendungsfälle ist die Lösung nach Abb. 8-4b anschaulicher (z.B. Beispiel 2).

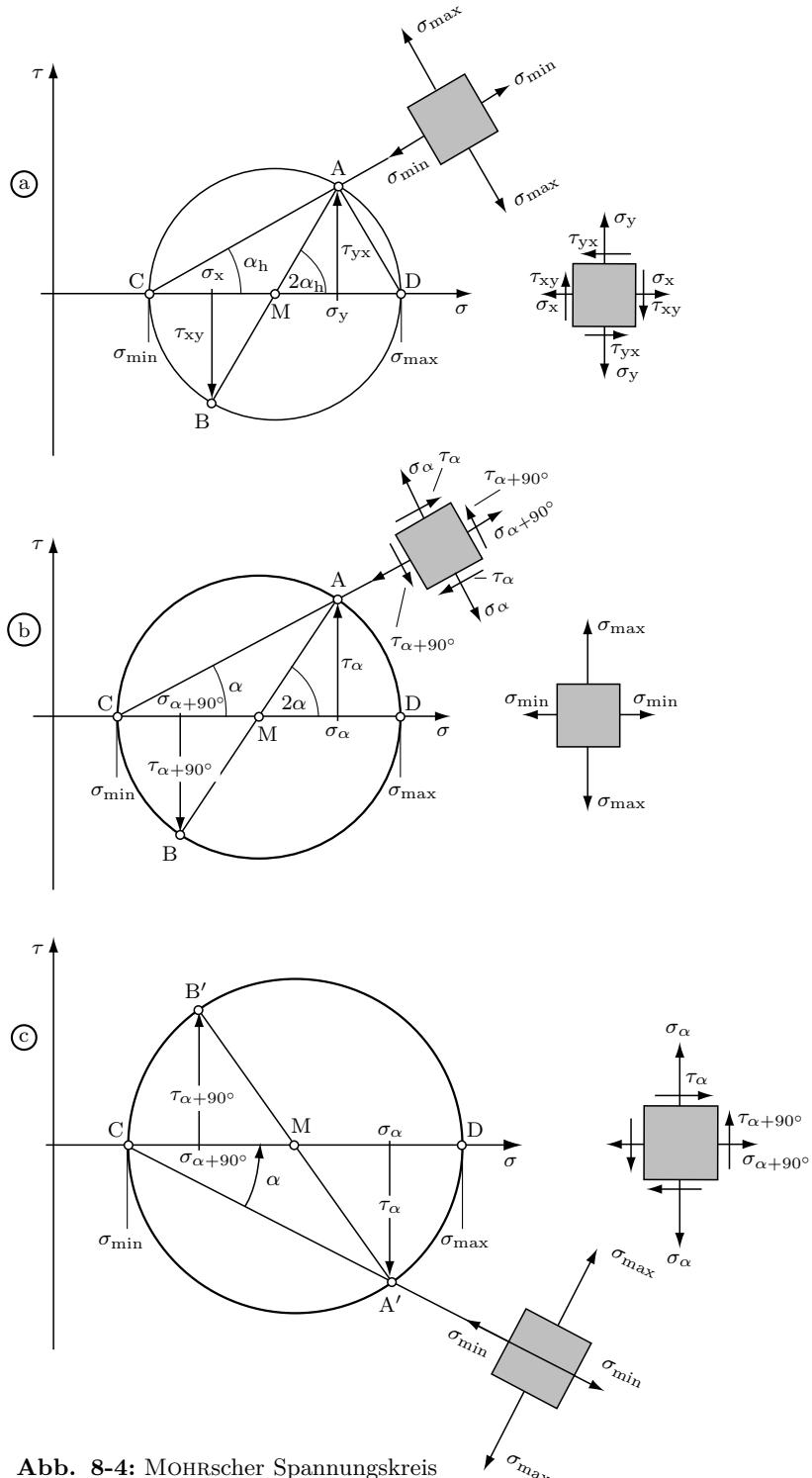


Abb. 8-4: MOHRScher Spannungskreis

Zusammenfassend soll darauf hingewiesen werden, dass jeweils zwei gegenüberliegende Punkte auf dem MOHRSchen Kreis dem Spannungszustand an einem Rechteckelement entsprechen. Einer Drehung des Koordinatensystems um den Winkel  $\alpha$  entspricht eine Drehung im MOHRSchen Kreis um den Winkel  $2\alpha$ .

### Beispiel (Abb. 8-5)

Skizziert ist eine exzentrisch belastete Konsole, die als Kastenträger ausgebildet ist. Für das gekennzeichnete Element  $\Delta A$  sind die Hauptspannungen, die maximale Schubspannung und die Lage der Hauptachsen zu bestimmen. Der MOHRSche Spannungskreis ist zu zeichnen.

$$F = 50,0 \text{ kN}; \quad a = 800 \text{ mm}; \quad b = 700 \text{ mm}$$

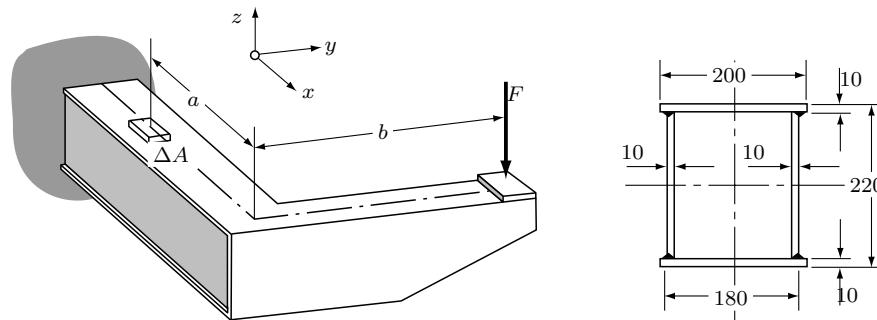


Abb. 8-5: Exzentrisch belasteter Kastenträger

### Lösung (Abb. 8-6/8-7)

In  $x$ -Richtung wirkt die Biegespannung und in Umfangsrichtung des Kastens die durch Verdrehung verursachte Schubspannung  $\tau_{xy}$ .

Biegung

Flächenmoment (Tabelle 9 und STEINER Gl. 4-11)

$$I_y = 2 \left( \frac{20 \text{ cm} \cdot 1^3 \text{ cm}^3}{12} + 10,5^2 \text{ cm}^2 \cdot 20 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} + \frac{1 \text{ cm} \cdot 20^3 \text{ cm}^3}{12} \right) = 5747 \text{ cm}^4$$

Widerstandsmoment

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{5747 \text{ cm}^4}{11,0 \text{ cm}} = 522 \text{ cm}^3$$

Biegemoment

$$M_b = F \cdot a = 50 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 80 \text{ cm} = 4,0 \cdot 10^6 \text{ Ncm}$$

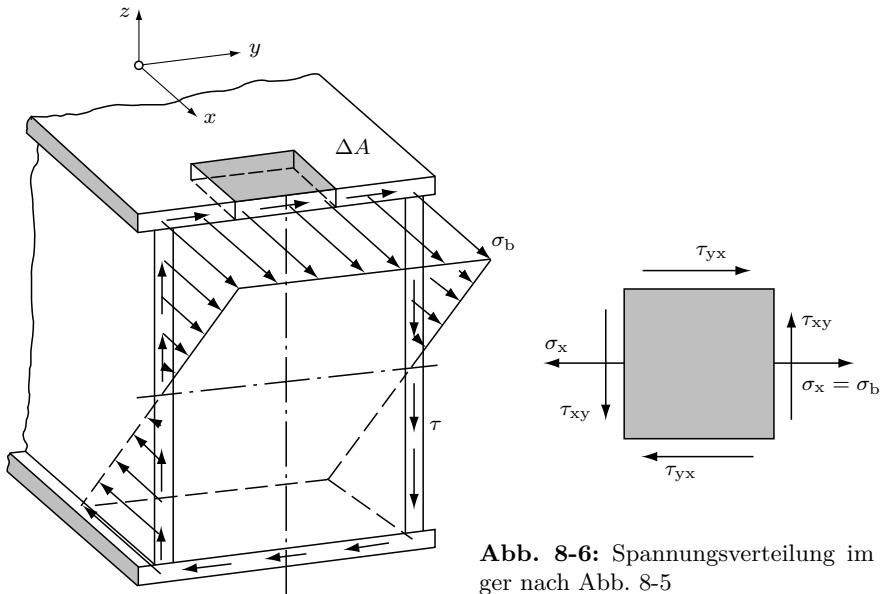


Abb. 8-6: Spannungsverteilung im Kastenträger nach Abb. 8-5

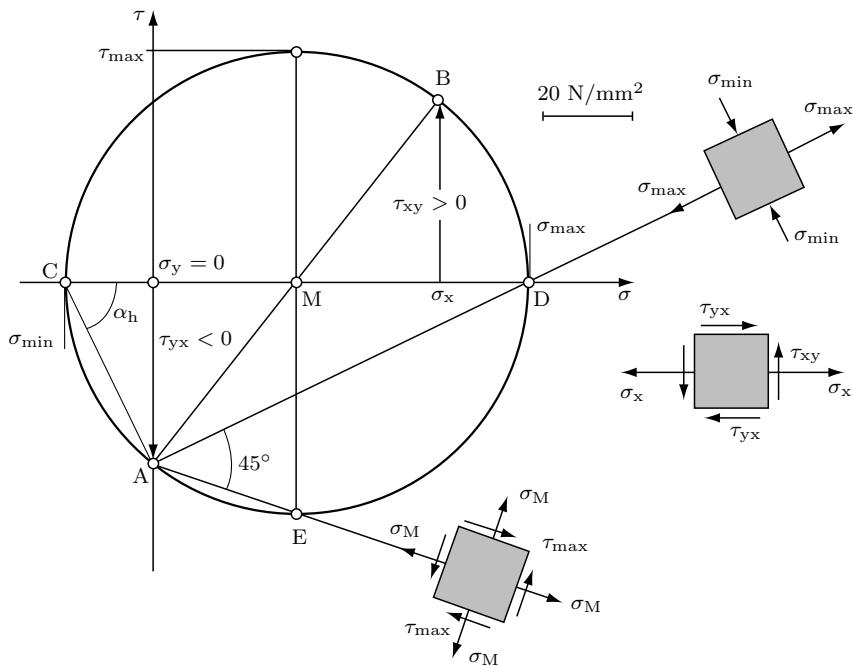


Abb. 8-7: MOHRScher Spannungskreis für Teilelement des Kastenträgers nach Abb. 8-5

### Biegespannung

$$\sigma_b = \sigma_x = \frac{M_b}{W_y} = \frac{4,0 \cdot 10^6 \text{ Ncm}}{522 \text{ cm}^3} \cdot \frac{\text{cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 76,6 \text{ N/mm}^2$$

### Verdrehung

Widerstandsmoment (BREDT Gl. 6-12; Tabelle 13)

$$W_t = (A_a + A_i) \cdot s_{\min} = (22 \cdot 18 + 20 \cdot 16) \text{ cm}^2 \cdot 1,0 \text{ cm} = 716 \text{ cm}^3$$

### Torsionsmoment

$$M_t = F \cdot b = 50 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 70 \text{ cm} = 3,5 \cdot 10^6 \text{ Ncm}$$

### Schubspannung

$$\tau = |\tau_{yx}| = |\tau_{xy}| = \frac{M_t}{W_t} = \frac{3,5 \cdot 10^6 \text{ Ncm}}{716 \text{ cm}^3} \cdot \frac{\text{cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 48,9 \text{ N/mm}^2$$

Das Teilelement mit den eingezeichneten Spannungen zeigt die Abb. 8-6. Im vorliegenden Fall ist  $\sigma_y = 0$ . Das führt mit der Gleichung 8-4 auf die Hauptspannungen

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} = \left(\frac{76,6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{76,6}{2}\right)^2 + 48,9^2}\right) \text{ N/mm}^2$$

$$\underline{\sigma_{\max} = 100,4 \text{ N/mm}^2} \quad \underline{\sigma_{\min} = -23,8 \text{ N/mm}^2}$$

Die maximale Schubspannung berechnet man am einfachsten aus den Hauptspannungen nach Gleichung 8-6

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{100,4 - (-23,8)}{2} \text{ N/mm}^2$$

$$\underline{\sigma_{\max} = 62,1 \text{ N/mm}^2}$$

Für die Auswertung der Gleichung 8-3 ist es notwendig, die Vorzeichen von  $\tau$  zu bestimmen.  $\tau_{xy}$  verursacht am Element ein mathematisch positives Moment,  $\tau_{yx}$  ein negatives

$$\tau_{xy} = +48,9 \text{ N/mm}^2 \quad \tau_{yx} = -48,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Damit ist } \tan 2\alpha_h = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{2(-48,9 \text{ N/mm}^2)}{-76,6 \text{ N/mm}^2}$$

$$2\alpha_h = -128,1^\circ; \quad 51,9^\circ; \quad 231,9^\circ \dots .$$

$$\alpha_h = -64^\circ; \quad 26^\circ; \quad 116^\circ \dots .$$

Diese Winkel legen die beiden Hauptachsen fest. Der erste und dritte Wert bezeichnen die gleiche Achse. In welcher Richtung  $\sigma_{\max}$  und  $\sigma_{\min}$  wirken, kann man am einfachsten am MOHRSchen Kreis nach Abb. 8-7 erkennen. Dieser wird folgendermaßen gezeichnet. Die Normalspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  werden auf der Abszisse gekennzeichnet. Dabei ist  $\sigma_y = 0$  der Ursprungspunkt des Koordinatensystems. Jetzt ist zu beachten, dass ein Punkt im Kreis den Spannungszustand an einer Elementenfläche darstellt. An den gleichen Flächen wirken  $\sigma_y$ ;  $\tau_{yx}$  und  $\sigma_x$ ;  $\tau_{xy}$ .  $\tau_{xy}$  erzeugt ein positives,  $\tau_{yx}$  ein negatives Moment am Flächenelement. Hier müssen deshalb bei  $\sigma_y = 0$ ;  $\tau_{yx} = -48,8 \text{ N/mm}^2$  (Punkt A) und bei  $\sigma_x = 76,6 \text{ N/mm}^2$ ;  $\tau_{xy} = +48,8 \text{ N/mm}^2$  (Punkt B) aufgetragen werden. A und B werden verbunden und ergeben auf der Abszisse den Mittelpunkt M des Kreises, der mit dem Radius MA ( $\hat{=} \tau_{\max}$ ) gezeichnet wird. Er schneidet den Kreis bei  $\sigma_{\max}$ . Dieser Schnittpunkt D legt mit A auch die Richtung von  $\sigma_{\max}$  fest. Analoges gilt für C und  $\sigma_{\min}$ . Ein um  $45^\circ$  gedrehtes System AE liefert den Schnitt für  $\tau_{\max}$ .

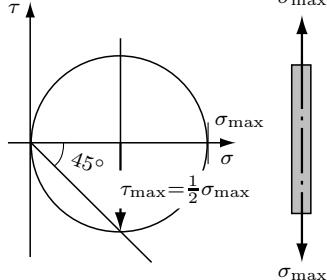
Das vorliegende Beispiel versucht, folgende Erkenntnisse zu vermitteln. In einem belasteten Bauteil entsteht an einer Stelle nicht DIE formelmäßig erfassbare Spannung. Für jede Richtung ergeben sich an einem Element andere Spannungen, z.B. wirkt hier in Schnitten CA eine maximale Zugspannung in Richtung AD. In diese Richtung erfolgt auch die maximale Dehnung des Werkstoffs. Würde man die betrachtete Stelle mit einem spröden Lack überziehen, der der Dehnung nicht folgen kann, entstünden Risse in Richtung CA. Senkrecht zu  $\sigma_{\max}$  wirken Druckspannungen. Diese würden den Lack zusammendrücken. In Schnitten die durch AE gekennzeichnet sind, ist die Belastung so, dass sich maximale Winkeländerungen nach Abschnitt 2.3 ergeben. Die Vorgänge im Werkstoff sind sehr komplex. Aus diesem Grunde ist es immer noch weitgehend unbekannt, welche der vielfältigen Wirkungen bei Überlastung letztlich zur Zerstörung eines Bauteils führt. Mit dieser Thematik befasst sich das nächste Kapitel. Dort wird auf hier abgeleitete Gleichungen zurückgegriffen.

## 8.3 Die verschiedenen Beanspruchungsarten

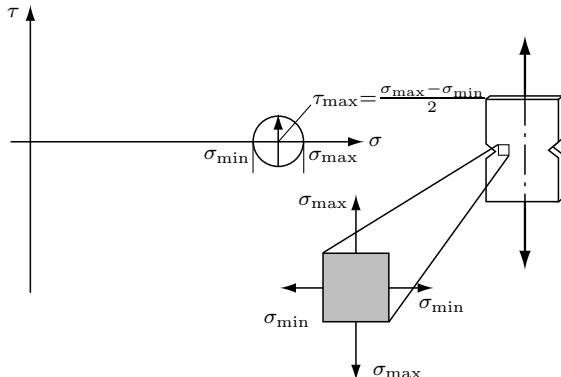
### 8.3.1 Zug

Der einachsige Zug wird durch einen tangierenden Spannungskreis nach Abb. 8-8 dargestellt. Die maximale Schubspannung wirkt in Schnitten unter  $45^\circ$ . Sie ist halb so groß wie die Hauptspannung und verursacht bei Erreichen der Streckengrenze in zähen Werkstoffen das Abgleiten einzelner Schichten. Die damit verbundene Einschnürung führt durch die Querschnittsminderung letztlich zum Bruch.

Im Kerbgrund eines gekerbten Stabes entstehen durch Umlenkung des Kraftflusses Querspannungen. Das wurde bereits im Abschnitt 2.7 (Abb. 2-14/2-15) diskutiert. Dem Spannungskreis nach Abb. 8-9 entnimmt man, dass die Schubspannung z.T. erheblich vermindert ist. Damit entfällt die Ursache für Fließen und Einschnüren. Der *gekerbte Stab verhält sich spröde* und kann bei *ruhender* Belastung eine höhere Kraft übertragen als der ungekerbte. Der Vergleich gilt nur, wenn der Querschnitt im Kerbgrund gleich dem Querschnitt des ungekerbten Stabes ist. Für eine dynamische Belastung sind Kerben jedoch besonders gefährlich. Darauf wurde bereits im Kapitel 2 eingegangen.



**Abb. 8-8:** MOHRSCHER Spannungskreis für Zugstab

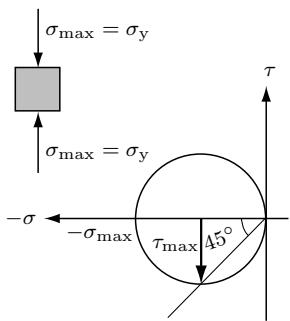


**Abb. 8-9:** MOHRSCHER Spannungskreis für Element im Kerbgrund eines gekerbten Zugstabes

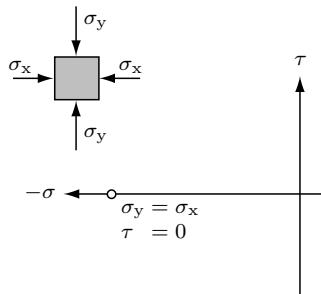
### 8.3.2 Druck

Für den einachsigen Druck ergeben sich analoge Verhältnisse wie für den einachsigen Zug (Abb. 8-11). Die maximale Schubspannung führt bei einigen Werkstoffen zu Bruchflächen, wie sie in der Abb. 3-7 gezeigt sind.

Für die Behandlung des mehrachsigen Druckes soll vorausgesetzt werden, dass



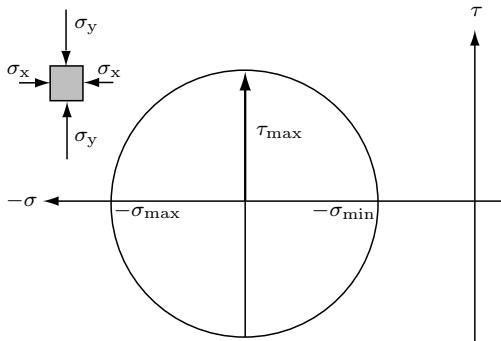
**Abb. 8-10:** MOHRScher Spannungskreis für einachsigen Druck



**Abb. 8-11:** MOHRScher Spannungskreis für allseitig gleichen Druck

die Spannung senkrecht zur Zeichenebene gleich  $\sigma_x$  ist. Wirken von allen Seiten gleiche Druckspannungen auf den Versuchskörper, dann ist wegen  $\sigma_x = \sigma_y$  der Spannungskreis zu einem Punkt zusammengeschrumpft (Abb. 8-11). Die Schubspannung verschwindet, die allseitig wirkenden Normalspannungen verursachen lediglich eine Volumenverkleinerung. Im Versuch ist bei einem *allseitig gleichen Druck eine Zerstörung nicht möglich*. Einer solchen Belastung unterliegt z.B. ein Stein im Wasser, der dabei dem allseitigen, gleichen Wasserdruk ausgesetzt ist.

Die Druckfestigkeit eines einachsig belasteten Versuchsblocks erhöht sich, wenn man zusätzlich senkrecht zur Belastungsachse den Block durch Druck belastet. Das folgt zunächst aus dem oben diskutierten Fall, für den eine Zerstörung nicht möglich ist. Das gilt aber auch, wenn  $\sigma_y \neq \sigma_x$  ist. Da die Differenz dieser beiden Spannungen gleich der doppelten Schubspannung ist, können bei einer solchen Belastung z.T. *erhebliche Schubspannungen* auftreten. Diese können bei sonst spröden Werkstoffen zum Fließen führen, wobei die übertragbaren Spannun-



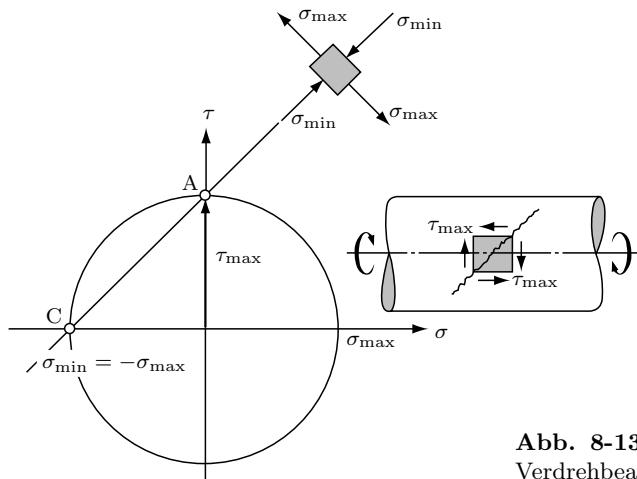
**Abb. 8-12:** MOHRScher Spannungskreis für mehrachsigen Druck

gen wesentlich höher liegen als bei einachsiger Belastung. Die  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramme entsprechen dabei denen von zähen Werkstoffen. KÁRMAN<sup>1</sup> hat entsprechende Versuche mit Marmor durchgeführt und dabei bei einer Belastung, wie sie Abb. 8-12 entspricht, Fließlinien beobachtet und  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramme aufgenommen, wie sie sich sonst nur für zähe Werkstoffe ergeben.

*In diesem Zusammenhang zeigt sich erneut, dass ein Werkstoff nicht von Natur aus zäh oder spröde ist, sondern dass er je nach Belastungsart, Belastungsgeschwindigkeit, Form und Temperatur sich mehr oder weniger zäh oder spröde verhalten kann.*

### 8.3.3 Verdrehung

Der Mittelpunkt des Spannungskreises liegt bei Verdrehung im Ursprungspunkt des Koordinatensystems, da  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  für den tordierten Querschnitt gilt. Daraus folgt, dass die Torsionsspannung  $\tau_t = \tau_{\max}$  ist (Abb. 8-13). In Schnitten unter  $45^\circ$  wirken je nach Richtung Zug- bzw. Druckspannungen der Größe  $\sigma_z = \sigma_d = \tau_{\max}$ . Diese Zugspannungen führen z.B. bei gehärtetem Stahl, Grauguss, Porzellan und verschiedenen anderen Stoffen zu Brüchen nach Abb. 6-11.



**Abb. 8-13:** MOHRScher Spannungskreis für Verdrehbeanspruchung

<sup>1</sup>KÁRMAN, Theodore von (1881–1963), amerikanischer Physiker und Mathematiker.

## 8.4 Zusammenfassung

An einem quaderförmigen Teilelement greifen im allgemeinen Falle die Normalspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  und die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{yx}$  an.

Unter einem Winkel  $\alpha$  zur  $x$ -Richtung wirken in der Schnittebene folgende Spannungen

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha \quad (8-1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cos 2\alpha \quad (8-2)$$

Für den Schnitt unter dem Winkel

$$\tan 2\alpha_h = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_y - \sigma_x} \quad (8-3)$$

verschwindet die Schubspannung  $\tau_\alpha$ . Gleichzeitig wird  $\sigma_\alpha = \sigma_{\min}^{\max}$  in senkrecht zueinander stehenden Schnitten

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}. \quad (8-4)$$

Die Achsen unter dem Winkel  $\alpha_h$  und  $\alpha_h + 90^\circ$  werden analog zu den Flächenmomenten Hauptachsen genannt. Folgende Werte entsprechen einander

Normalspannung	–	Flächenmoment
Schubspannung	–	biaxiale Flächenmomente

Unter  $45^\circ$  zur Hauptachse erreichen die Schubspannungen einen Maximalwert

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (8-6)$$

Graphisch werden die Gleichungen vom MOHRSchen Spannungskreis wiedergegeben. Seine Anwendung auf Zug, Druck und Torsion erleichtert das Verständnis über das Verhalten der verschiedenen Werkstoffe bei diesen Beanspruchungen (Abb. 8-8 bis 8-13).

# 9 Zusammengesetzte Beanspruchung

## 9.1 Einführung

Mit der *Addition von Normalspannungen* beginnt das Kapitel. Eine Anwendung ist z.B. die Überlagerung von Zug und Biegung. Es folgt die *Zusammensetzung von Normal- und Schubspannungen*. Diese haben grundsätzlich unterschiedliche Wirkung: Längenänderung, Winkeländerung. Deshalb hat eine vektorielle Addition von Normal- und Schubspannungen keine physikalische Bedeutung. Die Konsequenz ist die Tatsache, dass letztlich der Grund für die Zerstörung eines Werkstoffs nicht bekannt ist. Anders ausgedrückt, es gibt keinen Kennwert (z.B. Spannung, Dehnung, Arbeit), der beim Erreichen eines Grenzwertes einen Bruch anzeigt. Man kann nur *Bruchhypthesen* aufstellen und diese experimentell auf ihre Gültigkeit untersuchen. Hier werden folgende Hypothesen vorgestellt:

1. Normalspannungshypothese (Hauptspannungshypothese),
2. Hypothese der größten Schubspannung,
3. Hypothese des Grenzzustandes nach MOHR,
4. Hypothese der größten Dehnung,
5. Hypothese der größten Formänderungsarbeit,
6. Hypothese der größten Gestaltänderungsarbeit.

Die Anwendung der in der Technik eingeführten Hypothesen erfolgt auf folgende Fälle: *Biegung und Verdrehung* (Welle), *Biegung und Schub* (Stahlbau), *Verdrehung und Zug/Druck* (Gewinde), *mehrachsiger Zug* (Druckbehälter und rotierende Scheibe, hier Hinweis auf Kapitel 12)

## 9.2 Addition von Normalspannungen

### 9.2.1 Zug und Biegung

Ausgegangen wird von einem Stab, der axial außerhalb der Schwerpunktachse belastet ist. Hier ist einer zentrischen Zugbelastung, wie sie im Abschnitt 3.1.1 behandelt wurde, eine Biegung überlagert. Zur Bestimmung der Größe des Biegemomentes muss die Kraft  $F$  nach Abb. 9-1 parallel in die Schwerpunktachse verschoben werden. Bei Parallelverschiebung einer Kraft  $F$  um den Abstand  $f$  muss ein Moment  $F \cdot f$  addiert werden. Das wurde im Band 1 Abschnitt 3.3.4 abgeleitet, ist aber auch aus der Abb. 9-1 ohne weitere Erklärung verständlich. Man erhält so eine Überlagerung des zentrischen Zuges (Kraft  $F$ ) und einer Biegung (Biegemoment  $F \cdot f$ ). *Beide verursachen gleichgerichtete Normalspannungen, die unter Beachtung der Vorzeichen addiert werden.* Die unbelastete Faser liegt nicht mehr in der Schwerpunktachse. Die Spannungen in den Außenfasern haben die Größe:

Seite des größeren Faserabstandes

$$\sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{M_b}{I} e_{\max} = \frac{F}{A} \pm \frac{M_b}{W} \quad \left. \right\} \quad (9-1)$$

Seite des kleineren Faserabstandes

$$\sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{M_b}{I} e_{\min}$$

*Schon kleine Exzentrizitäten in der Krafteinleitung führen zu einer wesentlichen*

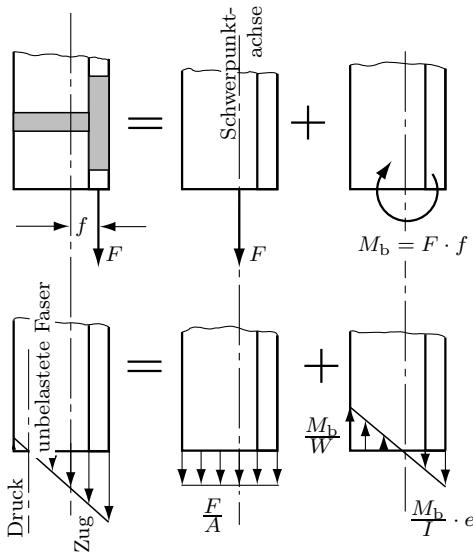


Abb. 9-1: Überlagerung von Zug und Biegung

*Erhöhung der maximalen Spannung in einem Zugstab (siehe Beispiel 1). Auf der anderen Seite kann man bei gekröpften Trägern die auftretenden Zugspannungen gegenüber den normalerweise viel größeren Biegespannungen fast immer vernachlässigen (siehe Beispiel 2).*

### Beispiel 1 (Abb. 9-2)

Ein gewalzter T-50-Stahl ist nach Skizze mit  $F = 20 \text{ kN}$  auf Zug beansprucht. An dem Ende, an dem die Kraft eingeleitet wird, ist der Flansch abgefräst. Zu bestimmen sind die Spannungen in den Schnitten A-A und B-B.

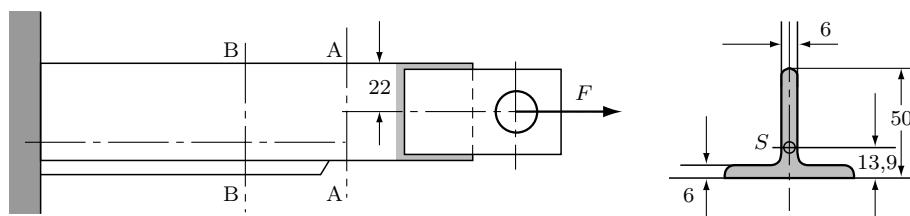


Abb. 9-2: T-Stahl exzentrisch gezogen

### Lösung

Dem Normblatt entnimmt man folgende Werte  $I_y = 12,1 \text{ cm}^4$ ;  $W_y = 3,36 \text{ cm}^3$ ;  $A = 5,66 \text{ cm}^2$ . Die Schwerpunktlage ist in der Abbildung 9-2 vermaßt.

Schnitt A-A:

$$\underline{\sigma} = \frac{F}{A} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N}}{6 \cdot 44 \text{ mm}^2} = \underline{75,8 \text{ N/mm}^2}.$$

Schnitt B-B:

Die Kraft  $F$  muss um  $f = 50 \text{ mm} - 22 \text{ mm} - 13,9 \text{ mm} = 14,1 \text{ mm}$  in die Schwerpunktachse des T-Profils verschoben werden. Dabei entsteht ein Biegemoment

$$M_b = F \cdot f = 20 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 1,41 \text{ cm} = 2,82 \cdot 10^4 \text{ Ncm}.$$

Man erhält nach Gleichung 9-1

Stegseite (oben)

$$\sigma_o = \frac{F}{A} + \frac{M_b}{W} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N}}{566 \text{ mm}^2} + \frac{2,82 \cdot 10^4 \text{ Ncm}}{3,36 \text{ cm}^3} \cdot \frac{1 \text{ cm}^2}{100 \text{ mm}^2}$$

$$\underline{\sigma_o = 35,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} + 83,9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \underline{119,3 \text{ N/mm}^2}}$$

Flanschseite (unten)

$$\sigma_u = \frac{F}{A} - \frac{M_b}{I} \cdot e = 35,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - \frac{2,82 \cdot 10^4 \text{ Ncm}}{12,1 \text{ cm}^4} \cdot 1,39 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ cm}^2}{100 \text{ mm}^2}$$

$$\underline{\sigma_u = 35,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 32,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 2,9 \text{ N/mm}^2}.$$

Durch die geringe Exzentrizität von 14 mm steigt die Spannung von  $35,3 \text{ N/mm}^2$  auf mehr als den dreifachen Wert  $119,3 \text{ N/mm}^2$ . Besonders beachtenswert ist, dass an der Stelle wo der Flansch abgefräst ist (Schnitt A-A), die Spannung geringer ist als im vollen Querschnitt. Der Schnitt A-A ist gleichmäßig ausgelastet. Im Gegensatz dazu ist der volle Querschnitt sehr ungleichmäßig ausgenutzt. Der Flansch unterliegt einer sehr geringen Spannung, sein Betrag zur Kraftübertragung ist demnach sehr gering. Kompensiert wird das durch hohe Beanspruchung der Außenfaser des Steges.

### **Beispiel 2**

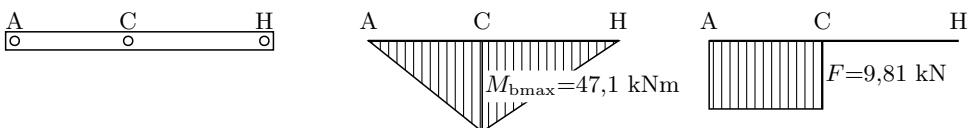
Der Träger ACH des Rahmens Abb. 4-35 (Beispiel 1; Abschn. 4.4.2) ist zu dimensionieren. Er soll aus zwei zu einem Kastenprofil zusammengesetzten U-Trägern bestehen. Die Gelenke bedürfen einer besonderen Berechnung, die erst nach der Konstruktion möglich ist. Die zulässige Spannung wird auf  $\sigma_{zul} = 100 \text{ N/mm}$  festgelegt.

### **Lösung**

In dem Träger wirken im Abschnitt AC sowohl Biege- als auch Zugspannungen (s. Abb. 9-3 und Abb. 4-36/37). Die Anwendung der Gleichung 9-1 ist nicht möglich, da sowohl das Widerstandsmoment  $W$  als auch die Querschnittsfläche  $A$  unbekannt sind. Da die Biegespannung normalerweise überwiegt, soll in einem ersten Schritt nur für die Biegung  $M_{bmax} = 47,1 \cdot 10^5 \text{ Ncm}$  dimensioniert werden

$$W_{y\text{ erf}} = \frac{M_b}{\sigma_{zul}} = \frac{47,1 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{100 \text{ N/mm}^2} \cdot \frac{\text{cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 471 \text{ cm}^3.$$

Das ergibt pro U-Träger  $W_y = 236 \text{ cm}^3$  und nach Tabelle 10C ein Profil U 220 mit  $W_y = 245 \text{ cm}^3$  und  $A = 37,4 \text{ cm}^2$ .



**Abb. 9-3:** Biegemomenten- und Zugkraftdiagramm im Träger ACH

Für den Kastenträger führt das auf  $W_y = 490 \text{ cm}^3$  und  $A = 74,8 \text{ cm}^2$ . Mit diesen Werten kann die Gleichung 9-1 ausgewertet werden

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_b}{W_y} = \left( \frac{9,81 \cdot 10^3 \text{ N}}{74,8 \text{ cm}^2} + \frac{47,1 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{490 \text{ cm}^3} \right) \frac{\text{cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2}$$

$$\sigma = (1,3 + 96,1) \text{ N/mm}^2 \approx 98 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{\text{zul}}.$$

Der aus zwei Profilen U 220 zusammengesetzte Träger ist damit bestätigt. Eine zweite Rechnung mit den Werten eines größeren Profils ist nicht erforderlich. Die Wirkung der Biegespannung überwiegt deutlich.

### 9.2.2 Druck und Biegung

Grundsätzlich gelten auch bei Überlagerung von Druck und Biegung die Gleichungen 9-1. Bei schlanken Stäben stellt sich jedoch die Frage der Knickung, die bei Überlagerung mit Biegung besonders gefährlich ist. Die Gleichungen 9-1 sollen deshalb nur auf Bauelemente mit geringem Schlankheitsgrad angewendet werden.

## 9.3 Zusammensetzung von Normal- und Schubspannung

### 9.3.1 Bruchhypthesen und Vergleichsspannungen

Es soll in diesem Abschnitt von dem im Kapitel 2 beschriebenen Zugversuch ausgegangen werden. Für einen weichen Stahl wird die Zerstörung eingeleitet, wenn Gefügeteile aneinander abgleiten und der Stab bleibend gedehnt wird. Bei sprödem Material erfolgt ein Trennbruch ohne bleibende Dehnung. In Kapitel 3 ist bereits darauf hingewiesen worden, dass die für die Dimensionierung benutzte zulässige Spannung eine Rechengröße ist, die nicht unbedingt die tatsächlichen Ursachen der Zerstörung erfasst. Es fragt sich deshalb, welche anderen Faktoren noch als *Ursache einer Zerstörung* angesehen werden können. Bisher sind fünf Größen in Betracht gezogen worden, die bei Überschreitung eines kritischen Wertes die Zerstörung einleiten könnten.

1. Die *Normalspannung*. Im Falle des Zugversuches an einem weichen Stahl ist das die Elastizitätsgrenze  $R_{p0,01}$ , bei deren Überschreiten der Stab bleibend gedehnt wird.

2. Die *maximale Schubspannung*. In einem gezogenen Stab wirkt sie in Schnitten unter  $45^\circ$  zur Achse (s. Kapitel 3). Ihre Größe ist bei einsetzender plastischer Deformation  $\tau_{\max} = R_{p0,01}/2$ .
3. Die *Dehnung*. Im Zugversuch ist das die maximale elastische Dehnung  $\varepsilon = R_{p0,01}/E$ .
4. Die *Formänderungsarbeit*. Für den Zugversuch beträgt sie nach Gleichung 3-12  $R_{p0,01}^2/(2E)$ .
5. Die *Gestaltänderungsarbeit*. Für den Zugversuch beträgt sie nach Gleichung 3-15  $\frac{1+\mu}{3E} \cdot R_{p0,01}^2$ .

Alle diese Größen erreichen bei beginnendem Versagen eines Zugstabes ihren Maximalwert, da sie alle von  $R_{p0,01}$  abhängen. Es steht also für den Zugversuch nicht fest, ob die Zerstörung einsetzt, weil der Stab

1. keine größeren Normalspannungen im Querschnitt übertragen kann,
2. keine größeren Schubspannungen im Schnitt unter  $45^\circ$  zur Achse übertragen kann,
3. sich nicht weiter dehnen kann,
4. keine Formänderungsarbeit mehr zu absorbieren vermag,
5. keine größere Gestaltänderungsarbeit mehr aufnehmen kann.

Da alle diese Größen beim Zugversuch gleichzeitig einen Maximalwert erreichen, erscheint es zunächst müßig zu klären, ob die Größe  $R_{p0,01}$  allein, oder in irgendeiner Kombination mit  $E$  und  $\mu$  einen kritischen Wert nicht erreichen darf. Bei zusammengesetzten Beanspruchungen jedoch erreichen nicht alle oben in Betracht gezogenen Faktoren bei einsetzender Zerstörung gleichzeitig ein Maximum. Man muss deshalb wissen – will man nicht an jedem Bauteil Festigkeitsversuche, z.B. am Modell, durchführen –, welche Grenze eine weitere Belastung ausschließt.

Die Festigkeitsberechnung eines Bauteiles erfordert die Annahme einer der oben aufgeführten Größen (bzw. einer Kombination mehrerer Größen), die für die Zerstörung unter der voraussichtlichen Belastung verantwortlich ist. Die so gewählte Größe (bzw. die Kombination mehrerer Größen) darf einen kritischen Wert nicht erreichen, soll eine Zerstörung vermieden werden. Dieser kritische Wert muss an einem einfachen Versuch für den gewählten Werkstoff bestimmt werden. Da alle in Betracht gezogenen Faktoren für die Zerstörung beim Zugversuch gleichzeitig ihren Maximalwert erreichen, ist es möglich, durch diesen Versuch den jeweiligen nicht zu überschreitenden kritischen Wert zu ermitteln.

Es werden auf Grund von Versuchen an verschiedenen Bauteilen aus verschiedenen Werkstoffen *Hypothesen über den maßgeblichen Einfluss auf die Zerstörung* aufgestellt. Zunächst bieten sich die oben aufgeführten fünf Größen an, jedoch sind auch Kombinationen dieser Größen untereinander denkbar.

### 1. Hypothese der größten Normalspannung (Hauptspannung)

Für einen mehrachsigen Spannungszustand darf nach dieser Hypothese die Hauptspannung  $\sigma_{\max}$  eine beim Zugversuch ermittelte zulässige Spannung nicht überschreiten. Man vergleicht den komplizierten Spannungszustand mit dem einfacheren eines Zugstabes, oder anders ausgedrückt, man reduziert ihn auf diesen. Deshalb spricht man von *Vergleichsspannung*  $\sigma_v$  oder reduzierter Spannung. Hier soll der erste Begriff verwendet werden. Danach ist mit der Gleichung 8-4

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{zul}} &\geq \sigma_v = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \\ \text{Für } \sigma_x = 0; \sigma_y = \sigma; \tau_{yx} = \tau \\ \sigma_{\text{zul}} &\geq \sigma_v = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

für  $\tau = 0$  (Hauptachsensystem)

$$\sigma_{\text{zul}} \geq \sigma_v = \sigma_{\max}$$

Nach dieser Hypothese müsste ein auf Druck einachsig belasteter Block die gleiche Festigkeit haben wie ein mehrachsig belasteter, denn für  $\tau_{yx} = 0$  gilt

$$\sigma_v = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} = \sigma_y$$

Danach ist  $\sigma_x$  ohne Einfluss auf die Zerstörung. Bei mehrachsigem Druck ist jedoch die Druckfestigkeit z.T. wesentlich höher. Für eine solche Belastung stimmt die Hypothese mit dem Versuch nicht überein.

Diese Hypothese auf einen verdrehten zylindrischen Stab angewendet, ergibt nach Abb. 6-10b mit  $\sigma = 0$  und  $\tau = \tau_{\text{zul}}$

$$\sigma_{\text{zul}} = \tau_{\text{zul}} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{\text{Grenz}} = \tau_{\text{Grenz}}.$$

Der Versuch ergibt eine z.T. erheblich kleinere Belastbarkeit eines zylindrischen auf Verdrehung beanspruchten Stabes. Auch hier steht die Hypothese im Widerspruch zum Versuch.

Man erhält brauchbare Übereinstimmung zwischen Versuch und Berechnung nach der Hauptspannungshypothese für spröden Werkstoff bzw. für Fälle, bei denen die Zerstörung ohne vorhergehende plastische Deformation erfolgt.

## 2. Hypothese der größten Schubspannung

Nach dieser Hypothese ist die größte Schubspannung eines beliebigen Spannungszustandes für die Zerstörung verantwortlich, sie beträgt nach Gl. 8-6

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}$$

Im Zugversuch ist die maximale Schubspannung in Schnitten unter  $45^\circ$  halb so groß wie die Normalspannung, die als Vergleichsspannung gilt (s. Abschnitt 8.3.1)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_v}{2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_v = 2\tau_{\max}.$$

Das ergibt

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{zul} \geq \sigma_v = \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + (2\tau_{yx})^2} \\ \text{Für } \sigma_y = \sigma; \sigma_x = 0; \tau_{yx} = \tau \\ \sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + (2\tau)^2}, \\ \text{für } \tau = 0 \text{ (Hauptachsensystem)} \\ \sigma_v = \sigma_y - \sigma_x = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \end{array} \right\} \quad (9-3)$$

Die Anwendung dieser Hypothese auf die Verdrehung eines Stabes mit Kreisquerschnitt liefert eine Beziehung zwischen den zulässigen Spannungen  $\tau_{zul}$  und  $\sigma_{zul}$ . Mit  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  und  $\tau = \tau_{zul}$  erhält man aus Gleichung 9-3

$$\tau_{zul} = \frac{1}{2} \sigma_{zul} \quad \text{bzw.} \quad \tau_{Grenz} = \frac{1}{2} \sigma_{Grenz}.$$

Die Versuche ergeben eine höhere Belastbarkeit durch Verdrehung. Bei einer Berechnung nach dieser Hypothese ist man „auf der sicheren Seite“.

Wie bereits in den Abschnitten 3.2.2 und 8.3.1 dargelegt, leitet die maximale Schubspannung das Abgleiten einzelner Schichten unter  $45^\circ$  ein (Fließlinien) und ist demnach für die einsetzende Zerstörung weitgehend verantwortlich. Das kommt hier in der Gleichung 9-3 zum Ausdruck. In dieser Gleichung hat die

Schubspannung durch die Multiplikation mit dem Faktor 2 den größeren Einfluss.

*Die Schubspannungshypothese ist in brauchbarer Übereinstimmung mit den Versuchen vor allem für Stahl mit ausgeprägter Streckgrenze. Sie kann für eine Berechnung zu Grunde gelegt werden, wenn bei der Zerstörung eine vorherige plastische Deformation zu erwarten ist.*

### 3. Hypothese des elastischen Grenzzustandes nach MOHR

Diese Hypothese versucht, die unter 1. und 2. behandelten Ansätze gemeinsam zu einer Lösung heranzuziehen. Zunächst werden für einen Werkstoff Zug-, Druck- und Verdrehungsversuche durchgeführt. Mit den Werten, die zur Zerstörung geführt haben, bzw. bei denen plastische Deformation eingesetzt hat, werden nach Abschnitt 8.2 die MOHRSchen Spannungskreise gezeichnet. Versuche bei mehrachsigem Zug/Druck liefern zusätzliche Kreise. Um alle Kreise wird nach Abb. 9-4 eine Umhüllende gezeichnet. Nach der MOHRSchen Hypothese ist eine Zerstörung nicht zu erwarten, wenn für einen allgemeinen Spannungszustand mit  $\sigma$  und  $\tau$  der dazugehörige Punkt in diesem Diagramm innerhalb der Umhüllenden liegt.

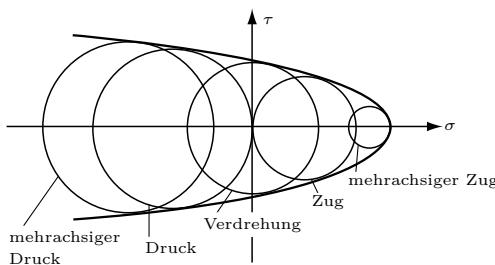


Abb. 9-4: Grenzzustand nach MOHR

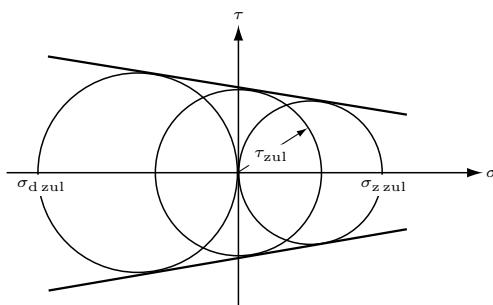


Abb. 9-5: Grenzzustand nach MOHR aus Zug-, Druck- und Torsionsversuch ermittelt

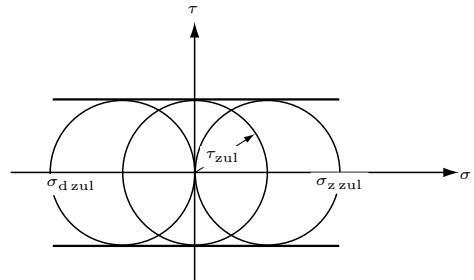


Abb. 9-6: Grenzzustand nach MOHR für gleiche zulässige Spannung bei Zug, Druck und Torsion

Auf der einen Seite lässt sich die Hypothese sehr gut jedem Werkstoff anpassen, da sie nichts über den Charakter der Umhüllenden aussagt. Auf der anderen Seite erfordert sie umfangreiche Versuche auch für mehrachsige Spannungszustände für alle in Betracht kommenden Werkstoffe. Obwohl eine Reihe von *Versuchen in guter Übereinstimmung mit dieser Hypothese* stehen, sind die Grenzkurven weitgehend unbekannt, so dass eine ingenieurmäßige Arbeit auf Grund dieser Hypothese kaum möglich ist. Näherungsweise kann man aus den Werten  $\sigma_{zzul}$  und  $\sigma_{dzul}$  in einem Teilbereich die Umhüllende zeichnen wie in Abb. 9-5 gezeigt ist. Der Wert  $\tau_{zul}$  kann dem Diagramm entnommen werden. Innerhalb der Grenzlinien ist mit einer gewissen Sicherheit eine Zerstörung nicht zu erwarten. Für den Fall gleicher Zug- und Druckfestigkeit ergeben sich Verhältnisse, wie sie in Abb. 9-6 dargestellt sind. Hier ist  $\tau_{zul} = \sigma_{zul}/2$ , was auch für die Schubspannungshypothese gilt.

#### **4. Hypothese der größten Dehnung**

Diese Hypothese ist durch Versuche nicht bestätigt.

#### **5. Hypothese der größten Formänderungsarbeit**

Auch diese Hypothese ist durch Versuche nicht bestätigt.

#### **6. Hypothese der größten Gestaltänderungsarbeit**

Nach dieser Hypothese darf die Gestaltänderungsarbeit einen Grenzwert nicht überschreiten. Diesem Ansatz liegt folgende Überlegung zugrunde. Die *Volumentänderungsarbeit* wird durch einen allseitig gleichen Druck (Zug) verrichtet (Abschnitt 3.4). Wie im Abschnitt 8.3.2 dargelegt, kann sie nicht zur Zerstörung führen. Wenn man grundsätzlich davon ausgeht, dass das Versagen eines Bauteils durch die Arbeit der Kräfte eingeleitet wird, kann das nur der Anteil der Arbeit sein, der die Gestalt ändert.

Die Arbeit der Normalspannung ist nach Gleichung 3-15

$$u_{g1} = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma^2, \quad (1)$$

die der Schubspannung analog zu Gleichung 3-12

$$u_{g2} = \frac{\tau^2}{2G}$$

Der Gleitmodul G wird nach Gleichung 3-10 durch den E-Modul ersetzt

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Damit ist

$$u_{g2} = \frac{1 + \mu}{E} \tau^2$$

Insgesamt ist die Gestaltänderungsarbeit eines ebenen Spannungszustandes

$$\begin{aligned} u_g &= u_{g1} + u_{g2} \\ u_g &= \frac{1 + \mu}{3E} \sigma^2 + \frac{1 + \mu}{E} \tau^2 \end{aligned}$$

Diese Arbeit wird am Zugstab (= Vergleichssystem) wirkend gedacht. Sie verursacht nach der Beziehung (1) die Vergleichsspannung

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= \frac{3E}{1 + \mu} u_g \\ \sigma_v^2 &= \frac{3E}{1 + \mu} \left( \frac{1 + \mu}{3E} \sigma^2 + \frac{1 + \mu}{E} \tau^2 \right) \\ \sigma_v^2 &= \sigma^2 + 3\tau^2 \end{aligned}$$

Das ist eine „vektorielle Addition“ mit Überbetonung der Schubspannung, deren besonderer Anteil an der Zerstörung mehrfach diskutiert wurde. Diese Beziehung wird auf einen ebenen Spannungszustand angewendet, der durch den Mittelpunkt des MOHRSchen Kreises gekennzeichnet ist. Die Gleichungen 8-6/7 liefern

$$\sigma = \sigma_M = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad \tau = \tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

Einfache Umwandlungen führen auf

$$\sigma_v^2 = \sigma_{\max}^2 + \sigma_{\min}^2 - \sigma_{\max} \cdot \sigma_{\min}$$

Setzt man hier die Gleichung 8-4 ein, erhält man für den allgemeinen, ebenen Fall

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zul} &\geq \sigma_v = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + (\sqrt{3}\tau_{xy})^2} \\ \text{Für } \sigma_y &= \sigma; \sigma_x = 0; \tau_{xy} = \tau \\ \sigma_v &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \\ \text{Für } \tau &= 0 \text{ (Hauptachsensystem)} \\ \sigma_v &= \sqrt{\sigma_{\max}^2 + \sigma_{\min}^2 - \sigma_{\max} \cdot \sigma_{\min}} \end{aligned} \right\} \quad (9-4)$$

Die Anwendung dieser Hypothese auf den verdrehten Zylinder ergibt ( $\sigma = 0$ ;  $\tau = \tau_{zul}$ )

$$\tau_{zul} = \frac{\sigma_{zul}}{\sqrt{3}} = 0,577\sigma_{zul} \quad \text{bzw.} \quad \tau_{Grenz} = \frac{\sigma_{Grenz}}{\sqrt{3}}.$$

*Die Übereinstimmung zwischen Versuch und Berechnung nach der Gestaltänderungshypothese ist für zähe Werkstoffe gut. Sie wird angewendet, wenn bei der Zerstörung ein Bruch mit plastischer Verformung zu erwarten ist.*

Es ist bisher noch nicht gelungen, eine Hypothese zu finden, die allen Werkstoffen und Belastungsarten gerecht wird.

Die oben abgeleiteten Gleichungen für die Vergleichsspannungen gelten nur für den gleichen Belastungsfall für  $\sigma$  und  $\tau$ , beide entweder ruhend (I), schwelend (II) oder wechselnd (III). Es erhebt sich die Frage, wie man die Berechnung der Vergleichsspannung durchführen muss, wenn die Belastungsfälle für  $\sigma$  und  $\tau$  verschieden sind.

Bei Betrachtung der Gleichungen 9-2/3/4 erkennt man, dass der Faktor, mit dem  $\tau$  multipliziert wird, gleichzeitig das Verhältnis der zulässigen Spannungen  $\sigma$  und  $\tau$  ist. Das ergibt die Anwendung der einzelnen Hypothesen auf den verdrehten Zylinder, wie jeweils gezeigt wurde.

Hypothese	Normalspannung	Schubspannung	Gestaltänderung
$\sigma_{zul}/\tau_{zul}$	1	2	$\sqrt{3}$

Man kann folglich in den Gleichungen für  $\sigma_v$  die Schubspannung  $\tau$  mit  $\frac{\sigma_{zul}}{\tau_{zul}}$  bzw.  $\frac{\sigma_{Grenz}}{\tau_{Grenz}}$  multiplizieren und dieses Verhältnis z.B. mit Hilfe der Tabelle 3 für verschiedene Belastungsfälle für  $\tau$  und  $\sigma$  ermitteln.

BACH hat zur genaueren Erfassung dieses Tatbestandes den Begriff Anstrengungsverhältnis eingeführt und folgendermaßen definiert

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{zul}}{\varphi \tau_{zul}} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_0 = \frac{\sigma_{Grenz}}{\varphi \cdot \tau_{Grenz}}$$

Um  $\alpha_0$  den einzelnen Hypothesen anzupassen, wird festgelegt

Hypothese	Normalspannung	Schubspannung	Gestaltänderung
$\varphi$	1	2	$\sqrt{3}$

Diese Zahlen sind so gewählt, dass sich für reinen Schub immer  $\sigma_v = (\sigma_{zul}/\tau_{zul}) \cdot \tau$  ergibt. Die Schubspannung wird auf eine gleichwertige Normalspannung beim Zugversuch umgerechnet.

Die Gleichungen für die Vergleichsspannung kann man jetzt folgendermaßen schreiben:

Normalspannungshypothese:

$$\begin{aligned}\sigma_v &= \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}\right)^2 + (\alpha_0 \tau)^2} \\ \sigma_v &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + (\alpha_0 \cdot \tau)^2}\end{aligned}\quad (9-5)$$

Schubspannungshypothese:

$$\sigma_v = \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2} \quad \| \quad \sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2} \quad (9-6)$$

Gestaltänderungshypothese:

$$\begin{aligned}\sigma_v &= \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3(\alpha_0 \tau)^2} \\ \sigma_v &= \sqrt{\sigma^2 + 3(\alpha_0 \tau)^2}\end{aligned}\quad (9-7)$$

Für ein Hauptspannungssystem gelten die Gl. 9-5 bis 9-7 mit  $\sigma_y = \sigma_{\max}$ ;  $\sigma_x = \sigma_{\min}$  und  $\tau = 0$ .

Aus den bisherigen Ausführungen folgt  $\alpha_0 = 1$  bei gleichem Belastungsfall für  $\sigma$  und  $\tau$ . Bei Überlagerung von z.B. wechselnder Biegung und schwelender Verdrehung und Anwendung der Gestaltänderungshypothese ergibt sich sinngemäß

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{bW}}{\sqrt{3} \tau_{tSch}}$$

Dabei ist angenommen, dass die Sicherheitszahl für beide Belastungen gleich ist. Ist das nicht der Fall gilt

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{bW}/S_b}{\sqrt{3} \tau_{tSch}/S_t}$$

Es sei jedoch mit Nachdruck darauf hingewiesen, dass es sich hier um ein Problem handelt, das für eine einfache Rechnung viel zu komplex ist. Auch andere Deutungen von  $\alpha_0$  sind möglich. Zur Vertiefung sei besonders auf Lit. [43] verwiesen.

In der Tabelle 16 sind die Vergleichsspannungen für die 1., 2. und 6. Hypothese zusammengefasst.

### 9.3.2 Biegung und Verdrehung

Eine Welle ist gleichzeitig auf Biegung und Verdrehung beansprucht. Die Biegung verursacht im Querschnitt Normalspannungen, die Verdrehung Schubspannungen. Da Wellen aus zähem Material gefertigt werden, erfolgt die Berechnung meistens nach der Hypothese der größten Gestaltänderungsarbeit. Mit der Gleichung 9-7 kann für angenommene Wellenabmessungen der Nachweis einer ausreichenden Festigkeit erbracht werden. Für die Dimensionierung einer Welle soll diese Gleichung umgewandelt werden.

$$\sigma_{\text{zul}} \geq \sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3(\alpha_0 \tau)^2} .$$

Dabei sind

$$\sigma = \frac{M_b}{W} \quad \tau = \frac{M_t}{W_t} .$$

Für den Kreisquerschnitt erhält man

$$\sigma = \frac{M_b \cdot 32}{d^3 \cdot \pi} \quad \tau = \frac{M_t \cdot 16}{d^3 \cdot \pi} .$$

Damit ist

$$\sigma_{\text{zul}} \geq \sigma_v = \sqrt{\left(\frac{32M_b}{d^3 \cdot \pi}\right)^2 + 3\left(\alpha_0 \frac{16M_t}{d^3 \cdot \pi}\right)^2} .$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach  $d$  ergibt

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\sigma_{\text{zul}} \pi} \sqrt{4M_b^2 + 3(\alpha_0 M_t)^2}} \quad (9-8)$$

Nach dieser Gleichung wird der notwendige Durchmesser zunächst ohne Berücksichtigung von Kerbwirkungen, Bearbeitungsqualitäten usw. bestimmt. Eine genaue Nachrechnung ist erst nach erfolgter Konstruktion möglich. Dazu wird in Kapitel 10 einiges ausgeführt.

#### **Beispiel 1 (Abb. 9-7)**

Für die skizzierte Getriebewelle ist der erforderliche Durchmesser an der am höchsten beanspruchten Stelle zu bestimmen. Am Zahnrad 1 wird eine Leistung von 50 kW eingeleitet. Je die Hälfte dieser Leistung wird an den Zahnrädern 2 und 3 abgenommen. Die Zahnkräfte wirken in der angegebenen Richtung. Die Drehzahl beträgt  $600 \text{ min}^{-1}$ . Die zulässige Normalspannung wird mit  $100 \text{ N/mm}^2$  angenommen, als Werkstoff soll der Stahl E 295 verwendet werden.

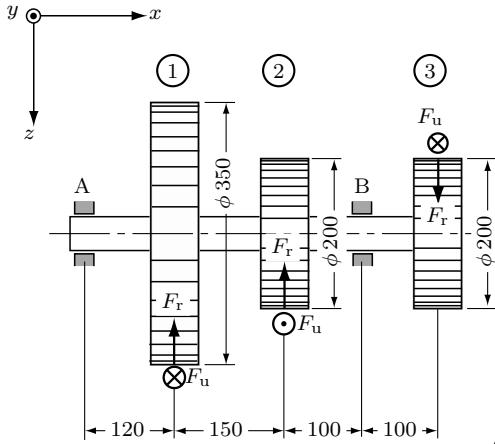


Abb. 9-7: Getriebewelle

**Lösung (Abb. 9-8/9-9)**

Zuerst werden die erforderlichen Drehmomente berechnet. Die Welle zwischen Zahnradern 1 und 2 überträgt 50 kW

$$M_{t1-2} = \frac{P}{\omega} \quad \omega = 2\pi n = 2\pi \frac{600}{60} \text{ s}^{-1} = 62,8 \text{ s}^{-1}$$

$$M_{t1-2} = \frac{50 \text{ kNm s}^{-1}}{62,8 \text{ s}^{-1}} = 0,796 \text{ kNm}.$$

Die Welle zwischen den Zahnradern 3 und 2 überträgt die halbe Leistung und deshalb auch das halbe Drehmoment

$$M_{t3-2} = 0,398 \text{ kNm}.$$

Die Größe der Umfangskräfte am Zahnkranz erhält man aus

$$F_u = \frac{M_t}{r}$$

$$F_{u1} = \frac{M_{t1}}{r_1} = \frac{0,796 \text{ kNm}}{0,175 \text{ m}} = 4,55 \text{ kN}.$$

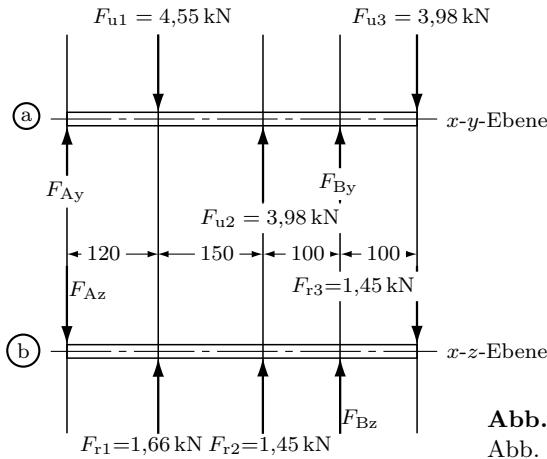
$$F_{u2} = F_{u3} = \frac{M_{t2}}{r_2} = \frac{0,398 \text{ kNm}}{0,10 \text{ m}} = 3,98 \text{ kN}.$$

Die radialen Kräfte betragen für einen Eingriffswinkel von  $20^\circ$  (s. Band 1; Abb. 11-15)

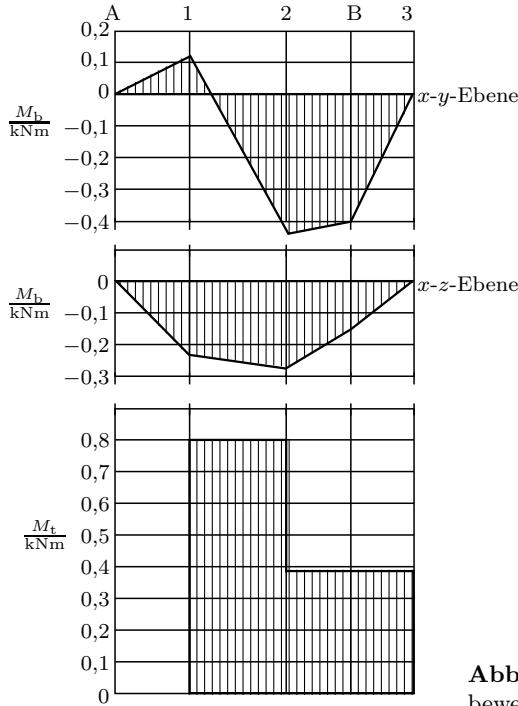
$$F_r = F_u \cdot \tan 20^\circ$$

$$F_{r1} = 4,55 \text{ kN} \cdot \tan 20^\circ = 1,66 \text{ kN}$$

$$F_{r2} = 3,98 \text{ kN} \cdot \tan 20^\circ = 1,45 \text{ kN}.$$



**Abb. 9-8:** Freigemachte Getriebewelle nach Abb. 9-7



**Abb. 9-9:**  $M_b$  und  $M_t$ -Diagramme für Getriebewelle nach Abb. 9-7

Für die  $x$ - $y$ - und  $x$ - $z$ -Ebene müssen die Biegemomente berechnet werden. Dazu ist es notwendig, die Auflagerreaktionen in diesen Ebenen zu bestimmen.

$x$ - $y$ -Ebene (Abb. 9-8a)

$$F_{Ay} = 0,92 \text{ kN} \quad F_{By} = 3,63 \text{ kN} .$$

Biegemomente in der  $x$ - $y$ -Ebene

$$M_{b1} = 0,92 \text{ kN} \cdot 0,12 \text{ m} = 0,110 \text{ kNm}$$

$$M_{b2} = 0,92 \cdot 0,27 \text{ kNm} - 4,55 \cdot 0,15 \text{ kNm} = -0,434 \text{ kNm}$$

$$M_{bB} = -3,98 \text{ kN} \cdot 0,10 \text{ m} = -0,398 \text{ kNm}$$

$x$ - $z$ -Ebene (Abb. 9-8b)

$$F_{Az} = 1,91 \text{ kN} \quad F_{Bz} = 0,25 \text{ kN}.$$

Biegemomente in der  $x$ - $y$ -Ebene

$$M_{b1} = -1,91 \text{ kN} \cdot 0,12 \text{ m} = -0,229 \text{ kNm}$$

$$M_{b2} = -1,91 \cdot 0,27 \text{ kNm} + 1,66 \cdot 0,15 \text{ kNm} = -0,267 \text{ kNm}$$

$$M_{bB} = -1,45 \text{ kN} \cdot 0,10 \text{ m} = -0,145 \text{ kNm}.$$

Die Biege- und Drehmomente sind in Abb. 9-9 über die Wellenachse aufgetragen. Der gefährdete Querschnitt liegt unmittelbar links vom Zahnrad 2. An dieser Stelle muss die volle Leistung von 50 kW übertragen werden und gleichzeitig wirkt hier das maximale Biegemoment. Die Berechnung des Wellendurchmessers erfolgt deshalb für

$$M_{b\max} = \sqrt{0,267^2 + 0,434^2} \text{ kNm} = 0,510 \text{ kNm}$$

$$M_{t\max} = 0,796 \text{ kNm}.$$

Laut Aufgabenstellung handelt es sich für  $\sigma$  (Biegung) um den Belastungsfall III. Um den Beschleunigungskräften beim Anfahren bzw. Abbremsen des Getriebes in etwa Rechnung zu tragen, wird für  $\tau$  nicht mit dem Belastungsfall I, sondern mit II gerechnet. Die Dimensionierung soll nach Gleichung 9-8 und damit nach der Gestaltänderungshypothese erfolgen

$$d^3 \geq \frac{16}{\sigma_{zul} \cdot \pi} \sqrt{4M_b^2 + 3(\alpha_0 M_t)^2}.$$

Die Werte für die zulässigen Spannungen werden der Tabelle 3 für Stahl E 295 entnommen:  $\sigma_{zul} = \sigma_b$  zul für Fall III;  $\tau_{zul} = \tau_{tzul}$  für II.

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{zul}}{\sqrt{3} \cdot \tau_{zul}} = \frac{105 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{3} \cdot 85 \text{ N/mm}^2} \approx 0,71.$$

Bei Verwendung der Grenzspannungen erhält man aus

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{bW}}{\sqrt{3} \cdot \tau_{tSch}}.$$

mit  $\sigma_{bW} = 240 \text{ N/mm}^2$  und  $\tau_{tSch} = 190 \text{ N/mm}^2$

$$\alpha_0 = \frac{240 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{3} \cdot 190 \text{ N/mm}^2} \approx 0,73.$$

Der Unterschied liegt innerhalb der Genauigkeit des Rechenverfahrens. Er soll weiter mit dem höheren Ergebnis gerechnet werden.

$$d^3 \geq \frac{16}{\pi \cdot 100 \text{ N/mm}^2} \sqrt{[4 \cdot 510^2 + 3(0,73 \cdot 796)^2](\text{Nm})^2 \cdot \left(\frac{10^3 \text{ mm}}{\text{m}}\right)^2}$$

$$\underline{d \geq 42 \text{ mm}.}$$

Auch hier muss besonders darauf hingewiesen werden, dass dieses Berechnungsverfahren die tatsächlichen Spannungen ungenau erfasst (Nähe der Lastangriffspunkte, Kerbspannungen usw.). Deshalb wurde die Vergleichsspannung mit entsprechender Vorsicht gewählt. Der endgültige Spannungsnachweis kann erst nach einem Entwurf der Welle erfolgen. Die an den Übergängen, Nuten u.ä. auftretenden Spannungsspitzen müssen berechnet werden. Eine Anleitung dazu bringt das Kapitel 10, u.U. muss in einem zweiten Ansatz die Welle neu dimensioniert werden.

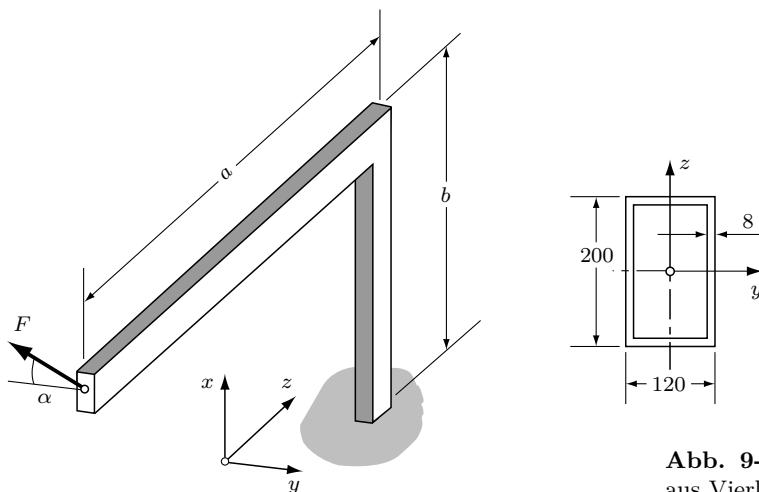
### **Beispiel 2 (Abb. 9-10)**

Ein gekröpfter Stahlträger aus Rechteck-Hohlprofil  $200 \times 120 \times 8$  ist nach Skizze mit der Kraft  $F$  belastet. Diese liegt in der  $x-y$ -Ebene. Für die nachfolgend gegebenen Daten ist die Vergleichsspannung für die Anschlussnaht an der Grundplatte zu berechnen. Es kann von einer ruhenden Belastung ausgegangen werden.

$$a = 2000 \text{ mm}; \quad b = 1500 \text{ mm}; \quad \alpha = 30^\circ; \quad F = 8,0 \text{ kN}.$$

### **Lösung**

Schweißnähte brechen bei Übelastung in der Regel ohne größere plastische Verformung. Aus diesem Grunde wird beim Spannungsnachweis von Schweißnähten die Hauptspannungshypothese angewendet. Die Anschlussnaht des vorliegenden Trägers wird durch Biegung um die  $y$ - und  $z$ -Achse und durch Verdrehung belastet. Bei den hier vorliegenden Abmessungen liegen die Einflüsse der Querkraftwirkung und der Zugbelastung innerhalb der Genauigkeit, mit der sinnvoll



**Abb. 9-10:** Gekröpfter Träger aus Vierkantrohr

gerechnet werden kann. Schweißnähte sind durch Schweißspannungen, Übergänge, Einbrand, metallurgische Veränderungen usw. besonders problematisch. Die errechnete Vergleichsspannung ist eher ein Rechenwert, der nach vorliegenden Erfahrungen eine bestimmte Größe nicht übersteigen darf.

Im Stahlbau wird mit einer Abmessung der Schweißnaht gerechnet, die gleich der Wanddicke ist. Entsprechend muss die Ausführung sein. Dem Normblatt entnimmt man für das Profil

$$W_y = 244 \text{ cm}^3; \quad W_z = 183 \text{ cm}^3.$$

Das Torsionswiderstandsmoment der Schweißnaht wird mit der BREDETSchen Gleichung 6-12 berechnet.

$$W_t = (A_a + A_i) \cdot s = (20 \cdot 12 + 18,4 \cdot 10,4) \text{ cm}^2 \cdot 0,8 \text{ cm} = 345 \text{ cm}^3$$

In den Ecken rechts/unten und links/oben des Profils Abb. 9-10 addieren sich die Biegespannungen.

$$\sigma_b = \frac{M_{by}}{W_y} + \frac{M_{bz}}{W_z}$$

$$\text{mit } M_{by} = F \cdot \sin \alpha \cdot a = 8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \sin 30^\circ \cdot 200 \text{ cm} = 8,0 \cdot 10^5 \text{ Ncm}$$

$$M_{bz} = F \cdot \cos \alpha \cdot b = 8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ \cdot 150 \text{ cm} = 10,39 \cdot 10^5 \text{ Ncm}$$

$$\sigma_b = \left( \frac{8,0 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{244 \text{ cm}^3} + \frac{10,39 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{183 \text{ cm}^3} \right) \frac{\text{cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 89,6 \text{ N/mm}^2$$

Dieser Spannung, die in Richtung der  $x$ -Achse wirkt, ist die Torsionsspannung in der Anschlussebene überlagert.

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{mit } M_t = F \cdot \cos \alpha \cdot a = 8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \cos 30^\circ \cdot 200 \text{ cm} = 13,86 \cdot 10^5 \text{ Ncm}$$

$$\tau = \frac{13,86 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{345 \text{ cm}^3} \cdot \frac{\text{cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 40,2 \text{ N/mm}^2$$

Die maximale Hauptspannung beträgt für  $\alpha_0 = 1$  nach Gleichung 9-5

$$\sigma_v = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \left( \frac{89,6}{2} + \sqrt{\left(\frac{89,6}{2}\right)^2 + 40,2^2} \right) \text{ N/mm}^2$$

$$\underline{\sigma_v = 105 \text{ N/mm}^2}$$

Für die üblichen Baustähle ist das eine zulässige Spannung.

### 9.3.3 Biegung und Schub

In einem belasteten Träger verursachen die Biegemomente Normalspannungen und die Querkräfte Schubspannungen. Sofern die letzteren nicht vernachlässigt werden können, muss eine Berechnung mit beiden Spannungen nach einer Festigkeitshypothese erfolgen. In vielen Fällen handelt es sich hier um Berechnung von Schweißnähten. Eine plastische Deformation bei einer Zerstörung ist nicht zu erwarten, deshalb wird nach der Hauptspannungshypothese gearbeitet.

#### **Beispiel (Abb. 9-11)**

Der geschweißte I-Träger ist wie abgebildet belastet. Für die nachfolgend gegebenen Daten ist die Hauptspannung in den Kehlnähten zu berechnen.

$$l = 4,0 \text{ m}; \quad a = 1,0 \text{ m}; \quad F = 150 \text{ kN}.$$

#### **Lösung (Abb. 9-12/9-13)**

Die Auflagerreaktionen betragen

$$F_A = 112,5 \text{ kN} \quad F_B = 37,5 \text{ kN}.$$

Das maximale Biegemoment ist am Lastangriffspunkt

$$M_{b\max} = 112,5 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} = 112,5 \text{ kNm}.$$

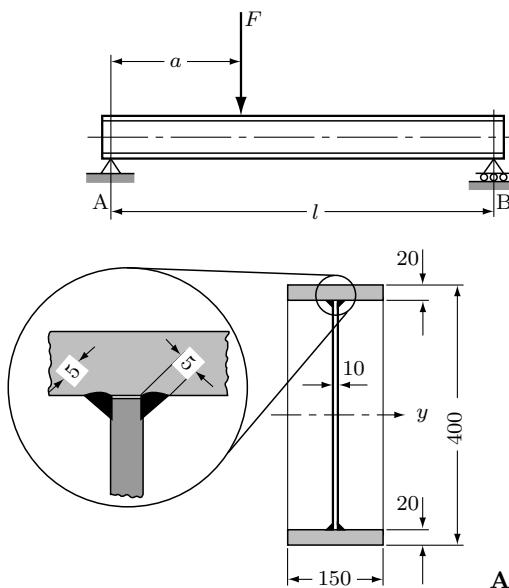


Abb. 9-11: Geschweißter I-Träger

Die maximale Querkraft zwischen  $A$  und  $F$  ist

$$F_{q\max} = F_A = 112,5 \text{ kN}.$$

Der gefährdete Querschnitt ist an der Stelle des Lastangriffspunktes. Die Schweißnaht muss die Schubspannung  $\tau$  und die Normalspannung  $\sigma_b$  übertragen. Die Schubspannung beträgt nach Gleichung 5-1 (vgl. Beispiel 2, Abschnitt 5.3).

$$\tau = \frac{F_q \cdot S}{I \cdot b}.$$

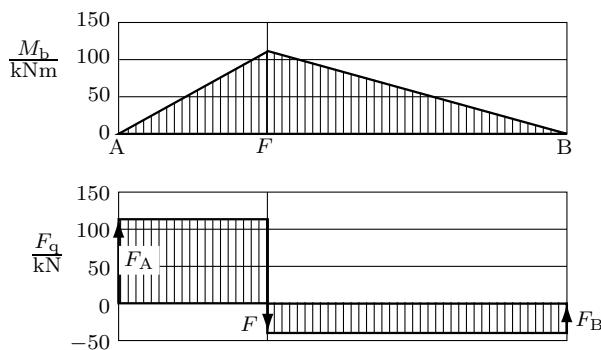
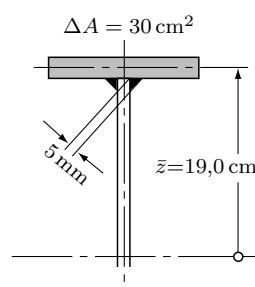
Abb. 9-12:  $M_b$ - und  $F_q$ -Diagramme für den Träger nach Abb. 9-11

Abb. 9-13: Geometrie des Flansches vom I-Träger nach Abb. 9-11

Mit  $F_q = 112,5 \text{ kN}$ ,  $I_y = 2,56 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$  (Gesamtquerschnitt)

$$b = 2 \cdot 5 \text{ mm} = 10 \text{ mm} \quad (5 \text{ mm Schweißnahtdicke})$$

$$S = \bar{z} \cdot \Delta A = 19,0 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm}^2 = 570 \text{ cm}^3 \quad (\text{Abb. 9-13})$$

ist

$$\tau = \frac{112,5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 570 \text{ cm}^3}{2,56 \cdot 10^4 \text{ cm}^4 \cdot 1,0 \text{ cm}} \cdot \frac{1 \text{ cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2}$$

$$\tau = 25,1 \text{ N/mm}^2.$$

Die Normalspannung, verursacht durch Biegung beträgt (4-4)

$$\sigma = \frac{M_b}{I_y} \cdot z = \frac{112,5 \cdot 10^5 \text{ Ncm}}{2,56 \cdot 10^4 \text{ cm}^4} \cdot 18 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 79,1 \text{ N/mm}^2.$$

Für  $\alpha_0 = 1$  (ruhende Belastung für  $\sigma$  und  $\tau$ ) ist nach 9-2/5 bzw. Tabelle 16

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ &= \left( \frac{79,1}{2} + \sqrt{\left(\frac{79,1}{2}\right)^2 + 25,1^2} \right) \text{ N/mm}^2 \\ \underline{\sigma_v = 86,6 \text{ N/mm}^2} \end{aligned}$$

Dieser Wert wird mit der zulässigen Spannung verglichen. Für die üblichen Baustähle wäre damit der Spannungsnachweis erbracht.

### 9.3.4 Verdrehung und Zug/Druck

Diese Kombination von Beanspruchungen kommt hauptsächlich bei längsbelasteten Gewindespindeln und Schrauben vor. Neben der Längsbelastung unterliegt eine Schraube beim Anziehen einer Verdrehung durch das Moment (s. Band 1; Gleichung 10-6)

$$M_t = F_A \cdot r_m \cdot \tan(\alpha + \varrho).$$

$F_A$  ist die Axialbelastung der Schraube,  $r_m$  der mittlere Radius des Gewindes,  $\alpha$  die Gewindesteigung,  $\varrho$  der Reibungswinkel. Es soll in erster Näherung berechnet werden, in welchem Verhältnis die auf den Kernquerschnitt bezogene Zugspannung und die durch das Drehmoment beim Anziehen verursachte Schubspannung stehen.

Die Schubspannung hat die Größe

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{F_A \cdot r_m \cdot \tan(\alpha + \varrho)}{\pi d^3 / 16}$$

Der mittlere Radius des Gewindes wird mit  $0,55 \cdot d$  angenommen. Weiter wird  $\tan(\alpha + \varrho) = 0,20$  gesetzt.

$$\tau = \frac{F_A \cdot 0,55 \cdot d \cdot 0,20 \cdot 16}{\pi \cdot d^3} = 0,55 \cdot 0,20 \cdot 4 \cdot \frac{F_A}{\pi \cdot d^2 / 4} = 0,44 \cdot \sigma$$

Das ist ein hoher Wert. In den Abschnitten 3.2.2; 8.3; 9.3.1 wurde der besondere Einfluss der Schubspannung auf die Zerstörung behandelt. Es soll deshalb hier untersucht werden, wie sich der oben errechnete Anteil auf die Gesamtbelastrung auswirkt. Diese wird durch die Vergleichsspannung ausgedrückt. Nach der Gestaltänderungshypothese erhält man (Gl. 9-4)

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot 0,44^2 \cdot \sigma^2} = 1,26 \cdot \sigma$$

Diese um etwa ein Viertel höhere Beanspruchung bleibt wegen der Reibung teilweise auch nach dem Anzug erhalten. Extrem hoch belastete Schrauben werden deshalb zunächst hydraulisch gedehnt. Dann wird die Mutter angedreht. So vermeidet man das Einleiten von Momenten und damit Schubspannungen.

Wie in Abschnitt 12.3 abgeleitet, verursacht Druck im Rohr Normalspannungen in Längs- und Umfangsrichtung. Bei einer zusätzlichen Verdrehung des Rohres entsteht die hier diskutierte Beanspruchung. Dabei kann Biegung zusätzlich überlagert sein.

### **Beispiel 1**

Die Dehnschraube M 20 soll so angezogen werden, dass sie auf die Unterlage eine Kraft von 60 kN erzeugt. Welche Vergleichsspannung (Gestaltänderungshypothese) ist bei höchster Belastung während des Einschraubvorgangs wirksam?

### **Lösung**

Maximal belastet ist die Schraube während des Eindrehens, wenn neben dem schon wirkenden vollen Zug das Anzugsmoment noch vorhanden ist. Es soll mit  $\tan(\alpha + \varrho) = 0,20$  gerechnet werden.

$$M_t = F_A \cdot r_m \cdot \tan(\alpha + \varrho) = 60 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 9,2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 0,20 = 110 \text{ Nm}$$

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} \quad W_t = 0,948 \text{ cm}^3 \quad \text{mit} \quad d_K = 1,69 \text{ cm}$$

$$\tau = \frac{110 \cdot 10^2 \text{ Ncm}}{0,948 \text{ cm}^3} \cdot \frac{\text{cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 116 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{60 \cdot 10^3 \text{ N}}{224 \text{ mm}^2} = 268 \text{ N/mm}^2$$

Vergleichsspannung (Gl. 9-4)

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \left( \sqrt{268^2 + 3 \cdot 116^2} \right) \text{ N/mm}^2 = 335 \text{ N/mm}^2$$

Dieser Wert ist deutlich höher als der für die Zugbeanspruchung allein.

### **Beispiel 2**

Für ein Rohr unter Innendruck, das zusätzlich auf Biegung und Torsion beansprucht wird, sollen die drei Vergleichsspannungen berechnet werden. Auf die Ermittlung der Einzelspannungen wird hier verzichtet. Aus den Gleichungen 12-13/14; 4-6; 6-2 erhält man für ein Rohr  $d_m = 100 \text{ mm}$ ;  $s = 6,0 \text{ mm}$ , das unter Druck von  $p = 60 \text{ bar}$  steht und Momente  $M_b = 0,60 \text{ kNm}$  (ruhend);  $M_t = 2,50 \text{ kNm}$  (wechselnd) überträgt, folgende Werte

$$\begin{array}{ll} \text{Druck} & \sigma_y = 50,0 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_{x1} = 25,0 \text{ N/mm}^2; \\ \text{Biegung} & \sigma_b = \sigma_{x2} = 13,5 \text{ N/mm}^2; \\ \text{Verdrehung} & \tau = 28,0 \text{ N/mm}^2. \end{array}$$

Für den Werkstoff sind die Festigkeitswerte bekannt:

$$\begin{array}{ll} \text{Streckgrenze} & R_e = 240 \text{ N/mm}^2 \\ \text{Wechselseitigkeit Torsion} & \tau_{tw} = 80 \text{ N/mm}^2. \end{array}$$

### **Lösung (Tabelle 16)**

Normalspannungshypothese:

Der Wert  $\alpha_0$  wird aus den Grenzspannungen berechnet

$$\alpha_0 = \frac{R_e}{\tau_{tw}} = \frac{240 \text{ N/mm}^2}{80 \text{ N/mm}^2} = 3,0$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \sqrt{\left( \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + (\sigma_0 \tau)^2}$$

$$\sigma_v = \left( \frac{50,0 + 38,5}{2} + \sqrt{\left( \frac{50,0 - 38,5}{2} \right)^2 + (3 \cdot 28,0)^2} \right) \text{ N/mm}^2 = 129 \text{ N/mm}^2$$

Schubspannungshypothese:

$$\alpha_0 = \frac{R_e}{2 \cdot \tau_{tW}} = \frac{240 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot 80 \text{ N/mm}^2} = 1,5$$

$$\sigma_v = \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2}$$

$$\sigma_v = \sqrt{(50,0 - 38,5)^2 + 4(1,5 \cdot 28,0)^2} \text{ N/mm}^2 = 85 \text{ N/mm}^2$$

Gestaltänderungshypothese:

$$\alpha_0 = \frac{R_e}{\sqrt{3} \tau_{tW}} = \frac{240 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{3} \cdot 80 \text{ N/mm}^2} = 1,73$$

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3(\alpha_0 \tau)^2}$$

$$\sigma_v = \sqrt{50,0^2 + 38,5^2 - 50,0 \cdot 38,5 + 3(1,73 \cdot 28,0)^2} \text{ N/mm}^2 = 96 \text{ N/mm}^2$$

Der höchste Wert ergibt sich nach der Normalspannungshypothese. Da dieser immer noch deutlich unter der Streckgrenze liegt, dürfte ausreichende Festigkeit nachgewiesen sein.

### 9.3.5 Mehrachsiger Zug/Druck

Mehrachsiger Zug entspricht einer Beanspruchung nach Abb. 8-9 und 12-16. Zunächst scheint es, als sei hier keine Schubspannung vorhanden, denn es handelt sich um Hauptspannungssysteme. Die Schubspannungen wirken jedoch in allen anderen Schnitten. In die Gleichungen für die Vergleichsspannungen wird  $\tau = 0$  eingesetzt. Druckbeanspruchte Behälter und rotierende Scheiben unterliegen der hier behandelten Belastung. Beispiele bringt das Kapitel 12.

## 9.4 Zusammenfassung

Normalspannungen, wie sie z.B. bei gleichzeitiger Wirkung von Zug/Druck und Biegung auftreten, werden addiert.

Seite des größeren Faserabstandes

$$\sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{M_b}{I} e_{\max} = \frac{F}{A} \pm \frac{M_b}{W}$$

Seite des kleineren Faserabstandes

$$\sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{M_b}{I} e_{\min}$$

(9-1)

Schon eine geringe Abweichung der Krafteinleitung von der Schwerpunktachse hat in einem Zugstab hohe zusätzliche Spannungen durch Biegung zur Folge. Sind die Hebelarme der Kräfte groß gegenüber den Abmessungen des Querschnitts, kann man die Zug- bzw. Druckspannungen gegenüber den Biegespannungen vernachlässigen.

Treten Normal- und Schubspannungen gleichzeitig auf, erfordert die Berechnung die Annahme einer Bruchhypothese. Dabei wird der komplizierte, mehrachsige Spannungszustand mit dem einachsigen Belastungszustand eines gezogenen Stabes verglichen. Eine Hypothese, die allen Werkstoffen und Belastungen gerecht wird, gibt es nicht. In Teilbereichen der Technik gibt es gesetzlich vorgeschriebene Rechenverfahren. Kommen diese nicht zur Anwendung, gilt als Auswahlkriterium:

Für spröde Werkstoffe und wenn eine Verformung vor einem Bruch nicht zu erwarten ist (Schweißnaht), rechnet man nach der Hypothese der größten Normalspannung.

Für zähe Werkstoffe und wenn ein Bruch mit vorheriger Verformung zu erwarten ist, stimmt die Gestaltänderungshypothese am besten mit Versuchen überein.

Die Berechnungsgleichungen für die Vergleichsspannungen sind in der Tabelle 16 zusammengefasst.

# 10 Versuch einer wirklichkeitsnahen Festigkeitsberechnung

## 10.1 Einführung

Die in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen „klassischen“ Verfahren zur Festigkeitsberechnung basieren auf vereinfachenden, nahezu alles idealisierenden Annahmen. Sie beschreiben somit nur selten die in der Regel nicht lineare und damit auch nicht einfache Wirklichkeit verschiedenster – auch komplizierter – Bauformen, unter wechselnden, sich überlagernden, Beanspruchungen mit vertretbarer Genauigkeit. Auch wenn diese Verfahren in der Hand eines erfahrenen Ingenieurs für viele Anwendungen oder für Abschätzungen hinreichend genaue Ergebnisse liefern, ist für eine zeitgemäße – vor allem auch wirtschaftliche Aspekte berücksichtigende – Berechnung ein erheblich größerer Aufwand bei der Formulierung und Lösung der Berechnungsgleichungen zu treiben. Die vorhandenen Möglichkeiten der Rechentechnik machen es möglich, auch Wege der Iteration und Näherung zu beschreiben. Diese erlauben in der Regel die nicht exakt lösbarer Probleme mit guter Genauigkeit anzunähern. Das geht aber fast immer auf Kosten der Anschaulichkeit der Berechnung und ist auch meist nicht in Kürze darstellbar.

In diesem Kapitel wird der Versuch unternommen, die wichtigsten Probleme aufzuzeigen und anhand ausgewählter überschaubarer Wege zur Lösung darzustellen. Dabei gerät man sehr schnell zu Detailfragen und speziellen Anwendungsbereichen, die dann nur angerissen werden können. Hier muss sich der Leser anhand der umfangreichen speziellen Literatur (das Literaturverzeichnis soll hier als Wegweiser dienen) in die Problematik einarbeiten.

Nach der Erläuterung der wichtigsten Berechnungskonzepte wird auf der Grundlage des *Nennspannungskonzeptes* der *statische Festigkeitsnachweis* beschrieben. Querschnittsübergänge, Nuten und Kerben führen zu Spannungsspitzen. Die Berechnung der Maximalwerte für die Spannung führt zu einer *Formzahl*. Bei Erreichen der Streckgrenze bilden sich an den Stellen der Maximalbelastung

plastische Bereiche aus. Wie diese geringen, örtlich begrenzten Plastifizierungen als Tragreserven beim statischen Festigkeitsnachweis zu nutzen sind, wird erläutert.

Der Kerbeinfluss wird bei dynamischer Beanspruchung nicht vollständig wirksam. Der Zusammenhang zwischen einer glatten, polierten Probe und einer geribbten bei wechselnder Belastung wird durch eine *Kerbwirkungszahl*, die neben der Form auch noch vom Werkstoff abhängig ist, beschrieben. Darüber hinaus beeinflussen auch die Bauteilgröße, die Oberflächenqualität und die Bearbeitung die ertragbaren Spannungen. Beim *dynamischen Festigkeitsnachweis* werden diese Größen berücksichtigt.

Das Kapitel wird mit Hinweisen zur *Betriebsfestigkeitsrechnung*, die bei zufallsartig auftretender Belastung geführt wird, abgeschlossen.

Mit der 1994 erstmals vorgestellten Richtlinie „*Rechnerischer Festigkeitsnachweis für den Maschinenbau*“ [23], wird eine einheitliche Festigkeitsberechnung von Bauteilen im Maschinenbau, wie sie im Stahlbau z.B. mit der DIN 18 800 seit langem existiert, angestrebt. Auch wenn diese Richtlinie hinsichtlich der Nomenklatur zweifelsohne gewöhnungsbedürftig ist und die Vielfalt der Bezeichnungen und Indizes erweitert, stellt sie eine für den Ingenieur handhabbare Berechnungsgrundlage auf dem aktuellen Stand der Technik dar. In diesem Kapitel wird vielfach Bezug auf die Richtlinie genommen.

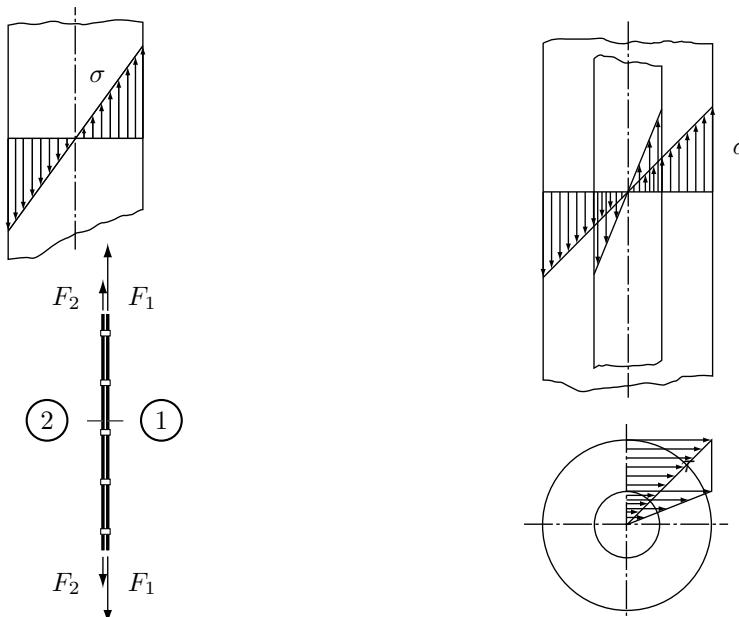
## 10.2 Problembeschreibung

Bauteile und technische Systeme sollen während der gesamten Betriebszeit störungsfrei und zuverlässig ihre Aufgabe erfüllen. Durch die festigkeitsgerechte Auslegung soll die Sicherheit und Verfügbarkeit auch unter wirtschaftlichen Gesichtspunkten gewährleistet werden. Die für die Festigkeitsberechnung gültige Forderung, dass die im Bauteil auftretenden Spannungen (*Bauteilbeanspruchung*) die ertragbaren Werte (*Bauteilfestigkeit*) nicht überschreiten dürfen, bedeutet neben einer wirklichkeitsnahen Lastannahme auch die gleichen Sorgfalt bei der Festlegung der Bauteilfestigkeit.

Die Festigkeitswerte für die verschiedenen Werkstoffe werden aus genormten Versuchen (Zugversuch, Dauerfestigkeitsversuche usw.) an genormten Probekörpern mit sehr einfacher Geometrie gewonnen. Es erhebt sich dabei die Frage, ob bzw. inwieweit man die so gewonnenen Werte auf beliebig geformte Werkstücke, u.U. von anderer Größenordnung und anderer Oberflächenbeschaffenheit, übertragen kann.

Zunächst ist die Übertragbarkeit nicht vollständig gewährleistet, wenn Probestab und Werkstück zwar aus gleichem Werkstoff bestehen, aber nicht gleicher *Bearbeitung* unterlegen haben. Als Beispiel sollen Bauteile betrachtet werden, die aus demselben Stahl unterschiedlich gefertigt wurden. Ein Teil sei aus dem Vollen gefräst, das andere geschmiedet. Alle Bauteile werden einer Festigkeitsprüfung unterzogen. Damit ist ein Vergleich mit den Kennwerten möglich, die im genormten Versuch ermittelt wurden. Insgesamt sind die Einflüsse mannigfaltig, jedoch kann man davon ausgehen, dass im statistischen Mittel die geschmiedeten Teile höher belastbar sind. Damit ist die Übertragbarkeit der Versuchsergebnisse nicht eindeutig, sondern hängt von der Art der Bearbeitung des Werkstoffs ab. Zusätzlich spielt im genannten Beispiel auch der Oberflächeneinfluss eine Rolle. Dieser wird weiter unten diskutiert.

Einfluss auf die Übertragbarkeit der Ergebnisse eines Festigkeitsversuchs auf Maschinenteile hat außerdem das *Größenverhältnis* von Maschinenteil und Probe. Bei Biegung und Verdrehung ist die Spannungsverteilung im Querschnitt nicht konstant. Zwei benachbarte Fasern unterliegen demnach unterschiedlichen Spannungen. Was dabei im Werkstoff vorgeht, kann man sich an einem Gedankenmodell klar machen. Zwei gleiche Drähte werden parallel gelegt und nach Abb. 10-1



**Abb. 10-1:** Stützwirkung bei ungleichmäßiger Spannungsverteilung

**Abb. 10-2:** Zum Einfluss der Bauteilgröße auf die Stützwirkung

mit Klammern untereinander verbunden. Die Drahtenden bleiben dabei frei. Die beiden Drähte werden jetzt unterschiedlich belastet. Der stärker belastete Draht 1 versucht, sich stärker zu dehnen als der weniger belastete Draht 2. Durch die Querverbindungen (Klammern) wird er z.T. daran gehindert. Dabei wird ein Teil der höheren Belastung auf den weniger belasteten Draht übertragen. Es wird also eine *Stützwirkung* von 2 auf 1 ausgeübt. Draht 1 kann demnach im Verband mit 2 eine höhere Last übertragen als allein. Diese Stützwirkung ist um so größer, je größer der Unterschied der Belastungen ist. Übertragen auf ein unter nicht konstanter Spannung stehendes Werkstück heißt das, dass die Stützwirkung um so größer ist, je steiler die Spannungsverteilung ist. Für kleine Abmessungen eines biege- oder verdrehbeanspruchten Stabes ergeben sich bei gleichen Außenspannungen steilere Spannungsgefälle als bei größeren Abmessungen. Das verdeutlicht die Abb. 10-2. Die verminderte Stützwirkung bei größeren Bauteilen hat zur Folge, dass bei diesen die Festigkeit auf 60 bis 70 % der an genormten Probestäben ermittelten Werte sinken kann.

Das bedeutet, dass die im Biege- bzw. Torsionsversuch ermittelten Werte keine eigentlichen Festigkeitswerte sind, da sie vom Spannungsgefälle abhängig sind und den Einfluss der Stützwirkung enthalten. Sie müssen auf die Normwerte des Zugversuchs im Rahmen der Berechnung der Bauteilstfestigkeit (siehe Abschnitt 10.3.2) umgerechnet werden.

Im reinen Zugversuch ist wegen der konstanten Spannung keine Stützwirkung vorhanden. Trotzdem ergeben sich bei Probestäben von sehr kleinem Durchmesser vor allem bei weichen Stählen erhöhte Festigkeitswerte. Das ist bedingt durch die infolge der kleinen Querabmessungen behinderte Einschnürung. Die kleineren Stäbe haben auch weniger Inhomogenitäten, von denen ein Anriß ausgehen kann. Die Argumentation der Fehlstellen ist als *statistischer Größeneinfluss* aus der Bruchwahrscheinlichkeit unterschiedlich langer Zugproben nachgewiesen (siehe dazu [39]). Allerdings wird das Fehlstellenmodell zur Berücksichtigung des statistischen Größeneinflusses in der Berechnungspraxis bisher kaum angewendet.

Insgesamt muss bei Festigkeitsberechnungen für größere Teile von verminderten Festigkeitswerten ausgegangen werden.

Einen weiteren Einfluss auf die Festigkeit hat die *Form* des betreffenden Teiles. Jede Abweichung von der zylindrischen Form der Probestäbe hat eine Konzentration von Spannungen zur Folge und damit einen Spannungsanstieg, auf den sich wiederum die oben beschriebene Stützwirkung auswirkt. Die lokale Spannungserhöhung hat unterschiedliche Auswirkungen bei ruhender und schwingender Belastung und Werkstoffen mit und ohne Streckgrenze.

Der Einfachheit halber soll von einem gekerbten Stab ausgegangen werden. Bei *ruhender Belastung eines weichen Stahls erhöht ein Kerb trotz einer lokalen Spannungsspitze die Belastbarkeit*. Die Gründe dafür sind in den Abschnitten 2.7 und 8.3.1 ausführlich erläutert. Nicht die absolute Höhe der Spannung ist von entscheidender Bedeutung, sondern ob die Spannung zu einer Zerstörung des Werkstoffes führt. Hier werden wiederum die verschiedenen Festigkeits-hypothesen berührt.

*Bei einem spröden Werkstoff wirkt sich das Spannungsmaximum im Kerbgrund eines Zugstabes voll aus.* Der Grund dafür ist: der aus sprödem Werkstoff gefertigte Stab reißt ohne Einschnürung, deshalb ist die Vermeidung einer solchen durch den Kerb ohne Wirkung.

*Bei schwingender Belastung setzt ein Kerb die Festigkeit immer herab.* Wie im Abschnitt 2.6 erläutert, wird bei diesem Belastungsfall die Zerstörung durch Zerrüttung des Gefüges eingeleitet.

Das führt zu einem weiteren Faktor, der von Einfluss auf die Übertragbarkeit von Versuchsergebnissen ist. Die Normen schreiben für die meisten Probestäbe eine polierte Oberfläche vor. Wie wirkt sich eine davon abweichende *Oberflächenbeschaffenheit* auf die Festigkeit aus? Die Bearbeitungsunebenheiten wirken sich wie sehr kleine Kerben aus, die örtlich Spannungsspitzen zur Folge haben. Diese führen bei schwingender Belastung zu einer vorzeitigen Zerrüttung des Gefüges an der Oberfläche und damit zur vorzeitigen Zerstörung. Die nicht polierte oder nicht feingeschlichtete Oberfläche führt zu einer Verminderung der Festigkeit, die bei genauer Berechnung zu berücksichtigen ist.

Bei höheren Temperaturen (für Eisenwerkstoffe über 100 °C) nimmt die statische, wie auch die dynamische Festigkeit mit der Temperatur stärker ab. In diesen Fällen muss anstelle der im Kapitel 2 beschriebenen Kennwerte mit der Warmfestigkeit  $R_{m,T}$ , der Warmdehngrenze  $R_{p,T}$  bzw. Warm-Wechselfestigkeit  $\sigma_{W,T}$  gearbeitet werden.

Bei Temperaturen über der Kristallerholungstemperatur (für Eisenwerkstoffe ca. 350 °C) kommt bei Langzeitbeanspruchung der Fließvorgang nicht mehr zum Stillstand (Kriechen). Bei Temperaturen oberhalb 40 % der Schmelztemperatur existiert keine Dauerfestigkeit mehr; d.h. die Lebensdauer des Bauteils ist endlich. Die hierfür maßgebenden Festigungsgrenzen sind die Zeitstandsfestigkeit  $R_{m,Tt}$  und die 1 %-Zeitdehngrenze  $R_{p,Tt}$ , die mit der Belastungsdauer abnehmen. Allgemein gibt man als Zeitgrenze für diese Kennwerte 10 000 oder 100 000 Stunden an.

Festigkeitsauslegungen für hohe Temperaturen erfordern aufwendige Spannungs-

und Verformungsanalysen auf der Basis von (teuren) Langzeitversuchen, da Werkstoffgesetze, welche die Verformung als Funktion von Spannung, Temperatur und Zeit beschreiben, kaum verfügbar sind (siehe hierzu auch [30]).

Der vom Prüfversuch abweichende zeitliche Belastungsverlauf, z.B. durch Schwingungen und Stöße entstehende Belastungsspitzen, lässt sich durch Multiplikation der Nennkraft bzw. des Nennmomentes mit sog. *Betriebsfaktoren* berücksichtigen. Für eine detailliertere Untersuchung des zeitlichen Beanspruchungsverlaufs werden auf der Basis numerisch oder experimentell gewonnener Daten *Beanspruchungsfunktionen* gebildet und mit statistischen Methoden ausgewertet. Diese recht aufwendigen Verfahren sind in [39], [50] ausführlich beschrieben.

Die Werkstoffkennwerte werden für jede Beanspruchung gesondert aufgenommen und ausgewiesen (z.B. Zugfestigkeit, Biegefestigkeit, ...). Um auch bei komplexer Bauteilbeanspruchung mit diesen Werten arbeiten zu können, müssen verschiedene Beanspruchungen, wie im Kapitel 9 ausführlich erläutert, überlagert werden oder ausgehend von verschiedenen Versagensmechanismen in einen äquivalenten einachsigen Spannungszustand (Vergleichsspannung) überführt werden. Damit wird ein Vergleich zwischen Bauteilbeanspruchung und Bauteilfestigkeit erst möglich. Zu beachten ist dabei allerdings, dass diese Vergleichsspannung nur noch eine skalare „richtungslose“ Größe ist, was einen Informationsverlust bedeutet. Im Falle nichtsynchroner Einzelbeanspruchungen, z.B. phasenverschobene Schwingbeanspruchung durch Biegung und Torsion kann dies auch zu Fehlinterpretationen des tatsächlichen Festigkeitsverhaltens führen.

Für spezielle Einsatzbedingungen, wie der chemischen Industrie, dem Reaktorbau u.ä. sind Einflüsse durch korrosive Medien oder ionisierende Strahlungen, die zu einer Veränderung der mechanischen (z.B. Strahlungsverfestigung), physikalischen und chemischen Eigenschaften führen können, zu berücksichtigen.

Zusammengefasst beeinflussen die folgenden Faktoren die Übertragbarkeit der im Versuch ermittelten Kennwerte auf das Bauteil:

- Bearbeitung
- Form und Größe
- Oberflächenbeschaffenheit
- Temperatur
- Belastungsverlauf
- Spannungszustand
- Umgebungsbedingungen.

Die Kenntnis der vielfältigen Einzeleinflüsse bedeutet nicht zwangsläufig, dass sie auch angemessen in den Berechnungsverfahren Berücksichtigung finden. So wird z.B. das Problem der Eigenspannung, hervorgerufen u.a. durch die Fertigungsverfahren und Wärmebehandlung im Bauteilquerschnitt oder der wirksamen Tiefe einer Randschicht in den Berechnungen meist nicht berücksichtigt. *Die meisten Berechnungsverfahren beschränken sich auf die Berücksichtigung der Bearbeitung, der Größe (Spannungsgefälle), der Form und der Oberflächenbeschaffenheit des Bauteils.*

Die Berücksichtigung aller maßgebenden Einflüsse ist in der Regel nur in Verbindung mit Bauteilversuchen in der Praxis umsetzbar. Hierzu existieren eine Reihe von Verfahren, die es gestatten, die Verhältnisse unter Betriebsbedingungen zu erfassen und mehr oder weniger anschaulich darzustellen. Ein bedeutender Zweig der experimentellen Spannungsanalyse basiert auf dem Prinzip der Dehnungsmessung. Eine Spannung verursacht eine Dehnung. Ist der Werkstoff elastisch, gilt das HOOKEsche Gesetz, das beide Größen verbindet. Deshalb ist es möglich, über die Messung der örtlichen Dehnung auf die dort vorhandene Spannung zu schließen. Am unbelasteten Bauteil werden Dehnungsmessstreifen (DMS) aufgeklebt, deren Längenänderung bei Belastung ermittelt wird. Dabei macht man sich die Widerstandsänderung elektrischer Leiter infolge mechanischer Beanspruchung zunutze. Wird diese geringfügige Änderung des elektrischen Widerstandes durch eine spezielle Schaltung (WHEATSTONESche Brückenschaltung) aufgenommen und anschließend verstärkt, kann man mit großer Genauigkeit Längenänderungen erfassen. Die untere Grenze für den Messbereich liegt bei etwa  $1 \mu\text{m}/\text{m}$ .

Ein Verfahren, das grundsätzlich von gleichen Überlegungen ausgeht, ist die Reißlackmethode. Das betreffende Teil wird mit einem spröden Lack überzogen. Bei Belastung kann der spröde Überzug der Dehnung des Teiles nicht folgen und reißt. Die Risse treten zuerst an den Stellen der höchsten Beanspruchung auf und stehen senkrecht zur Richtung der maximalen Normalspannung. Dieses Verfahren liefert qualitative Ergebnisse. Es ist sehr gut geeignet, mit geringem Aufwand gefährdete Stellen aufzuzeigen und eine Form spannungstechnisch zu optimieren.

Im Gegensatz zu den oben beschriebenen Punktmessmethoden stellen optische Methoden Feldmessverfahren dar. Die klassische *Spannungsoptik* beruht auf der Doppelbrechung von polarisiertem Licht in bestimmten transparenten isotropen Kunststoffen, z.B. Epoxidharz. Ein daraus gefertigtes Modell wird belastet und durchleuchtet. Mit Hilfe einer optischen Messeinrichtung werden am projizierten Modell Linien sichtbar gemacht, die Rückschlüsse auf Ort und Größe der Haupt-

spannungen ermöglichen. Die Bedeutung von spannungsoptischen Verfahren hat aufgrund des relativ hohen Aufwandes bei der Modellherstellung und der Möglichkeiten mit Simulationstechnik zu vergleichbaren Ergebnissen zu gelangen, stark abgenommen.

Eine weitere optische Feldmessmethode ist das *Moiréverfahren*, dessen Grundprinzip in der Überlagerung von verzerrten und unverzerrten Rastern besteht. Das Raster kann auf das Originalbauteil aufgetragen werden und wird mit diesem verformt. Es ist also kein spezielles Modell erforderlich. Mit Hilfe der aus der Überlagerung des verformten mit einem unverformten Bezugsraster entstehenden Überlagerungsmuster (Moirélinien) können Verschiebungen und Verzerrungen an der Oberfläche des Messobjektes bestimmt werden.

Die rasante Weiterentwicklung der EDV und der Lasertechnik begünstigen eine Verbesserung der Messgeräte und eine Erhöhung von Qualität und Geschwindigkeit der Verarbeitung von Messdaten und der Versuchsauswertung. Die physikalischen Grundlagen der Messverfahren bleiben in vielen Fällen unverändert.

Experimentelle Verfahren werden zunehmend durch numerische Rechenverfahren ergänzt. Dabei handelt es sich meist um die *Finite-Elemente-Methode (FEM)*. Einfach übersetzt bedeutet dies *Methode der endlich großen Elemente*. Sie wurde in den sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts von ARGYRIS (Stuttgart und London) und CLOUGH (Berkeley) unabhängig voneinander entwickelt. Diese heute in der Festigkeitsberechnung (und nicht nur dort) nicht mehr wegzudenkende Methode ist nur mit leistungsfähiger Rechentechnik realisierbar. Es können damit nahezu alle Vorgänge der Natur realitätsnah simuliert werden. Die Möglichkeit ein Bauteil oder eine ganze Konstruktion – bevor sie existieren – am Computer simulierend verschiedenen Lastkombinationen auszusetzen und Aussagen zum Verhalten zu erhalten, bedeutet in vielen Fällen teure Versuche effektiver vorzubereiten oder sie auch zu ersetzen.

Der Grundgedanke dabei ist, die für komplizierte Bauformen und diskontinuierliche Systeme nicht exakt lösbar Differentialgleichungen *näherungsweise* zu lösen. Dazu wird der beliebige Körper in endlich kleine Elemente (finite Elemente) einfacher Form zerlegt und nur in den Eckpunkten wieder verbunden (siehe Abb. 10-3). Die Knoten bilden dabei die räumlichen Stützpunkte, während die Elemente die Bewegungsvorschriften der Knoten bei Beeinflussung darstellen. Die Zerlegung erfolgt auf der Basis von CAD-Geometrie im Computer weitgehend automatisch. Durch die Berechnung in diesen Eckpunkten (*Knoten*) muss anstelle der Differentialgleichung nur eine algebraische Gleichung gelöst werden. Diese wesentliche Vereinfachung bewirkt aber auch nur eine Annäherung an ein exaktes Ergebnis, die umso besser gelingt, je kleiner (aber nicht unendlich klein)

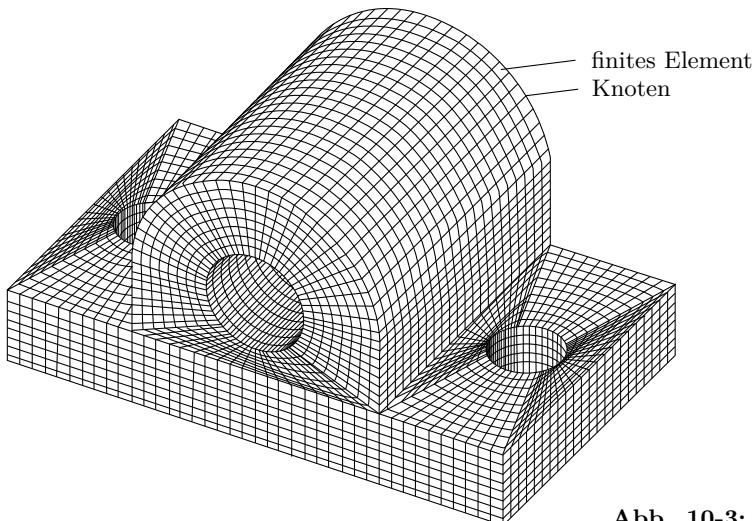


Abb. 10-3: Finite-Elemente-Modell

das gewählte Element wird. Damit wird aber auch die Anzahl der Elemente, die das Bauteilverhalten beschreiben sollen, größer. Das bedeutet dann, dass auch das zu lösende algebraische Gleichungssystem größer wird, was die Rechenzeit erhöht.

Die Nutzung der meist sehr komplexen Rechenprogramme zur Lösung konkreter technischer Aufgabenstellungen ist meist nicht so einfach, wie kommerzielle Anbieter solcher Programme glauben machen wollen, auch wenn sich die Handhabung stark vereinfacht hat. Ein Grundverständnis über die Eigenschaften, Grenzen und Möglichkeiten der Rechenmethoden und Programme, die Erfahrungen vergeblicher Rechenläufe und vor allem fundiertes Ingenieurwissen sind unabdingbar. Dem interessierten Leser und potentiellen Nutzern dieses mächtigen Verfahrens sei an dieser Stelle empfohlen, sich die Elastizitätstheoretischen Grundlagen, die den Rahmen dieses Lehrbuches überschreiten, die Grundlagen der Variationsrechnung und die Methode selbst anhand der Spezialliteratur anzueignen. Dazu werden aus der Fülle der zum Verfahren auf dem Markt befindlichen Literatur einige deutschsprachigen Standardwerke der FEM ([24], [28], [63]) und für den „Einstieg“ [33] und [49] empfohlen.

## 10.3 Der Festigkeitsnachweis

### 10.3.1 Berechnungskonzepte

Die in den vorausgehenden Kapiteln dargestellten Festigkeitsberechnungen gehen von vielen einschneidenden Vereinfachungen aus. Sie sind vor allem in der Konstruktionsphase, aber auch für Überschlagsrechnungen zur Abschätzung der mit numerischen Verfahren gewonnenen Ergebnisse häufig ausreichend. Für eine, die Vielzahl der Einflussgrößen besser erfassende Berechnung stehen technische Regelwerke mit umfangreichen Berechnungsverfahren zur Führung des Festigkeitsnachweises zur Verfügung. Hierbei handelt es sich um die FKM-Richtlinie<sup>1</sup> für den Maschinenbau, die DIN 18 800 und Eurocode 3 (DIN ENV 1993) für den Stahlbau sowie die DIN 15 018 (Stahltragwerke) für den Kranbau.

Mit der für den Maschinenbau 1994 erstmals vorgestellten FKM-Richtlinie „Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile“ [23] ist der aktuelle Stand der Technik gegeben. Die Richtlinie basiert auf der Grundlage der VDI-Richtlinie 2226 (Empfehlungen für die Festigkeitsberechnungen metallischer Bauteile), TGL-Standards der ehemaligen DDR sowie aktuellen Forschungsberichten. Damit wird eine einheitliche Vorschrift für die Festigkeitsberechnung im Maschinenbau angestrebt. Für mechanisch beanspruchte Bauteile kann damit sowohl der rechnerische Nachweis der *statischen Festigkeit* als auch der Nachweis der *Dauerfestigkeit* und der *Betriebsfestigkeit* – im Rahmen der Richtlinie unter dem Oberbegriff *Ermüdungsfestigkeit* zusammengefasst – geführt werden. In Abhängigkeit vom Beanspruchungszustand (statisch/zyklisch), des Werkstoffzustandes sowie des Fehlerzustandes (Rissproblematik) werden verschiedene Berechnungskonzepte angewendet.

Das am häufigsten zur Anwendung kommende ist das **Nennspannungskonzept**. Grundlage ist die Berechnung der auftretenden Spannung nach den Gleichungen der Kapitel 3 bis 6 (inklusive der mittleren Flächenpressung/Lochleitung). Die dort formulierten Spannungen

$$\sigma_{zd} = \frac{F}{A} \quad (3-1)$$

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} \quad (4-6)$$

$$\tau_s = \frac{F_q \cdot S}{I \cdot b} \quad (5-1)$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} \quad (6-2)$$

---

<sup>1</sup> FKM: Forschungskuratorium Maschinenbau

haben den Charakter einer Bezugsgröße und werden *Nennspannungen* genannt. Der Einfluss der Baugröße, der Kerbform und der Kerbempfindlichkeit wird im Ansatz der Bauteilstfestigkeit berücksichtigt. Das bedeutet, dass z.B. die *Kerbwirkung nicht als Erhöhung der Nennspannungen, sondern als Reduzierung der Bauteilbeanspruchbarkeit angesetzt wird*. Das Nennspannungskonzept geht von elastischem Werkstoffverhalten aus. Es liefert hinreichende Aussagen zur Dauerhaltbarkeit für Bauteile mit klar definierter Belastung und einfacher, beanspruchungsgerechter Formgebung, wie sie z.B. bei zylindrischen Wellen mit großen Übergangsradien auftreten. In einem solchen Fall beschreiben die Nennspannungen recht genau die tatsächliche Spannungsverteilung an der versagenskritischen Stelle. Eine „verfeinerte“ Spannungsberechnung würde die Zuverlässigkeit der Lebensdauerberechnung kaum verbessern können.

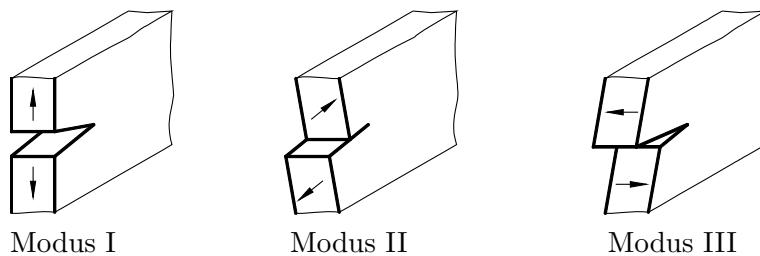
Für Bauteile mit komplizierter räumlicher Spannungsverteilung (z.B. Kerbverzahnung von Wellen, bei denen Kraftangriff- und -verteilung auf die einzelnen Zähne im kritischen Querschnitt von den Fertigungstoleranzen abhängen) liefert der Ansatz mit Nennspannungen naturgemäß unzulängliche Ergebnisse. Aufgrund des komplizierten Spannungsfeldes müssten aber auch bei jeder anderen Berechnungsmethode starke Vereinfachungen zugrunde gelegt werden. Damit würden die Ergebnisse trotz erhöhten Aufwandes kaum aussagefähiger. Die Alternative sind praktische Bauteilversuche.

Das **Konzept der örtlichen Spannungen** findet für komplizierte Bauteile, bei denen für den gefährdeten Querschnitt keine Nennspannungen angegeben werden können und i.d.R. auch keine Berechnungswerte für den Kerbeinfluss existieren, im *Kerbspannungskonzept* Anwendung. Der Einfluss der Kerbform wird bei der Berechnung der auftretenden Spannungen, meist mit numerischen Verfahren erfasst. Wie beim Nennspannungskonzept geht man von elastischem Werkstoffverhalten aus. Mit den Ergebnissen aus den Finite-Elemente-Berechnungen erhält man praktisch verbesserte Nennspannungen an den versagenskritischen Stellen bzw. im Bereich der Schweißnaht.

Das *Strukturspannungskonzept*, auch als *Hot-Spot-Konzept* bekannt, wurde für meerestechnische Bauten entwickelt und wird auch im Behälterbau angewandt. Bei diesem Konzept wird für komplexe Konstruktionen eine sog. Hot-Spot-Spannung in unmittelbarer Nähe der Schweißnähte ohne Berücksichtigung der Kerbwirkung derselben an den gefährdeten Stellen berechnet. In den einschlägigen Richtlinien ist festgelegt, an welchen Stellen die örtlichen Spannungen zu berechnen sind und wie die Interpolationen zu Hot-Spot-Spannungen erfolgen muss. Die Lebensdauerberechnungen werden unter Verwendung festgelegter *Strukturspannungs-WÖHLER-Linien* geführt.

Die Voraussetzung elastischen Werkstoffverhaltens wird dann unrealistisch, wenn bei dynamischer Belastung die Spitzenwerte der Spannungen an den schwingbruchkritischen Stellen Wechselplastifizierungen hervorrufen. Die Folge sind nichtlineare Beziehungen zwischen der Belastung und den tatsächlichen Spannungen im Kerbgrund. Berechnungsverfahren, welche die komplexen Zusammenhänge zu berücksichtigen versuchen, basieren auf dem *Kerbgrundkonzept*. Bei diesem Konzept wird von einer *zyklischen Spannungs-Dehnungskurve* (ZSD-Kurve) ausgegangen, welche die Spannungsamplituden in Abhängigkeit von der Gesamtdehnungsamplitude beschreibt. Die ertragbare Beanspruchung wird durch eine *Dehnungs-WÖHLER-Linie* charakterisiert. Diese stellt analog zu dem im Abschnitt 2.6 beschriebenen Vorgehen, die Dehnungsamplitude in Abhängigkeit von den Lastwechseln (Anrisszyklenzahl) dar. Die Lebensdauer wird dann aus einer Schadensakkumulation berechnet. Dabei geht man von dem Grundgedanken aus, dass die schwingende Beanspruchung eine Schädigung bewirkt, die sich im Laufe ihrer Einwirkung bis zum Erreichen eines kritischen Wertes (*Schädigungskennwert*) akkumuliert. Eine für die Anwendung dieses Konzeptes erforderliche ausführliche Beschreibung ist in der weiterführenden Literatur (z.B. [39]; [50]) zu finden.

Mit dem Auftreten von makroskopischen Schwingungsanrisse sind die örtlichen Spannungen und Dehnungen keine aussagekräftigen Größen mehr, da das Bauteilversagen durch Rissfortschritt schon bei Spannungen deutlich unter der Dehgrenze auftreten kann. Damit kommen zur Beurteilung der Lebensdauer Konzepte der **Ermüdungsrissbruchmechanik**, die sich mit dem *Fortschreiten* von Rissen (Rissausbreitung) beschäftigt, zur Anwendung. Hierbei versucht man einen Zusammenhang zwischen der Länge eines Anisses und der kritischen Spannung, bei der der Bruch eintritt, herzustellen. Im Unterschied zur Beschreibung homogener einachsiger Spannungszustände geht man bei der Rissbewertung mit Hilfe der Bruchmechanik von kritischen Spannungszuständen im Bereich der Riss spitzen aus. Als Beanspruchungsgrößen zur Bewertung dienen (Nenn-) Beanspruchung und Geometrie des Bauteils sowie Größe und Art des auftretenden Risses. Ein Riss kann als Kerbe mit einem definierten Krümmungsradius aufgefasst werden. Geht an der Riss spitze dieser Radius gegen Null, liegt eine mathematische Singularität vor, die zur Charakterisierung der Beanspruchung nicht brauchbar ist. Aus diesem Grunde wird eine *Spannungsintensität* definiert. Dabei ist die Verschiebungsbewegung der Riss oberflächen zueinander ein maßgebendes Kriterium. In der Bruchmechanik werden drei charakteristische Belastungsfälle (Modus I bis III, Abb. 10-4) unterschieden, die sich durch die Lage des Spannungsfeldes zum Riss auszeichnen. Beim Modus I ist die Hauptnormalspannung senkrecht zum Riss ausgerichtet, die als Zugspannung diesen öffnet



**Abb. 10-4:** Rissöffnungen

(während Druckspannungen weitgehend ungestört übertragen werden können). Auch die Modi II und III, die unterschiedlich orientierte Schubbelastungen darstellen, öffnen den Riss nicht. Weil bei Belastung in diesen Modi ein Teil der Verformungsarbeit in Reibarbeit der Rissflächen umgesetzt wird, wächst ein Riss im Modus I bei geringeren Lasten, als in den Modi II und III. Da beim Rissfortschritt Energiebilanzen eine große Rolle spielen, richtet sich der Riss bei homogenen Werkstoff und Spannungsfeld – unabhängig von seiner Anfangsausrichtung – im Laufe des Rissfortschritts in den Modus I, senkrecht zur Hauptnormalspannung, aus. Aus diesem Grunde ist dieser Modus sowie die maximale Normalspannung von besonderem technischen Interesse. Nach der Verschiebungsbewegung der Rissoberflächen zueinander, werden *Spannungsintensitätsfaktoren* aus den Spannungsgleichungen in unmittelbarer Umgebung der Riss spitze unter Berücksichtigung der Geometrie berechnet. Der Spannungsintensitätsfaktor ist dabei ein – für gegebene Werte von Nennspannung und Risslänge – konstanter Anteil der Spannungsgleichung. Da er der Spannung vor der Riss spitze proportional ist, stellt er eine geeignete Größe für die Bewertung des Bruches dar. Für viele Anwendungsfälle sind aus der Literatur Spannungsintensitätsfaktoren bekannt. Für komplexe Strukturen ist die Berechnung der Faktoren mit speziellen Finite-Elemente-Programmen möglich.

Die bruchmechanischen Berechnungen werden maßgeblich durch die Duktilität des Werkstoffes, die den Plastifizierungsgrad in der Rissumgebung bestimmt, festgelegt.

Prinzipiell lassen sich zwei Berechnungskonzepte unterscheiden: Ist die plastische Zone vor der Riss spitze klein gegenüber den Riss- und Bauteilabmessungen, geht man von einem linear elastischen Ansatz (LEBM = linear elastische Bruchmechanik) aus. Dieses spröde Versagen rissbehafteter Werkstoffe gilt für hochfeste metallische Legierungen, keramische Werkstoffe und Glas. Der Beanspruchungszustand wird durch das elastische Spannungsfeld außerhalb der plastischen Zone bestimmt. Die Berechnung der Lebensdauer ange-

rissener Bauteile basiert auf einem Rissfortschrittsdiagramm, das die Rissgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Spannungsintensität beschreibt. Liegt diese unter einem Schwellenwert, erweitert sich der Riss nicht. Erreicht die maximale Spannungsintensität die Bruchzähigkeit, tritt der Bruch ohne größere Verformung (Sprödbruch) ein. Aus diesem Bruchkriterium lässt sich somit bei vorgegebener Risslänge die kritische Nennspannung oder umgekehrt bei vorgegebener Nennspannung die kritische Risslänge, bei der der Bruch eintritt, bestimmen.

Beim elastisch-plastischen Bruchmechanik-Konzept (EPBM), auch *Fließbruchmechanik* genannt, gültig für weniger feste, duktilere Werkstoffe, kann der Beanspruchungszustand im Bereich der Rissspitze nicht mehr durch das elastische Spannungsumfeld außerhalb der ausgedehnten Fließbereiche vor der Rissspitze beschrieben werden. Zur Charakterisierung dieses Beanspruchungszustandes werden die *Rissöffnungsverschiebung* und das *J-Integral* verwendet. Das von Rice 1968 eingeführte J-Integral beschreibt die Energieumwandlung am Riss. Wie der Spannungsintensitätsfaktor hängt es von der Risslänge und anderen Geometriefaktoren sowie vom Werkstoffgesetz und der Belastung ab. Wird mit zunehmender Belastung für das Integral ein experimentell bestimmbarer kritischer Wert erreicht, tritt der (duktil verlaufende) Bruch ein. Damit ist über das J-Integral ein ähnliches Bruchkriterium bei plastischer Verformung der Rissspitze, wie mit dem Spannungsintensitätsfaktor für den elastischen Ansatz beschreibbar.

Die Temperatur spielt bei der Zuordnung zum Berechnungsverfahren eine wichtige Rolle. Werkstoffe, die bei tieferen Temperaturen nach der LEBM zu berechnen sind, zeigen bei höheren Temperaturen oft ein ausgeprägt plastisches Verhalten.

Die Bruchmechanik hat sich zu einem eigenständigen Gebiet mit einer Fülle von Veröffentlichungen entwickelt. Für die Einarbeitung in diese spezielle Problematik wird auf die weiterführende Literatur z.B. [30], [39], [40], [56] verwiesen.

Die in den folgenden Abschnitten vorgestellten Berechnungsverfahren beschränken sich auf den rechnerischen Festigkeitsnachweis mit *Nennspannungen* für *stabförmige nicht geschweißte Bauteile*.

### 10.3.2 Der statische Festigkeitsnachweis

Für das Versagen eines Bauteils sind hauptsächlich die Beanspruchungsart, die Bauteilgestalt und die Werkstoffeigenschaften maßgeblich. Aus dem Schadensbild, dem Bruchverlauf und den Werkstoffdaten eines havarierten Bauteils kann man auf die Schadensursachen schließen. Hier ist zwischen statischer und dyna-

mischer Überlastung als Ursache des Versagens zu unterscheiden. Da in beiden Fällen die ertragbaren Spannungen unterschiedlich groß sind (siehe Abschnitt 2.6), muss der Nachweis auf statische und dynamische Festigkeit getrennt geführt werden.

Der statische Sicherheitsnachweis gegen Fließen bzw. Bruch ist nach Gleichung 2-4:

$$\text{Sicherheit} = \frac{\text{ertragbare Spannung (Bauteilfestigkeit, Fließgrenze)}}{\text{auftretende Spannung (Bauteilbeanspruchung)}} \geq \text{Mindestsicherheit}.$$

Die ertragbaren Spannungen, die Bauteil-Normwerte  $R_m$  und  $R_p$  ergeben sich aus den *Probestück-Normwerten*, der Zugfestigkeit  $R_{m,N}$  und der Streckgrenze  $R_{p,N}$ . Diese werden entweder aus dem Zugversuch bestimmt oder aus einschlägigen Werkstofftabellen und Normen entnommen. Die Übertragung der Kennwerte auf das Bauteil erfordert häufig Korrekturen, welche als technologischer Größenfaktor  $K_d$  und Anisotropiefaktor<sup>2</sup>  $K_A$  (eventuell auch Temperatureinflussfaktor), die aus der Literatur (z.B. [23]) verfügbar sind, auftreten. Damit wird der statische Bauteilkennwert

$$\begin{aligned} R_m &= K_{d,m} \cdot K_A \cdot R_{m,N} \\ R_p &= K_{d,p} \cdot K_A \cdot R_{p,N}. \end{aligned} \tag{10-1}$$

Die für das Bauteil festzulegende Sicherheitszahl wird maßgeblich beeinflusst durch:

- Schadensfolgen für Mensch und Umwelt
- Kosten (Stillstand, Ersatzteile)
- Lastannahmen
- Werkstoffkennwerte, Wärmebehandlung
- Fertigung (Toleranzen)
- Sicherheitsbestimmungen, Wartungsintervalle, Überwachung
- Korrosionsgefahr
- Vorschriften der Klassifizierungsgesellschaften.

Die Mindestsicherheit wird nach [23] in Abhängigkeit des Verformungsvermögens, der Inspektionshäufigkeit und des Schadensrisikos angesetzt (siehe Tabellen 5A und 5B).

---

<sup>2</sup>Anisotropie (griechisch): Richtungsabhängigkeit der Eigenschaften.

Den Sicherheitsempfehlungen liegen die folgenden Annahmen zugrunde:

- die Festigkeitswerte der Werkstoffe basieren auf einer Überlebenswahrscheinlichkeit von 97,5 %
- die Beanspruchungen werden auf der sicheren Seite festgelegt
- für Eisen und Aluminiumgusswerkstoffe sind wegen möglicher Gütefehler, mangelnder Duktilität und Eigenspannungen höhere Sicherheitszahlen erforderlich.

Die *Sicherheitszuschläge* können nach [23] wie folgt ermittelt werden:

- Gusseisen mit Kugelgraphit (GJS)  $\Delta S = 0,5 - \sqrt{A_5/50\%}$
- Temperguss (GJMW, GJMB)  $\Delta S = 0,5 - \sqrt{A_3/50\%}$
- Gusseisen mit Lamellengraphit (GJL).  $\Delta S = 0,5$

Der Festigkeitsnachweis für nicht duktile Werkstoffe ( $A_5 < 12,5\%$ ) ist mit örtlichen Spannungen zu führen [23].

Wenn aus der *Beanspruchungsart* (z.B. Biegung, Torsion) und *Bauteilform* (z.B. Querschnittsübergänge, Kerben) ungleichmäßige *Spannungsverteilungen* mit Spannungsspitzen resultieren, ist dies bei der Berechnung zu berücksichtigen. Dieser Umstand lässt sich aber auch bei der Bauteilauslegung nutzen. Die Spannungsspitzen werden, wenn die Elastizitätsgrenze überschritten wird, durch eine geringe plastische Verformung an den höchstbelasteten Stellen abgemindert. Diese *Teilplastifizierung* schadet der Funktion nicht und ihre Einbeziehung führt bei hinreichend duktilem Werkstoff zur besseren Werkstoffausnutzung. Die Nutzung dieser „Tragreserve“ erfolgt über eine *plastische Stützzahl*

$$n_{pl} = \sqrt{\frac{R_{p,max}}{R_p}} \leq \alpha_p . \quad (10-2)$$

In dieser Gleichung ist  $R_{p,max}$  eine Konstante, welche die Fließgrenze, bis zu der die plastische Stützzahl  $n_{pl} > 1$  möglich sein soll, beschreibt [23]. Für Walzstahl und Stahlguss ist  $R_{p,max} = 1050 \text{ N/mm}^2$ , für Gusseisen mit Kugelgraphit ist  $R_{p,max} = 320 \text{ N/mm}^2$ . Die obere Grenze für die plastische Stützzahl ist die plastische Formzahl  $\alpha_p$ , die das Verhältnis von vollplastischer Traglast zu elastischer Traglast definiert. Für einen biegebeanspruchten Rechteckquerschnitt z.B. (siehe auch Abschnitt 4.2, Abb. 4-15c mit Erklärung 5.) beträgt das maximale, elastisch aufnehmbare Biegemoment

$$M_{b,el} = R_p \cdot \frac{b \cdot h^2}{6} ,$$

das vollplastische Tragmoment

$$M_{b,pl} = R_p \cdot \frac{b \cdot h^2}{4}.$$

Damit wird für dieses Beispiel

$$\alpha_{p,b} = \frac{M_{b,pl}}{M_{b,el}} = 1,5.$$

Entsprechend wird für den Kreisquerschnitt  $\alpha_{p,b} = 1,70$ , den Kreisring  $\alpha_{p,b} = 1,33$  und bei Torsionsbeanspruchung  $\alpha_{p,t} = 1,33$  (Kreis) und  $\alpha_{p,t} = 1$  (Kreisring). Für gleichmäßige Verteilung der Nennspannung über den Querschnitt (Zug, Druck, aber auch für Schub) ist die plastische Formzahl  $\alpha_p = 1$ .

Die unter voller Ausnutzung der Grenzwerte für die plastische Stützzahl ermittelten ertragbaren Höchstspannungen lassen eine vollplastische Traglast mit *bleibender Verformung* zu! Außerdem ist zu beachten, dass bei der Verwendung der Grenzwerte für die plastische Stützzahl durch den entstehenden dreiachsigem Spannungszustand die statische Festigkeit steigt. Damit ist aber auch eine Werkstoffversprödung (Abnahme der Dehnbarkeit) verbunden. Um diese Einflüsse zu berücksichtigen, wird für Biege- und Torsionsbeanspruchungen mit reduzierten plastischen Formzahlen  $\alpha_{p,red} = 1,1 \dots 1,2$  gearbeitet, wodurch die Spannungs erhöhungen auf maximal 20 % begrenzt und die Traglastreserven nur teilweise genutzt werden. Für Zug, Druck und Schub verzichtet man auf die Berücksichtigung der festigkeitserhöhenden Wirkung ( $n_{pl} = 1$ ).

Mit der plastischen Stützzahl (Gl. 10-2) wird die Bauteilfließgrenze (Fließgrenze des gekerbten Teiles)

$$\begin{aligned}\sigma_{FK} &= R_p \cdot n_{pl} \\ \tau_{FK} &= \tau_F \cdot n_{pl}\end{aligned}\tag{10-3}$$

bzw. die Bauteilfestigkeit (Bruchgrenze des gekerbten Teiles)

$$\begin{aligned}\sigma_{BK} &= R_m \cdot n_{pl} \\ \tau_{BK} &= \tau_B \cdot n_{pl}.\end{aligned}\tag{10-4}$$

Der Nachweis gegen das Überschreiten der Fließgrenze (zähe Werkstoffe) für die Einzelbeanspruchung wird nach Gleichung 2-4

$$\begin{aligned}S_F &= \frac{\sigma_{FK}}{\sigma_{vorh}} \geq S_{F \text{ min}} \\ S_F &= \frac{\tau_{FK}}{\tau_{vorh}} \geq S_{F \text{ min}}\end{aligned}\tag{10-5}$$

und der Nachweis der statischen Festigkeit gegen Überschreiten der Zugfestigkeit (spröde Werkstoffe)

$$\begin{aligned} S_B &= \frac{\sigma_{BK}}{\sigma_{vorh}} \geq S_B \text{ min} \\ S_B &= \frac{\tau_{BK}}{\tau_{vorh}} \geq S_B \text{ min} \end{aligned} \quad (10-6)$$

berechnet.

Bei zusammengesetzter Beanspruchung ist der Nachweis für die Einzelbeanspruchungen und die zusammengesetzte Beanspruchung getrennt zu führen, denn eine ausreichende Gesamtsicherheit kann eine *nicht* ausreichende Einzelsicherheit auch nicht kompensieren. Beim Nachweis der Sicherheit bei zusammengesetzter Beanspruchung ist zu berücksichtigen, dass die Festigkeitskennwerte für Zug und Biegung, *wenn plastische Verformungen zugelassen werden*, nicht mehr gleich sind – wie auch die Festigkeitskennwerte für Biegung und Torsion.

Für die praktische Festigkeitsrechnung müssen die einzelnen Spannungskomponenten so korrigiert werden, dass sie hinsichtlich der Ausnutzung der zugehörigen Festigungsgrenzen vergleichbar sind. Die höhere Druckfestigkeit von Guss-eisen ist durch einen Druckfestigkeitsfaktor  $f_\sigma = 1,3$  (Druck oder Biegedruck) zu berücksichtigen. Entsprechend wird bei der Berücksichtigung der geringeren Werkstofffestigkeit bei Schubbeanspruchung durch einen Schubfestigkeitsfaktor  $f_\tau = 1/\sqrt{3} = 0,577$  (für Gusseisen  $f_\tau = 0,65$ ) für duktile Werkstoffe vorgegangen. Dieser Faktor tritt an die Stelle des Anstrengungsverhältnisses, das ja Grenzspannungen enthält (siehe Abschnitt 9.3.1). Für den Nachweis der Bruchsicherheit wird aus den Einzelbeanspruchungen die Vergleichsspannung (siehe Abschnitt 9.3) gebildet und der Zugfestigkeit gegenübergestellt. Für die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) folgt mit Gleichung 9-4

$$\frac{\sigma_{v,GEH}}{R_m} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zd}}{\sigma_{BK,zd}} + \frac{\sigma_b}{\sigma_{BK,b}}\right)^2 + 3 \cdot f_\tau^2 \cdot \left(\frac{\tau_s}{\tau_{BK,s}} + \frac{\tau_t}{\tau_{BK,t}}\right)^2} = \frac{1}{S_{B,GEH}} \quad (10-7)$$

bzw. als „reziproke Sicherheit“ geschrieben

$$\frac{1}{S_{B,GEH}} = \sqrt{\left(\frac{1}{S_{B,zd}} + \frac{1}{S_{B,b}}\right)^2 + 3 \cdot f_\tau^2 \cdot \left(\frac{1}{S_{B,s}} + \frac{1}{S_{B,t}}\right)^2} \quad (10-8)$$

oder

$$\begin{aligned} S_{B,GEH} &= \frac{R_m}{\sigma_{v,GEH}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{zd}}{\sigma_{BK,zd}} + \frac{\sigma_b}{\sigma_{BK,b}}\right)^2 + 3 \cdot f_\tau^2 \cdot \left(\frac{\tau_s}{\tau_{BK,s}} + \frac{\tau_t}{\tau_{BK,t}}\right)^2}} \geq S_{B,min}. \quad (10-9) \end{aligned}$$

Für die Normalspannungshypothese (NH) folgt mit der Gleichung 9-2 analog

$$\begin{aligned} S_{B,NH} &= \\ &\frac{1}{0,5 \cdot \left( \left| \frac{\sigma_{zd}}{\sigma_{BK,zd}} + \frac{\sigma_b}{\sigma_{BK,b}} \right| + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zd}}{\sigma_{BK,zd}} + \frac{\sigma_b}{\sigma_{BK,b}}\right)^2 + 4 \cdot f_\tau^2 \cdot \left(\frac{\tau_s}{\tau_{BK,s}} + \frac{\tau_t}{\tau_{BK,t}}\right)^2} } \right)} \\ &\geq S_{B,min}. \quad (10-10) \end{aligned}$$

Die Berechnungsgleichungen für die Sicherheit gegen die Fließgrenze  $S_F$  lassen sich entsprechend formulieren, wenn  $R_p$  statt  $R_m$  und  $\sigma_{FK}$  für  $\sigma_{BK}$  in die oben stehenden Gleichungen eingesetzt wird.

Viele Werkstoffe verhalten sich unter Betriebsbedingungen weder absolut spröde noch absolut duktil. Damit erfasst jede der beiden Hypothesen für sich das Werkstoffverhalten nicht wirklichkeitsgerecht. Die Interpolation zwischen den beiden Hypothesen über den Schubfestigkeitsfaktor und einen Zähigkeitsquotienten

$$q = \frac{\sqrt{3} - 1/f_\tau}{\sqrt{3} - 1}, \quad (10-11)$$

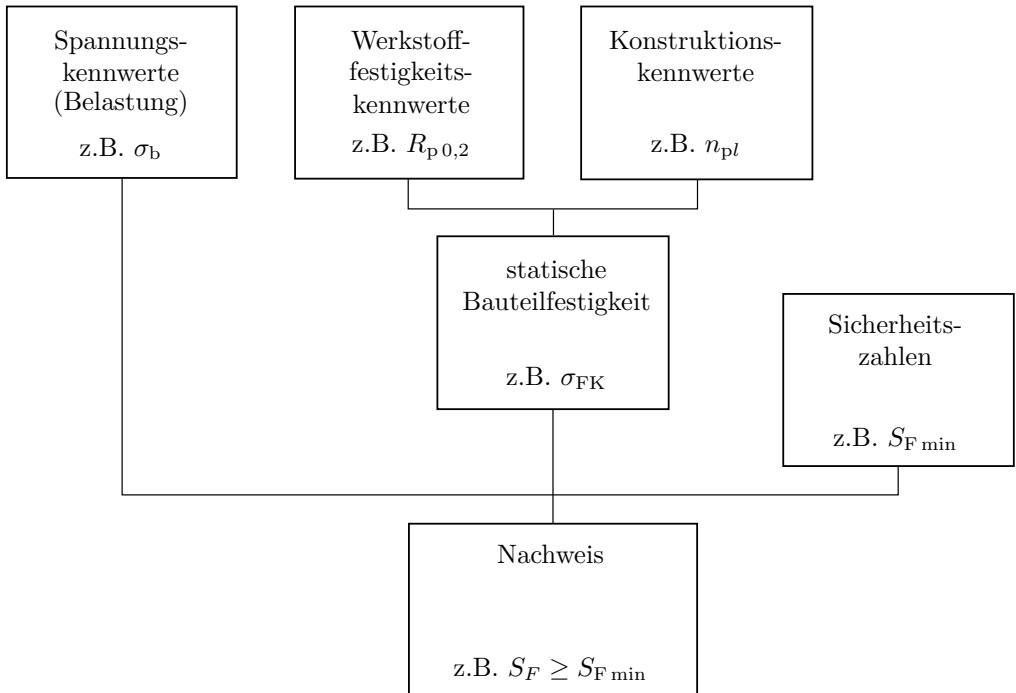
der die Anteile der Hypothesen gemäß der Duktilität steuert, führt auf einen Sicherheitsnachweis nach der sog. „gemischten Hypothese“

$$\begin{aligned} S_B &= \frac{1}{\left(\frac{q}{S_{B,NH}} + \frac{1-q}{S_{B,GEH}}\right)} \geq S_{B,min} \\ S_F &= \frac{1}{\left(\frac{q}{S_{F,NH}} + \frac{1-q}{S_{F,GEH}}\right)} \geq S_{F,min}. \quad (10-12) \end{aligned}$$

Für die Mindestsicherheit bei statischer Beanspruchung werden in Abhängigkeit von den Schadensfolgen für Walzstahl und Aluminium und für Gusswerkstoffe

nach Kriterien erfolgter Prüfungen die Sicherheitszahlen nach Tabelle 5 vorgeschlagen.

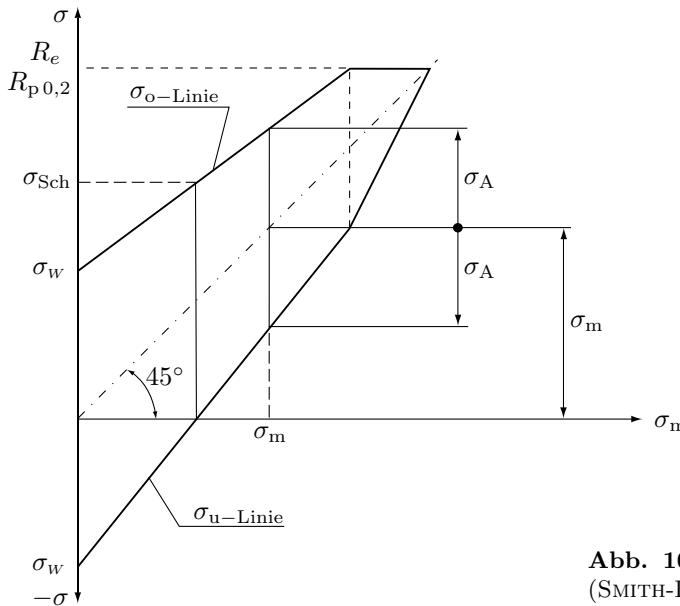
Der Berechnungsablauf für den Nachweis der statischen Festigkeit auf der Grundlage der FKM-Richtlinie ist in Abb. 10-5 prinzipiell dargestellt. Dabei erhebt die in diesem Lehrbuch beschriebene Kurzfassung keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Für konkrete Anwendungen wird auf die aktuelle Originalfassung der Richtlinie verwiesen.



**Abb. 10-5:** Ablauf des statischen Festigkeitsnachweis nach FKM-Richtlinie.

### 10.3.3 Der Dauerfestigkeitsnachweis

Die dynamische Bauteilstfestigkeit wird auch als *Gestaltfestigkeit* (im Rahmen der FKM-Richtlinie als *Ermüdungsfestigkeit*) bezeichnet. Darunter versteht man die Dauerfestigkeit eines beliebig gestalteten Bauteils (und nicht einer Probe!) bei Berücksichtigung der festigkeitsmindernden Einflüsse. Der Dauerfestigkeitsbegriff, der WÖHLER-Versuch und das Dauerfestigkeitsschaubild (DFS) nach SMITH sind im Abschnitt 2.6; Abb. 2-11, 2-12 erklärt. Das SMITH-Diagramm kann näherungsweise mittels Geraden aus Werkstoffkennwerten konstruiert wer-

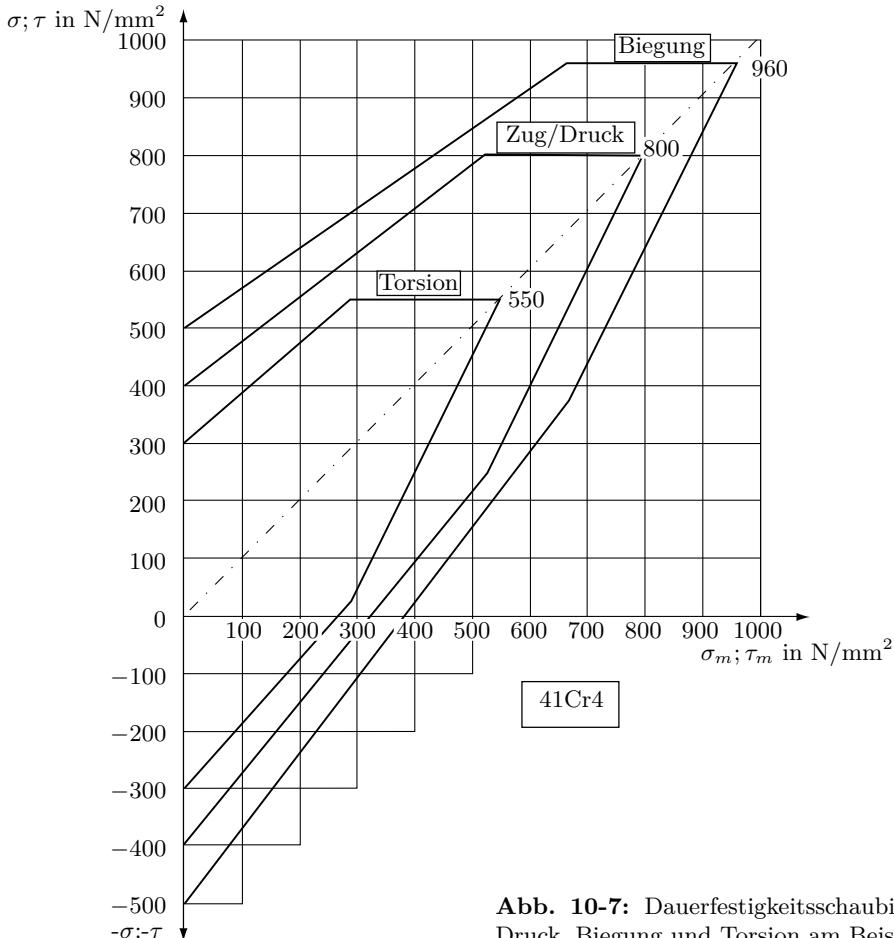


**Abb. 10-6:** Dauerfestigkeitsschaubild (SMITH-Diagramm)

den (siehe Abb. 10-6). In einem solchen Diagramm kann man die ertragbaren Ausschlagsspannungen für die jeweilige Beanspruchung, den Werkstoff, abhängig von der Mittelspannung, direkt an der Ordinate ablesen. Durch die unterschiedlichen Werkstoffkennwerte bei verschiedenen Beanspruchungen ergeben sich unterschiedliche Diagramme, die in Abb. 10-7 für den Vergütungsstahl 41Cr4 mit den Kennwerten aus [23] beispielhaft zusammengefasst sind.

*Die Konstruktion eines Dauerfestigkeitsschaubildes, die zweckmäßig ist, wenn Versuchswerte des verwendeten Werkstoffs vorliegen, wird in einer Beispielaufgabe am Ende des Abschnitts erklärt.*

Die zu berechnenden Bauteile weichen in nahezu allen wichtigen Parametern von den Idealbedingungen des Versuchs ab. Somit muss die Dauerfestigkeit des realen Bauteils, die Gestaltfestigkeit  $\sigma_{AK}$ , auf der Grundlage der Dauerfestigkeit  $\sigma_D$  berechnet oder im Versuch ermittelt werden. Die Abweichungen, die das Bauteil vom Probestab unterscheiden, werden durch Korrekturbeiwerte (in der FKM-Richtlinie: *Konstruktionskennwerte*) berücksichtigt. Von maßgeblichem Einfluss auf den Spannungsverlauf sind dabei schroffe Querschnittsänderungen (Übergänge, Nuten, Einstiche u.a.). Grundsätzlich wurde die Frage bereits im Kapitel 2 im Zusammenhang mit der Abb. 2-15 angeschnitten. Die Abb. 10-8 zeigt qualitativ die Spannungsverteilung in gekerbten Wellen, die auf Zug, Biegung und Torsion beansprucht sind. Gestrichelt ist der Verlauf der Nennspannungen dargestellt. Diese werden aus den Querschnittskennwerten Fläche und Wider-

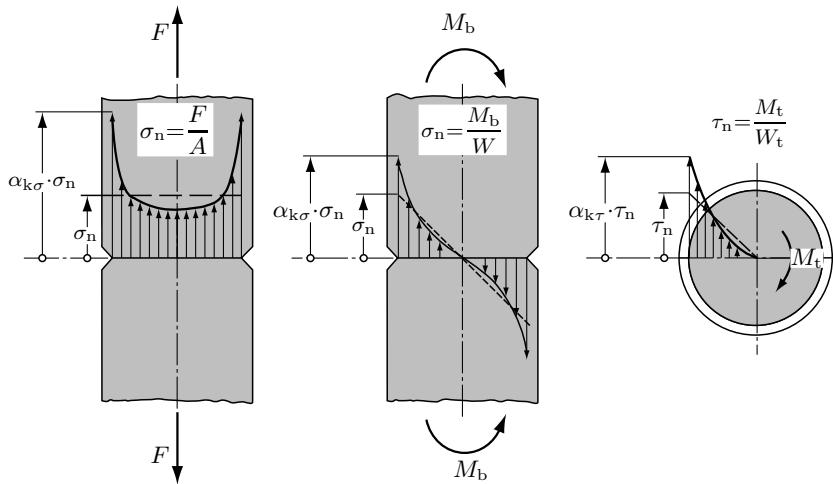


**Abb. 10-7:** Dauerfestigkeitsschaubild für Zug-Druck, Biegung und Torsion am Beispiel 41Cr4

standsmoment im Schnitt des Kerbgrundes berechnet. Im Zugstab wird von einer gleichmäßigen Auslastung ausgegangen. Bei Biegung und Torsion erhält man eine lineare Zunahme auf den Maximalwert am Rand. Die tatsächliche Spannung im Kerbgrund ist größer als die jeweilige Nennspannung. Um diesen Tatbestand rechnerisch zu erfassen, führt man einen Faktor ein, mit dem die Nennspannung multipliziert wird und so die Spannungsspitze im Kerbgrund ergibt

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \alpha_K \cdot \sigma_n \\ \tau_{\max} &= \alpha_K \cdot \tau_n .\end{aligned}\tag{10-13}$$

Der Faktor  $\alpha_K$  wird Kerbformzahl oder kurz *Formzahl* genannt. Er *hängt von*



**Abb. 10-8:** Spannungsverteilung bei Zug, Biegung und Verdrehung

der Kerbgeometrie und der Beanspruchungsart ab, nicht vom Werkstoff und der Bauteilgröße. Die Formzahl gilt für ideal elastisches Werkstoffverhalten und enthält keine Aussagen zum Spannungsverlauf über den Querschnitt. Die Tabelle 17 enthält eine Auswahl von Werten für die Formzahl aus [23].

Die besondere Problematik des Kerbeinflusses bei Schwingbeanspruchung ist, dass sich die Formzahl  $\alpha_K$  bei kleinem Kerbgrundradius und steilem Spannungsgefälle nicht vollständig festigkeitsmindernd auswirkt. Bei schwingender Beanspruchung müsste die Zerstörung im Kerbgrund einsetzen, wenn die auftretende Ausschlagsspannung den Wert  $\sigma_a = \alpha_{K\sigma} \cdot \sigma_n$  erreicht. Versuche ergeben aber, dass eine höhere Spannungsamplitude ertragen wird. An einem Zahlenbeispiel sollen die Verhältnisse deutlich werden. Die glatte, polierte Probe, Durchmesser  $d$  hat eine Wechselfestigkeit von  $\sigma_W = 240 \text{ N/mm}^2$ . Eine Probe aus gleichem Werkstoff mit einer Kerbe, für die  $a_{K\sigma} = 3,0$  ist, mit Durchmesser  $d$  im Kerbgrund, müsste demnach einen maximalen Spannungswert

$$\sigma_{WK} = \frac{\sigma_W}{\alpha_{K\sigma}} = \frac{240 \text{ N/mm}^2}{3,0} = 80 \text{ N/mm}^2$$

ertragen. Ein durchgeführter Versuch ergibt aber z.B. eine ertragbare Spannungsamplitude von  $\sigma_{WK} = 100 \text{ N/mm}^2$ . Es wirkt sich demnach nicht der volle Betrag der Spannungsspitze aus. Da man bei der Festigkeitsberechnung von der am glatten Stab ermittelten Wechselfestigkeit, hier also von  $\sigma_W = 240 \text{ N/mm}^2$

ausgeht, definiert man als Kerbwirkungszahl

$$\beta_K = \frac{\sigma_W}{\sigma_{WK}} = \frac{\text{Wechselfestigkeit der Probe}}{\text{Wechselfestigkeit der gekerbten Probe}}. \quad (10-14)$$

Im vorliegenden Beispiel

$$\beta_K = \frac{240 \text{ N/mm}^2}{100 \text{ N/mm}^2} = 2,4.$$

Aus dem oben Gesagten folgt, dass  $1 < \beta_K < \alpha_K$  sein muss. Dabei bleibt die Kerbwirkungszahl umso mehr hinter der Formzahl zurück, je kleiner der Kerbgrundradius ist.

*Hochfeste Werkstoffe*, die im Zugversuch keine ausgeprägte Streckgrenze aufweisen, sind *kerbempfindlich*. Weiche Stähle mit ausgeprägter Streckgrenze sind weniger kerbempfindlich, da durch örtliches Fließen Spannungsspitzen abgebaut werden können. Wirkt sich bei der Zerstörung bei schwingender Belastung die volle Spannungsspitze  $\alpha_K \cdot \sigma_n$  aus, dann ist der Werkstoff extrem kerbempfindlich und es gilt nach dem oben Gesagten  $\beta_K = \alpha_K$ . Für Werkstoffe, für die die Spannungsspitze fast ungefährlich ist, nähert sich  $\beta_K$  dem Wert 1.

Für oft vorkommende Fälle in der Maschinenkonstruktion findet man Erfahrungswerte für  $\beta_K$  in der einschlägigen Literatur ([23], [38], [39], [52]). Liegen keine Werte für  $\beta_K$  vor, dann ist  $\beta_K = \alpha_K$  ein sicherer Ansatz.

Man hat bisher im Wesentlichen folgende Einflüsse auf die Kerbwirkungszahl  $\beta_K$  festgestellt:

- Form und Größe der Kerbe,
- Beanspruchungsart (Zug – Druck, Biegung usw.),
- Werkstoffeigenschaften (Härte, Zugfestigkeit usw.),
- Größe des Spannungsgefälles im Kerbgrund,
- Zustand der Oberfläche (Bearbeitungsart) und der unmittelbar darunter liegenden Schichten (z.B. Verfestigung),
- Größe des Bauteils.

Aus der umfangreichen einschlägigen Literatur sind zahlreiche Versuche zur Formulierung des Zusammenhangs zwischen der spannungstheoretischen, werkstoffunabhängigen Formzahl  $\alpha_K$  und der werkstoffabhängigen Kerbwirkungszahl  $\beta_K$  bekannt (in [39] ist eine sehr umfassende, nach Themen geordnete

Zusammenstellung, auch Fachbeiträge und Tagungsberichte enthaltend, zu finden). Wenn die Kerbwirkungszahl nicht experimentell bestimmt werden kann (Dauerversuche mit realen Bauteilen sind zeitraubend und oft sehr schwierig durchführbar), wird inzwischen in der Regel nach dem auf SIEBEL und STIELER zurückgehenden Vorschlag, basierend auf einer dynamischen Stützzahl (auch *Stützziffer*) für die Gestaltfestigkeit

$$n_\chi = \frac{\alpha_K}{\beta_K} \quad (10-15)$$

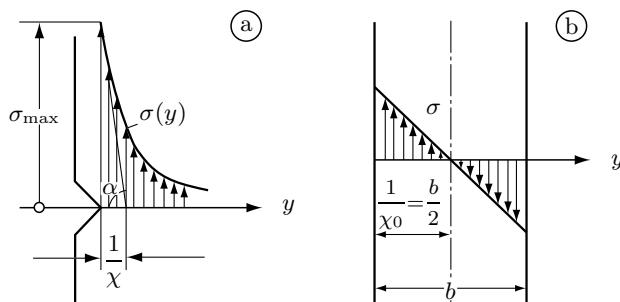
gerechnet. Der Begriff „Stützzahl“ beruht dabei auf der Vorstellung der Stützwirkung durch das Spannungsgefälle. Andere, zurzeit in der Anwendungspraxis bisher kaum berücksichtigte, Vorstellungen zur Erklärung des Zusammenhangs von  $\alpha_K$  und  $\beta_K$  gehen von statistisch verteilten Fehlstellen mit dem Ergebnis einer *statistisch begründeten Stützziffer* aus (siehe dazu [39]).

Der Einfluss der Verdichtung der Spannungslinien im Kerbgrund (siehe dazu Abb. 2-16) wird mit hinreichender Näherung durch das *bezogene Spannungsgefälle*  $\chi$  beschrieben. Das Spannungsgefälle im Kerbgrund beschreibt die Neigung des Spannungsabfalls an der Spannungsspitze (siehe Abb. 10-9a) zu

$$\tan \alpha = \frac{d\sigma}{dy} .$$

Auf den Maximalwert der Spannung bezogen, erhält man das bezogene Spannungsgefälle

$$\chi = \frac{1}{\sigma_{\max}} \cdot \frac{d\sigma}{dy}$$



**Abb. 10-9:** Zur Definition des bezogenen Spannungsgefälles  $\chi$

bzw.

$$\chi = \frac{1}{\tau_{\max}} \cdot \frac{d\tau}{dy}.$$

Geometrisch lässt sich  $\chi$  als der Kehrwert der durch die Tangente abgeschnittenen Strecke auf der  $y$ -Achse deuten. Bei Biegung und Torsion ist auch im glatten Stab ein Spannungsgefälle vorhanden. Dieses wird  $\chi_0$  bezeichnet und beträgt nach Abb. 10-9b

$$\chi_0 = \frac{2}{b}$$

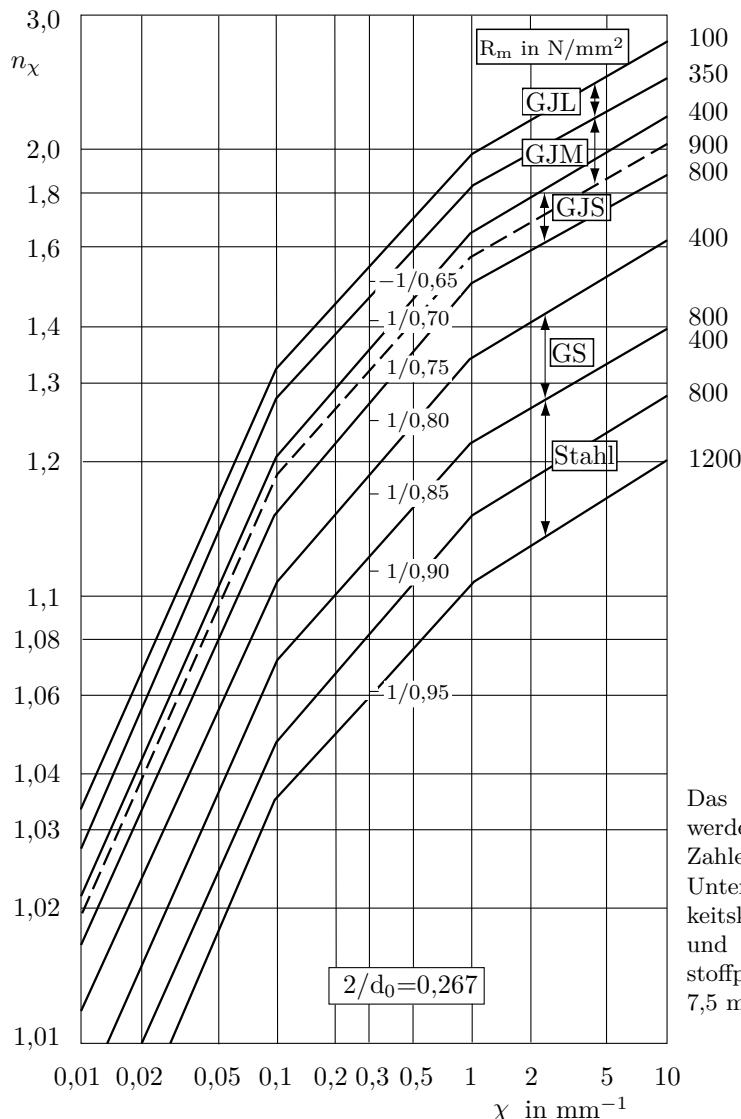
und überlagert das durch die Kerben hervorgerufene Spannungsgefälle. Berechnungsgleichungen, basierend auf [23] sind in Tabelle 18 gegeben. Die bezogenen Spannungsgefälle hängen nur von der Schärfe der Kerbe, d.h. von der Größe des Radius im Kerbgrund  $r$  (oft auch  $\rho$ ), ab. Da nach den Berechnungsgleichungen für  $\chi$  nach Tabelle 18 bei scharfkantigen Kerben ( $r = 0$ ) das bezogene Spannungsgefälle unendlich würde (was praktisch unmöglich ist, da die Spannungslinien im Bogen um die Kerbe laufen) wird i.A. mit  $r \geq 0,25$  mm gerechnet. Die mit dem bezogenen Spannungsgefälle und der Bruchfestigkeit als Parameter ermittelten dynamischen Stützzahlen für Stahl und Gusseisen nach [23] sind im Diagramm, Abb. 10-10, gezeigt.

Ist die Stützzahl  $n_\chi$  bekannt, kann

$$\beta_K = \frac{\alpha_K}{n_\chi} \quad (10-16)$$

berechnet werden. Für konstruktiv bedingte Kerben liegen die Werte für die Kerbwirkungszahlen zwischen  $\beta_K \approx 1,2$  (z.B. Wellenübergänge) und  $\beta_K \approx 3$  (Nuten für Sicherungsringe).

In der Regel hat ein Dauerbruch seinen Anfang an der Oberfläche. Dies erklärt sich zum einen daraus, dass dort fast immer die höchste Spannung auftritt und zum anderen durch die Bearbeitungsverfahren, welche die Oberflächenbeschaffenheit der Bauteile bestimmen. In Abb. 10-11 sind in starker Vergrößerung die Schnitte durch Oberflächen gezeigt, die bei verschiedener Bearbeitung entstehen. Es fragt sich, wie die einzelnen Oberflächen die Festigkeit des betreffenden Teiles beeinflussen. Jede Bearbeitung verursacht eine plastische Deformation in unmittelbarer Nähe der Oberfläche. Ein Schneidwerkzeug, das einen Span abhebt, übt eine gewisse Krafteinwirkung auch auf die Gefügeteile, die unmittelbar unter der neu entstehenden Oberfläche liegen. In einer dünnen Schicht



Das Diagramm darf erweitert werden auf  $\chi = 100 \text{ mm}^{-1}$ .  
 Zahlenwerte 1/0,065 bis 1/0,095:  
 Unterschied der Wechselfestigkeitskennwerte für Zug-Druck und Biegung, gültig für Werkstoffprobe des Durchmessrs  $d_0 = 7,5 \text{ mm}$ .

**Abb. 10-10:** Die Stützzahl  $n_\chi$  in Abhängigkeit vom bezogenen Spannungsgefälle  $\chi$  für Stahl und Gusseisen nach FKM-Richtlinie [23].

wird durch den Schneidvorgang das Korn zerstört und es entstehen feine Risse, die zur Festigkeitsverminderung führen. Das gleiche Oberflächenbild durch Walzen erzeugt, würde in einer Festigkeitserhöhung resultieren. Schon daran sieht man, wie problematisch die Erfassung des Oberflächeneinflusses ist.

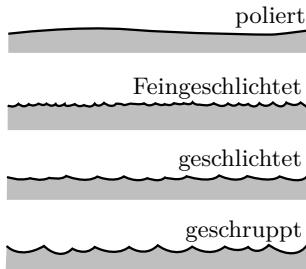


Abb. 10-11: Oberflächenqualitäten

Eine technisch bearbeitete Oberfläche kann man ganz grob als eine Aneinanderreihung verschiedener geformter Kerben ansehen. Daraus lässt sich schließen, dass die Dauerfestigkeit kerbempfindlicher Werkstoffe am meisten durch die Oberflächenbeschaffenheit beeinflusst wird. Das wird durch mannigfaltige Versuche bestätigt. Besonders hoch ist der Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit bei hochfesten und vergüteten Stählen, die einer schwingenden Belastung unterliegen.

Die Verminderung der Dauerfestigkeit auf Grund der Oberflächenbeschaffenheit wird durch den *Rauheitsfaktor*  $K_O$  (auch *Oberflächenbeiwert*) beschrieben. Er wird experimentell aus der Dauerfestigkeit mit und „ohne“ Oberflächenrauheit (polierter Probenkörper mit  $R_Z \leq 1 \mu\text{m}$ ) zu

$$\sigma_{D,\text{rau}} = K_{O,\sigma} \cdot \sigma_{D,\text{poliert}}$$

$$\tau_{D,\text{rau}} = K_{O,\tau} \cdot \tau_{D,\text{poliert}}$$

abgeleitet und in Abhängigkeit von der gemittelten Rautiefe  $R_Z$  und der Zugfestigkeit des Werkstoffs dargestellt (siehe Abb. 10-12). Nach dem oben gesagten muss  $K_O$  für eine polierte Oberfläche den Wert 1 haben, sonst kleiner 1. Aus dem Diagramm nach Abb. 10-12 ist zu erkennen, dass unter ungünstigen Verhältnissen die Dauerfestigkeit allein durch den Oberflächeneinfluss um mehr als 50 % gemindert werden kann.

Ebenso wie die fertigungsbedingten „Riefen“ Einfluss auf die Ermüdungsfestigkeit des Bauteils haben, verändern auch fertigungsbedingte Randschichtverfestigungen z.B. durch Walzen, Kugelstrahlen oder Oberflächenhärteverfahren die Dauerfestigkeit. Durch die Druckspannungen in der Randschicht wird die Dauerfestigkeit erhöht. Mit der Bauteilgröße wird dieser Einfluss geringer, mit

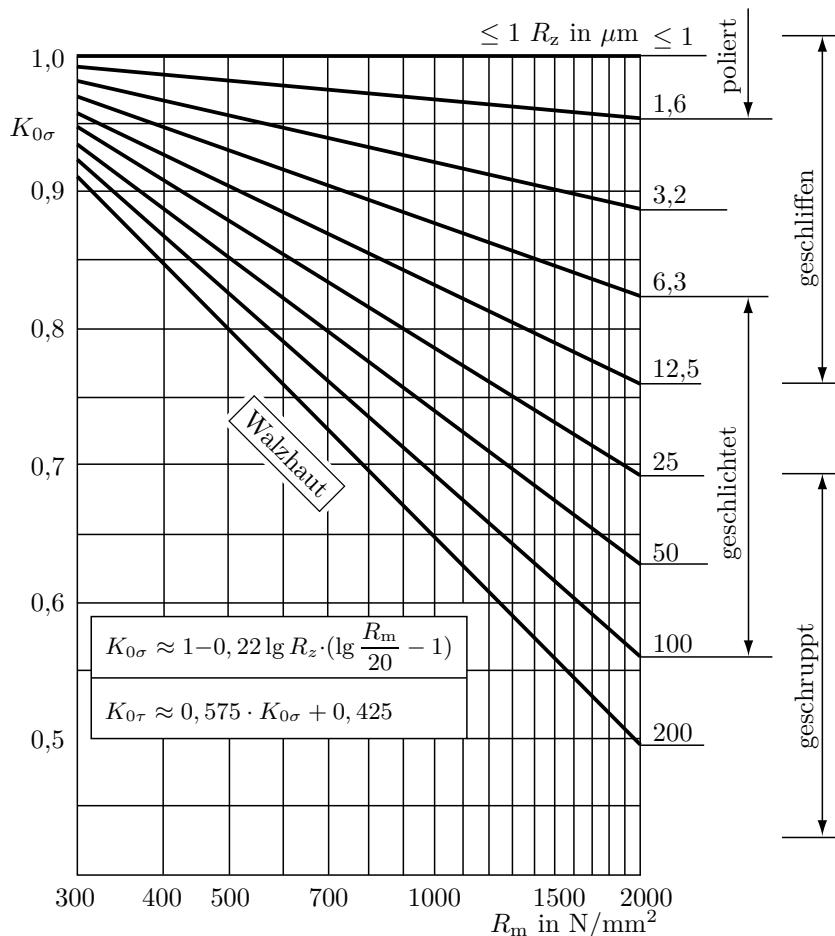


Abb. 10-12: Einflussfaktor der Oberflächenrauheit  $K_O$

zunehmender Kerbschärfe nimmt er zu. Die Randschichtverfestigung wird vereinfachend durch einen *Randschichtfaktor*  $K_V$  (*Oberflächenverfestigungsfaktor*) berücksichtigt (siehe z.B. [55]). Ohne Randschichtverfestigung ist  $K_V = 1$ .

Die Übertragung der an (kleinen) Proben gewonnenen Kennwerte auf größere Bauteile führt i.A. zur Überschätzung des Bauteilverhaltens. Die Ursachen für die Verschlechterung der Schwingfestigkeit mit steigender Bauteilgröße lassen sich durch die folgenden Einflüsse beschreiben:

Ein *spannungsmechanischer oder geometrischer Größeneinfluss* resultiert aus der schon im Abschnitt 10.2 beschriebenen größenabhängigen Stützwirkung bei inhomogener Spannungsverteilung (Abb. 10-2), wie sie bei Biegung und Torsion – aber auch bei gekerbten Bauteilen – auftritt.

Der *technologische Größeneinfluss* beruht auf verschiedenen Gefügeausbildungen und Eigenspannungszuständen von Bauteilen unterschiedlicher Größe durch fertigungsbedingte Besonderheiten wie Gießen, Schmieden, Umformen und Wärmebehandlungsverfahren.

Die von der Bauteilgröße abhängige unterschiedliche Tiefenwirkung einer Oberflächenverfestigung (siehe oben) wird häufig auch als *oberflächentechnischer Größeneinfluss* definiert. Die Abgrenzung zum technologischen Größeneinfluss und zum Randschichtfaktor ist allerdings fließend.

Der *statistische Größeneinfluss* beschreibt die erhöhte Wahrscheinlichkeit eines Bruchausganges von statistisch verteilten Fehlern.

Die oben genannten Ursachen für den Einfluss der Bauteilgröße lassen sich nicht eindeutig voneinander trennen. Das Zusammenwirken der verschiedenen Einflüsse ist nach heutigem Erkenntnisstand bisher nur in Verbindung mit Bauteilver suchen wirklichkeitsnah zu erfassen. Die meisten einschlägigen Berechnungsverfahren berücksichtigen entweder nur den geometrischen (spannungsmechanischen) Größeneinfluss  $K_g$  nach DIN 743 (siehe Abb. 10-13) oder verzichten ganz auf die Berücksichtigung der Bauteilgröße ([23], [39], [52]).

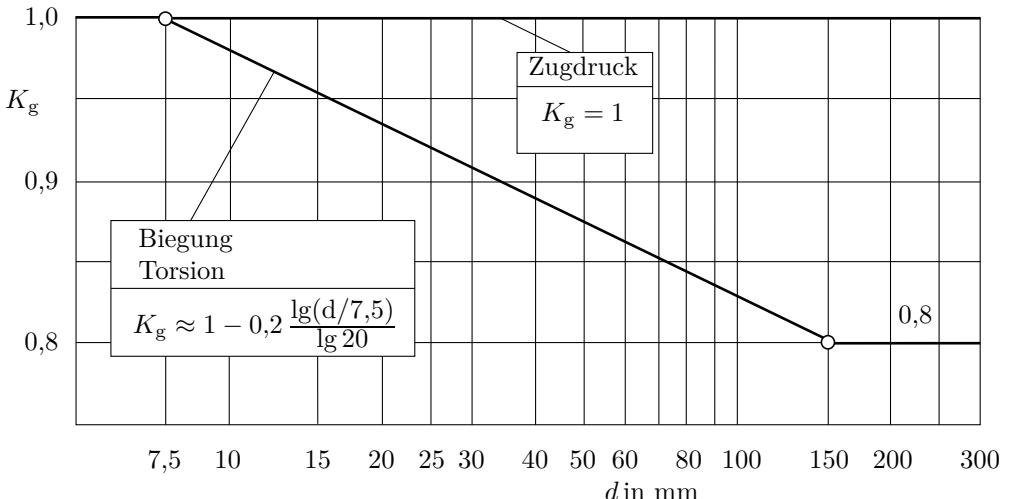


Abb. 10-13: Geometrischer Größeneinflussfaktor  $K_g$

Schwer erfassbar ist auch die technisch gefürchtete Minderung der Dauerschwingfestigkeit durch die so genannte *Reibermüdung*, auch *Fretting Fatigue*. Hierbei entsteht eine Oberflächenschädigung mit anschließendem Risswachstum bei geringen Relativbewegungen zwischen Teilen unter hoher Flächenpressung bei schwingender Belastung. Durch die hohe Flächenpressung entstehen örtliche

Verschweißungen, die durch die Relativbewegungen zum Teil wieder aufgebrochen werden, was winzige Anrisse und Materialabtrag zur Folge hat. Letzteres lässt ein abrasives (oft oxidierendes) Pulver zwischen den Kontaktflächen entstehen, was zu dem zusätzlichen Effekt der *Reibkorrosion* führt.

Die Einflussgrößen für die Reibermüdung sind die Werkstoffpaarung, die Oberflächenrauheit, Schmiermittel, Beschichtung, die Beanspruchungsart und die Flächenpressung, die Temperatur und die Größe der Relativbewegung als die eigentliche Ursache.

Da die Grenzparameter für diese Erscheinungen nicht bekannt sind, lässt sich die Reibermüdung nur sehr schwer beherrschen und wird durch die gängigen Berechnungsverfahren nicht erfasst. Um Schäden zu vermeiden, sind – wo die Relativbewegungen konstruktiv nicht beseitigt werden können – neben regelmäßigen Kontrollen die Verringerung des Reibkoeffizienten durch Festschmiermittel oder verschleißbeständige Oberflächenschutzschichten wirksame Gegenmittel.

Die verschiedenen erfassbaren Einflüsse der Dauerfestigkeitsminderung werden im *Konstruktionsfaktor* (*Gesamteinflussfaktor*)

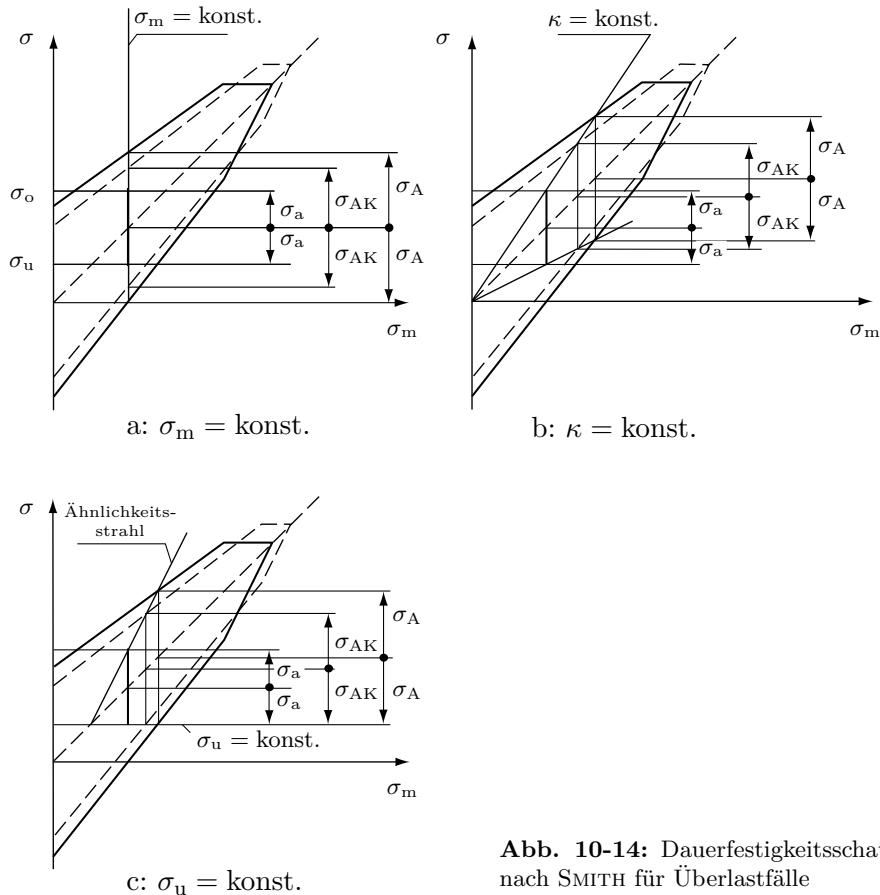
$$\begin{aligned} K_\sigma &= \left( \frac{\beta_{K\sigma}}{K_g} + \frac{1}{K_{O,\sigma}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V} \\ K_\tau &= \left( \frac{\beta_{K\tau}}{K_g} + \frac{1}{K_{O,\tau}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V} \end{aligned} \quad (10-17)$$

zusammengefasst. Damit kann zunächst die *Bauteilwechselfestigkeit* (*Gestaltwechselfestigkeit*) des gekerbten Bauteils mit den Werkstofffestigkeitskennwerten  $\sigma_{zdW}$ ,  $\sigma_{bW}$ ,  $\tau_{sW}$ ,  $\tau_{tW}$  zu

$$\begin{aligned} \sigma_{WK} &= \frac{\sigma_W}{K_\sigma} = \frac{\sigma_W \cdot K_V}{\left( \frac{\beta_{K,\sigma}}{K_g} + \frac{1}{K_{O,\sigma}} - 1 \right)} \\ \tau_{WK} &= \frac{\tau_W}{K_\tau} = \frac{\tau_W \cdot K_V}{\left( \frac{\beta_{K,\tau}}{K_g} + \frac{1}{K_{O,\tau}} - 1 \right)} \end{aligned} \quad (10-18)$$

berechnet werden.

Für den Festigkeitsnachweis gegen Dauerbruch ist die *Bauteilausschlagfestigkeit*  $\sigma_{AK}$  bzw.  $\tau_{AK}$  maßgebend. Das ist die Grenzspannung, bei der das Bauteilver sagen durch Schwingbruch eintritt. Sie wird von der Mittelspannung und der *Mittelspannungsempfindlichkeit* beeinflusst. Die Mittelspannungsempfindlichkeit  $M_\sigma$  bzw.  $M_\tau$  (auch  $\psi$ ) berücksichtigt die unterschiedlichen Ausschlagfestigkeiten im SMITH-Diagramm für sich im Betrieb ändernde dynamische Belastungen



**Abb. 10-14:** Dauerfestigkeitsschaubilder nach SMITH für Überlastfälle

(Überlastfälle). Diese unterschiedlichen Werte für die Ausschlagfestigkeiten in Abhängigkeit der verschiedenen Überlastfälle sind in Abb. 10-14 dargestellt.

Die folgenden Ausführungen beschränken sich beispielhaft auf den Fall, dass die Mittelspannungen bei Änderung der Betriebsbelastung konstant bleiben. Dies ist z.B. bei Fahrzeugachsen im Betrieb der Fall. Für die übrigen Überlastfälle wird auf die FKM-Richtlinie [23] verwiesen, die sehr detailliert Berechnungsgleichungen bereitstellt.

Die Dauerfestigkeit nach Mittelspannungen für stabförmige nicht geschweißte Bauteile mit konstanter Mittelspannung lässt sich zu

$$\begin{aligned}\sigma_{AK} &= \sigma_{WK} - M_\sigma \cdot \sigma_m \\ \tau_{AK} &= \tau_{WK} - M_\tau \cdot \tau_m\end{aligned}\quad (10-19)$$

berechnen.

Dabei ist die Mittelspannungsempfindlichkeit

$$\begin{aligned} M_\sigma &= a_M \cdot 10^{-3} \cdot \frac{R_m}{MPa} + b_M \\ M_\tau &= f_\tau \cdot M_\sigma \end{aligned} \quad (10-20)$$

mit  $f_\tau = 1/\sqrt{3} = 0,577$  (St, GS) und  $f_\tau = 0,65$  (GJL) (vgl. auch Abschnitt 10.3) und den Konstanten nach Tabelle 10.1.

**Tabelle 10.1:** Konstanten zur Berechnung der Mittelspannungsempfindlichkeit

Werkstoffgruppe	St	GS	GJS	GJM	GJL	AW-Al	AC-Al
$a_M$	0,35	0,35	0,35	0,35	0	1,0	1,0
$b_M$	-0,1	0,05	0,08	0,13	0,5	-0,04	0,2

Der Nachweis der Bauteil-Dauerfestigkeit für Einzelbeanspruchungen wird dann

$$\begin{aligned} S_{D,zd} &= \frac{\sigma_{AK,zd}}{\sigma_{a,zd}} \geq S_{D\min} \\ S_{D,b} &= \frac{\sigma_{AK,b}}{\sigma_{a,b}} \geq S_{D\min} \\ S_{D,s} &= \frac{\tau_{AK,s}}{\tau_{a,s}} \geq S_{D\min} \\ S_{D,t} &= \frac{\tau_{AK,t}}{\tau_{a,t}} \geq S_{D\min}. \end{aligned} \quad (10-21)$$

Bei gleichzeitigem Auftreten mehrerer Lastkomponenten ist der Festigkeitsnachweis i.d.R. aufwendiger und schwieriger. Dies ist unter anderem darauf zurückzuführen, dass die Festlegung des Werkstoffkennwertes für die unterschiedlichen Belastungsarten mit ihren zeitlichen Verläufen nicht eindeutig ist, da meist jede Belastungsart einen spezifischen Kennwert besitzt. Überdies wirken sich Mittel- und Ausschlagsspannung unterschiedlich auf das Schädigungsverhalten aus, was die Ermittlung einer Beanspruchungsgröße in Form einer Vergleichsspannung erschwert (siehe hierzu [43]). *Im maschinenbautypischen Fall „Biegung und Torsion“ und ähnlichen Fällen kann bei synchron schwingenden Beanspruchungen, wie die Ergebnisse zahlreicher Versuche zeigen, auch für die Schwingbeanspruchung die Berechnung mit den ursprünglich für die statische Beanspruchung aufgestellten Hypothesen erfolgen.* Dabei ist für spröde Werkstoffe bzw. Werkstoffzustände mit der Normalspannungshypothese (NH) und für duktile Werkstoffe bzw. -zustände mit der Gestaltänderungsenergiyhypothese (GEH) zu rechnen oder auch gegebenenfalls, wie im Abschnitt 10.3.2, Gle-

chungen 10-11 und 10-12 gezeigt, zur gemischten Hypothese zusammenzufassen. Mit der Gestaltänderungsenergiehypothese wird für Biegung und Torsion, erweitert um Zug/Druck, mit den Einzelspannungsamplituden, wie beim Nachweis für die Einzelbeanspruchung (Gl. 10-21) gerechnet. Wie beim statischen Sicherheitsnachweis, muss auch beim Nachweis der dynamischen Sicherheit jede Spannungskomponente zu der zugehörigen Festigkeit ins Verhältnis gesetzt werden, wenn man die *Vergleichs-Sicherheit* bildet. Für die Gestaltänderungshypothese gilt

$$S_{D,GEH} = \frac{\sigma_{AK,v}}{\sigma_{a,v}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{a,zd}}{\sigma_{AK,zd}} + \frac{\sigma_{a,b}}{\sigma_{AK,b}}\right)^2 + 3 \cdot f_\tau^2 \cdot \left(\frac{\tau_{a,t}}{\tau_{AK,t}}\right)^2}} \geq S_{D \min}. \quad (10-22)$$

Dies entspricht im Aufbau der Gleichung 10-9 für den statischen Nachweis. Entsprechend lässt sich auch für die Normalspannungshypothese die Gleichung 10-10 übertragen.

Die Mindestsicherheiten für den Nachweis gegen Dauerbruch in Abhängigkeit von den Schadensfolgen für Walzstahl und Aluminium sind in Tabelle 5C und für Gusswerkstoffe nach Kriterien erfolgter Prüfungen in Tabelle 5D aufgeführt.

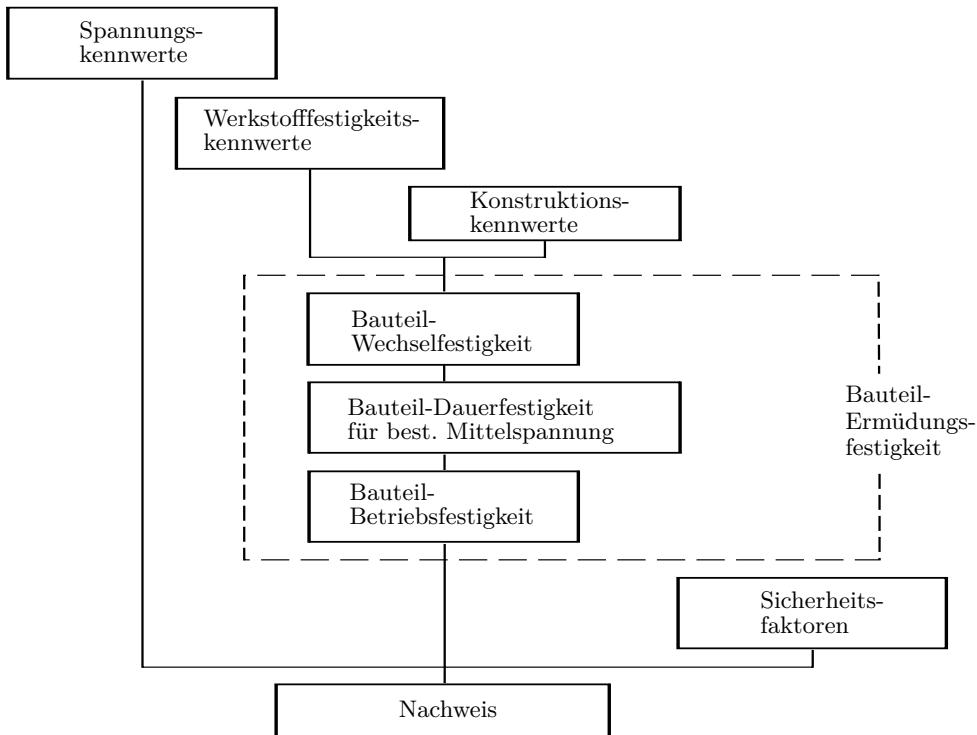
Einschränkend ist allerdings zu beachten, dass diese Hypothese bei nichtsynchron schwingenden Lastspannungen mit daraus folgenden Richtungswechseln der Hauptspannungsrichtung versagt. Die für diese Fälle zur Verfügung stehenden Hypothesen (z.B. Schubspannungsintensitätshypothese SIH), die nicht Gegenstand dieses Lehrbuches sind und auch in der FKM-Richtlinie noch keine Berücksichtigung gefunden haben, sind in der weiterführenden Literatur (z.B. [39], [43]) zu finden.

Der prinzipielle Berechnungsablauf ist in Abb. 10-15 dargestellt.

An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, dass die statischen Festigkeitswerte  $R_p, \sigma_{bF}$  durch die Spannungssumme  $\sigma_{AK} + \sigma_m (\tau_{AK} + \tau_m)$  nicht überschritten werden dürfen. Um dies zu verhindern, *ist zusätzlich ein statischer Spannungsnachweis zwingend erforderlich*.

### **Beispiel 1 (Abb. 10-16)**

Der abgebildete Abschnitt einer Achse aus E 295 ist wechselnd durch ein Biegemoment  $M_b = 600 \text{ N} \cdot \text{m}$  und durch eine konstante Zugkraft  $F = 150 \text{ kN}$  belastet. Die Oberflächenqualität der geschliffenen Achse ist  $R_z = 12,5 \mu\text{m}$ . Für die Mindestsicherheit gegen bleibende Verformung (Fließgrenze) wird nach Tabelle 5A  $S_{F \min} = 1,5$  und gegen Dauerbruch, regelmäßige Inspektionen vor-

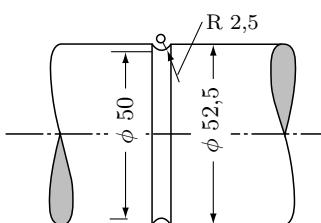


**Abb. 10-15:** Ablauf des Ermüdungsfestigkeitsnachweises nach FKM-Richtlinie [23]

aussetzend, nach Tabelle 5C  $S_{D\min} = 1,35$  festgelegt. Es ist der statische und der dynamische Festigkeitsnachweis zu führen.

### Lösung

Es handelt sich hier um die Überlagerung von Biegung und Zug, d.h. um die Addition von Normalspannungen. Die konstante Mittelspannung wird durch den Zug, der Spannungsausschlag durch die Biegung verursacht. Die Spannungssumme darf nicht zu bleibenden Verformungen führen. Es ist ein statischer Nachweis zu führen. Nach [23] wird mit Gleichung 10-1 für die Streckgrenze  $R_e = 287 \text{ N/mm}^2$  und die Bruchspannung  $R_m = 484 \text{ N/mm}^2$  festgelegt.



**Abb. 10-16:** Welle mit Kerb

Aus den Belastungen werden als Nennspannungen die Zugspannung

$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 1,5 \cdot 10^5 \text{ N}}{\pi \cdot 50^2 \text{ mm}^2} = 77 \text{ N/mm}^2$$

und die Biegespannung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{32 \cdot M_b}{\pi \cdot d^3} = \frac{32 \cdot 6 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\pi \cdot 50^3 \text{ mm}^3} = 49 \text{ N/mm}^2$$

berechnet.

Die Überlagerung auf der Zugseite der Achse nach Gleichung 9-1 führt auf

$$\sigma_{\max} = \sigma_z + \sigma_b = 126 \text{ N/mm}^2.$$

Dieser Wert liegt deutlich unter der Streckgrenze. Die Sicherheit gegen Fließen beträgt

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{\max}} = \frac{287 \text{ N/mm}^2}{126 \text{ N/mm}^2} = \underline{2,2 > S_F \min = 1,5}.$$

Für den Dauerfestigkeitsnachweis werden im Ablauf gemäß Abb. 10-15 die Konstruktionskennwerte ermittelt.

Mit  $d/D = 50 \text{ mm}/52,5 \text{ mm} = 0,95$  und  $r/t = 2,5 \text{ mm}/1,25 \text{ mm} = 2$  erhält man aus Tabelle 17 die Formzahl  $\alpha_{Kb} = 2,17$ .

Für die Berechnung der Kerbwirkungszahl  $\beta_K$  nach Gleichung 10-16 wird das bezogene Spannungsverhältnis für die Biegung nach Tabelle 18 berechnet:

$$\chi = \frac{2}{r} \cdot (1 + \varphi)$$

mit  $\varphi = 1/(4 \cdot \sqrt{t/r} + 2)$  für  $t/d \leq 0,25$ . Eingesetzt und ausgerechnet wird

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{2}{r} \cdot \left( 1 + \frac{1}{4 \cdot \sqrt{t/r} + 2} \right) \\ &= \frac{2}{2,5 \text{ mm}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{4 \cdot \sqrt{1,25 \text{ mm}/2,5 \text{ mm}} + 2} \right) = 0,97 \text{ mm}^{-1}. \end{aligned}$$

Die dynamische Stützzahl  $n_\chi$  wird in Abhängigkeit von  $\chi$  aus dem Diagramm (Abb. 10-10) zu  $n_\chi = 1,20$  abgelesen. Damit lässt sich nach Gleichung 10-16 die Kerbwirkungszahl berechnen:

$$\beta_{Kb} = \frac{\alpha_{Kb}}{n_\chi} = \frac{2,17}{1,20} = 1,81.$$

Der Rauheitsfaktor wird bei zugrunde gelegter mittlerer Rautiefe  $R_z = 12,5 \mu\text{m}$  und der Zugfestigkeit von  $R_m = 484 \text{ N/mm}^2$  nach Abb. 10-12:  $K_{O\sigma} = 0,91$ .

Der Größeneinflussfaktor ist nach Abb. 10-13:  $K_g = 0,87$ .

Für die geschliffene Oberfläche ist der Faktor für die Randschichtverfestigung  $K_V = 1$ .

Mit diesen Werten wird der Konstruktionsfaktor nach Gleichung 10-17

$$K_\sigma = \left( \frac{\beta_{Kb}}{K_g} + \frac{1}{K_{O\sigma}} - 1 \right) \cdot K_V = \left( \frac{1,81}{0,87} + \frac{1}{0,91} - 1 \right) \cdot 1 = 2,18.$$

Die Bauteilwechselfestigkeit wird mit  $\sigma_{bW} = 238 \text{ N/mm}^2$  nach Gleichung 10-18

$$\sigma_{WK} = \frac{\sigma_{bW}}{K_\sigma} = \frac{238 \text{ N/mm}^2}{2,18} = \underline{109 \text{ N/mm}^2}.$$

Die Bauteildauerfestigkeit für bestimmte Mittelspannung wird nach Gleichung 10-19 berechnet. Hierfür muss zuerst die Mittelspannungsempfindlichkeit nach Gleichung 10-20 und Tabelle 10-1 ermittelt werden

$$M_\sigma = a_M \cdot 10^{-3} \cdot \frac{R_m}{MPa} + b_M = 0,35 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{484 \text{ N/mm}^2}{MPa} - 0,1 = 0,069.$$

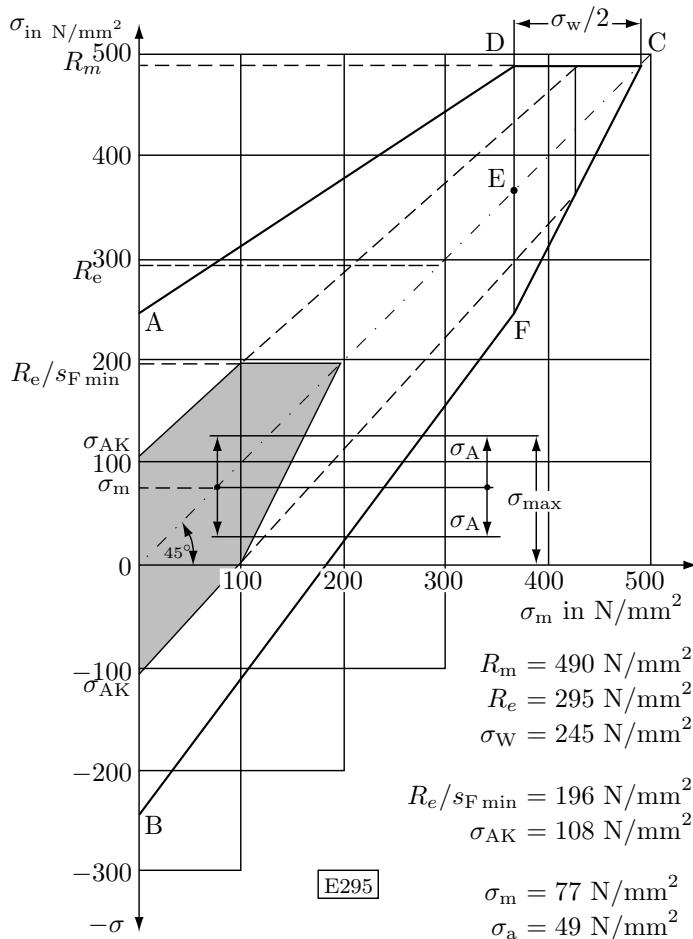
Mit der Mittelspannung  $\sigma_m = \sigma_z = 77 \text{ N/mm}^2$  wird nach Gleichung 10-19

$$\sigma_{AK,b} = \sigma_{WK} - M_\sigma \cdot \sigma_m = 109 \text{ N/mm}^2 - 0,069 \cdot 77 \text{ N/mm}^2 = \underline{104 \text{ N/mm}^2}.$$

Damit kann der Nachweis auf Dauerfestigkeit mit Gleichung 10-21 geführt werden

$$S_{D,b} = \frac{\sigma_{AK,b}}{\sigma_{a,b}} = \frac{104 \text{ N/mm}^2}{49 \text{ N/mm}^2} = \underline{2,12 > S_D \min = 1,35}.$$

Eine alternative Möglichkeit die Bauteilsicherheit zu überprüfen, ist das Arbeiten mit dem Dauerfestigkeitsschaubild nach SMITH. Dieses Schaubild kann man aus den Werkstoffkennwerten leicht mit Geraden konstruieren. Die Konstruktion erfolgt hier mit den Probestück-Normwerten, wie in Abb. 10-17 gezeigt: In das vorgezeichnete Koordinatensystem mit einer Hilfslinie unter  $45^\circ$  werden die Biegewechselfestigkeiten  $\sigma_{bW} = \pm 245 \text{ N/mm}^2$  nach [23] an der Ordinate aufgetragen (Punkt A und Punkt B). Die obere Begrenzung des Diagramms ist durch  $R_m = 490 \text{ N/mm}^2$  gegeben. Die Grenze gegen bleibende Verformung wird durch  $R_e = 295 \text{ N/mm}^2$  markiert.



**Abb. 10-17:** Dauerfestigkeitsschaubild für gekerbte Achse aus E 295 nach Beispiel 1

Am Schnittpunkt der  $R_m$ - und  $45^\circ$ -Hilfslinien (C) wird nach links der Wert  $\sigma_{bw}/2$  abgetragen. Das markiert den Punkt D. Die Verbindungslinie  $\overline{AD}$  liefert die Begrenzung für die Oberspannung, allerdings nur bis zur Streckgrenze. Den Linienzug für die Unterspannung erhält man durch Abtragen der Strecke  $\overline{DE}$  nach unten (Punkt F) und die daran anschließenden Geraden  $\overline{CF}$  und  $\overline{FB}$ .

In diesem Schaubild wird der Einfluss der Mittelspannung auf die Dauerfestigkeit dadurch ersichtlich, dass die Geraden für die Ober- und Unterspannung nicht parallel zur  $45^\circ$ -Hilfslinie verlaufen, so dass mit zunehmender Mittelspannung die Grenzwerte für die Spannungsausschläge kleiner werden.

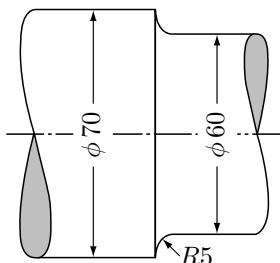
Der zulässige Bereich (in der Abbildung unterlegt dargestellt) ergibt sich analog der oben beschriebenen Konstruktion mit  $R_e/S_{F\min} = 196 \text{ N/mm}^2$  und  $\sigma_{AK} = \pm 108 \text{ N/mm}^2$  als Grenzwerte. Die Mittelspannung  $\sigma_m = \sigma_z = 77 \text{ N/mm}^2$  und die überlagerte Ausschlagsspannung  $\sigma_a = \sigma_{bw} = \pm 49 \text{ N/mm}^2$  sowie die maximale Spannung  $\sigma_{max} = 126 \text{ N/mm}^2$  liegen innerhalb dieses Bereiches.

Wie eingangs schon erwähnt, ist das Arbeiten mit einem selbst erstellten Diagramm besonders von Vorteil, wenn mit vorliegenden Versuchsdaten für die Werkstoffkennwerte gearbeitet werden soll.

### **Beispiel 2 (Abb. 10-18)**

Der abgebildete Wellenabschnitt (Werkstoff 41 Cr 4) wird wechselnd durch ein Biegemoment  $M_b = 2800 \text{ N} \cdot \text{m}$  und durch ein konstant wirkendes Torsionsmoment  $M_t = 6500 \text{ N} \cdot \text{m}$  belastet. Die Schubbeanspruchung bleibt unberücksichtigt. Die Oberflächenqualität der geschliffenen Welle ist  $R_z = 6,3 \mu\text{m}$ .

Es sind der statische und der dynamische Festigkeitsnachweis zu führen. Nach den Kriterien „Bei Havarie geringe Schadensfolgen, regelmäßige Inspektionen“ werden für die Mindestsicherheiten  $S_{F \min} = 1,3$  und gegen Dauerbruch  $S_{D \min} = 1,3$  nach Tabelle 5 festgelegt.



**Abb. 10-18:** Abgesetzte Welle

### **Lösung:**

Es handelt sich hier um die Überlagerung von Biegung und Torsion. Dabei tritt nur die Biegung dynamisch auf. Für den Werkstoff 41 Cr 4 (vergütet) werden unter Berücksichtigung des Größeneinflusses nach Gleichung 10-1 und [23] die folgenden Kennwerte festgelegt:

$$\begin{aligned} R_m &= 860 \text{ N/mm}^2 \\ R_e &= 640 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{bF} &= 896 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{tF} &= 448 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{bW} &= 384 \text{ N/mm}^2. \end{aligned}$$

Die Nennspannungen betragen nach den Gleichungen 4-6 und 6-2

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{32 \cdot M_b}{\pi \cdot d^3} = \frac{32 \cdot 2,8 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\pi \cdot 60^3 \text{ mm}^3} = 132 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 6,5 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\pi \cdot 60^3 \text{ mm}^3} = 153 \text{ N/mm}^2.$$

Zur Führung des **statischen Festigkeitsnachweises** wird für die Überlagerung von Biegung und Torsion mit der Gestaltänderungshypothese gerechnet. Dazu wird die Gleichung 10-9 angepasst:

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{v,GEH}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_{bF}}\right)^2 + 3 \cdot f_\tau^2 \cdot \left(\frac{\tau_t}{\tau_{tF}}\right)^2}} \geq S_{F \min}.$$

Mit  $f_\tau = 1/\sqrt{3}$  und  $3 \cdot f_\tau^2 = 1$  wird

$$S_F = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{132 \text{ N/mm}^2}{896 \text{ N/mm}^2}\right)^2 + \left(\frac{153 \text{ N/mm}^2}{448 \text{ N/mm}^2}\right)^2}} = 2,7 > S_{F \ min} = 1,3.$$

Sollen die statischen Tragreserven zur Berücksichtigung von Belastungsspitzen, wie Anfahrbeschleunigung u.ä. berücksichtigt werden, ist für die plastische Stützzahl nach Gleichung 10-2

$$n_{pl} = \sqrt{\frac{R_{p,max}}{R_e}} = \sqrt{\frac{1050 \text{ N/mm}^2}{640 \text{ N/mm}^2}} = 1,28 < \alpha_{p,b} = 1,70; \quad (\alpha_{p,t} = 1,33).$$

Die Bauteilfließgrenze wird mit Gleichung 10-3

$$\sigma_{FK} = R_e \cdot n_{pl} = 640 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,28 = 819 \text{ N/mm}^2$$

und analog

$$\tau_{FK} = \tau_F \cdot n_{pl} = 448 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,28 = 573 \text{ N/mm}^2.$$

Damit wird die Sicherheit gegen Fließen unter Berücksichtigung der statischen Tragreserven

$$\begin{aligned} S_F &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_{FK}}\right)^2 + 3 \cdot f_\tau^2 \cdot \left(\frac{\tau_t}{\tau_{FK}}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{132 \text{ N/mm}^2}{819 \text{ N/mm}^2}\right)^2 + \left(\frac{153 \text{ N/mm}^2}{573 \text{ N/mm}^2}\right)^2}} = 3,2 > S_{F \ min} = 1,3. \end{aligned}$$

Der **dynamische Festigkeitsnachweis** (Ermüdungsfestigkeitsnachweis) wird nach Gleichung 10-22 geführt.

$$S_{D,GEH} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{a,b}}{\sigma_{AK,b}}\right)^2 + 3 \cdot f_\tau^2 \cdot \left(\frac{\tau_{a,t}}{\tau_{AK,t}}\right)^2}} \geq \sigma_{D \min}$$

Es tritt nur die Biegung dynamisch auf. Damit vereinfacht sich die Rechnung zu

$$S_{D,GEH} = \frac{\sigma_{AK}}{\sigma_{a,b}} \geq \sigma_{D \ min} .$$

Zur Berechnung der Bauteilausschlagfestigkeit nach Gleichung 10-20 wird zuerst der Gesamteinflussfaktor ermittelt.

Für den Wellenübergang wird mit  $d/D = 60 \text{ mm}/70 \text{ mm} = 0,86$  und  $r/t = 5 \text{ mm}/5 \text{ mm} = 1$  nach Tabelle 17:  $\alpha_{Kb} = 1,69$ .

Die Kerbwirkungszahl  $\beta_K$  nach Gleichung 10-16 wird über das bezogene Spannungsverhältnis für die Biegung nach Tabelle 18 berechnet:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{2,3}{r} \cdot (1 + \varphi) = \frac{2,3}{r} \cdot \left(1 + \frac{1}{4 \cdot \sqrt{t/r} + 2}\right) \\ &= \frac{2,3}{5 \text{ mm}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4 \cdot \sqrt{1} + 2}\right) = 0,54 \text{ mm}^{-1} . \end{aligned}$$

Für die dynamische Stützzahl  $n_\chi$  wird in Abhängigkeit von  $\chi$  aus dem Diagramm (Abb. 10-10)  $n_\chi = 1,29$  abgelesen. Damit lässt sich nach Gleichung 10-16 die Kerbwirkungszahl berechnen:

$$\beta_{Kb} = \frac{\alpha_{Kb}}{n_\chi} = \frac{1,69}{1,29} = 1,31 .$$

Der Rauheitsfaktor ist bei zugrunde gelegter mittlerer Rautiefe  $R_z = 6,3 \mu\text{m}$  und der Zugfestigkeit von  $R_m = 860 \text{ N/mm}^2$  nach Abb. 10-12:  $K_{O\sigma} = 0,89$ .

Der Größeneinflussfaktor ist nach Abb. 10-13:  $K_g = 0,86$ .

Der Faktor für die Randschichtverfestigung ist  $K_V = 1$  (keine Randverfestigung).

Mit diesen Werten wird nach Gleichung 10-17 der Gesamteinflussfaktor

$$K_\sigma = \left( \frac{\beta_{Kb}}{K_g} + \frac{1}{K_{O\sigma}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V} = \left( \frac{1,31}{0,86} + \frac{1}{0,89} - 1 \right) \cdot 1 = 1,65 .$$

Die Bauteilwechselfestigkeit wird nach Gleichung 10-18

$$\sigma_{WK} = \frac{\sigma_{bW}}{K_\sigma} = \frac{384 \text{ N/mm}^2}{1,65} = 233 \text{ N/mm}^2.$$

Die Bauteildauerfestigkeit wird nach Gleichung 10-19 berechnet. Hierfür wird die Mittelspannungsempfindlichkeit nach Gleichung 10-20 und Tabelle 10-1 ermittelt

$$M_\sigma = a_M \cdot 10^{-3} \cdot \frac{R_m}{MPa} + b_M = 3,5 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{860 \text{ N/mm}^2}{MPa} - 0,1 = 0,201.$$

Mit der Vergleichsmittelspannung

$$\sigma_{Vm} = \sqrt{\sigma_{bm}^2 + 3 \cdot \tau_{tm}^2} = \sqrt{0 + 3 \cdot (153 \text{ N/mm}^2)^2} = 265 \text{ N/mm}^2.$$

Die Bauteildauerfestigkeit ist

$$\sigma_{AK,b} = \sigma_{WK} - M_\sigma \cdot \sigma_m = 233 \text{ N/mm}^2 - 0,201 \cdot 265 \text{ N/mm}^2 = \underline{180 \text{ N/mm}^2}.$$

Damit führt der Nachweis auf Dauerfestigkeit mit Gleichung 10-21 auf

$$S_{D,b} = \frac{\sigma_{AK,b}}{\sigma_{a,b}} = \frac{180 \text{ N/mm}^2}{132 \text{ N/mm}^2} = \underline{1,36 > S_D \min = 1,29}.$$

Das Bauteil ist ausreichend bemessen.

#### 10.3.4 Hinweis zum Betriebsfestigkeitsnachweis

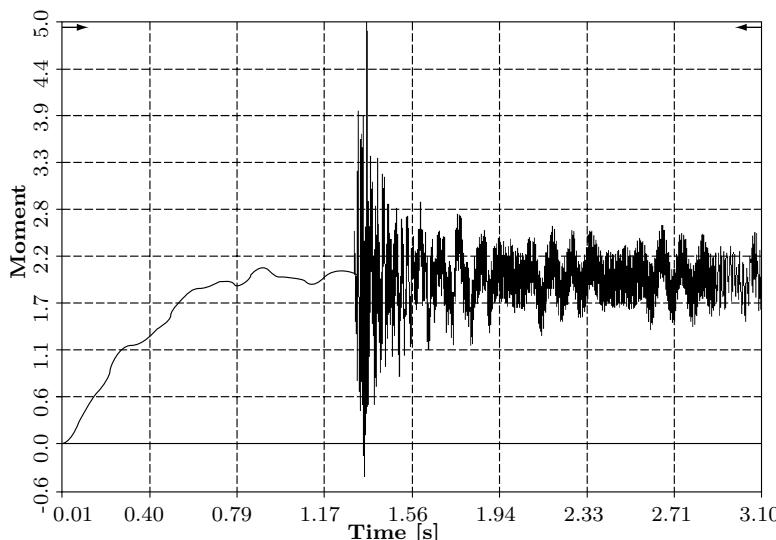
Die schwingenden Belastungen wurden in den vorherigen Abschnitten idealisiert behandelt. Dabei wurde angenommen, dass einer konstanten Mittellast eine ebenfalls konstante Lastamplitude im sin-Rhythmus überlagert ist. Dieses Verfahren war zunächst notwendig, um rekonstruierbare Werte bei Dauerfestigkeitsversuchen zu erhalten. Auf der anderen Seite gibt es im Maschinenbau genügend Fälle, bei denen eine Beanspruchung sich im oben beschriebenen Maße weitgehend ideal verhält. Als Beispiel sei eine auf Biegung beanspruchte, rotierende Welle genannt. Hier schwankt die Biegespannung wechselnd im sin-Rhythmus.

In der überwiegenden Anzahl der Anwendungen kann man jedoch von gleichbleibenden Beanspruchungen in Maschinenteilen nicht ausgehen. Der Nachweis der Tragfähigkeit für diese zufallsartigen Belastungen muss für eine gute Werkstoffausnutzung durch eine Betriebsfestigkeitsrechnung erbracht werden.

Der *Betriebsfestigkeitsnachweis*, Ende der dreißiger Jahre des 20. Jahrhunderts für den Flugzeugbau entwickelt, hat inzwischen in allen Technikbereichen bei der Auslegung von schwingbeanspruchten Bauteilen in einschlägigen Normen, Vorschriften, Richtlinien und Empfehlungen Berücksichtigung gefunden. Zur praktischen Umsetzung bieten sich alternativ oder in Kombination das experimentelle Vorgehen (vorwiegend bei Bauteilen in Serienfertigung) oder der Weg des rechnerischen Betriebsfestigkeitsnachweises (für große, teure Bauteile; aber auch in der Entwicklungsphase als Orientierung) an.

Kann für das zu berechnende Bauteil eine Nennspannung definiert werden, wird nach dem Nennspannungskonzept (siehe Abschnitt 10.3.1) vorgegangen. Dazu müssen die durch die äußere Belastung verursachten Beanspruchungs-Zeitverläufe bekannt sein. Diese lassen sich durch Langzeitmessungen, die alle Betriebsbedingungen in einem repräsentativen Verhältnis erfassen, verlässlich bestimmen. Einen Ausschnitt eines solchen Messschriebes – eine **Beanspruchungs-Zeitfunktion** – zeigen die Abbildungen 10-19 oder auch 2-7.

Zur Auswertung wird diese Funktion digitalisiert, was das Ersetzen durch eine diskrete Folge von Zahlenwerten bedeutet. Dazu ist der Funktionsverlauf zu verschiedenen Zeitpunkten zu bestimmen bzw. sind verschiedene Merkmale zu bewerten. Aus diesen Merkmalen, wie Überschreiten von Grenzen, Schwingbreite, Durchlaufen von Extremwerten (Auswertung im Amplitudenbereich) oder Bestimmung zu äquidistanten Zeitpunkten (Auswertung im Zeitbereich) leiten



**Abb. 10-19:** Belastungsfunktion: Torsionsmoment über der Zeit infolge eines simulierten Vogelschlages in einem Flugzeugtriebwerk (Rolls Royce Engines)

sich verschiedene Zählverfahren ab (siehe hierzu DIN 45 667: „Klassierverfahren für das Erfassen regelloser Schwingungen“ sowie auch [50]). Durch die Zurückführung auf eine Folge von Schwingspielen bestimmter Größe und Häufigkeit und Aufteilung in einzelne Laststufen werden durch Mittelwertbildung sogenannte Beanspruchungskollektive definiert und meist im doppellogarithmischen Netz dargestellt (siehe Abb. 10-20). Eine entsprechende Auftragung von Lasten (Kräfte und Momente) über der Schwingspielzahl wird dementsprechend als *Lastkollektiv* bezeichnet:

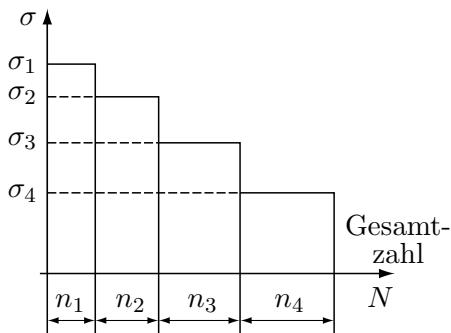
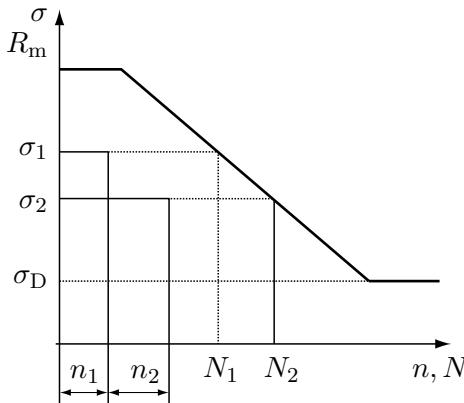


Abb. 10-20: Beanspruchungskollektiv

Die *Werkstoffkennwerte*, welche die dynamische Beanspruchbarkeit beschreiben, werden durch die Werkstoff-WÖHLER-Linie bzw. durch die Bauteil-WÖHLER-Linie (Berücksichtigung der Kerbwirkung, Bauteilgröße, Oberflächenbeschaffenheit, ...) charakterisiert.

Während bei dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Dauerfestigkeitsnachweis ein eindimensionaler Beanspruchungswert einem Festigkeitswert gegenübergestellt wird, vergleicht man beim Betriebsfestigkeitsnachweis eine zweidimensionale Beanspruchungsfunktion mit einem Lebensdauerschaubild (WÖHLER-Linie).

In diesem Zusammenhang stellt sich folgende Frage: Kann man eine Prognose über das Versagen des Bauteils machen, wenn ein Teil der Spannungen im Beanspruchungskollektiv größer als die Dauerfestigkeit ist? Es gibt eine Reihe von Hypothesen zu diesem Problem. Das einfachste und wohl am häufigsten angewandte Verfahren, das die Verbindung zwischen Lastkollektiv und WÖHLER-Linie herstellt, ist die lineare *Schädigungsakkumulationshypothese* nach PALM-GREN (1924) und MINER (1945), meist als „MINER-Regel“ bezeichnet. Ausgangspunkt ist ein WÖHLER-Diagramm, das möglichst nicht für einen genormten Probestab sondern für das Maschinenteil selbst aufgenommen sein sollte (Bauteil-WÖHLER-Diagramm). In dieses wird das Beanspruchungskollektiv nach Abb. 10-21 eingezeichnet. Eine Spannung  $\sigma_1$  könnte  $N_1$  mal ertragen werden. Sie



**Abb. 10-21:** Beanspruchungskollektiv mit WÖHLER-Diagramm

tritt jedoch nur  $n_1$  mal auf. Der dadurch verursachte Anteil an der bleibenden Schädigung beträgt nach diesen Überlegungen

$$\Delta S_1 = \frac{n_1}{N_1}.$$

Man nennt diesen Quotienten *Schädigungsanteil*  $\Delta S$ . Die *Schadenssumme* ist

$$S = \sum \Delta S = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots = \sum_i \frac{n_i}{N_i}. \quad (10-23)$$

In diese Summation gehen nur Spannungen ein, die größer als die Dauerfestigkeit sind. Die Beanspruchungen unterhalb der Dauerfestigkeit, die definitionsgemäß beliebig oft ertragen werden können, werden als nicht bauteilschädigend eingestuft und somit nicht berücksichtigt („Originale MINER-Regel“).

Das Problem ist auf die Frage reduziert, welche Schadenssumme ertragen werden kann. Nach der hier diskutierten Hypothese tritt ein Bruch ein, wenn  $S = 1$  ist. Zahlreiche Versuche ergeben ein Maximum bei  $S = 1$ , jedoch mit erheblichen Streuungen behaftet. Ein Grund dafür ist u.a. die Reihenfolge der Belastungen mit jeweiliger Höhe von Amplitude und Mittelwert. Häufig wird mit  $S = 0,3$  dimensioniert. Eine absolute Sicherheit gegen Bruch ist damit jedoch auch nicht gewährleistet.

Die einzelnen Begriffe aus dem Bereich der Schwingfestigkeit versucht die Abbildung 10-22 darzustellen.

	Dauerfestigkeit	Zeitfestigkeit	Betriebsfestigkeit
Beanspruchung			
Lastspielzahl	$> 10^6$	$10^2$ bis $10^6$	$10^4$ bis $10^9$
WÖHLER-Diagramm mit Beanspruchungskollektiv			

Abb. 10-22: Begriffe aus dem Bereich der Schwingfestigkeit

### Beispiel (Abb. 10-23)

Für ein Bauteil ist ein WÖHLER-Diagramm gegeben. Der Linienzug entspricht etwa der unteren Umhüllung. Dieses Bauteil unterliegt in der vorgesehenen Lebenszeit dem eingezeichneten Beanspruchungskollektiv. Zu bestimmen ist die Schadenssumme.

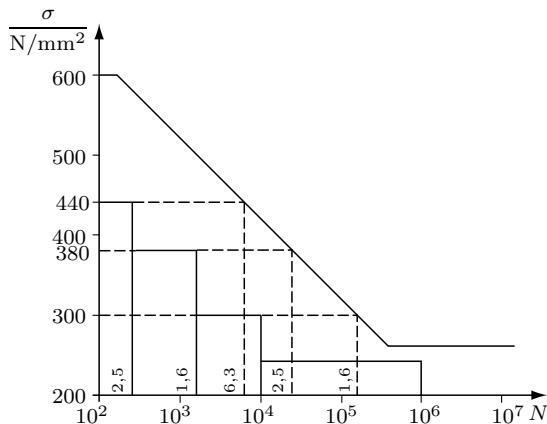


Abb. 10-23: Beanspruchungskollektiv und WÖHLER-Diagramm

### Lösung

Die maximale Spannung  $\sigma_1 = 440 \text{ N/mm}^2$  tritt 250 mal auf. Sie kann 6300 mal ertragen werden.

$$\Delta S_1 = \frac{2,5 \cdot 10^2}{6,3 \cdot 10^3}.$$

Analog ist

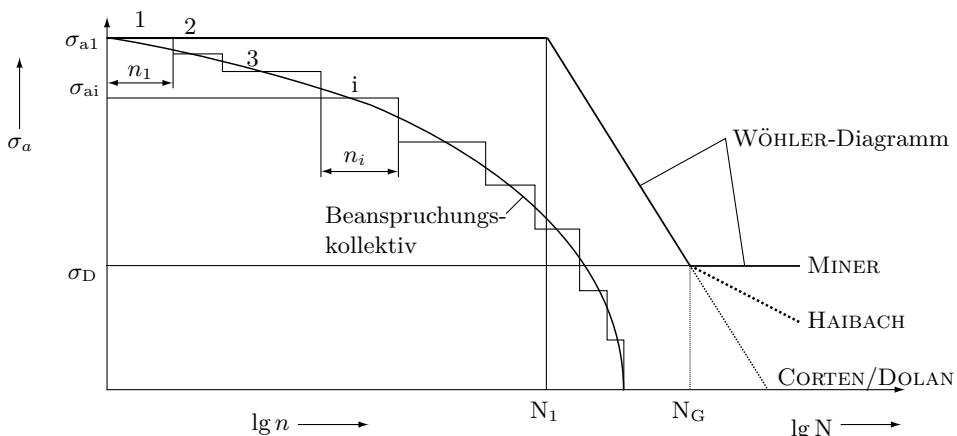
$$\begin{aligned} n_2 &= 1,6 \cdot 10^3 - 2,5 \cdot 10^2 = 1,35 \cdot 10^3; & N_2 &= 2,5 \cdot 10^4 \\ n_3 &= 10^4 - 1,6 \cdot 10^3 = 8,4 \cdot 10^3; & N_3 &= 1,6 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Damit ist

$$S = \frac{2,5 \cdot 10^2}{6,3 \cdot 10^3} + \frac{1,35 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^4} + \frac{8,4 \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^5} = \underline{0,146}.$$

Das betreffende Bauteil würde mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nicht versagen.

Die im Beispiel beschriebene Rechnung gestaltet sich so einfach wie gezeigt, wenn alle Schwingungsamplituden die Dauerfestigkeitsgrenzen übersteigen oder wenn die Dauerfestigkeitsgrenze unberücksichtigt bleiben soll und dazu alle Schwingungsamplituden das gleiche Spannungsverhältnis  $\kappa = \sigma_u/\sigma_o$  aufweisen. Sind die Spannungsamplituden mit verschiedenen Spannungsverhältnissen bzw. Mittelspannungen verknüpft, ist streng genommen eine Schar entsprechender WÖHLER-Linien erforderlich, um die jeweiligen Schädigungsbeiträge  $\Delta S_i$  zu berechnen. Um eine bessere Anpassung an die unterschiedlichen Betriebsbedingungen zu erreichen, ist die Originale MINER-Regel modifiziert worden. Die wichtigsten Verfahren sind die auf CORTEN und DOLAN sowie auf HAIBACH zurückgehenden Überlegungen, die für die Berechnung der Schädigung auch Spannungen (Stufen) unterhalb der Dauerfestigkeit berücksichtigen. Dabei wird nach CORTEN/DOLAN der Zeitfestigkeitsast der WÖHLER-Linie fiktiv geradlinig verlängert (Abb. 10-24), was nur eine Veränderung der Summierungsgrenzen bedeutet.



**Abb. 10-24:** Berechnung der Lebensdauer nach Hypothesen

Das Verfahren wird häufig auch als „*Elementare MINER-Regel*“ bezeichnet. Der Ansatz von HAIBACH („*Modifizierte MINER-Regel*“) führt im Ergebnis umfangreicher experimenteller Betriebsfestigkeitsuntersuchungen den Zeitfestigkeitsast der WÖHLER-Linie mit halber Neigung im Bereich der Dauerfestigkeit – siehe Abb. 10-24 – weiter.

Eine ausführliche Darstellung der oben beschriebenen Verfahren, wie auch die Berücksichtigung des Abfalls der Dauerfestigkeit mit fortschreitender Schädigung („*Konsequente MINER-Regel*“) sowie Korrektur der Rechnung mit Versuchswerten („*Relative MINER-Regel*“) sind in der Literatur (in [39] ausführlich) beschrieben.

Trotz aller Anpassungsrechnungen können die errechneten Lebensdauerwerte erheblich von der Wirklichkeit abweichen. Der Grund liegt wohl darin, dass mögliche Wechselwirkungen von unterschiedlich großen Schwingsspannungen und ihre Aufeinanderfolge im Zusammenhang mit Eigenspannungen bei der Umsetzung der Beanspruchungs-Zeit-Funktion in ein Amplitudenkollektiv nicht berücksichtigt werden können. Das bedeutet für die Handhabung der MINER-Regel die Unsicherheiten der Berechnung nach Erfahrungswerten abzuschätzen und Sicherheitszuschläge vorzusehen. Für eine verlässlichere Aussage ist die Lebensdauer experimentell zu bestimmen, (siehe hierzu [39]), was i.d.R. sehr aufwendig und damit teuer ist.

## 10.4 Zusammenfassung

Die Festigkeitsberechnungen gehen, je nach Anforderungen an die Genauigkeit, Gefährdungsrisiko, Kosten etc. von unterschiedlichen Vereinfachungen aus. Die bekannten Grundgleichungen

$$\sigma_{zd} = \frac{F}{A} \quad \sigma_b = \frac{M_b}{W} \quad \tau_s = \frac{F_q \cdot S}{I \cdot b} \quad \tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

sind nur für einfache Verhältnisse hinreichend genau. Sie werden häufig für den Überschlag oder als Bezugsgröße benutzt. In diesem Fall werden sie als Nennspannung bezeichnet. Im sog. Nennspannungskonzept werden sie als Beanspruchungsgrößen angesetzt, während die Einflüsse der Bauteilgeometrie und der technologischen Bearbeitung die Beanspruchbarkeit des Bauteils reduzieren.

Ist die Formulierung einer Nennspannung aufgrund der Bauteilform z.B. nicht möglich, kann, bei Vorliegen von Ergebnissen von FE-Analysen das Kerbspannungskonzept angewendet werden. Spielt bei dynamisch belasteten Bauteilen

das Fortschreiten von Rissen eine Rolle, ist nach dem Risswachstumskonzept vorzugehen.

Bei der Nachweisrechnung der Haltbarkeit wird entsprechend der Schadensursachen zwischen dem statischen und dem dynamischen Festigkeitsnachweis unterschieden. Beim statischen Festigkeitsnachweis lassen sich die durch Beanspruchungsart und Bauteilform hervorgerufenen Spannungsspitzen als elastische Tragreserve nutzen. Dabei geht man davon aus, dass geringe plastische Verformungen an den höchstbelasteten Stellen, die der Funktion nicht schaden, diese Spannungsspitzen abbauen. Berechnet werden können diese Spitzenwerte der Spannungen für ideal elastische Werkstoffe mit Hilfe der Kerbformzahl

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \alpha_{K\sigma} \cdot \sigma_n \\ \tau_{\max} &= \alpha_{K\tau} \cdot \tau_n\end{aligned}\quad (10-13)$$

für eine Reihe von Kerbformen.

Bei schwingender Beanspruchung wirkt sich die Formzahl nicht vollständig festigkeitsmindernd aus. Deshalb wird eine Kerbwirkungszahl

$$\beta_K = \frac{\sigma_W}{\sigma_{WK}} = \frac{\text{Wechselfestigkeit der Probe}}{\text{Wechselfestigkeit der gekerbten Probe}} \quad (10-14)$$

aus Versuchswerten definiert. Die Größe hängt vor allem von der Kerbform, der Beanspruchungsart, dem Spannungsgefälle im Kerbgrund und der Werkstofffestigkeit ab. Für den Zusammenhang zwischen der werkstoffunabhängigen Kerbformzahl und der werkstoffabhängigen Kerbwirkungszahl gibt es eine Reihe von Berechnungsverfahren. Wenn die Kerbwirkungszahl nicht experimentell bestimmt werden kann, wird in der Regel nach dem auf SIEBEL/STIELER zurückgehenden Vorschlag, basierend auf einer dynamischen Stützzahl

$$n_x = \frac{\alpha_K}{\beta_K} \quad (10-15)$$

gerechnet.

Die Dauerfestigkeit wird an genormten Probestäben mit polierter Oberfläche ermittelt. Die aus diesen Versuchen resultierenden Kennwerte lassen sich vorteilhaft in sog. Dauerfestigkeitsschaubildern darstellen. In diesem Buch wird mit dem Dauerfestigkeitsschaubild nach SMITH gearbeitet.

Für abweichende Abmessungen, andere Oberflächenbeschaffenheit vermindert sich die ertragbare Ausschlagsspannung. Die verschiedenen Einflüsse der Dauer-

festigkeitsminderung werden in einem Gesamteinflussfaktor (Konstruktionsfaktor)

$$K_\sigma = \left( \frac{\beta_{K\sigma}}{K_g} + \frac{1}{K_{O,\sigma}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V} \quad (10-17)$$

$$K_\tau = \left( \frac{\beta_{K\tau}}{K_g} + \frac{1}{K_{O,\tau}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V}$$

zusammengefasst. Damit kann die Bauteilwechselfestigkeit (Gestaltwechselfestigkeit) des gekerbten Bauteils mit den Werkstofffestigkeitskennwerten  $\sigma_{zdW}$ ,  $\sigma_{bW}$ ,  $\tau_{sW}$ ,  $\tau_{tW}$  zu

$$\sigma_{WK} = \frac{\sigma_W}{K_\sigma} = \frac{\sigma_W \cdot K_V}{\left( \frac{\beta_{K,\sigma}}{K_g} + \frac{1}{K_{O,\sigma}} - 1 \right)} \quad (10-18)$$

$$\tau_{WK} = \frac{\tau_W}{K_\tau} = \frac{\tau_W \cdot K_V}{\left( \frac{\beta_{K,\tau}}{K_g} + \frac{1}{K_{O,\tau}} - 1 \right)}$$

berechnet werden. Für den Festigkeitsnachweis gegen Dauerbruch ist die Bau teilausschlagfestigkeit  $\sigma_{AK}$  bzw.  $\tau_{AK}$  maßgebend. Das ist die Grenzspannung, bei der das Bauteilversagen durch Schwingbruch eintritt. Sie wird von der Mittelspannung und der Mittelspannungsempfindlichkeit beeinflusst. Die Mittelspannungsempfindlichkeit  $M_\sigma$  bzw.  $M_\tau$  berücksichtigt die unterschiedlichen Ausschlagfestigkeiten im SMITH-Diagramm für sich im Betrieb ändernde Last amplituden. Die Dauerfestigkeit nach Mittelspannungen für stabförmige nicht geschweißte Bauteile mit konstanter Mittelspannung lässt sich zu

$$\begin{aligned} \sigma_{AK} &= \sigma_{WK} - M_\sigma \cdot \sigma_m \\ \tau_{AK} &= \tau_{WK} - M_\tau \cdot \tau_m \end{aligned} \quad (10-19)$$

berechnen.

Der Nachweis der Bauteil-Dauerfestigkeit für Einzelbeanspruchungen wird dann

$$\begin{aligned} S_{D,zd} &= \frac{\sigma_{AK,zd}}{\sigma_{a,zd}} \geq S_{D\min} \\ S_{D,b} &= \frac{\sigma_{AK,b}}{\sigma_{a,b}} \geq S_{D\min} \\ S_{D,zd} &= \frac{\tau_{AK,s}}{\tau_{a,s}} \geq S_{D\min} \\ S_{D,t} &= \frac{\tau_{AK,t}}{\tau_{a,t}} \geq S_{D\min}. \end{aligned} \quad (10-21)$$

Bei gleichzeitigem Auftreten mehrerer Lastkomponenten kann für den maschinenbautypischen Fall Biegung und Torsion mit hinreichender Genauigkeit mit den Festigkeitshypothesen gearbeitet werden. Für die Gestaltänderungshypothese gilt

$$S_{D,GEH} = \frac{\sigma_{AK,v}}{\sigma_{a,v}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{a,zd}}{\sigma_{AK,zd}} + \frac{\sigma_{a,b}}{\sigma_{AK,b}}\right)^2 + 3 \cdot f_\tau^2 \cdot \left(\frac{\tau_{a,t}}{\tau_{AK,t}}\right)^2}} \geq S_{D\min}. \quad (10-22)$$

Für zufallsartige Belastungen muss für eine gute Werkstoffausnutzung der Nachweis der Tragfähigkeit durch eine Betriebsfestigkeitsrechnung erbracht werden. Dafür müssen die durch die äußere Belastung verursachten Beanspruchungs-Zeitverläufe ermittelt werden. Durch die Zurückführung auf eine Folge von Schwingspielen bestimmter Größe und Häufigkeit und Aufteilung in einzelne Laststufen werden durch Mittelwertbildung Beanspruchungskollektive definiert. Die Werkstoffkennwerte, welche die dynamische Beanspruchbarkeit beschreiben, werden durch die Werkstoff-WÖHLER-Linie bzw. durch die Bauteil-WÖHLER-Linie charakterisiert. Die Verbindung zwischen Lastkollektiv und WÖHLER-Linie ist die lineare Schädigungsakkumulationshypothese (MINER-Regel). Der Grundgedanke dabei ist, dass die schwingende Beanspruchung des Werkstoffes eine Schädigung bewirkt, die sich im Laufe ihrer Einwirkung bis zum Erreichen eines kritischen Wertes, bei dem der Schwingbruch erfolgt, akkumuliert. Das Problem wird auf die Frage reduziert, welche Schadenssumme  $S$  ertragen werden kann

$$S = \sum \Delta S = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots = \sum_i \frac{n_i}{N_i}. \quad (10-23)$$

Eine absolute Sicherheit gegen das Versagen ist damit jedoch nicht gewährleistet. Für eine verlässlichere Aussage ist die Lebensdauer experimentell zu bestimmen, was meist sehr aufwendig ist.

# 11 Die statisch unbestimmten Systeme

## 11.1 Einführung

Im Band 1 (Statik) wurden im Abschnitt 6.5 die Begriffe „*statisch bestimmt*“, „*statisch unbestimmt*“ und „*Grad der statischen Unbestimmtheit*“ eingeführt und erläutert. Hier wird darauf wiederholend zurückgegriffen. Hinzu kommt die *Reduktion eines statisch unbestimmten Systems* auf statisch bestimmte Systeme. Mit dieser sind unmittelbar Lösungswege vorgezeichnet, wobei unter Lösung die Berechnung aller Auflagerkräfte zu verstehen ist.

Für alle statisch unbestimmten Systeme gilt in diesem Zusammenhang: Zusätzlich zu den Gleichgewichtsbedingungen der Statik müssen *geometrische Beziehungen* aufgestellt werden, die sich aus dem *deformierten* System ergeben. Da es sich hier um elastische Gebilde handelt, besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Deformationen (Geometrie) und Kräften (Statik). Für den zuerst behandelten Zug ist es das HOOKESche Gesetz. Bei *Biegung* sind es die aus der Gleichung der Biegelinie gewonnenen Beziehungen. Hier werden das Integrationsverfahren, das Kraftgrößenverfahren und die Reduktion des statisch unbestimmten Systems angewendet. Alle haben die Ausführungen des Abschnitts 4.5 zur Grundlage.

## 11.2 Reduktion von statisch unbestimmten Systemen

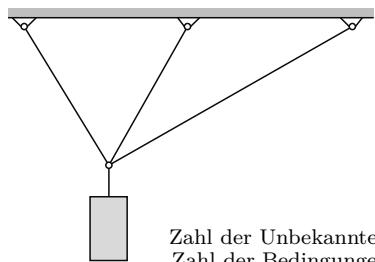
Die Lagerung eines starren Körpers ist statisch bestimmt, wenn nur genau so viele Stützungen vorhanden sind, wie zur Erhaltung einer stabilen Lage erforderlich sind. Das bedeutet mathematisch, dass man aus den verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen die Auflagerreaktionen berechnen kann. Zu diesem Thema wurde in Band 1, Abschnitt 6.5 einiges ausgeführt. Für das allgemeine, ebene Kräftesystem stehen drei Gleichgewichtsbedingungen für drei unbekannte Auflagerreaktionen zur Verfügung. Jede weitere Lagerung macht das System statisch unbestimmt. Ein einfaches Beispiel hierfür ist ein dreibeiniger Tisch, der auch

bei unterschiedlicher Länge der Beine stabil steht. Im Gegensatz dazu sind für den stabilen Stand eines Tisches mit vier Beinen wegen des überzähligen Beines die gleiche Beinlänge *und* eine ebene Aufstandsfläche erforderlich.

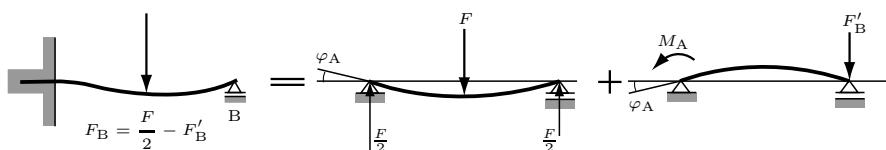
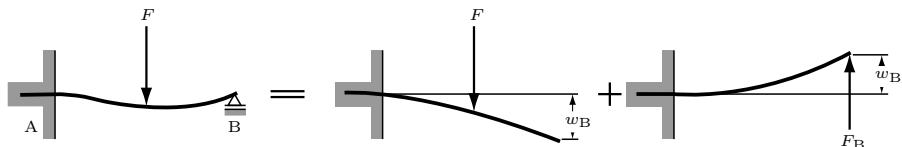
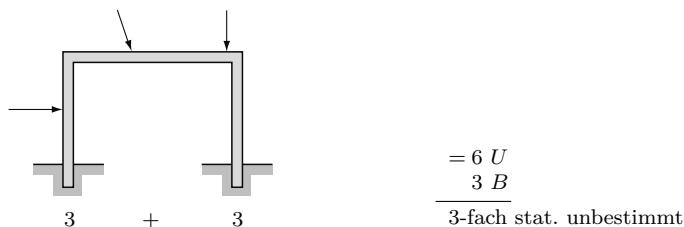
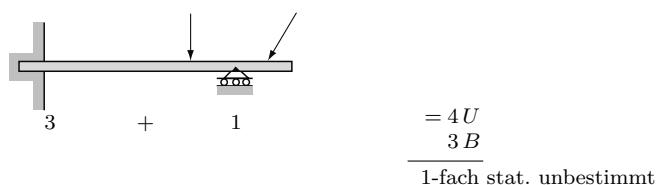
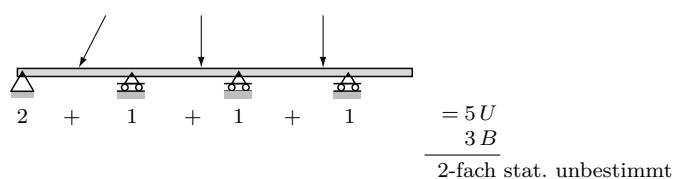
Systeme mit überzähligen Stützen (was z.B. aus Gründen der Verringerung der Verformung sinnvoll sein kann), bezeichnet man auch als statisch überbestimmt. „Fehlende“ Stützen (statisch unterbestimmt) haben die Verschiebbarkeit des vorher stabilen Systems unter Belastung zur Folge. Sie werden im Allgemeinen Sprachgebrauch als „verschieblich“ bezeichnet. Die folgenden Ausführungen beschreiben nur die überbestimmten Systeme. Verschiebliche Systeme (Mechanismen) sind Gegenstand der Kinematik (siehe Band 3). *Als Grad der statischen Unbestimmtheit definiert man die Anzahl der überschüssigen Auflagerreaktionen.* Das ist an einigen Beispielen in der Abb. 11-1 gezeigt. Beim dreifach aufgehängten Gewicht ist *ein* Seil überzählig, das System ist *einfach* statisch unbestimmt. Formalistisch könnte man folgendermaßen vorgehen: Zahl der Unbekannten (= Seilkräfte) = 3; Zahl der Gleichgewichtsbedingungen ( $\sum F_x = 0; \sum F_y = 0$ ) = 2. Differenz: 3 minus 2 = 1-fach statisch unbestimmt. Für ein Gelenkkörper müssen zwei, für eine Einspannung drei Unbekannte gezählt werden. Die weiteren Beispiele sind ohne weitere Erklärung verständlich.

Für ein statisch unbestimmtes System reichen demnach die aus der Statik bekannten Gleichgewichtsbedingungen nicht aus, um die Auflagerkräfte zu berechnen. Ohne diese ist es aber nicht möglich, die Biegemomente im Träger zu bestimmen und diesen zu dimensionieren. Eine Berechnung ist nur möglich, wenn es gelingt, eine entsprechende Anzahl zusätzlicher Gleichungen bzw. Bedingungen zu gewinnen.

Jedes statisch unbestimmte System lässt sich durch *Wegnahme einer entsprechenden Anzahl von Auflagerreaktionen auf ein statisch bestimmtes System zurückführen (reduziertes System)*. Es soll als Beispiel ein eingespannter Träger betrachtet werden, der zusätzlich am Ende nach Abb. 11-2 auf einem Rollenlager ruht. Durch Wegnahme des Rollenlagers erhält man den statisch bestimmten eingespannten Träger, der sich an der Stelle des weggenommenen Lagers  $B$  um den Betrag  $w_B$  durchbiegt. Bei Vorhandensein eines Lagers ist dort naturgemäß eine Durchbiegung nicht vorhanden. Deshalb muss die Lagerkraft  $F_B$  gerade so groß sein, dass sie, allein an dem Balken angreifend, die Durchbiegung  $w_B$  verursacht. Die Überlagerung der beiden statisch bestimmten Fälle ergibt demnach den statisch unbestimmt gelagerten Träger. Nach den in Abschnitt 4.6 besprochenen Verfahren kann  $F_B$  aus der vorgegebenen Durchbiegung  $w_B$  berechnet werden. Für die Bestimmung der Biegemomente und für die Dimensionierung des Balkens wird  $F_B$  wie eine äußere Kraft behandelt.



**Abb. 11-1:** Zum Grad der statischen Unbestimmtheit



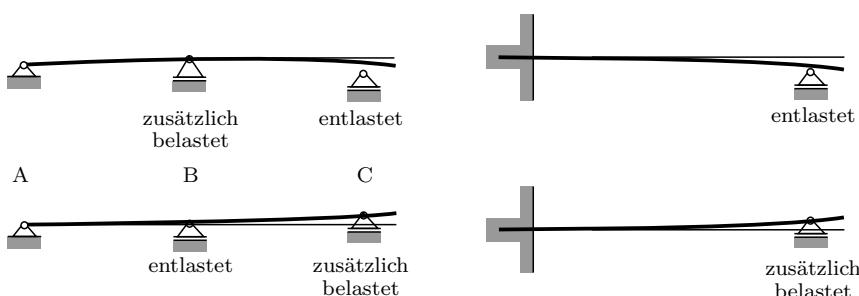
**Abb. 11-2:** Reduktion eines einfach statisch unbestimmten Systems auf zwei statisch bestimmte Systeme

Eine andere Methode, den eben diskutierten Fall auf ein statisch bestimmtes System zu reduzieren, ist der Ersatz der Einspannung durch ein Gelenk. Jetzt entsteht an der Stelle A eine vorher nicht vorhandene Winkeländerung  $\varphi_A$ . Offensichtlich muss das Einspannmoment gerade so groß sein, dass es eine Verdrehung nicht zulässt. Wenn es allein an dem reduzierten System angreift, wird der Träger gerade um  $\varphi_A$  verdreht. Aus dieser Bedingung lässt sich nach Abschnitt 4.6 die Größe des Momentes bestimmen. Die aus der Statik bekannten Gleichgewichtsbedingungen gestatten die Berechnung der restlichen Auflagerreaktionen.

Wie aus dem oben Ausgeführten folgt, können die Auflagerreaktionen eines statisch unbestimmten Systems nur dann berechnet werden, wenn man *zusätzliche Bedingungen aus der Formänderung* des Systems aufstellt.

Es soll kurz auf die statisch unbestimmten Fachwerke eingegangen werden. Im Band 1 sind im Abschnitt 9.1 ausführlich die Bedingungen für die statische Bestimmtheit aufgeführt worden. Aus einem statisch bestimmten Fachwerk mit einfachem oder nicht einfachem Aufbau wird ein statisch unbestimmtes Fachwerk, wenn Stäbe so eingefügt werden, dass keine neuen Knoten dabei entstehen. Umgekehrt wird aus einem statisch unbestimmten Fachwerk ein statisch bestimmtes, wenn man je nach dem Grad der statischen Unbestimmtheit eine entsprechende Anzahl von Stäben herausnimmt. Durch Überlagerung verschiedener Fälle, ähnlich wie in Abb. 11-2 angegeben, kommt man auch in diesem Falle zu einer Lösung. Entsprechende Verfahren übersteigen jedoch den Rahmen dieses Buches.

An dieser Stelle sollte man sich darüber klar werden, dass im Gegensatz zum statisch bestimmten System *bei statisch unbestimmten Systemen die Herstellungstoleranzen einen Einfluss auf Lagerkräfte und damit Spannungen haben*. Ein mittig belasteter Träger auf zwei Stützen verursacht Lagerkräfte  $F/2$  auch dann, wenn ein Lager etwas zu tief montiert wurde. Grundsätzlich anders sind

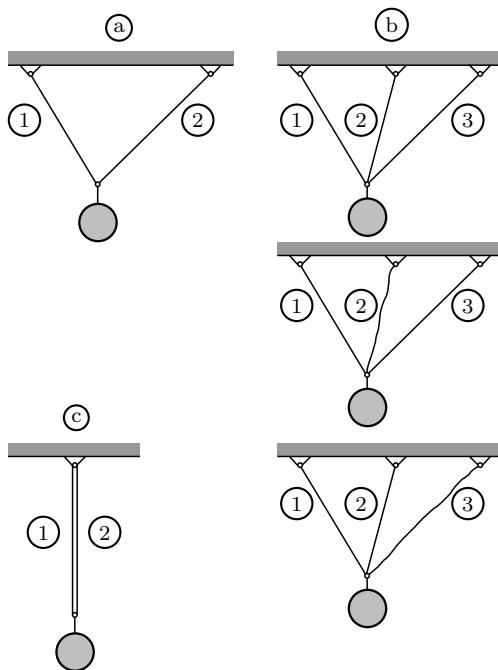


**Abb. 11-3:** Einfluss von Herstellungstoleranzen auf eine statisch unbestimmte Lagerung

die Verhältnisse im statisch unbestimmten System. Die Beanspruchung im dreifach gelagerten Träger Abb. 11-3 hängt davon ab, wie die Lager fluchten. Gleicher ergibt sich beim eingespannten Träger mit zusätzlichem Stützlager. *Liegen keine Angaben vor, muss von idealen Verhältnissen ausgegangen werden: Lager sind ideal montiert und starr, Einspannungen sind unnachgiebig, Zugelemente haben Sollänge.* Bei Abweichungen kann der Einfluss erheblich sein. Schon aus diesem Grunde sollte – liegen keine schwerwiegenden Gründe dagegen vor – der statisch bestimmten Konstruktion der Vorzug gegeben werden.

### 11.3 Zug

In den meisten Fällen handelt es sich hier um Systeme, die von Seilen gebildet werden. Zunächst soll eine aufgehängte Masse nach Abb. 11-4 betrachtet werden. Die an zwei Seilen befestigte Masse stellt ein statisch bestimmtes System dar. Für die Berechnung der beiden Seilkräfte stehen die beiden Gleichungen  $\sum F_x = 0$  und  $\sum F_y = 0$  zur Verfügung. Die dreifache Aufhängung nach Bild b ist statisch unbestimmt. Hier ist gezeigt, dass es im Gegensatz zur zweifachen Befestigung auf die Einhaltung der Seillängen ankommt. Ist z.B. das Seil 2 zu lang gefertigt, dann kann es unbelastet sein. Analoges gilt für Seil 3. Eine Be-



**Abb. 11-4:** Statisch bestimmte und unbestimmte Aufhängungen einer Masse

rechnung setzt normalerweise exakte Einhaltung der Sollängen voraus. In der Praxis wird diese Voraussetzung durch Einstellen am Spannschloss realisiert. Die Aufhängung nach Abb. 11-4c ist – obwohl aus zwei Seilen bestehend – statisch unbestimmt, wenn die Seile unten fest miteinander verbunden sind. Die Gleichung  $\sum F_x = 0$  ist identisch erfüllt ( $0 \equiv 0$ ). Die verbleibende Gleichung  $\sum F_y = 0$  ist für die Bestimmung von zwei Unbekannten nicht ausreichend.

Die Berechnung eines statisch unbestimmten Systems der hier vorliegenden Art erfordert folgende Schritte:

- 1) Die statische(n) Gleichgewichtsbedingung(en) wird (werden) aufgestellt.
- 2) Das System wird deformiert gezeichnet (Verschiebungsplan). Die Geometrie liefert zusätzliche Gleichung(en).
- 3) Das HOOKESche Gesetz wird in die Gleichung(en) von 2) eingeführt. Das System ist damit lösbar geworden.

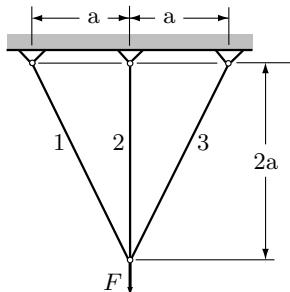
### **Beispiel 1 (Abb. 11-5)**

Drei gleiche Drahtseile sind nach Skizze belastet. Zu bestimmen sind allgemein und für die unten gegebenen Daten:

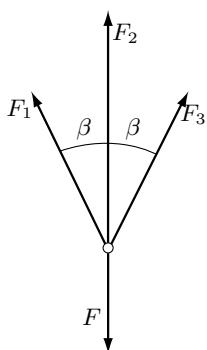
- a) die Seilkräfte, wobei für die Seile 1 und 3 eine fertigungsbedingte Überlänge  $\Delta l_u$  zu berücksichtigen ist,
- b) die minimale Überlänge  $\Delta l_u$  von 1 und 3, die zur vollständigen Entlastung dieser Seile führt.

$$F = 5,0 \text{ kN}; \quad a = 2,0 \text{ m}; \quad \Delta l_u = 4,0 \text{ mm}$$

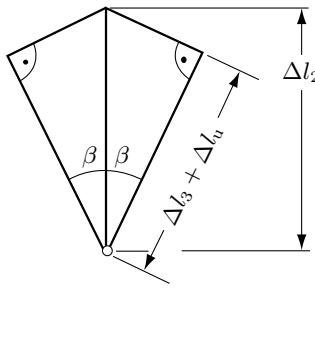
Metallischer Querschnitt der Seile  $A = 23 \text{ mm}^2$ ; der  $E$ -Modul  $E = 7 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$



**Abb. 11-5:** Statisch unbestimmte Aufhängung



**Abb. 11-6:** Lageplan der Kräfte für Abb. 11-5



**Abb. 11-7:** Verschiebungsplan der Aufhängung Abb. 11-5

### Lösung.

Das System ist einfach statisch unbestimmt. Die statischen Gleichgewichtsbedingungen liefern nach Abb. 11-6

$$\sum F_x = 0 \quad F_1 \cdot \sin \beta - F_3 \cdot \sin \beta = 0 \\ F_1 = F_3 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_1 \cdot \cos \beta + F_2 + F_3 \cdot \cos \beta - F = 0 \quad (2)$$

Aus dem Verschiebungsplan (Abb. 11-7) erhält man die geometrische Beziehung

$$\Delta l_3 + \Delta l_u = \Delta l_2 \cdot \cos \beta$$

Das HOOKEsche Gesetz nach Gleichung 3-9 stellt die Beziehung zu den Kräften her.

$$\frac{F_3 \cdot l_3}{A \cdot E} + \Delta l_u = \frac{F_2 \cdot l_2}{A \cdot E} \cos \beta$$

Nach einfachen Umwandlungen und der Einführung von  $\Delta l_u/l_3 = k$ ;  $l_2 = l_3 \cdot \cos \beta$

$$F_3 + k \cdot A \cdot E = F_2 \cdot \cos^2 \beta \quad (3)$$

Die Gleichungen (1), (2), (3) sind Bestimmungsgleichungen für die Kräfte  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ . Zunächst wird (1) in (2) eingesetzt

$$F_2 = F - 2F_3 \cdot \cos \beta \quad (4)$$

Einsetzen in (3) ergibt

$$\begin{aligned} F_3 + k \cdot A \cdot E &= F \cdot \cos^2 \beta - 2F_3 \cdot \cos^3 \beta \\ F_3 = F_1 &= \frac{F \cdot \cos^2 \beta - k \cdot A \cdot E}{1 + 2 \cos^3 \beta} \end{aligned} \quad (5)$$

Damit erhält man aus (4) nach Umwandlungen (Hauptnenner, Zusammenfassung)

$$\begin{aligned} F_2 &= F - 2 \cos \beta \frac{F \cdot \cos^2 \beta - k \cdot A \cdot E}{1 + 2 \cos^3 \beta} \\ F_2 &= \frac{F + 2k \cdot A \cdot E \cdot \cos \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \end{aligned} \quad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) sind die allgemeinen Lösungen  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$ . Man kann diese durch Einsetzen in die Ausgangsgleichungen kontrollieren. Für  $\beta = 0$  und  $k = 0$  erhält man das offensichtlich richtige Ergebnis  $F_1 = F_2 = F_3 = F/3$ .

Die Überlänge  $\Delta l_0$  der Seile 1 und 3, für die diese voll entlastet sind, ergibt sich aus (5) für  $\Delta l_u = \Delta l_0$ :

$$\begin{aligned} F \cdot \cos^2 \beta - k \cdot A \cdot E &= 0 \\ \Delta l_0 &= \frac{F \cdot \cos^2 \beta}{A \cdot E} l_3 \end{aligned} \quad (7)$$

Die Auswertung der Gleichungen liefert mit

$$\beta = 26,6^\circ; \quad k = \frac{\Delta l_u}{l_3} = \frac{4 \text{ mm} \cdot \cos \beta}{4 \cdot 10^3 \text{ mm}} = 8,94 \cdot 10^{-4}$$

Aus (5)

$$\begin{aligned} F_1 = F_3 &= \frac{5,0 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \cos^2 26,6^\circ - 8,94 \cdot 10^{-4} \cdot 23 \text{ mm}^2 \cdot 7 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2}{1 + 2 \cos^3 26,6^\circ} \\ F_1 = F_3 &= 1,05 \text{ kN} \end{aligned}$$

Aus (6)

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{5,0 \cdot 10^3 \text{ N} + 2 \cdot 8,94 \cdot 10^{-4} \cdot 23 \text{ mm}^2 \cdot 7 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2 \cdot \cos 26,6^\circ}{1 + 2 \cos^3 26,6^\circ} \\ F_2 &= 3,12 \text{ kN} \end{aligned}$$

Kontrollieren kann man die Ergebnisse mit Hilfe einer graphischen Kräfteaddition.

Aus (7)

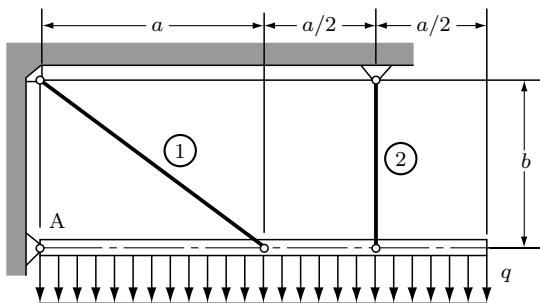
$$\Delta l_0 = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \cos^2 26,6^\circ}{23 \text{ mm}^2 \cdot 7 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2} 4,47 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

$$\underline{\Delta l_0 = 11 \text{ mm}}$$

Diese verhältnismäßig große Überlänge ist durch den verglichen mit Stahl niedrigen  $E$ -Modul der Seile bedingt. Die Aufhängung ist „weich“ und gleicht dadurch Ungenauigkeiten aus.

### **Beispiel 2 (Abb. 11-8)**

Ein starr angenommener Träger ist in A gelenkig gelagert und wie abgebildet mit zwei Seilen gleicher Ausführung abgehängt. Die Seilkräfte sind allgemein und für  $a = 2,0 \text{ m}$ ;  $b = 1,50 \text{ m}$ ;  $q = 10,0 \text{ kN/m}$  zu bestimmen.



**Abb. 11-8:** Abgehängter Träger mit Streckenlast

### **Lösung (Abb. 11-9)**

Das System ist einfach statisch unbestimmt. Den vier Unbekannten  $F_{Ax}; F_{Ay}; S_1; S_2$  stehen die drei Gleichgewichtsbedingungen gegenüber. Da hier nur nach den Seilkräften gefragt ist, genügt es, das System nach Abb. 11-9 freizumachen.

$$\sum M_A = 0 \quad S_1 \cdot \sin \alpha \cdot a + S_2 \cdot \frac{3}{2} a - 2a^2 \cdot q = 0 \quad (1)$$

Zusätzlich muss eine geometrische Beziehung am deformierten System aufgestellt werden (Verschiebungsplan). Die Abbildung liefert

$$\Delta l_1 = w_1 \cdot \sin \alpha \quad \text{und} \quad \Delta l_2 = w_2$$

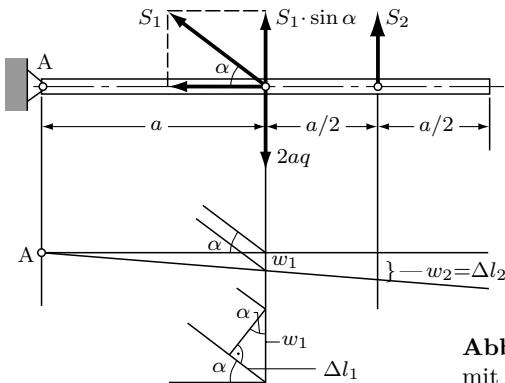


Abb. 11-9: Freigemachter Träger nach Abb. 11-8 mit Verlagerung der Trägerachse

Da der Träger starr ist, kann der Strahlensatz angewendet werden. Man erhält so eine Beziehung zwischen den beiden Verlängerungen

$$\frac{w_1}{a} = \frac{w_2}{1,5 \cdot a} \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{2}{3} w_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha} = \frac{2}{3} \Delta l_2$$

Das HOOKESche Gesetz in der Form der Gleichung 3-9 führt auf

$$\frac{S_1 \cdot l_1}{AE \cdot \sin \alpha} = \frac{2 \cdot S_2 \cdot l_2}{3 \cdot AE}$$

Dabei sind  $l_2 = b$  und  $l_1 = b/\sin \alpha$

$$\frac{S_1 \cdot b}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \cdot S_2 \cdot b}{3} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{2}{3} S_2 \cdot \sin^2 \alpha \quad (2)$$

Das ist die aus der Deformation gewonnene zweite Bestimmungsgleichung für die Kräfte. Sie wird in (1) eingesetzt.

$$\frac{2}{3} S_2 \cdot \sin^3 \alpha + \frac{3}{2} S_2 - 2a \cdot q = 0$$

Nach einfachen Umwandlungen ist

$$\underline{S_2 = \frac{3a \cdot q}{\sin^3 \alpha + 2,25}}$$

und nach dem Einsetzen in (2)

$$\underline{S_1 = \frac{2a \cdot q \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^3 \alpha + 2,25}}$$

Mit dem Winkel  $\alpha = \arctan(b/a) = 36,9^\circ$  liefert die Zahlenauswertung

$$\underline{S_1 = 5,84 \text{ kN}}; \quad \underline{S_2 = 24,33 \text{ kN}}.$$

Die ungleiche Auslastung der Seile kann man sich am deformierten System überlegen. Das Seil 1 ist länger, sitzt an der Stelle der kleineren Verlagerung und verlängert sich nur um einen Teil von dieser. Es nimmt deshalb eine wesentlich kleinere Kraft auf als Seil 2.

Kontrollieren kann man das Ergebnis über eine unabhängige Momentengleichung. Die Kräfte in A können aus den noch nicht verwendeten Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden.

## 11.4 Biegung

### 11.4.1 Integrations-Verfahren

Die Biegelinie erhält man durch zweifache Integration des Biegemomentendiagramms. Für jeden Abschnitt müssen zwei Integrationskonstanten aus den Randbedingungen bestimmt werden. Das sind z.B. für den Übergang zum nächsten Abschnitt  $w_1 = w_2; w'_1 = w'_2$ . Ein zusätzliches Lager liefert eine weitere Randbedingung  $w = 0$ . Für ein einfach statisch unbestimmtes System steht eine Randbedingung mehr zur Verfügung als für die Bestimmung der Integrationskonstanten notwendig ist. Es sind damit genügend Gleichungen vorhanden, um sowohl alle Integrationskonstanten als auch die zusätzliche Lagerkraft zu bestimmen. Entsprechendes gilt für ein mehrfach statisch unbestimmtes System.

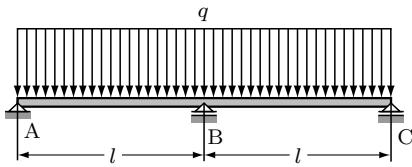
Das in diesem Abschnitt behandelte Verfahren ergibt für abgesetzte Wellen, viele Kräfte und mehrfache statische Unbestimmtheit eine sehr umfangreiche Rechnung. Das von FÖPPL vorgeschlagene Verfahren lässt sich auch hier vorteilhaft anwenden.

#### **Beispiel 1 (Abb. 11-10)**

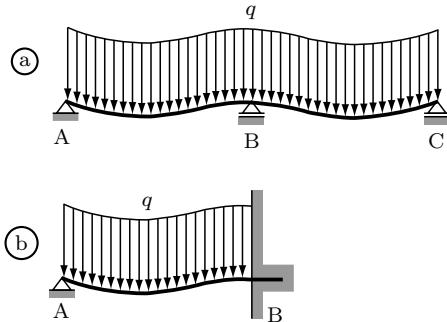
Ein Träger gleicher Querschnittsfläche von der Länge  $2l$  liegt auf im gleichen Abstand angebrachten Lagern A, B, C und ist mit einer konstanten Streckenlast  $q$  belastet. Zu bestimmen sind die Auflagerreaktionen und der Momentenverlauf.

#### **Lösung (Abb. 11-11/11-12)**

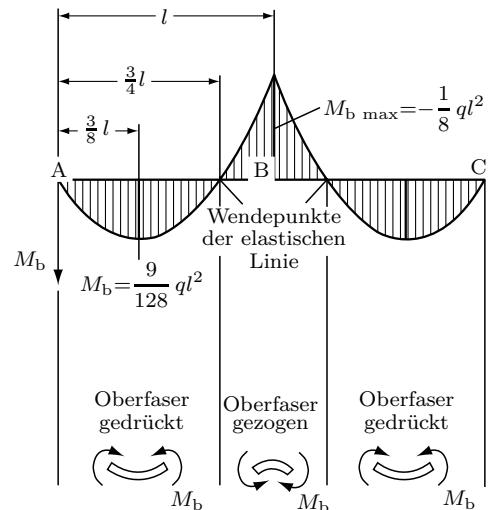
Da das System symmetrisch ist, muss es auch die Biegelinie sein. Wenn sie außerdem knickfrei verlaufen soll, muss für das Lager B die Tangente an der elastischen Linie horizontal verlaufen. Diese Aussage führt auf  $w_B = 0$  und  $w'_B = 0$ .



**Abb. 11-10:** Dreifach gelagerter Träger mit Streckenlast



**Abb. 11-11:** Symmetriebetrachtung am Durchlaufträger



**Abb. 11-12:**  $M_b$ -Diagramm für Durchlaufträger nach Abb. 11-10

Die zweite Bedingung gilt für eine Einspannung. Man kann deshalb eine Hälfte als eingespannten Träger mit Zusatzstütze betrachten. Es genügt, für den Fall b die Auflagerreaktionen zu bestimmen. Das soll mit dem FÖPPLSchen Verfahren geschehen. Dazu werden die Gleichungen 4-9/10 ausgewertet. Es gelten die Vorzeichen von Abb. 4-26. Das Koordinatensystem  $x; w$  wird in den Punkt A gelegt.

$$\begin{aligned} q &= \langle x \rangle^0 \cdot q \\ F_q &= - \int_0^x q \cdot dx + \sum_i \langle x - a \rangle^0 \cdot F_i \\ F_q &= -x \cdot q + \langle x \rangle^0 \cdot F_A. \end{aligned}$$

Die Stelle B muss nicht eingeführt werden, da  $\langle x - l \rangle = 0$  für  $x \leq l$  ist.

$$M = \int_0^x F_q \cdot dx + \sum_j \langle x - a \rangle^0 \cdot M_j$$

$$M = -\frac{x^2}{2} \cdot q + x \cdot F_A \quad (1)$$

$$\begin{aligned} EI \cdot \varphi &= - \int M \cdot dx \\ EI \cdot \varphi &= +\frac{x^3}{6} \cdot q - \frac{x^2}{2} \cdot F_A + K_1 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} EI \cdot w &= \int EI \cdot \varphi \cdot dx \\ EIw &= \frac{x^4}{24} \cdot q - \frac{x^3}{6} F_A + K_1 \cdot x + K_2. \end{aligned} \quad (3)$$

In den Gleichungen (1); (2) und (3) sind die Integrationskonstanten  $K_1, K_2$  und die Auflagerreaktionen  $F_A$  unbekannt. Es muss deshalb möglich sein, drei Randbedingungen aufzustellen.

$$\begin{array}{lll} x = 0 & w = 0 & \Rightarrow K_2 = 0 \\ x = l & w = 0 \\ x = l & \varphi = 0 \end{array}$$

Diese liefern die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{l^4}{24} \cdot q - \frac{l^3}{6} \cdot F_A + K_1 \cdot l \\ 0 &= \frac{l^3}{6} \cdot q - \frac{l^2}{2} \cdot F_A + K_1. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind

$$\underline{F_A = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l} \quad \text{und} \quad K_1 = \frac{q \cdot l^3}{48}.$$

Aus Symmetriegründen ist

$$\underline{F_C = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung für den ganzen Träger liefert

$$F_B = 2 \cdot q \cdot l - F_A - F_C \quad \Rightarrow \quad \underline{F_B = \frac{5}{4} \cdot q \cdot l}.$$

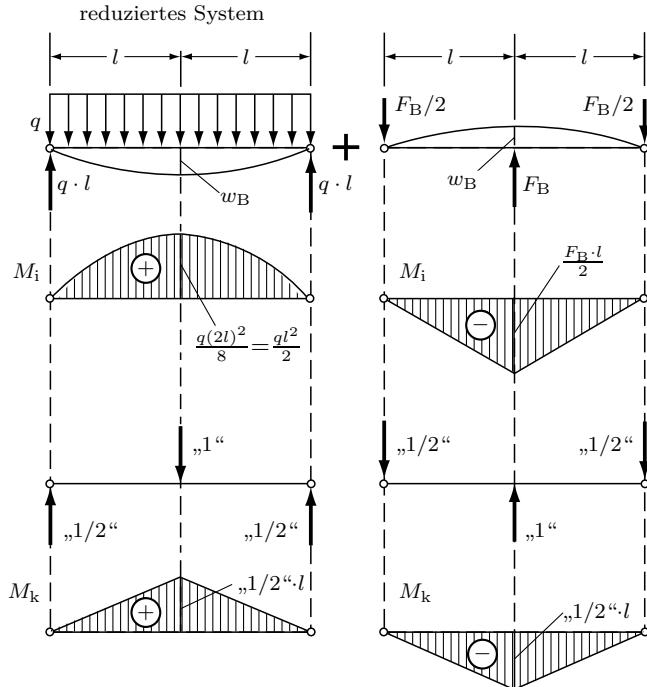
Damit ist die Aufgabe grundsätzlich gelöst. Der Momentenverlauf (Abb. 11-12) und die elastische Linie können durch Auswertung der Gleichungen (1) und (3) ermittelt werden.

### 11.4.2 Das Kraftgrößenverfahren

Die Grundlage dieses Verfahrens wurde im Abschnitt 4.5.3 behandelt. Es eignet sich – wie grundsätzlich jede Methode zur Ermittlung der elastischen Linie – auch für die Lösung statisch unbestimmter Systeme. Wie die nachfolgenden Beispiele zeigen, kommt man sehr schnell zu Ergebnissen.

#### Beispiel 1

Für den Träger Abb. 11-10 sind die Auflagerkräfte zu bestimmen.



**Abb. 11-13:**  $M_i$ - und  $M_k$ -Diagramme für Durchlaufträger nach Abb. 11-10

#### Lösung (Abb. 11-13)

Das System wird durch die Wegnahme des mittleren Lagers zu einem statisch bestimmten Fall reduziert. Für dieses wird die Durchbiegung mit Hilfe der Tabelle 12 bestimmt (Zeile 5; Spalte  $\beta$  mit 2 multipliziert)

$$EI \cdot w_B = 2 \left( \frac{5}{12} s \cdot M_i \cdot M_K \right) = 2 \left( \frac{5}{12} \cdot l \cdot \frac{q \cdot l^2}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{5}{24} q \cdot l^4$$

Die Lagerkraft alleine wirkend verursacht die Durchbiegung (Zeile 2; Spalte  $\beta$ )

$$EI \cdot w_B = 2 \left( \frac{1}{3} s \cdot M_i \cdot M_K \right) = 2 \left( \frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{F_B \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{F_B \cdot l^3}{6}$$

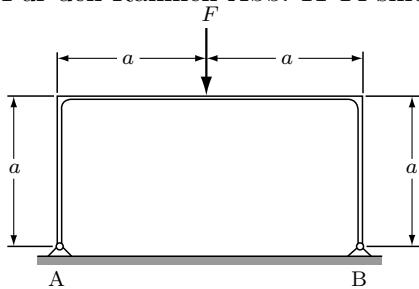
Insgesamt gilt für die Lagerstelle  $w = 0$

$$\frac{5}{24}q \cdot l^4 - \frac{F_B \cdot l^3}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_B = \frac{5}{4}q \cdot l}}$$

Diese Auflagerreaktion kann wie eine äußere Kraft am statisch bestimmt gelagerten Träger aufgefasst werden. Man kann so die anderen Lagerkräfte, Querkraft-, Momentenverlauf und die Biegelinie berechnen.

### **Beispiel 2**

Für den Rahmen Abb. 11-14 sind die Auflagerreaktionen zu bestimmen.



**Abb. 11-14:** Statisch unbestimmter Rahmen

### **Lösung (Abb. 11-15)**

Das System wird durch Umwandlung des Festlagers B in ein Rollenlager reduziert. Jetzt erfolgt eine Verschiebung des Lagers. Es ist zu beachten, dass die Ständer dadurch momentenfrei sind. Man erhält aus Tabelle 12 (Zeile 2; Spalte  $\alpha$ )

$$EI \cdot w_B = 2\left(\frac{1}{2}s \cdot M_i \cdot M_K\right) = 2\left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{F \cdot a}{2} \cdot a\right) = \frac{F \cdot a^3}{2}$$

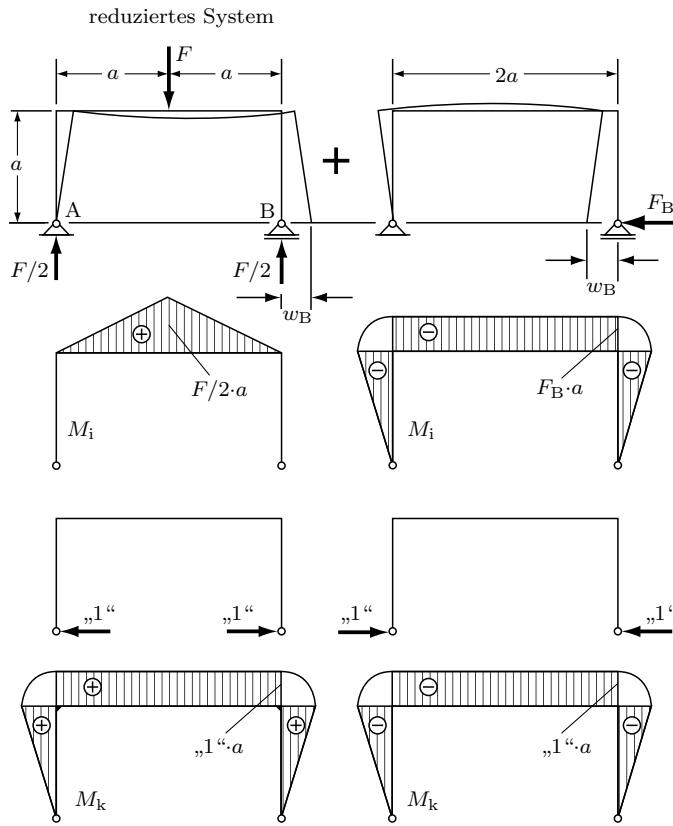
Die Kraft  $F_B$  verursacht alleine wirkend (Zwei Ständer: Zeile 2; Spalte  $\beta$ . Holm: Zeile 1; Spalte  $\alpha$ )

$$\begin{aligned} EI \cdot w_B &= 2\left(\frac{1}{3}s \cdot M_i \cdot M_K\right) + s \cdot M_i \cdot M_K \\ EI \cdot w_B &= 2\left(\frac{1}{3}a \cdot F_B \cdot a \cdot a\right) + 2a \cdot F_B \cdot a \cdot a = \frac{8}{3}F_B \cdot a^3 \end{aligned}$$

Die Bedingung  $w_B = 0$  führt auf

$$\frac{F \cdot a^3}{2} - \frac{8}{3}F_B \cdot a^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_B = \frac{3}{16}F}}$$

Hier gilt das gleiche, was zur Lösung des Beispiels 1 ausgeführt wurde.



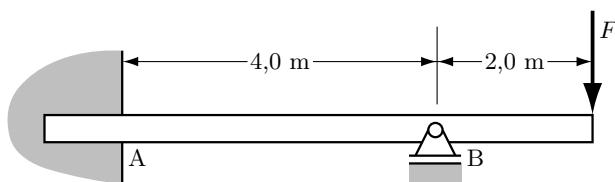
**Abb. 11-15:**  $M_i$ - und  $M_k$ -Diagramme für Rahmen nach Abb. 11-13

### Beispiel 3 (Abb. 11-16)

Für den abgebildeten Träger sind für zwei Vorgaben die Biegemomentendiagramme zu zeichnen.

- Das Lager B ist ohne Abweichung von der Solllage montiert,
- das Lager B ist um  $e$  zu tief montiert.

$$\text{HE-B-Träger 180; } F = 10,0 \text{ kN; } e = 1,0 \text{ cm.}$$



**Abb. 11-16:** Statisch unbestimmt gelagerter Träger

**Lösung**

Der Träger ist einfach statisch unbestimmt. Zuerst soll die Biegesteifigkeit mit der Tabelle 10A berechnet werden

$$EI = 2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2 \cdot 3830 \text{ cm}^4 = 8,043 \cdot 10^{10} \text{ N cm}^2.$$

Das System wird durch Wegnahme des Lagers B reduziert. Die Durchbiegung an der Stelle B infolge der Kraft  $F$  wird ermittelt (Abb. 11-17a). Mit Hilfe der Tabelle 12 (Zeile 3/Spalte  $\gamma$ ) erhält man

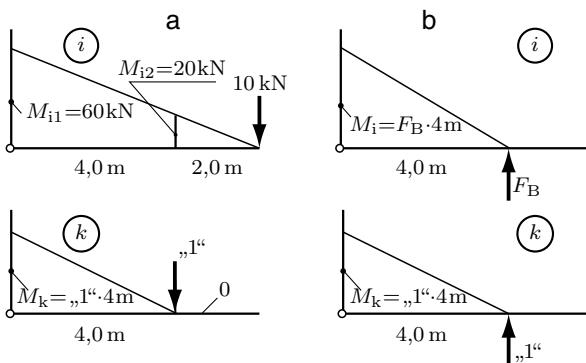
$$\begin{aligned} EI \cdot w_{BF} &= (1/6) \cdot s \cdot M_K (2M_{i1} + M_{i2}) \\ w_{BF} &= \frac{1}{8,043 \cdot 10^{10} \text{ Ncm}^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4,0 \text{ m} \cdot 4,0 \text{ m} \cdot (2 \cdot 60 + 20) \text{ kNm} \cdot \frac{10^6 \text{ cm}^3}{\text{m}^3} \cdot \frac{10^3 \text{ N}}{\text{kN}} \\ w_{BF} &= 4,64 \text{ cm} \end{aligned} \quad (1)$$

Die Lagerkraft  $F_B$  alleine wirkend verursacht an der Lagerstelle gemäß Abb. 11-17b nach Tabelle 12 (Zeile 2/Spalte  $\beta$ ) die Durchbiegung

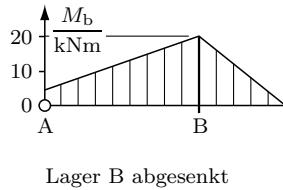
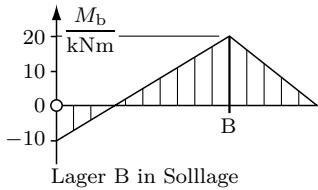
$$\begin{aligned} EIw_{BB} &= (1/3) \cdot s \cdot M_i \cdot M_K \\ w_{BB} &= \frac{1}{8,043 \cdot 10^{10} \text{ Ncm}^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4,0 \text{ m} \cdot (F_B \cdot 4,0 \text{ m}) \cdot 4,0 \text{ m} \cdot \frac{10^6 \text{ cm}^3}{\text{m}^3} \cdot \frac{10^3 \text{ N}}{\text{kN}} \\ w_{BB} &= 0,265 \cdot F_B \text{ cm/kN.} \end{aligned} \quad (2)$$

Der allgemeine Ansatz für die Bestimmung der Lagerkraft ist

$$w_{BF} - w_{BB} = e$$



**Abb. 11-17:**  $M_i$ -;  $M_k$ -Diagramme für Träger Abb. 11-16



**Abb. 11-18:** Biegemomentendiagramme für Träger Abb. 11-16

Fall a):  $e = 0, F_B = F_{B0}$

Die Gleichungen (2) und (1) werden gleichgesetzt

$$0,265F_{B0} \text{ cm/kN} = 4,64 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad F_{B0} = 17,5 \text{ kN}$$

Fall b):  $e = 1,0 \text{ cm}, F_B = F_{B1}$

$$w_{BB} = w_{BF} - e$$

$$0,265F_{B1} \text{ cm/kN} = 3,64 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad F_{B1} = 13,7 \text{ kN}$$

Damit ist die Aufgabe grundsätzlich gelöst. Die  $M_b$ -Diagramme für beide Fälle zeigt die Abb. 11-18.

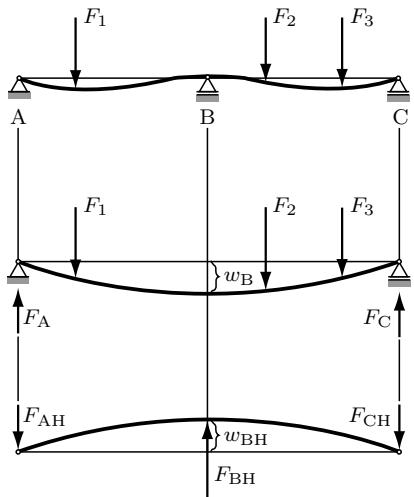
### 11.4.3 Überlagerung bekannter Belastungsfälle

Wie mehrfach ausgeführt, kann man ein statisch unbestimmtes System aus statisch bestimmten Systemen zusammensetzen. Die Auflagerreaktionen können damit auch durch rechnerische Überlagerungen der Belastungsfälle nach Tabelle 11 bestimmt werden. Die Benutzung dieser Tabelle setzt voraus, dass der Balkenquerschnitt durchgehend gleich ist. Für einfache Fälle ergibt dieses Verfahren eine schnelle Lösungsmöglichkeit.

Für abgesetzte Wellen mit mehreren Kräften ist es oft von Vorteil, das Verfahren von MOHR/FÖPPL nach Abschnitt 4.6.4 anzuwenden. Der Lösungsweg soll an einer dreifach gelagerten Welle nach Abb. 11-19 erklärt werden. Das System wird durch Entfernen des Lagers B reduziert. Die Durchbiegung  $w_B$  wird, wie oben angegeben, ermittelt. Mit einer angenommenen Lagerkraft  $F_{BH}$  wird an der entlasteten Welle die Durchbiegung  $w_{BH}$  bestimmt. Diese ist nicht gleich  $w_B$ , weil  $F_{BH}$  nicht die richtige Lagerkraft ist. Da die Durchbiegung linear von der Kraft abhängt, kann man folgende Proportion aufstellen

$$\frac{F_B}{w_B} = \frac{F_{BH}}{w_{BH}} \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{w_B}{w_{BH}} F_{BH} \quad (1)$$

Mit dieser Beziehung kann die überschüssige Lagerkraft berechnet werden.



**Abb. 11-19:** Reduktion einer dreifach gelagerten Welle

Die Gleichung (1) kann man auch für eine experimentelle Bestimmung der Lagerkraft B benutzen. Dazu werden die Durchbiegungen  $w$  bei den jeweiligen Belastungen mit der Messuhr gemessen.

### Beispiel

Für den Träger Abb. 11-10 sind die Auflagerreaktionen zu bestimmen.

### Lösung

Bei Entfernung des mittleren Auflagers ergibt sich in B eine Durchbiegung (Tabelle 11, Nr. 7)

$$y_B = \frac{5q(2l)^4}{384EI} = \frac{5q l^4}{24EI} \downarrow$$

Am entlasteten Träger verursacht die Kraft  $F_B$  eine Durchbiegung (Tabelle 11 Nr. 2)

$$y_B = \frac{F_B(2l)^3}{48EI} = \frac{F_B l^3}{6EI} \uparrow$$

Soll die Durchbiegung B null sein, muss gelten

$$\frac{5}{24} \frac{q l^4}{EI} - \frac{F_B l^3}{6EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_B = \frac{5}{4} ql}}.$$

Damit erhält man aus  $\sum F = 0$

$$F_A = F_C = \frac{3}{8} ql.$$

## 11.5 Zusammenfassung

Ein System ist statisch unbestimmt, wenn die Anzahl der zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen nicht ausreicht, alle Auflagerreaktionen zu berechnen. Aus der Verformung des Systems werden die noch notwendigen Berechnungsgleichungen gewonnen.

Bei Systemen mit Zug-Druck-Bearbeitung muss in die am verformten Bauteil aufgestellte(n) geometrische Beziehung(en) das HOOKEsche Gesetz eingeführt werden. Man erhält so eine (mehrere) zusätzliche Kräftegleichung(en).

Für statisch unbestimmt gelagerte Träger (Wellen) müssen grundsätzlich in die Biegelinie die Lagerbedingung  $w = 0$  bzw. die Einspannbedingung  $w = 0; w' = 0$  eingeführt werden. Das kann über Integrationskonstanten geschehen.

Eine Reihe von Verfahren beruhen auf folgender Überlegung: Durch Wegnahme überzähliger Lager (Einspannungen) wird der Träger auf ein statisch bestimmtes System reduziert. An der Stelle des entfernten Lagers wird nach einem beliebigen Verfahren die Durchbiegung (Winkeländerung) bestimmt. In einem zweiten Schritt wird am entlasteten System an der Lagerstelle eine Kraft (ein Moment) eingeführt. Die Größe dieser Auflagerreaktion wird aus der Bedingung  $w = 0 (w' = 0)$  berechnet. Mit anderen Worten: Es wird die Lagerkraft berechnet, die den belasteten Träger wieder in die Position  $w = 0$  „zurückdrückt“.

# 12 Verschiedene Anwendungen

## 12.1 Einführung

Im letzten Kapitel dieses Buches werden drei Themen behandelt, die man dem Grenzgebiet Technische Mechanik/Maschinenteile zuordnen kann.

Die *Wärmespannungen* können für Schrumpfverbindungen (z.B. Welle/Nabe) genutzt werden, verursachen aber auch unkontrollierte und damit unerwünschte Spannungen bei ungleichmäßiger Temperaturverteilung und in Verbindungen von unterschiedlichen Werkstoffen.

*Umlaufende Bauteile* sind in fast allen Maschinen eingebaut. Ausgewählt wurden hier der *umlaufende Stab* und der *dünnwandige Ring*. Die Diskussion der Berechnungsgleichungen für die *Scheibe gleicher Dicke* führt zu wichtigen Erkenntnissen und ermöglicht beispielhaft die Anwendung der Bruchhypothesen.

Dies gilt auch für den *Druckbehälter*. Im Rahmen dieser Darstellung ist eine Beschränkung auf den dünnwandigen Zylinder und eine solche Kugel notwendig. Zum dickwandigen Behälter erfolgen qualitative Ausführungen, die das Kapitel und damit das Buch abschließen.

## 12.2 Die Wärmespannung

### 12.2.1 Die Wärmedehnungszahl

Stoffe dehnen sich bei Erwärmung aus und ziehen sich bei Abkühlung zusammen. Ein Körper wird bei der Erwärmung in seinen Längenabmessungen und damit auch in seinem Volumen größer. Die Längenausdehnung ist um so größer, je länger der Körper ist und je stärker er erwärmt wird

$$\Delta l \sim l \cdot \Delta t .$$

Nach Einführung einer Proportionalitätskonstanten erhält man

$$\Delta l = \alpha \cdot \Delta t \cdot l \quad (12-1)$$

$\alpha$  wird die *lineare Ausdehnungszahl* genannt. Ihre Einheit ist  $K^{-1}$ .  $\alpha$  hängt vom Werkstoff und vom Temperaturbereich ab. Ein Auswahl von  $\alpha$ -Werten ist in Tabelle 19 im Anhang gegeben.

Ein Quader mit dem Volumen  $V = a \cdot b \cdot c$  hat nach der Ausdehnung durch Erwärmung um die Temperatur  $\Delta t$ , das Volumen

$$\begin{aligned}V' &= a(1 + \alpha\Delta t) \cdot b(1 + \alpha\Delta t) \cdot c(1 + \alpha\Delta t) \\V' &= a \cdot b \cdot c(1 + \alpha\Delta t)^3 \\V' &= a \cdot b \cdot c[1 + 3\alpha\Delta t + 3(\alpha\Delta t)^2 + (\alpha\Delta t)^3].\end{aligned}$$

Die höheren Potenzen von  $\alpha$  sind sehr klein, da  $\alpha$  selbst klein ist. Man kann  $\alpha^2$  und  $\alpha^3$  gegenüber  $\alpha$  vernachlässigen

$$V' = V(1 + 3\alpha\Delta t) = V + \Delta V.$$

Das Volumen nimmt demnach um

$$\begin{aligned}\Delta V &= 3\alpha\Delta t \cdot V \\ \Delta V &= 3\alpha \cdot \Delta t \cdot V = \gamma \cdot \Delta t \cdot V\end{aligned}\tag{12-2}$$

zu. Die *Volumensausdehnungszahl*  $\gamma$  ist gleich  $3\alpha$ .

Wird ein Körper an der *Ausdehnung bzw. Zusammenziehung gehindert*, dann sind dazu Kräfte notwendig, die zu *Spannungen* in diesem Körper führen. Aus diesem Grunde werden Wellen, Brücken u.ä. so gelagert, dass eine *freie Ausdehnung* möglich ist und unkontrollierte Spannungen nicht entstehen können. Auf der anderen Seite macht man sich die Wärmespannungen in vielen Anwendungen zu nutze. Beispiele dafür sind Schrumpfverbindungen zwischen Nabe und Welle und warm eingezogene Niete, die durch die Wärmespannung die Teile so zusammenhalten sollen, dass der Reibungsschluss genügt, die Kräfte zu übertragen.

## 12.2.2 Die Spannungen

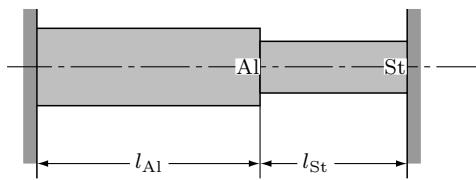
Die Bestimmung der Wärmespannungen erfolgt folgendermaßen

1. Berechnung der freien Dehnung bzw. Zusammenziehung.
2. Berechnung der Kräfte, die notwendig sind, um den Körper auf die ursprünglichen Abmessungen zu ziehen bzw. zu drücken.

Es stehen jeweils Gleichungen für die Wärmedehnung, die Beziehungen zwischen Dehnung und Spannung (z.B. HOOKEsches Gesetz) und statischen Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung.

### **Beispiel 1 (Abb. 12-1)**

Zwischen zwei starr angenommenen Wänden sind spielfrei ein Aluminium- und ein Stahlblock gleicher Temperatur eingeschoben. Das System wird um  $\Delta t$  erwärmt. Zu bestimmen sind allgemein die Spannungen im Stahl und im Aluminium.



**Abb. 12-1:** Blöcke zwischen starren Wänden

### **Lösung**

Bei Wegnahme einer Wand würden sich die beiden Blöcke um den Betrag

$$\begin{aligned}\Delta l_{\text{ges}} &= \Delta l_{Al} + \Delta l_{St} \\ \Delta l_{\text{ges}} &= \alpha_{Al} \cdot l_{Al} \cdot \Delta t + \alpha_{St} \cdot l_{St} \cdot \Delta t\end{aligned}$$

ausdehnen. Die Wände nehmen Kräfte auf, die diese Ausdehnung rückgängig machen. Um den Aluminiumblock auf seine Ausgangslänge zurückzudrücken, ist folgende Kraft nach Gleichung 3-9 notwendig

$$F_{Al} = \frac{A_{Al} \cdot E_{Al} \cdot \Delta l_{Al}}{l_{Al}}.$$

Analog ist für den Stahlblock

$$F_{St} = \frac{A_{St} \cdot E_{St} \cdot \Delta l_{St}}{l_{St}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$\Delta l_{Al} = \frac{F_{Al} \cdot l_{Al}}{A_{Al} \cdot E_{Al}}; \quad \Delta l_{St} = \frac{F_{St} \cdot l_{St}}{A_{St} \cdot E_{St}}.$$

Die statischen Gleichgewichtsbedingungen an den beiden Blöcken ergeben

$$F_{Al} = F_{St} = F.$$

Nach Einführung dieser Größen in die Ausgangsgleichung für  $\Delta l_{\text{ges}}$  erhält man

$$\frac{F \cdot l_{\text{Al}}}{A_{\text{Al}} \cdot E_{\text{Al}}} + \frac{F \cdot l_{\text{St}}}{A_{\text{St}} \cdot E_{\text{St}}} = \alpha_{\text{Al}} \cdot l_{\text{Al}} \cdot \Delta t + \alpha_{\text{St}} \cdot l_{\text{St}} \cdot \Delta t.$$

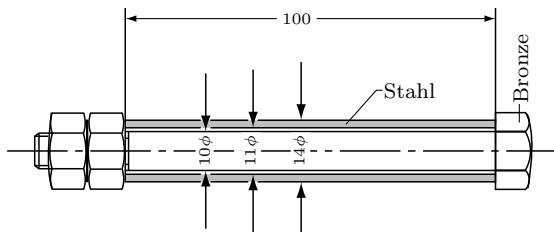
Die Auflösung nach  $F$  ergibt

$$F = \frac{\alpha_{\text{Al}} \cdot l_{\text{Al}} + \alpha_{\text{St}} \cdot l_{\text{St}}}{\frac{l_{\text{Al}}}{A_{\text{Al}} \cdot E_{\text{Al}}} + \frac{l_{\text{St}}}{A_{\text{St}} \cdot E_{\text{St}}}} \cdot \Delta t$$

Die Druckspannungen sind damit  $\underline{\sigma_{\text{Al}} = F/A_{\text{Al}}}$ ;  $\underline{\sigma_{\text{St}} = F/A_{\text{St}}}$ .

### **Beispiel 2 (Abb. 12-2)**

Über eine Bronzeschraube mit einem Schaftdurchmesser von 10 mm ist eine Stahlbuchse gesteckt. Die Muttern sind bei einer Temperatur von  $+30^{\circ}\text{C}$  in einer Position gekontrakt, bei der die Buchse kein Spiel hat, aber auch unter keiner nennenswerten Spannung steht. Zu berechnen sind die Spannungen in der Buchse und im Schraubenschaft für die Temperatur von  $-40^{\circ}\text{C}$ .



**Abb. 12-2:** Schraube mit Hülse

### **Lösung (Abb. 12-3)**

Ohne Behinderung würden sich Schraube und Buchse um folgende Längen zusammenziehen

$$\Delta l_{\text{Br}} = \alpha_{\text{Br}} \cdot l \cdot \Delta t; \quad \Delta l_{\text{St}} = \alpha_{\text{St}} \cdot l \cdot \Delta t.$$

Wegen  $\alpha_{\text{B}} > \alpha_{\text{St}}$  würde sich die Schraube stärker zusammenziehen (Abb. 12-3a). Die Differenz dieser Kontraktionen muss dadurch ausgeglichen werden, dass einerseits die Schraube gezogen und andererseits die Buchse gedrückt wird (Abb. 12-3b). Die geometrische Bedingung für die elastischen Längenänderungen ist

$$\Delta l'_{\text{Br}} + \Delta l'_{\text{St}} = \Delta l_{\text{Br}} - \Delta l_{\text{St}}.$$

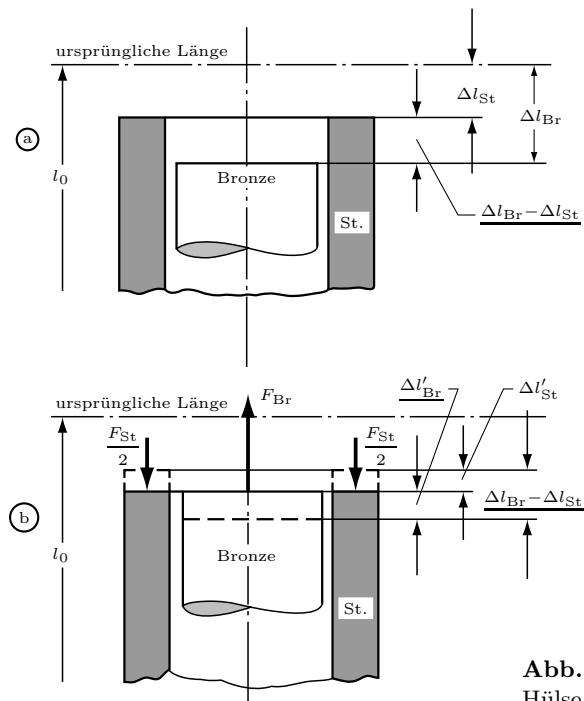


Abb. 12-3: Verlängerung von Schraube und Hülse

Nach Einsetzen der Gleichungen 3-9 bzw. 12-1

$$\frac{F_{Br} \cdot l}{E_{Br} \cdot A_{Br}} + \frac{F_{St} \cdot l}{E_{St} \cdot A_{St}} = \alpha_{Br} \cdot l \cdot \Delta t - \alpha_{St} \cdot l \cdot \Delta t .$$

Aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen erhält man

$$F_{Br} = F_{St} = F .$$

Damit kann man  $F$  eliminieren

$$F = \frac{\alpha_{Br} - \alpha_{St}}{\frac{1}{E_{Br} \cdot A_{Br}} + \frac{1}{E_{St} \cdot A_{St}}} \cdot \Delta t .$$

Folgende Zahlenwerte werden eingesetzt

$$\begin{aligned} \alpha_{Br} &= 1,8 \cdot 10^{-5} K^{-1} & E_{Br} &= 1,16 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \\ \alpha_{St} &= 1,1 \cdot 10^{-5} K^{-1} & E_{St} &= 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \\ A_{Br} &= 78,5 \text{ mm}^2 & A_{St} &= 58,9 \text{ mm}^2 & \Delta t &= 70 \text{ K.} \end{aligned}$$

Die Rechnung ergibt  $F = 2,57 \text{ kN}$ . Die Spannungen betragen

$$\underline{\sigma}_{\text{Br}} = \frac{2,57 \cdot 10^3 \text{ N}}{78,5 \text{ mm}^2} = \underline{33 \text{ N/mm}^2}; \quad \underline{\sigma}_{\text{St}} = \frac{2,57 \cdot 10^3 \text{ N}}{58,9 \text{ mm}^2} = \underline{44 \text{ N/mm}^2}.$$

### *Beispiel 3*

Ein dünner Kupferring kann, wenn er auf  $70^\circ\text{C}$  erwärmt wird, spielfrei über eine Stahlwelle (Durchmesser  $d$ ) von  $20^\circ\text{C}$  geschoben werden. Zu bestimmen sind

- a) die Spannung im Ring, wenn sich das System auf  $20^\circ\text{C}$  abkühlt,
- b) die Spannung im Ring, wenn das System weiter auf  $-20^\circ\text{C}$  abgekühlt wird,
- c) die Temperatur, auf die man die gesamte Verbindung mindestens erwärmen muss, wenn der Ring sich von der Welle lösen soll.

Die elastische Dehnung der Welle ist zu vernachlässigen.

### **Lösung**

Zu a) Der Ring versucht sich um den Betrag

$$\Delta l = \alpha_{\text{Cu}} \cdot l_{\text{Cu}} \cdot \Delta t \quad l = \text{Umfang}$$

zusammenzuziehen. Bei starrer Welle muss er um den gleichen Betrag durch die elastische Spannung gedehnt werden. Nach Gleichungen 3-9 und 12-1 gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{E_{\text{Cu}}} \cdot l_{\text{Cu}} &= \alpha_{\text{Cu}} \cdot l_{\text{Cu}} \cdot \Delta t \\ \sigma &= \alpha_{\text{Cu}} \cdot E_{\text{Cu}} \cdot \Delta t \\ \underline{\sigma} &= 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 1,3 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \cdot 50 \text{ K} = \underline{104 \text{ N/mm}^2} \end{aligned}$$

Zu b) Bei der weiteren Abkühlung würde sich ohne Behinderung der Kupferring stärker zusammenziehen als die Welle ( $\alpha_{\text{Cu}} > \alpha_{\text{St}}$ ). Das führt zu zusätzlichen Spannungen in der Schrumpfverbindung. Die Differenz der thermischen Dehnungen, die sich ohne Behinderung einstellen würde, muss durch die zusätzliche elastische Dehnung des Kupfers (Welle starr) aufgenommen werden (siehe Beispiel 2)

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{Cu}} \cdot \Delta t \cdot l - \alpha_{\text{St}} \cdot \Delta t \cdot l &= \frac{\Delta \sigma}{E} \cdot l \\ \Delta \sigma &= (\alpha_{\text{Cu}} - \alpha_{\text{St}}) \cdot E_{\text{Cu}} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Kontrolle: Für gleiche Ausdehnungszahlen  $\alpha$  ist  $\Delta\sigma = 0$ .

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= (1,6 - 1,1) \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 1,3 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \cdot 40 \text{ K} \\ \Delta\sigma &= 26 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Damit ist

$$\underline{\sigma = 104 \text{ N/mm}^2 + 26 \text{ N/mm}^2 = 130 \text{ N/mm}^2}$$

Zu c) Hat der Ring eine Temperatur von  $70^\circ\text{C}$  und die Welle von  $20^\circ\text{C}$ , dann sind Ring-Innendurchmesser und Wellendurchmesser gleich. Kühlt sich der Ring unabhängig von der Welle auf  $20^\circ\text{C}$  ab, dann nimmt sein Innenumfang um den Betrag

$$\Delta l'_{\text{Cu}} = \alpha_{\text{Cu}} \cdot l \cdot \Delta t' \quad (\Delta t' = 70^\circ - 20^\circ)$$

ab. Das entspricht nach Abb. 12-4 einer Abnahme des Durchmessers um

$$\Delta d'_{\text{Cu}} = \alpha_{\text{Cu}} \cdot d \cdot \Delta t'.$$

Der Ring lässt sich bei der Temperatur abziehen, bei der der Ring-Innendurchmesser und der Wellendurchmesser gleich sind. Nach Abb. 12-4 ist

$$\begin{aligned}\Delta d_{\text{St}} &= \Delta d_{\text{Cu}} - \Delta d'_{\text{Cu}} \\ \alpha_{\text{St}} \cdot d \cdot \Delta t &= \alpha_{\text{Cu}} \cdot d \cdot \Delta t - \alpha_{\text{Cu}} \cdot d \cdot \Delta t' \\ \Delta t &= \frac{\alpha_{\text{Cu}}}{\alpha_{\text{Cu}} - \alpha_{\text{St}}} \cdot \Delta t'\end{aligned}$$

Kontrolle: für gleiche Ausdehnungszahlen  $\alpha$  ist  $\Delta t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{1,6}{1,6 - 1,1} \cdot 50^\circ\text{C} \quad \Delta t = 160^\circ\text{C} \\ \underline{t} &= 160^\circ + 20^\circ = \underline{180^\circ\text{C}}.\end{aligned}$$

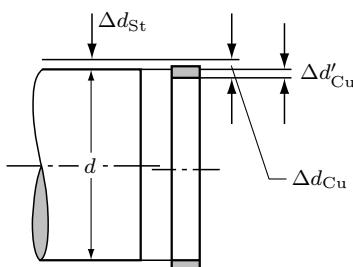


Abb. 12-4: Welle mit Ring

Bei  $180^\circ\text{C}$  ist der Kupferring ohne Spannung und gerade spielfrei. Die Temperatur muss größer als  $70^\circ\text{C}$  sein, da im vorliegenden Fall die Welle miterwärmst wird und sich mit ausdehnt.

## 12.3 Umlaufende Bauteile

### 12.3.1 Der umlaufende Stab

In einem umlaufenden Stab ohne Masse am Ende nach Abb. 12-5a ist im Schnitt  $x$  folgende Spannung vorhanden

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot r \cdot \omega^2}{A} = \frac{\varrho \cdot A(l-x) \cdot \frac{l+x}{2} \cdot \omega^2}{A}$$

$$\sigma = \frac{(l^2 - x^2) \cdot \omega^2 \cdot \varrho}{2}.$$

Die maximale Spannung ist an der Stelle  $x = 0$

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} l^2 \cdot \omega^2 \cdot \rho. \quad (12-3)$$

Die Spannung hängt nicht vom Stabquerschnitt ab. Ein dickerer Stab unterliegt wohl höheren Fliehkräften, im gleichen Maße ist aber auch der tragende Querschnitt vergrößert.

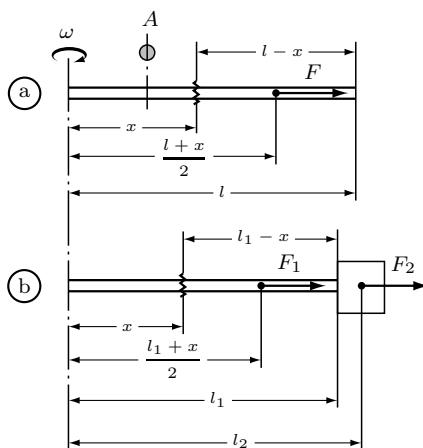


Abb. 12-5: Rotierender Stab

Für eine Masse  $m$  am Stabende ergeben sich folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{F_1 + F_2}{A} = \frac{(l_1^2 - x^2)\omega^2 \cdot \varrho}{2} + \frac{m \cdot l_2 \cdot \omega^2}{A} \\ \sigma_{\max} &= \frac{l_1^2 \omega^2 \varrho}{2} + \frac{m \cdot l_2 \omega^2}{A} \\ \sigma_{\max} &= \omega^2 \left( \frac{l_1^2 \cdot \varrho}{2} + \frac{m \cdot l_2}{A} \right).\end{aligned}\quad (12-4)$$

### 12.3.2 Der umlaufende Ring

Es soll hier nur die Rotation um die senkrecht auf der Ringebene stehende Schwerpunktachse nach Abb. 12-6 behandelt werden. Aus der Gleichgewichtsbedingung am freigemachten Abschnitt des Ringes erhält man (Abb. 12-7)

$$\Sigma F_y = 0 \quad 2\sigma \cdot A = m \cdot r_s \cdot \omega^2.$$

Die Werte

$$m = \varrho \cdot \pi \cdot r \cdot A \quad r_s = \frac{2}{\pi} \cdot r \quad (\text{Tabelle 4.2, Band 1})$$

werden eingesetzt

$$\begin{aligned}2\sigma \cdot A &= \varrho \cdot \pi \cdot r \cdot A \cdot \frac{2}{\pi} \cdot r \cdot \omega^2 \\ \sigma &= \varrho \cdot r^2 \cdot \omega^2\end{aligned}\quad (12-5)$$

Diese Gleichung gilt nur für einen *dünnen Ring*, dessen *Dehnung nicht behindert* wird. Sie gilt nicht für ein Rad mit Speichen, die im Ring zusätzlich Biegespannungen verursachen.

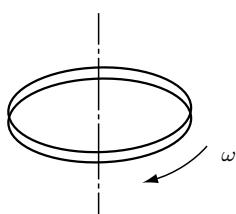


Abb. 12-6: Rotierender Ring

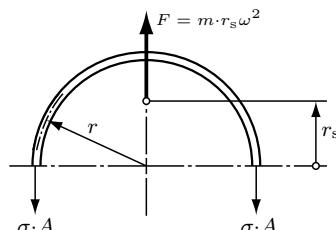


Abb. 12-7: Freigemachte Ringhälfte

**Beispiel**

Der aufgeschrumpfte Kupferring von Beispiel 3 Abschnitt 12.2.2 soll einen mittleren Durchmesser von 210 mm haben. Bei welcher Drehzahl würde er sich von der Welle bei einer Temperatur von 20 °C lösen?

**Lösung**

In dem Ring ist nach dem Aufschrumpfen eine Spannung von 104 N/mm<sup>2</sup> vorhanden. Diese Spannung versucht, den Ring zusammenzuziehen. Wird bei zunehmender Fliehkraft eine Spannung gleicher Größe erreicht, dann hat sich der Ring auf das Wellenmaß gedehnt und hat damit keinen Kraftschluss mit der Welle.

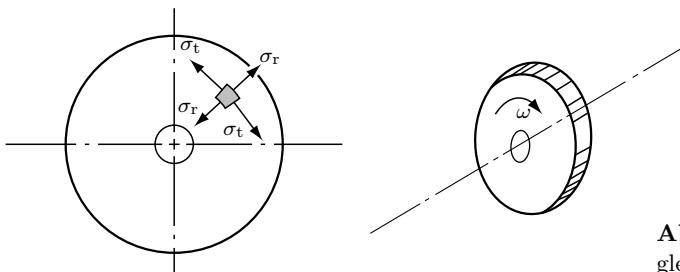
Gleichung 12-5 wird nach  $\omega$  umgestellt.

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}} \\ \omega &= \frac{1}{105 \text{ mm}} \sqrt{\frac{104 \text{ N/mm}^2}{8,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3} \cdot \frac{10^{12} \text{ mm}^4}{\text{m}^4}} = 1030 \text{ sec}^{-1} \\ n &= \frac{\omega}{2\pi} = 163,9 \text{ s}^{-1}; \quad \underline{n = 9830 \text{ min}^{-1}}.\end{aligned}$$

### 12.3.3 Die umlaufende Scheibe gleicher Dicke

In einer rotierenden Scheibe nach Abb. 12-8 ist die Spannungsverteilung nicht konstant, wie es für einen dünnen Ring angenommen werden konnte. Es handelt sich hier um einen ebenen Spannungszustand. An einem Teilelement sind sowohl in radialer Richtung als auch in tangentialer Richtung Normalspannungen wirksam. Sie werden mit  $\sigma_t$  und  $\sigma_r$  bezeichnet. Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben folgende *Spannungsverteilung im radialen Schnitt* einer gebohrten Scheibe

$$\sigma_t = \rho \omega^2 r_a^2 \frac{3 + \mu}{8} \left[ 1 + \left( \frac{r_i}{r_a} \right)^2 + \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} \left( \frac{r}{r_a} \right)^2 \right] \quad (12-6)$$



**Abb. 12-8:** Rotierende Scheibe gleicher Dicke

$$\sigma_r = \rho \omega^2 r_a^2 \frac{3 + \mu}{8} \left[ 1 + \left( \frac{r_i}{r_a} \right)^2 - \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 - \left( \frac{r}{r_a} \right)^2 \right] \quad (12-7)$$

$\mu$  = Querkontraktionszahl, für Stahl  $\mu \approx 0,3$ .

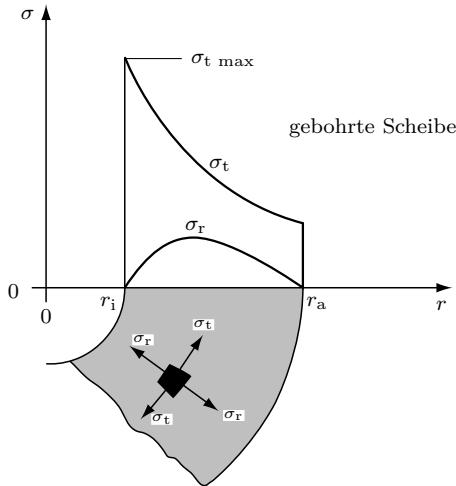


Abb. 12-9: Spannungsverteilung in rotierender Scheibe gleicher Dicke mit Innenbohrung

Die diesen Gleichungen entsprechenden Kurven sind in Abb. 12-9 aufgetragen. Die Radialspannung  $\sigma_r$  muss bei unbelasteten Innen- und Außenrand an diesen beiden Stellen gleich Null sein. Die maximale Spannung ist die *maximale Tangentialspannung am Innenrand*, denn hier ist der tragende Querschnitt am kleinsten und die Fliehkräfte der außenliegenden Massen sind am größten. An dieser Stelle setzt auch bei einem Schleuderversuch die Zerstörung der Scheibe ein. Die Größe dieser Spannung erhält man aus Gleichung 12-6 für  $r = r_i$

$$\sigma_{t \text{ max}} = \rho \omega^2 r_a^2 \frac{3 + \mu}{8} \left[ 2 + \left( \frac{r_i}{r_a} \right)^2 \left( 1 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} \right) \right].$$

Nach Vereinfachung

$$\sigma_{t \text{ max}} = \rho \omega^2 r_a^2 \frac{3 + \mu}{4} \left[ 1 + \left( \frac{r_i}{r_a} \right)^2 \cdot \frac{1 - \mu}{3 + \mu} \right]. \quad (12-8)$$

Für den Fall einer *kleinen Innenbohrung* kann  $\frac{r_i}{r_a} \approx 0$  gesetzt werden. Man erhält damit

$$\sigma_{t \text{ max} 0} = \rho \omega^2 r_a^2 \frac{3 + \mu}{4}. \quad (12-9)$$

Die Beziehungen für einen *dünnen Ring* erhält man aus den Gleichungen 12-6/7 für  $r_i \approx r_a \approx r$

$$\sigma_{t\text{ Ring}} = \varrho \omega^2 r^2 \frac{3 + \mu}{8} \left[ 3 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} \right].$$

Nach Vereinfachungen ist

$$\sigma_{t\text{ Ring}} = \varrho \omega^2 r^2.$$

Das ist eine Bestätigung der Gleichung 12-5.

Die Radialspannung muss für den dünnen Ring null ergeben

$$\sigma_{r\text{ Ring}} = \varrho \omega^2 r^2 \frac{3 + \mu}{8} [1 + 1 - 1 - 1] = 0.$$

Weiterhin sollen aus den Gleichungen 12-6/7 die Beziehungen für eine *ungebohrte Scheibe* abgeleitet werden (Abb. 12-10). In diesem Fall muss  $r_i = 0$  gesetzt werden. Für eine Vollscheibe erhält man damit

$$\sigma_{t\text{ voll}} = \varrho \omega^2 r_a^2 \frac{3 + \mu}{8} \left[ 1 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} \left( \frac{r}{r_a} \right)^2 \right]. \quad (12-10)$$

$$\sigma_{r\text{ voll}} = \varrho \omega^2 r_a^2 \frac{3 + \mu}{8} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_a} \right)^2 \right]. \quad (12-11)$$

Die *maximale Spannung* ist im Mittelpunkt der Scheibe ( $r = 0$ ). Hier sind  $\sigma_{t\text{ voll}}$  und  $\sigma_{r\text{ voll}}$  gleich und haben die Größe

$$\sigma_{\max\text{ voll}} = \varrho \omega^2 r_a^2 \frac{3 + \mu}{8}. \quad (12-12)$$

Es ergibt sich die überraschende Tatsache, dass die *maximale Spannung einer Vollscheibe halb so groß ist wie die einer gebohrten Scheibe mit kleiner Innenbohrung* (Gl. 12-9). Aus diesem Grunde werden z.B. Turbinenräder für höchste Umfangsgeschwindigkeiten ungebohrt ausgeführt.

### **Beispiel**

Für rotierende Scheiben gleicher Dicke mit den unten gegebenen Daten sind die Spannungen an den gefährdeten Querschnitten zu berechnen. Weiterhin sind Vergleichsspannungen nach der Hauptspannungs-, Schubspannungs- und Gestaltänderungshypothese zu bestimmen.

Scheibe A (ohne Innenbohrung)

$$r_a = 350 \text{ mm} \quad n = 100 \text{ s}^{-1} \quad \mu = 0,3 \text{ (Stahl)}.$$

Scheibe B (mit Innenbohrung)

$$r_a = 350 \text{ mm} \quad r_i = 100 \text{ mm} \quad n = 100 \text{ s}^{-1} \quad \mu = 0,3.$$

### Lösung

Scheibe A

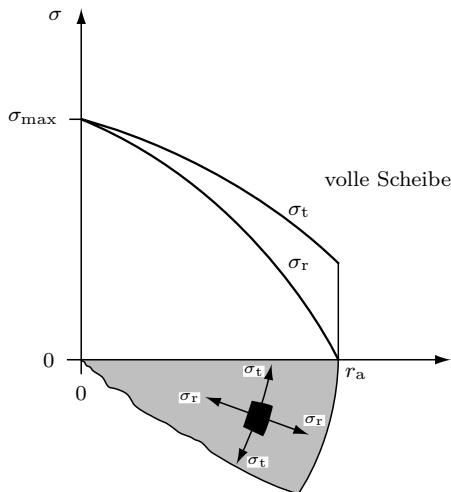
Ohne Belastung am Außenrand ergibt sich eine Spannungsverteilung nach Abb. 12-10. Der höchsten Beanspruchung unterliegt das Zentrum der Scheibe. Nach Gleichung 12-12 ist

$$\sigma_{t \text{ voll}} = \sigma_{r \text{ voll}} = \sigma_{\max \text{ voll}} = \varrho \cdot \omega^2 \cdot r_a^2 \cdot \frac{3 + \mu}{8}$$

mit  $\omega = 2\pi \cdot n = 628,3 \text{ s}^{-1}$

$$\sigma_{\max \text{ voll}} = 7,85 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 628,3^2 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot 0,35^2 \text{ m}^2 \cdot \frac{3,3}{8} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{10^6 \text{ mm}^2}$$

$$\underline{\sigma_{\max \text{ voll}} = 156,6 \text{ N/mm}^2}$$

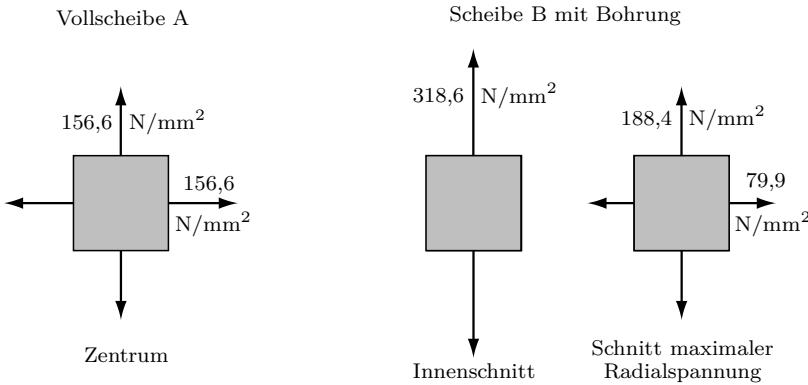


**Abb. 12-10:** Spannungsverteilung in rotierender Vollscheibe gleicher Dicke

Das Teil im Zentrum der Scheibe unterliegt einer Spannung nach Abb. 12-11A. Die Berechnung der Vergleichsspannungen erfolgt nach den in der Tabelle 16 zusammengestellten Gleichungen.

Hauptspannungshypothese

$$\sigma_v = \sigma_{\max} = 156,6 \text{ N/mm}^2.$$



**Abb. 12-11:** Spannungen in einer rotierenden Scheibe (Beispiel)

Schubspannungshypothese.

Für den ebenen Fall erhält man mit  $\sigma_x = \sigma_y$  und  $\tau = 0$

$$\sigma_v = \sigma_y - \sigma_x = 0$$

Das ist ein unsinniges Ergebnis. Hier muss man in Betracht ziehen, dass senkrecht zur Scheibe die Spannung null ist. Mit dieser Bedingung liefert die entsprechende Beziehung für den räumlichen Spannungszustand das Ergebnis, das hier für die Hauptspannungshypothese berechnet wurde.

Gestaltänderungshypothese ( $\sigma_y = \sigma_x; \tau = 0$ ; Hauptspannungssystem)

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 - \sigma_y \cdot \sigma_x} = \sigma_y = \sigma_x = \sigma_{\max}.$$

Dieser Wert entspricht auch dem der Hauptspannungshypothese.

Scheibe B

Die grundsätzliche Spannungsverteilung zeigt Abb. 12-9. Danach können als gefährdete Schnitte der Innenschnitt mit  $\sigma_t \max$  und der Schnitt mit  $\sigma_r \max$  gelten.

Innenschnitt

$$\sigma_r = 0 \quad \sigma_t = \sigma_t \max.$$

Nach Gleichung 12-8 ist

$$\begin{aligned} \sigma_{t \max} &= \varrho \cdot \omega^2 r_a^2 \cdot \frac{3 + \mu}{4} \left[ 1 + \left( \frac{r_i}{r_a} \right)^2 \cdot \frac{1 - \mu}{3 + \mu} \right]. \\ &= 2 \cdot 156,6 \text{ N/mm}^2 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{100}{350} \right)^2 \cdot \frac{0,7}{3,3} \right] \\ \underline{\sigma_{t \max}} &= 318,6 \text{ N/mm}^2. \end{aligned}$$

Die wesentlich höhere Belastung einer gelochten Scheibe ist besonders beachtenswert. Da es sich hier um einen einachsigen Spannungszustand nach Abb. 12-11 handelt, entfällt die Anwendung der Vergleichsspannungshypothesen.

Schnitt  $\sigma_{r \max}$

Nach der Gleichung 12-7 ergibt sich die maximale Radialspannung im Abstand  $r = 187$  mm

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \varrho \cdot \omega^2 r_a \cdot \frac{3 + \mu}{8} \left[ 1 + \left( \frac{r_i}{r_a} \right)^2 - \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 - \left( \frac{r}{r_a} \right)^2 \right] \\ \sigma_{r187} &= 156,6 \text{ N/mm}^2 \left[ 1 + \left( \frac{100}{350} \right)^2 - \left( \frac{100}{187} \right)^2 - \left( \frac{187}{350} \right)^2 \right] \\ \sigma_{r187} &= 79,9 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}$$

Nach Gleichung 12-6 ist

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \varrho \cdot \omega^2 r_a \cdot \frac{3 + \mu}{8} \left[ 1 + \left( \frac{r_i}{r_a} \right)^2 + \left( \frac{r_i}{r} \right)^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} \left( \frac{r}{r_a} \right)^2 \right] \\ \sigma_{t187} &= 156,6 \text{ N/mm}^2 \left[ 1 + \left( \frac{100}{350} \right)^2 + \left( \frac{100}{187} \right)^2 - \frac{1,9}{3,3} \left( \frac{187}{350} \right)^2 \right] \\ \sigma_{187} &= 188,4 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}$$

Das belastete Element zeigt die Abb. 12-11B. Auch hier handelt es sich um ein Hauptspannungssystem. Die Vergleichsspannungen betragen

Hauptspannungshypothese

$$\sigma_v = 188,4 \text{ N/mm}^2.$$

Schubspannungshypothese

$$\sigma_v = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 108,5 \text{ N/mm}^2.$$

Dieses Ergebnis ist ohne Aussagekraft (s. Scheibe A).

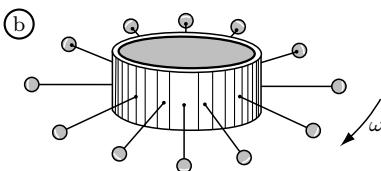
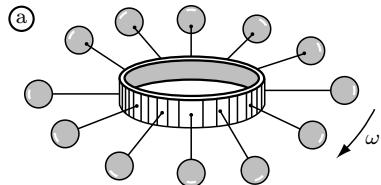
Gestaltänderungshypothese

$$\begin{aligned}\sigma_v &= \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 - \sigma_y \cdot \sigma_x} \\ \sigma_v &= (\sqrt{188,4^2 + 79,9^2 - 188,4 \cdot 79,9}) \text{ N/mm}^2 = 163,8 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}$$

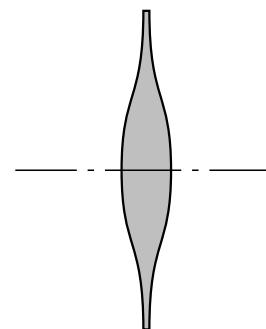
Die maximale Gefährdung der gelochten Scheibe liegt im Innenschnitt.

### 12.3.4 Scheibe gleicher Festigkeit

Bei der Scheibe gleicher Dicke ist infolge der ungleichmäßigen Spannungsverteilung der Werkstoff schlecht ausgenutzt. Die äußeren Teile verursachen verhältnismäßig hohe Fliehkräfte, die die kleineren inneren Ringquerschnitte hoch belasten. Als Gedankenmodell kann man sich einen innen herausgeschittenen Ring vorstellen, der die Fliehkräfte der außen angebrachten Kugelmassen aufnehmen muss.



**Abb. 12-12:** Modell zur Scheibe gleicher Festigkeit



**Abb. 12-13:** Scheibe gleicher Festigkeit

Die Scheibe gleicher Dicke entspricht dem Fall a. An einem verhältnismäßig dünnen Ring wirken große Fliehkräfte und führen zu hohen Spannungen. Eine spannungstechnisch bessere Lösung ist, den Ring zu verstärken und die Massen außen zu verkleinern (Fall b). Das Ergebnis ist eine Form, wie sie die Abb. 12-13 zeigt. Ist die Form aus der Bedingung  $\sigma = \text{konst.}$  berechnet, spricht man von *Scheibe gleicher Festigkeit*.

## 12.4 Zylinder und Kugel unter Innendruck

### 12.4.1 Der dünnwandige Behälter

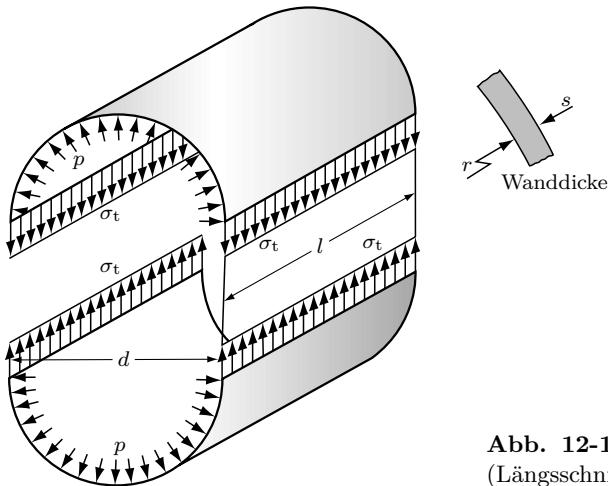
Unter dünnwandigen Behältern versteht man Behälter, deren Wanddicke wesentlich kleiner ist als ihre sonstigen Abmessungen:  $s \ll d$  in Abb. 12-14. Unter dieser Voraussetzung kann man etwa *konstante Spannungsverteilung* im Querschnitt annehmen. Die nachfolgenden Untersuchungen sind auf Beanspruchung durch Innendruck beschränkt, weil bei *Außendruck* das Rohr *einbeulen* kann.

Das entspricht dem Knicken eines Stabes. Es handelt sich demnach um ein Stabilitätsproblem.

Die Spannung in Tangentialrichtung  $\sigma_t$  erhält man aus einer Gleichgewichtsbedingung an der freigemachten Halbschale Abb. 12-14

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 \quad 2\sigma_t \cdot l \cdot s = p \cdot d \cdot l \\ \sigma_t &= \frac{p \cdot d}{2 \cdot s} \end{aligned}\quad (12-13)$$

Die Spannung ist um so größer, je größer Druck und Durchmesser sind und je kleiner die Wanddicke ist.



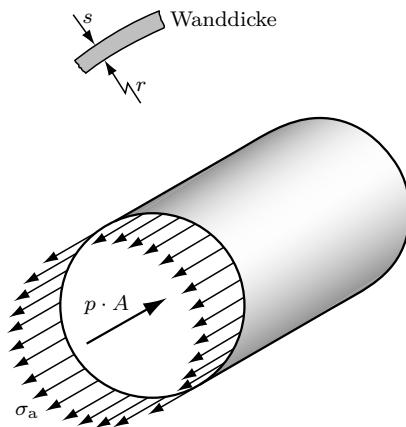
**Abb. 12-14:** Zylinder unter Innendruck  
(Längsschnitt)

Es ist einleuchtend, dass auch in senkrechten Schnitten zur Achse Spannungen vorhanden sein müssen. Sie sind axial gerichtet und werden aus der Gleichgewichtsbedingung am Teil Abb. 12-15 gewonnen.

$$\begin{aligned}\sigma_a \cdot \pi \cdot d \cdot s &= \pi \frac{d^2}{4} \cdot p \\ \sigma_a &= \frac{p \cdot d}{4 \cdot s} \end{aligned}\quad (12-14)$$

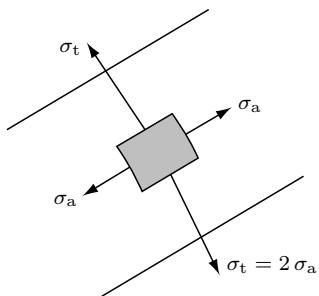
Die *Tangentialspannung ist doppelt so groß wie die Axialspannung* (s. Abb. 12-16). Aus diesem Grunde platzen z.B. Rohrleitungen bei Überlastung durch Überdruck der Länge nach auf. Die Achsen a und t sind Hauptachsen des ebenen Spannungszustandes ( $\tau = 0$ ).

Die Gleichgewichtsbedingungen für einen Kugelbehälter erhält man grundsätzlich aus einem System nach Abb. 12-15. Für einen Kugelbehälter gilt deshalb

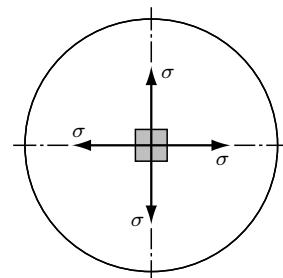


**Abb. 12-15:** Zylinder unter Innendruck  
(Querschnitt)

für alle Schnitte die Gleichung 12-14. Da  $\sigma_a < \sigma_t$  ist, stellt die Kugel für die Aufnahme von Innendruck die Optimalform dar. Ein freigemachtes Teilelement unterliegt in allen Richtungen den gleichen Normalspannungen (Abb. 12-17).



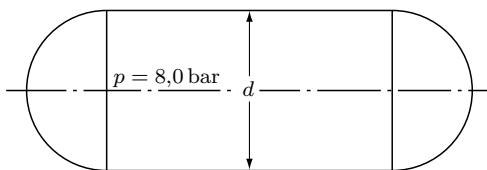
**Abb. 12-16:** Beanspruchung im Zylinder unter Innendruck



**Abb. 12-17:** Beanspruchung einer Kugel unter Innendruck

### Beispiel (Abb. 12-18)

Der abgebildete Behälter hat eine Wanddicke von  $s = 7,0$  mm und einen Durchmesser von  $d = 1,80$  m. Für einen Überdruck von 8,0 bar sind für den zylindrischen Teil die Vergleichsspannungen nach der Normalspannungs-, Schubspannungs- und Gestaltänderungshypothese zu berechnen.



**Abb. 12-18:** Druckbehälter

**Lösung**

Die Spannungen betragen nach Gleichung 12-13/14 (1 bar =  $10^5$  N/m $^2$ )

$$\sigma_t = \sigma_y = \frac{p \cdot d}{2s} = \frac{8 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 1,8 \text{ m}}{2 \cdot 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{10^6 \text{ mm}^2}$$

$$\sigma_y = 102,8 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_a = \sigma_x = 51,4 \text{ N/mm}^2$$

In die Gleichungen für die Vergleichsspannungen wird  $\tau = 0$  eingeführt (Tabelle 16)

Normalspannungshypothese

$$\sigma_v = \sigma_{\max} = \sigma_y = 102,8 \text{ N/mm}^2$$

Schubspannungshypothese

$$\sigma_v = \sigma_y - \sigma_x = 51,4 \text{ N/mm}^2$$

Gestaltänderungshypothese

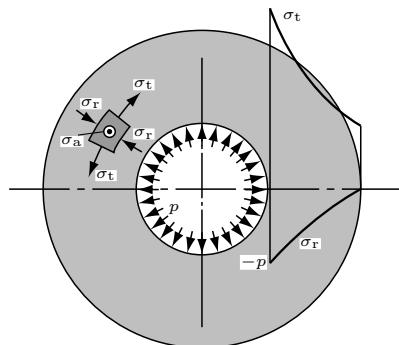
$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y} = \sqrt{102,8^2 + 51,4^2 - 51,4 \cdot 102,8} \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_v = 89,0 \text{ N/mm}^2$$

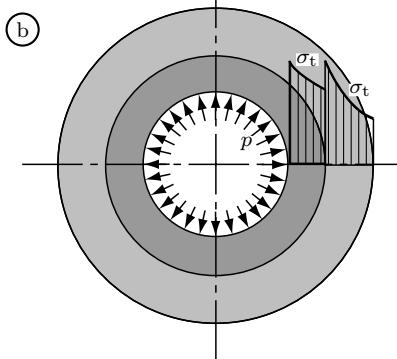
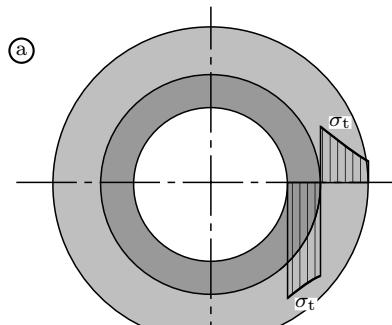
Die Schubspannungshypothese liefert für den ebenen Fall einen unrealistischen Wert. Für den dreidimensionalen Fall ( $\sigma_z = -p$  auf die Wandfläche) ergäbe sie etwa 103 N/mm $^2$ , also etwa den ersten Wert.

### 12.4.2 Der dickwandige Zylinder

In dem Schnitt eines dickwandigen Zylinders sind die Spannungen nicht mehr konstant. Auch hier muss man wie bei einer rotierenden Scheibe zusätzlich die Radialspannung berücksichtigen, die in der Innenwand gerade dem Innendruck entsprechen muss. Wie aus der Spannungsverteilung Abb. 12-19 ersichtlich, ist die gefährdete Stelle innen im Rohr. Die Außenschichten des Rohres leisten einen verhältnismäßig geringen Beitrag für die Festigkeit. Für einen Innendruck, der gleich  $\tau_{zul}$  des betreffenden Werkstoffes ist, erhält man aus den Gleichungen nach der Hypothese der größten Schubspannung eine unendlich große Wanddicke. Danach kann man selbst bei kleinstem Innendurchmesser und größten Wanddicken keinen Behälter für einen höheren Überdruck als etwa 1300 bar bauen. Die Technik erfordert die Beherrschung höherer Drücke. Das ist möglich, wenn



**Abb. 12-19:** Dickwandiges Rohr unter Innendruck



**Abb. 12-20:** Aufgeschrumpfter Außenmantel

man z.B. auf den dünnwandigen Zylinder einen anderen Zylinder aufschrumpft. Ist der Zylinder drucklos (Abb. 12-20a), dann treten im inneren Rohr Druckspannungen auf. Erst bei einem bestimmten Innendruck wird das Rohr innen spannungsfrei. Über diesen Innendruck hinaus kann der Druck weiter noch um etwa den Betrag  $\tau_{zul}$  gesteigert werden. Die grundsätzliche Spannungsverteilung zeigt die Abb. 12-20. Für höchste Drücke werden mehrere Zylinder übereinander geschrumpft.

# Anhang

## Differentiation und Integration mit Hilfe des FÖPPL-Symbols

Aus der Funktion für die Streckenlast erhält man nacheinander durch Integration

1. die Querkraftfunktion,
2. das Biegemomentdiagramm,
3. die Ableitung der elastischen Linie (Steigungswinkel) und
4. die elastische Linie.

Das ist die Aussage der Gleichung 4-15. Die Integrationen werden für die meisten praktischen Anwendungsfälle ganz wesentlich durch die normalerweise zahlreich vorhandenen Unstetigkeiten erschwert. FÖPPL hat einen Rechenformalismus vorgeschlagen, der das abschnittsweise Schreiben der Gleichungen vermeidet und die Übergangsbedingungen erfüllt, ohne dass neue Integrationskonstanten bestimmt werden müssen. Das führt zu einer wesentlichen Vereinfachung der Rechnung.

Eine Funktion nach Abb. A-1 wird nach dieser Methode folgendermaßen *in einer Gleichung* erfasst. Dabei wird die Steigung der einzelnen Geradenteile mit  $m$  bezeichnet. Die spitze Klammer ist das FÖPPL-Symbol, der Exponent 0 stellt

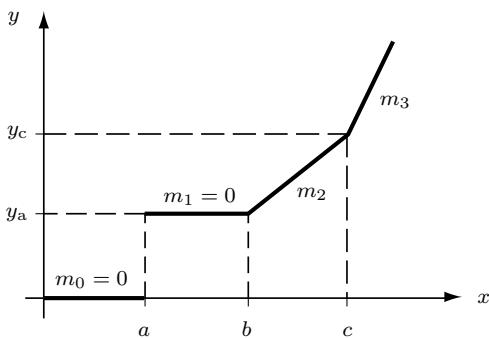


Abb. A-1: Unstetige Funktion

einen Sprung, der Exponent 1 einen Knick mit nachfolgendem linearen Verlauf dar.

$$y = \langle x - a \rangle^0 \cdot (y_a - 0) + \langle x - b \rangle^1 \cdot (m_2 - m_1) + \langle x - c \rangle^1 \cdot (m_3 - m_2)$$

$$y = \underbrace{\langle x - a \rangle^0 \cdot y_a}_{\text{Sprung an der Stelle a}} + \underbrace{\langle x - b \rangle \cdot m_2}_{\text{Knickung an der Stelle b}} + \underbrace{\langle x - c \rangle (m_3 - m_2)}_{\text{Knickung an der Stelle c}}$$

Der Gültigkeitsbereich für die verschiedenen Terme wird durch folgende Rechenregel erfüllt

$$\langle x - a \rangle^n \begin{cases} = 0 & \text{für } x \leq a \\ = (x - a)^n & \text{für } x > a \end{cases}$$

Für  $n = 0$  folgt daraus

$$\langle x - a \rangle^0 \begin{cases} = 0 & \text{für } x \leq a \\ = 1 & \text{für } x > a. \end{cases}$$

Zusammenfassend kann man festhalten:

1. Für negativen Klammerinhalt ist die  $\langle \text{FÖPPL} \rangle$ -Klammer null,
2. für positiven Klammerinhalt geht die  $\langle \text{FÖPPL} \rangle$ -Klammer in eine algebraische Klammer ( ) über.

Wird z.B. in obige Gleichung  $x = c$  eingesetzt, ergibt sich

$$y_c = 1 \cdot y_a + (c - b) \cdot m_2 + 0,$$

was offensichtlich richtig ist.

Eine so aufgestellte Gleichung kann man „durchgehend“ differenzieren und integrieren, wenn man die FÖPPL-Klammer wie eine Größe (Buchstabe) geschlossen behandelt:

$$\frac{d}{dx} \langle x - a \rangle^n = n \langle x - a \rangle^{n-1}$$

$$\int \langle x - a \rangle^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \langle x - a \rangle^{n+1} + C.$$

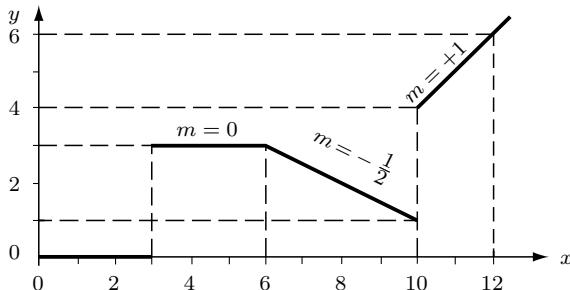
Demnach gilt für den vorgegebenen Graph

$$y' = 0 + 1 \cdot \langle x - b \rangle^0 \cdot m_2 + 1 \cdot \langle x - c \rangle^0 (m_3 - m_2)$$

$$\int y \cdot dx = \langle x - a \rangle y_a + \langle x - b \rangle^2 \frac{m_2}{2} + \langle x - c \rangle^2 \frac{m_3 - m_2}{2} + C.$$

**Beispiel 1**

Für die Funktion nach Abb. A-2 ist die Gleichung aufzustellen, zu integrieren und zu differenzieren. Die Gleichungen sind in Diagrammen darzustellen.



**Abb. A-2:** Unstetige Funktion für Beispiel

**Lösung**

$$y = \underbrace{\langle x - 3 \rangle^0}_{\substack{\text{Sprung} \\ \text{bei } x = 3}} \cdot 3 + \underbrace{\langle x - 6 \rangle}_{\substack{\text{Knick} \\ \text{bei } x = 6}} \left( -\frac{1}{2} - 0 \right) + \underbrace{\langle x - 10 \rangle^0}_{\substack{\text{Sprung} \\ \text{bei } x = 10}} (4 - 1) + \underbrace{\langle x - 10 \rangle}_{\substack{\text{Knick} \\ \text{bei } x = 10}} \left[ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right) \right]$$

$$y = \langle x - 3 \rangle^0 \cdot 3 - \langle x - 6 \rangle \cdot \frac{1}{2} + \langle x - 10 \rangle^0 \cdot 3 + \langle x - 10 \rangle \cdot \frac{3}{2}$$

$$y' = 0 - \langle x - 6 \rangle^0 \cdot \frac{1}{2} + 0 + \langle x - 10 \rangle^0 \cdot \frac{3}{2}$$

$$\int y \cdot dx = \langle x - 3 \rangle \cdot 3 - \langle x - 6 \rangle^2 \cdot \frac{1}{4} + \langle x - 10 \rangle \cdot 3 + \langle x - 10 \rangle^2 \cdot \frac{3}{4} + C$$

Es soll  $C = 0$  gelten.

Die Auswertung erfolgt tabellarisch, die Diagramme zeigt Abb. A-3.

$x$	0	3	6	8	10	11	12
$\langle x - 3 \rangle$	0	0	3	5	7	8	9
$\langle x - 6 \rangle$	0	0	0	2	4	5	6
$\langle x - 10 \rangle$	0	0	0	0	0	1	2
$y'$	0	0	$0 \mid -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \mid +1$	+1	+1
$\int y \cdot dx$	0	0	9	14	17	21,5	27

Zu beachten ist, dass der Term  $\langle x - a \rangle^0$  einen „Sprung“ an der Stelle  $a$  darstellt. Aus diesem Grunde werden dort zwei Werte errechnet, einer für  $x = a$  und einer

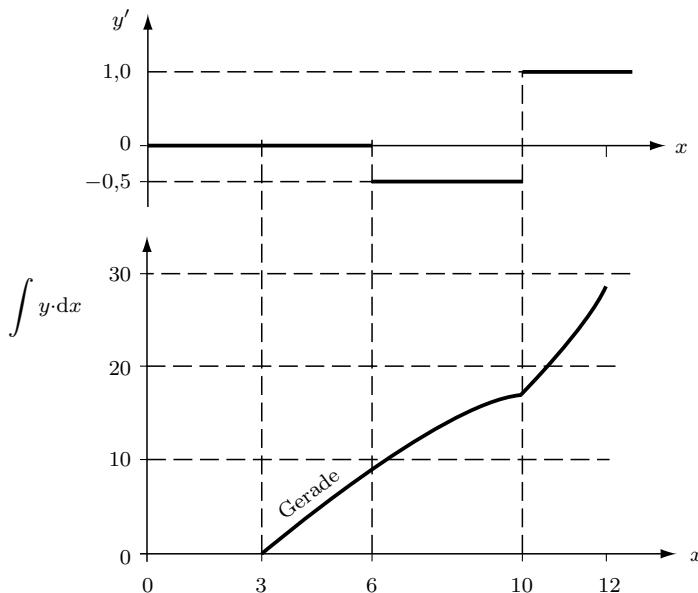


Abb. A-3: Ableitungs- und Integralkurve für die Funktion nach Abb. A-2

für einen beliebigen kleinen Zuwachs zu  $a$ . Das gilt hier z.B. für die  $y'$ -Funktion an der Stelle  $x = 6$  und  $x = 10$ . Einmal ist die FÖPPL-Klammer gerade noch 0, einmal gleich 1.

Die Aufstellung der Gleichungen ist verblüffend einfach, genau wie die nachfolgende Differentiation und Integration. Der rechnerische Auswertungsaufwand ist kleiner als es die Gleichungen vermuten lassen, da die Terme bereichsweise null werden. Das FÖPPL-Symbol eignet sich auch sehr gut für eine Programmierung, wo es einer Verzweigungsstelle entspricht.

# Tabellenanhang

**Tabelle 1:** Werkstoffeigenschaften

	Deformation	Verhalten nach Entlastung	Beispiele
<i>elastisch</i>	Eine Vergrößerung der Dehnung erfordert eine Erhöhung der Spannung	Körper nimmt ursprüngliche Form an	Stahl bis $R_{p0,01}$ -Grenze, viele Metalle im elastischen Bereich
<i>plastisch</i>	bei etwa gleichbleibender Spannung Zunahme der Dehnung	Körper bleibt deformiert	Stahl im Zustand des Fließens, Bitumen, Asphalt, Blei, Knetmasse

	Arbeitsvermögen	Bruchdehnung	Deformation	Beispiele
<i>zäh</i>	groß	groß	anfangs elastisch, bei höheren Spannungen plastisch (Fließen); Einschnürung bei Zugversuch	weicher Stahl
<i>spröde</i>	klein	klein	keine plastische Deformation (Fließen), keine Einschnürung bei Zugversuch	gehärteter Stahl, Gusseisen, Stein, Beton, Glas, Keramik, weicher Stahl in sehr kaltem Zustand bei Schlagbeanspruchung

**Tabelle 2:** Elastizitätsmodul verschiedener Werkstoffe

	E-Modul N/mm <sup>2</sup>	G-Modul N/mm <sup>2</sup>
Stahl .....	$2,1 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$
EN-GJL-100 .....	$0,75 \cdot 10^5$	$3,0 \cdot 10^4$
EN-GJL-200 .....	$1,2 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^4$
Kupfer .....	$1,3 \cdot 10^5$	—
Aluminium .....	$0,72 \cdot 10^5$	$2,6 \cdot 10^4$
Beton (Druck) .....	$0,3 \cdot 10^5$	—
Bronze .....	$1,16 \cdot 10^5$	—
Holz *) .....	$(0,11 - 0,13) \cdot 10^5$	—
Holz **) .....	$(3 - 10) \cdot 10^2$	—

\*) In Faserrichtung  
\*\*) Senkrecht zur Faserrichtung

**Tabelle 3:** Zulässige Spannungen nach BACH in N/mm<sup>2</sup>

- I ruhende Belastung  
 II schwellende Belastung  
 III wechselnde Belastung

		S 235	E 295	E 360
Festigkeitswerte (Mindestwerte)	$\begin{cases} R_e \\ R_m \\ \sigma_{BW} \\ \tau_{tW} \end{cases}$	... 235 ... 340 ... 470 ... 170 ... ... 120 ...	... 295 ... 470 ... 610 ... 240 ... ... 150 ...	... 360 ... 670 ... 830 ... 330 ... ... 190 ...
Zug $\sigma_z$ zul	..... I ..... II ..... III	100 ... 150 65 ... 95 45 ... 70	140 ... 210 90 ... 135 65 ... 95	210 ... 310 135 ... 200 90 ... 140
Druck $\sigma_d$ zul	..... I ..... II ..... III	100 ... 150 65 ... 95 45 ... 70	140 ... 210 90 ... 135 65 ... 95	210 ... 310 135 ... 200 90 ... 140
Biegung $\sigma_b$ zul	..... I ..... II ..... III	110 ... 165 70 ... 105 50 ... 75	150 ... 220 100 ... 150 70 ... 105	230 ... 345 150 ... 220 105 ... 125
Verdrehung $\tau_t$ zul	..... I ..... II ..... III	65 ... 95 40 ... 60 30 ... 45	85 ... 125 55 ... 85 40 ... 60	125 ... 190 80 ... 125 60 ... 90

**Hinweis:** Es handelt sich hier um Anhaltswerte. Diese sollen Benutzern ohne Erfahrung ermöglichen, einfache Dimensionierungsaufgaben zu lösen. Grundsätzlich wird empfohlen, aus Werkstofftabellen Grenzspannungen zu entnehmen und unter Beachtung der vorliegenden Umstände eine Sicherheitszahl festzulegen.

**Tabelle 4:** Bezeichnung der Festigkeiten bei unterschiedlicher Beanspruchung

	Zug	Druck	Biegung	Torsion
Bruchfestigkeit bei ruhender Belastung	Zugfestigkeit $R_m$	Druckfestigkeit $\sigma_{dB}$	Biegefestigkeit $\sigma_{bB}$	Verdrehfestigkeit $\tau_{tB}$
Fließgrenze bei ruhender Belastung	Streckgrenze $R_e$ $R_{p0,2}$	Quetschgrenze $\sigma_{dF}$ $\sigma_{d0,01}$	Biegegrenze $\sigma_{bF}$	Verdrehgrenze $\tau_{tF}$
Dauerschwingfestigkeit	$\sigma_{zD}$	$\sigma_{dD}$	$\sigma_{bD}$	$\tau_{tD}$
Schwellfestigkeit	$\sigma_z$ Sch	$\sigma_d$ Sch	$\sigma_b$ Sch	$\tau_t$ Sch
Wechselfestigkeit		$\sigma_{zdW}$	$\sigma_{BW}$	$\tau_{tW}$

**Tabellen 5:** Sicherheitszahlen im allgemeinen Maschinenbau nach [23]**Tabelle 5A:** Sicherheitszahlen für Walzstahl und Aluminium-Knetlegierungen

duktile Werkstoffe $A_5 \geq 12,5\%$ St AW-Al	$S_F$		$S_B$	
	Schadensfolgen		Schadensfolgen	
	hoch	gering	hoch	gering
Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Spannung oder Spannungskombination	hoch	1,5	1,3	2,0
	gering	1,35	1,2	1,8
				1,75
				1,6

**Tabelle 5B:** Sicherheitszahlen für Stahlguss und Eisengusswerkstoff mit Kugelgraphit

duktile Werkstoffe $A_5 \geq 12,5\%$ GS GJS		nicht zerstörungsfrei geprüft				zerstörungsfrei geprüft			
		$S_F$		$S_B$		$S_F$		$S_F$	
		Schadensfolgen							
		hoch	gering	hoch	gering	hoch	gering	hoch	gering
Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Spannung oder Spannungskombination	hoch	2,1	1,8	2,8	2,45	1,9	1,65	2,5	2,2
	gering	1,9	1,65	2,25	2,2	1,7	1,5	2,25	2,0

**Tabelle 5C:** Sicherheitszahlen für den Ermüdungsfestigkeitsnachweis für Walzstahl und Aluminium-Knetlegierungen

duktile Werkstoffe $A_5 \geq 12,5\%$ St AW-Al		$S_D$	
		Schadensfolgen	
		hoch	gering
Inspektionen	nichtregelmäßig	1,5	1,3
	regelmäßig	1,35	1,2

**Tabelle 5D:** Sicherheitszahlen für den Ermüdungsfestigkeitsnachweis für Eisengussstoffe und Kugelgraphit

duktile Werkstoffe $A_5 \geq 12,5\%$ GS GJS		nicht zerstörungsfrei geprüft		zerstörungsfrei geprüft	
		$S_D$		$S_D$	
		Schadensfolgen		Schadensfolgen	
Inspektionen	nichtregelmäßig	hoch	gering	hoch	gering
	regelmäßig	2,1	1,8	1,9	1,65

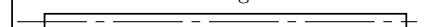
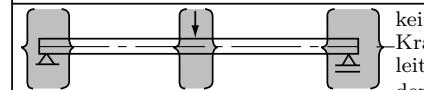
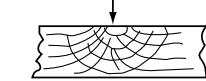
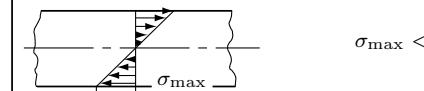
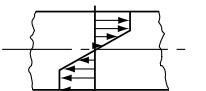
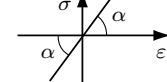
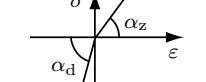
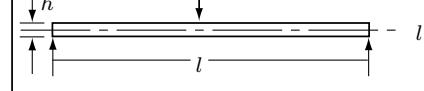
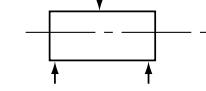
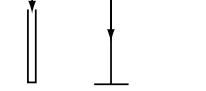
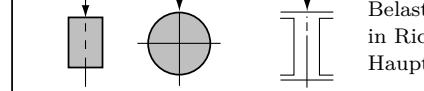
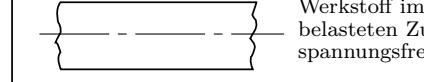
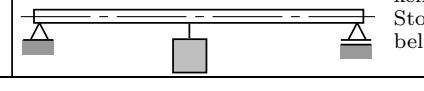
**Tabelle 6:** Verhältnis von Streckgrenze und Zugfestigkeit

Werkstoff	C-Stahl	Leg. Stahl	Stahlguss	Leichtmetalle
$R_e/R_m$	0,55 – 0,65	0,7 – 0,8	$\approx 0,5$	0,45 – 0,65

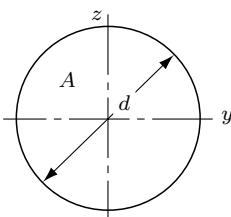
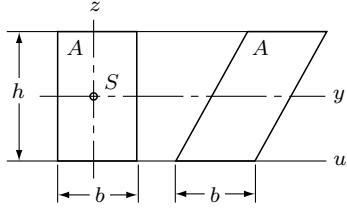
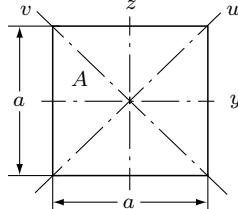
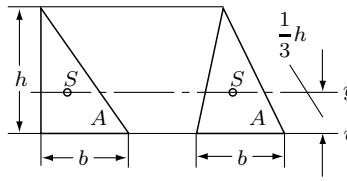
**Tabelle 7:** Zulässige Abscherspannungen

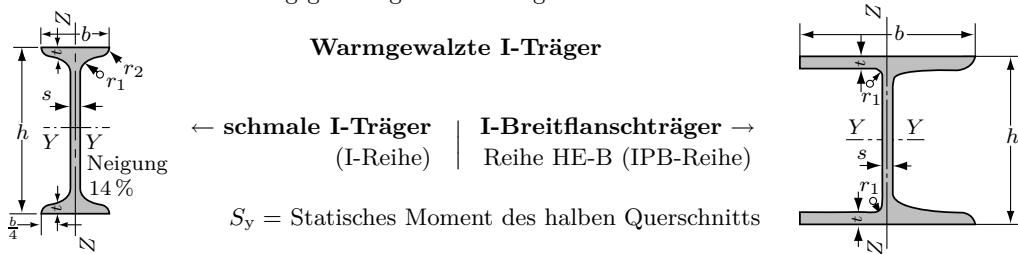
	Stahl u. seine Legierungen	Grauguss	Bronze, Messing	Leichtmetalle
$\tau_{a \text{ zul}}$	$\sim 0,8\sigma_z \text{ zul}$	$\sim \sigma_z \text{ zul}$	$\sim 0,8\sigma_z \text{ zul}$	$\sim 0,6\sigma_z \text{ zul}$
	$\sigma_z \text{ zul}$ siehe z.B. Tabelle 3			

**Tabelle 8:** Voraussetzungen für die Gültigkeit der Biegegleichung

	Die Grundgleichung der Biegung $\sigma = \frac{M_b}{W}$ gilt unter folgenden Voraussetzungen		$\sigma = \frac{M_b}{W}$ gilt nicht
1	lineare Spannungsverteilung	Balken gerade  Balken leicht gekrümmt 	
2			
3			
4		 Werkstoff deformiert sich nach dem HOOKESchen Gesetz	
5			
6		 $E_{\text{Zug}} = E_{\text{Druck}}$	
7	Beanspruchung nur auf Biegung		
8			
9	$\sum M = 0$ für alle Achsen		Belastung in Richtung Hauptachse
10	Belastung durch äußere Kräfte		Werkstoff im unbelasteten Zustand spannungsfrei
11	keine Massenkräfte		keine Stoßbelastung

**Tabelle 9:** Flächen- und Widerstandsmomente geometrischer Grundfiguren

Flächenform	Flächenmomente	Widerstandsmomente
	$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4$ $= \frac{Ad^2}{16}$	$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$ $= \frac{Ad}{8}$
	$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{Ah^2}{12}$ $I_u = \frac{bh^3}{3} = \frac{Ah^2}{3}$ <p>Rechteck:  <math>I_z = \frac{b^3h}{12} = \frac{Ab^2}{12}</math></p>	<p>Rechteck:  <math>W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6}</math></p> $W_z = \frac{b^2h}{6} = \frac{Ab}{6}$
	$I_y = I_z = I_u = I_v = \frac{a^4}{12}$ $= \frac{Aa^2}{12}$	$W_y = W_z = \frac{a^3}{6}$ $= \frac{Aa}{6}$
	$I_y = \frac{bh^3}{36} = \frac{Ah^2}{18}$ $I_u = \frac{bh^3}{12} = \frac{Ah^2}{6}$	$W_y = \frac{bh^2}{24} = \frac{Ah}{12}$

**Tabelle 10A:** Berechnungsgrundlagen für warmgewalzte Stähle

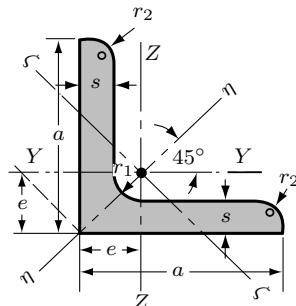
Kurz-zeichen	Abmessungen in mm						Quer-schnitt A cm <sup>2</sup>	Masse m kg/m	Für die Biegeachse						S <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	
	I	h	b	s	t	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>		Y-Y			Z-Z				
										I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	I <sub>z</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> cm	S <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>

Schmale I-Träger (I-Reihe)

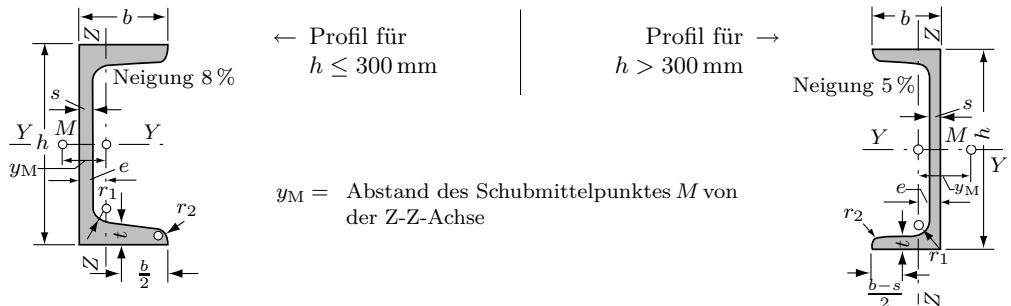
80	80	42	3,9	5,9	3,9	2,3	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4
100	100	50	4,5	6,8	4,5	2,7	10,6	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9
120	120	58	5,1	7,7	5,1	3,1	14,2	11,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8
140	140	66	5,7	8,6	5,7	3,4	18,3	14,4	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40	47,7
160	160	74	6,3	9,5	6,3	3,8	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0
180	180	82	6,9	10,4	6,9	4,1	27,9	21,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4
200	200	90	7,5	11,3	7,5	4,5	33,5	26,3	2140	214	8,00	117	26,0	1,87	125
220	220	98	8,1	12,2	8,1	4,9	39,6	31,1	3060	278	8,80	162	33,1	2,02	162
240	240	106	8,7	13,1	8,7	5,2	46,1	36,2	4250	354	9,59	221	41,7	2,20	206
260	260	113	9,4	14,1	9,4	5,6	53,4	41,9	5740	442	10,4	288	51,0	2,32	257
280	280	119	10,1	15,2	10,1	6,1	61,1	48,0	7590	542	11,1	364	61,2	2,45	316
300	300	125	10,8	16,2	10,8	6,5	69,1	54,2	9800	653	11,9	451	72,2	2,56	381
320	320	131	11,5	17,3	11,5	6,9	77,8	61,0	12510	782	12,7	555	84,7	2,67	457
340	340	137	12,2	18,3	12,2	7,3	86,8	68,1	15700	923	13,5	674	98,4	2,80	540
360	360	143	13,0	19,5	13,0	7,8	97,1	76,2	19610	1090	14,2	818	114	2,90	638
380	380	149	13,7	20,5	13,7	8,2	107	84,0	24010	1260	15,0	975	131	3,02	741
400	400	155	14,4	21,6	14,4	8,6	118	92,6	29210	1460	15,7	1160	149	3,13	857
425	425	163	15,3	23,0	15,3	9,2	132	104	36970	1740	16,7	1440	176	3,30	1020
450	450	170	16,2	24,3	16,2	9,7	147	115	45860	2040	17,7	1730	203	3,43	1200
475	475	178	17,1	25,6	17,1	10,3	163	128	56480	2380	18,6	2090	235	3,60	1400
500	500	185	18,0	27,0	18,0	10,8	180	141	68740	2750	19,6	2480	268	3,72	1620
550	550	200	19,0	30,0	19,0	11,9	213	167	99180	3610	21,6	3490	349	4,02	2120
600	600	215	21,6	32,4	21,6	13,0	254	199	139000	4630	23,4	4670	434	4,30	2730

I-Breitflanschträger mit parallelen Flanschflächen (IPB-Reihe)

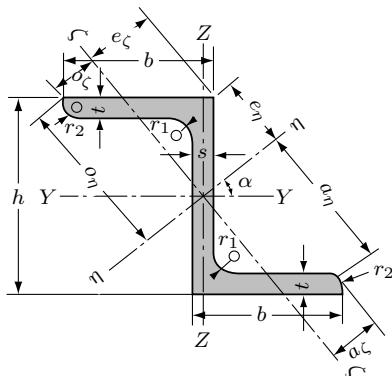
100	100	100	6	10	12		26,0	20,4	450	89,9	4,16	167	33,5	2,53	52,1
120	120	120	6,5	11	12		34,0	26,7	864	144	5,04	318	52,9	3,06	82,6
140	140	140	7	12	12		43,0	33,7	1510	216	5,93	550	78,5	3,58	123
160	160	160	8	13	15		54,3	42,6	2490	311	6,78	889	111	4,05	177
180	180	180	8,5	14	15		65,3	51,2	3830	426	7,66	1360	151	4,57	241
200	200	200	9	15	18		78,1	61,3	5700	570	8,54	2000	200	5,07	321
220	220	220	9,5	16	18		91,0	71,5	8090	736	9,43	2840	258	5,59	414
240	240	240	10	17	21		106	83,2	11260	938	10,3	3920	327	6,08	527
260	260	260	10	17,5	24		118	93,0	14920	1150	11,2	5130	395	6,58	641
280	280	280	10,5	18	24		131	103	19270	1380	12,1	6590	471	7,09	767
300	300	300	11	19	27		149	117	25170	1680	13,0	8560	571	7,58	934
320	320	300	11,5	20,5	27		161	127	30820	1930	13,8	9240	616	7,57	1070
340	340	300	12	21,5	27		171	134	36660	2160	14,6	9690	646	7,53	1200
360	360	300	12,5	22,5	27		181	142	43190	2400	15,5	10140	676	7,49	1340
400	400	300	13,5	24	27		198	155	57680	2880	17,1	10820	721	7,40	1620
450	450	300	14	26	27		218	171	79890	3550	19,1	11720	781	7,33	1990
500	500	300	14,5	28	27		239	187	107200	4290	21,2	12620	842	7,27	2410

**Tabelle 10B:** Berechnungsgrundlagen für warmgewalzte Stähle
**Warmgewalzter  
gleichschenkliger rundkantiger Winkelstahl**

Abmessungen in mm			Quer- schnitt	Masse		Für die Biegeachse							
						Y-Y = Z-Z			$\eta-\eta$		$\zeta-\zeta$		
a	s	r <sub>1</sub>	A cm <sup>2</sup>	m kg/m	e cm	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	I <sub><math>\eta</math></sub> cm <sup>4</sup>	i <sub><math>\eta</math></sub> cm	I <sub><math>\zeta</math></sub> cm <sup>4</sup>	W <sub><math>\zeta</math></sub> cm <sup>3</sup>	i <sub><math>\zeta</math></sub> cm
20	3	3,5	1,12	0,88	0,60	0,39	0,28	0,59	0,62	0,74	0,15	0,18	0,37
	4		1,45	1,14	0,64	0,48	0,35	0,58	0,77	0,73	0,19	0,21	0,36
	3	1,42	1,12	0,73	0,79	0,45	0,75	1,27	0,95	0,95	0,31	0,30	0,47
25	4	3,5	1,85	1,45	0,76	1,01	0,58	0,74	1,61	0,93	0,40	0,37	0,47
	5		2,26	1,77	0,80	1,18	0,69	0,72	1,87	0,91	0,50	0,44	0,47
	3	1,74	1,36	0,84	1,41	0,65	0,90	2,24	1,14	0,57	0,48	0,48	0,57
30	4	5	2,27	1,78	0,89	1,81	0,86	0,89	2,85	1,12	0,76	0,61	0,58
	5		2,78	2,18	0,92	2,16	1,04	0,88	3,41	1,11	0,91	0,70	0,57
	4	2,67	2,10	1,00	2,96	1,18	1,05	4,68	1,33	1,24	0,88	0,68	
35	5	5	3,28	2,57	1,04	3,56	1,45	1,04	5,63	1,31	1,49	1,10	0,67
	6		3,87	3,04	1,08	4,14	1,71	1,04	6,50	1,30	1,77	1,16	0,68
	4	3,08	2,42	1,12	4,48	1,56	1,21	7,09	1,52	1,86	1,18	0,78	
40	5	6	3,79	2,97	1,16	5,43	1,91	1,20	8,64	1,51	2,22	1,35	0,77
	6		4,48	3,52	1,20	6,33	2,26	1,19	9,98	1,49	2,67	1,57	0,77
	5	4,30	3,38	1,28	7,83	2,43	1,35	12,4	1,70	3,25	1,70	0,87	
45	7	5,86	4,60	1,36	10,4	3,31	1,33	16,4	1,67	4,39	2,29	0,87	
	5	4,80	3,77	1,40	11,0	3,05	1,51	17,4	1,90	4,59	2,32	0,98	
	6	5,69	4,47	1,45	12,8	3,61	1,50	20,4	1,89	5,24	2,57	0,96	
50	7	6,56	5,15	1,49	14,6	4,15	1,49	23,1	1,88	6,02	2,85	0,96	
	9	8,24	6,47	1,56	17,9	5,20	1,47	28,1	1,85	7,67	3,47	0,97	
	6	6,31	4,95	1,56	17,3	4,40	1,66	27,4	2,08	7,24	3,28	1,07	
55	8	8	8,23	6,46	1,64	22,1	5,72	1,64	34,8	2,06	9,35	4,03	1,07
	10		10,01	7,90	1,72	26,3	6,97	1,62	41,4	2,02	11,3	4,65	1,06
	6	6,91	5,42	1,69	22,8	5,29	1,82	36,1	2,29	9,43	3,95	1,17	
60	8	8	9,03	7,09	1,77	29,1	6,88	1,80	46,1	2,26	12,1	4,84	1,16
	10		11,1	8,69	1,85	34,9	8,41	1,78	55,1	2,23	14,6	5,57	1,15
	7	8,70	6,83	1,85	33,4	7,18	1,96	53,0	2,47	13,8	5,27	1,26	
65	9	9	11,0	8,62	1,93	41,3	9,04	1,94	65,4	2,44	17,2	6,30	1,25
	11		13,2	10,3	2,00	48,8	10,8	1,91	76,8	2,42	20,7	7,31	1,25
	7	9,40	7,38	1,97	42,4	8,43	2,12	67,1	2,67	17,6	6,31	1,37	
70	9	9	11,9	9,34	2,05	52,6	10,6	2,10	83,1	2,64	22,0	7,59	1,36
	11		14,3	11,2	2,13	61,8	12,7	2,08	97,6	2,61	26,0	8,64	1,35

**Tabelle 10C:** Berechnungsgrundlagen für warmgewalzte Stähle**Warmgewalzter rundkantiger [-Stahl]**

Kurz-zeichen	Abmessungen in mm						Quer-schnitt	Masse kg/m		Für die Biegeachse							
	[	h	b	s	t	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>			Y - Y			Z - Z				
										A cm <sup>2</sup>	m	e cm	y <sub>m</sub> cm	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	l <sub>z</sub> cm <sup>4</sup>
30×15	30	15	4	4,5	4,5	2	2,21	1,74	0,52	0,74	2,53	1,69	1,07	0,38	0,39	0,42	
	30	33	5	7	7	3,5	5,44	4,27	1,31	2,22	6,39	4,26	1,08	5,33	2,68	0,99	
40×20	40	20	5	5	5	2,5	3,51	2,75	0,65	0,98	7,26	3,63	1,44	1,06	0,78	0,55	
	40	40	35	5	7	7	3,5	6,21	4,87	1,33	2,32	14,1	7,05	1,50	6,68	3,08	1,04
50×25	50	25	6	6,5	6,5	3	5,50	4,32	0,82	1,26	18,0	7,18	1,81	2,94	1,75	0,73	
	50	50	38	5	5	7	3,5	7,12	5,59	1,37	2,47	26,4	10,6	1,92	9,12	3,75	1,13
60×30	60	30	6	6	6	3	6,46	5,07	0,91	1,50	31,6	10,5	2,21	4,51	2,16	0,84	
	65	65	42	5,5	7,5	7,5	4	9,03	7,09	1,42	2,60	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25
	80	80	45	6	8	8	4	11,0	8,64	1,45	2,67	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33
	100	100	50	6	8,5	8,5	4,5	13,5	10,6	1,55	2,93	206	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47
	120	120	55	7	9	9	4,5	17,0	13,4	1,60	3,03	364	60,7	4,62	43,3	11,1	1,59
	140	140	60	7	10	10	5	20,4	16,0	1,75	3,37	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75
	160	160	65	7,5	10,5	10,5	5,5	24,0	18,8	1,84	3,56	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89
	180	180	70	8	11	11	5,5	28,0	22,0	1,92	3,75	1350	150	6,95	114	22,4	2,02
	200	200	75	8,5	11,5	11,5	6	32,2	25,3	2,01	3,94	1910	191	7,70	148	27,0	2,14
	220	220	80	9	12,5	12,5	6,5	37,4	29,4	2,14	4,20	2690	245	8,48	197	33,6	2,30
	240	240	85	9,5	13	13	6,5	42,3	33,2	2,23	4,39	3600	300	9,22	248	39,6	2,42
	260	260	90	10	14	14	7	48,3	37,9	2,36	4,66	4820	371	9,99	317	47,7	2,56
	280	280	95	10	15	15	7,5	53,3	41,8	2,53	5,02	6280	448	10,9	399	57,2	2,74
	300	300	100	10	16	16	8	58,8	46,2	2,70	5,41	8030	535	11,7	495	67,8	2,90
	320	320	100	14	17,5	17,5	8,75	75,8	59,5	2,60	4,82	10870	679	12,1	597	80,6	2,81
	350	350	100	14	16	16	8	77,3	60,6	2,40	4,45	12840	734	12,9	570	75,0	2,72
	380	380	102	13,34	16	16	11,2	79,7	62,6	2,35	5,43	15730	826	14,1	613	78,4	2,78
	400	400	110	14	18	18	9	91,5	71,8	2,65	5,11	20350	1020	14,9	846	102	3,04

**Tabelle 10D:** Berechnungsgrundlagen für warmgewalzte Stähle**Warmgewalzter rundkantiger l-Stahl**

Kurz-zeichen	Abmessungen in mm						Quer-schnitt A cm <sup>2</sup>	Masse m kg/m	Lage der Achse $\eta - \eta$ tan α	Abstände in cm von den Achsen $\eta - \eta$ und $\zeta - \zeta$						
	l	h	b	s	t	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>			$o_\eta$	$o_\zeta$	$e_\eta$	$e_\zeta$	$a_\eta$	$a_\zeta$	
30	30	38	4	4,5	4,5	2,5	—	4,32	3,39	1,655	3,86	0,58	0,61	1,39	3,54	0,87
40	40	40	4,5	5	5	2,5	—	5,43	4,26	1,181	4,17	0,91	1,12	1,67	3,82	1,19
50	50	43	5	5,5	5,5	3	—	6,77	5,31	0,939	4,60	1,24	1,65	1,89	4,21	1,49
60	60	45	5	6	6	3	—	7,91	6,21	0,779	4,98	1,51	2,21	2,04	4,56	1,76
80	80	50	6	7	7	3,5	—	11,1	8,71	0,588	5,83	2,02	3,30	2,29	5,35	2,25
100	100	55	6,5	8	8	4	—	14,5	11,4	0,492	6,77	2,43	4,34	2,50	6,24	2,65
120	120	60	7	9	9	4,5	—	18,2	14,3	0,433	7,75	2,80	5,37	2,70	7,16	3,02
140	140	65	8	10	10	5	—	22,9	18,0	0,385	9,72	3,18	6,39	2,89	8,08	3,39
160	160	70	8,5	11	11	5,5	—	27,5	21,6	0,357	9,74	3,51	7,39	3,09	9,04	3,72
180	180	75	9,5	12	12	6	—	33,3	26,1	0,329	10,7	3,86	8,40	3,27	9,99	4,08
200	200	80	10	13	13	6,5	38,7	30,4	0,313	11,8	4,17	9,39	3,47	11,0	4,39	

Kurz-zeichen	Für die Biegeachse									biaxiales Flächenmoment				
	Y-Y			Z-Z			$\eta - \eta$							
l	$I_y$ cm <sup>4</sup>	$W_y$ cm <sup>3</sup>	$i_y$ cm	$I_z$ cm <sup>4</sup>	$W_z$ cm <sup>3</sup>	$i_z$ cm	$I_\eta$ cm <sup>4</sup>	$W_\eta$ cm <sup>3</sup>	$i_\eta$ cm	$I_\zeta$ cm <sup>4</sup>	$W_\zeta$ cm <sup>3</sup>	$i_\zeta$ cm	$I_{yz}$ cm <sup>4</sup>	
30	5,96	3,97	1,17	13,7	3,80	1,78	18,1	4,69	2,04	1,54	1,11	0,60		7,35
40	13,5	6,75	1,58	17,6	4,66	1,80	28,0	6,72	2,27	3,05	1,83	0,75		12,2
50	26,3	10,5	1,97	23,8	5,88	1,88	44,9	9,76	2,57	5,23	2,76	0,88		19,6
60	44,7	14,9	2,38	30,1	7,09	1,95	67,2	13,5	2,81	7,60	3,73	0,98		28,8
80	109	27,3	3,13	47,4	10,1	2,07	142	24,4	3,58	14,7	6,44	1,15		55,6
100	222	44,4	3,91	72,5	14,0	2,24	270	39,8	4,31	24,6	9,26	1,30		97,2
120	402	67,0	4,70	106	18,8	2,42	470	60,6	5,08	37,7	12,5	1,44		158
140	676	96,6	5,43	148	24,3	2,54	768	88,0	5,79	56,4	16,6	1,67		239
160	1060	132	6,20	204	31,0	2,72	1180	121	6,57	79,5	21,4	1,70		349
180	1600	178	6,92	270	38,4	2,84	1760	164	7,26	110	27,0	1,82		490
200	2300	230	7,71	357	47,6	3,04	2510	213	8,06	147	33,4	1,95		674

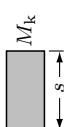
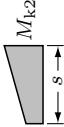
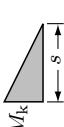
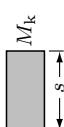
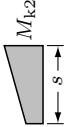
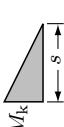
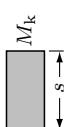
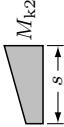
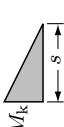
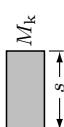
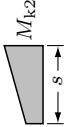
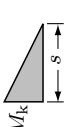
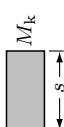
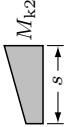
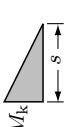
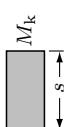
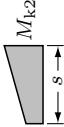
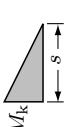
$I_{yz}$ -Werte sind für das eingezeichnete Koordinatensystem negativ. Werte und Vorzeichen dieser Tabelle entsprechen DIN 1027.

**Tabelle 11:** Gleichung der Biegelinien für Träger konstanter Biegesteifigkeit

#	Belastungsfall	Gleichung der Biegelinie*)	Durchbiegungen $w$ Winkeländerungen $\varphi^*)$
1		$w = \frac{Fl^3}{3EI} \left[ 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{l} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right]$	$w_F = w_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI}$ $\varphi_{\max} = \frac{Fl^2}{2EI}$
2		$w = \frac{Fl^3}{16EI} \cdot \frac{x}{l} \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right]$ für $x \leq \frac{l}{2}$	$w_F = w_{\max} = \frac{Fl^3}{48EI}$ $\varphi_A = \varphi_B = \frac{Fl^2}{16EI}$
3		$w = \frac{Fl^3}{6EI} \cdot \frac{a}{l} \cdot \left( \frac{b}{l} \right)^2 \cdot \frac{x}{l} \left( 1 + \frac{l}{b} - \frac{x^2}{a \cdot b} \right)$ für $x \leq a$ $w_1 = \frac{Fl^3}{6EI} \cdot \frac{b}{l} \cdot \left( \frac{a}{l} \right)^2 \cdot \frac{x_1}{l} \left( 1 + \frac{l}{a} - \frac{x_1^2}{a \cdot b} \right)$ für $x_1 \leq b$	$w_F = \frac{Fl^3}{3EI} \cdot \left( \frac{a}{l} \right)^2 \cdot \left( \frac{b}{l} \right)^2$ $\varphi_A = w_F \cdot \frac{1}{2a} \left( 1 + \frac{l}{b} \right)$ $\varphi_B = w_F \cdot \frac{1}{2b} \left( 1 + \frac{l}{a} \right)$
4		$w = \frac{Fl^3}{6EI} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{x}{l} \left[ 1 - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right]$ für $x \leq l$ $w_1 = \frac{Fl^3}{6EI} \cdot \frac{x_1}{l} \left[ \frac{2a}{l} + 3 \frac{a}{l} \cdot \frac{x_1}{l} - \left( \frac{x_1}{l} \right)^2 \right]$ für $x_1 \leq a$	$w_F = \frac{Fl^3}{3EI} \cdot \left( \frac{a}{l} \right)^2 \left( 1 + \frac{a}{l} \right)$ $\varphi_A = \frac{Fl^2}{6EI} \cdot \frac{a}{l} = \frac{1}{2} \varphi_B$ $\varphi_F = \frac{Fl^2}{6EI} \cdot \frac{a}{l} \cdot \left( 2 + 3 \frac{a}{l} \right)$
5		Kreisbogen mit dem Radius $\varrho = \frac{EI}{M}$ Näherungsweise $w = \frac{Ml^2}{2EI} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2$	$w_F = \frac{Ml^2}{2EI}$ $\varphi_{\max} = \frac{Ml}{EI}$
6		$w = \frac{ql^4}{8EI} \left[ 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{l} + \frac{1}{3} \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right]$	$w_{\max} = \frac{ql^4}{8EI}$ $\varphi_{\max} = \frac{ql^3}{6EI}$
7		$w = \frac{5ql^4}{384EI} \left[ 1 - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{4}{5} \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right]$	$w_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI}$ $\varphi_A = \varphi_B = \frac{ql^3}{24EI}$
8		$w = \frac{MAl^2}{3EI} \left[ \frac{x}{l} - \frac{3}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right]$	$w_{\max} = \frac{MAl^2}{15,59EI}$ bei $x = 0,423l$ $\varphi_A = \frac{MAl}{3EI} = 2\varphi_B$

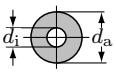
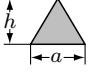
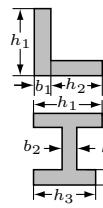
\*) Die Gleichungen gelten für  $(w')^2 \ll 1$

Tabelle 12: Integrationstafel  $\int_0^s M_i M_k \cdot dx$

#	$M_i$	$M_k$ *)				
		$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	
1		$s M_i M_k$		$\frac{1}{2} s M_i M_k$		$\frac{1}{2} s M_i (M_{k1} + M_{k2})$
2		$\frac{1}{2} s M_i M_k$		$\frac{1}{6} s M_i M_k$		$\frac{1}{6} s M_i (M_{k1} + 2M_{k2})$
3		$\frac{1}{2} s (M_{i1} + M_{i2}) M_k$		$\frac{1}{6} s (M_{i1} + 2M_{i2}) M_k$		$\frac{1}{6} s (2M_{i1} M_{k1} + 2M_{i2} M_{k2} + M_{i1} M_{k2} + M_{i2} M_{k1})$
4		$\frac{2}{3} s M_i M_k$		$\frac{1}{3} s M_i M_k$		$\frac{1}{3} s M_i (M_{k1} + M_{k2})$
5		$\frac{2}{3} s M_i M_k$		$\frac{5}{12} s M_i M_k$		$\frac{1}{12} s M_i (3M_{k1} + 5M_{k2})$
6		$\frac{1}{3} s M_i M_k$		$\frac{1}{4} s M_i M_k$		$\frac{1}{12} s M_i (M_{k1} + 3M_{k2})$

\*)  $M_i$  und  $M_k$  sind vertauschbar    \*\*) quadratische Parabel

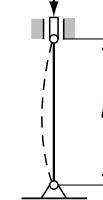
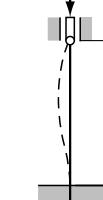
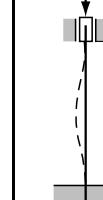
**Tabelle 13:** Verdrehung beliebiger Querschnitte

#	Querschnitt	$W_t$	$I_t$	Bemerkungen														
1		$\frac{\pi}{16} d^3 \approx 0,2d^3$	$\frac{\pi}{32} d^4 \approx 0,1d^4$	Größte Spannung am Umfang $W_t = 2W; I_t = I_p$														
2		$\frac{\pi}{16} \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}$	$\frac{\pi}{32} (d_a^4 - d_i^4)$	Wie unter 1 Für kleine Wanddicken siehe Nr. 3														
3		$(A_a + A_i)s_{\min} \approx 2A_m s_{\min}$ (BREDTsche Formeln)	$2(A_a + A_i)s \cdot A_m/u_m \approx 4A_m^2 \cdot s/u_m$	$A_a$ = Inhalt der von der äußeren Umrisslinie begrenzten Fläche; $A_i$ = Inhalt der von der inneren Umrisslinie begrenzten Fläche; $A_m$ = Inhalt der von der Mittellinie umgrenzten Fläche; $u_m$ = Länge der Mittellinie (mittlere Umrisslinie)														
4		$0,208a^3$	$0,141a^4 = \frac{a^4}{7,11}$	Größte Spannungen in den Mitten der Seiten. In den Ecken ist $\tau = 0$														
5		$a > b$ $\text{für } \frac{a}{b} \leq 5$ $0,208a^{1,215} \cdot b^{1,785}$	siehe Taschenbücher	Größte Spannungen in den Mitten der größten Seiten. In den Ecken ist $\tau = 0$														
6	Gleichseitiges Dreieck 	$a^3/20 \approx h^3/13$	$a^4/46,19 \approx h^4/26$	Größte Spannungen in den Mitten der Seiten. In den Ecken ist $\tau = 0$														
7	Regelmäßiges Sechseck 	$1,511\rho^3$	$1,847\rho^4$	Größte Spannungen in den Mitten der Seiten.														
8	Regelmäßiges Achteck 	$1,481\rho^3$	$1,726\rho^4$	Größte Spannungen in den Mitten der Seiten.														
9	Dünnwandige Profile 	$\frac{\eta}{3b_{\max}} \sum b_i^3 h_i$ Werte $\eta$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>⊓</td> <td>⊓</td> <td>⊥</td> <td>I</td> <td>IP</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td><math>\eta</math></td> <td>0,99</td> <td>1,12</td> <td>1,12</td> <td>1,31</td> <td>1,29</td> <td>1,17</td> </tr> </table>		⊓	⊓	⊥	I	IP	+	$\eta$	0,99	1,12	1,12	1,31	1,29	1,17	$\frac{\eta}{3} \sum b_i^3 h_i$	Größte Spannungen in den Mitten der Längsseiten des Rechteckes mit der größten Dicke $b_{\max}$ .
	⊓	⊓	⊥	I	IP	+												
$\eta$	0,99	1,12	1,12	1,31	1,29	1,17												

**Tabelle 14:** Knickspannung in  $\sigma_K$  in N/mm<sup>2</sup>

Werkstoff	Plastische Knickung nach TETMAJER		Elastische Knickung nach EULER	
	Gültigkeits- bereich	Gleichung für $\sigma_K$	Gültigkeits- bereich	
S 235	$0 < \lambda < 65$ $65 < \lambda < 104$	$\sigma_K = 235$ $\sigma_K = 310 - 1,14\lambda$	$\lambda > 104$	$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$
E 335	$0 < \lambda < 88$	$\sigma_K = 335 - 0,62\lambda$	$\lambda > 88$	
GJ 200	$0 < \lambda < 80$	$\sigma_K = 776 - 12\lambda + 0,053\lambda^2$	$\lambda > 80$	
Bauholz	$0 < \lambda < 100$	$\sigma_K = 29,3 - 0,194\lambda$	$\lambda > 100$	$\sigma_K = \frac{9,9}{(\lambda/100)^2}$

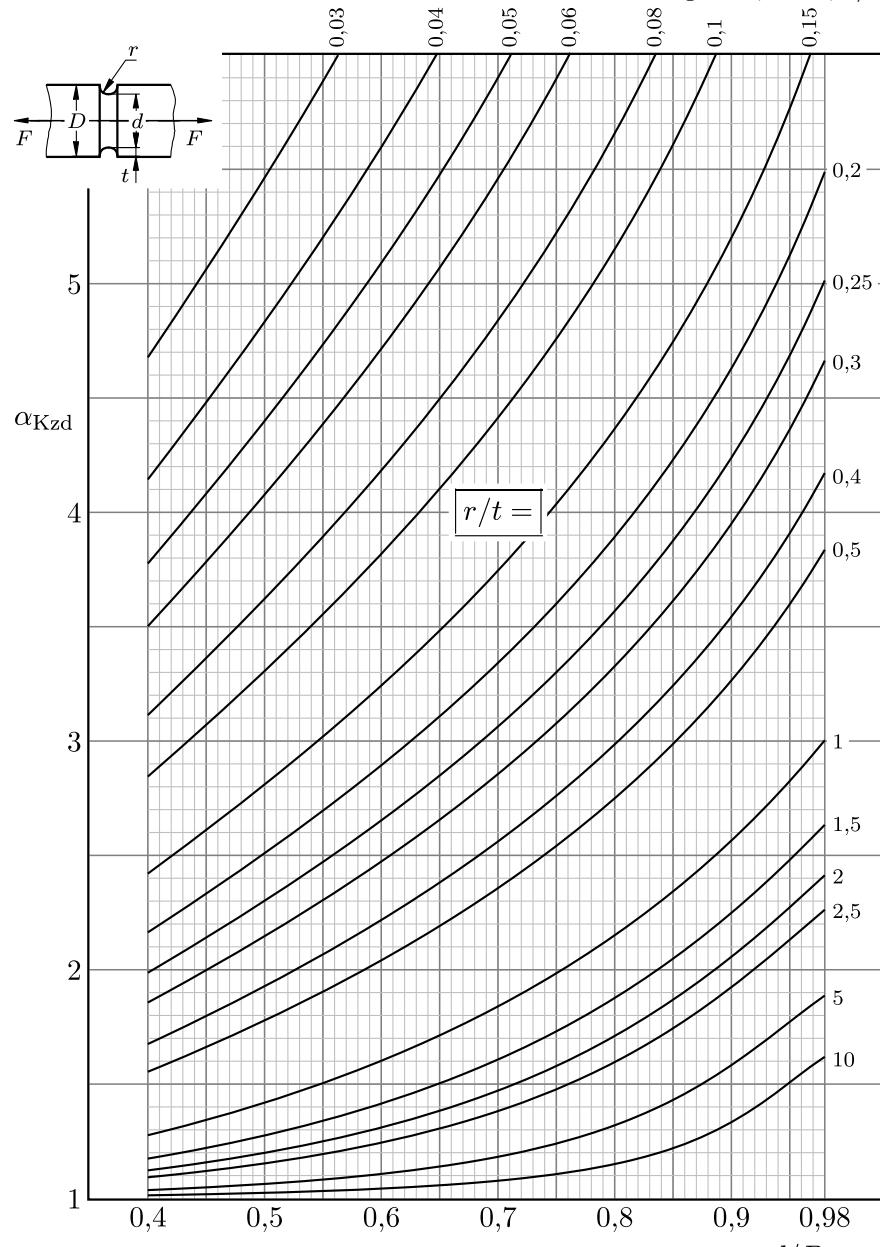
**Tabelle 15:** Knickfälle (EULER)

	1	Grundfall 2	3	4
Knickfall				
Freie Knicklänge $l_K$	$2l$	$l$	$0,7l$	$0,50l$
Schlankheitsgrad $\lambda$	$\frac{2l}{i}$	$\frac{l}{i}$	$\frac{0,7l}{i}$	$\frac{0,50l}{i}$

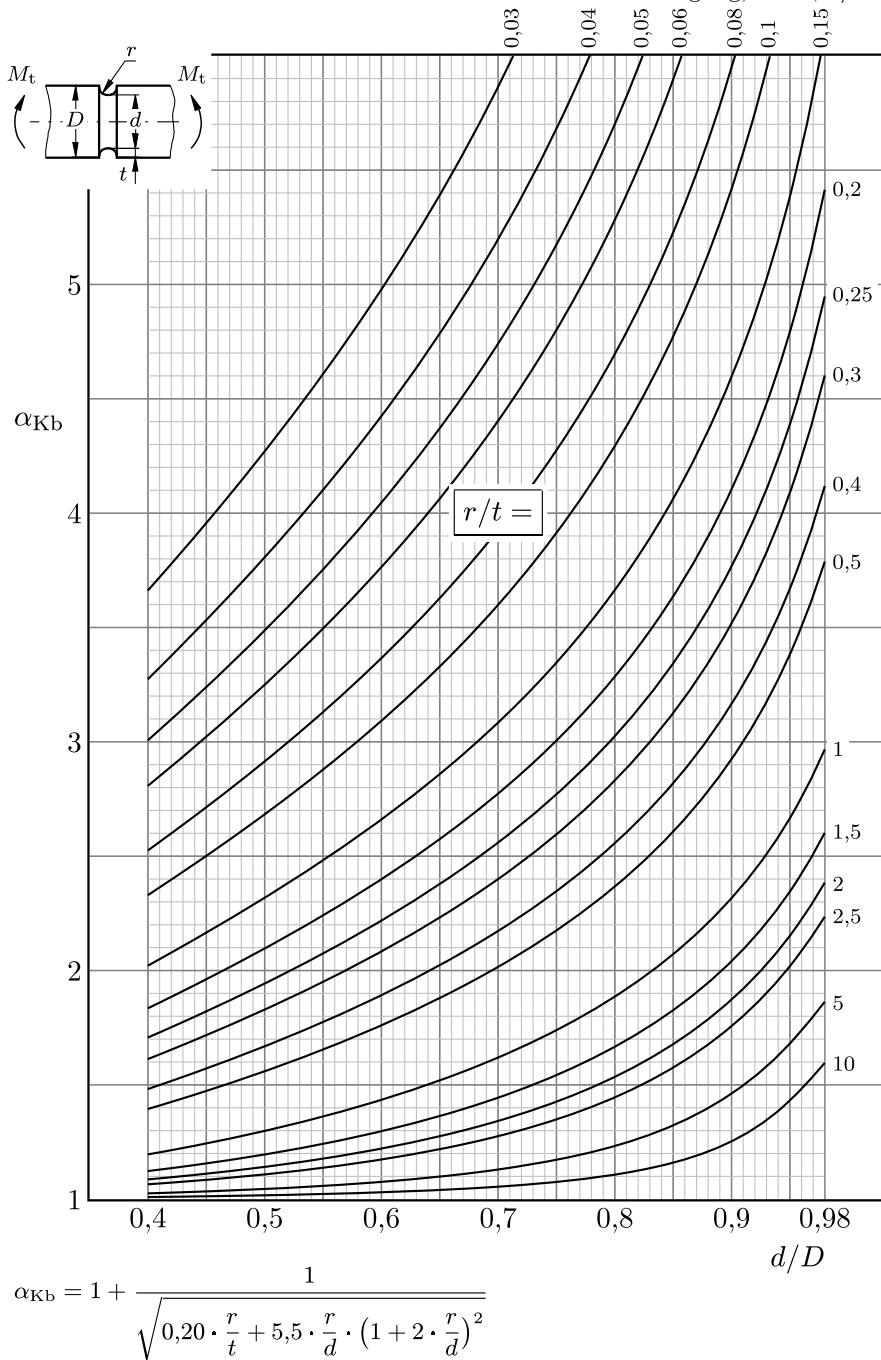
**Tabelle 16:** Vergleichsspannung  $\sigma_v \leq \sigma_{zul}$ 

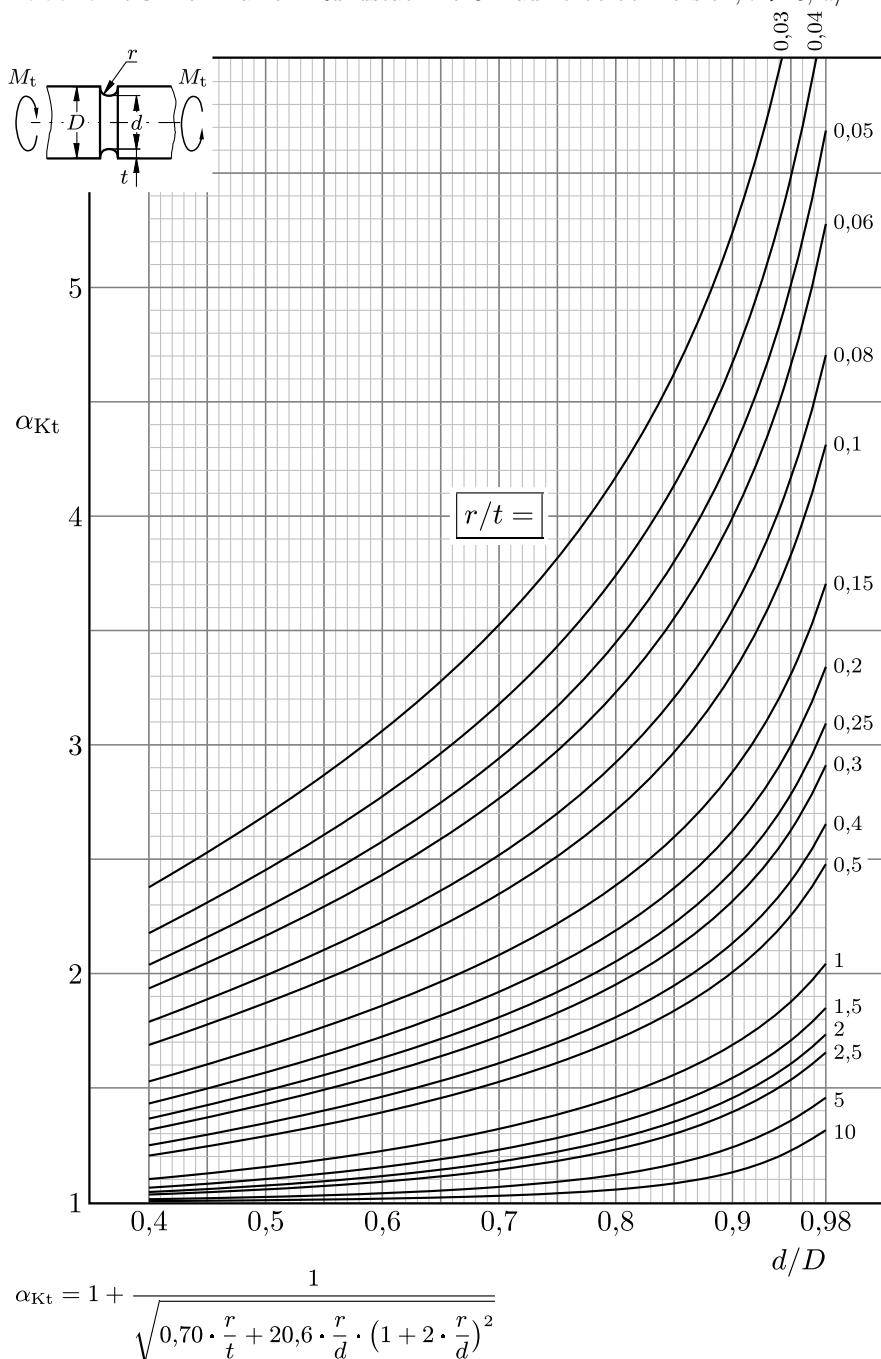
Hypothese	Belastung durch $\sigma$ und $\tau$	Belastung durch $\sigma_x \sigma_y$ und $\tau$ **)	$\alpha_0$ *)	Anwendung
Größte Normalspannung	$\sigma_v = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + (\alpha_0 \tau)^2}$	$\sigma_v = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + (\alpha_0 \tau)^2}$	$\frac{\sigma_{Gr}}{\tau_{Gr}}$	Spröder Werkstoff, Bruch ohne vorherige plastische Verformung
Größte Schubspannung	$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2}$	$\sigma_v = \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2}$	$\frac{\sigma_{Gr}}{2\tau_{Gr}}$	Bruch mit vorheriger plastischer Verformung
Größte Gestaltänderungsarbeit	$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3(\alpha_0 \tau)^2}$	$\sigma_v = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3(\alpha_0 \tau)^2}$	$\frac{\sigma_{Gr}}{\sqrt{3}\tau_{Gr}}$	Bruch mit vorheriger plastischer Verformung, Dauerbruch.

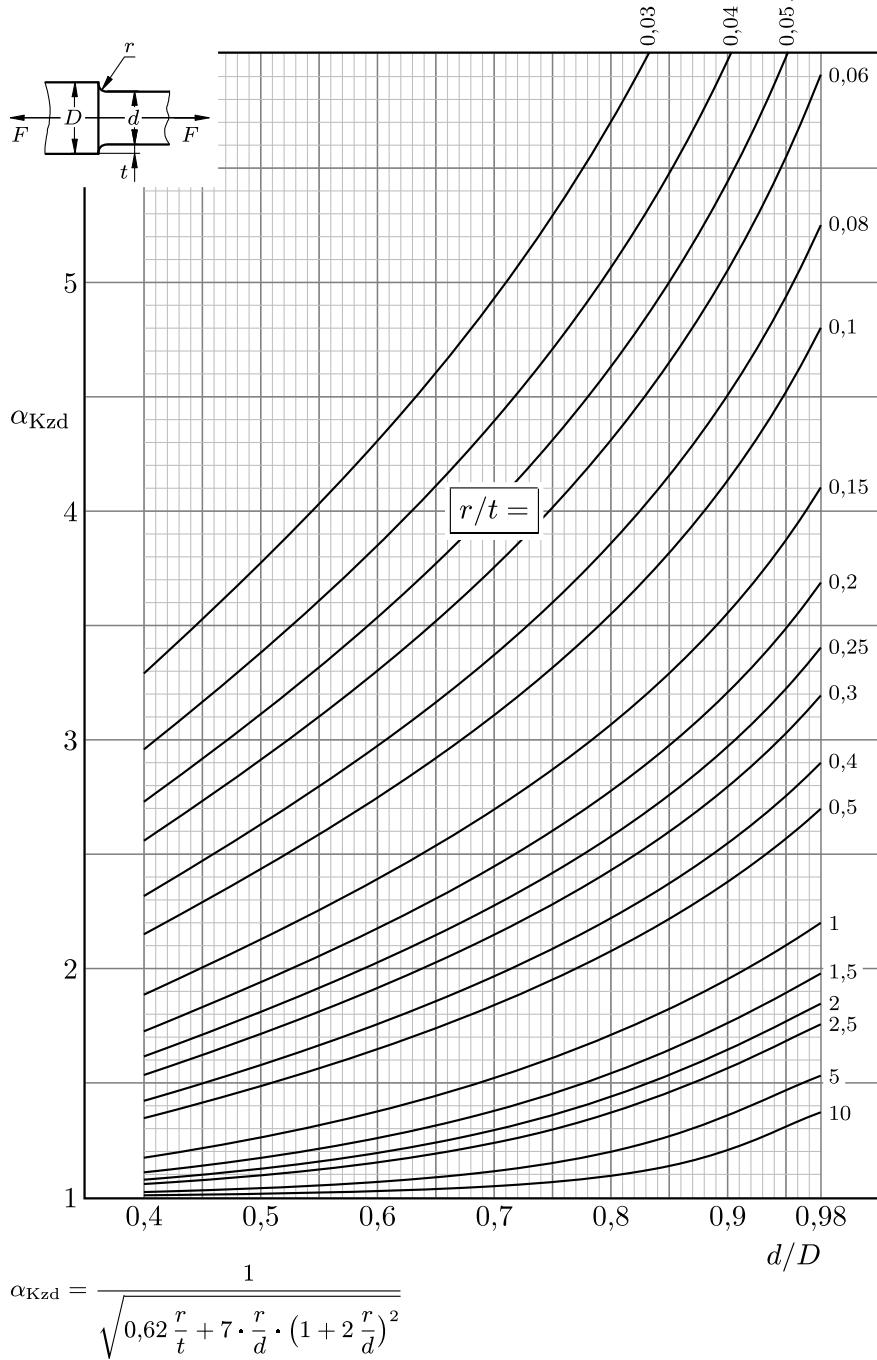
\*) Bei gleichem Belastungsfall für  $\sigma$  und  $\tau$  ist  $\alpha_0 = 1$ .\*\*) Für ein Hauptspannungssystem gelten diese Gleichungen mit  $\sigma_y = \sigma_{max}; \sigma_x = \sigma_{min}$  und  $\tau = 0$ .

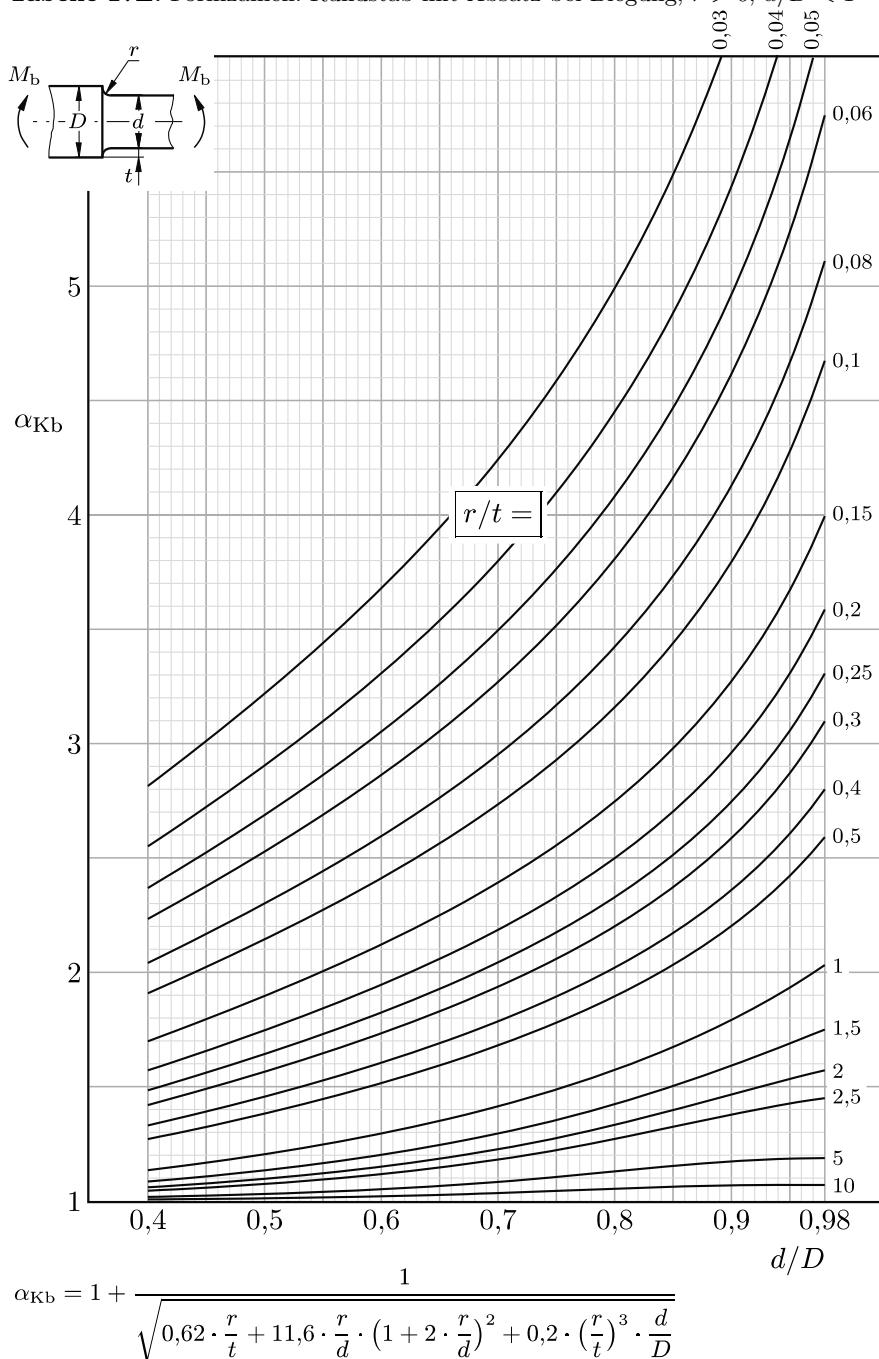
**Tabelle 17:** Formzahlen nach [23]**Tabelle 17A:** Formzahlen: Rundstab mit Umlaufkerbe bei Zugdruck,  $r > 0$ ;  $d/D < 1$ 

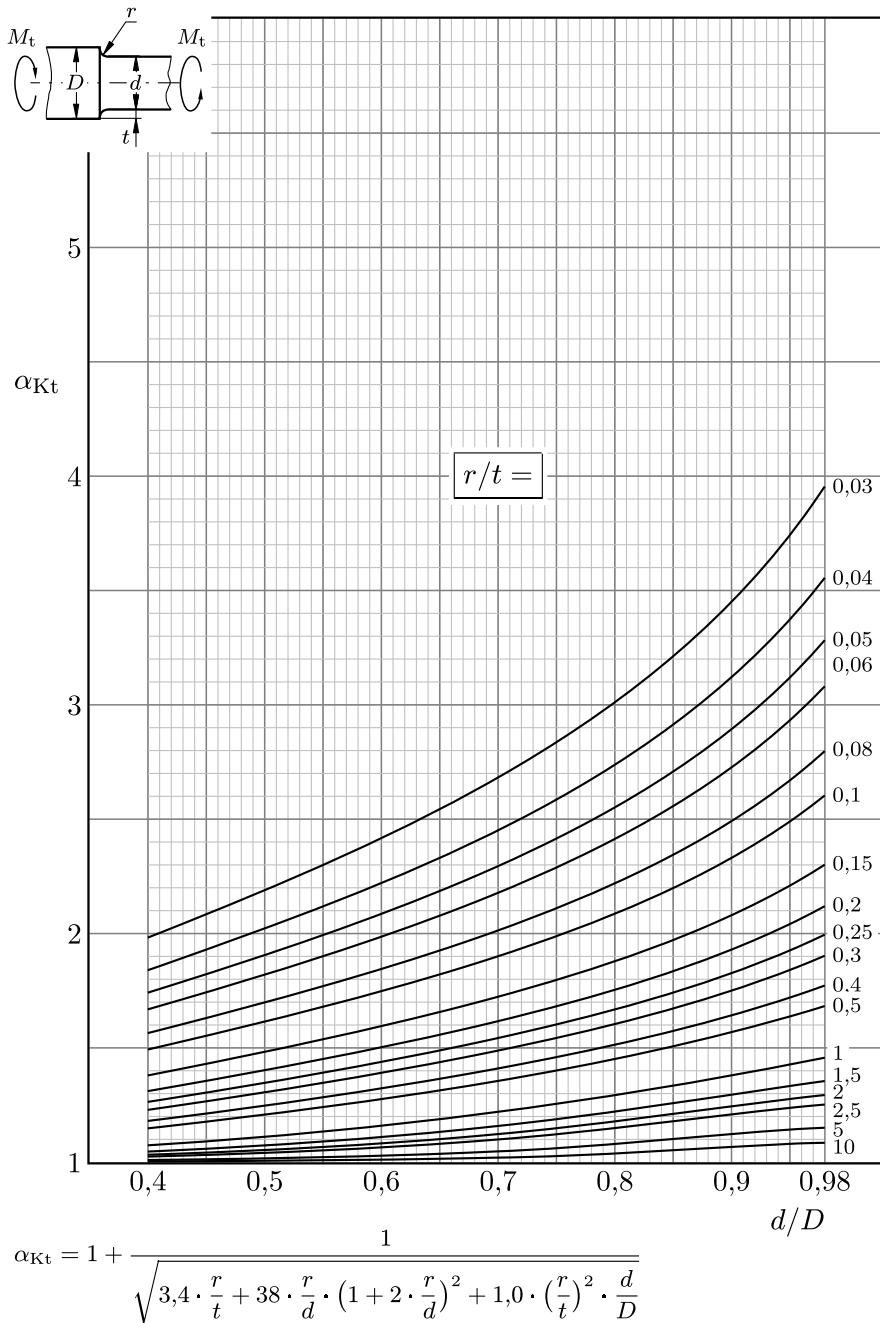
$$\alpha_{Kzd} = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,22 \cdot \frac{r}{t} + 2,74 \cdot \frac{r}{d} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{r}{d}\right)^2}}$$

**Tabelle 17B:** Formzahlen: Rundstab mit Umlaufkerbe bei Biegung,  $r > 0$ ;  $d/D < 1$ 

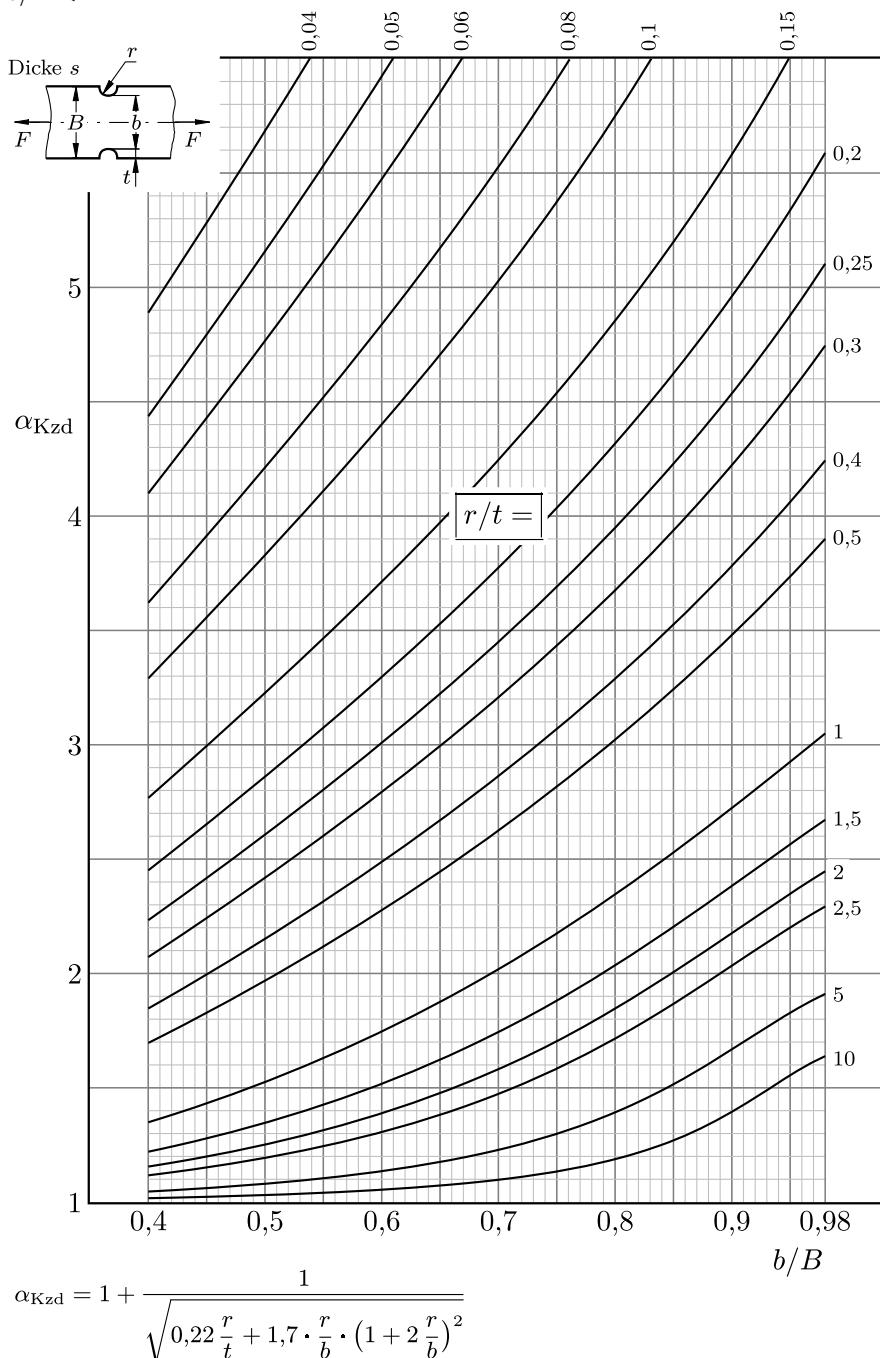
**Tabelle 17C:** Formzahlen: Rundstab mit Umlaufkerbe bei Torsion,  $r > 0$ ;  $d/D < 1$ 

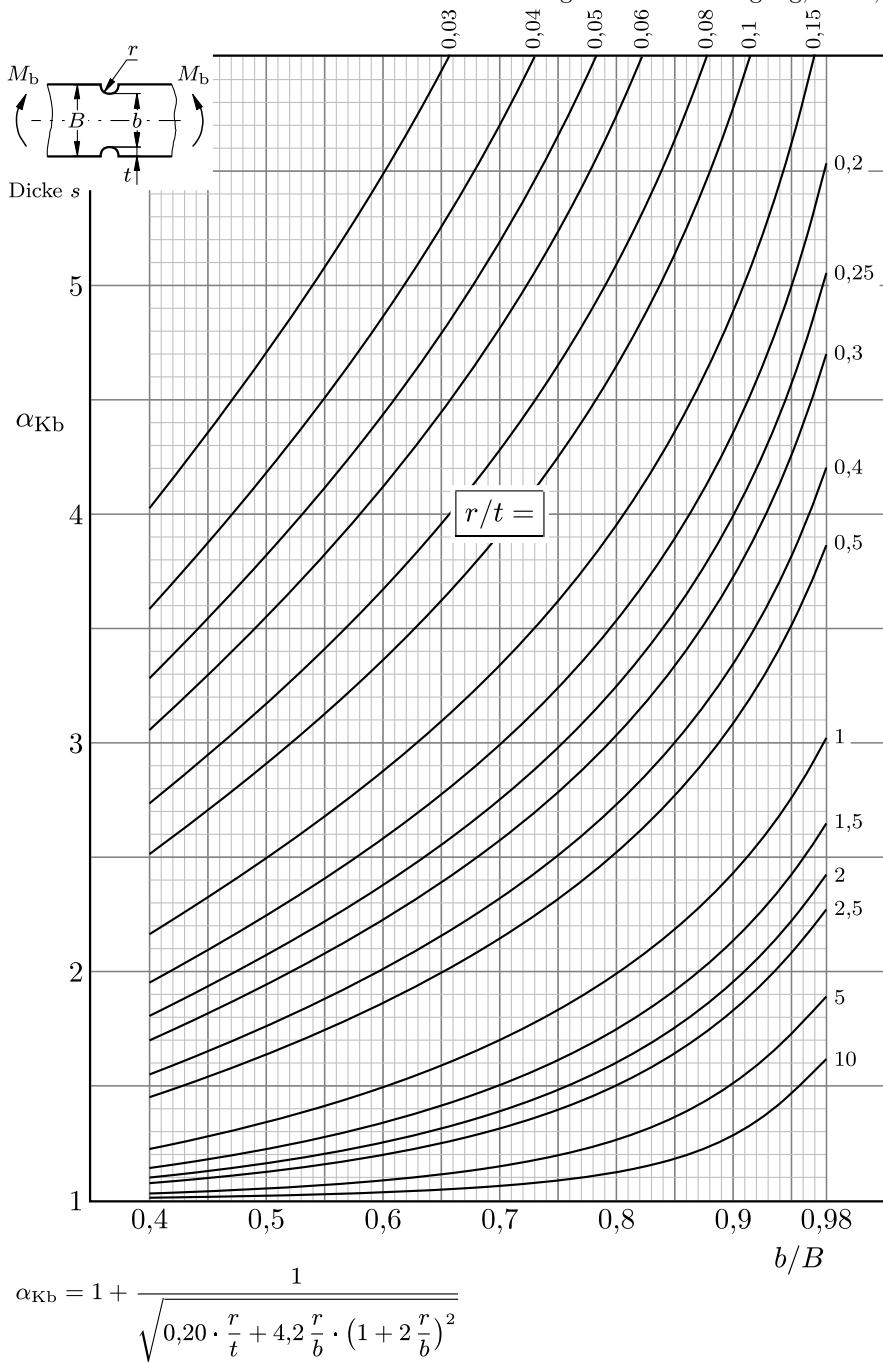
**Tabelle 17D:** Formzahlen: Rundstab mit Absatz bei Zugdruck,  $r > 0$ ;  $d/D < 1$ 

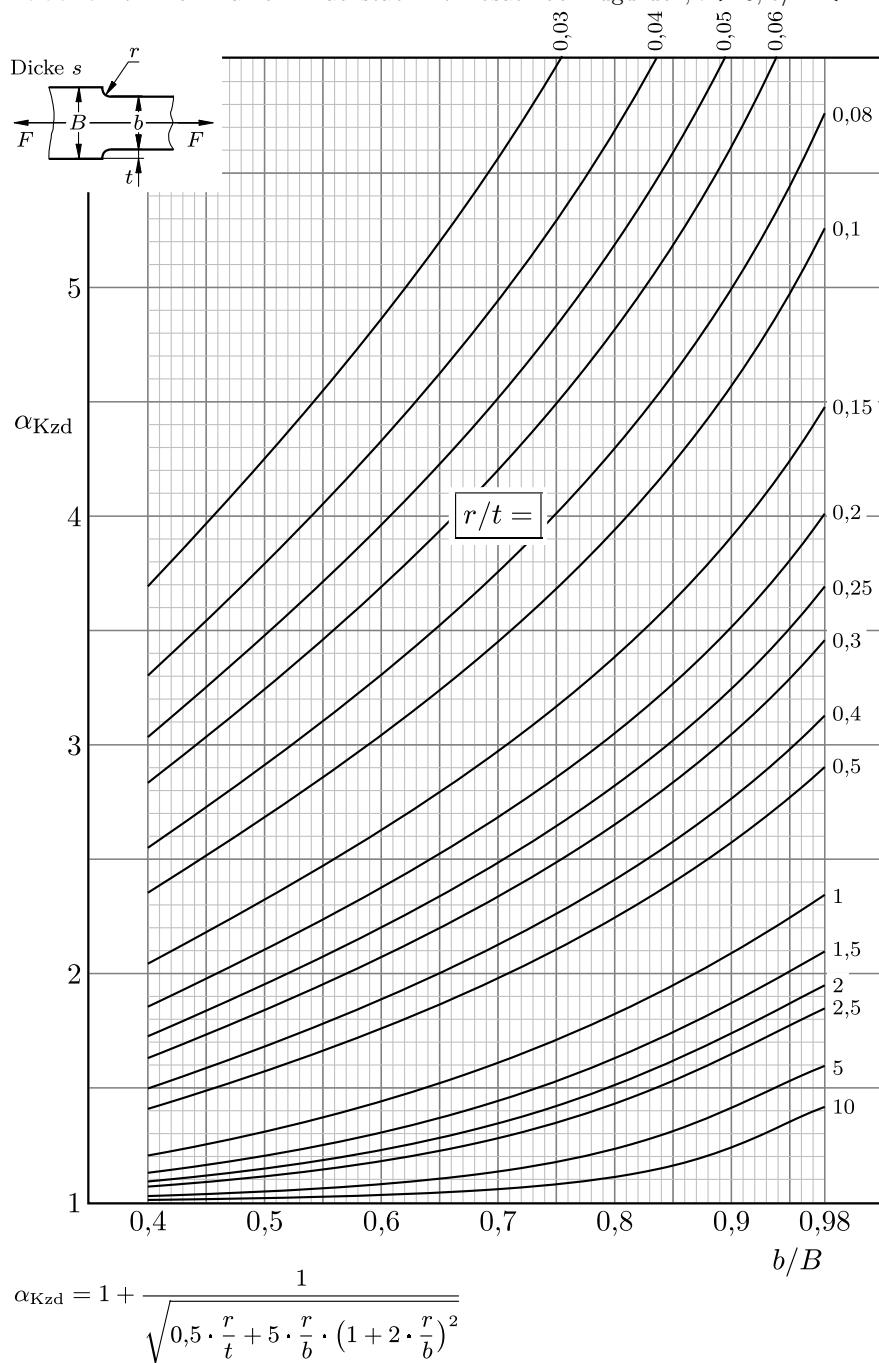
**Tabelle 17E:** Formzahlen: Rundstab mit Absatz bei Biegung,  $r > 0$ ;  $d/D < 1$ 

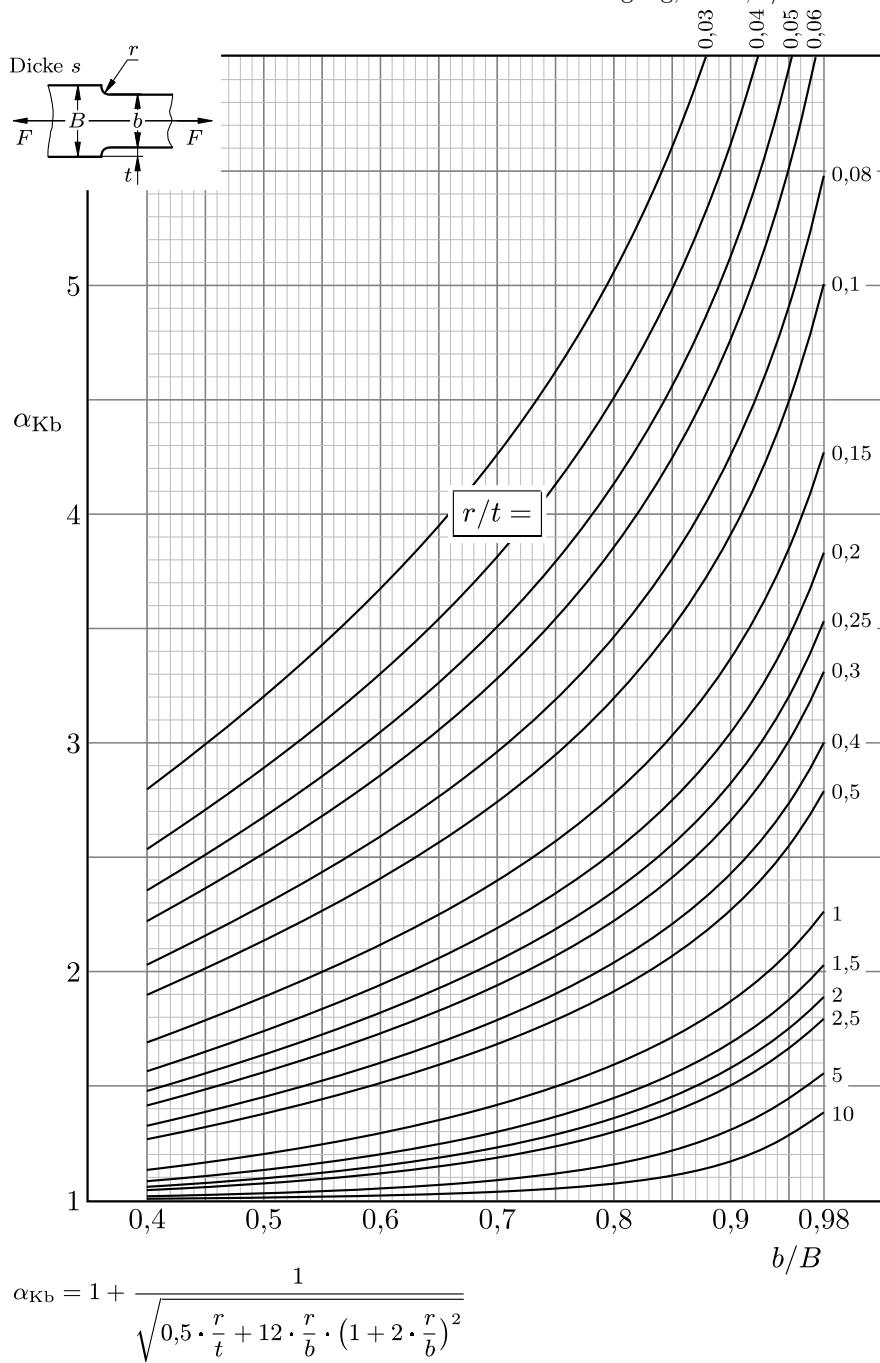
**Tabelle 17F:** Formzahlen: Rundstab mit Absatz bei Torsion,  $r > 0$ ;  $d/D < 1$ 

**Tabelle 17G:** Formzahlen: Flachstab mit beidseitiger Kerbe bei Zug oder Druck,  $r > 0$ ;  $b/B < 1$

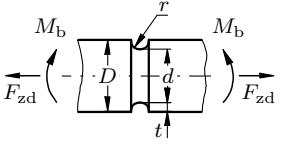
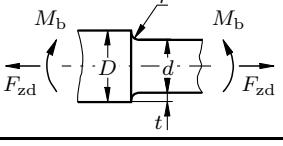
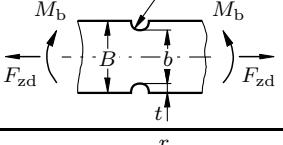
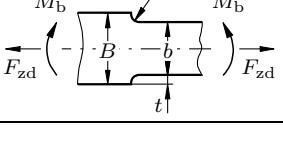
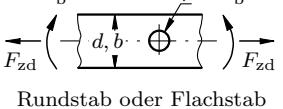


**Tabelle 17H:** Formzahlen: Flachstab mit beidseitiger Kerbe bei Biegung,  $r > 0$ ;  $b/B < 1$ 

**Tabelle 17I:** Formzahlen: Flachstab mit Absatz bei Zugdruck,  $r > 0$ ;  $b/B < 1$ 

**Tabelle 17J:** Formzahlen: Flachstab mit Absatz bei Biegung,  $r > 0$ ;  $b/B < 1$ 

**Tabelle 18:** Bezogenes Spannungsgefälle nach [23]

Bauteilform	$\chi_\sigma$	$\chi_\tau$
	$\frac{2}{r} \cdot (1 + \varphi)$	$\frac{1}{r}$
	$\frac{2,3}{r} \cdot (1 + \varphi)$	$\frac{1,15}{r}$
	$\frac{2}{r} \cdot (1 + \varphi)$	—
	$\frac{2,3}{r} \cdot (1 + \varphi)$	—
	$\frac{2,3}{r}$	—
Rundstab oder Flachstab		

Stützzahlen des nicht gekerbten Bauteiles sind mit dem bezogenen Spannungsgefälle  $\chi_0 = 2/d$  bzw.  $\chi_0 = 2/b$  zu berechnen

$$\varphi = 0 \text{ für } t/d > 0,25 \text{ oder } t/b > 0,25;$$

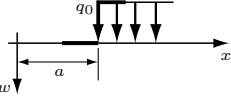
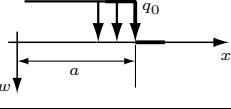
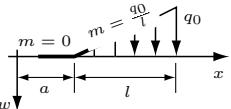
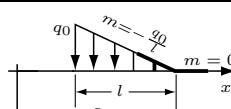
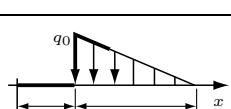
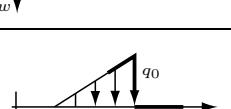
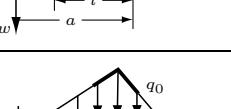
$$\varphi = 1/(4 \cdot \sqrt{t/r} + 2) \text{ für } t/d \leq 0,25 \text{ bzw. } t/b \leq 0,25.$$

Für Rundstäbe gelten die Gleichungen näherungswise auch bei Längsbohrung.

**Tabelle 19:** Lineare Wärmeausdehnungszahlen für den Bereich von 0 °C bis 100 °C in K<sup>-1</sup>

Aluminium .....	$2,4 \cdot 10^{-5}$	Invar (36 % Ni, 64 % Fe) ..	$0,1 \cdot 10^{-5}$
Beton .....	$1,1 \cdot 10^{-5}$	Messing .....	$1,9 \cdot 10^{-5}$
Blei .....	$2,8 \cdot 10^{-5}$	Nickel .....	$1,3 \cdot 10^{-5}$
Bronze .....	$1,8 \cdot 10^{-5}$	Platin .....	$0,9 \cdot 10^{-5}$
Eisen .....	$1,1 \cdot 10^{-5}$	Silber .....	$2,0 \cdot 10^{-5}$
Glas .....	$0,8 \cdot 10^{-5}$	Zink .....	$3,0 \cdot 10^{-5}$
Kupfer .....	$1,6 \cdot 10^{-5}$		

**Tabelle 20:** Funktion  $q(x)$  (Streckenlast) für verschiedene Einzelheiten einer Belastung.

Einzelheit bei $x = a$	Funktion $q$
	$+ \langle x - a \rangle^0 \cdot q_0$
	$- \langle x - a \rangle^0 \cdot q_0$
	$+ \langle x - a \rangle \left( \frac{q_0}{l} - 0 \right) = + \langle x - a \rangle \cdot \frac{q_0}{l}$
	$+ \langle x - a \rangle \left[ 0 - \left( -\frac{q_0}{l} \right) \right] = + \langle x - a \rangle \cdot \frac{q_0}{l}$
	$+ \underbrace{\langle x - a \rangle^0 \cdot q_0}_{\text{Sprung}} + \underbrace{\langle x - a \rangle \left( -\frac{q_0}{l} - 0 \right)}_{\text{Knick}} = + \langle x - a \rangle^0 \cdot q_0 - \langle x - a \rangle \cdot \frac{q_0}{l}$
	$- \underbrace{\langle x - a \rangle^0 \cdot q_0}_{\text{Sprung}} + \underbrace{\langle x - a \rangle \left( 0 - \frac{q_0}{l} \right)}_{\text{Knick}} = - \langle x - a \rangle^0 \cdot q_0 - \langle x - a \rangle \cdot \frac{q_0}{l}$
	$+ \langle x - a \rangle \left( -\frac{q_0}{l_2} - \frac{q_0}{l_1} \right) = - \langle x - a \rangle \left( \frac{q_0}{l_2} + \frac{q_0}{l_1} \right)$

# Literatur

- 1 BERGER, J.: „Technische Mechanik für Ingenieure“, Band 2: Festigkeitslehre, Braunschweig/Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn, 1998
- 2 BRODMUND, E.; SACHS, G.: „Technische Mechanik“, München/Wien: R. Oldenbourg Verlag GmbH, 1998 (früher im Springer Verlag)
- 3 BRUHNS, D.; LEHMANN, T.: „Elemente der Mechanik“, Band II: Elastostatik, Braunschweig/Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn, 1994
- 4 DANKERT, H.; DANKERT, J.: „Technische Mechanik“, Stuttgart: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 2004
- 5 DIETMANN, H.: „Einführung in die Elastizitäts- und Festigkeitslehre“, Stuttgart: Kröner-Verlag, 1992
- 6 FISCHER, K.; GÜNTHER, W.: „Technische Mechanik“, Leipzig/Stuttgart: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1994
- 7 GLOISTEHN, H.H.: „Lehr- und Übungsbuch der Technischen Mechanik“, Band 2: Festigkeitslehre, Braunschweig/Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn, 1992
- 8 GROSS, D.; HAUGER, W.; SCHNELL, W.; SCHRÖDER, J.: „Technische Mechanik“, Band 2: Elastostatik, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2005
- 9 HAGEDORN, P.: „Technische Mechanik“, Band 2: Festigkeitslehre, Frankfurt/Main: Verlag Harri Deutsch, 2006
- 10 HIBBEKER, R.C.: „Technische Mechanik“, Band 2: Festigkeitslehre, München/Boston: Pearson Education, 2006
- 11 HOLZMANN, G.; MEYER, H.; SCHUMPICH, G.: „Technische Mechanik“, Festigkeitslehre, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden: B.G. Teubner Verlag/GWV Fachbuchverlage GmbH, 2006
- 12 KABUS, K.: „Mechanik und Festigkeitslehre“, München/Wien: Carl Hanser Verlag, 2003
- 13 KÜHHORN, A.; SILBER, G.: „Technische Mechanik für Ingenieure“, Heidelberg: Hüthig Verlag, 2000
- 14 LÄPPLER, V.: „Einführung in die Festigkeitslehre“, Braunschweig/Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn, 2006
- 15 MAGNUS, K.; MÜLLER-SLANY, H.H.: „Grundlagen der Technische Mechanik“, Wiesbaden: B.G. Teubner Verlag/GWV Fachbuchverlage GmbH, 2005

- 16 MAYR, M.: „Technische Mechanik“, München/Wien: Carl Hanser Verlag, 2007
- 17 MOTZ, H.D.: „Ingenieur-Mechanik“, Düsseldorf: VDI Verlag, 1991
- 18 MÜLLER, W.; FERBER, F.: „Technische Mechanik für Ingenieure“, Leipzig: Fachbuchverlag, 2003
- 19 SAYIR, M.; DUAL, J.; KAUFMANN, S.: „Technische Mechanik 2“, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 2004
- 20 SZABO, I.: „Einführung in die Technische Mechanik“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2003
- 21 WITTENBURG, J.; PESTEL, E.: „Festigkeitslehre“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2001 (ursprünglich im BI Wissenschaftsverlag)
- 22 WRIGGERS, P.; NACKENHORST, U.; BEUERMANN, S.; LÖHNERT, S.: „Technische Mechanik kompakt“, Wiesbaden: B.G. Teubner Verlag/GWV Fachbuchverlage GmbH, 2005

## Weiterführende Literatur

- 23 Autorenkollektiv: „FKM Richtlinie: Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile“, Frankfurt a. Main: VDMA Verlag GmbH, 2003
- 24 BATHE, H.-J.: „Finite-Elemente-Methode“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 1986
- 25 BECKER, W.; GROSS, D.: „Mechanik elastischer Körper und Strukturen“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2002
- 26 BERTSCHE, B.; LECHNER, G.: „Zuverlässigkeit im Fahrzeug- und Maschinenbau“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2004
- 27 BETTEN, J.: „Kontinuumsmechanik“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2001
- 28 BETTEN, J.: „FEM für Ingenieure“, Band 1: Grundlagen, Band 2: Nichtlinearitäten, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2003/2004
- 29 BURTH, K.; BROCKS, W.: „Plastizität Grundlagen und Anwendungen für Ingenieure“, Braunschweig/Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn, 1992
- 30 BÜRGEL, R.: „Festigkeitslehre und Werkstoffmechanik“, Band 1: Festigkeitslehre, Band 2: Werkstoffe, Braunschweig/Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn, 2005
- 31 COTTIN, D.; PULS, E.: „Angewandte Betriebsfestigkeit“, München/Wien: Carl Hanser Verlag, 1992
- 32 DIEKER, S.; REIMERDES, H.-G.: „Elementare Festigkeitslehre im Leichtbau“, Bremen: Donat Verlag, 1992
- 33 FRÖHLICH, P.: „FEM – Anwendungspraxis,, Stuttgarter Leichtbau“, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden: B.G. Teubner Verlag, 2005

- 34 GOBRECHT, J.: „Werkstofftechnik – Metalle“, München/Wien: R. Oldenbourg Verlag GmbH, 2006
- 35 GÖLDNER, H. (Hrsg.): „Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre“; 2 Bände, Leipzig/Köln: Fachbuchverlag, 1991/1992
- 36 GROSS, D.; SEELIG, T.: „Bruchmechanik“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2001
- 37 GROSS, D.; HAUGER, W.; WRIGGERS, P.: „Technische Mechanik“, Band 4: Hydromechanik, Elemente der höheren Mechanik, Numerische Methoden, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2007
- 38 GROTE, K.-H.; FELDHUSEN, J. (Hrsg.): „Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag
- 39 HAIBACH, E.: „Betriebsfestigkeit“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2002
- 40 HECKEL, K.: „Einführung in die technische Anwendung der Bruchmechanik“, München/Wien: Carl Hanser Verlag, 1991
- 41 HENNING, G.: „Technische Mechanik mit Mathcad, Matlab und Maple“, Braunschweig/Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn, 2004
- 42 HINZEN, H.: „Maschinenelemente 1“, München/Wien: R. Oldenbourg Verlag GmbH, 2007
- 43 ISSLER, L.; RUOSS, H.; HÄFELE, P.: „Festigkeitslehre – Grundlagen“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2004
- 44 KLEIN, B.: „Leichtbaukonstruktion“, Braunschweig/Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn, 2005
- 45 KREISSIG, R.: „Einführung in die Plastizitätstheorie“, Leipzig: Fachbuchverlag, 1992
- 46 KREISSIG, R.; BENEDIX, U.: „Höhere Technische Mechanik“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2002
- 47 KRÜGER, U.; KINDMANN, R.: „Stahlbau“, Teil 1: Grundlagen, Teil 2: Stabilität und Theorie II. Ordnung, Berlin: Ernst & Sohn Verlag 2007/2008
- 48 MANG, H.; HOFSTETTER, G.: „Festigkeitslehre“, Wien/New York: Springer Verlag, 2008
- 49 MAYR, M.; THALHOFER, U.: „Numerische Lösungsverfahren in der Praxis“, FEM–BEM–FDM, München/Wien: Carl Hanser Verlag, 1993
- 50 NAUBEREIT, H.; WEIHERT, J.: „Einführung in die Ermüdungsfestigkeit“, München/Wien: Carl Hanser Verlag, 1999
- 51 NEUBER, H.: „Kerbspannungslehre: Theorie der Spannungskonzentration“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 1985
- 52 NIEMANN, G.; WINTER, H.; HÖHN, B.-R.: „Maschinenelemente“ Band 1, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag; 2005

- 53 PETERSEN, C.: „Stahlbau“, Braunschweig/Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn, 2005
- 54 RADAJ, D.: „Ermüdungsfestigkeit: Grundlagen für Leichtbau, Maschinen- und Stahlbau“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2003
- 55 ROLOFF/MATEK (Autorenkollektiv): „Maschinenelemente“, Braunschweig/Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn, 2004
- 56 RÖSLER, J.; HARDES, H.; BÄKER, M.: „Mechanisches Verhalten der Werkstoffe“, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden: B.G. Teubner Verlag/GWV Fachbuchverlage GmbH, 2006
- 57 SCHMITT-THOMAS, K.: „Integrierte Schadensanalyse“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2005
- 58 STEINHILPER, W.; SAUER, B. (Hrsg.): „Konstruktionselemente des Maschinenbaus“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2005
- 59 SZABO, I.: „Höhere Technische Mechanik“, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2001
- 60 WEICHERT, N; WÜLKER, M.: „Messtechnik und Messdatenerfassung“, München/Wien: R. Oldenbourg Verlag GmbH, 2000
- 61 WELLINGER, K.; DIETHMANN, H.: „Festigkeitsberechnung“, Stuttgart: Alfred Kröner Verlag, 1976
- 62 ZAMMERT, W.-U.: „Betriebsfestigkeitsberechnung“, Braunschweig/Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn, 1985
- 63 ZIENKIEWCZ, O.C.: „Methode der finiten Elemente“, München/Wien: Carl Hanser Verlag, 1984

# Index

- Abscheren 200
- Abscherspannung 200
- Addition, Biegung und Schub 294
- Addition, Biegung und Verdrehung 288
- Addition, Druck und Biegung 279
- Addition, Verdrehung und Zug/Druck 296
- Addition, Zug und Biegung 276
- Anisotropiefaktor 315
- Anstrengungsverhältnis 318
- Ausdehnungszahl 374
- Ausschlagfestigkeit 331
- Ausschlagsspannung 323
- axiales Flächenmoment 110
  
- BACH 16, 286
- Baugröße 311
- Bauteilausschlagfestigkeit 331, 350
- Bauteilbeanspruchbarkeit 311
- Bauteilbeanspruchung 25, 26, 302, 306
- Bauteil-Dauerfestigkeit 333
- Bauteile, umlaufende 380
- Bauteilfestigkeit 25, 26, 302, 306, 317, 320
- Bauteilfestigkeit, dynamische 320
- Bauteilfließgrenze 317
- Bauteilform 316
- Bauteil-Normwerte 315
- Bauteilsicherheit 25
- Bauteilversuche 307
- Bauteilwechselfestigkeit 331, 350
- Bauteil-WÖHLER-Linie 344
- Beanspruchbarkeit 27, 249
- Beanspruchung 27, 249
- Beanspruchung, zusammengesetzte 275, 318
- Beanspruchungs-Zeitfunktion 343, 351
- Beanspruchungsart 316
- Beanspruchungsarten, Druck 271
  
- Beanspruchungsarten, Verdrehung 273
- Beanspruchungsarten, Zug 271
- Beanspruchungsfunktionen 306
- Beanspruchungskollektiv 22, 344, 351
- Behälter, dünnwandiger 388
- Belastung 245
- Belastung, ruhende 16, 18
- Belastung, schwellende 19
- Belastung, schwingende 16
- Belastung, wechselnde 19
- Belastungsebene 165
- Belastungsfälle 16
- Belastungsfall, Überlagerung 138
- Belastungszustand, ebener 15
- Berechnungsablauf 320, 334
- Berechnungskonzepte 310
- Betriebsfaktoren 306
- Betriebsfestigkeit 19, 22, 310
- Betriebsfestigkeitsnachweis 342, 343
- Betriebsfestigkeitsrechnung 302, 342, 351
- Beulen 248
- bezogene Formänderungsarbeit, Zug 52
- biaxiales Flächenmoment 168, 171
- Biegendrillknicken 248
- Biegefestigkeit 306
- Biegeknicken 248
- Biegelinie 128
- Biegemoment 62, 77–80
- Biegesteifigkeit 130
- Biegung, gerade 63
- Biegung, Grundgleichung 64, 71
- Biegung, reine 62, 65
- Biegung, schiefe 64, 160
- Biegung, statisch unbestimmtes System 363
- Bruchdehnung 13

- Bruchgrenze 234  
 Bruchhypothesen 279  
 Bruchkriterium 314  
 Bruchmechanik 312, 314  
 Bruchmechanik-Konzept 314  
 Bruchzähigkeit 314  
  
 CASTIGLIANO, Satz von 143  
 COULOMB 207  
  
 Dauerbruch 17  
 Dauerfestigkeit 19, 26, 310, 320, 321, 349  
 Dauerfestigkeitsnachweis 320  
 Dauerfestigkeitsschaubild 20, 320, 332, 337  
 Dauerhaltbarkeit 311  
 Deformation gebogener Träger 65  
 Dehgrenze 26  
 Dehnung 11, 41, 280  
 Dehnungs-WÖHLER-Linie 312  
 Dehnungsmessstreifen 307  
 Dehnungsmessung 307  
 Differentialgleichung, Biegelinie 131  
 Dimensionierung 245  
 Drillknicken 248  
 Druck 31  
 Druckfestigkeitsfaktor 318  
 Druckfließgrenze 238  
 dünnwandiger Behälter 388  
 Durchbiegung 128, 145  
 dynamische Festigkeit 315  
 dynamischer Festigkeitsnachweis 302, 349  
 dynamische Stützzahl 349  
  
 ebener Spannungszustand 15, 259  
 Eigenformen 241  
 Eigenspannung 307  
 Eigenwerte 241  
 Eigenwertproblem 241  
 elastisch-plastisches Bruchmechanik-Konzept 314  
 elastische Knickung 238, 239, 256  
 elastische Linie 128  
 elastisch-plastische Knickung 246  
 elastisch-plastisches Knickproblem 257  
  
 elastisch-plastische Verformung 238  
 Elementare MINER-Regel 348  
 E-Modul 11  
 Entlastungskerbe 23  
 Ermüdungsfestigkeit 310, 320  
 Ermüdungsfestigkeitsnachweis 335  
 Ermüdungsrissbruchmechanik 312  
 ertragbare Spannung 25, 315  
 EULER 239  
 EULER-Hyperbel 244, 247  
 EULERSche Knickfälle 242  
 EULERSche Knickkraft 256  
  
 Faser, neutrale 69, 161  
 Feldmessverfahren 307  
 Festigkeit, dynamische 315  
 Festigkeit, statische 310, 315, 318, 320  
 Festigkeitsberechnung 301, 310  
 Festigkeitshypothesen 351  
 Festigkeitsnachweis 310, 316  
 Festigkeitsnachweis, dynamischer 302, 349  
 Festigkeitsnachweis, statischer 301, 314, 320, 349  
 Festigkeitsprüfung 303  
 Festigkeitsverhalten 12  
 finite Elemente 308  
 Finite-Elemente-Methode (FEM) 308  
 FKM-Richtlinie 310  
 Flächenmoment 172  
 Flächenmoment, maximal 170, 173  
 Flächenmoment, minimal 170, 173  
 Flächenmoment, biaxiales 168, 171  
 Flächenpressung 56  
 Flächenmoment 70, 108, 110, 236  
 Flächenmoment, axiales 110  
 Flächenmoment, polares 110  
 Flächenmoment zusammengesetzter Flächen 114  
 Flächenträgheitsmoment *siehe* Flächenmoment  
 Fließlinien 35  
 Fließgrenze 317  
 Fließen 13  
 Fließlinien 13  
 FÖPPL 83, 150

- Formänderung, Biegung 128  
Formänderungsarbeit 280  
Formänderungsarbeit, bezogene, Zug 52  
Formänderungsarbeit, Biegung 144  
Formänderungsarbeit, Verdrehung 229  
Formänderungsarbeit, Zug 51  
Formänderung, Verdrehung 213  
Formänderung, Zug 9, 41  
Formzahl 301, 322, 324  
Formzahl, plastische 316, 317  
freie Knicklänge 242, 256
- Gemischte Hypothese 319  
geometrischer Größeneinfluss 329  
geometrischer Größeneinflussfaktor 330  
gerade Biegung 63  
Gesamteinflussfaktor 331, 350  
Gestaltänderungsenergiehypothese 318, 333  
Gestaltänderungshypothese 351  
Gestaltänderungsarbeit 280  
Gestaltänderungsarbeit 53  
Gestaltfestigkeit 320, 321  
Gestaltwechselfestigkeit 331, 350  
Gewaltbruch 13, 17  
Gleichgewicht, indifferent 234  
Gleichgewicht, labil 234  
Gleichgewicht, stabil 234  
Gleichgewichtszustand, indifferenter 236  
Gleichgewichtszustand, labiler 241, 256  
Gleitmodul 15  
Grad der statischen Unbestimmtheit 354, 355  
Grenzlast 233, 241, 248, 256  
Grenzspannung 26, 331  
Größeneinfluss 304  
Größeneinfluss, geometrischer 329  
Größeneinfluss, statistischer 330  
Größeneinfluss, technologischer 330  
Größeneinflussfaktor, geometrischer 330  
Größenfaktor 315  
Grundfall 242  
Grundgleichung der Biegung 64, 71
- Hauptachse 75, 167, 173, 262
- Hauptachsenproblem 260  
Hauptachsensystem 168  
Hohlquerschnitt, Torsion 225  
HOOKESches Gesetz 9, 44, 52, 129, 207  
Hot-Spot-Konzept 311  
Hypothese, Dehnung 284  
Hypothese, Formänderungsarbeit 284  
Hypothese, gemischte 319  
Hypothese, Gestaltänderungsarbeit 284  
Hypothese, größte Normalspannung 281  
Hypothese, Hauptspannung 281  
Hypothese, MOHR 283  
Hypothese, Schubspannung 282
- Imperfektionen 248  
indifferenter Gleichgewichtszustand 234, 236  
Innendruck 388  
Integrations-Verfahren 363  
Integrationsmethode 128
- J-Integral 314
- Kaltverfestigung 13  
Kennwerte 306  
Kerbeinfluss 302  
Kerbempfindlichkeit 311  
Kerbform 311  
Kerbformzahl 322, 349  
Kerbgrundkonzept 312  
Kerbgrundradius 324  
Kerbspannungskonzept 311  
Kerbwirkung 22  
Kerbwirkungszahl 302, 324–326, 349  
Kippen 248  
Knicken, plastisches 238, 257  
Knickkraft 234, 236, 242  
Knickkraft, EULERSche 256  
Knicklänge 235  
Knicklänge, freie 242, 256  
Knicklast, kritische 256  
Knickproblem, elastisch-plastisches 257  
Knickssicherheit 245, 246, 256  
Knickspannung 236, 238, 243, 244, 256  
Knickspannung, kritische 256

- Knickspannungslinien 249  
 Knickung 233  
 Knickung, elastisch-plastische 246  
 Knickung, elastische 238, 239, 245, 256  
 Knickung, plastische 246  
 Knoten 308  
 Konstruktionsfaktor 331, 350  
 Konstruktionskennwerte 321  
 Konzept der örtlichen Spannungen 311  
 Korrekturbeiwerte 321  
 Kraftgrößenverfahren 143, 366  
 Kritische Knicklast 256  
 Kritische Knickspannung 256  
 Krümmung 128  
 Kugel 388  
 Kurzzeitfestigkeit 19
- labil 234  
 labiler Gleichgewichtszustand 241, 256  
 elastische Knickung 245  
 Lastkollektiv 27, 344, 351  
 Lastspiele 19  
 Lebensdauer 347  
 linear elastische Bruchmechanik 313  
 Linie, elastische 128  
 Lochleibung 56
- maximales Flächenmoment 170, 173  
 maximale Schubspannung 207, 264, 280  
 maximale Spannung 262  
 MAXWELL, Satz von 140  
 mehrachsiger Zug/Druck 299  
 Mindestsicherheit 26, 27, 315, 319, 334  
 MINER-Regel 344, 347  
 MINER-Regel, Elementare 348  
 MINER-Regel, Modifizierte 348  
 MINER-Regel, Relative 348  
 minimale Spannung 262  
 minimales Flächenmoment 170, 173  
 Mittelspannung 321, 332, 350  
 Mittelspannungsempfindlichkeit 331, 333, 350  
 Modifizierte MINER-Regel 348  
 MOHR 150  
 MOHRScher Kreis 171
- MOHRScher Spannungskreis 262  
 Moiréverfahren 308  
 Momentenvektor 63, 206  
 Nennspannung 23, 311, 321  
 Nennspannungskonzept 301, 310, 348  
 neutrale Faser 69, 161  
 Normalspannung 8, 65, 279  
 Normalspannung, Zug 276  
 Normalspannungshypothese 319, 333, 334
- Oberflächenbeiwert 328  
 Oberflächenrauheit 329  
 Oberflächenverfestigungsfaktor 329  
 Oberflächeneinfluss 303, 328  
 Originale MINER-Regel 345
- plastische Formzahl 316, 317  
 plastische Knickung 238, 246, 257  
 plastische Stützzahl 316, 317  
 plastische Verformung 318  
 POISSON 41  
 polares Flächenmoment 110  
 PRANDTL 205, 222  
 Probestück-Normwerte 315  
 Profil, unsymmetrisch 167  
 Profile, symmetrische 160  
 Punktmessmethoden 307
- Querkontraktion 41  
 Querkraft 77–80  
 Querkürzung 41  
 Querverlängerung 42  
 Querzahl 41, 43  
 Quetschgrenze 14, 234, 238, 247, 249
- Rahmen, Biegemomente 100  
 Randschichtfaktor 329  
 Randschichtverfestigung 328  
 Rauheitsfaktor 328  
 Reduktion, statisch unbestimmtes System 353  
 reine Biegung 62, 65  
 Reißlackmethode 307  
 Relative MINER-Regel 348  
 Ring, umlaufender 381

- Riss 312  
Rissöffnungen 313  
Risswachstumskonzept 349  
Rückstellmoment 235  
ruhende Belastung 16, 18
- SAINT-VENANT 220  
SAINT-VENANT, Torsion 221  
Schadensakkumulation 312  
Schadenssumme 345  
Schädigungsakkumulationshypothese 344, 351  
Schädigungskennwert 312  
Scheibe gleicher Festigkeit 388  
Scheibe, umlaufende 382  
schiefe Biegung 64, 160  
Schlankheitsgrad 236–238, 242, 244, 256  
Schraubenfeder 214  
Schub 189  
Schubfestigkeiten 210  
Schubfestigkeitsfaktor 318, 319  
Schubmittelpunkt 167, 199  
Schubspannung 8, 15  
Schubspannung, Biegeträger 191  
Schubspannung, maximale 207, 264, 280  
Schubspannung, zugeordnete 189  
Schubspannungsintensitätshypothese 334  
schwellende Belastung 19  
Schwellfestigkeit 21, 26  
Schwingbeanspruchung 323  
schwingende Belastung 16  
Sicherheit 25, 26, 318, 319  
Sicherheitsfaktor 26  
Sicherheitsnachweis 26  
Sicherheitsnachweis, statischer 315  
Sicherheitszahl 26, 249, 256, 315  
Sicherheitszahlen 27  
Sicherheitszuschläge 316  
SIEBEL 325  
SMITH 20, 320  
SMITH-Diagramm 320, 350  
Spannung, Biegung 71  
Spannung, ertragbare 25  
Spannung, maximale 262  
Spannung, minimale 262
- Spannung, senkrecht zur Achse 31  
Spannung, Verdrehung 206  
Spannung, Zug, beliebiger Schnitt 31, 33  
Spannung, Zug, Normalschnitt 31  
Spannung, zulässige 25, 27  
Spannungsamplitude 323  
Spannungsgefälle 304, 323, 325–327  
Spannungsintensität 312  
Spannungsintensitätsfaktor 313, 314  
Spannungskreis 260  
Spannungsnachweis 26  
Spannungsoptik 307  
Spannungsspitze 301, 305, 316, 322, 325  
Spannungsverhältnis 347  
Spannungsverteilung 304, 321, 323  
Spannungszustand 267  
Spannungszustand, ebener 15, 259  
Spannungszustand, einachsig 9  
Stab, umlaufender 380  
stabil 234  
Stabilität 233  
Stabilitätsberechnung 248  
Stabilitätsfall 248  
Stabilitätsproblem 234, 236, 256  
statisch unbestimmtes System, Biegung 363  
statisch unbestimmtes System, Zug 357  
statische Festigkeit 310, 315, 320  
statische Festigkeit 318  
statischer Festigkeitsnachweis 301, 314, 320, 349  
statischer Sicherheitsnachweis 315  
statisch unbestimmtes System 353  
statistischer Größeneinfluss 330  
Stauchung 42  
STEINERScher Satz 110, 173  
Streckgrenze 13, 26  
Strukturspannungs-WÖHLER-Linien 311  
Stützwirkung 304  
Stützzahl 325, 327  
Stützzahl, dynamische 325, 349  
Stützzahl, plastische 316, 317  
Symmetriearchse 75, 168, 173  
Symmetrieebene 166  
symmetrische Profile 160

- System, statisch unbestimmtes 353  
System, statisch unbestimmtes, Reduktion 353  
  
technologischer Größeneinfluss 330  
Teilplastifizierung 316  
TETMAJER 246  
TETMAJER-Gerade 247  
Torsion 206, 220  
Torsion, Hohlquerschnitt 225  
Torsionsspannung 208  
Torsions-Widerstandsmoment 222  
Träger 63  
Trägheitsradius 237  
Traglast 248, 316, 317  
  
Überlagerung, Belastungsfälle 370  
Überlastfälle 332  
umlaufende Bauteile 380  
umlaufende Scheibe 382  
umlaufender Ring 381  
umlaufender Stab 380  
unsymmetrisches Profil 167  
  
Verdrehsteifigkeit 214  
Verdrehung 205  
Verdrehung, beliebiger Querschnitt 220  
Verdrehung, Kreiszylinder 206  
Verdrehung, Vollquerschnitt 220  
Verdrehwiderstand 222  
Verdrehwinkel 214  
Verformung, elastisch-plastische 238  
Verformung, plastische 318  
Vergleichs-Sicherheit 334  
Vergleichsspannung 279, 306  
Verkürzung 42  
Volumenänderung 42  
Volumenänderungsarbeit 53  
  
Vorzeichendefinition 78  
Vorzeichenregel 87  
Vorzeichenregel, Biegelinie 131  
  
Warmdehngrenze 305  
Wärmedehnungszahl 373  
Wärmespannung 373, 374  
Warmfestigkeit 305  
Wechselfestigkeit 20, 26, 305, 323  
wechselnde Belastung 19  
Werkstoffkennwerte 321  
Werkstoff-WÖHLER-Linie 344  
Widerstandsmoment 68, 108, 120  
Widerstandsmoment, Biegung 70  
Widerstandsmoment, Verdrehung 209  
Winkeländerung 145  
WÖHLER 19  
WÖHLER-Linie 351  
WÖHLER-Linie 344  
WÖHLER-Versuch 320  
  
Zeitdehngrenze 305  
Zeitfestigkeit 19  
Zeitstandsfestigkeit 305  
Zerreißdiagramme 14  
Zug 31  
Zug, statisch unbestimmtes System 357  
Zug/Druck, mehrachsiger 299  
zugeordnete Schubspannung 189  
Zugfestigkeit 13, 306, 318  
zulässige Spannung 25, 27  
zusammengesetzte Beanspruchung 275, 318  
Zusammensetzung, Normal- und Schubspannung 279  
Zylinder 388  
Zylinder, dickwandiger 391