

Volker Läpple

**Lösungsbuch zur
Einführung in die
Festigkeitslehre**

Aus dem Programm _____
Grundlagen Maschinenbau und Verfahrenstechnik

Klausurentrainer Technische Mechanik
von J. Berger

**Lehrsystem Technische Mechanik mit Lehrbuch,
Aufgabensammlung, Lösungsbuch sowie Formeln
und Tabellen**

von A. Böge und W. Schlemmer

Vieweg Handbuch Maschinenbau
herausgegeben von A. Böge

Technische Strömungslehre
von L. Böswirth

Technische Mechanik mit Mathcad, Matlab und Maple
von G. Henning, A. Jahr und U. Mrowka

Thermodynamik für Ingenieure
von K. Langeheinecke, P. Jany und G. Thieleke

Technische Mechanik. Statik
von H.-A. Richard und M. Sander

Technische Mechanik. Festigkeitslehre
von H.-A. Richard und M. Sander

Werkstoffkunde und Werkstoffprüfung
von W. Weißbach

**Aufgabensammlung Werkstoffkunde
und Werkstoffprüfung**
von W. Weißbach und M. Dahms

vieweg _____

Volker Läpple

Lösungsbuch zur Einführung in die Festigkeitslehre

**Ausführliche Lösungen
und Formelsammlung**

Mit 184 Abbildungen

Viewegs Fachbücher der Technik



Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Der Verfasser hat alle Texte, Formeln und Abbildungen mit größter Sorgfalt erarbeitet.
Dennoch können Fehler nicht ausgeschlossen werden. Deshalb übernehmen weder Verfasser
noch Verlag irgendwelche Garantien für die in diesem Buch abgedruckten Informationen. In
keinem Fall haften Verfasser und Verlag für irgendwelche direkten oder indirekten Schäden,
die aus der Anwendung dieser Informationen folgen.

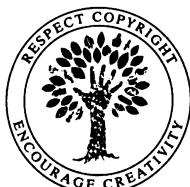
1. Auflage Februar 2007

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlag | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2007

Lektorat: Thomas Zipsner

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.vieweg.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes
ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere
für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und
die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Druck und buchbinderische Verarbeitung: Wilhelm & Adam, Heusenstamm

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0257-6

Vorwort

Die sichere Auslegung von Bauteilen und Anlagen gehört zu den Grundfertigkeiten eines Ingenieurs. Fehlerhaft dimensionierte Bauteile können zu schweren Schäden und hohen Kosten führen. Man denke beispielsweise an das Bersten eines Druckbehälters, den Einsturz einer Stahlkonstruktion oder den Bruch einer Radaufhängung.

Obwohl für das Erbringen eines Festigkeitsnachweises heute leistungsfähige Rechenprogramme zur Verfügung stehen, so stellen sie dennoch nur Hilfsmittel dar. Die Interpretation der Rechenergebnisse und letztlich auch die Prüfung ihrer Plausibilität liegt nach wie vor in der Verantwortung des Konstrukteurs. Das grundlegende Verständnis für die Problemstellung sowie das Erfassen der wesentlichen Zusammenhänge darf nicht durch das Erlernen der Bedieneroberfläche einer Software ersetzt werden. Auch ist es kaum wirtschaftlich, Rechenprogramme bereits für die Auslegung erster Konstruktionsentwürfe einzusetzen. Gerade in diesem Stadium ist es jedoch wichtig zu wissen, ob ein Entwurf hinsichtlich Beanspruchung und Dimensionierung überhaupt zielführend ist und sich die Weiterentwicklung lohnt.

Der Konstrukteur muss ein "Gespür" für die Zusammenhänge zwischen Beanspruchung, Verformung und Bauteilverhalten, insbesondere unter Berücksichtigung des eingesetzten Werkstoffs, sowie einen sicheren Blick für die kritischen d. h. höchst beanspruchten Stellen entwickeln. Diese Grundfertigkeit lässt sich nur durch das selbständige Lösen verschiedener Probleme erlernen. Die vielfältigen Übungsaufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad sollen helfen, dieses "Gespür" für das Bauteil zu entwickeln.

Der vorliegende Band enthält zu allen Aufgaben des Lehr- und Übungsbuches ausführliche Lösungen und, dort wo sinnvoll, auch alternative Lösungsvorschläge. Damit wird es dem Studierenden ermöglicht, sein erlerntes Wissen zu überprüfen, anhand praxisorientierter Aufgaben anzuwenden und zu vertiefen. Er wird in der Lage sein, die Problemstellung zu analysieren, die wesentlichen Zusammenhänge zu erfassen, ein mathematisch-physikalisches Modell zu formulieren und eine geeignete Lösungsstrategie zu entwickeln. Darüber hinaus eignet sich der Lösungsband, gemeinsam mit dem Lehr- und Übungsbuch, für eine eigenständige Klausurvorbereitung. Auch Ingenieure in der Praxis finden wertvolle Hinweise für die Entwicklung von Lösungsstrategien zur Durchführung von Festigkeitsnachweisen.

Mein besonderer Dank gilt dem Vieweg-Verlag, insbesondere Herrn Dipl.-Ing. Thomas Zipsner, für die sorgfältige Drucklegung und die angenehme Zusammenarbeit.

Anregungen für Ergänzungen sowie Verbesserungsvorschläge werden stets gerne entgegen genommen.

Schorndorf, im Dezember 2006

Volker Läpple

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Grundbelastungsarten	2
2.1 Formelsammlung zu den Grundbelastungsarten	2
2.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben	5
Lösung zu Aufgabe 2.1	5
Lösung zu Aufgabe 2.2	7
Lösung zu Aufgabe 2.3	8
Lösung zu Aufgabe 2.4	9
Lösung zu Aufgabe 2.5	10
Lösung zu Aufgabe 2.6	13
Lösung zu Aufgabe 2.7	14
Lösung zu Aufgabe 2.8	16
Lösung zu Aufgabe 2.9	17
Lösung zu Aufgabe 2.10	18
Lösung zu Aufgabe 2.11	20
Lösung zu Aufgabe 2.12	21
Lösung zu Aufgabe 2.13	22
Lösung zu Aufgabe 2.14	23
Lösung zu Aufgabe 2.15	24
Lösung zu Aufgabe 2.16	25
Lösung zu Aufgabe 2.17	26
Lösung zu Aufgabe 2.18	28
Lösung zu Aufgabe 2.19	29
Lösung zu Aufgabe 2.20	30
Lösung zu Aufgabe 2.21	31
Lösung zu Aufgabe 2.22	33
Lösung zu Aufgabe 2.23	36
Lösung zu Aufgabe 2.24	37
Lösung zu Aufgabe 2.25	38
Lösung zu Aufgabe 2.26	39
Lösung zu Aufgabe 2.27	40
Lösung zu Aufgabe 2.28	41
Lösung zu Aufgabe 2.29	42
Lösung zu Aufgabe 2.30	43
Lösung zu Aufgabe 2.31	44
Lösung zu Aufgabe 2.32	46
Lösung zu Aufgabe 2.33	47
Lösung zu Aufgabe 2.34	49
Lösung zu Aufgabe 2.35	51

3 Spannungszustand	52
3.1 Formelsammlung zum Spannungszustand	52
3.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben.....	54
Lösung zu Aufgabe 3.1	54
Lösung zu Aufgabe 3.2	56
Lösung zu Aufgabe 3.3	58
Lösung zu Aufgabe 3.4	60
Lösung zu Aufgabe 3.5	63
4 Verformungszustand	70
4.1 Formelsammlung zum Verformungszustand	70
4.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben.....	72
Lösung zu Aufgabe 4.1	72
Lösung zu Aufgabe 4.2	74
Lösung zu Aufgabe 4.3	76
Lösung zu Aufgabe 4.4	79
5 Elastizitätsgesetze	81
5.1 Formelsammlung zu den Elastizitätsgesetzen	81
5.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben.....	83
Lösung zu Aufgabe 5.1	83
Lösung zu Aufgabe 5.2	85
Lösung zu Aufgabe 5.3	86
Lösung zu Aufgabe 5.4	88
Lösung zu Aufgabe 5.5	90
Lösung zu Aufgabe 5.6	94
Lösung zu Aufgabe 5.7	95
Lösung zu Aufgabe 5.8	96
6 Festigkeitshypothesen	97
6.1 Formelsammlung zu den Festigkeitshypothesen	97
6.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben.....	99
Lösung zu Aufgabe 6.1	99
Lösung zu Aufgabe 6.2	101
Lösung zu Aufgabe 6.3	103
Lösung zu Aufgabe 6.4	105
Lösung zu Aufgabe 6.5	107
Lösung zu Aufgabe 6.6	110
Lösung zu Aufgabe 6.7	112
Lösung zu Aufgabe 6.8	116
Lösung zu Aufgabe 6.9	120
Lösung zu Aufgabe 6.10	123
Lösung zu Aufgabe 6.11	124
Lösung zu Aufgabe 6.12	125
Lösung zu Aufgabe 6.13	129

7 Kerbwirkung	134
7.1 Formelsammlung zur Kerbwirkung	134
7.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben	135
Lösung zu Aufgabe 7.1	135
Lösung zu Aufgabe 7.2	137
Lösung zu Aufgabe 7.3	138
Lösung zu Aufgabe 7.4	140
Lösung zu Aufgabe 7.5	143
Lösung zu Aufgabe 7.6	145
Lösung zu Aufgabe 7.7	149
Lösung zu Aufgabe 7.8	151
Lösung zu Aufgabe 7.9	156
Lösung zu Aufgabe 7.10	159
Lösung zu Aufgabe 7.11	163
8 Knickung	166
8.1 Formelsammlung zur Knickung	166
8.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben	168
Lösung zu Aufgabe 8.1	168
Lösung zu Aufgabe 8.2	169
Lösung zu Aufgabe 8.3	171
Lösung zu Aufgabe 8.4	173
Lösung zu Aufgabe 8.5	174
Lösung zu Aufgabe 8.6	175
Lösung zu Aufgabe 8.7	176
Lösung zu Aufgabe 8.8	178
Lösung zu Aufgabe 8.9	179
9 Schiefe Biegung	180
9.1 Formelsammlung zur Schiefen Biegung	180
9.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben	183
Lösung zu Aufgabe 9.1	183
Lösung zu Aufgabe 9.2	185
Lösung zu Aufgabe 9.3	187
Lösung zu Aufgabe 9.4	189
Lösung zu Aufgabe 9.5	194
10 Schubspannungen durch Querkräfte bei Biegung	196
10.1 Formelsammlung zum Querkraftschub	196
10.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben	199
Lösung zu Aufgabe 10.1	199
Lösung zu Aufgabe 10.2	200
Lösung zu Aufgabe 10.3	201
Lösung zu Aufgabe 10.4	202
Lösung zu Aufgabe 10.5	203
Lösung zu Aufgabe 10.6	205

11 Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte	207
11.1 Formelsammlung zur Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte	207
11.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben	210
Lösung zu Aufgabe 11.1	210
Lösung zu Aufgabe 11.2	211
Lösung zu Aufgabe 11.3	212
Lösung zu Aufgabe 11.4	213
12 Behälter unter Innen- und Außendruck	214
12.1 Formelsammlung zu Behältern unter Innen- und Außendruck.....	214
12.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben	217
Lösung zu Aufgabe 12.1	217
Lösung zu Aufgabe 12.2	218
Lösung zu Aufgabe 12.3	220
Lösung zu Aufgabe 12.4	222
Lösung zu Aufgabe 12.5	224
Lösung zu Aufgabe 12.6	226
Lösung zu Aufgabe 12.7	228
Lösung zu Aufgabe 12.8	232
Lösung zu Aufgabe 12.9	234
Lösung zu Aufgabe 12.10	239
Lösung zu Aufgabe 12.11	244
Lösung zu Aufgabe 12.12	246
Lösung zu Aufgabe 12.13	248
Lösung zu Aufgabe 12.14	250
Lösung zu Aufgabe 12.15	255
13 Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit	256
13.1 Formelsammlung zu Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit	256
13.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben	261
Lösung zu Aufgabe 13.1	261
Lösung zu Aufgabe 13.2	263
Lösung zu Aufgabe 13.3	265
Lösung zu Aufgabe 13.4	266
Lösung zu Aufgabe 13.5	268
Lösung zu Aufgabe 13.6	270
Lösung zu Aufgabe 13.7	273
Lösung zu Aufgabe 13.8	275
Lösung zu Aufgabe 13.9	276
Lösung zu Aufgabe 13.10	278
Lösung zu Aufgabe 13.11	280
Lösung zu Aufgabe 13.12	283
Lösung zu Aufgabe 13.13	284
Lösung zu Aufgabe 13.14	286
Lösung zu Aufgabe 13.15	288

Lösung zu Aufgabe 13.16	289
Lösung zu Aufgabe 13.17	291
Lösung zu Aufgabe 13.18	293
Lösung zu Aufgabe 13.19	296
Lösung zu Aufgabe 13.20	300
Lösung zu Aufgabe 13.21	303
Lösung zu Aufgabe 13.22	306
Lösung zu Aufgabe 13.23	312
Lösung zu Aufgabe 13.24	316
Lösung zu Aufgabe 13.25	320
Lösung zu Aufgabe 13.26	325

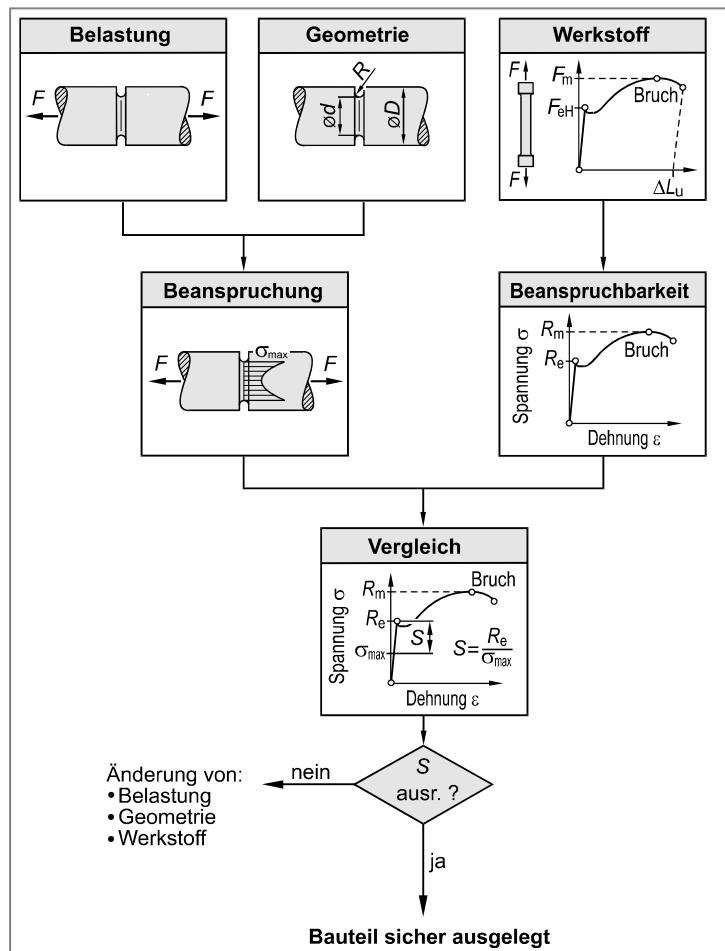
1 Einleitung

Die Beanspruchbarkeit technischer Bauteile und Konstruktionen ist begrenzt. Es ist die Aufgabe der Festigkeitslehre, Konzepte bereitzustellen, die eine sichere und wirtschaftliche Bauauslegung unter Berücksichtigung von Art und Höhe der **Belastung** sowie von **Geometrie** und **Werkstoffart** erlauben. Bild 1.1 zeigt das Prinzip eines Festigkeitsnachweises.

Ist die Art der Belastung sowie die Geometrie des Bauteils bekannt, dann lassen sich die Spannungen an jeder Stelle berechnen. Für einen Festigkeitsnachweis sind die Spannungen an den höchst beanspruchten Stellen von Bedeutung. Liegt ein mehrachsiger Spannungszustand vor, dann ist es erforderlich, aus den gegebenen Lastspannungen, die Vergleichsspannung zu berechnen.

Die maximale Spannung bzw. die maximale Vergleichsspannung (maximale **Beanspruchung** des Bauteils) wird mit der **Beanspruchbarkeit**, also dem für das Werkstoffversagen relevanten Kennwert (z. B. Dehngrenze oder Zugfestigkeit) verglichen.

Zwischen Beanspruchung und Beanspruchbarkeit muss ein ausreichender Sicherheitsabstand vorliegen. Ist diese **Sicherheit** zu gering (z. B. kleiner als 1,20 gegenüber einer plastischen Verformung), dann ist ein sicherer Betrieb nicht gewährleistet. Es ist dann erforderlich, entweder die Belastung zu vermindern, die tragende Querschnittsfläche zu vergrößern oder einen Werkstoff mit höherer Festigkeit zu verwenden und den Festigkeitsnachweis erneut durchzuführen.



Prinzip eines Festigkeitsnachweises

2 Grundbelastungsarten

2.1 Formelsammlung zu den Grundbelastungsarten

Zug

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Spannungsermittlung bei reiner Zugbeanspruchung

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

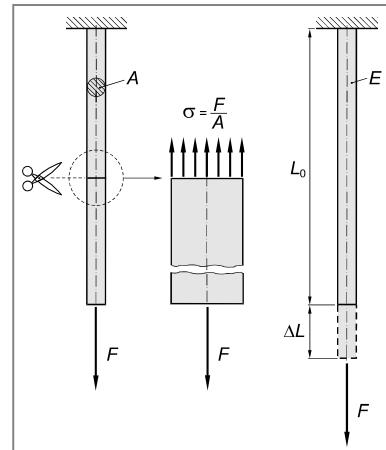
(technische) Dehnung

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Hooke'sches Gesetz bei einachsiger Beanspruchung

$$\epsilon_q = -\mu \cdot \epsilon_l$$

Poisson'sches Gesetz



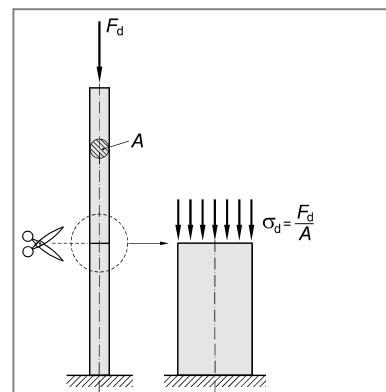
Druck

$$\sigma_d = \frac{F_d}{A}$$

Spannungsermittlung bei reiner Druckbeanspruchung

Hinweis:

Ein Versagen unter Druckbeanspruchung kann bei duktilen Werkstoffen durch Fließen oder Knickung, bei spröden Werkstoffen durch Bruch oder Knickung erfolgen. Die Knickung wird in Kapitel 8 besprochen.



Gerade Biegung

$$\sigma(z) = \frac{M_b}{I} \cdot z$$

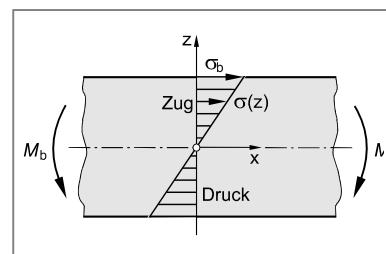
Spannungsverteilung bei gerader, reiner Biegung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$$

Spannungsermittlung bei gerader, reiner Biegung

$$z_S = \frac{\sum_i z_i \cdot A_i}{\sum_i A_i}$$

Teilschwerpunktsatz



Schub (Abscherung)

$$\tau = \frac{F_a}{A}$$

Mittlere Abscherspannung

$$\gamma = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

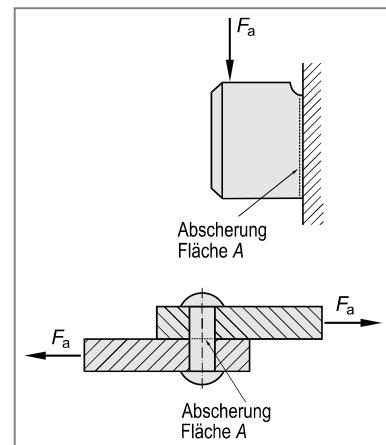
Definition der Schiebung (Winkelverzerrung)

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Hooke'sches Gesetz für Schubbeanspruchung

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Schubmodul



Hinweise:

1. Zugeordnete Schubspannungen wirken stets in zwei zueinander senkrechten Ebenen des betrachteten Volumenelements. Sie besitzen den gleichen Betrag und zeigen entweder auf die gemeinsame Kante hin oder von ihr weg.
2. Eine Schiebung γ ist positiv anzusetzen, falls sich der ursprünglich rechte Winkel des Winkelements vergrößert. Verkleinert sich der Winkel, dann ist die Schiebung negativ anzusetzen.

Torsion kreisförmiger Querschnitte

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

Maximale Torsionsschubspannung¹⁾

$$\text{mit } W_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \quad \text{für Vollkreisquerschnitt}$$

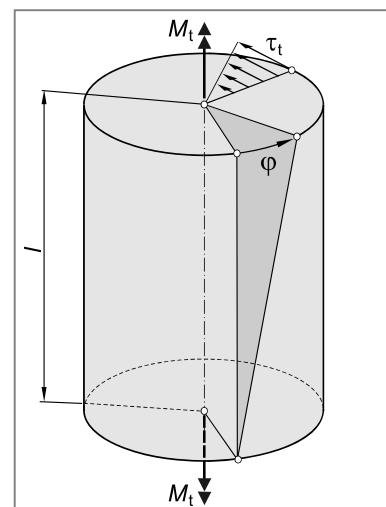
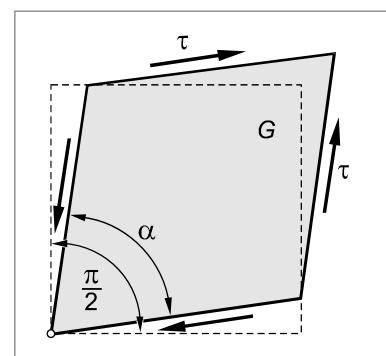
$$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \quad \text{für Kreisringquerschnitt}$$

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p}$$

Verdrehwinkel¹⁾

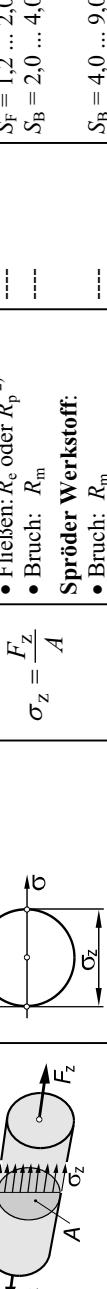
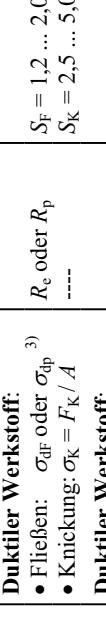
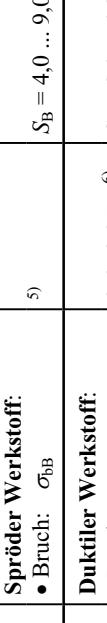
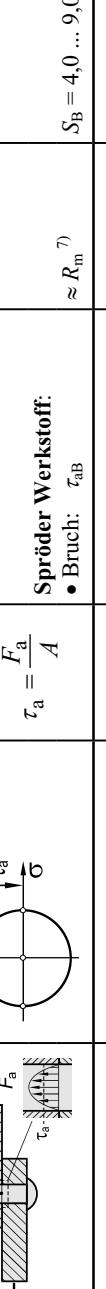
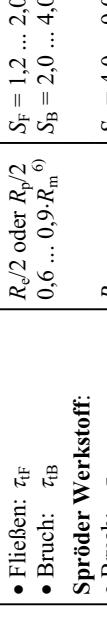
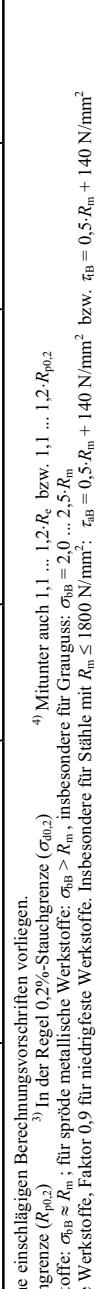
$$\varphi (\text{in Grad}) = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi (\text{in rad})$$

Umrechnung von Grad- in Bogenmaß



¹⁾ Nur gültig für gerade prismatische Stäbe mit Vollkreis- oder Kreisringquerschnitt.

Zusammenfassung der Grundbelastungsarten

Belastungsart	Spannungsverteilung	Mohr'scher Spannungskreis	Grundgleichung	Werkstoffkennwert	Ersatzwert	Sicherheitsbeiwerte ¹⁾
Zug			$\sigma_z = \frac{F_z}{A}$	Duktiler Werkstoff: • Fließen: R_e oder $R_p^{2)}$ • Bruch: R_m	----	$S_F = 1,2 \dots 2,0$ $S_B = 2,0 \dots 4,0$
Druck			$\sigma_d = \frac{F_d}{A}$	Duktiler Werkstoff: • Fließen: σ_{df} oder $\sigma_{dp}^{3)}$ • Knickung: $\sigma_K = F_K / A$	R_e oder R_p	$S_F = 1,2 \dots 2,0$ $S_K = 2,5 \dots 5,0$
Biegung			$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$	Duktiler Werkstoff: • Fließen: σ_{bf} Spröder Werkstoff: • Bruch: σ_{bb}	----	$S_B = 4,0 \dots 9,0$
Schub (Abscherung)			$\tau_a = \frac{F_a}{A}$	Duktiler Werkstoff: • Bruch: τ_{ab}	$0,6 \dots 0,9 \cdot R_m^{6)}$	$S_B = 2,0 \dots 4,0$
Torsion			$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$	Duktiler Werkstoff: • Fließen: τ_{tf} • Bruch: τ_{tb}	$R_t/2$ oder $R_p/2$ $0,6 \dots 0,9 \cdot R_m^{6)}$	$S_F = 1,2 \dots 2,0$ $S_B = 2,0 \dots 4,0$
				Spröder Werkstoff: • Bruch: τ_{tb}	R_m	$S_B = 4,0 \dots 9,0$

¹⁾ Anhaltswerte, falls keine einschlägigen Berechnungsvorschriften vorliegen.

²⁾ In der Regel 0,2%-Dehngrenze ($R_{p0,2}$)

³⁾ In der Regel 0,6% Stauchgrenze ($\sigma_{10,2}$)

⁴⁾ Mitunter auch 1,1 ... 1,2 R_e bzw. 1,1 ... 1,2 $R_{p0,2}$

⁵⁾ Für icer spröde Werkstoffe: $\sigma_{bb} > R_m$; für spröde metallische Werkstoffe: $\tau_{tb} > R_m$, insbesondere für Grauguss: $\sigma_{bb} = 2,0 \dots 2,5 R_m$

⁶⁾ Faktor 0,6 für höchste Werkstoffe, Faktor 0,9 für niedrigste Werkstoffe, Faktor 0,7 für mittlere Werkstoffe, Faktor 0,6 für Grauguss.

⁷⁾ Gültig für Grauguss.

⁸⁾ Für icer spröde Werkstoffe: $\sigma_{bb} = 1800 \text{ N/mm}^2$; $\tau_{tb} = 0,5 \cdot R_m + 140 \text{ N/mm}^2$ bzw. $\tau_{tb} = 0,5 \cdot R_m + 140 \text{ N/mm}^2$

2.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 2.1

a) Berechnung der Normalspannung

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{60\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (25^2 - 20^2) \text{ mm}^2} = 339,53 \text{ N/mm}^2$$

b) Festigkeitsbedingung (Fließen)

$$\sigma \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma} = \frac{680 \text{ N/mm}^2}{339,53 \text{ N/mm}^2} = 2,00 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Festigkeitsbedingung (Bruch)

$$\sigma \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma = \frac{R_m}{S_B}$$

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma} = \frac{1050 \text{ N/mm}^2}{339,53 \text{ N/mm}^2} = 3,09 \quad (\text{ausreichend, da } S_B > 2,0)$$

c) Berechnung der Dehnung bzw. Verlängerung mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\Delta l = \frac{\sigma \cdot l_0}{E} = \frac{339,53 \text{ N/mm}^2 \cdot 1200 \text{ mm}}{208\,000 \text{ N/mm}^2} = 1,96 \text{ mm}$$

d) Berechnung der Querkontraktion mit Hilfe des Poisson'schen Gesetzes

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon_l$$

$$\text{mit } \varepsilon_l = \frac{\sigma}{E} \text{ und } \varepsilon_q = \frac{\Delta d_a}{d_a} \text{ folgt}$$

$$\frac{\Delta d_a}{d_a} = -\mu \cdot \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = -\frac{\Delta d_a}{d_a} \cdot \frac{E}{\mu}$$

$$\text{mit } \sigma = \frac{F}{A} \text{ folgt schließlich:}$$

$$F = -\frac{\Delta d_a}{d_a} \cdot \frac{E}{\mu} \cdot \frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2) = -\frac{-0,01 \text{ mm} \cdot 208\,000 \text{ N/mm}^2}{25 \text{ mm} \cdot 0,30} \cdot \frac{\pi}{4} (25^2 - 20^2) \text{ mm}^2 \\ = 49\,008 \text{ N} \approx \mathbf{49 \text{ kN}}$$

e) Festigkeitsbedingung (Fließen)

$$\sigma \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{F^*}{\frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$d_i = \sqrt{d_a^2 - \frac{4 \cdot F^* \cdot S_F}{\pi \cdot R_{p0,2}}} = \sqrt{(25 \text{ mm})^2 - \frac{4 \cdot 150\,000 \text{ N} \cdot 1,4}{\pi \cdot 680 \text{ N/mm}^2}} = 15,22 \text{ mm}$$

$$s = \frac{d_a - d_i}{2} = \frac{25 \text{ mm} - 15,22 \text{ mm}}{2} = \mathbf{4,89 \text{ mm}}$$

Lösung zu Aufgabe 2.2

- a) Versagensmöglichkeiten: Fließen und Bruch.

Ermittlung der zulässigen Spannungen

$$\text{Fließen: } \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_e}{S_F} = \frac{430 \text{ N/mm}^2}{1,5} = 286,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Bruch: } \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_m}{S_B} = \frac{630 \text{ N/mm}^2}{2,0} = 315 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung gegen Fließen, da kleinere zulässige Spannung.

Festigkeitsbedingung

$$\sigma \leq \sigma_{\text{zul}}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$\frac{F}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F \cdot S_F}{\pi \cdot R_e}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 15500 \text{ N} \cdot 1,5}{\pi \cdot 430 \text{ N/mm}^2}} = 8,29 \text{ mm}$$

- b) Berechnung der Dehnung bzw. Verlängerung mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{A \cdot E} = \frac{15500 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (8,29 \text{ mm})^2 \cdot 210000 \text{ N/mm}^2} = 0,00137 = 1,37 \%$$

Mit $\varepsilon = \Delta l / l_0$ folgt dann für die Verlängerung des Zugstabes:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l_0 = 0,00137 \cdot 1500 \text{ mm} = 2,05 \text{ mm}$$

- c) Bedingung für Bruch:

$$\sigma = R_m$$

$$\frac{F_B}{A} = R_m$$

$$F_B = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot R_m = \frac{\pi}{4} \cdot (8,29 \text{ mm})^2 \cdot 630 \text{ N/mm}^2 = 34064 \text{ N}$$

Lösung zu Aufgabe 2.3

a) Berechnung der Kraft pro Stahlband

Leerer Wassertank: $F_L = \frac{m_L \cdot g}{4} = \frac{2\,000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{4} = 4\,905 \text{ N}$

Voller Wassertank: $F_V = \frac{m_V \cdot g}{4} = \frac{3\,600 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{4} = 8\,829 \text{ N}$

Berechnung der Spannungen im Stahlband

Leerer Wassertank:

$$\sigma_L = \frac{F_L}{A} = \frac{4\,905 \text{ N}}{25 \text{ mm} \cdot 4 \text{ mm}} = 49,05 \text{ N/mm}^2$$

Voller Wassertank:

$$\sigma_V = \frac{F_V}{A} = \frac{8\,829 \text{ N}}{25 \text{ mm} \cdot 4 \text{ mm}} = 88,29 \text{ N/mm}^2$$

b) Festigkeitsbedingung für Fließen (voller Tank)

$$\sigma_V \leq \sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_v} = \frac{265 \text{ N/mm}^2}{88,29 \text{ N/mm}^2} = 3,00 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Festigkeitsbedingung für Bruch (voller Tank)

$$\sigma_V \leq \sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B}$$

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_v} = \frac{470 \text{ N/mm}^2}{88,29 \text{ N/mm}^2} = 5,32 \quad (\text{ausreichend, da } S_B > 2,0)$$

c) Berechnung der Verlängerung der Stahlbänder infolge Befüllung (Hooke'sches Gesetz, einachsiger Spannungszustand)

$$\Delta\varepsilon = \frac{\sigma_V - \sigma_L}{E} = \frac{88,29 \text{ N/mm}^2 - 49,05 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,000187$$

Mit $\varepsilon = \Delta l / l_0$ folgt schließlich:

$$\Delta l = \Delta\varepsilon \cdot l_0 = 0,000187 \cdot 1\,500 \text{ mm} = 0,28 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.4

- a) Versagensmöglichkeiten: Fließen und Bruch

Ermittlung der zulässigen Spannungen

$$\text{Fließen: } \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_e}{S_F} = \frac{260 \text{ N/mm}^2}{1,5} = 173,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Bruch: } \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_m}{S_B} = \frac{480 \text{ N/mm}^2}{2,0} = 240 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung gegen Fließen, da kleinere zulässige Spannung.

Festigkeitsbedingung

$$\sigma \leq \sigma_{\text{zul}}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$\frac{\frac{m \cdot g}{\pi \cdot d^2}}{4} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot m \cdot g \cdot S_F}{\pi \cdot R_e}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2500 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,5}{\pi \cdot 260 \text{ N/mm}^2}} = 13,42 \text{ mm}$$

- b) Versagensmöglichkeit Bruch, da spröder Werkstoff

Festigkeitsbedingung

$$\sigma \leq \sigma_{\text{zul}}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{R_m}{S_B}$$

$$\frac{\frac{m \cdot g}{\pi \cdot d^2}}{4} = \frac{R_m}{S_B}$$

$$S_B = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \frac{R_m}{m \cdot g} \\ = \frac{\pi}{4} \cdot (20 \text{ mm})^2 \cdot \frac{300 \text{ N/mm}^2}{2500 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 3,84 \quad (\text{nicht ausreichend, da } S_B < 4,0)$$

- c) Versagensmöglichkeit Bruch, da spröder Werkstoff

Festigkeitsbedingung

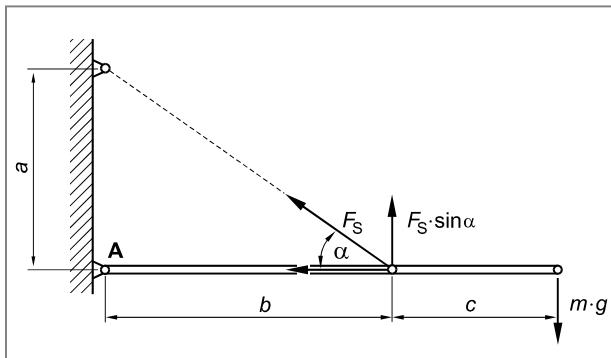
$$\sigma \leq \sigma_{\text{zul}}$$

$$\frac{\frac{m \cdot g}{\pi \cdot d^2}}{4} = \frac{R_m}{S_B}$$

$$m = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \frac{R_m}{g \cdot S_B} = \frac{\pi}{4} \cdot (20 \text{ mm})^2 \cdot \frac{300 \text{ N/mm}^2}{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 4} = 2402 \text{ kg}$$

Lösung zu Aufgabe 2.5

a) Freischneiden des Stabwerks (ohne Lagerstellen)



Ermittlung des Winkels α (siehe Abbildung):

$$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) = \arctan\left(\frac{1,8 \text{ m}}{2,0 \text{ m}}\right) = 41,99^\circ$$

Ansetzen des Momentengleichgewichts um die Lagerstelle A liefert die Stabkraft F_S :

$$\Sigma M_A = 0 :$$

$$F_S \cdot \sin \alpha \cdot b = m \cdot g \cdot (b + c)$$

$$F_S = \frac{m \cdot g}{\sin \alpha} \cdot \frac{b + c}{b} = \frac{1500 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{\sin 41,99^\circ} \cdot \frac{(2 \text{ m} + 1,2 \text{ m})}{2 \text{ m}} = 35 \text{ 195 N}$$

b) Ermittlung der Zugspannung im Stab

$$\sigma_S = \frac{F_S}{A} = \frac{F_S}{\frac{\pi}{4}(d_a^2 - d_i^2)} = \frac{35195 \text{ N}}{\frac{\pi}{4}(50^2 - 40^2) \text{ mm}^2} = 49,8 \text{ N/mm}^2$$

c) Berechnung der Dehnung bzw. der Verlängerung des Stabes mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes (einachsiger Spannungszustand)

Für **Stahl** ($E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$):

$$\sigma_S = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{mit } l_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Delta l = \frac{\sigma_S \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{E} = \frac{49,8 \text{ N/mm}^2 \cdot \sqrt{2000^2 + 1800^2} \text{ mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,64 \text{ mm}$$

Für die **Al-Legierung** ($E = 70\,000 \text{ N/mm}^2$):

$$\Delta l = \frac{\sigma_S \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{E} = \frac{49,8 \text{ N/mm}^2 \cdot \sqrt{2000^2 + 1800^2} \text{ mm}^2}{70\,000 \text{ N/mm}^2} = 1,91 \text{ mm}$$

d) Bedingung für Bruch:

$$\sigma_S = R_m$$

$$\frac{F_S}{A} = R_m$$

$$\frac{m_1 \cdot g}{\sin \alpha} \cdot \frac{b+c}{b} \cdot \frac{1}{A} = R_m$$

Für **Stahl** ergibt sich damit:

$$m_1 = \frac{b}{b+c} \cdot \frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2) \cdot \frac{R_m \cdot \sin \alpha}{g}$$

$$= \frac{2000 \text{ mm}}{(2000+1200) \text{ mm}} \cdot \frac{\pi}{4} (50^2 - 40^2) \text{ mm}^2 \cdot \frac{510 \text{ N/mm}^2 \cdot \sin 41,99^\circ}{9,81 \text{ m/s}^2} = 15364 \text{ kg}$$

Für die **Aluminiumlegierung** folgt auf analoge Weise:

$$m_1 = \frac{2000 \text{ mm}}{(2000+1200) \text{ mm}} \cdot \frac{\pi}{4} (50^2 - 40^2) \text{ mm}^2 \cdot \frac{350 \text{ N/mm}^2 \cdot \sin 41,99^\circ}{9,81 \text{ m/s}^2} = 10544 \text{ kg}$$

e) **Versagensmöglichkeiten:** Fließen und Bruch

Ermittlung der zulässigen Spannungen

Für die **Stahlkonstruktion** folgt:

$$\text{Fließen: } \sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F} = \frac{275 \text{ N/mm}^2}{1,5} = 183,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Bruch: } \sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B} = \frac{510 \text{ N/mm}^2}{2,0} = 255 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung gegenüber Fließen, da kleinere zulässige Spannung.

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_S \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{F_S}{A} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$\frac{\frac{m_2 \cdot g}{\sin \alpha} \cdot \frac{b+c}{b}}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2) = \frac{m_2 \cdot g}{\sin \alpha} \cdot \frac{b+c}{b} \cdot \frac{S_F}{R_e}$$

$$d_a = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{m_2 \cdot g}{\sin \alpha} \cdot \frac{b+c}{b} \cdot \frac{S_F}{R_e} + d_i^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{3250 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{\sin 41,99^\circ} \cdot \frac{(2+1,2) \text{ m}}{2 \text{ m}} \cdot \frac{1,5}{275 \text{ N/mm}^2} + (40 \text{ mm})^2} = 46,15 \text{ mm}$$

Damit errechnet sich die Mindestwanddicke s für die Stahlkonstruktion zu:

$$s = \frac{d_a - d_i}{2} = \frac{46,15 \text{ mm} - 40 \text{ mm}}{2,0} = 3,07 \text{ mm}$$

Für die **Al-Konstruktion** folgt:

$$\text{Fließen: } \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F} = \frac{270 \text{ N/mm}^2}{1,5} = 180 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Bruch: } \sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B} = \frac{350 \text{ N/mm}^2}{2,0} = 175 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung gegenüber Bruch (!), da kleinere zulässige Spannung.

Für den Außendurchmesser folgt in Analogie zur Stahlkonstruktion:

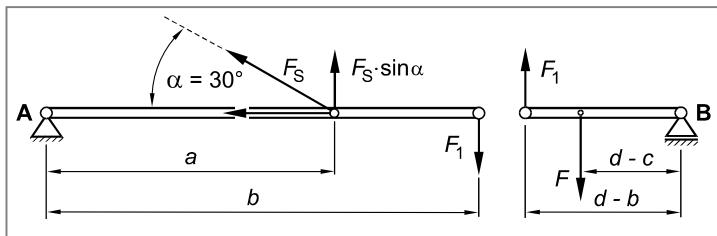
$$d_a = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{3250 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{\sin 41,99^\circ} \cdot \frac{(2+1,2) \text{ m}}{2 \text{ m}} \cdot \frac{2,0}{350 \text{ N/mm}^2} + (40 \text{ mm})^2} = 46,42 \text{ mm}$$

Damit errechnet sich die Mindestwanddicke s für die Al-Konstruktion zu:

$$s = \frac{d_a - d_i}{2} = \frac{46,42 \text{ mm} - 40 \text{ mm}}{2} = 3,21 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.6

Freischneiden des Stabwerks (ohne Lagerstellen)



Berechnung der Dehnung ε des Stahlseils

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta l}{a / \cos \alpha} = \frac{0,5 \text{ mm}}{1500 \text{ mm} / \cos 30^\circ} = 0,000289$$

Berechnung der Zugspannung σ_S im Stahlseil mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (einachsiger Spannungszustand)

$$\sigma_S = E \cdot \varepsilon = 210\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,000289 = 60,62 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Seilkraft F_S

$$F_S = \sigma_S \cdot A = 60,62 \text{ N/mm}^2 \cdot 100 \text{ mm}^2 = 6\,062 \text{ N}$$

Ansetzen des Momentengleichgewichts um A ergibt die Schnittkraft F_1

$$\Sigma M_A = 0 :$$

$$F_S \cdot \sin \alpha \cdot a = F_1 \cdot b$$

$$F_1 = F_S \cdot \sin \alpha \cdot \frac{a}{b} = 6\,062 \text{ N} \cdot \sin 30^\circ \cdot \frac{1,5 \text{ m}}{2,9 \text{ m}} = 1\,567,8 \text{ N}$$

Ansetzen des Momentengleichgewichts um B liefert die Kraft F

$$\Sigma M_B = 0 :$$

$$F_1 \cdot (d - b) = F \cdot (d - c)$$

$$F = F_1 \cdot \frac{(d - b)}{(d - c)} = 1\,567,8 \text{ N} \cdot \frac{(4,5 - 2,9) \text{ m}}{(4,5 - 3,3) \text{ m}} = \mathbf{2\,090,4 \text{ N}}$$

Lösung zu Aufgabe 2.7

- a) Fließen tritt ein, sobald die Lastspannung die Dehngrenze $R_{p0,2}$ des austenitischen Werkstoffs X6CrNiMoTi17-12-2 erreicht.

Festigkeitsbedingung

$$\sigma \leq \sigma_{\text{zul}}$$

$$\frac{F_1}{A_{\text{ges}}} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$F_1 = \frac{R_{p0,2}}{S_F} \cdot A_{\text{ges}} = \frac{240 \text{ N/mm}^2}{1,4} \cdot (50 \text{ mm})^2 = 428\,571 \text{ N} = \mathbf{428,6 \text{ kN}}$$

- b) Bedingung für Fließen des Verbundstabes

$$\frac{F_2}{A_{\text{ges}}} = R_{p0,2}$$

$$F_2 = R_{p0,2} \cdot A_{\text{ges}} = 240 \text{ N/mm}^2 \cdot (50 \text{ mm})^2 = 600\,000 \text{ N} = \mathbf{600 \text{ kN}}$$

- c) Berechnung der (fiktiven) Spannung σ_f im Verbundstab

$$\sigma_f = \frac{F_3}{A_{\text{ges}}} = \frac{800\,000 \text{ N}}{(50 \text{ mm})^2} = 320 \text{ N/mm}^2$$

Da $\sigma_f > R_{p0,2}$ wird die Plattierung bereits plastisch verformt, während der Vierkantprofilstab noch elastisch beansprucht ist ($\sigma_f < R_e$). Da die Spannung in der plastifizierten Plattierung die Dehngrenze $R_{p0,2}$ nicht überschreiten kann (linear-elastisch ideal-plastisches Werkstoffverhalten), beträgt die Spannung in der Plattierung $\sigma_{PL} = R_{p0,2} = 240 \text{ N/mm}^2$.

Berechnung des von der Plattierung aufzunehmenden Anteils des Zugkraft F_3

$$F_{3PL} = R_{p0,2} \cdot A_{PL} = R_{p0,2} \cdot ((a + 2s)^2 - a^2) = 240 \text{ N/mm}^2 \cdot (50^2 - 36^2) \text{ mm}^2 = 288\,960 \text{ N}$$

Berechnung des vom Vierkantprofilstab aufzunehmenden Anteils des Zugkraft F_3

$$F_{3VK} = F_3 - F_{3PL} = 800\,000 \text{ N} - 288\,960 \text{ N} = 511\,040 \text{ N}$$

Berechnung der Spannung im Vierkantprofilstab

$$\sigma_{VK} = \frac{F_{3VK}}{A_{VK}} = \frac{511\,040 \text{ N}}{(36 \text{ mm})^2} = \mathbf{394,32 \text{ N/mm}^2}$$

- d) Aufgrund der formschlüssigen Verbindung muss die Dehnung der Plattierung der Dehnung des Vierkantprofilstabes entsprechen.

Berechnung der Spannung in der Plattierung bei einer Dehnung von ε_{DMS}

$$\sigma_{PL} = \varepsilon_{DMS} \cdot E = 0,0018 \cdot 212\,000 \text{ N/mm}^2 = 381,6 \text{ N/mm}^2 (> R_{p0,2})$$

Damit ist die Plattierung bereits plastifiziert. Die zur Plastifizierung der Plattierung erforderliche Kraft errechnet sich zu $F = 288960 \text{ N}$ (siehe Aufgabenteil c).

Berechnung der Spannung im Vierkantprofilstab bei einer Dehnung von ε_{DMS}

$$\sigma_{4\text{VK}} = \varepsilon_{\text{DMS}} \cdot E = 0,0018 \cdot 212\,000 \text{ N/mm}^2 = 381,6 \text{ N/mm}^2 (< R_e)$$

Damit ergibt sich die Kraft $F_{4\text{VK}}$ zu:

$$F_{4\text{VK}} = \sigma_{4\text{VK}} \cdot (36 \text{ mm})^2 = 494\,553,6 \text{ N}$$

Berechnung der erforderlichen Gesamtkraft F_4

$$F_4 = F_{4\text{VK}} + F_{\text{PL}} = 494\,553,6 \text{ N} + 288\,960 \text{ N} = 783\,513,6 \text{ N} = \mathbf{783,5 \text{ kN}}$$

Lösung zu Aufgabe 2.8

Berechnung der Längenänderung des Seiles

Die Zugkraft F wird anteilig vom Stahlkern (F_K) und vom Kunststoffmantel (F_M) aufgenommen. Es gilt also:

$$F = F_K + F_M = E_K \cdot \varepsilon_K \cdot A_K + E_M \cdot \varepsilon_M \cdot A_M$$

Da Kern und Mantel fest miteinander verbunden sind, gilt $\varepsilon_K = \varepsilon_M = \varepsilon$ und damit für die Zugkraft F :

$$F = E_K \cdot \varepsilon \cdot A_K + E_M \cdot \varepsilon \cdot A_M = (E_K \cdot A_K + E_M \cdot A_M) \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

Damit folgt für die Längenänderung des Seiles:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{F \cdot l_0}{E_K \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_K^2 + E_M \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d^2 - d_K^2)} \\ &= \frac{1250\,000 \text{ N} \cdot 75\,000 \text{ mm}}{212\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (50 \text{ mm})^2 + 125\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (56 \text{ mm} - 50 \text{ mm})^2} = 221,9 \text{ mm} \end{aligned}$$

Berechnung der Zugspannung im Stahlkern

$$\sigma_K = E_K \cdot \varepsilon_K = E_K \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = 212\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{221,9 \text{ mm}}{75\,000 \text{ mm}} = 627,2 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Zugspannung im Kunststoffmantel

$$\sigma_M = E_M \cdot \varepsilon_M = E_M \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = 12\,500 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{221,9 \text{ mm}}{75\,000 \text{ mm}} = 37,0 \text{ N/mm}^2$$

Lösung zu Aufgabe 2.9

- a) Zäher Werkstoff: Versagen durch **Fließen** oder **Knickung**
- b) **Festigkeitsbedingung** (Berechnung nur gegen Fließen gemäß Aufgabenstellung)

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F}$$

$$\frac{F}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$d_i = \sqrt{d_a^2 - \frac{4 \cdot F \cdot S_F}{\pi \cdot R_e}} = \sqrt{(100 \text{ mm})^2 - \frac{4 \cdot 120000 \text{ N} \cdot 1,5}{\pi \cdot 235 \text{ N/mm}^2}} = 94,99 \text{ mm} \approx 95 \text{ mm}$$

$$s = \frac{d_a - d_i}{2} = \frac{100 \text{ mm} - 95 \text{ mm}}{2} = 2,5 \text{ mm}$$

- c) **Berechnung der Verkürzung mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (einachsiger Spannungszustand)**

$$\sigma_d = E \cdot \varepsilon$$

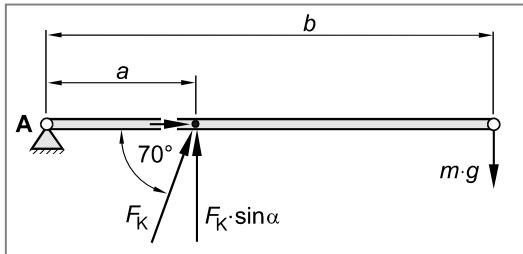
$$\varepsilon = \frac{\sigma_d}{E}$$

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F}{A \cdot E}$$

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2) \cdot E} = \frac{120000 \text{ N} \cdot 1600 \text{ mm}}{\frac{\pi}{4} \cdot (100^2 - 95^2) \text{ mm}^2 \cdot 210000 \text{ N/mm}^2} = 1,19 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.10

a) Freischneiden der Hebevorrichtung und Ansetzen der Festigkeitsbedingung



Ansetzen des Momentengleichgewichts um A liefert zunächst die gesuchte Beanspruchung der Kolbenstange (F_K):

$$\Sigma M_A = 0 :$$

$$F_K \cdot \sin \alpha \cdot a = m \cdot g \cdot b$$

$$F_K = \frac{m \cdot g}{\sin \alpha} \cdot \frac{b}{a} = \frac{10000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{\sin 70^\circ} \cdot \frac{3,6 \text{ m}}{1,2 \text{ m}} = 313187,5 \text{ N} = 313,2 \text{ kN}$$

Festigkeitsbedingung (Fließen):

$$\frac{F_K}{A} = \frac{\sigma_{dp0,2}}{S_F} \approx \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\frac{4 \cdot F_K}{\pi \cdot d^2} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F_K \cdot S_F}{\pi \cdot R_{p0,2}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 313187,5 \text{ N} \cdot 1,20}{\pi \cdot 580 \text{ N/mm}^2}} = 28,7 \text{ mm}$$

b) Berechnung der Verkürzung Δl mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (einachsig)

$$\sigma_d = E \cdot \varepsilon$$

$$\frac{F_K}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{mit} \quad \frac{F_K}{A} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\Delta l = \frac{R_{p0,2}}{S_F} \cdot \frac{l_0}{E} = \frac{580 \text{ N/mm}^2}{1,20} \cdot \frac{1500 \text{ mm}}{210000 \text{ N/mm}^2} = 3,45 \text{ mm}$$

c) Berechnung der Querkontraktion mit Hilfe des Poisson'schen Gesetzes

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon_l$$

$$\frac{\Delta d}{d_1} = -\mu \cdot \frac{\sigma_d}{E}$$

$$\frac{\Delta d}{d_1} = -\mu \cdot \frac{-F_K}{A \cdot E}$$

$$\frac{\Delta d}{d_1} = \frac{\mu}{E} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{4} \cdot d_1^2} \cdot \frac{m^* \cdot g \cdot b}{\sin \alpha \cdot a}$$

damit folgt für die Masse m^* :

$$m^* = \frac{\Delta d}{d_1} \cdot \frac{E}{\mu} \cdot \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot a}{g \cdot b}$$

$$= \frac{0,015 \text{ mm}}{80 \text{ mm}} \cdot \frac{210000 \text{ N/mm}^2}{0,30} \cdot \frac{\pi \cdot (80 \text{ mm})^2}{4} \cdot \frac{\sin 70^\circ \cdot 1,2 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 3,6 \text{ m}} = \mathbf{21065 \text{ kg}}$$

Lösung zu Aufgabe 2.11

a) Ansetzen des Hooke'schen Gesetzes (einachsiger Spannungszustand)

$$\text{Scheibe 1 (Mg): } \sigma_{d1} = E_1 \cdot \varepsilon_1 = E_1 \cdot \frac{\Delta l_1}{l_1} \rightarrow \Delta l_1 = \frac{\sigma_{d1} \cdot l_1}{E_1}$$

$$\text{Scheibe 2 (Cu): } \sigma_{d2} = E_2 \cdot \varepsilon_2 = E_2 \cdot \frac{\Delta l_2}{l_2} \rightarrow \Delta l_2 = \frac{\sigma_{d2} \cdot l_2}{E_2}$$

$$\text{Scheibe 3 (Stahl): } \sigma_{d3} = E_3 \cdot \varepsilon_3 = E_3 \cdot \frac{\Delta l_3}{l_3} \rightarrow \Delta l_3 = \frac{\sigma_{d3} \cdot l_3}{E_3}$$

Es gilt:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 \quad \text{und} \quad \sigma_{d1} = \sigma_{d2} = \sigma_{d3} = \sigma_d = \frac{F}{\pi \cdot d^2}$$

damit folgt:

$$\Delta l = \frac{\sigma_{d1} \cdot l_1}{E_1} + \frac{\sigma_{d2} \cdot l_2}{E_2} + \frac{\sigma_{d3} \cdot l_3}{E_3} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \cdot \left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2} + \frac{l_3}{E_3} \right)$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \Delta l}{4 \cdot \left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2} + \frac{l_3}{E_3} \right)} = \frac{\pi \cdot (50 \text{ mm})^2 \cdot 0,25}{4 \cdot \left(\frac{37,5}{45000} + \frac{50,3}{120000} + \frac{32,2}{210000} \right) \frac{\text{mm}}{\text{N/mm}^2}} \\ &= 349169,3 \text{ N} \approx \mathbf{349,2 \text{ kN}} \end{aligned}$$

b) Spannungen in den Metallscheiben

$$\sigma_{d1} = \sigma_{d2} = \sigma_{d3} = \sigma_d = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 349169,3 \text{ N}}{\pi \cdot (50 \text{ mm})^2} = \mathbf{177,8 \text{ N/mm}^2}$$

c) Berechnung der Verkürzungen

$$\text{Scheibe 1 (Mg): } \Delta l_1 = \frac{\sigma_d \cdot l_1}{E_1} = \frac{177,8 \text{ N/mm}^2 \cdot 37,5 \text{ mm}^2}{45000 \text{ N/mm}^2} = \mathbf{0,148 \text{ mm}}$$

$$\text{Scheibe 2 (Cu): } \Delta l_2 = \frac{\sigma_d \cdot l_2}{E_2} = \frac{177,8 \text{ N/mm}^2 \cdot 50,3 \text{ mm}^2}{120000 \text{ N/mm}^2} = \mathbf{0,075 \text{ mm}}$$

$$\text{Scheibe 3 (Stahl): } \Delta l_3 = \frac{\sigma_d \cdot l_3}{E_3} = \frac{177,8 \text{ N/mm}^2 \cdot 32,2 \text{ mm}^2}{210000 \text{ N/mm}^2} = \mathbf{0,027 \text{ mm}}$$

$$\text{Probe: } \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,148 \text{ mm} + 0,075 \text{ mm} + 0,027 \text{ mm} = 0,25 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.12

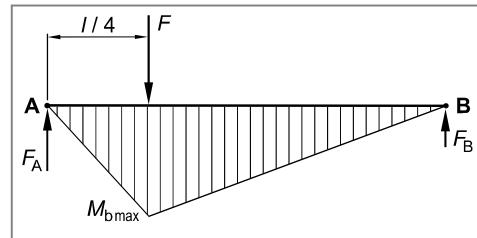
Berechnung des maximalen Biegemomentes $M_{b\max}$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$F_A \cdot l = F \cdot \frac{3}{4} \cdot l$$

$$F_A = \frac{3}{4} \cdot F$$

$$M_{b\max} = \frac{3}{4} \cdot F \cdot \frac{l}{4} = \frac{3}{16} \cdot F \cdot l$$



Berechnung der Widerstandsmomente W_{by} bezüglich der y-Achse

$$W_{by} = \frac{\frac{B^4}{12} - \frac{b^4}{12}}{\frac{B}{2}} = \frac{B^4 - b^4}{6 \cdot B}$$

Festigkeitsbedingung (Fließen)

$$\sigma_b \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{M_b}{W_{by}} = \frac{\sigma_{bf}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F}$$

$$\frac{\frac{3}{16} \cdot F \cdot l}{\frac{B^4 - b^4}{6 \cdot B}} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$b = \sqrt[4]{B^4 - \frac{9 \cdot F \cdot l \cdot B \cdot S_F}{8 \cdot R_e}} = \sqrt[4]{(100 \text{ mm})^4 - \frac{9 \cdot 25000 \text{ N} \cdot 5000 \text{ mm} \cdot 100 \text{ mm} \cdot 1,5}{8 \cdot 275 \text{ N/mm}^2}}$$

$$= 69,47 \text{ mm}$$

$$s = \frac{B - b}{2} = \frac{100 \text{ mm} - 69,47 \text{ mm}}{2} = 15,3 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.13

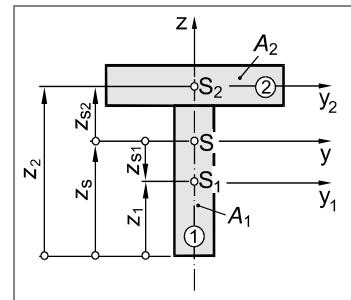
- a) Berechnung der Lage z des Flächenschwerpunktes S der Gesamtfläche mit Hilfe des Teilschwerpunktsatzes

$$z_S = \frac{\sum z_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{20 \text{ mm} \cdot 800 \text{ mm}^2 + 50 \text{ mm} \cdot 1200 \text{ mm}^2}{2000 \text{ mm}^2} = 38 \text{ mm}$$

Berechnung der axialen Flächenmomente der Teilflächen bezüglich der y_1 - bzw. y_2 -Achse

$$I_{y1} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \text{ mm} \cdot (40 \text{ mm})^3}{12} = 106\,667 \text{ mm}^4$$

$$I_{y2} = \frac{B \cdot (H-h)^3}{12} = \frac{60 \text{ mm} \cdot (20 \text{ mm})^3}{12} = 40\,000 \text{ mm}^4$$



Berechnung der axialen Flächenmomente der Teilflächen sowie der Gesamtfläche bezüglich der y-Achse durch den Gesamtflächenschwerpunkt S

$$I_{yS1} = I_{y1} + z_{S1}^2 \cdot A_1 = 106\,667 \text{ mm}^4 + (-18 \text{ mm})^2 \cdot 800 \text{ mm}^2 = 365\,867 \text{ mm}^4$$

$$I_{yS2} = I_{y2} + z_{S2}^2 \cdot A_2 = 40\,000 \text{ mm}^4 + (12 \text{ mm})^2 \cdot 1200 \text{ mm}^2 = 212\,800 \text{ mm}^4$$

$$I_{yS} = I_{yS1} + I_{yS2} = 365\,867 \text{ mm}^4 + 212\,800 \text{ mm}^4 = 578\,667 \text{ mm}^4$$

Berechnung des axialen Widerstandsmomentes bezüglich der y-Achse

$$W_{by} = \frac{I_{yS}}{z_{max}} = \frac{578\,667 \text{ mm}^4}{38 \text{ mm}} = 15\,228 \text{ mm}^3$$

- b) Festigkeitsbedingung

$$\sigma_b \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{M_b}{W_{by}} = \frac{\sigma_{bF}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F} \quad \text{mit } M_b = M_{b\max} = F \cdot a$$

$$\frac{F \cdot a}{W_{by}} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_e \cdot W_{by}}{F \cdot a} = \frac{355 \text{ N/mm}^2 \cdot 15\,228 \text{ mm}^3}{1000 \text{ N} \cdot 1000 \text{ mm}} = 5,41 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

- c) Aus Aufgabenteil b) folgt:

$$W_{by}^* = \frac{F \cdot a^* \cdot S_F}{R_e} = \frac{1000 \text{ N} \cdot 1500 \text{ mm} \cdot 1,5}{355 \text{ N/mm}^2} = 6338,0 \text{ mm}^3$$

Lösung zu Aufgabe 2.14

a) Berechnung des maximalen Biegemomentes $M_{b\ max}$

$$M_{b\ max} = \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F \cdot l}{4}$$

b) Festigkeitsbedingung

$$\sigma_b \leq \sigma_{zul}$$

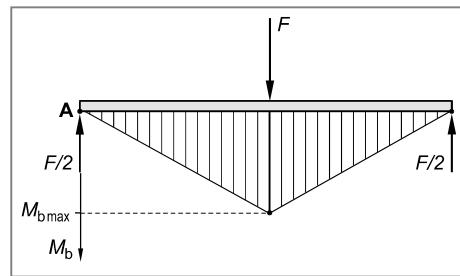
$$\frac{M_{b\ max}}{W_b} = \frac{\sigma_{bF}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F}$$

$$\frac{F \cdot l}{4 \cdot W_b} = \frac{R_e}{S_F} \quad \text{mit } F = \frac{48 \cdot E \cdot I \cdot f}{l^3} \text{ folgt:}$$

$$\frac{48 \cdot E \cdot I \cdot f \cdot l}{4 \cdot W_b \cdot l^3} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$\text{mit } \frac{I}{W_b} = \frac{d_a}{2} \text{ folgt weiterhin:}$$

$$f = f_{max} = \frac{R_e \cdot l^2}{6 \cdot E \cdot d_a \cdot S_F} = \frac{275 \text{ N/mm}^2 \cdot (2500 \text{ mm})^2}{6 \cdot 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 100 \text{ mm} \cdot 1,5} = 9,09 \text{ mm}$$



c) Festigkeitsbedingung

$$\frac{M_b}{W_b} = \frac{\sigma_{bB}}{S_B} \approx \frac{2,5 \cdot R_m}{S_B}$$

Mit den Umformungen aus Aufgabenteil b) folgt schließlich:

$$f = f_{max}^* = \frac{2,5 \cdot R_m \cdot l^2}{6 \cdot E \cdot d_a \cdot S_B} = \frac{2,5 \cdot 350 \text{ N/mm}^2 \cdot (2500 \text{ mm})^2}{6 \cdot 100000 \text{ N/mm}^2 \cdot 100 \text{ mm} \cdot 5,0} = 18,23 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.15

Berechnung des maximalen Biegemomentes M_b an der Einspannstelle

$$M_b = q \cdot g \cdot l \cdot \frac{l}{2} = \frac{q \cdot g \cdot l^2}{2} \text{ mit } q = 80 \text{ kg/m} = 0,08 \text{ kg/mm}$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_b \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{M_b}{W_b} = \frac{\sigma_{bf}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F}$$

$$\frac{\frac{q \cdot g \cdot l^2}{2}}{\frac{B^4 - b^4}{6 \cdot B}} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$l = \sqrt{\frac{R_e \cdot (B^4 - b^4)}{S_F \cdot 3 \cdot q \cdot g \cdot B}} = \sqrt{\frac{355 \text{ N/mm}^2 \cdot (200^4 - 180^4) \text{ mm}^4}{1,5 \cdot 3 \cdot 0,08 \text{ kg/mm} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 200 \text{ mm}}} = 16630 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.16

a) Festigkeitsbedingung

$$\sigma_b \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{M_b}{W_b} = \frac{\sigma_{bf}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F} \quad \text{mit } M_b = 2 \cdot m \cdot g \cdot l$$

$$\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot l}{W_b} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$W_b = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot l \cdot S_F}{R_e} = \frac{2 \cdot 1000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1500 \text{ mm} \cdot 1,5}{295 \text{ N/mm}^2} = 14,96 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

b) Festigkeitsbedingung

$$\sigma_b \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{M_b}{W_b} = \frac{\sigma_{bb}}{S_B}$$

$$\frac{\frac{2 \cdot m^* \cdot g \cdot l}{\pi \cdot d^3}}{32} = \frac{\sigma_{bb}}{S_B}$$

$$m^* = \frac{\sigma_{bb} \cdot \pi \cdot d^3}{S_B \cdot 64 \cdot g \cdot l} = \frac{460 \text{ N/mm}^2 \cdot \pi \cdot (50 \text{ mm})^3}{4 \cdot 64 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1500 \text{ mm}} = 47,95 \text{ kg}$$

Lösung zu Aufgabe 2.17

a) Berechnung der Breite $b(z)$ der Teilfläche $dA(z)$

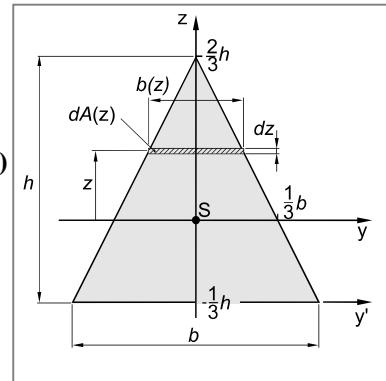
$$b(z) = 2 \cdot \left(-\frac{b}{2 \cdot h} \cdot z + \frac{b}{3} \right) = \frac{2 \cdot b}{3} - \frac{b}{h} \cdot z$$

Berechnung des Flächeninhaltes der Teilfläche $dA(z)$

$$dA(z) = b(z) \cdot dz = \left(\frac{2 \cdot b}{3} - \frac{b}{h} \cdot z \right) \cdot dz$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes bezüglich der y-Achse durch Integration zwischen $z = -1/3 h$ und $z = 2/3 h$

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 \cdot dA = \int_{-1/3 h}^{2/3 h} z^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot b}{3} - \frac{b}{h} \cdot z \right) \cdot dz \\ &= b \cdot \int_{-1/3 h}^{2/3 h} \left(\frac{2}{3} \cdot z^2 - \frac{1}{h} \cdot z^3 \right) \cdot dz \\ &= b \cdot \left[\frac{2}{9} z^3 - \frac{1}{4 \cdot h} \cdot z^4 \right]_{-1/3 h}^{2/3 h} = b \cdot h^3 \cdot \left[\left(\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{27} - \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{81} \right) - \left(-\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{27} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{81} \right) \right] \\ &= b \cdot h^3 \cdot \left[\frac{4}{243} + \frac{11}{4 \cdot 243} \right] = \frac{b \cdot h^3}{36} \end{aligned}$$



Berechnung des axialen Widerstandsmomentes W_{by} bezüglich der y-Achse

$$W_{by} = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{36}}{\frac{2}{3} \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{24}$$

- b) Bei einem gleichseitigen Dreiegen gilt: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b$

Damit folgt für das axiale Flächenmoment I_y und für das axiale Widerstandsmoment W_{by} :

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{36} = \frac{b \cdot (\sqrt{3}/2 \cdot b)^3}{36} = \frac{b^4}{32\sqrt{3}}$$

$$W_{by} = \frac{b \cdot h^2}{24} = \frac{b \cdot (\sqrt{3}/2 \cdot b)^2}{24} = \frac{b^3}{32}$$

c) Berechnung des axialen Flächenmomentes bezüglich der y'-Achse

$$I_{y'} = I_y + z_S^2 \cdot A$$

mit $z_S = \frac{1}{3} \cdot h$ und $A = \frac{b \cdot h}{2}$ folgt:

$$I_{y'} = \frac{b \cdot h^3}{36} + \left(\frac{h}{3} \right)^2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot h^3}{36} + \frac{b \cdot h^3}{18} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Berechnung des axialen Widerstandsmomentes bezüglich der y'-Achse

$$W_{by'} = \frac{I_{y'}}{z_{\max}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{h} = \frac{b \cdot h^2}{12}$$

Lösung zu Aufgabe 2.18

a) Berechnung der Breite $b(z)$ der Teilfläche $dA(z)$

$$b(z) = b = \text{konst.}$$

Berechnung des Flächeninhaltes der Teilfläche $dA(z)$

$$dA(z) = b \cdot dz$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes bezüglich der y-Achse durch Integration zwischen $z = -0,5 \cdot h$ und $z = 0,5 \cdot h$

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA = \int_{-0,5 \cdot h}^{0,5 \cdot h} z^2 \cdot b \cdot dz = b \cdot \int_{-0,5 \cdot h}^{0,5 \cdot h} z^2 \cdot dz$$

$$= \frac{b}{3} [z^3]_{-0,5 \cdot h}^{0,5 \cdot h} = \frac{b \cdot h^3}{3} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

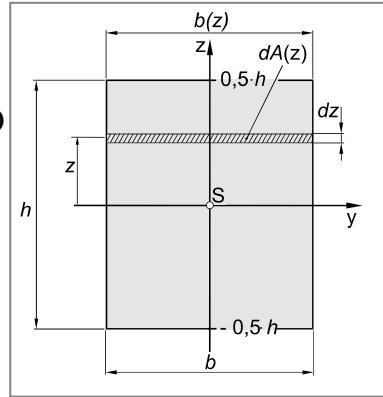
Berechnung des axialen Widerstandsmomentes W_{by} bezüglich der y-Achse

$$W_{by} = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

b) Die Berechnung des axialen Flächenmomentes bezüglich der z-Achse

Die Berechnung erfolgt analog zu Aufgabenteil a). Man erhält:

$$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12} \quad \text{und} \quad W_{bz} = \frac{h \cdot b^2}{6}$$



Lösung zu Aufgabe 2.19

Eine direkte Transformation des axialen Flächenmomentes I_{ya} bezüglich der y_a -Achse auf die y_b -Achse mit Hilfe des Steiner'schen Satzes ist nicht zulässig. Vielmehr muss als Zwischen-schritt das axiale Flächenmoment bezüglich der Achse durch den Schwerpunkt (y -Achse) be-rechnet werden.

Berechnung des axiales Flächenmomentes bezüglich der y -Achse (I_y)

$$I_y = I_{ya} - a^2 \cdot A = 2664 \text{ cm}^4 - (5 \text{ cm})^2 \cdot 72 \text{ cm}^2 = 864 \text{ cm}^4$$

Berechnung des axiales Flächenmomentes bezüglich der y_b -Achse (I_{yb})

$$I_{yb} = I_y + b^2 \cdot A = 864 \text{ cm}^4 + (2 \text{ cm})^2 \cdot 72 \text{ cm}^2 = 1152 \text{ cm}^4$$

Lösung zu Aufgabe 2.20

- a) Berechnung der z-Koordinate des Flächenschwerpunktes mit Hilfe des Teilschwerpunktsatzes

$$z_S = \frac{\sum z_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{50 \text{ mm} \cdot 2000 \text{ mm}^2 + 10 \text{ mm} \cdot 800 \text{ mm}^2 + 50 \text{ mm} \cdot 2000 \text{ mm}^2}{2000 \text{ mm}^2 + 800 \text{ mm}^2 + 2000 \text{ mm}^2}$$

$$= 43,33 \text{ mm}$$

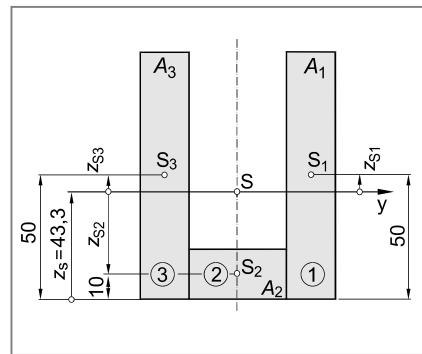
- b) Berechnung der axialen Flächenmomente 2. Ordnung der Teilflächen bezüglich der Einzelschwerpunktachsen

$$I_{y1} = \frac{20 \text{ mm} \cdot (100 \text{ mm})^3}{12} = 1666667 \text{ mm}^4$$

$$I_{y2} = \frac{40 \text{ mm} \cdot (20 \text{ mm})^3}{12} = 26667 \text{ mm}^4$$

$$I_{y3} = \frac{20 \text{ mm} \cdot (100 \text{ mm})^3}{12} = 1666667 \text{ mm}^4$$

Berechnung der axialen Flächenmomente 2. Ordnung der Teilflächen bezüglich der y-Achse durch den Gesamtflächenschwerpunkt S



$$I_{yS1} = 1666667 \text{ mm}^4 + (6,67 \text{ mm})^2 \cdot 2000 \text{ mm}^2 = 1755556 \text{ mm}^4$$

$$I_{yS2} = 26667 \text{ mm}^4 + (-33,33 \text{ mm})^2 \cdot 800 \text{ mm}^2 = 915556 \text{ mm}^4$$

$$I_{yS3} = I_{yS1} = 1755556 \text{ mm}^4$$

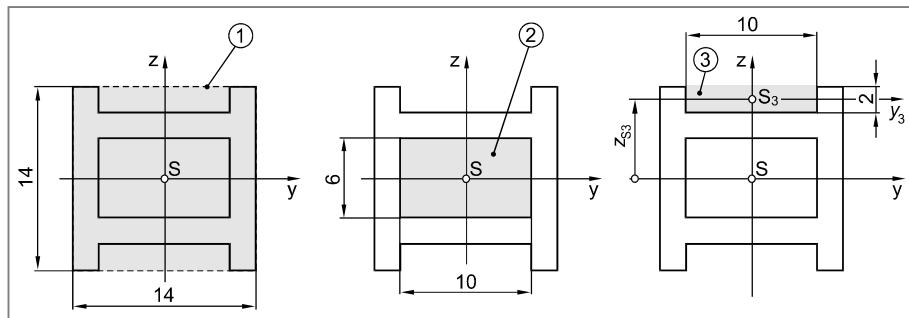
Das axiale Flächenmoment 2. Ordnung der Querschnittfläche bezüglich der y-Achse ergibt sich dann zu:

$$I_{yS} = I_{yS1} + I_{yS2} + I_{yS3} = 1755556 \text{ mm}^4 + 915556 \text{ mm}^4 + 1755556 \text{ mm}^4$$

$$= 4426667 \text{ mm}^4$$

Lösung zu Aufgabe 2.21

Festlegung der Teilflächen



a) Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung bezüglich der y-Achse

Axiales Flächenmoment 2. Ordnung von Teilfläche 1 bezüglich der y-Achse:

$$I_{yS1} = \frac{14 \text{ cm} \cdot (14 \text{ cm})^3}{12} = 3201,3 \text{ cm}^4$$

Axiales Flächenmoment 2. Ordnung von Teilfläche 2 bezüglich der y-Achse:

$$I_{yS2} = \frac{10 \text{ cm} \cdot (6 \text{ cm})^3}{12} = 180 \text{ cm}^4$$

Axiales Flächenmoment 2. Ordnung von Teilfläche 3 bezüglich der y_3 -Achse:

$$I_{y3} = \frac{10 \text{ cm} \cdot (2 \text{ cm})^3}{12} = 6,6 \text{ cm}^4$$

Axiales Flächenmoment 2. Ordnung von Teilfläche 3 bezüglich der y-Achse:

$$I_{yS3} = I_{y3} + z_{S3}^2 \cdot A_3 = 6,6 \text{ cm}^4 + (6 \text{ cm})^2 \cdot 20 \text{ cm}^2 = 726,6 \text{ cm}^4$$

Axiales Flächenmoment der Gesamtfläche bezüglich der y-Achse:

$$I_{yS} = I_{yS1} - I_{yS2} - 2 \cdot I_{yS3} = 3201,3 \text{ cm}^4 - 180 \text{ cm}^4 - 2 \cdot 726,6 \text{ cm}^4 = 1568 \text{ cm}^4$$

Berechnung des axialen Widerstandsmomentes bezüglich der y-Achse

$$W_{byS} = \frac{I_{yS}}{z_{\max}} = \frac{1568 \text{ cm}^4}{7 \text{ cm}} = 224 \text{ cm}^3$$

b) Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung bezüglich der z-Achse

Axiales Flächenmoment 2. Ordnung von Teilfläche 1 bezüglich der z-Achse:

$$I_{zS1} = \frac{14 \text{ cm} \cdot (14 \text{ cm})^3}{12} = 3201,3 \text{ cm}^4$$

Axiales Flächenmoment 2. Ordnung von Teilfläche 2 bezüglich der z-Achse:

$$I_{zS2} = \frac{6 \text{ cm} \cdot (10 \text{ cm})^3}{12} = 500 \text{ cm}^4$$

Axiales Flächenmoment 2. Ordnung von Teilfläche 3 bezüglich der z-Achse:

$$I_{zS3} = \frac{2 \text{ cm} \cdot (10 \text{ cm})^3}{12} = 166,6 \text{ cm}^4$$

Axiales Flächenmoment der Gesamtfläche bezüglich der z-Achse:

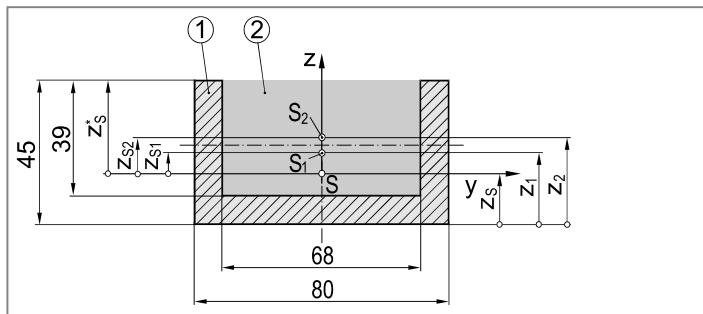
$$I_{zS} = I_{zS1} - I_{zS2} - 2 \cdot I_{zS3} = 3201,3 \text{ cm}^4 - 500 \text{ cm}^4 - 2 \cdot 166,6 \text{ cm}^4 = 2368 \text{ cm}^4$$

Berechnung des axialen Widerstandsmomentes bezüglich der z-Achse

$$W_{bzS} = \frac{I_{zS}}{y_{\max}} = \frac{2368 \text{ cm}^4}{7 \text{ cm}} = 338,3 \text{ cm}^3$$

Lösung zu Aufgabe 2.22

a) Berechnung des Flächenschwerpunktes (Teilschwerpunktsatz)

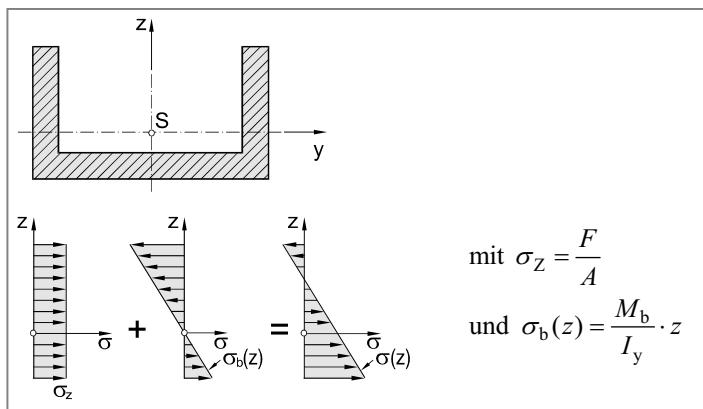


$$z_S = \frac{z_1 \cdot A_1 - z_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{22.5 \text{ mm} \cdot 3600 \text{ mm}^2 - 25.5 \text{ mm} \cdot 2652 \text{ mm}^2}{3600 \text{ mm}^2 - 2652 \text{ mm}^2} = 14.11 \text{ mm}$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung bezüglich der y-Achse

$$I_y = \frac{80 \text{ mm} \cdot (45 \text{ mm})^3}{12} + (8.39 \text{ mm})^2 \cdot 3600 \text{ mm}^2 - \left(\frac{68 \text{ mm} \cdot (39 \text{ mm})^3}{12} + (11.39 \text{ mm})^2 \cdot 2652 \text{ mm}^2 \right) = 180\,721 \text{ mm}^4$$

b) Spannungsverlauf über die Querschnittsfäche



Die außerhalb des Flächenschwerpunktes S angreifende Zugkraft F kann ersetzt werden durch eine im Flächenschwerpunkt angreifende Kraft F mit demselben Betrag und ein Biegemoment $M_b = F \cdot z_S$. Die höchsten Spannungen treten entweder am unteren Ende (Abstand z_S von der y-Achse) oder am oberen Ende (Abstand z^*_S von der y-Achse) auf. Beide Stellen sollen überprüft werden, wenngleich die obige Skizze die Vermutung nahe legt, dass sich die kritische Stelle am unteren Ende (Abstand z_S von der Biegeachse) befindet.

Berechnung der Spannung am unteren Ende der Querschnittfläche (Abstand z_S von der y-Achse)

$$\sigma_U = \sigma_z + \sigma_b = \frac{F}{A} + \frac{M_b}{I_y} \cdot z_S = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot z_S}{I_y} \cdot z_S = F \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{z_S^2}{I_y} \right)$$

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_U = \sigma_{zul}$$

Damit folgt für die zulässige Zugkraft F am unteren Ende der Querschnittfläche (Fließen soll nicht eintreten):

$$F = \frac{\sigma_{zul}}{\frac{1}{A} + \frac{z_S^2}{I_y}} = \frac{150 \text{ N/mm}^2}{\frac{1}{948 \text{ mm}^2} + \frac{(14,11 \text{ mm})^2}{180 721 \text{ mm}^4}} = 69 568 \text{ N} = \mathbf{69,6 \text{ kN}}$$

Berechnung der Spannung am oberen Ende der Querschnittfläche (Abstand z_S von der y-Achse)

$$\sigma_O = \sigma_z - \sigma_b = \frac{F}{A} - \frac{M_b}{I_y} \cdot z_S^* = \frac{F}{A} - \frac{F \cdot z_S}{I_y} \cdot z_S^* = F \cdot \left(\frac{1}{A} - \frac{z_S \cdot z_S^*}{I_y} \right)$$

Festigkeitsbedingung:

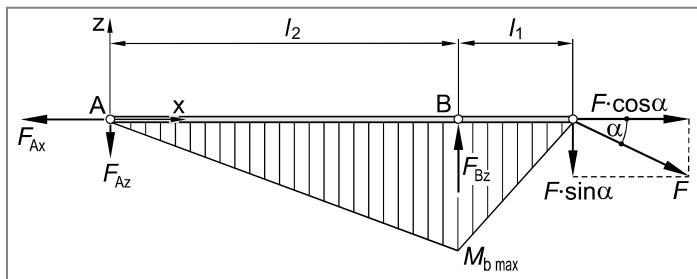
$$\sigma_O = -\sigma_{zul}$$

Damit folgt für die zulässige Zugkraft F am oberen Ende der Querschnittfläche (Fließen soll nicht eintreten):

$$F = \frac{-\sigma_{zul}}{\frac{1}{A} - \frac{z_S \cdot z_S^*}{I_y}} = \frac{-150 \text{ N/mm}^2}{\frac{1}{948 \text{ mm}^2} - \frac{14,11 \text{ mm} \cdot 30,89 \text{ mm}}{180 721 \text{ mm}^4}} = 110 562,7 \text{ N} = \mathbf{110,6 \text{ kN}}$$

Die Beanspruchung ist damit auf $F = 69,6 \text{ kN}$ zu beschränken. Eine Erhöhung der Zugkraft führt zuerst am unteren Ende der Querschnittfläche zu einer Überschreitung der zulässigen Beanspruchung.

c) **Verlauf des Biegemomentes**



Die höchst beanspruchte Stelle befindet sich an der Lagerstelle B und dort am oberen Ende der Querschnittfläche (Abstand z_s^* von der y-Achse).

Berechnung der maximalen Spannung an der Stelle B

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \sigma_z + \sigma_b = \frac{F \cdot \cos \alpha}{A} + \frac{M_{b\max}}{I_y} \cdot z_s^* = \frac{F \cdot \cos \alpha}{A} + \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot l_1}{I_y} \cdot z_s^* \\ &= F \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{A} + \frac{\sin \alpha \cdot l_1}{I_y} \cdot z_s^* \right)\end{aligned}$$

Festigkeitsbedingung

$$\begin{aligned}\sigma_B &\leq \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F} \\ F &= \frac{R_{p0,2}}{S_F \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{A} + \frac{\sin \alpha \cdot l_1}{I_y} \cdot z_s^* \right)} = \frac{280 \text{ N/mm}^2}{1,5 \cdot \left(\frac{\cos 25^\circ}{948 \text{ mm}^2} + \frac{\sin 25^\circ \cdot 200 \text{ mm} \cdot 30,89 \text{ mm}}{180\,721 \text{ mm}^4} \right)} \\ &= 12\,117,7 \text{ N} = \mathbf{12,1 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.23

- a) Berechnung der Schubspannung τ_a (zweischnittige Scherfläche)

$$\tau_a = \frac{F}{2 \cdot A} = \frac{F}{2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$$

Festigkeitsbedingung

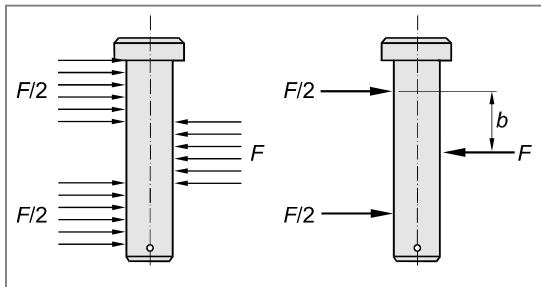
$$\tau_a \leq \tau_{zul}$$

$$\frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \frac{\tau_{aB}}{S_B}$$

Damit folgt für den Durchmesser d des Bolzens:

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot S_B}{\pi \cdot \tau_{aB}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35\,000 \text{ N} \cdot 2,0}{\pi \cdot 150 \text{ N/mm}^2}} = 17,24 \text{ mm}$$

- b) Auf den Bolzen wirkt eine Streckenlast, die durch jeweils mittig angreifende Einzelkräfte ersetzt werden kann (siehe Abbildung).



Damit ergibt sich für das Biegemoment M_b sowie die maximale Biegespannung σ_b :

$$M_b = \frac{F}{2} \cdot b$$

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{\frac{b}{2} \cdot F}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{16 \cdot F \cdot b}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 35\,000 \text{ N} \cdot 20 \text{ mm}}{\pi \cdot (17,24 \text{ mm})^3} = 696,2 \text{ N/mm}^2 > R_e$$

Man erkennt, dass unter den gegebenen Annahmen, die Biegespannung in einer Laschenverbindung weitaus höhere Werte annehmen kann, im Vergleich zur Abscherspannung.

- c) Die maximale Flächenpressung p herrscht in der mittleren Lasche:

$$p = \frac{F}{b \cdot d} = \frac{35\,000 \text{ N}}{20 \text{ mm} \cdot 17,24 \text{ mm}} = 101,5 \text{ N/mm}^2$$

Lösung zu Aufgabe 2.24

a) Berechnung der Schubspannung τ_a (zweischrittige Scherfläche)

$$\tau_a = \frac{F}{2 \cdot A} = \frac{F}{2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$$

Festigkeitsbedingung

$$\tau_a \leq \tau_{zul}$$

$$\tau_{aB} = 0,8 \cdot R_m = 0,8 \cdot 580 \text{ N/mm}^2 = 464 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{gewählt})$$

Damit folgt für die Sicherheit gegen Bruch:

$$\frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \frac{\tau_{aB}}{S_B}$$

$$S_B = \tau_{aB} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{2 \cdot F} = 464 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi \cdot (25 \text{ mm})^2}{2 \cdot 150\,000 \text{ N}} = 3,04 \quad (\text{ausreichend, da } S_B \geq 2,0)$$

b) Berechnung der Klebefläche A_K

$$A_K = d_K \cdot \pi \cdot l_K \quad \text{mit } d_K = 60 \text{ mm}$$

Berechnung der Klebelänge l_K

$$\tau_{zul} \cdot A = F$$

Festigkeitsbedingung

$$\tau < \tau_{K zul}$$

$$\frac{F}{A_K} = \tau_{K zul}$$

$$\frac{F}{d_K \cdot \pi \cdot l_K} = \tau_{K zul}$$

$$l_K = \frac{F}{\tau_{zul} \cdot d_K \cdot \pi} = \frac{150\,000 \text{ N}}{15 \text{ N/mm}^2 \cdot 60 \text{ mm} \cdot \pi} = 53,1 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.25

Berechnung der Schubspannung τ_a im Zapfen (einschnittige Scherfläche)

$$\tau_a = \frac{F_A / 4}{b \cdot h}$$

Festigkeitsbedingung

$$\tau_a \leq \tau_{zul}$$

$$\frac{F_A / 4}{b \cdot h} = \frac{\tau_{aB}}{S_B} \quad \tau_{aB} = 0,8 \cdot R_m = 0,8 \cdot 750 \text{ N/mm}^2 = 600 \text{ N/mm}^2 \text{ (gewählt)}$$

Damit folgt für die Höhe h des Zapfens:

$$h = \frac{F_A \cdot S_B}{4 \cdot b \cdot \tau_{aB}} = \frac{2\,000\,000 \text{ N} \cdot 2,5}{4 \cdot 80 \text{ mm} \cdot 600 \text{ N/mm}^2} = \mathbf{26,0 \text{ mm}}$$

Lösung zu Aufgabe 2.26

Berechnung der abzuscherenden Fläche

$$A_S = 3 \text{ mm} \cdot 4 \cdot (20 \text{ mm} + 10 \text{ mm} + 10 \text{ mm} + 25 \text{ mm}) = 780 \text{ mm}^2$$

Berechnung der Stanzkraft F_S

$$\tau_a \geq \tau_{aB}$$

$$\frac{F_S}{A_S} = \tau_{aB}$$

$$F_S = \tau_{aB} \cdot A_S = 290 \text{ N/mm}^2 \cdot 780 \text{ mm}^2 = 226\,200 \text{ N} = \mathbf{226,2 \text{ kN}}$$

Lösung zu Aufgabe 2.27

Es kann angenommen werden, dass beide Nieten gleichmäßig mit $F_Z/2$ belastet werden.

Festigkeitsbedingung (zweischnittige Scherfläche)

$$\sigma \leq \sigma_{\text{zul}}$$

$$\frac{F_Z / 2}{2 \cdot A} = \frac{\tau_{\text{ab}}}{S_B}$$

$$\frac{F_Z}{4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{\tau_{\text{ab}}}{S_B}$$

$$d = \sqrt{\frac{F_Z \cdot S_B}{\pi \cdot \tau_{\text{ab}}}} = \sqrt{\frac{100\,000 \text{ N} \cdot 3,5}{\pi \cdot 290 \text{ N/mm}^2}} = 19,60 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.28

Berechnung der Schubspannung τ_a im Niet (einschnittige Scherfläche)

$$\tau_a = \frac{F_Z}{A} = \frac{F_Z}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{4 \cdot F_Z}{\pi \cdot d^2}$$

Festigkeitsbedingung

$$\tau_a \leq \tau_{zul}$$

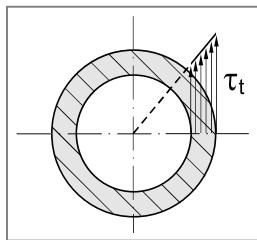
$$\frac{4 \cdot F_Z}{\pi \cdot d^2} = \frac{\tau_{aB}}{S_B}$$

$$\frac{4 \cdot F_Z}{\pi \cdot d^2} = \frac{\tau_{aB}}{S_B}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F_Z \cdot S_B}{\pi \cdot \tau_{aB}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 50\,000 \text{ N} \cdot 3,0}{\pi \cdot 380 \text{ N/mm}^2}} = 22,42 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 2.29

a)



b) **Versagensmöglichkeiten:** Fließen und Bruch

Ermittlung der zulässigen Spannungen

$$\text{Fließen: } \sigma_{\text{zul}} = \frac{\tau_{\text{tF}}}{S_F} = \frac{R_e}{2 \cdot S_F} = \frac{295 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot 1,20} = 122,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\begin{aligned} \text{Bruch: } \sigma_{\text{zul}} &= \frac{\tau_{\text{tB}}}{S_B} = \frac{0,5 \cdot R_m + 140 \text{ N/mm}^2}{S_B} = \frac{0,5 \cdot 490 \text{ N/mm}^2 + 140 \text{ N/mm}^2}{2,0} \\ &= 192,5 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Berechnung gegenüber Fließen, da kleinere zulässige Spannung.

Festigkeitsbedingung (Fließen)

$$\tau_t \leq \tau_{t \text{ zul}}$$

$$\frac{M_t}{W_t} = \frac{\tau_{tF}}{S_F}$$

$$\begin{aligned} M_t &= W_t \cdot \frac{\tau_{tF}}{S_F} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} \cdot \frac{R_e}{2 \cdot S_F} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(50^4 - 38^4) \text{ mm}^4}{50 \text{ mm}} \cdot \frac{295 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot 1,20} \\ &= 2010349 \text{ Nmm} = \mathbf{2010 \text{ Nm}} \end{aligned}$$

c) **Berechnung der maximalen Schubspannung τ_t**

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{\tau_{tF}}{S_F} = \frac{R_e}{2 \cdot S_F} = \frac{295 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot 1,20} = \mathbf{122,9 \text{ N/mm}^2}$$

Lösung zu Aufgabe 2.30

a) Berechnung des Torsionsmomentes M_t

$$M_t = 4 \cdot F \cdot \frac{c}{2} = 4 \cdot 900 \text{ N} \cdot 350 \text{ mm} = 1260000 \text{ Nmm}$$

Festigkeitsbedingung (Fließen)

$$\tau_t \leq \tau_{t \text{ zul}}$$

$$\frac{M_t}{W_t} = \frac{\tau_{tF}}{S_F} = \frac{R_e}{2 \cdot S_F}$$

$$\frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{R_e}{2 \cdot S_F}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot M_t \cdot S_F}{R_e}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 1260000 \text{ Nmm} \cdot 2,0}{295 \text{ N/mm}^2}} = 44,31 \text{ mm}$$

b) Festigkeitsbedingung (Bruch)

$$\tau_t \leq \tau_{t \text{ zul}}$$

$$\frac{M_t}{W_t} = \frac{\tau_{tB}}{S_B} = \frac{R_m}{S_B}$$

$$d^* = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{M_t \cdot S_B}{R_m}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{1260000 \text{ Nmm} \cdot 5,0}{300 \text{ N/mm}^2}} = 47,47 \text{ mm}$$

c) Berechnung der Verdrehwinkel ϕ

S275JR:

$$\phi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{M_t \cdot l}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{32} d^4} = \frac{1260000 \text{ Nmm} \cdot 2000 \text{ mm}}{\frac{210000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot \frac{\pi}{32} (44,31 \text{ mm})^4} = 0,0824$$

$$\phi = 4,72^\circ$$

EN-GJL-300:

$$\phi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{M_t \cdot l}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{32} d^4} = \frac{1260000 \text{ Nmm} \cdot 2000 \text{ mm}}{\frac{110000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,25)} \cdot \frac{\pi}{32} (47,47 \text{ mm})^4} = 0,1149$$

$$\phi = 6,58^\circ$$

Lösung zu Aufgabe 2.31

a) Berechnung der Verdrehwinkel φ_1 , φ_2 und φ_3 für die einzelnen Abschnitte des Stabes

$$1. \text{ Abschnitt: } \varphi_1 = \frac{M_t \cdot a_1}{G \cdot I_{p1}} \quad \text{mit } I_{p1} = \frac{\pi}{32} (d_a^4 - d_i^4)$$

$$2. \text{ Abschnitt: } \varphi_2 = \frac{M_t \cdot a_2}{G \cdot I_{p2}} \quad \text{mit } I_{p2} = \frac{\pi}{32} \cdot d_a^4$$

$$3. \text{ Abschnitt: } \varphi_3 = \frac{M_t \cdot a_3}{G \cdot I_{p3}} \quad \text{mit } I_{p3} = \frac{\pi}{32} \cdot d^4$$

Für den gesamten Verdrehwinkel φ_{ges} gilt dann:

$$\varphi_{\text{ges}} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{M_t}{G} \cdot \left(\frac{a_1}{I_{p1}} + \frac{a_2}{I_{p2}} + \frac{a_3}{I_{p3}} \right) = \frac{M_t}{E / 2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{32}{\pi} \cdot \left(\frac{a_1}{d_a^4 - d_i^4} + \frac{a_2}{d_a^4} + \frac{a_3}{d^4} \right)$$

$$\varphi_{\text{ges}} = \frac{64 \cdot (1 + \mu)}{E \cdot \pi} \cdot F \cdot c \cdot \left(\frac{a_1}{d_a^4 - d_i^4} + \frac{a_2}{d_a^4} + \frac{a_3}{d^4} \right)$$

$$F = \frac{\varphi_{\text{ges}} \cdot E \cdot \pi}{64 \cdot (1 + \mu) \cdot c} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a_1}{d_a^4 - d_i^4} + \frac{a_2}{d_a^4} + \frac{a_3}{d^4} \right)}$$

$$F = \frac{2,5^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \cdot \frac{205\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot \pi}{64 \cdot (1 + 0,30) \cdot 80 \text{ mm}} \cdot \frac{1}{\frac{50 \text{ mm}}{(40^4 - 15^4) \text{ mm}^4} + \frac{25 \text{ mm}}{(40 \text{ mm})^4} + \frac{65 \text{ mm}}{(25 \text{ mm})^4}}$$

$$= 21530 \text{ N}$$

b) Ermittlung der Torsionsfließgrenze

$$\tau_{tf} = \frac{R_{p0,2}}{2} = \frac{1140}{2} \text{ N/mm}^2 = 570 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheiten gegen Fließen in den einzelnen Abschnitten

$$1. \text{ Abschnitt: } \tau_{t1} = \frac{M_t}{W_{t1}} = \frac{F \cdot c}{\frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}} = \frac{21530 \text{ N} \cdot 80 \text{ mm}}{\frac{\pi}{16} \cdot \frac{(40^4 - 15^4) \text{ mm}^4}{40 \text{ mm}}} = 139,8 \text{ N/mm}^2$$

$$S_{F1} = \frac{\tau_{tf}}{\tau_{t1}} = \frac{570 \text{ N/mm}^2}{139,8 \text{ N/mm}^2} = 4,08 \quad (\text{ausreichend, da } S_{F1} \geq 1,20)$$

$$2. \text{ Abschnitt: } \tau_{t2} = \frac{M_t}{W_{t2}} = \frac{F \cdot c}{\frac{\pi}{16} \cdot d_a^3} = \frac{21530 \text{ N} \cdot 80 \text{ mm}}{\frac{\pi}{16} \cdot 40^3 \text{ mm}^3} = 137,1 \text{ N/mm}^2$$

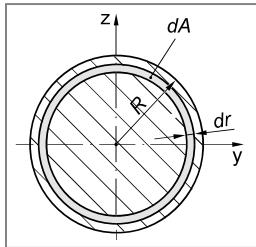
$$S_{F2} = \frac{\tau_{tf}}{\tau_{t2}} = \frac{570 \text{ N/mm}^2}{137,1 \text{ N/mm}^2} = 4,16 \quad (\text{ausreichend, da } S_{F2} \geq 1,20)$$

$$3. \text{ Abschnitt: } \tau_{t3} = \frac{M_t}{W_{t3}} = \frac{F \cdot c}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{21530 \text{ N} \cdot 80 \text{ mm}}{\frac{\pi}{16} \cdot 25^3} = 561,4 \text{ N/mm}^2$$

$$S_{F3} = \frac{\tau_{tf}}{\tau_{t3}} = \frac{570 \text{ N/mm}^2}{561,4 \text{ N/mm}^2} = \mathbf{1,02} \quad (\text{nicht ausreichend, da } S_F < 1,20)$$

Lösung zu Aufgabe 2.32

- a) Berechnung des polaren Flächenmomentes I_p für einen Vollkreisquerschnitt



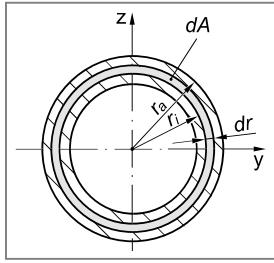
$$I_p = \int_A r^2 dA \quad \text{mit } dA = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$I_p = 2 \cdot \pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi}{2} \cdot R^4 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^4 = \frac{\pi}{32} \cdot d^4$$

Berechnung des polaren Widerstandsmomentes W_t für einen Vollkreisquerschnitt

$$W_t = \frac{I_p}{R} = \frac{I_p}{d/2} = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$$

- b) Berechnung des polaren Flächenmomentes I_p für einen Kreisringquerschnitt



$$I_p = 2 \cdot \pi \int_{r_i}^{r_a} r^3 dr = 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r_i}^{r_a} = \frac{\pi}{2} \cdot (r_a^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{32} \cdot (d_a^4 - d_i^4)$$

Berechnung des polaren Widerstandsmomentes W_p für einen Kreisringquerschnitt

$$W_p = \frac{I_p}{d_a/2} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}$$

Lösung zu Aufgabe 2.33

a) Ermittlung des Zusammenhangs zwischen den Torsionsmomenten M_{t1} und M_{t2}

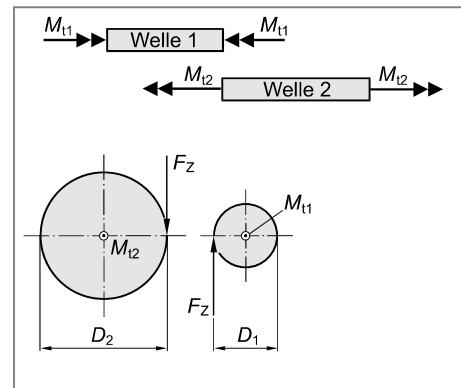
Schneidet man die beiden Zahnräder frei, dann muss infolge des Kräftegleichgewichts an beiden Zahnradern die Schnittkraft F_Z wirken. Es gilt daher:

$$M_{t2} = F_Z \cdot \frac{D_2}{2}$$

$$F_Z = \frac{2 \cdot M_{t2}}{D_2}$$

und

$$M_{t1} = F_Z \cdot \frac{D_1}{2} = \frac{2 \cdot M_{t2}}{D_2} \cdot \frac{D_1}{2} = M_{t2} \cdot \frac{D_1}{D_2}$$



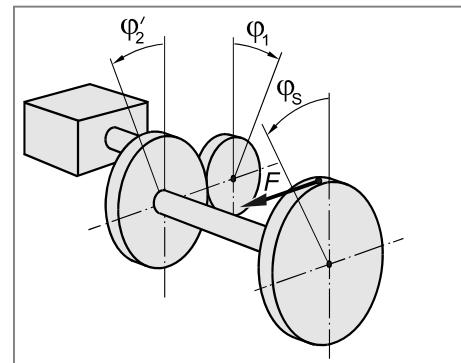
b) Berechnung des Verdrehwinkels φ_1 aufgrund von M_{t1} für die Welle 1 (Minuszeichen, da Drehrichtung im mathematisch negativen Sinn)

$$\varphi_1 = \frac{-M_{t1} \cdot l_1}{G \cdot I_{p1}}$$

mit $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$ und $I_{p1} = \frac{\pi}{32} \cdot d_1^4$ folgt:

$$\varphi_1 = -\frac{M_{t1} \cdot l_1}{E \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d_1^4}$$

Berechnung des Verdrehwinkels φ'_2 von Welle 2 durch Abwälzen der beiden Zahnräder



Verdreht sich die Welle 1 um den Winkel φ_1 , dann wird auf Zahnrad 1 die Bogenlänge s_1 abgewälzt:

$$s_1 = D_1 \cdot \pi \cdot \frac{\varphi_1}{360^\circ}$$

Da auf beiden Zahnräden die abgewälzten Bogenlängen gleich sein müssen, wird die Bogenlänge s_1 auch auf Zahnrad 2 abgewälzt. Es gilt daher:

$$s_2 = D_2 \cdot \pi \cdot \frac{\varphi'_2}{360^\circ} = -s_1$$

Es ist zu berücksichtigen, dass die Verdrehwinkel φ_1 und φ'_2 gegensinnig sind (daher das Minuszeichen). Damit folgt für den Verdrehwinkel φ'_2 :

$$D_2 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi'_2 = -\left(D_1 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi_1 \right)$$

$$\varphi'_2 = -\varphi_1 \cdot \frac{D_1}{D_2}$$

Berechnung des Verdrehwinkels φ_2 aufgrund von M_{t2} für die Welle 2 (Drehrichtung im mathematisch positiven Sinn)

$$\varphi_2 = \frac{M_{t2} \cdot l_2}{G \cdot I_{p2}}$$

$$\text{mit } G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \text{ und } I_{p2} = \frac{\pi}{32} \cdot d_2^4 \quad \text{folgt:}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{t2} \cdot l_2}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d_2^4}$$

Berechnung des gesamten Verdrehwinkels φ_S von Welle 2

Dem Winkel φ'_2 überlagert sich (gleichsinnig) der Winkel φ_2 infolge elastischer Verdrehung von Welle 2 durch das Torsionsmoment M_{t2} . Für den gesamten Verdrehwinkel φ_S der Seilrolle folgt damit:

$$\begin{aligned} \varphi_S &= \varphi'_2 + \varphi_2 \\ &= -\varphi_1 \cdot \frac{D_1}{D_2} + \varphi_2 \\ &= \frac{M_{t1} \cdot l_1}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d_1^4} \cdot \frac{D_1}{D_2} + \frac{M_{t2} \cdot l_2}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d_2^4} \\ &= \frac{64 \cdot (1 + \mu)}{E \cdot \pi} \cdot \left(\frac{M_{t1} \cdot l_1}{d_1^4} \cdot \frac{D_1}{D_2} + \frac{M_{t2} \cdot l_2}{d_2^4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{mit } M_{t1} = M_{t2} \cdot \frac{D_1}{D_2} \quad \text{folgt:}$$

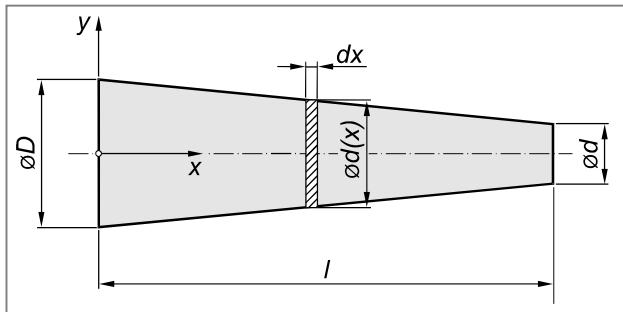
$$\varphi_S = \frac{64 \cdot (1 + \mu)}{E \cdot \pi} \cdot M_{t2} \cdot \left(\frac{l_1}{d_1^4} \cdot \frac{D_1^2}{D_2^2} + \frac{l_2}{d_2^4} \right)$$

$$\begin{aligned} M_{t2} &= \frac{E \cdot \pi}{64 \cdot (1 + \mu) \cdot \left(\frac{l_1}{d_1^4} \cdot \frac{D_1^2}{D_2^2} + \frac{l_2}{d_2^4} \right)} \cdot \varphi_S \\ &= \frac{205\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot \pi}{64 \cdot (1 + 0,30) \cdot \left(\frac{100 \text{ mm}}{(25 \text{ mm})^4} \cdot \left(\frac{50 \text{ mm}}{100 \text{ mm}} \right)^2 + \frac{200 \text{ mm}}{(35 \text{ mm})^4} \right)} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 3^\circ \\ &= 2\,054\,475 \text{ Nmm} = \mathbf{2\,054 \text{ Nm}} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.34

Berechnung des Durchmessers der Drehstabfeder in Abhängigkeit der Koordinate x

$$d(x) = 2 \cdot \left(-\frac{D-d}{2 \cdot l} \cdot x + \frac{D}{2} \right) = \frac{d-D}{l} \cdot x + D$$



Berechnung des polaren Flächenmomentes $I_p(x)$ in Abhängigkeit der Koordinate x

$$I_p(x) = \frac{\pi}{32} \cdot d^4(x) = \frac{\pi}{32} \cdot \left(\frac{d-D}{l} \cdot x + D \right)^4$$

Die Drehstabfeder kann man sich aus Scheiben der Länge (Dicke) dx zusammengesetzt denken. Jedes Scheibenelement erfährt dabei den **Verdrehwinkel** $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_p(x)}$$

Der **gesamte Verdrehwinkel** ergibt sich durch Integration über die gesamte Stablänge l :

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi d\varphi &= \frac{M_t}{G} \int_0^l \frac{1}{I_p(x)} dx \\ \int_0^\varphi d\varphi &= \frac{M_t}{G} \int_0^l \frac{dx}{\frac{\pi}{32} \cdot \left(\frac{d-D}{l} \cdot x + D \right)^4} \\ \varphi &= \frac{32 \cdot M_t}{G \cdot \pi} \int_0^l \left(\frac{d-D}{l} \cdot x + D \right)^{-4} \cdot dx \\ &= \frac{32 \cdot M_t}{G \cdot \pi} \cdot \left(-\frac{1}{3 \cdot (d-D)/l} \right) \cdot \left[\left(\frac{d-D}{l} \cdot x + D \right)^{-3} \right]_0^l \\ \varphi &= \frac{32 \cdot M_t \cdot l}{3 \cdot G \cdot \pi \cdot (D-d)} \cdot \left[1 / \left(\frac{d-D}{l} \cdot x + D \right)^3 \right]_0^l \\ &= \frac{32 \cdot M_t \cdot l}{3 \cdot G \cdot \pi \cdot (D-d)} \cdot \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{D^3} \right) \end{aligned}$$

Damit folgt für das Torsionsmoment M_t :

$$\begin{aligned}
 M_t &= \frac{3 \cdot G \cdot \pi \cdot (D - d)}{32 \cdot l \cdot \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{D^3} \right)} \cdot \varphi = \frac{3 \cdot \pi \cdot E \cdot (D - d)}{64 \cdot (1 + \mu) \cdot l \cdot \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{D^3} \right)} \cdot \varphi \\
 &= \frac{3 \cdot \pi \cdot 205\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot (50 - 40) \text{ mm}}{64 \cdot (1 + 0,30) \cdot 2\,000 \text{ mm} \cdot \left(\frac{1}{(40 \text{ mm})^3} - \frac{1}{(50 \text{ mm})^3} \right)} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 5^\circ \\
 &= 1328860 \text{ Nmm} = \mathbf{1328,9 \text{ Nm}}
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.35

Berechnung der zulässigen Torsionsmomente in den einzelnen Abschnitten

Festigkeitsbedingung für Abschnitt 1 (Stahl):

$$\tau_t \leq \tau_{tzul}$$

$$\frac{M_{t1}}{W_{t1}} = \frac{\tau_{tf}}{S_F}$$

$$M_{t1} = \frac{R_{e1}}{2 \cdot S_F} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot d_1^3 = \frac{240 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot 1,5} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot (30 \text{ mm})^3 = 424115 \text{ Nmm} = 424,1 \text{ Nm}$$

Festigkeitsbedingung für Abschnitt 2 (Kupferlegierung):

$$M_{t2} = \frac{R_{e2}}{2 \cdot S_F} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot d_2^3 = \frac{330 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot 1,5} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot (28 \text{ mm})^3 = 474129 \text{ Nmm} = 474,1 \text{ Nm}$$

Festigkeitsbedingung für Abschnitt 3 (Aluminiumlegierung):

$$M_{t3} = \frac{R_{e3}}{2 \cdot S_F} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot d_3^3 = \frac{350 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot 1,5} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot (26 \text{ mm})^3 = 402621 \text{ Nmm} = 402,6 \text{ Nm}$$

Das zulässige Torsionsmoment M_{tzul} beträgt damit:

$$M_{tzul} = M_{t3} = 402,6 \text{ Nm}$$

Berechnung des Verdrehwinkels φ der Welle unter der Wirkung von M_{tzul}

Verdrehwinkel φ_1 für Abschnitt 1:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{M_{tzul} \cdot l_1}{G_1 \cdot I_{p1}} = \frac{M_{tzul} \cdot l_1}{\frac{E_1}{2 \cdot (1 + \mu_1)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d_1^4} = \frac{402621 \text{ Nmm} \cdot 40 \text{ mm}}{\frac{210000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (30 \text{ mm})^4} \\ &= 0,00251 = 0,144^\circ \end{aligned}$$

Verdrehwinkel φ_2 für Abschnitt 2:

$$\varphi_2 = \frac{M_{tzul} \cdot l_2}{\frac{E_2}{2 \cdot (1 + \mu_2)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d_2^4} = \frac{402621 \text{ Nmm} \cdot 30 \text{ mm}}{\frac{108000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,34)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (28 \text{ mm})^4} = 0,00497 = 0,285^\circ$$

Verdrehwinkel φ_3 für Abschnitt 3:

$$\varphi_3 = \frac{M_{tzul} \cdot l_3}{\frac{E_3}{2 \cdot (1 + \mu_3)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d_3^4} = \frac{402621 \text{ Nmm} \cdot 50 \text{ mm}}{\frac{68000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,33)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (26 \text{ mm})^4} = 0,0176 = 1,006^\circ$$

Der gesamte zulässige Verdrehwinkel ergibt sich dann zu:

$$\varphi_{zul} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0,144^\circ + 0,285^\circ + 1,006^\circ = 1,435^\circ$$

3 Spannungszustand

3.1 Formelsammlung zum Spannungszustand

Einachsiger Spannungszustand

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma}{2} \cdot (1 + \cos 2\varphi)$$

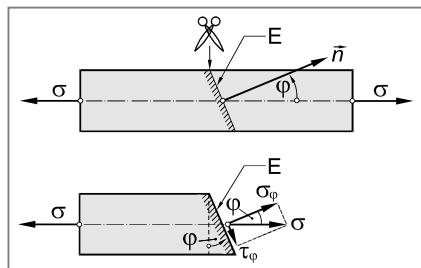
Normalspannungskomponente senkrecht zur Schnittebene E

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

Schubspannungskomponente in der Schnittebene E

$$\left(\sigma_\varphi - \frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau_\varphi^2 = \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2$$

Gleichung Mohr'scher Spannungskreis



Zweiachsiger Spannungszustand

Normalspannungskomponente senkrecht zur Schnittebene E

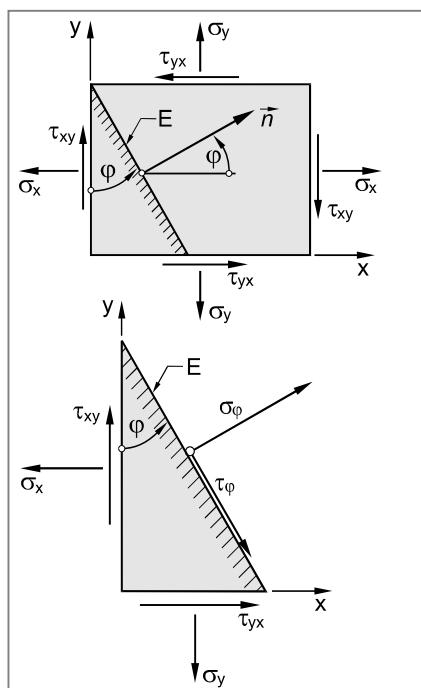
$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi$$

Schubspannungskomponente in der Schnittebene E

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi$$

Gleichung des Mohr'schen Spannungskreises

$$\left(\sigma_\varphi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_\varphi^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$



Hinweis:

Eine Schubspannung ist positiv (negativ) anzusetzen, falls bei Blick in Richtung der Schubspannung die zugehörige Schnittebene rechts (links) von der Schubspannung liegt.

$$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Berechnung der Hauptnormalspannung

$$\sigma_{H2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Berechnung der Hauptnormalspannung

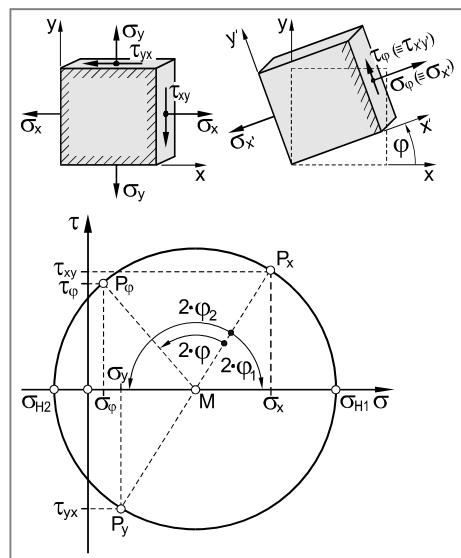
Berechnung der maximalen Schubspannung

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \frac{\sigma_{H1} - \sigma_{H2}}{2}$$

Richtungswinkel zwischen der x-Achse und der ersten oder der zweiten Hauptspannungsrichtung

$$\varphi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

$$\varphi_{2;1} = \varphi_{1;2} + \frac{\pi}{2}$$



Dreiachsiger Spannungszustand

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \text{Spannungstensor}$$

Betrag der Normalspannungskomponente in beliebiger (räumlicher) Schnittrichtung

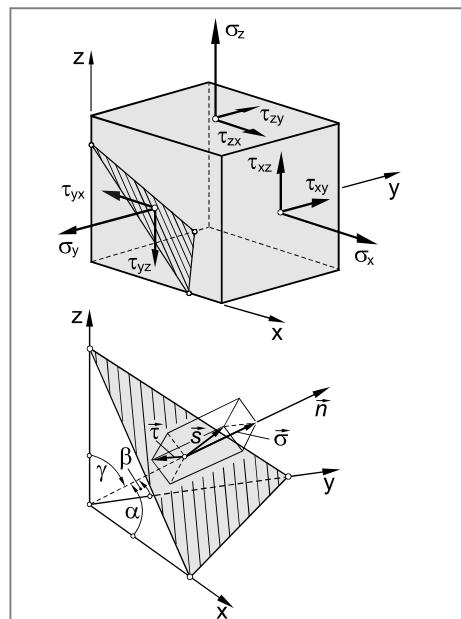
$$\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \cos^2 \beta + \sigma_z \cdot \cos^2 \gamma + 2 \cdot (\tau_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + \tau_{yz} \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \tau_{xz} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha)$$

Betrag der Schubspannungskomponente in beliebiger (räumlicher) Schnittrichtung

$$\tau = \sqrt{s^2 - \sigma^2}$$

mit $\vec{s} = \bar{S} \cdot \vec{n}$

$$\text{und } \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}$$

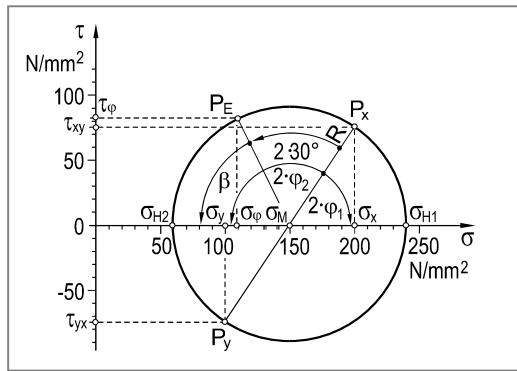


3.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 3.1

- a) Eintragen des Bildpunktes $P_x (\sigma_x \mid \tau_{xy})$ und des Bildpunktes $P_y (\sigma_y \mid \tau_{yx})$ in das σ - τ -Koordinatensystem unter Beachtung der speziellen Vorzeichenregelung für Schubspannungen.

Bildpunkt P_x repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der x-Achse als Normalenvektor. Bildpunkt P_y repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der y-Achse als Normalenvektor.



Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser liegen. Die Strecke P_xP_y schneidet die σ -Achse im Kreismittelpunkt σ_M . Kreis um σ_M durch die Bildpunkte P_x oder P_y ist der gesuchte Mohr'sche Spannungskreis (siehe Abbildung).

Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Spannungskreises

$$\sigma_M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{200 \text{ N/mm}^2 + 100 \text{ N/mm}^2}{2} = 150 \text{ N/mm}^2$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \sqrt{\left(\frac{200 - 100}{2}\right)^2 + 75^2} \text{ N/mm}^2 = 90,1 \text{ N/mm}^2$$

- b) Berechnung der Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2}

$$\sigma_{H1} = \sigma_M + R = 150 \text{ N/mm}^2 + 90,1 \text{ N/mm}^2 = 240,1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H2} = \sigma_M - R = 150 \text{ N/mm}^2 - 90,1 \text{ N/mm}^2 = 59,9 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Achse und den Hauptrichtungen

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot 75 \text{ N/mm}^2}{200 \text{ N/mm}^2 - 100 \text{ N/mm}^2} \right) = -28,2^\circ$$

Der errechnete Winkel φ kann der Richtungswinkel zwischen der ersten *oder* der zweiten Hauptrichtung sein. Eine Entscheidung ist mit Hilfe von Tabelle 3.1 (siehe Lehrbuch) möglich. Da es sich um Fall 1 ($\sigma_x > \sigma_y$ und $\tau_{xy} > 0$) handelt, ist φ der Richtungswinkel zwischen der x-Richtung und der ersten Hauptspannungsrichtung (dies geht entsprechend auch aus dem Mohr'schen Spannungskreis hervor). Es gilt also:

$$\varphi_1 = -28,15^\circ$$

Für den Richtungswinkel φ_2 folgt dann:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ = -28,2^\circ + 90^\circ = \mathbf{61,85^\circ}$$

- c) Berechnung der Spannungskomponenten σ_φ und τ_φ in der Schnittebene E, deren Normalenvektor zur x-Richtung den Winkel $\varphi = 30^\circ$ einschließt

Die gesuchten Spannungskomponenten in der Schnittebene E erhält man aus dem Mohr'schen Spannungskreis, indem man ausgehend vom Bildpunkt P_x den doppelten Richtungswinkel ($2 \cdot 30^\circ$) mit dem Lageplan entsprechendem Drehsinn anträgt (Bildpunkt P_E). Die Koordinaten des Bildpunktes P_E sind die gesuchten Spannungen σ_φ und τ_φ in der Schnittebene E.

Berechnung des Winkels β :

$$\beta = 180^\circ - 2 \cdot |\varphi_1| - 2 \cdot 30^\circ = 180^\circ - 2 \cdot 28,15^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 63,7^\circ$$

Berechnung der Spannungskomponenten σ_φ und τ_φ :

$$\sigma_\varphi = \sigma_M - R \cdot \cos \beta = 150 \text{ N/mm}^2 - 90,1 \text{ N/mm}^2 \cdot \cos 63,7^\circ = \mathbf{110,0 \text{ N/mm}^2}$$

$$\tau_\varphi = R \cdot \sin \beta = 90,1 \text{ N/mm}^2 \cdot \sin 63,7^\circ = \mathbf{80,8 \text{ N/mm}^2}$$

Lösung zu Aufgabe 3.2

a) Berechnung der Lastspannungen an der höchst beanspruchten Stelle (Außenrand)

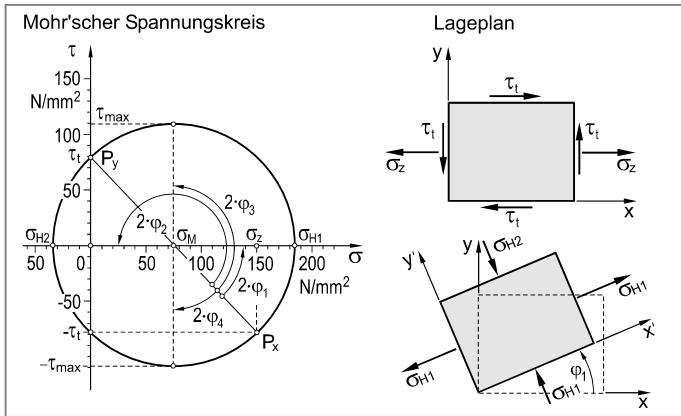
$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{425\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (100^2 - 80^2) \text{ mm}^2} = 150,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot \left(\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} \right)} = \frac{9\,250\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot \left(\frac{100^4 - 80^4}{100} \right) \text{ mm}^3} = 79,8 \text{ N/mm}^2$$

Konstruktion des Mohr'scher Spannungskreises

Eintragen der Bildpunkte P_x ($\sigma_z \mid -\tau_t$) und P_y ($0 \mid \tau_t$) in das σ - τ -Koordinatensystem unter Beachtung der speziellen Vorzeichenregelung für Schubspannungen.

Bildpunkt P_x repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der x-Achse als Normalenvektor. Der Bildpunkt P_y repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der y-Achse als Normalenvektor.



Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser liegen. Die Strecke P_xP_y schneidet die σ -Achse im Kreismittelpunkt σ_M . Kreis um σ_M durch die Bildpunkte P_x oder P_y ist der gesuchte Mohr'sche Spannungskreis (siehe Abbildung).

b) Berechnung der Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2}

$$\sigma_{H1;H2} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \frac{150,3}{2} \text{ N/mm}^2 \pm \sqrt{\left(\frac{150,3}{2}\right)^2 + 79,8^2} \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H1} = 184,8 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H2} = -34,5 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Hauptschubspannung τ_{max}

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{150,3}{2}\right)^2 + 79,8^2} \text{ N/mm}^2 = \pm 109,6 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Achse und den Hauptrichtungen

$$\begin{aligned}\varphi_{1,2} &= \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot \tau_t}{\sigma_z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot (-79,8) \text{ N/mm}^2}{150,3 \text{ N/mm}^2} \right) = 23,4^\circ\end{aligned}$$

Der errechnete Winkel φ kann der Richtungswinkel zwischen der ersten *oder* der zweiten Hauptrichtung sein. Eine Entscheidung ist mit Hilfe von Tabelle 3.1 (siehe Lehrbuch) möglich. Da es sich um Fall 4 ($\sigma_x - \sigma_y \equiv \sigma_z - 0 = \sigma_z > 0$ und $\tau_{xy} \equiv \tau_t < 0$) handelt, ist φ der Richtungswinkel zwischen der x-Richtung und der ersten Hauptspannungsrichtung (dies geht auch aus dem Mohr'schen Spannungskreis hervor). Es gilt also:

$$\varphi_1 = 23,4^\circ$$

Für den Richtungswinkel φ_2 folgt dann:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ = 23,4^\circ + 90^\circ = 113,4^\circ$$

Berechnung der Richtungswinkel φ_3 und φ_4 zwischen der x-Achse und den Hauptschubspannungsrichtungen

$$\varphi_3 = \varphi_1 + 45^\circ = 23,4^\circ + 45^\circ = 68,4^\circ$$

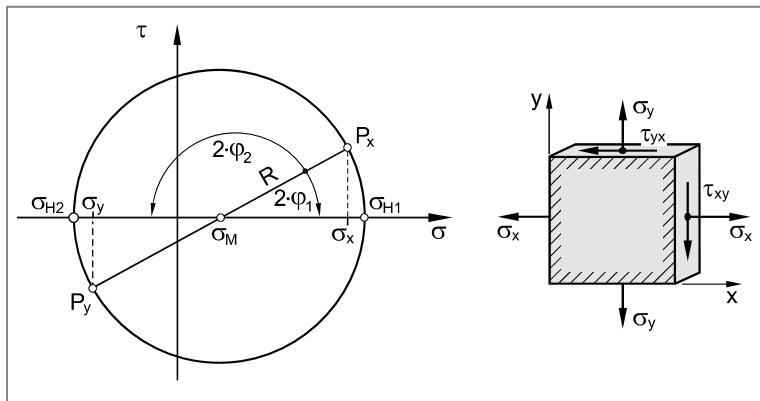
$$\varphi_4 = \varphi_1 - 45^\circ = 23,4^\circ - 45^\circ = -21,6^\circ$$

Lösung zu Aufgabe 3.3

- a) Der Spannungszustand (σ_x , σ_y , und τ_{xy}) im Blechstreifen ist bekannt. Man kann daher den Mohr'schen Spannungskreis konstruieren.

Eintragen des Bildpunktes $P_x(\sigma_x | \tau_{xy})$ und des Bildpunktes $P_y(\sigma_y | \tau_{xy})$ in das σ - τ -Koordinatensystem unter Beachtung der speziellen Vorzeichenregelung für Schubspannungen. Bildpunkt P_x repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der x-Achse als Normalenvektor. Bildpunkt P_y repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der y-Achse als Normalenvektor.

Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser liegen. Die Strecke P_xP_y schneidet die σ -Achse im Kreismittelpunkt σ_M .



Kreis um σ_M durch die Bildpunkte P_x oder P_y ist der gesuchte Mohr'sche Spannungskreis (siehe Abbildung).

Berechnung der Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2}

$$\begin{aligned}\sigma_{H1;H2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{200 + (-100)}{2} \text{ N/mm}^2 \pm \sqrt{\left(\frac{200 - (-100)}{2}\right)^2 + 40^2} \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_{H1} = 205,24 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H2} = -105,20 \text{ N/mm}^2$$

- b) Berechnung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Achse und den Hauptrichtungen

$$\varphi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot 40 \text{ N/mm}^2}{200 \text{ N/mm}^2 - (-100) \text{ N/mm}^2} \right) = -7,47^\circ$$

Der errechnete Winkel φ kann der Richtungswinkel zwischen der ersten *oder* der zweiten Hauptrichtung sein. Eine Entscheidung ist mit Hilfe von Tabelle 3.1 (siehe Lehrbuch) möglich.

Da es sich um Fall 1 ($\sigma_x > \sigma_y$ und $\tau_{xy} > 0$) handelt, ist φ der Richtungswinkel zwischen der x-Richtung und der ersten Hauptspannungsrichtung (dies geht auch aus dem Mohr'schen Spannungskreis hervor). Es gilt also:

$$\varphi_1 = -7,47^\circ$$

Für den Richtungswinkel φ_2 folgt dann:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ = -7,47^\circ + 90^\circ = 82,53^\circ$$

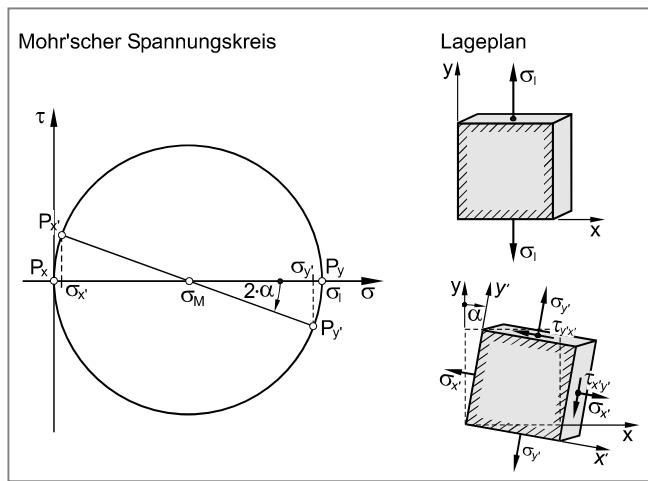
Lösung zu Aufgabe 3.4

a) Beanspruchung: Zug und Biegung

b) Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises

Zur Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises benötigt man die Spannungen in zwei zueinander senkrechten Schnittflächen. Bekannt sind die Spannungen in den Schnittflächen mit der x- und der y-Richtung als Normale.

Eintragen der Bildpunkte P_x ($0 | 0$) und P_y ($\sigma_1 | 0$) in das σ - τ -Koordinatensystem. P_x und P_y repräsentieren die Spannungen in den Schnittflächen mit der x- und der y-Richtung als Normale. Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, liegen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser, damit ist der Mohr'sche Spannungskreis festgelegt (siehe Abbildung).



Die Bildpunkte $P_{x'}$ und $P_{y'}$, welche die Spannungen in den Schnittflächen mit der x' - bzw. y' -Richtung als Normale repräsentieren, erhält man durch Abtragen der Richtungswinkel $2\cdot\alpha$ bzw. $2\cdot\alpha + 180^\circ$, ausgehend vom Bildpunkt P_y (gleicher Drehsinn zum Lageplan).

Aus dem Mohr'schen Spannungskreis folgt für die Normalspannungen $\sigma_{x'}$ und $\sigma_{y'}$:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_1}{2} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha)$$

Berechnung der Dehnung in y' -Richtung (Messrichtung des DMS) durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes für den zweiachsigem Spannungszustand

$$\varepsilon_{y'} \equiv \varepsilon_{DMS} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{y'} - \mu \cdot \sigma_{x'}) = \frac{\sigma_1}{2 \cdot E} \cdot ((1 + \cos 2\alpha) - \mu \cdot (1 - \cos 2\alpha)) \quad (1)$$

Zusammenhang zwischen äußerer Beanspruchung F und Längsspannung σ_1
(kein Biegeanteil, da DMS in neutraler Faser liegt)

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{F}{b \cdot c} \quad (2)$$

(2) in (1) eingesetzt und nach F umgeformt:

$$F = \frac{2 \cdot E \cdot \varepsilon_{y'} \cdot b \cdot c}{(1 + \cos 2\alpha) - \mu \cdot (1 - \cos 2\alpha)}$$

$$F = \frac{2 \cdot 108\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,0001485 \cdot 300 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}}{(1 + \cos 20^\circ) - 0,25 \cdot (1 - \cos 20^\circ)} = 999\,971 \text{ N} \approx 1000 \text{ kN}$$

Alternative Lösung mit Hilfe des Mohr'schen Verformungskreises

Dehnungen in Längs- und Querrichtung

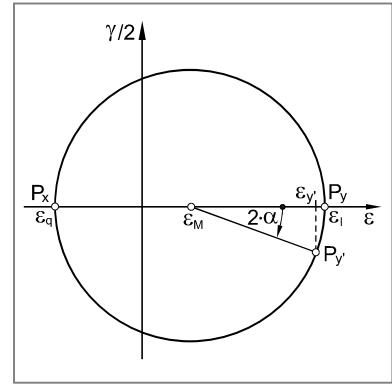
$$\varepsilon_l \equiv \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_q \equiv -\mu \cdot \varepsilon_l = -\mu \cdot \varepsilon_y$$

Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises

Zur Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises benötigt man die Verformungen in zwei zueinander senkrechten Schnitttrichtungen. Bekannt sind die Verformungen mit der x- bzw. der y-Richtung als Bezugsrichtung.

Einzeichnen der Bildpunkte $P_x (\varepsilon_q | 0)$ und $P_y (\varepsilon_l | 0)$ in das $\varepsilon-\gamma/2$ -Koordinatensystem ergibt den Mohr'schen Verformungskreis ($\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon_l$). Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, liegen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser. Damit ist der Mohr'sche Verformungskreis festgelegt (siehe Abbildung).



Bildpunkt $P_{y'}$, welcher die Verformungen in y' -Richtung (Messrichtung des DMS) als Bezugsrichtung repräsentiert, erhält man durch Abtragen des Richtungswinkels $2 \cdot \alpha$, ausgehend vom Bildpunkt P_y (gleicher Drehsinn zum Lageplan).

Für den Mittelpunkt und den Radius des Mohr'schen Verformungskreises erhält man:

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_l + \varepsilon_q}{2} = \frac{\varepsilon_l}{2} \cdot (1 - \mu)$$

$$R = \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_q}{2} = \frac{\varepsilon_l}{2} \cdot (1 + \mu)$$

Damit folgt für die Dehnung in y' -Richtung (Messrichtung des DMS)

$$\varepsilon_y \equiv \varepsilon_{DMS} = \varepsilon_R + R \cdot \cos 2\alpha = \frac{\varepsilon_l}{2} \cdot ((1 - \mu) + (1 + \mu) \cdot \cos 2\alpha)$$

$$\varepsilon_l = \frac{2 \cdot \varepsilon_{DMS}}{(1 - \mu) + (1 + \mu) \cdot \cos 2\alpha} = \frac{2 \cdot 0,0001485}{(1 - 0,25) + (1 + 0,25) \cdot \cos 20^\circ}$$

Berechnung der Spannung in Längsrichtung

$$\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1 = 108\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,0001543 = 16,66 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Zugkraft F

$$F = \sigma_1 \cdot A = \sigma_1 \cdot b \cdot c = 16,66 \text{ N/mm}^2 \cdot 300 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm} = 999\,971 \text{ N} \approx 1000 \text{ kN}$$

- c) Höchst beanspruchte Stelle: Innenseite der Säule, da Überlagerung von Zug- und Biegebeanspruchung

Berechnung der Lastspannungen

$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{1000\,000 \text{ N}}{300 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}} = 16,67 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{F \cdot \left(a - \frac{b}{2}\right)}{\frac{c \cdot b^2}{6}} = \frac{1000\,000 \text{ N} \cdot 300 \text{ mm}}{300 \text{ mm} \cdot (200 \text{ mm})^2} = 166,67 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

Festigkeitsbedingung (Innenseite Querschnittfläche A-B)

$$\sigma \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_z + \sigma_b = \frac{R_m}{S_B}$$

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_z + \sigma_b} = \frac{350 \text{ N/mm}^2}{16,67 \text{ N/mm}^2 + 166,67 \text{ N/mm}^2} = 1,91 \text{ (nicht ausreichend, da } S_B < 4,0)$$

Lösung zu Aufgabe 3.5

- a) **Aufstellen des Spannungstensors** (die Einheit N/mm² wird der Übersichtlichkeit halber nachfolgend weggelassen):

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 500 & 250 & 400 \\ 250 & 200 & 100 \\ 400 & 100 & 300 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene E_1

$$\vec{n}_{E1} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ermittlung des Spannungsvektors \vec{s} zur Schnittebene E_1

$$\vec{s} = \bar{S} \cdot \vec{n}_{E1} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 & 250 & 400 \\ 250 & 200 & 100 \\ 400 & 100 & 300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 657,84 \\ 295,71 \\ 462,13 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Betrags der Normalspannungskomponente σ des Spannungsvektors \vec{s} zur Schnittebene E_1

$$\sigma = \vec{s} \cdot \vec{n}_{E1} = \begin{pmatrix} 657,84 \\ 295,71 \\ 462,13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 803,55 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Betrags der Schubspannungskomponente τ des Spannungsvektors \vec{s} zur Schnittebene E_1

$$\tau = \sqrt{s^2 - \sigma^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 657,84 \\ 295,71 \\ 462,13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 657,84 \\ 295,71 \\ 462,13 \end{pmatrix} - 803,55^2} = 296,77 \text{ N/mm}^2$$

- b) **Normalenvektor der Ebene E_2** (die Einheit N/mm² wird der Übersichtlichkeit halber nachfolgend weggelassen):

$$\vec{n}_{E2} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7566 \\ 0,3457 \\ 0,5549 \end{pmatrix}$$

Ermittlung des Spannungsvektors \vec{s} zur Schnittebene E_2

$$\vec{s} = \bar{S} \cdot \vec{n}_{E2} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 & 250 & 400 \\ 250 & 200 & 100 \\ 400 & 100 & 300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7566 \\ 0,3457 \\ 0,5549 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 686,73 \\ 313,80 \\ 503,71 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Betrags der Normalspannungskomponente σ des Spannungsvektors \vec{s} zur Schnittebene E_2

$$\sigma = \vec{s} \cdot \vec{n}_{E2} = \begin{pmatrix} 686,64 \\ 313,75 \\ 503,70 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7566 \\ 0,3457 \\ 0,5549 \end{pmatrix} = 907,63 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Betrags der Schubspannungskomponente τ des Spannungsvektors \vec{s} zur Schnittebene E_2

$$\tau = \sqrt{s^2 - \sigma^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 686,64 \\ 313,75 \\ 503,70 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 686,64 \\ 313,75 \\ 503,70 \end{pmatrix} - 907,63^2} \approx 0$$

Da die Schubspannungskomponente τ in der Schnittebene E_2 zu Null wird, ist die Ebene E_2 Hauptspannungsebene und die Normalspannung $\bar{\sigma}$ Hauptnormalspannung.

Hinweis: Bedingt durch Rundungsungenauigkeiten kann der Betrag der Schubspannung τ geringfügig von Null abweichen.

c) **Aufstellen der Eigenwertgleichung**

$$\sigma_{\text{Hi}}^3 - I_1 \cdot \sigma_{\text{Hi}}^2 + I_2 \cdot \sigma_{\text{Hi}} - I_3 = 0$$

mit den Invarianten (Einheiten werden weggelassen):

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ &= 500 + 200 + 300 \\ &= 1000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \\ &= 500 \cdot 200 + 200 \cdot 300 + 300 \cdot 500 - 250^2 - 100^2 - 400^2 = 77500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{xz} - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 \\ &= 500 \cdot 200 \cdot 300 + 2 \cdot 250 \cdot 100 \cdot 400 - 500 \cdot 100^2 - 200 \cdot 400^2 - 300 \cdot 250^2 \\ &= -5750000 \end{aligned}$$

Damit lautet die Eigenwertgleichung:

$$\sigma_{\text{Hi}}^3 - 1000 \cdot \sigma_{\text{Hi}}^2 + 77500 \cdot \sigma_{\text{Hi}} - 5750000 = 0$$

Allgemeine Form der kubischen Gleichung

$$\sigma_{\text{Hi}}^3 + A \cdot \sigma_{\text{Hi}}^2 + B \cdot \sigma_{\text{Hi}} + C = 0$$

Koeffizientenvergleich ergibt für A , B und C :

$$A = -I_1 = -1000$$

$$B = I_2 = 77500$$

$$C = -I_3 = 5750000$$

Reduzierte Form der kubischen Gleichung

$$u^3 + a \cdot u + b = 0$$

$$\text{mit } a = B - \frac{A^2}{3} = 77500 - \frac{(-1000)^2}{3} = -255833,3$$

$$\begin{aligned} \text{und } b &= \frac{2}{27} \cdot A^3 - \frac{1}{3} \cdot A \cdot B + C \\ &= \frac{2}{27} \cdot (-1000)^3 - \frac{1}{3} \cdot (-1000) \cdot 77500 + 5750000 \\ &= -42490741 \end{aligned}$$

Berechnung der Diskriminante D

$$D = \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{a}{3} \right)^3 = \left(-\frac{42490741}{2} \right)^2 + \left(\frac{-255833,3}{3} \right)^3 = -1,69 \cdot 10^{14} < 0$$

Da $D < 0$ besitzt die kubische Gleichung drei reelle Lösungen (u_1 , u_2 und u_3):

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \cos \varphi \quad \text{mit } \varphi = \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{b}{2 \cdot \sqrt{-(a/3)^3}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{-42490741}{2 \cdot \sqrt{-(255833,3/3)^3}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \arccos 0,853 \\ &= 10,482^\circ \end{aligned}$$

$$u_1 = 574,29 \text{ N/mm}^2$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \cos(\varphi + 120^\circ) \\ &= 2 \cdot \sqrt{-\frac{-255833,3}{3}} \cdot \cos(10,482^\circ + 120^\circ) = -379,17 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

$$u_3 = 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot (\varphi + 240^\circ)$$

$$u_3 = 2 \cdot \sqrt{-\frac{255\,833,3}{3}} \cdot \cos(10,482^\circ + 240^\circ) = -195,13 \text{ N/mm}^2$$

Zwischen den Hauptnormalspannungen σ_i und der Koordinate u_i besteht die Beziehung:

$$\sigma_{Hi} = u_i - \frac{A}{3}$$

Damit folgt für die Hauptnormalspannungen σ_i :

$$\sigma_{H1} = u_1 - \frac{A}{3} = 574,29 \text{ N/mm}^2 - \frac{-1000 \text{ N/mm}^2}{3} = 907,63 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H2} = u_2 - \frac{A}{3} = -379,17 \text{ N/mm}^2 - \frac{-1000 \text{ N/mm}^2}{3} = -45,84 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H3} = u_3 - \frac{A}{3} = -195,13 \text{ N/mm}^2 - \frac{-1000 \text{ N/mm}^2}{3} = 138,21 \text{ N/mm}^2$$

Kontrolle:

$$\sigma_{H1} + \sigma_{H2} + \sigma_{H3} = I_1$$

$$907,63 - 45,84 + 138,21 = 1000$$

Ordnen der **Hauptnormalspannungen** entsprechend ihrer algebraischen Größe liefert schließlich:

$$\sigma_1 = 907,63 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = 138,21 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = -45,84 \text{ N/mm}^2$$

- d) Die **Hauptspannungsrichtungen** (α_i , β_i und γ_i mit $i = 1,2,3$) erhält man durch Lösen des Gleichungssystems:

$$(\sigma_x - \sigma_i) \cdot \cos \alpha_i + \tau_{xy} \cdot \cos \beta_i + \tau_{xz} \cdot \cos \gamma_i = 0$$

$$\tau_{xy} \cdot \cos \alpha_i + (\sigma_y - \sigma_i) \cdot \cos \beta_i + \tau_{yz} \cdot \cos \gamma_i = 0$$

$$\tau_{xz} \cdot \cos \alpha_i + \tau_{yz} \cdot \cos \beta_i + (\sigma_z - \sigma_i) \cdot \cos \gamma_i = 0$$

Für die erste Hauptspannungsrichtung ($i = 1$; $\sigma_1 = 907,6 \text{ N/mm}^2$) erhält man das homogene, lineare Gleichungssystem (die Einheit N/mm^2 wird der Übersichtlichkeit halber weggelassen):

$$(500 - 907,63) \cdot \cos \alpha_1 + 250 \cdot \cos \beta_1 + 400 \cdot \cos \gamma_1 = 0$$

$$250 \cdot \cos \alpha_1 + (200 - 907,63) \cdot \cos \beta_1 + 100 \cdot \cos \gamma_1 = 0$$

$$400 \cdot \cos \alpha_1 + 100 \cdot \cos \beta_1 + (300 - 907,63) \cdot \cos \gamma_1 = 0$$

und umgeformt:

$$-407,63 \cdot \cos \alpha_1 + 250 \cdot \cos \beta_1 + 400 \cdot \cos \gamma_1 = 0 \quad (1)$$

$$250 \cdot \cos \alpha_1 - 707,63 \cdot \cos \beta_1 + 100 \cdot \cos \gamma_1 = 0 \quad (2)$$

$$400 \cdot \cos \alpha_1 + 100 \cdot \cos \beta_1 - 607,63 \cdot \cos \gamma_1 = 0 \quad (3)$$

Die Gleichungen 1 bis 3 sind nicht unabhängig voneinander, so dass zur Bestimmung der Richtungswinkel α_1 , β_1 und γ_1 eine weitere, unabhängige Gleichung herangezogen werden muss. Die dritte Gleichung kann dann zur Kontrolle verwendet werden.

Für die Richtungswinkel des (normierten) Normalenvektors ($|\vec{n}| = 1$) gilt:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1 \quad (4)$$

Aus Gleichung 2 folgt:

$$\cos \beta_1 = 0,3533 \cdot \cos \alpha_1 + 0,1413 \cdot \cos \gamma_1 \quad (5)$$

Gleichung 5 in Gleichung 1 eingesetzt ergibt:

$$-407,63 \cdot \cos \alpha_1 + 250 \cdot (0,3533 \cdot \cos \alpha_1 + 0,1413 \cdot \cos \gamma_1) + 400 \cdot \cos \gamma_1 = 0$$

$$-319,31 \cdot \cos \alpha_1 + 435,33 \cdot \cos \gamma_1 = 0$$

$$\cos \gamma_1 = 0,7335 \cdot \cos \alpha_1 \quad (6)$$

Gleichung 6 in Gleichung 5 eingesetzt ergibt:

$$\cos \beta_1 = 0,3533 \cdot \cos \alpha_1 + 0,1413 \cdot 0,7335 \cdot \cos \alpha_1$$

$$\cos \beta_1 = 0,3533 \cdot \cos \alpha_1 + 0,1037 \cdot \cos \alpha_1$$

$$\cos \beta_1 = 0,4567 \cdot \cos \alpha_1 \quad (7)$$

Gleichung 6 und 7 in Gleichung 4 eingesetzt:

$$\cos^2 \alpha_1 + (0,4567 \cdot \cos \alpha_1)^2 + (0,7335 \cdot \cos \alpha_1)^2 = 1$$

$$1,7465 \cdot \cos^2 \alpha_1 = 1$$

$$\cos \alpha_1 = 0,7567$$

$$\alpha_1 = \mathbf{40,83^\circ}$$

Damit folgt aus Gleichung 7:

$$\cos \beta_1 = 0,4567 \cdot \cos \alpha_1 = 0,3455$$

$$\beta_1 = \mathbf{69,79^\circ}$$

Aus Gleichung 6 folgt:

$$\cos \gamma_1 = 0,7335 \cdot \cos \alpha_1 = 0,5550$$

$$\gamma_1 = \mathbf{56,29^\circ}$$

Kontrolle der Ergebnisse mit Hilfe von Gleichung 3:

$$400 \cdot \cos \alpha_1 + 100 \cdot \cos \beta_1 - 607,63 \cdot \cos \gamma_1 = 0$$

$$400 \cdot 0,7567 + 100 \cdot 0,3455 - 607,63 \cdot 0,5550 = 0$$

$$0 = 0$$

Die Richtungswinkel der Hauptnormalspannungen $\sigma_2 = 138,21 \text{ N/mm}^2$ (α_2 , β_2 und γ_2) und $\sigma_3 = -45,84 \text{ N/mm}^2$ (α_3 , β_3 und γ_3) erhält man auf analoge Weise:

$$\alpha_2 = 89,78^\circ$$

$$\beta_2 = 32,17^\circ$$

$$\gamma_2 = 122,16^\circ$$

und

$$\alpha_3 = 49,17^\circ$$

$$\beta_3 = 113,89^\circ$$

$$\gamma_3 = 50,27^\circ$$

e) Rechnerische Lösung

Normalenvektor der Ebene E_1 (die Einheit N/mm^2 wird der Übersichtlichkeit halber nachfolgend weggelassen):

$$\vec{n}_{E3} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6428 \\ 0,6428 \\ 0,4163 \end{pmatrix}$$

Ermittlung des Spannungsvektors \vec{s} zur Schnittebene E_3

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \bar{S}_H \cdot \vec{n}_{E2} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 907,63 & 0 & 0 \\ 0 & 138,21 & 0 \\ 0 & 0 & -45,84 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6428 \\ 0,6428 \\ 0,4163 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 583,42 \\ 88,84 \\ -19,08 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

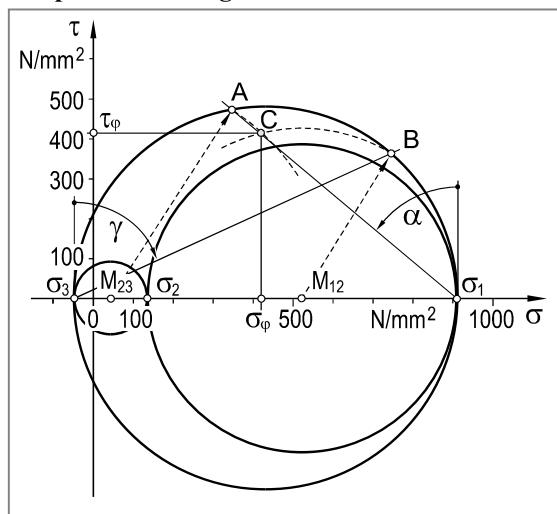
Berechnung des Betrags der Normalspannungskomponente σ des Spannungsvektors \vec{s} zur Schnittebene E_3

$$\sigma = \vec{s} \cdot \vec{n}_{E3} = \begin{pmatrix} 583,42 \\ 88,84 \\ -19,08 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6428 \\ 0,6428 \\ 0,4163 \end{pmatrix} = 424,17 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Betrags der Schubspannungskomponente τ des Spannungsvektors \vec{s} zur Schnittebene E_3

$$\tau = \sqrt{s^2 - \sigma^2} = \sqrt{\begin{pmatrix} 583,42 \\ 88,84 \\ -19,08 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 583,42 \\ 88,84 \\ -19,08 \end{pmatrix}} - 424,17^2 = 410,74 \text{ N/mm}^2$$

Graphische Lösung



abgelesen: $\sigma_\phi = 425 \text{ N/mm}^2$
 $\tau_\phi = 410 \text{ N/mm}^2$

4 Verformungszustand

4.1 Formelsammlung zum Verformungszustand

Definition von Dehnung und Schiebung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$$

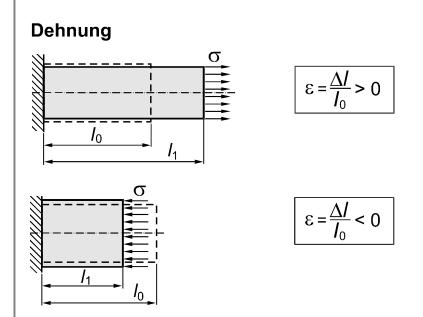
Definition der (technischen) Dehnung

$$\gamma = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

Definition der Schiebung

Vorzeichenregelung für Schiebungen

Eine Schiebung ist positiv (negativ) anzusetzen, falls sich der ursprünglich rechte Winkel des betrachteten Winkelementes vergrößert (verkleinert).



Zweiachsiger Verformungszustand

Dehnung in Schnittrichtung $\varphi^1)$

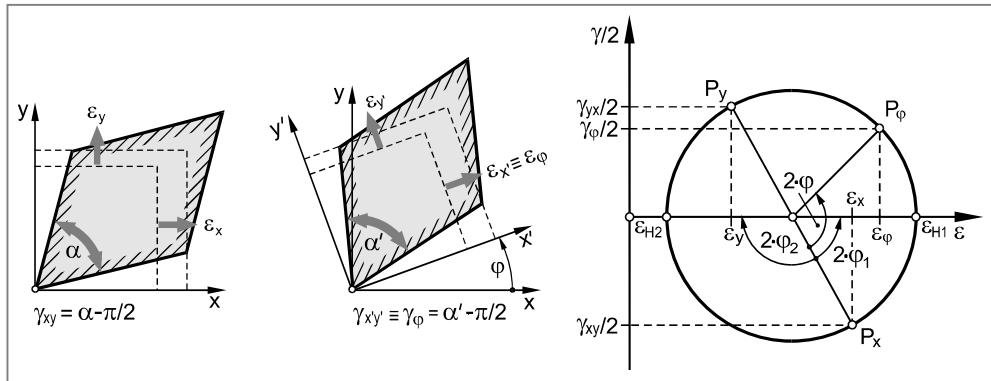
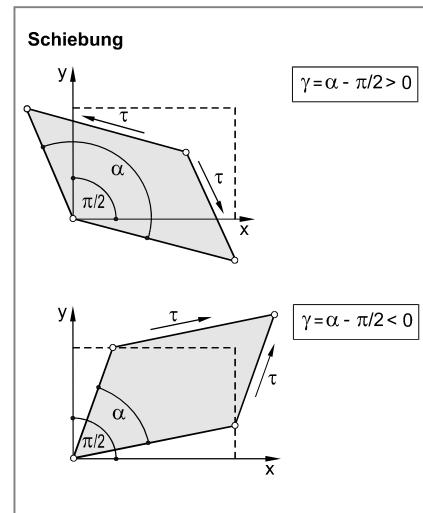
$$\varepsilon_\varphi = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

Schiebung in Schnittrichtung $\varphi^1)$

$$\gamma_\varphi = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \cos 2\varphi$$

Gleichung des Mohr'schen Verformungskreises

$$\left(\varepsilon_\varphi - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_\varphi}{2} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2$$



¹⁾ mit der x'-Richtung (φ -Richtung) als Bezug

$$\varepsilon_{H1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Berechnung der Hauptdehnung

$$\varepsilon_{H2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Berechnung der Hauptdehnung

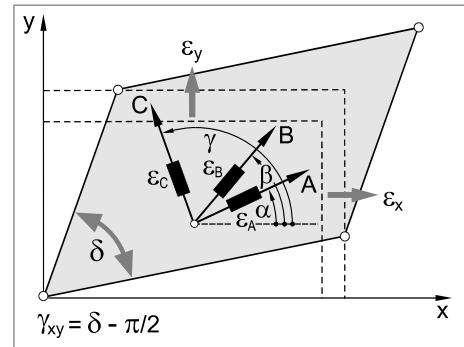
Richtungswinkel zwischen der x-Achse und der ersten oder der zweiten Hauptdehnungsrichtung

$$\varphi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right)$$

$$\varphi_{2;1} = \varphi_{1;2} + \frac{\pi}{2}$$

Auswertung dreier beliebig orientierter Dehnungsmessstreifen

$$\begin{aligned}\varepsilon_A &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\alpha \\ \varepsilon_B &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\beta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\beta \\ \varepsilon_C &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\gamma - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\gamma\end{aligned}$$



4.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 4.1

a) Berechnung der Dehnungen in x- und y-Richtung (ε_x und ε_y) sowie der Schiebung γ_{xy}

$$\varepsilon_x = \frac{a' - a}{a} = \frac{10,02 \text{ mm} - 10 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} = 0,002 = 2\%$$

$$\varepsilon_y = \frac{b' - b}{b} = \frac{8,01 \text{ mm} - 8 \text{ mm}}{8 \text{ mm}} = 0,00125 = 1,25\%$$

$$\gamma_{xy} = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ} - \frac{\pi}{2} = 89,75 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} - \frac{\pi}{2} = -0,00436 = -4,36\%$$

b) Berechnung der Dehnung ε_ϕ sowie die Schiebung γ_ϕ mit der ϕ -Richtung als Bezug

Rechnerische Lösung:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\phi &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\phi - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\phi \\ &= \frac{0,002 + 0,00125}{2} + \frac{0,002 - 0,00125}{2} \cdot \cos 60^\circ - \frac{-0,00436}{2} \cdot \sin 60^\circ \\ &= 0,0037 = 3,7\%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_\phi &= (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin 2\phi + \gamma_{xy} \cdot \cos 2\phi \\ &= (0,002 - 0,00125) \cdot \sin 60^\circ - 0,00436 \cdot \cos 60^\circ \\ &= -0,00153 = -1,53\%\end{aligned}$$

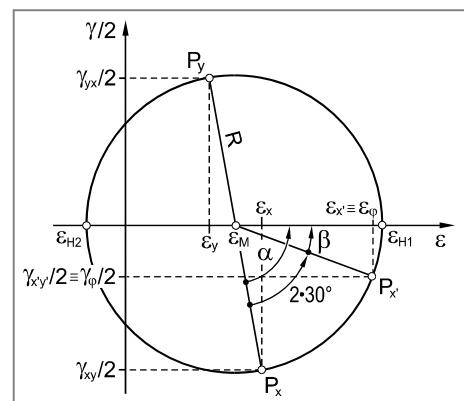
Da $\gamma_\phi < 0$, handelt es sich gemäß der Vorzeichenregelung für Schiebungen um eine Winkelverkleinerung.

Graphische Lösung:

Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises

Zur Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises benötigt man die Verformungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen. Bekannt sind die Verformungen mit der x- bzw. y-Richtung als Bezugsrichtung.

Einzeichnen der entsprechenden Bildpunkte P_x ($\varepsilon_x | \gamma_{xy}/2$) und P_y ($\varepsilon_y | \gamma_{xy}/2$) in das $\varepsilon-\gamma/2$ -Koordinatensystem unter Berücksichtigung der Vorzeichenregelung für Schiebungen.



Da die x- und die y-Richtung einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser liegen. Die Strecke P_xP_y schneidet die ε -Achse im Kreismittelpunkt M . Kreis um M durch die Bildpunkte P_x und P_y ist der gesuchte Mohr'sche Verformungskreis (siehe Abbildung).

Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{0,002 + 0,00125}{2} = 0,001625$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,002 - 0,00125}{2}\right)^2 + \left(\frac{0,00436}{2}\right)^2} \\ = 0,002212$$

Berechnung des Winkels α zwischen x-Richtung und Hauptdehnungsrichtung ε_H

$$\alpha = \arctan \frac{\gamma_{xy}/2}{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)/2} = \arctan \frac{0,00436/2}{(0,002 - 0,00125)/2} = 80,24^\circ$$

Damit folgt für den Winkel β :

$$\beta = \alpha - 2 \cdot \varphi = 80,24^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 20,24^\circ$$

Berechnung der Dehnung in φ -Richtung (ε_φ)

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_M + R \cdot \cos \beta = 0,001625 + 0,002212 \cdot \cos 20,24^\circ = 0,0037 = 3,7\%$$

Berechnung der Schiebung mit der φ -Richtung als Bezugsrichtung (γ_φ)

$$\gamma_\varphi / 2 = -R \cdot \sin \beta = -0,002212 \cdot \sin 20,24^\circ = -0,0007652$$

$$\gamma_\varphi = -0,00153 = -1,53\%$$

Da $\gamma_\varphi < 0$, handelt es sich gemäß der Vorzeichenregelung für Schiebungen um eine Winkelverkleinerung.

c) Berechnung der Länge l' des gedrehten, verformten Flächenelementes

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_{x'} = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = \varepsilon_\varphi \cdot l = 0,0037 \cdot 5 \text{ mm} = 0,0185 \text{ mm}$$

damit folgt für l' :

$$l' = l + \Delta l = 5 \text{ mm} + 0,0185 \text{ mm} = 5,0185 \text{ mm}$$

Berechnung des Winkels δ des gedrehten, verformten Flächenelementes

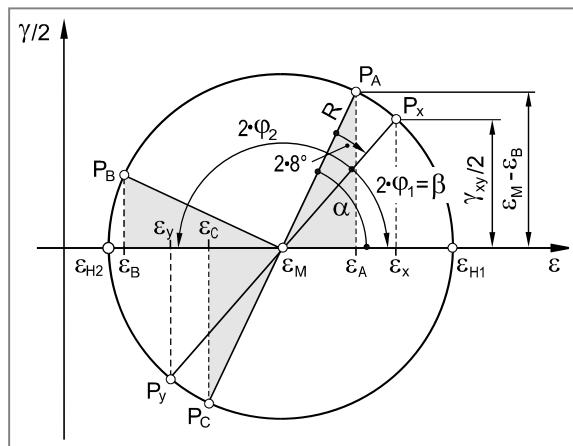
$$\gamma_\varphi = \gamma_{x'y'} = \delta - \frac{\pi}{2}$$

$$\delta = \gamma_\varphi + \frac{\pi}{2} = -0,00153 + \frac{\pi}{2} = 1,5693$$

$$\delta = 89,91^\circ$$

Lösung zu Aufgabe 4.2

- a) Es liegt eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette vor. Daher kann der Mohr'sche Verformungskreis entsprechend Kapitel 4.4.2 (siehe Lehrbuch) auf einfache Weise konstruiert werden.



Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} = \frac{0,862 \% + 0,472 \%}{2} = 0,667 \%$$

$$R = \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_M)^2 + (\varepsilon_M - \varepsilon_B)^2}$$

$$= \sqrt{(0,862 \% - 0,667 \%)^2 + (0,667 \% - 0,224 \%)^2} = 0,484 \%$$

Berechnung des Winkels α zwischen der Messrichtung von DMS A und der Hauptdehnungsrichtung ε_{H1}

$$\tan \alpha = \frac{\varepsilon_M - \varepsilon_B}{\varepsilon_A - \varepsilon_M} = \frac{0,667 \% - 0,224 \%}{0,862 \% - 0,667 \%} = 2,272$$

$$\alpha = 66,24^\circ$$

Damit folgt für den Betrag des Richtungswinkels β :

$$\beta = \alpha - 2 \cdot 8^\circ = 66,24^\circ - 16^\circ = 50,24^\circ$$

Berechnung der Dehnungen in x- und y-Richtung

$$\varepsilon_x = \varepsilon_M + R \cdot \cos \beta = 0,667 \% + 0,484 \% \cdot \cos 50,24^\circ = 0,977 \%$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_M - R \cdot \cos \beta = 0,667 \% - 0,484 \% \cdot \cos 50,24^\circ = 0,357 \%$$

Berechnung der Schiebung γ_{xy}

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = R \cdot \sin \beta = 0,484 \% \cdot \sin 50,24^\circ = 0,372 \%$$

$$\gamma_{xy} = 0,744 \%$$

Da die Schiebung $\gamma_{xy} > 0$ ist, handelt es sich gemäß der Vorzeichenregelung für Schiebungen um eine Winkelvergrößerung.

b) **Berechnung der Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2}**

$$\varepsilon_{H1} = \varepsilon_M + R = 0,667 \% + 0,484 \% = \mathbf{1,151 \%}$$

$$\varepsilon_{H2} = \varepsilon_M - R = 0,667 \% - 0,484 \% = \mathbf{0,183 \%}$$

Ermittlung des Richtungswinkels φ_1 zwischen der x-Richtung und der ersten Hauptdehnungsrichtung ε_{H1}

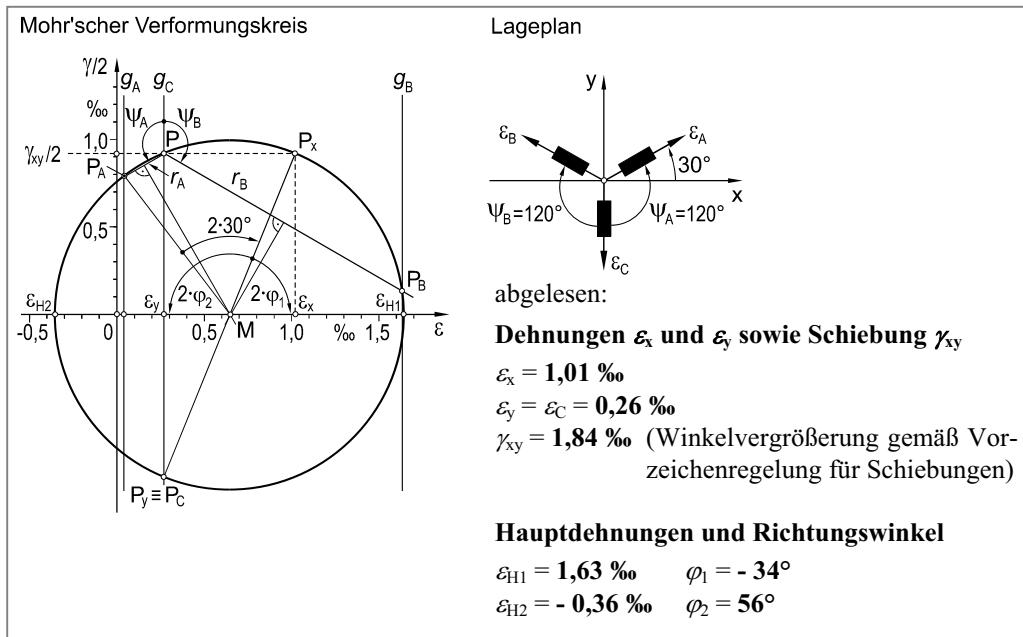
$$\varphi_1 = -\frac{\beta}{2} = \mathbf{-25,12^\circ}$$

Ermittlung des Richtungswinkels φ_2 zwischen der x-Richtung und der zweiten Hauptdehnungsrichtung ε_{H2}

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ = -25,12^\circ + 90^\circ = \mathbf{64,88^\circ}$$

Lösung zu Aufgabe 4.3

a) + b)



c) Berechnung der Dehnungen ε_x und ε_y sowie der Schiebung γ_{xy}

Für die Dehnungen in Messrichtung der Dehnungsmessstreifen gilt:

$$\varepsilon_A = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (1)$$

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\beta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\beta \quad (2)$$

$$\varepsilon_C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\gamma - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\gamma \quad (3)$$

Zur Vereinfachung setzt man:

$$v = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \quad (4)$$

$$w = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (5)$$

$$u = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \quad (6)$$

mit $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 150^\circ$ und $\gamma = 270^\circ$ sowie $\varepsilon_A = 0,0146\%$, $\varepsilon_B = 1,6230\%$ und $\varepsilon_C = 0,2619\%$ folgt aus den Gleichungen 1 bis 3:

$$0,0146\% = u + v \cdot \cos 60^\circ - w \cdot \sin 60^\circ \quad (7)$$

$$1,6230\% = u + v \cdot \cos 300^\circ - w \cdot \sin 300^\circ \quad (8)$$

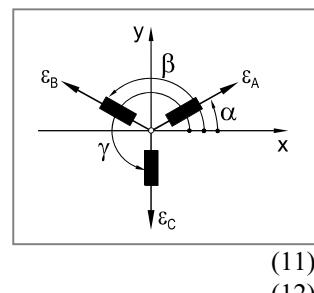
$$0,2619\% = u + v \cdot \cos 540^\circ - w \cdot \sin 540^\circ \quad (9)$$

Damit ergibt sich das zu lösende lineare Gleichungssystem:

$$0,0146\% = u + 0,5 \cdot v - \sqrt{3} / 2 \cdot w \quad (10)$$

$$0,0146\% = u + 0,5 \cdot v - \sqrt{3} / 2 \cdot w \quad (11)$$

$$0,2619\% = u - v \quad (12)$$



Gleichung 10 und Gleichung 11 addiert:

$$1,6376\% = 2 \cdot u + v \quad (13)$$

Gleichung 12 nach v aufgelöst:

$$v = u - 0,2619\% \quad (14)$$

Gleichung 14 in Gleichung 13 eingesetzt:

$$1,8995\% = 3 \cdot u \quad (15)$$

$$u = 0,63325\%$$

Gleichung 15 in Gleichung 14 eingesetzt:

$$v = 0,37127\% \quad (16)$$

Aus Gleichung 4 und Gleichung 5 folgt:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 2 \cdot u \quad \text{und} \quad (17)$$

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y = 2 \cdot v \quad (18)$$

Gleichung 17 und 18 addiert, liefert:

$$\varepsilon_x = u + v = 1,004\% \quad (19)$$

Gleichung 17 und 18 subtrahiert, liefert:

$$\varepsilon_y = u - v = 0,2619\% \quad (20)$$

Aus Gleichung 10 folgt:

$$w = \frac{u + 0,5 \cdot v - 0,0146\%}{\sqrt{3} / 2} = \frac{0,63317\% + 0,5 \cdot 0,37127\% - 0,0146\%}{\sqrt{3} / 2} = 0,9286\%$$

Damit ergibt sich für die Schiebung γ_{xy} aus Gleichung 5:

$$\gamma_{xy} = 2 \cdot w = 1,8572\%$$

Da die Schiebung positiv ist, handelt es sich entsprechend der Vorzeichenregelung für Schiebungen um eine Winkelvergrößerung.

Berechnung der Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2}

$$\begin{aligned}\varepsilon_{H1;H2} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1,004 + 0,2619}{2} \% \pm \sqrt{\left(\frac{1,004 - 0,2619}{2}\right)^2 + \left(\frac{1,8572}{2}\right)^2} \% \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{H1} = \mathbf{1,6332 \%}$$

$$\varepsilon_{H2} = \mathbf{-0,3669 \%}$$

Berechnung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Hauptdehnungsrichtungen

$$\varphi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-1,8572 \%}{1,004 \% - 0,2619 \%}\right) = -34,10 \%$$

Um zu entscheiden, ob es sich um den Richtungswinkel zwischen der x-Richtung und der ersten oder der zweiten Hauptdehnungsrichtung handelt, wird Tabelle 4.1 (siehe Lehrbuch) angewandt. Da es sich um Fall 1 ($\varepsilon_x > \varepsilon_y$ und $\gamma_{xy} > 0$) handelt, ist φ der Richtungswinkel zwischen der x-Richtung und der ersten Hauptdehnungsrichtung, also:

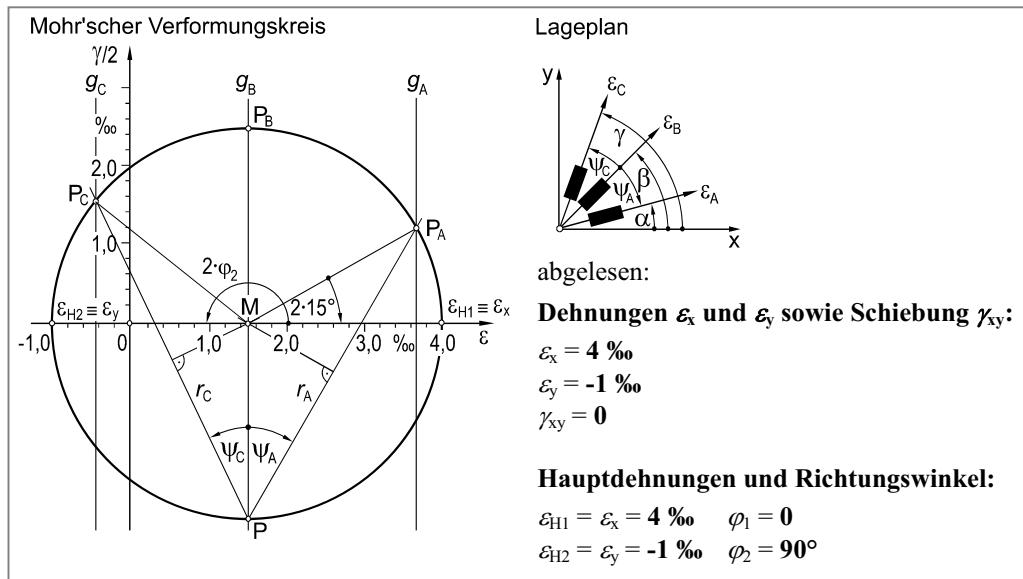
$$\varphi_1 = \mathbf{-34,10^\circ}$$

Für den Richtungswinkel φ_2 zwischen der x-Richtung und der zweiten Hauptdehnungsrichtung folgt dann:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ = -34,09^\circ + 90^\circ = \mathbf{55,90^\circ}$$

Lösung zu Aufgabe 4.4

a) + b)



c) Berechnung der Dehnungen ε_x und ε_y sowie der Schiebung γ_{xy}

Analog zu Aufgabe 4.3 folgt für das zu lösende Gleichungssystem mit $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 45^\circ$ und $\gamma = 70^\circ$ sowie $\varepsilon_A = 3,665\%$, $\varepsilon_B = 1,500\%$ und $\varepsilon_C = -0,415\%$:

$$3,665\% = u + v \cdot \cos 30^\circ - w \cdot \sin 30^\circ \quad (1)$$

$$1,500\% = u + v \cdot \cos 90^\circ - w \cdot \sin 90^\circ \quad (2)$$

$$-0,415\% = u + v \cdot \cos 140^\circ - w \cdot \sin 140^\circ \quad (3)$$

Damit ergibt sich das zu lösende lineare Gleichungssystem:

$$3,665\% = u + \sqrt{3}/2 \cdot v - 0,5 \cdot w \quad (4)$$

$$1,500\% = u \quad - w \quad (5)$$

$$-0,415\% = u - 0,766 \cdot v - 0,643 \cdot w \quad (6)$$

(4) - 0,5 · (5):

$$2,915\% = 0,5 \cdot u + \sqrt{3}/2 \cdot v \quad (7)$$

0,643 · (5) - (6):

$$1,3795\% = -0,357 \cdot u + 0,766 \cdot v \quad (8)$$

0,357 · (7) + 0,5 · (8):

$$1,7304\% = 0,6922 \cdot v \quad (9)$$

$$v = 2,5\%$$

Gleichung 9 in Gleichung 7 eingesetzt ergibt:

$$u = \frac{2,915\% - \sqrt{3}/2 \cdot 2,5\%}{0,5} = 1,5\%$$

Damit folgt für die Dehnungen ε_x und ε_y :

$$\varepsilon_x = u + v = 4\%$$

$$\varepsilon_y = u - v = -1\%$$

Aus Gleichung 5 folgt:

$$w = u - 1,500\% = 0\%$$

und damit:

$$\gamma_{xy} = 2 \cdot w = 0\%$$

Berechnung der Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2}

Da $\gamma_{xy} = 0$ ist, fallen die x- und y-Richtung mit den Hauptdehnungsrichtungen zusammen, es folgt daher sofort:

$$\varepsilon_{H1} = \varepsilon_x = 4\%$$

$$\varepsilon_{H2} = \varepsilon_y = -1\%$$

Berechnung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Hauptdehnungsrichtungen

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right) = 0 \quad (\text{da } \gamma_{xy} = 0)$$

Um zu entscheiden, ob es sich um den Richtungswinkel zwischen der x-Richtung und der ersten oder der zweiten Hauptdehnungsrichtung handelt, wird Tabelle 4.1 (siehe Lehrbuch) angewandt. Da es sich um Fall 1 bzw. Fall 4 handelt, ist φ der Richtungswinkel zwischen der x-Richtung und der ersten Hauptdehnungsrichtung, also:

$$\varphi_1 = 0^\circ$$

Für den Richtungswinkel φ_2 zwischen der x-Richtung und der zweiten Hauptdehnungsrichtung folgt dann:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ = 0^\circ + 90^\circ = 90^\circ$$

5 Elastizitätsgesetze

5.1 Formelsammlung zu den Elastizitätsgesetzen

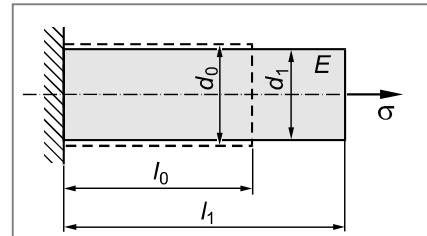
Formänderungen durch einachsige Normalspannung

Hooke'sches Gesetz für Normalspannungen

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{l_1 - l_0}{l_0} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

Poisson'sches Gesetz

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon_l \text{ und } \varepsilon_q = \frac{d_1 - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0}$$



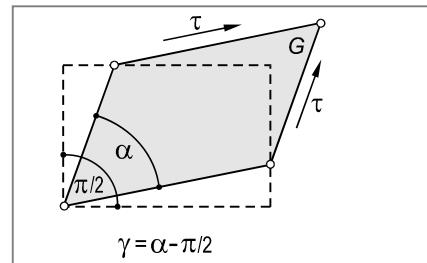
Formänderungen durch Schubspannungen

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Hooke'sches Gesetz für Schubbeanspruchung

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Zusammenhang zwischen den elastischen Werkstoffkonstanten E , G und μ



Formänderungen beim ebenen (zweiachsigem) Spannungszustand

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y)$$

Hooke'sches Gesetz für Normalspannungen (nach den Dehnungen aufgelöst)

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x)$$

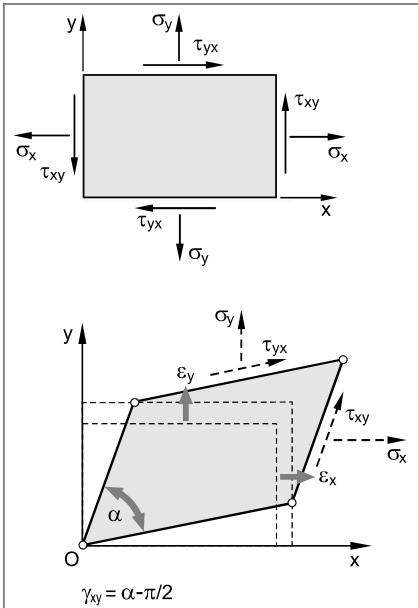
$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y)$$

Hooke'sches Gesetz für Normalspannungen (nach den Spannungen aufgelöst)

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x)$$

$$\sigma_z = 0$$



$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \text{ bzw. } \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Hooke'sches Gesetz für Schubbeanspruchung

Formänderungen beim allgemeinen (dreiachsigen) Spannungszustand

Hooke'sches Gesetz für Normalspannungen (nach den Dehnungen aufgelöst)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

Hooke'sches Gesetz für Normalspannungen (nach den Spannungen aufgelöst)

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

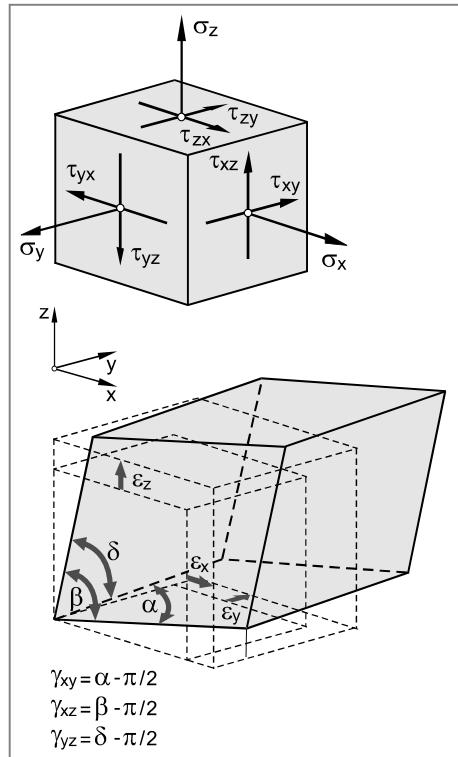
$$\sigma_z = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

Hooke'sches Gesetz für Schubbeanspruchung

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$



5.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 5.1

a) Berechnung der Spannungen in x- und y-Richtung (σ_x und σ_y)

Die Messrichtung der Dehnungsmessstreifen fällt mit den Wirkungsrichtungen der Kräfte F_x und F_y zusammen. Die Spannungen in x- und y-Richtung (σ_x und σ_y) lassen sich daher sofort mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes für den zweiachsigen Spannungszustand berechnen.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (0,743 + 0,30 \cdot 0,124) \cdot 10^{-3} \\ = 180 \text{ N/mm}^2$$

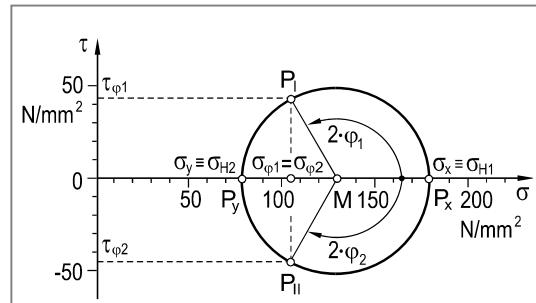
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (0,124 + 0,30 \cdot 0,743) \cdot 10^{-3} \\ = 80 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Kräfte F_x und F_y in x- und y-Richtung

$$F_x = \sigma_x \cdot b \cdot t = 180 \text{ N/mm}^2 \cdot 125 \text{ mm} \cdot 6 \text{ mm} = 135\,000 \text{ N} = \mathbf{135,0 \text{ kN}}$$

$$F_y = \sigma_y \cdot a \cdot t = 80 \text{ N/mm}^2 \cdot 210 \text{ mm} \cdot 6 \text{ mm} = 100\,900 \text{ N} = \mathbf{100,9 \text{ kN}}$$

- b) Zur Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises benötigt man zweckmäßigerweise die Spannungen in zwei zueinander senkrechten Schnittflächen. Bekannt sind die Spannungen in den Schnittflächen mit der x-Richtung und der y-Richtung als Normale. Einzeichnen der entsprechenden Bildpunkte P_x ($\sigma_x | 0$) und P_y ($\sigma_y | 0$) in das σ - τ -Koordinatensystem ergibt den Mohr'schen Spannungskreis (siehe Abbildung).



Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Spannungskreises

$$\sigma_M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{180 \text{ N/mm}^2 + 80 \text{ N/mm}^2}{2} = 130 \text{ N/mm}^2$$

$$R = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{180 \text{ N/mm}^2 - 80 \text{ N/mm}^2}{2} = 50 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zu den Diagonalflächen

$$\varphi_1 = \arctan \frac{a}{b} = \arctan \frac{210 \text{ mm}}{125 \text{ mm}} = 59,24^\circ$$

$$\varphi_2 = -\varphi_1 = -59,24^\circ$$

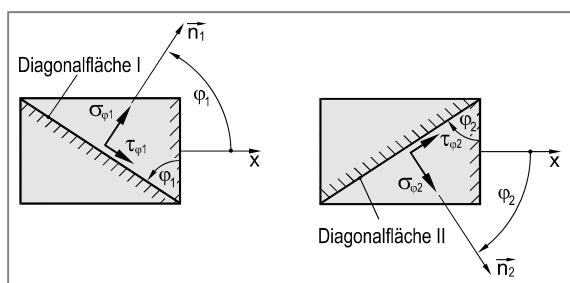
Berechnung der Spannungskomponenten in den Diagonalfächern

Antragen der doppelten Richtungswinkel ($2 \cdot \varphi_1$ und $2 \cdot \varphi_2$) am Mohr'schen Spannungskreis ergibt die Bildpunkte P_1 und P_{II} . P_1 und P_{II} repräsentieren die Spannungen in den Diagonalfächern.

Diagonalfäche I:

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi 1} &= \sigma_M - R \cdot \cos(180^\circ - 2 \cdot \varphi_1) \\ &= 130 \text{ N/mm}^2 - 50 \text{ N/mm}^2 \cdot \cos(180^\circ - 2 \cdot 59,24) = \mathbf{106,2 \text{ N/mm}^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\varphi 1} &= R \cdot \sin(180^\circ - 2 \cdot \varphi_1) \\ &= 50 \text{ N/mm}^2 \cdot \sin(180^\circ - 2 \cdot 59,24) = \mathbf{44,0 \text{ N/mm}^2}\end{aligned}$$



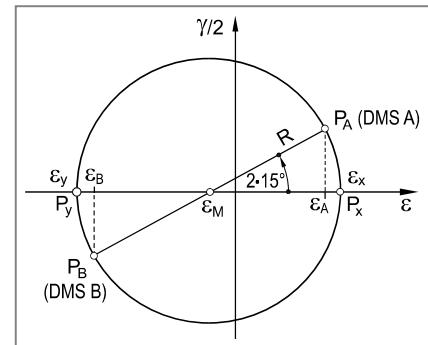
Diagonalfäche II:

$$\sigma_{\varphi 2} = \sigma_{\varphi 1} = \mathbf{106,2 \text{ N/mm}^2}$$

$$\tau_{\varphi 2} = -\tau_{\varphi 1} = \mathbf{-44,0 \text{ N/mm}^2}$$

Lösung zu Aufgabe 5.2

- a) Die Schnittflächen mit der x- und y-Richtung als Normale sind schubspannungsfrei, daher erfährt ein achsparalleles Flächenelement auch keine Schiebung (Winkelverzerrung). Die Bildpunkte P_x und P_y , welche die Verformungen mit der x- bzw. y-Richtung als Bezugsrichtung repräsentieren, fallen daher mit der ε -Achse zusammen, d.h. die x- und die y-Richtung sind gleichzeitig Hauptdehnungsrichtungen. Der Mohr'sche Verformungskreis lässt sich damit entsprechend der Abbildung auf einfache Weise konstruieren.



Die Bildpunkte P_A und P_B , welche die Verformungen mit der A- bzw. B-Richtung als Bezugsrichtung repräsentieren, erhält man durch Abtragen der Richtungswinkel ($2 \cdot 15^\circ$ bzw. $2 \cdot 15^\circ + 180^\circ$) ausgehend von der nunmehr bekannten x-Richtung (gleicher Drehsinn zum Lageplan).

Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2} = \frac{0,275\% + (-0,530\%)}{2} = -0,1275\%$$

$$R = \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_M}{\cos 2\alpha} = \frac{0,275\% - (-0,1275\%)}{\cos(2 \cdot 15^\circ)} = 0,4648\%$$

- b) Berechnung der Dehnungen in x- und y-Richtung (ε_x und ε_y)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_M + R = -0,1275\% + 0,4648\% = 0,3373\%$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_M - R = -0,1275\% - 0,4648\% = -0,5923\%$$

Berechnung der Spannungen in x- und y-Richtung durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) = \frac{210000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (0,3373 + 0,30 \cdot (-0,5923)) \cdot 10^{-3} \\ &= 36,8 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x) = \frac{210000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (-0,5923 + 0,30 \cdot 0,3373) \cdot 10^{-3} \\ &= -113,3 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

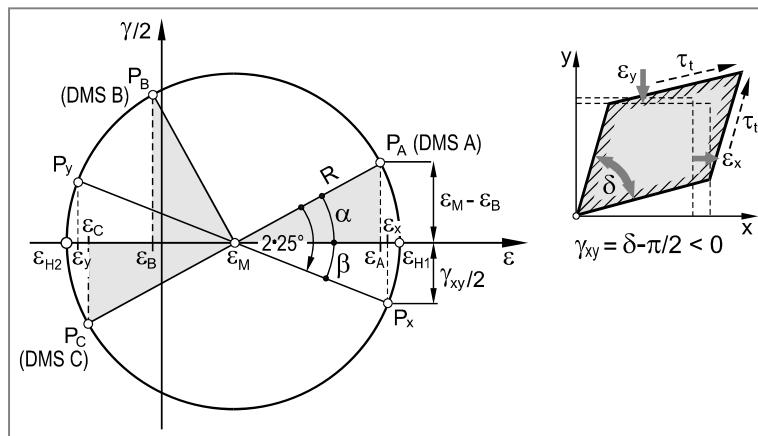
Berechnung der Kräfte F_x und F_y in x- und y-Richtung

$$F_x = \sigma_x \cdot A_x = 36,8 \text{ N/mm}^2 \cdot 300 \text{ mm} \cdot 20 \text{ mm} = 220800 \text{ N} = 220,8 \text{ kN}$$

$$F_y = \sigma_y \cdot A_y = -113,3 \text{ N/mm}^2 \cdot 600 \text{ mm} \cdot 20 \text{ mm} = -1359600 \text{ N} = -1359,6 \text{ kN}$$

Lösung zu Aufgabe 5.3

Es liegt eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette vor. Daher kann der Mohr'sche Verformungskreis entsprechend Kapitel 4.4.2 (siehe Lehrbuch) auf einfache Weise konstruiert werden.



Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} = \frac{0,702\% + (-0,364\%)}{2} = 0,169\%$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_M)^2 + (\varepsilon_M - \varepsilon_B)^2} \\ &= \sqrt{(0,702\% - 0,169\%)^2 + (0,169\% + 0,012\%)^2} = 0,5629\% \end{aligned}$$

Berechnung des Winkels α zwischen der Messrichtung von DMS A und der Hauptdehnungsrichtung ε_{H1}

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\varepsilon_M - \varepsilon_B}{\varepsilon_A - \varepsilon_M}\right) = \arctan\left(\frac{0,169\% + 0,012\%}{0,702\% - 0,169\%}\right) = 0,3396$$

$$\alpha = 18,76^\circ$$

Damit folgt für den Richtungswinkel β :

$$\beta = 50^\circ - \alpha = 50^\circ - 18,76^\circ = 31,24^\circ$$

Berechnung der Dehnungen in x- und y-Richtung

$$\varepsilon_x = \varepsilon_M + R \cdot \cos \beta = 0,169\% + 0,563\% \cdot \cos 31,24^\circ = 0,650\%$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_M - R \cdot \cos \beta = 0,169\% - 0,563\% \cdot \cos 31,24^\circ = -0,312\%$$

Berechnung der Normalspannungen σ_x und σ_y in x- und y-Richtung durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (0,650\% - 0,3 \cdot 0,312\%) \cdot 10^{-3} \\ &= 128,4 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (-0,312\% + 0,3 \cdot 0,650\%) \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_y = -27,0 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Schiebung γ_{xy} mit der x-Richtung als Bezugsrichtung

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = -R \cdot \sin \beta = -0,563 \% \cdot \sin 31,24^\circ = -0,292 \%$$

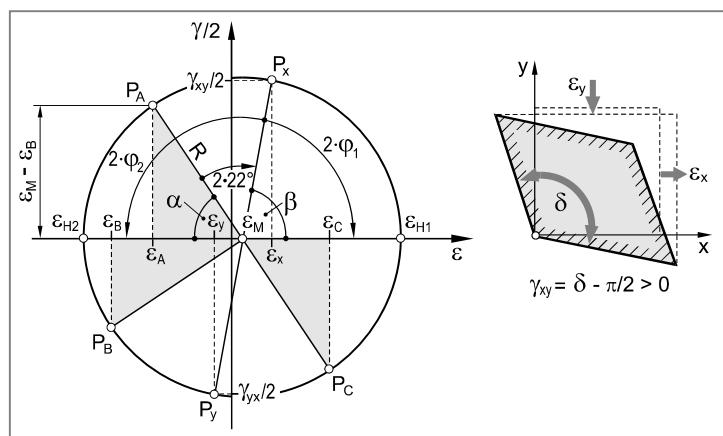
$\gamma_{xy} = -0,584 \%$ (Winkelverkleinerung gemäß Vorzeichenregelung für Schiebungen)

Berechnung der Schubspannung τ_{xy} durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes für Schubbeanspruchung

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \gamma_{xy} = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot (-0,584 \% \cdot 10^{-3}) = -47,2 \text{ N/mm}^2$$

Lösung zu Aufgabe 5.4

- a) Es liegt eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette vor. Daher kann der Mohr'sche Verformungskreis entsprechend Kapitel 4.4.2 (siehe Lehrbuch) auf einfache Weise konstruiert werden.



Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} = \frac{-0,251\% + 0,368\%}{2} = 0,0585\%$$

$$R = \sqrt{(\varepsilon_M - \varepsilon_A)^2 + (\varepsilon_M - \varepsilon_B)^2}$$

$$= \sqrt{(0,0585\% - (-0,251)\%)^2 + (0,0585\% - (-0,410)\%)^2} = 0,562\%$$

Berechnung des Winkels α zwischen der Messrichtung von DMS A und der Hauptdehnungsrichtung ε_{H2}

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\varepsilon_M - \varepsilon_B}{\varepsilon_M - \varepsilon_A}\right) = \arctan\left(\frac{0,0585\% - (-0,410)\%}{0,0585\% - (-0,251)\%}\right) = 56,55^\circ$$

Berechnung des Winkels β (siehe Mohr'scher Verformungskreis)

$$\beta = 180^\circ - 2 \cdot 22^\circ - \alpha = 180^\circ - 44^\circ - 56,55^\circ = 79,45^\circ$$

Berechnung der Dehnungen in x- und y-Richtung (ε_x und ε_y)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_M + R \cdot \cos \beta = 0,0585\% + 0,562\% \cdot \cos 79,45^\circ = 0,161\%$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_M - R \cdot \cos \beta = 0,0585\% - 0,562\% \cdot \cos 79,45^\circ = -0,044\%$$

Berechnung der Schiebung mit der x-Richtung als Bezugsrichtung (γ_{xy})

$$\gamma_{xy}/2 = R \cdot \sin \beta = 0,562\% \cdot \sin 79,45^\circ = 0,5520\%$$

$\gamma_{xy} = 1,104\%$ (Winkelvergrößerung gemäß Vorzeichenregelung für Schiebungen)

- b) Berechnung der Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2}

$$\varepsilon_{H1} = \varepsilon_M + R = 0,0585\% + 0,562\% = 0,620\%$$

$$\varepsilon_{H2} = \varepsilon_M - R = 0,0585\% - 0,562\% = -0,503\%$$

Berechnung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Achse und den Hauptdehnungsrichtungen ε_{H1} und ε_{H2}

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-1,105 \%}{0,161 \% - (-0,044 \%)} \right) = -39,72^\circ$$

Der errechnete Winkel φ kann der Richtungswinkel zwischen der ersten *oder* der zweiten Hauptdehnungsrichtung sein. Um zu entscheiden, ob es sich um den Richtungswinkel zwischen der x-Richtung und der ersten oder zweiten Hauptdehnungsrichtung handelt, wird Tabelle 4.1 (siehe Lehrbuch) angewandt. Da es sich um Fall 1 handelt ($\varepsilon_x > \varepsilon_y$ und $\gamma_{xy} > 0$) ist φ der Richtungswinkel zwischen der x-Achse und der *ersten* Hauptdehnungsrichtung. Dies ist auch aus dem Mohr'schen Verformungskreis ersichtlich. Es gilt also:

$$\varphi = \varphi_1 = -39,72^\circ$$

Für den Richtungswinkel φ_2 folgt dann:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ = -39,72^\circ + 90^\circ = 50,28^\circ$$

c) **Berechnung der Hauptspannungen σ_{H1} und σ_{H2}**

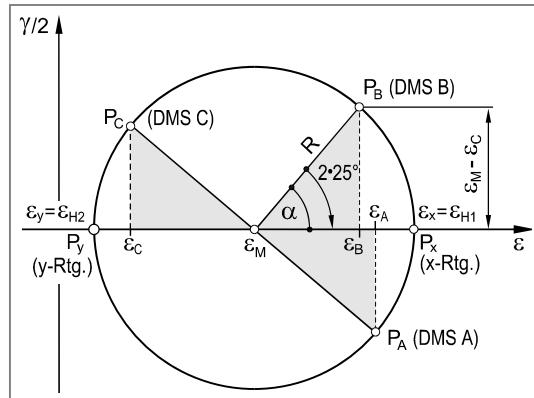
Die Hauptspannungen errechnet man aus den Hauptdehnungen mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes für den zweiachsigen Spannungszustand:

$$\begin{aligned}\sigma_{H1} &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_{H1} + \mu \cdot \varepsilon_{H2}) \\ &= \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (0,620 + 0,30 \cdot (-0,503)) \cdot 10^{-3} = 108,3 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{H2} &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_{H2} + \mu \cdot \varepsilon_{H1}) \\ &= \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (-0,503 + 0,30 \cdot 0,620) \cdot 10^{-3} = -73,2 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5.5

- a) Es liegt eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette vor. Daher kann der Mohr'sche Verformungskreis entsprechend Kapitel 4.4.2 (siehe Lehrbuch) auf einfache Weise konstruiert werden.



Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} = \frac{0,7551 \% + 0,2693 \%}{2} = 0,5122 \%$$

$$R = \sqrt{(\varepsilon_B - \varepsilon_M)^2 + (\varepsilon_M - \varepsilon_C)^2}$$

$$= \sqrt{(0,7160 \% - 0,5122 \%)^2 + (0,5122 \% - 0,2693 \%)^2} = 0,3170 \%$$

Berechnung des Winkels α zwischen der Messrichtung von DMS B und der Hauptdehnungsrichtung ε_{H1}

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\varepsilon_M - \varepsilon_C}{\varepsilon_B - \varepsilon_M} \right) = \arctan \left(\frac{0,5122 \% - 0,2693 \%}{0,7160 \% - 0,5122 \% } \right) = 50,0^\circ$$

Da der Winkel zwischen der Messrichtung von DMS B und der x-Richtung dem Winkel α entspricht (50°), fallen die x- und y-Richtungen mit den Hauptdehnungsrichtungen zusammen. Dieses Ergebnis hätte man auch ohne Berechnung erhalten. Da an der Stahlplatte keine Schubspannungen wirken, müssen x- und y-Richtung gleichzeitig Hauptspannungsrichtung und damit auch Hauptdehnungsrichtung sein (isotroper Werkstoff vorausgesetzt).

Für die Dehnungen in x- und y- Richtung (ε_x und ε_y) folgt:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_M + R = 0,5122 \% + 0,3170 \% = 0,8292 \%$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_M - R = 0,5122 \% - 0,3170 \% = 0,1952 \%$$

Berechnung der Normalspannungen σ_x und σ_y durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) = \frac{205000 \text{ N/mm}^2}{1 - 0,30^2} \cdot \frac{0,8292 \% + 0,30 \cdot 0,1952 \%}{1000} = 200 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x) = \frac{205000 \text{ N/mm}^2}{1 - 0,30^2} \cdot \frac{0,1952 \% + 0,30 \cdot 0,8292 \%}{1000} = 100 \text{ N/mm}^2$$

Damit folgt für die Kräfte F_x und F_y :

$$F_x = \sigma_x \cdot a \cdot t = 200 \text{ N/mm}^2 \cdot 250 \text{ mm} \cdot 15 \text{ mm} = 750 \text{ 000 N} = 750 \text{ kN}$$

$$F_y = \sigma_x \cdot b \cdot t = 100 \text{ N/mm}^2 \cdot 500 \text{ mm} \cdot 15 \text{ mm} = 750 \text{ 000 N} = 750 \text{ kN}$$

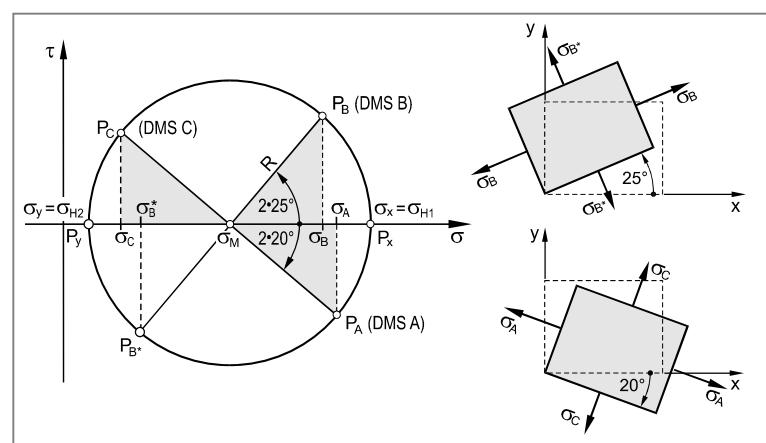
b) Berechnung der Spannungen in x- und y-Richtung

$$\sigma_x = \frac{F_x}{b \cdot t} = \frac{500\,000 \text{ N}}{250 \text{ mm} \cdot 15 \text{ mm}} = 133,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{a \cdot t} = \frac{500\,000 \text{ N}}{500 \text{ mm} \cdot 15 \text{ mm}} = 66,6 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Spannungen in Schnittebenen mit der A-, B- und C-Richtung als Normale unter Anwendung des Mohr'schen Spannungskreises

Die Schnittflächen mit der x- und y-Richtung als Normale sind schusspannungsfrei. Die Bildpunkte P_x und P_y , welche die Spannungen in diesen Schnittebenen repräsentieren, fallen daher mit der σ -Achse zusammen



d. h. die x- und die y-Richtung sind gleichzeitig Hauptspannungsrichtungen. Der Mohr'sche Spannungskreis lässt sich damit auf einfache Weise konstruieren (siehe Abbildung).

Aus dem Mohr'schen Spannungskreis folgt:

$$\sigma_M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{133,3 \text{ N/mm}^2 + 66,6 \text{ N/mm}^2}{2} = 100 \text{ N/mm}^2$$

$$R = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{133,3 \text{ N/mm}^2 - 66,6 \text{ N/mm}^2}{2} = 33,3 \text{ N/mm}^2$$

Damit erhält man für die Spannungen in Schnittebenen mit der A- und C-Richtung sowie der B- und B*-Richtung als Normale:

$$\sigma_A = \sigma_M + R \cdot \cos 40^\circ = 100 \text{ N/mm}^2 + 33,3 \text{ N/mm}^2 \cdot \cos 40^\circ = 125,53 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_C = \sigma_M - R \cdot \cos 40^\circ = 100 \text{ N/mm}^2 - 33,3 \text{ N/mm}^2 \cdot \cos 40^\circ = 74,47 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = \sigma_M + R \cdot \cos 50^\circ = 100 \text{ N/mm}^2 + 33,3 \text{ N/mm}^2 \cdot \cos 50^\circ = 121,43 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{B^*} = \sigma_M - R \cdot \cos 50^\circ = 100 \text{ N/mm}^2 - 33,3 \text{ N/mm}^2 \cdot \cos 50^\circ = 78,57 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Dehnungen mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand):

$$\varepsilon_A = \frac{1}{E}(\sigma_A - \mu \cdot \sigma_C) = \frac{125,53 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 74,47 \text{ N/mm}^2}{205000 \text{ N/mm}^2} = 0,000503 = 0,503 \%$$

$$\varepsilon_C = \frac{1}{E}(\sigma_C - \mu \cdot \sigma_A) = \frac{74,47 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 125,53 \text{ N/mm}^2}{205000 \text{ N/mm}^2} = 0,000179 = 0,179 \%$$

$$\varepsilon_B = \frac{1}{E}(\sigma_B - \mu \cdot \sigma_B^*) = \frac{121,43 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 78,57 \text{ N/mm}^2}{205000 \text{ N/mm}^2} = 0,000477 = 0,477 \%$$

Alternative Lösung:

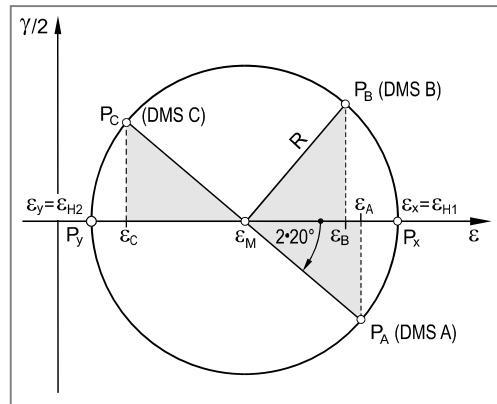
Berechnung der Dehnung in x- und y-Richtung (ε_x und ε_y) mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y) = \frac{133,3 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 66,6 \text{ N/mm}^2}{205000 \text{ N/mm}^2} = 0,000553 = 0,553 \%$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x) = \frac{66,6 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 133,3 \text{ N/mm}^2}{205000 \text{ N/mm}^2} = 0,000130 = 0,130 \%$$

Die Schnittflächen mit der x- und y-Richtung als Normale sind schubspannungsfrei, daher erfährt ein achsparalleles Flächenelement auch keine Schiebung (Winkelverzerrung). Die Bildpunkte P_x und P_y , welche die Verformungen mit der x- bzw. y-Richtung als Bezugsrichtung repräsentieren, fallen mit der ε -Achse zusammen, d. h. die x- und die y-Richtung sind gleichzeitig Hauptdehnungsrichtungen. Der Mohr'sche Verformungskreis lässt sich damit auf einfache Weise konstruieren (siehe Abbildung).

Aus dem Mohr'schen Verformungskreis folgt:



$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_{H1} + \varepsilon_{H2}}{2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{0,553 \% + 0,130 \%}{2} = 0,3415 \%$$

$$R = \frac{\varepsilon_{H1} - \varepsilon_{H2}}{2} = \frac{0,553 \% - 0,130 \%}{2} = 0,2115 \%$$

Damit folgt für die Dehnungen in A-, B- und C-Richtung:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_M + R \cdot \cos 40^\circ = 0,3415 \% + 0,2115 \% \cdot \cos 40^\circ = 0,503 \%$$

$$\varepsilon_C = \varepsilon_M - R \cdot \cos 40^\circ = 0,3415 \% - 0,2115 \% \cdot \cos 40^\circ = 0,179 \%$$

$$\varepsilon_B = \varepsilon_M + R \cdot \cos 50^\circ = 0,3415 \% + 0,2115 \% \cdot \cos 50^\circ = 0,477 \%$$

- c) Die Verminderung der Plattendicke ergibt sich aus dem Hooke'schen Gesetz für den zweiachsigigen Spannungszustand

Berechnung der Dehnung ε_z in z-Richtung

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{0,30}{205\,000 \text{ N/mm}^2} \cdot (133,3 \text{ N/mm}^2 + 66,6 \text{ N/mm}^2) = -0,000293$$

Damit folgt für die Verminderung der Plattendicke Δt :

$$\Delta t = \varepsilon_z \cdot t = 0,000293 \cdot 15 \text{ mm} = -0,0044 \text{ mm} = \mathbf{-4,4 \mu\text{m}}$$

Lösung zu Aufgabe 5.6

- a) Es wirkt nur die Zugkraft F und die Platte kann sich frei verformen. Es liegt daher ein einachsiger Spannungszustand vor.

Berechnung der Verlängerung Δl der Platte

Hooke'sches Gesetz (einachsiger Spannungszustand):

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

$$\frac{F}{b \cdot s} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

Damit folgt für die Verlängerung Δl der Platte:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot b \cdot s} = \frac{112\,500 \text{ N} \cdot 650 \text{ mm}}{72\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 150 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm}} = 1,354 \text{ mm}$$

- b) Eine Verformung in y -Richtung ist voraussetzungsgemäß nicht möglich. Damit tritt zusätzlich eine Spannung in y -Richtung auf. Der Spannungszustand ist nunmehr zweiachsig.

Berechnung der Verlängerung Δl^* der Platte

Hooke'sches Gesetz (zweiachsiges Spannungszustand):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y) \quad (1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x) \quad (2)$$

Mit der Randbedingung: $\varepsilon_y = 0$ folgt aus Gleichung 2:

$$\sigma_y = \mu \cdot \sigma_x \quad (3)$$

Gleichung 3 in Gleichung 1 eingesetzt liefert:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu^2 \cdot \sigma_x) = \frac{\sigma_x}{E} \cdot (1 - \mu^2) \quad (4)$$

Mit $\varepsilon_x = \Delta l^* / l$ und $\sigma_x = F/A$ folgt aus Gleichung 4:

$$\frac{\Delta l^*}{l} = \frac{F}{E \cdot A} \cdot (1 - \mu^2)$$

$$\Delta l^* = \frac{F \cdot l}{E \cdot b \cdot s} \cdot (1 - \mu^2)$$

$$= \frac{112\,500 \text{ N} \cdot 650 \text{ mm}}{72\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 150 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm}} \cdot (1 - 0,33^2) = 1,354 \text{ mm} \cdot (1 - 0,33^2) = 1,207 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 5.7

Berechnung der Spannung in x-Richtung

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{F}{b \cdot s} = \frac{420000 \text{ N}}{80 \text{ mm} \cdot 25 \text{ mm}} = 210 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Dehnung in x-Richtung

Da eine freie Verformung des Blechsteifens in y- Richtung nicht möglich ist, tritt zusätzlich eine Spannung in y-Richtung auf. Der Spannungszustand ist also zweiachsig.

Hooke'sches Gesetz (zweiachsiger Spannungszustand):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y) \quad (1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x) \quad (2)$$

Mit der Randbedingung $\varepsilon_y = 0$ folgt aus Gleichung 2:

$$\sigma_y = \mu \cdot \sigma_x \quad (3)$$

Gleichung 3 in Gleichung 1 eingesetzt liefert:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu^2 \cdot \sigma_x)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x \cdot (1 - \mu^2)}{E} = \frac{210 \text{ N/mm}^2 \cdot (1 - 0,30^2)}{210000 \text{ N/mm}^2} = 0,00091 = 0,91 \%$$

Berechnung der Spannung in y-Richtung

Die Spannung in y-Richtung ergibt sich aus Gleichung 1:

$$\sigma_y = \frac{\sigma_x - E \cdot \varepsilon_x}{\mu} = \frac{210 \text{ N/mm}^2 - 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,00091}{0,30} = 63 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Dehnung in z-Richtung

Die Dehnung in z-Richtung erhält man ebenfalls aus dem Hooke'schen Gesetz für den zweiachsigen Spannungszustand:

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{0,30}{210000 \text{ N/mm}^2} \cdot (210 + 63) \text{ N/mm}^2 = -0,00039 = -0,39 \%$$

Lösung zu Aufgabe 5.8

Das Hooke'sche Gesetz (einachsiger Spannungszustand) liefert den Zusammenhang zwischen der Druckkraft F und der Stauchung des Rundstabes in Längsrichtung (ε_l):

$$\sigma_l = E \cdot \varepsilon_l \quad (1)$$

Das Poisson'sche Gesetz liefert den Zusammenhang zwischen der Stauchung in Längsrichtung (ε_l) und der Querdehnung (ε_q):

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon_l \quad (2)$$

Gleichung 2 in Gleichung 1 eingesetzt:

$$\sigma_l = E \cdot \varepsilon_l = -\frac{E}{\mu} \cdot \varepsilon_q$$

mit $\sigma_l = F / A$ und $\varepsilon_q = \Delta d / d$ folgt:

$$\frac{F}{A} = -\frac{E}{\mu} \cdot \frac{\Delta d}{d}$$

$$\begin{aligned} F &= -\frac{E \cdot A}{\mu} \cdot \frac{\Delta d}{d} = -\frac{E \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2}{\mu} \cdot \frac{\Delta d}{d} = -\frac{\pi \cdot d \cdot E \cdot \Delta d}{4 \cdot \mu} \\ &= -\frac{\pi \cdot 50 \text{ mm} \cdot 116\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,015 \text{ mm}}{4 \cdot 0,35} = -195\,228 \text{ N} = \mathbf{-195,2 \text{ kN}} \end{aligned}$$

6 Festigkeitshypothesen

6.1 Formelsammlung zu den Festigkeitshypothesen

Normalspannungshypothese (NH)

Vergleichsspannung nach der NH (in Hauptnormalspannungen)

$$\sigma_{VNH} = \sigma_1$$

Vergleichsspannung nach der NH (in Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand)

$$\sigma_{VNH} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Vergleichsspannung nach der NH (in Lastspannungen bei Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion)¹⁾

$$\sigma_{VNH} = \frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau_t^2}$$

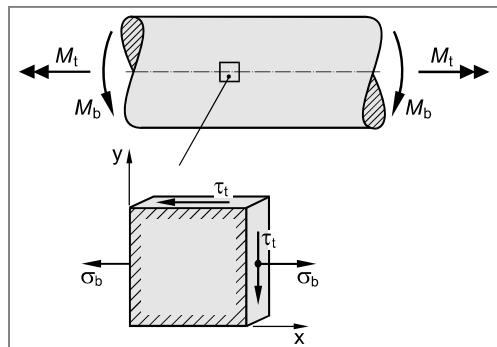
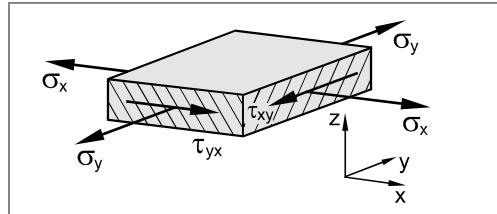
Schubspannungshypothese (SH)

$$\sigma_{VSH} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{VSH} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2}$$



Vergleichsspannung nach der SH (in Hauptnormalspannungen)

Vergleichsspannung nach der SH (in Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand)

Gilt nur, falls $\sigma_x \cdot \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$

Vergleichsspannung nach der SH (in Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand)

Gilt nur, falls $\sigma_x \cdot \sigma_y > \tau_{xy}^2$

Vergleichsspannung nach der NH (in Lastspannungen bei Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion)¹⁾

¹⁾ An die Stelle der Biegebeanspruchung kann auch eine Zug- oder Druckbeanspruchung treten.
An die Stelle der Torsionsbeanspruchung kann auch eine Abscherbeanspruchung treten.

Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)

$$\sigma_{VGEH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Vergleichsspannung nach der GEH
(in Hauptnormalspannungen)

$$\sigma_{VGEH} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$

Vergleichsspannung nach der GEH **(in Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand)**

$$\sigma_{VGEH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2}$$

Vergleichsspannung nach der GEH **(in Lastspannungen bei Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion)**¹⁾

¹⁾ An die Stelle der Biegebeanspruchung kann auch eine Zug- oder Druckbeanspruchung treten.
An die Stelle der Torsionsbeanspruchung kann auch eine Abscherbeanspruchung treten.

6.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 6.1

a) Die höchst beanspruchten Stellen befinden sich an der **Außenoberfläche**, da die Torsionsschubspannung τ_t nach außen hin linear zunimmt.

b) **Berechnung der Zugspannung im Rundstab**

$$\sigma_x \equiv \sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{50\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (30 \text{ mm})^2} = 70,7 \text{ N/mm}^2$$

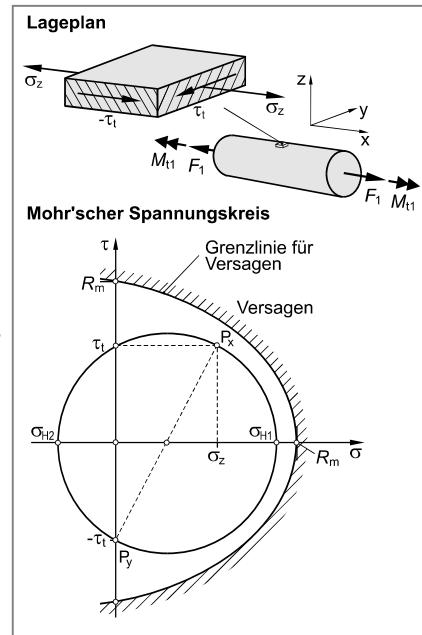
c) **Berechnung der Schubspannung im Rundstab**

$$\tau_{xy} \equiv \tau_t = \frac{M_{t1}}{W_t} = \frac{450\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{4} \cdot (30 \text{ mm})^3} = 84,9 \text{ N/mm}^2$$

d) **Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises**

Eintragen des Bildpunktes $P_x (\sigma_z | \tau_t)$ und des Bildpunktes $P_y (0 | -\tau_t)$ in das σ - τ -Koordinatensystem unter Beachtung der speziellen Vorzeichenregelung für Schubspannungen.

Bildpunkt P_x repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der x-Achse als Normalenvektor. Bildpunkt P_y repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der y-Achse als Normalenvektor.



Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser liegen. Die Strecke P_xP_y schneidet die σ -Achse im Kreismittelpunkt M . Kreis um M durch die Bildpunkte P_x oder P_y ist der gesuchte Mohr'sche Spannungskreis.

e) Spröder Werkstoff: Versagen durch **Bruch**

Festigkeitsbedingung

Ansetzen der Normalspannungshypothese (NH), da spröder Werkstoff:

$$\sigma_{V\text{NH}} = \sigma_1 \leq \frac{R_m}{S_B}$$

Aus dem Mohr'schen Spannungskreis (Aufgabenteil d) errechnet sich die Hauptnormalspannung σ_1 zu:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \frac{70,7 \text{ N/mm}^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{70,7}{2}\right)^2 + 84,92^2} \text{ N/mm}^2 \\ &= 127,3 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Damit folgt für die Sicherheit S_B gegen Bruch:

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_{VNH}} = \frac{370 \text{ N/mm}^2}{127,3 \text{ N/mm}^2} = 2,91 \quad (\text{nicht ausreichend, da } S_B < 4,0)$$

f) Festigkeitsbedingung

Ein Bruch tritt ein, sobald die Vergleichsspannung (berechnet nach der NH) die Zugfestigkeit erreicht:

$$\sigma_{VNH} = \sigma_1 = R_m$$

$$\frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = R_m$$

Auflösen nach der Zugspannung σ_z :

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = R_m - \frac{\sigma_z}{2} \quad | \text{ quadrieren}$$

$$\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2 = \left(R_m - \frac{\sigma_z}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2 = R_m^2 - R_m \cdot \sigma_z + \left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2$$

$$\tau_t^2 = R_m^2 - R_m \cdot \sigma_z$$

$$\sigma_z = \frac{R_m^2 - \tau_t^2}{R_m}$$

Damit folgt schließlich für die Zugkraft F_2 :

$$F_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{R_m^2 - \tau_t^2}{R_m} = \frac{\pi \cdot (30 \text{ mm})^2}{4} \cdot \frac{(370 \text{ N/mm}^2)^2 - (84,9 \text{ N/mm}^2)^2}{370 \text{ N/mm}^2}$$

$$F_2 = 247773 \text{ N} = 247,8 \text{ kN}$$

g) Aus Aufgabenteil f) ergibt sich der Zusammenhang:

$$\tau_t^2 = R_m^2 - R_m \cdot \sigma_z$$

Damit folgt für die Schubspannung τ_t bzw. das Torsionsmoment M_{t2} :

$$\tau_t^2 = R_m^2 - R_m \cdot \sigma_z$$

$$\tau_t = \sqrt{R_m \cdot (R_m - \sigma_z)}$$

$$M_{t2} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cdot \sqrt{R_m \cdot (R_m - \sigma_z)} = \frac{\pi \cdot (30 \text{ mm})^3}{16} \cdot \sqrt{370 \cdot (370 - 70,7)} \text{ N/mm}^2$$

$$M_{t2} = 1764,1 \text{ Nm}$$

h) Aus Aufgabenteil f) ergibt sich der gesuchte Zusammenhang zwischen τ_t und σ_z :

$$\tau_t(\sigma_z) = \sqrt{R_m \cdot (R_m - \sigma_z)}$$

Lösung zu Aufgabe 6.2

a) Berechnung der Lastspannungen

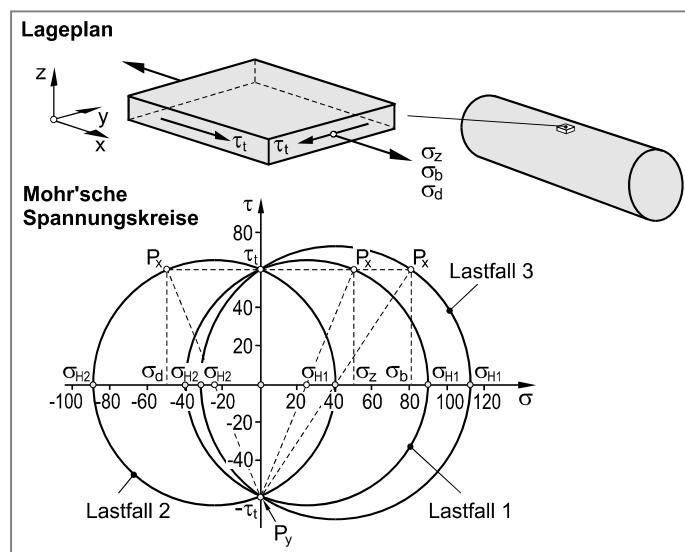
$$\text{durch } F_z: \sigma_x \equiv \sigma_z = \frac{F_z}{A} = \frac{100\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{4} \cdot (50 \text{ mm})^2} = 50,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{durch } F_d: \sigma_x \equiv \sigma_d = \frac{-F_z}{A} = \frac{-100\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{4} \cdot (50 \text{ mm})^2} = -50,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{durch } M_t: \tau_{xy} \equiv \tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{1500\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (50 \text{ mm})^3} = 61,1 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{durch } M_b: \sigma_x \equiv \sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{1000\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (50 \text{ mm})^3} = 81,5 \text{ N/mm}^2$$

- b) Die Konstruktion der Mohr'schen Spannungskreise erfolgt analog zu Aufgabe 6.1 (Konstruktionsbeschreibung siehe Lösung zu Aufgabe 6.1d).



c) Lastfall 1

Berechnung der Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_{H1;H2} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \frac{50,9 \text{ N/mm}^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50,9}{2}\right)^2 + (61,1)^2} \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H1} = 91,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H2} = -40,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H3} = 0$$

Lastfall 2

Berechnung der Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_{H1;H2} = \frac{\sigma_d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_d}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \frac{-50,9 \text{ N/mm}^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-50,9}{2}\right)^2 + (61,1)^2} \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H1} = 40,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H2} = -91,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H3} = 0$$

Lastfall 3

Berechnung der Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_{H1;H2} = \frac{\sigma_b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \frac{81,5 \text{ N/mm}^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{81,5}{2}\right)^2 + (61,1)^2} \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H1} = 114,2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H2} = -32,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H3} = 0$$

d) und e)

Ordnen der Hauptnormalspannungen gemäß:

$$\sigma_1 := \max\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\}$$

$$\sigma_3 := \min\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\}$$

$$\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$$

und Ansetzen der Schubspannungs- bzw. Gestaltänderungsenergiehypothese:

$$\sigma_{VSH} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{VGEH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

	Lastfall 1 $\sigma_1 = 91,7 \text{ N/mm}^2$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = -40,7 \text{ N/mm}^2$	Lastfall 2 $\sigma_1 = 40,7 \text{ N/mm}^2$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = -91,7 \text{ N/mm}^2$	Lastfall 3 $\sigma_1 = 114,2 \text{ N/mm}^2$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = -32,7 \text{ N/mm}^2$
$\sigma_{V SH}$	132,4 N/mm²	132,4 N/mm²	146,9 N/mm²
$\sigma_{V GEH}$	117,5 N/mm²	117,5 N/mm²	133,6 N/mm²
$S_F = R_{p0,2} / \sigma_{V GEH}$	3,49	3,49	3,07

Lösung zu Aufgabe 6.3

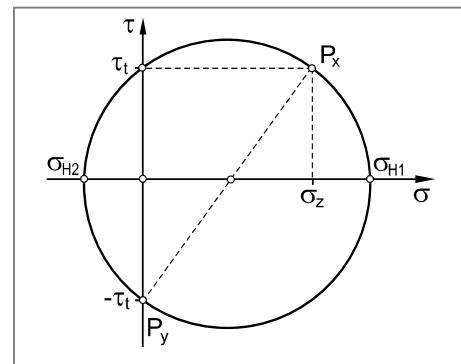
a) Berechnung der Lastspannungen

$$\sigma_x \equiv \sigma_z = \frac{F_z}{A} = \frac{890\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (90 \text{ mm})^2} = 139,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{xy} \equiv \tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{14\,000\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (90 \text{ mm})^3} = 97,8 \text{ N/mm}^2$$

Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises

Die Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises erfolgt analog zu Aufgabe 6.1 (Konstruktionsbeschreibung siehe Lösung zu Aufgabe 6.1d).



Berechnung der Hauptnormalspannungen

$$\sigma_{H1;H2} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \frac{139,9 \text{ N/mm}^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{139,9}{2}\right)^2 + 97,8^2} \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H1} = 190,2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H2} = -50,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H3} = 0$$

Ordnen der Hauptnormalspannungen

$$\sigma_1 := \max\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\} = 190,2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 := \min\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\} = -50,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 \text{ damit folgt } \sigma_2 = 0$$

Festigkeitsbedingung (Fließen) unter Verwendung der SH

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{VSH}} = \frac{R_e}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{490 \text{ N/mm}^2}{(190,2 + 50,3) \text{ N/mm}^2} = 2,04 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Falls mit der GEH gerechnet wurde: $S_F = 2,23$

Alternative Lösung

Die Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese kann auch unmittelbar aus Gleichung 6.17 im Lehrbuch (Zugbeanspruchung mit überlagerter Torsion) errechnet werden:

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{139,9^2 + 4 \cdot 97,8^2} \text{ N/mm}^2 = 240,48 \text{ N/mm}^2$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{VSH}} = \frac{R_e}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{490 \text{ N/mm}^2}{240,48 \text{ N/mm}^2} = 2,04 \quad (\text{ausreichend, da } > 1,20)$$

b) Festigkeitsbedingung (Fließen)

$$\sigma_{VSH} \leq \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\tau_t = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{R_{p0,2}}{S_F}\right)^2 - \sigma_z^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{900 \text{ N/mm}^2}{2,04}\right)^2 - (139,9 \text{ N/mm}^2)^2} = 209,5 \text{ N/mm}^2$$

Damit folgt für das Torsionsmoment M_t^* :

$$M_t^* = \tau_t \cdot W_t = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cdot \tau_t = \frac{\pi \cdot (90 \text{ mm})^3}{16} \cdot 209,5 \text{ N/mm}^2 = 29946,9 \text{ Nm}$$

Falls mit der GEH gerechnet wurde ($S_F = 2,23$): $M_t^* = 31286,1 \text{ Nm}$

Lösung zu Aufgabe 6.4

a) Berechnung der Zugspannung in der Spindel

$$\sigma_x \equiv \sigma_z = \frac{F_z}{A} = \frac{280\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{4} \cdot (30 \text{ mm})^2} = 396,1 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Verlängerung der Spindel mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (einachsiger Spannungszustand):

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

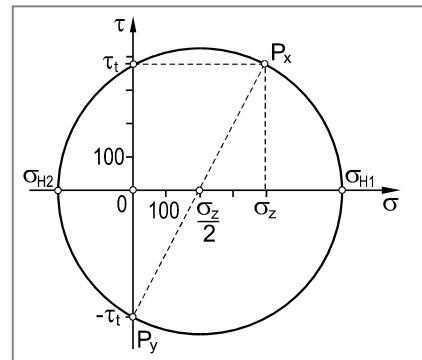
$$\Delta l = \frac{\sigma_z \cdot l_0}{E} = \frac{396,1 \text{ N/mm}^2 \cdot 650 \text{ mm}}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 1,226 \text{ mm}$$

b) Berechnung der Schubspannung aus Torsion

$$\tau_{xy} \equiv \tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{2\,000\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (30 \text{ mm})^3} = 377,3 \text{ N/mm}^2$$

c) Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises

Die Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises erfolgt analog zu Aufgabe 6.1 (Konstruktionsbeschreibung siehe Lösung zu Aufgabe 6.1d).



Berechnung der Hauptnormalspannungen

$$\sigma_{H1;H2} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \frac{396,1 \text{ N/mm}^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{396,1}{2}\right)^2 + 377,3^2} \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H1} = 624,2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H2} = -228,1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H3} = 0$$

d) Festigkeitsbedingung

Anwendung der NH, da voraussetzungsgemäß spröder Werkstoff:

$$\sigma_{VNH} = R_m$$

$$\sigma_1 = R_m$$

Damit folgt aus der Festigkeitsbedingung:

$$\frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = R_m$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = R_m - \frac{\sigma_z}{2} \quad | \text{ quadrieren}$$

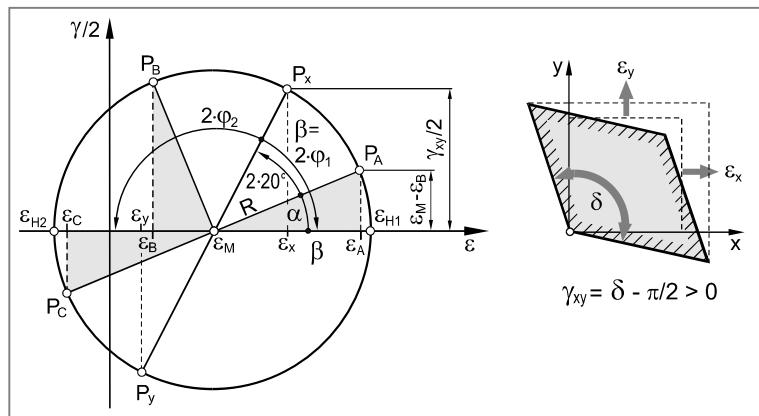
$$\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2 = \left(R_m - \frac{\sigma_z}{2}\right)^2$$

$$\tau_t = \sqrt{\left(R_m - \frac{\sigma_z}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(1800 - \frac{396,1}{2}\right)^2 - \left(\frac{396,1}{2}\right)^2} \text{ N/mm}^2 = 1589,7 \text{ N/mm}^2$$

$$M_t = W_t \cdot \tau_t = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cdot \tau_t = \frac{\pi \cdot (30 \text{ mm})^3}{16} \cdot 1589,7 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{8427,5 \text{ Nm}}$$

Lösung zu Aufgabe 6.5

- a) Es liegt eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette vor. Daher kann der Mohr'sche Verformungskreis entsprechend Kapitel 4.4.2 (siehe Lehrbuch) auf einfache Weise konstruiert werden.



Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} = \frac{3,159 \% + (-0,479 \%)}{2} = 1,34 \%$$

$$R = \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_M)^2 + (\varepsilon_M - \varepsilon_B)^2} \\ = \sqrt{(3,159 \% - 1,34 \%)^2 + (1,34 \% - 0,552 \%)} = 1,982 \%$$

Berechnung des Winkels α zwischen der Messrichtung von DMS A und der Hauptdehnungsrichtung ε_{H1}

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\varepsilon_M - \varepsilon_B}{\varepsilon_A - \varepsilon_M}\right) = \arctan\left(\frac{1,34 \% - 0,552 \%}{3,159 \% - 1,34 \%}\right) = 23,42^\circ$$

Damit folgt für den Winkel β zwischen der x-Richtung und der Hauptdehnungsrichtung ε_{H1}

$$\beta = \alpha + 2 \cdot 20^\circ = 23,42^\circ + 40^\circ = 63,42^\circ$$

Berechnung der Dehnungen in x- und y-Richtung (ε_x und ε_y)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_M + R \cdot \cos \beta = 1,34 \% + 1,982 \% \cdot \cos 63,42^\circ = 2,227 \%$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_M - R \cdot \cos \beta = 1,34 \% - 1,982 \% \cdot \cos 63,42^\circ = 0,453 \%$$

Berechnung der Schiebung γ_{xy} mit der x-Richtung als Bezugsrichtung

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = R \cdot \sin \beta = 1,982 \% \cdot \sin 63,42^\circ = 1,773 \%$$

$$\gamma_{xy} = 3,545 \% \quad (\text{Winkelvergrößerung gemäß Vorzeichenregelung für Schiebungen})$$

Berechnung der Normalspannungen σ_x und σ_y durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) = \frac{75\,000 \text{ N/mm}^2}{1 - 0,33^2} \cdot (2,227 + 0,33 \cdot 0,453) \cdot 10^{-3} = 200 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x) = \frac{75\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,33^2} \cdot (0,453 + 0,33 \cdot 2,227) \cdot 10^{-3} = 100 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Schubspannung τ_{xy} durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes für Schubspannungen

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} \cdot \gamma_{xy} = \frac{75\,000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1+0,33)} \cdot 3,545 \cdot 10^{-3} = 100 \text{ N/mm}^2$$

Die Schubspannung wirkt entsprechend der Abbildung zu Aufgabe 6.5.

b) Berechnung der Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2}

$$\varepsilon_{H1} = \varepsilon_M + R = 1,34 \% + 1,982 \% = 3,322 \%$$

$$\varepsilon_{H2} = \varepsilon_M - R = 1,34 \% - 1,982 \% = -0,642 \%$$

Ermittlung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Hauptdehnungsrichtungen

Aus dem Mohr'schen Verformungskreis folgt:

$$2 \cdot \varphi_1 = -|\beta| = -63,42^\circ$$

$\varphi_1 = -31,71^\circ$ (gemäß der eingezeichneten Drehrichtung im math. negativen Sinn)

$$2 \cdot \varphi_2 = 2 \cdot \varphi_1 + 180^\circ = -63,42^\circ + 180^\circ = 116,58^\circ$$

$\varphi_2 = 58,29^\circ$ (gemäß der eingezeichneten Drehrichtung im math. positiven Sinn)

Berechnung der Hauptspannungen σ_{H1} und σ_{H2}

Die Hauptspannungen errechnet man aus den Hauptdehnungen mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes für den zweiachigen Spannungszustand:

$$\begin{aligned} \sigma_{H1} &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_{H1} + \mu \cdot \varepsilon_{H2}) \\ &= \frac{75\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,33^2} \cdot (3,322 + 0,33 \cdot (-0,642)) \cdot 10^{-3} = 261,77 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{H2} &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_{H2} + \mu \cdot \varepsilon_{H1}) \\ &= \frac{75\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,33^2} \cdot (-0,642 + 0,33 \cdot 3,322) \cdot 10^{-3} = 38,23 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Anmerkung:

Alternativ können die Hauptspannungen auch aus den in Aufgabenteil a) errechneten Lastspannungen σ_x und σ_y und τ_{xy} ermittelt werden (Gleichungen 3.38 und 3.39 in Kapitel 3.3.2.3 im Lehrbuch).

- c) Die Verminderung der Plattendicke ergibt sich aus dem Hooke'schen Gesetz für den zweiachigen Spannungszustand

Berechnung der Dehnung ε_z in z-Richtung

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{0,33}{75000 \text{ N/mm}^2} \cdot (200 \text{ N/mm}^2 + 100 \text{ N/mm}^2) = -0,00132$$

Damit folgt für die Verminderung der Plattendicke Δt :

$$\Delta t = \varepsilon_z \cdot t = -0,00132 \cdot 15 \text{ mm} = -0,0198 \text{ mm} = \mathbf{-19,8 \mu m}$$

d) Berechnung der Vergleichsspannung σ_v mit Hilfe der Schubspannungshypothese

$$\sigma_{VSH} = \sigma_1 - \sigma_3$$

mit $\sigma_1 = \sigma_{H1}$ und $\sigma_3 = 0$ folgt:

$$\sigma_{VSH} = \sigma_1 = 261,77 \text{ N/mm}^2$$

Anmerkung: Das gleiche Ergebnis erhält man auch mit Gleichung 6.16 im Lehrbuch.

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul}$$

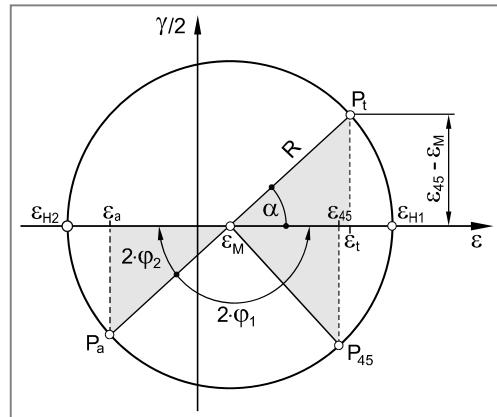
$$\sigma_1 = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

Damit folgt für die Sicherheit gegen Fließen (S_F):

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_1} = \frac{380 \text{ N/mm}^2}{261,77 \text{ N/mm}^2} = \mathbf{1,45} \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Lösung zu Aufgabe 6.6

- a) Es liegt eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette vor. Daher kann der Mohr'sche Verformungskreis entsprechend Kapitel 4.4.2 (siehe Lehrbuch) auf einfache Weise konstruiert werden.



Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_t}{2} = \frac{-0,50\% + 0,90\%}{2} = 0,20\%$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(\varepsilon_t - \varepsilon_M)^2 + (\varepsilon_{45} - \varepsilon_M)^2} \\ &= \sqrt{(0,90\% - 0,20\%)^2 + (0,84\% - 0,2\%)^2} = 0,9485\% \end{aligned}$$

Berechnung des Winkels α zwischen der Tangentialrichtung und der Hauptdehnungsrichtung ε_{H1}

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\varepsilon_{45} - \varepsilon_M}{\varepsilon_t - \varepsilon_M} \right) = \arctan \left(\frac{0,84\% - 0,2\%}{0,90\% - 0,2\%} \right) = 42,44^\circ$$

Berechnung der Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2}

$$\varepsilon_{H1} = \varepsilon_M + R = 0,2\% + 0,9485\% = 1,149\%$$

$$\varepsilon_{H2} = \varepsilon_M - R = 0,2\% - 0,9485\% = -0,749\%$$

Ermittlung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der Axialrichtung und den Hauptdehnungsrichtungen ε_{H1} und ε_{H2}

Aus dem Mohr'schen Verformungskreis folgt:

$$2 \cdot \varphi_1 = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 42,44^\circ = 137,56^\circ$$

$$\varphi_1 = 68,78^\circ \quad (\text{gemäß der eingezeichneten Drehrichtung im math. positiven Sinn})$$

$$2 \cdot \varphi_2 = -\alpha = -42,44^\circ$$

$$\varphi_2 = -21,22^\circ \quad (\text{gemäß der eingezeichneten Drehrichtung im math. negativen Sinn})$$

Berechnung der Hauptspannungen σ_{H1} und σ_{H2}

Die Hauptspannungen errechnet man aus den Hauptdehnungen mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes für den zweiachsigigen Spannungszustand:

$$\begin{aligned}\sigma_{H1} &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_{H1} + \mu \cdot \varepsilon_{H2}) \\ &= \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (1,149 + 0,30 \cdot (-0,749)) \cdot 10^{-3} = 213,2 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{H2} &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_{H2} + \mu \cdot \varepsilon_{H1}) \\ &= \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (-0,749 + 0,30 \cdot 1,149) \cdot 10^{-3} = -93,2 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

b) Berechnung der Vergleichsspannung σ_V mit Hilfe der Gestaltänderungsenergiehypothese

$$\sigma_{V \text{ GEH}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

mit $\sigma_1 = \sigma_{H1} = 213,2 \text{ N/mm}^2$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma_{H2} = -93,2 \text{ N/mm}^2$$

folgt:

$$\sigma_{V \text{ GEH}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{213,2^2 + (-93,2)^2 + (-93,2 - 213,2)^2} \text{ N/mm}^2 = 272,1 \text{ N/mm}^2$$

c) Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{V \text{ GEH}} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{V \text{ GEH}} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

Damit folgt für die Sicherheit gegen Fließen (S_F):

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{V \text{ GEH}}} = \frac{850 \text{ N/mm}^2}{272,1 \text{ N/mm}^2} = 3,12 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Lösung zu Aufgabe 6.7

a) Berechnung der Spannung in Längsrichtung (Zugrichtung)

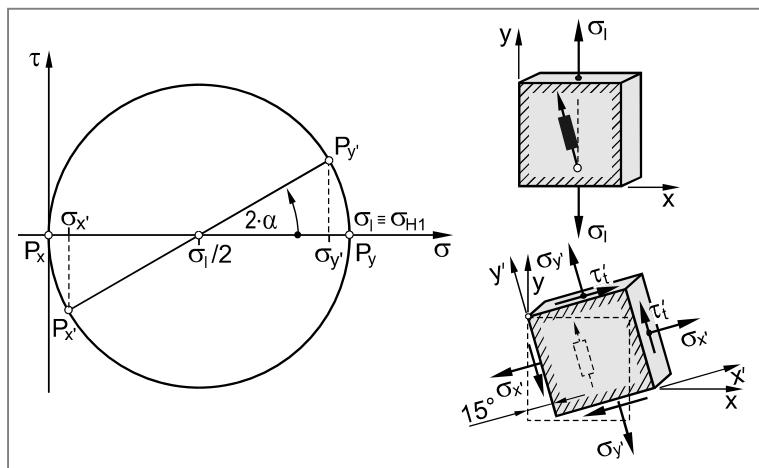
$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A} = \frac{F_1}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 320\,000 \text{ N}}{\pi \cdot (30 \text{ mm})^2} = 452,71 \text{ N/mm}^2$$

Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises

Zur Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises benötigt man die Spannungen in zwei zueinander senkrechten Schnittflächen. Bekannt sind die Spannungen in den Schnittflächen mit der x- und der y-Richtung als Normale.

Eintragen der entsprechenden Bildpunkte $P_y(\sigma_1 | 0)$ und $P_x(0 | 0)$. P_x und P_y repräsentieren die Spannungen in den Schnittflächen mit der x- und der y-Richtung als Normale. Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, liegen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser. Damit ist der Mohr'sche Spannungskreis festgelegt (siehe Abbildung).

Die Bildpunkte $P_{x'}$ und $P_{y'}$, welche die Spannungen in den Schnittflächen mit der x'- bzw. y'-Richtung als Normale repräsentieren, erhält man durch Abtragen der Richtungswinkel 2α bzw. $2\alpha + 180^\circ$, ausgehend vom Bildpunkt P_y (gleicher Drehsinn zum Lageplan).



Aus dem Mohr'schen Spannungskreis folgt die Normalspannungen $\sigma_{x'}$ und $\sigma_{y'}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{y'} &= \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha) \\ &= \frac{452,71 \text{ N/mm}^2}{2} \cdot (1 + \cos(2 \cdot 15^\circ)) = 422,38 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_1}{2} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha) \\ &= \frac{452,71 \text{ N/mm}^2}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot 15^\circ)) = 30,33 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Berechnung der Dehnung in y'-Richtung (Messrichtung des DMS) durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes für den zweiachsigen Spannungszustand

$$\varepsilon_{y'} \equiv \varepsilon_{\text{DMS}} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{y'} - \mu \cdot \sigma_{x'}) = \frac{422,31 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 30,33 \text{ N/mm}^2}{204\,000 \text{ N/mm}^2}$$

$$= 0,002026 = 2,026 \%$$

- b) Für die Dehnung in Messrichtung des DMS ergibt sich aus dem vorhergehenden Aufgabenteil:

$$\varepsilon_{y'} \equiv \varepsilon_{\text{DMS}} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{y'} - \mu \cdot \sigma_{x'}) = \frac{1}{E} \cdot \left[\frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha) - \mu \cdot \frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha) \right]$$

$$= \frac{\sigma_1}{2 \cdot E} \cdot [(1 + \cos 2\alpha) - \mu \cdot (1 - \cos 2\alpha)]$$

Damit folgt für die Spannung σ_1 in Längsrichtung:

$$\sigma_1 = \frac{2 \cdot E \cdot \varepsilon_{\text{DMS}}}{(1 + \cos 2\alpha) - \mu \cdot (1 - \cos 2\alpha)} = \frac{2 \cdot 204\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,003}{(1 + \cos 30^\circ) - 0,30 \cdot (1 - \cos 30^\circ)} = 670,38 \text{ N/mm}^2$$

Für die Zugkraft F_2 erhält man dann:

$$F_2 = \sigma_1 \cdot A = \sigma_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 670,38 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (30 \text{ mm})^2$$

$$= 473\,863 \text{ N} = 473,9 \text{ kN}$$

c) **Berechnung der Zugkraft F_3 bei Fließbeginn**

Festigkeitsbedingung für Fließen:

$$\sigma_1 = R_{p0,2}$$

$$\frac{F_3}{A} = R_{p0,2}$$

Damit folgt für die Zugkraft F_3 :

$$F_3 = R_{p0,2} \cdot A = R_{p0,2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 1020 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (30 \text{ mm})^2$$

$$= 720\,995 \text{ N} = 720,9 \text{ kN}$$

Berechnung der Dehnungsanzeige ε_{DMS} bei Fließbeginn

Die Berechnung erfolgt analog zu Aufgabenteil b):

$$\varepsilon_{y'} \equiv \varepsilon_{\text{DMS}} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{y'} - \mu \cdot \sigma_{x'}) = \frac{1}{E} \cdot \left[\frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha) - \mu \cdot \frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha) \right]$$

$$= \frac{\sigma_1}{2 \cdot E} \cdot [(1 + \cos 2\alpha) - \mu \cdot (1 - \cos 2\alpha)]$$

mit $\sigma_l = R_{p0,2}$ folgt schließlich:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{DMS} &= \frac{R_{p0,2}}{2 \cdot E} \cdot [(1 + \cos 2\alpha) - \mu \cdot (1 - \cos 2\alpha)] \\ &= \frac{1020 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot 204000 \text{ N/mm}^2} [(1 + \cos 30^\circ) - \mu \cdot (1 - \cos 30^\circ)] = 0,004564 = 4,564 \%\end{aligned}$$

Alternative Lösung mit Hilfe des Mohr'schen Verformungskreises

a) Berechnung der Dehnung in Längs- und Querrichtung unter der Wirkung von F_1

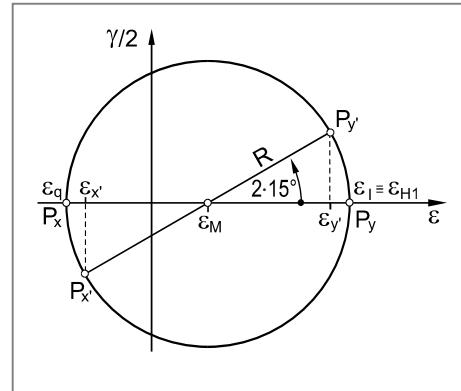
$$\varepsilon_l \equiv \varepsilon_y = \frac{\sigma_l}{E} = \frac{452,71 \text{ N/mm}^2}{204000 \text{ N/mm}^2} = 0,00222 = 2,22 \%$$

$$\varepsilon_q \equiv \varepsilon_x = -\mu \cdot \varepsilon_l = -0,30 \cdot 0,00222 = -0,000666 = -0,666 \%$$

Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises

Zur Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises benötigt man die Verformungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen. Bekannt sind die Verformungen mit der x- bzw. y-Richtung als Bezugsrichtung.

Einzeichnen der entsprechenden Bildpunkte $P_x (\varepsilon_q | 0)$ und $P_y (\varepsilon_l | 0)$ in das ε - $\gamma/2$ -Koordinatensystem. Da die x- und die y-Richtung einen Winkel von 90° zueinander einschließen, liegen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser. Damit ist der Mohr'sche Verformungskreis festgelegt (siehe Abbildung).



Den Bildpunkt $P_{y'}$, welcher die Verformungsgrößen in y' -Richtung (Messrichtung des DMS) als Bezugsrichtung repräsentiert, erhält man durch Abtragen des Richtungswinkels $2 \cdot \alpha (= 2 \cdot 15^\circ)$, ausgehend vom Bildpunkt P_y (gleicher Drehsinn zum Lageplan).

Für den Mittelpunkt und den Radius des Mohr'schen Verformungskreises erhält man:

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_l + \varepsilon_q}{2} = \frac{2,22 \% - 0,666 \%}{2} = 0,777 \%$$

$$R = \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_q}{2} = \frac{2,22 \% - (-0,666 \%)}{2} = 1,442 \%$$

Damit folgt die Dehnung in y' -Richtung (Messrichtung des DMS)

$$\varepsilon_{y'} \equiv \varepsilon_{DMS} = \varepsilon_M + R \cdot \cos 2\alpha = 0,000777 + 0,001442 \cdot \cos 30^\circ = 0,002026 = 2,026 \%$$

- b) Für die Dehnung in Messrichtung des DMS ergibt sich aus dem vorhergehenden Aufgabenteil:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{DMS}} &\equiv \varepsilon_{y'} = \varepsilon_M + R \cdot \cos 2\alpha \\ &= \frac{\varepsilon_l + \varepsilon_q}{2} + \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_q}{2} \cdot \cos 2\alpha \\ &= \frac{\varepsilon_l - \mu \cdot \varepsilon_l}{2} + \frac{\varepsilon_l + \mu \cdot \varepsilon_l}{2} \cdot \cos 2\alpha \\ &= \frac{\varepsilon_l \cdot (1 - \mu) + \varepsilon_l \cdot (1 + \mu) \cdot \cos 2\alpha}{2} \\ &= \frac{\varepsilon_l}{2} \cdot [(1 - \mu) + (1 + \mu) \cdot \cos 2\alpha]\end{aligned}$$

Damit folgt für die Dehnung ε_l in Längsrichtung:

$$\varepsilon_l = \frac{2 \cdot \varepsilon_{\text{DMS}}}{(1 - \mu) + (1 + \mu) \cdot \cos 2\alpha} = \frac{2 \cdot 0,003}{(1 - 0,30) + (1 + 0,30) \cdot \cos(2 \cdot 15^\circ)} = 0,003286$$

$$\sigma_l = E \cdot \varepsilon_l = 204\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,003286 = 670,38 \text{ N/mm}^2$$

Für die Zugkraft F_2 erhält man dann:

$$\begin{aligned}F_2 &= \sigma_l \cdot A = \sigma_l \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 670,38 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (30 \text{ mm})^2 \\ &= 473\,863 \text{ N} = \mathbf{473,9 \text{ kN}}$$

- c) In Aufgabenteil c) wurde die Zugkraft F_3 bei Fließbeginn berechnet ($F_3 = 720\,995 \text{ N}$). Die Berechnung der Dehnungsanzeige ε_{DMS} erfolgt analog zu Aufgabenteil a) der alternativen Lösung.

Berechnung der Dehnung in Längs- und Querrichtung bei Fließbeginn

$$\varepsilon_l \equiv \varepsilon_y = \frac{\sigma_l}{E} = \frac{R_{p0,2}}{E} = \frac{1020 \text{ N/mm}^2}{204\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,005$$

$$\varepsilon_q \equiv \varepsilon_x = -\mu \cdot \varepsilon_l = -0,30 \cdot 0,005 = -0,0015$$

Für den Mittelpunkt und den Radius des Mohr'schen Verformungskreises erhält man:

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_l + \varepsilon_q}{2} = \frac{0,005 - 0,0015}{2} = 0,00175$$

$$R = \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_q}{2} = \frac{0,005 + 0,0015}{2} = 0,00325$$

Berechnung der Dehnungsanzeige ε_{DMS} bei Fließbeginn

$$\varepsilon_{y'} \equiv \varepsilon_{\text{DMS}} = \varepsilon_M + R \cdot \cos 2\alpha = 0,00175 + 0,00325 \cdot \cos 30^\circ = 0,004564 = \mathbf{4,564 \%}$$

Lösung zu Aufgabe 6.8

- a) Berechnung des Biegemomentes M_b sowie des Torsionsmomentes M_t an der Einspannstelle

$$M_b = F_1 \cdot a = 5000 \text{ N} \cdot 0,1 \text{ m} = 500 \text{ Nm}$$

$$M_t = F_1 \cdot b = 5000 \text{ N} \cdot 0,05 \text{ m} = 250 \text{ Nm}$$

- b) Berechnung der Lastspannungen aus Biegung und Torsion

$$\sigma_x \equiv \sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{M_b}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{500000 \text{ Nm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (30 \text{ mm})^3} = 188,63 \text{ N/mm}^2$$

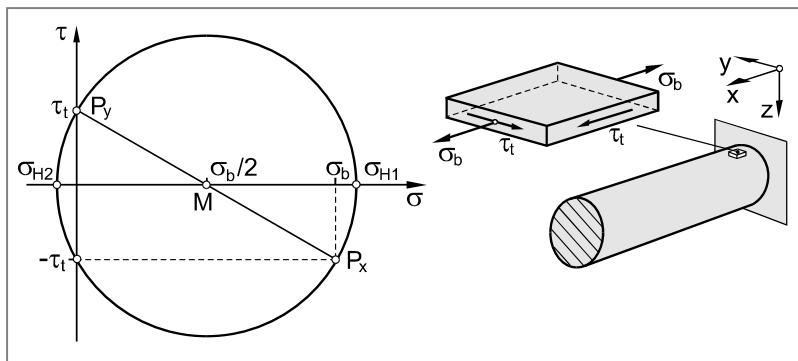
$$\tau_{xy} = \tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{250000 \text{ Nm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (30 \text{ mm})^3} = 47,16 \text{ N/mm}^2$$

Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises

Eintragen des Bildpunktes $P_x(\sigma_b \mid -\tau_t)$ und des Bildpunktes $P_y(0 \mid \tau_t)$ in das σ - τ -Koordinatensystem unter Beachtung der speziellen Vorzeichenregelung für Schubspannungen.

Bildpunkt P_x repräsentiert den Spannungszustand in der Schnittebene mit der x-Achse als Normalenvektor. Bildpunkt P_y repräsentiert den Spannungszustand in der Schnittebene mit der y-Achse als Normalenvektor.

Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreis durchmesser liegen.



Die Strecke P_xP_y schneidet die σ -Achse im Kreismittelpunkt M . Kreis um M durch die Bildpunkte P_x oder P_y ist der gesuchte Mohr'sche Spannungskreis (siehe Abbildung).

Berechnung der Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2}

$$\sigma_{H1;H2} = \frac{\sigma_b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \frac{188,63}{2} \text{ N/mm}^2 \pm \sqrt{\left(\frac{188,63}{2}\right)^2 + 47,16^2} \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H1} = 199,76 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H2} = -11,13 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Vergleichsspannung σ_V mit Hilfe der Schubspannungshypothese

$$\sigma_{VSH} = \sigma_1 - \sigma_3$$

mit $\sigma_1 = \sigma_{H1}$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma_{H2}$$

folgt für die Vergleichsspannung $\sigma_{V SH}$:

$$\sigma_{V SH} = \sigma_1 - \sigma_3 = 199,76 \text{ N/mm}^2 - (-11,13 \text{ N/mm}^2) = 210,89 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{V SH} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{V SH} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

Damit folgt für die Sicherheit gegen Fließen (S_F):

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{V SH}} = \frac{780 \text{ N/mm}^2}{210,89 \text{ N/mm}^2} = 3,69 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Alternative Lösung

Die Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese kann auch unmittelbar aus Gleichung 6.17 (Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion, siehe Lehrbuch) errechnet werden:

$$\sigma_{V SH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{188,63^2 + 4 \cdot 47,16^2} \text{ N/mm}^2 = 210,89 \text{ N/mm}^2$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{V SH}} = \frac{780 \text{ N/mm}^2}{210,89 \text{ N/mm}^2} = 3,69 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

- c) In Analogie zu Aufgabenteil b) folgt für die Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_{H1;H2} = \frac{\sigma_b + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_b + \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2}$$

Damit folgt für die Vergleichsspannung σ_V nach der Schubspannungshypothese unter Berücksichtigung von $\sigma_1 = \sigma_{H1}$, $\sigma_2 = 0$ und $\sigma_3 = \sigma_{H2}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{V SH} &= \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma_b + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_b + \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_b + \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} \\ &= \sqrt{(\sigma_b + \sigma_z)^2 + 4 \cdot \tau_t^2} \end{aligned}$$

Anmerkung: Dieses Ergebnis hätte man auch direkt aus Gleichung 6.17 (siehe Lehrbuch) erhalten.

Festigkeitsbedingung (Bruch)

$$\sigma_{VSH} \leq R_m$$

$$\sqrt{(\sigma_b + \sigma_z)^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = R_m \quad | \text{ quadrieren}$$

$$(\sigma_b + \sigma_z)^2 + 4 \cdot \tau_t^2 = R_m^2$$

Damit folgt für die Zugspannung σ_z :

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \sqrt{R_m^2 - 4 \cdot \tau_t^2} - \sigma_b = \sqrt{(1050 \text{ N/mm}^2)^2 - 4 \cdot (47,16 \text{ N/mm}^2)^2} - 188,63 \text{ N/mm}^2 \\ &= 857,13 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Für die Zugkraft F_2 folgt dann schließlich:

$$F_2 = \sigma_z \cdot A = \sigma_z \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 857,13 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (30 \text{ mm})^2 = 605870 \text{ N} = \mathbf{605,87 \text{ kN}}$$

d) Berechnung der Lastspannungen (Biegung und Torsion)

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{M_b}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{32 \cdot F_l \cdot a}{\pi \cdot d^3}$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{16 \cdot F_l \cdot b}{\pi \cdot d^3}$$

Aus Aufgabenteil c) folgt für die Vergleichsspannung σ_{VSH} nach der Schubspannungshypothese ($\sigma_z = 0$):

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2}$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \frac{R_m}{S_B}$$

$$\sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \frac{R_m}{S_B} \quad | \text{ quadrieren}$$

$$\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2 = \left(\frac{R_m}{S_B} \right)^2$$

$$\left(\frac{32 \cdot F_l \cdot a}{\pi \cdot d^3} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{16 \cdot F_l \cdot b}{\pi \cdot d^3} \right)^2 = \left(\frac{R_m}{S_B} \right)^2$$

$$\frac{1}{d^6} \cdot \left[\left(\frac{32 \cdot F_l \cdot a}{\pi} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{16 \cdot F_l \cdot b}{\pi} \right)^2 \right] = \left(\frac{R_m}{S_B} \right)^2$$

Damit folgt für den Durchmesser d :

$$d = \left[\frac{\left(\frac{32 \cdot F_1 \cdot a}{\pi} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{16 \cdot F_1 \cdot b}{\pi} \right)^2}{\left(\frac{R_m}{S_B} \right)^2} \right]^{-0.5}$$
$$= \left[\frac{\left(\frac{32 \cdot 5000 \text{ N} \cdot 100 \text{ mm}}{\pi} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{16 \cdot 5000 \text{ N} \cdot 50 \text{ mm}}{\pi} \right)^2}{(440 \text{ N/mm}^2 / 2)^2} \right]^{-0.5} = \mathbf{29,58 \text{ mm}}$$

Lösung zu Aufgabe 6.9

- a) Zuordnung der Dehnungsanzeigen zu den einzelnen Messstellen

Belastung	Messstelle			
	DMS A	DMS B	DMS C	DMS D
F_Z	$\varepsilon_{zAZ} + \varepsilon_{bAZ}$	$\varepsilon_{zBZ} = \varepsilon_{zAZ}$	$\varepsilon_{zCZ} + \varepsilon_{bCZ}$ $= \varepsilon_{zAZ} - \varepsilon_{bAZ}$	$\varepsilon_{zDZ} = \varepsilon_{zAZ}$
F_S	ε_{bAS}	0 ¹⁾	$\varepsilon_{bCS} = -\varepsilon_{bAS}$	0 ¹⁾
F_Q	0 ¹⁾	ε_{bBQ}	0 ¹⁾	$\varepsilon_{bDQ} = -\varepsilon_{bBQ}$

¹⁾ neutrale Faser

Die Dehnungsmesssteifen A und C verformen sich nur durch die Beanspruchung aus F_Z und F_S (siehe Tabelle). Die Verformungen durch die einzelnen Beanspruchungen können linear superponiert werden.

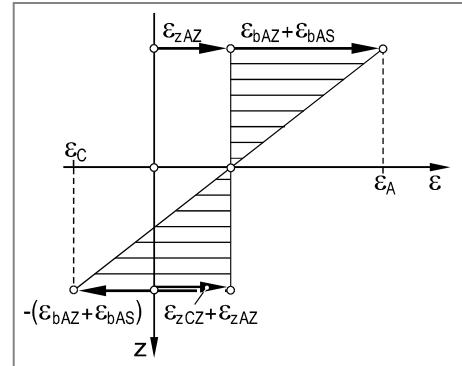
Es gilt:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_{zAZ} + \varepsilon_{bAZ} + \varepsilon_{bAS} \quad \text{und} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_C &= \varepsilon_{zCZ} + \varepsilon_{bCZ} + \varepsilon_{bCS} \\ &= \varepsilon_{zAZ} - \varepsilon_{bAZ} - \varepsilon_{bAS} \end{aligned} \quad (2)$$

Gleichung 1 und 2 addiert liefert für ε_{zAZ} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zAZ} &= \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} = \frac{2,2312 \% - 2,0372 \%}{2} \\ &= 0,097 \% \end{aligned}$$



Berechnung der Zugspannung σ_z bzw. der Zugkraft F_Z

Hooke'sches Gesetz (einachsiger Spannungszustand):

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_{zAZ} = 210\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,097 \cdot 10^{-3} = 20,37 \text{ N/mm}^2$$

$$F_Z = \sigma_z \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 20,37 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (50 \text{ mm})^2 = 39\,996 \text{ N}$$

- b) Für die Dehnung des DMS A infolge Biegebeanspruchung aus F_Z und F_S (ε_{bAZ}) folgt:

$$\varepsilon_{bAZ} + \varepsilon_{bAS} \equiv \varepsilon_{bA} = \varepsilon_A - \varepsilon_{zAZ} = 2,2312 \% - 0,097 \% = 2,1342 \%$$

Berechnung der Biegespannung σ_{bA} bzw. der Kraft F

Hooke'sches Gesetz (einachsiger Spannungszustand):

$$\sigma_{bA} = E \cdot \varepsilon_{bA} = 210\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 2,1342 \cdot 10^{-3} = 448,18 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bA} = \frac{M_{bz}}{W_{bz}} = \frac{F_S \cdot a + F_Z \cdot b}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3}$$

Damit folgt für die Kraft F_S :

$$F_S = \left(\frac{\pi}{32} \cdot d^3 \cdot \sigma_{bA} - F_Z \cdot b \right) \cdot \frac{1}{a}$$

$$F_S = \frac{\frac{\pi}{32} \cdot (50 \text{ mm})^3 \cdot 448,18 \text{ N/mm}^2 - 39996 \text{ N} \cdot 120 \text{ mm}}{350 \text{ mm}} = 2001 \text{ N}$$

- c) Die Dehnungsmessstreifen B und D verformen sich nur durch die Beanspruchung aus F_Z und F_Q (siehe Tabelle). Die Verformungen durch die einzelnen Beanspruchungen können ebenfalls linear superponiert werden.

Es gilt:

$$\varepsilon_B = \varepsilon_{zBZ} + \varepsilon_{bBQ} = \varepsilon_{zAZ} + \varepsilon_{bBQ} \quad (3)$$

Aus Gleichung 3 folgt für ε_{bBZ} :

$$\varepsilon_{bBQ} = \varepsilon_B - \varepsilon_{zAZ} = 0,7761\% - 0,097\% = 0,6791\%$$

Berechnung der Biegespannung σ_{bB} bzw. der Kraft F_Q

Hooke'sches Gesetz (einachsiger Spannungszustand):

$$\sigma_{bB} = E \cdot \varepsilon_{bBQ} = 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,6791 \cdot 10^{-3} = 142,61 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bB} = \frac{M_{by}}{W_{by}} = \frac{F_Q \cdot a}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3}$$

Damit folgt für die Kraft F_Q :

$$F_Q = \frac{\pi}{32} \cdot d^3 \cdot \sigma_{bA} \cdot \frac{1}{a}$$

$$F_Q = \frac{\frac{\pi}{32} \cdot (50 \text{ mm})^3 \cdot 142,61 \text{ N/mm}^2}{350 \text{ mm}} = 5000 \text{ N}$$

- d) **Berechnung der Lastspannungen an der Stelle 1** (Messstelle von DMS A)

$$\sigma_{zA} = 20,37 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{siehe Aufgabenteil a})$$

$$\sigma_{bA} = 448,18 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{siehe Aufgabenteil b})$$

$$\tau_{tA} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{F_Q \cdot b}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{5000 \text{ N} \cdot 120 \text{ mm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (50 \text{ mm})^3} = 24,45 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese

Die Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese kann unmittelbar aus Gleichung 6.17 (Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion, siehe Lehrbuch) errechnet werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{VSH} &= \sqrt{(\sigma_{bA} + \sigma_{zA})^2 + 4 \cdot \tau_{tA}^2} \\ &= \sqrt{(448,18 \text{ N/mm}^2 + 20,37 \text{ N/mm}^2)^2 + 4 \cdot (24,45 \text{ N/mm}^2)^2} = 471,09 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Festigkeitsbedingung (Fließen)

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

Damit folgt für die Sicherheit gegen Fließen (S_F):

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{VSH}} = \frac{800 \text{ N/mm}^2}{471,09 \text{ N/mm}^2} = 1,69 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

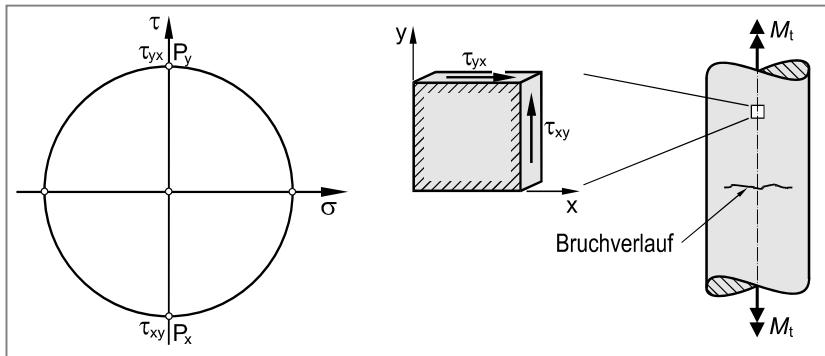
Analog folgt für die Sicherheit gegen Bruch (S_B):

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_{VSH}} = \frac{1080 \text{ N/mm}^2}{471,09 \text{ N/mm}^2} = 2,29 \quad (\text{ausreichend, da } S_B > 2,0)$$

Lösung zu Aufgabe 6.10

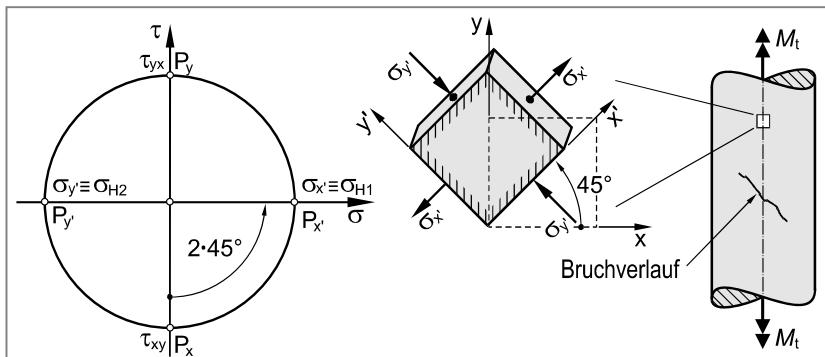
Der unlegierte (allgemeine) Baustahl **S235JR** ist ein duktiler Werkstoff. Das Versagen erfolgt durch einen (duktilen) Verformungsbruch nach vorausgegangener plastischer Verformung. Die plastische Verformung infolge von Versetzungsbewegungen findet bevorzugt in Ebenen mit der größten Schubspannung statt.

Aus dem Mohr'schen Spannungskreis ist ersichtlich, dass bei reiner Torsionsbeanspruchung die Ebenen mit der größten Schubbeanspruchung die x- bzw. y-Achse als Normale besitzen (Bildpunkte P_x und P_y im Mohr'schen Spannungskreis). Ein Bruch ist demzufolge in diesen Ebenen zu erwarten.



Die Graugusssorte **EN-GJL-250** ist ein spröder Werkstoff. Das Versagen erfolgt durch einen (spröden) Trennbruch. Derartige Trennbrüche verlaufen stets senkrecht zur größten Normalspannung.

Aus dem Mohr'schen Spannungskreis ist ersichtlich, dass bei reiner Torsionsbeanspruchung diese Ebenen die x'- bzw. y'-Achse als Normale besitzen (Bildpunkte $P_{x'}$ und $P_{y'}$ im Mohr'schen Spannungskreis). Ein Bruch ist demzufolge in Ebenen, die um 45° zur Längsachse gedreht sind, zu erwarten.



Lösung zu Aufgabe 6.11

Berechnung der Lastspannungen an der Einspannstelle

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{F \cdot (a - c)}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{32 \cdot 10000 \text{ N} \cdot (250 \text{ mm} - 100 \text{ mm})}{\pi \cdot (50 \text{ mm})^3} = 122,23 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{F \cdot b}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{16 \cdot F \cdot b}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 10000 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm}}{\pi \cdot (50 \text{ mm})^3} = 81,49 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Vergleichsspannung

Die Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese kann unmittelbar aus Gleichung 6.17 (Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion, siehe Lehrbuch) errechnet werden:

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{(122,23 \text{ N/mm}^2)^2 + 4 \cdot (81,49 \text{ N/mm}^2)^2} = 203,72 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung (Fließen)

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

Damit folgt für die Sicherheit gegen Fließen (S_F):

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{VSH}} = \frac{460 \text{ N/mm}^2}{203,72 \text{ N/mm}^2} = 2,26 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Lösung zu Aufgabe 6.12

a) Berechnung der Verformungen ε_x , ε_y und γ_{xy}

Hooke'sches Gesetz (zweiachsiger Spannungszustand)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y) = \frac{250 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 130 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,001005 = 1,005 \%$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x) = \frac{130 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 250 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,000262 = 0,2619 \%$$

Hooke'sches Gesetz für Schubbeanspruchung

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\tau_{xy}}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}} = \frac{150 \text{ N/mm}^2}{\frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)}} = 0,001857 = 1,857 \%$$

Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises

Zur Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises benötigt man die Verformungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen. Bekannt sind die Verformungen mit der x- bzw. y-Richtung als Bezugsrichtung.

Einzeichnen der entsprechenden Bildpunkte P_x ($\varepsilon_x | 0,5 \cdot \gamma_{xy}$) und P_y ($\varepsilon_y | 0,5 \cdot \gamma_{yx}$) in das ε - $\gamma/2$ -Koordinatensystem unter Berücksichtigung der Vorzeichenregelung für Schiebungen.

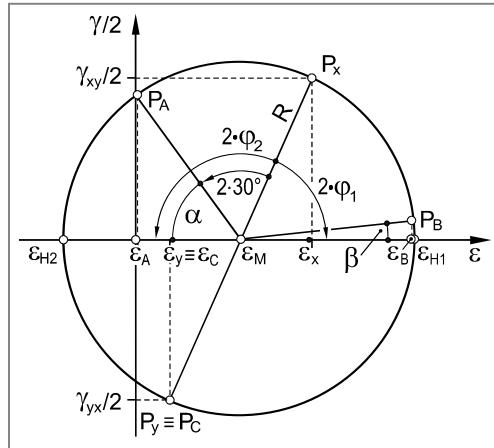
Da die x- und die y-Richtung einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem

Kreisdurchmesser liegen. Die Strecke $P_x P_y$ schneidet die ε -Achse im Kreismittelpunkt ε_M . Kreis um ε_M durch die Bildpunkte P_x und P_y ist der gesuchte Mohr'sche Verformungskreis (siehe Abbildung).

Für den Mittelpunkt und den Radius des Mohr'schen Verformungskreises erhält man:

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{1,005 \% + 0,2619 \%}{2} = 0,6333 \%$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1,005 \% - 0,2619 \%}{2}\right)^2 + \left(\frac{1,857 \%}{2}\right)^2} = 1,00010 \%$$



Berechnung des Winkels φ zwischen x-Richtung und Hauptdehnungsrichtung ε_{H1}

$$2 \cdot \varphi_1 = \arctan \frac{-\gamma_{xy} / 2}{(\varepsilon_x - \varepsilon_y) / 2} = \arctan \frac{-1,857 \% / 2}{(1,005 \% - 0,2619 \%) / 2} = -68,19^\circ$$

Damit folgt für den Winkel α zwischen der Messrichtung von DMS A und der Hauptdehnungsrichtung ε_{H1} :

$$\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ - 2 \cdot |\varphi_1| = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ - 68,19^\circ = 51,80^\circ$$

Für den Winkel β zwischen der Messrichtung von DMS B und der Hauptdehnungsrichtung ε_{H1} folgt auf analoge Weise:

$$\beta = 2 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot 30^\circ + 2 \cdot 120^\circ - 360^\circ = 68,19 + 2 \cdot 30^\circ + 2 \cdot 120^\circ - 360^\circ = 8,19^\circ$$

Mit den Winkeln α und β erhält man die Bildpunkte P_A und P_B welche die Verformungen mit der A- und C-Richtung als Bezugsrichtung repräsentieren. Für die Dehnungen in die entsprechenden Richtungen folgt dann:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_M - R \cdot \cos \alpha = 0,6333 \% - 1,0001 \% \cdot \cos 51,80^\circ = \mathbf{0,0148 \%}$$

$$\varepsilon_B = \varepsilon_M + R \cdot \cos \beta = 0,6333 \% + 1,0001 \% \cdot \cos 8,19^\circ = \mathbf{1,6230 \%}$$

Der Bildpunkt P_C fällt mit dem Bildpunkt P_y zusammen, so dass gilt:

$$\varepsilon_C \equiv \varepsilon_y = \mathbf{0,2619 \%}$$

In Analogie beispielsweise zu Aufgabe 5.5b) ist es auch möglich, aus den gegebenen Lastspannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} den Mohr'schen Spannungskreis zu konstruieren. Mit Hilfe des Mohr'schen Spannungskreises können dann die Normalspannungen in A-, B- bzw. C-Richtung (σ_A , σ_B und σ_C) und in die jeweils dazu senkrechten Schnittrichtungen ($\sigma_{A'}$, $\sigma_{B'}$ und $\sigma_{C'}$) ermittelt werden. Die Dehnungen ε_A , ε_B und ε_C berechnen sich dann unter Anwendung des Hooke'schen Gesetzes für den zweiachsigen Spannungszustand wie z. B. $\varepsilon_A = (\sigma_A - \mu \cdot \sigma_A) / E$.

b) Berechnung der Hauptdehnungen ε_{H1} und ε_{H2}

$$\varepsilon_{H1} = \varepsilon_M + R = 0,6333 \% + 1,0001 \% = \mathbf{1,6334 \%}$$

$$\varepsilon_{H2} = \varepsilon_M - R = 0,6333 \% - 1,0001 \% = -0,3668 \%$$

Berechnung der Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2}

Die Hauptnormalspannungen errechnet man aus den Hauptdehnungen mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes für den zweiachsigen Spannungszustand:

$$\begin{aligned} \sigma_{H1} &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_{H1} + \mu \cdot \varepsilon_{H2}) \\ &= \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (1,6334 + 0,30 \cdot (-0,3668)) \cdot 10^{-3} = \mathbf{351,55 \text{ N/mm}^2} \end{aligned}$$

$$\sigma_{H2} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_{H2} + \mu \cdot \varepsilon_{H1})$$

$$\sigma_{H2} = \frac{210000 \text{ N/mm}^2}{1 - 0,30^2} \cdot (-0,3668 + 0,30 \cdot 1,6334) \cdot 10^{-3} = 28,45 \text{ N/mm}^2$$

Da die Richtungswinkel zu den Hauptnormalspannungen mit den Richtungswinkel zu den Hauptdehnungen zusammenfallen (isotroper Werkstoff), ist eine Ermittlung der gesuchten Winkel aus dem Mohr'schen Verformungskreis möglich.

Ermittlung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Hauptspannungsrichtungen σ_{H1} und σ_{H2}

$$\varphi_1 = -34,10^\circ \quad (\text{siehe Aufgabenteil a})$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ = 55,90^\circ$$

c) Ordnen der Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_1 := \max \{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\} = 351,55 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 := \min \{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\} = 0$$

$$\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 \rightarrow \sigma_2 = 28,45 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese

$$\sigma_{VSH} = \sigma_1 - \sigma_3 = 351,55 \text{ N/mm}^2 - 0 = 351,55 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_{F SH}}$$

$$S_{F SH} = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{V SH}} = \frac{570 \text{ N/mm}^2}{351,55 \text{ N/mm}^2} = 1,62 \quad (\text{ausreichend, da } > 1,20)$$

Alternative: Berechnung der Vergleichsspannung nach der GEH

$$\begin{aligned} \sigma_{VGEH} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(351,55 - 28,45)^2 + (28,45 - 0)^2 + (0 - 351,55)^2} \text{ N/mm}^2 \\ &= 338,22 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Damit folgt für die Sicherheit gegen Fließen nach der GEH:

$$\sigma_{V GEH} \leq \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_{F GEH}}$$

$$S_{F GEH} = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{V GEH}} = \frac{570 \text{ N/mm}^2}{338,22 \text{ N/mm}^2} = 1,68 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

d) Es liegt ein zweiachsiger Spannungszustand vor. Um eine Fallunterscheidung bei der Ermittlung der Vergleichsspannung (in Lastspannungen) zu vermeiden (siehe Lehrbuch Tabelle 6.1), ist es zweckmäßig, die Vergleichsspannung nach der GEH zu berechnen.

Für den zweiachsigen Spannungszustand ergibt sich die Vergleichsspannung nach der GEH in Lastspannungen zu:

$$\sigma_{V\text{GEH}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$

Bedingung für Fließen:

$$\sigma_{V\text{GEH}} = R_{p0,2}$$

Damit folgt:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} = R_{p0,2} \quad | \text{ quadrieren}$$

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2 = R_{p0,2}^2$$

$$\tau_{xy} = \sqrt{\frac{R_{p0,2}^2 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \sigma_x \cdot \sigma_y}{3}} = \sqrt{\frac{570^2 - 250^2 - 130^2 + 250 \cdot 130}{3}} \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{xy} = \mathbf{304,41 \text{ N/mm}^2}$$

Lösung zu Aufgabe 6.13

a) Berechnung der Lastspannungen im Einspannquerschnitt

Zugspannung

$$\sigma_{\text{zug}} = \frac{F_{1x} + F_2}{A} = \frac{F_1 \cdot \cos \alpha + F_2}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{25\,000 \text{ N} \cdot \cos 60^\circ + 200\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (50 \text{ mm})^2} = 108,23 \text{ N/mm}^2$$

Schubspannung aus Torsion

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{F_{1z} \cdot b}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{F_1 \cdot \sin \alpha \cdot b}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{25\,000 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ \cdot 100 \text{ mm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (50 \text{ mm})^3} = 88,21 \text{ N/mm}^2$$

Biegespannungen

- Biegung um die z-Achse:

$$\sigma_{bz} = \frac{M_{bz}}{W_{bz}} = \frac{F_{1x} \cdot b}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{F_1 \cdot \cos \alpha \cdot b}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{25\,000 \text{ N} \cdot \cos 60^\circ \cdot 100 \text{ mm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (50 \text{ mm})^3} = 101,86 \text{ N/mm}^2$$

- Biegung um die y-Achse:

$$\begin{aligned} \sigma_{by} &= \frac{M_{by}}{W_{by}} = \frac{F_{1z} \cdot (a+c)}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (a+c)}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{25\,000 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ \cdot 300 \text{ mm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (50 \text{ mm})^3} \\ &= 529,28 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

b) Ermittlung der höchst beanspruchten Stell im Einspannquerschnitt

Höchst beansprucht ist die Stelle A. Dort überlagert sich die maximale Biege(zug)-spannung mit der Zugspannung σ_{zug} und der maximalen Schubspannung aus Torsion (τ_t)

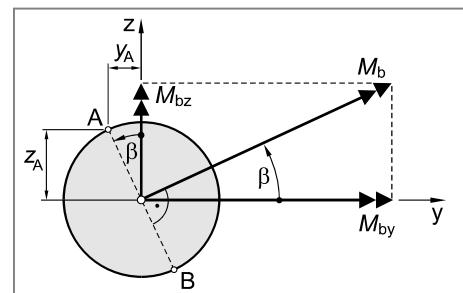
Berechnung des Winkels β sowie der Koordinaten y_A und z_A

$$\beta = \arctan \frac{M_{bz}}{M_{by}} = \arctan \frac{F_1 \cdot \cos \alpha \cdot b}{F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (a+c)}$$

$$= \frac{\cos 60^\circ \cdot 100 \text{ mm}}{\sin 60^\circ \cdot 300 \text{ mm}} = 10,89^\circ$$

$$z_A = \frac{d}{2} \cdot \cos \beta = \frac{50 \text{ mm}}{2} \cdot \cos 10,89^\circ = 24,55 \text{ mm}$$

$$y_A = \frac{d}{2} \cdot \sin \beta = \frac{50 \text{ mm}}{2} \cdot \sin 10,89^\circ = 4,72 \text{ mm}$$



Berechnung der Biegespannung an der Stelle A

$$\sigma_{bA} = \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y_A + \frac{M_{by}}{I_y} \cdot z_A = \frac{F_1 \cdot \cos \alpha \cdot b}{\frac{\pi}{64} \cdot d^4} \cdot y_A + \frac{F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (a+c)}{\frac{\pi}{64} \cdot d^4} \cdot z_A$$

$$\sigma_{bA} = \frac{64 \cdot F_1}{\pi \cdot d^4} \cdot (\cos \alpha \cdot b \cdot z_A + \sin \alpha \cdot (a+c) \cdot y_A)$$

$$= \frac{64 \cdot 25000 \text{ N}}{\pi \cdot (50 \text{ mm})^4} \cdot (\cos 60^\circ \cdot 100 \text{ mm} \cdot 4,72 \text{ mm} + \sin 60^\circ \cdot 300 \text{ mm} \cdot 24,55 \text{ mm})$$

$$= 538,98 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Vergleichsspannung an der Stelle A

Anwendung der SH in Lastspannungen (Fall: $\sigma_x \cdot \sigma_y < \tau_{xy}^2$):

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{(\sigma_{bA} + \sigma_{zug})^2 + 4 \cdot \tau_t^2}$$

$$= \sqrt{(538,98 \text{ N/mm}^2 + 108,23 \text{ N/mm}^2)^2 + 4 \cdot (88,21 \text{ N/mm}^2)^2} = 670,82 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} < \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{VSH}} = \frac{1050 \text{ N/mm}^2}{670,82 \text{ N/mm}^2} = 1,57 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Alternative Möglichkeit zur Berechnung der Biegespannung an der Stelle A

$$\sigma_{bA} = \frac{M_b}{I} \cdot r = \frac{\sqrt{M_{by}^2 + M_{bz}^2}}{\frac{\pi}{64} \cdot d^4} \cdot r = \frac{\sqrt{M_{by}^2 + M_{bz}^2}}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3}$$

$$= \frac{\sqrt{[F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (a+c)]^2 + [F_1 \cdot \cos \alpha \cdot b]^2}}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3}$$

$$= \frac{32 \cdot F_1}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{[F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (a+c)]^2 + [F_1 \cdot \cos \alpha \cdot b]^2}$$

$$= \frac{32 \cdot 25000 \text{ N}}{\pi \cdot (50 \text{ mm})^3} \cdot \sqrt{(\sin 60^\circ \cdot 300 \text{ mm})^2 + (\cos 60^\circ \cdot 100 \text{ mm})^2} = 538,98 \text{ N/mm}^2$$

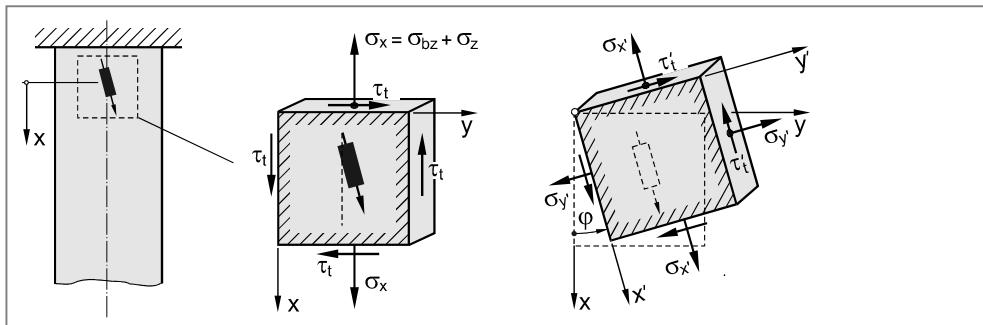
c) Spannungsermittlung an der Messstelle des DMS

An der Messstelle des DMS wirken die Spannungen σ_{zug} , σ_{by} und τ_t . Die Biegespannung σ_{bz} ist Null (neutrale Faser bezüglich Biegung um die z-Achse). An einem in Achsrichtung heraus getrennten Flächenelement wirken somit die Lastspannungen:

in x-Richtung: $\sigma_x = \sigma_{zug} + \sigma_{by} = 108,23 \text{ N/mm}^2 + 529,28 \text{ N/mm}^2 = 637,51 \text{ N/mm}^2$ und
 $\tau_t = 88,21 \text{ N/mm}^2$ (vgl. spez. Vorzeichenregelung für Schubspannungen)

in y-Richtung: $\sigma_y = 0$ und

$$\tau_t = -88,21 \text{ N/mm}^2 \text{ (vgl. spez. Vorzeichenregelung für Schubspannungen)}$$

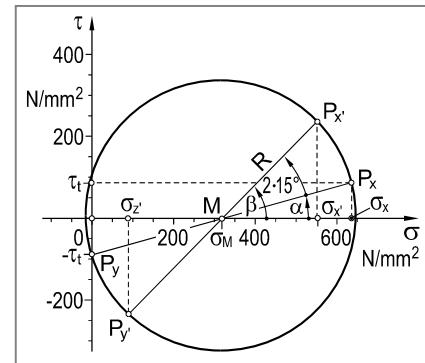


Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises

Eintragen des Bildpunktes $P_x (\sigma_x | \tau_t)$ und des Bildpunktes $P_y (0 | -\tau_t)$ in das σ - τ -Koordinatensystem unter Beachtung der speziellen Vorzeichenregelung für Schubspannungen.

Bildpunkt P_x repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der x-Achse als Normalenvektor. Bildpunkt P_y repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der y-Achse als Normalenvektor.

Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser liegen.



Die Strecke $P_x P_y$ schneidet die σ -Achse im Kreismittelpunkt M . Kreis um M durch die Bildpunkte P_x oder P_y ist der gesuchte Mohr'sche Spannungskreis (siehe Abbildung).

Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Spannungskreises

$$\sigma_M = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{637,51 \text{ N/mm}^2}{2} = 318,76 \text{ N/mm}^2$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \sqrt{\left(\frac{637,51 \text{ N/mm}^2}{2}\right)^2 + (88,21 \text{ N/mm}^2)^2} = 330,74 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Spannungen eines um den Winkel φ gedrehten Flächenelementes

Um die Spannungen in Schnittebenen parallel bzw. senkrecht zur Messrichtung des DMS zu erhalten, dreht man das Flächenelement um den Winkel $\varphi = 15^\circ$ im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn). Die Spannungen ($\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'}$) in der Schnittebene mit der x' -Achse als Normalenvektor erhält man aus dem Mohr'schen Spannungskreis, indem man ausgehend vom Bildpunkt P_x den doppelten Richtungswinkel ($2 \cdot \varphi$) mit gleichem Drehsinn anträgt (Bildpunkt $P_{x'}$).

Die Koordinaten des Bildpunktes $P_{x'}$ sind die gesuchten Spannungskomponenten $\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'} \equiv \tau_t$ in der Schnittebene mit der x' -Achse als Normalenvektor. In analoger Weise erhält man, ausgehend vom Bildpunkt P_y , die Spannungen $\sigma_{y'}$ und $\tau_{y'x'} \equiv \tau_t$ in der Schnittebene mit der y' -Achse als Normalenvektor (Bildpunkt $P_{y'}$).

Aus dem Mohr'schen Spannungskreis folgt:

$$\alpha = \arctan \frac{\tau_t}{\sigma_x / 2} = \arctan \frac{88,21 \text{ N/mm}^2}{637,51 \text{ N/mm}^2 / 2} = 15,47^\circ$$

$$\beta = \alpha + 2 \cdot 15^\circ = 45,47^\circ$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \sigma_M + R \cdot \cos \beta \\ &= 318,76 \text{ N/mm}^2 + 330,74 \text{ N/mm}^2 \cdot \cos 45,47^\circ \\ &= 550,71 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{y'} &= \sigma_M - R \cdot \cos \beta \\ &= 318,76 \text{ N/mm}^2 - 330,74 \text{ N/mm}^2 \cdot \cos 45,47^\circ \\ &= 86,82 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Berechnung der Dehnung in Messrichtung des DMS (x' -Richtung)

Ansetzen des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsig):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} &= \varepsilon_{DMS} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{x'} - \mu \cdot \sigma_{z'}) \\ &= \frac{550,71 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 86,82 \text{ N/mm}^2}{209\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,00251 = 2,510 \%\end{aligned}$$

Alternative Lösung mit Hilfe des Mohr'schen Verformungskreises

Berechnung der Dehnungen ε_x bzw. ε_y in x - bzw. y -Richtung sowie der Schiebungen γ_{xy} bzw. γ_{yx} mit der x - bzw. y -Richtung als Bezugsrichtung

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{637,51 \text{ N/mm}^2}{209\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,00305 = 3,050 \%$$

$$\varepsilon_y = -\mu \cdot \varepsilon_x = -0,30 \cdot 3,050 \% = -0,915 \%$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\tau_t}{G} = \frac{\tau_t}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}} = \frac{88,21 \text{ N/mm}^2}{\frac{209\,000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)}} = 0,001097 = 1,097 \%$$

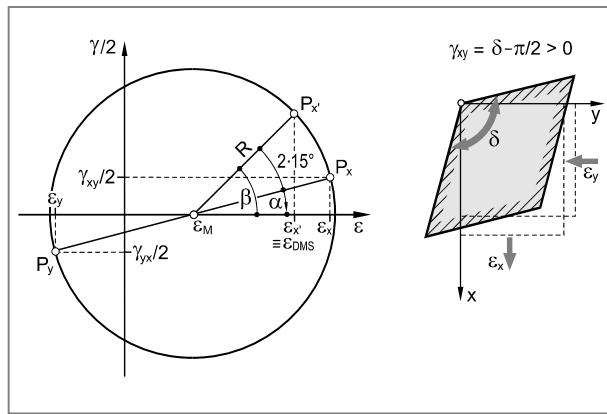
$$\gamma_{yx} = -\gamma_{xy} = -1,097 \%$$

Bei γ_{xy} handelt es sich gemäß der Vorzeichenregelung für Schiebungen um eine Winkelvergrößerung, bei γ_{yx} hingegen um eine Winkelverkleinerung.

Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises

Zur Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises benötigt man die Verformungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen. Bekannt sind die Verformungen mit der x- bzw. y-Richtung als Bezugsrichtung.

Einzeichnen der entsprechenden Bildpunkte P_x ($\varepsilon_x \mid 0,5 \cdot \gamma_{xy}$) und P_y ($\varepsilon_y \mid 0,5 \cdot \gamma_{yx}$) in das ε - $\gamma/2$ -Koordinatensystem unter Berücksichtigung der Vorzeichenregelung für Schiebungen.



Da die x- und die y-Richtung einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser liegen. Die Strecke P_xP_y schneidet die ε -Achse im Kreismittelpunkt ε_M . Kreis um ε_M durch die Bildpunkte P_x und P_y ist der gesuchte Mohr'sche Verformungskreis (siehe Abbildung).

Bildpunkt $P_{x'}$, welcher die Verformungsgrößen in x' -Richtung (Messrichtung des DMS) als Bezugsrichtung repräsentiert, erhält man durch Abtragen des Richtungswinkels $2 \cdot 15^\circ$ ausgehend vom Bildpunkt P_x (gleicher Drehsinn zum Lageplan, also im Gegenuhrzeigersinn).

Für den Mittelpunkt und den Radius des Mohr'schen Verformungskreises erhält man:

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{3,050 \% - 0,915 \%}{2} = 1,068 \%$$

$$R = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_M)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{(3,050 - 1,068)^2 + \left(\frac{1,097}{2}\right)^2} \% = 2,056 \%$$

Für den Winkel α folgt:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-\gamma_{xy}/2}{\varepsilon_x - \varepsilon_M}\right) = \arctan\left(\frac{-1,097 \% / 2}{3,050 \% - 1,068 \%}\right) = -15,47^\circ$$

Damit folgt für den Winkel β :

$$\beta = |\alpha| + 2 \cdot 15^\circ = 15,47^\circ + 30^\circ = 45,47^\circ$$

Berechnung der Dehnung $\varepsilon_{x'}$ in Messrichtung des DMS

Aus dem Mohr'schen Verformungskreis erhält man für die Dehnungen $\varepsilon_{x'}$ in Messrichtung des DMS:

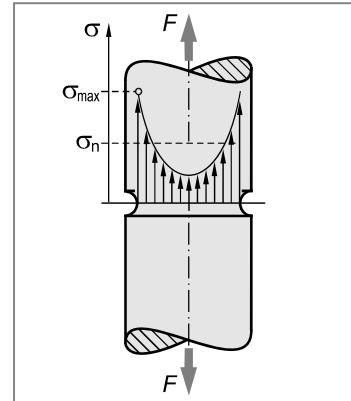
$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_M + R \cdot \cos \beta = 1,068 + 2,056 \cdot \cos 45,47^\circ = 2,510 \%$$

7 Kerbwirkung

7.1 Formelsammlung zur Kerbwirkung

Formzahl

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} \quad \text{bzw. } \alpha_k = \frac{\tau_{\max}}{\tau_n} \quad \text{Definition der Formzahl}$$



Bauteilverhalten spröder Werkstoffe

$$\sigma_n \leq \frac{R_m}{\alpha_k \cdot S_B} \quad \text{Festigkeitsbedingung für gekerbte Bauteile aus spröden Werkstoffen}$$

Bauteilverhalten duktiler Werkstoffe

Äußere Beanspruchung bei Fließbeginn eines gekerbten Bauteils¹⁾

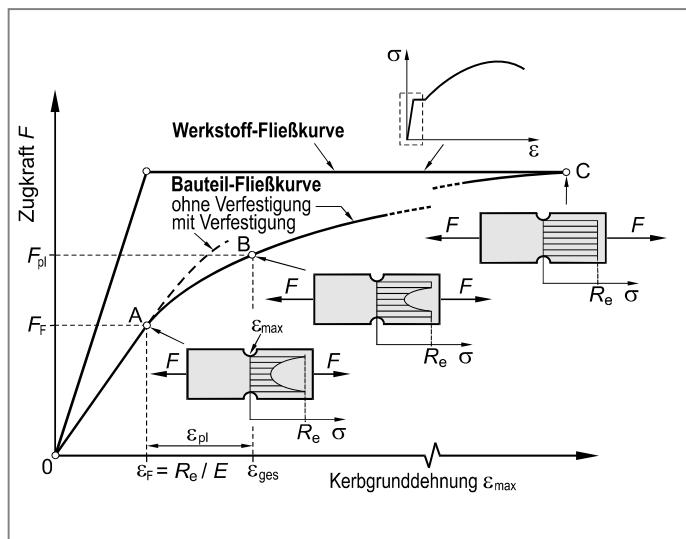
$$F_F = \frac{R_e}{\alpha_k} \cdot A_n$$

Äußere Beanspruchung mit Erreichen einer vorgegebenen plastischen Verformung¹⁾

$$F_{pl} = n_{pl} \cdot F_F$$

Plastische Stützziffer

$$n_{pl} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ges}}{\varepsilon_F}} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_F}}$$



¹⁾ An die Stelle der (Zug-)Kraft F können auch andere äußere Belastungsgrößen wie zum Beispiel Druckkraft F_d , Biegemoment M_b , Torsionsmoment M_t oder Innendruck p_i treten.

7.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 7.1

a) Ermittlung der Verhältniszahlen

$$\frac{D}{d} = \frac{50}{40} = 1,25$$

$$\frac{R}{d} = \frac{5}{40} = 0,125$$

Damit entnimmt man einem geeigneten Formzahldiagramm:

Stab 1: $\alpha_{kz} = 2,03$

Stab 2: $\alpha_{kb} = 1,78$

Stab 3: $\alpha_{kt} = 1,40$

b) Berechnung der Nennspannungen und der maximalen Spannungen

Stab 1 :

$$\sigma_{zn} = \frac{F}{A_n} = \frac{500\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (40 \text{ mm})^2} = 397,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{z\max} = \alpha_{kz} \cdot \sigma_{zn} = 2,03 \cdot 397,9 \text{ N/mm}^2 = 807,7 \text{ N/mm}^2$$

Stab 2 :

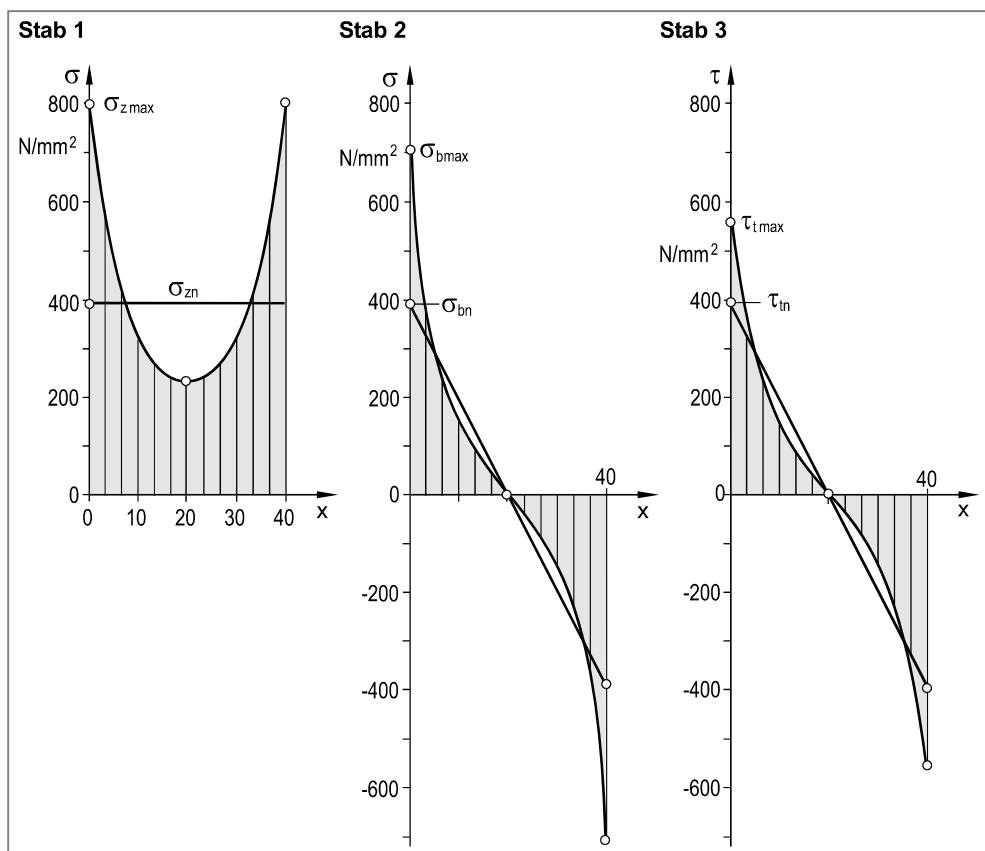
$$\sigma_{bn} = \frac{M_b}{W_{bn}} = \frac{2\,500\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (40 \text{ mm})^3} = 397,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{b\max} = \alpha_{kb} \cdot \sigma_{bn} = 1,78 \cdot 397,9 \text{ N/mm}^2 = 708,2 \text{ N/mm}^2$$

Stab 3 :

$$\tau_{tn} = \frac{M_t}{W_{tn}} = \frac{5\,000\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (40 \text{ mm})^3} = 397,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{t\max} = \alpha_{kb} \cdot \tau_{tn} = 1,40 \cdot 397,9 \text{ N/mm}^2 = 557,0 \text{ N/mm}^2$$

Spannungsverläufe

Lösung zu Aufgabe 7.2

Berechnung der maximalen Spannung mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes
(einachsiger Spannungszustand)

$$\sigma_{\max} = E \cdot \varepsilon_l = 203\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,001 = 203 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Nennspannung

$$\sigma_n = \frac{F}{A_n} = \frac{100\,000 \text{ N}}{(150\text{mm} - 15 \text{ mm}) \cdot 10 \text{ mm}} = 74,07 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Formzahl α_k

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} = \frac{203 \text{ N/mm}^2}{74,07 \text{ N/mm}^2} = 2,74$$

Überprüfung der Lösung mit Hilfe eines Formzahldiagrammes

Aus einem geeigneten Formzahldiagramm entnimmt man mit $a = 7,5 \text{ mm}$; $b = 70 \text{ mm}$ und $a/b = 0,1$: $\alpha_k = 2,74$

Lösung zu Aufgabe 7.3

- a) Berechnung der maximalen Spannung mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes
(einachsiger Spannungszustand)

$$\sigma_{\max} = E \cdot \varepsilon_l = 210\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,001042 = 218,8 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Nennspannung

$$\sigma_n = \frac{F}{b_2 \cdot t} = \frac{25\,000 \text{ N}}{40 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm}} = 125 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Formzahl α_k

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} = \frac{218,8 \text{ N/mm}^2}{125 \text{ N/mm}^2} = 1,75$$

- b) Festigkeitsbedingung (Fließen)

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{\max}} = \frac{430 \text{ N/mm}^2}{218,8 \text{ N/mm}^2} = 1,97 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

- c) Fließbedingung

$$\sigma_{\max} = R_e$$

$$\sigma_n \cdot \alpha_k = R_e$$

$$\frac{F_F}{b_2 \cdot t} \cdot \alpha_k = R_e$$

$$F_F = \frac{b_2 \cdot t \cdot R_e}{\alpha_k} = \frac{40 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm} \cdot 430 \text{ N/mm}^2}{1,75} = 49\,143 \text{ N}$$

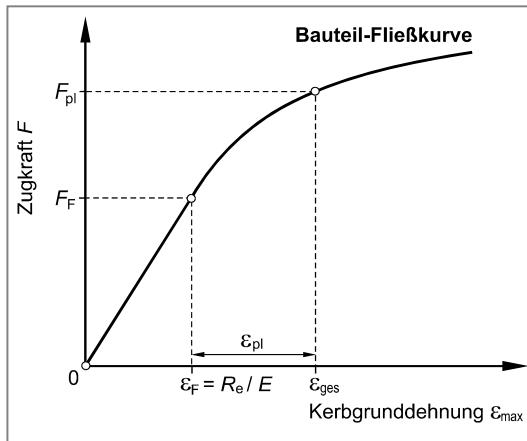
- d) Berechnung der plastischen Stützziffer n_{pl}

$$n_{pl} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ges}}{\varepsilon_F}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ges}}{R_e / E}} = \sqrt{\frac{0,003}{430 \text{ N/mm}^2 / 210\,000 \text{ N/mm}^2}} = 1,21$$

Weiterhin gilt:

$$n_{pl} = \frac{F_{pl}}{F_F}$$

$$F_{pl} = n_{pl} \cdot F_F = 1,21 \cdot 49\,143 \text{ N} = 59\,484 \text{ N}$$



e) Berechnung des vollplastischen Zustandes

Ein vollplastischer Zustand tritt ein, sobald die Nennspannung die Streckgrenze erreicht:

$$\sigma_n = R_e$$

$$\frac{F_{vpl}}{b_2 \cdot t} = R_e$$

$$F_{vpl} = b_2 \cdot t \cdot R_e = 40 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm} \cdot 430 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{86000 \text{ N}}$$

Lösung zu Aufgabe 7.4

- a) Berechnung der Verlängerung Δl_1 der Schraube mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (einachsiger Spannungszustand)

$$\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$$

$$\frac{F_V}{A_1} = E \cdot \frac{\Delta l_1}{l_1}$$

$$\Delta l_1 = \frac{4 \cdot F_V \cdot l_1}{\pi \cdot d_1^2 \cdot E} = \frac{4 \cdot 24000 \text{ N} \cdot 128 \text{ mm}}{\pi \cdot (12 \text{ mm})^2 \cdot 210000 \text{ N/mm}^2} = 0,129 \text{ mm}$$

- Berechnung der Verkürzung Δl_2 der Hülse mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (einachsiger Spannungszustand)

$$\sigma_2 = E \cdot \varepsilon_2$$

$$\frac{F_V}{A_2} = E \cdot \frac{\Delta l_2}{l_2}$$

$$\Delta l_2 = \frac{4 \cdot F_V \cdot l_2}{\pi \cdot (d_a^2 - d_i^2) \cdot E} = \frac{4 \cdot 24000 \text{ N} \cdot 84 \text{ mm}}{\pi \cdot (30^2 - 24^2) \text{ mm}^2 \cdot 210000 \text{ N/mm}^2} = 0,038 \text{ mm}$$

Berechnung der Zugkraft bei Fließbeginn der Schraube

$$\sigma = R_{p0,2}$$

$$\frac{F_{FB1}}{A_1} = R_{p0,2}$$

$$F_{FB1} = R_{p0,2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 = 490 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (12 \text{ mm})^2 = 55418 \text{ N}$$

Berechnung der Druckkraft bei Fließbeginn der Hülse

$$\sigma = R_e$$

$$\frac{F_{FB2}}{A_2} = R_e$$

$$F_{FB2} = R_e \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2) = 260 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (30^2 - 24^2) \text{ mm}^2 = 66162 \text{ N}$$

Bei einer Steigerung der Vorspannkraft plastifiziert die **Schraube** zuerst.

- b) Berechnung der Lastspannungen

$$\sigma_z = \frac{F_V}{A_1} = \frac{4 \cdot F_V}{\pi \cdot d_1^2} = \frac{4 \cdot 24000 \text{ N}}{\pi \cdot (12 \text{ mm})^2} = 212,2 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d_1^3}$$

Festigkeitsbedingung (Fließen)

$$\sigma_{VSH} = \frac{2}{3} \cdot R_{p0,2}$$

Die Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese kann unmittelbar aus Gleichung 6.17 (Zugbeanspruchung mit überlagerter Torsion, siehe Lehrbuch) errechnet werden:

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \cdot \tau_t^2}$$

Damit folgt aus der Festigkeitsbedingung für die Torsionsschubspannung τ_t :

$$\begin{aligned}\sqrt{\sigma_z^2 + 4 \cdot \tau_t^2} &= \frac{2}{3} \cdot R_{p0,2} \\ \tau_t &= \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3} \cdot R_{p0,2}\right)^2 - \sigma_z^2}{4}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3} \cdot 490 \text{ N/mm}^2\right)^2 - (212,2 \text{ N/mm})^2}{4}} = 124,18 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Berechnung des Torsionsmomentes M_t

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d_1^3}$$

$$M_t = \frac{\pi \cdot d_1^3}{16} \cdot \tau_t = \frac{\pi \cdot (12 \text{ mm})^3}{16} \cdot 124,18 \text{ N/mm}^2 = 42132 \text{ Nmm}$$

Berechnung des Anzugsmomentes M_A

$$M_A = \frac{M_t}{0,4} = \frac{42132 \text{ Nmm}}{0,4} = 105330 \text{ Nmm} = \mathbf{105,33 \text{ Nm}}$$

c) Ermittlung der Verhältniszahlen

$$\frac{d}{D} = \frac{4,5}{30} = 0,15$$

Damit entnimmt man dem gegebenen Formzahlendiagramm:

$$\alpha_{kz} = 2,70$$

Ermittlung der plastischen Stützziffer n_{pl}

$$n_{pl} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ges}}{\varepsilon_F}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ges}}{R_e/E}} = \sqrt{\frac{0,005}{260 \text{ N/mm}^2 / 210000 \text{ N/mm}^2}} = 2,0096 \approx 2,0$$

Berechnung der Kraft F_F bei Fließbeginn

$$\sigma_{max} = R_c$$

$$\frac{F_F}{A_n} \cdot \alpha_k = R_c$$

$$\begin{aligned}F_F &= \frac{R_c \cdot A_n}{\alpha_k} = \frac{R_c \cdot (\pi(D-s)-d) \cdot s}{\alpha_k} \\ &= \frac{260 \text{ N/mm}^2 \cdot (\pi \cdot (30 \text{ mm} - 3 \text{ mm}) - 4,5 \text{ mm}) \cdot 3 \text{ mm}}{2,70} = 23204 \text{ N}\end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$n_{\text{pl}} = \frac{F_{\text{pl}}}{F_F}$$

$$F_{\text{pl}} = n_{\text{pl}} \cdot F_F = 2,00 \cdot 23\,204 \text{ N} = \mathbf{46\,408 \text{ N}}$$

Wird eine Sicherheit von $S_{\text{pl}} = 1,5$ gefordert, dann ist die Beanspruchung auf $F_{\text{zul}} = F_{\text{pl}} / S_{\text{pl}} = 46408 / 1,5 = \mathbf{30939 \text{ N}}$ zu begrenzen. Da die Betriebsbeanspruchung $F = 36500 \text{ N}$ beträgt, ist ein **sicherer Betrieb nicht möglich**.

Lösung zu Aufgabe 7.5

a) Ermittlung der Formzahl α_k

$$a = 10 \text{ mm}$$

$$b = 30 \text{ mm}$$

$$a/b = 0,333$$

Damit entnimmt man einem geeigneten Formzahldiagramm:

$$\alpha_k = 2,32$$

Fließbedingung

$$\sigma_{\max} = R_e$$

$$\sigma_n \cdot \alpha_k = R_e$$

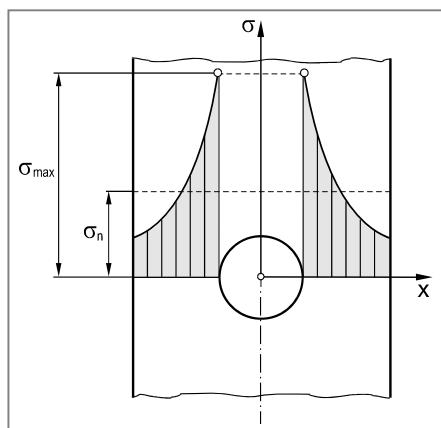
$$\frac{F_F}{A_n} \cdot \alpha_k = R_e$$

$$F_F = \frac{R_e \cdot (b - d) \cdot t}{\alpha_k} = \frac{490 \text{ N/mm}^2 \cdot (60 - 20) \text{ mm} \cdot 4 \text{ mm}}{2,32} = 33793 \text{ N}$$

b) Darstellung des Spannungsverlaufes

$$\sigma_n = \frac{F_F}{A_n} = \frac{33793 \text{ N}}{(60 - 20) \text{ mm} \cdot 4 \text{ mm}} = 211,2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\max} = R_e = 490 \text{ N/mm}^2$$



c) Berechnung der plastischen Stützziffer n_{pl}

$$n_{pl} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ges}}{\varepsilon_F}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ges}}{R_e / E}} = \sqrt{\frac{0,005}{490 \text{ N/mm}^2 / 210000 \text{ N/mm}^2}} = 1,464$$

Berechnung der Kraft F_{zul} mit Erreichen einer Gesamtdehnung von $\varepsilon_{ges} = 0,5\%$

$$n_{pl} = \frac{F_{pl}}{F_F}$$

$$F_{pl} = n_{pl} \cdot F_F = 1,46 \cdot 33\,793 \text{ N} = 49\,468 \text{ N}$$

Damit folgt für die zulässige Kraft:

$$F_{zul} = \frac{F_{pl}}{S_{pl}} = \frac{49\,468 \text{ N}}{1,5} = \mathbf{32\,979 \text{ N}}$$

- d) Mit einem Bruch muss gerechnet werden, sobald die Nennspannung σ_n die Zugfestigkeit R_m erreicht:

$$\sigma_n = R_m$$

$$\frac{F_B}{A_n} = R_m$$

$$F_B = R_m \cdot A_n = 710 \text{ N/mm}^2 \cdot (60 - 20) \text{ mm} \cdot 4 \text{ mm} = \mathbf{113\,600 \text{ N}}$$

Lösung zu Aufgabe 7.6

a) Berechnung der Lastspannungen an der Messstelle der DMS (Außenoberfläche)

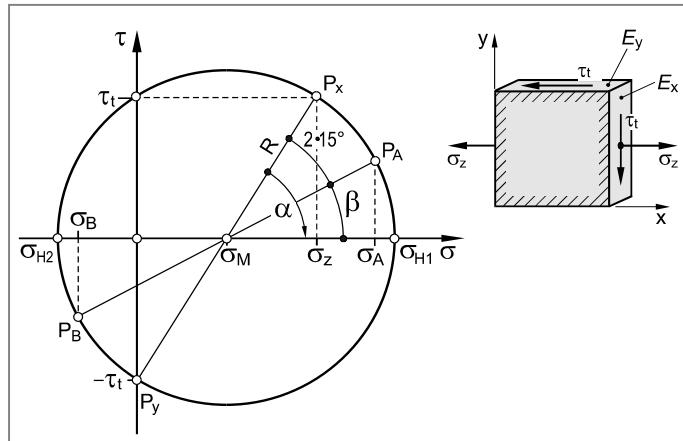
$$\sigma_z = \frac{F_z}{A} = \frac{F_z}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{30\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (18 \text{ mm})^2} = 117,89 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{100\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (18 \text{ mm})^3} = 87,33 \text{ N/mm}^2$$

Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises

Eintragen der Bildpunkte $P_x (\sigma_z | \tau_t)$ und $P_y (0 | -\tau_t)$ in das σ - τ -Koordinatensystem unter Beachtung der speziellen Vorzeichenregelung für Schubspannungen.

Bildpunkt P_x repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der x-Achse als Normalenvektor (Ebene E_x).



Bildpunkt P_y repräsentiert die Spannungskomponenten in der y-Achse als Normalenvektor (Ebene E_y). Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser liegen. Die Strecke $P_x P_y$ schneidet die σ -Achse im Kreismittelpunkt σ_M . Kreis um σ_M durch die Bildpunkte P_x oder P_y ist der gesuchte Mohr'sche Spannungskreis (siehe Abbildung).

Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Spannungskreises

$$\sigma_M = \frac{\sigma_z}{2} = \frac{117,89 \text{ N/mm}^2}{2} = 58,95 \text{ N/mm}^2$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \sqrt{(58,95)^2 + (87,33)^2} \text{ N/mm}^2 = 105,36 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Richtungswinkels α zwischen der x-Richtung und der ersten Hauptspannungsrichtung

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-\tau_t}{\sigma_z / 2}\right) = \arctan\left(\frac{-87,33 \text{ N/mm}^2}{58,95 \text{ N/mm}^2}\right) = -55,98^\circ$$

Damit folgt für den Richtungswinkel β zwischen der Messrichtung von DMS A und der ersten Hauptspannungsrichtung:

$$\beta = \alpha - 2 \cdot 15^\circ = 55,98^\circ - 30^\circ = 25,98^\circ$$

Berechnung der Normalspannungskomponenten σ_A und σ_B in Schnittebenen mit der A- bzw. B-Richtung (Messrichtung der DMS) als Normalenvektor

$$\sigma_A = \frac{\sigma_z}{2} + R \cdot \cos \beta = \frac{117,89 \text{ N/mm}^2}{2} + 105,36 \text{ N/mm}^2 \cdot \cos 25,98^\circ = 153,66 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{\sigma_z}{2} - R \cdot \cos \beta = \frac{117,89 \text{ N/mm}^2}{2} - 105,36 \text{ N/mm}^2 \cdot \cos 25,98^\circ = -35,77 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Dehnungen in A- und B-Richtung (ε_A und ε_B) mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

$$\varepsilon_A = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_A - \mu \cdot \sigma_B) = \frac{153,66 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot (-35,77) \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2}$$

$$= 0,000783 = 0,783 \%$$

$$\varepsilon_B = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_B - \mu \cdot \sigma_A) = \frac{-35,77 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 153,66 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2}$$

$$= -0,000389 = -0,389 \%$$

Alternative Lösung mit Hilfe des Mohr'schen Verformungskreises

Berechnung der Dehnungen ε_x bzw. ε_y in x- bzw. y-Richtung unter Wirkung von F_Z sowie der Schiebungen γ_{xy} bzw. γ_{yx} mit der x- bzw. y-Richtung als Bezugsrichtung

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{117,89 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,000561 = 0,561 \%$$

$$\varepsilon_y = -\mu \cdot \varepsilon_x = -0,30 \cdot 0,000561 = -0,000168 = -0,168 \%$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\tau_t}{G} = \frac{\tau_t}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}} = \frac{87,33 \text{ N/mm}^2}{\frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)}} = 0,001081 = 1,081 \%$$

$$\gamma_{yx} = -\gamma_{xy} = -1,081 \%$$

Bei γ_{xy} handelt es sich gemäß der speziellen Vorzeichenregelung um eine Winkelvergrößerung, bei γ_{yx} hingegen um eine Winkelverkleinerung.

Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises

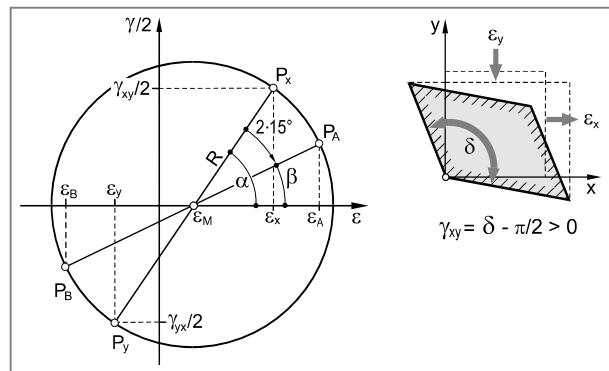
Zur Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises benötigt man die Verformungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen. Bekannt sind die Verformungen mit der x- bzw. y-Richtung als Bezugsrichtung.

Einzeichnen der entsprechenden Bildpunkte P_x ($\varepsilon_x \mid 0,5 \cdot \gamma_{xy}$) und P_y ($\varepsilon_y \mid 0,5 \cdot \gamma_{yx}$) in das ε - $\gamma/2$ -Koordinatensystem.

Da die x- und die y-Richtung einen Winkel von 90° zueinander einschließen, liegen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser. Damit ist der Mohr'sche Verformungskreis festgelegt (siehe Abbildung).

Bildpunkt P_A , welcher die Verformungen in A-Richtung (Messrichtung des DMS A) als Bezugsrichtung repräsentiert, erhält man durch Abtragen des Richtungswinkels $2 \cdot 15^\circ$, ausgehend vom Bildpunkt P_x (gleicher Drehsinn zum Lageplan, also im Uhrzeigersinn).

Für den Mittelpunkt und den Radius des Mohr'schen Verformungskreises erhält man:



$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{0,561\% - 0,168\%}{2} = 0,196\%$$

$$R = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_M)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{(0,561 - 0,196)^2 + \left(\frac{1,081}{2}\right)^2} \% = 0,652\%$$

Für den Winkel α folgt:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\gamma_{xy}/2}{\varepsilon_x - \varepsilon_M}\right) = \arctan\left(\frac{1,081\%/2}{0,561\% - 0,196\%}\right) = 55,98^\circ$$

Damit folgt für den Winkel β :

$$\beta = \alpha - 2 \cdot 15^\circ = 55,98^\circ - 30^\circ = 25,98^\circ$$

Berechnung der Dehnungen ε_A und ε_B in A- bzw. B-Richtung

Aus dem Mohr'schen Verformungskreis erhält man für die Dehnungen ε_A und ε_B :

$$\varepsilon_A = \varepsilon_M + R \cdot \cos \beta = 0,196 + 0,652 \cdot \cos 25,98^\circ = 0,783\%$$

$$\varepsilon_B = \varepsilon_M - R \cdot \cos \beta = 0,196 - 0,652 \cdot \cos 25,98^\circ = -0,389\%$$

b) Ermittlung der Verhältniszahlen

$$\frac{D}{d} = \frac{24}{18} = 1,33$$

$$\frac{R}{d} = \frac{5}{18} = 0,28$$

Damit entnimmt man einem geeigneten Formzahldiagramm:

$$\alpha_{kz} = 1,40$$

$$\alpha_{kt} = 1,16$$

Nennspannungen auf Aufgabenteil a):

$$\sigma_{\text{zn}} = 117,89 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\text{tn}} = 87,33 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der maximalen Spannungen

$$\sigma_{z\max} = \sigma_{\text{zn}} \cdot \alpha_{kz} = 117,89 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,40 = 165,05 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{t\max} = \tau_{\text{tn}} \cdot \alpha_{kt} = 87,33 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,16 = 101,30 \text{ N/mm}^2$$

Da es sich um eine Zugbeanspruchung mit überlagerter Torsion handelt, ergibt sich die Vergleichsspannung nach der SH zu (siehe Gleichung 6.17 im Lehrbuch):

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_{z\max}^2 + 4 \cdot \tau_{t\max}^2} = \sqrt{165,05^2 + 4 \cdot 101,30^2} = 261,32 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

$$\sigma_{VSH} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{VSH}} = \frac{510 \text{ N/mm}^2}{261,32 \text{ N/mm}^2} = 1,95 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

c) Aus der Festigkeitsbedingung gemäß Aufgabenteil b) folgt:

$$\sigma_{VSH} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sqrt{\sigma_{z\max}^2 + 4 \cdot \tau_{t\max}^2} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

Auflösen nach $\tau_{t\max}$ ergibt:

$$\tau_{t\max} = \sqrt{\frac{\left(\frac{R_{p0,2}}{S_F}\right)^2 - \sigma_{z\max}^2}{4}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{510}{1,95}\right)^2 - 165,05^2}{4}} \text{ N/mm}^2 = 169,91 \text{ N/mm}^2$$

Damit folgt für das Torsionsmoment M_t^* :

$$\tau_{t\max} = \frac{M_t^*}{W_{tn}} \cdot \alpha_{kt}$$

$$M_t^* = \frac{\tau_{t\max}}{\alpha_{kt}} \cdot W_{tn} = \frac{\tau_{t\max}}{\alpha_{kt}} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot d^3 = \frac{169,91 \text{ N/mm}^2}{1,16} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot (18 \text{ mm})^3 = 167727 \text{ Nmm}$$

$$M_t^* = 167,7 \text{ Nm}$$

Lösung zu Aufgabe 7.7

- a) Der Stab wird auf (gerade) Biegung beansprucht. Einspannquerschnitt ist höchst beansprucht.

Berechnung der Lastspannung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{F_1 \cdot l}{\frac{\pi \cdot D^3}{32}} = \frac{1250 \text{ N} \cdot 420 \text{ mm}}{\frac{\pi \cdot (32 \text{ mm})^3}{32}} = 163,2 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Längenänderung (Hooke'sches Gesetz für den einachsigen Spannungszustand)

$$\sigma_b = E \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_b}{E} = \frac{163,2 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,00078 = 0,78 \%$$

- b) Der Stab wird auf (gerade) Biegung und Torsion beansprucht. Einspannquerschnitt ist höchst beansprucht.

Berechnung der Lastspannungen

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{F_2 \cdot l}{\frac{\pi \cdot D^3}{32}} = \frac{2250 \text{ N} \cdot 420 \text{ mm}}{\frac{\pi \cdot (32 \text{ mm})^3}{32}} = 293,75 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{F_2 \cdot c}{\frac{\pi \cdot D^3}{16}} = \frac{2250 \text{ N} \cdot 120 \text{ mm}}{\frac{\pi \cdot (32 \text{ mm})^3}{16}} = 41,96 \text{ N/mm}^2$$

Da es sich um eine Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion handelt, ergibt sich die Vergleichsspannung nach der SH zu (siehe Gleichung 6.17 im Lehrbuch):

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{293,75^2 + 4 \cdot 41,96^2} = 305,50 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{VSH} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{VSH}} = \frac{490 \text{ N/mm}^2}{305,50 \text{ N/mm}^2} = 1,60 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

- c) Der Stab wird auf Torsion beansprucht. Einspannquerschnitt ist höchst beansprucht.

Berechnung der Nennspannung τ_{tn}

$$\tau_{tn} = \frac{M_t}{W_{tn}} = \frac{2 \cdot F_3 \cdot c}{\frac{\pi \cdot (D - 2 \cdot R)^3}{16}}$$

Ermittlung der Formzahl α_{kt}

$$\frac{R}{d} = \frac{3,2}{(32 - 2 \cdot 3,2)} = 0,125$$

$$\frac{D}{d} = \frac{32}{(32 - 2 \cdot 3,2)} = 1,25$$

Damit entnimmt man einem geeigneten Formzahldiagramm:

$$\alpha_{kt} = 1,40$$

Festigkeitsbedingung

$$\tau_{\text{max}} \leq \tau_{\text{zul}}$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\tau_{tf}}{S_F} \text{ mit } \tau_{tf} = \frac{R_e}{2}$$

$$\tau_{tn} \cdot \alpha_{kt} = \frac{R_e}{2 \cdot S_F}$$

$$\frac{2 \cdot F_3 \cdot c}{\frac{\pi}{16} \cdot (D - 2 \cdot R)^3} \cdot \alpha_{kt} = \frac{R_e}{2 \cdot S_F}$$

$$F_3 = \frac{R_e \cdot \pi \cdot (D - 2 \cdot R)^3}{64 \cdot S_F \cdot c \cdot \alpha_{kt}} = \frac{490 \text{ N/mm}^2 \cdot \pi \cdot (32 - 2 \cdot 3,2)^3 \text{ mm}^3}{64 \cdot 1,4 \cdot 120 \text{ mm} \cdot 1,40} = 1715,7 \text{ N}$$

d) Berechnung der plastischen Stützziffer n_{pl}

$$n_{pl} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_F}} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{R_e / E}} = \sqrt{1 + \frac{0,002}{490 \text{ N/mm}^2 / 210000 \text{ N/mm}^2}} = 1,363$$

Weiterhin gilt:

$$n_{pl} = \frac{F_{pl}}{F_F}$$

$$F_{pl} = n_{pl} \cdot F_F = n_{pl} \cdot F_3 \cdot S_F = 1,363 \cdot 1715,7 \text{ N} \cdot 1,4 = 3273,9 \text{ N}$$

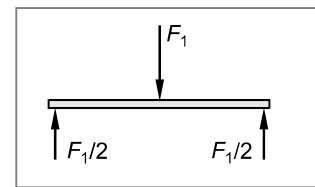
$$F_{pl\ zul} = \frac{F_{pl}}{S_{pl}} = \frac{3273,9 \text{ N}}{1,4} = 2338,5 \text{ N}$$

Lösung zu Aufgabe 7.8

a) Berechnung des Biegemomentes im Kerbgrund (Stelle I)

$$M_b = \frac{F_1}{2} \cdot a = \frac{1050 \text{ N}}{2} \cdot 100 \text{ mm} = 52500 \text{ Nmm} = 52,5 \text{ Nm}$$

b) Berechnung der Nennspannungen



$$\sigma_{bn} = \frac{M_b}{W_{bn}} = \frac{M_b}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{52500 \text{ N}}{\frac{\pi}{32} \cdot (20 \text{ mm})^3} = 66,85 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{tn} = \frac{M_t}{W_{tn}} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{72000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (20 \text{ mm})^3} = 45,84 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Formzahlen

$$\frac{D}{d} = \frac{30}{20} = 1,5$$

$$\frac{R}{d} = \frac{4}{20} = 0,2$$

Damit entnimmt man geeigneten Formzahldiagrammen:

$$\alpha_{kz} = 1,56$$

$$\alpha_{kb} = 1,42$$

$$\alpha_{kt} = 1,21$$

Berechnung der maximalen Spannungen

$$\sigma_{b\max} = \sigma_{bn} \cdot \alpha_{kb} = 66,85 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,42 = 94,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{t\max} = \tau_{tn} \cdot \alpha_{kt} = 45,84 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,21 = 55,5 \text{ N/mm}^2$$

Da es sich um eine Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion handelt, ergibt sich die Vergleichsspannung nach der SH zu (siehe Gleichung 6.17 im Lehrbuch):

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_{b\max}^2 + 4 \cdot \tau_{t\max}^2} = \sqrt{94,9^2 + 4 \cdot 55,5^2} = 146,0 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{VSH} = \frac{R_e}{S_F} \text{ bzw. } \frac{R_m}{S_B}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{VSH}} = \frac{340 \text{ N/mm}^2}{146,0 \text{ N/mm}^2} = 2,33 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_{VSH}} = \frac{620 \text{ N/mm}^2}{146,0 \text{ N/mm}^2} = 4,25 \quad (\text{ausreichend, da } S_B > 2,0)$$

c) Fließbedingung

$$\sigma_{VSH} = R_{p0,2}$$

$$\sqrt{\sigma_{b\max}^2 + 4 \cdot \tau_{t\max}^2} = R_{p0,2}$$

$$\tau_{t\max} = \sqrt{\frac{R_{p0,2}^2 - \sigma_{b\max}^2}{4}}$$

$$\frac{M_t^*}{W_{tn}} \cdot \alpha_{kt} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{R_{p0,2}^2 - \sigma_{b\max}^2}$$

$$M_t^* = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cdot \frac{1}{\alpha_{kt}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{R_{p0,2}^2 - \sigma_{b\max}^2} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{(20 \text{ mm})^3}{1,21} \cdot \sqrt{900^2 - 94,9^2} \text{ N/mm}^2 \\ = 580922 \text{ Nmm} = \mathbf{580,9 \text{ Nm}}$$

d) Zuordnung der Dehnungsanzeigen zu den einzelnen Messstellen

Belastung	Messstelle				
	DMS A	DMS B	DMS C	DMS D	DMS E
F_1	0 ¹⁾	0 ¹⁾	0 ¹⁾	ε_{bD}	$\varepsilon_{bE} = -\varepsilon_{bD}$
F_2	ε_{zA}	ε_{zB}	$\varepsilon_{zC} = -\mu \cdot \varepsilon_{zA}$	$\varepsilon_{zD} = \varepsilon_{zA}$	$\varepsilon_{zE} = \varepsilon_{zA}$
M_t	0	ε_{tB}	0	0	0

¹⁾ neutrale Faser

Dehnungsmessstreifen A (DMS A) wird nur durch die Zugkraft F_2 beansprucht (siehe Tabelle). Es gilt daher:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_A$$

$$\frac{F_2}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = E \cdot \varepsilon_A$$

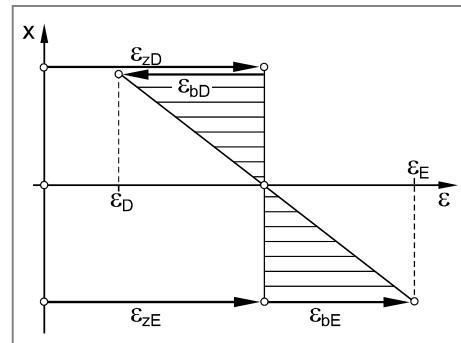
$$F_2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot E \cdot \varepsilon_A = \frac{\pi}{4} \cdot (20 \text{ mm})^2 \cdot 205000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,0013 = \mathbf{83723 \text{ N}}$$

- e) Die Dehnungsmessstreifen D und E verformen sich durch die Beanspruchung aus F_1 (Biegung) und F_2 (Zug). Das Torsionsmoment M_t hat keinen Einfluss auf ihre Dehnungsanzeige. Die Verformungen durch die einzelnen Beanspruchungen können linear superponiert werden.

Es gilt:

$$\varepsilon_E = \varepsilon_{zE} + \varepsilon_{bE} = \varepsilon_{zA} + \varepsilon_{bE} \quad \text{und} \quad (1)$$

$$\varepsilon_D = \varepsilon_{zD} + \varepsilon_{bD} = \varepsilon_{zA} - \varepsilon_{bE} \quad (2)$$



Subtrahiert man Gleichung 2 von Gleichung 1, dann folgt für die Dehnung ε_{bE} aufgrund der Biegebeanspruchung durch F_1 :

$$\varepsilon_{bE} = \frac{\varepsilon_E - \varepsilon_D}{2} = \frac{1,55\% - 1,05\%}{2} = 0,25\%$$

Berechnung der Biegespannung (Hooke'sches Gesetz für den einachsigen Spannungszustand):

$$\sigma_b = E \cdot \varepsilon_{bE}$$

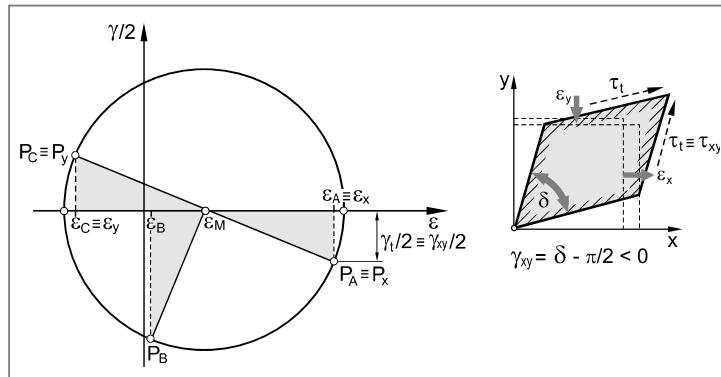
$$\frac{M_b}{W_b} = E \cdot \varepsilon_{bE}$$

$$\frac{F_1}{2} \cdot c = \frac{\pi}{32} \cdot d^3 \cdot E \cdot \varepsilon_{bE}$$

$$F_1 = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d^3}{c} \cdot E \cdot \varepsilon_{bE} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(20\text{ mm})^3}{50\text{ mm}} \cdot 205\,000\text{ N/mm}^2 \cdot 0,00025 = 1610,1\text{ N}$$

- f) Es liegt eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette vor. Daher kann der Mohr'sche Verformungskreis entsprechend Kapitel 4.4.2 (siehe Lehrbuch) auf einfache Weise konstruiert werden.

Schiebung $\gamma_{xy} \equiv \gamma$ mit der x-Richtung als Bezugsrichtung kann nur durch das Torsionsmoment M_t , d. h. durch die Torsionsschubspannung τ_t verursacht werden.



Berechnung der Schiebung $\gamma_{xy} \equiv \gamma$

$$\frac{\gamma_t}{2} = -(\varepsilon_M - \varepsilon_B) = -\left(\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} - \varepsilon_B\right)$$

$$\gamma_t = -(\varepsilon_A + \varepsilon_C - 2 \cdot \varepsilon_B) = -(1,30\% + (-0,39\%) - 2 \cdot 0,065\%) = -0,78\%$$

Elastizitätsgesetz für Schubbeanspruchung

$$\tau_t = G \cdot \gamma_t = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \gamma_t = \frac{205\,000\text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot (-0,00078) = -61,5\text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Torsionsmomentes M_t

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

$$M_t = |\tau_t| \cdot W_t = \tau_t \cdot \frac{\pi}{16} \cdot d^3 = 61,5\text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{16} \cdot (20\text{ mm})^3 = 96\,604\text{ Nmm} = 96,6\text{ Nm}$$

Die Schubspannung τ_t bzw. das Torsionsmoment M_t führen für $\gamma_{xy} (\equiv \gamma_t)$ zu einer Winkelverkleinerung entsprechend der Abbildung ($\gamma < 0$). Damit ist die Drehrichtung des Torsionsmomentes M_t bei Blick von rechts auf den Wellenzapfen im Uhrzeigersinn (also entsprechend der Richtung der eingezzeichneten Momentenpfeile in der Aufgabenstellung).

Alternative Lösungsmöglichkeit

Anstelle der Verwendung des Mohr'schen Verformungskreises kann die Schiebung $\gamma_{xy} (\equiv \gamma)$ auch durch Lösen eines linearen Gleichungssystems (siehe Gleichung 4.32 im Lehrbuch) ermittelt werden. Für die Dehnungen in Messrichtung der Dehnungsmessstreifen gilt:

$$\varepsilon_A = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (1)$$

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\beta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\beta \quad (2)$$

$$\varepsilon_C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\gamma - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\gamma \quad (3)$$

Zur Vereinfachung setzt man:

$$u = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \quad (4)$$

$$v = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \quad (5)$$

$$w = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (6)$$

mit $\alpha = 180^\circ$; $\beta = 135^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$ sowie $\varepsilon_A = 1,30\%$; $\varepsilon_B = 0,065\%$ und $\varepsilon_C = -0,39\%$ folgt aus den Gleichungen 1 bis 3:

$$1,300\% = u + v \cdot \cos 360^\circ - w \cdot \sin 360^\circ \quad (7)$$

$$0,065\% = u + v \cdot \cos 270^\circ - w \cdot \sin 270^\circ \quad (8)$$

$$-0,390\% = u + v \cdot \cos 180^\circ - w \cdot \sin 180^\circ \quad (9)$$

Damit ergibt sich das zu lösende lineare Gleichungssystem:

$$1,300\% = u + v \quad (10)$$

$$0,065\% = u + w \quad (11)$$

$$-0,390\% = u - v \quad (12)$$

Gleichung 10 und Gleichung 12 addiert:

$$u = 0,455\% \quad (13)$$

Aus Gleichung 11 folgt dann schließlich:

$$w = 0,065\% - 0,455\% = -0,39\%$$

Damit folgt für die Schiebung $\gamma_{xy} (\equiv \gamma_t)$:

$$\gamma_{xy} \equiv \gamma_t = 2 \cdot w = 2 \cdot (-0,39\%) = -0,78\%$$

g) Berechnung der Nennspannungen

$$\sigma_{zn} = \frac{F_2}{A_n} = \frac{F_2}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{83\,723 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (20 \text{ mm})^2} = 266,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bn} = \frac{M_b}{W_{bn}} = \frac{F_1 / 2 \cdot a}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{1610,1 \text{ N} / 2 \cdot 100 \text{ mm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (20 \text{ mm})^3} = 102,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{tn} = \frac{M_t}{W_{tn}} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{96\,604 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (20 \text{ mm})^3} = 61,5 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der maximalen Spannungen

$$\sigma_{z\max} = \sigma_{zn} \cdot \alpha_{kz} = 266,5 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,56 = 415,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{b\max} = \sigma_{bn} \cdot \alpha_{kb} = 102,5 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,42 = 145,6 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{t\max} = \tau_{tn} \cdot \alpha_{kt} = 61,5 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,21 = 74,4 \text{ N/mm}^2$$

Da es sich um eine Zug- und Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion handelt, ergibt sich die Vergleichsspannung nach der SH zu (siehe Gleichung 6.17 im Lehrbuch):

$$\begin{aligned}\sigma_{VSH} &= \sqrt{(\sigma_{z\max} + \sigma_{b\max})^2 + 4 \cdot \tau_{t\max}^2} = \sqrt{(415,7 + 145,6)^2 + 4 \cdot 74,4^2} \\ &= 580,69 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{VSH} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{VSH}} = \frac{900 \text{ N/mm}^2}{580,69 \text{ N/mm}^2} = 1,55 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Lösung zu Aufgabe 7.9

a) Berechnung der Zugspannung

$$\sigma_z = \frac{F_1}{A} = \frac{4 \cdot F_1}{\pi \cdot d_0^2} = \frac{4 \cdot 7860 \text{ N}}{\pi \cdot (10 \text{ mm})^2} = 100 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Verlängerung Δl der Schraube mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes
(einachsiger Spannungszustand)

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_l$$

$$\sigma_z = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\Delta l = \frac{\sigma_z}{E} \cdot l_0 = \frac{100 \text{ N/mm}^2}{210000 \text{ N/mm}^2} \cdot 50 \text{ mm} = 0,024 \text{ mm}$$

b) Berechnung der Torsionsschubspannung

$$\tau_t = \frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{11780 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (10 \text{ mm})^3} = 60 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Verdrehwinkels φ der Schraube

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l_0}{G \cdot I_p} = \frac{M_t \cdot l_0}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d^4} = \frac{11780 \text{ Nmm} \cdot 50 \text{ mm}}{\frac{210000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (10 \text{ mm})^4} = 0,00743$$

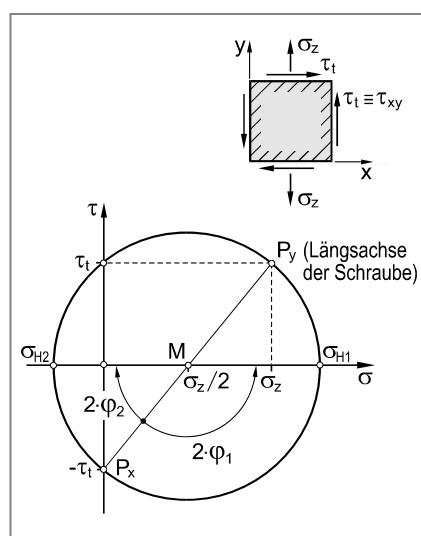
$$\varphi = 0,4256^\circ$$

c) Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises

Eintragen des Bildpunktes P_y ($\sigma_z \mid \tau_t$) und des Bildpunktes P_x ($0 \mid -\tau_t$) in das σ - τ -Koordinatensystem unter Beachtung der speziellen Vorzeichenregelung für Schubspannungen.

Bildpunkt P_x repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der x-Achse als Normalenvektor. Bildpunkt P_y repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der y-Achse als Normalenvektor.

Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser liegen. Die Strecke von P_x nach P_y schneidet die σ -Achse im Kreismittelpunkt M . Kreis um M durch die Bildpunkte P_x oder P_y ist der gesuchte Mohr'sche Spannungskreis (siehe Abbildung).



Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Spannungskreises

$$\sigma_M = \frac{\sigma_z}{2} = 50 \text{ N/mm}^2$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \sqrt{50^2 + 60^2} \text{ N/mm}^2 = 78,1 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2}

$$\sigma_{H1} = \sigma_M + R = 50 \text{ N/mm}^2 + 78,1 \text{ N/mm}^2 = 128,1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H2} = \sigma_M - R = 50 \text{ N/mm}^2 - 78,1 \text{ N/mm}^2 = -28,1 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der y-Achse (Schraubenlängsachse) und den Hauptspannungsrichtungen

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot (-60 \text{ N/mm}^2)}{0 - 100 \text{ N/mm}^2} \right) = -25,1^\circ$$

Der errechnete Winkel φ kann der Richtungswinkel zwischen der ersten *oder* der zweiten Hauptrichtung sein. Eine Entscheidung ist mit Hilfe von Tabelle 3.1 (siehe Lehrbuch) möglich. Da es sich um Fall 3 ($\sigma_x < \sigma_y$ und $\tau_{xy} < 0$) handelt, ist φ der Richtungswinkel zwischen der x-Richtung und der ersten Hauptspannungsrichtung. Dies geht auch aus dem Mohr'schen Spannungskreis hervor). Es gilt:

$$\varphi_2 = -25,1^\circ$$

Für den Richtungswinkel φ_2 folgt dann:

$$\varphi_1 = 64,9^\circ$$

d) Fließbedingung

$$\sigma_{VSH} = R_{p0,2}$$

Die Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese kann unmittelbar aus Gleichung 6.17 (Zugbeanspruchung mit überlagerter Torsion, siehe Lehrbuch) errechnet werden:

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \cdot \tau_{t2}^2}$$

Damit folgt aus der Festigkeitsbedingung für die Torsionsschubspannung τ_{t2} :

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 4 \cdot \tau_{t2}^2} = R_{p0,2}$$

$$\tau_{t2} = \sqrt{\frac{R_{p0,2}^2 - \sigma_z^2}{4}} = \sqrt{\frac{430^2 - 100^2}{4}} \text{ N/mm}^2 = 209,1 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Torsionsmomentes M_{t2}

$$\tau_{t2} = \frac{M_{t2}}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3}$$

$$M_{t2} = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cdot \tau_{t2} = \frac{\pi}{16} \cdot (10 \text{ mm})^3 \cdot 209,1 \text{ N/mm}^2 = 41060 \text{ Nmm} = \mathbf{41,06 \text{ Nm}}$$

e) Ermittlung der Formzahl

$$\frac{D}{d} = \frac{10}{7} = 1,43$$

$$\frac{R}{d} = \frac{1,5}{7} = 0,21$$

Damit entnimmt man einem geeigneten Formzahldiagramm:

$$\alpha_{kz} = \mathbf{1,75}$$

Festigkeitsbedingung (Fließen)

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\frac{F_2}{A_n} \cdot \alpha_{kz} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$F_2 = \frac{R_{p0,2}}{S_F} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \frac{1}{\alpha_{kz}} = \frac{430 \text{ N/mm}^2}{1,5} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (7 \text{ mm})^2 \cdot \frac{1}{1,75} = \mathbf{6304 \text{ N}}$$

f) Berechnung der plastischen Stützziffer n_{pl}

$$n_{pl} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_F}} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{R_{p0,2} / E}} = \sqrt{1 + \frac{0,003}{430 \text{ N/mm}^2 / 210000 \text{ N/mm}^2}} = 1,57$$

Berechnung der Kraft F_F bei Fließbeginn

$$\sigma_{\max} = R_{p0,2}$$

$$\frac{F_F}{A_n} \cdot \alpha_k = R_{p0,2}$$

$$F_F = \frac{R_{p0,2}}{\alpha_k} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{430 \text{ N/mm}^2}{1,75} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (7 \text{ mm})^2 = 9456 \text{ N} \quad (= S_F \cdot F_2)$$

Berechnung der Kraft F_{pl} mit Erreichen von ε_{pl}

$$n_{pl} = \frac{F_{pl}}{F_F}$$

$$F_{pl} = n_{pl} \cdot F_F = 1,57 \cdot 9456 \text{ N} = 14846 \text{ N}$$

Die zulässige Kraft ($S_{pl} = 1,5$) beträgt dann schließlich:

$$F_3 = \frac{F_{pl}}{S_{pl}} = \frac{14846 \text{ N}}{1,5} = \mathbf{9897 \text{ N}} \quad (= n_{pl} \cdot F_2)$$

Lösung zu Aufgabe 7.10

a) Berechnung des axialen Flächenmoments 2. Ordnung bezüglich der y-Achse

$$I_y = \frac{B \cdot B^3}{12} - \frac{(B-2s) \cdot (B-2s)^3}{12} + \frac{b \cdot b^3}{12} = \frac{80 \cdot 80^3}{12} \text{ mm}^4 - \frac{60 \cdot 60^3}{12} \text{ mm}^4 + \frac{30 \cdot 30^3}{12} \text{ mm}^4 \\ = 2400833 \text{ mm}^4$$

Berechnung des axialen Widerstandsmomentes bezüglich der y-Achse

$$W_{by} = \frac{I_y}{B/2} - \frac{2400833 \text{ mm}^4}{40 \text{ mm}} = 60020,8 \text{ mm}^3$$

Hinweis: Nur Flächenmomente dürfen addiert oder subtrahiert werden, Widerstandsmomente nicht.

- b) Möglicher Fließbeginn: Außenoberfläche des Vierkantprofilstabs oder Außenoberfläche des Vierkantrohres, da die Werkstoffe eine unterschiedliche Streckgrenze besitzen.

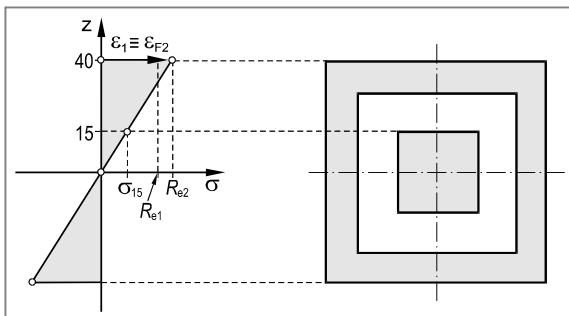
Die Dehnungsverteilung durch die Biegebeanspruchung ist bei elastischer Beanspruchung linear. Da die beiden Werkstoffe den gleichen E-Modul besitzen, ist gemäß $\sigma = E \cdot \varepsilon$ auch die Spannungsverteilung linear.

Berechnung der Spannung an der Stelle $z = 15 \text{ mm}$ für den Fall des Fließbeginns an der Außenoberfläche des Vierkantrohres d. h. $\sigma(z = 40 \text{ mm}) = R_{e2}$

Es gilt (Strahlensatz):

$$\sigma(z) = \frac{R_{e2}}{40 \text{ mm}} \cdot z$$

Mit $z = 15 \text{ mm}$ folgt:



$$\sigma(z = 15 \text{ mm}) = \frac{295 \text{ N/mm}^2}{40 \text{ mm}} \cdot 15 \text{ mm} = 110,63 \text{ N/mm}^2$$

Da $\sigma(z = 15 \text{ mm}) < R_{e1}$ plastifiziert das Vierkantrohr aus E295 (an seiner Außenoberfläche) zuerst.

Berechnung der Kraft F_F bei Fließbeginn durch Ansetzen der Festigkeitsbedingung

$$\sigma_b = R_{e2}$$

$$\frac{M_b}{W_{by}} = \frac{F_F \cdot a}{W_{by}} = R_{e2}$$

$$F_F = R_{e2} \cdot \frac{W_{by}}{a} = 295 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{60020,8 \text{ mm}^3}{2000 \text{ mm}} = 8853,1 \text{ N}$$

c) Berechnung von F_{pl}

Es gilt:

$$M = \int \sigma(z) \cdot z \, dA$$

mit:

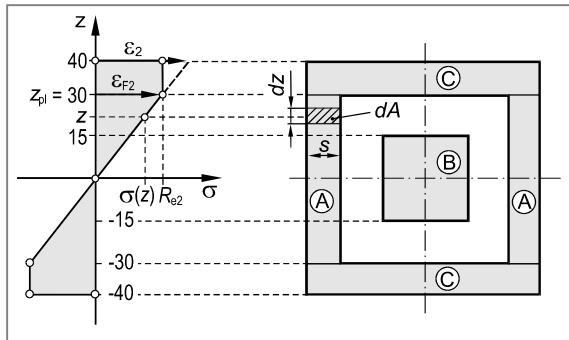
$$\sigma(z) = \frac{R_{e2} \cdot z}{y_{pl}} \text{ für } 0 \leq z \leq 30 \text{ mm}$$

$$\sigma(z) = R_{e2} \quad \text{für } 30 < z \leq 40 \text{ mm}$$

Das erforderliche Biegemoment M_{ges} bei Fließbeginn des Vierkantrohres errechnet sich zu:

$$M_{ges} = M_A + M_B + M_C$$

$$\begin{aligned} M_{ges} &= 2 \cdot 10 \int_{-30}^{30} \frac{R_{e2} \cdot z \cdot z}{z_{pl}} dz + 30 \int_{-15}^{15} \frac{R_{e2} \cdot z \cdot z}{z_{pl}} dz + 2 \cdot 80 \int_{30}^{40} R_{e2} \cdot z \, dz \\ &= 2 \cdot 10 \cdot \frac{295}{30} \int_{-30}^{30} z^2 dz + 30 \cdot \frac{295}{30} \int_{-15}^{15} z^2 dz + 2 \cdot 80 \cdot 295 \int_{30}^{40} z \, dz \\ &= 196,67 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[z^3 \right]_{-30}^{30} + 295 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[z^3 \right]_{-15}^{15} + 47200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[z^2 \right]_{30}^{40} \\ &= 3540000 \text{ Nmm} + 663750 \text{ Nmm} + 16520000 \text{ Nmm} \\ &= 20723750 \text{ Nmm} \end{aligned}$$



Die Kraft F_{pl} errechnet sich dann zu:

$$F_{pl} = \frac{M_{ges}}{a} = \frac{20723750 \text{ Nmm}}{2000 \text{ mm}} = 10361,9 \text{ N}$$

d) Berechnung der Kraft F_{pl} bei Fließbeginn des Vierkantprofilstabes

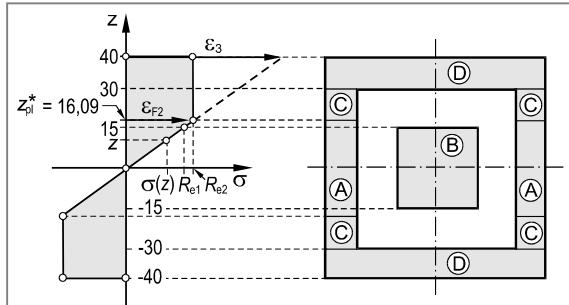
Der Vierkantstab beginnt zu fließen, sobald gilt:

$$\sigma(z = 15 \text{ mm}) = R_{e1}$$

Damit ergibt sich für z_{pl}^* unter Anwendung des Strahlensatzes (siehe Abbildung):

$$\frac{R_{e2}}{R_{e1}} = \frac{z_{pl}^*}{15 \text{ mm}}$$

$$z_{pl}^* = \frac{295 \text{ N/mm}^2}{275 \text{ N/mm}^2} \cdot 15 \text{ mm} = 16,09 \text{ mm}$$



Es gilt:

$$\sigma(z) = \frac{R_{e2}}{z_{pl}} \cdot z \quad \text{für } 0 \leq z \leq 16,09 \text{ mm} (= z_{pl}^*)$$

$$\sigma(z) = R_{e2} \quad \text{für } 16,09 < z \leq 40 \text{ mm}$$

Das erforderliche Biegemoment M_{ges} bei Fließbeginn des Vierkantprofilstabes errechnet sich zu:

$$M_{ges} = M_A + M_B + M_C + M_D$$

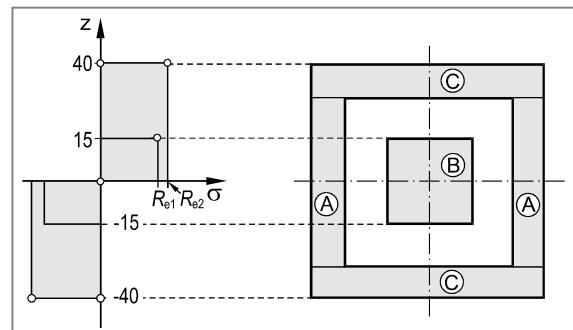
$$\begin{aligned} M_{ges} &= 2 \cdot 10 \int_{-16,09}^{16,09} \frac{R_{e2}}{z_{pl}} \cdot z \cdot z dz + 30 \int_{-15}^{15} \frac{R_{e2}}{z_{pl}} \cdot z \cdot z dz + 4 \cdot 10 \int_{16,09}^{30} R_{e2} \cdot z dz + 2 \cdot 80 \int_{30}^{40} R_{e2} \cdot z dz \\ &= 2 \cdot 10 \cdot \frac{295}{16,09} \int_{-16,09}^{16,09} z^2 dz + 30 \cdot \frac{295}{16,09} \int_{-15}^{15} z^2 dz + 4 \cdot 10 \cdot 295 \int_{16,09}^{30} z dz + 2 \cdot 80 \cdot 295 \int_{30}^{40} z dz \\ &= 366,69 \cdot \frac{1}{3} \left[z^3 \right]_{-16,09}^{16,09} + 550,03 \cdot \frac{1}{3} \left[z^3 \right]_{-15}^{15} + 11800 \cdot \frac{1}{2} \left[z^2 \right]_{16,09}^{30} + 47200 \cdot \frac{1}{2} \left[z^2 \right]_{30}^{40} \\ &= 1018293,2 \text{ Nmm} + 1237569,9 \text{ Nmm} + 3782560,2 \text{ Nmm} + 16520000 \text{ Nmm} \\ &= 22558423,3 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

Die Kraft F_{pl} errechnet sich dann zu:

$$F_{pl}^* = \frac{M_{ges}}{a} = \frac{22558423,3 \text{ Nmm}}{2000 \text{ mm}} = 11279,2 \text{ N}$$

e) **Berechnung der Kraft F_{vpl} mit Erreichen des vollplastischen Zustandes**

Im vollplastischen Zustand herrscht im gesamten Vierkantrohr die Spannung R_{e2} , im Vierkantprofilstab hingegen die Spannung R_{e1} . Damit errechnet sich das Biegemoment M_{vpl} für den vollplastischen Zustand zu:



$$M_{vpl} = M_{vplA} + M_{vplB} + M_{vplC}$$

$$\begin{aligned} M_{vpl} &= 2 \cdot 2 \cdot 10 \int_0^{30} R_{e2} \cdot z dz + 2 \cdot 30 \int_0^{15} R_{e1} \cdot z dz + 2 \cdot 80 \int_{30}^{40} R_{e2} \cdot z dz \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 295 \int_0^{30} z dz + 2 \cdot 30 \cdot 275 \int_0^{15} z dz + 2 \cdot 80 \cdot 295 \int_{30}^{40} z dz \\ &= 11800 \cdot \frac{1}{2} \left[z^2 \right]_0^{30} + 16500 \cdot \frac{1}{2} \left[z^2 \right]_0^{15} + 47200 \cdot \frac{1}{2} \left[z^2 \right]_{30}^{40} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 5\,310\,000 \text{ Nmm} + 1\,856\,250 \text{ Nmm} + 16\,520\,000 \text{ Nmm} \\
 &= 23\,686\,250 \text{ Nmm}
 \end{aligned}$$

Die Kraft F_{vpl} errechnet sich dann zu:

$$F_{vpl} = \frac{M_{vpl}}{a} = \frac{23\,686\,250 \text{ Nmm}}{2\,000 \text{ mm}} = \mathbf{11\,843,1 \text{ N}}$$

f) Bauteilfließkurve

Zur Ermittlung der Bauteilfließkurve muss zu den in Aufgabenteil b) bis e) berechneten Kräften die zugehörige Dehnung am Außenrand des Vierkantrohres ermittelt werden.

Vierkantrohr beginnt zu fließen (aus Aufgabenteil b):

$$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_{F2} = \frac{R_{e2}}{E_2} = \frac{295 \text{ N/mm}^2}{209\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,001411 = \mathbf{1,411 \%}$$

Vierkantrohr ist bis $z_{pl} = 30 \text{ mm}$ plastifiziert:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{F2}} = \frac{B/2}{z_{pl}}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{B/2}{z_{pl}} \cdot \varepsilon_{F2} = \frac{40}{30} \cdot 1,411 \% = \mathbf{1,881 \%}$$

Vierkantrohr ist bis $z_{pl}^* = 16,09 \text{ mm}$ plastifiziert (Vierkantprofilstab beginnt zu fließen):

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{F2}} = \frac{B/2}{z_{pl}}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{B/2}{z_{pl}} \cdot \varepsilon_{F2} = \frac{40}{30} \cdot 1,411 \% = \mathbf{1,881 \%}$$

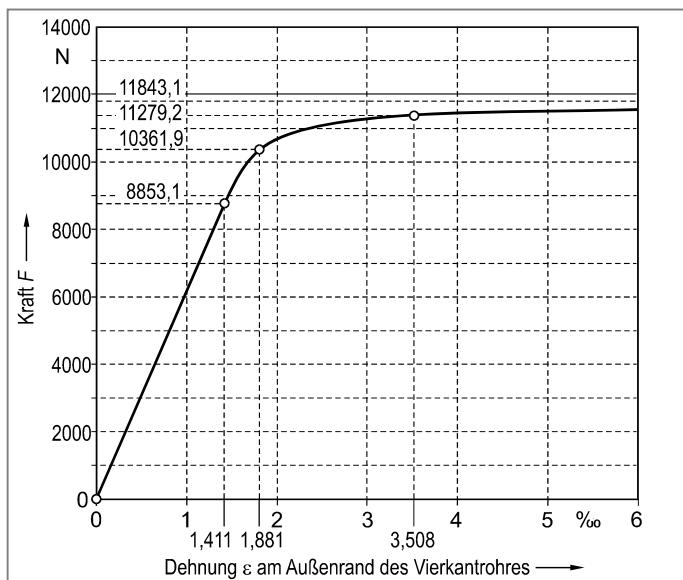
Vollplastischer Zustand:

$$\varepsilon_{vpl} = \infty$$

Wertetabelle und Diagramm für Bauteilfließkurve

$\varepsilon^{(1)} \%$	$F \text{ N}$
1,411	8853,1
1,881	10361,9
3,508	11279,2
∞	11843,1

¹⁾ Außenrand Vierkantrohr



Lösung zu Aufgabe 7.11

- a) Zuordnung der Dehnungsanzeigen zu den einzelnen Messstellen

Belastung	Messstelle				
	DMS A	DMS B	DMS C	DMS D	DMS E
F_1	ε_{zA}	ε_{zB}	$\varepsilon_{zC} = -\mu \cdot \varepsilon_{zA}$	$\varepsilon_{zD} = \varepsilon_{zA}$	$\varepsilon_{zE} = \varepsilon_{zA}$
F_2	0 ¹⁾	0 ¹⁾	0 ¹⁾	$\varepsilon_{bD} = -\varepsilon_{bE}$	ε_{bE}
M_t	0	ε_{tb}	0	0	0

1)¹⁾ neutrale Faser

Dehnungsmessstreifen A wird nur durch die Zugkraft F_1 beansprucht (siehe Tabelle). Es gilt daher:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_A$$

$$\frac{F_1}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = E \cdot \varepsilon_A$$

$$F_1 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot E \cdot \varepsilon_A = \frac{\pi}{4} \cdot (16 \text{ mm})^2 \cdot 205\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,0016 = 65\,948 \text{ N}$$

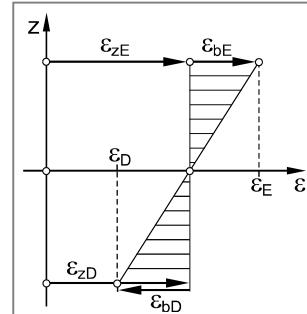
- b) Die Dehnungsmessstreifen D und E verformen sich nur durch die Beanspruchung aus F_1 (Zug) und M_b (Biegebeanspruchung infolge F_2). Die Verformungen durch die einzelnen Beanspruchungen können linear superponiert werden.

Es gilt:

$$\varepsilon_D = \varepsilon_{zD} + \varepsilon_{bD} = \varepsilon_{zA} - \varepsilon_{bE} \quad \text{und} \quad (1)$$

$$\varepsilon_E = \varepsilon_{zE} + \varepsilon_{bE} = \varepsilon_{zA} + \varepsilon_{bE} \quad (2)$$

Aus Gleichung 1 und 2 folgt für die Dehnung ε_{bE} aufgrund der Biegebeanspruchung durch F_2 :



$$\varepsilon_{bE} = \frac{\varepsilon_E - \varepsilon_D}{2} = \frac{1,80 \% - 1,40 \%}{2} = 0,20 \%$$

Berechnung der Biegespannung (Hooke'sches Gesetz für den einachsigen Spannungszustand):

$$\sigma_b = E \cdot \varepsilon_{bE}$$

$$\frac{M_b}{W_b} = E \cdot \varepsilon_{bE}$$

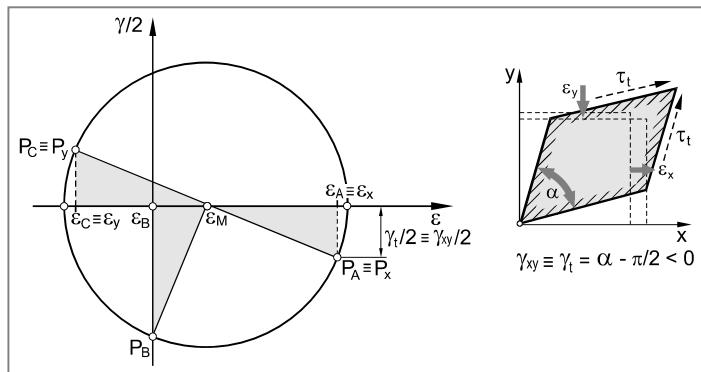
$$F_2 \cdot (a - b) = \frac{\pi}{32} \cdot d^3 \cdot E \cdot \varepsilon_{bE}$$

$$F_2 = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{d^3}{(a - b)} \cdot E \cdot \varepsilon_{bE} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{(16 \text{ mm})^3}{(55 - 30) \text{ mm}} \cdot 205\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,0002 = 659,5 \text{ N}$$

- c) Es liegt eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette vor. Daher kann der Mohr'sche Verformungskreis entsprechend Kapitel 4.4.2 (siehe Lehrbuch) auf einfache Weise konstruiert werden.

Die Schiebung $\gamma_{xy} \equiv \gamma$ mit der x-Richtung als

Bezugsrichtung kann nur durch das Torsionsmoment M_t , d. h. durch die Torsionsschubspannung τ_t verursacht werden.



Berechnung der Schiebung $\gamma_{xy} \equiv \gamma$

$$\frac{\gamma_t}{2} = -(\varepsilon_M - \varepsilon_B) = -\left(\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} - \varepsilon_B\right)$$

$$\gamma_t = -(\varepsilon_A + \varepsilon_C - 2 \cdot \varepsilon_B) = -(1,60 \% + (-0,48 \%)) - 2 \cdot 0,00 \% = -1,12 \%$$

Elastizitätsgesetz für Schubbeanspruchung

$$\tau_t = G \cdot \gamma_t = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \gamma_t = \frac{205\,000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot (-0,00112) = -88,31 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Torsionsmomentes M_t

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

$$M_t = |\tau_t| \cdot W_t = \tau_t \cdot \frac{\pi}{16} \cdot d^3 = 88,31 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{16} \cdot (16 \text{ mm})^3 = 71021 \text{ Nmm} = \mathbf{71,02 \text{ Nm}}$$

Die Schubspannung τ_t bzw. das Torsionsmoment M_t führen für $\gamma_{xy} (\equiv \gamma)$ zu einer Winkelverkleinerung entsprechend der Abbildung. Damit ist die Drehrichtung des Torsionsmomentes M_t bei Blick von rechts auf den Wellenzapfen im Uhrzeigersinn (also entgegen der Richtung der eingezeichneten Momentenpfeile in der Aufgabenstellung).

- d) Berechnung der Nennspannungen

$$\sigma_{zn} = \frac{F_1}{A_n} = \frac{4 \cdot F_1}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 65948 \text{ N}}{\pi \cdot (16 \text{ mm})^2} = 328,00 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bn} = \frac{M_b}{W_{bn}} = \frac{F_2 \cdot a}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{659,5 \text{ N} \cdot 55 \text{ mm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (16 \text{ mm})^3} = 90,20 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{tn} = \frac{M_t}{W_{tn}} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{71021 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (16 \text{ mm})^3} = 88,31 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Formzahlen

$$\frac{D}{d} = \frac{24}{16} = 1,5$$

$$\frac{R}{d} = \frac{2}{16} = 0,125$$

Damit entnimmt man einem geeigneten Formzahldiagramm:

$$\alpha_{kz} = 1,75$$

$$\alpha_{kb} = 1,58$$

$$\alpha_{kt} = 1,32$$

Berechnung der maximalen Spannungen

$$\sigma_{z\max} = \sigma_{zn} \cdot \alpha_{kz} = 327,99 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,75 = 574,00 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{b\max} = \sigma_{bn} \cdot \alpha_{kb} = 90,20 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,58 = 142,52 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{t\max} = \tau_{tn} \cdot \alpha_{kt} = 88,31 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,32 = 116,57 \text{ N/mm}^2$$

Da es sich um eine Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion handelt, ergibt sich die Vergleichsspannung nach der SH zu (siehe Gleichung 6.14 im Lehrbuch):

$$\begin{aligned}\sigma_{VSH} &= \sqrt{(\sigma_{z\max} + \sigma_{b\max})^2 + 4 \cdot \tau_{t\max}^2} = \sqrt{(574,00 + 142,52)^2 + 4 \cdot 116,57^2} \text{ N/mm}^2 \\ &= 753,49 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul}$$

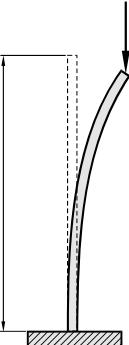
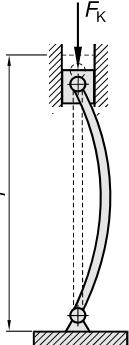
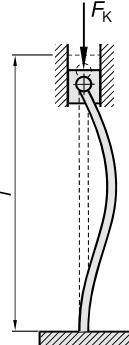
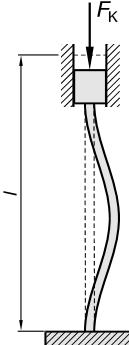
$$\sigma_{VSH} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{VSH}} = \frac{800 \text{ N/mm}^2}{753,49 \text{ N/mm}^2} = 1,06 \quad (\text{nicht ausreichend, da } S_F < 1,20)$$

8 Knickung

8.1 Formelsammlung zur Knickung

Euler'sche Knickfälle - Knickkraft

Knickfall 1	Knickfall 2	Knickfall 3	Knickfall 4
			

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

$$F_K = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

$$F_K = 2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

$$F_K = 4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

Knickspannung

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A} \quad \text{Knickspannung}$$

Zulässige Spannungen

Duktile Werkstoffe

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \quad \text{bzw. } \frac{\sigma_{d0,2}}{S_F} \quad \text{mit } S_F = 1,2 \dots 2,0 \quad \text{Versagen durch Fließen}$$

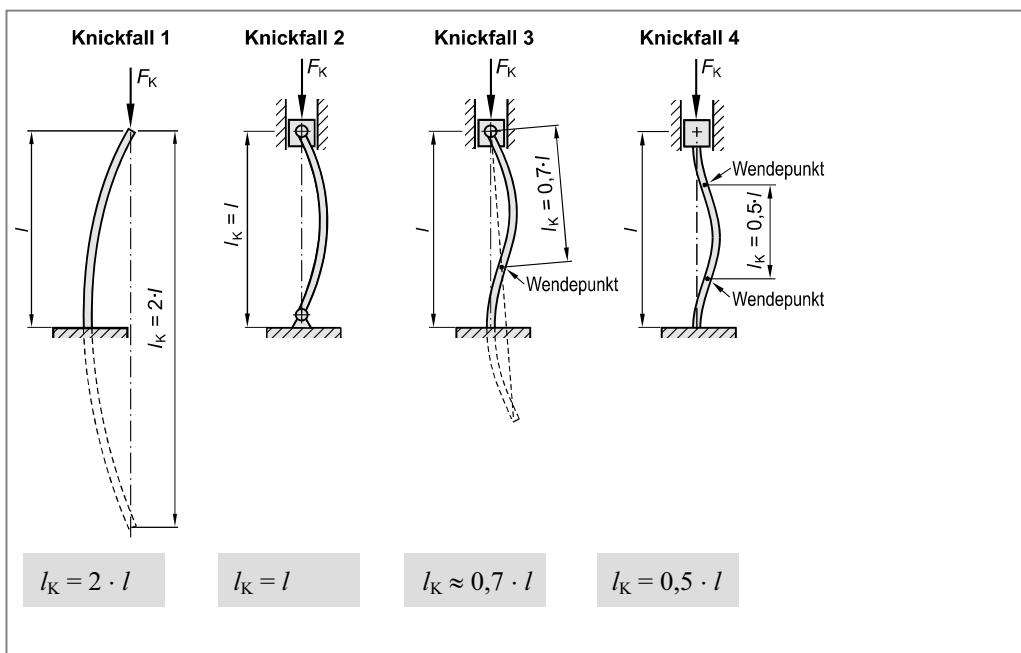
$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K} \quad \text{mit } S_K = 2,5 \dots 5,0 \quad \text{Versagen durch Knickung}$$

Spröde Werkstoffe

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dB}}{S_B} \quad \text{mit } S_B = 4,0 \dots 9,0 \quad \text{Versagen durch Bruch}$$

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K} \quad \text{mit } S_K = 2,5 \dots 5,0 \quad \text{Versagen durch Knickung}$$

Knicklänge



Schlankheitsgrad

$$\lambda = \frac{l_K}{\sqrt{I/A}}$$

Schlankheitsgrad
(Definition)

Knickspannungsdiagramm

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

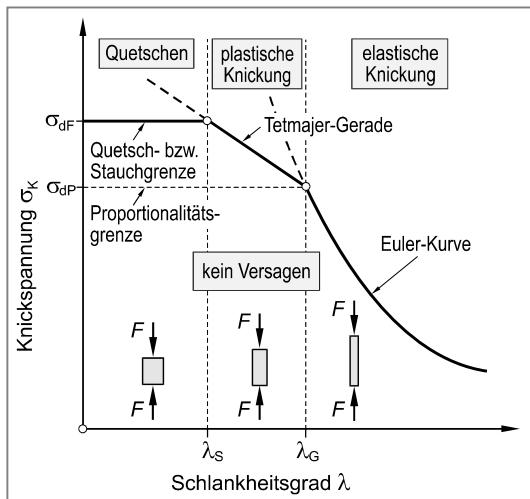
Euler-Kurve

$$\sigma_K = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$$

Tetmajer-Gerade¹⁾

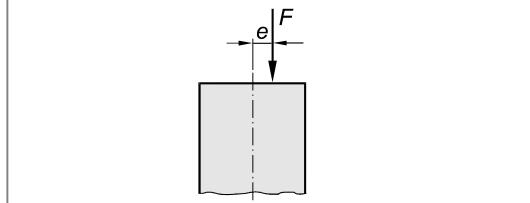
$$\lambda_G = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{dP}}}$$

Grenzschlankheitsgrad für elastische Knickung



Biegeknickung

$$\sigma_{\text{ges}} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e}{W_b \cdot \cos\left(\frac{l_K}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}}\right)}$$



¹⁾ Koeffizienten der Tetmajer-Gleichung siehe Lehrbuch Kapitel 8.5.

8.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 8.1

Berechnung der Knickkraft (Knickfall 2)

$$F_K = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} = \pi^2 \cdot \frac{E}{l^2} \cdot \frac{a^4}{12} = \pi^2 \cdot \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{(2000 \text{ mm})^2} \cdot \frac{(50 \text{ mm})^4}{12} = 269\,872 \text{ N}$$

Berechnung der Sicherheit gegen Knickung

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K}$$

$$\frac{F_d}{A} = \frac{F_K}{A} \cdot \frac{1}{S_K}$$

$$S_K = \frac{F_K}{F_d} = \frac{269\,872 \text{ N}}{50\,000 \text{ N}} = 5,40 \quad (\text{ausreichend, da } S_K > 2,5)$$

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{d0,2}}{S_F} \approx \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\frac{F_d}{A} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{F_d} \cdot A = \frac{R_{p0,2}}{F_d} \cdot a^2 = \frac{320 \text{ N/mm}^2}{50\,000 \text{ N}} \cdot (50 \text{ mm})^2 = 16 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Lösung zu Aufgabe 8.2

a) Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung bezüglich der y-Achse

Berechnung der axialen Flächenmomente 2. Ordnung der Teilflächen bezüglich der zur y-Achse parallelen Achsen durch die Teilflächenschwerpunkte:

$$I_{y1} = \frac{40 \text{ mm} \cdot (15 \text{ mm})^3}{12} = 11250 \text{ mm}^4$$

$$I_{y2} = \frac{50 \text{ mm} \cdot (25 \text{ mm})^3}{12} = 65104,2 \text{ mm}^4$$

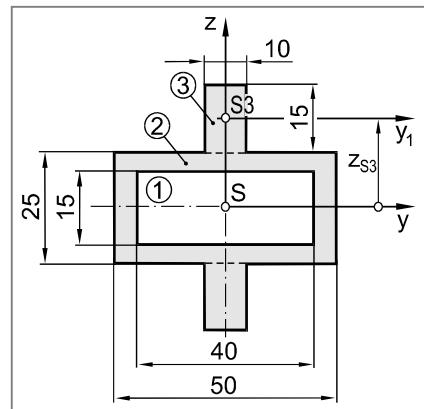
$$I_{y3} = \frac{10 \text{ mm} \cdot (15 \text{ mm})^3}{12} = 2812,5 \text{ mm}^4$$

Berechnung der axialen Flächenmomente 2. Ordnung der Teilflächen bezüglich der y-Achse durch den Gesamtflächenschwerpunkt S :

$$I_{yS1} = I_{y1} = 11250 \text{ mm}^4$$

$$I_{yS2} = I_{y2} = 65104,2 \text{ mm}^4$$

$$I_{yS3} = I_{y3} + z_{S3}^2 \cdot A_3 = 2812,5 \text{ mm}^4 + (20 \text{ mm})^2 \cdot 150 \text{ mm}^2 = 62812,5 \text{ mm}^4$$



Das axiale Flächenmoment 2. Ordnung der Gesamtfläche bezüglich der y-Achse ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} I_{yS} &= I_{yS2} - I_{yS1} + 2 \cdot I_{yS3} = 65104,2 \text{ mm}^4 - 11250 \text{ mm}^4 + 2 \cdot 62812,5 \text{ mm}^4 \\ &= 179479,2 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung bezüglich der z-Achse

Berechnung der axialen Flächenmomente 2. Ordnung der Teilflächen bezüglich der zur z-Achse parallelen Achsen durch die Teilflächenschwerpunkte:

$$I_{z1} = \frac{15 \text{ mm} \cdot (40 \text{ mm})^3}{12} = 80000 \text{ mm}^4$$

$$I_{z2} = \frac{25 \text{ mm} \cdot (50 \text{ mm})^3}{12} = 260416,7 \text{ mm}^4$$

$$I_{z3} = \frac{15 \text{ mm} \cdot (10 \text{ mm})^3}{12} = 1250 \text{ mm}^4$$

Berechnung der axialen Flächenmomente 2. Ordnung der Teilflächen bezüglich der z-Achse durch den Gesamtflächenschwerpunkt S :

$$I_{zS1} = I_{z1} = 80000 \text{ mm}^4$$

$$I_{zS2} = I_{z2} = 260416,7 \text{ mm}^4$$

$$I_{zS3} = I_{z3} = 1250 \text{ mm}^4$$

Das axiale Flächenmoment 2. Ordnung der Gesamtfläche bezüglich der z-Achse ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} I_{zS} &= I_{zS2} - I_{zS1} + 2 \cdot I_{zS3} = 260\,416,7 \text{ mm}^4 - 80\,000 \text{ mm}^4 + 2 \cdot 1\,250 \text{ mm}^4 \\ &= \mathbf{182\,916,7 \text{ mm}^4} \end{aligned}$$

b) Versagensfall Knickung (Knickfall 2)

Ausknicken erfolgt senkrecht zu derjenigen Querschnittsachse mit dem kleinsten axialen Flächenmoment 2. Ordnung. Gemäß Aufgabenteil a) gilt dann: $I_{\min} = I_{yS}$.

Festigkeitsbedingung:

$$\begin{aligned} \sigma_d &\leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K} \\ \frac{F_d}{A} &= \frac{F_K}{A} \cdot \frac{1}{S_K} \\ F_d &= \frac{\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I_{yS}}{l^2}}{S_K} = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 179\,479,2 \text{ mm}^4}{(1200 \text{ mm})^2 \cdot 4} = \mathbf{64\,582 \text{ N}} \end{aligned}$$

Versagensfall Fließen

Festigkeitsbedingung:

$$\begin{aligned} \sigma_d &\leq \sigma_{zul} \\ \frac{F_d}{A} &= \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F} \\ F_d &= \frac{R_e \cdot A}{S_F} = \frac{255 \text{ N/mm}^2 \cdot 950 \text{ mm}^2}{1,5} = \mathbf{161\,500 \text{ N}} \end{aligned}$$

Die zulässige Druckkraft beträgt also 64582 N.

c) Berechnung der Kräfte die zum Versagen führen

durch Fließen: $F_F = 1,5 \cdot 161\,500 \text{ N} = 242\,250 \text{ N}$

durch Knickung: $F_K = 4 \cdot 64\,582 \text{ N} = 258\,328 \text{ N}$

Versagen erfolgt also durch Fließen, sobald die Druckkraft F_d die Kraft $F_F = 242\,250 \text{ N}$ überschreitet.

Berechnung der Verkürzung des Profilstabes mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes
(einachsiger Spannungszustand)

$$\begin{aligned} \sigma_d &= -E \cdot \varepsilon = -E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \\ \Delta l &= -\frac{\sigma_d \cdot l_0}{E} = -\frac{F_d}{A} \cdot \frac{l_0}{E} = -\frac{242\,250 \text{ N}}{950 \text{ mm}^2} \cdot \frac{1200 \text{ mm}}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = \mathbf{-1,46 \text{ mm}} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8.3

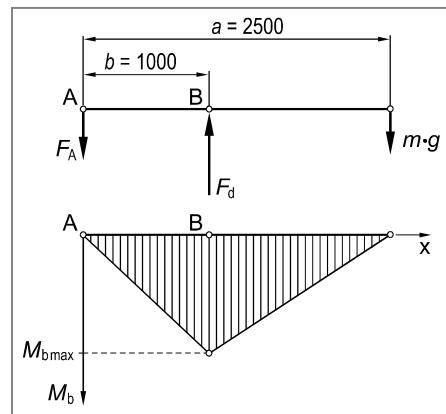
a) Berechnung der Druckkraft auf die Kolbenstange

Freischneiden des Tragarmes und Ansetzen des Momentengleichgewichts um den Lagerpunkt A:

$$\sum M_A = 0$$

$$F_d \cdot b - m \cdot g \cdot a = 0$$

$$F_d = m \cdot g \cdot \frac{a}{b} = 1000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{2500 \text{ mm}}{1000 \text{ mm}} \\ = 24525 \text{ N}$$



b) Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{F_d}{A} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F}$$

$$\frac{F_d}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_e}{F_d} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)$$

$$= \frac{355 \text{ N/mm}^2}{24525 \text{ N}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (25^2 - 20^2) \text{ mm}^2 = 2,56 \text{ (ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Berechnung der Sicherheit gegen Knickung (Knickfall 2)

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K}$$

$$\frac{F_d}{A} = \frac{F_K}{A} \cdot \frac{1}{S_K}$$

$$S_K = \frac{F_K}{F_d} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \frac{\pi}{64} \cdot (d_a^4 - d_i^4)}{F_d \cdot l^2} \\ = \frac{\pi^2 \cdot 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot (25^4 - 20^4) \text{ mm}^4}{24525 \text{ N} \cdot (900 \text{ mm})^2} \\ = 1,18 \text{ (nicht ausreichend, da } S_K < 2,5)$$

c) Berechnung des Biegemomentes an der höchst beanspruchten Stelle

Das maximale Biegemoment befindet sich an der Stelle *B*:

$$\begin{aligned} M_{b\max} &= m \cdot g \cdot (a - b) = 1000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (2500 \text{ mm} - 1000 \text{ mm}) \\ &= 14715000 \text{ Nmm} = \mathbf{14715 \text{ Nm}} \end{aligned}$$

Berechnung des erforderlichen axialen Widerstandsmomentes

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_b \leq \sigma_{b,zul}$$

$$\frac{M_{b\max}}{W_{by}} = \frac{\sigma_{b,F}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F}$$

$$W_{by} = M_{b\max} \cdot \frac{S_F}{R_e} = 14715000 \text{ Nmm} \cdot \frac{1,5}{235 \text{ N/mm}^2} = 93925,5 \text{ mm}^3$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung bezüglich der y-Achse

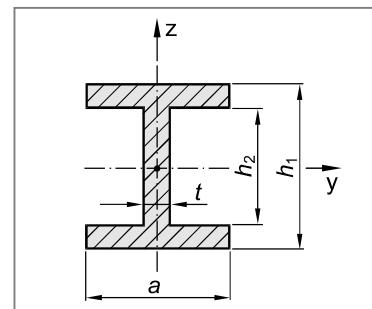
$$\begin{aligned} I_y &= \frac{a \cdot h_1^3}{12} - 2 \cdot \frac{a-t}{2} \cdot \frac{h_2^3}{12} = \frac{a \cdot (96 \text{ mm})^3}{12} - 2 \cdot \frac{a-12 \text{ mm}}{2} \cdot \frac{(72 \text{ mm})^3}{12} \\ &= a \cdot 73728 \text{ mm}^3 - 31104 \text{ mm}^3 \cdot (a-12 \text{ mm}) \\ &= a \cdot 42624 \text{ mm}^3 + 373248 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Damit folgt für das Maß *a* des axialen Widerstandsmomentes bezüglich der y-Achse (W_{by}):

$$\begin{aligned} W_{by} &= \frac{I_y}{h_1 / 2} = \frac{a \cdot 42624 \text{ mm}^3 + 373248 \text{ mm}^4}{96 \text{ mm} / 2} \\ &= 888 \text{ mm}^2 \cdot a + 7776 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Mit $W_{by} = 93925,5 \text{ mm}^3$ folgt schließlich für *a*:

$$a = \frac{93925,5 \text{ mm}^3 - 7776 \text{ mm}^3}{888 \text{ mm}^2} = \mathbf{97,0 \text{ mm}}$$



Lösung zu Aufgabe 8.4

a) Berechnung der Druckkraft auf den Stützstab

Freischneiden des Kranauslegers und Ansetzen des Momentengleichgewichts um den Lagerpunkt A:

$$\sum M_A = 0$$

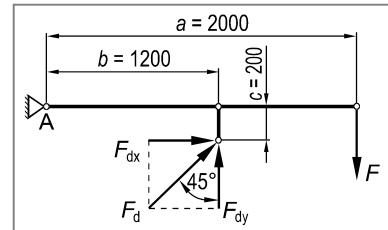
$$F_{dy} \cdot b + F_{dx} \cdot c - F \cdot a = 0$$

$$F_d \cdot \cos 45^\circ \cdot b + F_d \cdot \sin 45^\circ \cdot c - F \cdot a = 0$$

$$F_d = \frac{F \cdot a}{\cos 45^\circ \cdot b + \sin 45^\circ \cdot c}$$

$$= \frac{800\,000 \text{ N} \cdot 2\,000 \text{ mm}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1200 \text{ mm} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 200 \text{ mm}} = 1616\,244,1 \text{ N}$$

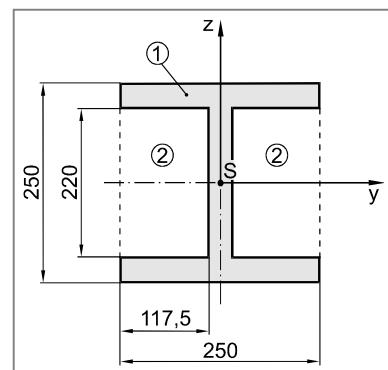
$$= 1616,2 \text{ kN}$$



b) Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung der Querschnittfläche des Stützstabes bezüglich der y-Achse

$$I_y = \frac{(250 \text{ mm})^4}{12} - 2 \cdot \frac{117,5 \text{ mm} \cdot (220 \text{ mm})^3}{12}$$

$$= 116\,997\,500 \text{ mm}^4 = 11\,699,75 \text{ cm}^4$$



c) Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{F_d}{A} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F} \quad \text{mit } A = (250 \text{ mm})^2 - 2 \cdot 117,5 \text{ mm} \cdot 220 \text{ mm} = 10\,800 \text{ mm}^2$$

$$S_F = \frac{R_e \cdot A}{F_d} = \frac{235 \text{ N/mm}^2 \cdot 10\,800 \text{ mm}^2}{1616\,244,1 \text{ N}} = 1,57 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Berechnung der Sicherheit gegen Knickung (Knickfall 2)

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K}$$

$$\frac{F_d}{A} = \frac{F_K}{A} \cdot \frac{1}{S_K}$$

$$S_K = \frac{F_K}{F_d} = \frac{\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I_y}{l^2}}{F_d} = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 116\,997\,500 \text{ mm}^4}{1616\,244,1 \text{ N} \cdot (1650 \text{ mm})^2}$$

$$= 55,1 \quad (\text{ausreichend, da } S_K > 2,5)$$

Lösung zu Aufgabe 8.5

a) Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{F_d}{A} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F}$$

$$F_d = \frac{R_e}{S_F} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2) = \frac{235 \text{ N/mm}^2}{1,5} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (60^2 - 50^2) \text{ mm}^2 = 135\,350 \text{ N} = \mathbf{135,35 \text{ kN}}$$

b) Berechnung der Sicherheit gegen Knickung (Knickfall 1)

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_K$$

$$\frac{F_d^*}{A} = \frac{F_K}{A}$$

$$F_d^* = F_K = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot \frac{\pi}{64} \cdot (d_a^4 - d_i^4)}{l^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot (60^4 - 50^4) \text{ mm}^2}{(2500 \text{ mm})^2} = 27\,307 \text{ N} = \mathbf{27,307 \text{ kN}}$$

c) Ansetzen der Festigkeitsbedingung:

$$\tau_a \leq \tau_{zul}$$

$$\frac{F}{2 \cdot A} = \frac{\tau_{ab}}{S_B}$$

$$\frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \frac{\tau_{ab}}{S_B}$$

Damit folgt für den Durchmesser d des Bolzens:

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot S_B}{\pi \cdot \tau_{ab}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25\,000 \text{ N} \cdot 2,0}{\pi \cdot 490 \text{ N/mm}^2}} = \mathbf{8,06 \text{ mm}}$$

Lösung zu Aufgabe 8.6

Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung bezüglich der z-Achse ($I_z = I_{\min}$)

$$I_z = \frac{d^4}{64} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{(12 \text{ mm})^4}{64} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 184,9 \text{ mm}^4$$

Berechnung Knickkraft

Es handelt sich um Knickfall 3, da ein Ende des Wendelbohrers in der Maschine als fest eingespannt und das andere Ende am Werkstück als gelenkig gelagert angesehen werden kann. Letztere Annahme ist plausibel, da bereits bei geringer Druckbelastung die Bohrerspitze in den Werkstoff eindringt, so dass eine seitliche freie Beweglichkeit des Bohrers (würde Knickfall 1 entsprechen) nicht mehr gegeben ist.

Bedingung:

$$F_K \geq 2000 \text{ N}$$

$$2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I_z}{l^2} \geq 2000 \text{ N}$$

$$l \leq \sqrt{\frac{2\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{2000 \text{ N}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 \cdot 208000 \text{ N/mm}^2 \cdot 184,9 \text{ mm}^4}{2000 \text{ N}}} = 616,2 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 8.7

a) Versagensfall Fließen

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F}$$

$$\frac{F}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$d_i = \sqrt{d_a^2 - \frac{4 \cdot F \cdot S_F}{\pi \cdot R_e}} = \sqrt{(100 \text{ mm})^2 - \frac{4 \cdot 150000 \text{ N} \cdot 1,5}{\pi \cdot 290 \text{ N/mm}^2}} = 94,93 \text{ mm}$$

Berechnung der erforderlichen Wanddicke s :

$$s = \frac{d_a - d_i}{2} = \frac{100 \text{ mm} - 94,93 \text{ mm}}{2} = 2,53 \text{ mm}$$

Versagensfall Knickung (Knickfall 1)

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{F_K}{A} \cdot \frac{1}{S_K}$$

$$F = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \cdot \frac{1}{S_K} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E}{l^2} \cdot \frac{\pi}{64} \cdot (d_a^4 - d_i^4) \cdot \frac{1}{S_K} = \frac{\pi^3 \cdot E \cdot (d_a^4 - d_i^4)}{256 \cdot l^2 \cdot S_K}$$

$$d_i = \sqrt[4]{d_a^4 - \frac{256 \cdot F \cdot l^2 \cdot S_K}{\pi^3 \cdot E}} = \sqrt[4]{(100 \text{ mm})^4 - \frac{256 \cdot 150000 \text{ N} \cdot (1500 \text{ mm})^2 \cdot 3,0}{\pi^3 \cdot 208000 \text{ N/mm}^2}} \\ = 87,94 \text{ mm}$$

Berechnung der erforderlichen Wanddicke s :

$$s = \frac{d_a - d_i}{2} = \frac{100 \text{ mm} - 87,94 \text{ mm}}{2} = 6,03 \text{ mm}$$

b) Berechnung der Gesamtspannung aus Druck und Biegung (Gleichung 8.50, siehe Lehrbuch):

$$\sigma_{ges} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e}{W_b \cdot \cos\left(\frac{l_K}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}}\right)} \quad \text{mit } l_K = 2 \cdot l \text{ (Knickfall 1)}$$

Festigkeitsbedingung:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ges}} &\leq \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_e}{S_F} \\ \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e}{W_b \cdot \cos\left(\frac{l_K}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}}\right)} &= \frac{R_e}{S_F} \\ e &= \frac{\left(\frac{R_e}{S_F} - \frac{F}{A}\right) \cdot W_b \cdot \cos\left(\frac{l_K}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}}\right)}{F} \\ &= \frac{1}{150000 \text{ N}} \left[\left(\frac{290 \text{ N/mm}^2}{1,2} - \frac{150000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (100^2 - 90^2) \text{ mm}^2} \right) \cdot \frac{\pi}{32} \cdot \frac{100^4 - 90^4}{100} \text{ mm}^3 \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos\left(\frac{3000 \text{ mm}}{2} \cdot \sqrt{\frac{150000 \text{ N}}{208000 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot (100^4 - 90^4) \text{ mm}^4}}\right) \right] = \mathbf{17,69 \text{ mm}}\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8.8

- a) Die Rohrstütze kann durch Fließen oder Knickung versagen.

Versagensfall Fließen

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F}$$

$$F = A \cdot \frac{R_e}{S_F} = \frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2) \cdot \frac{R_e}{S_F} \quad \text{mit } d_i = d_a - 2 \cdot s$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot (60^2 - 50^2) \text{ mm}^2 \cdot \frac{240 \text{ N/mm}^2}{1,5} = 138200 \text{ N} = \mathbf{138,2 \text{ kN}}$$

Versagensfall Knickung (Knickfall 4)

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{F_K}{A} \cdot \frac{1}{S_K}$$

$$F = 4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \cdot \frac{1}{S_K} = 4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot \frac{\pi}{64} \cdot (d_a^4 - d_i^4)}{l^2} \cdot \frac{1}{S_K}$$

$$= 4\pi^2 \cdot \frac{210000 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot (60^4 - 50^4) \text{ mm}^4}{(3500 \text{ mm})^2} \cdot \frac{1}{4} = 55728 \text{ N} = \mathbf{55,73 \text{ kN}}$$

Die zulässige Druckkraft beträgt also $F_d = \mathbf{55,73 \text{ kN}}$.

- b) Berechnung der Verkürzung der Rohrstütze mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes
(einachsiger Spannungszustand)

$$\sigma_d = -E \cdot \varepsilon = -E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\Delta l = -\frac{\sigma_d \cdot l_0}{E} = -\frac{F_d}{A} \cdot \frac{l_0}{E} = -\frac{55728 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (60^2 - 50^2) \text{ mm}^2} \cdot \frac{3500 \text{ mm}}{210000 \text{ N/mm}^2} = \mathbf{-1,075 \text{ mm}}$$

Lösung zu Aufgabe 8.9

Der Stahlträger kann durch Fließen oder Knickung versagen.

Versagensfall Fließen

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_e \cdot A}{F} = \frac{300 \text{ N/mm}^2 \cdot 5380 \text{ mm}^2}{1300000 \text{ N}} = 1,24 \text{ (ausreichend, da } S_K > 1,20)$$

Berechnung der Sicherheit gegen Knickung (Knickfall 3)

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_d \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{F_K}{A} \cdot \frac{1}{S_K}$$

$$S_K = \frac{F_K}{F} = \frac{2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I_{min}}{l^2}}{F} = \frac{2\pi^2 \cdot 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 604 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{1300000 \text{ N} \cdot (3500 \text{ mm})^2}$$

= 1,57 (nicht ausreichend, da $S_K < 2,5$)

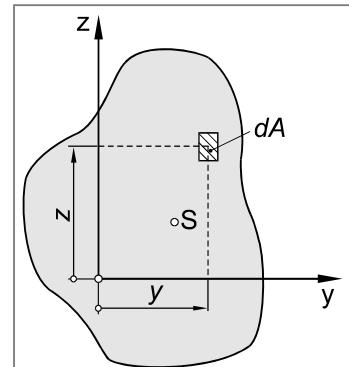
9 Schiefe Biegung

9.1 Formelsammlung zur Schiefen Biegung

Flächenmomente 1. Ordnung

$$H_y = \int_A z \cdot dA \quad \text{Flächenmoment 1. Ordnung bezüglich der } y\text{-Achse}$$

$$H_z = \int_A y \cdot dA \quad \text{Flächenmoment 1. Ordnung bezüglich der } z\text{-Achse}$$

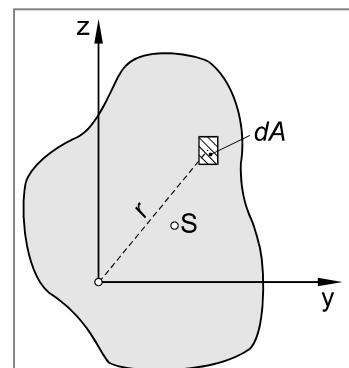


Flächenmomente 2. Ordnung

Axiale Flächenmomente

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA \quad \text{Axiales Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der } y\text{-Achse}$$

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA \quad \text{Axiales Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der } z\text{-Achse}$$

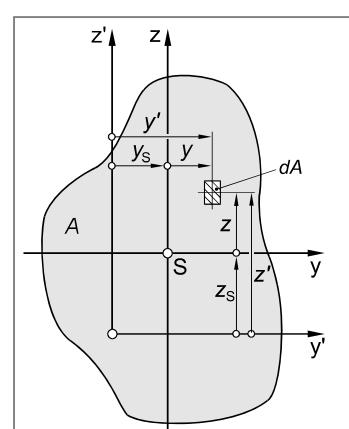


Polares Flächenmoment

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA \quad \text{Polares Flächenmoment}$$

Gemischtes Flächenmoment

$$I_{yz} = - \int_A y \cdot z \cdot dA \quad \text{Gemischtes Flächenmoment bezüglich dem } y\text{-z-Koordinatensystem}$$



Parallelverschiebung des Koordinatensystems

Axiales Flächenmoment

$$I_{y'} = I_y + z_S^2 \cdot A \quad \text{Axiales Flächenmoment 2. Ordnung bei einer Parallelverschiebung der Koordinatenachsen}$$

Gemischtes Flächenmoment

$$I_{y'z'} = I_{yz} - y_S \cdot z_S \cdot A \quad \text{Gemischtes Flächenmoment bei einer Parallelverschiebung der Koordinatenachsen}$$

Anmerkungen zum gemischten Flächenmoment:

1. Das gemischte Flächenmoment ist in Bezug auf ein die Symmetrieachse beinhaltendes Koordinatensystem Null.
2. Das gemischte Flächenmoment ändert seinen Betrag nicht, falls nur eine Achse parallel verschoben wird.

Drehung des Koordinatensystems um den Flächenschwerpunkt

$$I_{\eta} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\varphi + I_{yz} \cdot \sin 2\varphi$$

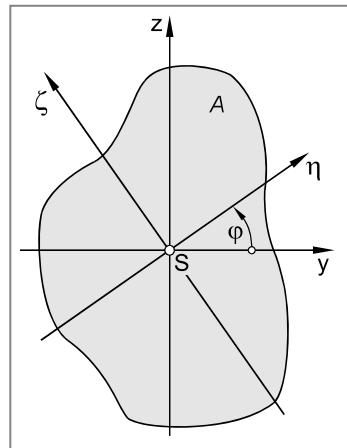
$$I_{\zeta} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\varphi - I_{yz} \cdot \sin 2\varphi$$

$$I_{\eta\zeta} = -\frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin 2\varphi + I_{yz} \cdot \cos 2\varphi$$

$$\varphi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z} \right)$$

$$\varphi_{2;1} = \varphi_{1;2} + 90^\circ$$

Richtungswinkel zwischen der y-Achse und der ersten bzw. zweiten Hauptachse



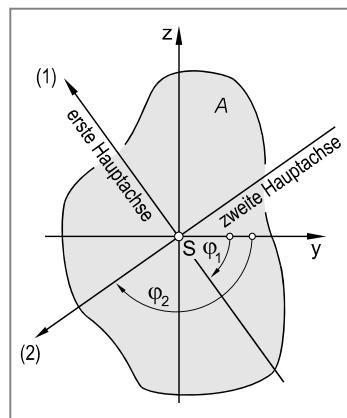
Hauptflächenmomente

$$I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2} \right)^2 + I_{yz}^2}$$

Maximales Flächenmoment 2. Ordnung (Hauptflächenmoment)

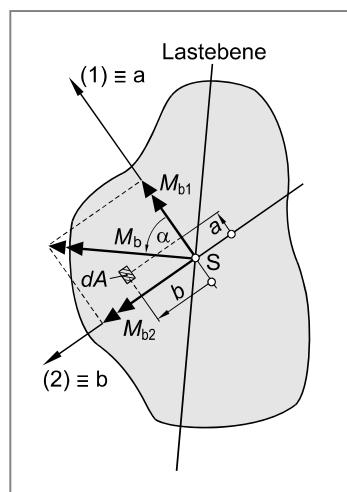
$$I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2} \right)^2 + I_{yz}^2}$$

Minimales Flächenmoment 2. Ordnung (Hauptflächenmoment)



Spannungsermittlung bei schiefer Biegung

- Ermittlung der Lage der beiden Hauptachsen (1) und (2) der Querschnittsfläche sowie der zugehörigen Hauptflächenmomente I_1 und I_2 .
- Festlegung eines a-b-Koordinatensystems: Die a-Koordinatenrichtung soll mit der Richtung der großen Hauptachse ($a \equiv (1)$), die b-Koordinatenrichtung mit der kleinen Hauptachse zusammenfallen ($b \equiv (2)$). Die b-Richtung muss dabei aus der a-Richtung durch eine Drehung um 90° im mathematisch positiven Sinn (Genuhrzeigersinn) hervorgehen.
- Einführung des Richtungswinkels α zwischen der a-Achse und dem Biegemomentenvektor M_b . Der Winkel wird von der positiven a-Achse aus abgetragen und ist im mathematisch positiven Sinn positiv und in die Gegenrichtung negativ zu berücksichtigen.



$$\sigma_x = M_b \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{I_1} \cdot b - \frac{\sin \alpha}{I_2} \cdot a \right)$$

Resultierende Biegespannung in einem Flächenelement dA
(Koordinaten a und b bezüglich des Hauptachsensystems)

Nulllinie

$$b(a) = \frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha \cdot a$$

Gleichung der Nulllinie im a-b-Koordinatensystem

$$\beta = \arctan \left(\frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha \right)$$

Winkel zwischen a-Achse und Nulllinie

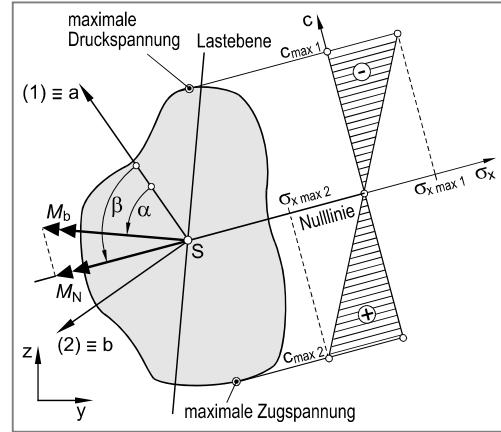
Ermittlung der maximalen Biegespannung mit Hilfe der Nulllinie

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_{bN}}{I_N} \cdot c_{\max}$$

Maximale Biegespannung in der Querschnittsfäche

$$\text{mit } M_{bN} = M_b \cdot \cos(\beta - \alpha)$$

$$\text{und } I_N = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cdot \cos 2\beta$$



9.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 9.1

a) Da es sich um einen Rechteckquerschnitt (symmetrische Querschnittfläche) handelt, fallen die Hauptachsen mit den Symmetrieachsen zusammen, d. h. das y-z-Koordinatensystem ist gleichzeitig Hauptachsensystem. Das maximale Flächenmoment 2. Ordnung ergibt sich bezüglich der y-Achse ($y \equiv (1)$), das minimale Flächenmoment 2. Ordnung hingegen bezüglich der z-Achse ($z \equiv (2)$).

b) Berechnung der axialen Flächenmomente 2. Ordnung bezüglich der y- und z-Achse

$$\begin{aligned} I_1 \equiv I_y &= \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{(b-2s) \cdot (h-2s)^3}{12} \\ &= \frac{200 \text{ mm} \cdot (300 \text{ mm})^3}{12} - \frac{160 \text{ mm} \cdot (260 \text{ mm})^3}{12} = 215\,653\,333 \text{ mm}^4 \\ I_2 \equiv I_z &= \frac{h \cdot b^3}{12} - \frac{(h-2s) \cdot (b-2s)^3}{12} \\ &= \frac{300 \text{ mm} \cdot (200 \text{ mm})^3}{12} - \frac{260 \text{ mm} \cdot (160 \text{ mm})^3}{12} = 111\,253\,333 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

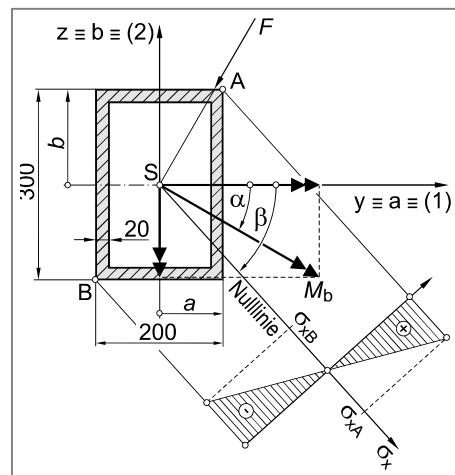
c) Berechnung des maximalen Biegemomentes

$$M_b = F \cdot l = 100\,000 \text{ N} \cdot 5\,000 \text{ mm} = 500 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Berechnung der Lage der Nulllinie

$$\begin{aligned} \beta &= \arctan\left(\frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha\right) \\ &= \arctan\left(\frac{215\,653\,333 \text{ mm}^4}{111\,253\,333 \text{ mm}^4} \cdot \tan(-30^\circ)\right) \\ &= \arctan(-1,12) = -48,22^\circ \end{aligned}$$

Die maximalen Biegespannungen treten an denjenigen Stellen der Querschnittfläche auf, die einen maximalen (senkrechten) Abstand zur Nulllinie besitzen. Im Falle des Rechteckprofils also an den Profileckpunkten A (+ σ_{xA}) und B ($\sigma_{xB} = -\sigma_{xA}$).



Berechnung der Biegespannung am Profileckpunkt A der Querschnittfläche (maximale Zugspannung)

$$\sigma_{xA} = M_b \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{I_1} \cdot b - \frac{\sin \alpha}{I_2} \cdot a \right)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xA} &= 500 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot \left(\frac{\cos(-30^\circ)}{215\,653\,333 \text{ mm}^4} \cdot 150 \text{ mm} - \frac{\sin(-30^\circ)}{111\,253\,333 \text{ mm}^4} \cdot 100 \text{ mm} \right) \\ &= 525,89 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Alternative Methode zur Spannungsermittlung am Profileckpunkt A

Berechnung der Komponente des Biegemomentenvektors in Richtung der Nulllinie

$$M_{bN} = M_b \cdot \cos(\beta - \alpha) = 500 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot \cos(-48,22^\circ - (-30^\circ)) = 474,94 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes zweiter Ordnung bezüglich der Nulllinie

$$\begin{aligned}I_N &= \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cdot \cos 2\beta \\ &= \frac{215\,653\,333 + 111\,253\,333}{2} \text{ mm}^4 + \frac{215\,653\,333 - 111\,253\,333}{2} \text{ mm}^4 \cdot \cos(-96,44^\circ) \\ &= 157\,602\,588,8 \text{ mm}^4\end{aligned}$$

Berechnung des senkrechten Abstandes des Profileckpunktes A von der Nulllinie (c_{max})

Aus der Abbildung ergeben sich die folgenden geometrischen Beziehungen:

$$\beta_1 = \arctan \frac{100 \text{ mm}}{150 \text{ mm}} = 33,69^\circ$$

$$\beta_2 = |\beta| - \beta_1 = 48,22^\circ - 33,69^\circ = 14,53^\circ$$

$$d = \sqrt{(100 \text{ mm})^2 + (150 \text{ mm})^2} = 180,28 \text{ mm}$$

$$c_{max} = \cos \beta_2 \cdot d = \cos 14,53^\circ \cdot 180,28 \text{ mm} = 174,51 \text{ mm}$$

Berechnung der maximalen Biegespannung

$$\sigma_{xA} = \frac{M_{bN}}{I_N} \cdot c_{max} = \frac{474,94 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{157\,602\,588,8 \text{ mm}^4} \cdot 174,51 \text{ mm} = 525,89 \text{ N/mm}^2$$

d) Berechnung der Sicherheit gegen Fließen an der höchst beanspruchten Stelle (Profileckpunkt A)

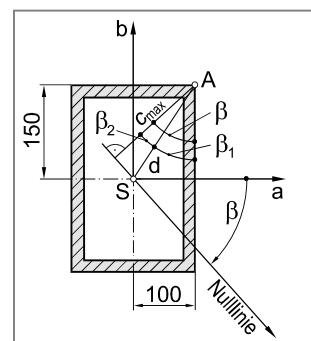
Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{xA} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{xA} = \frac{R_e}{S_F}$$

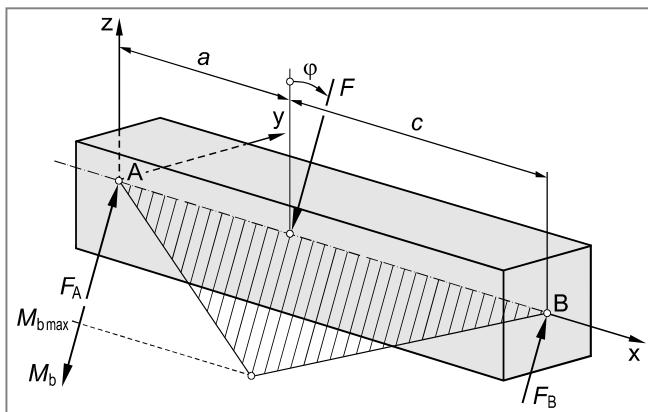
$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{xA}}$$

$$= \frac{890 \text{ N/mm}^2}{525,89 \text{ N/mm}^2} = 1,69 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$



Lösung zu Aufgabe 9.2

a) Berechnung des maximalen Biegemomentes



Ansetzen des Momentengleichgewichtes um den Lagerpunkt A

$$\Sigma M_A = 0$$

$$F_B \cdot (a + c) - F \cdot a = 0$$

$$F_B = F \cdot \frac{a}{a + c} = 10000 \text{ N} \cdot \frac{1500 \text{ mm}}{1500 \text{ mm} + 2500 \text{ mm}} = 3750 \text{ N}$$

$$M_{b\max} = F_B \cdot c = 3750 \text{ N} \cdot 2500 \text{ mm} = 9375000 \text{ Nmm} = \mathbf{9375 \text{ Nm}}$$

Das maximale Biegemoment wirkt in der den Kraftangriffspunkt beinhaltenden Querschnittsfläche.

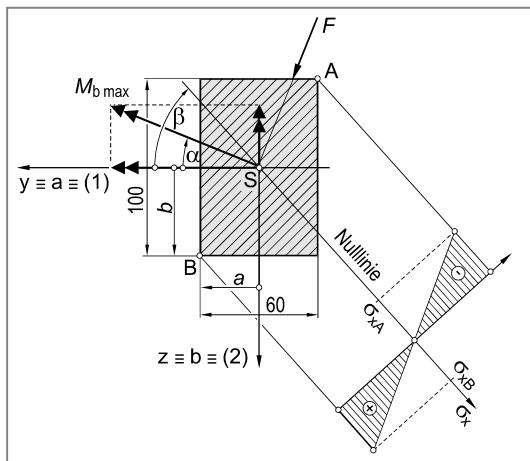
- b) Da es sich um einen Rechteckquerschnitt (symmetrische Querschnittsfläche) handelt, fallen die Hauptachsen mit den Symmetrieachsen zusammen, d. h. das y - z -Koordinatensystem ist gleichzeitig Hauptachsensystem. Das maximale Flächenmoment 2. Ordnung ergibt sich bezüglich der y -Achse ($y \equiv (1)$), das minimale Flächenmoment 2. Ordnung hingegen bezüglich der z -Achse ($z \equiv (2)$).

Berechnung der Hauptflächenmomente

$$I_1 \equiv I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{60 \text{ mm} \cdot (100 \text{ mm})^3}{12} = \mathbf{5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$I_2 \equiv I_z = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{100 \text{ mm} \cdot (60 \text{ mm})^3}{12} = \mathbf{1,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}$$

- c) Momentenverhältnisse an der höchst beanspruchten Stelle:



Berechnung des Winkels β zwischen der a-Achse und der Nulllinie

$$\beta = \arctan\left(\frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha\right) = \arctan\left(\frac{5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{1,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot \tan(-22^\circ)\right) = -48,29^\circ$$

Die maximalen Biegespannungen befinden sich an denjenigen Orten der Querschnittsfäche, die einen maximalen Abstand zur Nulllinie besitzen, hier also an den Profileckpunkten *B* (σ_{xB}) und *A* ($\sigma_{xA} = -\sigma_{xB}$).

Berechnung der Biegespannung am Profileckpunkt *B* der Querschnittsfäche (maximale Zugspannung)

$$\begin{aligned}\sigma_{xB} &= M_{b \max} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{I_1} \cdot b - \frac{\sin \alpha}{I_2} \cdot a \right) \\ &= 9375000 \text{ Nmm} \cdot \left(\frac{\cos(-22^\circ)}{5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot 50 \text{ mm} - \frac{\sin(-22^\circ)}{1,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot 30 \text{ mm} \right) \\ &= 145,46 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Berechnung der Biegespannung am Profileckpunkt *A* der Querschnittsfäche

$$\sigma_{xA} = -\sigma_{xB} = -145,46 \text{ N/mm}^2$$

- d) Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{xB} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{245 \text{ N/mm}^2}{145,46 \text{ N/mm}^2} = 1,68 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Lösung zu Aufgabe 9.3

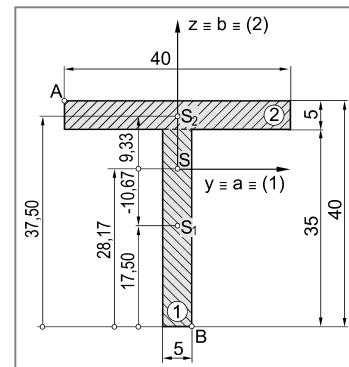
a) Ermittlung der Lage der Hauptachsen

Da es sich um eine symmetrische Querschnittsfläche handelt, fällt eine der beiden Hauptachsen mit der Symmetrieebene zusammen. Die zweite Hauptachse ergibt sich als Senkrechte zur ersten Hauptachse durch den Flächenschwerpunkt.

Berechnung der Lage des Flächenschwerpunktes (Teilschwerpunktsatz)

$$z_S = \frac{\left(\frac{h-t}{2}\right) \cdot (h-t) \cdot t + \left(h - \frac{t}{2}\right) \cdot b \cdot t}{(h-t) \cdot t + b \cdot t}$$

$$= \frac{17,5 \cdot 35 \cdot 5 + 37,5 \cdot 40 \cdot 5}{35 \cdot 5 + 40 \cdot 5} \text{ mm} = 28,17 \text{ mm}$$



b) Berechnung des axialen Flächenmomentes

2. Ordnung bezüglich der y-Achse

$$I_y = \frac{5 \text{ mm} \cdot (35 \text{ mm})^3}{12} + (-10,67 \text{ mm})^2 \cdot 5 \text{ mm} \cdot 35 \text{ mm}$$

$$+ \frac{40 \text{ mm} \cdot (5 \text{ mm})^3}{12} + (9,33 \text{ mm})^2 \cdot 40 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm}$$

$$= 37\,775,69 \text{ mm}^4 + 17\,838,89 \text{ mm}^4$$

$$= 55\,614,6 \text{ mm}^4$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung bezüglich der z-Achse

$$I_z = \frac{35 \text{ mm} \cdot (5 \text{ mm})^3}{12} + \frac{5 \text{ mm} \cdot (40 \text{ mm})^3}{12} = 27\,031,3 \text{ mm}^4$$

Damit folgt für die Hauptflächenmomente:

$$I_1 \equiv I_y = 55\,614,6 \text{ mm}^4$$

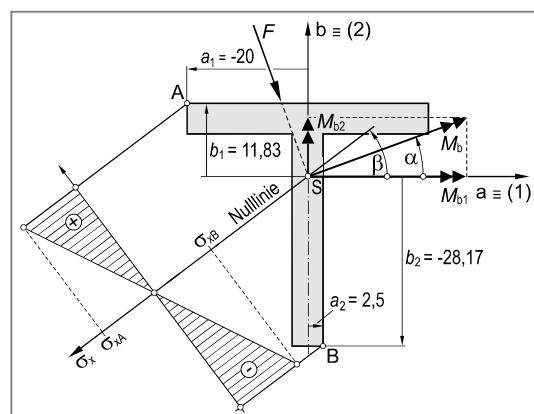
$$I_2 \equiv I_z = 27\,031,3 \text{ mm}^4$$

c) Berechnung des Winkels β zwischen der a-Achse und der Nulllinie

$$\beta = \arctan \left(\frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha \right)$$

$$= \arctan \left(\frac{55\,614,6 \text{ mm}^4}{27\,031,3 \text{ mm}^4} \cdot \tan 20^\circ \right)$$

$$= 36,83^\circ$$



Die maximalen Biegespannungen befinden sich an denjenigen Orten der Querschnittsfläche, die einen maximalen Abstand zur Nulllinie besitzen, hier also an den Profileckpunkten A (σ_{xA}) und B (σ_{xB}).

Berechnung des maximalen Biegemomentes (Einspannquerschnitt)

$$M_b = F \cdot l = 250 \text{ N} \cdot 2000 \text{ mm} = 500000 \text{ Nmm}$$

Berechnung der Biegespannung am Profileckpunkt A der Querschnittfläche (maximale Zugspannung)

$$\begin{aligned}\sigma_{xA} &= M_b \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{I_1} \cdot b_1 - \frac{\sin \alpha}{I_2} \cdot a_1 \right) \\ &= 500000 \text{ Nmm} \cdot \left(\frac{\cos 20^\circ}{55614 \text{ mm}^4} \cdot 11,83 \text{ mm} - \frac{\sin 20^\circ}{27031 \text{ mm}^4} \cdot (-20 \text{ mm}) \right) \\ &= 226,5 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Berechnung der Biegespannung am Profileckpunkt B der Querschnittfläche (maximale Druckspannung)

$$\begin{aligned}\sigma_{xB} &= M_b \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{I_1} \cdot b_2 - \frac{\sin \alpha}{I_2} \cdot a_2 \right) \\ &= 500000 \text{ Nmm} \cdot \left(\frac{\cos 20^\circ}{55614 \text{ mm}^4} \cdot (-28,17) \text{ mm} - \frac{\sin 20^\circ}{27031 \text{ mm}^4} \cdot 2,5 \text{ mm} \right) \\ &= -253,8 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Damit befindet sich die höchst beanspruchte Stelle am Profileckpunkt B (Druckspannung)

d) Berechnung der Sicherheit gegen Fließen am Profileckpunkt B

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{xB} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{xB} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{\sigma_{dF}}{|\sigma_{xB}|} = \frac{360 \text{ N/mm}^2}{253,8 \text{ N/mm}^2} = 1,42 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Lösung zu Aufgabe 9.4

a) Ermittlung der Lage des Flächenschwerpunktes (Teilschwerpunktsatz)

$$y_S = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{7,5 \text{ mm} \cdot 1575 \text{ mm}^2 + 45 \text{ mm} \cdot 1350 \text{ mm}^2}{1575 \text{ mm}^2 + 1350 \text{ mm}^2} = 24,81 \text{ mm}$$

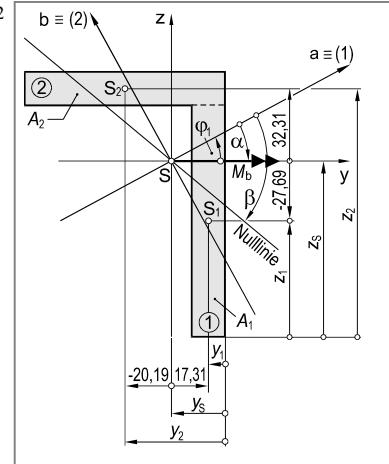
$$z_S = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{52,5 \text{ mm} \cdot 1575 \text{ mm}^2 + 112,5 \text{ mm} \cdot 1350 \text{ mm}^2}{1575 \text{ mm}^2 + 1350 \text{ mm}^2} = 80,19 \text{ mm}$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung bezüglich der y-Achse

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{15 \text{ mm} \cdot (105 \text{ mm})^3}{12} + (-27,69 \text{ mm})^2 \cdot 1575 \text{ mm}^2 \\ &\quad + \frac{90 \text{ mm} \cdot (15 \text{ mm})^3}{12} + (32,31 \text{ mm})^2 \cdot 1350 \text{ mm}^2 \\ &= 4089266,8 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung bezüglich der z-Achse

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{105 \text{ mm} \cdot (15 \text{ mm})^3}{12} + (17,31 \text{ mm})^2 \cdot 1575 \text{ mm}^2 \\ &\quad + \frac{15 \text{ mm} \cdot (90 \text{ mm})^3}{12} + (-20,19 \text{ mm})^2 \cdot 1350 \text{ mm}^2 \\ &= 1963016,8 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$



Berechnung des gemischten Flächenmomentes bezüglich des y-z-Koordinatensystems

Hinweis: Für die Berechnung von I_{yz} sind die Vorzeichen der Teilflächenschwerpunktabstände ($y_{S1}; z_{S1}; y_{S2}$ und z_{S2}) zu beachten.

$$\begin{aligned} I_{yz} &= 0 - y_{S1} \cdot z_{S1} \cdot A_1 + 0 - y_{S2} \cdot z_{S2} \cdot A_2 \\ &= -(17,31 \text{ mm}) \cdot (-27,69 \text{ mm}) \cdot 1575 \text{ mm}^2 - (-20,19 \text{ mm}) \cdot 32,31 \text{ mm} \cdot 1350 \text{ mm}^2 \\ &= 1635576,9 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Berechnung des Richtungswinkels φ zwischen der y-Achse und der ersten oder zweiten Hauptachse

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z} \right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{2 \cdot 1635576,9 \text{ mm}^4}{4089266,8 \text{ mm}^4 - 1963016,8 \text{ mm}^4} \right) = 28,49^\circ$$

Bestimmung der ersten bzw. zweiten Hauptachse

$$\frac{d^2 I_\eta}{d\varphi} = -2 \cdot (I_y - I_z) \cdot \cos 2\varphi - 4 \cdot I_{yz} \cdot \sin 2\varphi$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \cdot (4089266,8 \text{ mm}^4 - 1963016,8 \text{ mm}^4) \cdot \cos(2 \cdot 28,49) - \\
 &\quad 4 \cdot 1635576,9 \text{ mm}^4 \cdot \sin(2 \cdot 28,49) \\
 &= -7802919,1 < 0
 \end{aligned}$$

Da $d^2 I_y / d\varphi^2 < 0$ ist $\varphi = \varphi_1$ der Richtungswinkel zwischen der y-Achse und der ersten Hauptachse.

Für den Richtungswinkel zur zweiten Hauptachse folgt dann:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ = 28,49^\circ + 90^\circ = 118,49^\circ$$

b) Berechnung der Hauptflächenmomente I_1 und I_2

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \\
 &= \frac{4089266,8 \text{ mm}^4 + 1963016,8 \text{ mm}^4}{2} \\
 &\quad + \sqrt{\left(\frac{4089266,8 \text{ mm}^4 - 1963016,8 \text{ mm}^4}{2}\right)^2 + (1635576,9 \text{ mm}^4)^2} \\
 &= \mathbf{4976871,6 \text{ mm}^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \\
 &= \frac{4089266,8 \text{ mm}^4 + 1963016,8 \text{ mm}^4}{2} \\
 &\quad - \sqrt{\left(\frac{4089266,8 \text{ mm}^4 - 1963016,8 \text{ mm}^4}{2}\right)^2 + (1635576,9 \text{ mm}^4)^2} \\
 &= \mathbf{1075412,1 \text{ mm}^4}
 \end{aligned}$$

c) Berechnung des maximalen Biegemomentes (Einspannquerschnitt)

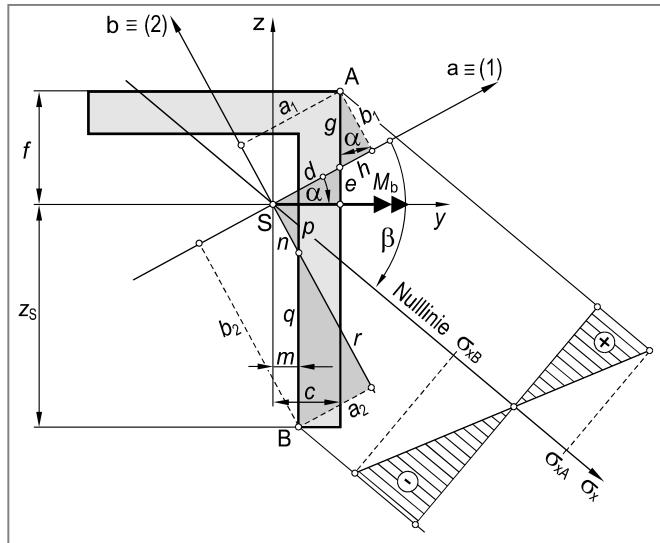
$$M_b = F \cdot l = 7000 \text{ N} \cdot 2500 \text{ mm} = 17,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Berechnung des Winkels β zwischen der a-Achse und der Nulllinie

Mit $\alpha = -\varphi_1 = -28,49^\circ$ folgt:

$$\beta = \arctan\left(\frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha\right) = \arctan\left(\frac{4976871,6 \text{ mm}^4}{1075412,1 \text{ mm}^4} \cdot \tan(-28,49^\circ)\right) = \mathbf{-68,29^\circ}$$

Die maximalen Biegespannungen befinden sich an denjenigen Orten der Querschnittfläche, die einen maximalen Abstand zur Nulllinie besitzen, also die Stellen A (σ_{xA}) und B ($\sigma_{xB} = -\sigma_{xA}$).



Berechnung der Biegespannung am Profileckpunkt *A* der Querschnittfläche (maximale Zugspannung)

Geometrische Verhältnisse am Winkelträger (siehe Abbildung):

$$d = \frac{c}{\cos \alpha} = \frac{24,81 \text{ mm}}{\cos 28,49^\circ} = 28,23 \text{ mm}$$

$$e = \tan \alpha \cdot c = \tan 28,49^\circ \cdot 24,81 \text{ mm} = 13,46 \text{ mm}$$

$$g = f - e = 39,81 \text{ mm} - 13,46 \text{ mm} = 26,34 \text{ mm}$$

$$h = \sin \alpha \cdot g = \sin 28,49^\circ \cdot 26,34 \text{ mm} = 12,57 \text{ mm}$$

$$a_1 = d + h = 28,23 \text{ mm} + 12,57 \text{ mm} = 40,79 \text{ mm}$$

$$b_1 = \cos \alpha \cdot g = \cos 28,49^\circ \cdot 26,34 \text{ mm} = 23,16 \text{ mm}$$

Damit folgt für die Spannung am Profileckpunkt *A*:

$$\begin{aligned} \sigma_{xA} &= M_b \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{I_1} \cdot b_1 - \frac{\sin \alpha}{I_2} \cdot a_1 \right) \\ &= 17,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot \left(\frac{\cos(-28,49^\circ)}{4976871,6 \text{ mm}^4} \cdot 23,16 \text{ mm} - \frac{\sin(-28,49^\circ)}{1075412,1 \text{ mm}^4} \cdot 40,79 \text{ mm} \right) \\ &= 388,17 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Berechnung der Biegespannung am Profileckpunkt *B* der Querschnittfläche (maximale Druckspannung)

Geometrische Verhältnisse am Winkelträger (siehe Abbildung):

$$m = c - c_1 = 24,81 \text{ mm} - 15 \text{ mm} = 9,81 \text{ mm}$$

$$n = \frac{m}{\sin \alpha} = \frac{9,81 \text{ mm}}{\sin 28,49^\circ} = 20,56 \text{ mm}$$

$$p = \frac{m}{\tan \alpha} = \frac{9,81 \text{ mm}}{\tan 28,49^\circ} = 18,07 \text{ mm}$$

$$q = z_S - p = 80,19 \text{ mm} - 18,07 \text{ mm} = 62,12 \text{ mm}$$

$$a_2 = \sin \alpha \cdot q = \sin 28,49^\circ \cdot 62,12 \text{ mm} = 29,63 \text{ mm}$$

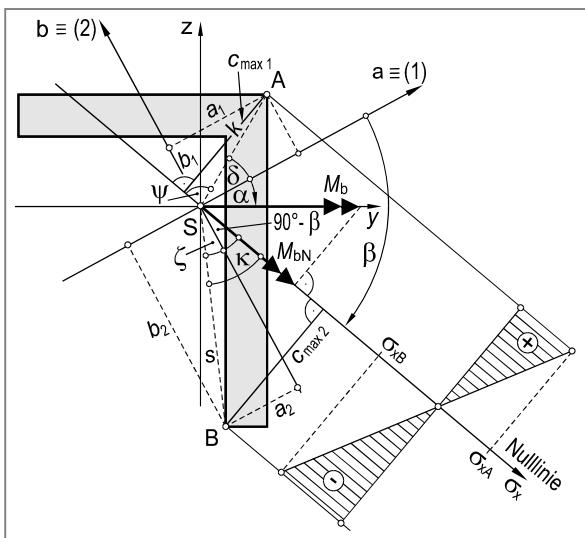
$$r = \cos \alpha \cdot q = \cos 28,49^\circ \cdot 62,12 \text{ mm} = 54,59 \text{ mm}$$

$$b_2 = r + n = 54,59 \text{ mm} + 20,56 \text{ mm} = 75,16 \text{ mm}$$

Damit folgt für die Spannung am Profileckpunkt *B*:

$$\begin{aligned} \sigma_{xB} &= M_b \cdot \left(\frac{\cos \alpha \cdot b_2 - \sin \alpha \cdot a_2}{I_1} \right) \\ &= 17,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot \left(\frac{\cos(-28,49^\circ)}{4976871,6 \text{ mm}^4} \cdot (-75,16 \text{ mm}) - \frac{\sin(-28,49^\circ)}{1075412,1 \text{ mm}^4} \cdot (-29,63 \text{ mm}) \right) \\ &= -462,26 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Alternative Methode zur Spannungsermittlung an den Profileckpunkten *A* und *B*



Berechnung des senkrechten Abstandes des Profileckpunktes *A* von der Nulllinie (c_{max1})

$$k = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{(40,79 \text{ mm})^2 + (23,16 \text{ mm})^2} = 46,91 \text{ mm}$$

$$\delta = \arctan \frac{b_1}{a_1} = \arctan \frac{23,16 \text{ mm}}{40,79 \text{ mm}} = 29,58^\circ$$

$$\psi = 180^\circ - \delta - \beta = 180^\circ - 29,58^\circ - 68,29^\circ = 82,13^\circ$$

$$c_{max1} = k \cdot \sin \psi = 46,91 \text{ mm} \cdot \sin 82,13^\circ = 46,46 \text{ mm}$$

Berechnung des Biegemomentenvektors M_{bN} in Bezug auf die Nulllinie

$$M_{bN} = M_b \cdot \cos(\beta - \alpha) = 17,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot \cos(68,29^\circ - 28,48^\circ) = 13,44 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung bezüglich der Nulllinie

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cdot \cos 2\beta \\ &= \frac{4\,976\,871,6 + 1\,075\,412,1}{2} + \frac{4\,976\,871,6 - 1\,075\,412,1}{2} \cdot \cos(2 \cdot (-68,29^\circ)) \text{ mm}^4 \\ &= 1\,609\,306,7 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Berechnung der Spannung am Profileckpunkt A

$$\sigma_{xA} = \frac{M_{bN}}{I_N} \cdot c_{max1} = \frac{13,44 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{1\,609\,306,7 \text{ mm}^4} \cdot 46,46 \text{ mm} = 388,17 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des senkrechten Abstandes des Profileckpunktes B von der Nulllinie (c_{max1})

$$s = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{(29,63 \text{ mm})^2 + (75,16 \text{ mm})^2} = 80,79 \text{ mm}$$

$$\zeta = \arctan \frac{a_2}{b_2} = \arctan \frac{29,63 \text{ mm}}{75,16 \text{ mm}} = 21,52^\circ$$

$$\kappa = \zeta + (90^\circ - \beta) = 21,52^\circ + (90^\circ - 68,29^\circ) = 43,23^\circ$$

$$c_{max2} = r \cdot \sin \kappa = 80,79 \text{ mm} \cdot \sin 43,23^\circ = 55,33 \text{ mm}$$

Berechnung der Spannung im Profileckpunkt B

$$\sigma_{xB} = \frac{M_{bN}}{I_N} \cdot c_{max1} = \frac{13,44 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{1\,609\,306,7 \text{ mm}^4} \cdot 55,33 \text{ mm} = -462,26 \text{ N/mm}^2$$

d) Zäher Werkstoff: $\sigma_{dF} \approx R_e$

Damit setzt Fließen zuerst am Profileckpunkt B ein, da $|\sigma_{xB}| > \sigma_{xA}$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{xB} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{xB} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \approx \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{\sigma_{dF}}{|\sigma_{xB}|} = \frac{590 \text{ N/mm}^2}{462,26 \text{ N/mm}^2} = 1,28 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Lösung zu Aufgabe 9.5

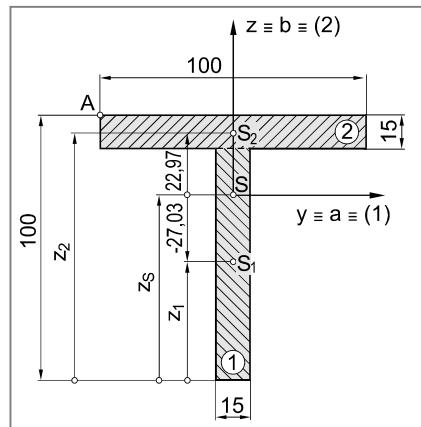
Ermittlung der Lage der Hauptachsen

Da es sich um eine symmetrische Querschnittsfläche handelt, fällt eine der beiden Hauptachsen mit der Symmetrieebene zusammen. Die zweite Hauptachse ergibt sich als Senkrechte zur ersten Hauptachse durch den Flächenschwerpunkt.

Berechnung der Lage des Flächenschwerpunktes (Teilschwerpunktsatz)

$$z_S = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{42,5 \cdot 1275 + 92,5 \cdot 1500}{1275 + 1500} \text{ mm} = 69,53 \text{ mm}$$



Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung bezüglich der y-Achse

$$I_y = \frac{15 \text{ mm} \cdot (85 \text{ mm})^3}{12} + (-27,03 \text{ mm})^2 \cdot 1275 \text{ mm}^2$$

$$+ \frac{100 \text{ mm} \cdot (15 \text{ mm})^3}{12} + (22,97 \text{ mm})^2 \cdot 1500 \text{ mm}^2$$

$$= 2\ 518\ 754 \text{ mm}^4$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung bezüglich der z-Achse

$$I_z = \frac{85 \text{ mm} \cdot (15 \text{ mm})^3}{12} + \frac{15 \text{ mm} \cdot (100 \text{ mm})^3}{12} = 1273\ 906 \text{ mm}^4$$

Hauptflächenmomente

$$I_1 \equiv I_y = 2\ 518\ 754 \text{ mm}^4$$

$$I_2 \equiv I_z = 1273\ 906 \text{ mm}^4$$

Berechnung der Gewichtskraft des Profilträgers

$$G = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot A \cdot a \cdot g$$

$$= 0,00778 \text{ kg/cm}^3 \cdot 27,75 \text{ cm}^2 \cdot 400 \text{ cm} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 847,2 \text{ N}$$

Berechnung der maximalen Biegemomente (am Einspannquerschnitt) in Richtung der y-Achse sowie der z-Achse

$$M_{by} = G \cdot \frac{a}{2} + F_1 \cdot a = 847,2 \text{ N} \cdot 2000 \text{ mm} + 1500 \text{ N} \cdot 4000 \text{ mm} = 7\ 694\ 344 \text{ Nmm}$$

$$M_{bz} = F_2 \cdot b = 4000 \text{ N} \cdot 2500 \text{ mm} = 10\ 000\ 000 \text{ Nmm}$$

Berechnung des Winkels α zwischen der a-Achse und dem resultierenden Biegemomentenvektor

$$\alpha = \arctan\left(\frac{M_{bz}}{M_{by}}\right) = \arctan\left(\frac{10\,000\,000 \text{ Nmm}}{7\,694\,344 \text{ Nmm}}\right) = 52,42^\circ$$

Berechnung des Winkels β zwischen der a-Achse und der Nulllinie

$$\beta = \arctan\left(\frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha\right) = \arctan\left(\frac{2\,518\,754 \text{ mm}^4}{12\,739\,06 \text{ mm}^4} \cdot \tan 52,42^\circ\right) = 68,74^\circ$$

Die maximalen Biegespannungen befinden sich an denjenigen Orten der Querschnittfläche, die einen maximalen Abstand zur Nulllinie besitzen, hier also am Profileckpunkt A.

Berechnung der Biegespannung am Profileckpunkt A der Querschnittfläche (maximale Zugspannung)

$$\begin{aligned}\sigma_{xA} &= \frac{M_{by} \cdot b_1 - M_{bz} \cdot a_1}{I_1} \\ &= \frac{7\,694\,344 \text{ Nmm}}{2\,518\,754 \text{ mm}^4} \cdot 30,47 \text{ mm} \\ &\quad - \frac{10\,000\,000 \text{ Nmm}}{12\,739\,06 \text{ mm}^4} \cdot (-50 \text{ mm}) \\ &= 485,58 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

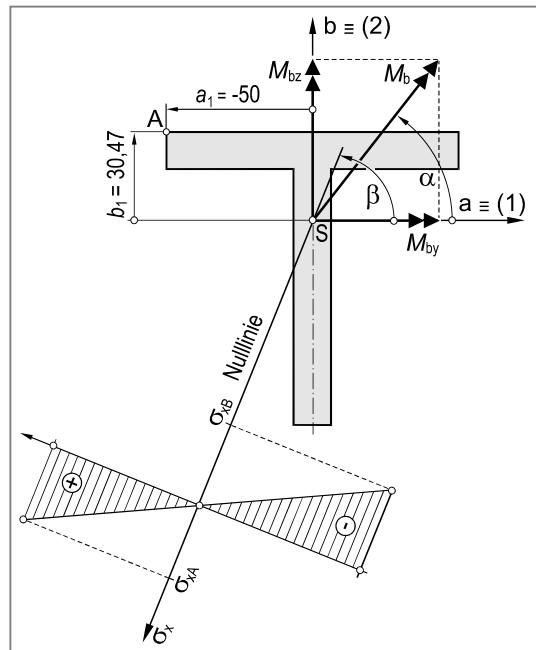
Berechnung der Sicherheit gegen Fließen am Profileckpunkt A

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{xA} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{xA} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_e}{|\sigma_{xA}|} = \frac{600 \text{ N/mm}^2}{485,58 \text{ N/mm}^2} = 1,24 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$



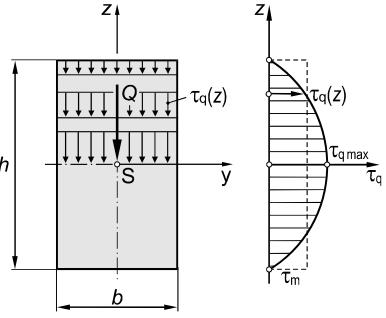
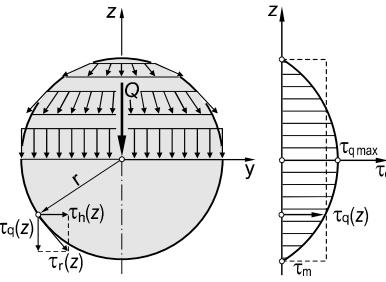
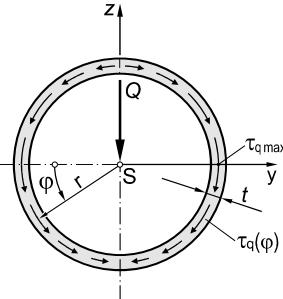
10 Schubspannungen durch Querkräfte bei Biegung

10.1 Formelsammlung zum Querkraftschub

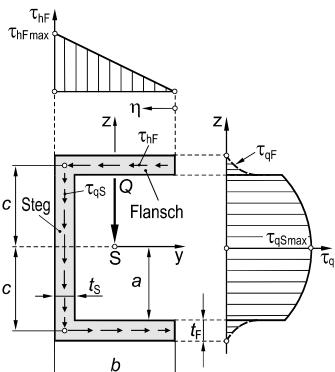
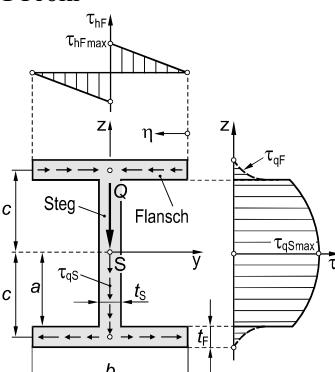
$$\tau_l(z) = \tau_q(z) = \frac{Q \cdot H_y(z)}{b(z) \cdot I_y}$$

Grundgleichung zur Ermittlung der Längsschubspannung durch Querkräfte bei Biegung

Schubspannungsverteilung durch Querkraftschub ausgewählter Querschnitte

Querschnittsfläche	Schubspannungsverteilung	Maximale Schubspannung
Rechteckquerschnitt 	$\tau_q(z) = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{h^2} \right)$	$\tau_{q \max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \tau_m$ mit $\tau_m = \frac{Q}{A}$
Vollkreisquerschnitt 	Vertikalkomponente: $\tau_q(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right)$ Resultierende Randschubspannung: $\tau_r(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}$	$\tau_{q \max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} = \frac{4}{3} \cdot \tau_m$ mit $\tau_m = \frac{Q}{A}$
Kreisring (dünnewandig) 	$\tau(\varphi) = \frac{Q}{\pi \cdot r \cdot t} \cdot \cos \varphi$	$\tau_{\max} = \frac{Q}{\pi \cdot r \cdot t} = 2 \cdot \tau_m$ mit $\tau_m = \frac{Q}{A}$

Anwendung: Dünnwandige Profilträger

J-Profil 	Horizontale Schubspannungen im Flansch $\tau_{hF}(\eta) = \frac{Q \cdot c}{I_y} \cdot \eta$ $\tau_{hF \ max} = \frac{Q \cdot c \cdot b}{I_y}$ Vertikale Schubspannungen im Steg ($-a \leq z \leq a$) $\tau_{qs}(z) = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \right]$ $\tau_{qs \ max} = \frac{Q}{I_y} \left[b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \right]$
I-Profil 	Horizontale Schubspannungen im Flansch ($0 \leq \eta \leq b/2$) $\tau_{hF}(\eta) = \frac{Q \cdot c}{I_y} \cdot \eta$ $\tau_{hF \ max} = \frac{Q \cdot c \cdot b}{I_y} \cdot \frac{b}{2}$ Vertikale Schubspannungen im Steg ($-a \leq z \leq a$) $\tau_{qs}(z) = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \right]$ $\tau_{qs \ max} = \frac{Q}{I_y} \left[b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \right]$

Anwendung: Genietete Träger

$$\tau_{N \ max} = \frac{4}{3 \cdot n} \cdot \frac{Q \cdot H_y(z) \cdot t}{I_y \cdot \pi r^2}$$

Maximale Schubspannung in den Gurtnieten eines Profilträgers unter Querkraftschub (gilt nur für die in der Abbildung dargestellten geometrischen Verhältnisse)

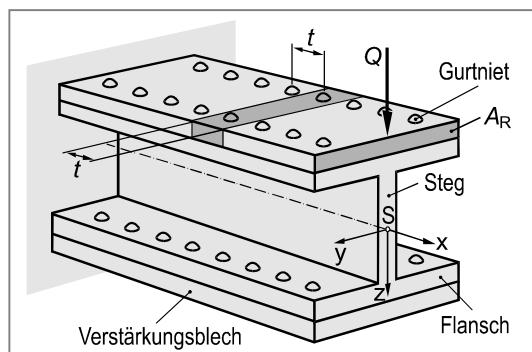
$H_y(z)$ Flächenmoment 1. Ordnung (statisches Moment) der Restfläche A_R bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

I_y Axiales Flächenmoment der gesamten Querschnittsfäche bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

n Anzahl paralleler Nieten

r Radius des Niets

t Nietteilung



Anwendung: Geschweißte Träger

$$\tau_s = \frac{Q \cdot H_y(z)}{2a \cdot I_y} \cdot \frac{t}{l_s}$$

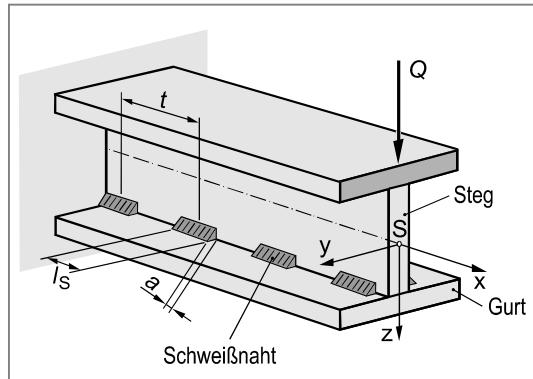
Schubspannung in der Schweißnaht zwischen Gurt- und Stegblech eines Profilträgers unter Querkraftschub (zwei parallele Schweißnähte)

$H_y(z)$ Flächenmoment 1. Ordnung (statisches Moment) der Restfläche A_R bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

I_y Axiales Flächenmoment der *gesamten* Querschnittsfläche bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

Vergleichsspannung in der Schweißnaht zwischen Gurt- und Stegblech eines Profilträgers unter Querkraftschub (zwei parallele Schweißnähte)

$$\sigma_{V\text{GEH}} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_s^2}$$



mit $\sigma_b = \frac{M_b}{I} \cdot z$

und $\tau_s = \frac{Q \cdot H_y(z)}{2a \cdot I_y} \cdot \frac{t}{l_s}$

10.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben

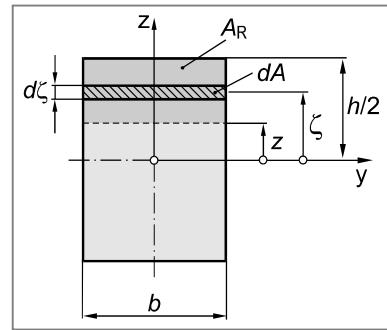
Lösung zu Aufgabe 10.1

Für die Schubspannungsverteilung durch Querkraftschub gilt:

$$\tau_q(z) = \frac{Q \cdot H_y(z)}{b(z) \cdot I_y} \quad \text{mit } b(z) = b = \text{konstant}$$

Berechnung des Flächenmomentes 1. Ordnung (statisches Moment) der Restfläche bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

$$\begin{aligned} H_y(z) &= \int_{A_R} \zeta \cdot dA = \int_z^{h/2} \zeta \cdot b \cdot d\zeta = \frac{b}{2} \cdot [\zeta^2]_z^{h/2} \\ &= \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \end{aligned}$$



Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung des Gesamtquerschnitts bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Damit folgt für die Schubspannungsverteilung (siehe auch Tabelle 10.1 im Lehrbuch):

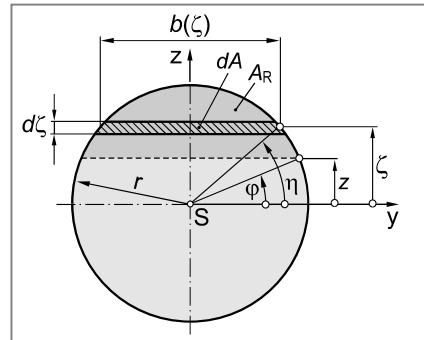
$$\tau_q(z) = \frac{Q \cdot H_y(z)}{b \cdot I_y} = \frac{Q \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{h^2} \right)$$

Lösung zu Aufgabe 10.2

Für die Schubspannungsverteilung durch Querkraftschub gilt:

$$\tau_q(z) = \frac{Q \cdot H_y(z)}{b(z) \cdot I_y}$$

Berechnung des Flächenmomentes 1. Ordnung der Restfläche bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt in Abhängigkeit der Koordinate φ



$$H_y = \int_{A_R} \zeta \cdot dA = \int_{A_R} \zeta \cdot b(\zeta) \cdot d\zeta$$

mit $\zeta = r \cdot \sin \eta$; $d\zeta = r \cdot \cos \eta \cdot d\eta$ und $b(\zeta) = 2 \cdot r \cdot \cos \eta$ folgt:

$$H_y(\varphi) = 2 \cdot r^3 \int_{\varphi}^{\pi/2} \sin \eta \cdot \cos^2 \eta \cdot d\eta = -\frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot [\cos^3 \eta]_{\varphi}^{\pi/2} = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \cos^3 \varphi$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung des Gesamtquerschnitts bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

$$I_y = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 = \frac{\pi}{4} \cdot r^4$$

Damit folgt für die Schubspannungsverteilung $\tau_q(\varphi)$ in Abhängigkeit der Koordinate φ :

$$\tau_q(\varphi) = \frac{Q \cdot H_y(\varphi)}{b(\varphi) \cdot I_y} = \frac{Q \cdot \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \cos^3 \varphi}{b(\varphi) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot r^4} = \frac{Q \cdot \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \cos^3 \varphi}{2 \cdot r \cos \varphi \cdot \frac{\pi}{4} \cdot r^4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \cdot \cos^2 \varphi$$

Berechnung der Schubspannungsverteilung $\tau_q(\varphi)$ in Abhängigkeit der Koordinate z

Es gilt $z = r \cdot \sin \varphi$ und damit $z^2 = r^2 \cdot \sin^2 \varphi$. Mit $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ folgt:

$$z^2 = r^2 \cdot (1 - \cos^2 \varphi)$$

und damit:

$$\cos^2 \varphi = 1 - \frac{z^2}{r^2}$$

Damit erhält man schließlich für die Schubspannungsverteilung in Abhängigkeit der Koordinate z (siehe auch Tabelle 10.1 im Lehrbuch):

$$\tau_q(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \cdot \cos^2 \varphi = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)$$

Lösung zu Aufgabe 10.3

Da es sich um einen dünnwandigen Kreisring handelt, ist es zweckmäßig, die Schubspannung in Abhängigkeit des Winkels φ zu berechnen.

Für die Schubspannungsverteilung durch Querkraftschub gilt:

$$\tau(\varphi) = \frac{Q \cdot H_y(\varphi)}{b(\varphi) \cdot I_y}$$

Berechnung des Flächenmomentes 1. Ordnung der Restfläche bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt in Abhängigkeit der Koordinate φ

$$H_y = \int_A \zeta \cdot dA$$

mit $dA = t \cdot r \cdot d\eta$ und $\zeta = r \cdot \sin \eta$ folgt:

$$H_y(\varphi) = t \cdot r^2 \int_{A_R} \sin \eta \cdot d\eta$$

Da die Verteilung der Schubspannungen symmetrisch zur z-Achse ist, darf nur zwischen den Grenzen $\eta = \varphi$ und $\eta = \pi/2$ integriert werden:

$$H_y(\varphi) = t \cdot r^2 \int_{\varphi}^{\pi/2} \sin \eta \cdot d\eta = t \cdot r^2 \cdot [-\cos \eta]_{\varphi}^{\pi/2} = t \cdot r^2 \cdot \cos \varphi$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes 2. Ordnung des Gesamtquerschnitts bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

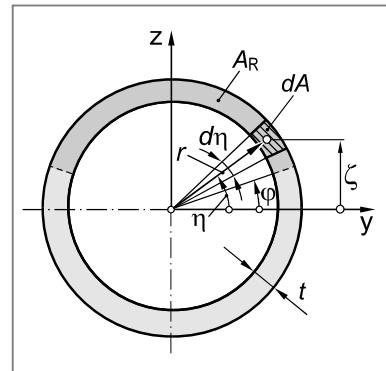
$$\begin{aligned} I_y &= \int_A \zeta^2 \cdot dA = \int_{A_R} (r \cdot \sin \eta)^2 \cdot t \cdot r \cdot d\eta = r^3 \cdot t \int_0^{2\pi} \sin^2 \eta \cdot d\eta \\ &= r^3 \cdot t \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \eta - \frac{1}{4} \cdot \sin 2\eta \right]_0^{2\pi} = r^3 \cdot t \cdot (\pi - 0) = \pi \cdot r^3 \cdot t \end{aligned}$$

Berechnung der Schubspannungsverteilung in Abhängigkeit der Koordinate φ

$$\tau(\varphi) = \frac{Q \cdot H_y(\varphi)}{b(\varphi) \cdot I_y} = \frac{Q \cdot t \cdot r^2 \cdot \cos \varphi}{b(\varphi) \cdot \pi \cdot r^3 \cdot t} = \frac{Q}{\pi \cdot r \cdot b(\varphi)} \cdot \cos \varphi$$

mit $b(\varphi) = t = \text{konstant}$ folgt schließlich (siehe auch Tabelle 10.1 im Lehrbuch):

$$\tau(\varphi) = \frac{Q}{\pi \cdot r \cdot t} \cdot \cos \varphi$$



Lösung zu Aufgabe 10.4

a) Berechnung der Schubspannung im Nahtbereich

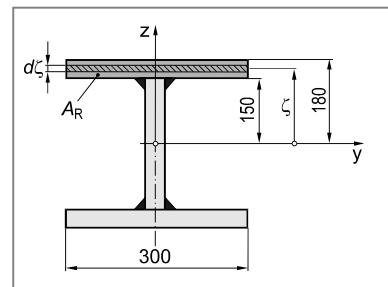
$$\tau(z) = \frac{F \cdot H_y(z)}{b(z) \cdot I_y}$$

Berechnung des Flächenmomentes 1. Ordnung der Restfläche (Gurtfläche A_R) bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

$$\begin{aligned} H_y(150 \text{ mm}) &= \int_{A_R} \zeta \cdot dA = \int_{150}^{180} \zeta \cdot b \cdot d\zeta = \frac{b}{2} \cdot [\zeta^2]_{150}^{180} \\ &= \frac{300 \text{ mm}}{2} \cdot (180^2 - 150^2) \text{ mm}^2 \\ &= 1485000 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes des Gesamtquerschnitts bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \cdot (I_{y1} + z_{S1}^2 \cdot A_1) + I_{y2} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{300 \text{ mm} \cdot (30 \text{ mm})^3}{12} + (165 \text{ mm})^2 \cdot 300 \text{ mm} \cdot 30 \text{ mm} \right) + \frac{30 \text{ mm} \cdot (300 \text{ mm})^3}{12} \\ &= 558900000 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$



Berechnung der Schubspannung im Teilungsbereich zwischen Gurt- und Stegblech

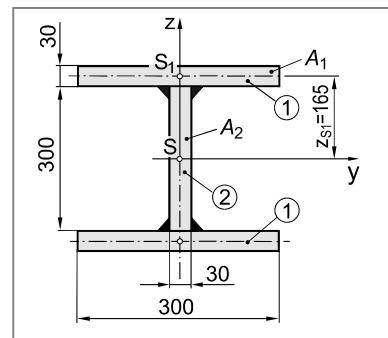
$$\begin{aligned} \tau(150 \text{ mm}) &= \tau = \frac{F \cdot H_y(150 \text{ mm})}{b(150 \text{ mm}) \cdot I_y} \\ &= \frac{100000 \text{ N} \cdot 1485000 \text{ mm}^3}{300 \text{ mm} \cdot 558900000 \text{ mm}^4} = 0,8857 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Berechnung der Längsschubkraft F_t in der Teilungsebene

$$F_t = \tau \cdot b \cdot t$$

Die Längsschubkraft muss von den Schweißnähten auf das Stegblech übertragen werden. In den Schweißnähten entsteht dadurch die Spannung:

$$\tau_s = \frac{F_t}{2 \cdot A_s} = \frac{\tau \cdot b \cdot t}{2 \cdot a \cdot l_s} = \frac{0,8857 \text{ N/mm}^2 \cdot 300 \text{ mm} \cdot 50 \text{ mm}}{2 \cdot 7 \text{ mm} \cdot 30 \text{ mm}} = 31,6 \text{ N/mm}^2$$



Ergänzende Hinweise: 1. Für durchgehende Nähte ist $t = l_s$.

2. Die Spannung in der Schweißnaht τ_s kann auch direkt aus Gleichung 10.31 (siehe Lehrbuch) berechnet werden.

b) $\tau_s \leq \tau_{zul} = 85 \text{ N/mm}^2$. Die Beanspruchung in der Schweißnaht ist **zulässig**.

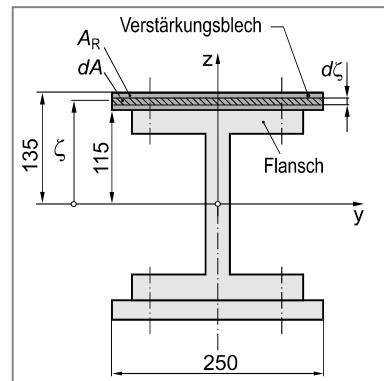
Lösung zu Aufgabe 10.5

Berechnung der Schubspannungen im Teilungsbereich zwischen Flanschblech des I-Trägers und dem aufgenieteten Verstärkungsblech

$$\tau(z) = \frac{Q \cdot H_y(z)}{b(z) \cdot I_y}$$

Berechnung des Flächenmomentes 1. Ordnung der Restfläche A_R (aufgenietetes Verstärkungsblech) bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

$$\begin{aligned} H_y(115 \text{ mm}) &= \int_{A_R} \zeta \cdot dA = \int_{115}^{135} \zeta \cdot b_2 \cdot d\zeta = \frac{b_2}{2} \cdot [\zeta^2]_{115}^{135} \\ &= \frac{250 \text{ mm}}{2} \cdot (135^2 - 115^2) \text{ mm}^2 = 625000 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$



Berechnung des axialen Flächenmomentes des Gesamtquerschnitts bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \cdot (I_{y1} + z_{S1}^2 \cdot A_1) + 2 \cdot (I_{y2} + z_{S2}^2 \cdot A_2) + I_{y3} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{250 \text{ mm} \cdot (20 \text{ mm})^3}{12} + (125 \text{ mm})^2 \cdot 250 \text{ mm} \cdot 20 \text{ mm} \right) \\ &\quad + 2 \cdot \left(\frac{200 \text{ mm} \cdot (30 \text{ mm})^3}{12} + (100 \text{ mm})^2 \cdot 200 \text{ mm} \cdot 30 \text{ mm} \right) + \frac{30 \text{ mm} \cdot (170 \text{ mm})^3}{12} \\ &= 289765833 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Berechnung der maximalen Querkraft

Die maximale Querkraft Q herrscht im Bereich der Einspannstelle:

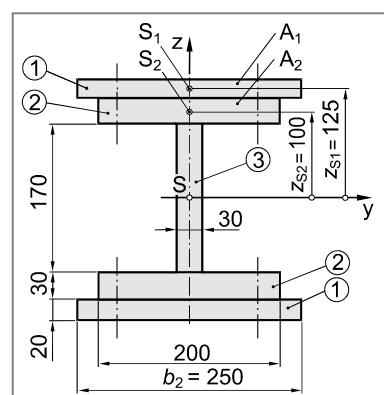
$$Q = F + q \cdot a = 60 \text{ kN} + 25 \text{ kN/m} \cdot 1,2 \text{ m} = 90 \text{ kN}$$

Berechnung der Schubspannung im Teilungsbereich zwischen Flansch und aufgenietetem Verstärkungsblech

$$\tau(115 \text{ mm}) = \tau = \frac{Q \cdot H_y(115 \text{ mm})}{b_2 \cdot I_y}$$

Die Schubspannung τ erzeugt in der Teilungsebene innerhalb der Teilungslänge t die Längsschubkraft F_t :

$$F_t = \tau \cdot b_2 \cdot t$$



Die Längsschubkraft muss von jeweils einem Paar paralleler Nieten auf den I-Träger übertragen werden. Jede der beiden einschnittig auf Abscherung beanspruchten Nieten erfährt damit die Längsschubkraft $F_N = F_t / 2$. Diese Schubkraft F_N erzeugt im Nietquerschnitt (Vollkreisquerschnitt) die maximale Schubspannung $\tau_{N\max}$ (siehe Tabelle 10.1 im Lehrbuch)

$$\tau_{N\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{F_N}{A_N} \quad \text{mit } A_N = \frac{\pi}{4} \cdot d_N^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\tau_{N\max} \leq \tau_{zul}$$

Damit folgt letztlich für die Nietteilung t :

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{F_N}{A_N} = \tau_{zul}$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{F_t / 2}{A_N} = \tau_{zul}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\tau \cdot b_2 \cdot t}{A_N} = \tau_{zul}$$

$$\frac{2}{3 \cdot A_N} \cdot \frac{Q \cdot H_y (115 \text{ mm})}{b_2 \cdot I_y} \cdot b_2 \cdot t = \tau_{zul}$$

$$t = \frac{3 \cdot A_N \cdot I_y}{2 \cdot Q \cdot H_y (115 \text{ mm})} \cdot \tau_{zul} = \frac{3 \cdot \pi \cdot d_N^2 \cdot I_y}{8 \cdot Q \cdot H_y (115 \text{ mm})} \cdot \tau_{zul}$$

$$t = \frac{3 \cdot \pi \cdot (12 \text{ mm})^2 \cdot 289\,765\,833 \text{ mm}^4}{8 \cdot 90\,000 \text{ N} \cdot 625\,000 \text{ mm}^3} \cdot 120 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{104,9 \text{ mm}}$$

Anmerkung: Dasselbe Ergebnis hätte man auch aus Gleichung 10.29 (siehe Lehrbuch) mit $\tau_{N\max} = \tau_{zul}$ und Auflösung nach der Nietteilung t erhalten.

Lösung zu Aufgabe 10.6

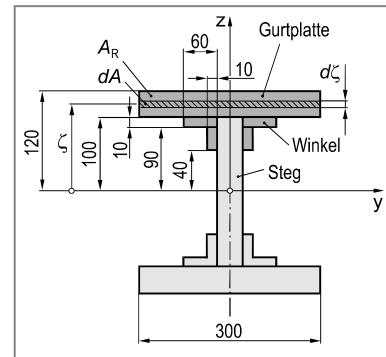
Berechnung der Schubspannungen im Teilungsbereich zwischen Stahlwinkel und Stegblech

$$\tau(z) = \frac{Q \cdot H_y(z)}{b(z) \cdot I_y}$$

Berechnung des Flächenmomentes 1. Ordnung der Restfläche A_R bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

Die Restfläche besteht aus Gurtblech *und* zwei Stahlwinkeln, daher gilt:

$$H_y = H_{y\text{Gurt}} + 2 \cdot H_{y\text{Winkel}}$$



Berechnung des Flächenmomentes 1. Ordnung des Gurtbleches bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt (siehe Aufgabe 10.5):

$$H_{y\text{Gurt}} = \frac{300 \text{ mm}}{2} \cdot (120^2 - 100^2) \text{ mm}^2 = 660\,000 \text{ mm}^3$$

Berechnung des Flächenmomentes 1. Ordnung des Stahlwinkels bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt:

$$\begin{aligned} H_{y\text{Winkel}} &= \frac{60 \text{ mm}}{2} \cdot (100^2 - 90^2) \text{ mm}^2 + \frac{10 \text{ mm}}{2} \cdot (90^2 - 40^2) \text{ mm}^2 \\ &= 57\,000 \text{ mm}^3 + 32\,500 \text{ mm}^3 = 89\,500 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Damit folgt für das Flächenmoment 1. Ordnung der Restfläche A_R bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt:

$$H_y = H_{y\text{Gurt}} + 2 \cdot H_{y\text{Winkel}} = 660\,000 \text{ mm}^3 + 2 \cdot 89\,500 \text{ mm}^3 = 839\,000 \text{ mm}^3$$

Berechnung der axialen Flächenmomente der Teilflächen bezüglich der y-Achse

$$I_{y1} = \frac{300 \cdot 20^3}{12} \text{ mm}^4 + (110 \text{ mm})^2 \cdot 6\,000 \text{ mm}^2 = 72\,800\,000 \text{ mm}^4$$

$$I_{y2a} = \frac{60 \cdot 10^3}{12} \text{ mm}^4 + (95 \text{ mm})^2 \cdot 600 \text{ mm}^2 = 5\,420\,000 \text{ mm}^4$$

$$I_{y2b} = \frac{10 \cdot 50^3}{12} \text{ mm}^4 + (65 \text{ mm})^2 \cdot 500 \text{ mm}^2 = 2\,216\,667 \text{ mm}^4$$

$$I_{y3} = \frac{30 \cdot 200^3}{12} \text{ mm}^4 = 20\,000\,000 \text{ mm}^4$$

Berechnung des axialen Flächenmomentes der Gesamtfläche

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \cdot I_{y1} + 4 \cdot (I_{y2a} + I_{y2b}) + I_{y3} \\ &= 2 \cdot 72\,800\,000 \text{ mm}^4 + 4 \cdot (5\,420\,000 \text{ mm}^4 + 2\,216\,667 \text{ mm}^4) + 20\,000\,000 \text{ mm}^4 \\ &= 196\,146\,668 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Berechnung der von den Stegrietzen zu übertragenden Längsschubkraft

$$F_t = \tau \cdot A = \tau \cdot b \cdot t = \frac{Q \cdot H_y}{b \cdot I_y} \cdot b \cdot t = \frac{Q \cdot H_y}{I_y} \cdot t$$

Die Längsschubkraft F_t muss von einer zweischnittig auf Abscherung beanspruchten Stegriete übertragen werden. In jeder Schnittfläche herrscht die Schubkraft $F_N = F_t / 2$.

Festigkeitsbedingung

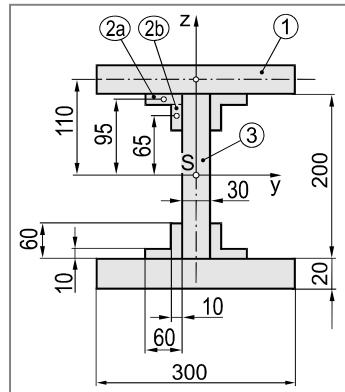
$$\tau_{N \max} \leq \tau_{zul}$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{F_N}{A_N} = \tau_{zul}$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{F_t / 2}{\frac{\pi}{4} \cdot d_N^2} = \tau_{zul}$$

$$\frac{8 \cdot Q \cdot H_y \cdot t}{3 \cdot \pi \cdot d_N^2 \cdot I_y} = \tau_{zul}$$

$$t = \tau_{zul} \cdot \frac{3 \cdot \pi \cdot d_N^2 \cdot I_y}{8 \cdot Q \cdot H_y} = 150 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{3 \cdot \pi \cdot (15 \text{ mm})^2 \cdot 196146668 \text{ mm}^4}{8 \cdot 150000 \text{ N} \cdot 839000 \text{ mm}^3} = 61,97 \text{ mm}$$

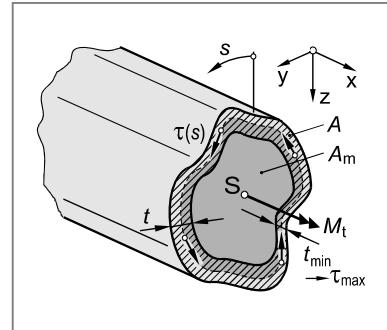


11 Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

11.1 Formelsammlung zur Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

Torsion dünnwandiger, geschlossener Hohlprofile

$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{2 \cdot A_m \cdot t_{\min}} \quad \text{1. Bredt'sche Formel}$$



Torsion dünnwandiger, offener Hohlprofile

Torsionsflächenmoment (Drillwiderstand) eines aus schmalen Rechtecken zusammengesetzten offenen Hohlprofils

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$$

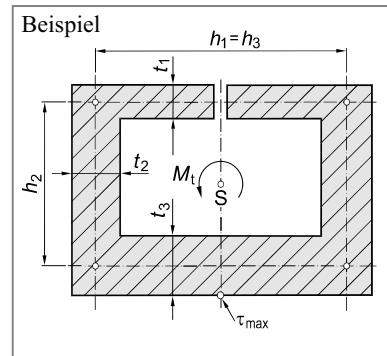
Maximale Schubspannung bei Torsion eines aus schmalen Rechtecken zusammengesetzten offenen Hohlprofils

$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{3 \cdot t_{\max}}{\sum_i h_i \cdot t_i^3} \cdot M_t$$

Grundgleichungen zur Torsion ausgewählter Querschnitte

$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

Maximale Torsionsschubspannung in einem geraden prismatichen Stab mit beliebiger Querschnittsform

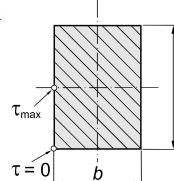
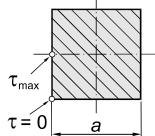
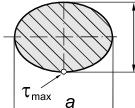
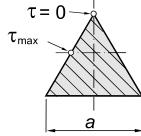
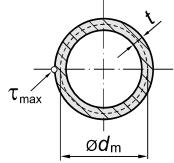
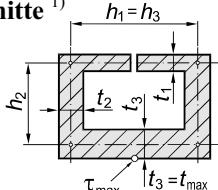


Torsionsflächenmomente I_t und Torsionswiderstandsmomente W_t bedeutsamer Querschnittsflächen

Profil	Torsionsflächenmoment I_t	Torsionswiderstandsmoment W_t
Vollkreis	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$
Kreisring ¹⁾	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4)$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$

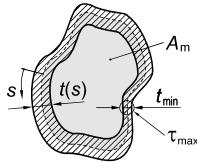
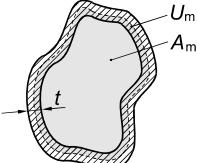
¹⁾ dickwandig

Torsionsflächenmomente I_t und Torsionswiderstandsmomente W_t bedeutsamer Querschnittsflächen

Profil	Torsionsflächenmoment I_t	Torsionswiderstandsmoment W_t
Rechteck 	$I_t = c_1 \cdot h \cdot b^3$ mit $c_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{0,630}{h/b} + \frac{0,052}{(h/b)^5} \right)$ und $c_2 = 1 - \frac{0,650}{1 + (h/b)^3}$	$W_t = \frac{c_1}{c_2} \cdot h \cdot b^2$
Quadrat 	$I_t = 0,141 \cdot a^4$	$W_t = 0,208 \cdot a^3$
Ellipse 	$I_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2}$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot a \cdot b^2$
Gleichseitiges Dreieck 	$I_t = \frac{a^4}{46,2}$	$W_t = \frac{a^3}{20}$
Dünnwandiges, geschlossenes Kreisrohr ($t = \text{konst.}$) 	$I_t = \frac{\pi}{4} \cdot d_m^3 \cdot t$	$W_t = \frac{\pi}{2} \cdot d_m^2 \cdot t$
Dünnwandige offene Hohlquerschnitte ¹⁾ 	$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$	$W_t = \frac{1}{3 \cdot t_{\max}} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$

¹⁾ aus schmalen Rechteckquerschnitten zusammengesetzt

Torsionsflächenmomente I_t und Torsionswiderstandsmomente W_t bedeutsamer Querschnittsflächen

Profil	Torsionsflächenmoment I_t	Torsionswiderstandsmoment W_t
Dünnwandige, geschlossene Hohlquerschnitte mit veränderlicher Wanddicke ¹⁾ 	$I_t = \frac{4 \cdot A_m^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}}$	$W_t = 2 \cdot A_m \cdot t_{\min}$
Dünnwandige, geschlossene Hohlquerschnitte mit konstanter Wanddicke ²⁾ 	$I_t = \frac{4 \cdot A_m^2 \cdot t}{U_m}$	$W_t = 2 \cdot A_m \cdot t$

¹⁾ $\oint ds / t(s)$ ist das Linienintegral längs der Profilmittellinie

²⁾ U_m ist die Länge der Mittellinie

11.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 11.1

Da es sich um ein dünnwandiges, geschlossenes Hohlprofil handelt, kann die maximale Schubspannung mit Hilfe der 1. Bredt'schen Formel berechnet werden.

$$\tau_{\max} \equiv \tau_t = \frac{M_t}{2 \cdot A_m \cdot t_{\min}} = \frac{M_t}{2 \cdot 2a \cdot a \cdot 0,1 \cdot a} = \frac{M_t}{0,4 \cdot a^3}$$

Festigkeitsbedingung

$$\tau_t \leq \tau_{t \text{ zul}}$$

$$\frac{M_t}{0,4 \cdot a^3} = \frac{\tau_{tF}}{S_F} = \frac{R_e}{2 \cdot S_F}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{2,5 \cdot M_t \cdot S_F}{R_e / 2}} = \sqrt[3]{\frac{2,5 \cdot 500\,000 \text{ Nmm} \cdot 1,5}{240 \text{ N/mm}^2 / 2}} = 25 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 11.2

Die maximale Schubspannung eines dünnwandigen, offenen Hohlprofils berechnet sich gemäß:

$$\tau_{\max} \equiv \tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{3 \cdot t_{\max}}{\sum_i h_i \cdot t_i^3} \cdot M_t$$

mit: $t_{\max} = 0,1 \cdot a$

$$\text{und } \sum_i h_i \cdot t_i^3 = 2 \cdot 2a \cdot (0,1 \cdot a)^3 + 2 \cdot a \cdot (0,1 \cdot a)^3 = 0,004 \cdot a^4 + 0,002 \cdot a^4 = 0,006 \cdot a^4$$

folgt für die maximale Schubspannung:

$$\tau_t = \frac{3 \cdot 0,1 \cdot a}{0,006 \cdot a^4} \cdot M_t = 50 \cdot \frac{M_t}{a^3}$$

Festigkeitsbedingung

$$\tau_t \leq \tau_{t \text{ zul}}$$

$$50 \cdot \frac{M_t}{a^3} = \frac{\tau_{tF}}{S_F} = \frac{R_e}{2 \cdot S_F}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{50 \cdot M_t \cdot S_F}{R_e / 2}} = \sqrt[3]{\frac{50 \cdot 500\,000 \text{ Nmm} \cdot 1,5}{240 \text{ N/mm}^2 / 2}} = 67,9 \text{ mm}$$

Ein Vergleich der Ergebnisse von Aufgabe 11.1 und 11.2 zeigt, dass offene Hohlprofile zur Übertragung von Drehmomenten ungeeignet sind.

Lösung zu Aufgabe 11.3

Da es sich um ein dünnwandiges, geschlossenes Hohlprofil handelt, kann die maximale Schubspannung mit Hilfe der 1. Bredt'schen Formel berechnet werden.

$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{2 \cdot A_m \cdot t_{\min}}$$

mit: $t_{\min} = 0,1 \cdot a$

$$A_m = a \cdot a + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot a^2$$

Damit folgt für die maximale Schubspannung:

$$\tau_t = \frac{M_t}{2 \cdot A_m \cdot t_{\min}} = \frac{M_t}{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot 0,1a} = \frac{M_t}{0,3 \cdot a^3}$$

Festigkeitsbedingung

$$\tau_t \leq \tau_{t \text{ zul}}$$

$$\frac{M_t}{0,3 \cdot a^3} = \frac{\tau_{tF}}{S_F} = \frac{R_{p0,2}}{2 \cdot S_F}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot M_t \cdot S_F}{0,3 \cdot R_{p0,2}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 250\,000\,000 \text{ Nmm} \cdot 1,5}{0,3 \cdot 500 \text{ N/mm}^2}} = 171 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 11.4

Berechnung der maximalen Schubspannung für das dünnwandige, offene Stahlrohr

$$\tau_{\max 1} = \tau_{t1} = \frac{3 \cdot t_{\max}}{\sum_i h_i \cdot t_i^3} \cdot M_{t1} = \frac{3 \cdot s}{\pi \cdot d_m \cdot s^3} \cdot M_{t1} = \frac{3 \cdot M_{t1}}{\pi \cdot d_m \cdot s^2}$$

Festigkeitsbedingung (Fließen):

$$\tau_{t1} \leq \tau_{tf}$$

$$\frac{3 \cdot M_{t1}}{\pi \cdot d_m \cdot s^2} = \tau_{tf}$$

$$M_{t1} = \frac{\pi}{3} \cdot \tau_{tf} \cdot d_m \cdot s^2$$

Berechnung der maximalen Schubspannung für das dünnwandige, geschlossene Stahlrohr (1. Bredt'sche Formel)

$$\tau_{\max 2} = \tau_{t2} = \frac{M_{t2}}{2 \cdot A_m \cdot t_{\min}} = \frac{M_{t2}}{2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_m^2 \cdot s} = \frac{2 \cdot M_{t2}}{\pi \cdot d_m^2 \cdot s}$$

Festigkeitsbedingung (Fließen):

$$\tau_{t2} \leq \tau_{tf}$$

$$\frac{2 \cdot M_{t2}}{\pi \cdot d_m^2 \cdot s} = \tau_{tf}$$

$$M_{t2} = \frac{\pi}{2} \cdot \tau_{tf} \cdot d_m^2 \cdot s$$

Berechnung des Verhältnisses der übertragbaren Torsionsmomente

$$\frac{M_{t2}}{M_{t1}} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \tau_{tf} \cdot d_m^2 \cdot s}{\frac{\pi}{3} \cdot \tau_{tf} \cdot d_m \cdot s^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{d_m}{s}$$

12 Behälter unter Innen- und Außendruck

12.1 Formelsammlung zu Behältern unter Innen- und Außendruck

Dünnwandige Behälter unter Innendruck

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s}$$

Tangentialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck

$$\sigma_a = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} = \frac{\sigma_t}{2}$$

Axialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck

$$\sigma_r = -\frac{p_i}{2}$$

Radialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck
(Mittelwert)

$$\sigma_{VSH} = p_i \cdot \frac{d_m}{2 \cdot s}$$

Vergleichsspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck unter Anwendung der Schubspannungshypothese

Dünnwandige Behälter unter Außendruck

$$\sigma_t = -p_a \cdot \frac{d_a}{2 \cdot s}$$

Tangentialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Außendruck

$$\sigma_a = -p_a \cdot \frac{d_a}{4 \cdot s}$$

Axialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Außendruck (Mittelwert)

$$\sigma_r = -\frac{p_a}{2}$$

Radialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Außendruck

Dünnwandige Hohlkugel unter Innen- bzw. Außendruck

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s}$$

Tangentialspannung einer dünnwandigen Hohlkugel unter Innendruck

$$\sigma_t = -p_a \cdot \frac{d_a}{4 \cdot s}$$

Tangentialspannung einer dünnwandigen Hohlkugel unter Außendruck

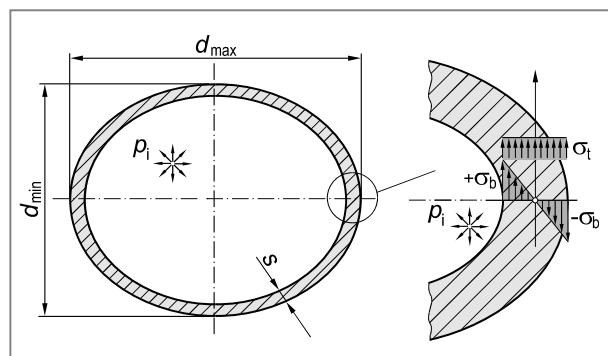
Dünnwandige Behälter mit elliptischer Unrundheit

Biegespannung in der Wand eines unrunderen, dünnwandigen Behälters

$$\sigma_b = \pm \frac{3}{4} \cdot p_i \cdot \left(\frac{d_i}{s} \right)^2 \cdot \kappa \cdot f$$

$$\text{mit } \kappa = \frac{2 \cdot (d_{\max} - d_{\min})}{d_{\max} + d_{\min}}$$

$$\text{und } f = \frac{1}{1 + \frac{1 - \mu^2}{2 \cdot E} \cdot p_i \cdot \left(\frac{d_i}{s} \right)^3}$$



Die Biegespannung σ_b überlagert sich der Tangentialspannung σ_t .

Berechnungsformeln für den dickwandigen Behälter

		Elastischer Zustand unter Innen- und Außendruck	Spannungen am Außenrand ($r = r_a$)
Spannungsverläufe		Spannungen am Innenrand ($r = r_i$)	Spannungen am Außenrand ($r = r_a$)
Tangential- spannung	$\sigma_t = p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2 + 1}{r_i^2} \right) - p_a \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right)$	$\sigma_{ti} = p_i \cdot \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - p_a \cdot \frac{2 \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$	$\sigma_{ta} = p_i \cdot \frac{2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - p_a \cdot \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$
Axial- spannung	$\sigma_a = \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$	$\sigma_{ai} = \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$	$\sigma_{aa} = \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$
Radial- spannung	$\sigma_r = -p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right) - p_a \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right)$	$\sigma_{ri} = -p_i$	$\sigma_{ra} = -p_a$
		Teilplastischer Zustand unter Innendruck - vollplastischer Innenring ($r_i \leq r \leq c$)	Spannungen am Außenrand ($r = r_a$)
Innendruck bei Fließbeginn:	$p_{FB} = R_e \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{\sqrt{3} \cdot r_a^2}$	Spannungen am Innenrand ($r = r_i$)	Spannungen am Außenrand ($r = r_a$)
Tangential- spannung	$\sigma_t = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r}{c} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 + 1 \right)$	$\sigma_{ti} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r_i}{c} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 + 1 \right)$	$\sigma_{ta} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\left(\frac{c}{r_a} \right)^2 + 1 \right)$
Axial- spannung	$\sigma_a = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r}{c} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 \right)$	$\sigma_{ai} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r_i}{c} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 \right)$	$\sigma_{aa} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{c}{r_a} \right)^2$
Radial- spannung	$\sigma_r = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r}{c} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 - 1 \right)$	$\sigma_{ri} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln \left(\frac{r_i}{c} \right)^2 + \left(\frac{c}{r_a} \right)^2 - 1 \right)$	$\sigma_{ra} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\left(\frac{c}{r_a} \right)^2 - 1 \right)$

Fortsetzung: Berechnungsformeln für den dickwandigen Behälter

Teilplastischer Zustand unter Innendruck - elastischer Außenring ($c < r \leq r_a$)		
Zusammenhang zwischen Innendruck und Grenzradius c: $P_{\text{v}} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{c}{r_i}\right)^2 - \left(\frac{c}{r_a}\right)^2 + 1 \right)$	Spannungen am Innenrand ($r = c$) $\sigma_{ii} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{c^2} + 1 \right)$	Spannungen am Außenrand ($r = r_a$) $\sigma_{ta} = 2 \cdot \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}$
Tangentialspannung $\sigma_t = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{c^2} \right)$	$\sigma_{ai} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{c^2} - 1 \right)$	$\sigma_{aa} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}$
Axialspannung $\sigma_a = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}$	$\sigma_{ri} = -\frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{c^2} - 1 \right)$	$\sigma_{ra} = 0$
Radialspannung $\sigma_r = -\frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{c^2} - 1 \right)$		
Volplastischer Zustand unter Innendruck		
Innendruck mit Erreichen des volplastischen Zustandes: $P_{1 \text{ VPL}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$	Spannungen am Innenrand ($r = r_i$) $\sigma_{ii} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \left(1 - \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \right)$	Spannungen am Außenrand ($r = r_a$) $\sigma_{ta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e$
Tangentialspannung $\sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \left(1 - \ln\left(\frac{r_a}{r}\right) \right)$	$\sigma_{ai} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - 2 \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \right)$	$\sigma_{aa} = \frac{R_e}{\sqrt{3}}$
Axialspannung $\sigma_a = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - 2 \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r}\right) \right)$	$\sigma_{ri} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r}\right)$	$\sigma_{ra} = 0$
Radialspannung $\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r}\right)$		

12.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 12.1

Berechnung des Durchmesserverhältnisses

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{50 \text{ mm}}{45 \text{ mm}} = 1,11 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

Berechnung der Spannungskomponenten

Tangentialspannung:

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} = 25 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{45 \text{ mm}}{2 \cdot 2,5 \text{ mm}} = 225 \text{ N/mm}^2$$

Axialspannung:

$$\sigma_a = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} = \frac{\sigma_t}{2} = \frac{225 \text{ N/mm}^2}{2} = 112,5 \text{ N/mm}^2$$

Radialspannung (Mittelwert):

$$\sigma_r = -\frac{p_i}{2} = -12,5 \text{ N/mm}^2$$

Lösung zu Aufgabe 12.2

a) Berechnung des Durchmesserverhältnisses

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{170 \text{ mm}}{150 \text{ mm}} = 1,13 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

Berechnung des zulässigen Innendrucks für P295GH

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{VSH} \leq \frac{R_e}{S_F}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_e}{S_F}$$

$$\frac{p_i \cdot d_i}{2 \cdot s} - \left(-\frac{p_i}{2} \right) = \frac{R_e}{S_F}$$

$$p_i = \frac{2 \cdot s}{d_i + s} \cdot \frac{R_e}{S_F} = \frac{2 \cdot 10 \text{ mm}}{150 \text{ mm} + 10 \text{ mm}} \cdot \frac{310 \text{ N/mm}^2}{1,5} = 25,83 \text{ N/mm}^2 = 25,83 \text{ MPa}$$

Berechnung des zulässigen Innendrucks für EN-GJL-200

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{VNH} \leq \frac{R_m}{S_B}$$

$$\sigma_1 = \frac{R_m}{S_B}$$

$$\frac{p_i \cdot d_i}{2 \cdot s} = \frac{R_m}{S_B}$$

$$p_i = \frac{2 \cdot s}{d_i} \cdot \frac{R_m}{S_B} = \frac{2 \cdot 10 \text{ mm}}{150 \text{ mm}} \cdot \frac{200 \text{ N/mm}^2}{4,0} = 6,67 \text{ N/mm}^2 = 6,67 \text{ MPa}$$

b) Berechnung der Vergrößerung des mittleren Zylinderdurchmessers für P295GH

Hooke'sches Gesetz für den dreiachsisigen Spannungszustand:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot (\sigma_a + \sigma_r)) = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{p_i \cdot d_i}{2 \cdot s} - \mu \cdot \left(\frac{p_i \cdot d_i}{4 \cdot s} - \frac{p_i}{2} \right) \right) \\ &= \frac{p_i}{E} \cdot \left(\frac{d_i}{2 \cdot s} - \mu \cdot \left(\frac{d_i}{4 \cdot s} - \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{25,83 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} \cdot \left(\frac{150 \text{ mm}}{2 \cdot 10 \text{ mm}} - 0,30 \cdot \left(\frac{150 \text{ mm}}{4 \cdot 10 \text{ mm}} - \frac{1}{2} \right) \right) = 0,000803 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta U_m}{U_m} = \frac{\pi \cdot \Delta d_m}{\pi \cdot d_m} = \frac{\Delta d_m}{d_m}$$

$$\Delta d_m = \varepsilon_t \cdot d_m = \varepsilon_t \cdot (d_i + s) = 0,000803 \cdot (150 \text{ mm} + 10 \text{ mm}) = 0,128 \text{ mm}$$

Berechnung der Vergrößerung des mittleren Zylinderdurchmessers für EN-GJL-200

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \frac{p_i}{E} \cdot \left(\frac{d_i}{2 \cdot s} - \mu \cdot \left(\frac{d_i}{4 \cdot s} - \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{6,67 \text{ N/mm}^2}{100\,000 \text{ N/mm}^2} \cdot \left(\frac{150 \text{ mm}}{2 \cdot 10 \text{ mm}} - 0,25 \cdot \left(\frac{150 \text{ mm}}{4 \cdot 10 \text{ mm}} - \frac{1}{2} \right) \right) = 0,000446\end{aligned}$$

$$\Delta d_m = \varepsilon_t \cdot d_m = \varepsilon_t \cdot (d_i + s) = 0,000446 \cdot (150 \text{ mm} + 10 \text{ mm}) = \mathbf{0,071 \text{ mm}}$$

Lösung zu Aufgabe 12.3

a) Berechnung des Durchmesserverhältnisses

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{150 \text{ mm}}{140 \text{ mm}} = 1,07 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

Berechnung der Spannungen in Tangential- und Axialrichtung durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand, da Außenoberfläche)

$$\begin{aligned}\sigma_{t1} &= \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_a) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1 - 0,30^2} \cdot (0,8095 \% + 0,30 \cdot 0,1905 \% \cdot 10^{-3}) \\ &= 200 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Berechnung des Innendrucks p_1

$$\begin{aligned}\sigma_{t1} &= p_1 \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} \\ p_1 &= \frac{2 \cdot s}{d_i} \cdot \sigma_{t1} = \frac{2 \cdot 5 \text{ mm}}{140 \text{ mm}} \cdot 200 \text{ N/mm}^2 = 14,29 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{14,29 \text{ MPa}}$$

b) Berechnung der Axial- und Radialspannung

$$\sigma_{a1} = \frac{\sigma_t}{2} = \frac{200 \text{ N/mm}^2}{2} = 100 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{r1} = -\frac{p_i}{2} = \frac{14,29 \text{ N/mm}^2}{2} = -7,14 \text{ N/mm}^2$$

Die Zugspannung $\sigma_z = F_1 / A$ aus der Zugkraft F_1 überlagert sich linear der Axialspannung aus Innendruck, so dass die gesamte Axialspannung größer wird, im Vergleich zur Tangentialspannung (Annahme). Es folgt also für die Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_{a \text{ ges}} = \sigma_{a1} + \frac{F_1}{A} \equiv \sigma_1$$

$$\sigma_{r1} \equiv \sigma_3$$

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{VSH} \leq \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_{a1} + \frac{F_1}{A} - \sigma_{r1} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= A \cdot \left(\frac{R_{p0,2}}{S_F} + \sigma_{rl} - \sigma_{al} \right) \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot (150^2 - 140^2) \text{ mm}^2 \cdot \left(\frac{420 \text{ N/mm}^2}{1,5} - 7,14 \text{ N/mm}^2 - 100 \text{ N/mm}^2 \right) \\
 &= 393\,709 \text{ N} = \mathbf{393,7 \text{ kN}}
 \end{aligned}$$

c) **Berechnung der Spannungen in Tangential- und Axialrichtung durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes** (zweiachsiger Spannungszustand, da Außenoberfläche)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{t2} &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_{t2} + \mu \cdot \varepsilon_{a2}) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (0,2524 \% + 0,30 \cdot 0,5743 \%) \cdot 10^{-3} \\
 &= 98 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{a2} &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_{a2} + \mu \cdot \varepsilon_{t2}) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (0,5743 \% + 0,30 \cdot 0,2524 \%) \cdot 10^{-3} \\
 &= 150 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}$$

Berechnung des Innendrucks p_2

$$\begin{aligned}
 \sigma_{t2} &= p_2 \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} \\
 p_2 &= \frac{2 \cdot s}{d_i} \cdot \sigma_{t1} = \frac{2 \cdot 5 \text{ mm}}{140 \text{ mm}} \cdot 98 \text{ N/mm}^2 = 7 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{7 \text{ MPa}}
 \end{aligned}$$

Berechnung der Zugkraft F_2

$$\begin{aligned}
 \sigma_{a2} &= p_2 \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} + \frac{F_2}{A} \\
 F_2 &= A \cdot \left(\sigma_{a2} - p_2 \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} \right) \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot (150^2 - 140^2) \text{ mm}^2 \cdot \left(150 \text{ N/mm}^2 - 7 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{140 \text{ mm}}{4 \cdot 5 \text{ mm}} \right) \\
 &= 230\,037 \text{ N} = \mathbf{230 \text{ kN}}
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 12.4

a) Berechnung des Durchmesserverhältnisses

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{516 \text{ mm}}{500 \text{ mm}} = 1,03 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

Berechnung des Innendrucks p_i

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s}$$

$$p_i = \frac{2 \cdot s}{d_i} \cdot \sigma_t = \frac{2 \cdot 8 \text{ mm}}{500 \text{ mm}} \cdot 250 \text{ N/mm}^2 = 8 \text{ N/mm}^2 = 8 \text{ MPa}$$

b) Berechnung der Axial- und Radialspannung

$$\sigma_a = \frac{\sigma_t}{2} = \frac{250 \text{ N/mm}^2}{2} = 125 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_r = -\frac{p_i}{2} = -\frac{8 \text{ N/mm}^2}{2} = -4 \text{ N/mm}^2$$

c) Berechnung der Vergrößerung des mittleren Zylinderdurchmessers (zweiachsiger Spannungszustand an der Behälteroberfläche)

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_a) = \frac{250 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 125 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,00101$$

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta U_a}{U_a} = \frac{\pi \cdot \Delta d_a}{\pi \cdot d_a} = \frac{\Delta d_a}{d_a}$$

$$\Delta d_a = \varepsilon_t \cdot d_a = 0,00101 \cdot 516 \text{ mm} = 0,522 \text{ mm}$$

d) Berechnung der Sicherheiten gegen Fließen und Bruch

Festigkeitsbedingung (Fließen)

$$\sigma_{VSH} \leq \frac{R_e}{S_F}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_e}{S_F}$$

$$\sigma_t - \sigma_r = \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_t - \sigma_r} = \frac{355 \text{ N/mm}^2}{250 \text{ N/mm}^2 - (-4 \text{ N/mm}^2)} = 1,40 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

e) Berechnung der Haltekraft F

$$p_i = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi}{4} \cdot d_a^2}$$

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot d_a^2 \cdot p_i = \frac{\pi}{4} \cdot (516 \text{ mm})^2 \cdot 8 \text{ N/mm}^2 = 1672939 \text{ N} = 1672,9 \text{ kN}$$

f) Ermittlung der Spannungskomponenten

$$\sigma_t = 250 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{unverändert})$$

$$\sigma_a = 0$$

$$\sigma_r = -4 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{unverändert})$$

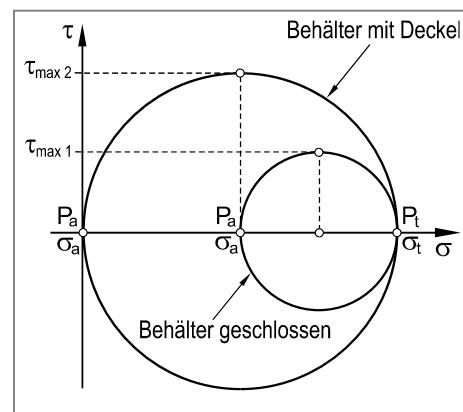
g) Mohr'sche Spannungskreise und maximale Schubspannungen

Die Schnittflächen mit den Flächennormalen in Tangential- und Axialrichtung enthalten keine Schubspannungen (nur Innendruck). Die Normalspannungen in diesen Schnittebenen sind dementsprechend Hauptnormalspannungen. Die Bildpunkte P_t und P_a welche die Spannungskomponenten in diesen Schnittebenen repräsentieren, fallen dementsprechend mit der σ -Achse zusammen und der Mohr'sche Spannungskreis lässt sich auf einfache Weise konstruieren.

Für die maximalen Schubspannungen erhält man:

$$\text{Geschlossener Behälter: } \tau_{\max 1} = \frac{\sigma_t - \sigma_a}{2} = \frac{250 \text{ N/mm}^2 - 125 \text{ N/mm}^2}{2} = 62,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Behälter mit Deckel: } \tau_{\max 2} = \frac{\sigma_t - \sigma_a}{2} = \frac{\sigma_t - 0}{2} = \frac{\sigma_t}{2} = 125 \text{ N/mm}^2$$



Lösung zu Aufgabe 12.5

a) Berechnung des Durchmesserverhältnisses

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{272 \text{ mm}}{240 \text{ mm}} = 1,13 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

Berechnung der Spannungen in Tangential- und Axialrichtung durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand, da Außenoberfläche)

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_a) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1 - 0,30^2} \cdot (0,4048 \% + 0,30 \cdot 0,0952 \%) \cdot 10^{-3} \\ &= 100 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_a + \mu \cdot \varepsilon_t) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1 - 0,30^2} \cdot (0,0952 \% + 0,30 \cdot 0,4048 \%) \cdot 10^{-3} \\ &= 50 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

b) Berechnung des Innendrucks p_i

$$\begin{aligned}\sigma_t &= p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} \\ p_i &= \frac{2 \cdot s}{d_i} \cdot \sigma_t = \frac{2 \cdot 16 \text{ mm}}{240 \text{ mm}} \cdot 100 \text{ N/mm}^2 = 13,33 \text{ N/mm}^2 = 13,33 \text{ MPa}\end{aligned}$$

c) Berechnung des zulässigen Innendrucks

Festigkeitsbedingung (Fließen):

$$\sigma_{VSH} \leq \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\frac{p_i \cdot d_i}{2 \cdot s} - \left(-\frac{p_i}{2} \right) = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$p_i \cdot \frac{d_i + s}{2 \cdot s} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$p_i = \frac{R_{p0,2}}{S_F} \cdot \frac{2 \cdot s}{d_i + s} = \frac{280 \text{ N/mm}^2}{1,6} \cdot \frac{2 \cdot 16 \text{ mm}}{240 \text{ mm} + 16 \text{ mm}} = 21,88 \text{ N/mm}^2 = 21,88 \text{ MPa}$$

d1) Ermittlung der Formzahl

$$\frac{t}{d_i} = \frac{24 \text{ mm}}{240 \text{ mm}} = 0,1$$

aus Formzahldiagramm abgelesen: $\alpha_k = 2,84$

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{\max} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_n \cdot \alpha_k = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\frac{p \cdot d_i}{2 \cdot s} \cdot \alpha_k = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{2 \cdot s \cdot R_{p0,2}}{p \cdot d_i \cdot \alpha_k} = \frac{2 \cdot 16 \text{ mm} \cdot 280 \text{ N/mm}^2}{10 \text{ N/mm}^2 \cdot 240 \text{ mm} \cdot 2,84} = 1,31 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

d2) Berechnung der plastischen Stützziffer n_{pl}

$$n_{pl} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_F}} = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{R_{p0,2} / E}} = \sqrt{1 + \frac{0,003}{280 \text{ N/mm}^2 / 210000 \text{ N/mm}^2}} = 1,80$$

Berechnung des Innendrucks bei Fließbeginn (p_F)

Fließbedingung:

$$\sigma_{\max} = R_{p0,2}$$

$$\sigma_n \cdot \alpha_k = R_{p0,2}$$

$$\frac{p_F \cdot d_i}{2 \cdot s} \cdot \alpha_k = R_{p0,2}$$

$$p_F = \frac{2 \cdot s \cdot R_{p0,2}}{d_i \cdot \alpha_k} = \frac{2 \cdot 16 \text{ mm} \cdot 280 \text{ N/mm}^2}{240 \text{ mm} \cdot 2,84} = 13,15 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Innendrucks p_{pl} mit Erreichen einer Dehnung von $\varepsilon_{pl} = 0,3\%$

$$n_{pl} = \frac{p_{pl}}{p_F}$$

$$p_{pl} = n_{pl} \cdot p_F = 1,80 \cdot 13,15 \text{ N/mm}^2 = 23,698 \text{ N/mm}^2$$

Damit folgt für die Sicherheit gegen das Erreichen der Dehnung ε_{pl} :

$$S_{pl} = \frac{p_{pl}}{p_i} = \frac{23,698 \text{ N/mm}^2}{10 \text{ N/mm}^2} = 2,37$$

Lösung zu Aufgabe 12.6

a) Berechnung des Durchmesserverhältnisses

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{420 \text{ mm}}{400 \text{ mm}} = 1,05 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

Berechnung der Spannungen in Tangential- und Axialrichtung durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand, da Außenoberfläche)

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_a) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (0,929 \% + 0,30 \cdot (-0,929 \%)) \cdot 10^{-3}$$

$$= 150,1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_a = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_a + \mu \cdot \varepsilon_t) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot ((-0,929 \%)+0,30 \cdot 0,929 \% \cdot 10^{-3})$$

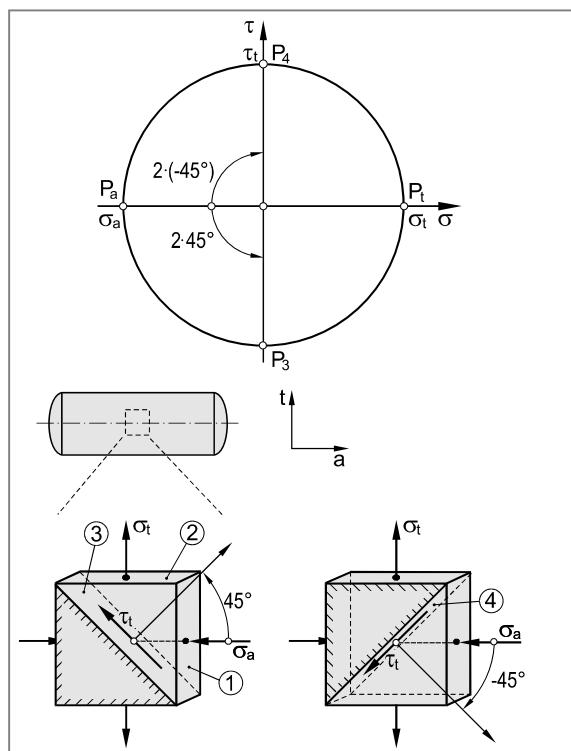
$$= -150,1 \text{ N/mm}^2$$

b) Mohr'scher Spannungskreis und maximale Schubspannungen

Die Schnittflächen mit den Flächennormalen in Tangential- und Axialrichtung enthalten keine Schubspannungen. Die Normalspannungen in diesen Schnittebenen sind dementsprechend Hauptnormalspannungen.

Die Bildpunkte P_t ($\sigma_t \mid 0$) und P_a ($\sigma_a \mid 0$) welche die Spannungskomponenten in diesen Schnittebenen repräsentieren, fallen dementsprechend mit der σ -Achse zusammen und der Mohr'sche Spannungskreis lässt sich auf einfache Weise konstruieren.

- Ebene 1 und Ebene 2 sind schubspannungsfrei.
- Ebene 3 und Ebene 4 sind frei von Normalspannungen.



c) **Berechnung der Sicherheit gegen Fließen**

Festigkeitsbedingung (Fließen):

$$\sigma_{VSH} \leq \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_t - \sigma_a = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_t - \sigma_a} = \frac{380 \text{ N/mm}^2}{150,1 \text{ N/mm}^2 - (-150,1 \text{ N/mm}^2)} = 1,27 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

d) **Berechnung des Innendrucks p_i**

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s}$$

$$p_i = \frac{2 \cdot s}{d_i} \cdot \sigma_t = \frac{2 \cdot 10 \text{ mm}}{400 \text{ mm}} \cdot 150,1 \text{ N/mm}^2 = 7,50 \text{ N/mm}^2 = 7,50 \text{ MPa}$$

Berechnung der Druckkraft F

$$\sigma_a = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} + \frac{F}{A} = \frac{\sigma_t}{2} + \frac{F}{A}$$

$$F = A \cdot \left(\sigma_a - \frac{\sigma_t}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot (420^2 - 400^2) \text{ mm}^2 \cdot \left(-150,1 \text{ N/mm}^2 - \frac{150,1 \text{ N/mm}^2}{2} \right)$$

$$= -2\ 899\ 457 \text{ N} = -2\ 899,5 \text{ kN}$$

- e) Mögliche Beanspruchung zur Erzeugung desselben Spannungszustandes: **Torsion** (siehe Mohr'scher Spannungskreis in Aufgabenteil b)

Berechnung des Torsionsmomentes

$$\tau_t = \sigma_t = 150,1 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{siehe Mohr'scher Spannungskreis})$$

$$\frac{M_t}{W_t} = \sigma_t$$

$$M_t = \sigma_t \cdot W_t = \sigma_t \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \left(\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} \right) = 150,1 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \left(\frac{420^4 - 400^4}{420} \right) \text{ mm}^3$$

$$= 387\ 054\ 473 \text{ Nmm} = 387,1 \text{ kNm}$$

Lösung zu Aufgabe 12.7

a) Berechnung des Durchmesserverhältnisses

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{160 \text{ mm}}{140 \text{ mm}} = 1,14 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

Berechnung der Spannungskomponenten für Zugbeanspruchung

Axialspannung:

$$\sigma_a \equiv \sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{500\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (160^2 - 140^2) \text{ mm}^2} = 106,1 \text{ N/mm}^2$$

Tangentialspannung:

$$\sigma_t = 0$$

Berechnung der Dehnungen mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

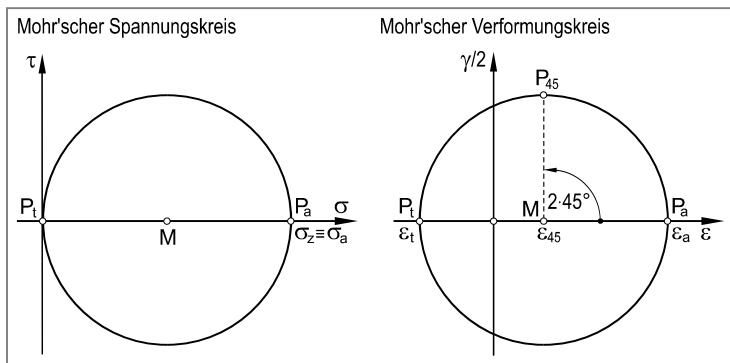
$$\varepsilon_a = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_a - \mu \cdot \sigma_t) = \frac{106,1 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 0 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,000505 = 0,505 \%$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_a) = \frac{0 - 0,30 \cdot 106,1 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = -0,000152 = -0,152 \%$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_t}{2} = \frac{0,505 \% + (-0,152 \%)}{2} = 0,177 \% \quad (\text{vgl. Mohr'scher Verformungskreis})$$

b) Mohr'scher Spannungs- und Verformungskreis bei Zugbeanspruchung

Die Schnittflächen mit den Flächennormalen in Tangential- und Axialrichtung enthalten keine Schubspannungen. Die Normalspannungen in diesen Schnittebenen sind dementsprechend Hauptnormalspannungen. Die Bildpunkte $P_t(0 | 0)$ und $P_a(\sigma_z | 0)$ welche die Spannungskomponenten in diesen Schnittebenen repräsentieren, fallen dementsprechend mit der σ -Achse zusammen. Der Mohr'sche Spannungskreis lässt sich damit auf einfache Weise konstruieren. Entsprechendes gilt für die Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises.



c) Berechnung der Spannungskomponenten bei Beanspruchung durch Innendruck

Axialspannung:

$$\sigma_a = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} = 15 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{140 \text{ mm}}{4 \cdot 10 \text{ mm}} = 52,5 \text{ N/mm}^2$$

Tangentialspannung:

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} = 15 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{140 \text{ mm}}{2 \cdot 10 \text{ mm}} = 105 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Dehnungen mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

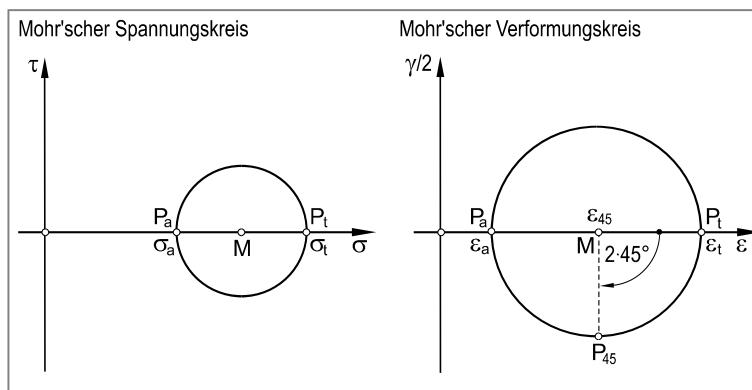
$$\varepsilon_a = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_a - \mu \cdot \sigma_t) = \frac{52,5 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 105 \text{ N/mm}^2}{210000 \text{ N/mm}^2} = 0,0001 = 0,1 \%$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_a) = \frac{105 - 0,30 \cdot 52,5 \text{ N/mm}^2}{210000 \text{ N/mm}^2} = 0,000425 = 0,425 \%$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_t}{2} = \frac{0,100 \% + 0,425 \%}{2} = 0,263 \% \quad (\text{siehe Mohr'scher Verformungskreis})$$

d) **Mohr'scher Spannungs- und Verformungskreis bei Beanspruchung durch Innendruck**

Die Schnittflächen mit den Flächennormalen in Tangential- und Axialrichtung enthalten keine Schubspannungen. Die Normalspannungen in diesen Schnittebenen sind dementsprechend Hauptspannungen. Die Bildpunkte P_t ($\sigma_t \neq 0$) und P_a ($\sigma_a \neq 0$) welche die Spannungskomponenten in diesen Schnittebenen repräsentieren, fallen dementsprechend mit der σ -Achse zusammen. Der Mohr'sche Spannungskreis lässt sich damit auf einfache Weise konstruieren. Entsprechendes gilt für die Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises.



e) Berechnung der Spannungskomponenten bei Beanspruchung durch gerade Biegung

Axialspannung:

$$\sigma_a \equiv \sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{M_b}{\frac{\pi}{32} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}} = \frac{13\,500\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{32} \cdot \frac{160^4 - 140^4}{160} \text{ mm}^3} = 81,13 \text{ N/mm}^2$$

Tangentialspannung:

$$\sigma_t = 0$$

Berechnung der Dehnungen mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

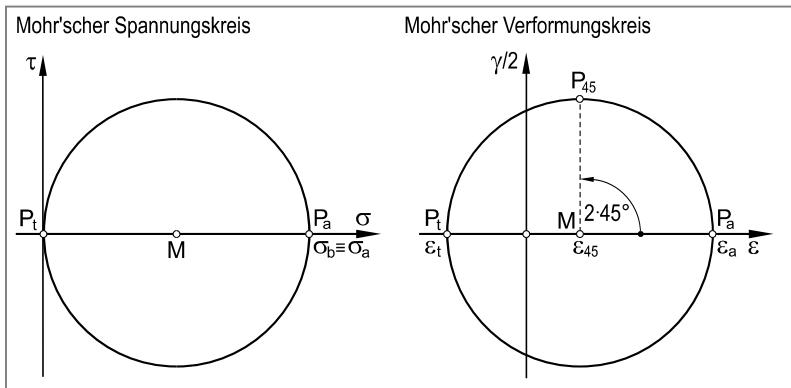
$$\varepsilon_a = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_a - \mu \cdot \sigma_t) = \frac{81,13 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 0 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,000386 = 0,386 \%$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_a) = \frac{0 - 0,30 \cdot 81,13 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = -0,000116 = -0,116 \%$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_t}{2} = \frac{0,386 \% + (-0,116 \%)}{2} = 0,135 \% \quad (\text{vgl. Mohr'scher Verformungskreis})$$

f) **Mohr'scher Spannungs- und Verformungskreis bei Beanspruchung durch (gerade) Biegung**

Die Schnittflächen mit den Flächennormalen in Tangential- und Axialrichtung enthalten keine Schubspannungen. Die Normalspannungen in diesen Schnittebenen sind dementsprechend Hauptnormalspannungen. Die Bildpunkte $P_t(0 | 0)$ und $P_a(\sigma_a | 0)$ welche die Spannungskomponenten in diesen Schnittebenen repräsentieren, fallen dementsprechend mit der σ -Achse zusammen. Der Mohr'sche Spannungskreis lässt sich damit auf einfache Weise konstruieren. Entsprechendes gilt für die Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises.



g) **Berechnung der Spannungskomponenten bei Beanspruchung durch Torsion**

Berechnung des Torsionsmomentes:

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}} = \frac{15\,000\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot \frac{160^4 - 140^4}{160} \text{ mm}^3} = 45,07 \text{ N/mm}^2$$

Tangentialspannung:

$$\sigma_t = 0$$

Axialspannung:

$$\sigma_a = 0$$

Berechnung der Dehnungen mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes

$$\varepsilon_a = 0$$

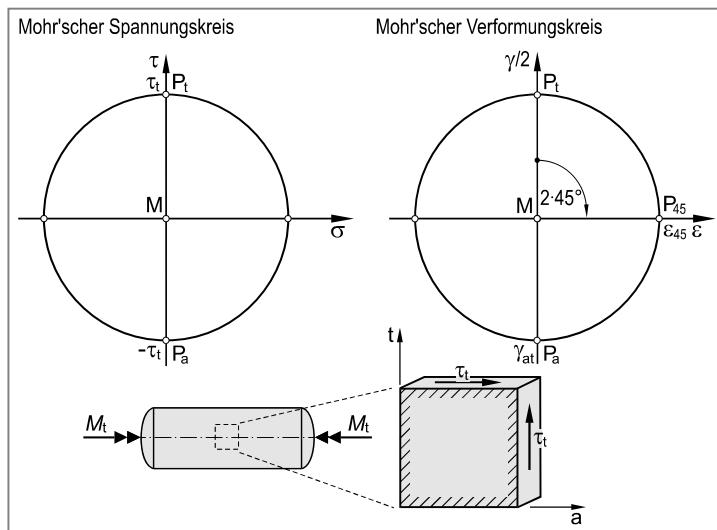
$$\varepsilon_t = 0$$

$$\gamma_{at} = \frac{\tau_{at}}{G} = \frac{\tau_t}{G} = \frac{\tau_t}{\frac{E}{2(1+\mu)}} = \frac{2 \cdot (1+\mu) \cdot \tau_t}{E} = \frac{2 \cdot (1+0,30)}{210\,000} \cdot 45,07 \text{ N/mm}^2 \\ = 0,558 \%$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{\gamma_{at}}{2} = 0,000279 = 0,279 \%$$

h) Mohr'scher Spannungs- und Verformungskreis bei Beanspruchung durch Torsion

Die Schnittflächen mit den Flächennormalen in Tangential- und Axialrichtung enthalten nur Schubspannungen. Die Bildpunkte $P_t (\tau_t | 0)$ und $P_a (-\tau_t | 0)$ welche die Spannungskomponenten in diesen Schnittebenen repräsentieren, fallen dementsprechend mit der τ -Achse zusammen. Der Mohr'sche Spannungskreis lässt sich damit auf einfache Weise konstruieren.



Lösung zu Aufgabe 12.8

Berechnung des Durchmesserverhältnisses

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{210 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 1,05 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

Für die Berechnung des Innendrucks sowie des Torsionsmomentes wird zunächst Messstelle 2 (neutrale Faser) gewählt.

Berechnung der Tangential- und Axialspannung (Hooke'sches Gesetz für den zweiachsigen Spannungszustand)

Tangentialspannung (Messstelle 2):

$$\begin{aligned}\sigma_{t2} &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_{t2} + \mu \cdot \varepsilon_{a2}) = \frac{205\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (0,622 \% + 0,30 \cdot 0,146 \% \cdot 10^{-3}) \\ &= 149,99 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

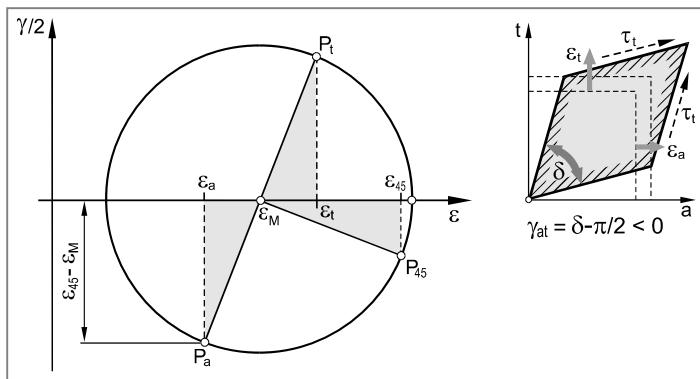
Berechnung des Innendrucks

Die Tangentialspannung σ_{t2} kann nur durch die Beanspruchung aus Innendruck p_i hervorgerufen werden. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_{t2} &= p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} \\ p_i &= \frac{2 \cdot s}{d_i} \cdot \sigma_{t2} = \frac{2 \cdot 5 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} \cdot 149,99 \text{ N/mm}^2 = 7,5 \text{ N/mm}^2 = 7,5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Berechnung des Torsionsmomentes

An der Messstelle 2 liegt eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette vor. Daher kann der Mohr'sche Verformungskreis entsprechend Kapitel 4.4.2 (siehe Lehrbuch) auf einfache Weise konstruiert werden (siehe Abbildung).



Berechnung der Schiebung γ_{at} :

$$\frac{\gamma_{at}}{2} = -(\varepsilon_{45} - \varepsilon_M) = -\left(\varepsilon_{45} - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_t}{2}\right) = -\left(0,679 \% - \frac{0,146 \% + 0,622 \%}{2}\right) = -0,295 \%$$

$$\gamma_{at} = -0,590 \%$$

Berechnung der Schubspannung unter Verwendung des Elastizitätsgesetzes für Schubbeanspruchung:

$$\tau_{at} \equiv \tau_t = G \cdot \gamma_{at} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \gamma_{at} = \frac{205\,000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot (-0,590) \cdot 10^{-3} = -46,52 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Torsionsmomentes:

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

$$M_t = |\tau_t| \cdot W_t = |\tau_t| \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} = 46,52 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \frac{210^4 - 200^4}{210} \text{ mm}^3 \\ = 14\,997\,642 \text{ Nmm} = \mathbf{14\,998 \text{ Nm}}$$

Das Torsionsmoment wirkt entsprechend der Darstellung in der Aufgabenstellung.

Berechnung der Biegespannung

Messstelle 1 (oder 3) befindet sich außerhalb der neutralen Faser, so dass dort Spannungen aus Innendruck, Torsion und Biegung auftreten. Es genügt an der Messstelle 1 (oder 3) die Axialspannung zu betrachten.

Berechnung der Axialspannung (Messstelle 1):

$$\sigma_{al} = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_{al} + \mu \cdot \varepsilon_{tl}) = \frac{205\,000 \text{ N/mm}^2}{1 - 0,30^2} \cdot (0,449 \% + 0,30 \cdot 0,531 \%) \cdot 10^{-3} \\ = 137,03 \text{ N/mm}^2$$

Die Axialspannung an der Messstelle 1 ergibt sich durch Überlagerung der Axialspannung aus Innendruck und der Biegespannung, also:

$$\sigma_{al} = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} + \sigma_b = \frac{\sigma_t}{2} + \sigma_b \\ \sigma_b = \sigma_{al} - \frac{\sigma_t}{2} = 137,03 \text{ N/mm}^2 - \frac{149,99 \text{ N/mm}^2}{2} = 62,04 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Biegemomentes:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$$

$$M_b = \sigma_b \cdot W_b = \sigma_b \cdot \frac{\pi}{32} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} = 62,04 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{32} \cdot \frac{210^4 - 200^4}{210} \text{ mm}^3 \\ = 10\,000\,849 \text{ Nmm} = \mathbf{10\,000 \text{ Nm}}$$

Lösung zu Aufgabe 12.9

a) Berechnung des Durchmesserverhältnisses

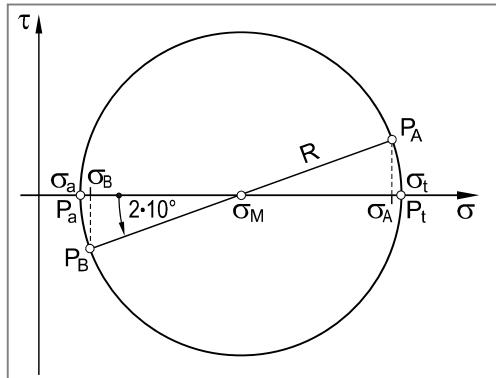
$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{120 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 3 > 1,20 \quad (\text{dickwandig})$$

Berechnung der Spannungskomponenten in Messrichtung der DMS (Anwendung des Hooke'schen Gesetzes für den zweiachsigen Spannungszustand)

$$\sigma_A = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_A + \mu \cdot \varepsilon_B) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1 - 0,30^2} \cdot (0,158 \% + 0,30 \cdot 0,042 \%) \cdot 10^{-3} \\ = 39,37 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_B + \mu \cdot \varepsilon_A) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1 - 0,30^2} \cdot (0,042 \% + 0,30 \cdot 0,158 \%) \cdot 10^{-3} \\ = 20,63 \text{ N/mm}^2$$

Die Schnittflächen mit den Flächennormalen in Tangential- und Axialrichtung enthalten keine Schubspannungen. Die Normalspannungen in diesen Schnittebenen sind dementsprechend Hauptnormalspannungen. Die Bildpunkte P_t und P_a welche die Spannungskomponenten in diesen Schnittebenen repräsentieren, fallen dementsprechend mit der σ -Achse zusammen und der Mohr'sche Verformungskreis lässt sich damit auf einfache Weise konstruieren.



Die Bildpunkte P_B und P_A erhält man durch Abtragen des Richtungswinkels ($2 \cdot 10^\circ$ bzw. $2 \cdot 10^\circ + 180^\circ$) ausgehend von der nunmehr bekannten Axialrichtung (gleicher Drehsinn zum Lageplan).

Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Spannungskreises

$$\sigma_M = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} = \frac{39,37 \text{ N/mm}^2 + 20,63 \text{ N/mm}^2}{2} = 30 \text{ N/mm}^2$$

$$R = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2} \cdot \frac{1}{\cos(2 \cdot \varphi)} = \frac{39,37 \text{ N/mm}^2 - 20,63 \text{ N/mm}^2}{2} \cdot \frac{1}{\cos(2 \cdot 10^\circ)} = 9,97 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_t \equiv \sigma_1 = \sigma_M + R = 30 \text{ N/mm}^2 + 9,97 \text{ N/mm}^2 = 39,97 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_a \equiv \sigma_2 = \sigma_M - R = 30 \text{ N/mm}^2 - 9,97 \text{ N/mm}^2 = 20,03 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_r \equiv \sigma_3 = 0$$

Für die Tangentialspannung in einem elastisch beanspruchten, dickwandigen Behälter (dickwandiges, beidseitig verschlossenes Rohr) unter Innendruck ($p_a = 0$) gilt:

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right)$$

Am Außenrand ergibt sich mit $r = r_a$:

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

Damit folgt für den Innendruck p_i :

$$p_i = \sigma_t \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{2 \cdot r_i^2} = 39,97 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{(60^2 - 20^2) \text{ mm}^2}{2 \cdot (20 \text{ mm})^2} = 159,88 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{159,88 \text{ MPa}}$$

b) Berechnung des Innendrucks bei Fließbeginn des Rohres

$$p_{i\text{ FB}} = R_{p0,2} \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{\sqrt{3} \cdot r_a^2} = 340 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{(60^2 - 20^2) \text{ mm}^2}{\sqrt{3} \cdot 60^2 \text{ mm}^2} \\ = 174,49 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{174,49 \text{ MPa}}$$

c) Berechnung des Innendrucks bei einer zulässigen Plastifizierung des Innenrings bis zum Radius $c = 30 \text{ mm}$ (teilplastischer Zustand)

$$p_{ic} = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{c}{r_i}\right)^2 - \left(\frac{c}{r_a}\right)^2 + 1 \right) = \frac{340 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{30 \text{ mm}}{20 \text{ mm}}\right)^2 - \left(\frac{30 \text{ mm}}{60 \text{ mm}}\right)^2 + 1 \right) \\ = 306,41 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{306,41 \text{ MPa}}$$

d) Berechnung der Tangential- und Axialspannung an der Außenoberfläche ($r = r_a$) des Behälters (elastischer Außenring)

Am Außenrand ergibt sich mit ($r = r_a$):

$$\sigma_t = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{30 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \right)^2 \cdot 340 \text{ N/mm}^2 \\ = 98,15 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_a = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} = \frac{340 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{30 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \right)^2 = 49,07 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Spannungen in Messrichtung der Dehnungsmessstreifen

$$\sigma_A = \frac{\sigma_t + \sigma_a}{2} + \frac{\sigma_t - \sigma_a}{2} \cdot \cos 2\varphi \\ = \frac{98,15 \text{ N/mm}^2 + 49,07 \text{ N/mm}^2}{2} + \frac{98,15 \text{ N/mm}^2 - 49,07 \text{ N/mm}^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot 10^\circ) \\ \sigma_A = 96,67 \text{ N/mm}^2$$

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \frac{\sigma_t + \sigma_a}{2} - \frac{\sigma_t - \sigma_a}{2} \cdot \cos 2\varphi \\ &= \frac{98,15 \text{ N/mm}^2 + 49,07 \text{ N/mm}^2}{2} - \frac{98,15 \text{ N/mm}^2 - 49,07 \text{ N/mm}^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot 10^\circ) \\ &= 50,55 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Berechnung der Dehnungen in Messrichtung der Dehnungsmessstreifen (Anwendung des Hooke'schen Gesetzes für den zweiachsigen Spannungszustand)

$$\varepsilon_A^* = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_A - \mu \cdot \sigma_B) = \frac{96,67 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 50,55 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,000388 = 0,388 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_B^* = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_B - \mu \cdot \sigma_A) = \frac{50,55 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 96,67 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,000103 = 0,103 \text{ \%}$$

- e) Berechnung der Spannungskomponenten am Innenrand ($r_i = 20 \text{ mm}$), am Radius $c = 30 \text{ mm}$ und am Außenrand ($r_a = 60 \text{ mm}$)

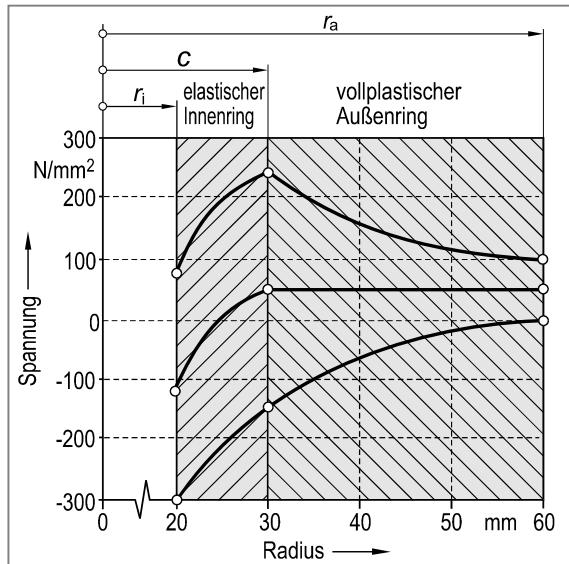
Spannungsverlauf im vollplastischen Innenring ($r_i < r < c$)

- Tangentialspannung: $\sigma_t = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{r}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{r_a}\right)^2 + 1 \right)$
- Axialspannung: $\sigma_a = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{r}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{r_a}\right)^2 \right)$
- Radialspannung: $\sigma_r = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{r}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{r_a}\right)^2 - 1 \right)$

Spannungsverlauf im elastischen Außenring ($c < r < r_a$)

- Tangentialspannung: $\sigma_t = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right)$
- Axialspannung: $\sigma_a = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}$
- Radialspannung: $\sigma_r = -\frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right)$

Spannungskomponente	vollplastischer Innenring		elastischer Außenring	
	$r = r_i = 20 \text{ mm}$	$r = c = 30 \text{ mm}$	$r = c = 30 \text{ mm}$	$r = r_a = 60 \text{ mm}$
Tangentialspannung	86,19 N/mm ²	245,37 N/mm ²	245,37 N/mm ²	98,15 N/mm ²
Axialspannung	-110,11 N/mm ²	49,07 N/mm ²	49,07 N/mm ²	49,07 N/mm ²
Radialspannung	-306,41 N/mm ²	-147,22 N/mm ²	-147,22 N/mm ²	0 N/mm ²



- f) Spannungskomponenten am Innenrand, falls der gesamte Behälter elastisch verformt wäre (ideelle Spannungen)

$$\sigma_{t \text{ id}} = p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) = p_i \cdot \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = 306,41 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{(60 \text{ mm})^2 + (20 \text{ mm})^2}{(60 \text{ mm})^2 - (20 \text{ mm})^2} = 383,01 \text{ N/mm}$$

$$\sigma_{a \text{ id}} = \frac{p_i \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = \frac{306,41 \text{ N/mm}^2 \cdot (20 \text{ mm})^2}{(60 \text{ mm})^2 - (20 \text{ mm})^2} = 38,30 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{r \text{ id}} = -p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right) = -p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r_i^2} - 1 \right) = -p_i = -306,41 \text{ N/mm}^2$$

Tatsächlich wirkende Spannungen am Innenrand (aus Aufgabenteil e)

$$\sigma_t = 86,19 \text{ N/mm}$$

$$\sigma_a = -110,11 \text{ N/mm}$$

$$\sigma_r = -306,41 \text{ N/mm}$$

Eigenspannungen am Innenrand

$$\sigma_{t \text{ ei}} = \sigma_t - \sigma_{t \text{ id}} = 86,19 \text{ N/mm}^2 - 383,01 \text{ N/mm}^2 = -296,86 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{a\text{ ei}} = \sigma_a - \sigma_{a\text{ id}} = -110,11 \text{ N/mm}^2 - 38,30 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{-148,41 \text{ N/mm}^2}$$

$$\sigma_{r\text{ ei}} = \sigma_r - \sigma_{r\text{ id}} = -306,41 \text{ N/mm}^2 - (-306,41) \text{ N/mm}^2 = \mathbf{0}$$

Spannungskomponenten am Außenrand, falls der gesamte Behälter elastisch verformt wäre (ideelle Spannungen)

$$\begin{aligned}\sigma_{t\text{ id}} &= p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) = p_i \cdot \frac{2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = 306,41 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{2 \cdot (20 \text{ mm})^2}{(60 \text{ mm})^2 - (20 \text{ mm})^2} \\ &= 76,60 \text{ N/mm}\end{aligned}$$

$$\sigma_{a\text{ id}} = \frac{p_i \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = \frac{306,41 \text{ N/mm}^2 \cdot (20 \text{ mm})^2}{(60 \text{ mm})^2 - (20 \text{ mm})^2} = 38,30 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{r\text{ id}} = 0$$

Tatsächlich wirkende Spannungen am Außenrand (aus Aufgabenteil e)

$$\sigma_t = 98,15 \text{ N/mm}$$

$$\sigma_a = 49,07 \text{ N/mm}$$

$$\sigma_r = 0 \text{ N/mm}$$

Eigenspannungen am Außenrand

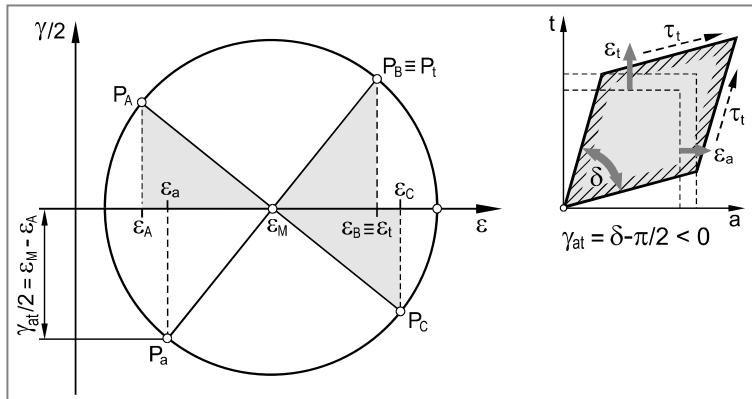
$$\sigma_{t\text{ ei}} = \sigma_t - \sigma_{t\text{ id}} = 98,15 \text{ N/mm}^2 - 76,60 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{21,55 \text{ N/mm}^2}$$

$$\sigma_{a\text{ ei}} = \sigma_a - \sigma_{a\text{ id}} = 49,07 \text{ N/mm}^2 - 38,30 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{10,77 \text{ N/mm}^2}$$

$$\sigma_{r\text{ ei}} = \sigma_r - \sigma_{r\text{ id}} = 0 - 0 = \mathbf{0}$$

Lösung zu Aufgabe 12.10

- a) Es liegt eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette vor. Daher kann der Mohr'sche Verformungskreis entsprechend Kapitel 4.4.2 (siehe Lehrbuch) auf einfache Weise konstruiert werden (siehe Abbildung).



Berechnung der Dehnungen in Tangential- und Axialrichtung (ε_t und ε_a) sowie der Schiebung γ_t mit der Axialrichtung als Bezug

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} = \frac{0,1496\% + 1,2904\%}{2} = 0,720\%$$

$$\varepsilon_t \equiv \varepsilon_B = 1,1657\%$$

$$\varepsilon_a \equiv \varepsilon_M - (\varepsilon_B - \varepsilon_M) = 0,720\% - (1,1657\% - 0,720\%) = 0,2743\%$$

$$\frac{\gamma_{at}}{2} = \varepsilon_M - \varepsilon_A = 0,720\% - 0,1496\% = 0,5704\%$$

$$\gamma_{at} = 1,1408\%$$

Berechnung des Innendrucks

Berechnung der Tangentialspannung unter Anwendung des Hooke'schen Gesetzes für den zweiachsigigen Spannungszustand. Annahme: Behälter ist elastisch beansprucht.

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_a) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (1,1657\% + 0,30 \cdot 0,2743\%) \cdot 10^{-3} \\ &= 288 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Tangentialspannung am Außenrand ($r = r_a$) eines dickwandigen Behälters unter Innen-druck:

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) = p_i \cdot \frac{2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$p_i = \sigma_t \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{2 \cdot r_i^2} = 288 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{(75 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2}{2 \cdot (50 \text{ mm})^2} = 180 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{180 \text{ MPa}}$$

Berechnung des Torsionsmomentes

Elastizitätsgesetz für Schubspannungen:

$$\tau_{at} \equiv \tau_t = G \cdot \gamma_{at} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \gamma_{at} = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot 1,1408 \cdot 10^{-3} = 92,14 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Torsionsmomentes:

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

$$M_t = \tau_t \cdot W_t = \tau_t \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} = 92,14 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \frac{150^4 - 100^4}{150} \text{ mm}^3 \\ = 48\,999\,028 \text{ Nmm} = \mathbf{49\,000 \text{ Nm}}$$

b) Innenrand des Behälters

Berechnung der Spannungskomponenten am Innenrand ($r = r_i = 50 \text{ mm}$)

Tangentialspannung:

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) = p_i \cdot \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \\ = 180 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{(75 \text{ mm})^2 + (50 \text{ mm})^2}{(75 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2} = 468 \text{ N/mm}^2$$

Axialspannung:

$$\sigma_a = \frac{p_i \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = \frac{180 \text{ N/mm}^2 \cdot (50 \text{ mm})^2}{(75 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2} = 144 \text{ N/mm}^2$$

Radialspannung:

$$\sigma_r = -p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right) = -p_i = -180 \text{ N/mm}^2$$

Schubspannung am Innenrand (Strahlensatz):

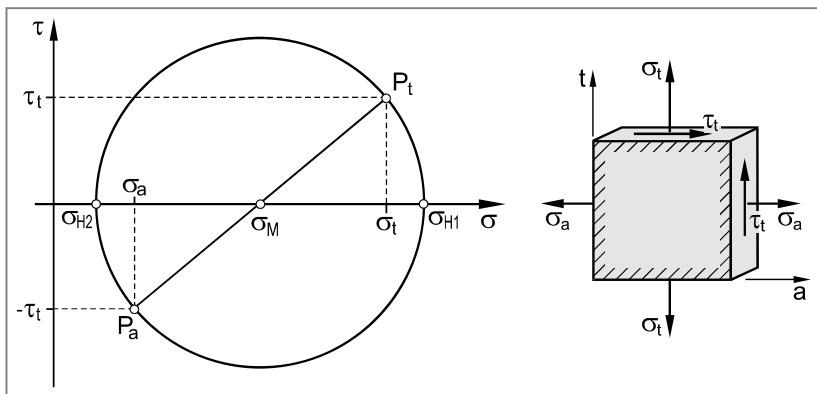
$$\tau_{ti} = \tau_{ta} \cdot \frac{r_i}{r_a} = 92,14 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{50 \text{ mm}}{75 \text{ mm}} = 61,43 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Hauptspannungen in der t-a-Ebene (Mantelfläche)

Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Spannungskreises:

$$\sigma_M = \frac{\sigma_t + \sigma_a}{2} = \frac{468 \text{ N/mm}^2 + 144 \text{ N/mm}^2}{2} = 306 \text{ N/mm}^2$$

$$R = \sqrt{(\sigma_t - \sigma_M)^2 + \tau_{ti}^2} \\ = \sqrt{(468 \text{ N/mm}^2 - 306 \text{ N/mm}^2)^2 + (61,43 \text{ N/mm}^2)^2} = 173,26 \text{ N/mm}^2$$



Damit folgt für die Hauptspannungen in der t-a-Ebene:

$$\sigma_{H1} = \sigma_M + R = 306 \text{ N/mm}^2 + 173,26 \text{ N/mm}^2 = 479,26 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H2} = \sigma_M - R = 306 \text{ N/mm}^2 - 173,26 \text{ N/mm}^2 = 132,74 \text{ N/mm}^2$$

Ordnen der Hauptspannungen ergibt:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{H1} = 479,26 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 \equiv \sigma_{H2} = 132,74 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 \equiv \sigma_r = -180 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Vergleichsspannung an der Innenoberfläche (Anwendung der Gestalt-änderungsenergielhypothese)

$$\sigma_{VGEH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{VGEH} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(479,26 - 132,74)^2 + (132,74 + 180)^2 + (-180 - 479,26)^2} \text{ N/mm}^2 \\ &= 571,19 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Es gilt: $\sigma_{VGEH} < R_{p0,2}$

Der Behälter ist damit am Innenrand noch elastisch beansprucht.

Außenrand des Behälters

Berechnung der Spannungskomponenten am Außenrand ($r = r_a = 75 \text{ mm}$)

Tangentialspannung:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) = p_i \cdot \frac{2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \\ &= 180 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{2 \cdot (50 \text{ mm})^2}{(75 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2} = 288 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Axialspannung:

$$\sigma_a = \frac{p_i \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = \frac{180 \text{ N/mm}^2 \cdot (50 \text{ mm})^2}{(75 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2} = 144 \text{ N/mm}^2$$

Radialspannung:

$$\sigma_r = 0$$

Schubspannung am Außenrand:

$$\tau_{ta} = 92,14 \text{ N/mm}^2$$

Da an der Außenoberfläche ein zweiachsiger Spannungszustand vorliegt, kann die Vergleichsspannung nach der GEH auch direkt aus den Lastspannungen ermittelt werden (siehe Kapitel 6.4 im Lehrbuch):

$$\begin{aligned}\sigma_{VGEH} &= \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_t^2 - \sigma_a \cdot \sigma_t + 3 \cdot \tau_t^2} \\ \sigma_{VGEH} &= \sqrt{144^2 + 288^2 - 144 \cdot 288 + 3 \cdot 92,14^2} \text{ N/mm}^2 \\ &= 296,10 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Es gilt: $\sigma_{VGEH} < R_{p0,2}$

Der Behälter ist damit am Außenrand ebenfalls noch elastisch beansprucht.

Anmerkung: Wie zu erwarten, ist die Vergleichsspannung am Außenrand niedriger im Vergleich zum Innenrand, da der Innenrand eines durch Innendruck beanspruchten Behälters stets die höchst beanspruchte Stelle darstellt.

c) Berechnung des Innendrucks bei Fließbeginn des Rohres

$$\begin{aligned}p_{iFB} &= R_{p0,2} \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{\sqrt{3} \cdot r_a^2} = 980 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{(75^2 - 50^2) \text{ mm}^2}{\sqrt{3} \cdot 75^2 \text{ mm}^2} \\ &= 314,3 \text{ N/mm}^2 = 314,4 \text{ MPa}\end{aligned}$$

d) Berechnung des Innendrucks bei einer zulässigen Plastifizierung bis $c = 60 \text{ mm}$

$$\begin{aligned}p_{ic} &= \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{c}{r_i}\right)^2 - \left(\frac{c}{r_a}\right)^2 + 1 \right) = \frac{980 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\ln\left(\frac{60 \text{ mm}}{50 \text{ mm}}\right)^2 - \left(\frac{60 \text{ mm}}{75 \text{ mm}}\right)^2 + 1 \right) \\ &= 410,0 \text{ N/mm}^2 = 410,0 \text{ MPa}\end{aligned}$$

e) Berechnung der Tangential- und Axialspannung an der Außenoberfläche ($r = r_a$) des Behälters (elastischer Außenring)

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot 2 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{60 \text{ mm}}{75 \text{ mm}} \right)^2 \cdot 980 \text{ N/mm}^2 = 724,23 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

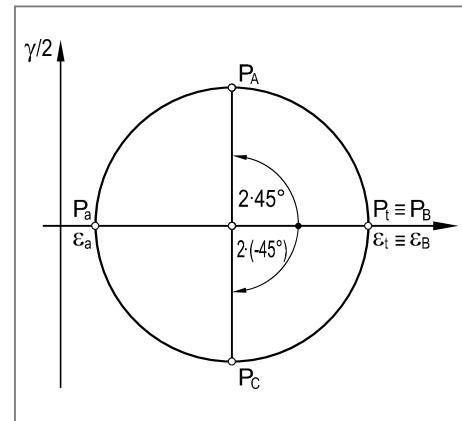
$$\sigma_a = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} = \frac{980 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{60 \text{ mm}}{75 \text{ mm}} \right)^2 = 362,11 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Dehnungen in Tangential- und Axialrichtung unter Anwendung des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_a) = \frac{724,23 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 362,11 \text{ N/mm}^2}{210000 \text{ N/mm}^2} = 0,0029314 = 2,9314 \text{ \%}$$

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_a - \mu \cdot \sigma_t) = \frac{362,11 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 724,23 \text{ N/mm}^2}{210000 \text{ N/mm}^2} = 0,0006897 = 0,6897 \text{ \%}$$

Da voraussetzungsgemäß kein Torsionsmoment mehr wirkt, sind die Schnittflächen mit der Flächennormalen in Axial- und Tangentialrichtung schubspannungsfrei. Daher erfährt ein achsparalleles Flächenelement keine Schiebung (Winkelverzerrung). Die Bildpunkte P_a und P_t , welche die Verformungen mit der Axial- bzw. Tangentialrichtung als Bezugsrichtung repräsentieren, fallen daher mit der ε -Achse zusammen, d. h. die Axial- und die Tangentialrichtung sind gleichzeitig Hauptdehnungsrichtungen. Der Mohr'sche Verformungskreis lässt sich damit auf einfache Weise konstruieren (siehe Abbildung).



Die Bildpunkte P_A und P_C , welche die Verformungen mit der A- bzw. C-Richtung als Bezugsrichtung repräsentieren, erhält man durch Abtragen der Richtungswinkel $2 \cdot 45^\circ$ bzw. $2 \cdot 45^\circ + 180^\circ$ ausgehend von der nunmehr bekannten Tangentialrichtung (gleicher Drehsinn zum Lageplan). Damit erhält man für die Dehnungen in A- und C-Richtung:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_C = \frac{\varepsilon_t + \varepsilon_a}{2} = \frac{2,9314 \text{ \%} + 0,6897 \text{ \%}}{2} = 1,8106 \text{ \%}$$

Die Dehnung in B-Richtung ist identisch mit der Dehnung in Tangentialrichtung. Es gilt daher:

$$\varepsilon_B = \varepsilon_t = 2,9314 \text{ \%}$$

Lösung zu Aufgabe 12.11

Berechnung des Durchmesserverhältnisses

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{624 \text{ mm}}{600 \text{ mm}} = 1,04 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

Berechnung der Spannungskomponenten an der Außenseite (Messstellen der DMS)

Spannungskomponenten aus Innendruck

Tangentialspannung:

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} = 20 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{600 \text{ mm}}{2 \cdot 12 \text{ mm}} = 500 \text{ N/mm}^2$$

Axialspannung:

$$\sigma_a = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} = \frac{d_t}{2} = \frac{500 \text{ N/mm}^2}{2} = 250 \text{ N/mm}^2$$

Radialspannung:

$$\sigma_r = 0$$

Spannungskomponenten aus Biegebeanspruchung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{\frac{F_1}{2} \cdot a}{\frac{\pi}{32} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}} = \frac{\frac{900\,000 \text{ N}}{2} \cdot 850 \text{ mm}}{\frac{\pi}{32} \cdot \frac{624^4 - 600^4}{624} \text{ mm}^3} = 110,44 \text{ N/mm}^2$$

Spannungskomponenten aus Zugbeanspruchung

$$\sigma_z = \frac{F_2}{A} = \frac{F_2}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{1\,500\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (624^2 - 600^2) \text{ mm}^2} = 65,01 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Dehnungsanzeigen der DMS (zweiachsiger Spannungszustand)

$$\begin{aligned} \varepsilon_C &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z + \sigma_a - \mu \cdot \sigma_t) \\ &= \frac{65,01 \text{ N/mm}^2 + 250 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 500 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,0007858 = 0,7858 \% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_B &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot (\sigma_z + \sigma_a)) \\ &= \frac{500 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot (65,01 \text{ N/mm}^2 + 250 \text{ N/mm}^2)}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,0019309 = 1,9309 \% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z + \sigma_a - \sigma_b - \mu \cdot \sigma_t) \\ &= \frac{65,01 \text{ N/mm}^2 + 250 \text{ N/mm}^2 - 110,44 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 500 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} \end{aligned}$$

$$= 0,0002599 = \mathbf{0,2599 \%}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_D &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z + \sigma_a + \sigma_b - \mu \cdot \sigma_t) \\ &= \frac{65,01 \text{ N/mm}^2 + 250 \text{ N/mm}^2 + 110,44 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 500 \text{ N/mm}^2}{210000 \text{ N/mm}^2} \\ &= 0,0013117 = \mathbf{1,3117 \%}\end{aligned}$$

- b) Die höchst beanspruchte Stelle befindet sich an der Messstelle von DMS D. Da keine Schubspannungen auftreten, sind die Normalspannungen gleichzeitig Hauptnormalspannungen.

Spannungskomponenten an der Messstelle von DMS D

$$\sigma_{H1} = \sigma_a + \sigma_z + \sigma_b = 250 \text{ N/mm}^2 + 65,01 \text{ N/mm}^2 + 110,44 \text{ N/mm}^2 = 425,45 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H2} = \sigma_t = 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{H3} = \sigma_r = 0$$

Ordnen der Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = \sigma_{H2} = 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_{H1} = 425,45 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = \sigma_{H3} = 0$$

Festigkeitsbedingung (Verwendung der Schubspannungshypothese)

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{870 \text{ N/mm}^2}{500 \text{ N/mm}^2 - 0} = \mathbf{1,74} \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

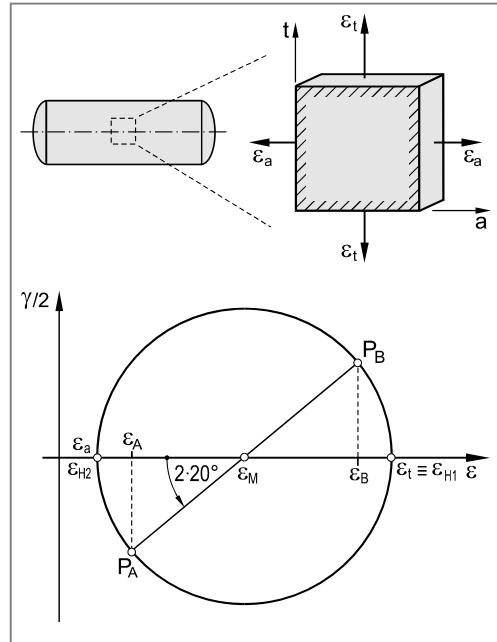
Lösung zu Aufgabe 12.12

Berechnung des Durchmesserverhältnisses

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{480 \text{ mm}}{450 \text{ mm}} = 1,07 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

Die Schnittflächen mit der Axial- und Tangentialrichtung als Normale sind schubspannungsfrei (nur Innendruck). Daher erfährt ein achsparalleles Flächenelement auch keine Schiebung (Winkelverzerrung). Die Bildpunkte P_a und P_t , welche die Verformungen mit der Axial- bzw. Tangentialrichtung als Bezugsrichtung repräsentieren, fallen daher mit der ε -Achse zusammen, d. h. die Axial- und die Tangentialrichtung sind gleichzeitig Hauptdehnungsrichtungen. Der Mohr'sche Verformungskreis lässt sich damit entsprechend der Abbildung auf einfache Weise konstruieren.

Die Bildpunkte P_A und P_B , welche die Verformungen mit der A- bzw. B-Richtung als Bezugsrichtung repräsentieren, erhält man durch Abtragen der Richtungswinkel $2 \cdot 20^\circ$ bzw. $2 \cdot 20^\circ + 180^\circ$ ausgehend von der nunmehr bekannten Axialrichtung (gleicher Drehsinn zum Lageplan).



Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2} = \frac{0,1972\% + 0,5528\%}{2} = 0,375\%$$

$$R = \frac{\varepsilon_M - \varepsilon_A}{\cos 2\alpha} = \frac{0,375\% - 0,1972\%}{\cos(2 \cdot 20^\circ)} = 0,2321\%$$

Berechnung der Dehnungen in Tangential- und Axialrichtung (ε_t und ε_a)

$$\varepsilon_t = \varepsilon_M + R = 0,375\% + 0,2321\% = 0,6071\%$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_M - R = 0,375\% - 0,2321\% = 0,1429\%$$

Berechnung der Spannungen in Tangentialrichtung durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_a) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,30^2} \cdot (0,6071\% + 0,30 \cdot 0,1429\%) \cdot 10^{-3}$$

$$= 150 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Innendrucks p_i

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s}$$

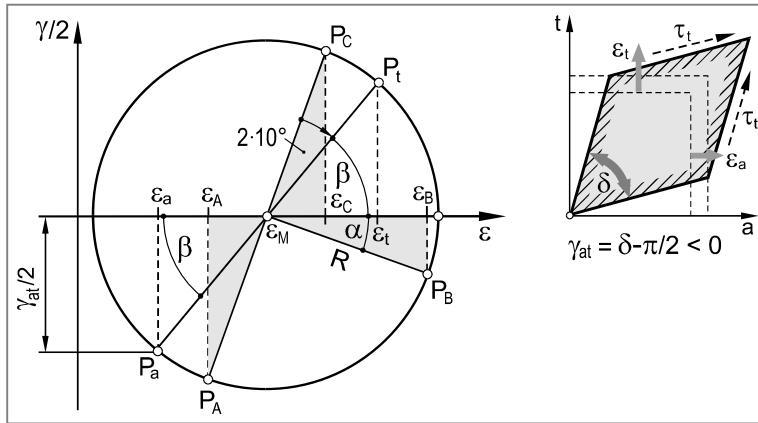
$$p_i = \sigma_t \cdot \frac{2 \cdot s}{d_i} = 150 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{2 \cdot 15 \text{ mm}}{450 \text{ mm}} = 10 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{10 \text{ MPa}}$$

Lösung zu Aufgabe 12.13

Berechnung des Durchmesserverhältnisses

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{330 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} = 1,1 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

Es liegt eine 0° - 45° - 90° DMS-Rosette vor. Daher kann der Mohr'sche Verformungskreis entsprechend Kapitel 4.4.2 (siehe Lehrbuch) auf einfache Weise konstruiert werden (siehe Abbildung).



Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} = \frac{0,2011\% + 0,3989\%}{2} = 0,3\%$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(\varepsilon_B - \varepsilon_M)^2 + (\varepsilon_M - \varepsilon_A)^2} \\ &= \sqrt{(0,5715\% - 0,3\%)^2 + (0,3\% - 0,2011\%)^2} = 0,2890\% \end{aligned}$$

Berechnung des Winkels α zwischen der Messrichtung von DMS B und der Hauptdehnungsrichtung ε_{H1}

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\varepsilon_M - \varepsilon_A}{\varepsilon_B - \varepsilon_M} \right) = \arctan \left(\frac{0,3\% - 0,2011\%}{0,5715\% - 0,3\%} \right) = \arctan 0,364 = 20^\circ$$

Damit folgt für den Richtungswinkel β :

$$\beta = 90^\circ - \alpha - 2 \cdot 10^\circ = 50^\circ$$

Berechnung der Dehnungen in Tangential- und Axialrichtung

$$\varepsilon_t = \varepsilon_M + R \cdot \cos \beta = 0,3\% + 0,289\% \cdot \cos 50^\circ = 0,4858\%$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_M - R \cdot \cos \beta = 0,3\% - 0,289\% \cdot \cos 50^\circ = 0,1142\%$$

Berechnung der Normalspannung in Tangentialrichtung (σ_t) durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_t + \mu \cdot \varepsilon_a) = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{1-0,3^2} \cdot (0,4858 \% + 0,3 \cdot 0,1142 \% \cdot 10^{-3}) \\ &= 120 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Berechnung des Innendrucks p_i

$$\begin{aligned}\sigma_t &= p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} \\ p_i &= \sigma_t \cdot \frac{2 \cdot s}{d_i} = 120 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{2 \cdot 15 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} = 12 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{12 \text{ MPa}}$$

Berechnung der Schiebung γ_{at} mit der Axialrichtung als Bezugssrichtung

$$\frac{\gamma_{at}}{2} = -R \cdot \sin \beta = -0,289 \% \cdot \sin 50^\circ = -0,2213 \%$$

$\gamma_{at} = -0,4426 \%$ (Winkelverkleinerung gemäß Vorzeichenregelung für Schiebungen)

Berechnung der Schubspannung τ_t durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes für Schubbeanspruchung

$$\tau_{at} \equiv \tau_t = G \cdot \gamma_{at} = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} \cdot \gamma_{at} = \frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1+0,30)} \cdot (-0,4426 \% \cdot 10^{-3}) = -35,8 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Torsionsmomentes

$$\begin{aligned}\tau_t &= \frac{M_t}{W_t} \\ M_t &= |\tau_t| \cdot W_t = \tau_t \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} = 35,8 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \frac{330^4 - 300^4}{330} \text{ mm}^3 \\ &= 80\,000\,000 \text{ Nmm} = \mathbf{80\,000 \text{ Nm}}$$

Das Torsionsmoment wirkt entgegen der in der Aufgabenstellung eingezeichneten Richtung.

Lösung zu Aufgabe 12.14

a) Berechnung des Innendrucks

$$p_i = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi}{4} \cdot d_{i1}^2} = \frac{150\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (80 \text{ mm})^2} = 29,84 \text{ N/mm}^2 = 29,84 \text{ MPa}$$

b) Berechnung des Durchmesserverhältnisses

$$\frac{d_{al}}{d_{i1}} = \frac{70 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} = 1,17 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

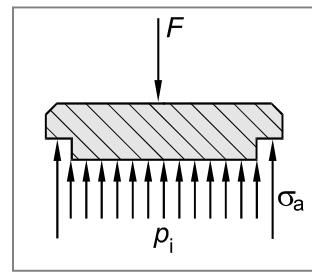
Berechnung der Spannungskomponenten an der Stelle 1

Tangentialspannung:

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_{i1}}{2 \cdot s_1} = 29,84 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{60 \text{ mm}}{2 \cdot 5 \text{ mm}} = 179,05 \text{ N/mm}^2$$

Axialspannung (erhält man durch Freischneiden des Deckels, siehe Abbildung):

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{-F + p_i \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_{i1}^2}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_{al}^2 - d_{i1}^2)} \\ &= \frac{-150\,000 \text{ N} + 29,84 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (60 \text{ mm})^2}{\frac{\pi}{4} \cdot (70^2 - 60^2) \text{ mm}^2} \\ &= -64,27 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$



Radialspannung:

$$\sigma_r = -\frac{p_i}{2} = -14,92 \text{ N/mm}^2$$

Hauptspannungen

$$\sigma_1 = \sigma_t = 179,05 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_r = -14,92 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = \sigma_a = -64,27 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{780 \text{ N/mm}^2}{179,05 \text{ N/mm}^2 - (-64,27 \text{ N/mm}^2)} = 3,21 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,50)$$

Bemerkung: Für Druckbehälterberechnungen wählt man aufgrund des Gefährdungspotenzials in der Regel einen höheren Sicherheitsbeiwert gegen plastische Verformung ($S_F \geq 1,50$).

c) Berechnung der Spannungskomponenten an der Stelle 4

Annahme: der äußere Zylinder ist dünnwandig.

Tangentialspannung:

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_{i2}}{2 \cdot s_2}$$

Axialspannung:

$$\sigma_a = 0 \quad (\text{keine Reibung})$$

Radialspannung:

$$\sigma_r = -\frac{p_i}{2}$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$p_i \cdot \frac{d_{i2}}{2 \cdot s_2} - \left(-\frac{p_i}{2} \right) = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$p_i \cdot \left(\frac{d_{i2}}{2 \cdot s_2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\frac{d_{i2}}{2 \cdot s_2} + \frac{1}{2} = \frac{R_{p0,2}}{p_i \cdot S_F}$$

$$s_2 = \frac{\frac{d_{i2}}{2}}{2 \cdot \left(\frac{R_{p0,2}}{p_i \cdot S_F} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{80 \text{ mm}}{2 \cdot \left(\frac{780 \text{ N/mm}^2}{29,84 \text{ N/mm}^2 \cdot 3,21} - \frac{1}{2} \right)} = 5,23 \text{ mm}$$

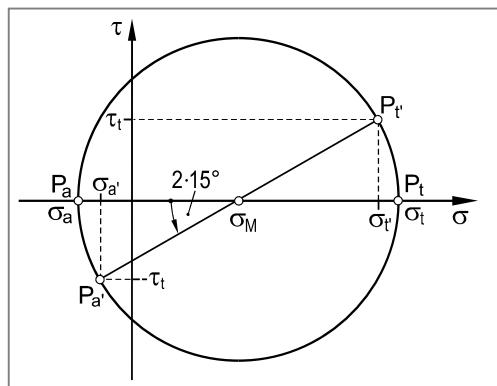
Überprüfung, ob der Behälter tatsächlich dünnwandig ist

$$\frac{d_{a2}}{d_{i2}} = \frac{90,45 \text{ mm}}{80 \text{ mm}} = 1,13 < 1,20 \quad (\text{dünnwandig})$$

- d) An der Stelle 3 herrscht kein Innendruck (Dichtungen), daher sind dort keine Spannungskomponenten aus Innendruck vorhanden. Da voraussetzungsgemäß außerdem keine Reibung auftritt, liegen auch keine Axialspannungen vor. Die Stelle 3 ist also **spannungsfrei**, d. h. $\sigma_V = 0$. Die Sicherheit gegen Fließen ist dementsprechend **unendlich**.

e) **Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises**

Die Schnittflächen mit den Flächennormalen in Tangential- und Axialrichtung enthalten keine Schubspannungen (nur Innendruck). Die Normalspannungen in diesen Schnittebenen sind dementsprechend Hauptspannungen. Die Bildpunkte P_t und P_a welche die Spannungskomponenten in diesen Schnittebenen repräsentieren, fallen dementsprechend mit der σ -Achse zusammen und der Mohr'sche Verformungskreis lässt sich aus einfache Weise konstruieren.



Die Bildpunkte P_a' (Schnittfläche mit Flächennormale in a' -Richtung) und P_t' erhält man durch Abtragen des Richtungswinkels ($2 \cdot 15^\circ$ bzw. $2 \cdot 15^\circ + 180^\circ$) ausgehend von der nunmehr bekannten Axial- oder Tangentialrichtung (gleicher Drehsinn zum Lageplan).

Berechnung der Spannungskomponenten $\sigma_{a'}$ und σ_t'

$$\begin{aligned}\sigma_{a'} &= \frac{\sigma_t + \sigma_a}{2} - \frac{\sigma_t - \sigma_a}{2} \cdot \cos 2\alpha \\ &= \frac{179,05 \text{ N/mm}^2 + (-64,27 \text{ N/mm}^2)}{2} - \frac{179,05 \text{ N/mm}^2 - (-64,27 \text{ N/mm}^2)}{2} \cdot \cos(2 \cdot 15^\circ) \\ &= -47,98 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_t' &= \frac{\sigma_t + \sigma_a}{2} + \frac{\sigma_t - \sigma_a}{2} \cdot \cos 2\alpha \\ &= \frac{179,05 \text{ N/mm}^2 + (-64,27 \text{ N/mm}^2)}{2} + \frac{179,05 \text{ N/mm}^2 - (-64,27 \text{ N/mm}^2)}{2} \cdot \cos(2 \cdot 15^\circ) \\ &= 162,75 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Berechnung der Dehnung in Messrichtung des Dehnungsmessstreifens

$$\begin{aligned}\varepsilon_{a'} &\equiv \varepsilon_{DMS} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{a'} - \mu \cdot \sigma_t') \\ &= \frac{-47,98 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 162,75 \text{ N/mm}^2}{208000 \text{ N/mm}^2} = -0,000465 = -0,465 \text{ \%}\end{aligned}$$

- f) Bei einem Innendruck von $p_{\max} = 40 \text{ MPa}$ ist der innere Zylinder voll ausgefahren, d. h. in beiden Zylindern tritt zusätzlich eine Axialspannung aus Innendruck auf.

Berechnung der Spannungskomponenten an der Stelle 1

Tangentialspannung:

$$\sigma_t = p_{\max} \cdot \frac{d_{i1}}{2 \cdot s_1} = 40 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{60 \text{ mm}}{2 \cdot 5 \text{ mm}} = 240 \text{ N/mm}^2$$

Axialspannung:

$$\sigma_a = \frac{-F + p_{\max} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_{i1}^2}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_{a1}^2 - d_{i1}^2)} = \frac{-150\,000 \text{ N} + 40 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (60 \text{ mm})^2}{\frac{\pi}{4} \cdot (70^2 - 60^2) \text{ mm}^2} = -36,14 \text{ N/mm}^2$$

Radialspannung:

$$\sigma_r = -\frac{p_{\max}}{2} = -20 \text{ N/mm}^2$$

Hauptspannungen

$$\sigma_1 = \sigma_t = 240 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_r = -20 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = \sigma_a = -36,14 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{780 \text{ N/mm}^2}{240 \text{ N/mm}^2 - (-36,14 \text{ N/mm}^2)} = 2,83 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,50)$$

Berechnung der Spannungskomponenten an der Stelle 4

Tangentialspannung:

$$\sigma_t = p_{\max} \cdot \frac{d_{i2}}{2 \cdot s_2} = 40 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{80 \text{ mm}}{2 \cdot 6 \text{ mm}} = 266,67 \text{ N/mm}^2$$

Axialspannung:

$$\sigma_a = \frac{-F + p_{\max} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_{i2}^2}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_{a2}^2 - d_{i2}^2)} = \frac{-150\,000 \text{ N} + 40 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (80 \text{ mm})^2}{\frac{\pi}{4} \cdot (92^2 - 80^2) \text{ mm}^2} = 31,50 \text{ N/mm}^2$$

Radialspannung:

$$\sigma_r = -\frac{p_{\max}}{2} = -20 \text{ N/mm}^2$$

Hauptspannungen

$$\sigma_1 = \sigma_t = 266,67 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_r = 31,50 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = \sigma_a = -20 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{780 \text{ N/mm}^2}{266,67 \text{ N/mm}^2 - (-20 \text{ N/mm}^2)} = 2,72 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,50)$$

g) Spannungskomponenten an der Kerbstelle 2

Tangentialspannung:

$$\sigma_t = 240 \text{ N/mm}^2$$

Axialspannung:

$$\sigma_{a\ max} = \alpha_k \cdot \sigma_{an} = \alpha_k \cdot \sigma_a = 2,25 \cdot (-36,14 \text{ N/mm}^2) = -81,32 \text{ N/mm}^2$$

Radialspannung:

$$\sigma_r = -\frac{P_{max}}{2} = -20 \text{ N/mm}^2$$

Hauptspannungen

$$\sigma_1 = \sigma_t = 240 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_r = -20 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = \sigma_a = -81,32 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{780 \text{ N/mm}^2}{240 \text{ N/mm}^2 - (-81,32 \text{ N/mm}^2)} = 2,43 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,50)$$

Lösung zu Aufgabe 12.15

Beim dünnwandigen Behälter unter Innendruck gilt für die Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_t$$

$$\sigma_2 \equiv \sigma_a = \frac{\sigma_t}{2}$$

$$\sigma_3 \approx 0$$

Berechnung der Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese

$$\begin{aligned}\sigma_{VGEH} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_t - \sigma_a)^2 + \sigma_a^2 + \sigma_t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot \sigma_t^2 + 2 \cdot \sigma_t \cdot \sigma_a + 2 \cdot \sigma_a^2} \\ &= \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_t \cdot \sigma_a + \sigma_a^2}\end{aligned}$$

mit $\sigma_a = 0,5 \cdot \sigma_t$ folgt:

$$\sigma_{VGEH} = \sqrt{\sigma_t^2 + \frac{\sigma_t^2}{2} + \frac{\sigma_t^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \sigma_t^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma_t$$

Fließen tritt ein, sobald gilt:

$$\sigma_{VGEH} = R_e$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sigma_t = R_e$$

$$\sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e = 1,155 \cdot R_e$$

13 Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

13.1 Formelsammlung Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

$$\sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2}$$

Mittelspannung

$$\sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2}$$

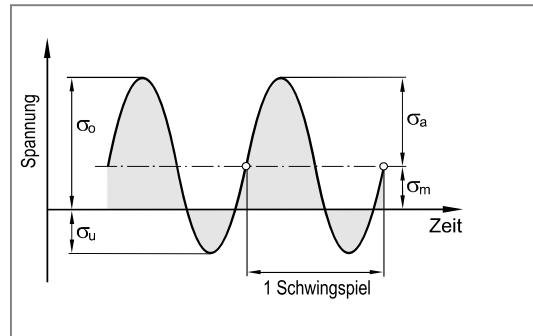
Spannungsamplitude

$$R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}$$

Spannungsverhältnis

$$N = f \cdot \Delta t$$

Schwingpielzahl



Wöhlerkurve

- Bereich der quasi-statischen Festigkeit

Zum Bruch führende Spannungsamplitude

$$\sigma_{A \max} = R_m \cdot \frac{1-R}{2}$$

- Zeitfestigkeitsbereich

Gleichung der Wöhlerkurve im Zeitfestigkeitsbereich

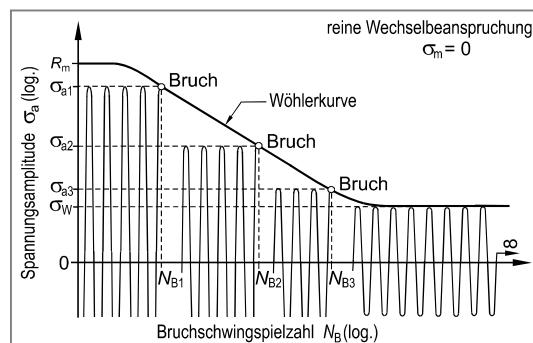
$$\sigma_A = \sigma_{A1} \cdot \left(\frac{N}{N_1} \right)^{-\frac{1}{k}}$$

$$N = N_1 \cdot \left(\frac{\sigma_A}{\sigma_{A1}} \right)^{-k}$$

Neigungsexponent

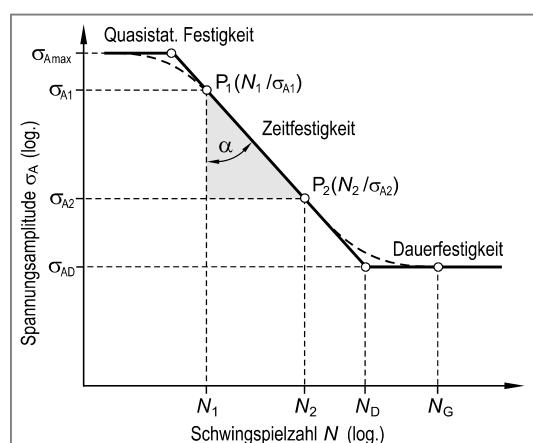
$$k = - \frac{\lg \left(\frac{N_1}{N_2} \right)}{\lg \left(\frac{\sigma_{A1}}{\sigma_{A2}} \right)}$$

$$k = \tan \alpha$$



- Bereich der Dauerfestigkeit

$$\sigma_{AD} = \text{konstant}$$



Dauerfestigkeitskennwerte unter rein wechselnder Beanspruchung

Werkstoffsorte / Werkstoffgruppe	Dauerfestigkeitskennwert ¹⁾			
	Zug-Druck-Wechselfestigkeit σ_{zdW} ²⁾	Biege-wechselfestigkeit σ_{bw} ^{7) 8)}	Schub-wechselfestigkeit τ_{sw} ²⁾	Torsions-wechselfestigkeit τ_{tw} ^{7) 8) 9)}
Walzstahl, allgemein ^{3) 4)}	$0,45 \cdot R_m$	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{bw}$
Einsatzstahl ⁴⁾	$0,40 \cdot R_m$ ⁵⁾	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$ ⁵⁾	$0,577 \cdot \sigma_{bw}$
Nichtrostender Stahl	$0,40 \cdot R_m$ ⁶⁾	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{bw}$
Schmiedestahl ⁴⁾	$0,40 \cdot R_m$ ⁶⁾	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{bw}$
Stahlguss	$0,34 \cdot R_m$	$1,15 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.
Gusseisen mit Lamellengraphit	$0,30 \cdot R_m$	$1,50 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,850 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,8 \dots 0,9 \cdot \sigma_{zdW}$
Gusseisen mit Kugelgraphit	$0,34 \cdot R_m$	$1,30 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,650 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.
Temperguss	$0,30 \cdot R_m$	$1,40 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,750 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.
Al-Knetlegierungen	$0,30 \cdot R_m$	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdW}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.
Al-Gusslegierungen	$0,30 \cdot R_m$	k. A.	$0,750 \cdot \sigma_{zdW}$	k. A.

¹⁾ Werkstoffkennwerte sind in N/mm² einzusetzen. Anhaltswerte für ungekerbte Proben mit polierter Oberfläche.

²⁾ Werte nach [2]. Für $N = 10^6$ Schwingspiele.

³⁾ Außer Einsatzstahl, nichtrostender Stahl und Schmiedestahl.

⁴⁾ Nach DIN 743-3: $\sigma_{zdW} \approx 0,4 \cdot R_m$; $\sigma_{bw} \approx 0,5 \cdot R_m$; $\tau_{tw} \approx 0,3 \cdot R_m$ (Torsionswechselfestigkeit).

⁵⁾ Blindgehärtet. Der Einfluss einer Einsatzhärtung wird durch den Randschichtfaktor (Tabelle 13.4) berücksichtigt.

⁶⁾ Vorläufiger Wert.

⁷⁾ Anhaltswerte für zähe Werkstoffe.

⁸⁾ $0,577 = 1/\sqrt{3}$ (Gestaltänderungsenergiethypothese).

⁹⁾ Experimentelle Ergebnisse deuten eher auf ein Verhältnis von $\tau_{tw} = 0,62 \cdot \sigma_{bw}$ hin.

k. A. = keine Angabe

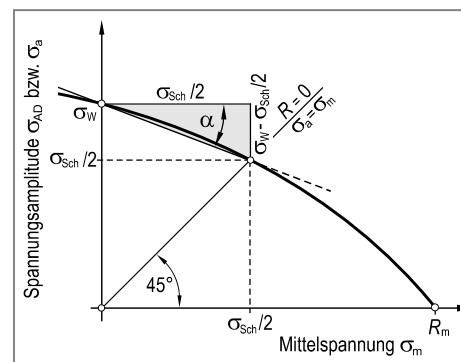
Festigkeitsbedingung für ungekerbte Bauteile mit polierter Oberfläche unter reiner Wechselbeanspruchung

$$\sigma_a \leq \sigma_{a \text{ zul}} = \frac{\sigma_w}{S_D}$$

Mittelspannungsempfindlichkeit

$$M = \tan \alpha = \frac{\sigma_w - \sigma_{sch}/2}{\sigma_{sch}/2}$$

Definition der Mittelspannungsempfindlichkeit



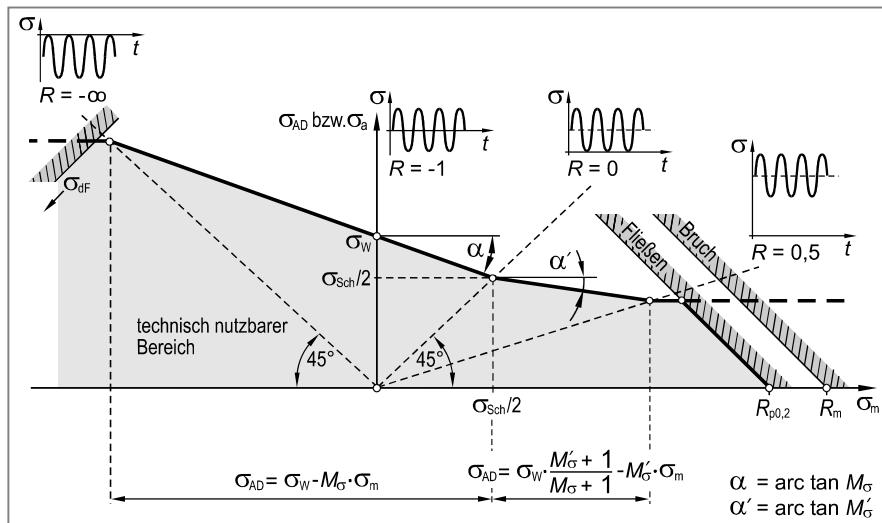
Mittelpunktempfindlichkeit unter der Wirkung von Normalspannungen

- Stahl: ¹⁾ $M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,10$
- Stahlguss: $M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m + 0,05$
- GJL: ²⁾ $M_\sigma = 0,5$
- GJS: ³⁾ $M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m + 0,08$
- Temperguss: $M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m + 0,13$
- Al-Knetlegierungen $M_\sigma = 0,001 \cdot R_m - 0,04$
- Al-Gusslegierungen $M_\sigma = 0,001 \cdot R_m + 0,20$

Mittelpunktempfindlichkeit unter der Wirkung von Schubspannungen

- Stahl ¹⁾ $M_\tau = 0,577 \cdot M_\sigma$
- Stahlguss: $M_\tau = 0,577 \cdot M_\sigma$
- GJL: ²⁾ $M_\tau = 0,85 \cdot M_\sigma$
- GJS: ³⁾ $M_\tau = 0,65 \cdot M_\sigma$
- Temperguss: $M_\tau = 0,75 \cdot M_\sigma$
- Al-Knetlegierungen $M_\tau = 0,577 \cdot M_\sigma$
- Al-Gusslegierungen $M_\tau = 0,75 \cdot M_\sigma$

Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh (modifiziert) für duktile Werkstoffe



Für $\frac{\sigma_W}{M_\sigma - 1} < \sigma_m \leq \frac{\sigma_W}{M_\sigma + 1}$:

$$\sigma_{AD} = \sigma_W - M_\sigma \cdot \sigma_m$$

¹⁾ auch für nichtrostende Stähle

²⁾ GJL: Graues Gusseisen mit Lamellengraphit (Grauguss)

³⁾ GJS: Graues Gusseisen mit Kugelgraphit

Für $\frac{\sigma_W}{M_\sigma + 1} < \sigma_m \leq \frac{3 \cdot \sigma_W}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1}$:

$$\sigma_{AD} = \sigma_W \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1} - M'_\sigma \cdot \sigma_m$$

Für $\frac{3 \cdot \sigma_W}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1} < \sigma_m < \infty$:

$$\sigma_{AD} = \frac{\sigma_W}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1}$$

Für $-\infty < \sigma_m < \frac{\sigma_W}{M_\sigma - 1}$:

$$\sigma_{AD} = \frac{\sigma_W}{1 - M_\sigma}$$

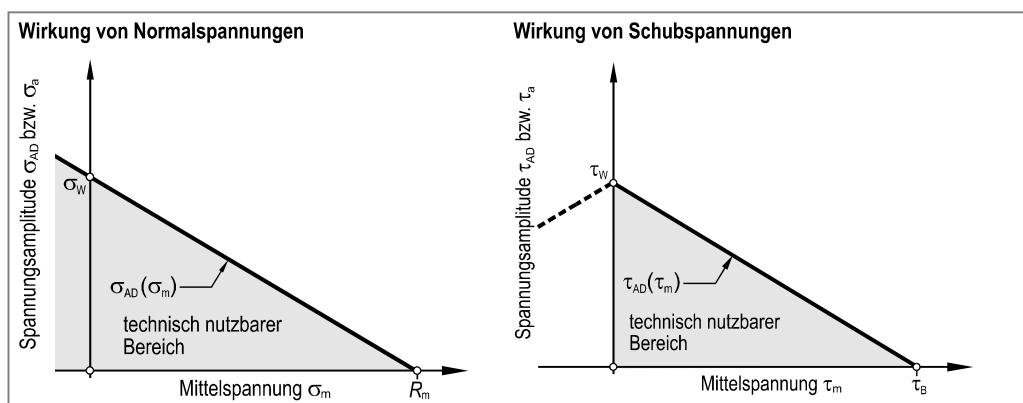
Grenzkurve für plastische Verformung im DFS nach Haigh

$$\sigma_a(\sigma_m) = R_{p0,2} - \sigma_m$$

Grenzkurve für Bruch im DFS nach Haigh

$$\sigma_a(\sigma_m) = R_m - \sigma_m$$

Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh für spröde Werkstoffe



Dauernd ertragbare Schubspannungssamplitude
für spröde Werkstoffe

$$\sigma_{AD} = \sigma_W \cdot \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \right)$$

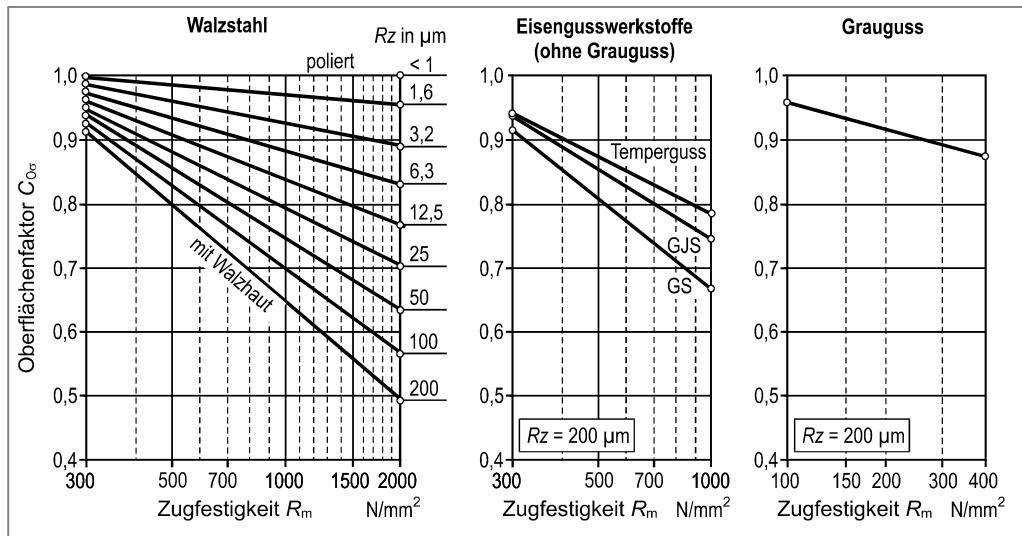
Dauernd ertragbare Normalspannungssamplitude
für spröde Werkstoffe

$$\tau_{AD} = \tau_W \cdot \left(1 - \frac{|\tau_m|}{\tau_B} \right)$$

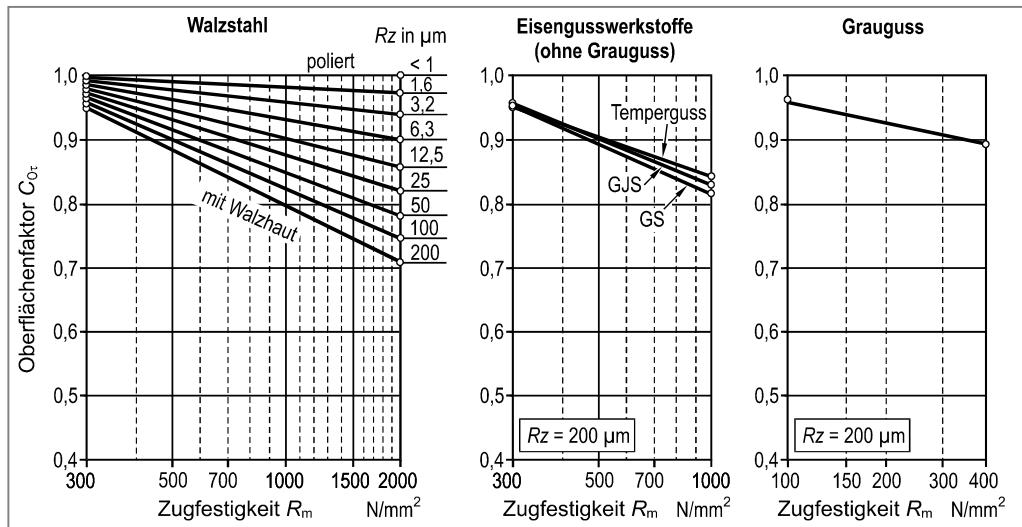
Festigkeitsbedingung unter Schwingbeanspruchung ungekerbter Bauteile mit polierter Oberfläche unter der Wirkung einer von Null verschiedenen Mittelspannung

$$\sigma_a \leq \sigma_{a\text{ zul}} = \frac{\sigma_{AD}}{S_D}$$

Einfluss der Oberflächenrauigkeit unter der Wirkung von Normalspannungen



Einfluss der Oberflächenrauigkeit unter der Wirkung von Schubspannungen



13.2 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 13.1

a) Berechnung der Zug-Druck-Wechselfestigkeit

$$\sigma_{zdW} = \frac{F_W}{A} = \frac{32000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (10 \text{ mm})^2} = 407,4 \text{ N/mm}^2$$

b) Wahl zweier Stützpunkte im Zeitfestigkeitsbereich der Wöhlerkurve

$$P_1: N_1 = 10^2 \quad \text{und} \quad \sigma_{A1} = R_m = 900 \text{ N/mm}^2$$

$$P_2: N_2 = 5 \cdot 10^6 \quad \text{und} \quad F_{A2} = 32 \text{ kN}$$

Damit folgt für die zugehörigen Spannungsamplituden:

$$\sigma_{A2} = \frac{F_{A2}}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{32000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (10 \text{ mm})^2} = 407,4 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des Neigungsexponenten k

$$k = -\frac{\lg\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}{\lg\left(\frac{\sigma_{A1}}{\sigma_{A2}}\right)} = -\frac{\lg\left(\frac{10^2}{5 \cdot 10^6}\right)}{\lg\left(\frac{900,0 \text{ N/mm}^2}{407,4 \text{ N/mm}^2}\right)} = 13,65$$

c) Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 900 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,215$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD} = \sigma_{zdW} - M_\sigma \cdot \sigma_m$$

Mit $\sigma_{AD1} = \sigma_m$ (reine Zugschwellbeanspruchung) folgt:

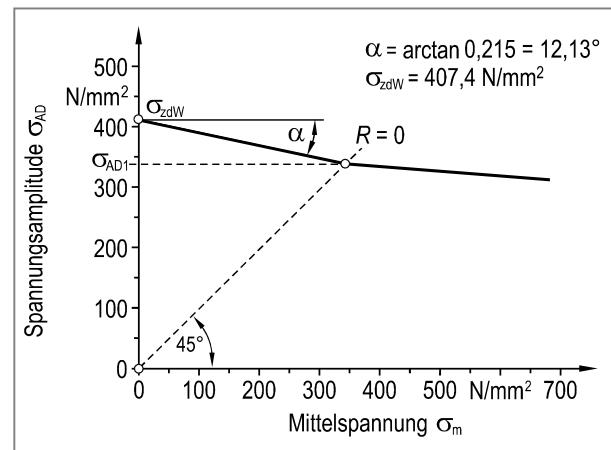
$$\sigma_{AD1} = \sigma_{zdW} - M_\sigma \cdot \sigma_{AD1}$$

$$\sigma_{AD1} = \frac{\sigma_{zdW}}{M_\sigma + 1} = \frac{407,4 \text{ N/mm}^2}{0,215 + 1} = 335,30 \text{ N/mm}^2$$

Damit folgt schließlich für die dauernd ertragbare Kraftamplitude:

$$F_{AD1} = \sigma_{AD1} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 335,30 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (10 \text{ mm})^2 = 26337 \text{ N}$$

d)



Abgelesen: $\sigma_{AD1} = 340 \text{ N/mm}^2$

Damit folgt:

$$F_{AD1} = \sigma_{AD1} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 340 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (10 \text{ mm})^2 = 26704 \text{ N}$$

e) Berechnung der Mittelspannung σ_m

$$\sigma_m = \frac{F}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{20000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (10 \text{ mm})^2} = 254,65 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD2} = \sigma_{zdw} - M_\sigma \cdot \sigma_m \quad \text{da } \sigma_m < \frac{\sigma_w}{M_\sigma + 1}$$

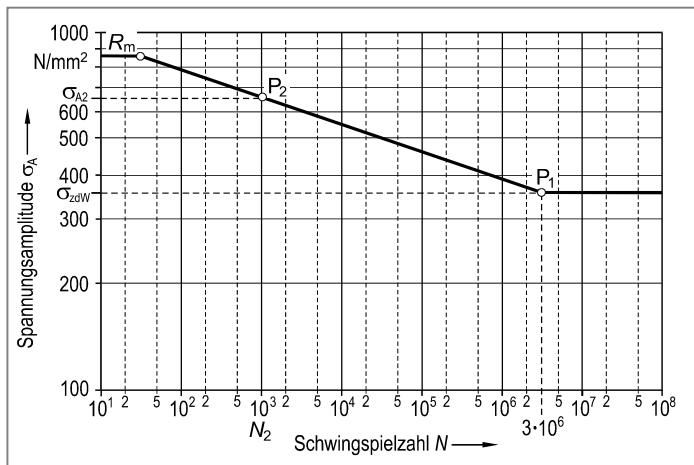
$$\sigma_{AD2} = 407,4 \text{ N/mm}^2 - 0,215 \cdot 254,65 \text{ N/mm}^2 = 352,69 \text{ N/mm}^2$$

Damit folgt schließlich für die dauernd ertragbare Kraftamplitude F_{AD2} :

$$F_{AD2} = \sigma_{AD2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 352,69 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (10 \text{ mm})^2 = 27700 \text{ N}$$

Lösung zu Aufgabe 13.2

a) Darstellung der Wöhlerkurve



Stützpunkte für die Zeitfestigkeitsgerade

Punkt P_1 : $N_1 = N_D = 3 \cdot 10^6$

$$\sigma_{A1} = \sigma_{zdW} = 350 \text{ N/mm}^2$$

Punkt P_2 : $N_2 = 10^3$ (gewählt)

$$\sigma_{A2} = \sigma_{A1} \cdot \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^{-\frac{1}{k}} = 350 \text{ N/mm}^2 \cdot \left(\frac{10^3}{3 \cdot 10^6} \right)^{-\frac{1}{12,5}} = 664,12 \text{ N/mm}^2$$

Anmerkung:

Zum Einzeichnen der Zeitfestigkeitsgeraden kann anstelle der Verwendung des Stützpunktes P_1 ($10^3 / 664,12 \text{ N/mm}^2$) auch der Steigungswinkel α (siehe Bild 13.20 im Lehrbuch) verwendet werden ($\alpha = \arctan 12,5 = 85,43^\circ$). Beim Einzeichnen ist jedoch auf gleiche Achsteilung von Ordinate und Abszisse zu achten, d. h. die Achslänge einer Dekade auf der Abszisse und der Ordinate müssen gleich sein (in obiger Abbildung aus Platzgründen nicht der Fall).

b) Berechnung der ertragbaren Schwingpielzahl für $\sigma_A = 450 \text{ N/mm}^2$

$$N = N_1 \cdot \left(\frac{\sigma_A}{\sigma_{A1}} \right)^{-k} = 3 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{450 \text{ N/mm}^2}{350 \text{ N/mm}^2} \right)^{-12,5} = 129\,663 \text{ Lastwechsel}$$

Berechnung der erforderlichen Versuchsdauer

$$t = \frac{N}{f} = \frac{129\,663}{15 \text{ 1/s}} = 8\,644,2 \text{ s} = 2,40 \text{ h}$$

c) Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 850 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,1975$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD} = \sigma_{zdW} - M_\sigma \cdot \sigma_m \quad \text{da } \sigma_m < \frac{\sigma_{zdW}}{M_\sigma + 1}$$

$$\sigma_{AD} = 350 \text{ N/mm}^2 - 0,1975 \cdot 150 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{320,4 \text{ N/mm}^2}$$

Lösung zu Aufgabe 13.3

- a) Die Zylinderkopfschrauben eines Motors erfahren infolge statischer Vorspannung und rein schwellendem Arbeitsdruck eine Zugschwellbeanspruchung.
- b) Ein rein schwellender Innendruck führt in einem Behälter in axialer, tangentialer und radialer Richtung zu einer reinen Zugschwellbeanspruchung (z. B. Befüll- und Entleerungsvorgänge einer Gasflasche).
- c) Eine umlaufende, durch eine statische Radialkraft beanspruchte Welle unterliegt einer reinen Wechselbeanspruchung, sofern keine statische Vorspannung wirkt (Umlaufbiegung).
- d) Ein Brückenpfeiler erfährt durch das Eigengewicht der Brücke und die zusätzliche, zeitlich veränderliche Verkehrsbelastung eine Druckschwellbeanspruchung.
- e) Die Kolbenstange eines einseitig wirkenden Hydraulikzylinders unterliegt einer reinen Druckschwellbeanspruchung, sofern bei jedem Lastwechsel der Innendruck p_i zu Null wird.

Lösung zu Aufgabe 13.4

a) Berechnung der Ober- und Unterspannungen

- Minimaler Druck (aus Diagramm) $p_{iu} = 5 \text{ MPa}$
- Maximaler Druck (aus Diagramm) $p_{io} = 10 \text{ MPa}$

Damit folgt für die Unter- und Oberspannung der jeweiligen Spannungskomponenten:

Spannungs-komponente	Ober-spannung σ_o	Unter-spannung σ_u
$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s}$	400 N/mm ²	200 N/mm ²
$\sigma_a = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s}$	200 N/mm ²	100 N/mm ²
$\sigma_r = -p_i$ ¹⁾	-5 N/mm ²	-10 N/mm ²

¹⁾ am Innenrand

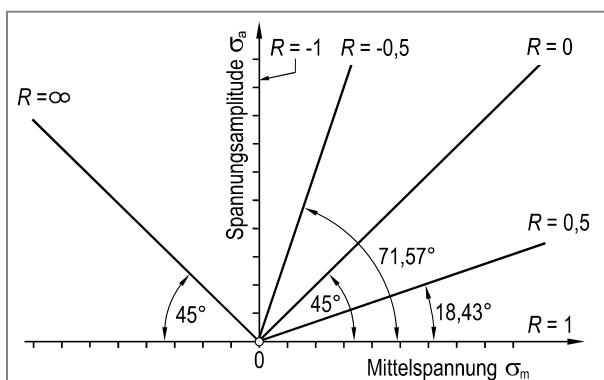
b) Berechnung von Spannungsamplitude, Mittelspannung und Spannungsverhältnis für die Tangentialspannungskomponente

$$\sigma_{ta} = \frac{\sigma_{to} - \sigma_{tu}}{2} = \frac{400 \text{ N/mm}^2 - 200 \text{ N/mm}^2}{2} = 100 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{tm} = \frac{\sigma_{to} + \sigma_{tu}}{2} = \frac{400 \text{ N/mm}^2 + 200 \text{ N/mm}^2}{2} = 300 \text{ N/mm}^2$$

$$R = \frac{\sigma_{tu}}{\sigma_{to}} = \frac{200 \text{ N/mm}^2}{400 \text{ N/mm}^2} = 0,5$$

c)



Geradengleichung für konstantes Spannungsverhältnis R

$$\sigma_a = \frac{1-R}{1+R} \cdot \sigma_m \quad \text{bzw.} \quad \sigma_m = \frac{1+R}{1-R} \cdot \sigma_a$$

für $R = -1$ folgt:

$$\sigma_m = 0 \text{ (Ordinate)}$$

für $R = -0,5$ folgt:

$$\sigma_a = 3 \cdot \sigma_m (\alpha = 71,57^\circ)$$

für $R = 0$ folgt:

$$\sigma_a = \sigma_m \text{ (erste Winkelhalbierende)}$$

für $R = 0,5$ folgt:

$$\sigma_a = \frac{1}{3} \cdot \sigma_m (\alpha = 18,43^\circ)$$

für $R = 1$ folgt:

$$\sigma_a = 0 \text{ (Abszisse, d. h. statische Beanspruchung)}$$

für $R = \infty$ folgt:

$$\sigma_a = -\sigma_m$$

Lösung zu Aufgabe 13.5

a) Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ für Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,83 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 12,5 \mu\text{m und } R_m = 950 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Zug-Druck-Wechselfestigkeit

$$\sigma_{zdW}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{zdW} = 0,83 \cdot 415 \text{ N/mm}^2 = 344,45 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_a \leq \sigma_{a \text{ zul}}$$

$$\frac{F}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D} = \frac{\sigma_{zdW}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{zdW}^* \cdot \pi \cdot d^2}{4 \cdot F} = \frac{344,45 \text{ N/mm}^2 \cdot \pi \cdot (25 \text{ mm})^2}{4 \cdot 50000 \text{ N}}$$

$$S_D = 3,38 \quad (\text{ausreichend, da } S_D > 2,50)$$

b) Berechnung der korrigierten Biege-Wechselfestigkeit

$$\sigma_{bw}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{bw} = 0,83 \cdot 480 \text{ N/mm}^2 = 398,4 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{ba} \leq \sigma_{ba \text{ zul}}$$

$$\frac{M_b}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D} = \frac{\sigma_{bw}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{bw}^* \cdot \pi \cdot d^3}{32 \cdot F_q \cdot l} = \frac{398,4 \text{ N/mm}^2 \cdot \pi \cdot (25 \text{ mm})^3}{32 \cdot 400 \text{ N} \cdot 500 \text{ mm}}$$

$$S_D = 3,06 \quad (\text{ausreichend, da } S_D > 2,50)$$

c) Berechnung des Oberflächenfaktors C_{Or} für Schubbeanspruchung

$$C_{Or} = 0,91 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 12,5 \mu\text{m und } R_m = 950 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Torsionswechselfestigkeit

$$\tau_{tw}^* = C_{Or} \cdot \tau_{tw} = 0,91 \cdot 240 \text{ N/mm}^2 = 218,4 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung:

$$\tau_{ta} \leq \tau_{ta \text{ zul}}$$

$$\frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{\tau_{AD}^*}{S_D} = \frac{\tau_{tw}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\tau_{tW}^* \cdot \pi \cdot d^3}{16 \cdot M_t} = \frac{218,4 \text{ N/mm}^2 \cdot \pi \cdot (25 \text{ mm})^3}{16 \cdot 200\,000 \text{ Nmm}}$$

= **3,35** (ausreichend, da $S_D > 2,50$)

Lösung zu Aufgabe 13.6

a) Berechnung der Mittelspannung

$$\sigma_m = \frac{F_m}{A} = \frac{150000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (30 \text{ mm})^2} = 212,21 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ für Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,93 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 6,3 \mu\text{m} \quad \text{und} \quad R_m = 540 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Zug-Druck-Wechselfestigkeit

$$\sigma_{zdW}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{zdW} = 0,93 \cdot 240 \text{ N/mm}^2 = 223,2 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 540 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,089$$

$$M'_\sigma = 0,089 / 3 = 0,03 \quad (\text{nach FKM - Richtlinie})$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{zdW}^* \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1} - M'_\sigma \cdot \sigma_m \quad \text{da} \quad \frac{\sigma_{zdW}^*}{M_\sigma + 1} < \sigma_m < \frac{3 \cdot \sigma_{zdW}^*}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1}$$

$$\sigma_{AD}^* = 223,2 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{0,03 + 1}{0,089 + 1} - 0,03 \cdot 212,21 \text{ N/mm}^2 = 204,55 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Kraftamplitude

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_a = \sigma_{AD}^*$$

$$\sigma_a = 204,55 \text{ N/mm}^2$$

Damit folgt für die dauernd ertragbare Kraftamplitude:

$$F_{A1} = \sigma_a \cdot A = 204,55 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (30 \text{ mm})^2 = 144586 \text{ N} = \mathbf{144,6 \text{ kN}}$$

Anmerkung:

Berechnung der Oberspannung

$$\sigma_o = \frac{F_m + F_{A1}}{A} = \frac{150000 \text{ N} + 144586 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (30 \text{ mm})^2} = 416,75 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_o} = \frac{290 \text{ N/mm}^2}{416,75 \text{ N/mm}^2} = 0,7$$

Damit versagt das Bauteil nicht durch Schwingbruch, sondern durch Fließen.

b) Berechnung der dauernd ertragbaren Kraftamplitude

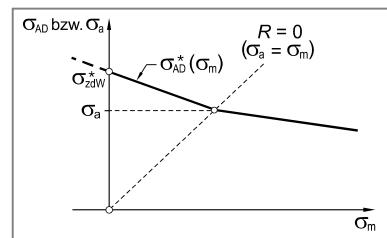
Da $\sigma_a = \sigma_m$ muss für σ_{AD}^* gelten (siehe Abbildung):

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{zdW}^* - M_\sigma \cdot \sigma_m$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_a = \sigma_{AD}^*$$

$$\sigma_a = \sigma_{zdW}^* - M_\sigma \cdot \sigma_m$$



Mit $\sigma_m = \sigma_a$ (reine Zugschwellbeanspruchung) folgt:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{zdW}^*}{M_\sigma + 1} = \frac{223,2 \text{ N/mm}^2}{1 + 0,089} = 204,96 \text{ N/mm}^2$$

Damit folgt für die dauernd ertragbare Kraftamplitude:

$$F_{A2} = \sigma_a \cdot A = 204,96 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (30 \text{ mm})^2 = 144877 \text{ N} = \mathbf{144,9 \text{ kN}}$$

Anmerkung:

Berechnung der Oberspannung

$$\sigma_o = \sigma_m + \sigma_a = 2 \cdot 204,96 \text{ N/mm}^2 = 409,92 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_o} = \frac{290 \text{ N/mm}^2}{409,92 \text{ N/mm}^2} = 0,71$$

Damit versagt das Bauteil nicht durch Schwingbruch, sondern durch Fließen.

c) Berechnung der dauernd ertragbaren Kraftamplitude

Da $\sigma_a = -\sigma_m$ muss für σ_{AD}^* gelten (siehe Abbildung):

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{zdW}^* - M_\sigma \cdot \sigma_m$$

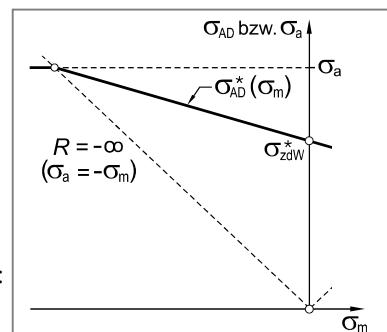
Festigkeitsbedingung

$$\sigma_a = \sigma_{AD}^*$$

$$\sigma_a = \sigma_{zdW}^* - M_\sigma \cdot \sigma_m$$

Mit $\sigma_m = -\sigma_a$ (reine Druckschwellbeanspruchung) folgt:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{zdW}^*}{1 - M_\sigma} = \frac{223,2 \text{ N/mm}^2}{1 - 0,089} = 245,01 \text{ N/mm}^2$$



Damit folgt für die dauernd ertragbare Kraftamplitude:

$$\begin{aligned}F_{A3} &= \sigma_{AD} \cdot A = 245,01 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (30 \text{ mm})^2 \\&= 173184 \text{ N} = \mathbf{173,2 \text{ kN}}$$

Anmerkung:

Berechnung der Unterspannung

$$\sigma_u = \sigma_m + \sigma_a = 490,01 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

$$S_F = \frac{\sigma_{df}}{\sigma_u} \approx \frac{R_{p0,2}}{\sigma_u} = \frac{290 \text{ N/mm}^2}{490,01 \text{ N/mm}^2} = 0,59$$

Damit versagt das Bauteil nicht durch Schwingbruch, sondern durch Fließen.

Lösung zu Aufgabe 13.7

a) Festigkeitsbedingung (Fließen)

$$\sigma_o \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{F_1 + F_2}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot (F_1 + F_2)}{\pi} \cdot \frac{S_F}{R_{p0,2}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot (12000 \text{ N} + 25000 \text{ N})}{\pi} \cdot \frac{1,20}{300 \text{ N/mm}^2}} = 13,73 \text{ mm}$$

b) Berechnung von Spannungsamplitude und Mittelspannung

$$\sigma_a = \frac{F_a}{A} = \frac{\frac{F_2}{2}}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{2 \cdot F_2}{\pi \cdot d^2}$$

$$\sigma_m = \frac{F_m}{A} = \frac{\frac{F_1 + F_2}{2}}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{4 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2}{\pi \cdot d^2}$$

Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,94 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 4 \mu\text{m} \text{ und } R_m = 560 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Zug-Druck-Wechselfestigkeit

$$\sigma_{zdW}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{zdW} = 0,94 \cdot 250 \text{ N/mm}^2 = 235 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 560 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,096$$

Zur Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude muss zunächst bekannt sein, ob

$$\sigma_m \leq \frac{\sigma_{zdW}^*}{M_\sigma + 1} \quad \text{oder}$$

$$\sigma_m > \frac{\sigma_{zdW}^*}{M_\sigma + 1} \quad \text{ist.}$$

Berechnung des Durchmessers d , so dass gilt:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{zdW}^*}{M_\sigma + 1}$$

$$\frac{4 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2}{\pi \cdot d^2} = \frac{\sigma_{zdW}^*}{M_\sigma + 1}$$

$$d = \sqrt{\frac{M_\sigma + 1 \cdot 4 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2}{\pi \cdot \sigma_{zdW}^*}} = \sqrt{\frac{0,096 + 1 \cdot 4 \cdot 12000 \text{ N} + 2 \cdot 25000 \text{ N}}{\pi \cdot 235 \text{ N/mm}^2}} = 12,06 \text{ mm}$$

Für $d = 12,06 \text{ mm}$ beträgt die Spannungsamplitude:

$$\sigma_a = \frac{2 \cdot F_2}{\pi \cdot d^2} = \frac{2 \cdot 25000 \text{ N}}{\pi \cdot (12,06 \text{ mm})^2} = 109,39 \text{ N/mm}^2$$

und die dauernd ertragbare Amplitude:

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_m = \frac{\sigma_{zdW}^*}{M_\sigma + 1} = \frac{235 \text{ N/mm}^2}{0,096 + 1} = 214,42 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch (für $d = 12,06 \text{ mm}$)

$$S_D = \frac{\sigma_{AD}^*}{\sigma_a} = \frac{214,42 \text{ N/mm}^2}{109,39 \text{ N/mm}^2} = 1,96$$

Da $S_D = 2,80$ gefordert wird, muss der Durchmesser $d > 12,06 \text{ mm}$ sein. Damit errechnet sich die dauernd ertragbare Amplitude σ_{AD}^* zu:

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{zdW}^* - M_\sigma \cdot \sigma_m$$

Aus der Festigkeitsbedingung folgt:

$$\sigma_a \leq \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

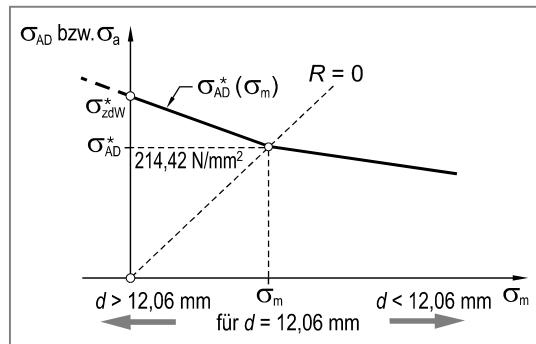
$$\sigma_a = \frac{\sigma_{zdW}^* - M_\sigma \cdot \sigma_m}{S_D}$$

$$\frac{2 \cdot F_2}{\pi \cdot d^2} = \frac{\sigma_{zdW}^* - M_\sigma \cdot \frac{4 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2}{\pi \cdot d^2}}{S_D}$$

$$\frac{2 \cdot F_2}{\pi \cdot d^2} \cdot S_D = \sigma_{zdW}^* - M_\sigma \cdot \frac{4 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2}{\pi \cdot d^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot F_2 \cdot S_D + M_\sigma \cdot (4 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2)}{\pi \cdot \sigma_{zdW}^*}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 25000 \text{ N} \cdot 2,80 + 0,096 \cdot (4 \cdot 12000 \text{ N} + 2 \cdot 25000 \text{ N})}{\pi \cdot 235 \text{ N/mm}^2}} = 14,23 \text{ mm}$$



Lösung zu Aufgabe 13.8

Berechnung der Mittelspannung

$$\sigma_m = \frac{F_1}{A} = \frac{F_1}{a \cdot b} = \frac{120000 \text{ N}}{25 \text{ mm} \cdot 50 \text{ mm}} = 96 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Spannungsamplitude

$$\sigma_{ba} = \frac{M_{ba}}{W_b} = \frac{F_2 \cdot l}{\frac{a \cdot b^2}{6}} = \frac{6 \cdot F_2 \cdot l}{a \cdot b^2}$$

Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,88 \quad \text{aus Diagramm für } R_m = 400 \text{ N/mm}^2 \text{ und Grauguss}$$

Berechnung der korrigierten Biegewechselfestigkeit

$$\sigma_{bw}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{bw} = 0,88 \cdot 130 \text{ N/mm}^2 = 114,4 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Spannungsamplitude (spröder Werkstoff !)

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{bw}^* \cdot \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right) = 114,4 \text{ N/mm}^2 \cdot \left(1 - \frac{96 \text{ N/mm}^2}{400 \text{ N/mm}^2}\right) = 86,94 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung (Dauerbruch)

$$\sigma_{ba} \leq \sigma_{ba \text{ zul}}$$

$$\frac{6 \cdot F_2 \cdot l}{a \cdot b^2} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$F_2 = \frac{a \cdot b^2}{6 \cdot l} \cdot \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D} = \frac{25 \text{ mm} \cdot (50 \text{ mm})^2}{6 \cdot 200 \text{ mm}} \cdot \frac{86,94 \text{ N/mm}^2}{5,0} = 905,7 \text{ N}$$

Anmerkung:

Berechnung der Oberspannung

$$\sigma_o = \sigma_m + \frac{6 \cdot F_2 \cdot l}{a \cdot b^2} = 96 \text{ N/mm}^2 + \frac{6 \cdot 905,7 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm}}{25 \text{ mm} \cdot (50 \text{ mm})^2} = 113,39 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Bruch

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_o} = \frac{400 \text{ N/mm}^2}{113,39 \text{ N/mm}^2} = 3,52$$

Damit wird die erforderliche Sicherheit gegen Bruch ($S_B \geq 4,0$) geringfügig unterschritten.

Lösung zu Aufgabe 13.9

Ermittlung der Formzahl α_k

$$\frac{D}{d} = \frac{30 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = 1,2$$

$$\frac{R}{d} = \frac{2,5 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = 0,1$$

Damit entnimmt man einem geeigneten Formzahldiagramm:

$$\alpha_{kt} = 1,30$$

Berechnung der Nennspannungen sowie der maximalen Mittelspannung

Spannungsamplitude (Nennspannung)

$$\tau_{ta,n} = \frac{M_{ta}}{W_{tn}} = \frac{M_{ta}}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{500\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (25 \text{ mm})^3} = 162,98 \text{ N/mm}^2$$

Mittelspannung (Nennspannung und maximale Spannung):

$$\tau_{tm,n} = \frac{M_{tm}}{W_{tn}} = \frac{M_{tm}}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{1000\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (25 \text{ mm})^3} = 325,95 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{tm,max} = \tau_{tm,n} \cdot \alpha_{kt} = 325,95 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,30 = 423,73 \text{ N/mm}^2$$

Bestimmung der Kerbwirkungszahl β_{kt} für Torsionsbeanspruchung

Formzahl: $\alpha_k = 1,30$

Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles:

$$\chi^+ = \frac{4}{D+d} + \frac{1}{R} = \frac{4}{30 \text{ mm} + 25 \text{ mm}} + \frac{1}{2,5 \text{ mm}} = 0,47 \text{ mm}^{-1}$$

Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 im Lehrbuch ($R_{p0,2} = 1400 \text{ N/mm}^2$):

$$n_\chi = 1,01$$

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_{kt} :

$$\beta_{kt} = \frac{\alpha_{kt}}{n_\chi} = \frac{1,30}{1,01} = 1,29$$

Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\tau}$ unter der Wirkung von Schubspannungen

$$C_{O\tau} = 0,82 \quad \text{aus Diagramm für } R_z = 25 \mu\text{m} \text{ und } R_m = 1830 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Torsionswechselfestigkeit

$$\tau_{tW}^* = C_{O\tau} \cdot \tau_{tW} = 0,82 \cdot 490 \text{ N/mm}^2 = 401,8 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\tau = 0,577 \cdot M_\sigma = 0,577 \cdot (0,00035 \cdot R_m - 0,1) = 0,577 \cdot (0,00035 \cdot 1830 \text{ N/mm}^2 - 0,1) = 0,31$$

$$M'_\tau = 0,31 / 3 = 0,10 \quad (\text{nach FKM - Richtlinie})$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\tau_{AD}^* = \tau_{tW}^* \cdot \frac{M'_\tau + 1}{M_\tau + 1} - M'_\tau \cdot \tau_{tm \max} \quad \text{da } \frac{\tau_{tW}^*}{M_\tau + 1} < \tau_{tm} < \frac{3 \cdot \tau_{tW}^*}{3 \cdot M'_\tau + 1} \cdot \frac{M'_\tau + 1}{M_\tau + 1}$$

$$\tau_{AD}^* = 401,8 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{0,10 + 1}{0,31 + 1} - 0,10 \cdot 423,73 \text{ N/mm}^2 = 294,1 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\tau_{ta \ max} \leq \tau_{ta \ zul}$$

$$\tau_{ta \ n} \cdot \beta_{kt} = \frac{\tau_{AD}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\tau_{AD}^*}{\tau_{ta \ n} \cdot \beta_{kt}} = \frac{294,1 \text{ N/mm}^2}{162,98 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,29} = 1,40 \quad (\text{nicht ausreichend, da } S_D < 2,50)$$

Lösung zu Aufgabe 13.10

a) Berechnung des erforderlichen Radius R

$$\frac{D}{d} = 2,0$$

$$\alpha_k = 2,0$$

Damit entnimmt man einem geeigneten Formzahldiagramm:

$$\frac{R}{d} = 0,1$$

$$R = 0,1 \cdot d = 0,1 \cdot 25 \text{ mm} = 2,5 \text{ mm}$$

b) Berechnung der Kerbwirkungszahl β_k für den Wellenabsatz (S890QL)

Formzahl: $\alpha_k = 2,0$

Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles:

$$\chi^+ = \frac{2}{R} = \frac{2}{2,5 \text{ mm}} = 0,8 \text{ mm}^{-1}$$

Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 im Lehrbuch ($R_{p0,2} = 920 \text{ N/mm}^2$):

$$n_\chi = 1,03$$

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_k :

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{n_\chi} = \frac{2,00}{1,03} = 1,94$$

Festigkeitsbedingung (Dauerbuch)

$$\sigma_{a \max} \leq \sigma_{a \ zul}$$

$$\sigma_{an} \cdot \beta_k = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$\sigma_{an} \cdot \beta_k = \frac{\sigma_{zdW}}{S_D}$$

$$\sigma_{an} = \frac{\sigma_{zdW}}{S_D \cdot \beta_k} = \frac{480 \text{ N/mm}^2}{2,50 \cdot 1,94} = 98,97 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der zulässigen Kraftamplitude F_W

$$F_W = \sigma_{an} \cdot A_n = \sigma_{an} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 98,97 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (25 \text{ mm})^2 = 48581 \text{ N} = 48,6 \text{ kN}$$

c) Berechnung der Kerbwirkungszahl β_k für den Wellenabsatz (EN-GJL-300)

Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 im Lehrbuch ($R_m = 320 \text{ N/mm}^2$):

$$n_\chi = 1,30$$

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_k :

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{n_\chi} = \frac{2,00}{1,30} = 1,54$$

Festigkeitsbedingung (Dauerbuch)

$$\sigma_{a\ max} \leq \sigma_{a\ zul}$$

$$\sigma_{an} \cdot \beta_k = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$\sigma_{an} \cdot \beta_k = \frac{\sigma_{zdW}}{S_D}$$

$$\sigma_{an} = \frac{\sigma_{zdW}}{S_D \cdot \beta_k} = \frac{100 \text{ N/mm}^2}{4,0 \cdot 1,54} = 16,23 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der zulässigen Kraftamplitude F_W

$$F_W = \sigma_{an} \cdot A_n = \sigma_{an} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 16,23 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (25 \text{ mm})^2 = 7969 \text{ N} = 7,97 \text{ kN}$$

Lösung zu Aufgabe 13.11

a) Berechnung der Spannungsamplitude

$$\sigma_{ba} = \frac{M_{ba}}{W_b} = \frac{\frac{F_1}{2} \cdot l}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{16 \cdot F_1 \cdot l}{\pi \cdot d^3} \quad (\text{reine Zugschwellbeanspruchung})$$

$$\sigma_{bm} = \sigma_{ba} \quad (\text{reine Zugschwellbeanspruchung})$$

Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,85 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 10 \mu\text{m} \text{ und } R_m = 1050 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Zug-Druck-Wechselfestigkeit

$$\sigma_{bw}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{bw} = 0,85 \cdot 480 \text{ N/mm}^2 = 408 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 1050 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,27$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

Da $\sigma_a = \sigma_m$ muss für σ_{AD}^* gelten (siehe Abbildung):

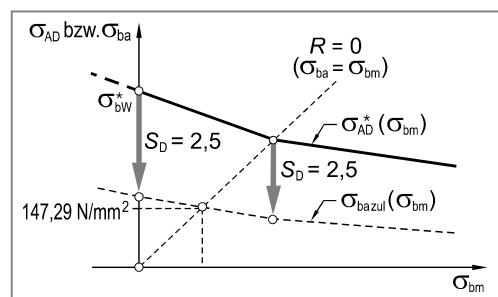
$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{bw}^* - M_\sigma \cdot \sigma_{bm}$$

Festigkeitsbedingung (Dauerbruch)

$$\sigma_{ba} \leq \sigma_{ba \text{ zul}}$$

$$\sigma_{ba} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$\sigma_{ba} = \frac{\sigma_{bw}^* - M_\sigma \cdot \sigma_{bm}}{S_D}$$



Mit $\sigma_{bm} = \sigma_{ba}$ (reine Zugschwellbeanspruchung) folgt:

$$\sigma_{ba} = \frac{\sigma_{bw}^* - M_\sigma \cdot \sigma_{ba}}{S_D}$$

$$\sigma_{ba} = \frac{\sigma_{bw}^*}{S_D + M_\sigma} = \frac{408 \text{ N/mm}^2}{2,50 + 0,27} = 147,29 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des erforderlichen Durchmessers d

$$\sigma_{ba} = \frac{16 \cdot F_1 \cdot l}{\pi \cdot d^3}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot F_1 \cdot l}{\sigma_{ba} \cdot \pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10000 \text{ N} \cdot 1000 \text{ mm}}{147,29 \text{ N/mm}^2 \cdot \pi}} = 70,19 \text{ mm}$$

b) Berechnung der Spannungsamplitude

$$\tau_{ta} = \frac{M_{ta}}{W_t} = \frac{2 \cdot F_2 \cdot a}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{32 \cdot F_2 \cdot a}{\pi \cdot d^3} \quad (\text{reine Torsionswechselbeanspruchung})$$

Ermittlung des Oberflächenfaktors C_{Or} unter der Wirkung von Schubspannungen

$$C_{Or} = 0,92 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 10 \mu\text{m} \text{ und } R_m = 1050 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Torsionswechselfestigkeit:

$$\tau_{tW}^* = C_{Or} \cdot \tau_{tW} = 0,92 \cdot 275 \text{ N/mm}^2 = 253 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung (Dauerbruch)

$$\tau_{ta} \leq \tau_{ta \text{ zul}}$$

$$\tau_{ta} = \frac{\tau_{AD}^*}{S_D} = \frac{\tau_{tW}^*}{S_D} = \frac{253 \text{ N/mm}^2}{3,0} = 84,3 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung des erforderlichen Durchmessers d

$$\begin{aligned} \tau_{ta} &= \frac{32 \cdot F_2 \cdot a}{\pi \cdot d^3} \\ d &= \sqrt[3]{\frac{32 \cdot F_2 \cdot a}{\tau_{ta} \cdot \pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 15000 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm}}{82,5 \text{ N/mm}^2 \cdot \pi}} = 71,82 \text{ mm} \end{aligned}$$

c) Berechnung der Biegespannung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{F_1 \cdot l}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{32 \cdot F_1 \cdot l}{\pi \cdot d^3}$$

Berechnung der Schubspannung aus Torsion

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{2 \cdot F_2 \cdot a}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{32 \cdot F_2 \cdot a}{\pi \cdot d^3}$$

Berechnung der Vergleichsspannung

Die Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese (SH) kann unmittelbar aus den Lastspannungen σ_b und τ_t (Biegebeanspruchung mit überlagelter Torsion) errechnet werden:

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2}$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{VSH} \leq \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sqrt{\left(\frac{32 \cdot F_1 \cdot l}{\pi \cdot d^3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{32 \cdot F_2 \cdot a}{\pi \cdot d^3}\right)^2} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

Mit $F_1 = F_2 = F$ folgt:

$$F \cdot \sqrt{\left(\frac{32 \cdot l}{\pi \cdot d^3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{32 \cdot a}{\pi \cdot d^3}\right)^2} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$F = \frac{R_{p0,2}}{S_F \cdot \sqrt{\left(\frac{32 \cdot l}{\pi \cdot d^3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{32 \cdot a}{\pi \cdot d^3}\right)^2}} = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot R_{p0,2}}{32 \cdot S_F \cdot \sqrt{l^2 + 4 \cdot a^2}}$$

$$= \frac{\pi \cdot (60 \text{ mm})^3 \cdot 900 \text{ N/mm}^2}{32 \cdot 1,20 \cdot \sqrt{(1000 \text{ mm})^2 + 4 \cdot (200 \text{ mm})^2}} = 14767 \text{ N} = \mathbf{14,8 \text{ kN}}$$

Lösung zu Aufgabe 13.12

Berechnung der Spannungsamplitude σ_{ba}

Maximale Durchbiegung:

$$f_{\max} = \frac{a}{2} - \frac{t}{2} = \frac{a-t}{2}$$

Berechnung der Kraftamplitude mit Erreichen der maximalen Durchbiegung

$$F_a = f_{\max} \cdot \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3}$$

Berechnung der maximalen Biegespannung (im Einspannquerschnitt) mit Erreichen der maximalen Durchbiegung

$$\sigma_{ba} = \frac{M_{ba}}{W_b} = \frac{F_a \cdot l}{W_b} = f_{\max} \cdot \frac{3 \cdot E \cdot I}{l^3} \cdot \frac{l}{W_b}$$

$$\sigma_{ba} = f_{\max} \cdot \frac{3 \cdot E}{l^2} \cdot \frac{t}{2} \quad \text{da } \frac{I}{W_b} = \frac{t}{2}$$

$$\sigma_{ba} = \frac{a-t}{2} \cdot \frac{3 \cdot E}{l^2} \cdot \frac{t}{2} = \frac{3}{4} \cdot (a-t) \cdot \frac{E \cdot t}{l^2}$$

Ermittlung der Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,85 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 6,3 \mu\text{m} \text{ und } R_m = 1550 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Biegewechselfestigkeit

$$\sigma_{bw}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{bw} = 0,85 \cdot 750 \text{ N/mm}^2 = 637,5 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{ba} \leq \sigma_{ba \text{ zul}}$$

$$\sigma_{ba} = \frac{\sigma_{bw}^*}{S_D}$$

$$\frac{3}{4} \cdot (a-t) \cdot \frac{E \cdot t}{l^2} = \frac{\sigma_{bw}^*}{S_D}$$

$$a = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sigma_{bw}^*}{S_D} \cdot \frac{l^2}{E \cdot t} + t$$

$$a = \frac{4}{3} \cdot \frac{637,5 \text{ N/mm}^2}{2,5} \cdot \frac{(1000 \text{ mm})^2}{207000 \text{ N/mm}^2 \cdot 8 \text{ mm}} + 8 \text{ mm} = 213,3 \text{ mm}$$

Lösung zu Aufgabe 13.13

a) Festigkeitsbedingung

$$\tau_t \leq \tau_{t \text{ zul}}$$

$$\frac{M_t}{W_t} = \frac{\tau_{tF}}{S_F}$$

$$\frac{\pi}{16} \cdot \frac{M_t}{d_a^4 - d_i^4} = \frac{R_{p0,2}}{2 \cdot S_F} \quad \text{da } \tau_{tF} = \frac{R_{p0,2}}{2}$$

$$M_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} \cdot \frac{R_{p0,2}}{2 \cdot S_F}$$

$$= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{25^4 - 20^4}{25} \text{ mm}^3 \cdot \frac{1250 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot 1,5} = 754\,719 \text{ Nmm} = \mathbf{754,7 \text{ Nm}}$$

b) Ermittlung der Oberflächenfaktors C_{Or} für Schubbeanspruchung

$$C_{Or} = 0,94 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 4 \mu\text{m und } R_m = 1620 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Biegewechselfestigkeit

$$\tau_{tW}^* = C_{Or} \cdot \tau_{tW} = 0,94 \cdot 420 \text{ N/mm}^2 = 394,8 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\tau_{ta} \leq \tau_{ta \text{ zul}}$$

$$\frac{M_{ta}}{W_t} = \frac{\tau_{AD}^*}{S_D} = \frac{\tau_{tW}^*}{S_D}$$

$$\frac{\pi}{16} \cdot \frac{M_{ta}}{d_a^4 - d_i^4} = \frac{\tau_{tW}^*}{S_D}$$

$$M_{ta} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} \cdot \frac{\tau_{tW}^*}{S_D}$$

$$M_{ta} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{25^4 - 20^4}{25} \cdot \frac{394,8 \text{ N/mm}^2}{2,2} = 325\,050 \text{ Nmm} = \mathbf{325,1 \text{ Nm}}$$

c) Berechnung des Verdrehwinkels für den Fall der statischen Beanspruchung

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{M_t \cdot l}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (d_a^4 - d_i^4)} = \frac{754\,719 \text{ Nmm} \cdot 1000 \text{ mm}}{\frac{211\,000 \text{ Nmm}^2}{2 \cdot (1 + 0,3)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (25^4 - 20^4) \text{ mm}^4} = 0,411$$

$$\varphi (\text{in Grad}) = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi (\text{in rad}) = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 0,411 = \mathbf{23,53^\circ}$$

Berechnung des Verdrehwinkels für den Fall der Schwingbeanspruchung

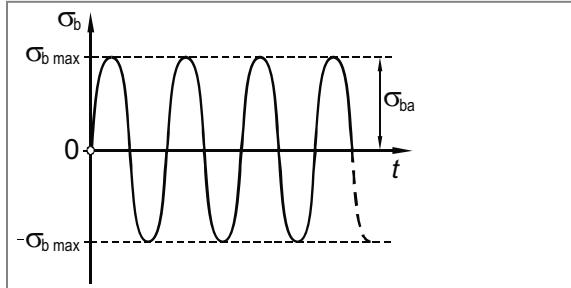
$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{M_t \cdot l}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (d_a^4 - d_i^4)} = \frac{325050 \text{ Nmm} \cdot 1000 \text{ mm}}{\frac{211000 \text{ Nmm}^2}{2 \cdot (1 + 0,3)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (25^4 - 20^4) \text{ mm}^4} = 0,177$$

$$\varphi (\text{in Grad}) = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi (\text{in rad}) = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 0,177 = 10,14^\circ$$

Lösung zu Aufgabe 13.14

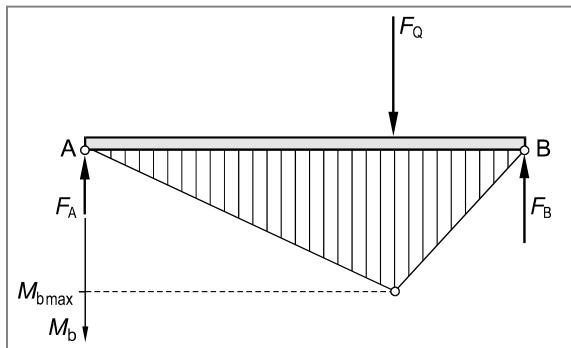
a) Beanspruchungs-Zeit-Verlauf

Umlaufbiegung führt zu einer reinen Zug-Druck-Wechselbeanspruchung



Berechnung des maximalen Biegemomentes

$$M_{b\ max} = \frac{a \cdot b}{a + b} \cdot F_Q = \frac{500 \text{ mm} \cdot 350 \text{ mm}}{500 \text{ mm} + 350 \text{ mm}} \cdot 10000 \text{ N} = 2058824 \text{ Nmm}$$



Berechnung der maximalen Spannungsamplitude

$$\sigma_{ba} = \sigma_{b\ max} = \frac{M_{b\ max}}{W_b} = \frac{M_{b\ max}}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{2058824 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (50 \text{ mm})^3} = 167,77 \text{ N/mm}^2$$

b) Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,92 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 3,2 \mu\text{m und } R_m = 1070 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Biegeweichselfestigkeit

$$\sigma_{bW}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{bW} = 0,92 \cdot 530 \text{ N/mm}^2 = 487,6 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{ba} \leq \sigma_{ba\ zul}$$

$$\sigma_{ba}^* = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D} = \frac{\sigma_{bw}^*}{S_D} \quad (\text{reine Biegewechselbeanspruchung})$$

$$S_D = \frac{\sigma_{bw}^*}{\sigma_{ba}} = \frac{487,6 \text{ N/mm}^2}{167,77 \text{ N/mm}^2} = 2,91 \quad (\text{nicht ausreichend, da } S_D > 3,5 \text{ gefordert})$$

c) **Berechnung der Mittelspannung σ_m**

$$\sigma_m = \frac{F_H}{A} = \frac{F_H}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{350\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (50 \text{ mm})^2} = 178,25 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 1070 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,275$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{bw}^* - M_\sigma \cdot \sigma_m \quad \text{da } \sigma_m < \frac{\sigma_{bw}^*}{M_\sigma + 1}$$

$$\sigma_{AD}^* = 487,6 \text{ N/mm}^2 - 0,275 \cdot 178,25 \text{ N/mm}^2 = 438,58 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{ba} \leq \sigma_{ba \text{ zul}}$$

$$\sigma_{ba} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{AD}^*}{\sigma_{ba}} = \frac{438,58 \text{ N/mm}^2}{167,77 \text{ N/mm}^2} = 2,61 \quad (\text{ausreichend, da } S_D > 2,50)$$

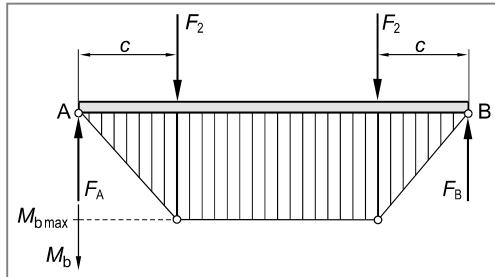
Lösung zu Aufgabe 13.15

Berechnung der Mittelspannung

$$\sigma_m = \frac{F_1}{A} = \frac{F_1}{\frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2)} = \frac{100\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (70^2 - 60^2) \text{ mm}^2} = 97,94 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Spannungsamplitude

$$\sigma_{ba} = \frac{M_{b\max}}{W_b} = \frac{F_2 \cdot c}{\frac{\pi}{32} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}}$$



Ermittlung des Oberflächenfaktors C_Osigma unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,82 \quad \text{aus Diagramm für } R_z = 12,5 \mu\text{m} \quad \text{und} \quad R_m = 1180 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Biegewechselfestigkeit

$$\sigma_{bw}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{bw} = 0,82 \cdot 590 \text{ N/mm}^2 = 483,8 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_sigma

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 1180 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,313$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{bw}^* - M_\sigma \cdot \sigma_m \quad \text{da } \sigma_m < \frac{\sigma_{bw}^*}{M_\sigma + 1}$$

$$\sigma_{AD}^* = 483,8 \text{ N/mm}^2 - 0,313 \cdot 97,94 \text{ N/mm}^2 = 453,14 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Querkraft F_2

Festigkeitsbedingung (Dauerbruch):

$$\sigma_{ba} \leq \sigma_{ba\ zul}$$

$$\frac{F_2 \cdot c}{\frac{\pi}{32} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$F_2 = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D \cdot c} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} = \frac{453,14 \text{ N/mm}^2}{2,50 \cdot 100 \text{ mm}} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot \frac{70^4 - 60^4}{70} \text{ mm}^3 = 28090 \text{ N} = 28,1 \text{ kN}$$

Lösung zu Aufgabe 13.16

a) Ermittlung der Formzahl α_k

$$\frac{d}{D} = \frac{30 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 0,75$$

$$\frac{d_B}{D} = \frac{5 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 0,125$$

Damit entnimmt man einem geeigneten Formzahldiagramm

$$\alpha_{kt} = 3,8$$

Festigkeitsbedingung

$$\tau_{t \max} < \tau_{t \text{ zul}}$$

$$\tau_t \cdot \alpha_{kt} = \frac{\tau_{tB}}{S_B}$$

$$\frac{M_t \cdot \alpha_{kt}}{W_{tn}} = \frac{\tau_{tB}}{S_B} = \frac{R_m}{S_B} \quad \text{da } \tau_{tB} = R_m \quad \text{für Grauguss}$$

$$M_t = \frac{W_{tn} \cdot R_m}{S_B \cdot \alpha_k} = \frac{\frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \cdot R_m}{S_B \cdot \alpha_k} = \frac{\frac{\pi}{16} \cdot \frac{40^4 - 30^4}{40} \text{ mm}^3 \cdot 320 \text{ N/mm}^2}{4,0 \cdot 3,8}$$

$$= 180\,848 \text{ Nmm} = \mathbf{180,8 \text{ Nm}}$$

b) Ermittlung des Oberflächenfaktors C_{Or} unter der Wirkung von Schubspannungen

$$C_{Or} = 0,90 \quad \text{aus Diagramm für Grauguss und } R_m = 320 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Schubwechselfestigkeit:

$$\tau_{tw}^* = C_{Or} \cdot \tau_{tw} = 0,90 \cdot 80 \text{ N/mm}^2 = 72 \text{ N/mm}^2$$

Bestimmung der Kerbwirkungszahl β_{kt}

Formzahl $\alpha_{kt} = 3,8$ (aus geeignetem Formzahldiagramm für $d_B/D = 0,125$ und $d/D = 0,75$)

Berechnung des bezogenes Spannungsgefälles:

$$\chi^+ = \frac{2}{D} + \frac{6}{d_B} = \frac{2}{40 \text{ mm}} + \frac{6}{5 \text{ mm}} = 1,25$$

Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 im Lehrbuch ($R_m = 320 \text{ N/mm}^2$):

$$n_\chi = 1,45$$

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_{kt} :

$$\beta_k = \frac{\alpha_{kt}}{n_\chi} = \frac{3,8}{1,45} = 2,62$$

Festigkeitsbedingung

$$\tau_{ta\ max} \leq \tau_{ta\ zul}$$

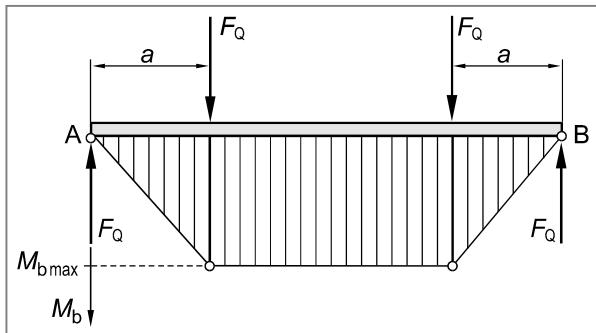
$$\tau_{ta} \cdot \beta_{kt} = \frac{\tau_{tAD}^*}{S_D} = \frac{\tau_{tW}^*}{S_D}$$

$$\frac{M_{ta}}{W_{tn}} \cdot \beta_{kt} = \frac{\tau_{tW}^*}{S_D}$$

$$M_{ta} = \frac{\tau_{tW}^*}{S_D \cdot \beta_{kt}} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{72 \text{ N/mm}^2}{2,50 \cdot 2,62} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \frac{40^4 - 30^4}{40} \text{ mm}^3 \\ = 94428 \text{ Nmm} = \mathbf{94,4 \text{ Nm}}$$

Lösung zu Aufgabe 13.17

a) Biegemomentenverlauf



Berechnung des maximalen Biegemomentes

$$M_{b \max} = F_Q \cdot a = 3900 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm} = 780000 \text{ Nmm} = 780 \text{ Nm}$$

- b) Die höchst beanspruchte Stelle befindet sich im Kerbgrund.

Ermittlung der Formzahl α_{kb}

$$\frac{D}{d} = \frac{40 \text{ mm}}{35 \text{ mm}} = 1,14$$

$$\frac{R}{d} = \frac{2,5 \text{ mm}}{35 \text{ mm}} = 0,07$$

Damit entnimmt man einem geeigneten Formzahldiagramm:

$$\alpha_{kb} = 2,1$$

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen im Kerbgrund

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{b \ max} \leq \sigma_{b \ zul}$$

$$\frac{M_{b \ max}}{W_{bn}} \cdot \alpha_{kb} = \frac{\sigma_{bF}}{S_F}$$

mit $\sigma_{bF} \approx R_{p0,2}$ folgt:

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\alpha_{kb}} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d^3 \cdot \frac{1}{M_{b \ max}} = \frac{550 \text{ N/mm}^2}{2,1} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot \frac{(35 \text{ mm})^3}{780000 \text{ Nmm}} = 1,41 \quad (\text{ausreichend})$$

- c) Zusätzliche Versagensmöglichkeit: **Dauerbruch** infolge Umlaufbiegung.

d) Ermittlung der Kerbwirkungszahl β_{kb}

Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles:

$$\chi^+ = \frac{2}{d} + \frac{2}{R} = \frac{2}{35 \text{ mm}} + \frac{2}{2,5 \text{ mm}} = 0,857$$

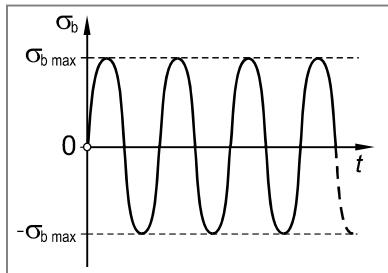
Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 im Lehrbuch ($R_{p0,2} = 550 \text{ N/mm}^2$)

$$n_\chi = 1,1$$

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_{kb} :

$$\beta_{\text{kb}} = \frac{\alpha_{\text{kb}}}{n_\chi} = \frac{2,1}{1,1} = 1,91$$

- e) Zeitlicher Verlauf der Biegespannung an der Kerbstelle (Umlaufbiegung d. h. reine Biege-wechselbeanspruchung)



- f) Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,82 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 25 \mu\text{m und } R_m = 780 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Biegewechselfestigkeit

$$\sigma_{bW}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{bW} = 0,82 \cdot 390 \text{ N/mm}^2 = 319,8 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der zulässigen Querkraft F_Q

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{a \max} \leq \sigma_{a \text{ zul}}$$

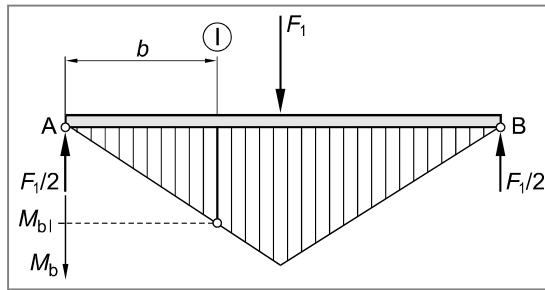
$$\sigma_{an} \cdot \beta_{\text{kb}} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D} = \frac{\sigma_{bW}^*}{S_D}$$

$$\frac{M_{ba}}{W_{bn}} \cdot \beta_{\text{kb}} = \frac{\sigma_{bW}^*}{S_D}$$

$$F_Q = \frac{\sigma_{bW}^*}{\beta_{\text{kb}} \cdot S_D \cdot a} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d^3 = \frac{319,8 \text{ N/mm}^2}{1,91 \cdot 2,50 \cdot 200 \text{ mm}} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (35 \text{ mm})^3 = 1409,6 \text{ N}$$

Lösung zu Aufgabe 13.18

a) Berechnung des Biegemomentes am linken Wellenabsatz



$$M_{bl} = \frac{F_1}{2} \cdot b = \frac{10000 \text{ N}}{2} \cdot 100 \text{ mm} = 500000 \text{ Nmm} = 500 \text{ Nm}$$

b) Ermittlung der Formzahlen für Zugbeanspruchung (α_{kz}) und Biegung (α_{kb})

$$\frac{D}{d} = \frac{45 \text{ mm}}{30 \text{ mm}} = 1,5$$

$$\frac{R}{d} = \frac{6 \text{ mm}}{30 \text{ mm}} = 0,2$$

Aus geeigneten Formzahlendiagrammen entnimmt man:

$$\alpha_{kz} = 1,55$$

$$\alpha_{kb} = 1,42$$

c) Berechnung der Sicherheit gegen Fließen am Wellenabsatz

Festigkeitsbedingung (Fließen):

$$\sigma_{b\ max} \leq \sigma_{b\ zul}$$

$$\frac{M_b}{W_{bn}} \cdot \alpha_{kb} = \frac{\sigma_{bF}}{S_F}$$

mit $\sigma_{bF} \approx R_e$ folgt:

$$\begin{aligned} S_F &= \frac{R_e}{M_b \cdot \alpha_{kb}} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d^3 \\ &= \frac{460 \text{ N/mm}^2}{500000 \text{ Nmm} \cdot 1,42} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (30 \text{ mm})^3 = 1,72 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20) \end{aligned}$$

d) Berechnung der Biegenennspannung an der Kerbstelle I

$$\sigma_{bn} = \frac{M_{bl}}{W_{bn}} = \frac{M_{bl}}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{500000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (30 \text{ mm})^3} = 188,63 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Zusatzkraft F_2

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{b\max} + \sigma_{z\max} \leq \sigma_{bf} \quad \text{mit } \sigma_{bf} \approx R_e$$

$$\sigma_{bn} \cdot \alpha_{kb} + \sigma_{zn} \cdot \alpha_{kz} = R_e$$

$$\sigma_{zn} = \frac{R_e - \sigma_{bn} \cdot \alpha_{kb}}{\alpha_{kz}}$$

$$F_2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \frac{R_e - \sigma_{bn} \cdot \alpha_{kb}}{\alpha_{kz}}$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot (30 \text{ mm})^2 \cdot \frac{460 \text{ N/mm}^2 - 188,63 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,42}{1,55} = 87627 \text{ N}$$

e) Ermittlung der Kerbwirkungszahl β_{kb} für den Wellenabsatz

Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles:

$$\chi^+ = \frac{4}{D+d} + \frac{2}{R} = \frac{4}{45 \text{ mm} + 30 \text{ mm}} + \frac{2}{6 \text{ mm}} = 0,387$$

Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 im Lehrbuch ($R_e = 460 \text{ N/mm}^2$):

$$n_\chi = 1,05$$

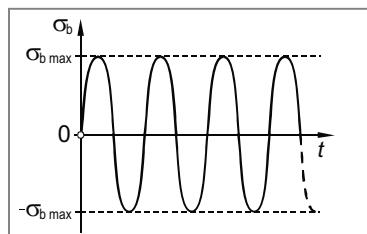
Berechnung der Kerbwirkungszahl β_{kb} :

$$\beta_{kb} = \frac{\alpha_{kb}}{n_\chi} = \frac{1,42}{1,05} = 1,35$$

f) Darstellung des Spannungs-Zeit-Verlaufes bei umlaufender Welle

Berechnung der (schädigungswirksamen) maximalen Biegespannungssamplitude:

$$\sigma_{ba\max} = \sigma_{ba\min} \cdot \beta_{kb} = 188,63 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,35 = 254,22 \text{ N/mm}^2$$



g) Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,90 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 12,5 \mu\text{m} \text{ und } R_m = 530 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Biegeweichselfestigkeit

$$\sigma_{bw}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{bw} = 0,90 \cdot 280 \text{ N/mm}^2 = 252 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{ba\ max} \leq \sigma_{a\ zul} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D} = \frac{\sigma_{bW}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{bW}^*}{\sigma_{ba\ max}} = \frac{252 \text{ N/mm}^2}{254,65 \text{ N/mm}^2} = 0,99 \quad (\text{nicht ausreichend, da } S_D < 2,50)$$

Lösung zu Aufgabe 13.19

a) Berechnung der Zugspannung

$$\sigma_z = \frac{F_1}{A} = \frac{F_1}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{700\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (60 \text{ mm})^2} = 247,57 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Verlängerung des Bolzens (Hooke'sches Gesetz für einachsigen Spannungszustand)

$$\varepsilon = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\Delta l = \frac{\sigma_z}{E} \cdot l_0 = \frac{247,57 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} \cdot 180 \text{ mm} = 0,2122 \text{ mm}$$

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_z \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_z = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_z} = \frac{620 \text{ N/mm}^2}{247,57 \text{ N/mm}^2} = 2,50 \quad (\text{ausreichend, da } S_F \geq 1,20)$$

- b) Die höchst beanspruchte Stelle befindet sich am Einspannquerschnitt. Dort wirkt eine reine Biegewechselbeanspruchung.

Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,89 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 6,3 \mu\text{m und } R_m = 920 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Biegewechselfestigkeit

$$\sigma_{bW}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{bW} = 0,89 \cdot 450 \text{ N/mm}^2 = 400,5 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Spannungsamplitude

$$\sigma_{ba} = \frac{M_b}{W_b} = \frac{F_2 \cdot b}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{12\,500 \text{ N} \cdot 170 \text{ mm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (60 \text{ mm})^3} = 100,21 \text{ N/mm}^2$$

Festigkeitsbedingung

$$\sigma_{ba} \leq \sigma_{ba \text{ zul}}$$

$$\sigma_{ba} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D} = \frac{\sigma_{bW}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{bw}^*}{\sigma_{ba}} = \frac{400,5 \text{ N/mm}^2}{100,21 \text{ N/mm}^2} = 4,0 \quad (\text{ausreichend, da } S_D > 2,50)$$

c) Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_o \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_z + \sigma_{ba} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_z + \sigma_{ba}} = \frac{620 \text{ N/mm}^2}{247,57 \text{ N/mm}^2 + 100,21 \text{ N/mm}^2} = 1,78 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Mittelspannung (aus Aufgabenteil a):

$$\sigma_m = \sigma_z = 247,57 \text{ N/mm}^2$$

Spannungsspannungsamplitude (aus Aufgabenteil b):

$$\sigma_{ba} = 100,21 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 920 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,222$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{bw}^* - M_\sigma \cdot \sigma_m \quad \text{da } \sigma_m < \frac{\sigma_{bw}^*}{M_\sigma + 1}$$

$$\sigma_{AD}^* = 400,5 \text{ N/mm}^2 - 0,222 \cdot 247,57 \text{ N/mm}^2 = 345,54 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{ba} \leq \sigma_{a \text{ zul}}$$

$$\sigma_{ba} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{AD}^*}{\sigma_{ba}} = \frac{345,54 \text{ N/mm}^2}{100,2 \text{ N/mm}^2} = 3,45 \quad (\text{ausreichend, da } S_D > 2,50)$$

d) Berechnung des zulässigen Torsionsmomentes

Festigkeitsbedingung (Fließen):

$$\tau_t \leq \tau_{tf}$$

$$\frac{M_t}{W_t} = \tau_{tf} \quad \text{mit } \tau_{tf} = R_{p0,2}/2 \text{ folgt:}$$

$$M_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cdot \frac{R_{p0,2}}{2} = \frac{\pi}{16} \cdot (60 \text{ mm})^3 \cdot \frac{620 \text{ N/mm}^2}{2} = 13147565 \text{ Nmm} = 13147,6 \text{ Nm}$$

Berechnung des Verdrehwinkels

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p}$$

mit $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$ folgt:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d^4} = \frac{13147565 \text{ Nmm} \cdot 180 \text{ mm}}{\frac{210000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (60 \text{ mm})^4} = 0,0230$$

$$\varphi (\text{in Grad}) = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi (\text{in rad}) = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 0,0230 = 1,32^\circ$$

e) Berechnung des zulässigen Torsionsmomentes

Die Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese (SH) kann unmittelbar aus den Lastspannungen (Zugbeanspruchung mit überlagerter Torsion) errechnet werden:

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4 \cdot \tau_t^2}$$

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{VSH} \leq \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 4 \cdot \tau_t^2} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\tau_t = \sqrt{\frac{\left(\frac{R_{p0,2}}{S_F}\right)^2 - \sigma_z^2}{4}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{620 \text{ N/mm}^2}{1,50}\right)^2 - (247,57 \text{ N/mm}^2)^2}{4}} = 165,49 \text{ N/mm}^2$$

$$M_t = \tau_t \cdot W_t = \tau_t \cdot \frac{\pi}{16} \cdot d^3$$

$$= 165,49 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{16} \cdot (60 \text{ mm})^3 = 7018864 \text{ Nmm} = 7018,9 \text{ Nm}$$

f) Berechnung der (Biege-)Spannung im Querschnitt I-I

$$\sigma_{bl} = \frac{M_b}{W_b} = \frac{F_2 \cdot b}{\frac{\pi}{32} \cdot D^3}$$

Berechnung der (Biege-)Spannung im Querschnitt II-II (Kerbgrund)

$$\sigma_{b \max II} = \sigma_{bn II} \cdot \alpha_{kb} = \frac{F_2 \cdot c}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} \cdot \alpha_{kb}$$

Bedingung:

$$\begin{aligned}\sigma_{b1} &= \sigma_{b\max II} \\ \frac{F_2 \cdot b}{\frac{\pi}{32} \cdot D^3} &= \frac{F_2 \cdot c}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} \cdot \alpha_k \\ \alpha_k &= \frac{b}{c} \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^3 = \frac{170 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} \cdot \left(\frac{50 \text{ mm}}{60 \text{ mm}}\right)^3 = 1,968\end{aligned}$$

Aus einem geeigneten Formzahldiagramm entnimmt man für $D/d = 1,2$ und $\alpha_{kb} = 1,968$:

$$R/d = 0,05$$

und damit für den Radius R :

$$R = 2,5 \text{ mm}$$

g) Bestimmung der Kerbwirkungszahl β_k

Formzahl $\alpha_k = 1,968$

Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles:

$$\chi^+ = \frac{4}{D+d} + \frac{2}{R} = \frac{4}{60 \text{ mm} + 50 \text{ mm}} + \frac{2}{2,5 \text{ mm}} = 0,836 \text{ mm}^{-1}$$

Ermittlung der dyn. Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 (Lehrbuch) mit $R_{p0,2} = 620 \text{ N/mm}^2$:

$$n_\chi = 1,07$$

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_k :

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{n_\chi} = \frac{1,968}{1,07} = 1,84$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{ba\ max} \leq \sigma_{ba\ zul}$$

$$\sigma_{ba\ n} \cdot \beta_k = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D} = \frac{\sigma_{bW}^*}{S_D}$$

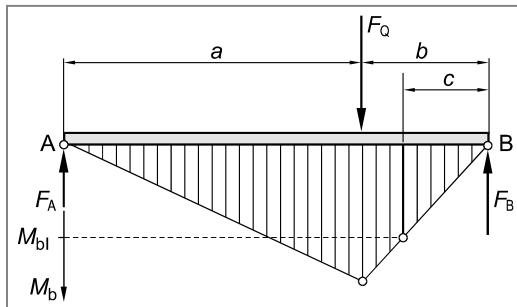
$$\frac{M_{ba}}{W_{bn}} \cdot \beta_k = \frac{\sigma_{bW}^*}{S_D}$$

$$\begin{aligned}S_D &= \frac{\sigma_{bW}^*}{\beta_k \cdot F_2 \cdot c} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot d^3 \\ &= \frac{400,5 \text{ N/mm}^2}{1,84 \cdot 12500 \text{ N} \cdot 50 \text{ mm}} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (50 \text{ mm})^3 = 4,27 \quad (\text{ausreichend, da } S_D > 2,50)\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 13.20

a) Berechnung des Biegemomentes an der Kerbstelle I

Berechnung der Biegespannung:



Berechnung der Lagerkraft F_B :

$$F_B \cdot (a + b) = F_Q \cdot a$$

$$F_B = F_Q \cdot \frac{a}{(a + b)} = 50000 \text{ N} \cdot \frac{250 \text{ mm}}{250 \text{ mm} + 150 \text{ mm}} = 31250 \text{ N}$$

Biegemoment an der Kerbstelle I:

$$M_{bI} = F_B \cdot c = 31250 \text{ N} \cdot 80 \text{ mm} = 2500000 \text{ Nmm} = 2500 \text{ Nm}$$

b) Ermittlung der Formzahlen für Zug-, Biege- und Torsionsbeanspruchung

$$\frac{D}{d} = \frac{60 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = 1,2$$

$$\frac{R}{d} = \frac{5 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = 0,1$$

Aus geeigneten Formzahldiagrammen entnimmt man:

$$\alpha_{kz} = 1,70$$

$$\alpha_{kb} = 1,62$$

$$\alpha_{kt} = 1,30$$

Berechnung der Nennspannungen

$$\sigma_{zn} = \frac{F_H}{A_n} = \frac{F_H}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{100000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (50 \text{ mm})^2} = 50,93 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{bn} = \frac{M_{bA}}{W_{bn}} = \frac{M_{bA}}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{2500000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (50 \text{ mm})^3} = 203,72 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{tn} = \frac{M_t}{W_{tn}} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3}$$

Berechnung der maximalen Spannungen

$$\sigma_{z\max} = \sigma_{zn} \cdot \alpha_{kz} = 50,93 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,70 = 86,58 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{b\max} = \sigma_{bn} \cdot \alpha_{kb} = 203,72 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,62 = 330,02 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{t\max} = \tau_{tn} \cdot \alpha_{kt} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3} \cdot \alpha_{kt}$$

Berechnung der Vergleichsspannung aus den Lastspannungen mit Hilfe der SH

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{(\sigma_{z\max} + \sigma_{b\max})^2 + 4 \cdot \tau_{t\max}^2}$$

Berechnung des zulässigen Torsionsmomentes

Festigkeitsbedingung:

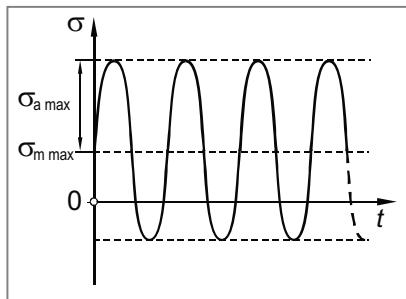
$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sigma_{z\max} + \sigma_{b\max})^2 + 4 \cdot \tau_{t\max}^2} &= \frac{R_{p0,2}}{S_F} \\ \tau_{t\max} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{R_{p0,2}}{S_F} \right)^2 - (\sigma_{z\max} + \sigma_{b\max})^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{930 \text{ N/mm}^2}{1,50} \right)^2 - (86,58 \text{ N/mm}^2 + 330,02 \text{ N/mm}^2)^2} = 229,59 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Damit folgt für das zulässige Torsionsmoment M_t :

$$M_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cdot \frac{\tau_{t\max}}{\alpha_{kt}} = \frac{\pi}{16} \cdot (50 \text{ mm})^3 \cdot \frac{229,59 \text{ N/mm}^2}{1,30} = 4334552 \text{ Nmm} = 4334,6 \text{ Nm}$$

c) Beanspruchungs-Zeit-Verlauf



d) Ermittlung der Kerbwirkungszahl β_{kb} für Biegebeanspruchung

Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles:

$$\chi^+ = \frac{4}{D+d} + \frac{2}{R} = \frac{4}{60 \text{ mm} + 50 \text{ mm}} + \frac{2}{5 \text{ mm}} = 0,436$$

Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 im Lehrbuch ($R_{p0,2} = 930 \text{ N/mm}^2$)

$$n_\chi = 1,02$$

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_{kb} :

$$\beta_{\text{kb}} = \frac{\alpha_{\text{kb}}}{n_\chi} = \frac{1,62}{1,02} = \mathbf{1,59}$$

e) Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,82 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 12,5 \mu\text{m} \text{ und } R_m = 1150 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Biegewechselfestigkeit

$$\sigma_{\text{bW}}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{\text{bW}} = 0,82 \cdot 570 \text{ N/mm}^2 = 467,4 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 1150 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,30$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{\text{AD}}^* = \sigma_{\text{bW}}^* - M_\sigma \cdot \sigma_{\text{m max}} \quad \text{da } \sigma_{\text{m}} \leq \frac{\sigma_{\text{bW}}^*}{M_\sigma + 1}$$

$$\sigma_{\text{AD}}^* = 467,4 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 86,58 \text{ N/mm}^2 = 441,43 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{\text{ba max}} \leq \sigma_{\text{ba zul}}$$

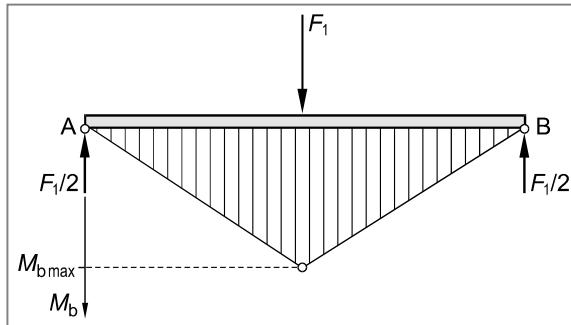
$$\sigma_{\text{ba n}} \cdot \beta_{\text{kb}} = \frac{\sigma_{\text{AD}}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{\text{AD}}^*}{\sigma_{\text{ba n}} \cdot \beta_{\text{kb}}} = \frac{441,43 \text{ N/mm}^2}{203,72 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,59} = \mathbf{1,36} \quad (\text{nicht ausreichend, da } S_D < 2,50)$$

Lösung zu Aufgabe 13.21

a) Ermittlung des Spannungs-Zeit-Verlaufes an der höchst beanspruchten Stelle

Berechnung der Biegespannung:



$$M_{b\max} = \frac{F_1}{2} \cdot b = \frac{70000 \text{ N}}{2} \cdot 500 \text{ mm} = 17500000 \text{ Nmm} = 17500 \text{ Nm}$$

$$\sigma_b = \frac{M_{b\max}}{W_b} = \frac{M_{b\max}}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{17500000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (100 \text{ mm})^3} = 178,25 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Zugspannung:

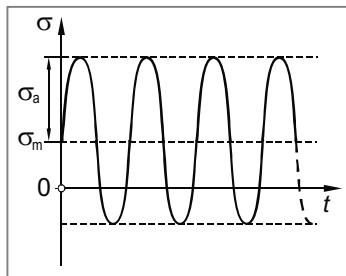
$$\sigma_z = \frac{F_2}{A} = \frac{F_2}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{480000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (100 \text{ mm})^2} = 61,12 \text{ N/mm}^2$$

Mittelspannung (σ_m) und Spannungsamplitude (σ_a) der Schwingbeanspruchung:

$$\sigma_m \equiv \sigma_z = 61,12 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_a \equiv \sigma_b = 178,25 \text{ N/mm}^2$$

Darstellung des Beanspruchungs-Zeit-Verlaufes:



b) Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

Festigkeitsbedingung (Fließen):

$$\sigma_o \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_b + \sigma_z = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_b + \sigma_z} = \frac{900 \text{ N/mm}^2}{178,25 \text{ N/mm}^2 + 61,12 \text{ N/mm}^2} = 3,76 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,75 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 25 \mu\text{m} \text{ und } R_m = 1420 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Biegewechselfestigkeit

$$\sigma_{bW}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{bW} = 0,75 \cdot 710 \text{ N/mm}^2 = 532,5 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 1420 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,40$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{bW}^* - M_\sigma \cdot \sigma_m \quad \text{da } \sigma_m \leq \frac{\sigma_{bW}^*}{M_\sigma + 1}$$

$$\sigma_{AD}^* = 532,5 \text{ N/mm}^2 - 0,40 \cdot 61,12 \text{ N/mm}^2 = 508,05 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_a \leq \sigma_{a \text{ zul}} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{AD}^*}{\sigma_a} = \frac{508,05 \text{ N/mm}^2}{178,25 \text{ N/mm}^2} = 2,85 \quad (\text{ausreichend, da } S_D > 2,50)$$

c) Ermittlung der Kerbwirkungszahl β_{kb} für Biegebeanspruchung

Ermittlung der Formzahl α_{kb} für die Biegebeanspruchung aus einem geeigneten Formzahlendiagramm

$$\frac{d}{D} = \frac{10 \text{ mm}}{100 \text{ mm}} = 0,1 \text{ und Biegebeanspruchung: } \alpha_{kb} = 2,35$$

Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles:

$$\chi^+ = \frac{2}{D} + \frac{8}{d} = \frac{2}{100 \text{ mm}} + \frac{8}{10 \text{ mm}} = 0,82$$

Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 im Lehrbuch ($R_{p0,2} = 900 \text{ N/mm}^2$)

$$n_\chi = 1,03$$

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_{kb} :

$$\beta_{kb} = \frac{\alpha_{kb}}{n_\chi} = \frac{2,35}{1,03} = 2,28$$

d) **Ermittlung der Formzahl α_{kz} für Zugbeanspruchung**

$$\frac{d}{D} = 0,1 \text{ und Zugbeanspruchung } \alpha_{kz} = 2,50 \text{ (aus geeignetem Formzahldiagramm)}$$

Berechnung der Biegenennspannung an der Kerbstelle (Querbohrung)

$$\begin{aligned} M_b &= \frac{F_1}{2} \cdot c = \frac{70000 \text{ N}}{2} \cdot 350 \text{ mm} = 12250000 \text{ Nmm} \\ \sigma_{bn} \equiv \sigma_{ba} &= \frac{M_b}{W_{bn}} = \frac{M_b}{\frac{\pi \cdot D^3}{32} - \frac{d \cdot D^2}{6}} \\ &= \frac{12250000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi \cdot (100 \text{ mm})^3}{32} - \frac{10 \text{ mm} \cdot (100 \text{ mm})^2}{6}} = 150,29 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Berechnung der Zugnennspannung

$$\sigma_{zn} \equiv \sigma_{mn} = \frac{F_2}{A_n} = \frac{F_2}{\frac{\pi \cdot D^2}{4} - d \cdot D} = \frac{480000 \text{ N}}{\frac{\pi \cdot (100 \text{ mm})^2}{4} - 10 \text{ mm} \cdot 100 \text{ mm}} = 70,03 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\begin{aligned} \sigma_{AD}^* &= \sigma_{bW}^* - M_\sigma \cdot \sigma_{m\max} \quad \text{da } \sigma_{m\max} \leq \frac{\sigma_{bW}^*}{M_\sigma + 1} \\ \sigma_{AD}^* &= \sigma_{bW}^* - M_\sigma \cdot \sigma_{mn} \cdot \alpha_{kz} \\ \sigma_{AD}^* &= 532,5 \text{ N/mm}^2 - 0,40 \cdot 70,03 \text{ N/mm}^2 \cdot 2,50 = 462,47 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{a\max} \leq \sigma_{a\zul}$$

$$\sigma_{bn} \cdot \beta_{kb} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{AD}^*}{\sigma_{ba} \cdot \beta_{kb}} = \frac{462,47 \text{ N/mm}^2}{150,29 \cdot 2,28 \text{ N/mm}^2} = 1,35 \quad (\text{nicht ausreichend, da } S_D < 2,50)$$

Lösung zu Aufgabe 13.22

a) Berechnung der Spannung in Längsrichtung (Zugrichtung)

$$\sigma_1 = \frac{F_V}{A} = \frac{F_V}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 100\,000 \text{ N}}{\pi \cdot (18 \text{ mm})^2} = 392,98 \text{ N/mm}^2$$

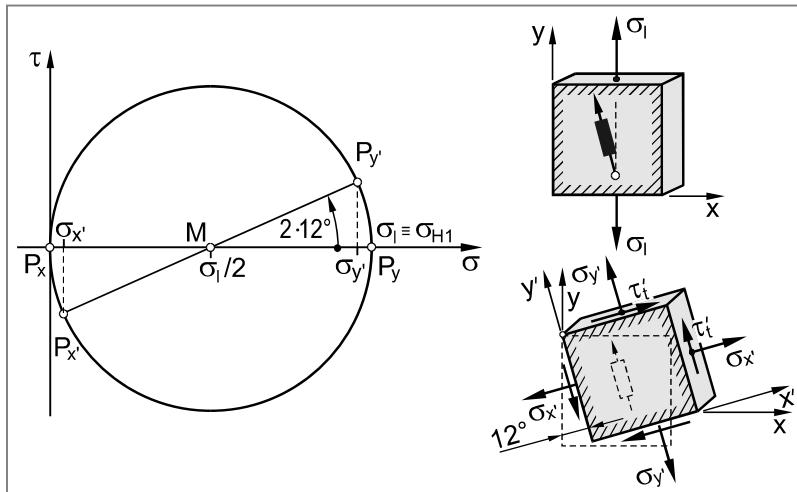
Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises

Zur Konstruktion des Mohr'schen Spannungskreises benötigt man die Spannungen in zwei zueinander senkrechten Schnittflächen. Bekannt sind die Spannungen in den Schnittflächen mit der x- und der y-Richtung als Normale.

Eintragen des Bildpunktes $P_x(0 | 0)$ und des Bildpunktes $P_y(\sigma_1 | 0)$ in das σ - τ -Koordinatensystem unter Beachtung der speziellen Vorzeichenregelung für Schubspannungen. Bildpunkt P_x repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der x-Achse als Normalenvektor. Bildpunkt P_y repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der y-Achse als Normalenvektor.

Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser liegen. Die Strecke P_xP_y schneidet die σ -Achse im Kreismittelpunkt M . Kreis um M durch die Bildpunkte P_x oder P_y ist der gesuchte Mohr'sche Spannungskreis.

Die Bildpunkte $P_{x'}$ und $P_{y'}$, welche die Spannungen in den Schnittflächen mit der x' - bzw. y' -Richtung als Normale repräsentieren, erhält man durch Abtragen der Richtungswinkel $2 \cdot 12^\circ$ bzw. $2 \cdot 12^\circ + 180^\circ$, ausgehend vom Bildpunkt P_y (gleicher Drehsinn zum Lageplan).



Aus dem Mohr'schen Spannungskreis folgt die Normalspannungen $\sigma_{x'}$ und $\sigma_{y'}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{y'} &= \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha) \\ &= \frac{392,98 \text{ N/mm}^2}{2} \cdot (1 + \cos(2 \cdot 12^\circ)) = 375,99 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_1}{2} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha) \\ &= \frac{392,98 \text{ N/mm}^2}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot 12^\circ)) = 16,99 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Berechnung der Dehnung in y'-Richtung (Messrichtung des DMS) durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes für den zweiachsigem Spannungszustand

$$\begin{aligned}\varepsilon_{y'} \equiv \varepsilon_{\text{DMS}} &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{y'} - \mu \cdot \sigma_{x'}) = \frac{375,99 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 16,99 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} \\ &= 0,001766 = 1,766 \%\end{aligned}$$

Alternative Lösung mit Hilfe des Mohr'schen Verformungskreises

Berechnung der Dehnung in Längs- und Querrichtung unter Wirkung von F_V

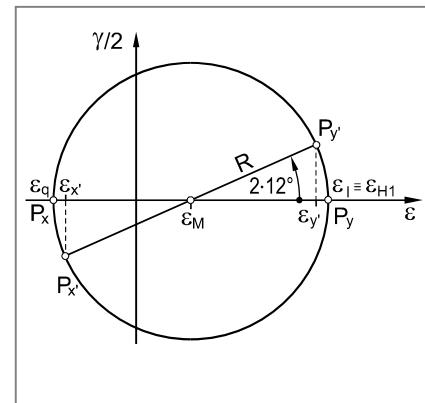
$$\varepsilon_l \equiv \varepsilon_y = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{392,98 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,00187 = 1,87 \%$$

$$\varepsilon_q \equiv \varepsilon_x = -\mu \cdot \varepsilon_l = -0,30 \cdot 0,00187 = -0,000561 = -0,561 \%$$

Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises

Zur Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises benötigt man die Verformungen in zwei zueinander senkrechten Schnitttrichtungen. Bekannt sind die Verformungen mit der x- bzw. y-Richtung als Bezugsrichtung.

Einzeichnen der entsprechenden Bildpunkte P_x ($\varepsilon_q | 0$) und P_y ($\varepsilon_l | 0$) in das $\varepsilon-\gamma/2$ -Koordinatensystem ergibt den Mohr'schen Verformungskreis. Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, liegen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser, damit ist der Mohr'sche Verformungskreis festgelegt (siehe Abbildung).



Den Bildpunkt P_y , welcher die Verformungen in y'-Richtung (Messrichtung des DMS) als Bezugsrichtung repräsentiert, erhält man durch Abtragen des Richtungswinkels $2 \cdot 12^\circ$, ausgehend vom Bildpunkt P_y (gleicher Drehsinn zum Lageplan).

Für den Mittelpunkt und den Radius des Mohr'schen Verformungskreises erhält man:

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_l + \varepsilon_q}{2} = \frac{1,87 \% - 0,561 \%}{2} = 0,6543 \%$$

$$R = \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_q}{2} = \frac{1,87 \% - (-0,561 \%)}{2} = 1,216 \%$$

Damit folgt die Dehnung in y'-Richtung (Messrichtung des DMS)

$$\varepsilon_{y'} \equiv \varepsilon_{\text{DMS}} = \varepsilon_M + R \cdot \cos 2\alpha = 0,6543 \% + 1,216 \% \cdot \cos(2 \cdot 12^\circ) = 1,766 \%$$

b) Berechnung der Dehnung in Messrichtung des DMS

Aus Aufgabenteil a) folgt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{y'} &\equiv \varepsilon_{\text{DMS}} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{y'} - \mu \cdot \sigma_{x'}) = \frac{1}{E} \cdot \left[\frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha) - \mu \cdot \frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha) \right] \\ &= \frac{\sigma_1}{2 \cdot E} \cdot [(1 + \cos 2\alpha) - \mu \cdot (1 - \cos 2\alpha)]\end{aligned}$$

Damit folgt für die Spannung σ_1 in Längsrichtung:

$$\sigma_1 = \frac{2 \cdot E \cdot \varepsilon_{\text{DMS}}}{(1 + \cos 2\alpha) - \mu \cdot (1 - \cos 2\alpha)} = \frac{2 \cdot 210\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,0025}{(1 + \cos 24^\circ) - 0,30 \cdot (1 - \cos 24^\circ)} = 556,26 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Zugkraft F_{ges}

$$F_{\text{ges}} = \sigma_1 \cdot A = \sigma_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 556,26 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (18 \text{ mm})^2 = 141\,551 \text{ N}$$

Berechnung der Betriebskraft F_{B1}

$$F_{\text{B1}} = F_{\text{ges}} - F_V = 141\,551 \text{ N} - 100\,000 \text{ N} = 41\,551 \text{ N}$$

Alternative Lösung mit Hilfe des Mohr'schen Verformungskreises

Für die Dehnung in Messrichtung des DMS ergibt sich aus dem vorhergehenden Aufgabenteil:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{DMS}} &\equiv \varepsilon_{y'} = \varepsilon_M + R \cdot \cos 2\alpha \\ &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_q}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_q}{2} \cdot \cos 2\alpha \\ &= \frac{\varepsilon_1 - \mu \cdot \varepsilon_l}{2} + \frac{\varepsilon_1 + \mu \cdot \varepsilon_l}{2} \cdot \cos 2\alpha \\ &= \frac{\varepsilon_1 \cdot (1 - \mu) + \varepsilon_1 \cdot (1 + \mu) \cdot \cos 2\alpha}{2} \\ &= \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot [(1 - \mu) + (1 + \mu) \cdot \cos 2\alpha]\end{aligned}$$

Damit folgt für die Dehnung ε_1 in Längsrichtung:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{2 \cdot \varepsilon_{\text{DMS}}}{(1 - \mu) + (1 + \mu) \cdot \cos 2\alpha} = \frac{2 \cdot 0,0025}{(1 - 0,30) + (1 + 0,30) \cdot \cos(2 \cdot 12^\circ)} = 0,002649 \\ \sigma_1 &= E \cdot \varepsilon_1 = 210\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,002649 = 556,26 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

c) Ermittlung der Formzahl α_k

$$\frac{D}{d} = \frac{24 \text{ mm}}{18 \text{ mm}} = 1,33$$

$$\frac{R}{d} = \frac{2,5 \text{ mm}}{18 \text{ mm}} = 0,14$$

Damit entnimmt man einem geeigneten Formzahldiagramm:

$$\alpha_{kz} = 1,62$$

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen im Kerbgrund

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

$$\sigma_n \cdot \alpha_{kz} = R_{p0,2}$$

$$\frac{F_V + F_{B1}}{A_n} \cdot \alpha_{kz} = R_{p0,2}$$

$$F_{B1} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot R_{p0,2}}{\alpha_{kz}} - F_V = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot (18 \text{ mm})^2 \cdot 1050 \text{ N/mm}^2}{1,62} - 100000 \text{ N} = \mathbf{64934 \text{ N}}$$

d) Berechnung der Kerbwirkungszahl β_k für den Wellenabsatz

Formzahl: $\alpha_k = 1,62$

Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles:

$$\chi^+ = \frac{2}{R} = \frac{2}{2,5 \text{ mm}} = 0,8 \text{ mm}^{-1}$$

Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 im Lehrbuch ($R_{p0,2} = 1050 \text{ N/mm}^2$):

$$n_\chi = 1,02$$

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_k :

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{n_\chi} = \frac{1,62}{1,02} = \mathbf{1,59}$$

e) Berechnung der Nennspannungen

Spannungssamplitude (Nennspannung):

$$\sigma_{an} = \frac{F_a}{A_n} = \frac{\frac{F_{B2}}{2}}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{\frac{50000 \text{ N}}{2}}{\frac{\pi}{4} \cdot (18 \text{ mm})^2} = 98,24 \text{ N/mm}^2$$

Mittelspannung (Nennspannung und maximale Spannung):

$$\sigma_{mn} = \frac{F_m}{A_n} = \frac{F_V + \frac{F_{B2}}{2}}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{100000 \text{ N} + \frac{50000 \text{ N}}{2}}{\frac{\pi}{4} \cdot (18 \text{ mm})^2} = 491,22 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{m\max} = \sigma_{mn} \cdot \alpha_{kz} = 491,22 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,62 = 795,77 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,88 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 6,3 \mu\text{m und } R_m = 1050 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Zug-Druck-Wechselfestigkeit

$$\sigma_{zdW}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{zdW} = 0,88 \cdot 630 \text{ N/mm}^2 = 554,40 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 1400 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,39$$

$$M'_\sigma = M_\sigma / 3 = 0,39 / 3 = 0,13 \text{ (nach FKM - Richtlinie)}$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{zdW}^* \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1} - M'_\sigma \cdot \sigma_{m\max} \quad \text{da } \frac{\sigma_{zdW}^*}{M_\sigma + 1} < \sigma_{m\max} \leq \frac{3 \cdot \sigma_{zdW}^*}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1}$$

$$\sigma_{AD}^* = 554,40 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{0,13 + 1}{0,39 + 1} - 0,13 \cdot 795,77 \text{ N/mm}^2 = 347,25 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{a\max} \leq \sigma_{a\zul}$$

$$\sigma_{an} \cdot \beta_k = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{AD}^*}{\sigma_{an} \cdot \beta_k} = \frac{347,25 \text{ N/mm}^2}{98,24 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,59} = 2,22 \quad (\text{nicht ausreichend, da } S_D < 2,50)$$

Anmerkung: Die Sicherheit gegen Fließen beträgt $S_F = 1,1$ und ist ebenfalls nicht ausreichend.

f) Berechnung der Nennspannungen

$$\sigma_{zn} = \frac{F_V + F_{B3}}{A_n} = \frac{F_V + F_{B3}}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2}$$

$$\tau_{tn} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{63\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (18 \text{ mm})^3} = 55,02 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Formzahlen α_{kz} und α_{kt}

$$\frac{D}{d} = \frac{24 \text{ mm}}{18 \text{ mm}} = 1,33$$

$$\frac{R}{d} = \frac{2,5 \text{ mm}}{18 \text{ mm}} = 0,14$$

Damit entnimmt man geeigneten Formzahldiagrammen:

$$\alpha_{kz} = 1,62 \text{ (siehe oben)}$$

$$\alpha_{kt} = 1,30$$

Berechnung der maximalen Spannungen

$$\sigma_{z \max} = \sigma_{zn} \cdot \alpha_{kz} = \frac{F_V + F_{B3}}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} \cdot \alpha_{kz}$$

$$\tau_{t \max} = \tau_{tn} \cdot \alpha_{kz} = 55,02 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,30 = 71,52 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Vergleichsspannung aus den Lastspannungen unter Anwendung der Schubspannungshypothese

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_{z \ max}^2 + 4 \cdot \tau_{t \ max}^2}$$

Berechnung der Betriebskraft F_{B3}

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sqrt{\sigma_{z \ max}^2 + 4 \cdot \tau_{t \ max}^2} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sigma_{z \ max} = \sqrt{\left(\frac{R_{p0,2}}{S_F}\right)^2 - 4 \cdot \tau_{t \ max}^2}$$

$$\sigma_{zn} \cdot \alpha_{kz} = \sqrt{\left(\frac{R_{p0,2}}{S_F}\right)^2 - 4 \cdot \tau_{t \ max}^2}$$

$$\frac{F_V + F_{B3}}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} \cdot \alpha_{kz} = \sqrt{\left(\frac{R_{p0,2}}{S_F}\right)^2 - 4 \cdot \tau_{t \ max}^2}$$

$$F_{B3} = \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot \alpha_{kz}} \cdot \sqrt{\left(\frac{R_{p0,2}}{S_F}\right)^2 - 4 \cdot \tau_{t \ max}^2 - F_V}$$

$$= \frac{\pi \cdot (18 \text{ mm})^2}{4 \cdot 1,62} \cdot \sqrt{\left(\frac{1050}{1,20}\right)^2 - 4 \cdot 71,52^2} \text{ N/mm}^2 - 100\,000 \text{ N} = 35\,596 \text{ N}$$

Lösung zu Aufgabe 13.23

a) Berechnung der Lastspannungen

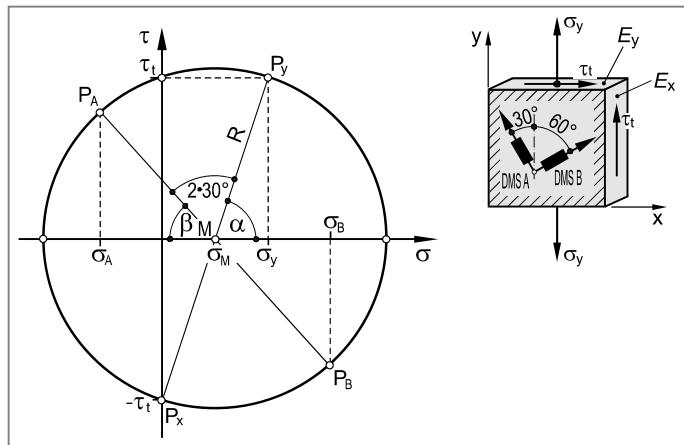
$$\sigma_y = \frac{F_1}{A} = \frac{F_1}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 50000 \text{ N}}{\pi \cdot (25 \text{ mm})^2} = 101,86 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_t = \frac{M_{t1}}{W_t} = \frac{M_{t1}}{\frac{\pi}{16} \cdot D^3} = \frac{16 \cdot 500000 \text{ Nmm}}{\pi \cdot (25 \text{ mm})^3} = 162,97 \text{ N/mm}^2$$

Konstruktion des Mohr'scher Spannungskreises

Eintragen des Bildpunktes $P_x (0 \mid -\tau_t)$ und des Bildpunktes $P_y (\sigma_y \mid \tau_t)$ in das σ - τ -Koordinatensystem unter Beachtung der speziellen Vorzeichenregelung für Schubspannungen.

Bildpunkt P_x repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der x -Achse als Normalenvektor (Ebene E_x).



Bildpunkt P_y repräsentiert die Spannungskomponenten in der Schnittebene mit der y -Achse als Normalenvektor (Ebene E_y). Da die beiden Schnittebenen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, müssen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser liegen. Die Strecke $P_x P_y$ schneidet die σ -Achse im Kreismittelpunkt M . Kreis um M durch die Bildpunkte P_x oder P_y ist der gesuchte Mohr'sche Spannungskreis.

Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Spannungskreises

$$\sigma_M = \frac{\sigma_y}{2} = \frac{101,68 \text{ N/mm}^2}{2} = 50,84 \text{ N/mm}^2$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_t^2} = \sqrt{50,84^2 + 162,97^2} \text{ N/mm}^2 = 170,74 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Hilfswinkel α und β

$$\alpha = \arctan \frac{\tau_t}{\sigma_y / 2} = \arctan \frac{162,97 \text{ N/mm}^2}{50,84 \text{ N/mm}^2} = 72,65^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ - \alpha = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ - 72,65^\circ = 47,35^\circ$$

Aus dem Mohr'schen Spannungskreis folgt für die Spannungen σ_A und σ_B :

$$\sigma_A = \frac{\sigma_z - R \cdot \cos \beta}{2} = \frac{101,86 \text{ N/mm}^2}{2} - 170,74 \cdot \cos 47,35^\circ = -64,75 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{\sigma_z + R \cdot \cos \beta}{2} = \frac{101,86 \text{ N/mm}^2}{2} + 170,74 \cdot \cos 47,35^\circ = 166,60 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Dehnungen in A- und B-Richtung (Messrichtung der DMS) mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes (zweiachsiger Spannungszustand)

$$\varepsilon_A \equiv \varepsilon_{DMSA} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_A - \mu \cdot \sigma_B) = \frac{-64,75 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot 166,60 \text{ N/mm}^2}{210000 \text{ N/mm}^2}$$

$$= -0,000546 = -0,546 \%$$

$$\varepsilon_B \equiv \varepsilon_{DMSB} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_B - \mu \cdot \sigma_A) = \frac{166,60 \text{ N/mm}^2 - 0,30 \cdot (-64,75) \text{ N/mm}^2}{210000 \text{ N/mm}^2}$$

$$= 0,000885 = 0,885 \%$$

b) **Ermittlung der Formzahlen α_{kz} und α_{kt}**

$$\frac{d}{D} = \frac{5 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = 0,20$$

Damit entnimmt man geeigneten Formzahldiagrammen:

$$\alpha_{kz} = 2,30$$

$$\alpha_{kt} = 1,55$$

c) **Berechnung der Nennspannungen**

$$\sigma_{yn} = \frac{F_1}{A_n} = \frac{F_1}{\frac{\pi \cdot D^2}{4} - d \cdot D} = \frac{50000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (25 \text{ mm})^2 - 25 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm}} = 136,66 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{tn} = \frac{M_{t2}}{W_{tn}} = \frac{M_{t2}}{\frac{\pi \cdot D^3}{16} - \frac{d \cdot D^2}{6}}$$

Berechnung der maximalen Spannungen

$$\sigma_{y\max} = \sigma_{yn} \cdot \alpha_{kz} = 136,66 \text{ N/mm}^2 \cdot 2,30 = 314,32 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{t\max} = \tau_{tn} \cdot \alpha_{kt} = \frac{M_{t2}}{\frac{\pi \cdot D^3}{16} - \frac{d \cdot D^2}{6}} \cdot \alpha_{kt}$$

Berechnung des zulässigen Antriebsmomentes M_{t2}

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{VSH} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sqrt{\sigma_{y \max}^2 + 4 \cdot \tau_{t \max}^2} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\tau_{t \max} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{R_{p0,2}}{S_F} \right)^2 - \sigma_{y \ max}^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{690}{1,20} \right)^2 - 314,32^2} \text{ N/mm}^2 = 240,74 \text{ N/mm}^2$$

Weiterhin gilt:

$$\tau_{t \ max} = \frac{M_{t2}}{\pi \cdot D^3 - \frac{d \cdot D^2}{6}} \cdot \alpha_{kt}$$

$$M_{t2} = \frac{\tau_{t \ max}}{\alpha_{kt}} \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^3}{16} - \frac{d \cdot D^2}{6} \right)$$

$$= \frac{240,74 \text{ N/mm}^2}{1,55} \cdot \left(\frac{\pi \cdot (25 \text{ mm})^3}{16} - \frac{5 \text{ mm} \cdot (25 \text{ mm})^2}{6} \right) = 395\,616 \text{ Nmm} = \mathbf{395,6 \text{ Nm}}$$

d) Berechnung der Kerbwirkungszahl β_{kb}

Formzahl: $\alpha_{kb} = 2,10$ (aus geeignetem Formzahldiagramm für $d/D = 0,20$)

Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles:

$$\chi^+ = \frac{2}{D} + \frac{8}{d} = \frac{2}{25 \text{ mm}} + \frac{8}{5 \text{ mm}} = 1,68 \text{ mm}^{-1}$$

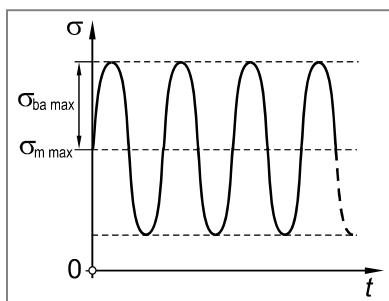
Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 im Lehrbuch ($R_{p0,2} = 690 \text{ N/mm}^2$):

$$n_\chi = 1,1$$

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_k :

$$\beta_{kb} = \frac{\alpha_{kb}}{n_\chi} = \frac{2,10}{1,1} = \mathbf{1,91}$$

e) Beanspruchungs-Zeit-Verlauf



Berechnung der Spannungssamplitude (Nennspannung)

$$\sigma_{ba\ n} = \frac{M_b}{W_b} = \frac{\frac{F_2 \cdot a}{\pi \cdot D^3}}{\frac{32}{6}} - \frac{d \cdot D^2}{6}$$

$$= \frac{\frac{2500 \text{ N} \cdot 50 \text{ mm}}{\pi \cdot (25 \text{ mm})^3}}{\frac{5 \text{ mm} \cdot (25 \text{ mm})^2}{6}} = 123,38 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Mittelspannung (Nennspannung und maximale Spannung)

$$\sigma_{mn} = \sigma_{yn} = 136,66 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{siehe Aufgabenteil c})$$

$$\sigma_{m\ max} \equiv \sigma_{y\ max} = 314,32 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{siehe Aufgabenteil c})$$

Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,92 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 4 \mu\text{m} \text{ und } R_m = 870 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Biegeweichselfestigkeit

$$\sigma_{bw}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{bw} = 0,92 \cdot 430 \text{ N/mm}^2 = 395,60 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 870 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,21$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{bw}^* - M_\sigma \cdot \sigma_{m\ max} \quad \text{da } \sigma_{m\ max} \leq \frac{\sigma_{bw}^*}{M_\sigma + 1}$$

$$\sigma_{AD}^* = 395,6 \text{ N/mm}^2 - 0,21 \cdot 314,32 \text{ N/mm}^2 = 329,59 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{ba\ max} \leq \sigma_{a\ zul}$$

$$\sigma_{ba\ n} \cdot \beta_{kb} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{AD}^*}{\sigma_{ba\ n} \cdot \beta_{kb}} = \frac{329,59 \text{ N/mm}^2}{123,38 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,91} = 1,40 \quad (\text{nicht ausreichend, da } S_D < 2,50)$$

Lösung zu Aufgabe 13.24

a) Berechnung der Spannungen und der Dehnungen im Querschnitt I

Berechnung der (Zug-)Spannung:

$$\sigma_{zI} = \frac{F_1}{A_I} = \frac{F_1}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 50000 \text{ N}}{\pi \cdot (35 \text{ mm})^2} = 51,96 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Dehnung in Längsrichtung (Hooke'sches Gesetz für den einachsigen Spannungszustand):

$$\varepsilon_{lI} = \frac{\sigma_{zI}}{E} = \frac{51,96 \text{ N/mm}^2}{210000 \text{ N/mm}^2} = 0,000248 = 0,248 \%$$

Berechnung der Querdehnung (Querkontraktion):

$$\varepsilon_{qI} = -\mu \cdot \varepsilon_{lI} = -0,30 \cdot 0,248 \% = -0,074 \%$$

Berechnung der Spannungen und der Dehnungen im Querschnitt II

Berechnung der (Zug-)Spannung:

$$\sigma_{zII} = \frac{F_1}{A_{II}} = \frac{F_1}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 50000 \text{ N}}{\pi \cdot (45 \text{ mm})^2} = 31,44 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Dehnung in Längsrichtung (Hooke'sches Gesetz für den einachsigen Spannungszustand):

$$\varepsilon_{lII} = \frac{\sigma_{zII}}{E} = \frac{31,44 \text{ N/mm}^2}{210000 \text{ N/mm}^2} = 0,000149 = 0,149 \%$$

Berechnung der Querdehnung (Querkontraktion):

$$\varepsilon_{qII} = -\mu \cdot \varepsilon_{lII} = -0,30 \cdot 0,149 \% = -0,045 \%$$

Berechnung der Verlängerung der Welle

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_I + 2 \cdot \Delta l_{II} \\ &= \varepsilon_{lI} \cdot (l - 2 \cdot a) + 2 \cdot \varepsilon_{lII} \cdot a \\ &= 0,000248 \cdot (850 \text{ mm} - 2 \cdot 200 \text{ mm}) + 2 \cdot 0,000149 \cdot 200 \text{ mm} = 0,171 \text{ mm} \end{aligned}$$

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen im Querschnitt I

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{zI} \leq \sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{zI}} = \frac{340 \text{ N/mm}^2}{51,96 \text{ N/mm}^2} = 6,54 \quad (\text{ausreichend, da } S_F \geq 1,20)$$

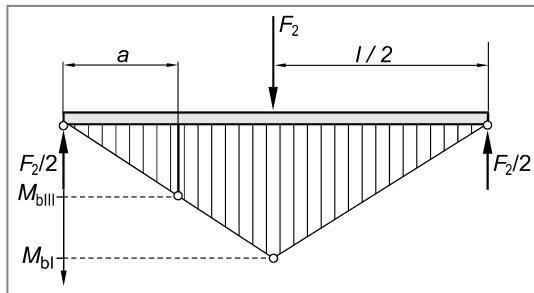
Berechnung der Sicherheit gegen Fließen im Querschnitt II

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{z\text{ II}} \leq \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{z\text{ II}}} = \frac{340 \text{ N/mm}^2}{31,44 \text{ N/mm}^2} = 10,81 \quad (\text{ausreichend, da } S_F \geq 1,20)$$

b) Berechnung der Biegespannung an der Stelle A-A



$$M_{bI} = \frac{F_2}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F_2 \cdot l}{4} = \frac{5000 \text{ N} \cdot 850 \text{ mm}}{4} = 1062500 \text{ Nmm}$$

$$\sigma_{bI} = \frac{M_{bI}}{W_b} = \frac{M_{bI}}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{1062500 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (35 \text{ mm})^3} = 252,42 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Nennspannungen im Querschnitt III:

$$M_{bIII} = \frac{F_2}{2} \cdot a = \frac{5000 \text{ N}}{2} \cdot 200 \text{ mm} = 500000 \text{ mm}$$

$$\sigma_{bIII} = \frac{M_{bIII}}{W_{bn}} = \frac{M_{bIII}}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{500000 \text{ mm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (35 \text{ mm})^3} = 118,79 \text{ N/mm}^2$$

c) Bedingung:

$$\sigma_{bI} = \sigma_{bIII \text{ max}}$$

$$\sigma_{bI} = \sigma_{bIII} \cdot \alpha_{kb}$$

$$\frac{\frac{F_2 \cdot l}{4}}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{\frac{F_2 \cdot a}{2}}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} \cdot \alpha_{kb}$$

$$\alpha_{kb} = \frac{l}{2 \cdot a} = \frac{850 \text{ mm}}{2 \cdot 200 \text{ mm}} = 2,125$$

Berechnung des Radius R

$$\frac{D}{d} = \frac{45 \text{ mm}}{35 \text{ mm}} = 1,29$$

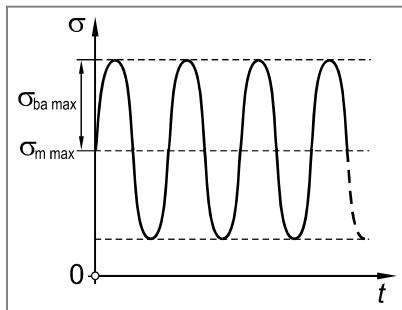
$$\alpha_{\text{kb}} = 2,125$$

Damit entnimmt man einem geeigneten Formzahldiagramm:

$$\frac{R}{d} = 0,04$$

$$R = 0,04 \cdot d = 0,04 \cdot 35 \text{ mm} = \mathbf{1,4 \text{ mm}}$$

d) Beanspruchungs-Zeit-Verlauf



Ermittlung der Formzahl α_{kz}

$$\frac{D}{d} = 1,29$$

$$\frac{R}{d} = 0,04$$

Damit entnimmt man einem geeigneten Formzahldiagramm:

$$\alpha_{\text{kz}} = 2,45$$

Berechnung der Mittelspannung (Nennspannung und maximale Spannung)

$$\sigma_{\text{mn}} = \sigma_{\text{zI}} = 51,96 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{m max}} = \sigma_{\text{mn}} \cdot \alpha_{\text{kz}} = 51,96 \cdot 2,45 = 127,32 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Spannungsamplitude (Nennspannung)

$$\sigma_{\text{ba n}} = \frac{\frac{F_2 \cdot a}{2}}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{16 \cdot F_2 \cdot a}{\pi \cdot d^3}$$

Bestimmung der Kerbwirkungszahl β_{kb}

Formzahl $\alpha_{\text{kb}} = 2,125$

Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles:

$$\chi^+ = \frac{4}{D+d} + \frac{2}{R} = \frac{4}{45 \text{ mm} + 35 \text{ mm}} + \frac{2}{1,4 \text{ mm}} = 1,479 \text{ mm}^{-1}$$

Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 im Lehrbuch ($R_e = 340 \text{ N/mm}^2$)

$$n_\chi = 1,25$$

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_{kb}

$$\beta_{kb} = \frac{\alpha_{kb}}{n_\chi} = \frac{2,125}{1,25} = 1,70$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 600 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,11$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD} = \sigma_{bW} - M_\sigma \cdot \sigma_{m\ max} \quad \text{da } \sigma_{m\ max} \leq \frac{\sigma_{bW}}{M_\sigma + 1}$$

$$\sigma_{AD} = 300 \text{ N/mm}^2 - 0,11 \cdot 127,32 \text{ N/mm}^2 = 286,00 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der zulässigen Querkraft F_2

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{a\ max} \leq \sigma_{a\ zul}$$

$$\sigma_{ba\ n} \cdot \beta_{kb} = \frac{\sigma_{AD}}{S_D}$$

$$\frac{16 \cdot F_2 \cdot a}{\pi \cdot d^3} \cdot \beta_{kb} = \frac{\sigma_{AD}}{S_D}$$

$$F_2 = \frac{\sigma_{AD}}{S_D} \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{16 \cdot a} \cdot \frac{1}{\beta_{kb}} = \frac{286,00 \text{ N/mm}^2}{3,0} \cdot \frac{\pi \cdot (35 \text{ mm})^3}{16 \cdot 200 \text{ mm}} \cdot \frac{1}{1,70} = 2360 \text{ N}$$

Lösung zu Aufgabe 13.25

a) Berechnung der Lastspannungen

$$\sigma_x = \frac{F_{z1}}{A} = \frac{F_{z1}}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{170\,000 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot (25 \text{ mm})^2} = 346,32 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_t = \frac{M_{t1}}{W_t} = \frac{M_{t1}}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{500\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{16} \cdot (25 \text{ mm})^3} = 162,98 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Verformungen ε_x , ε_y und γ_{xy}

Hooke'sches Gesetz (einachsiger Spannungszustand):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{346,32 \text{ N/mm}^2}{210\,000 \text{ N/mm}^2} = 0,001649 = 1,649 \%$$

$$\varepsilon_y = -\mu \cdot \varepsilon_x = -0,30 \cdot 1,649 \% = -0,495 \%$$

Hooke'sches Gesetz für Schubspannungen:

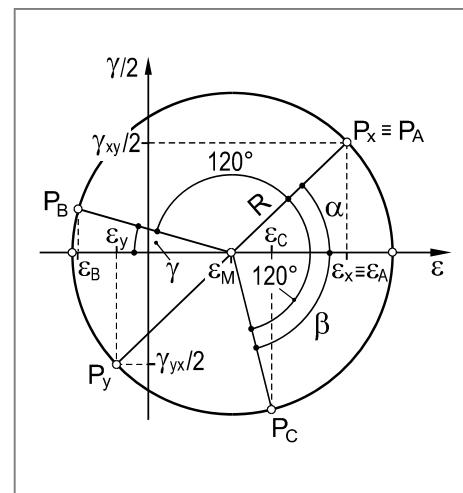
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\tau_t}{E} = \frac{162,98 \text{ N/mm}^2}{\frac{210\,000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + \mu)}} = 0,002018 = 2,018 \%$$

Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises

Zur Konstruktion des Mohr'schen Verformungskreises benötigt man die Verformungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen. Bekannt sind die Verformungen mit der x- bzw. y-Richtung als Bezugsrichtung.

Einzeichnen der entsprechenden Bildpunkte P_x ($\varepsilon_x | 0,5 \cdot \gamma_{xy}$) und P_y ($\varepsilon_y | 0,5 \cdot \gamma_{yx}$) unter Berücksichtigung der Vorzeichenregelung für Schiebungen in das ε - $\gamma/2$ -Koordinatensystem ergibt den Mohr'schen Verformungskreis.

Da die beiden Schnittrichtungen einen Winkel von 90° zueinander einschließen, liegen die Bildpunkte P_x und P_y auf einem Kreisdurchmesser. Damit ist der Mohr'sche Verformungskreis festgelegt (siehe Abbildung).



Berechnung von Mittelpunkt und Radius des Mohr'schen Verformungskreises

$$\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{1,649 \% + (-0,495 \%)}{2} = 0,577 \%$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1,649 \% - (-0,495 \%)}{2}\right)^2 + \left(\frac{2,018 \%}{2}\right)^2} = 1,472 \%$$

Berechnung des Hilfswinkels α

$$\alpha = \arctan \frac{\gamma_{xy} / 2}{(\varepsilon_x - \varepsilon_y) / 2} = \arctan \frac{2,018 \% / 2}{(1,649 \% - (-0,495 \%)) / 2} = 43,26^\circ$$

Berechnung des Hilfswinkels β

$$\beta = 120^\circ - \alpha = 120^\circ - 43,26^\circ = 76,74^\circ$$

Berechnung des Hilfswinkels γ

$$\gamma = 180^\circ - 120^\circ - \alpha = 120^\circ - 43,26^\circ = 16,74^\circ$$

Damit folgt die Dehnungen in Messrichtung der Dehnungsmessstreifen:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_x = 1,649 \%$$

$$\varepsilon_B = \varepsilon_M - R \cdot \cos \gamma = 0,577 \% - 1,472 \% \cdot \cos 16,74^\circ = -0,833 \%$$

$$\varepsilon_C = \varepsilon_M + R \cdot \cos \beta = 0,577 \% + 1,472 \% \cdot \cos 76,74^\circ = 0,915 \%$$

Alternative Lösung

Für die Dehnungen in Messrichtung der Dehnungsmessstreifen gilt (Gleichung 4.32 im Lehrbuch):

$$\varepsilon_A = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\alpha^* - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\alpha^*$$

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\beta^* - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\beta^*$$

$$\varepsilon_C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\gamma^* - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\gamma^*$$

Mit $\varepsilon_x = 1,649 \%$; $\varepsilon_y = -0,495 \%$ und $\gamma_{xy} = 2,018 \%$ sowie $\alpha^* = 0^\circ$; $\beta^* = -120^\circ$ und $\gamma^* = 120^\circ$ folgt:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_x = 1,649 \%$$

$$\varepsilon_B = \frac{1,649 \% + (-0,495 \%)}{2} + \frac{1,649 \% - (-0,495 \%)}{2} \cdot \cos(2 \cdot (-120^\circ)) - \frac{2,018 \%}{2} \cdot \sin(2 \cdot (-120^\circ)) = -0,833 \%$$

$$\varepsilon_C = \frac{1,649 \% + (-0,495 \%)}{2} + \frac{1,649 \% - (-0,495 \%)}{2} \cdot \cos(2 \cdot 120^\circ) - \frac{2,018 \%}{2} \cdot \sin(2 \cdot 120^\circ) = 0,915 \%$$

b) Aus Gleichung 4.32 (siehe Lehrbuch) ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\varepsilon_A = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\alpha^* - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\alpha^* \quad (1)$$

$$\varepsilon_C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\gamma^* - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\gamma^* \quad (2)$$

Da nur eine einachsige Zugbeanspruchung in x-Richtung vorliegt, gilt für die Dehnung in y-Richtung:

$$\varepsilon_y = -\mu \cdot \varepsilon_x$$

Mit $\alpha^* = 0^\circ$ folgt aus Gleichung 1:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_x$$

und damit:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_A = 1,798 \%$$

Mit $\gamma^* = 120^\circ$ folgt aus Gleichung 2:

$$\begin{aligned} \varepsilon_C &= \frac{\varepsilon_x - \mu \cdot \varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_x}{2} \cdot \cos 240^\circ - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 240^\circ \\ &= \frac{\varepsilon_x}{2} \cdot (1 - \mu) + \frac{\varepsilon_x}{2} \cdot (1 + \mu) \cdot (-0,5) - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \varepsilon_x \cdot \frac{1 - 3 \cdot \mu}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \gamma_{xy} \end{aligned}$$

Damit folgt für γ_{xy} :

$$\gamma_{xy} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \left(\varepsilon_C - \frac{1 - 3 \cdot \mu}{4} \cdot \varepsilon_x \right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \left(0,816 \% - \frac{1 - 3 \cdot 0,30}{4} \cdot 1,798 \% \right) = 1,781 \%$$

Berechnung der Zugkraft F_{z2}

$$\sigma_{z2} = E \cdot \varepsilon_x \quad (\text{einachsiger Spannungszustand})$$

$$\begin{aligned} F_{z2} &= \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot E \cdot \varepsilon_x = \frac{\pi}{4} \cdot (25 \text{ mm})^2 \cdot 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,001798 \% \\ &= 185344 \text{ N} = \mathbf{185,3 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Berechnung des Torsionsmomentes M_{t2}

$$\tau_t \equiv \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \gamma_{xy}$$

$$\begin{aligned} M_{t2} &= \tau_t \cdot W_t = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \gamma_{xy} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \\ &= \frac{210000 \text{ N/mm}^2}{2 \cdot (1 + 0,30)} \cdot 0,001781 \% \cdot \frac{\pi}{16} \cdot (25 \text{ mm})^3 = 441243 \text{ Nmm} = \mathbf{441,2 \text{ Nm}} \end{aligned}$$

Da $\gamma_{xy} = 1,781 \% > 0$ wird der ursprünglich rechte Winkel zwischen der x- und der y-Achse vergrößert. Dies kann nur durch ein Torsionsmoment erfolgen, mit Drehsinn entsprechend der Abbildung in Aufgabe 13.25.

c) Ermittlung der Formzahlen

$$\frac{D}{d} = \frac{30 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = 1,2$$

$$\frac{R}{d} = \frac{5 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = 0,2$$

Damit entnimmt man geeigneten Formzahldiagrammen:

$$\alpha_{kz} = 1,45$$

$$\alpha_{kt} = 1,18$$

Ermittlung der Nennspannungen

$$\sigma_{xn} = \frac{F_{z2}}{A} = \frac{4 \cdot F_{z2}}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 185344 \text{ N}}{\pi \cdot (25 \text{ mm})^2} = 377,58 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{tn} = \frac{M_{t2}}{W_t} = \frac{16 \cdot M_{t2}}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 441243 \text{ N}}{\pi \cdot (25 \text{ mm})^3} = 143,82 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der maximalen Spannungen

$$\sigma_{x\max} = \sigma_{xn} \cdot \alpha_{kz} = 377,58 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,45 = 547,49 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{t\max} = \tau_{tn} \cdot \alpha_{kt} = 143,82 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,18 = 169,71 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

Die Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese (SH) kann unmittelbar aus den Lastspannungen (Zugbeanspruchung mit überlagerter Torsion) errechnet werden:

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_{x\max}^2 + 4 \cdot \tau_{t\max}^2}$$

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{VSH} \leq \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$\sqrt{\sigma_{x\max}^2 + 4 \cdot \tau_{t\max}^2} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{\sigma_{x\max}^2 + 4 \cdot \tau_{t\max}^2}}$$

$$S_F = \frac{1180 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{547,49^2 + 4 \cdot 169,71^2} \text{ N/mm}^2} = 1,83 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

d) Berechnung der Spannungsamplitude (Nennspannung)

$$\sigma_{an} = E \cdot \varepsilon_a = E \cdot \frac{\varepsilon_O - \varepsilon_U}{2} = 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{0,002 - 0,0015}{2} = 52,5 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Mittelspannung (Nennspannung und maximale Spannung)

$$\sigma_{mn} = E \cdot \varepsilon_m = E \cdot \frac{\varepsilon_O + \varepsilon_U}{2} = 210\,000 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{0,002 + 0,0015}{2} = 367,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{m\max} = \sigma_{mn} \cdot \alpha_{kz} = 367,5 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,45 = 532,88 \text{ N/mm}^2$$

Bestimmung der Kerbwirkungszahl β_{kz}

Formzahl $\alpha_{kz} = 1,45$

Berechnung des bezogenes Spannungsgefälles:

$$\chi^+ = \frac{2}{R} = \frac{2}{5 \text{ mm}} = 0,4 \text{ mm}^{-1}$$

Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 im Lehrbuch ($R_m = 1520 \text{ N/mm}^2$):

$$n_\chi = 1,01$$

Kerbwirkungszahl β_{kz}

$$\beta_{kz} = \frac{\alpha_{kz}}{n_\chi} = \frac{1,45}{1,01} = 1,44$$

Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,85 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 6,3 \mu\text{m} \quad \text{und } R_m = 1520 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Zug-Druck-Wechselfestigkeit

$$\sigma_{zdW}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{zdW} = 0,85 \cdot 690 \text{ N/mm}^2 = 586,5 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 1520 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,432$$

$$M'_\sigma = M_\sigma / 3 = 0,144 \quad (\text{nach FKM - Richtlinie})$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{zdW}^* \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1} - M'_\sigma \cdot \sigma_{m\max} \quad \text{da } \frac{\sigma_{zdW}^*}{M_\sigma + 1} < \sigma_{m\max} \leq \frac{3 \cdot \sigma_{zdW}^*}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1}$$

$$\sigma_{AD}^* = 586,5 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{0,144 + 1}{0,432 + 1} - 0,144 \cdot 532,88 \text{ N/mm}^2 = 391,81 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

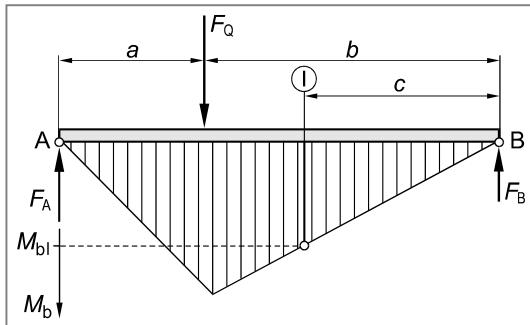
$$\sigma_{a\max} \leq \sigma_{a\zul}$$

$$\sigma_{an} \cdot \beta_{kz} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{AD}^*}{\sigma_{an} \cdot \beta_{kz}} = \frac{391,81 \text{ N/mm}^2}{52,5 \text{ N/mm}^2 \cdot 1,44} = 5,18 \quad (\text{ausreichend, da } S_D > 3,0)$$

Lösung zu Aufgabe 13.26

a) Berechnung des Biegemomentes an der Kerbstelle I



Ermittlung der Lagerkraft F_B :

$$F_B \cdot (a + b) = F_Q \cdot a$$

$$F_B = F_Q \cdot \frac{a}{a + b} = 15\,000 \text{ N} \cdot \frac{150 \text{ mm}}{450 \text{ mm}} = 5\,000 \text{ N}$$

Damit folgt für das Biegemoment an der Kerbstelle I:

$$M_{bI} = F_B \cdot c = 5\,000 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm} = 1\,000\,000 \text{ Nmm}$$

Ermittlung der Formzahlen α_{kz} und α_{kb}

$$\frac{d}{D} = \frac{10 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = 0,2$$

Aus geeigneten Formzahlendiagrammen entnimmt man:

$$\alpha_{kz} = 2,3$$

$$\alpha_{kb} = 2,1$$

Berechnung der Spannungsamplitude (Nennspannung)

$$\begin{aligned} \sigma_{bn} \equiv \sigma_{ba n} &= \frac{M_{bI}}{W_{bn}} = \frac{M_{bI}}{\frac{\pi \cdot D^3}{32} - \frac{d \cdot D^2}{6}} \\ &= \frac{1\,000\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi \cdot (50 \text{ mm})^3}{32} - \frac{10 \text{ mm} \cdot (50 \text{ mm})^2}{6}} = 123,38 \text{ N/mm} \end{aligned}$$

Berechnung der Mittelspannung (Nennspannung und maximale Spannung)

$$\sigma_{zn} \equiv \sigma_{mn} = \frac{F_H}{A_n} = \frac{F_H}{\frac{\pi \cdot D^2}{4} - d \cdot D} = \frac{250\,000 \text{ Nmm}}{\frac{\pi \cdot (50 \text{ mm})^2}{4} - 10 \text{ mm} \cdot 50 \text{ mm}} = 170,82 \text{ N/mm}$$

$$\sigma_{z \max} \equiv \sigma_{m \max} = \sigma_{mn} \cdot \alpha_{kz} = 170,82 \text{ N/mm} \cdot 2,3 = 392,89 \text{ N/mm}$$

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen

Festigkeitsbedingung (Fließen):

$$\sigma_{0\max} \leq \sigma_{zul}$$

$$\sigma_{b\max} + \sigma_{z\max} = \frac{R_{p0,2}}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{bn} \cdot \alpha_{kb} + \sigma_{m\max}}$$

$$= \frac{820 \text{ N/mm}^2}{123,38 \text{ N/mm}^2 \cdot 2,1 + 392,89 \text{ N/mm}^2} = 1,26 \quad (\text{ausreichend, da } S_F > 1,20)$$

b) Bestimmung der Kerbwirkungszahl β_{kb}

Formzahl $\alpha_{kb} = 2,1$

Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles:

$$\chi^+ = \frac{2}{D} + \frac{8}{d} = \frac{2}{50 \text{ mm}} + \frac{8}{10 \text{ mm}} = 0,84 \text{ mm}^{-1}$$

Ermittlung der dynamischen Stützziffer n_χ aus Bild 13.51 im Lehrbuch ($R_{p0,2} = 820 \text{ N/mm}^2$)

$$n_\chi = 1,05$$

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_{kb}

$$\beta_{kb} = \frac{\alpha_{kb}}{n_\chi} = \frac{2,1}{1,05} = 2,0$$

Ermittlung des Oberflächenfaktors $C_{O\sigma}$ unter der Wirkung von Normalspannungen

$$C_{O\sigma} = 0,83 \quad \text{aus Diagramm für } Rz = 12,5 \mu\text{m und } R_m = 1050 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der korrigierten Biegewechselfestigkeit

$$\sigma_{bW}^* = C_{O\sigma} \cdot \sigma_{bW} = 0,83 \cdot 520 \text{ N/mm}^2 = 431,6 \text{ N/mm}^2$$

Ermittlung der Mittelspannungsempfindlichkeit M_σ

$$M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 = 0,00035 \cdot 1050 \text{ N/mm}^2 - 0,1 = 0,27$$

$$M'_\sigma = M_\sigma / 3 = 0,09 \quad (\text{nach FKM - Richtlinie})$$

Berechnung der dauernd ertragbaren Amplitude (Mittelspannungstransformation)

$$\sigma_{AD}^* = \sigma_{bW}^* \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1} - M'_\sigma \cdot \sigma_{m\max} \quad \text{da } \frac{\sigma_{bW}^*}{M_\sigma + 1} < \sigma_{m\max} \leq \frac{3 \cdot \sigma_{bW}^*}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M_\sigma + 1}$$

$$\sigma_{AD}^* = 431,6 \text{ N/mm}^2 \cdot \frac{0,09 + 1}{0,27 + 1} - 0,09 \cdot 392,89 \text{ N/mm}^2 = 335,07 \text{ N/mm}^2$$

Berechnung der Sicherheit gegen Dauerbruch

Festigkeitsbedingung:

$$\sigma_{a\ max} \leq \sigma_{a\ zul}$$

$$\sigma_{an} \cdot \beta_{kb} = \frac{\sigma_{AD}^*}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_{AD}^*}{\sigma_{ba\ n} \cdot \beta_{kb}} = \frac{335,07 \text{ N/mm}^2}{123,38 \text{ N/mm}^2 \cdot 2,0} = 1,36 \quad (\text{nicht ausreichend, da } S_D < 2,50)$$

c) Bedingung für Fließbeginn

$$\sigma_{max} \leq R_{p0,2}$$

$$\sigma_{b\ max} + \sigma_{z\ max} = R_{p0,2}$$

$$\sigma_{bn} \cdot \alpha_{kb} + \sigma_{z\ max} = R_{p0,2}$$

$$\sigma_{bn} = \frac{R_{p0,2} - \sigma_{z\ max}}{\alpha_{kb}} = \frac{820 \text{ N/mm}^2 - 392,89 \text{ N/mm}^2}{2,1} = 203,38 \text{ N/mm}^2$$

Damit folgt für das Biegemoment an der Kerbstelle:

$$M_{bl} = \sigma_{bn} \cdot W_{bn} = \sigma_{bn} \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^3}{32} - \frac{d \cdot D^2}{6} \right)$$

$$= 203,38 \text{ N/mm}^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot (50 \text{ mm})^3}{32} - \frac{10 \text{ mm} \cdot (50 \text{ mm})^2}{6} \right) = 1648459 \text{ Nmm}$$

Damit folgt für die Lagerkraft F_B :

$$F_B = \frac{M_{bl}}{c} = \frac{1648459 \text{ Nmm}}{200 \text{ mm}} = 8242,3 \text{ N}$$

Hieraus ergibt sich die Querkraft F_{Q1} zu:

$$F_{Q1} = F_B \cdot \frac{a+b}{a} = 8242,3 \text{ N} \cdot \frac{450 \text{ mm}}{150 \text{ mm}} = 24727 \text{ N} = 24,7 \text{ kN}$$

d) Bedingung für Fließbeginn

$$\sigma_{max} \leq R_{p0,2}$$

$$\sigma_{b\ max} + \sigma_{z\ max} = R_{p0,2}$$

$$\sigma_{bn} \cdot \alpha_{kb} + \sigma_{zn} \cdot \alpha_{kz} = R_{p0,2}$$

$$\sigma_{zn} = \frac{R_{p0,2} - \sigma_{bn} \cdot \alpha_{kb}}{\alpha_{kz}} = \frac{820 \text{ N/mm}^2 - 123,38 \text{ N/mm}^2 \cdot 2,1}{2,3} = 243,87 \text{ N/mm}^2$$

Damit folgt für die Zugkraft F_{H1} :

$$\begin{aligned} F_{\text{H1}} &= \sigma_{\text{zn}} \cdot A_{\text{n}} = \sigma_{\text{zn}} \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4} - d \cdot D \right) \\ &= 243,87 \text{ N/mm}^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot (50 \text{ mm})^2}{4} - 50 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} \right) = 356\,906 \text{ N} = \mathbf{356,9 \text{ kN}} \end{aligned}$$