

Peter von Böckh
Thomas Wetzel

Wärme- übertragung



Grundlagen und Praxis

4. Auflage



Springer

Wärmeübertragung

Peter von Böckh • Thomas Wetzel

Wärmeübertragung

Grundlagen und Praxis

4., bearbeitete Auflage



Springer

Prof. Dr. Peter von Böckh
Hedwig-Kettler-Str. 7
76137 Karlsruhe
bupvb@web.de

Prof. Dr.-Ing. Thomas Wetzel
Karlsruher Institut für Technologie KIT
Institut für Thermische Verfahrenstechnik
76128 Karlsruhe
thomas.wetzel@kit.edu

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-642-15958-9 e-ISBN 978-3-642-15959-6
DOI 10.1007/978-3-642-15959-6
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003, 2006, 2009, 2011

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort zur ersten Auflage

Warum ein neues Buch über Wärmeübertragung? Meine Tätigkeit bei Asea Brown Boveri bis 1991 war eng mit der Entwicklung von Wärmeübertragern für Dampfkraftwerke verbunden. Dabei mussten stets die neuesten Forschungsergebnisse auf dem Gebiet der Wärmeübertragung berücksichtigt oder neue Berechnungsverfahren für unsere Apparate entwickelt werden. Bei den jungen Ingenieuren, die nach Abschluss ihres Studiums bei uns anfangen, stellten wir fest, dass sie auf dem Gebiet der Wärmeübertragung mit theoretischem Wissen über Grenzschichten, Ähnlichkeitstheoreme und einer Vielzahl von Berechnungsverfahren vollgestopft waren. Sie konnten jedoch kaum einen Wärmeübertrager berechnen bzw. auslegen.

Als ich dann mit dem Unterricht an der Fachhochschule beider Basel begann, sah ich, dass die meisten Lehrbücher nicht auf dem neuesten Stand der Technik waren. Insbesondere die didaktisch ausgezeichneten amerikanischen Lehrbücher weisen große Mängel bezüglich Aktualität auf. In meiner nun 12jährigen Unterrichtstätigkeit arbeitete ich ein Skript aus, in dem ich versuchte, die neuesten Erkenntnisse zu berücksichtigen und die Studierenden so auszubilden, dass sie in der Lage sind, Wärmeübertrager zu berechnen und auszulegen. Vom Umfang her musste der Stoff für den Unterricht an Fachhochschulen und Universitäten für Maschinen- und Verfahreningenieure geeignet sein. Der VDI-Wärmeatlas ist dem Stand der Technik am besten angepasst, für den Unterricht jedoch viel zu umfangreich. Sowohl in meinem Skript als auch im vorliegenden Buch wurde der VDI-Wärmeatlas, 9. Ausgabe (2002) oft als Quelle verwendet.

Das Buch setzt grundlegende Kenntnisse der Thermodynamik und Fluidmechanik wie z. B. den ersten Hauptsatz und die Gesetze der Strömungswiderstände voraus. Die Studierenden werden zunächst in die Grundlagen der Wärmeübertragung eingeführt. Durch Beispiele werden die Berechnung und Auslegung von Apparaten aufgezeigt und das theoretische Wissen vertieft. An unserer Fachhochschule sind die Studierenden nach 34 zweistündigen Lektionen in der Lage, selbstständig Apparate auszulegen oder nachzurechnen. Das Buch kann später im Beruf als Nachschlagewerk benutzt werden. Auf zu viele theoretische Herleitungen wurde absichtlich verzichtet, da sie eher in der Forschung benötigt werden.

Die im Buch behandelten Beispiele können als *Mathcad*-Programme unter www.fhbb.ch/maschinenbau oder www.springer.com/de/3-540-31432-6 aus dem Internet heruntergeladen werden.

Professor *Dr. Holger Martin*, Professor *Dr. Kurt Heiniger* und *Dr. Hartwig Wolf* danke ich für die wertvollen Hinweise, die zur Verbesserung des Buches führten. Sie hatten im Auftrag des Springer-Verlags das Manuskript zu begutachten. Insbesondere danke ich Herrn Prof. *Holger Martin* für den Hinweis, dass es nur zwei Arten der Wärmeübertragung gibt. In meiner Vorlesung lehrte ich mit fast allen Lehrbüchern übereinstimmend die vier Arten der Wärmeübertragung, erwähnte aber, dass bei Konvektion Wärme durch Wärmeleitung transferiert wird. Mir

war der Aufsatz von *Nußelt* (Kapitel 1), in dem er darauf hinweist, dass es nur zwei Arten der Wärmeübertragung gibt, nämlich Wärmeleitung und Strahlung, nicht bekannt. Ich möchte die Leser bitten, diese Erkenntnis weiter zu verbreiten, damit mit der Zeit die irrigen vier Arten der Wärmeübertragung verschwinden.

Meiner Frau Brigitte, die viel zum Gelingen dieses Buches beigetragen hat, danke ich sehr. Sie las mein Manuskript kritisch durch und trug bezüglich der sprachlichen Formulierungen wesentlich zum Stil und zur Lesbarkeit des Buches bei.

Ich möchte nicht versäumen, dem Springer-Verlag für die ausgezeichnete Zusammenarbeit und Unterstützung zu danken.

Muttenz, Frühjahr 2003

Vorwort zur zweiten Auflage

In der zweiten Auflage wurden Fehler, die ich im Unterricht mit den Studenten entdeckte, eliminiert. Zumeist waren dies Tippfehler und falsch abgeschriebene Zahlen in den Beispielen. Bei den Studenten bedanke ich mich für die Hinweise betreffend der Fehler.

Die Stoffwerte von Frigen R134a waren aus einer nicht ganz exakten Quelle entnommen und wurden aktualisiert.

Neu im Anhang sind einfache Formeln zur Berechnung der Stoffwerte von Wasser, Wasserdampf, Frigen R134a und für Luft angegeben. Sie können leicht in Berechnungsprogramme implementiert werden. Diese Formeln sind im Internet als *Mathcad*-Programme abrufbar.

Wiederum bedanke ich mich bei meiner Frau Brigitte, die nochmals Korrektur las.

Muttenz, Januar 2006 Peter von Böckh

Vorwort zur dritten Auflage

Eine wesentliche Änderung bei dieser dritten Auflage ist der Koautor Prof. Dr.-Ing. Thomas Wetzel. Da ich seit 2006 im Ruhestand bin, bat mich der Springer-Verlag, einen Koautor, der noch doziert, beizuziehen. Ich konnte Herrn Prof. Wetzel, der Stoff- und Wärmeübertragung an der Karlsruher Universität liest, als Koautor gewinnen, da er das Buch bereits in seinen Vorlesungen verwendet. Ich freue mich sehr auf eine erfolgreiche Zusammenarbeit.

Die Mathcad-Programme sind jetzt in meiner Homepage waermeuebertragung-online.de abrufbar.

Karlsruhe, Mai 2009

Peter von Böckh mit Thomas Wetzel

Was ist neu in der vierten Auflage?

Sie wurde neu überarbeitet, was kleinere textliche Änderungen, Fehlerbehebung und Ergänzungen beinhaltet. Neu ist:

- Die englischen Termini in Klammern wurden weggelassen, da sie im Deutsch-Englisch-Glossar bereits vorhanden sind
- Wichtige Aussagen sind mit einem Rahmen versehen und grau unterlegt
- In Kapitel 2 wurde ein neuer Absatz mit einer numerischen Berechnungsmethode für transiente Wärmeleitung angefügt
- In Kapitel 3 ist die Herleitung der Kennzahlen Nu , Re und Pr beschrieben
- Kapitel 8 behandelt neu u.a. Rohrvibrationen mit Hinweisen auf weiterführende Literatur
- Im Anhang ist eine Formelsammlung zusammengestellt
- Die *Mathcad*-Programme sind jetzt in *Mathcad* 14 im Internet unter www.waermeuebertragung-online.de abrufbar.

Karlsruhe, Januar 2011

Peter von Böckh und Thomas Wetzel

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Definitionen	1
1.1 Arten der Wärmeübertragung	3
1.2 Definitionen	5
1.2.1 Wärmestrom und Wärmestromdichte	5
1.2.2 Wärmeübergangszahl und Wärmedurchgangszahl	5
1.2.3 Kinetische Kopplungsgleichungen	7
1.2.4 Mittlere Temperaturdifferenz	7
1.2.5 Energiebilanzgleichung	9
1.2.6 Wärmeleitfähigkeit	11
1.3 Problemlösungsmethodik	11
 2 Wärmeleitung in ruhenden Stoffen	 17
2.1 Stationäre Wärmeleitung	17
2.1.1 Wärmeleitung in einer ebenen Wand	18
2.1.2 Wärmeübergang durch mehrere ebene Wände	22
2.1.3 Wärmeleitung in einem Hohlzylinder	25
2.1.4 Hohlzylinder mit mehreren Schichten	29
2.1.5 Wärmeleitung in einer Hohlkugel	33
2.1.6 Wärmeleitung mit seitlichem Wärmetransfer (Rippen)	36
2.1.6.1 Temperaturverlauf in der Rippe	37
2.1.6.2 Temperatur am Ende der Rippe	39
2.1.6.3 Wärmestrom am Anfang der Rippe	39
2.1.6.4 Rippenwirkungsgrad	40
2.1.6.5 Anwendbarkeit für andere Geometrien	41
2.2 Instationäre Wärmeleitung	45
2.2.1 Eindimensionale instationäre Wärmeleitung	45
2.2.1.1 Bestimmung der zeitlichen Temperaturänderung	45
2.2.1.2 Bestimmung der transferierten Wärme	49
2.2.1.3 Spezielle Lösungen für kurze Zeiten	60
2.2.2 Gekoppelte Systeme	62
2.2.3 Sonderfälle bei $Bi = 0$ und $Bi = \infty$	64
2.2.4 Temperaturänderung bei kleinen Biotzahlen	65
2.2.4.1 Ein kleiner Körper taucht in ein Fluid großer Masse	65
2.2.4.2 Ein Körper taucht in ein Fluid mit vergleichbarer Masse	68
2.2.4.3 Wärmetransfer durch einen strömenden Wärmeträger ...	70

2.2.5	Numerische Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichung	73
2.2.5.1	Diskretisierung	73
2.2.5.2	Numerische Lösung	75
2.2.5.3	Wahl der Gitterweite und des Zeitschritts	77
3	Erzwungene Konvektion	79
3.1	Kennzahlen	81
3.1.1	Kontinuitätsgleichung	81
3.1.2	Bewegungsgleichung	82
3.1.3	Energiegleichung	83
3.2	Bestimmung der Wärmeübergangszahlen	86
3.2.1	Rohrströmung	86
3.2.1.1	Turbulente Rohrströmung	86
3.2.1.2	Laminare Rohrströmung bei konstanter Wandtemperatur	88
3.2.1.3	Gleichungen für den Übergangsbereich	89
3.2.1.3	Rohre und Kanäle nicht kreisförmigen Querschnitts	96
3.2.2	Ebene Wand	100
3.2.3	Quer angeströmte Einzelkörper	101
3.2.4	Quer angeströmte Rohrbündel	105
3.2.5	Rohrbündel mit Umlenkböden	112
3.3	Rippenrohre	113
3.3.1	Kreisrippenrohre	115
4	Freie Konvektion	121
4.1	Freie Konvektion an vertikalen, ebenen Wänden	122
4.1.1	Geneigte, ebene Flächen	127
4.2	Horizontale, ebene Flächen	129
4.3	Freie Konvektion an gekrümmten Flächen	130
4.3.1	Horizontaler Zylinder	130
4.3.2	Kugel	132
4.4	Überlagerung freier und erzwungener Konvektion	132
5	Kondensation reiner Stoffe	133
5.1	Filmkondensation reiner, ruhender Dämpfe	133
5.1.1	Laminare Filmkondensation	134
5.1.1.1	Kondensation gesättigten Dampfes an einer senkrechten Wand	134
5.1.1.2	Einfluss der veränderlichen Wandtemperatur	137
5.1.1.3	Kondensation nassen oder überhitzten Dampfes	138
5.1.1.4	Kondensation an geneigten Wänden	139
5.1.1.5	Kondensation an waagerechten Rohren	139
5.1.2	Turbulente Filmkondensation	139

5.2	Dimensionslose Darstellung	139
5.2.1	Lokale Wärmeübergangszahlen	140
5.2.2	Mittlere Wärmeübergangszahlen	141
5.2.3	Kondensation an waagerechten Rohren	142
5.2.4	Vorgehen bei der Berechnung der Wärmeübergangszahlen	142
5.2.5	Druckverlust in Rohrbündeln mit waagerechten Rohren	149
5.3	Kondensation strömender, reiner Dämpfe	154
5.3.1	Kondensation innerhalb senkrechter Rohre	155
5.3.1.1	Gleichstrom (abwärts gerichtete Dampfströmung)	155
5.3.1.2	Gegenstrom (Dampfströmung nach oben)	157
5.3.2	Kondensation in durchströmten, waagerechten Rohren	160
6	Verdampfung	173
6.1	Behältersieden	173
6.1.1	Sieden bei freier Konvektion	175
6.1.2	Blasensieden	175
6.2	Sieden bei erzwungener Konvektion	184
6.2.1	Unterkühltes Sieden	184
6.2.2	Konvektives Strömungssieden	185
7	Strahlung	191
7.1	Grundgesetz der Temperaturstrahlung	192
7.2	Bestimmung der Wärmestromdichte der Strahlung	194
7.2.1	Intensität und Richtungsverteilung der Strahlung	194
7.2.2	Emissionsverhältnisse technischer Oberflächen	195
7.2.3	Wärmetransfer zwischen Flächen	196
7.2.3.1	Gleich große, parallele graue Platten	198
7.2.3.2	Umschlossene Körper	200
7.3	Gasstrahlung	208
7.3.1	Emissionsverhältnisse von Rauchgasen	209
7.3.1.1	Emissionsverhältnisse des Wasserdampfes	210
7.3.1.2	Emissionsverhältnisse des Kohlendioxids	210
7.3.2	Wärmeaustausch zwischen Gas und Wand	210
8	Wärmeübertrager	217
8.1	Definitionen und grundlegende Gleichungen	217
8.2	Berechnungskonzepte	220
8.2.1	Zellenmethode	220
8.2.2	Berechnung mit der mittleren Temperatur	225
8.3	Verschmutzungswiderstand	238
8.4	Rohrschwingungen	242
8.4.1	Kritische Rohrschwingungen	242
	244	
8.4.2	Akustische Resonanz	244

Anhang	247
A1: Wichtige physikalische Konstanten	247
A2: Stoffwerte unterkühlten Wassers bei 1 bar Druck	248
A3: Stoffwerte gesättigten Wassers und Dampfes	250
A4: Stoffwerte des Wassers und Dampfes	252
A5: Stoffwerte des Wassers und Dampfes (Fortsetzung)	253
A6: Stoffwerte des Frigens 134a auf der Sättigungslinie	254
A7: Stoffwerte der Luft bei 1 bar Druck	256
A8: Stoffwerte der Feststoffe	257
A9: Stoffwerte technischer Wärmeträger auf Mineralölbasis	258
A10: Stoffwerte der Kraftstoffe bei 1,013 bar	259
A11: Emissionskoeffizienten verschiedener Oberflächen	260
A12: Formelsammlung	263
 Sachverzeichnis	 273
 Literatur	 277
 Deutsch-Englisch-Glossar	 281

Formelzeichen

a	Temperaturleitfähigkeit	m^2/s
$a = s_1/d$	dimensionsloser Rohrabstand senkrecht zur Anströmung	-
A	Strömungsquerschnitt, Austauschfläche, Oberfläche	m^2
Bi	Biotzahl	-
B, b	Breite	m
$b = s_2/d$	dimensionsloser Rohrabstand parallel zur Anströmung	-
C_{12}	Strahlungsaustauschzahl	$\text{W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$
C_s	Strahlungskonstante des schwarzen Körpers	$5,67 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$
c	Strömungsgeschwindigkeit	m/s
c_0	Anströmgeschwindigkeit	m/s
c_p	isobare spezifische Wärmekapazität	$\text{J}/(\text{kg K})$
D, d	Durchmesser	m
d_A	Blasenabreißdurchmesser	m
d_h	hydraulischer Durchmesser	m
F	Kraft	N
E	Elastizitätsmodul	N/m^2
F_s	Schwerkraft	N
F_τ	Schubspannungskraft	N
Fo	Fourierzahl	-
f_1, f_2	Korrekturfunktionen für die Wärmeübergangszahlen	-
f_A	Korrekturfunktion für die Rohranordnung im Rohrbündel	-
f_n	Korrekturfunktion für die Anzahl der Rohrreihen im Rohrbündel	-
g	Erdbeschleunigung	$9,806 \text{ m}/\text{s}^2$
Gr	Grashofzahl	-
H	Höhe des Bündels	m
$H = m \cdot h$	Enthalpie	J
h	Planck'sches Wirkungsquantum	$6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
h	spezifische Enthalpie	$\text{J}/\text{kg}, \text{kJ}/\text{kg}$
h	Rippenhöhe	m
i	Anzahl der Rohre pro Rohrreihe	-
$i_{\lambda,s}$	spektralspezifische Intensität der schwarzen Strahlung	W/m^3
k	Wärmedurchgangszahl	$\text{W}/(\text{m}^2 \text{K})$
k	Boltzmannkonstante	$1,380641 \cdot 10^{-23} \text{ J}/\text{K}$
L	charakteristische Länge	m
$L' = A/U_{proj}$	Überströmlänge = charakteristische Länge	m
$L' = \sqrt[3]{g / \nu^2}$	charakteristische Länge bei der Kondensation	m

l	Länge	m
m	Masse	kg
m	Hilfsgröße zur Charakterisierung der Rippen	m^{-1}
\dot{m}	Massenstrom	kg/s
NTU	Anzahl Übertragungseinheiten	-
Nu	<i>Nußeltzahl</i>	-
n	Anzahl der Rohrreihen, Anzahl der Rippen	-
p	Druck	Pa, bar
P	dimensionslose Temperatur	-
Pr	<i>Prandtlzahl</i>	-
Q	Wärme	J
\dot{Q}	Wärmestrom	W
\dot{q}	Wärmestromdichte	W/m^2
R	individuelle Gaskonstante	$J/(kg\ K)$
R_a	arithmetischer Mittenrauwert	m
R_v	Verschmutzungswiderstand	$(m^2\ K)/W$
r	Radius	m
r	Verdampfungsenthalpie	J/kg
R_1	Verhältnis der Wärmekapazitätsströme des Fluids 1 zu Fluid 2	-
Ra	<i>Rayleighzahl</i>	-
Re	<i>Reynoldszahl</i>	-
S	Struhal Zahl	-
s_1	Rohrabstand senkrecht zur Anströmung	m
s_2	Rohrabstand parallel zur Anströmung	m
s	Rippendicke, Wandstärke	m
T	absolute Temperatur	K
T_i	dimensionslose Temperatur	-
t	Zeit	s
t_R	Abstand der Rippen	m
V	Volumen	m^3
$\dot{W} = \dot{m} \cdot c_p$	Wärmekapazitätsstrom	W/K
X	Hilfsgröße zur Charakterisierung der Rippen	-
x, y, z	Ortskoordinaten	m
α_x	lokale Wärmeübergangszahl	$W/(m^2\ K)$
α	mittlere Wärmeübergangszahl	$W/(m^2\ K)$
α	Absorptionsverhältnis, Absorptionskonstante	-
β	Wärmedehnungskoeffizient	$1/T$
β^0	Randwinkel	°
δ	Dicke des Kondensatfilms	m
δ_ϑ	Temperaturgrenzschichtdicke	m
ε	Emissionsverhältnis	-
$\Delta\vartheta$	Temperaturdifferenz	K
$\Delta\vartheta_{gr}, \Delta\vartheta_{kl}$	größere bzw. kleinere Temperaturdifferenz am Ein- bzw. Austritt	K

$\Delta\vartheta_m$	mittlere logarithmische Temperaturdifferenz	K
ϑ	Celsiustemperatur	°C
ϑ', ϑ''	Ein- bzw. Austrittstemperatur	°C
Θ	dimensionslose Temperatur	-
η_{Ri}	Rippenwirkungsgrad	-
η	dynamische Viskosität	kg/(m s)
ν	kinematische Viskosität	m ² /s
ν	Frequenz	1/s
λ	Wärmeleitfähigkeit	W/(m K)
λ	Wellenlänge	m
ρ	Dichte	kg/m ³
σ	Oberflächenspannung	N/m
σ	<i>Stefan-Boltzmann</i> -Konstante	$5,6696 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$
τ	Schubspannung	N/m ²
Ψ	Hohlraumanteil	-
ξ	Rohrreibungszahl	-

Indizes

1, 2, ..	Hinweis auf den Zustand, den Zustandspunkt oder das Fluid
12, 23, ...	zur Zustandsänderung von 1 nach 2 gehörende Prozessgröße
<i>A</i>	Anfangszustand bei instationärer Wärmeleitung zur Zeit $t = 0$
<i>A</i>	Auftrieb
<i>a</i>	Austritt, außen
<i>e</i>	Eintritt
<i>f</i>	Fluid
<i>f</i> 1, <i>f</i> 2	Fluid 1, Fluid 2
<i>g</i>	Gas
<i>i</i>	innen
<i>l</i>	Flüssigkeit
<i>lam</i>	laminar
<i>m</i>	mittlerer Wert
<i>m</i>	Mitte
<i>max</i>	maximal
<i>n</i>	Normalkomponente eines Vektors
<i>O</i>	Oberfläche
<i>r</i>	Radialkomponente eines Vektors
<i>Ri</i>	Rippe
<i>s</i>	schwarzer Körper
<i>turb</i>	turbulent
<i>W</i>	Wand
<i>x</i>	lokale Werte am Ort x
<i>x, y, z</i>	x -, y - und z -Komponente eines Vektors

1 Einleitung und Definitionen

Die Wärmeübertragung ist ein Teilgebiet der Wärmelehre. Sie beschreibt die Gesetzmäßigkeiten, nach denen der Transport von Wärme zwischen Systemen unterschiedlicher Temperatur erfolgt. In der Thermodynamik werden Wärmeströme und Wärme, die von einem System zum anderen zu- oder abgeführt werden, als gegebene Prozessgrößen angenommen. Dabei bleibt unberücksichtigt, wie die Wärme übertragen wird und auf Grund welcher Gesetzmäßigkeiten die Quantität der transferierten Wärme entsteht. Die Wärmeübertragung behandelt die Mechanismen, die die Größe des Wärmestromes bzw. der übertragenen Wärme bei den vorhandenen Temperaturdifferenzen und sonstigen physikalischen Bedingungen bestimmen. Bei der Behandlung der Wärmeübertragung werden die in der Thermodynamik verwendeten Begriffe System und Kontrollraum [1.1] benutzt. Ein System kann ein Stoff, ein Körper oder eine Kombination mehrerer Stoffe und Körper sein, das zu einem anderen System Wärme transferiert oder von dort Wärme erhält.

Hier stellen sich folgende Fragen:

- Was ist Wärmeübertragung?
- Wozu benötigt man Wärmeübertragung?

Wärmeübertragung ist der Transfer der Energieform Wärme auf Grund einer Temperaturdifferenz.

Besteht innerhalb eines Systems oder zwischen zwei Systemen, die miteinander in thermischem Kontakt sind, eine Temperaturdifferenz, findet Wärmeübertragung statt.

Wozu man Wärmeübertragung benötigt, kann man am Beispiel eines Heizkörpers erklären. Um eine bestimmte Raumtemperatur zu erreichen, werden Heizkörper verwendet, in denen warmes Wasser strömt und sie damit einen Raum beheizen (Bild 1.1). In der Ausschreibung für die Heizkörper gibt der Architekt die Heizleistung (Wärmestrom), den Heizwassermassenstrom, die Eintrittstemperatur des warmen Heizwassers und die gewünschte Raumtemperatur an. Auf Grund dieser Daten werden entsprechende Heizkörper angeboten. Ist der gewählte Heizkörper zu klein, wird die gewünschte Raumtemperatur nicht erreicht. Der Käufer ist unzufrieden, der Heizkörper muss ausgetauscht werden. Ist er überdimensioniert, wird der Raum zu warm. In diesem Fall kann man zwar durch Drosseln des Heizwassers die gewünschte Raumtemperatur einstellen, aber der ausgewählte Heizkörper ist zu groß und damit zu teuer. Der Konkurrent mit der passenden Heizkörpergröße bot billiger und damit erfolgreich an. Durch Versuche könnte man zwar für jeden Raum

den richtigen Heizkörper ermitteln, dies wäre jedoch sehr aufwändig und unwirtschaftlich. Daher benötigt man Rechenmethoden, mit denen das optimale System ausgelegt werden kann. Für das behandelte Beispiel ist es die Aufgabe der Wärmeübertragung, mit den vorgegebenen Größen Wärmestrom, Raumtemperatur, Heizwassertemperatur und -massenstrom die richtige Dimension des Heizkörpers zu bestimmen.

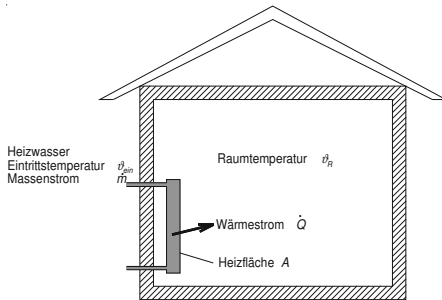


Bild 1.1: Auslegung des Heizkörpers

Zur Auslegung von Apparaten und Anlagen, in denen Wärme transferiert wird, ist in der Praxis neben anderen technischen Wissenschaften (Thermodynamik, Fluidmechanik, Mechanik, Werkstoffkunde usw.) die Wärmeübertragung notwendig. Dabei ist man stets bestrebt, die Produkte zu optimieren und zu verbessern. Wesentlich dafür ist:

- Die Erhöhung des Wirkungsgrades
- der optimale Einsatz der Energieressourcen
- das Erreichen minimaler Umweltbelastungen
- die Optimierung der totalen Kosten.

Um diese Ziele zu erreichen, müssen die Wärmeübertragungsvorgänge möglichst genau bekannt sein.

Um einen Wärmeübertrager oder eine komplette Anlage, in der Wärmetransfer stattfindet, so auszulegen, dass bei günstigsten Gesamtkosten ein möglichst hoher Wirkungsgrad erreicht wird, benötigt man genaue Kenntnisse der Wärmeübertragung.

Tabelle 1.1 listet die Anwendungsgebiete der Wärmeübertragung auf.

Tabelle 1.1: Anwendungsgebiete der Wärmeübertragung

- Heizungs-, Lüftungs- und Klimaanlage
- thermische Kraftwerke
- Kältemaschinen und Wärmepumpen
- Gastrennung und -verflüssigung
- Kühlung von Maschinen
- Prozesse, die Kühlung oder Heizung benötigen
- Erwärmung von Werkstücken
- Rektifikations- und Destillationsanlagen
- Wärme- und Kälteisolation
- solarthermische Systeme
- Verbrennungsanlagen

1.1 Arten der Wärmeübertragung

In den meisten Lehrbüchern wird trotz gegenteilig gesicherter Erkenntnisse von vier Arten der Wärmeübertragung berichtet: Wärmeleitung, freie Konvektion, erzwungene Konvektion und Strahlung. In [1.2] wird auf die von *Nußelt* [1.3] in 1915 postulierte Tatsache, dass es nur zwei Arten der Wärmeübertragung gibt, hingewiesen. In dem Aufsatz von *Nußelt* heißt es:

“Es wird vielfach in der Literatur behauptet, die Wärmeabgabe eines Körpers habe drei Ursachen: die Strahlung, die Wärmeleitung und die Konvektion.

Diese Teilung der Wärmeabgabe in Leitung und Konvektion erweckt den Anschein, als hätte man es mit zwei unabhängigen Erscheinungen zu tun. Man muss daraus schließen, dass Wärme auch durch Konvektion ohne Mitwirkung der Leitung übertragen werden könnte. Dem ist aber nicht so.”

Die Wärmeübertragung kann durch Wärmeleitung und Strahlung erfolgen.

Bild 1.2 demonstriert die zwei Arten der Wärmeübertragung.

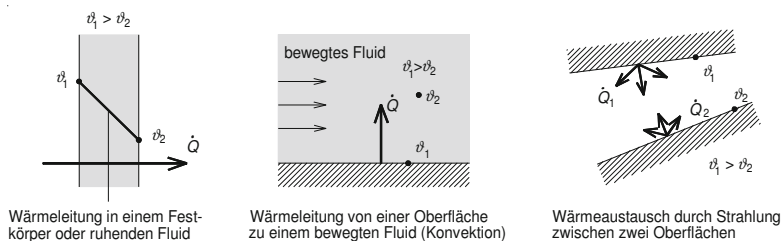


Bild 1.2: Arten der Wärmeübertragung

1. *Wärmeleitung* entsteht in Stoffen, wenn in ihnen ein Temperaturgradient vorhanden ist. Bezüglich der Berechnung wird zwischen ruhenden Stoffen (feste Stoffe oder ruhende Fluide) und strömenden Fluiden unterschieden. Bei der Wärmeleitung in ruhenden Stoffen ist die Wärmeübertragung nur vom Temperaturgradienten und den Stoffeigenschaften abhängig.

Bei der Wärmeübertragung zwischen einer festen Wand und einem strömenden Fluid erfolgt durch Wärmeleitung ein Wärmetransport zwischen Wand und Fluid. Außerdem transportiert das bewegte Fluid in der Strömung Enthalpie. Bestimmend für die Wärmeübertragung sind Wärmeleitung und Temperaturgrenzschicht des Fluids, wobei Letztere von der Strömung beeinflusst wird. Zur Unterscheidung der Berechnung nennt man die Wärmeübertragung zwischen einer Wand und einem strömenden Fluid Wärmeübertragung bei *Konvektion* oder kurz nur Konvektion. Hier wird zwischen *freier Konvektion* und *erzwungener Konvektion* unterschieden. Bei freier Konvektion entsteht die Strömung durch Temperatur- und damit verbundene Dichteunterschiede im Fluid, bei erzwungener Konvektion durch einen äußeren Druckunterschied.

2. *Strahlung* erfolgt ohne stoffliche Träger. Die Wärme wird durch elektromagnetische Wellen von einer Oberfläche zu einer anderen Oberfläche transferiert.

Bei den in Bild 1.2 aufgeführten Beispielen ist die Temperatur ϑ_1 größer als ϑ_2 , somit fließt der Wärmestrom in Richtung der Temperatur ϑ_2 . Bei der Strahlung emittieren beide Oberflächen einen Wärmestrom, wobei jener von der Oberfläche mit höherer Temperatur ϑ_1 größer ist.

Wärmeübertragung erfolgt oft durch eine Kombination von Wärmeleitung mit oder ohne Konvektion und Strahlung. In vielen Fällen können einzelne Mechanismen als vernachlässigbar von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Im Beispiel des Heizkörpers erfolgt die Wärmeübertragung zwischen dem warmen Wasser und der Innenwand durch Wärmeleitung an einem bewegten Fluid, d.h. durch Konvektion. Je nach Bauart des Heizkörpers kann dabei die Wärmeleitung bei freier bzw. erzwungener Konvektion oder der Kombination beider auftreten. Wärmeübertragung durch die Wand des Heizkörpers erfolgt durch Wärmeleitung. Die Wände des Heizkörpers geben durch Wärmeleitung bei freier Konvektion und Strahlung Wärme an den Raum ab.

Die Übertragungsmechanismen der verschiedenen Wärmeübertragungsarten unterliegen unterschiedlichen physikalischen Gesetzmäßigkeiten und werden daher getrennt behandelt.

1.2 Definitionen

Die zur Beschreibung der Wärmeübertragung notwendigen Größen werden hier erklärt.

Bei der Temperatur wird für die Celsius-Temperatur das Symbol ϑ , für die Absoluttemperatur das Symbol T verwendet.

1.2.1 Wärmestrom und Wärmestromdichte

Die Bestimmung des *Wärmestromes* \dot{Q} ist eine der Aufgaben der Wärmeübertragung.

Der Wärmestrom gibt an, wie viel Wärme pro Zeiteinheit übertragen wird.

Die Einheit des Wärmestromes ist Watt W.

Eine weitere wichtige Größe ist die *Wärmestromdichte* $\dot{q} = \dot{Q}/A$, die angibt, welcher Wärmestrom pro Flächeneinheit übertragen wird. Ihre Einheit ist W/m².

1.2.2 Wärmeübergangszahl und Wärmedurchgangszahl

Die Definition der Größen, die wir für die Bestimmung des Wärmestromes aus vorhandener Temperaturdifferenz und Geometrie benötigen, wird am Beispiel eines Wärmeübertragers (Bild 1.3) vorgenommen. Der Wärmeübertrager besteht aus einem Rohr, das von einem zweiten, konzentrisch angeordneten Rohr umhüllt ist. In das innere Rohr strömt ein Fluid mit der Temperatur ϑ_1' ein und wird dort auf die Temperatur ϑ_1'' erwärmt. Im äußeren Ringraum strömt ein zweites wärmeres Fluid mit der Temperatur ϑ_2' ein und wird dort auf die Temperatur ϑ_2'' abgekühlt. Ohne dass hier auf die Wärmeübertragungsmechanismen eingegangen wird, sind im Folgenden die Größen für die Wärmeübertragung definiert.

Bild 1.3 zeigt den Temperaturverlauf in den Fluiden und in der Wand eines Wärmeübertragers.

Die Größe des übertragenen Wärmestromes wird durch die *Wärmeübergangszahl* α , die Übertragungsfläche dA und die Temperaturdifferenz bestimmt.

Die Wärmeübergangszahl gibt an, welcher Wärmestrom pro Flächeneinheit und pro Grad Temperaturdifferenz übertragen wird.

Die Einheit der Wärmeübergangszahl ist W/(m² K).

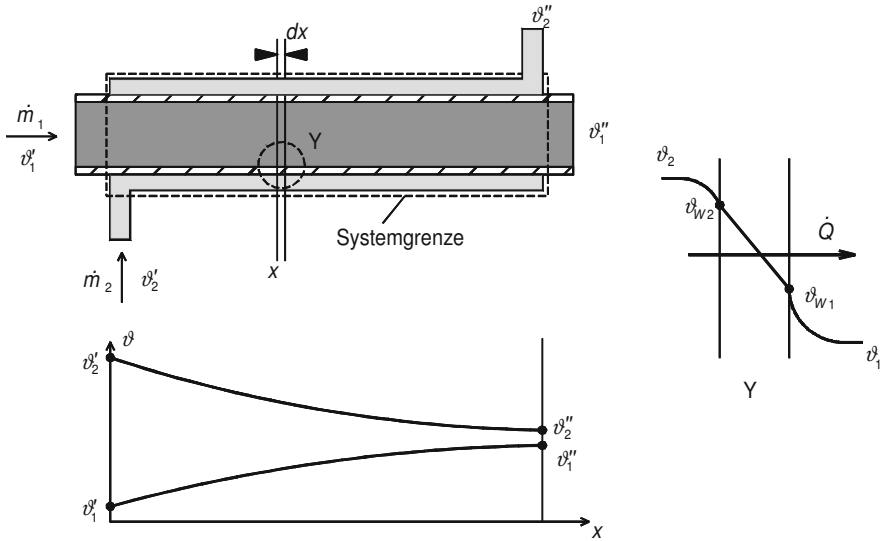


Bild 1.3: Temperaturverlauf in einem Wärmeübertrager

Mit der Definition der Wärmeübergangszahl ist der Wärmestrom durch ein Flächenelement dA gleich:

$$\delta \dot{Q}_2 = \alpha_2 \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_{w2}) \cdot dA_2 \quad (1.1)$$

$$\delta \dot{Q}_1 = \alpha_1 \cdot (\vartheta_{w1} - \vartheta_1) \cdot dA_1 \quad (1.2)$$

$$\delta \dot{Q}_w = \alpha_w \cdot (\vartheta_{w2} - \vartheta_{w1}) \cdot dA_w \quad (1.3)$$

Dabei ist $\delta \dot{Q}$ ein inexactes Differential, weil die Integration je nach Art der Wärmeübertragung unterschiedliche Werte annehmen kann.

Das Integral von $\delta \dot{Q}$ ist \dot{Q}_{12} und nicht $\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1$.

Die Temperaturdifferenzen wurden hier so gewählt, dass der Wärmestrom stets positiv ist. Ist der Wärmeübertrager der Umgebung gegenüber thermisch vollständig isoliert, muss der Wärmestrom, den Fluid 2 abgibt, gleich groß wie der Wärmestrom sein, der vom Fluid 1 aufgenommen wird; er muss jedoch auch gleich wie der Wärmestrom sein, der die Wand des Rohres passiert.

$$\delta \dot{Q}_1 = \delta \dot{Q}_2 = \delta \dot{Q}_w = \delta \dot{Q} \quad (1.4)$$

In den meisten Fällen kennt man die Wandtemperaturen nicht. Es ist von Interesse, den Wärmestrom, der vom Fluid 2 auf Fluid 1 übertragen wird, zu bestimmen. Dieses kann mit Hilfe der *Wärmedurchgangszahl* k erfolgen. Sie hat die gleiche Dimension wie die Wärmeübergangszahl.

$$\delta \dot{Q} = k \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot dA \quad (1.5)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1.1) bis (1.5) kann der Zusammenhang zwischen den Wärmeübergangszahlen und der Wärmedurchgangszahl bestimmt werden. Dabei muss man aber berücksichtigen, dass die Flächen bei gewölbten Wänden auf der Innen- und Außenseite unterschiedlich groß sein können. Die Bestimmung der Wärmedurchgangszahlen erfolgt in den nächsten Kapiteln.

Es ist Aufgabe der Wärmeübertragung, die Wärmeübergangszahlen in Abhängigkeit von Stoffeigenschaften, Temperaturen und Strömungsbedingungen zu bestimmen.

1.2.3 Kinetische Kopplungsgleichungen

Die Gleichungen (1.1) bis (1.3) und (1.5) geben den Wärmestrom als eine Funktion der Wärmeübergangszahl oder Wärmedurchgangszahl, der Austauschfläche und der Temperaturdifferenz an. Sie werden *kinetische Kopplungsgleichungen* genannt.

Kinetische Kopplungsgleichungen definieren den Wärmestrom, der bei einer Wärmeübergangs- bzw. Wärmedurchgangszahl über die Übertragungsfläche pro Kelvin Temperaturdifferenz transferiert werden kann.

1.2.4 Mittlere Temperaturdifferenz

Sind die Wärmeübergangszahlen bekannt, kann an jeder Stelle des in Bild 1.3 gezeigten Wärmeübertragers der transferierte Wärmestrom bestimmt werden. In der Technik ist aber nicht der lokale, sondern der insgesamt im Wärmeübertrager transferierte Wärmestrom von Interesse. Um den gesamten Wärmestrom zu bestimmen, muss über der Fläche des Wärmeübertragers integriert werden und man erhält:

$$\dot{Q} = \int_0^A k \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot dA \quad (1.6)$$

Die Änderung der Temperaturen über das Flächenelement dA des Wärmeübertragers kann aus den Energiebilanzgleichungen (s. Kap. 1.2.5) bestimmt werden.

$$\delta \dot{Q} = \dot{m}_1 \cdot dh_1 = \dot{m}_1 \cdot c_{p1} \cdot d\vartheta_1 \quad (1.7)$$

$$\delta \dot{Q} = -\dot{m}_2 \cdot dh_2 = -\dot{m}_2 \cdot c_{p2} \cdot d\vartheta_2 \quad (1.8)$$

Die Temperaturdifferenz $\vartheta_2 - \vartheta_1$ wird durch $\Delta\vartheta$ ersetzt. Die Änderung der Temperaturdifferenz berechnet man aus der Änderung der Fluidtemperaturen.

$$d\Delta\vartheta = d\vartheta_2 - d\vartheta_1 = -\delta\dot{Q} \cdot \left(\frac{1}{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}} + \frac{1}{\dot{m}_2 \cdot c_{p2}} \right) \quad (1.9)$$

Gl. (1.9) in Gl. (1.5) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{d\Delta\vartheta}{\Delta\vartheta} = -k \cdot \left(\frac{1}{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}} + \frac{1}{\dot{m}_2 \cdot c_{p2}} \right) \cdot dA \quad (1.10)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Wärmedurchgangszahl, die Flächen und die spezifischen Wärmekapazitäten konstant sind, kann Gl. (1.10) integriert werden. Diese Voraussetzung wird jedoch nie exakt erfüllt. In der Praxis bewährte sich, für die erwähnten Größen mittlere Werte einzusetzen. Aus der Integration erhalten wir:

$$\ln \left(\frac{\vartheta'_2 - \vartheta'_1}{\vartheta''_2 - \vartheta''_1} \right) = k \cdot A \cdot \left(\frac{1}{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}} + \frac{1}{\dot{m}_2 \cdot c_{p2}} \right) \quad (1.11)$$

Für die gewählten Voraussetzungen können die Gleichungen (1.7) und (1.8) ebenfalls integriert werden.

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 \cdot c_{p1} \cdot (\vartheta'_1 - \vartheta'_2) \quad (1.12)$$

$$\dot{Q} = \dot{m}_2 \cdot c_{p2} \cdot (\vartheta''_2 - \vartheta''_1) \quad (1.13)$$

In Gl. (1.11) können die Massenströme und spezifischen Wärmekapazitäten durch den Wärmestrom und die Fluidtemperaturen am Ein- und Austritt des Wärmeübertragers ersetzt werden. Nach Umformung erhält man:

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \frac{\vartheta'_2 - \vartheta'_1 - \vartheta''_2 + \vartheta''_1}{\ln \frac{\vartheta'_2 - \vartheta'_1}{\vartheta''_2 - \vartheta''_1}} = k \cdot A \cdot \Delta\vartheta_m \quad (1.14)$$

Die Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_m$ ist für die Bestimmung des Wärmestromes in einem Wärmeübertrager maßgebend. Sie heißt mittlere logarithmische Temperaturdifferenz oder mittlere Temperaturdifferenz und ist die integrierte mittlere Temperaturdifferenz des Wärmeübertragers.

Die hier hergeleitete mittlere Temperaturdifferenz gilt für den in Bild 1.3 dargestellten Spezialfall. Für Wärmeübertrager, in denen die Fluide in gleicher oder entgegengesetzter Richtung parallel strömen, kann die mittlere Temperaturdifferenz als allgemein gültig angegeben werden. Dazu benötigt man die Temperaturdifferenzen am Ein- und Austritt des Wärmeübertragers. Die größere Temperaturdifferenz wird mit $\Delta\vartheta_{gr}$, die kleinere mit $\Delta\vartheta_{kl}$ bezeichnet.

$$\Delta\vartheta_m = \frac{\Delta\vartheta_{gr} - \Delta\vartheta_{kl}}{\ln(\Delta\vartheta_{gr} / \Delta\vartheta_{kl})} \quad \text{für } \Delta\vartheta_{gr} - \Delta\vartheta_{kl} \neq 0 \quad (1.15)$$

Sind die Temperaturdifferenzen am Ein- und Austritt gleich groß, ist Gl. (1.15) unbestimmt. Für diesen Fall gilt:

$$\Delta\vartheta_m = (\Delta\vartheta_{gr} + \Delta\vartheta_{kl}) / 2 \quad \text{für } \Delta\vartheta_{gr} - \Delta\vartheta_{kl} = 0 \quad (1.16)$$

Die mittleren Temperaturdifferenzen für Wärmeübertrager, in denen die Fluide senkrecht zueinander strömen, werden später behandelt.

1.2.5 Energiebilanzgleichung

Bei der Wärmeübertragung gilt der erste Hauptsatz der Thermodynamik uneingeschränkt. In den meisten praktischen Fällen der Wärmeübertragung sind die mechanische Arbeit und die Änderung der kinetischen und potentiellen Energie vernachlässigbar, daher werden sie bei den hier behandelten Problemen nicht berücksichtigt. Damit vereinfacht sich die Energiebilanzgleichung [1.1] zu:

$$\frac{dE_{KV}}{dt} = \dot{Q}_{KV} + \sum_e \dot{m}_e \cdot h_e - \sum_a \dot{m}_a \cdot h_a \quad (1.17)$$

Meist ist bei Wärmeübertragungsproblemen nur ein Massenstrom, welcher in den Kontrollraum hinein- und herausströmt, vorhanden. Die Änderung der Enthalpie und Energie des Kontrollraumes kann als eine Funktion der Temperatur angegeben werden. Der Wärmestrom wird über die Systemgrenze dem Kontrollraum zu- bzw. abgeführt oder er stammt aus einer Wärmequelle (z. B. elektrische Heizung, chemische Reaktion usw.) innerhalb des Kontrollraumes. Gl. (1.17) wird in einer für die Wärmeübertragung gebräuchlichen Form angegeben:

$$V_{KV} \cdot \rho \cdot c_p \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{Q}_{12} + \dot{Q}_{Quelle} + \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) \quad (1.18)$$

Dabei ist \dot{Q}_{12} der Wärmestrom, der bei der Zustandsänderung über die Systemgrenzen dem System zu- oder abgeführt wird und \dot{Q}_{Quelle} der Wärmestrom aus einer Wärmequelle. Für stationäre Vorgänge wird die linke Seite der Gleichung zu null, und es gilt:

$$\dot{Q}_{12} + \dot{Q}_{Quelle} = \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) = \dot{m} \cdot c_p \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad (1.19)$$

Die Gleichungen (1.18) und (1.19) werden *Energiebilanzgleichungen* oder kurz auch *Bilanzgleichungen* genannt.

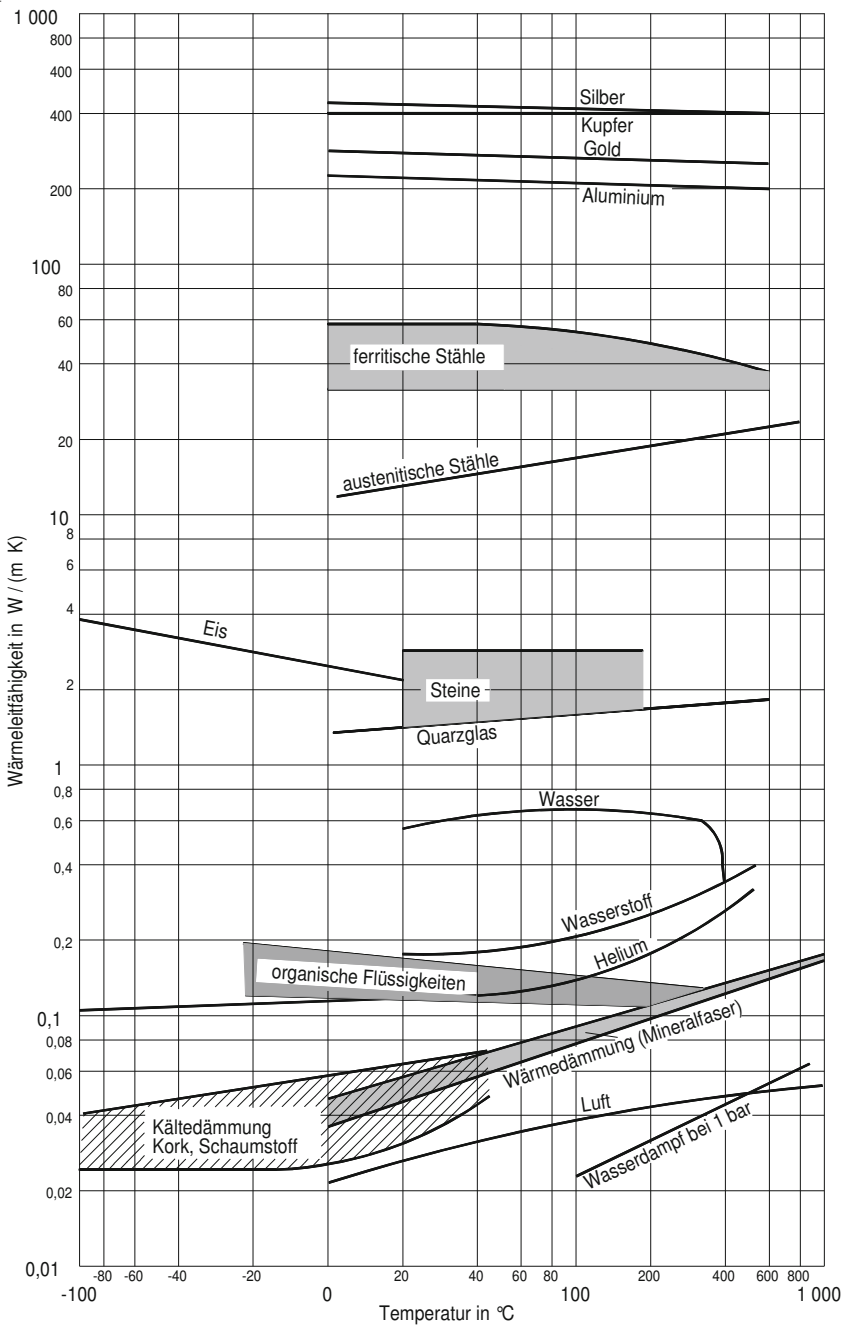


Bild 1.4: Wärmeleitfähigkeit verschiedener Stoffe in Abhängigkeit der Temperatur [1.5]

1.2.6 Wärmeleitfähigkeit

Die *Wärmeleitfähigkeit* λ ist eine Stoffeigenschaft, die angibt, welcher Wärmestrom pro Längeneinheit des Materials in Richtung des Wärmestromes und pro Grad Temperaturdifferenz übertragen werden kann.

Sie hat die Dimension $W/(m \cdot K)$. Die Wärmeleitfähigkeit eines Stoffes hängt von der Temperatur und dem Druck ab.

Gute elektrische Leiter sind auch gute Wärmeleiter. Damit haben Metalle eine sehr hohe Wärmeleitfähigkeit, Flüssigkeiten eine kleinere. Gase sind "schlechte" Wärmeleiter, wobei der Ausdruck "schlecht" ungünstig gewählt ist, weil bei thermischen Isolationen eine möglichst niedrige Wärmeleitung erwünscht, also "gut" ist.

In Bild 1.4 sind die Wärmeleitfähigkeiten verschiedener Materialien über der Temperatur aufgetragen.

Die Wärmeleitfähigkeit fester und flüssiger Stoffe hat bei mittleren und hohen Temperaturen eine relativ schwache Temperaturabhängigkeit, so dass bei nicht zu großen Temperaturänderungen mit einer konstanten mittleren Wärmeleitfähigkeit gerechnet werden darf.

1.3 Problemlösungsmethodik

Dieses Kapitel wurde mit kleinen Änderungen [1.5] entnommen. Zur Lösung von Problemen der Wärmeübertragung sind meist, direkt oder indirekt, folgende Grundgesetze erforderlich:

- Gesetz von *Fourier*
- Wärmeübertragungsgesetze
- Massenerhaltungssatz
- Energieerhaltungssatz, erster Hauptsatz der Thermodynamik
- Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik
- Zweites *Newton'sches* Gesetz
- Impulssatz
- Ähnlichkeitsgesetze
- Reibungsgesetze

Für den Ingenieur in der Praxis geht es neben der Beherrschung der Grundlagen auch um die Frage der *Methodik*, wie diese Grundlagen und insbesondere die oben genannten Grundgesetze bei konkreten Problemstellungen angewendet werden. Es ist wichtig, dass man sich eine systematische Arbeitsweise aneignet. Diese besteht im Wesentlichen stets aus den nachfolgend angegebenen 6 Schritten, die sich in der Praxis bewährt haben und deshalb sehr empfohlen werden.

Schritt 1: Was ist gegeben?

Analysieren Sie, was über die Problemstellung bekannt ist. Legen Sie alle Größen, die gegeben oder die für weitere Überlegungen notwendig sind, fest.

Schritt 2: Was wird gesucht?

Zusammen mit Schritt 1 überlegen Sie, welche Größen zu bestimmen und welche Fragen zu beantworten sind.

Schritt 3: Wie ist das System definiert?

Zeichnen Sie das System in Form eines Schemas auf und entscheiden Sie, welche Systemgrenze für die Analyse geeignet ist.

- Systemgrenze(n) klar festlegen!

Identifizieren Sie die *Wechselwirkungen* zwischen Systemen und Umgebung. Stellen Sie fest, welche *Zustandsänderungen* oder *Prozesse* das System durchläuft bzw. in ihm ablaufen.

- Erstellen Sie klare Systemschemata und Zustandsdiagramme!

Schritt 4: Annahmen

Überlegen Sie, wie das System möglichst einfach modelliert werden kann; machen Sie *vereinfachende Annahmen*. Stellen Sie die Randbedingungen und Voraussetzungen fest.

Überlegen Sie, ob *Idealisierungen* zulässig sind: z.B. ideales Gas statt reales Gas, vollständige Wärmeisolierung statt Wärmeverluste und reibungsfrei statt reibungsbehaftet.

Schritt 5: Analyse

Beschaffen Sie die erforderlichen *Stoffdaten*. Die Stoffwerte finden Sie im Anhang. Falls dort nicht vorhanden, muss in der Literatur gesucht werden (z.B. VDI-Wärmeatlas [1.7]).

Unter Berücksichtigung der Idealisierungen und Vereinfachungen formulieren Sie die *Bilanz-* und *kinetischen Kopplungsgleichungen*.

Empfehlung: Arbeiten Sie so lange wie möglich mit funktionalen Größen, bevor Sie Zahlenwerte einsetzen.

Prüfen Sie die Beziehungen und Daten auf *Dimensionsrichtigkeit*, bevor Sie numerische Berechnungen durchführen.

Prüfen Sie die Richtigkeit der Ergebnisse bzw. Größenordnung und Vorzeichen.

Schritt 6: Diskussion

Diskutieren Sie die Resultate/Schlüsselaspekte, halten Sie Hauptergebnisse und Zusammenhänge fest.

Von besonderer Bedeutung sind die Schritte 3 und 4. Schritt 3 trägt grundlegend zur Klarheit des Vorgehens insgesamt bei, Schritt 4 legt weitgehend die Qualität und den Gültigkeitsbereich der Ergebnisse fest.

Die Lösung der behandelten Musterbeispiele erfolgt nach obiger Methodik. Die Aufgabenstellungen sind jeweils derart formuliert, dass die Punkte 1 und 2 eindeutig gegeben sind und daher sofort mit Punkt 3 begonnen werden kann.

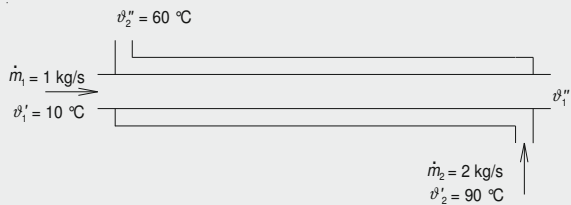
BEISPIEL 1.1: Bestimmung des Wärmestromes, der Temperatur und Übertragungsfläche

In einem Wärmeübertrager, bestehend aus einem Rohr, das in einem zweiten Rohr konzentrisch angeordnet ist, strömt auf beiden Seiten Wasser. Im inneren Rohr ist der Massenstrom 1 kg/s , die Eintrittstemperatur beträgt 10°C . In dem um das Rohr gebildeten Ringspalt ist der Massenstrom 2 kg/s . Das dort strömende Wasser wird von 90°C auf 60°C abgekühlt. Die Strömung im Ringspalt ist entgegengesetzt zur Strömung im Rohr. Die Wärmedurchgangszahl des Wärmeübertragers wurde mit $4000 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ermittelt. Die spezifische Wärmekapazität des Wassers im Rohr ist $4,182 \text{ kJ}/(\text{kg K})$, im Ringspalt $4,192 \text{ kJ}/(\text{kg K})$.

Bestimmen Sie den Wärmestrom, die Austrittstemperatur des Wassers aus dem Rohr und die notwendige Austauschfläche.

Lösung

Schema Siehe Skizze



Annahmen

- Der Wärmeübertrager gibt nach außen keine Wärme ab.
- Der Vorgang ist stationär.

Analyse

Der Wärmestrom des im Ringspalt strömenden Wassers kann mit Gl. (1.19) bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \dot{m}_2 \cdot c_{p2} \cdot (\vartheta_2' - \vartheta_2'') = \\ &= 2 \cdot \text{kg/s} \cdot 4192 \cdot \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \cdot (90 - 60) \cdot \text{K} = \mathbf{251,52 \text{ kW}}\end{aligned}$$

Die Austrittstemperatur des Wassers aus dem Rohr ist ebenfalls mit Gl. (1.19) zu berechnen.

$$\vartheta_1'' = \vartheta_1' + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}} = 10 \text{ °C} + \frac{251,520 \text{ kW}}{1 \cdot \text{kg/s} \cdot 4,182 \cdot \text{kJ/(kg} \cdot \text{K)}} = \mathbf{70,1 \text{ °C}}$$

Die notwendige Austauschfläche kann mit den Gln. (1.14) und (1.15) ermittelt werden. Zuerst wird mit Gl. (1.15) die mittlere Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_m$ bestimmt. Am Eintritt des Rohres beträgt die große Temperaturdifferenz 50 K, die kleine am Austritt 19,9 K.

$$\Delta\vartheta_m = \frac{\Delta\vartheta_{gr} - \Delta\vartheta_{kl}}{\ln(\Delta\vartheta_{gr} / \Delta\vartheta_{kl})} = \frac{(50 - 19,9) \cdot \text{K}}{\ln(50/19,9)} = 32,6 \text{ K}$$

Nach Gl. (1.14) ist die notwendige Austauschfläche:

$$A = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta\vartheta_m} = \frac{251\,520 \text{ W}}{4000 \cdot \text{W/(m}^2 \cdot \text{K)} \cdot 32,6 \cdot \text{K}} = \mathbf{1,93 \text{ m}^2}$$

Diskussion

Bei bekanntem Wärmestrom kann die Berechnung der Temperaturänderung mit der Energiebilanzgleichung erfolgen. Zur Bestimmung der Austauschfläche benötigt man die kinetische Kopplung, wobei die Wärmedurchgangszahl bekannt sein muss. Aus dem Beispiel ist ersichtlich, dass mit Wasser über eine relativ kleine Fläche ein sehr großer Wärmestrom übertragen werden kann.

BEISPIEL 1.2: Bestimmung der Austrittstemperaturen

Bei dem in Beispiel 1.1 behandelten Wärmeübertrager hat sich die Eintrittstemperatur des Wassers im Rohr von 10 °C auf 25 °C verändert. Die Massenströme, Stoffwerte und Wärmeübergangszahl sind unverändert.

Zu bestimmen sind die Austrittstemperaturen und der Wärmestrom.

Lösung

Annahmen

- Im gesamten Wärmeübertrager ist die Wärmeübergangszahl konstant.
- Der Vorgang ist stationär.

Analyse

Die Gln. (1.2) bis (1.4) liefern drei unabhängige Gleichungen, mit denen die drei unbekannten, gesuchten Größen \dot{Q} , ϑ_1'' und ϑ_2'' bestimmt werden können. Die Bilanzgleichungen beider Massenströme sind:

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 \cdot c_{p1} \cdot (\vartheta_1'' - \vartheta_1') \quad \text{und} \quad \dot{Q} = \dot{m}_2 \cdot c_{p2} \cdot (\vartheta_2' - \vartheta_2'')$$

Die kinetische Kopplung ist:

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \frac{\vartheta_2'' - \vartheta_1' - (\vartheta_2' - \vartheta_1'')}{\ln \frac{\vartheta_2'' - \vartheta_1'}{\vartheta_2' - \vartheta_1''}} = k \cdot A \cdot \Delta \vartheta_m$$

Hier können die Temperaturdifferenzen im Zähler mit den Werten aus den Bilanzgleichungen eingesetzt werden. Nach Umformung erhält man:

$$\frac{\vartheta_2'' - \vartheta_1'}{\vartheta_2' - \vartheta_1''} = e^{k \cdot A \left(\frac{1}{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}} - \frac{1}{\dot{m}_2 \cdot c_{p2}} \right)} = e^{4000 \cdot 1,93 \cdot \frac{\text{W}}{\text{K}} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 4182} - \frac{1}{2 \cdot 4192} \right) \frac{\text{K}}{\text{W}}} = 2,518$$

Die Temperatur ϑ_2'' kann mit den Bilanzgleichungen als eine Funktion der Temperatur ϑ_1'' eingesetzt und die Gleichung nach ϑ_1'' aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} \vartheta_2'' &= \vartheta_2' - \frac{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}}{\dot{m}_2 \cdot c_{p2}} \cdot (\vartheta_1'' - \vartheta_1') = 90^\circ\text{C} - 0,4988 \cdot (\vartheta_1'' - 25^\circ\text{C}) = \\ &= 102,47^\circ\text{C} - 0,4988 \cdot \vartheta_1'' \end{aligned}$$

$$\vartheta_1'' = \frac{2,522 \cdot \vartheta_2' + \vartheta_1' - 102,47^\circ\text{C}}{2,0232} = \frac{2,522 \cdot 90^\circ\text{C} + 25^\circ\text{C} - 102,47^\circ\text{C}}{2,0232} = 73,9^\circ\text{C}$$

Für die Temperatur ϑ_1'' erhält man:

$$\vartheta_2'' = 102,47^\circ\text{C} - 0,4988 \cdot \vartheta_1'' = 65,6^\circ\text{C}$$

Der Wärmestrom wird aus der Bilanzgleichung bestimmt.

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 \cdot c_{p1} \cdot (\vartheta_1'' - \vartheta_1') = 1 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 4182 \cdot \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (73,9 - 25) \cdot \text{K} = 204,5 \text{ kW}$$

Diskussion

Mit den Energiebilanzgleichungen und der kinetischen Kopplung können die Austrittstemperaturen berechnet werden. Durch den Anstieg der Eintrittstemperatur des Wassers im Rohr steigt zwar auch die Austrittstemperatur an, der Wärmestrom sinkt jedoch, da Aufwärmung und mittlere Temperaturdifferenz kleiner werden.

2 Wärmeleitung in ruhenden Stoffen

Die *Wärmeleitung* ist ein Wärmetransportmechanismus, der in festen, flüssigen und gasförmigen Stoffen auftritt. Träger des Energietransports sind dabei je nach Medium Atome, Moleküle, Elektronen oder Phononen. Letztere sind Energiequanten elastischer Wellen, die in Nichtmetallen und – neben Elektronen – auch in Metallen für den Transport thermischer Energie sorgen.

Ist in einem Stoff ein Temperaturgradient vorhanden, tritt Wärmeleitung auf.

Dieses Kapitel behandelt nur die Wärmeleitung in ruhenden Stoffen. Zur Unterscheidung wird sie bei bewegten Fluiden Konvektion genannt und in den Kapiteln 3 und 4 besprochen. Bei technischen Problemen kommt Wärmeleitung in ruhenden Fluiden relativ selten vor, weil im Fluid durch die Temperaturdifferenz Dichteunterschiede verursacht werden und dadurch eine Strömung entsteht.

Erfolgt der Wärmetransport unter ständiger Aufrechterhaltung eines konstanten Wärmestromes, sind, zeitlich gesehen, die Temperaturen an jedem Ort jeweils konstant. In diesem Fall spricht man von *stationärer Wärmeleitung*. Erwärmt sich ein Körper oder kühlt er ab, da sich der Wärmestrom zeitlich ändert, verändern sich mit der Zeit die lokalen Temperaturen. Hierbei handelt es sich um *instationäre Wärmeleitung*.

2.1 Stationäre Wärmeleitung

Die Wärmestromdichte, die bei der Wärmeleitung in einem Körper durch Temperaturdifferenzen entsteht, wird nach dem Gesetz von *Fourier* folgendermaßen definiert:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \nabla \vartheta = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dr} \quad (2.1)$$

Die Ortskoordinate ist dabei r . Die Wärmestromdichte ist proportional zur Wärmeleitfähigkeit des Stoffes und zum *Temperaturgradienten*, zu dem sie stets entgegengesetzt gerichtet ist. Nach Gl. (2.1) ist der Vektor Wärmestromdichte senkrecht zur isothermen Fläche. Alternativ kann das Gesetz von *Fourier* daher auch in folgender Form angegeben werden:

$$\dot{q}_n = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dn} \quad (2.2)$$

Dabei ist \dot{q}_n die auf die Austauschfläche senkrecht auftreffende Komponente der Wärmestromdichte, n die Normalkomponente des Ortsvektors.

Der Wärmestrom, der durch die Querschnittsfläche eines Körpers fließt, ist:

$$\dot{Q} = \int_A \dot{q}_n \cdot dA \quad (2.3)$$

Da die Wärmeleitfähigkeit eine Funktion der Temperatur und die Querschnittsfläche A je nach Form des Körpers eine mehr oder minder komplizierte Funktion der Ortskoordinate ist, kann die Lösung des Integrals sehr kompliziert oder gar unmöglich sein. Für viele technische Anwendungen wird die Wärmeleitfähigkeit mit einem Mittelwert als konstant angenommen. In Körpern mit einfachen geometrischen Formen kann der Wärmestrom mit Gl. (2.3) bestimmt werden.

2.1.1 Wärmeleitung in einer ebenen Wand

Bild 2.1 zeigt eine ebene Wand der Dicke s mit der Wärmeleitfähigkeit λ . An den Seiten ist sie thermisch isoliert. Da Wärme nur in die x -Richtung transportiert werden kann, handelt es sich hier um ein eindimensionales Problem. Die Querschnittsfläche A der Wand, durch die der Wärmestrom fließt, ist konstant, dadurch auch die Wärmestromdichte. Somit gilt:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \quad (2.4)$$

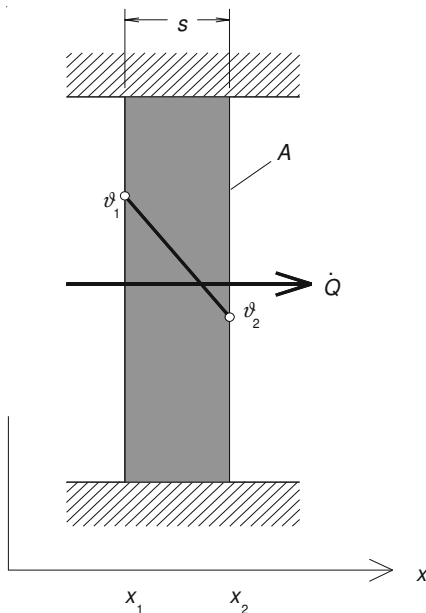


Bild 2.1: Wärmeleitung in einer ebenen Wand

Sind die Wände an den Schmalseiten infolge der idealen thermischen Isolation adiabatisch, kann hier kein Wärmestrom entweichen. Ist zudem die Wärmeleitfähigkeit von Ort und Temperatur unabhängig, fließt der Wärmestrom nur in x -Richtung. Damit kann Gl. (2.4) integriert werden.

$$\int_{x_1}^{x_2} \dot{Q} \cdot dx = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} -\lambda \cdot A \cdot d\vartheta \quad (2.5)$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{x_2 - x_1} \cdot A \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) = \frac{\lambda}{s} \cdot A \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (2.6)$$

In einer ebenen Wand mit konstanter Wärmeleitfähigkeit ist der Temperaturgradient linear. Aus der Definition der Wärmeübergangszahl folgt:

$$\alpha = \lambda / s \quad (2.7)$$

Die Wärmeübergangszahl in einer ebenen Wand ist Wärmeleitfähigkeit geteilt durch die Wanddicke.

Soll, wie in Bild 2.1 dargestellt, die Temperatur an beiden Seiten der Wand aufrechterhalten werden, muss aus irgendeiner Quelle der konstante Wärmestrom erzeugt und von einer anderen Quelle aufgenommen werden. Dieses könnte z.B. auf der einen Seite ein wärmeres, strömendes Fluid, das den Wärmestrom liefert, auf der anderen Seite ein kälteres, strömendes Fluid, das den Wärmestrom aufnimmt, sein. Das ist bei einem Wärmeübertrager der Fall, in dem durch eine feste Wand von einem Fluid 1 zu einem anderen Fluid 2 Wärme transferiert wird. Bild 2.2 zeigt die Wand eines Wärmeübertragers, in dem ein Wärmestrom von einem strömenden Fluid mit der Temperatur ϑ_{f1} und Wärmeübergangszahl α_{f1} zu einem anderen strömenden Fluid mit der Temperatur ϑ_{f2} und Wärmeübergangszahl α_{f2} transferiert wird.

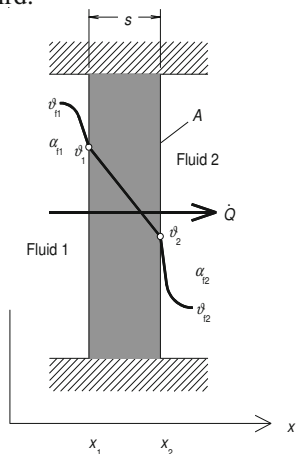


Bild 2.2: Zur Bestimmung der Wärmedurchgangszahl

Wie aus der Definition der Wärmeübergangszahl bekannt ist, bestimmt sie den bei einer Temperaturdifferenz transferierten Wärmestrom. Für die Beschreibung der Wärmeströme (vom Fluid 1 zur Wand, durch die Wand und von der Wand zum Fluid 2) gelten die kinetischen Kopplungsgleichungen.

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= A \cdot \alpha_{f1} \cdot (\vartheta_{f1} - \vartheta_1) \\ \dot{Q} &= A \cdot \alpha_w \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) \\ \dot{Q} &= A \cdot \alpha_{f2} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_{f2})\end{aligned}\tag{2.8}$$

Mit der Wärmedurchgangszahl kann der Wärmestrom vom Fluid 1 zum Fluid 2 direkt bestimmt werden.

$$\dot{Q} = A \cdot k \cdot (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2})\tag{2.9}$$

Zur Berechnung der Wärmedurchgangszahl werden die Wandtemperaturen ϑ_1 und ϑ_2 aus Gl. (2.8) bestimmt.

$$\vartheta_1 = \vartheta_{f1} - \frac{\dot{Q}}{A \cdot \alpha_{f1}} \quad \vartheta_2 = \vartheta_{f2} + \frac{\dot{Q}}{A \cdot \alpha_{f2}}\tag{2.10}$$

Damit erhalten wir:

$$\dot{Q} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{1}{\alpha_w} + \frac{1}{\alpha_{f2}} \right) = A \cdot (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2})\tag{2.11}$$

Der Kehrwert der Wärmedurchgangszahl ergibt sich zu:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{1}{\alpha_w} + \frac{1}{\alpha_{f2}}\tag{2.12}$$

Der Kehrwert der Wärmedurchgangszahl ist die Summe der Kehrwerte der Wärmeübergangszahlen.

Die Kehrwerte der Wärmeübergangszahlen multipliziert mit der Übertragsfläche sind *Wärmewiderstände*, d.h., die Wärmewiderstände addieren sich wie in Serie geschaltete elektrische Widerstände.

Die Temperaturdifferenzen in den Fluiden und in der Wand können aus den Gln. (2.8) und (2.9) bestimmt werden.

$$\frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_1}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{f1}} \quad \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_w} \quad \frac{\vartheta_2 - \vartheta_{f2}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{f2}}\tag{2.13}$$

Die Temperaturdifferenzen sind umgekehrt proportional zu den Wärmeübergangszahlen bzw. proportional zum Wärmewiderstand.

BEISPIEL 2.1: Bestimmung der Wärmeübergangszahl, Wärmedurchgangszahl und Wandtemperaturen

Auf der Innenseite einer Wand hat die Luft eine Temperatur von 22 °C. Die Außentemperatur beträgt 0 °C. Die Wand hat eine Dicke von 400 mm und die Wärmeleitfähigkeit von 1 W/(m K). Die Wärmeübergangszahl beträgt innen und außen 5 W/(m² K). Bestimmen Sie die Wärmeübergangszahl in der Wand, die Wärmedurchgangszahl, die Wärmestromdichte und die Wandtemperatur innen und außen.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Die Wärmeleitfähigkeit in der Wand ist konstant.
- Aus der Wand tritt seitlich keine Wärme aus.
- Die Temperaturen innen und außen an der Wand sind jeweils konstant.

Analyse

Mit Gl. (2.7) kann die Wärmeübergangszahl in der Wand bestimmt werden.

$$\alpha_w = \frac{\lambda}{s} = \frac{1 \cdot \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})}{0,4 \cdot \text{m}} = 2,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Die Wärmedurchgangszahl wird mit Gl. (2.12) berechnet.

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{1}{\alpha_w} + \frac{1}{\alpha_{f2}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2,5} + \frac{1}{5} \right)^{-1} \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} = 1,25 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

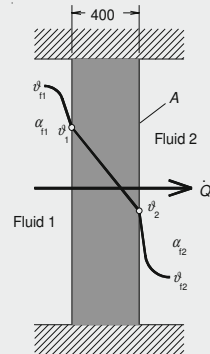
Die Wärmestromdichte kann man mit Gl. (2.9) ermitteln.

$$\dot{q} = \dot{Q} / A = k \cdot (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) = 1,25 \cdot \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \cdot (22 - 0) \cdot \text{K} = 27,5 \text{ W/m}^2$$

Die Wandtemperaturen können mit Gl. (2.13) oder mit Gl. (2.8) bestimmt werden. Die Wandtemperatur innen wird mit Gl. (2.13), außen mit Gl. (2.8) berechnet.

$$\vartheta_1 = \vartheta_{f1} - (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \frac{k}{\alpha_{f1}} = 22 \text{ °C} - (22 - 0) \cdot \text{K} \cdot \frac{1,25}{5} = 16,5 \text{ °C}$$

$$\vartheta_2 = \dot{q} / \alpha_{f2} + \vartheta_{f2} = 27,5 / 5 \cdot \text{K} + 0 \text{ °C} = 5,5 \text{ °C}$$



Diskussion

Die Berechnungen zeigen, dass die kleinste Wärmeübergangszahl die Wärmedurchgangszahl wesentlich bestimmt. Das größte Temperaturgefälle findet im Medium mit der kleinsten Wärmeübergangszahl statt, hier in der Wand mit 11 K.

2.1.2 Wärmeübergang durch mehrere ebene Wände

In der Praxis hat man oft ebene Wände, die aus mehreren Schichten bestehen (Hauswand, Isolation eines Kühlschranks etc.). In Bild 2.3 ist eine ebene Wand aus n Schichten unterschiedlicher Dicke und unterschiedlicher Wärmeleitfähigkeit dargestellt.

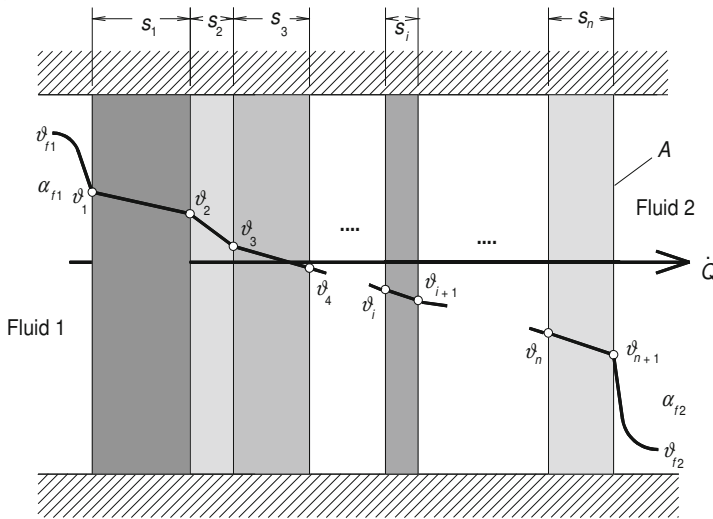


Bild 2.3: Wärmeleitung durch mehrere ebene Wände

Für die Wärmeübergangszahlen durch die einzelnen Wände gilt:

$$\alpha_i = \lambda_i / s_i \quad (2.14)$$

Für die Wärmedurchgangszahl erhält man nach gleicher Umformung wie im vorhergehenden Kapitel:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_{f1}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_{wi}} + \frac{1}{\alpha_{f2}} = \frac{1}{\alpha_{f1}} + \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{f2}} \quad (2.15)$$

Für die Temperaturdifferenzen gilt:

$$\frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_1}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{f1}} \quad \frac{\vartheta_i - \vartheta_{i+1}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{Wi}} \quad \frac{\vartheta_2 - \vartheta_{f2}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{f2}} \quad (2.16)$$

BEISPIEL 2.2: Bestimmung der Isolationsschicht einer Hauswand

Die Wand eines Hauses besteht außen aus einer Ziegelmauer von 240 mm und einer Innenmauer von 120 mm Dicke. Zwischen beiden Mauern befindet sich eine Isolationsschicht aus Steinwolle. Die Wärmeleitfähigkeit der Mauern ist 1 W/(m K), die der Isolation 0,035 W/(m K). Die Hauswand soll eine Wärmedurchgangszahl von 0,3 W/(m² K) haben.

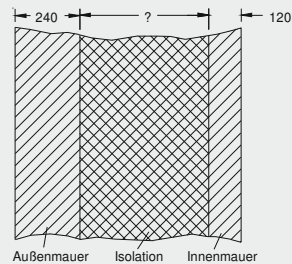
Bestimmen Sie die notwendige Dicke der Isolation.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Die Wärmeleitfähigkeit ist in der Wand konstant.
- Aus der Wand tritt seitlich keine Wärme aus.



Analyse

Die Wärmedurchgangszahl kann mit Gl. (2.15) berechnet werden.

$$\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} = \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3}$$

In diesem Beispiel ist die Wärmedurchgangszahl gegeben, die Dicke der Isolationsschicht s_2 wird gesucht. Die Gleichung löst man daher nach s_2 auf.

$$\begin{aligned} s_2 &= \left(\frac{1}{k} - \frac{s_1}{\lambda_1} - \frac{s_3}{\lambda_3} \right) \cdot \lambda_2 = \\ &= \left(\frac{1}{0,3} - \frac{0,24}{1} - \frac{0,12}{1} \right) \cdot \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}} \cdot 0,035 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} = \mathbf{0,104 \text{ m}} \end{aligned}$$

Diskussion

Die Isolationsschicht stellt den hauptsächlichen Wärmewiderstand dar. Er beträgt $s_2/l_2 = 2,97 \text{ (m}^2 \cdot \text{K)/W}$ und ist damit fast gleich groß wie der Kehrwert der Wärmedurchgangszahl mit $3,33 \text{ (m}^2 \cdot \text{K)/W}$.

BEISPIEL 2.3: Bestimmung der Isolationsschicht und Wandtemperatur

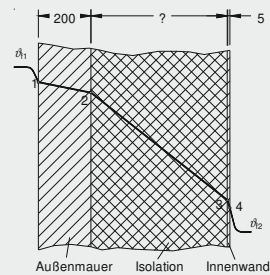
Die Wand eines Kühlhauses besteht aus einer äußeren Mauer von 200 mm Dicke und einer Isolationsschicht mit einer inneren Kunststoffverkleidung von 5 mm Dicke. Die Wärmeleitfähigkeit der Mauer beträgt 1 W/(m K) , die des Kunststoffes $1,5 \text{ W/(m K)}$ und die der Isolation $0,04 \text{ W/(m K)}$. Im Kühlhaus herrscht eine Temperatur von -22°C . Die Wärmeübergangszahl innen ist $8 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. Bei einer hohen Außentemperatur von 35°C muss vermieden werden, dass zwischen Außenmauer und Isolationsschicht Taubildung stattfindet. Um dieses zu gewährleisten, darf bei einer äußeren Wärmeübergangszahl von $5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ die Temperatur an der Innenseite der Außenmauer den Wert von 32°C nicht unterschreiten. Wie dick muss die Isolation gewählt werden?

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Die Wärmeleitfähigkeit in der Wand ist konstant.
- Aus der Wand tritt seitlich keine Wärme aus.

**Analyse**

Für die Wärmedurchgangszahl k erhält man nach Umformungen aus Gl. (2.16):

$$k = \frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_2}{(\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{s_1}{\lambda_1} \right)} = \frac{(35 - 32) \cdot \text{K}}{(35 + 22) \cdot \text{K} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{0,2}{1} \right) \cdot \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}}} = 0,132 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Jetzt kann mit Gl. (2.15) die notwendige Dicke der Isolation bestimmt werden.

$$s_2 = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\alpha_{f1}} - \frac{s_1}{\lambda_1} - \frac{s_3}{\lambda_3} - \frac{1}{\alpha_{f2}} \right) \cdot \lambda_2 =$$

$$= \left(\frac{1}{0,132} - \frac{1}{5} - \frac{0,2}{1} - \frac{0,005}{1,5} - \frac{1}{8} \right) \cdot \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}} \cdot 0,04 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} = \mathbf{0,283 \text{ m}}$$

Diskussion

Der Hauptwärmewiderstand und damit auch das größte Temperaturgefälle befinden sich in der Isolierung. Durch die Wahl der Isolierschichtdicke können Wärmedurchgangszahl und Temperatur in und an den Wänden beeinflusst werden.

2.1.3 Wärmeleitung in einem Hohlzylinder

In einer ebenen Wand ist die Querschnittsfläche A für den Wärmestrom konstant. Bei einem Hohlzylinder (Rohrwand) verändert sich die Querschnittsfläche mit dem Radius, so dass A eine Funktion von r ist. Bild 2.4 zeigt die Wärmeleitung in einem Hohlzylinder.

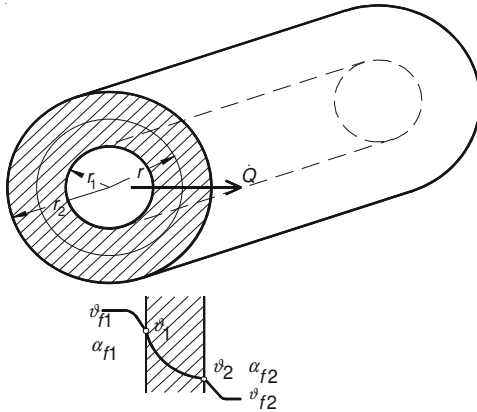


Bild 2.4: Wärmeleitung in einem Hohlzylinder

Der Wärmestrom durch die Wand des Zylinders ist konstant. Da sich die Zylinderfläche mit dem Radius verändert, ändert sich auch die Wärmestromdichte. Setzt man für die Fläche A die Fläche des Zylinders als eine Funktion des Radius ein, ergibt sich für den Wärmestrom:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A(r) \cdot \frac{d\vartheta}{dr} = -\lambda \cdot \pi \cdot 2 \cdot r \cdot l \cdot \frac{d\vartheta}{dr} \quad (2.17)$$

Nach Separation der Variablen erhalten wir:

$$\frac{dr}{r} = -\lambda \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot l}{\dot{Q}} \cdot d\vartheta \quad (2.18)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Wärmeleitfähigkeit in der Wand konstant und der Wärmestrom zur Mittelachse des Hohlzylinders punktsymmetrisch ist, kann Gl. (2.18) integriert werden. Wir bekommen für den Wärmestrom:

$$\dot{Q} = \lambda \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot l}{\ln(r_a / r_i)} \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (2.19)$$

Um die Wärmeübergangszahl zu erhalten, muss der Wärmestrom auf eine Austauschfläche bezogen werden. In Europa ist es üblich, die Wärmeübergangszahlen auf die Außenfläche zu beziehen, sie könnten aber auch ohne Weiteres auf die Innenfläche bezogen werden. Gl. (2.19) wird so umgeformt, dass der Wärmestrom auf

die Außenfläche bezogen ist. Weiterhin ersetzen wir die Radien durch die in der Technik üblicherweise verwendeten Durchmesser.

$$\dot{Q} = \frac{2 \cdot \lambda}{d_a \cdot \ln(d_a / d_i)} \cdot \pi \cdot l \cdot d_a \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) = \frac{2 \cdot \lambda}{d_a \cdot \ln(d_a / d_i)} \cdot A_a \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (2.20)$$

Die auf die Außenfläche bezogene Wärmeübergangszahl in der Wand beträgt:

$$\alpha_{wa} = \frac{2 \cdot \lambda}{d_a \cdot \ln(d_a / d_i)} \quad (2.21)$$

Sehr wichtig ist es, immer zu beachten, auf welche Übertragungsfläche die Wärmeübergangszahl bezogen ist.

Die unterschiedlichen Übertragungsflächen sind bei der Berechnung der Wärmedurchgangszahl zu berücksichtigen. Für den Wärmestrom in den Fluiden und in der Wand gilt:

$$\dot{Q} = A_1 \cdot \alpha_{f1} \cdot (\vartheta_{f1} - \vartheta_1) = \pi \cdot l \cdot d_1 \cdot \alpha_{f1} \cdot (\vartheta_{f1} - \vartheta_1) \quad (2.22)$$

$$\dot{Q} = A_2 \cdot \alpha_{f2} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_{f2}) = \pi \cdot l \cdot d_2 \cdot \alpha_{f2} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_{f2}) \quad (2.23)$$

$$\dot{Q} = A_2 \cdot \alpha_{wa} \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) = \pi \cdot l \cdot d_2 \cdot \alpha_{wa} \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (2.24)$$

$$\dot{Q} = A_2 \cdot k \cdot (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) = \pi \cdot l \cdot d_2 \cdot k \cdot (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \quad (2.25)$$

Nach Umformungen erhält man:

$$\dot{Q} \cdot \left[\frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{1}{\alpha_{wa}} + \frac{1}{\alpha_{f2}} \right] = A_2 \cdot (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \quad (2.26)$$

Damit ist die auf die Außenfläche bezogene Wärmedurchgangszahl:

$$\frac{1}{k} = \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{1}{\alpha_{wa}} + \frac{1}{\alpha_{f2}} = \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{d_2}{2 \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{1}{\alpha_{f2}} \quad (2.27)$$

Es ist unbedingt zu beachten, dass die Wärmedurchgangszahl auf die Außenfläche, d.h. auf den Durchmesser d_2 bezogen ist. Bezieht man die Wärmeübergangszahl auf die Innenfläche, also auf den Durchmesser d_1 , erhält man:

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{1}{\alpha_{wa}} + \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{1}{\alpha_{f2}} = \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{d_1}{2 \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{1}{\alpha_{f2}} \quad (2.28)$$

Bei der Berechnung des Wärmestromes liefern beide Gleichungen den selben Wert, weil der Wärmestrom mit dem Produkt aus Wärmedurchgangszahl und Austauschfläche gebildet wird. Verwendet man die falsche Bezugsfläche, können große

Differenzen entstehen. In Europa ist es gebräuchlich, die Wärmedurchgangszahlen auf die Außenfläche zu beziehen. In den USA können beide Flächen als Bezug verwendet werden.

Es ist wichtig, dass man bei der Angabe der Wärmedurchgangs- und Wärmeübergangszahlen auch die Fläche angibt, auf die diese Größen bezogen sind.

Für die Temperaturdifferenzen erhält man:

$$\frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_1}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{d_a}{d_i} \cdot \frac{k}{\alpha_{f1}} \quad \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{wa}} \quad \frac{\vartheta_2 - \vartheta_{f2}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{f2}} \quad (2.29)$$

Bei dünnwandigen Rohren oder für überschlägige Berechnungen kann die Wand als ebene Wand behandelt werden. Für die Wärmeübergangszahl der Wand erhält man dann näherungsweise:

$$\alpha_{wa} = \frac{2 \cdot \lambda}{d_a \cdot \ln(d_a / d_i)} \approx \frac{\lambda}{s} = \frac{2 \cdot \lambda}{d_a - d_i} \quad (2.30)$$

BEISPIEL 2.4: Bestimmung der Wärmedurchgangszahl im durchströmten Rohr

In dem Rohr eines Hochdruckvorwärmers strömt Wasser, außen am Rohr kondensiert Dampf. Die Wärmeübergangszahl innen im Rohr ist 15 000 W/(m² K) und außen 13 000 W/(m² K). Der Außendurchmesser des Rohres beträgt 15 mm, die Wandstärke 2,3 mm. Die Wärmeleitfähigkeit des Rohrmaterials ist 40 W/(m K). Bestimmen Sie die Wärmeübergangszahl, bezogen auf den Außen- und Innendurchmesser und prüfen Sie, welchen Fehler man macht, wenn die Wärmeübergangszahl der Rohrwand mit Gl. (2.30) bestimmt wird.

Lösung

Schema Siehe Bild 2.4

Annahmen

- Die Wärmeleitfähigkeit in der Wand ist konstant.
- Die Temperaturen innen und außen an der Wand sind jeweils konstant.

Analyse

Die auf den Außendurchmesser bezogene Wärmedurchgangszahl kann mit Gl. (2.27) berechnet werden.

$$k_2 = \left(\frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{d_2}{2 \cdot \lambda} \cdot \ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right) + \frac{1}{\alpha_{f2}} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{15}{10,4} \cdot \frac{1}{15000} + \frac{0,015}{2 \cdot 40} \cdot \ln \left(\frac{15}{10,4} \right) + \frac{1}{13000} \right)^{-1} = \mathbf{4\,137 \frac{W}{m^2 \cdot K}}$$

Die auf den Innendurchmesser bezogene Wärmedurchgangszahl wird mit Gl. (2.28) bestimmt.

$$k_1 = \left(\frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{d_1}{2 \cdot \lambda} \cdot \ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right) + \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{1}{\alpha_{f2}} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{15000} + \frac{0,0104}{2 \cdot 40} \cdot \ln \left(\frac{15}{10,4} \right) + \frac{10,4}{15} \cdot \frac{1}{13000} \right)^{-1} = \mathbf{5\,966 \frac{W}{m^2 \cdot K}}$$

Die Wärmeübergangszahl in der Rohrwand ist nach Gl. (2.21):

$$\alpha_{wa} = \frac{2 \cdot \lambda}{d_a \cdot \ln(d_a / d_i)} = \frac{2 \cdot 40 \cdot W/(m \cdot K)}{0,015 \cdot m \cdot \ln(15/10,4)} = \mathbf{14\,562 \frac{W}{m^2 \cdot K}}$$

Der Näherungswert nach Gl. (2.30) beträgt:

$$\alpha_{wa} = \frac{\lambda}{s} = \frac{40 \cdot W/(m \cdot K)}{0,0023 \cdot m} = \mathbf{17\,391 \frac{W}{m^2 \cdot K}}$$

Die mit Gl. (2.30) berechnete Wärmeübergangszahl ist 19 % zu groß. Ursache: Die Rohrwandstärke ist im Verhältnis zum Durchmesser relativ groß.

Diskussion

Es ist äußerst wichtig, anzugeben, auf welche Fläche die Wärmeübergangs- bzw. Wärmedurchgangszahlen bezogen sind. In diesem Beispiel ist die auf die Innenfläche bezogene Wärmedurchgangszahl um 44 % größer als die auf die Außenfläche bezogene. Verwendet man bei der auf den Innendurchmesser bezogenen Wärmeübergangszahl die mit dem Außendurchmesser gebildete Fläche, bekommt man einen 44 % zu großen Wärmestrom. Das ist bei der Auslegung eines Apparates eine 40 % zu kleine Fläche.

Die Berechnung der Wärmeübergangszahl mit der Näherungsgleichung liefert zu hohe Werte. Wenn der Außendurchmesser 10 % größer als der Innendurchmesser ist, beträgt der Fehler 5 %. Die Abweichung kann mit der Reihenentwicklung von Gl. (2.21) aufgezeigt werden.

$$\alpha_{wa} = \frac{2 \cdot \lambda}{d_a \cdot \ln(d_a / d_i)} = \frac{2 \cdot \lambda}{d_a \cdot \ln[1 / (1 - 2 \cdot s / d_a)]} =$$

$$= \frac{2 \cdot \lambda}{d_a \cdot [2 \cdot s / d_a + (2 \cdot s / d_a)^2 / 2 + (2 \cdot s / d_a)^3 / 3 + \dots]}$$

In Gl. (2.30) wird die Reihe im Nenner nach dem ersten Term abgebrochen.

2.1.4 Hohlzylinder mit mehreren Schichten

In der Technik verwendet man oft Rohre (Hohlzylinder), die aus mehreren Schichten bestehen. Beispiele für solche Rohre sind: Wärmeübertragerrohre mit einem korrosionsbeständigen Innenrohr, Rohre mit einer Isolation und Schutzhülle, Rohre mit Verschmutzungen und Oxydschichten innen und außen.

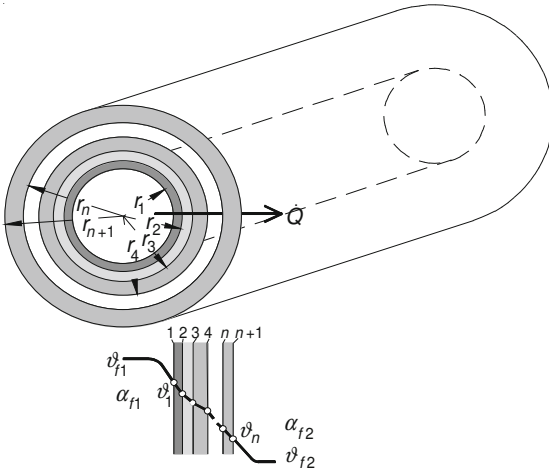


Bild 2.5: Wärmeleitung in einem Hohlzylinder mit mehreren Schichten

Bild 2.5 zeigt einen Hohlzylinder, dessen Wand aus n Schichten unterschiedlicher Dicke mit unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeiten besteht. Hier erhalten wir für die Wärmeübergangszahlen der einzelnen Schichten, die auf die Fläche der äußersten Schicht bezogen sind:

$$\alpha_i = \frac{2 \cdot \lambda_i}{d_{n+1} \cdot \ln(d_{i+1} / d_i)} \quad (2.31)$$

Für die Wärmedurchgangszahl gilt:

$$\frac{1}{k} = \frac{d_{n+1}}{d_1} \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_{n+1}}{2 \cdot \lambda_i} \cdot \ln(d_{i+1} / d_i) + \frac{1}{\alpha_{f2}} \quad (2.32)$$

Bei den Temperaturdifferenzen ist jeweils die Fläche zu berücksichtigen.

$$\frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_1}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{d_{n+1}}{d_1} \cdot \frac{k}{\alpha_{f1}} \quad \frac{\vartheta_i - \vartheta_{i+1}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{d_{n+1}}{d_i} \cdot \frac{k}{\alpha_{wa}} \quad \frac{\vartheta_{n+1} - \vartheta_{f2}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{f2}} \quad (2.33)$$

BEISPIEL 2.5: Kondensatorrohr mit Verschmutzung

In einem Kondensatorrohr aus Titan mit 24 mm Außendurchmesser und 0,7 mm Wandstärke wird nach einer gewissen Betriebszeit innen eine Schmutzschicht von 0,05 mm Dicke festgestellt. Die Wärmeleitfähigkeit des Rohres ist 15 W/(m K), die der Schmutzschicht 0,8 W/(m K). Im Rohr beträgt die Wärmeübergangszahl mit und ohne Verschmutzung 18 000 W/(m² K), außen 13 000 W/(m² K). Berechnen Sie die durch Verschmutzung bedingte verringerte Wärmedurchgangszahl.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- In den Wänden ist die Wärmeleitfähigkeit konstant.
- An den Wänden sind die Temperaturen innen und außen jeweils konstant.

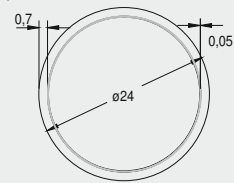
Analyse

Die auf den Außendurchmesser bezogene Wärmedurchgangszahl kann mit Gl. (2.32) bestimmt werden. Für das saubere Rohr erhalten wir:

$$k = \left(\frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{d_2}{2 \cdot \lambda_i} \cdot \ln(d_2 / d_i) + \frac{1}{\alpha_{f2}} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{24}{22,6} \cdot \frac{1}{18\,000} + \frac{0,024}{2 \cdot 15} \cdot \ln\left(\frac{24}{22,6}\right) + \frac{1}{13\,000} \right)^{-1} = 5\,435 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Für das verschmutzte Rohr liefert Gl. (2.32):



$$k_v = \left(\frac{d_3}{d_1} \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{d_3}{2 \cdot \lambda_1} \cdot \ln(d_2 / d_1) + \frac{d_3}{2 \cdot \lambda_2} \cdot \ln(d_3 / d_2) + \frac{1}{\alpha_{f2}} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{24}{22,5} \cdot \frac{1}{18\,000} + \frac{0,024}{2 \cdot 0,8} \cdot \ln\left(\frac{22,6}{22,5}\right) + \frac{0,024}{2 \cdot 15} \cdot \ln\left(\frac{24}{22,6}\right) + \frac{1}{13\,000} \right)^{-1} = 3\,987 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Man kann hier zeigen, dass eine einfachere Berechnung fast zum selben Ergebnis führt. Dazu addiert man den Verschmutzungswiderstand zum Kehrwert der sauberen Wärmedurchgangszahl und bildet aus der Summe den Kehrwert.

$$k_v = \left(\frac{1}{k} + \frac{d_3}{2 \cdot \lambda_1} \cdot \ln(d_2 / d_3) \right)^{-1} = \left(\frac{1}{5\,435} + \frac{0,024}{2 \cdot 0,8} \cdot \ln\left(\frac{22,6}{22,5}\right) \right)^{-1} = 3\,992 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Der Unterschied von 0,11 % ist sehr gering.

Diskussion

Es wurde deutlich, dass auch schon eine sehr dünne Schmutzschicht die Wärmedurchgangszahl wesentlich reduziert. Im Beispiel beträgt die Reduktion 27 %, was durchaus auftreten kann. Auch bei sauberen Titanrohren muss man gegenüber metallisch blanken Rohren mit 6 bis 8 % Reduktion rechnen, weil Titan eine korrosionsfeste Oxidschicht bildet, die die Wärmeübergangszahl verringert.

In der Praxis kann man die Dicke von Schmutzschichten nicht genau messen. Daher ist die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit schwierig, weil die Schicht trocken oder nass unterschiedliche Werte haben kann. Aus Messungen der Wärmedurchgangszahlen sammelt man Erfahrungswerte für die Verschmutzungswiderstände R_v , die bei der Auslegung der Wärmedurchgangszahl k_v des Kondensators zu berücksichtigen sind.

Die Wärmedurchgangszahl des Kondensators ist dann: $k_v = (1/k_{\text{sauber}} + R_v)^{-1}$.

BEISPIEL 2.6: Isolierung einer Dampfleitung

In einer Dampfleitung aus Stahl mit 100 mm Innendurchmesser und 5 mm Wandstärke strömt Wasserdampf mit der Temperatur von 400 °C. Im Rohr beträgt die Wärmeübergangszahl 1 000 W/(m² K). Das Rohr muss mit einer Isolation, die außen mit einem Aluminiumblech von 0,5 mm Wandstärke geschützt wird, versehen werden. Die Wärmeleitfähigkeit des Rohres ist 47 W/(m K), des Aluminiums 220 W/(m K) und des Isolators 0,08 W/(m K). Die Sicherheitsvorschriften verlangen, dass bei einer Raumtemperatur von 32 °C und einer äußeren Wärmeübergangszahl von 15 W/(m² K) die Außenwand der Aluminiumhülle nicht wärmer als 45 °C werden darf.

Berechnen Sie die notwendige Dicke der Isolation unter der Berücksichtigung, dass die Außendurchmesser der handelsüblichen Isolierschalen in 10 mm-Abstufungen erhältlich sind.

Prüfen Sie, welche Vereinfachungen gemacht werden können.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- In den Wänden ist die Wärmeleitfähigkeit konstant.
- An den Wänden innen und außen sind die Temperaturen jeweils konstant.

Analyse

Die Temperaturdifferenz zwischen der Außenwand und dem Raum kann mit Gl. (2.32) berechnet und daraus die Wärmedurchgangszahl, die notwendig ist, um die vorgeschriebene Außenwandtemperatur zu erreichen, ermittelt werden.

$$k = \frac{\vartheta_{n+1} - \vartheta_{f2}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} \cdot \alpha_{f2} = \frac{45 - 32}{400 - 32} \cdot 15 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} = 0,530 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Mit Gl. (2.32) kann man den Durchmesser der Isolation berechnen.

$$\frac{1}{k} = \frac{d_4}{d_1} \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \frac{d_4}{2 \cdot \lambda_1} \cdot \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{d_4}{2 \cdot \lambda_2} \cdot \ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right) + \frac{d_4}{2 \cdot \lambda_3} \cdot \ln\left(\frac{d_4}{d_2}\right) + \frac{1}{\alpha_{f2}}$$

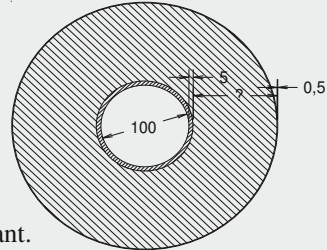
Dabei ist $d_4 = d_3 + 2s_3$. Diese Gleichung ist analytisch unlösbar. Man ermittelt den Durchmesser entweder per Iteration oder mit einem Gleichungslöser. *Mathcad* errechnete den Wert von 294 mm. Ausgewählt wurde ein Außendurchmesser von **300 mm** und damit die Wärmedurchgangszahl von 0,511 W/(m² K) bestimmt.

Die möglichen Vereinfachungen können mit den Temperaturen an den Wänden einzelner Hohlzylinder demonstriert werden. Die Temperaturen sind mit Gl. (2.33) zu ermitteln:

$$\vartheta_1 = \vartheta_{f1} - (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \frac{d_4}{d_1} \cdot \frac{k}{\alpha_{f1}} = 399,4 \text{ °C}$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 - (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \frac{d_4}{d_2} \cdot \frac{k}{\alpha_{w1}} = \vartheta_1 - (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \frac{d_4}{d_2} \cdot \frac{k \cdot d_4}{2 \cdot \lambda_1} \cdot \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) = 399,3 \text{ °C}$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_2 - (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \frac{d_4}{d_3} \cdot \frac{k \cdot d_4}{2 \cdot \lambda_2} \cdot \ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right) = 43,25 \text{ °C}$$



$$\vartheta_4 = \vartheta_3 - (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \frac{k \cdot d_4}{2 \cdot \lambda_3} \cdot \ln\left(\frac{d_4}{d_3}\right) = 43,25 \text{ °C}$$

Die berechneten Temperaturen zeigen, dass innen im Rohr und in der Rohrwand nur 1 K Temperaturgefälle, in der äußeren Aluminiumhülle praktisch keines vorhanden ist. Damit hätte die Berechnung für eine Temperatur von 400 °C auf der Innen- und 45 °C auf der Außenseite der Isolation durchgeführt werden können.

Diskussion

Hat eine Schicht in einer aus mehreren Schichten bestehenden Wand einen im Vergleich zu anderen Schichten sehr großen Wärmewiderstand (sehr kleine Wärmeübergangszahl), tritt in dieser Schicht praktisch das gesamte Temperaturgefälle auf. Die Wärmedurchgangszahl ist fast gleich groß wie die Wärmeübergangszahl der Schicht mit hohem Wärmewiderstand.

2.1.5 Wärmeleitung in einer Hohlkugel

Bei der Berechnung des Wärmestromes in einer Hohlkugel (Bild 2.6) wird wie beim Hohlzylinder vorgegangen. Die Querschnittsfläche A für den Wärmestrom ändert sich mit dem Radius und wird entsprechend der Kugeloberfläche $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ eingesetzt.

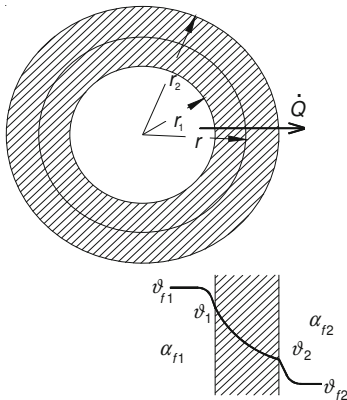


Bild 2.6: Wärmeleitung in einer Hohlkugel

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{d\vartheta}{dr} \quad (2.34)$$

Wenn der Wärmestrom auf die Außenfläche der Kugel bezogen wird, lautet die Lösung dieser Differentialgleichung:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda \cdot 4 \cdot \pi}{1/r_1 - 1/r_2} \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) = \frac{2 \cdot \lambda}{d_2 \cdot (d_2/d_1 - 1)} \cdot \pi \cdot d_2^2 \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (2.35)$$

Damit ist die Wärmeübergangszahl der Hohlkugel:

$$\alpha_{wa} = \frac{2 \cdot \lambda}{d_2 \cdot (d_2/d_1 - 1)} = \frac{2 \cdot \lambda}{d_2^2 \cdot (1/d_1 - 1/d_2)} \quad (2.36)$$

Die Wärmedurchgangszahl der Hohlkugel, deren Wand aus n Schichten unterschiedlicher Dicke und Wärmeleitfähigkeit besteht, erhält man als:

$$\frac{1}{k} = \frac{d_{n+1}^2}{d_1^2} \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_{n+1} \cdot (d_{n+1}/d_i - d_{n+1}/d_{i+1})}{2 \cdot \lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{f2}} \quad (2.37)$$

Für die Temperaturdifferenzen gilt:

$$\frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_1}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{d_{n+1}^2}{d_1^2} \cdot \frac{k}{\alpha_{f1}} \quad \frac{\vartheta_i - \vartheta_{i+1}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{d_{n+1}^2}{d_i^2} \cdot \frac{k}{\alpha_{wa}} \quad \frac{\vartheta_{n+1} - \vartheta_{f2}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{f2}} \quad (2.38)$$

Es ist bemerkenswert, dass der Wärmestrom bei der Hohlkugel mit zunehmender Wandstärke nicht gegen null geht. Bei der ebenen Platte und beim Hohlzylinder werden, wenn die Wandstärke gegen unendlich strebt, die Wärmeübergangszahl und der Wärmestrom zu null. Bei der Hohlkugel sieht man in Gl. (2.35), dass der Wärmestrom bei zunehmendem Außenradius einem Wert, der größer als null ist, zustrebt.

$$\dot{Q} = \lim_{d_2 \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \lambda \cdot \pi \cdot d_2^2}{d_2^2 \cdot (1/d_1 - 1/d_2)} \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) = 2 \cdot \lambda \cdot d_1 \cdot \pi \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (2.39)$$

Die Wärmeübergangszahl strebt zwar gegen null, aber die Fläche $A = \pi \cdot d_a$ gegen unendlich und der Wärmestrom nimmt den in Gl. (2.39) angegebenen Wert an. Dieses bedeutet, dass von einer Kugeloberfläche an eine unendliche Umgebung auch dann Wärme transferiert wird, wenn eine Temperaturdifferenz zur unendlich fernen Umgebung besteht.

BEISPIEL 2.7: Isolierung eines Kugelbehälters

Ein kugelförmiger Behälter aus Stahl für flüssiges Kohlendioxid hat den Außendurchmesser von 1,5 m und die Wandstärke von 20 mm. Er soll mit einer Isolation versehen werden. Die Temperatur im Behälter beträgt -15°C . Die Isolation muss so ausgelegt werden, dass bei einer Außentemperatur von 30°C der Wärmestrom zum Kohlendioxid kleiner als 300 W ist. Die Wärmeübergangszahlen im Behälter und

außen an der Isolation können vernachlässigt werden. Die Wärmeleitfähigkeit des Isolationsmaterials beträgt $0,05 \text{ W/(m K)}$, die des Stahls 47 W/(m K) . Bestimmen Sie die notwendige Dicke der Isolation.

Lösung

Annahmen

- In der Behälterwand und Isolation ist die Wärmeleitfähigkeit konstant.
- An den Wänden sind die Temperaturen innen und außen jeweils konstant.

Analyse

Damit der gegebene Wärmestrom nicht überschritten wird, muss die Wärmedurchgangszahl entsprechend klein sein. In diesem speziellen Fall ist es sinnvoll, die Wärmeübergangszahlen und die Wärmedurchgangszahl auf die Innenfläche zu beziehen, da die Außenfläche erst nach Bestimmung der Isolationsdicke bekannt ist. Die auf die Innenfläche bezogene Wärmedurchgangszahl erhält man als:

$$k_i = \frac{\dot{Q}}{A_i \cdot (\vartheta_{f2} - \vartheta_{f1})} = \frac{\dot{Q}}{\pi \cdot d_1^2 \cdot (\vartheta_{f2} - \vartheta_{f1})} =$$

$$= \frac{300 \cdot \text{W}}{\pi \cdot 1,46^2 \cdot \text{m}^2 \cdot (30 + 15) \cdot \text{K}} = 0,996 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Die Vernachlässigung der Wärmeübergangszahlen innen im Behälter und außen an der Isolation bedeutet, dass sie in Gl. (2.36) als unendlich groß eingesetzt werden. Unter Berücksichtigung, dass die Übergangszahlen auf die Innenfläche bezogen sind, ergeben sich mit Gl. (2.35) folgende Beziehungen:

$$\dot{Q} = \frac{2 \cdot \lambda_1}{d_1 \cdot (1 - d_1 / d_2)} \cdot \pi \cdot d_1^2 \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

$$\dot{Q} = \frac{2 \cdot \lambda_2}{d_2 \cdot (1 - d_2 / d_3)} \cdot \pi \cdot d_2^2 \cdot (\vartheta_3 - \vartheta_2) = \frac{d_2^2}{d_1^2} \cdot \frac{2 \cdot \lambda_2}{d_2 \cdot (1 - d_2 / d_3)} \cdot \pi \cdot d_1^2 \cdot (\vartheta_3 - \vartheta_2)$$

Beide Gleichungen nach ϑ_2 aufgelöst und gleichgesetzt, ergeben:

$$\dot{Q} = \left(\frac{d_1 \cdot (1 - d_1 / d_2)}{2 \cdot \lambda_1} + \frac{d_2 \cdot (1 - d_2 / d_3)}{2 \cdot \lambda_2} \cdot \frac{d_1^2}{d_2^2} \right)^{-1} \cdot \pi \cdot d_1^2 \cdot (\vartheta_3 - \vartheta_1)$$

Für die auf die Innenfläche bezogene Wärmedurchgangszahl gilt:

$$\dot{Q} = k_i \cdot \pi \cdot d_1^2 \cdot (\vartheta_3 - \vartheta_1)$$

Damit ist die Wärmedurchgangszahl in der oberen Gleichung der Ausdruck in den Klammern. Sie ist bekannt, der Klammerausdruck kann nach dem Durchmesser d_3 aufgelöst werden.

$$d_3 = \frac{d_2}{1 - \left(\frac{1}{k} - \frac{d_1 \cdot (1 - d_1 / d_2)}{2 \cdot \lambda_1} \right) \cdot \frac{2 \cdot \lambda_2 \cdot d_2}{d_1^2}} =$$

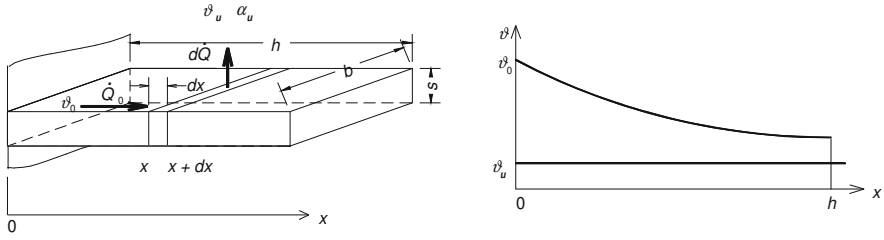
$$= \frac{1,5 \cdot \text{m}}{1 - \left(\frac{1}{0,996} - \frac{1,46 \cdot (1 - 1,46/1,5)}{2 \cdot 47} \right) \cdot \frac{2 \cdot 0,05 \cdot 1,5}{1,46^2}} = \mathbf{1,612 \text{ m}}$$

Diskussion

Bei einigen Problemen ist es von Vorteil, die Wärmeübergangszahlen nicht auf die Außenfläche zu beziehen. Stehen hier keine fertigen Gleichungen zur Verfügung, kann mit den Kopplungsgleichungen nach dem hier gezeigten Schema vorgegangen werden.

2.1.6 Wärmeleitung mit seitlichem Wärmetransfer (Rippen)

In der Technik werden zur Vergrößerung der Fläche auf der Übertragungsfläche *Rippen* angebracht. Ebenso wird Behältern durch Stützen, Streben und Füße Wärme zu- oder abgeführt. Eine Rippe oder eine Stütze kann ein Stab konstanten Querschnitts sein. Wären die Seitenflächen eines Stabes thermisch vollkommen isoliert, hätte man eine stationäre Wärmeleitung in einer ebenen Wand. Bei konstanter Wärmeleitfähigkeit stellte sich nach Gl. (2.5) ein linearer Temperaturgradient im Stab ein. Bei der technischen Anwendung von Rippen, Streben etc. sind die Seitenwände nicht isoliert. Von ihnen wird Wärme von oder zur Umgebung transferiert. Der Wärmestrom im Stab ist nicht mehr konstant. Er wird entsprechend der seitlich ab- oder zugeführten Wärme verändert. Dieses ist ein zweidimensionales Problem. Eine ebene Wand konstanten Querschnitts, die durch einen Wärmestrom auf der einen Seite auf einer Temperatur von ϑ_0 gehalten und aus der seitlich durch den Wärmeübergang Wärme transferiert wird, kann als eindimensionales Problem behandelt werden, wenn die Temperatur am Querschnitt an jeder beliebigen Stelle x als konstant angenommen werden kann. Bild 2.7 zeigt eine viereckige Rippe konstanten Querschnitts, die an einem Körper angebracht ist und dort durch einen Wärmestrom auf der konstanten Temperatur ϑ_0 gehalten wird.

**Bild 2.7:** Wärmeleitung in einer Rippe

Die Rippe ist außen von dem Fluid tieferer Temperatur ϑ_u umgeben, zu dem Wärme aus der Rippe abgeführt wird. Die Wärmeübergangszahl des Fluids ist α_u . In den folgenden Kapiteln werden die Temperatur und der Wärmestrom in der Rippe berechnet.

2.1.6.1 Temperaturverlauf in der Rippe

Der in das Volumenelement $b \cdot s \cdot dx$ über die Querschnittsfläche $A = s \cdot b$ eintretende Wärmestrom an der Stelle x ist:

$$\dot{Q}_x = -\lambda \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \quad (2.40)$$

An Stelle $x + dx$ tritt folgender Wärmestrom aus dem Volumenelement:

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\delta \dot{Q}_x}{dx} \cdot dx = -\lambda \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dx} - \lambda \cdot A \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \cdot dx \quad (2.41)$$

Die Änderung des Wärmestromes im Volumenelement ist:

$$\delta \dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+dx} - \dot{Q}_x = -\lambda \cdot A \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \cdot dx \quad (2.42)$$

Mit umgekehrtem Vorzeichen entspricht diese Änderung aber dem Wärmestrom, der an der äußeren Oberfläche des Volumenelementes $U \cdot dx$ abgeführt wird. Der abgeführte Wärmestrom wird mit der Temperaturdifferenz der äußeren Wärmeübergangszahl bestimmt.

$$-\delta \dot{Q}_x = \alpha_u \cdot U \cdot (\vartheta - \vartheta_u) \cdot dx \quad (2.43)$$

Der Umfang der Rippe ist U . Die Gln. (2.42) und (2.43) gleichgesetzt, ergeben die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha_u \cdot U}{\lambda \cdot A} \cdot (\vartheta - \vartheta_u) \quad (2.44)$$

Eine konstante Außentemperatur ϑ_u , Wärmeübergangszahl α_u und Wärmeleitfähigkeit λ vorausgesetzt, kann $\vartheta - \vartheta_u$ durch $\Delta\vartheta$ substituiert und der erste Term auf

der rechten Seite der Gleichung als die Konstante m^2 eingesetzt werden. Damit erhalten wir die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \Delta \vartheta}{dx^2} = m^2 \cdot \Delta \vartheta \quad (2.45)$$

mit $m = \sqrt{\frac{\alpha_U \cdot U}{\lambda \cdot A}}$ und $\Delta \vartheta = (\vartheta - \vartheta_U)$.

Die Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$\Delta \vartheta = C_1 \cdot e^{-m \cdot x} + C_2 \cdot e^{m \cdot x} \quad (2.46)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 werden mit den Randbedingungen bestimmt. Sie können an beiden Enden der Rippe ermittelt werden. Bei $x = 0$ ist die Temperaturdifferenz gleich $\Delta \vartheta_0$. Der Wärmestrom am Ende des Stabes wird vernachlässigt. Dadurch ist bei $x = h$ der Wärmestrom gleich null, was aber bedeutet, dass der Temperaturgradient $(d\vartheta/dx) = 0$ ist. Damit gilt:

$$\Delta \vartheta_0 = C_1 + C_2 \quad (2.47)$$

$$\left(\frac{\Delta \vartheta}{dx} \right)_{x=h} = -m \cdot C_1 \cdot e^{-m \cdot h} + m \cdot C_2 \cdot e^{m \cdot h} = 0 \quad (2.48)$$

Aus Gl. (2.48) folgt für C_1 :

$$C_1 = C_2 \cdot \frac{e^{m \cdot h}}{e^{-m \cdot h}} \quad (2.49)$$

Gl. (2.49) in Gl. (2.47) eingesetzt, ergibt für C_2 :

$$C_2 = \Delta \vartheta_0 \cdot \frac{e^{-m \cdot h}}{e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h}} \quad (2.50)$$

Gl. (2.50) in Gl. (2.49) eingesetzt, ergibt für C_1 :

$$C_1 = \Delta \vartheta_0 \cdot \frac{e^{+m \cdot h}}{e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h}} \quad (2.51)$$

Damit ist die Temperaturdifferenz $\Delta \vartheta$:

$$\Delta \vartheta(x) = \Delta \vartheta_0 \cdot \frac{e^{-m \cdot (h-x)} + e^{m \cdot (h-x)}}{e^{m \cdot h} + e^{-m \cdot h}} \quad (2.52)$$

Für eine *unendlich lange Rippe* werden die negativen Exponentialfunktionen gleich null und aus Gleichung (2.51) erhält man:

$$\Delta \vartheta(x) = \Delta \vartheta_0 \cdot e^{-m \cdot x} \quad (2.53)$$

Für die *endlich lange Rippe* können in Gl. (2.52) die Exponentialfunktionen durch Hyperbelfunktionen ersetzt werden.

$$\frac{\Delta\vartheta(x)}{\Delta\vartheta_0} = \frac{\cosh[m \cdot (h-x)]}{\cosh(m \cdot h)} = \frac{\cosh[m \cdot h \cdot (1-x/h)]}{\cosh(m \cdot h)} \quad (2.54)$$

Bild 2.8 zeigt den normierten Temperaturverlauf $\Delta\vartheta/\Delta\vartheta_0$ über die normierte Länge x/h mit der für die Rippen charakteristischen Größe $m \cdot h$ als Parameter.

Bei großen Werten von $m \cdot h$ ändert sich die Temperatur stark. Dieses bedeutet, dass bei langen Rippen bzw. Rippen mit kleiner Wärmeleitfähigkeit und großen äußeren Wärmeübergangszahlen erhebliche Temperaturänderungen vorkommen.

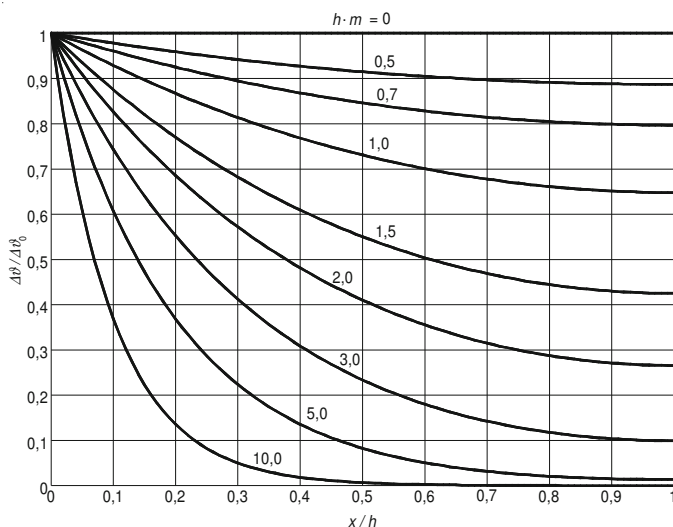


Bild 2.8: Normierter Temperaturverlauf der Rippe

2.1.6.2 Temperatur am Ende der Rippe

Die Temperatur am Stabende beträgt:

$$\vartheta(h) = \vartheta_U + \Delta\vartheta(h) = \vartheta_U + \Delta\vartheta_0 \cdot \frac{1}{\cosh(m \cdot h)} \quad (2.55)$$

2.1.6.3 Wärmestrom am Anfang der Rippe

Von Interesse ist, wie groß der Wärmestrom am Stabanfang ist, denn er ist gleich dem Wärmestrom, der insgesamt von der Rippe abgegeben wird. Man ermittelt ihn aus Gl. (2.40), indem dort der Temperaturgradient bei $x = 0$ eingesetzt wird.

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{x=0} &= -\lambda \cdot A \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda \cdot A \cdot \Delta\vartheta_0 \cdot m \cdot \frac{-\sinh(m \cdot h)}{\cosh(m \cdot h)} = \\ &= \lambda \cdot A \cdot \Delta\vartheta_0 \cdot m \cdot \tanh(m \cdot h)\end{aligned}\quad (2.56)$$

Da der Wärmestrom am Anfang der Rippe gleich dem Wärmestrom ist, der durch den äußeren Wärmeübergang abgeführt wird, erhält man das gleiche Ergebnis, wenn in Gl. (2.43) die Temperaturdifferenz aus Gl. (2.54) einsetzt und von 0 bis h integriert wird.

2.1.6.4 Rippenwirkungsgrad

Um die Austauschfläche zu vergrößern, werden bei kleinen Wärmeübergangszahlen an den Oberflächen der Wärmeübertrager Rippen angebracht. Damit die Oberflächenvergrößerung möglichst effektiv ist, sollte sich die Temperatur in der Rippe nur wenig ändern. In einer idealen Rippe bliebe die Temperatur konstant, d.h., für den Wärmeaustausch wäre immer die Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_0$ vorhanden. Das ergäbe dort den Wärmestrom:

$$\dot{Q}_{ideal} = U \cdot h \cdot \alpha_U \cdot \Delta\vartheta_0 \quad (2.57)$$

Das Verhältnis vom wirklich ausgetauschten zum idealen Wärmestrom nennt man *Rippenwirkungsgrad* η_{Ri} . Den tatsächlich übertragenen Wärmestrom erhalten wir aus Gl. (2.56). Damit ist der Rippenwirkungsgrad:

$$\eta_{Ri} = \frac{\dot{Q}_{x=0}}{\dot{Q}_{ideal}} = \frac{\lambda \cdot A \cdot m}{U \cdot \alpha_U \cdot h} \cdot \tanh(m \cdot h) = \frac{\tanh(m \cdot h)}{m \cdot h} \quad (2.58)$$

Bild 2.9 zeigt den Rippenwirkungsgrad als eine Funktion der charakteristischen Rippengröße $m \cdot h$.

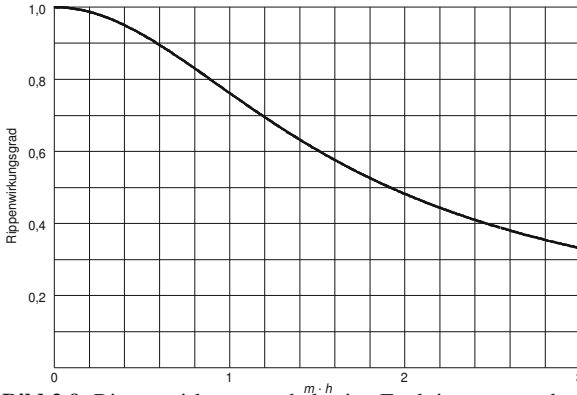


Bild 2.9: Rippenwirkungsgrad als eine Funktion von $m \cdot h$

Wie in Bild 2.8 schon gezeigt, ändern sich die Rippentemperaturen mit zunehmendem Wert der Größe $m \cdot h$ stärker. Damit sinkt der Rippenwirkungsgrad.

Der Rippenwirkungsgrad nimmt mit zunehmender Rippenhöhe h , Wärmeübergangszahl α_v und Umfang zum Querschnittsverhältnis U/A ab, mit zunehmender Wärmeleitfähigkeit der Rippe nimmt er zu.

Rippen sind dann wirtschaftlich, wenn die Mehrkosten für die Berippung zu einer insgesamt kostengünstigeren Lösung führen. Als Faustregel gilt: Der Rippenwirkungsgrad sollte größer als 0,8 sein. Deshalb wählt man Rippen mit großer Wärmeleitfähigkeit und einem möglichst günstigen Verhältnis des Umfangs zum Querschnitt. Berippte Oberflächen kommen hauptsächlich bei Gasen zur Anwendung.

2.1.6.5 Anwendbarkeit für andere Geometrien

Die hier angegebenen Beziehungen wurden für eine rechteckige Rippe hergeleitet. Da der Umfang der Rippe U und die Querschnittsfläche A nicht aus den geometrischen Abmessungen der Rippe angegeben wurden, gelten die Beziehungen ganz allgemein für alle Rippen, die eine konstante Querschnittsfläche A haben, wie z.B. Rundstäbe. Die in der Praxis oft verwendeten Rippenrohre werden in Kapitel 3 behandelt.

BEISPIEL 2.8: Erhöhung der Austauschfläche durch Rippen

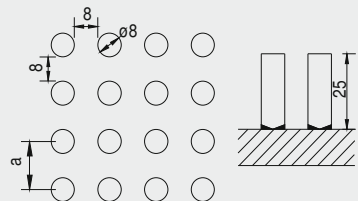
Ein Heizkessel hat als Wände ebene Stahlplatten. Um die Austauschfläche zu vergrößern, werden zylindrische Rippen des gleichen Materials mit 8 mm Durchmesser und 25 mm Höhe angebracht. Die Rippen sind angeschweißt und quadratisch angeordnet, der Abstand zwischen ihnen beträgt 8 mm. Die Wärmeübergangszahl außen ist $50 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, die Wärmeleitfähigkeit der Rippen $17 \text{ W}/(\text{m K})$. Die Temperatur der Wand beträgt 100°C , die der Umgebung 1000°C . Zu bestimmen sind:

- die Vergrößerung der Austauschfläche
- die Wärmestromdichte mit und ohne Rippen
- die Temperatur an den Rippenenden.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen



- Die Wärmeleitfähigkeit ist in der Wand und in den Rippen konstant.
- An den Enden der Rippen wird keine Wärme transferiert.
- Die Temperatur in der Rippe ändert sich nur in axiale Richtung.
- Die Rippen haben mit der Platte metallischen Kontakt.

Analyse

a) Pro Rippe wird die Fläche des Quadrates, das von den Rippenmitten gebildet wird, benötigt. Da der Abstand a der Rippenmitten 16 mm ist, wird pro Rippe eine Fläche von 256 mm² benötigt oder pro Quadratmeter Fläche können 3 906 Rippen angebracht werden. Die totale Austauschfläche ist die Fläche A der Platte, verringert um die Grundfläche A_0 der Rippen und vergrößert durch die Fläche A_{Ri} der Rippen. Die spezifische Vergrößerung der Fläche beträgt:

$$\frac{A_{tot}}{A} = \frac{A - A_0 + A_{Ri}}{A} = 1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_{Ri}^2}{a^2} + \pi \cdot \frac{d_{Ri} \cdot h}{a^2} = 3,258$$

b) Die Wärmestromdichte der unberippten Platte ist:

$$\dot{q}_{ohne} = \alpha_U \cdot (\vartheta_U - \vartheta_0) = 50 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K} \cdot (1000 - 100) \cdot K = 45 \frac{kW}{m^2}$$

Bei der berippten Platte reduziert sich wegen Verringerung der Plattenfläche einerseits der Wärmestrom zur Platte, andererseits wird durch die Rippen ein zusätzlicher Wärmestrom zugeführt. Bei den Rippen kann entweder der Wärmestrom pro Rippe mit Gl. (2.56) berechnet oder die Verringerung des Wärmestromes pro Rippe durch die Erwärmung der Rippe mit dem Rippenwirkungsgrad berücksichtigt werden. Hier folgen beide Methoden:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{mit} &= \frac{A - A_0}{A} \alpha_U \cdot (\vartheta_U - \vartheta_0) + \frac{1}{a^2} \cdot \dot{Q}_0 = \\ &= \left(1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_{Ri}^2}{a^2}\right) \cdot \alpha_U \cdot (\vartheta_U - \vartheta_0) + \frac{\lambda \cdot A_{QRi} \cdot \Delta \vartheta_0 \cdot m}{a^2} \cdot \tanh(m \cdot h) \end{aligned}$$

$$\dot{q}_{mit} = \frac{A - A_0 + A_{Ri} \cdot \eta_{Ri}}{A} \cdot \alpha_U \cdot (\vartheta_U - \vartheta_0) = \left(1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_{Ri}^2}{a^2} + \pi \cdot \frac{d_{Ri} \cdot h}{a^2} \cdot \eta_{Ri}\right) \cdot \alpha_U \cdot (\vartheta_U - \vartheta_0)$$

Für beide Gleichungen ist zunächst die Größe m zu bestimmen.

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_U \cdot U}{\lambda \cdot A_{QRi}}} = \sqrt{\frac{\alpha_U \cdot 4 \cdot \pi \cdot d_{Ri}}{\lambda \cdot \pi \cdot d_{Ri}^2}} = \sqrt{\frac{\alpha_U \cdot 4}{\lambda \cdot d_{Ri}}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 4}{17 \cdot 0,008 \cdot m^2}} = 38,35 \text{ m}^{-1}$$

Der Rippenwirkungsgrad ist: $\eta_{Ri} = \tanh(m \cdot h) / m \cdot h = 0,776$

Aus der oberen Gleichung erhalten wir für die Wärmestromdichte:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{mit} &= [\alpha_U - 0,25 \cdot \pi \cdot d_{Ri}^2 / a^2 \cdot (1 - \lambda \cdot m \cdot \tanh(m \cdot h))] \cdot (\vartheta_U - \vartheta_0) = \\ &= [50 - 3 \, 906 \cdot \pi / 4 \cdot 0,008^2 \cdot (50 - 17 \cdot 38,35 \cdot \tanh(38,35 \cdot 0,025))] \cdot 900 = 121,8 \frac{kW}{m^2} \end{aligned}$$

Die untere Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{mit} &= (1 - n \cdot \pi \cdot d_{Ri} \cdot (d_{Ri} / 4 - h \cdot \eta_{Ri})) \cdot 45 \cdot \frac{\text{kW}}{\text{m}^2} = \\ &= (1 - 3\,906 \cdot \pi \cdot 0,008 \cdot (0,002 - 0,025 \cdot 0,776)) \cdot 45 \cdot \frac{\text{kW}}{\text{m}^2} = \mathbf{121,8 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}}\end{aligned}$$

Durch das Anbringen der Rippen beträgt die Vergrößerung der Wärmestromdichte:

$$\dot{q}_{mit} / \dot{q}_{ohne} = \mathbf{2,708}$$

c) Mit Gl. (2.51) kann die Temperatur am Ende der Rippe berechnet werden.

$$\vartheta(h) = \vartheta_U + (\vartheta_0 - \vartheta_U) \cdot \frac{1}{\cosh(m \cdot h)} = 1000 \text{ °C} - \frac{900 \cdot \text{K}}{\cosh(38,35 \cdot 0,025)} = \mathbf{398 \text{ °C}}$$

Diskussion

Durch das Anbringen der Rippen vergrößert sich die Fläche auf das 3,258fache, die Wärmestromdichte auf das 2,7fache. Die geringere Erhöhung der Wärmestromdichte wird durch die Erwärmung der Rippen verursacht. Dadurch nimmt der Wärmetransfer zum Rippenende hin ab. Zur Bestimmung der Wärmestromdichte wurden zwei verschiedene Lösungen gewählt, die jedoch das gleiche Ergebnis liefern. Durch Umformung könnte man zeigen, dass beide Gleichungen identisch sind.

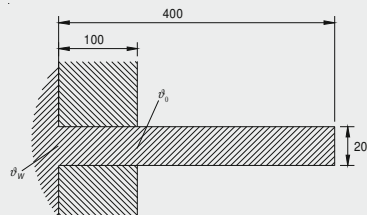
BEISPIEL 2.9: Wärmetransfer durch eine Halterung

Ein Behälter für heißen Dampf wurde zur Befestigung mit Stahlstäben von 400 mm Länge, 20 mm Dicke und 40 mm Breite versehen. Der Behälter hat eine Isolationsschicht von 100 mm Dicke, so dass sich die ersten 100 mm des Stabes in dieser Schicht befinden. Die Isolation kann als ideal angenommen werden. Die Wärmeübergangszahl außen am Stab ist $10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$. An der Behälterwand herrscht eine Temperatur von 150 °C , außen in der Umgebung die von 20 °C . Das Material des Stabes hat die Wärmeleitfähigkeit von $47 \text{ W}/(\text{m K})$. Zu berechnen sind:

- der Temperaturverlauf im Stab
- die Dicke der Isolation, damit die Stabtemperatur außerhalb der Isolation 90 °C nicht überschreitet.

Lösung

Schema Siehe Skizze



Annahmen

- Im Stab ist die Wärmeleitfähigkeit konstant.
- An den Enden der Rippen wird keine Wärme transferiert.
- Im Stab ändert sich die Temperatur nur entlang der Stabachse.
- Zwischen Behälter und Stab besteht metallischer Kontakt.

Analyse

a) Aus dem Teil des Stabes (den ersten 100 mm), der von der Isolierung umgeben ist, tritt seitlich keine Wärme aus. Daher kann dieser Teil als ebene Wand mit der Dicke s , der übrige Teil des Stabes als Rippe mit der Höhe h behandelt werden. Nach Gl. (2.6) ist der Wärmestrom in einer ebenen Wand:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} \cdot A \cdot (\vartheta_w - \vartheta_0)$$

Dieser Wärmestrom ist gleich jenem am Eintritt der Rippe nach Gl. (2.56).

$$\dot{Q} = \lambda \cdot A \cdot \Delta \vartheta_0 \cdot m \cdot \tanh(m \cdot h) = \lambda \cdot A \cdot (\vartheta_0 - \vartheta_U) \cdot m \cdot \tanh(m \cdot h)$$

Die Temperatur des Stabes am Ende der Isolation ist unbekannt. Beide Gleichungen werden gleichgesetzt und nach ϑ_0 aufgelöst.

$$\vartheta_0 = \frac{\vartheta_w + \vartheta_U \cdot s \cdot m \cdot \tanh(m \cdot h)}{s \cdot m \cdot \tanh(m \cdot h) + 1}$$

Zunächst muss noch die Größe m bestimmt werden.

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_U \cdot U}{\lambda \cdot A}} = \sqrt{\frac{\alpha_U \cdot 2 \cdot (a+b)}{\lambda \cdot a \cdot b}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 2 \cdot (0,02 + 0,04)}{47 \cdot 0,02 \cdot 0,04 \cdot \text{m}^2}} = 5,649 \text{ m}^{-1}$$

Für die Temperatur ϑ_0 erhalten wir damit:

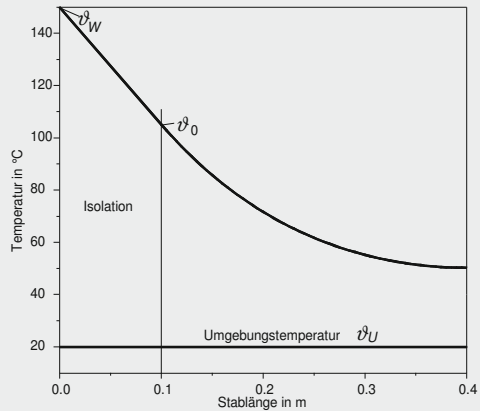
$$\vartheta_0 = \frac{150 \cdot ^\circ\text{C} + 20 \cdot ^\circ\text{C} \cdot 0,1 \cdot \text{m} \cdot 5,649 \cdot \text{m}^{-1} \cdot \tanh(5,649 \cdot 0,3)}{0,1 \cdot \text{m} \cdot 5,649 \cdot \text{m}^{-1} \cdot \tanh(5,649 \cdot 0,3) + 1} = 105,07 \text{ } ^\circ\text{C}$$

In den ersten 100 mm des Stabes fällt die Temperatur linear von 150 °C auf 105,07 °C. Außerhalb der Isolation kann der Temperaturverlauf mit Gl. (2.54) berechnet werden:

$$\vartheta(x) = \vartheta_U + (\vartheta_0 - \vartheta_U) \cdot \frac{\cosh[m \cdot (h - x)]}{\cosh(m \cdot h)}$$

Für die Temperaturen wurden folgende Werte ermittelt:

x m	$\vartheta(x)$ °C
0,00	150,00
0,10	105,07
0,13	92,76
0,16	82,53
0,19	74,11
0,22	67,25
0,25	61,74
0,28	57,44
0,31	54,22
0,34	51,98
0,37	50,66
0,40	50,23



Das Diagramm zeigt den Temperaturverlauf im Stab.

b) Zur Berechnung der Isolationsdicke, die zum Erreichen einer Stabtemperatur von 90 °C notwendig ist, kann man die Gleichung, die zur Bestimmung der Temperatur verwendet wurde, einsetzen. Die unbekannte Größe ist die Länge s . Für die Höhe h der Rippe wird $h = l - s$ eingesetzt.

$$\vartheta_0 = \frac{\vartheta_w + \vartheta_U \cdot s \cdot m \cdot \tanh[m \cdot (l - s)]}{s \cdot m \cdot \tanh[m \cdot (l - s)] + 1}$$

Diese Gleichung kann nicht nach s aufgelöst werden. Sie ist iterativ oder mit einem Gleichungslöser zu berechnen. Man erhält **0,179 m**.

Diskussion

Der Wärmestrom, der außen vom nicht isolierten Stab abgegeben wird, bestimmt die Temperaturänderung des Stabes im isolierten Teil. Außerhalb der Isolation nimmt die Temperatur im Stab relativ langsam ab. Am Stabende beträgt sie immer noch 55,2 °C, d.h., sie ist um 35 °C höher als die der Umgebung.

2.2 Instationäre Wärmeleitung

2.2.1 Eindimensionale instationäre Wärmeleitung

2.2.1.1 Bestimmung der zeitlichen Temperaturänderung

Bringt man einen Körper mit der Anfangstemperatur ϑ_A mit einem anderen Körper unterschiedlicher Temperatur in Kontakt, verändert sich die Temperatur im Körper sowohl örtlich als auch zeitlich. Im Körper findet *instationäre Wärmeleitung* statt.

Als Beispiel betrachten wir eine unendlich große, ebene Platte der Dicke $2s$, die die Anfangstemperatur ϑ_A hat und zur Zeit $t = 0$ mit einem Fluid tieferer Temperatur von ϑ_∞ in Kontakt gebracht wird (Bild 2.10). An der Oberfläche der Platte führt das Fluid Wärme ab.

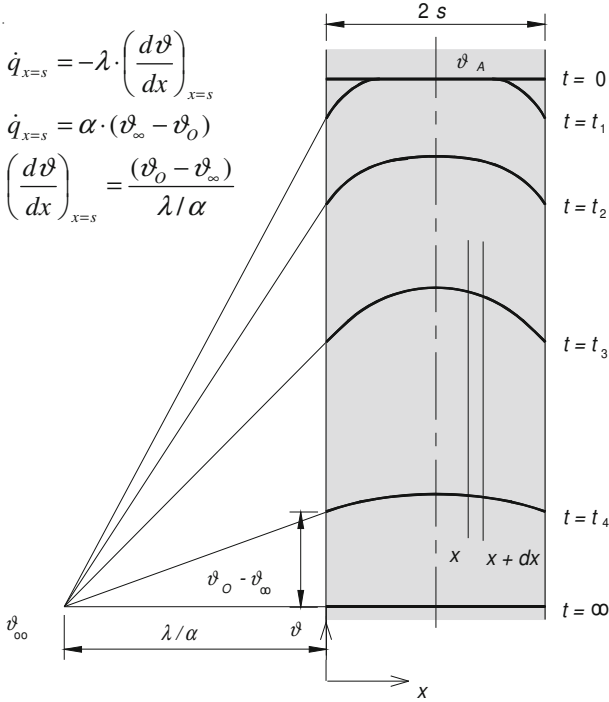


Bild 2.10: Temperaturverlauf in einer Platte während der Abkühlung

Bestimmend für den Wärmestrom von der Oberfläche zum Fluid sind die Wärmeübergangszahl α des Fluids und die Temperaturdifferenz zwischen der Oberfläche und dem Fluid. Durch Abkühlen der Oberfläche entsteht in der Platte ein Temperaturgradient und dementsprechend ein Wärmestrom. Die Temperaturverteilung in der Platte kennen wir noch nicht. Der dargestellte Temperaturverlauf zeigt nur, dass die Temperatur von der Plattenmitte zur Oberfläche hin abnimmt, mit der Zeit immer niedriger wird und nach unendlich langer Zeit den Wert von ϑ_∞ erreicht. Die Änderung des Wärmestromes im betrachteten Volumenelement der Platte wird nur durch die Änderung des Temperaturgradienten bewirkt. Durch den Wärmestrom sinkt mit der Zeit die Enthalpie (Wärmeinhalt) und damit die Temperatur des Volumenelementes. Die Tangenten der Temperaturgradienten an der Oberfläche der Platte schneiden die mit der Temperatur ϑ_∞ gebildeten Achse in einer Entfernung, die dem Quotienten λ / α entspricht.

Da die seitliche Ausdehnung der Platte als unendlich angenommen wurde, erfolgt der Wärmetransfer nur in x -Richtung. Der Wärmestrom zum Volumenelement

in x -Richtung an der Stelle x wird durch folgende partielle Differentialgleichung beschrieben:

$$\dot{Q}_x = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (2.59)$$

An Stelle $x + dx$ ist der Wärmestrom:

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} \cdot dx = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \lambda \cdot A \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \cdot dx \quad (2.60)$$

Die Änderung des Wärmestromes beträgt:

$$d\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+dx} - \dot{Q}_x = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \cdot dx \quad (2.61)$$

Da seitlich keine Wärme transferiert wird, entspricht die Änderung des Wärmestromes der zeitlichen Änderung der Enthalpie des Materials im Volumenelement. Den Wärmestrom aus dem Volumenelement bestimmt man folgendermaßen:

$$\delta \dot{Q}_x = -\rho \cdot A \cdot dx \cdot c_p \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (2.62)$$

Aus den Gln. (2.61) und (2.62) erhalten wir die Differentialgleichung für die zeitliche und örtliche Temperaturverteilung in der Platte.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad \text{mit} \quad a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad (2.63)$$

Die Größe a ist die *Temperaturleitfähigkeit* des Materials. Sie hat die Dimension m^2/s . Wie die Differentialgleichung zeigt, ist die Temperaturleitfähigkeit die einzige Stoffeigenschaft, die den zeitlichen Verlauf einer Abkühlung oder Erwärmung bestimmt. Die instationäre Wärmeleitung in einem Stoff wird nur durch Temperaturunterschiede und die Temperaturleitfähigkeit des Stoffes bestimmt. Metalle und Gase haben die größten Temperaturleitfähigkeiten. Dieses bedeutet, dass der Temperatursausgleich in Metallen und Gasen in etwa gleich schnell erfolgt. Flüssigkeiten und nicht metallische Stoffe haben kleinere Temperaturleitfähigkeiten, der Temperatursausgleich läuft dadurch dort langsamer ab.

Die allgemein gültige dreidimensionale Differentialgleichung für instationäre Wärmeleitung lautet:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} = a \cdot \nabla^2 \vartheta \quad (2.64)$$

Die Lösung für ein dreidimensionales Temperaturfeld ist bis auf einige Ausnahmen nur numerisch bestimmbar. Sie können für ein eindimensionales Temperaturfeld auch nur bei einfachen Geometrien angegeben werden, die Lösungen sind *Fourierreihen*. Für die eindimensionale Platte ist eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$\vartheta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_1 \cdot \cos(B \cdot x) + C_2 \cdot \sin(B \cdot x)] \cdot e^{-a \cdot C_3 \cdot t} \quad (2.65)$$

Für entsprechende Randbedingungen können die Konstanten B und C bestimmt werden. Falls die Wärmeübergangszahl außen unendlich groß ist (d.h., die äußere Wandtemperatur ist gleich der Temperatur des umgebenden Fluids), lautet die Lösung bei der unendlichen Platte:

$$\frac{\vartheta - \vartheta_{\infty}}{\vartheta_A - \vartheta_{\infty}} = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot a \cdot t}{4 \cdot s^2}} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot s} = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot Fo}{4}} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot s} \quad \text{mit } n = 1, 3, 5 \dots \quad (2.66)$$

Fourierreihen konvergieren zwar sehr schnell, die Berechnung der Reihen ist aber sehr zeitaufwändig. In den Bildern 2.11 bis 2.13 sind spezielle Lösungen für eine ebene Platte, einen Kreiszylinder und eine Kugel angegeben. Mit den Diagrammen können die Temperaturen in der Mitte und an der Oberfläche, außerdem die mittlere (kalorische) Temperatur des Körpers bestimmt werden.

In den Diagrammen werden folgende dimensionslose Kennzahlen verwendet:

$$\text{Dimensionslose Temperatur } \Theta: \quad \Theta = \frac{\vartheta - \vartheta_{\infty}}{\vartheta_A - \vartheta_{\infty}} \quad (2.67)$$

$$\text{Fourierzahl } Fo: \quad Fo = a \cdot t / s^2 \quad (2.68)$$

$$\text{Biotzahl } Bi: \quad Bi = \alpha \cdot s / \lambda \quad (2.69)$$

Die dimensionslose Temperatur gibt an, wie sich die Temperatur, bezogen auf die Außentemperatur ϑ_{∞} von der Anfangstemperatur ϑ_A beginnend zeitlich verändert.

Die *Fourierzahl* ist eine *dimensionslose Zeit*. Sie ist das Verhältnis des Wärmestromes zur zeitlichen Änderung des Wärmehaltes des Körpers.

Die *Biotzahl* ist eine *dimensionslose Wärmeübergangszahl*. Sie ist das Verhältnis der Wärmeübergangszahl außen am Körper zu derjenigen im Körper.

In den Diagrammen 2.11 bis 2.13 ist die dimensionslose Temperatur als eine Funktion der *Fourier-* und *Biotzahl* angegeben. Der Index O steht für die Temperatur an der Oberfläche und m für die Mitte des Körpers. Die dimensionslose mittlere Temperatur $\bar{\Theta}$ ist der integrierte Mittelwert der Temperatur im Körper. In den Diagrammen steht für die halbe Plattendicke die Größe X , für den Radius die Größe R .

Die nach einer gewissen Zeit entstandene Temperaturänderung kann aus dem Diagramm mit der *Fourier-* und *Biotzahl* bestimmt werden.

Die Zeit, in der eine bestimmte Temperaturänderung eintritt, kann man aus der *Fourierzahl* berechnen, die mit der dimensionslosen Temperatur und *Biotzahl* aus dem Diagramm ermittelt wird.

Die Wärmeübergangszahl, bei der eine Temperaturänderung in einer bestimmten Zeit erreicht wird, kann man aus der *Biotzahl* bestimmen, die mit der dimensionslosen Temperatur und *Fourierzahl* aus dem Diagramm ermittelt wird.

2.2.1.2 *Bestimmung der transferierten Wärme*

Mit der mittleren Temperatur ist die in einer bestimmten Zeit zu- oder abgeführte Wärme berechenbar. Mit der Anfangs- und mittleren Temperatur wird die Änderung der Enthalpie bestimmt. Sie ist:

$$Q = H - \bar{H} = m \cdot (h_A - \bar{h}) = m \cdot c_p \cdot (\vartheta_A - \bar{\vartheta}) \quad (2.70)$$

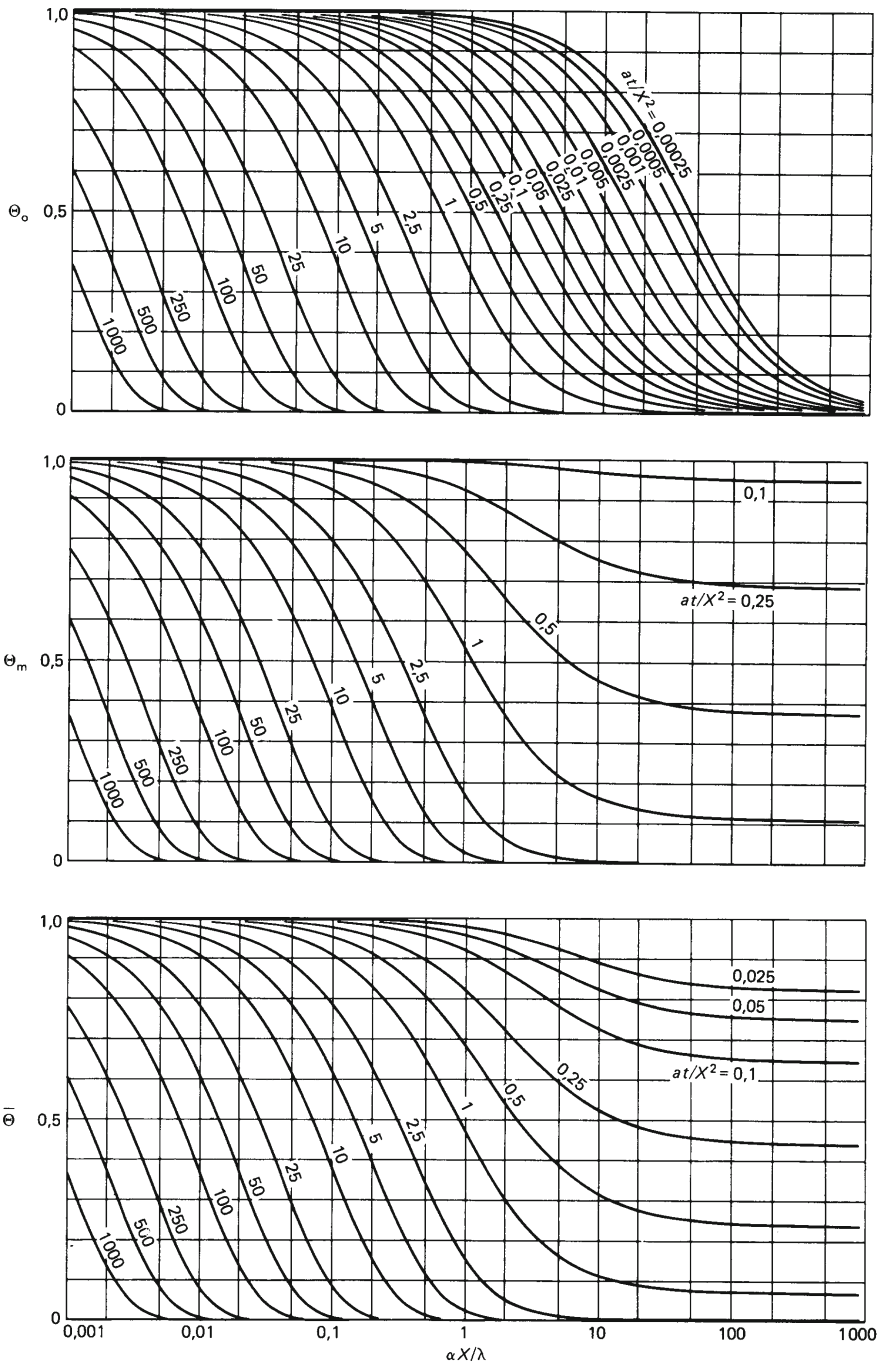


Bild 2.11: Temperaturverlauf der instationären Wärmeleitung in einer Platte [2.1]

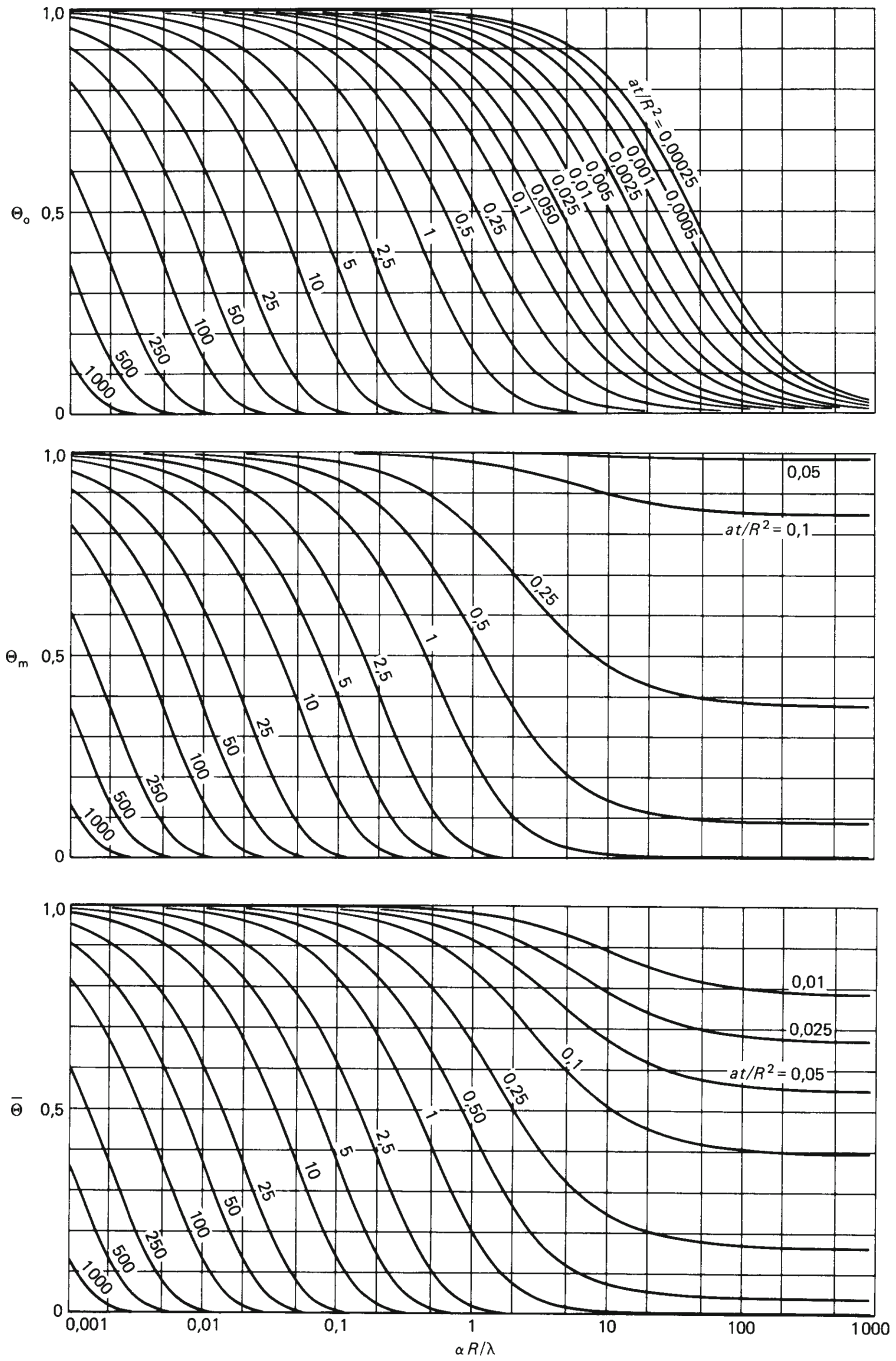


Bild 2.12: Temperaturverlauf der instationären Wärmeleitung in einem Kreiszylinder [2.1]

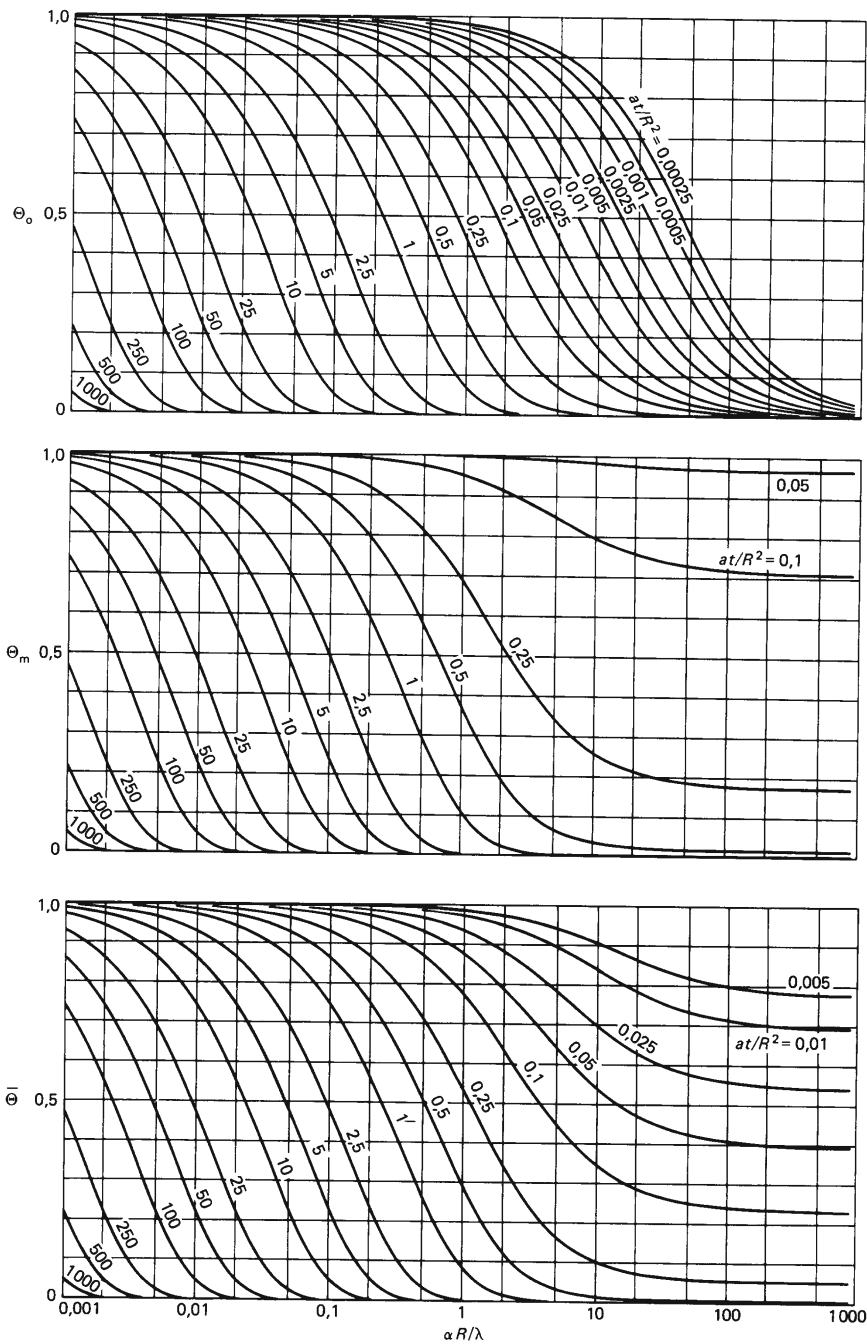


Bild 2.13: Temperaturverlauf der instationären Wärmeleitung in einer Kugel [2.1]

BEISPIEL 2.10: Kühlen einer Kunststoffplatte

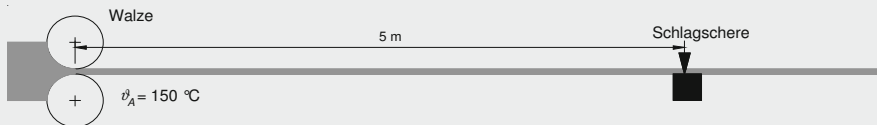
Aus einer Walze kommt mit $150\text{ }^{\circ}\text{C}$ eine 1 m breite und 4 mm dicke Kunststoffplatte. Sie wird mit Luft angeblasen und gekühlt. Danach werden mit einer Schlagschere, die 5 m von der Walze entfernt ist, Stücke von 2 m Länge abgeschnitten. Damit beim Schneiden keine unerwünschten plastischen Verformungen auftreten, muss die Temperatur bei der Schlagschere in der Plattenmitte niedriger als $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ sein. Die Temperatur der Luft ist $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ und die Wärmeübergangszahl $50\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$. Die Stoffwerte des Kunststoffes sind:

$$\rho = 2\,400\text{ kg}/\text{m}^3, \lambda = 0,8\text{ W}/(\text{m K}) c_p = 800\text{ J}/(\text{kg K}).$$

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Platte.
- Bestimmen Sie, welcher Wärmestrom abgeführt wird.

Lösung

Schema Siehe Skizze

**Annahmen**

- In der Platte sind die Stoffwerte konstant.
- Randeffekte dürfen vernachlässigt werden.
- Die Geschwindigkeit der Platte ist konstant.

Analyse

a) Die Geschwindigkeit der Platte kann ermittelt werden, wenn die Zeit, die für die Abkühlung der Plattenmitte von $150\text{ }^{\circ}\text{C}$ auf $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ benötigt wird, bestimmt ist. Dazu müssen zunächst die dimensionslose Temperatur und Biotzahl berechnet werden. Die dimensionslose Temperatur ist nach Gl. (2.67):

$$\Theta_m = \frac{\vartheta_m - \vartheta_{\infty}}{\vartheta_A - \vartheta_{\infty}} = \frac{50 - 25}{150 - 25} = 0,2$$

Die Biotzahl wird mit Gl. (2.69) bestimmt:

$$Bi = \frac{\alpha \cdot s}{\lambda} = \frac{50 \cdot \text{W} \cdot 0,002 \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{K}}{\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot 0,8 \cdot \text{W}} = 0,125$$

Aus dem mittleren Diagramm in Bild 2.11 erhält man die *Fourierzahl* als $Fo = 15$. Um aus ihr die Zeit bestimmen zu können, muss zunächst die Temperaturleitfähigkeit berechnet werden.

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} = \frac{0,8 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{\text{m} \cdot \text{K} \cdot 2\,400 \cdot \text{kg} \cdot 800 \cdot \text{J}} = 4,17 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Aus der *Fourierzahl* nach Gl. (2.68) erhalten wir für die Zeit:

$$t = \frac{Fo \cdot s^2}{a} = \frac{15 \cdot 0,002^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}}{4,17 \cdot 10^{-7} \cdot \text{m}^2} = 144 \text{ s}$$

Diese Zeit wird für die Abkühlung benötigt, wobei die Platte den Weg von 5 m zurücklegt, d.h., die Geschwindigkeit beträgt **0,0347 m/s**.

b) Um den Wärmestrom zu ermitteln, ist zunächst die spezifische Wärme, die pro kg der Platte abgeführt wird, zu bestimmen. Dieses kann mit Gl. (2.70) erfolgen. Dazu muss zunächst aus dem unteren Diagramm in Bild 2.11 die dimensionslose mittlere Temperatur $\bar{\vartheta}$ berechnet werden. Mit der *Fourierzahl* 15 und *Biotzahl* 0,125 erhalten wir: $\bar{\vartheta} = 0,17$. Die mittlere Temperatur der Platte ist damit nach 5 m:

$$\bar{\vartheta} = \vartheta_{\infty} + (\vartheta_A - \vartheta_{\infty}) \cdot \bar{\vartheta} = 25 \text{ °C} + (150 - 25) \cdot \text{K} \cdot 0,17 = 46,25 \text{ °C}$$

Dividiert man beide Seiten der Gl. (2.70) durch die Masse, erhält man die auf ein kg Masse bezogene spezifische Wärme q . Der Wärmestrom ist die spezifische Enthalpie, multipliziert mit dem Massenstrom. Dieser kann mit der aus der Strömungslehre bekannten Kontinuitätsgleichung berechnet werden.

$$\dot{m} = c \cdot \rho \cdot 2 \cdot s \cdot b = 0,0347 \cdot \text{m/s} \cdot 2\,400 \cdot \text{kg/m}^3 \cdot 2 \cdot 0,002 \cdot \text{m} \cdot 1 \cdot \text{m} = 0,333 \text{ kg/s}$$

Der Wärmestrom ist damit:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \dot{m} \cdot q = \dot{m} \cdot c_p \cdot (\vartheta_A - \bar{\vartheta}) = \\ &= 0,417 \cdot \text{kg/s} \cdot 800 \cdot \text{J/(kg} \cdot \text{K)} \cdot (150 - 46,25) \cdot \text{K} = \mathbf{27,67 \text{ kW}} \end{aligned}$$

Diskussion

Technische Probleme können einfach mit Hilfe der Diagramme berechnet werden. In der Wirklichkeit sind allerdings noch andere Effekte zu berücksichtigen. Üblicherweise wird ein Luftstrom parallel zur Platte geführt. Damit erwärmt sich die Luft, die Umgebungstemperatur ist nicht mehr konstant. Unter Berücksichtigung der Lufterwärmung ist eine schrittweise Berechnung durchzuführen. Wegen der Vielzahl der Rechenschritte sind entsprechende Computerprogramme notwendig.

BEISPIEL 2.11: Kühlen einer Bierdose

Für ein Fest sollen im Kühlschrank Bierdosen von 30 °C auf 4 °C mittlere Temperatur abgekühlt werden. Die Dose hat einen Durchmesser von 65 mm. Die Temperatur im Kühlschrank beträgt 1 °C, die Wärmeübergangszahl 10 W/(m² K). Das Material der Dose kann vernachlässigt werden. Die Stoffwerte des Bieres sind:

$$\rho = 1\,020 \text{ kg/m}^3, \lambda = 0,64 \text{ W/(m K)} \quad c_p = 4\,000 \text{ J/(kg K)}.$$

Bestimmen Sie die Abkühlzeit.

Lösung**Annahmen**

- Die Stoffwerte des Bieres sind konstant.
- Die Dose wird als unendlich lang angenommen.
- Die Temperatur und Wärmeübergangszahl im Kühlschrank sind konstant.

Analyse

Zur Berechnung der Abkühlzeit ist die dimensionslose mittlere Temperatur und Biotzahl zu ermitteln.

$$\bar{\Theta} = \frac{\bar{\vartheta} - \vartheta_{\infty}}{\vartheta_A - \vartheta_{\infty}} = \frac{4 - 1}{30 - 1} = 0,103 \quad Bi = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda} = \frac{10 \cdot \text{W} \cdot \text{m} \cdot \text{K} \cdot 0,0325 \cdot \text{m}}{\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot 0,64 \cdot \text{W}} = 0,51$$

Für die *Fourierzahl* erhalten wir aus dem untersten Diagramm in Bild 2.12 $Fo = 2,5$. Um aus ihr die Zeit zu bestimmen, muss zunächst die Temperaturleitfähigkeit berechnet werden.

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} = \frac{0,64 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{\text{m} \cdot \text{K} \cdot 1\,020 \cdot \text{kg} \cdot 4\,000 \cdot \text{J}} = 1,57 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Aus der *Fourierzahl* nach Gl. (2.68) erhalten wir für die Zeit:

$$t = \frac{Fo \cdot r^2}{a} = \frac{2,5 \cdot 0,0325^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}}{1,57 \cdot 10^{-7} \cdot \text{m}^2} = \mathbf{16\,834 \text{ s} = 4,7 \text{ h}}$$

Diskussion

Diese Berechnung erfolgte mit sehr vielen Annahmen. In Wirklichkeit ändern sich während des Abkühlprozesses im Kühlschrank die Wärmeübergangszahl und Temperatur. Die Annahme der unendlich langen Bierdose ist ebenfalls fraglich. Das Material der Dose beeinflusst die Berechnung praktisch nicht. Trotz der gemachten Annahmen stimmt die berechnete Zeit recht gut mit der Wirklichkeit überein. Ein von mir zu Hause durchgeführter Versuch ergab eine Zeit von ca. 5 h.

BEISPIEL 2.12: Kühlen eines Drahtes im Ölbad

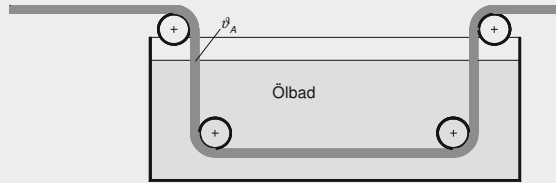
Ein Draht wird aus einer heißen Stahlmasse auf einen Durchmesser von 4 mm gezogen und anschließend in einem Ölbad, das eine Temperatur von 30 °C hat, abgekühlt. Die Temperatur des Drahtes vor dem Bad ist 600 °C. Die Wärmeübergangszahl im Bad beträgt 1 600 W/(m² K). Der Draht hält sich im Bad 5 Sekunden auf. Die Stoffwerte des Drahtes sind:

$$\rho = 8\,000 \text{ kg/m}^3, \lambda = 40 \text{ W/(m K)}, c_p = 800 \text{ J/(kg K)}.$$

Berechnen Sie die Temperaturen in der Mitte und an der Oberfläche des Drahtes beim Verlassen des Bades.

Lösung

Schema Siehe Skizze

**Annahmen**

- Die Stoffwerte des Drahtes sind konstant.
- Die Temperatur und Wärmeübergangszahl im Ölbad sind konstant.

Analyse

Zur Bestimmung der Temperaturen sind die *Fourier*- und *Biot*zahl zu berechnen. Für die *Fourier*zahl muss zunächst die Temperaturleitfähigkeit des Drahtes ermittelt werden.

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} = \frac{40 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{\text{m} \cdot \text{K} \cdot 8\,000 \cdot \text{kg} \cdot 800 \cdot \text{J}} = 6,25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

*Fourier*zahl:

$$Fo = \frac{t \cdot a}{r^2} = \frac{5 \cdot \text{s} \cdot 6,25 \cdot 10^{-6} \cdot \text{m}^2}{\text{s} \cdot 0,002^2 \cdot \text{m}^2} = 7,8$$

*Biot*zahl:

$$Bi = \frac{\alpha \cdot r}{\lambda} = \frac{1\,600 \cdot \text{W} \cdot 0,002 \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{K}}{\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot 40 \cdot \text{W}} = 0,08$$

Die dimensionslose Oberflächentemperatur erhalten wir aus dem oberen Diagramm, die Temperatur in der Mitte aus dem mittleren Diagramm in Bild 2.11 mit $\Theta_o = 0,26$ und $\Theta_m = 0,27$. Daraus errechnen sich folgende Temperaturen:

$$\vartheta_o = \vartheta_\infty + (\vartheta_A - \vartheta_\infty) \cdot \Theta_o = 30 \text{ °C} + (600 - 30) \cdot \text{K} \cdot 0,26 = \mathbf{178,2 \text{ °C}}$$

$$\vartheta_m = \vartheta_\infty + (\vartheta_A - \vartheta_\infty) \cdot \Theta_m = 30 \text{ °C} + (600 - 30) \cdot \text{K} \cdot 0,26 = \mathbf{183,9 \text{ °C}}$$

Diskussion

In diesem Bereich der Diagramme ist die Ablesegenauigkeit nicht mehr sehr gut. Die beiden Temperaturen sind schon fast gleich groß. Das Verfahren eignet sich jedoch für die Bestimmung der Endtemperatur auf $\pm 20^\circ\text{C}$ genau sehr gut.

BEISPIEL 2.13: Eier kochen

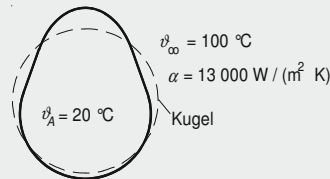
In einem Eierkocher werden Eier mit kondensierendem Dampf bei 100°C erwärmt. Zu Beginn der Erwärmung beträgt die Temperatur der Eier 20°C . Die Wärmeübergangszahl außen ist $13\,000\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$. Die Eier werden als Kugeln homogener Zusammensetzung mit 50 mm Durchmesser behandelt. Die Stoffwerte der Eier sind: $\rho = 1\,050\text{ kg}/\text{m}^3$, $\lambda = 0,5\text{ W}/(\text{m K})$, $c_p = 3,20\text{ kJ}/(\text{kg K})$.

Zu berechnen sind:

- die Temperatur, die nach 5 Minuten in der Mitte der Eier erreicht wird
- die Zeit, die bis zum Erreichen der gleichen Temperatur in einer Höhe von ca. $2\,500\text{ m}$, auf der die Kondensationstemperatur auf 80°C sinkt, benötigt wird.

Lösung

Schema Siehe Skizze

**Annahmen**

- Die Stoffwerte der Eier sind konstant.
- Die Eier sind näherungsweise als Kugeln homogener Zusammensetzung zu betrachten.
- Auf der Außenseite sind die Temperatur und Wärmeübergangszahl konstant.

Analyse

- Zur Bestimmung der Temperatur müssen die *Fourier-* und *Biotzahl* ermittelt und die Temperaturleitfähigkeit der Eier berechnet werden.

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} = \frac{0,5 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{\text{m} \cdot \text{K} \cdot 1\,050 \cdot \text{kg} \cdot 3\,200 \cdot \text{J}} = 1,49 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\text{Fourierzahl: } Fo = \frac{t \cdot a}{r^2} = \frac{300 \cdot \text{s} \cdot 1,49 \cdot 10^{-7} \cdot \text{m}^2}{\text{s} \cdot 0,025^2 \cdot \text{m}^2} = 0,071$$

$$\text{Biotzahl: } Bi = \frac{\alpha \cdot r}{\lambda} = \frac{13\,000 \cdot \text{W} \cdot 0,025 \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{K}}{\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot 0,5 \cdot \text{W}} = 650$$

Für die dimensionslose Temperatur in der Mitte erhalten wir aus dem mittleren Diagramm in Bild 2.13 mit $\Theta_m = 0,75$. Daraus errechnet sich folgende Temperatur:

$$\vartheta_m = \vartheta_\infty + (\vartheta_A - \vartheta_\infty) \cdot \Theta_m = 100^\circ\text{C} + (20 - 100) \cdot \text{K} \cdot 0,75 = 40^\circ\text{C}$$

b) Zur Bestimmung der Kochzeit muss die neue dimensionslose Mittentemperatur berechnet und aus dem Diagramm die *Fourierzahl* ermittelt werden.

$$\Theta_m = \frac{\vartheta_m - \vartheta_\infty}{\vartheta_A - \vartheta_\infty} = \frac{40 - 80}{20 - 80} = 0,67$$

Aus dem mittleren Diagramm in Bild 2.13 erhalten wir für die *Fourierzahl* $Fo = 0,115$. Die Kochzeit ist proportional zur *Fourierzahl* und damit:

$$t = 0,115 / 0,071 \cdot 5 \text{ min} = \mathbf{8,1 \text{ min}}$$

Diskussion

Obwohl sehr stark vereinfachende Annahmen wie z. B. die Kugelform und Homogenität der Eier gemacht wurden, sind die Ergebnisse recht gut. Eiweiß fängt bei 42°C an zu gerinnen. Die Eier wären also in der Mitte noch flüssig, aber nach außen hin hart, also so, wie ein gut gekochtes Ei sein sollte!

BEISPIEL 2.14: Erwärmen einer Spanplatte

Eine Spanplatte von 20 mm Dicke soll auf einer Seite mit einem Furnier versehen werden. Dazu muss die Seite, die furniert wird, eine Temperatur von 150°C haben. Die Platte wird auf einer Seite mit 200°C heißer Luft angeblasen. Die andere Seite liegt auf einer thermisch isolierenden Auflage, die als vollkommener Isolator angesehen werden darf, auf. Zu Beginn des Aufwärmvorganges ist die Temperatur der Spanplatte 20°C . Die Wärmeübergangszahl des Luftstromes beträgt $50 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$. Die Stoffwerte der Spanplatte sind:

$$\rho = 1500 \text{ kg}/\text{m}^3, \lambda = 1,0 \text{ W}/(\text{m K}) \quad c_p = 1200 \text{ J}/(\text{kg K}).$$

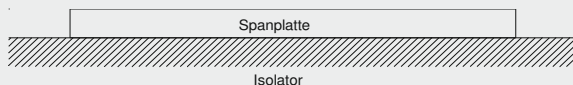
Zu berechnen sind:

- die für die Aufwärmung notwendige Zeit
- wie viel Heizenergie mehr benötigt wird beim beidseitigen Beheizen der Platte.

Lösung

Schema

Siehe Skizze



Annahmen

- Die Stoffwerte der Spanplatte sind konstant.
- Auf der unbeheizten Seite der Platte wird keine Wärme transferiert.
- In der Luft sind Temperatur und Wärmeübergangszahl konstant.

Analyse

a) Auf der thermisch isolierten Seite der Platte wird keine Wärme transferiert. Damit muss der Temperaturgradient dort gleich null sein. Der Temperaturverlauf in der Platte entspricht demjenigen in einer von beiden Seiten beheizten, doppelt so dicken Platte. Zur Ermittlung der Aufwärmzeit sind die dimensionslose Oberflächentemperatur und *Biotzahl* zu bestimmen.

Die dimensionslose Oberflächentemperatur ist:

$$\Theta_O = \frac{\vartheta_O - \vartheta_\infty}{\vartheta_A - \vartheta_\infty} = \frac{150 - 200}{20 - 200} = 0,28$$

Biotzahl:
$$Bi = \frac{\alpha \cdot 2 \cdot s}{\lambda} = \frac{50 \cdot \text{W} \cdot 0,02 \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{K}}{\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot 1 \cdot \text{W}} = 1$$

Die aus dem obersten Diagramm in Bild 2.11 ermittelte *Fourierzahl* ist $Fo = 1,25$. Um aus ihr die Zeit zu bestimmen, muss zunächst die Temperaturleitfähigkeit berechnet werden.

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} = \frac{1 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{\text{m} \cdot \text{K} \cdot 1500 \cdot \text{kg} \cdot 1200 \cdot \text{J}} = 5,56 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Aus der *Fourierzahl* nach Gl. (2.68) erhalten wir für die Zeit:

$$t = \frac{Fo \cdot (2 \cdot s)^2}{a} = \frac{1,25 \cdot 0,02^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}}{5,56 \cdot 10^{-7} \cdot \text{m}^2} = 900 \text{ s} = 15 \text{ min}$$

b) Die von der Platte pro Quadratmeter aufgenommene Wärme ist:

$$\frac{Q}{A} = \frac{m \cdot c_p \cdot (\bar{\vartheta} - \vartheta_A)}{A} = s \cdot \rho \cdot c_p \cdot (\bar{\vartheta} - \vartheta_A)$$

Aus dem unteren Diagramm in Bild 2.11 beträgt die dimensionslose mittlere Temperatur für $Bi = 1$ und $Fo = 1,25$: $\bar{\Theta} = 0,41$. Damit ist die mittlere Temperatur:

$$\bar{\vartheta} = \vartheta_\infty + (\vartheta_A - \vartheta_\infty) \cdot \bar{\Theta} = 200 \text{ °C} + (20 - 200) \cdot \text{K} \cdot 0,41 = 126,2 \text{ °C}$$

Für die pro Quadratmeter aufgenommene Wärme erhält man:

$$Q/A = s \cdot \rho \cdot c_p \cdot (\bar{\vartheta} - \vartheta_A) =$$

$$= 0,02 \cdot \text{m} \cdot 1500 \cdot \text{kg/m}^3 \cdot 1200 \cdot \text{J/(kg} \cdot \text{K)} \cdot (126,2 - 20) \cdot \text{K} = \mathbf{3\,823,2 \text{ kJ/m}^2}$$

Beheizte man die Platte von beiden Seiten, müsste zur Bildung der *Fourier*- und *Biot*zahl die halbe Plattendicke verwendet werden. Die *Biot*zahl wäre damit $Bi = 0,5$, die *Fourier*zahl $Fo = 2,6$. Die Aufwärmzeit wird, da die Plattendicke quadratisch in die Gleichung eingeht, auf 468 s verkürzt. Die dimensionslose mittlere Temperatur ist: $\bar{\Theta} = 0,31$. Die mittlere Temperatur und die pro Quadratmeter zugeführte Wärme ergeben sich als: $\bar{\vartheta} = 144,2 \text{ }^\circ\text{C}$ und $Q/A = \mathbf{4\,471,2 \text{ kJ/m}^2}$.

Diskussion

Platten, die auf einer Seite thermisch ideal isoliert sind, können bezüglich der Temperatur als Platte mit doppelter Dicke behandelt werden.

2.2.1.3 Spezielle Lösungen für kurze Zeiten

In Bild 2.10 erkennt man, dass bei der Zeit $t = t_1$ die Temperatur in der Plattenmitte von der Temperaturänderung noch nicht betroffen ist. In den Diagrammen 2.11 bis 2.13 sieht man ebenfalls, dass bei *Fourier*zahlen, die kleiner als 0,01 sind, in der Körpermitte keine Änderung der Temperatur auftritt. Für die kurzen Zeiten gilt folgende spezielle Lösung der Differentialgleichung (2.63):

$$\Theta = \text{erf}(x^*) + e^{-(x^*)^2} \cdot e^{(x^* + Bi^*)^2} \cdot [1 - \text{erf}(x^* - Bi^*)] \quad (2.71)$$

Das *Gauß'sche Fehlerintegral* ist *erf* (**error function**), x^* ein dimensionsloser Wandabstand, der auf $(a \cdot t)^{0,5}$ bezogen ist, und Bi^* die *Biot*zahl, die mit diesem Wandabstand gebildet wird.

Der dimensionslose Wandabstand x^* und die dimensionslose *Biot*zahl Bi^* sind folgendermaßen definiert:

$$x^* = \frac{x}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \quad Bi^* = \frac{\alpha \cdot \sqrt{a \cdot t}}{\lambda} \quad (2.72)$$

Das *Gauß'sche Fehlerintegral* ist definiert als:

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z e^{-x^2} \cdot dx \quad (2.73)$$

Es ist nur numerisch lösbar. Das Ergebnis ist in Bild 2.14 dargestellt.

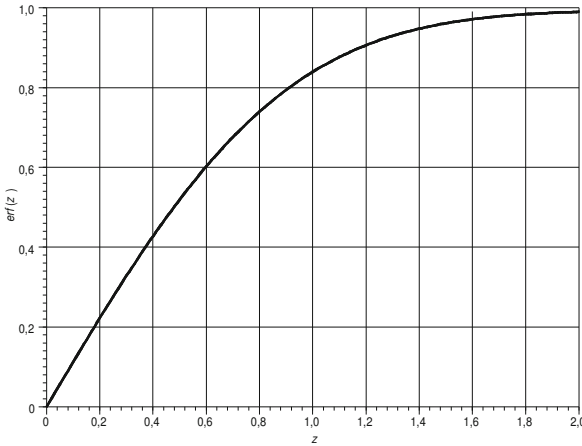


Bild 2.14: Das Gauß'sche Fehlerintegral

Bei kurzen Zeiten ist die Temperatur ϑ_m in der Mitte des Körpers gleich der Anfangstemperatur ϑ_A . Die Temperatur ϑ_o der Oberfläche erhält man bei $x = 0$. Sie beträgt:

$$\Theta_o = e^{Bi^{*2}} \cdot [1 - \text{erf}(Bi^*)] \quad (2.74)$$

Wenn Bi^* größer als 2 ist, kann Gl. (2.74) näherungsweise als

$$\Theta_o = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot Bi^*} \quad (2.75)$$

angegeben werden. Die Fehler sind kleiner als 1 %.

Bei unendlich großer Bi^* ist der Grenzwert der Gl. (2.71):

$$\Theta_o = \text{erf}(x^*) = \text{erf}\left(\frac{x}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}}\right) \quad (2.76)$$

An der Oberfläche des Körpers beträgt die momentane Wärmestromdichte:

$$\dot{q}_o(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} \cdot (\vartheta_A - \vartheta_o) = \frac{\sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c_p}}{\sqrt{\pi \cdot t}} \cdot (\vartheta_A - \vartheta_o) \quad (2.77)$$

Die in der Zeit t durch die Oberfläche A abgeführte Wärme erhält man durch Integration von Gl. (2.77) über die Zeit von null bis t .

$$Q_o(t) = A \cdot \int_0^t \dot{q}_o(t) \cdot dt = \frac{2 \cdot A \cdot \lambda \cdot t}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} \cdot (\vartheta_A - \vartheta_o) \quad (2.78)$$

Mit der Energiebilanzgleichung lässt sich die in der Zeit t abgeführte Wärme mit Gl. (2.70) bestimmen.

$$Q = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot (\vartheta_A - \bar{\vartheta}) \quad (2.79)$$

Für die mittlere Temperatur erhält man somit:

$$(\vartheta_A - \bar{\vartheta}) = \frac{2 \cdot A \cdot \lambda \cdot t}{V \cdot \rho \cdot c_p \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} \cdot (\vartheta_A - \vartheta_O) = \frac{2 \cdot A \cdot \sqrt{a \cdot t}}{V \cdot \sqrt{\pi}} \cdot (\vartheta_A - \vartheta_O) \quad (2.80)$$

Das Verhältnis der Oberfläche zum Volumen ist bei einer Platte $1/s$ (wobei zu beachten ist, dass s die halbe Plattendicke ist), beim Kreiszylinder $4/d$ und bei der Kugel $6/d$. Damit kann mit der aus Gl. (2.76) berechneten Oberflächentemperatur die mittlere Temperatur bestimmt werden.

Die Gleichungen (2.76) bis (2.80) gelten nur, wenn die *Biotzahl* sehr groß ist, d.h. wenn die Wärmeübergangszahl außen gegen unendlich geht.

2.2.2 Gekoppelte Systeme

Bringt man zwei Körper (Bild 2.15) unterschiedlicher Temperatur miteinander in Kontakt, stellt sich nach einer beliebig kurzen Zeit an der Oberfläche beider Körper die *Kontakttemperatur* ϑ_K ein.

Die beiden Körper können unterschiedliche Stoffeigenschaften haben. Da sie die gleiche Fläche für den Wärmetransfer aufweisen, muss der Wärmestrom in beiden Körpern gleich groß sein. Aus Gl. (2.77) erhalten wir:

$$\sqrt{\lambda_1 \cdot \rho_1 \cdot c_{p1}} \cdot (\vartheta_{A1} - \vartheta_K) = \sqrt{\lambda_2 \cdot \rho_2 \cdot c_{p2}} \cdot (\vartheta_K - \vartheta_{A2}) \quad (2.81)$$

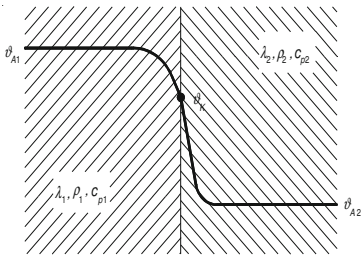


Bild 2.15: Berührung zweier Körper unterschiedlicher Temperatur

Die Kontakttemperatur ϑ_K ist:

$$\vartheta_K = \left(\vartheta_{A1} + \sqrt{\frac{\lambda_2 \cdot \rho_2 \cdot c_{p2}}{\lambda_1 \cdot \rho_1 \cdot c_{p1}}} \cdot \vartheta_{A2} \right) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\lambda_2 \cdot \rho_2 \cdot c_{p2}}{\lambda_1 \cdot \rho_1 \cdot c_{p1}}} \right)^{-1} \quad (2.82)$$

Mit Gl. (2.82) kann man erklären, warum sich verschiedene Körper unterschiedlich warm anfühlen. Die Kontakttemperaturen werden vom Verhältnis der Größen $(\lambda \cdot \rho \cdot c_p)^{0.5}$ in beiden Körpern, die als *Wärmeeindringkoeffizienten* bezeichnet werden, bestimmt. Eine Kupferplatte hat einen wesentlich größeren Wärmeeindringkoeffizienten als die menschliche Hand. Deshalb fühlt man in etwa die Temperatur der Kupferplatte. Bei einer Styroporplatte ist es umgekehrt, hier empfindet man eher die Temperatur der Hand.

Solange die Temperaturänderung keine tieferen Schichten des Körpers erreicht, bleibt die Kontakttemperatur konstant. Werden größere Schichten erfasst, kommt es zu einem allmählichen Temperatúrausgleich, der vom Wärmehalt beider Körper bestimmt wird. Dieses kann beispielsweise an einer Aluminiumfolie demonstriert werden. Fasst man eine sehr dünne, heiße Alufolie an, entsteht im ersten Moment eine Kontakttemperatur, die etwa der Temperatur der Alufolie entspricht. Da die Folie sehr dünn ist und so nur wenig Masse zum Speichern der Wärme hat, kühlt sie sehr schnell ab. Sie ist nicht in der Lage, die Haut so zu erwärmen, dass die Temperaturerhöhung zu den Nerven, mit denen die Temperatur registriert wird, gelangt. Die Folie fühlt sich nur mäßig warm an. Fasst man eine Aluminiumplatte gleicher Temperatur an, verbrennt man sich die Finger.

BEISPIEL 2.15: Berechnung der Kontakttemperatur

Ein Körper aus Styropor und einer aus Kupfer haben beide die Temperatur von 0 °C. Sie werden mit der Hand berührt. Die Stoffwerte sind:

Styropor:	$\rho = 15 \text{ kg/m}^3$	$\lambda = 0,029 \text{ W/(m K)}$	$c_p = 1\,250 \text{ J/(kg K)}$
Kupfer:	$\rho = 8\,300 \text{ kg/m}^3$	$\lambda = 372 \text{ W/(m K)}$	$c_p = 419 \text{ J/(kg K)}$
Hand:	$\rho = 1\,020 \text{ kg/m}^3$	$\lambda = 0,5 \text{ W/(m K)}$	$c_p = 2\,400 \text{ J/(kg K)}$

Berechnen Sie die Kontakttemperatur.

Lösung

Analyse

Die Kontakttemperatur kann mit Gl. (2.82) bestimmt werden. Zur Vereinfachung der Berechnung werden zuerst die Wärmeeindringkoeffizienten berechnet, die wir mit ξ bezeichnen.

$$\text{Styropor:} \quad \xi_{\text{Styropor}} = \sqrt{\rho \cdot c_p \cdot \lambda} = \sqrt{15 \cdot 1\,250 \cdot 0,029} = 23,3$$

$$\text{Kupfer:} \quad \xi_{\text{Kupfer}} = \sqrt{\rho \cdot c_p \cdot \lambda} = \sqrt{8\,300 \cdot 419 \cdot 372} = 35\,968$$

$$\text{Hand:} \quad \xi_{\text{Hand}} = \sqrt{\rho \cdot c_p \cdot \lambda} = \sqrt{1\,020 \cdot 2\,400 \cdot 0,5} = 1\,106$$

Die Kontakttemperatur zwischen Styropor und Hand ist:

$$\begin{aligned}
 K, \text{ Styropor-Hand} &= \frac{\vartheta_{A, \text{Hand}} + (\xi_{\text{Styropor}} / \xi_{\text{Hand}}) \cdot \vartheta_{A, \text{Styropor}}}{1 + (\xi_{\text{Styropor}} / \xi_{\text{Hand}})} = \\
 &= \frac{36 \text{ °C} + (23,3 / 1106) \cdot 0 \text{ °C}}{1 + 23,3 / 1106} = \mathbf{35,26 \text{ °C}}
 \end{aligned}$$

Die Kontakttemperatur zwischen Kupfer und Hand ist:

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{K, \text{Kupfer-Hand}} &= \frac{\vartheta_{A, \text{Hand}} + (\xi_{\text{Kupfer}} / \xi_{\text{Hand}}) \cdot \vartheta_{A, \text{Styropor}}}{1 + \xi_{\text{Kupfer}} / \xi_{\text{Hand}}} = \\
 &= \frac{36 \text{ °C} + (35\,968 / 1106) \cdot 0 \text{ °C}}{1 + 35\,968 / 1106} = \mathbf{1,07 \text{ °C}}
 \end{aligned}$$

Diskussion

Wegen des sehr kleinen Wärmeeindringkoeffizienten fühlt sich die Temperatur des 0 °C kalten Styropors handwarm an, bei Kupfer ist es umgekehrt.

2.2.3 Sonderfälle bei $Bi = 0$ und $Bi = \infty$

Geht die *Biotzahl* gegen null, d.h., die äußere Wärmeübergangszahl ist sehr klein bzw. die Wärmeleitfähigkeit des Material sehr groß, dann ist die Temperatur im Körper unabhängig vom Ort und daher nur noch von der Zeit abhängig.

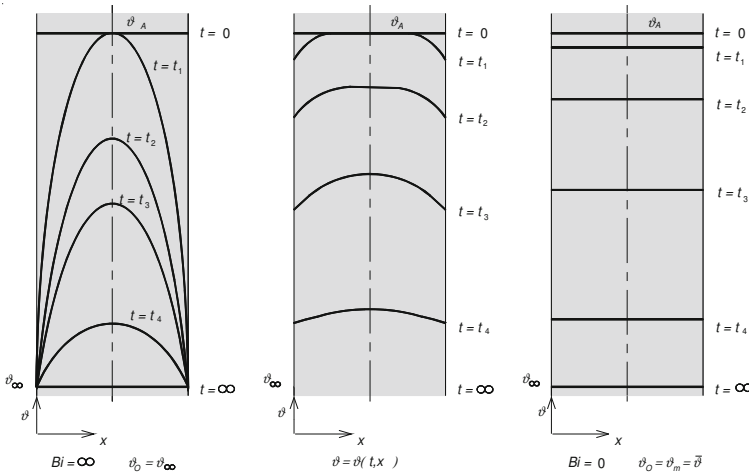


Bild 2.16: Temperaturverlauf bei Extremfällen

Bei sehr großen *Biotzahlen*, d.h., bei sehr großen äußeren Wärmeübergangszahlen oder sehr kleiner Wärmeleitfähigkeit der Körpers nähert sich die Oberflächentemperatur ϑ_o der Außentemperatur ϑ_∞ an.

Dieses Verhalten ist in Bild 2.16 dargestellt. Links ist der Temperaturverlauf bei $Bi = \infty$. Die Oberflächentemperatur ist gleich groß wie die Außentemperatur. Rechts im Bild bei $Bi = 0$ ist die Temperatur im Körper vom Ort unabhängig. Das Bild in der Mitte zeigt den Temperaturverlauf bei endlichen *Biotzahlen*. Die Temperatur ist von Ort und Zeit abhängig.

2.2.4 Temperaturänderung bei kleinen *Biotzahlen*

Bei vielen technischen Prozessen interessiert während der Abkühlung oder Erwärmung nicht die Temperaturverteilung im Körper, sondern die mittlere Temperaturänderung. Wie die Diagramme in den Bildern 2.11 bis 2.13 zeigen, ist bei kleinen *Biotzahlen* – d.h., die äußere Wärmeübergangszahl ist kleiner als die im Körper – zwischen den Oberflächen, der mittleren und der Temperatur in der Körpermitte nur ein kleiner Temperaturunterschied. Sind die *Biotzahlen* kleiner als 0,5, kann man mit recht guter Genauigkeit die Berechnungen so durchführen, dass die Temperatur im ganzen Körper als mittlere Temperatur angenommen wird. Bei *Biotzahlen*, die kleiner als 1 sind, ist für Abschätzungen eine so durchgeführte Berechnung immer noch zulässig.

2.2.4.1 Ein kleiner Körper taucht in ein Fluid großer Masse

Ein kleiner Körper mit der Masse m_1 , der Wärmekapazität c_{p1} und Temperatur ϑ_{A1} wird in ein Fluid mit der Temperatur ϑ_{A2} eingetaucht (Bild 2.17).

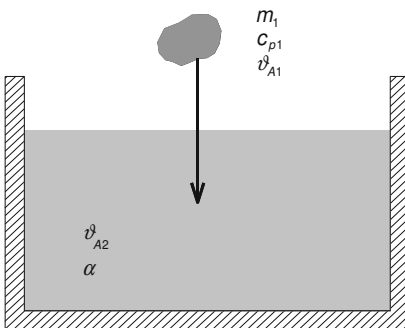


Bild 2.17: Ein Körper kleiner Masse taucht in ein Fluid großer Masse ein

Die Masse (Wärmekapazität) des Fluids wird als so groß angenommen, dass durch das Eintauchen des Körpers keine Temperaturänderung im Fluid auftritt. An der Oberfläche des Körpers ist die Wärmeübergangszahl α . Die Wände des Behälters sind nach außen isoliert. Der Wärmestrom, der vom Körper zum Fluid geht, ist die zeitliche Änderung der Enthalpie des Körpers.

$$\dot{Q} = -m_1 \cdot c_{p1} \cdot \frac{d\vartheta_1}{dt} \quad (2.83)$$

Der Wärmestrom wird aber von der Wärmeübergangszahl und Temperaturdifferenz zwischen dem Fluid und Körper bestimmt. Beachtet man, dass bei einer Abkühlung des Körpers seine Temperaturänderung negativ und die Temperaturdifferenz positiv ist, gilt:

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_{A2}) \quad (2.84)$$

Beide Gleichungen gleichgesetzt, ergeben folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = -\frac{\alpha \cdot A}{m_1 \cdot c_{p1}} \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_{A2}) \quad (2.85)$$

Wird die Temperatur ϑ_1 durch die Temperaturdifferenz $\vartheta_1 - \vartheta_{A2}$ substituiert, erhalten wir nach Separation der Variablen:

$$\frac{d(\vartheta_1 - \vartheta_{A2})}{\vartheta_1 - \vartheta_{A2}} = -\frac{\alpha \cdot A}{m_1 \cdot c_{p1}} \cdot dt \quad (2.86)$$

Konstante Wärmeübergangszahl und konstante Stoffwerte vorausgesetzt, kann diese Gleichung integriert werden.

$$(\vartheta_1 - \vartheta_{A2}) = (\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2}) \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot A}{m_1 \cdot c_{p1}} t} \quad (2.87)$$

Bild 2.18 zeigt den zeitlichen Verlauf der Abkühlung des Körpers. Die Temperatur des Körpers nähert sich mit zunehmender Zeit der Fluidtemperatur asymptotisch.

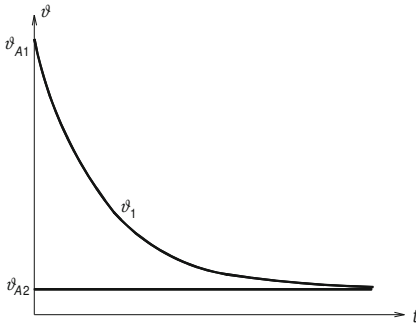


Bild 2.18: Temperaturverlauf bei der Abkühlung des Körpers

Für die dimensionslose Darstellung müssen die dimensionslose Temperatur Θ und dimensionslose Zeit τ folgendermaßen gebildet werden:

$$\Theta = \frac{\vartheta_{A1} - \vartheta_1}{\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2}} = 1 - e^{-\tau} \quad \text{mit:} \quad t_0 = \frac{\alpha \cdot A}{m_1 \cdot c_{p1}} \quad \tau = \frac{t}{t_0}$$

Die Zeit t_0 ist die Zeit, in der der eingetauchte Körper bei 1 K Temperaturdifferenz zum umgebenden Fluid um 1 K erwärmt wird. Bild 2.19 zeigt den dimensionslosen Temperaturverlauf.

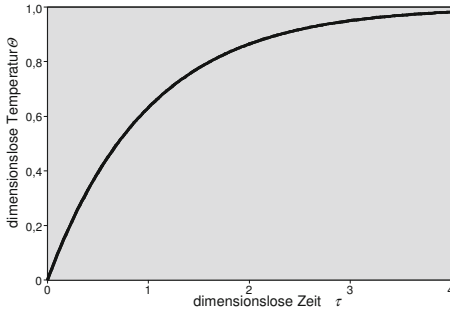


Bild 2.19: Dimensionslose Darstellung des zeitlichen Temperaturverlaufs

BEISPIEL 2.16: Härten von Stahlwerkstücken

Zylinderförmige Stahlwerkstücke mit einer Masse von 1,2 kg, einer Oberfläche von 300 cm² und einem Durchmesser von 20 mm sollen zum Härten in einem Ölbad von 800 °C auf 300 °C abgekühlt werden. Das Ölbad hat eine Temperatur von 50 °C, die Wärmeübergangszahl beträgt 600 W/(m² K).

Die Stoffwerte des Stahls sind: $\lambda = 47$ W/(m K), $c_p = 550$ J/(kg K).

Welche Zeit wird für die Abkühlung benötigt?

Lösung

Annahme

- Die Temperatur und Wärmeübergangszahl des Ölbad sind konstant.

Analyse

Zunächst muss geprüft werden, wie groß die Biotzahl ist.

$$Bi = \alpha \cdot r / \lambda = 600 \cdot 0,01 / 47 = 0,128$$

Damit ist die Bedingung erfüllt, dass $Bi < 0,5$ ist. Die Auskühlzeit kann mit Gl. (2.87) berechnet werden.

$$t = \frac{m_1 \cdot c_{p1}}{\alpha \cdot A} \ln \left(\frac{\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2}}{\vartheta_1 - \vartheta_{A2}} \right) = \frac{1,2 \cdot \text{kg} \cdot 550 \cdot \text{J} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{kg} \cdot \text{K} \cdot 600 \cdot \text{W} \cdot 0,03 \cdot \text{m}^2} \cdot \ln \left(\frac{800 - 50}{300 - 50} \right) = 40,2 \text{ s}$$

Diskussion

Die Berechnung ist relativ einfach. Aus den Diagrammen in Bild 2.12 erhält man einen Wert von 46,8 s, also beträgt der Fehler 14 %. Es wäre hier zu prüfen, ob dieser Fehler mit dem Härteverfahren vereinbar ist.

2.2.4.2 Ein Körper taucht in ein Fluid mit vergleichbarer Masse

Bild 2.20 zeigt das Eintauchen eines Körpers in ein isoliertes, mit einem Fluid gefülltes Becken mit einer relativ kleinen Wärmekapazität $m_2 \cdot c_{p2}$. Beim Eintauchen hat der Körper die Temperatur ϑ_{A1} , das Fluid ϑ_{A2} .

Die Masse und die spezifische Wärmekapazität des Körpers haben den Index 1, die des Fluids den Index 2. Da die Wärmekapazität des Fluids nicht mehr sehr groß ist, wird durch das Eintauchen des Körpers dessen Temperatur verändert.

Der vom Körper abgegebene Wärmestrom ist die zeitliche Änderung der Enthalpie des Körpers.

$$-\dot{Q} = m_1 \cdot c_{p1} \cdot \frac{d\vartheta_1}{dt} \quad (2.88)$$

Der vom Fluid aufgenommene Wärmestrom ist entgegengesetzt gleich groß wie die zeitliche Änderung der Enthalpie des Fluids.

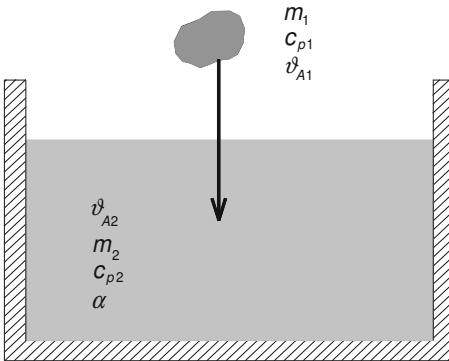


Bild 2.20: Ein Körper kleiner Masse taucht in ein Fluid vergleichbarer Masse ein

$$\dot{Q} = m_2 \cdot c_{p2} \cdot \frac{d\vartheta_2}{dt} \quad (2.89)$$

Der Wärmestrom wird von der Wärmeübergangszahl und Temperaturdifferenz zwischen Fluid und Körper bestimmt.

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (2.90)$$

Für die Änderung der Temperaturdifferenz zwischen Fluid und Körper erhält man aus den Gln. (2.88) und (2.89):

$$d(\vartheta_1 - \vartheta_2) = -\dot{Q} \cdot \left[\frac{1}{m_1 \cdot c_{p1}} + \frac{1}{m_2 \cdot c_{p2}} \right] \cdot dt \quad (2.91)$$

Aus Gl. (2.90) kann der Wärmestrom in Gl. (2.91) eingesetzt werden.

$$\frac{d(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{(\vartheta_1 - \vartheta_2)} = \alpha \cdot A \cdot \left[\frac{1}{m_1 \cdot c_{p1}} + \frac{1}{m_2 \cdot c_{p2}} \right] \cdot dt \quad (2.92)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Massen, die Wärmeübergangszahl und spezifischen Wärmekapazitäten konstant sind, kann Gl. (2.92) integriert werden. Die Integration erfolgt von der Zeit $t = 0$ bis t und von den Anfangstemperaturen ϑ_{A1} und ϑ_{A2} bis zu den Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 .

$$\ln \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{(\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2})} = -\alpha \cdot A \cdot \left[\frac{1}{m_1 \cdot c_{p1}} + \frac{1}{m_2 \cdot c_{p2}} \right] \cdot t \quad (2.93)$$

Für die Temperaturdifferenz zwischen dem Körper und Fluid erhält man:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = (\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2}) \cdot \exp \left[-\alpha \cdot A \left(\frac{1}{m_1 \cdot c_{p1}} + \frac{1}{m_2 \cdot c_{p2}} \right) \cdot t \right] \quad (2.94)$$

Mit Gl. (2.94) kann die Temperaturdifferenz zwischen dem Fluid und Körper, nicht aber die Temperatur des Körpers oder Fluids bestimmt werden. Die Temperatur des Körpers und Fluids können aus den Gleichungen (2.88) und (2.89) für jede beliebige Zeit ermittelt werden. Da in den Gleichungen die Massen und spezifischen Wärmekapazitäten konstant sind, kann die in der Zeit t ab- und zugeführte Wärme berechnet werden.

$$\begin{aligned} Q(t) &= m_1 \cdot c_{p1} \cdot (\vartheta_{A1} - \vartheta_1) \\ Q(t) &= m_2 \cdot c_{p2} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_{A2}) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Gl. (2.95) gilt auch für eine unendlich lange Zeit, bei der ein Temperaturnausgleich zwischen dem Körper und Fluid erreicht wird. Die Temperatur nach dem Ausgleich ist:

$$\vartheta_{\infty} = \frac{m_1 \cdot c_{p1} \cdot \vartheta_{A1} + m_2 \cdot c_{p2} \cdot \vartheta_{A2}}{m_1 \cdot c_{p1} + m_2 \cdot c_{p2}} \quad (2.96)$$

Für die Temperaturänderungen erhält man aus den Gln. (2.95) und (2.96):

$$\frac{\vartheta_{A1} - \vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_{A2}} = \frac{\vartheta_{A1} - \vartheta_{\infty}}{\vartheta_{\infty} - \vartheta_{A2}} = \frac{m_2 \cdot c_{p2}}{m_1 \cdot c_{p1}} \quad (2.97)$$

Gl. (2.97) kann nach ϑ_1 oder ϑ_2 aufgelöst und in Gl. (2.94) eingesetzt werden. Damit erhält man die Temperatur des Körpers und Fluids.

$$\vartheta_1 - \vartheta_{\infty} = (\vartheta_{A1} - \vartheta_{\infty}) \cdot \exp \left[-\alpha \cdot A \cdot \left(\frac{1}{m_1 \cdot c_{p1}} + \frac{1}{m_2 \cdot c_{p2}} \right) \cdot t \right] \quad (2.98)$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_{\infty} = (\vartheta_{A2} - \vartheta_{\infty}) \cdot \exp \left[-\alpha \cdot A \cdot \left(\frac{1}{m_1 \cdot c_{p1}} + \frac{1}{m_2 \cdot c_{p2}} \right) \cdot t \right] \quad (2.99)$$

Der Temperaturverlauf ist in Bild 2.21 dargestellt.

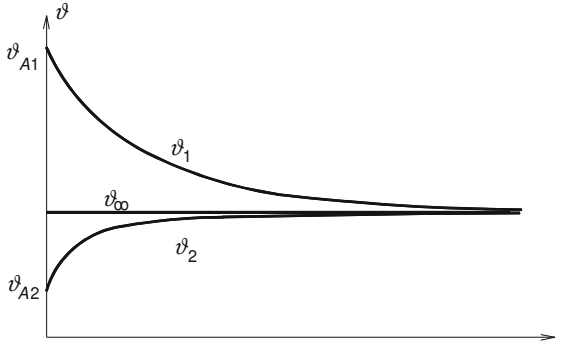


Bild 2.21: Temperaturverlauf bei der Abkühlung des Körpers mit Änderung der Fluidtemperatur

2.2.4.3 Wärmetransfer durch einen strömenden Wärmeträger

Bild 2.22 zeigt einen nach außen isolierten Behälter mit einem Fluid, das durch einen strömenden Wärmeträger aufgeheizt oder abgekühlt wird.

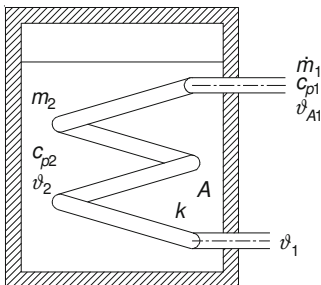


Bild 2.22: Erwärmung oder Abkühlung eines Fluids durch einen strömenden Wärmeträger

Das Fluid ist durch eine Wand vom Wärmeträger getrennt. Die Temperatur des Fluids ist zu Beginn der Erwärmung oder Abkühlung gleich ϑ_{A2} . Der Wärmeträger hat am Eintritt die Temperatur ϑ_{A1} , am Austritt ϑ_1 . Er wird durch das Fluid gekühlt oder erwärmt. Die Wärmeübertragung erfolgt mit einer konstanten Wärmedurchgangszahl. Nach unendlich langer Zeit nimmt das Fluid die Eintrittstemperatur des Wärmeträgers an, die Wärmeträgertemperatur verändert sich nicht mehr. Unter der Voraussetzung, dass der Massenstrom des Wärmeträgers, die Wärmedurchgangszahl, die spezifischen Wärmekapazitäten und örtlichen Fluidtemperaturen konstant sind, können die Temperaturänderung des Fluids und die des Wärmeträgers am Austritt berechnet werden. Ohne auf die Herleitung einzugehen, sind hier die Ergebnisse dargestellt.

$$\vartheta_{A1} - \vartheta_2 = (\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2}) \cdot \exp \left\{ \left[\frac{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}}{m_2 \cdot c_{p2}} \cdot \left(\exp \left(\frac{-k \cdot A}{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}} \right) - 1 \right) \right] \cdot t \right\} \quad (2.100)$$

BEISPIEL 2.17: Kühlen eines Drahtes im Wasserbad

Ein Draht mit 2 mm Durchmesser und einer Temperatur von 300 °C wird durch ein Wasserbad geführt, um ihn dort abzukühlen. Er bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 0,5 m/s durch das Bad und befindet sich auf 5 m Länge im Wasser. Das Wasser hat eine Masse von 5 kg und zu Beginn des Prozesses eine Temperatur von 20 °C. Stoffwerte des Drahtes: $\rho = 8\,000 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 47 \text{ W/(m K)}$, $c_p = 550 \text{ J/(kg K)}$. Die Wärmeübergangszahl im Bad ist 1 200 W/(m² K) und die spezifische Wärmekapazität des Wassers beträgt $c_{p2} = 4\,192 \text{ (J/kg K)}$. Nach welcher Zeit muss das Wasser ausgewechselt werden, wenn die Temperatur des Drahtes nach Verlassen des Wasserbades nicht über 100 °C sein darf?

Lösung

Annahmen

- Die Stoffwerte sind konstant.
- Die Eintrittstemperatur des Drahtes ist konstant.
- Die Temperatur und Wärmeübergangszahl des Wasserbades sind konstant.

Analyse

Hier müssen wir mit Gl. (2.87) bestimmen, bei welcher Wassertemperatur die Temperatur des Drahtes am Austritt aus dem Bad 100 °C überschreitet. Zunächst wird die Zeit, die bis zur Erwärmung des Bades auf diese Temperatur vergeht, berechnet. Der Draht wird als strömender Wärmeträger behandelt. Jetzt muss geprüft werden, wie groß die Biotzahl ist. $Bi = \rho \cdot r / \lambda = 1\,200 \cdot 0,001 / 47 = 0,026$. Damit ist die Bedingung erfüllt, dass $Bi < 0,5$ ist. Die Temperatur des Bades kann mit Gl.

(2.87) berechnet werden. Der Draht befindet sich 10 Sekunden lang im Bad. Aus Gl. (2.87) ist ersichtlich, dass die Länge des Drahtes für die Abkühlung keine Rolle spielt. Im Exponent steht der Ausdruck A/m_1 . Berechnet man die Oberfläche des Drahtes und seine Masse, fällt die Länge weg. Dieses ist gültig, solange die Stirnfläche keine Rolle spielt, was bei diesem Beispiel zutrifft.

$$\begin{aligned}(\vartheta_1 - \vartheta_{A2}) &= (\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2}) \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot A}{m_1 \cdot c_{p1}} \cdot t} = (\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2}) \cdot \exp\left(-\frac{4 \cdot \alpha \cdot \pi \cdot d \cdot l}{\rho \cdot \pi \cdot d^2 \cdot l \cdot c_{p1}} \cdot t\right) = \\ &= (\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2}) \cdot \exp\left(-\frac{4 \cdot \alpha}{\rho \cdot d \cdot c_{p1}} \cdot t\right)\end{aligned}$$

Bei der gegebenen Austrittstemperatur von $\vartheta_1 = 100^\circ\text{C}$ kann die Temperatur ϑ_{A2} bestimmt werden.

$$\vartheta_{A2} = \frac{\vartheta_{A1} \cdot \exp\left(-\frac{4 \cdot \alpha}{\rho \cdot d \cdot c_{p1}} \cdot t\right) - \vartheta_1}{\exp\left(-\frac{4 \cdot \alpha}{\rho \cdot d \cdot c_{p1}} \cdot t\right) - 1} = \frac{300 \cdot e^{-\frac{4 \cdot 1200}{8000 \cdot 0,002 \cdot 550} \cdot 10} - 100}{e^{-\frac{4 \cdot 1200}{8000 \cdot 0,002 \cdot 550} \cdot 10} - 1} \cdot ^\circ\text{C} = 99,14^\circ\text{C}$$

Mit Gl. (2.100) kann die Zeit berechnet werden, in der sich das Wasser von 20°C auf $99,14^\circ\text{C}$ erwärmt. In der Gleichung benötigt man den Massenstrom und die Oberfläche.

$$\begin{aligned}\dot{m}_1 &= c \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \rho_1 = \\ &= 0,5 \cdot \text{m/s} \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot 0,002^2 \cdot \text{m}^2 \cdot 8000 \cdot \text{kg/m}^3 = 0,01257 \text{ kg/s} \\ A &= \pi \cdot d \cdot l = \pi \cdot 0,002 \cdot \text{m} \cdot 5 \cdot \text{m} = 0,0314 \text{ m}^2\end{aligned}$$

$$t = \frac{\ln \frac{\vartheta_{A1} - \vartheta_2}{\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2}}}{\frac{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}}{m_2 \cdot c_{p2}} \cdot \left[e^{\left(\frac{-\alpha \cdot A}{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}} \right)} - 1 \right]} = \frac{\ln \frac{300 - 99,14}{300 - 20}}{\frac{0,01257 \cdot 550}{5 \cdot 4192} \cdot \left[e^{\left(\frac{-1200 \cdot 0,0314}{0,01257 \cdot 550} \right)} - 1 \right]} = 1012 \text{ s}$$

Diskussion

Dieses Beispiel zeigt, dass auch bewegte feste Körper einen Massenstrom haben können. Die Kombination des bewegten Wärmeträgers und die Abkühlung des festen Körpers erlauben die Berechnung des Problems.

2.2.5 Numerische Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichung

In Kapitel 2.2.1.1 wurde die instationäre Wärmeleitungsgleichung (2.64) hergeleitet. Anschließend wurde eine Reihe von Lösungen für vergleichsweise einfache Geometrien angegeben, für die eindimensionale Wärmeleitung angenommen werden darf. Für die Bestimmung einer Temperaturverteilung in komplizierteren Geometrien mit mehrdimensionaler Wärmeleitung werden numerische Lösungsverfahren benutzt, die in Form von Computerprogrammen implementiert sind. Nachfolgend sollen einige wesentliche Grundlagen der numerischen Lösungsverfahren anhand der Methode der finiten Differenzen beleuchtet werden.

2.2.5.1 Diskretisierung

Für die Betrachtungen nutzen wir das Beispiel eines zylindrischen Stabes mit der Anfangstemperatur ϑ_A , der an der gesamten Mantelfläche und an einem Ende adiabatisch ist. An seinem anderen Ende wird er zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ mit einem Körper der Temperatur ϑ_∞ in Kontakt gebracht. In Bild 2.23 ist der Temperaturverlauf im Stab zu verschiedenen Zeitpunkten $t \geq 0$ skizziert.

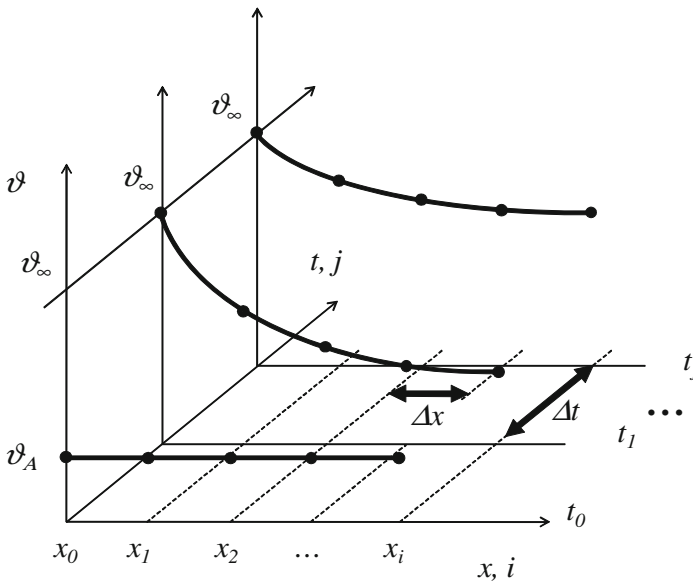


Bild 2.23: Zeitliche Entwicklung des Temperaturverlaufs in einem adiabaten Stab

Statt des kontinuierlichen Temperaturverlaufs $\vartheta(x, t)$ können auch Temperaturen $\vartheta(x_p, t_j)$ an einer begrenzten Anzahl von Punkten in Raum und Zeit bestimmt werden. Solche Punkte und die zugehörigen Temperaturwerte sind in Bild 2.23 eben-

falls eingezeichnet. Die Ermittlung der Temperatur in solchen diskreten Punkten ist mathematisch erheblich einfacher als die analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung, wie nachfolgend gezeigt wird.

Hierfür muss zunächst die Wärmeleitungsgleichung in eine diskretisierte Form überführt werden. Die mathematische Basis für diese Überführung ist die *Taylorreihe* für eine beliebige Funktion f :

$$f(\xi + \Delta\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n f}{\partial \xi^n} \bigg|_{\xi} \frac{(\Delta\xi)^n}{n!} \quad (2.101)$$

Schreibt man diese Reihe bis zum vierten Reihenglied für den linken und rechten Nachbarpunkt von ξ aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} f(\xi + \Delta\xi) &= f(\xi) + f'(\xi)\Delta\xi + f''(\xi)\frac{(\Delta\xi)^2}{2} + f'''(\xi)\frac{(\Delta\xi)^3}{6} + \dots \\ f(\xi - \Delta\xi) &= f(\xi) - f'(\xi)\Delta\xi + f''(\xi)\frac{(\Delta\xi)^2}{2} - f'''(\xi)\frac{(\Delta\xi)^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (2.102)$$

Eine Addition dieser Gleichungen liefert einen Ausdruck für die zweite Ableitung, der nur von den Werten der Funktion bei ξ und in den unmittelbaren Nachbarpunkten abhängt:

$$f''(\xi) = \frac{f(\xi + \Delta\xi) - 2f(\xi) + f(\xi - \Delta\xi)}{(\Delta\xi)^2} \quad (2.103)$$

Neben der Addition wurden die Reihen hierfür auch nach dem jeweils dritten Glied abgebrochen. Das führt zu einer sehr einfachen Approximation für die zweite Ableitung, bringt aber zugleich einen Fehler durch den Abbruch ein. Da der vernachlässigte Term proportional $(\Delta\xi)^2$ ist, wird dieser Fehler quadratisch mit kleiner werdendem $\Delta\xi$ abnehmen. Man spricht daher im Hinblick auf die Genauigkeit der o.g. Approximation von einem Ansatz zweiter Ordnung.

Bricht man die erste Gleichung aus (2.102) nach nach dem zweiten Glied ab und löst nach der ersten Ableitung von f auf, hängt der entstehende Ausdruck wiederum nur vom Funktionswert von f in ξ und in einem Nachbarpunkt ab:

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi + \Delta\xi) - f(\xi)}{\Delta\xi} \quad (2.104)$$

Da hier der Abbruch nach dem zweiten Glied der Reihe erfolgt, nimmt der Fehler proportional mit dem Abstand zwischen den Punkten ab. Man spricht daher in diesem Fall von einer Approximation erster Ordnung.

Bei der Überführung von Differentialen in Differenzenquotienten entsteht ein Fehler, der Diskretisierungsfehler genannt wird. Er wird umso kleiner, je kleiner die Abstände zwischen den diskreten Punkten gewählt werden.

Da bei dem Ausdruck in Gl. (2.104) nur der in positiver ξ -Richtung gelegene Funktionswert und der Funktionswert bei ξ selbst in die Berechnung eingehen, spricht man auch von einem Vorwärts-Differenzenquotienten (engl. Downwind). Ebenso kann man einen Rückwärts-Quotienten angeben (engl. Upwind). Der Ausdruck in Gleichung (2.103) wird dagegen zentraler Differenzenquotient (engl. Central Difference) genannt, da in ihn der Funktionswert bei ξ sowie beide Nachbarwerte eingehen.

Nunmehr läßt sich die für den betrachteten Zylinder gültige Form der Wärmeleitungsgleichung nach Gl. (2.63)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

durch Einsetzen der Approximationen nach Gleichung (2.103) und (2.104) als diskrete Differenzengleichung angeben:

$$\left. \frac{\vartheta(t + \Delta t) - \vartheta(t)}{\Delta t} \right|_x = a \cdot \left. \frac{\vartheta(x + \Delta x) - 2\vartheta(x) + \vartheta(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \right|_t \quad (2.105)$$

Dazu wurde in Gl. (2.103) und (2.104) die allgemeine Koordinate ξ jeweils durch die Raumkoordinate x und die Zeit t ersetzt. Weiterhin geht man von einem jeweils gleichen Abstand zwischen allen Raumpunkten sowie allen Zeitpunkten aus, man spricht von einem äquidistanten Netz. Die Angabe der Indizes x auf der linken Seite der Gleichung sowie t auf der rechten Seite bedeutet, dass die zeitliche Differenzenbildung am Ort x erfolgt und die räumliche Differenzenbildung zum Zeitpunkt t .

2.2.5.2 Numerische Lösung

Um die Differenzengleichung (2.105) für eine große Zahl an diskreten Punkten i, j effizient anschreiben und numerisch lösen zu können, führt man noch eine Indexschreibweise ein. Die äquidistanten Raumpunkte werden mit dem Index i versehen, die äquidistanten Zeitpunkte mit dem Index j . Die Indexschreibweise für die räumliche Verteilung sieht dann so aus:

$$\vartheta(x_i + \Delta x) = \vartheta(x_{i+1}) = \vartheta_{i+1} \quad \vartheta''(x_i) = \vartheta'' \quad (2.106)$$

Für die Zeitebene wird lediglich x durch t sowie i durch j ersetzt, ansonsten gilt das gleiche Vorgehen. Danach stellt sich (2.105) in Indexschreibweise so dar:

$$\frac{\vartheta_{i,j+1} - \vartheta_{i,j}}{\Delta t} = a \cdot \frac{\vartheta_{i+1,j} - 2\vartheta_{i,j} + \vartheta_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (2.107)$$

Diese Gleichung lässt sich explizit nach $\vartheta_{i,j+1}$ auflösen:

$$\vartheta_{i,j+1} = a \cdot \Delta t \frac{\vartheta_{i+1,j} - 2\vartheta_{i,j} + \vartheta_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \vartheta_{i,j} \quad (2.108)$$

Bei genauerem Hinsehen stellt man fest, dass auf der rechten Seite dieser Gleichung nur Terme stehen, die in der Zeitebene j liegen. Kennt man also die räumliche Verteilung der Temperatur in der Ebene j , so kann man daraus die Temperaturwerte in der Ebene $j+1$ auf einfachste Weise ermitteln. Von der bekannten Anfangsverteilung der Temperatur bei $j=0$ kann man so sukzessive durch "Vorwärtsbewegung" für eine Zeitebene nach der anderen die räumliche Temperaturverteilung in den Ebenen $j > 0$ bestimmen. Da hierbei im Raum jeweils zentrale Differenzen gebildet werden, spricht man in der englischen Literatur auch vom FTCS-Verfahren (Forward Time Center Space).

In Bild 2.24 ist eine Projektion der Darstellung aus Bild 2.23 auf die t - x -Ebene bzw. eine Draufsicht auf das dortige Diagramm dargestellt. Hier ist das Vorgehen zur Ermittlung eines Temperaturwertes in der nächsten Zeitebene nochmals graphisch veranschaulicht. Aus dieser Darstellung wird auch ersichtlich, warum von einem "Berechnungsgitter" gesprochen wird, wenn es um die numerische Lösung einer Differentialgleichung geht.

Durch Diskretisierung lässt sich eine Differentialgleichung in eine Differenzengleichung überführen, die mit vergleichsweise einfachen mathematischen Mitteln gelöst werden kann. Die Lösung der Differenzengleichung ist dann in einer Vielzahl von Punkten in Raum und Zeit zu ermitteln, wofür durchweg Computerprogramme eingesetzt werden.

Die Übertragung der Methode auf mehrdimensionale Gebiete bzw. Geometrien ist einfach möglich. Es muss auf der rechten Seite der Gleichung (2.63) lediglich die räumliche Ableitung in den zusätzlichen Dimensionen y und z addiert werden. Damit kommen in den Gleichungen (2.107) und (2.108) Terme mit den Indizes k und l hinzu, am prinzipiellen Vorgehen zur Ermittlung des Temperaturwertes in der nächsten Zeitebene ändert sich aber nichts.

Im Gegensatz zu den analytischen Methoden zur Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichung lassen sich die numerischen Methoden einfach auf komplizierte mehrdimensionale Geometrien erweitern.

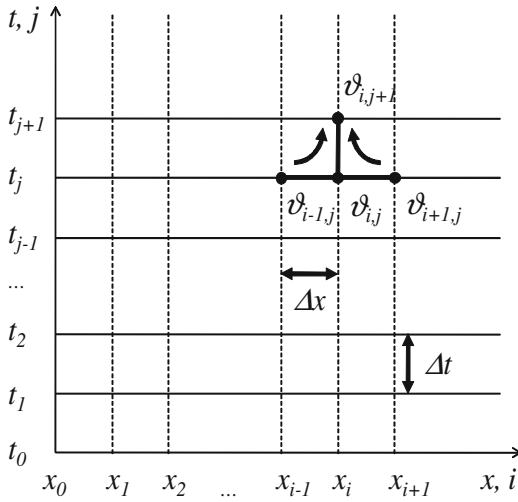


Bild 2.24: Graphische Veranschaulichung des FTCS-Schemas

2.2.5.3 Wahl der Gitterweite und des Zeitschritts

Oben wurde dargelegt, dass durch die Diskretisierung ein Approximationsfehler in die Wärmeleitungsgleichung und damit ihre numerische Lösung eingebracht wird. Durch Verkleinerung der räumlichen Gitterweite sowie des Zeitschritts lässt sich dieser Fehler klein halten. Dabei besteht ein wichtiger Zusammenhang zwischen der Gitterweite und dem Zeitschritt, der *Stabilitätsbedingung* des numerischen Verfahrens genannt wird:

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2a} \quad (2.109)$$

Überschreitet die gewählte Zeitschrittweite diesen Wert, so wird das Verfahren nicht zu sinnvollen Ergebnissen führen, die Lösung divergiert. Somit erzwingt die Wahl einer kleinen räumlichen Gitterweite auch einen kleinen Zeitschritt. Dieser Zusammenhang gilt streng für das hier vorgestellte explizite Finite-Differenzen-Verfahren. Er lässt sich aber z.B. durch Einsetzen der Rückwärtsdifferenz zur Approximation der Zeitableitung auflösen. Allerdings ergibt sich dabei eine Gleichung, die nur implizit, d.h. durch die Lösung eines Gleichungssystems für die räumliche Temperaturverteilung in jeweils folgenden Zeitschritt, gelöst werden kann.

Das ist mathematisch möglich, aber etwas aufwändiger als die oben vorgestellte Methode. Gleichwohl ist die implizite Methode wegen ihrer besseren Stabilität und der damit verbundenen Möglichkeit, den Zeitschritt erheblich größer zu wählen, in

kommerziellen numerischen Programmen stets implementiert. Für große Gebiete mit einer Vielzahl von räumlichen Gitterpunkten ist so eine effizientere numerische Lösung möglich.

Es gibt eine Vielzahl anderer Methoden der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung sowie der Lösung der entstehenden Gleichungssysteme, z.B. die Methode der finiten Elemente (FEM) und die Methode der finiten Volumen (FVM), auf die hier aber nicht eingegangen werden soll. Mit diesen Verfahren lassen sich auch weitere Nachteile der hier vorgestellten Finite-Differenzen-Methode, wie das äquidistante Gitter, vermeiden.

3 Erzwungene Konvektion

Bei *erzwungener Konvektion* wird der Wärmeübergang durch die Temperaturunterschiede und die Strömung, die durch eine äußere Druckdifferenz aufrechterhalten wird, bestimmt. Die Druckdifferenz kann z.B. durch eine Pumpe oder einen Höhenunterschied erzeugt werden. Erzwungene Konvektion ist die in der Technik am häufigsten vorkommende Wärmeübergangsart. In Wärmeübertragern wird zwischen zwei Fluiden, die durch eine Wand getrennt sind, Wärme übertragen. Unsere Aufgabe wird sein, die Wärmeübergangszahlen in Abhängigkeit von den Strömungsbedingungen, den Temperaturen und der Geometrie des Wärmeübertragers zu bestimmen.

Betrachtet man ein Fluid mit der Temperatur ϑ_F , das in einem Rohr, dessen Wandtemperatur ϑ_w ist, entlangströmt, ist die Wärmestromdichte an einem beliebigen Ort gemäß der Definition in Kapitel 1.1.2 gegeben als:

$$\dot{q} = \alpha \cdot (\vartheta_F - \vartheta_w) \quad (3.1)$$

Bei dieser Definition wird das Fluid mit einer konstanten Temperatur im gesamten Raum angenommen. Die Erfahrung zeigt, dass im Fluid in Wandnähe ein Temperaturprofil, analog dem Geschwindigkeitsprofil, entsteht. Bei einer turbulenten Strömung, auf deren Behandlung sich dieses Kapitel hier zunächst beschränkt, ist in der Wandnähe eine *Temperaturgrenzschicht* vorhanden [3.1], in der sich die Temperatur von der Wandtemperatur zur Fluidtemperatur ändert (Bild 3.1).

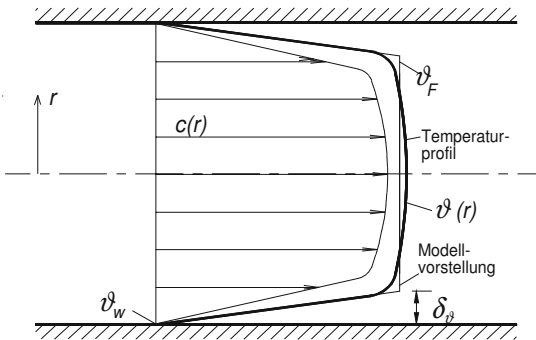


Bild 3.1: Temperaturverlauf in einer turbulenten Rohrströmung

In der Grenzschicht wird die Wärme durch Wärmeleitung übertragen. Erweitert man (3.1), indem man eine Bilanz an der Oberfläche der Wand bildet, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \alpha \cdot (\vartheta_F - \vartheta_W) = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r_w} \\ \alpha &= -\lambda \frac{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r_w}}{\vartheta_F - \vartheta_W} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Die Wärmeübergangszahl hängt demnach von der Temperaturverteilung im Fluid sowie von der Wärmeleitfähigkeit des Fluids ab. Die Temperaturverteilung im Fluid ist ihrerseits in komplizierter Weise mit dem Geschwindigkeitsfeld im Fluid verknüpft. Durch Linearisierung des Temperaturverlaufs im Fluid kann man jedoch zunächst eine Näherung für den Temperaturanstieg in der Grenzschicht und damit eine Abschätzung für den Zusammenhang zwischen Dicke δ_ϑ der Grenzschicht, Wärmeübergangszahl und Wärmeleitfähigkeit angeben:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r_w} &\approx \frac{\vartheta_F - \vartheta_W}{\delta_\vartheta} \\ \alpha &\approx \frac{\lambda}{\delta_\vartheta} \quad \text{bzw.} \quad \delta_\vartheta = \frac{\lambda}{\alpha} \end{aligned} \quad (3.3)$$

In den meisten für die Praxis relevanten Fällen kann die Temperaturgrenzschicht wegen ihrer geringen Dicke nicht vermessen werden. Bei der Messung würde man durch den Messfühler die Grenzschicht stören. Ähnlich wie bei der Bestimmung der Rohrreibungszahlen turbulenter Strömung kann die Wärmeübergangszahl auch nicht analytisch hergeleitet werden. Sie muss vielmehr aus Messungen empirisch ermittelt werden. Da die Anzahl der unabhängigen Einflussgrößen größer ist als bei der Bestimmung der Reibung [3.2], müsste eine noch größere Zahl von Versuchen durchgeführt werden. Um den Messaufwand in einem vernünftigen Rahmen zu halten, nutzt man *Modellvorstellungen* und physikalische Ähnlichkeitsprinzipien, nach denen sich Unterschiede beim Wärmeübergang für verschiedene Geometrien, Stoffe und Fluidzustände letztlich auf wenige charakteristische *Kennzahlen* zurückführen lassen.

Bei der laminaren Strömung entsteht ein ganz anders verlaufendes Temperaturprofil, das für einfache Geometrien mit einigem mathematischen Aufwand analytisch berechenbar ist. Wegen ihrer geringeren technischen Bedeutung werden die Beziehungen für die laminare Rohrströmung in diesem Kapitel zwar angegeben, die Herleitung wird jedoch nicht behandelt.

3.1 Kennzahlen

Die beim konvektiven Wärmeübergang auftretenden Transportvorgänge lassen sich durch Differentialgleichungen beschreiben. Grundsätzlich müssen Geschwindigkeit (mit drei Komponenten), Druck und Temperatur des Mediums bestimmt werden. Hierfür werden fünf unabhängige Gleichungen benötigt, die aus Erhaltungssätzen bzw. Bilanzen hergeleitet werden können:

- Erhaltung der Masse - Massenbilanz - Kontinuitätsgleichung
- Erhaltung des Impulses - Impulsbilanz - Bewegungsgleichung
- Erhaltung der Energie - Energiebilanz - Energiegleichung

In den nachfolgenden Abschnitten wird vereinfacht aufgezeigt, wie aus diesen Gleichungen die wichtigsten charakteristischen Kennzahlen und damit die Grundlage für die empirische Bestimmung der Wärmeübergangszahlen abgeleitet werden können.

3.1.1 Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten zunächst einen ortsfesten Quader mit den Kantenlängen dx , dy , dz in einem kartesischen Koordinatensystem (s. Bild 3.2).

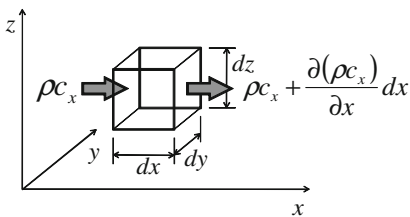


Bild 3.2: Zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung

Die in den Quader über die Fläche $dy \cdot dz$ einfließende Masse ist

$$\dot{m}_x = \rho \cdot c_x \cdot dy \cdot dz$$

und die an der gegenüberliegenden Fläche ausfließende Masse kann mit

$$\dot{m}_{x+dx} = \rho \cdot c_x \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial(\rho \cdot c_x)}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz$$

angegeben werden. Betrachtet man ein inkompressibles Fluid mit der Dichte ρ , so ist die Differenz beider Massenströme:

$$d\dot{m}_x = -\frac{\partial c_x}{\partial x} \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Führt man diese Berechnung auch für die anderen Raumrichtungen durch, so erhält man nach Summieren, Umordnen und Teilen durch $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

$$0 = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung für ein inkompressibles Medium in kartesischen Koordinaten. Aus ihr läßt sich keine charakteristische Kennzahl ermitteln, da diese Gleichung ohnehin keine spezifischen Größen eines bestimmten Fluids oder einer bestimmten geometrischen Anordnung enthält. Die Kontinuitätsgleichung ist aber die erste der fünf benötigten unabhängigen Gleichungen.

3.1.2 Bewegungsgleichung

Diese Gleichung folgt aus einer Kräftebilanz an einem Massenelement im strömenden Fluid, wobei s zunächst eine allgemeine Ortskoordinate ist:

$$\sum dF_{\text{äußere}} = dm \cdot \frac{dc_x}{dt} = \rho \cdot dV \cdot \frac{dc_x}{dt}$$

Diese Bilanz besagt, daß die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit bzw. des Impulses des Fluides durch äußere Kräfte bewirkt wird. Wenn wir hier Kraftwirkungen aufgrund von elektrischen, magnetischen und Gravitationsfeldern ausschließen, lassen sich die äußeren Kräfte auf Druck- und Zähigkeitskräfte, letztere ausgedrückt mittels der Spannung τ , reduzieren:

$$\sum dF_{\text{äußere}} = -dp \cdot dA + \sum d\tau \cdot dA$$

Wenn wir weiterhin beachten, daß $dV = dA \cdot ds$ gilt und $c_x = f(s, t)$, d.h. die Geschwindigkeit allgemein eine Funktion von Ort und Zeit ist, so können wir zusammenfassend schreiben:

$$\rho \cdot \frac{dc_x}{dt} = \rho \cdot \left(\frac{\partial c_x}{\partial t} + \frac{\partial c_x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} \right) = -\frac{\partial p}{\partial s} + \sum \frac{\partial \tau}{\partial s}$$

Für die Schubspannung können wir den *Newton'schen* Schubspannungsansatz $\tau = \eta \cdot dc_x/ds$ einführen und erhalten dann für eine stationäre Strömung allgemein

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial c_x}{\partial s} c_x \right) = -\frac{\partial p}{\partial s} + \eta \cdot \sum \frac{\partial^2 c_x}{\partial s^2}$$

bzw. speziell für die Raumrichtung x mit der Geschwindigkeit $c_x = f(x, y)$:

$$\rho \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} c_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \cdot \sum \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2}$$

Durch geschicktes Umschreiben dieser Gleichung kann man nun versuchen, möglichst viele der fluid-, zustands- oder geometrispezifischen Größen in der Gleichung zusammenzufassen. Der übliche Weg hierfür ist die Überführung in eine dimensionslose Gleichung. Diese erhalten wir, indem alle Variablen auf charakteristische Maße bezogen werden:

- Bezugslänge L : $x = x^* \cdot L$
- Bezugsgeschwindigkeit c : $c_x = c_x^* \cdot c$
- Bezugsdruck $\rho \cdot c^2$: $p = p^* \cdot \rho \cdot c^2$

Die mit Stern versehenen Größen x^* , c_x^* und p^* sind demnach die dimensionslose Ortskoordinate, die dimensionslose Geschwindigkeitskomponente sowie der dimensionslose Druck. Wir werden später sehen, welche Größen in praktischen Einsatzfällen als Bezugsgrößen dienen. Einsetzen der genannten Größen in die hergeleitete Bewegungsgleichung und Umordnen führt zu:

$$c_x^* \frac{\partial c_x^*}{\partial x^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\eta}{\rho \cdot c \cdot L} \cdot \sum \frac{\partial^2 c_x^*}{\partial y^{*2}}$$

Der Kehrwert des Faktors vor dem Differential im dritten Term wird *Reynoldszahl* genannt. Sie ist das Verhältnis der Trägheits- zu den Reibungskräften.

$$Re_L = \frac{c \cdot L}{\nu} = \frac{c \cdot L \cdot \rho}{\eta} = \frac{\dot{m} \cdot L}{A \cdot \eta} \quad (3.4)$$

Die mittlere Geschwindigkeit der Strömung ist c , die charakteristische Länge L , die kinematische Viskosität des Fluids ν und η die dynamische Viskosität. Es ist üblich, die *Reynoldszahl* mit einem Index zu versehen, der die charakteristische Länge L repräsentiert. Da in der dimensionslosen Bewegungsgleichung außer Re nur dimensionslose Lösungsvariablen und unabhängige Variablen stehen, ist die Lösung der Gleichung für alle Strömungen mit gleicher *Reynoldszahl* identisch. Umgekehrt gilt: Die Unterschiede in den Lösungen der Differentialgleichung für unterschiedliche Fluide, Zustände oder Geometrien lassen sich auf die Unterschiede in der *Reynoldszahl* zurückführen. Mit je einer Bewegungsgleichung für jede Raumrichtung gewinnen wir drei weitere Gleichungen für die fünf unbekannten Variablen.

3.1.3 Energiegleichung

Die *Reynoldszahl* enthält die Geschwindigkeit, die Zähigkeit sowie eine charakteristische Länge. Aus den vorangegangenen Kapiteln wissen wir aber, dass für die Wärmeübertragung auch Eigenschaften wie Wärmeleitfähigkeit oder Wärmekapazität relevant sind. Wir werden daher eine Energiegleichung für das strömende Fluid ableiten und analog der Bewegungsgleichung entdimensionieren, um zu einer weiteren charakteristischen Kennzahl zu kommen.

$$d\dot{m}_x = -\frac{\partial c_x}{\partial x} \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Wir gehen hierfür von der Temperaturfeldgleichung in einem ruhenden Medium aus, die bereits in Kapitel 2.2.1 aus einer Energiebilanz bestimmt wurde:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right)$$

Für ein strömendes Fluid muß auf der linken Seite der Gleichung noch die Temperaturänderung aufgrund des Enthalpietransports hinzugefügt werden. Hierzu ersetzen wir das partielle Differential durch das totale Differential der Temperatur und beachten, dass $dx/dt = c_x$, $dy/dt = c_y$ und $dz/dt = c_z$ gilt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} c_x + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} c_y + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} c_z &= a \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Die Variablen dieser Gleichung können analog denen der Impulsgleichung entdimensioniert werden. Hier kommen aber noch folgende Größen hinzu:

- Bezugstemperaturdifferenz ($\vartheta_F - \vartheta_W$): $\vartheta = \vartheta^* \cdot (\vartheta_F - \vartheta_W) + \vartheta_F$
- Bezugszeit L / c : $t = t^* \cdot L / c$

Durch Einsetzen der dimensionslosen Variablen und Umordnen gewinnen wir folgende dimensionslose Form der Temperaturfeldgleichung:

$$\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x^*} c_x^* + \frac{\partial \vartheta^*}{\partial y^*} c_y^* + \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z^*} c_z^* = \frac{a}{c \cdot L} \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial z^{*2}} \right)$$

Den Vorfaktor vor dem rechten Term können wir etwas umschreiben:

$$\frac{a}{c \cdot L} = \frac{\nu}{c \cdot L} \cdot \frac{a}{\nu} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{1}{Pr}$$

Die neue, neben der *Reynoldszahl* auftretende Kennzahl wird *Prandtlzahl* Pr genannt:

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu \cdot \rho \cdot c_p}{\lambda} \quad (3.5)$$

Sie kann auch als das Verhältnis der Dicken der laminaren Strömungs- und Temperaturgrenzschicht aufgefasst werden. Gase haben eine *Prandtlzahl* von etwa 0,7, die der Flüssigkeiten variiert in einem weiten Bereich. Sie ist temperaturabhängig.

Wir haben nun fünf Gleichungen für fünf abhängige Variable hergeleitet, entdimensioniert und auf diese Weise zwei für die konvektive Wärmeübertragung wesentliche charakteristische Kennzahlen gewonnen. Nun wenden wir die Methodik der Entdimensionierung abschließend auf die Gleichung (3.2) an und erhalten

$$\frac{\alpha \cdot L}{\lambda} = - \left(\frac{\partial \vartheta^*}{\partial r^*} \right)_{r^*=1} = Nu_L \quad (3.6)$$

Die dimensionslose Wärmeübergangszahl wird *Nußeltzahl* genannt. Sie ist das Verhältnis der für die Strömung charakteristischen Länge d und der Dicke der Temperaturgrenzschicht δ_ϑ .

Zugleich stellen wir fest, daß diese dimensionslose Wärmeübergangszahl offenbar nur vom dimensionslosen Temperaturfeld abhängig ist! Dieses wiederum erhalten wir aber als eine Lösung des eben hergeleiteten Gleichungssystems, die durch *Reynolds-* bzw. *Prandtlzahl* und die durchströmte Geometrie charakterisiert ist.

Trotz der sehr vereinfachten Herleitung des o.g. Gleichungssystems findet man diesen Zusammenhang auch empirisch bestätigt und gibt die *Nußeltzahlen* daher in folgender Form an:

$$Nu_L = f(Re_L, Pr, \text{Geometrie}, \vartheta / \vartheta_w) \quad (3.7)$$

Der letzte Term berücksichtigt die Abhängigkeit der *Nußeltzahl* von der Richtung des Wärmestroms. Näheres dazu wird später ausgeführt. *Nußeltzahlen* wurden in der o.g. Form für verschiedenste Geometrien, Stoffe und Strömungen experimentell bestimmt und in Form sogenannter Korrelationen, d.h. Funktionen, die die erhaltenen Meßwerte bestmöglich wiedergeben, von zahlreichen Autoren veröffentlicht. Eine der umfangreichsten Darstellungen von *Nußeltfunktionen* findet sich im VDI-Wärmeatlas [3.4].

Die Ermittlung von Wärmeübergangszahlen wird also auf die Ermittlung der für das jeweils vorliegende Problem passenden Nußeltzahl zurückgeführt. Aus dieser Nußeltzahl wird dann die Wärmeübergangszahl nach der o.g. Definition bestimmt.

In den nachfolgenden Kapiteln wird dies für einige technisch wichtige Fälle näher erläutert.

3.2 Bestimmung der Wärmeübergangszahlen

Wie erwähnt, hängt die Wärmeübergangszahl von der *Reynoldszahl*, den Stoffeigenschaften, der Geometrie und Richtung des Wärmestromes ab. Die Stoffeigenschaften werden durch die *Prandtlzahl* berücksichtigt. Die Wärmeübergangszahl wird aus der *Nußeltzahl* bestimmt. Man gibt die *Nußeltzahlen* in folgender Form an:

$$Nu_L = f(Re_d, Pr, \text{Geometrie}, \vartheta / \vartheta_w) \quad (3.7)$$

3.2.1 Rohrströmung

Bei der Strömung von Fluiden in zylindrischen Rohren ist die charakteristische Länge der Innendurchmesser d_i des Rohres. Zur Bestimmung der Wärmeübergangszahlen muss zwischen der turbulenten und laminaren Strömung unterschieden werden.

3.2.1.1 Turbulente Rohrströmung

Das Temperaturprofil einer turbulenten Rohrströmung ist in Bild 3.1 dargestellt. Die Temperatur des Fluids ist die Temperatur in der Rohrmitte. Die Beziehung für die *Nußeltzahl*, die nach heutigen Kenntnissen die Messergebnisse am besten wiedergibt, lautet [3.3]:

$$Nu_{d_i, turb} = \frac{(\xi/8) \cdot Re_{d_i} \cdot Pr}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi/8} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} \cdot f_1 \cdot f_2 \quad (3.8)$$

Die *Rohrreibungszahl* ist dabei ξ . Sie ist folgendermaßen gegeben:

$$\xi = [1,8 \cdot \log(Re_{d_i}) - 1,5]^{-2} \quad (3.9)$$

Die Stoffwerte werden mit der Temperatur des Fluids in der Rohrmitte bestimmt. Die Gleichungen (3.8) und (3.9) geben die Wärmeübergangszahl mit der besten Genauigkeit bei der Strömung durch Rohre wieder.

Gleichung (3.8) zeigt auch, dass zwischen der Reibung und dem Wärmeübergang ein grundsätzlicher Zusammenhang besteht. Je größer die Reibungszahl ξ der turbulenten Strömung im Rohr ist, desto größer ist auch die *Nußelt-* und damit die Wärmeübergangszahl. Dieses verlangt vom Ingenieur, Wärmeübertrager so zu optimieren, dass er bezüglich Reibung und Wärmeübertragung die günstigste Lösung findet.

Die Funktion f_1 gibt den Einfluss der Rohrlänge und f_2 den der Richtung des Wärmestromes an. Die Rohrlänge beeinflusst die Wärmeübergangszahl, weil das Temperaturprofil am Eintritt des Rohres nicht ausgebildet und damit die Dicke der Temperaturgrenzschicht dort gleich null ist. Die Wärmeübergangszahl ist unendlich. Bild 3.1 zeigt das Strömungs- und Temperaturprofil.

Die Dicke der Temperaturgrenzschicht nimmt mit steigender Lauflänge zu und die lokale Wärmeübergangszahl wird kleiner, bis sie bei ausgebildeter Temperaturgrenzschicht konstant bleibt. In der Regel ist bei der Berechnung von Wärmeübertragern nicht die lokale Wärmeübergangszahl von Interesse, sondern deren mittlerer Wert für die gesamte Rohrlänge. Die höheren Wärmeübergangszahlen am Eintritt des Rohres beeinflussen die mittlere Wärmeübergangszahl. Die Funktion f_1 zur Berücksichtigung der Rohrlänge lautet:

$$f_1 = 1 + (d_i / l)^{2/3} \quad (3.10)$$

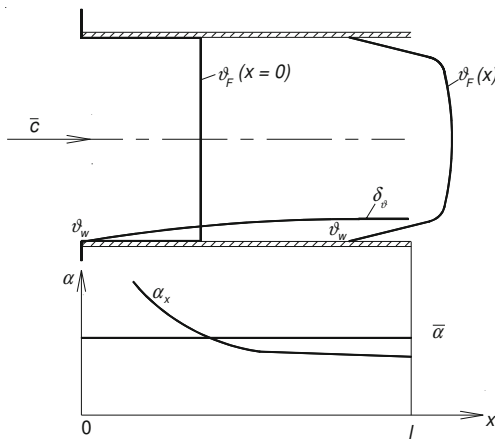


Bild 3.2: Einfluss der Rohrlänge auf die Wärmeübergangszahl

Die Richtung des Wärmestromes beeinflusst die Wärmeübergangszahl, weil die *Reynolds*- und *Prandtl*zahl mit den temperaturabhängigen Stoffwerten des Fluids gebildet werden und in der Temperaturgrenzschicht eine andere Temperatur herrscht. Für die Funktion f_2 hat man für Flüssigkeiten und Gase zwei unterschiedliche Beziehungen gefunden:

$$\begin{aligned} f_2 &= (Pr / Pr_w)^{0,11} && \text{für Flüssigkeiten} \\ f_2 &= (T / T_w)^{0,45} && \text{für Gase} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die angegebenen Gleichungen gelten für:

$$\begin{aligned} 10^4 &< Re_{d_i} < 10^6 \\ l / d_i &> 1 \end{aligned}$$

In Wärmeübertragerrohren sind die Temperatur des Fluids und die Temperatur der Wand nicht konstant. Die Stoffwerte für das Fluid werden mit der mittleren Temperatur $\vartheta_m = (\vartheta_{ein} + \vartheta_{aus}) / 2$ bestimmt. Zur Berechnung des Wärmestromes wird

die mittlere Temperaturdifferenz nach Gl. (1.15) verwendet. Sie wird mit den Temperaturdifferenzen am Ein- und Austritt des Rohres gebildet.

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot \Delta\vartheta_m \quad (3.12)$$

Strömt außen am Rohr ebenfalls ein Fluid, wird zur Bestimmung des Wärmestromes die Wärmedurchgangszahl eingesetzt und mit den Fluidtemperaturen die mittlere Temperaturdifferenz gebildet. Die Wandtemperatur ist:

$$\vartheta_{Wi} = \vartheta_{mi} + \frac{k \cdot d_i}{\alpha_i \cdot d_a} \cdot \Delta\vartheta_m \quad \vartheta_{Wa} = \vartheta_{ma} - \frac{k}{\alpha_a} \cdot \Delta\vartheta_m \quad (3.13)$$

Für überschlägige Berechnungen kann an Stelle von Gl. (3.8) eine vereinfachte Potenzgleichung verwendet werden, die die Wärmeübergangszahl mit etwa 5 % Genauigkeit angibt:

$$Nu_{d_i} = 0,0235 \cdot (Re_{d_i}^{0,8} - 230) \cdot Pr^{0,48} \cdot f_1 \cdot f_2 \quad (3.14)$$

Zur Berücksichtigung der Richtung des Wärmestromes bei Gasen sind im VDI-Wärmeatlas [3.4] weitere Funktionen angegeben.

3.2.1.2 Laminare Rohrströmung bei konstanter Wandtemperatur

Hier wird nur die Strömung bei konstanter Wandtemperatur behandelt. In [3.4] findet man Beziehungen für konstante Wärmestromdichte. Bei laminarer Rohrströmung ist in sehr langen Rohren (thermisch und hydraulisch ausgebildeter Strömung) die Wärmeübergangszahl von der *Reynolds*- und *Prandtl*zahl unabhängig. Die *Nusselt*zahl hat einen konstanten Wert.

$$Nu_{d_i, lam} = 3,66 \quad (3.15)$$

Bei kürzeren Rohren, in denen die Temperatur- und Strömungsgrenzschicht nicht ausgebildet sind, ist die *Nusselt*zahl:

$$Nu_{d_i, lam} = 0,644 \cdot \sqrt[3]{Pr} \cdot \sqrt{Re_{d_i} \cdot d_i / l} \quad (3.16)$$

Da der Übergang asymptotisch erfolgt, gilt folgende Ausgleichsgleichung:

$$Nu_{d_i, lam} = \sqrt[3]{3,66^3 + 0,644^3 \cdot Pr \cdot (Re_{d_i} \cdot d_i / l)^{3/2}} \quad (3.17)$$

Bis zu *Reynoldszahlen* von 2 300 ist Gl. (3.17) gültig. Bild 3.3 zeigt die *Nusselt*-zahlen für $Pr = 1$ in Abhängigkeit von der *Reynoldszahl* für verschiedene Rohrlängen.

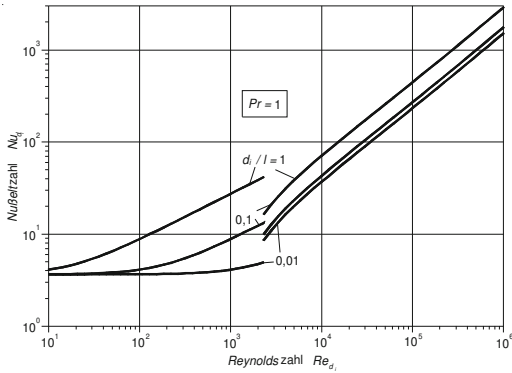


Bild 3.3: Nusseltzahl bei $Pr = 1$; Sprünge beim Übergang von laminar zu turbulent

3.2.1.3 Gleichungen für den Übergangsbereich

Aus dem Diagramm ist ersichtlich, dass es beim Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung sprunghafte Übergänge gibt. Gl. (3.8) ist wie angegeben nur ab $Re > 10^4$ gültig. Für den Übergangsbereich $2\,300 < Re_{di} < 10^4$ wird folgende Interpolationsgleichung vorgeschlagen:

$$Nu_{d_i} = (1 - \gamma) \cdot Nu_{d_i, \text{lam}}(Re = 2\,300) + \gamma \cdot Nu_{d_i, \text{turb}}(Re = 10^4)$$

$$\text{mit } \gamma = \frac{Re - 2\,300}{7\,700} \quad (3.18)$$

Bild 3.4 zeigt die mit der Ausgleichsgleichung berechneten Nusseltzahlen.

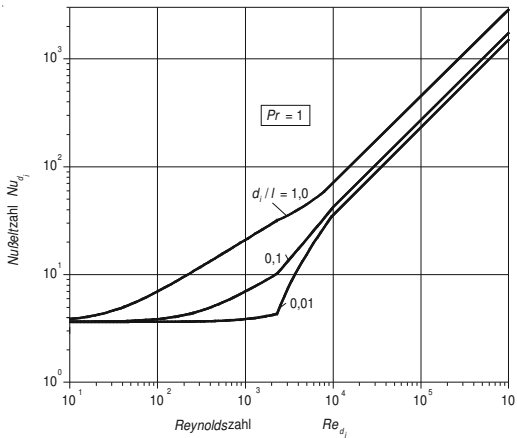


Bild 3.4: Nusseltzahl als Funktion der Reynoldszahl und d_i/l bei $Pr = 1$

BEISPIEL 3.1: Wärmeübergangszahl in einem Rohr

Zur Demonstration ihrer Größe werden die Wärmeübergangszahlen für verschiedene Stoffe in einem Rohr mit 25 mm Innendurchmesser berechnet. Die Rohrwand hat eine Temperatur von 90 °C, das Fluid die von 50 °C. Die Geschwindigkeiten und Stoffwerte sind:

		Geschwindigkeit m/s	kin. Viskosität $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	Wärmeleitfähigkeit W/(m K)	Pr	Pr_{wi}
Wasser		2	0,554	0,6410	3,570	1,96
Luft	1 bar	20	18,250	0,0279	0,711	
Luft	10 bar	20	1,833	0,0283	0,712	
R134a	10 bar	2	0,146	0,0751	3,130	3,13

Berechnen Sie die Wärmeübergangszahlen.

Lösung**Annahmen**

- Die Rohrwandtemperatur ist konstant.
- Der Einfluss der Anlaufströmung bleibt unberücksichtigt.

Analyse

Wie man später sieht, ist die *Reynoldszahl* in allen Fällen größer als 10^4 , so dass mit Gl. (3.8) gerechnet werden kann. Die ermittelten Werte sind:

	Re_{di}	ξ	f_2	$Nu_{di,turb}$	α W/(m ² K)
Wasser	90 253	0,0182	1,068	432,1	11 079,5
Luft 1 bar	27 397	0,0238	0,949	63,9	71,3
Luft 10 bar	272 777	0,0146	0,949	377,0	426,8
R134a	34 2466	0,0140	1,000	1 166,0	3 502,6

Diskussion

Die Berechnungen zeigen, dass Flüssigkeiten wesentlich größere Wärmeübergangszahlen als Gase haben, obwohl die Gasgeschwindigkeiten sehr viel höher als die der Flüssigkeiten sind. Die kleineren Wärmeübergangszahlen werden durch größere kinematische Viskosität und kleinere Wärmeleitfähigkeit der Gase verursacht, wobei Wasser auf Grund seiner hohen Wärmeleitfähigkeit eine Sonderstellung einnimmt. Bei Gasen steigen wegen Verringerung der kinematischen Viskosität mit dem Druck die *Reynoldszahl* und Wärmeübergangszahl an. Der Einfluss der Rohrlänge bleibt unberücksichtigt, da er in diesem Beispiel keine Rolle spielt.

BEISPIEL 3.2: Wärmeübergangszahl in einem Wärmeübertrager

In einem Wärmeübertrager mit 1 m langen Rohren, 15 mm Außendurchmesser und 1 mm Wandstärke strömt Wasser mit der Geschwindigkeit von 1 m/s. Außen an den Rohren kondensiert Frigen R134a bei 50 °C. Die Wärmeübergangszahl des Frigens ist 5 500 W/(m² K). Wärmeleitfähigkeit des Rohrmaterials: 230 W/(m K). Am Rohreintritt hat das Wasser eine Temperatur von 20 °C.

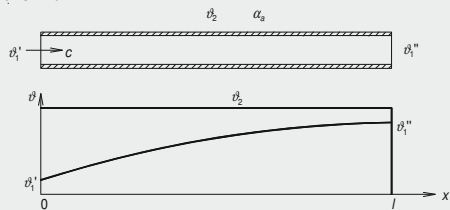
Stoffwerte des Wassers:

	ρ	c_p	λ	ν	Pr
	kg/m ³	J/(kg K)	W/(m K)	m ² /s	-
20 °C:	998,2	4 184	0,598	$1,003 \cdot 10^{-6}$	7,00
30 °C:	995,7	4 180	0,616	$0,801 \cdot 10^{-6}$	5,41
40 °C:	992,3	4 178	0,631	$0,658 \cdot 10^{-6}$	4,32

Berechnen Sie die Wärmeübergangszahl, die Austrittstemperatur des Wassers und den pro Rohr transferierten Wärmestrom.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahme

- Die mittlere Wärmeübergangszahl ist konstant.

Analyse

Die Austrittstemperatur des Wassers ist nicht bekannt, d.h., zur Bestimmung der Stoffwerte muss eine mittlere Temperatur angenommen und damit die Wärmeübergangszahl, Wärmedurchgangszahl und der Wärmestrom bestimmt werden. Dann können die Austrittstemperatur des Wassers und die mittlere Temperatur berechnet werden. Zunächst wird angenommen, dass die Austrittstemperatur des Wassers 30 °C ist. Die mittlere Temperatur beträgt 25 °C. Die Stoffwerte des Wassers sind:

$$\rho = 997,0 \text{ kg/m}^3, c_p = 4 182 \text{ J/(kg K)}, \lambda = 0,607 \text{ W/(m K)}, Pr = 6,21, \\ \nu = 0,902 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

$$\text{Die Reynoldszahl ist: } Re = \frac{c \cdot d_i}{\nu} = \frac{1 \cdot \text{m} \cdot 0,013 \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{s} \cdot 0,902 \cdot 10^{-6} \cdot \text{m}^2} = 14412$$

$$\text{Widerstandszahl nach Gl. (3.9): } \xi = [1,8 \cdot \log(Re_{d_i}) - 1,5]^{-2} = 0,0279$$

Die *Nußeltzahl* kann jetzt mit den Gln. (3.8), (3.10) und (3.11) berechnet werden. Der Einfluss der Richtung des Wärmestromes nach Gl. (3.11) benötigt die *Prandtlzahl*, gebildet mit der Wandtemperatur. Da diese erst nach Berechnung der Wärmeübergangs- und Wärmedurchgangszahl möglich ist, muss hier iteriert werden. Die Größe f_2 wird zunächst als 1 angenommen. Die Größe f_1 ist:

$$f_1 = 1 + (d_i / l)^{2/3} = 1 + (0,013/1)^{2/3} = 1,055$$

Die *Nußeltzahl* nach (Gl. 3.8) berechnet sich als:

$$\begin{aligned} Nu_{d_i, turb} &= \frac{(\xi/8) \cdot Re_{d_i} \cdot Pr}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi/8} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} \cdot f_1 \cdot f_2 = \\ &= \frac{0,0035 \cdot 14412 \cdot 6,21}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{0,0035} \cdot (6,21^{2/3} - 1)} \cdot 1,055 = 118,3 \end{aligned}$$

Damit ist die Wärmeübergangszahl:

$$\alpha = Nu_{d_i} \cdot \lambda / d_i = 118,3 \cdot 0,607 \cdot \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}) / (0,013 \cdot \text{m}) = 5524 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Die Wärmedurchgangszahl ist nach Gl. (2.27):

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_a}{d_i \cdot \alpha_i} \right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{1}{5500} + \frac{0,015}{2 \cdot 230} \cdot \ln \frac{15}{13} + \frac{15}{13 \cdot 5524} \right)^{-1} = 2529 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \end{aligned}$$

Mit der Wärmedurchgangszahl und der mittleren Temperaturdifferenz kann die Wandtemperatur ermittelt werden. Die mittlere Temperaturdifferenz beträgt:

$$\Delta \vartheta_m = \frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1'}{\ln \left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1'}{\vartheta_2 - \vartheta_1''} \right)} = \frac{(30 - 20) \cdot \text{K}}{\ln \left(\frac{50 - 20}{50 - 30} \right)} = 24,66 \text{ K}$$

Die Wandtemperatur ist nach (Gl. 3.13):

$$\vartheta_w = \vartheta_m + \Delta \vartheta_m \cdot \frac{k \cdot d_i}{\alpha_i \cdot d_a} = 25 \text{ °C} + 24,66 \cdot \text{K} \cdot \frac{2529 \cdot 13}{5524 \cdot 15} = 34,8 \text{ °C}$$

Die linear interpolierte *Prandtlzahl* bei 34,8 °C beträgt 4,89.

Nach Gl. (3.11) ist die Größe f_2 : $f_2 = (Pr / Pr_w)^{0,11} = (6,21/4,89)^{0,11} = 1,027$

Die *Nußelt*- und auch die Wärmeübergangszahl werden um 3,0 % größer. Für α_i , k und ϑ_w erhält man die folgenden Werte: $\alpha_i = 5671 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$, $k = 2565 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$, $\vartheta_w = 34,7 \text{ °C}$. Pr_w wird damit zu 4,901 und die Größe f_2 zu 1,0263. Mit diesen Werten kann man α_i und k bestimmen:

$$\alpha_i = 5670 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \quad k = 2564 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Mit der kinetischen Kopplung berechnen wir die transferierte Wärme.

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= k \cdot A \cdot \Delta\vartheta_m = k \cdot \pi \cdot d_a \cdot l \cdot \Delta\vartheta_m = \\ &= 2564 \cdot \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \cdot \pi \cdot 0,015 \cdot \text{m} \cdot 1 \cdot \text{m} \cdot 24,66 \cdot \text{K} = 2980 \text{ W}\end{aligned}$$

Aus der Energiebilanzgleichung des Wassers kann die Austrittstemperatur bestimmt werden. Der Massenstrom im Rohr ist:

$$\dot{m} = c \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot d_i^2 \cdot \rho = 1 \cdot \text{m/s} \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot 0,013^2 \cdot \text{m}^2 \cdot 997 \cdot \text{kg/s} = 0,132 \text{ kg/s}$$

$$\vartheta_1'' = \vartheta_1' + \frac{\dot{Q}}{\dot{m} \cdot c_p} = 20 \text{ }^\circ\text{C} + \frac{2980 \cdot \text{W}}{0,132 \cdot \text{kg/s} \cdot 4182 \cdot \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})} = 25,4 \text{ }^\circ\text{C}$$

Die mittlere Temperatur des Wassers ist nicht wie angenommen $25 \text{ }^\circ\text{C}$, sondern $22,7 \text{ }^\circ\text{C}$. Die Berechnung muss mit folgenden neuen Stoffwerten wiederholt werden: $\rho = 997,5 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 4182 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, $\lambda = 0,607 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, $\nu = 0,948 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr = 6,53$.

Die Berechnungsschritte sind nicht mehr im Detail gezeigt, sondern nur die Ergebnisse.

Re_{di}	α_i $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$	k $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$	$\Delta\vartheta_m$ K	ϑ_w $^\circ\text{C}$	f_2	\dot{Q} W	ϑ_1 $^\circ\text{C}$
13 706	5 525	2 530	27,22	33,49	1,0297		
	5 544	2 534	27,22	33,47	1,0298		
	5 543	2 534				3 251	25,87
13 778	5 559	2 538	26,96	33,60	1,0295		
	5 557	2 537	26,96	33,60	1,0295		
	5 557	2 537				3 223	25,82

Hier kann die Iteration abgebrochen werden, weil die letzten Änderungen kleiner als 0,2 % sind.

Diskussion

Zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen und Temperaturen in Wärmeübertragern sind in der Regel Iterationen erforderlich, die stark konvergent sind. Bei diesem Beispiel hätte man bereits nach der ersten Iteration aufhören können. Der Wärmestrom war schon mit 1 % Genauigkeit berechnet. Will man aufwändige Berechnungen vermeiden, muss man Computerprogramme erstellen, in denen die Stoffwerte und Formeln programmiert sind. Oft genügt es, nur die Stoffwerte bei zwei Temperaturen anzugeben und zwischen diesen Stützstellen linear zu interpolieren. Jedenfalls sollte geprüft werden, ob dann die erforderliche Genauigkeit erreicht wird.

BEISPIEL 3.3: Auslegung eines Kraftwerkkondensators

In einem Kraftwerkkondensator soll ein Wärmestrom von 2 000 MW abgeführt werden. Der Kondensator hat Titanrohre mit 24 mm Außendurchmesser und 0,5 mm Wandstärke. Die Kühlwassergeschwindigkeit in den Rohren beträgt 2 m/s. Titan hat eine Wärmeleitfähigkeit von 16 W/(m K). Der Dampf kondensiert bei einer Sättigungstemperatur von 35 °C, die Wärmeübergangszahl bei der Kondensation ist 13 500 W/(m² K). Das Kühlwasser wird von 20 auf 30 °C erwärmt. Bei 25 °C sind die Stoffwerte des Wassers:

$$\rho = 997,0 \text{ kg/m}^3, c_p = 4182 \text{ J/(kg K)}, Pr = 6,2, \lambda = 0,607 \text{ W/(m K)}, \\ \nu = 0,902 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Der Einfluss der Richtung des Wärmestromes kann vernachlässigt werden. Zu berechnen sind:

- die Anzahl der Rohre
- die Rohrlänge
- die Kondensationstemperatur, wenn sich die Wärmedurchgangszahl wegen Verschmutzung um 10 % verringert.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Die mittlere Wärmeübergangszahl ist konstant.
- Der Einfluss der Richtung des Wärmestromes kann vernachlässigt werden, d. h., $f_2 = 1$.

Analyse

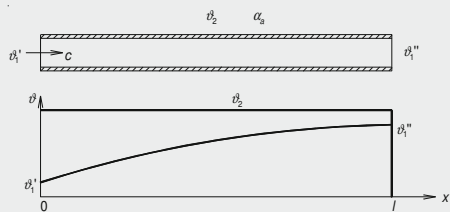
- Mit der Energiebilanzgleichung kann der Massenstrom des Kühlwassers bestimmt werden.

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}}{c_p \cdot (\vartheta_1'' - \vartheta_1')} = \frac{2000 \cdot 10^6 \cdot \text{W} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{4182 \cdot \text{J} \cdot (30 - 20) \cdot \text{K}} = 47824 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Mit der gegebenen Geschwindigkeit des Kühlwassers kann der Massenstrom pro Rohr berechnet werden.

$$\dot{m}_{1\text{Rohr}} = c \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot d_i^2 \cdot \rho = 2 \cdot \text{m/s} \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot 0,023^2 \cdot \text{m}^2 \cdot 997 \cdot \text{kg/s} = 0,828 \text{ kg/s}$$

Man benötigt **57 727** Rohre, um den Massenstrom von 47 824 kg/s zu erreichen.



b) Zur Berechnung der *Nußeltzahl* mit Gl. (3.8) benötigt man die Funktion f_1 . Sie berücksichtigt den Einfluss der Rohrlänge, die jetzt noch unbekannt ist. Für die erste Berechnung wird daher $f_1 = 1$ gesetzt.

$$\text{Reynoldszahl: } Re = \frac{c \cdot d_i}{\nu} = \frac{2 \cdot \text{m} \cdot 0,023 \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{s} \cdot 0,902 \cdot 10^{-6} \cdot \text{m}^2} = 50998$$

$$\text{Widerstandszahl nach Gl. (3.9): } \xi = [1,8 \cdot \log(Re_{d_i}) - 1,5]^{-2} = 0,0206$$

$$Nu_{d_i, \text{turb}} = \frac{(\xi/8) \cdot Re_{d_i} \cdot Pr}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi/8} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} = \frac{0,00257 \cdot 50\,998 \cdot 6,2}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{0,00257} \cdot (6,2^{2/3} - 1)} = 321,3$$

Damit ist die Wärmeübergangszahl:

$$\alpha_i = Nu_{d_i} \cdot \lambda / d_i = 321,3 \cdot 0,607 \cdot \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}) / (0,023 \cdot \text{m}) = 8481 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

und die Wärmedurchgangszahl nach Gl. (2.27):

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_a}{d_i \cdot \alpha_i} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{13500} + \frac{0,024}{2 \cdot 16} \cdot \ln \frac{24}{23} + \frac{24}{23 \cdot 8481} \right)^{-1} = 4366 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Mit der Wärmedurchgangszahl und mittleren Temperaturdifferenz kann die notwendige Austauschfläche ermittelt werden. Die mittlere Temperaturdifferenz ist:

$$\Delta \vartheta_m = \frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1'}{\ln \left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1'}{\vartheta_2 - \vartheta_1''} \right)} = \frac{(30 - 20) \cdot \text{K}}{\ln \left(\frac{35 - 20}{35 - 30} \right)} = 9,102 \text{ K}$$

Die für den Wärmestrom benötigte Austauschfläche wird mit der kinetischen Kopplungsgleichung berechnet.

$$A = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta \vartheta_m} = \frac{2000 \cdot 10^6 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{4366 \cdot \text{W} \cdot 9,102 \cdot \text{K}} = 50325 \text{ m}^2$$

Daraus errechnet sich die Rohrlänge zu:

$$l = \frac{A}{n \cdot \pi \cdot d_a} = \frac{50325 \cdot \text{m}^2}{57727 \cdot \pi \cdot 0,024 \cdot \text{m}} = 11,562 \text{ m}$$

Mit der Rohrlänge erhält man für die Funktion $f_1 = 1,016$. Damit wird die Wärmeübergangszahl um 1,6 % größer, die Wärmedurchgangszahl um 1,43 % größer, die Rohrlänge entsprechend kleiner. Sie beträgt 11,460 m. Eine weitere Iteration ergibt **11,465 m**.

c) Der Dampfzufluss bleibt durch die Verschmutzung unbeeinflusst, so dass sich der Wärmestrom und die Erwärmung des Kühlwassers nicht verändern. Damit der Wärmestrom entsprechend der kinetischen Kopplungsgleichung abgeführt werden kann, ändert sich die mittlere Temperaturdifferenz. Da sich das Produkt aus k und A unter Berücksichtigung der Rohrlänge nicht verändert, können die zuvor berechneten Werte verwendet werden.

$$\Delta\vartheta_m = \frac{\dot{Q}}{A \cdot k_v} = \frac{2 \cdot 10^9 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{49901 \cdot \text{m}^2 \cdot 4 \cdot 403 \cdot 0,9 \cdot \text{W}} = 10,114 \text{ K}$$

Daraus kann man mit (Gl. 1.15) die Kondensationstemperatur ermitteln.

$$\vartheta_2 = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1'' \cdot e^{\frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1'}{\Delta\vartheta_m}}}{1 - e^{\frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1'}{\Delta\vartheta_m}}} = \mathbf{35,93 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

Diskussion

Bei der Auslegung des Kondensators muss die Rohrlänge bestimmt werden, die Funktion f_1 ist daher nicht bekannt, eine Iteration ist notwendig. Durch Verschmutzung erhöht sich die Kondensationstemperatur. Damit bei verringerter Wärmedurchgangszahl der Wärmestrom abgeführt werden kann, muss sich die mittlere Temperaturdifferenz erhöhen. Weil sich die Aufwärmung des Kühlwassers nicht ändert, erhöht sich die Kondensationstemperatur, damit der Wärmestrom abgeführt werden kann.

3.2.1.3 Rohre und Kanäle nicht kreisförmigen Querschnitts

Bei Rohren und Kanälen nicht kreisförmigen Querschnitts kann die *Nußeltzahl* bei der turbulenten Strömung mit den zuvor angegebenen Gleichungen berechnet werden. An Stelle des Rohrrinnendurchmessers wird dafür der *hydraulische Durchmesser* des Kanals eingesetzt. Mit ihm werden die *Reynolds-* und *Nußeltzahl* bestimmt.

Der hydraulische Durchmesser ist definiert als:

$$d_h = \frac{4 \cdot A}{U} = \frac{4 \cdot \text{Austauschfläche}}{\text{Umfang}} \quad (3.19)$$

Bei laminarer Strömung ist die Berechnung nicht kreisförmiger Querschnitte mit dem hydraulischen Durchmesser undurchführbar.

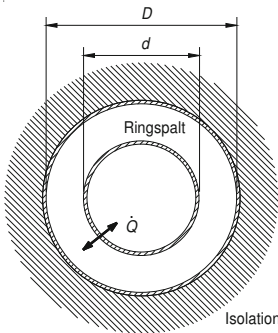


Bild 3.5: Ringspalt

Ringspalte (Bild 3.5) benötigen eine zusätzliche Korrektur. Hier ist das Verhältnis beider Ringspalt Durchmesser zu berücksichtigen. Bei Ringspalten, in denen die Wärmeübertragung nur vom oder zum Innenrohr erfolgt, kann z.B. folgende Korrektur durchgeführt werden [3.4, 3.5]:

$$Nu_{\text{Ringspalt}} / Nu_{d_h} = 0,86 \cdot (D/d)^{0,16} \quad (3.20)$$

BEISPIEL 3.4: Auslegung eines Gegenstrom-Wärmeübertragers

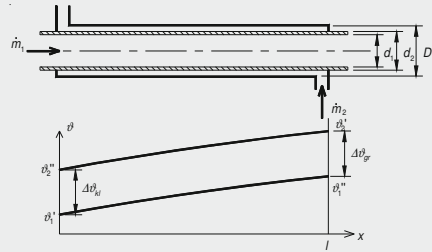
Der Wärmeübertrager einer Fernheizung besteht aus einem Innenrohr mit 18 mm Außendurchmesser und 1 mm Wandstärke. Das Rohr ist von einem konzentrisch angeordneten Außenrohr mit 24 mm Innendurchmesser ummantelt. Die mittlere Geschwindigkeit im Rohr und im Ringspalt beträgt 1 m/s. In den Ringspalt strömt das Heizwasser mit der Temperatur von 90 °C hinein. Im Rohr fließt das Brauchwasser und soll von 40 °C auf 60 °C erwärmt werden. Die Wärmeleitfähigkeit des Rohrmaterials ist 17 W/(m K). Das Außenrohr ist thermisch ideal isoliert. Zur Vereinfachung können die Funktionen f_1 und f_2 zu eins gesetzt werden. Die Stoffwerte sind:

	Dichte kg/m ³	kin. Viskosität 10 ⁻⁶ m ² /s	Wärmeleitfähigkeit W/(m K)	Pr	c_p J/(kg K)
Brauchwasser	998,1	0,553	0,6437	3,55	4 179
Heizwasser	971,8	0,365	0,6701	2,22	4 195

Berechnen Sie, wie lang der Apparat werden muss.

Lösung

Schema Siehe Skizze

**Annahmen**

- Nach außen erfolgt kein Wärmetransport.
- Die senkrechte Einstromung des Wassers in den Ringraum wird vernachlässigt.
- Der Einfluss der Rohrlänge und der der Richtung des Wärmestromes werden vernachlässigt.

Analyse

Um die notwendige Übertragungsfläche zu bestimmen, sind die Wärmeübergangszahlen innen und außen und die mittlere Temperaturdifferenz zu berechnen. Für Letztere benötigen wir die Austrittstemperatur des Heizwassers, die mit Hilfe der Energiebilanzgleichungen berechnet werden kann. Wir bestimmen zuerst die Massenströme im Rohr und Ringspalt.

$$\dot{m}_1 = c_1 \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot d_1^2 \cdot \rho_1 = 1 \cdot \text{m/s} \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot 0,016^2 \text{ m}^2 \cdot 998,1 \cdot \text{kg/m}^3 = 0,2007 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m}_2 = c_2 \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot (D^2 - d_2^2) \cdot \rho_1 = 1 \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot (0,024^2 - 0,018^2) \cdot 971,8 = 0,1923 \text{ kg/s}$$

Aus der Bilanzgleichung kann mit den gegebenen Werten der Wärmestrom zum Brauchwasser berechnet werden.

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 \cdot c_{p1} \cdot (\vartheta_1'' - \vartheta_1') = 0,2007 \cdot \text{kg/s} \cdot 4179 \cdot \text{J/(kg} \cdot \text{K)} \cdot (60 - 40) \cdot \text{K} = 16,773 \text{ kW}$$

Dieser Wärmestrom wird vom Heizwasser abgegeben. Damit ist die Austrittstemperatur des Heizwassers:

$$\vartheta_2'' = \vartheta_2' - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_2 \cdot c_{p2}} = 90 \text{ }^\circ\text{C} - \frac{16773 \cdot \text{W}}{0,1923 \cdot \text{kg/s} \cdot 4195 \cdot \text{J/(kg} \cdot \text{K)}} = 69,21 \text{ }^\circ\text{C}$$

Mittlere Temperaturdifferenz:

$$\Delta \vartheta_m = \frac{\Delta \vartheta_{gr} - \Delta \vartheta_{kl}}{\ln(\Delta \vartheta_{gr} / \Delta \vartheta_{kl})} = \frac{(30 - 29,21) \cdot \text{K}}{\ln(30 / 29,21)} = 29,60 \text{ K}$$

Die Wärmeübergangszahl im Rohr wird mit $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$ berechnet.

$$Re_{d_1} = \frac{c_1 \cdot d_1}{\nu_1} = \frac{1 \cdot \text{m/s} \cdot 0,016 \cdot \text{m}}{0,553 \cdot 10^{-6} \cdot \text{m}^2/\text{s}} = 28933$$

Widerstandszahl nach Gl. (3.9): $\xi = [1,8 \cdot \log(Re_{d_i}) - 1,5]^{-2} = 0,0234$

$$Nu_{d_i, turb} = \frac{(\xi/8) \cdot Re_{d_i} \cdot Pr}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi/8} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} = \frac{0,00293 \cdot 28933 \cdot 3,55}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{0,00293} \cdot (3,55^{2/3} - 1)} = 157,4$$

Damit ist die Wärmeübergangszahl:

$$\alpha_i = Nu_{d_i} \cdot \lambda / d_i = 157,4 \cdot 0,6437 \cdot \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}) / (0,016 \cdot \text{m}) = 6333 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Zur Berechnung der Wärmedurchgangszahl im Ringspalt muss zuerst mit Gl. (3.19) der hydraulische Durchmesser ermittelt werden.

$$d_h = \frac{4 \cdot A}{U} = \frac{\pi \cdot (D^2 - d_2^2)}{\pi \cdot (D + d_2)} = D - d_2 = 6 \text{ mm}$$

Die Wärmeübergangszahl kann mit den Gln. (3.8) und (3.20) bestimmt werden.

$$Re_{d_h} = \frac{c_2 \cdot d_h}{\nu_1} = \frac{1 \cdot \text{m/s} \cdot 0,006 \cdot \text{m}}{0,365 \cdot 10^{-6} \cdot \text{m}^2/\text{s}} = 16438$$

Widerstandszahl nach Gl. (3.9): $\xi = [1,8 \cdot \log(Re_{d_h}) - 1,5]^{-2} = 0,0270$

$$\begin{aligned} Nu_{d_h, turb} &= \frac{(\xi/8) \cdot Re_{d_h} \cdot Pr}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi/8} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} \cdot 0,86 \cdot \left(\frac{D}{d_2}\right)^{0,16} = \\ &= \frac{0,00337 \cdot 16438 \cdot 2,22}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{0,00337} \cdot (2,22^{2/3} - 1)} \cdot 0,86 \cdot \left(\frac{24}{18}\right)^{0,16} = 73,0 \end{aligned}$$

Damit ist die Wärmeübergangszahl im Ringspalt:

$$\alpha_a = Nu_{d_h} \cdot \lambda_2 / d_h = 73 \cdot 0,6701 \cdot \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}) / (0,006 \cdot \text{m}) = 8155 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Wärmedurchgangszahl nach Gl. (2.27):

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_2}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{d_2}{d_1 \cdot \alpha_i} \right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{1}{8155} + \frac{0,018}{2 \cdot 17} \cdot \ln \frac{18}{16} + \frac{18}{16 \cdot 6332} \right)^{-1} = 2758 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \end{aligned}$$

Die benötigte Austauschfläche beträgt:

$$A = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta \vartheta_m} = \frac{16773 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{2758 \cdot \text{W} \cdot 29,6 \cdot \text{K}} = 0,205 \text{ m}^2$$

Die Rohrlänge errechnet sich zu: $l = \frac{A}{\pi \cdot d_2} = 3,63 \text{ m}$

Diskussion

Bei der Strömung von Wasser entsteht eine sehr große Wärmeübergangszahl. Dadurch kann ein großer Wärmestrom über eine kleine Übertragungsfläche fließen.

Ohne die gemachten Vereinfachungen wäre unter Berücksichtigung der Rohrlänge und Richtung des Wärmestromes der Rechenaufwand etwa dreimal größer. Der Fehler hier ist kleiner als 5 %.

3.2.2 Ebene Wand

In technischen Apparaten kommt Wärmeübertragung durch erzwungene Konvektion an einer ebenen Wand selten vor. Die Berechnung der Wärmeübergangszahlen ist einfacher als bei anderen Körpern und wird deshalb in fast allen Lehrbüchern ausführlich behandelt, um den Zusammenhang zwischen der Wärmeübergangszahl und dem Reibungskoeffizienten aufzuzeigen. Hier werden nur die entsprechenden Gleichungen angegeben. Die charakteristische Länge ist die Länge l der Wand in Strömungsrichtung.

Für die laminare Strömung gilt:

$$Nu_{l,lam} = 0,644 \cdot \sqrt[3]{Pr} \cdot \sqrt{Re_l} \quad \text{für } Re_l < 10^5 \quad (3.21)$$

Für die turbulente Strömung gilt:

$$Nu_{l,turb} = \frac{0,037 \cdot Re_l^{0,8} \cdot Pr}{1 + 2,443 \cdot Re_l^{-0,1} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} \cdot f_3 \quad \text{für } 5 \cdot 10^5 < Re_l < 10^7 \quad (3.22)$$

Da die *Reynoldszahl* mit der Plattenlänge gebildet wird, ist für die Geometrie keine weitere Korrektur notwendig. Funktion f_3 ist die Korrekturfunktion für die Richtung des Wärmestromes. Sie ist gegeben als:

$$f_3 = \begin{cases} (Pr / Pr_w)^{0,25} & \text{für Flüssigkeiten} \\ 1 & \text{für Gase} \end{cases} \quad (3.23)$$

Der Bereich zwischen den *Reynoldszahlen* von 10^5 und $5 \cdot 10^5$ wird durch die beiden Gleichungen nicht abgedeckt. Der Übergang zwischen laminarer und turbu-

lenter Strömung erfolgt asymptotisch. Beide Bereiche und der Übergangsbereich werden durch folgende Gleichung erfasst:

$$Nu_l = \sqrt{Nu_{l,lam}^2 + Nu_{l,turb}^2} \quad \text{für } 10 < Re_l < 10^7 \quad (3.24)$$

3.2.3 Quer angeströmte Einzelkörper

Oft wird an ein vom Fluid quer angeströmten Körper Wärme übertragen. Zu den technischen Anwendungen gehören z.B. quer angeströmte Rohre von Rohrbündeln in Wärmeübertragern oder quer angeströmte Temperaturfühler. Rohrbündel werden im Kapitel 3.2.4 behandelt. Ihre Berechnung basiert auf den Gesetzmäßigkeiten quer angeströmter Einzelkörper. Wie wir in der Strömungslehre gesehen haben, bildet sich am Staupunkt der Strömung zunächst eine laminare Grenzschicht, die je nach Strömungsgeschwindigkeit und Geometrie des Körpers nach einer gewissen Strömungslänge in eine turbulente Strömung übergeht, es entstehen Strömungsablösungen. Strömungsvorgänge und damit auch die Wärmeübergangseffekte sind komplex. Wie bei der Rohrströmung ist es jedoch gelungen, Beziehungen herzuleiten, die die *Nußeltzahl* als eine Funktion der *Reynoldszahl*, *Prandtlzahl* und Geometrie angeben.

Für die Bildung der *Reynolds-* und *Nußeltzahl* ist die charakteristische Länge die *Überströmlänge* L , die als die am Austausch beteiligte Fläche A , geteilt durch den *projizierten Umfang* des Körpers definiert ist.

$$L' = A / U_{proj} \quad (3.25)$$

Der *projizierte Umfang* ist der Umfang U_{proj} der in Strömungsrichtung projizierten Fläche des Körpers. Bei quer angeströmten Zylindern oder länglichen Körpern hat der projizierte Umfang die doppelte Länge, bei einer Platte die Breite der Platte, bei einer Kugel den Umfang der Kugel.

Bild 3.6 zeigt die Übertragungsflächen und die projizierten Umfänge einiger Körper.

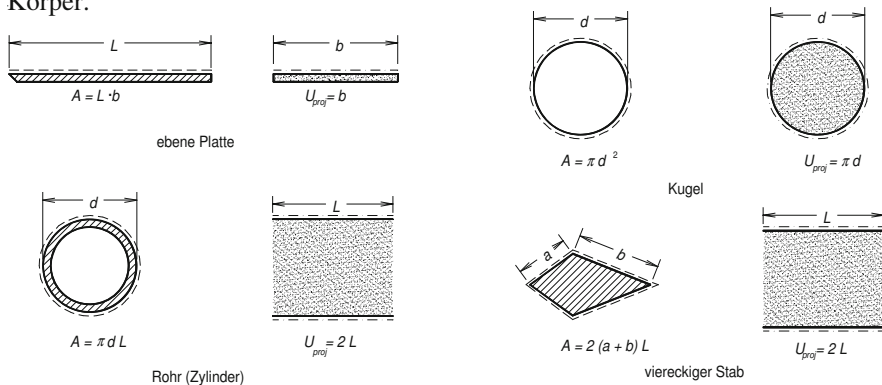


Bild 3.6: Übertragungsflächen und projizierter Umfang angeströmter Einzelkörper

Bei einer Kugel und einem Zylinder findet selbst dann, wenn die *Reynoldszahl* gegen null strebt, noch eine Wärmeübertragung durch Wärmeleitung im umgebenden Fluid statt. Für eine Kugelschale mit dem Innendurchmesser d , deren Außendurchmesser gegen unendlich strebt (ruhende Umgebung), beträgt die Wärmeübergangszahl nach Gl. (2.36):

$$\alpha_0 = \frac{2 \cdot \lambda}{d} \quad (3.26)$$

Damit ist die minimale *Nußeltzahl* einer Kugel:

$$Nu_{L',0} = 2 \quad \text{für } Re_{L'} < 0,1 \quad (3.27)$$

Für einen Zylinder ist die Herleitung nicht mehr so einfach. Hier wird nur der Wert angegeben.

$$Nu_{L',0} = 0,3 \quad \text{für } Re_{L'} < 0,1 \quad (3.28)$$

Für eine Platte ist die *Nußeltzahl* $Nu_{L',0}$ gleich null.

Bei sehr kleinen Abmessungen von Kugeln und Zylindern ist bei *Reynoldszahlen*, die kleiner als 1 sind, die Grenzschichtdicke gegenüber den Körperabmessungen nicht mehr vernachlässigbar und die *Nußeltzahlen* für Kugel und Zylinder sind dann:

$$\begin{aligned} \text{Kugel:} \quad Nu_{L',0} &= 1,001 \cdot \sqrt[3]{Re_{L'} \cdot Pr} \quad \text{für } 0,1 < Re_{L'} < 1 \\ \text{Zylinder:} \quad Nu_{L',0} &= 0,75 \cdot \sqrt[3]{Re_{L'} \cdot Pr} \quad \text{für } 0,1 < Re_{L'} < 1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Bei *Reynoldszahlen* zwischen 1 und 1 000 gilt die gleiche Beziehung wie für eine ebene Wand oder ein Rohr.

$$Nu_{L',lam} = 0,664 \cdot \sqrt[3]{Pr} \cdot \sqrt{Re_{L'}} \quad \text{für } 1 < Re_{L'} < 1000 \quad (3.30)$$

Bei *Reynoldszahlen* von 10^5 bis 10^7 gilt nach [3.4]:

$$Nu_{L',turb} = \frac{0,037 \cdot Re_{L'}^{0,8} \cdot Pr}{1 + 2,443 \cdot Re_{L'}^{-0,1} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} \cdot f_4 \quad \text{für } 10^5 < Re_{L'} < 10^7 \quad (3.31)$$

In diesem Bereich kann die *Nußeltzahl* mit etwas geringerer Genauigkeit auch durch eine vereinfachte Potenzgleichung angegeben werden.

$$Nu_{L',turb} = 0,037 \cdot Re_{L'}^{0,8} \cdot Pr^{0,48} \cdot f_4 \quad \text{für } 10^5 < Re_{L'} < 10^7 \quad (3.32)$$

Der Bereich zwischen den *Reynoldszahlen* von 10^3 und 10^5 ist nicht abgedeckt. Da sich die *Nußeltzahl* hier asymptotisch den Werten der Gln. (3.25) bis (3.29) nähert, kann folgende Ausgleichsfunktion angegeben werden:

$$Nu_{L'} = Nu_{L',0} + \sqrt{Nu_{L',lam}^2 + Nu_{L',turb}^2} \quad \text{für } 10 < Re_{L'} < 10^7 \quad (3.33)$$

Bild 3.7 zeigt die *Nußeltzahlen* für quer angeströmte Zylinder.

Der Korrekturfaktor f_4 gibt den Einfluss der Richtung des Wärmestromes an und ist:

$$f_4 = (Pr / Pr_w)^{0,25} \quad \text{für Flüssigkeiten und } f_4 = (T / T_w)^{0,121} \quad \text{für Gase.} \quad (3.34)$$

Wird ein Körper schräg angeströmt, verringern sich die Wärmeübergangszahlen. Bild 3.8 zeigt das Verhältnis der *Nußeltzahlen* von schrägen zu quer angeströmten Zylindern.

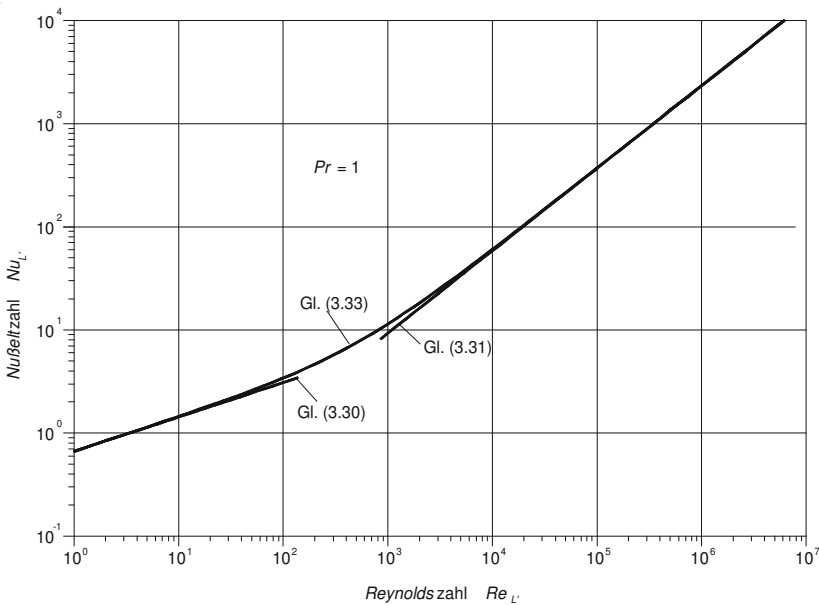


Bild 3.7: *Nußeltzahlen* für quer angeströmte Zylinder

Bei längs angeströmten Zylindern kann die Wärmeübergangszahl wie für ebene Wände berechnet werden. Ist jedoch die Abmessung des Zylinders wie z.B. bei längs angeströmten dünnen Drähten gegenüber der Grenzschichtdicke klein, ist dieses zu berücksichtigen. Für längs angeströmte dünne Zylinder kann nachstehende Gleichung verwendet werden.

$$Nu_{L,Zyl} = (1 + 2,3 \cdot (L/d) \cdot Re_L^{-0,5}) \cdot Nu_L \quad (3.35)$$

L ist dabei die Länge des Zylinders und Nu_L die *Nußeltzahl* der ebenen Wand.

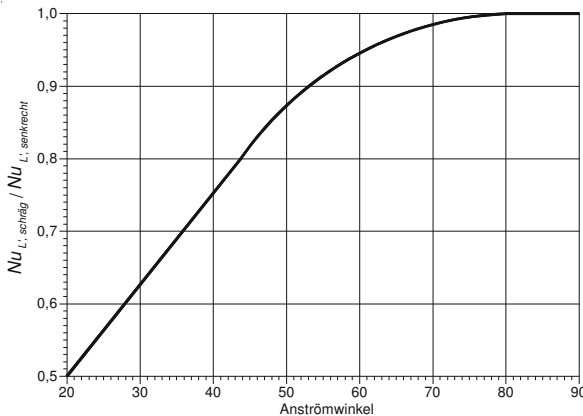


Bild 3.8: Verhältnis der *Nu*-Zahlen von schrägen zu quer angeströmten Zylindern

BEISPIEL 3.5: Temperaturmessung mit einem Platinwiderstand

Mit einem zylinderförmigen Platinwiderstand, der einen Außendurchmesser von 4 mm hat, wird die Temperatur von 100 °C warmer Luft gemessen. Der Widerstand hat folgende Temperaturabhängigkeit: $R(\vartheta) = 100 \, \Omega + 0,04 \, \Omega/\text{K} \cdot \vartheta$. Für die Messung fließt ein konstanter Strom von 1 mA durch den Widerstand. Dadurch wird der Widerstand aufgeheizt und die Messung verfälscht. Die beheizte Länge des Fühlers ist 10 mm. Die Stoffwerte der Luft sind: $\lambda = 0,0314 \, \text{W}/(\text{m K})$, $\nu = 23,06 \cdot 10^{-6} \, \text{m}^2/\text{s}$, $Pr = 0,701$.

Berechnen Sie, welche Temperatur bei 0,01, 0,1, 1, 10 und 100 m/s Strömungsgeschwindigkeit senkrecht zum Widerstand gemessen wird.

Lösung

Schema Siehe Skizze

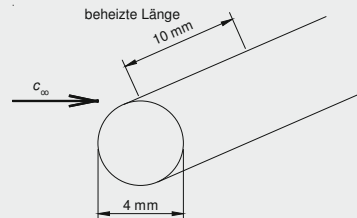
Annahmen

- Die Temperatur im Messfühler ist konstant.
- Die Lufttemperatur ist konstant.
- Die Effekte am Ende des Fühlers sind vernachlässigbar.

Analyse

Der durch den Widerstand fließende Strom erzeugt folgenden Wärmestrom:

$$\dot{Q} = i^2 \cdot R = i^2 \cdot (100 \, \Omega + 0,04 \, \Omega/\text{K} \cdot \vartheta)$$



Die Temperatur ϑ ist jene, welche vom Messfühler wahrgenommen und hier berechnet werden muss. Sie ist höher als die Lufttemperatur. Dadurch kann der zugeführte Wärmestrom abgeführt werden. Dieser ist:

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot (\vartheta - \vartheta_{\infty})$$

Da der zu- und abgeführte Wärmestrom gleich groß sind, kann die Temperatur ϑ bestimmt werden.

$$\vartheta = \frac{i^2 \cdot 100 \, \Omega + \alpha \cdot A \cdot \vartheta_{\infty}}{\alpha \cdot A - i^2 \cdot 0,04 \cdot \Omega / \text{K}}$$

Für die verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten wird die Wärmeübergangszahl mit Gl. (3.44) berechnet. Die zur Bestimmung der *Reynolds*- und *Nußelt*zahl benötigte charakteristische Länge ist:

$$L' = \frac{A}{U_{\text{proj}}} = \frac{\pi \cdot d \cdot l}{2 \cdot l} = \frac{\pi \cdot d}{2} = 6,28 \text{ mm}$$

Die Ergebnisse folgen tabelliert:

c m/s	Re_L	$Nu_{L,\text{lam}}$	$Nu_{L,\text{turb}}$	Nu_L	α W/(m ² K)	ϑ °C
0,01	2,66	0,962	0,068	1,265	6,320	100,131
0,10	26,60	3,044	0,431	3,374	16,860	100,050
1,00	266,00	9,624	2,719	10,301	51,480	100,016
10,00	2 662,00	30,435	17,154	35,236	176,092	100,005
100,00	26 624,00	96,244	108,233	145,136	725,311	100,001

Diskussion

Der durch den Widerstand fließende Strom heizt den Temperaturfühler auf. Der Fehler in der Temperaturmessung ist ab Strömungsgeschwindigkeit von 0,1 m/s kleiner als 0,05 K. Bei den heutigen genauen Messinstrumenten kann der Messstrom wesentlich kleiner als 1 mA gewählt werden.

Auch bei ruhender Luft mit $Nu_{L,0} = 0,3$ ist die Wärmeübergangszahl bereits ca. 1,5, der Fehler würde bei ungefähr 0,5 K liegen. Schon bei einer Stromstärke von 0,1 mA sinkt der Fehler um den Faktor 100.

3.2.4 Quer angeströmte Rohrbündel

In der Technik werden vielfach quer angeströmte *Rohrbündel* eingesetzt. Bereits bei einer einzelnen Rohrreihe, die senkrecht zur Anströmung angeordnet ist, steigt die Geschwindigkeit zwischen den Rohren an, so dass die Beziehungen für einzeln

angeströmte Körper die Wärmeübergangszahlen nicht mehr richtig beschreiben. Sind die Rohre in Strömungsrichtung hintereinander angeordnet, wird an den Rohren die Strömung abgelöst und beeinflusst die Wärmeübergangszahlen zusätzlich. Die Berechnung ist so aufgebaut, dass von den Gesetzmäßigkeiten der quer angeströmten Einzelkörper ausgegangen wird und für die Rohrbündel, je nach geometrischer Anordnung der Rohre, Korrekturfaktoren eingeführt werden. Bild 3.9 zeigt verschiedene Möglichkeiten der Rohranordnungen in einem Rohrbündel.

Der Abstand der Rohre senkrecht zur Strömungsrichtung ist s_1 , der Abstand der Rohrreihen s_2 . Die Anordnung eines Rohrbündels wird durch den *dimensionslosen Rohrabstand* $a = s_1/d$ und den dimensionslosen Rohrreihenabstand $b = s_2/d$ charakterisiert.

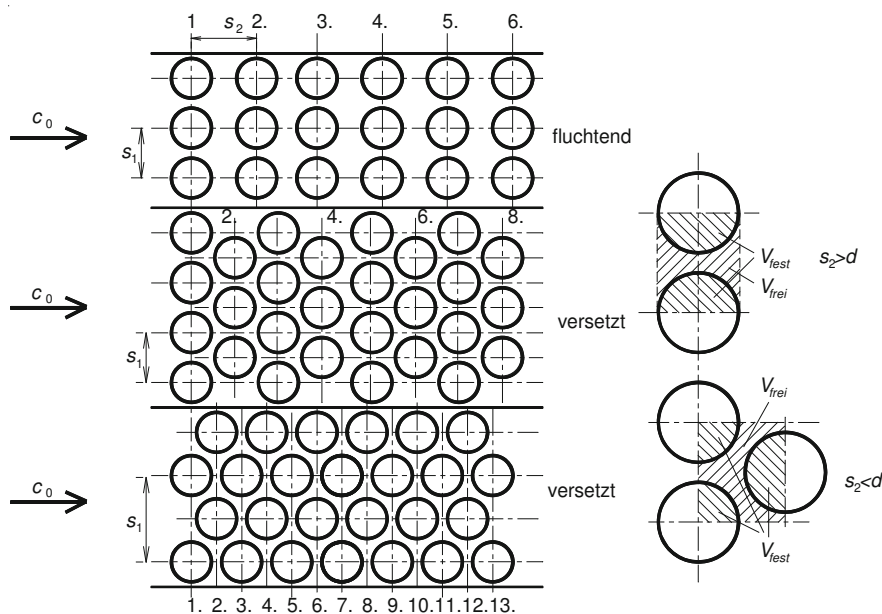


Bild 3.9: Verschiedene Anordnung der Rohre in Rohrbündeln

$$a = s_1/d \quad (3.36)$$

$$b = s_2/d \quad (3.37)$$

Die *Reynoldszahl* wird mit der mittleren Geschwindigkeit c_ψ im Hohlraumanteil ψ gebildet. Der Hohlraumanteil ist das Verhältnis des Volumens zwischen den Rohren (Hohlraum V_{frei}) zum Gesamtvolumen V des Bündels. Der Hohlraumanteil ist andererseits das Gesamtvolumen minus Volumen der Rohre (V_{fest}). Je nachdem, ob sich die Rohre zweier Rohrreihen senkrecht zur Strömungsrichtung überdecken ($b < 1$), sind zwei verschiedene Definitionen für den *Hohlraumanteil* gegeben:

$$\Psi = 1 - \frac{V_{fest}}{V} = 1 - \frac{\pi \cdot d^2 \cdot l}{4 \cdot s_1 \cdot d \cdot l} = 1 - \frac{\pi}{4 \cdot a} \quad \text{für } b > 1 \quad (3.38)$$

$$\Psi = 1 - \frac{V_{fest}}{V} = 1 - \frac{\pi \cdot d^2 \cdot l}{4 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot l} = 1 - \frac{\pi}{4 \cdot a \cdot b} \quad \text{für } b < 1 \quad (3.39)$$

Die Geschwindigkeit, mit der die *Reynoldszahl* gebildet wird, ist:

$$c_\Psi = c_0 / \Psi \quad (3.40)$$

Die *Reynoldszahl* wird damit:

$$Re_{\Psi, L'} = \frac{c_\Psi \cdot L'}{\nu} \quad (3.41)$$

Mit dieser *Reynoldszahl* wird die *Nußeltzahl* für einzeln angeströmte Rohre gebildet und für die Bündelanordnung zusätzlich noch mit zwei Geometriefaktoren multipliziert. Der erste Faktor f_A berücksichtigt die *Anordnung der Rohre im Bündel*, der zweite f_n die Anzahl der Rohrreihen.

$$f_A = 1 + \frac{0,7 \cdot (b/a - 0,3)}{\Psi^{1,5} \cdot (b/a + 0,7)^2} \quad \text{fluchtende Anordnung} \quad (3.42)$$

$$f_A = 1 + \frac{2}{3 \cdot b} \quad \text{versetzte Anordnung} \quad (3.43)$$

In der ersten Rohrreihe vergrößert sich die Wärmeübergangszahl durch die erhöhte Geschwindigkeit. Sie ist zwar größer als bei einem angeströmten Einzelkörper, jedoch kleiner als im Inneren des Bündels. Durch die Ablösung der Strömung an den Rohren erhöht sich der Turbulenzgrad der Strömung und damit auch die Wärmeübergangszahl. Diesen so genannten "*first row effect*" muss man zusätzlich berücksichtigen. Will man ein Rohrbündel Rohrreihe für Rohrreihe berechnen, muss der Einfluss der Rohrreihenanzahl für jede Rohrreihe lokal bekannt sein. In Bild 3.10 ist links der lokale Korrekturfaktor f_j für die j -te Rohrreihe und rechts f_n für ein Bündel mit n Rohrreihen dargestellt. Gl. (3.44) ist die Formel zur Berechnung des Korrekturfaktors der einzelnen Rohrreihe und Gl. (3.45) die für das gesamte Bündel mit n Rohren. Mit Gl. (3.46) kann die *Nußeltzahl* Nu_j der j -ten Rohrreihe und mit Gl. (3.47) die des Bündels $Nu_{\text{Bündel}}$ bestimmt werden.

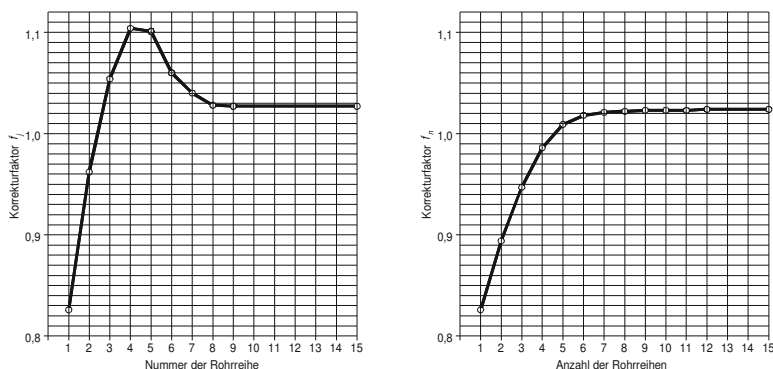


Bild 3.10: Korrekturfaktor für den Einfluss der Rohrreihen (links lokal, rechts integral)

$$f_j = \begin{cases} 0,6475 + 0,2 \cdot j - 0,0215 \cdot j^2 & \text{wenn } j \leq 4 \\ 1 + 1/(j^2 + j) + 3 \cdot (2 \cdot j - 1)/(j^4 - 2j^3 + j^2) & \text{wenn } j \geq 5 \end{cases} \quad (3.44)$$

$$f_n = \begin{cases} 0,074423 + 0,8 \cdot n - 0,006 \cdot n^2 & \text{wenn } n \leq 5 \\ 0,018 + \exp[0,0004 \cdot (n - 6) - 1] & \text{wenn } n \geq 6 \end{cases} \quad (3.45)$$

$$Nu_j = \alpha \cdot L' / \lambda = Nu_{L'} \cdot f_A \cdot f_j \quad (3.46)$$

$$Nu_{\text{Bündel}} = \alpha \cdot L' / \lambda = Nu_{L'} \cdot f_A \cdot f_n \quad (3.47)$$

BEISPIEL 3.6: Auslegung eines Zwischenüberhitzerbündels

Für eine Nuklearanlage ist ein Zwischenüberhitzerbündel mit U-Rohren auszulegen. Zwischen den Rohren des Bündels strömen 300 kg/s Dampf bei 8 bar Druck, der von 170,4 °C auf 280 °C erhitzt werden soll. In den Rohren kondensiert Heizdampf bei 295 °C. Die Wärmeübergangszahl in den Rohren ist 12 000 W/(m² K). Die Rohre haben einen Außendurchmesser von 15 mm, eine Wandstärke von 1 mm und die Wärmeleitfähigkeit von 26 W/(m K). Die Anströmgeschwindigkeit am Bündeleintritt soll 6 m/s nicht überschreiten. Der Heizdampf strömt aus einer halbkugelförmigen Dampfkammer zu den Rohren. Da der Rohrboden kreisförmig ist, soll die Höhe des Bündels etwa gleich groß wie seine Breite sein. Die Rohrbögen sind von der äußeren Dampfströmung abgetrennt, so dass nur die gerade Länge der Rohre als Heizfläche zur Verfügung steht. Die Rohre sind in gleichseitigen Dreiecken angeordnet und haben einen Abstand von 20 mm. Die Skizze zeigt die Anordnung des Rohrbündels und die der Rohre. Am Bündeleintritt beträgt die Dampfdichte 4,161 kg/m³.

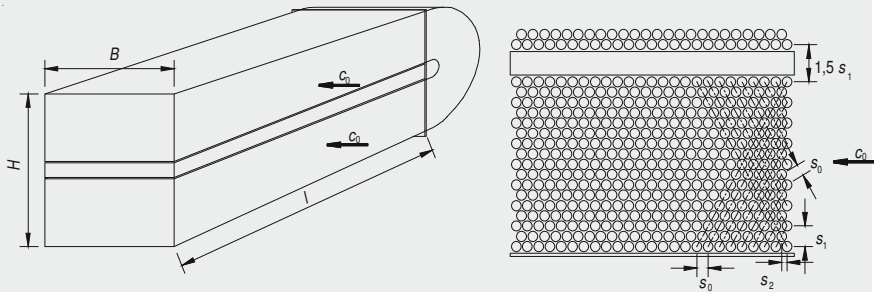
Die übrigen Dampfdaten bei der mittleren Temperatur von 225,2 °C sind:

$$\rho = 3,581 \text{ kg/m}^3, \lambda = 0,038 \text{ W/(m K)}, \nu = 4,76 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, Pr = 0,99, \\ c_p = 2\,206 \text{ J/(kg K)}.$$

Berechnen Sie die Anzahl und Länge der Rohre.

Lösung

Schema Siehe Skizze



Annahmen

- Die Effekte am Rande des Bündels können vernachlässigt werden.
- Die Wärmeübergangszahlen sind inner- und außerhalb der Rohre des Bündels jeweils konstant.
- Die Temperatur in den Rohren ist konstant.

Analyse

Um Anzahl und Länge der Rohre zu bestimmen, müssen die Anzahl der Rohrreihen n , die der Rohre pro Reihe i und die Heizfläche A berechnet werden. Das sind drei Unbekannte, d.h., zur Bestimmung sind drei Gleichungen notwendig.

Die Bedingung, dass die Höhe des Bündels etwa gleich groß sein soll wie seine Breite, gibt den Zusammenhang zwischen der Anzahl Rohrreihen und der Anzahl der Rohre pro Reihe an.

$$B = n \cdot s_2 \quad H = (i + 1,5) \cdot s_1 \quad \text{aus } B = H \text{ folgt: } n \cdot s_2 = (i + 1,5) \cdot s_1$$

Die vorgegebene Anströmgeschwindigkeit bestimmt den Anströmquerschnitt des Rohrbündels.

$$c_0 = \frac{\dot{m}}{H \cdot l \cdot \rho_0} = \frac{\dot{m}}{(i + 1,5) \cdot s_1 \cdot l \cdot \rho_0}$$

Die Fläche des Bündels wird mit der kinetischen Kopplungsgleichung bestimmt.

$$A = i \cdot n \cdot \pi \cdot d_a \cdot l = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta \vartheta_m}$$

Aus der Energiebilanzgleichung kann der Wärmestrom direkt berechnet werden.

$$\dot{Q} = \dot{m} \cdot c_p \cdot (\vartheta_1'' - \vartheta_1') = 300 \cdot \text{kg/s} \cdot 2206 \cdot \text{J/(kg} \cdot \text{K)} \cdot (280 - 170,4) \cdot \text{K} = 72533 \text{ kW}$$

Die mittlere Temperaturdifferenz berechnet sich mit den gegebenen Temperaturen als:

$$\Delta \vartheta_m = \frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1'}{\ln \left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1'}{\vartheta_2 - \vartheta_1''} \right)} = \frac{(280 - 170,4) \cdot \text{K}}{\ln \left(\frac{295 - 170,4}{295 - 280} \right)} = 51,77 \text{ K}$$

Zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen werden zuerst die geometrischen Daten des Bündels bestimmt. Die dimensionslosen Rohrabstände a und b sind:

$$s_1 = \sqrt{3} \cdot s_0 = \sqrt{3} \cdot 20 \text{ mm} = 34,64 \text{ mm} \quad a = s_1 / d_a = 34,64 / 15 = 2,309$$

$$s_2 = s_0 / 2 = 10 \text{ mm} \quad b = s_2 / d_a = 10 / 15 = 0,67$$

Da $b < 1$ ist, wird mit Gl. (3.39) der Hohlraumanteil des Bündels bestimmt.

$$\Psi = 1 - \frac{\pi}{4 \cdot a \cdot b} = 1 - \frac{\pi}{4 \cdot a \cdot b} = 1 - \frac{\pi}{4 \cdot 2,309 \cdot 0,67} = 0,490$$

Die Anströmlänge des Rohres ist: $L' = \pi \cdot d_a / 2 = 23,562 \text{ mm}$

Bei der Berechnung der Geschwindigkeit im Bündel muss berücksichtigt werden, dass die Dichte kleiner ist als am Eintritt. So erhalten wir mit Gl. (3.40):

$$c_\Psi = \frac{c_0 \cdot \rho_0}{\rho \cdot \Psi} = \frac{6 \cdot 4,161}{3,581 \cdot 0,490} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = 14,23 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Reynoldszahl nach Gl. (3.41): } Re_{L',\Psi} = \frac{c_\Psi \cdot L'}{\nu} = \frac{14,23 \cdot \text{m} \cdot 0,02356 \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{4,76 \cdot 10^{-6} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}} = 70\,448$$

Die *Nußeltzahl* wird mit den Gln. (3.31) bis (3.33) berechnet, wobei angenommen wird, dass die dampfseitige Wärmeübergangszahl eher klein ist und die mittlere Wandtemperatur somit ca. 270 °C beträgt.

$$Nu_{L',\text{lam}} = 0,664 \cdot \sqrt[3]{Pr} \cdot \sqrt{Re_{L'}} = 0,664 \cdot \sqrt[3]{0,99} \cdot \sqrt{70\,448} = 175,7$$

$$Nu_{L',\text{turb}} = \frac{0,037 \cdot Re_{L'}^{0,8} \cdot Pr}{1 + 2,443 \cdot Re_{L'}^{-0,1} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} = \frac{0,037 \cdot 70\,448^{0,8} \cdot 0,99}{1 + 2,443 \cdot 70\,448^{-0,1} \cdot (0,99^{2/3} - 1)} = 278,3$$

$$Nu_{L'} = Nu_{L',0} + \sqrt{Nu_{L',lam}^2 + Nu_{L',turb}^2} \cdot (T/T_w)^{0,121} = 325,9$$

Der Anordnungsfaktor f_A wird mit Gl. (3.43) bestimmt.

$$f_A = 1 + \frac{2}{3 \cdot b} = 1 + \frac{2}{3 \cdot 0,67} = 2$$

Für den Faktor f_n wird angenommen, dass mehr als 15 Rohrreihen notwendig werden, so dass $f_n = 1,03$ ist. Die *Nußeltzahl* des Bündels ist nach Gl. (3.47):

$$Nu_{\text{Bündel}} = Nu_{L'} \cdot f_A \cdot f_n = 325,9 \cdot 2 \cdot 1,03 = 671,2$$

Für die Wärmeübergangszahl außen am Bündel erhalten wir:

$$\alpha_a = \frac{Nu_{\text{Bündel}} \cdot \lambda}{L'} = \frac{671,2 \cdot 0,038 \cdot \text{W}}{0,02356 \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{K}} = 1082,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Die Wärmedurchgangszahl ist:

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_a}{d_i \cdot \alpha_i} \right)^{-1} = 942,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Die Wandtemperatur kann berechnet, die gemachte Annahme geprüft werden.

$$\vartheta_w = \vartheta_m + \Delta \vartheta_m \cdot k / \alpha_a = 225,2 \text{ °C} + 51,77 \cdot \text{K} \cdot 942,4 / 1082,6 = 270,3 \text{ °C}$$

Eine weitere Korrektur erübrigt sich, weil der Unterschied kleiner als 0,05 % ist. Die benötigte Austauschfläche beträgt:

$$A = i \cdot n \cdot \pi \cdot d_a \cdot l = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta \vartheta_m} = \frac{72,533 \cdot 10^6 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{942,4 \cdot \text{W} \cdot 51,77 \cdot \text{K}} = 1486,7 \text{ m}^2$$

Aus der Gleichung für die Anströmgeschwindigkeit erhalten wir:

$$(i+1,5) \cdot l = \frac{\dot{m}}{s_1 \cdot c_0 \cdot \rho_0} = \frac{300 \cdot \text{kg} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^3}{0,03464 \cdot \text{m} \cdot 6 \cdot \text{m} \cdot 4,161 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}} = 346,88 \text{ m}$$

Aus der Bedingung für das Verhältnis der Höhe zur Länge ergibt sich folgende Beziehung:

$$(i+1,5) = n \cdot s_2 / s_1$$

Beide Gleichungen kombiniert, ergeben:

$$n \cdot l = s_1 / s_2 \cdot 346,88 \text{ m} = 34,64 / 10 \cdot 346,89 \text{ m} = 1201,63 \text{ m}$$

Aus der Austauschfläche kann jetzt die Anzahl der Rohre pro Rohrreihe bestimmt werden.

$$i = \frac{A}{n \cdot l \cdot \pi \cdot d_a} = \frac{1386,7 \text{ m}^2}{1201,63 \cdot \text{m} \cdot \pi \cdot 0,015 \cdot \text{m}} = 26$$

Für die Anzahl Rohrreihen erhalten wir: $n = (i + 1,5) \cdot s_1 / s_2 = 96$

Die Rohrlänge ist: $l = 1201,67 \text{ m} / n = 12,498 \text{ m}$

Diskussion

Die Wärmeübergangszahl ist in den Rohrbündeln höher als bei einzelnen Rohren. Dieses wird durch die größere Geschwindigkeit, die eine höhere *Reynoldszahl* liefert und die Turbulenzen bei Strömungsablösung, die durch die Faktoren f_A und f_n berücksichtigt werden, bewirkt.

3.2.5 Rohrbündel mit Umlenkblechen

Oft wird ein Rohrbündel weder nur senkrecht noch nur in einem bestimmten Winkel angeströmt. Wie in Bild 3.11 dargestellt, wird die Strömung im Bündel durch Schikanen (Umlenkbleche) umgelenkt, so dass ein Teil der Rohre senkrecht, andere parallel angeströmt werden. In diesem Fall werden die Wärmeübergangszahlen für die senkrecht angeströmten Rohre wie im vorigen Kapitel, die der parallel angeströmten Rohre wie in Kapitel 3.2.13 beschrieben, berechnet. Dieses ist aber nur eine Näherung, weil die Rohre im Bereich der Umlenkung weder genau senkrecht noch parallel angeströmt werden. Ferner entstehen an den Umlenkblechen Bypass- und Leckageströmungen. Diese Effekte sind durch weitere Korrekturfaktoren zu berücksichtigen, deren Beschreibung jedoch den Rahmen dieses Buches sprengen würde. Daher muss hier auf einschlägige Literatur verwiesen werden (z. B. VDI-Wärmeatlas [3.4] und [3.6]).

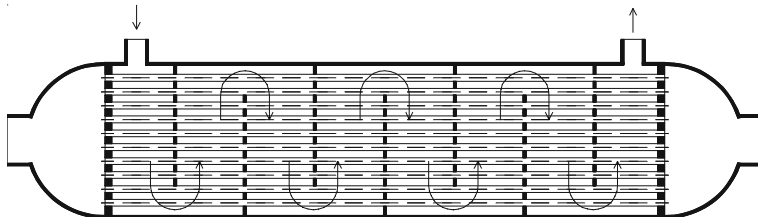


Bild 3.11: Rohrbündelwärmeübertrager mit Umlenkblechen

3.3 Rippenrohre

Die Übertragungsfläche eines Wärmeübertragers kann man durch das Anbringen von Rippen vergrößern. Dieses ist relativ kostengünstig, da für die zusätzliche Fläche keine drucktragenden Rohre oder Kanäle notwendig sind. Rippen werden fast immer auf der Seite der tieferen Wärmeübergangszahlen angeordnet. Die Wirksamkeit der Berippung ist desto besser, je kleiner die Wärmeübergangszahlen sind.

Wesentliche Voraussetzung für die nachfolgenden Berechnungen ist ein vollkommener Kontakt der Rippe mit der Wand der Wärmeübertragungsfläche. Die angegebenen Berechnungsmethoden sind nur eine Näherung, da bei konkreten Beispielen die Anordnung der Rohre, Rippen etc. eine zusätzliche Rolle spielt. Für genaue Berechnungen müssen entweder Versuche durchgeführt oder auf Ergebnisse von Versuchen, die unter ähnlichen Bedingungen erfolgten, zurückgegriffen werden.

Hier wird die Berechnung für Rippenrohre durchgeführt. Bei berippten ebenen Platten, die in der Technik eine eher untergeordnete Bedeutung haben, sind die Wärmedurchgangszahlen entsprechend den Gleichungen in Kap. 3.2.2 zu bestimmen. Die Wärmeübergangszahlen werden auf die Fläche A des unberippten Rohres bezogen. Damit ist der an einem berippten Rohr übertragene Wärmestrom:

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \Delta \vartheta_m \quad (3.48)$$

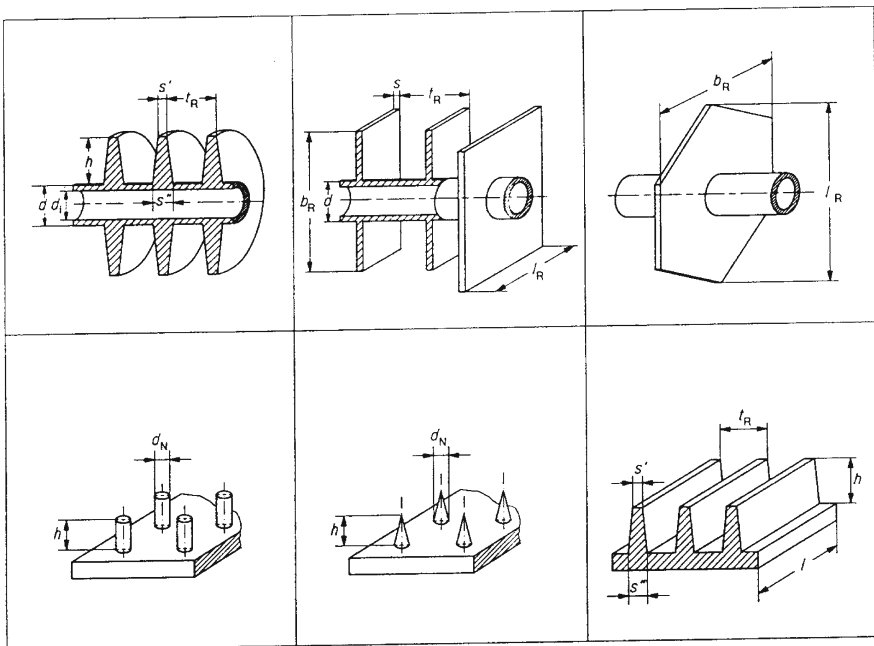


Bild 3.12: Typische, berippte Oberflächen [3.4]

Die auf die Oberfläche des unberippten Rohres A bezogene Wärmedurchgangszahl wird folgendermaßen bestimmt: Die Wärmeübergangszahl an der Oberfläche A_{Ri} der Rippen und an der Oberfläche A_0 des Rohres zwischen den Rippen ist α_a . Die Bezugstemperatur für die Wärmeübertragung ist die Temperatur an der Rohroberfläche. Die veränderten Temperaturen an den Rippen berücksichtigt der Rippenwirkungsgrad η_{Ri} . Die Fläche der Rippen ist A_{Ri} , wobei die Flächen an den Rippen schneiden vernachlässigt werden. Damit ist die Wärmedurchgangszahl:

$$\frac{1}{k} = \frac{A}{A_0 + A_{Ri} \cdot \eta_{Ri}} \cdot \frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_a}{d_i} \cdot \frac{1}{\alpha_i} \quad (3.49)$$

Der in Kap. 2.1.6.4 hergeleitete Rippenwirkungsgrad gilt nur für Rippen mit konstantem Rippenquerschnitt. Der Querschnitt für den Wärmestrom in der Rippe verändert sich bei Rippenrohren und der Wirkungsgrad muss entsprechend bestimmt werden. Für die verschiedenen Geometrien sind Korrekturfunktionen angegeben. Der *Rippenwirkungsgrad* ist:

$$\eta_{Ri} = \frac{\tanh X}{X} \quad (3.50)$$

Rechengröße X :

$$X = \varphi \cdot \frac{d_a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha_a}{\lambda \cdot s}} \quad (3.51)$$

Die Korrekturfunktion für die verschiedenen Geometrien ist dabei φ . Bei konischen Rippen wird für die Rippendicke s der Mittelwert der Dicke am Rippenfuß s und an der Rippenscheide s' eingesetzt:

$$s = (s'' + s') / 2 \quad (3.52)$$

Die Korrekturfunktion für häufig vorkommende Rippenformen sind nachstehend zusammengestellt.

Kreisrippen:

$$\varphi = (D / d_a - 1) \cdot [1 + 0,35 \cdot \ln(D / d_a)] \quad (3.53)$$

Rechteckrippen:

$$\varphi = (\varphi' - 1) \cdot [1 + 0,35 \cdot \ln \varphi'] \quad \text{mit} \quad \varphi' = 1,28 \cdot (b_R / d_a) \cdot \sqrt{l_R / b_R} - 0,2 \quad (3.54)$$

Zusammenhängende Rippen: Bei Rippen mit fluchtender Rohranordnung ist Gl. (3.54) zu verwenden. Bei versetzter Anordnung weist man einer Rippe eine Sechseckfläche zu und die Funktion φ wird durch nachstehende Funktion in Gl. (3.54) eingesetzt:

$$\varphi' = 1,27 \cdot (b_R / d_a) \cdot \sqrt{l_R / b_R - 0,3} \quad (3.55)$$

Gerade Rippen auf ebener Grundfläche:

$$\varphi = 2 \cdot h / d_a \quad (3.56)$$

Bei trapezförmigen Rippen ist die Rippendicke s folgendermaßen zu bestimmen:

$$s = 0,75 \cdot s'' + 0,25 \cdot s' \quad (3.57)$$

Nadelrippen auf ebener Grundfläche:

$$\varphi = 2 \cdot h / d_a \quad (3.58)$$

Für die Rippendicke werden folgende Beziehungen eingesetzt:

$$s = d_N / 2 \text{ bei stumpfen, } s = 1,125 \cdot d_N \text{ bei spitzen Rippen.} \quad (3.59)$$

3.3.1 Kreisrippenrohre

Nachstehend ist die Berechnung der Flächen für Kreisrippen mit konstanter Rippendicke aufgeführt. Für rechteckige, zusammenhängende und Nadelrippen erfolgt die Berechnung nach den gleichen Überlegungen. Bild 3.13 zeigt ein Rippenrohr mit Kreisrippen.

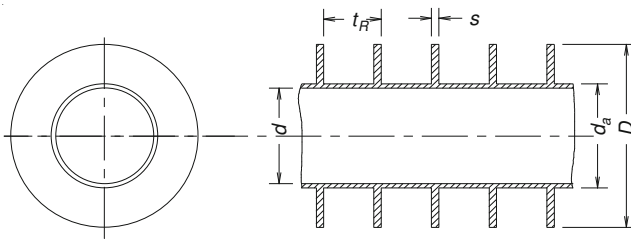


Bild 3.13: Kreisrippenrohr

Fläche A des unberippten Rohres:

$$A = \pi \cdot d_a \cdot l \quad (3.60)$$

Fläche A_0 des Rohres zwischen den Rippen:

$$A_0 = \pi \cdot d_a \cdot l \cdot (1 - s / t_R) \quad (3.61)$$

Fläche der Rippen A_{Ri} :

$$A_{Ri} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d_a^2) \cdot \frac{l}{t_R} \quad (3.62)$$

Damit ist das Verhältnis der Rippenfläche zur Fläche des unberippten Rohres:

$$\frac{A_{Ri}}{A} = \left[\left(\frac{D}{d_a} \right)^2 - 1 \right] \cdot \frac{d_a}{2 \cdot t_R} = \frac{2 \cdot h \cdot (d_a + h)}{t_R \cdot d_a} = \frac{2 \cdot h}{t_R} \cdot (1 + h/d_a) \quad (3.63)$$

Die Wärmeübergangszahlen, die für Rohrbündel mit unberippten Rohren im vorgehenden Kapitel angegeben sind, zeigen gegenüber den Messungen relativ große Abweichungen. Deshalb werden hier neue Beziehungen gegeben, die die Messungen mit einer Streubreite von 10 bis 25 % genau wiedergeben [3.6].

$$Nu_{d_a} = C \cdot Re_{d_a}^{0,6} \cdot [(A_{Ri} + A_0)/A]^{-0,15} \cdot Pr^{1/3} \cdot f_4 \cdot f_n \quad (3.64)$$

Die Konstante C ist für fluchtend angeordnete Rohre $C = 0,22$ und für versetzt angeordnete Rohre $C = 0,38$. Die charakteristische Länge für die *Nusselt*- und *Reynoldszahl* ist der Außendurchmesser des Rohres.

Die *Reynoldszahl* wird mit der Geschwindigkeit an der engsten Stelle zwischen den Rohren und mit dem Außendurchmesser des Rohres gebildet.

Die engste Stelle hängt von der Anordnung der Rohre ab. Bild 3.14 zeigt die engsten Stellen für verschiedene Rohranordnungen. Bei der Berechnung der Geschwindigkeit am engsten Querschnitt muss auch die Versperrung durch die Rippen berücksichtigt werden.

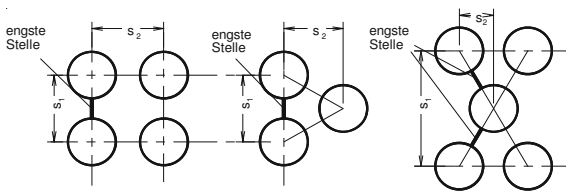


Bild 3.14: Bestimmung der engsten Stelle

Für beide Anordnungen links im Bild 3.14 ist die Geschwindigkeit an der engsten Stelle:

$$c_e = c_0 \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{a} \right) - \frac{2 \cdot s \cdot h}{s_1 \cdot t_R} \right]^{-1} \quad (3.65)$$

Bei der Anordnung rechts gilt:

$$c_e = c_0 \cdot \left[\sqrt{1 + (2 \cdot b / a)^2} - \frac{2}{a} - \frac{4 \cdot s \cdot h}{s_1 \cdot t_R} \right]^{-1} \quad (3.67)$$

Für genauere Berechnungen bei Niedrigrippenrohren kann das von *Briggs* und *Young* [3.7] vorgeschlagene Berechnungsverfahren, das auf zahlreichen Messungen basiert, verwendet werden.

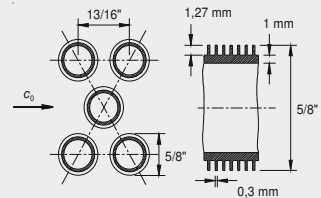
BEISPIEL 3.7: Zwischenüberhitzerbündel mit Rippenrohren

Ein Zwischenüberhitzerbündel mit Rippenrohren ist mit den gleichen thermischen Daten und dem Verhältnis der Höhe zur Breite wie in Beispiel 3.6 auszulegen. Die Rippen haben einen Außendurchmesser von $5/8''$. Die Rippenhöhe ist 1,27 mm, die Dicke 0,3 mm und der Abstand 1 mm. Die Wärmeleitfähigkeit des Rohrmaterials beträgt 27 W/(m K) , die Rohrwandstärke 1 mm, der Abstand zwischen den Rohren $13/16''$.

Berechnen Sie die Anzahl der Rohre und deren Länge.

Lösung

Schema Siehe Skizze



Annahmen

- Die Effekte am Rande des Bündels können vernachlässigt werden.
- Inner- und außerhalb der Rohre des Bündels sind die Wärmeübergangszahlen jeweils konstant.
- In den Rohren ist die Temperatur konstant.

Analyse

Die Lösung erfolgt wie beim Bündel mit ungerippten Rohren. Zunächst rechnen wir die US-Maße in metrische Einheiten um.

$$D = 5/8'' \cdot 25,4 \cdot \text{mm} = 15,875 \text{ mm} \quad s_0 = 13/16'' \cdot 25,4 \cdot \text{mm} = 20,6375 \text{ mm}$$

Die benötigten anderen geometrischen Größen sind:

$$d_a = D - 2 \cdot s = (15,875 - 2 \cdot 1,27) \cdot \text{mm} = 13,335 \text{ mm} \quad d_i = 11,335 \text{ mm}$$

$$s_1 = s_0 \cdot \sqrt{3} = 35,7452 \text{ mm} \quad s_2 = s_0 / 2 = 10,31875 \text{ mm}$$

$$a = s_1 / d_a = 2,681$$

$$b = s_2 / d_a = 0,77381$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeit an der engsten Stelle mit Gl. (3.66) muss zusätzlich die Änderung der Dichte berücksichtigt werden.

$$c_e = c_0 \cdot \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \left[\sqrt{1 + (2 \cdot b/a)^2} - \frac{2}{a} - \frac{4 \cdot s \cdot h}{s_1 \cdot t_R} \right]^{-1} =$$

$$= 6 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{4,161}{3,581} \cdot \left[\sqrt{1 + (2 \cdot 0,7738/2,681)^2} - \frac{2}{2,681} - \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 1,27}{35,7452 \cdot 1} \right]^{-1} = 19,05 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Mit dieser Geschwindigkeit und dem Außendurchmesser wird die *Reynoldszahl* gebildet.

$$Re_{d_a} = \frac{c_e \cdot d_a}{\nu} = \frac{19,05 \cdot 0,013335}{4,76 \cdot 10^{-6}} = 53\,371$$

Bevor die *Nußeltzahl* mit Gl. (3.63) berechnet werden kann, sind die Flächen und Korrekturfunktionen zu bestimmen. Für f_4 und f_n verwenden wir die Werte aus Beispiel 3.6.

$$\frac{A_{Ri}}{A} = \frac{2 \cdot h}{t_R} \cdot (1 + h/d_a) = \frac{2 \cdot 1,27}{1} \cdot (1 + 1,27/13,335) = 2,7819$$

$$\frac{A_0}{A} = 1 - s/t_R = 0,7$$

$$Nu_{d_a} = 0,38 \cdot Re_{d_a}^{0,6} \cdot [(A_{Ri} + A_0)/A]^{-0,15} \cdot Pr^{1/3} \cdot f_4 \cdot f_n =$$

$$= 0,38 \cdot 53\,371^{0,6} \cdot 3,4819^{-0,15} \cdot 0,99^{1/3} \cdot 0,99 \cdot 1,03 = 219,7$$

Die Wärmeübergangszahl außen am Bündel ist:

$$\alpha_a = Nu_{d_a} \cdot \lambda / d_a = 626,2 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$$

Zur Bestimmung der Wärmedurchgangszahl muss der Rippenwirkungsgrad mit den Gln. (3.50), (3.51) und (3.53) berechnet werden.

$$\varphi = \left(\frac{D}{d_a} - 1 \right) \cdot \left[1 + 0,35 \cdot \ln \left(\frac{D}{d_a} \right) \right] = \left(\frac{15,875}{13,335} - 1 \right) \cdot \left[1 + 0,35 \cdot \ln \left(\frac{15,875}{13,335} \right) \right] = 0,2021$$

$$X = \varphi \cdot \frac{d_a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha_a}{\lambda \cdot s}} = 0,2021 \cdot \frac{0,013335 \cdot \text{m}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 626,2 \cdot \text{W} \cdot \text{m} \cdot \text{K}}{27 \cdot \text{W} \cdot 0,0003 \cdot \text{m} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}} = 0,540$$

$$\eta_{Ri} = \frac{\tanh X}{X} = \frac{\tanh 0,540}{0,540} = 0,913$$

$$k = \left(\frac{1}{0,7 + 2,7819 \cdot 0,913} \cdot \frac{1}{626,2} + \frac{0,013335}{2 \cdot 27} \cdot \ln \frac{13,335}{11,335} + \frac{13,335}{11,335} \cdot \frac{1}{12000} \right)^{-1} =$$

$$= 1580,7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Die notwendige Heizfläche ist:

$$A = i \cdot n \cdot \pi \cdot d_a \cdot l = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta \vartheta_m} = \frac{72,533 \cdot 10^6 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{1580,7 \cdot \text{W} \cdot 51,77 \cdot \text{K}} = 886,37 \text{ m}$$

Aus der Gleichung für die Anströmgeschwindigkeit erhalten wir:

$$(i+1,5) \cdot l = \frac{\dot{m}}{s_1 \cdot c_0 \cdot \rho_0} = \frac{300 \cdot \text{kg} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^3}{0,0357452 \cdot \text{m} \cdot 6 \cdot \text{m} \cdot 4,161 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}} = 336,17 \text{ m}$$

Aus der Bedingung für das Verhältnis der Höhe zur Breite ergibt sich folgende Beziehung:

$$(i+1,5) = n \cdot s_2 / s_1$$

Beide Gleichungen kombiniert, ergeben:

$$n \cdot l = 336,17 \text{ m} \cdot s_1 / s_2 = 336,17 \text{ m} \cdot 35,7452 / 10,31875 = 1164,52 \text{ m}$$

Aus der Übertragungsfläche kann jetzt die Anzahl der Rohre pro Rohrreihe bestimmt werden.

$$i = \frac{A}{n \cdot l \cdot \pi \cdot d_a} = \frac{886,37 \text{ m}^2}{1164,52 \cdot \text{m} \cdot \pi \cdot 0,013335 \cdot \text{m}} = \mathbf{18}$$

Für die Anzahl Rohrreihen erhalten wir: $n = (i+1,5) \cdot s_1 / s_2 = \mathbf{68}$

$$l = 1164,52 \text{ m} / n = \mathbf{17,125 \text{ m}}$$

Diskussion

Es scheint so, dass mit den Rippenrohren eine um 67 % kleinere Fläche benötigt wird, nämlich die Fläche der Rohre ohne Berippung. Die wirkliche Fläche besteht aus den Flächen der Rohre zwischen den Rippen und der der Rippen. Sie ist um das 3,4782fache größer, also 3 080 m². Das Wesentliche dabei ist, dass das Bündel viel kleiner wird. Es werden nur noch 612 an Stelle von 1262 U-Rohren benötigt. Breite und Höhe des Bündels verringern sich von 1 m auf 0,7 m. Zwar werden die Rohre wesentlich länger, nämlich 17,125 m statt 12,498 m, aber ein langes, schlankes

Bündel ist in der Herstellung preisgünstiger, weil bei der gleichen Fläche weniger Rohre benötigt werden. Damit reduziert sich die Arbeit, die zum Bohren des dicken Rohrbodens und zum Biegen und Anschweißen der Rohre benötigt wird.

Es erscheint zunächst paradox, dass die Wärmedurchgangszahl größer als die Wärmeübergangszahl außen am Bündel ist. Der Wärmeübergang erfolgt an der Fläche der Rippen und an der Fläche der Rohre zwischen den Rippen. Die Wärmedurchgangszahl ist jedoch auf die Fläche des unberippten Rohres bezogen und daher größer.

4 Freie Konvektion

Im Gegensatz zur erzwungenen Konvektion entsteht die Strömung nicht durch eine Druckdifferenz, sondern durch Temperaturunterschiede im Fluid. Kommt ein ruhendes Fluid mit einer Oberfläche (Wand) unterschiedlicher Temperatur in Kontakt, entstehen im Fluid Temperaturdifferenzen, die Dichteunterschiede verursachen. Fluidschichten mit kleinerer Dichte steigen auf, solche mit größerer Dichte sinken ab. Die Temperatur- und Strömungsgrenzschicht der Strömung werden durch die Temperaturdifferenz selbst erzeugt.

Die *Nußeltzahl* gibt man als eine Funktion der *Grashofzahl*, *Prandtlzahl* und Geometrie an.

$$Nu_L = \alpha \cdot L / \lambda = f(Gr, Pr, \text{Geometrie})$$

Die *Grashofzahl* ist das Verhältnis der Auftriebskräfte zu den Reibungskräften. Sie beschreibt damit für die freie Konvektion die gleichen Zusammenhänge wie die *Reynoldszahl* für die erzwungene Konvektion. Als Funktion der Temperaturdifferenz lautet die Definition der *Grashofzahl*:

$$Gr = \frac{g \cdot L^3 \cdot \beta \cdot (\vartheta_w - \vartheta_0)}{\nu^2} \quad (4.1)$$

Bei idealen Gasen hängt der räumliche Wärmeausdehnungskoeffizient nur von der Absoluttemperatur des Fluids ab und ist:

$$\beta = 1/T_0 \quad (4.2)$$

Für sehr kleine Werte von $\beta(\vartheta_w - \vartheta_0) \ll 1$ kann die *Grashofzahl* als Funktion einer Dichtedifferenz angegeben werden:

$$Gr = \frac{g \cdot L^3 \cdot (\rho_w - \rho_0)}{\nu^2 \cdot \rho_w} \quad (4.3)$$

Der Index *W* bezeichnet den Zustand an der Wand, 0 den im ruhenden Fluid.

$$\frac{(\rho_w - \rho_0)}{\rho_w} = \beta \cdot (\vartheta_w - \vartheta_0) \quad (4.4)$$

Die Stoffwerte λ , ν und *Pr* werden bei der mittleren Temperatur $(\vartheta_w - \vartheta_0)/2$ ermittelt.

Die charakteristische Länge L in der *Grashof*- und *Nußeltzahl* ist:

$$L = A / U_{proj} \quad (4.5)$$

Die Austauschfläche des umströmten Körpers ist A , U_{proj} der in Strömungsrichtung projizierte Umfang der am Wärmetransfer beteiligten Fläche. Eine weitere Kennzahl ist die *Rayleighzahl*. Sie ist das Produkt aus *Grashof*- und *Prandtlzahl*.

$$Ra = Gr \cdot Pr \quad (4.6)$$

Die in der Literatur [4.1] angegebenen Gleichungen für die *Nußeltzahl* gelten für konstante Oberflächentemperaturen. Die Abweichung zu Werten mit gemittelten Wandtemperaturen sind vernachlässigbar.

4.1 Freie Konvektion an vertikalen, ebenen Wänden

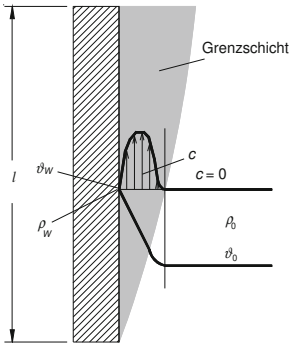


Bild 4.1: Freie Konvektion an einer senkrechten Wand

An einer beheizten, senkrechten Wand (Bild 4.1) mit der Höhe l wird die Dichte der wandnahen Fluidschichten kleiner, sie erfahren einen Auftrieb und es entsteht eine aufwärts gerichtete Strömung. Wird die Wand gekühlt, ist die Strömung abwärts gerichtet. In stationärem Zustand sind die Auftriebskräfte im Gleichgewicht mit den Reibungskräften. Die Strömung ist zunächst laminar und wird nach einer gewissen Länge turbulent. In der Temperaturgrenzschicht ändern sich die Temperatur und damit die Dichte des Fluids, so dass die Auftriebskräfte in den einzelnen Fluidschichten unterschiedlich groß sind. Deshalb ist es nicht einmal für die laminare Strömung gelungen, die Wärmeübergangszahl analytisch herzuleiten.

Die charakteristische Länge der vertikalen Wand ist:

$$L = \frac{b \cdot l}{b} = l$$

Für ebene, senkrechte Flächen fand man folgende empirische Gleichung:

$$Nu_l = \left\{ 0,825 + 0,387 \cdot (Gr \cdot Pr)^{1/6} \cdot f_1(Pr) \right\}^2 \quad (4.7)$$

$$f_1(Pr) = \left(1 + 0,671 \cdot Pr^{-9/16} \right)^{-8/27} \quad (4.8)$$

Der Gültigkeitsbereich dieser Gleichungen ist:

$$0,001 < Pr < \infty$$

$$0,1 < Gr \cdot Pr < 10^{12}$$

Gl. (4.7) gilt sowohl für den laminaren als auch turbulenten Bereich. Aus der Gleichung ist ersichtlich, dass die *Nußeltzahl*, wenn der Term 0,825 vernachlässigbar ist, proportional zur dritten Wurzel der Temperaturdifferenz ist.

BEISPIEL 4.1: Erwärmung einer Wand

Durch Sonneneinstrahlung wird einer 3 m hohen Hauswand pro Quadratmeter ein Wärmestrom von 100 W zugeführt. Die Umgebungstemperatur beträgt 0 °C. Die Stoffwerte der Luft sind: $\lambda = 0,0245 \text{ W/(m K)}$, $\nu = 14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr = 0,711$.

Bestimmen Sie die Temperatur der Wand.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Die Erwärmung der Wand von der Innenseite her wird vernachlässigt.
- Strahlungsbedingte Effekte bleiben unberücksichtigt.
- Nur der stationäre Zustand, d.h., der Zustand, bei dem die Wand ihre Endtemperatur erreicht hat, wird behandelt.

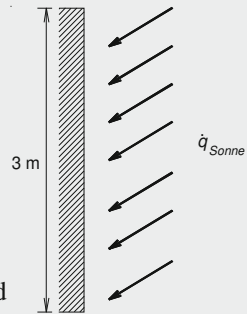
Analyse

In stationärem Zustand ist der durch die Sonne zugeführte Wärmestrom gleich dem, der durch freie Konvektion abgeführt wird.

$$\dot{q}_{\text{Sonne}} = \alpha \cdot (v_W^{\vartheta} - v_0^{\vartheta})$$

Die Wärmeübergangszahl wird mit der *Nußeltzahl* aus Gl. (4.7) berechnet.

$$\alpha = Nu_l \cdot \lambda / l = \left\{ 0,825 + 0,387 \cdot (Gr \cdot Pr)^{1/6} \cdot f_1(Pr) \right\}^2 \cdot \lambda / l$$



Die *Rayleighzahl* wird mit der *Grashofzahl* aus Gl. (4.1) bestimmt, wobei für den räumlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten derjenige aus Gl. (4.2) verwendet wird.

$$Gr = \frac{g \cdot l^3 \cdot (\vartheta_w - \vartheta_0)}{T_0 \cdot \nu^2}$$

Die *Grashofzahl* und die Wärmeübergangszahl sind von der Temperaturdifferenz abhängig. Für die Berechnung stehen zwei Möglichkeiten offen: Die eine ist, eine Wandtemperatur anzunehmen, um die Wärmeübergangszahl und damit die Wandtemperatur zu berechnen. Die Berechnung ist zu wiederholen, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Die andere Möglichkeit besteht darin, die Temperaturdifferenz als Quotient aus Wärmestromdichte und Wärmeübergangszahl in die *Grashofzahl* einzusetzen und so die Wärmeübergangszahl zu berechnen. Diese Lösung ist:

$$\alpha = \left\{ 0,825 + 0,387 \cdot \left(\frac{g \cdot l^3 \cdot \dot{q}}{\alpha \cdot T_0 \cdot \nu^2} \right)^{1/6} \cdot Pr^{1/6} \cdot f_1(Pr) \right\}^2 \cdot \frac{\lambda}{l}$$

Die exakte Lösung muss mit einem Gleichungslöser ermittelt werden. Wenn im Klammerausdruck der rechte Term sehr viel größer als 0,825 ist, kann die Wärmeübergangszahl direkt berechnet werden. Die Funktion $f_1(Pr)$ wird mit Gl. (4.7) ermittelt.

$$f_1(Pr) = (1 + 0,671 \cdot Pr^{-9/16})^{-8/27} = (1 + 0,671 \cdot 0,711^{-9/16})^{-8/27} = 0,8384$$

Die Zahlenwerte eingesetzt, liefert der Gleichungslöser von *Mathcad*:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\{ 0,825 + 0,387 \cdot \left(\frac{9,81 \cdot 3^3 \cdot 100}{\alpha \cdot 273,15 \cdot \text{K} \cdot 14^2 \cdot 10^{-12}} \right)^{1/6} \cdot 0,711^{1/6} \cdot 0,8384 \right\}^2 \cdot \frac{0,0245}{3} = \\ &= \left\{ 0,825 + 27,259 \cdot \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right)^{1/6} \cdot \alpha^{-1/6} \right\}^2 \cdot 0,008167 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} = 4,1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \end{aligned}$$

Für die Wandtemperatur erhalten wir:

$$\vartheta_w = \vartheta_0 + \dot{q} / \alpha = \mathbf{24,4 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

Diskussion

Freie Konvektion bildet sich meist auf Grund äußerer Einflüsse, hier durch Sonneneinstrahlung. Die Wandtemperatur ist unbekannt, sie muss iterativ ermittelt werden. Ist die Wärmestromdichte gegeben, kann man die Temperaturdifferenz durch die Wärmeübergangszahl ersetzen.

BEISPIEL 4.2: Heizkörper

In einem Raum soll mit Heizkörpern von je 1,2 m Länge, 0,45 m Höhe und 0,02 m Breite eine Heizleistung von 3 kW erreicht werden. Die Wandtemperatur der Heizkörper beträgt 48 °C, die Raumtemperatur 22 °C. Stoffwerte der Luft:

$$\lambda = 0,0268 \text{ W/(m K)}, \nu = 16,05 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, Pr = 0,711.$$

Wie viele Heizkörper sind notwendig?

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Die obere und untere Seite mit je 20 mm kann man vernachlässigen.
- Strahlungbedingte Effekte bleiben unberücksichtigt.
- Die Wandtemperatur der Heizfläche wird als konstant angenommen.

Analyse

Die für freie Konvektion maßgebliche Übertragungsfläche ist:

$$A = 2 \cdot (H \cdot L + H \cdot B) = 2 \cdot (0,45 \cdot 1,2 + 0,45 \cdot 0,02) \text{ m}^2 = 1,098 \text{ m}^2$$

Die Rayleighzahl wird mit der Grashofzahl aus Gl. (4.1) bestimmt. Zur Berechnung des räumlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten verwendet man Gl. (4.2).

$$Ra = \frac{g \cdot H^3 \cdot (\vartheta_w - \vartheta_0)}{T_0 \cdot \nu^2} \cdot Pr = \frac{9,81 \cdot \text{m} \cdot 0,45^3 \cdot \text{m}^3 \cdot (48 - 22) \cdot \text{K} \cdot \text{s}^2}{295,15 \cdot \text{K} \cdot 16,05^2 \cdot 10^{-12} \cdot \text{m}^4 \cdot \text{s}^2} \cdot 0,711 = 2,173 \cdot 10^8$$

Die Funktion $f_1(Pr)$ erhält man mit Gl. (4.8).

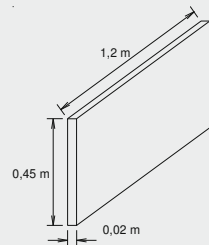
$$f_1(Pr) = \left(1 + 0,671 \cdot Pr^{-9/16}\right)^{-8/27} = \left(1 + 0,671 \cdot 0,711^{-9/16}\right)^{-8/27} = 0,8384$$

$$\begin{aligned} Nu_H &= \left\{0,825 + 0,387 \cdot Ra^{1/6} \cdot f_1(Pr)\right\}^2 = \\ &= \left\{0,825 + 0,387 \cdot (2,173 \cdot 10^8)^{1/6} \cdot 0,8384\right\}^2 = 77,10 \end{aligned}$$

$$\alpha = Nu_L \cdot \frac{\lambda}{H} = 77,10 \cdot \frac{0,0268 \cdot \text{W}}{0,45 \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{K}} = 4,59 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Der pro Heizkörper übertragene Wärmestrom ist:

$$\dot{Q}_1 = \alpha \cdot A \cdot (\vartheta_w - \vartheta_0) = 4,59 \cdot \text{W/(m}^2 \cdot \text{K)} \cdot 1,098 \cdot \text{m}^2 \cdot (48 - 22) \cdot \text{K} = \mathbf{131,1 \text{ W}}$$



Um 3 kW Wärmestrom zu liefern, sind **23** Heizkörper notwendig.

Diskussion

Bei bekannter Wandtemperatur ist die Berechnung einfach. Der errechnete Wert ist jedoch nicht realistisch. Später wird gezeigt, dass durch Wärmestrahlung ein etwa gleich großer Wärmestrom zusätzlich transferiert wird.

BEISPIEL 4.3: Wandtemperaturen eines Raumes

In einem Raum, dessen Wände innen und außen die gleiche Höhe von 2,8 m haben, herrscht eine Raumtemperatur von 22 °C. Die Außentemperatur ist 0 °C. Die Wand hat die Wärmeübergangszahl von 0,3 W/(m² K). Die Stoffwerte der Luft sind

innen: $\lambda = 0,0257$ W/(m K), $\nu = 15,11 \cdot 10^{-6}$ m²/s, $Pr = 0,713$

außen: $\lambda = 0,0243$ W/(m K), $\nu = 13,30 \cdot 10^{-6}$ m²/s, $Pr = 0,711$.

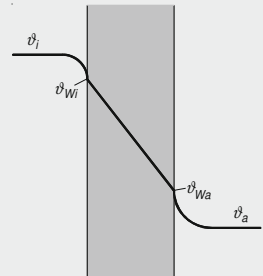
Berechnen Sie die Temperatur an der Innen- und Außenwand.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Strahlungsbedingte Effekte bleiben unberücksichtigt.
- Die Wandtemperaturen innen und außen nimmt man als konstant an.



Analyse

Bei dieser Berechnung müssen die Wandtemperaturen angenommen, die Wärmeübergangszahlen und die Wärmedurchgangszahl berechnet und so die Wandtemperaturen bestimmt werden, bis die erforderliche Genauigkeit erreicht ist. Nachstehend sind die Berechnungen tabellarisch aufgeführt. Hier folgen die verwendeten Gleichungen:

$$Ra = \frac{g \cdot l^3 \cdot (\vartheta_{Wi} - \vartheta_0)}{T_0 \cdot \nu^2} \cdot Pr$$

$$f_1(Pr) = \left(1 + 0,671 \cdot Pr^{-9/16}\right)^{-8/27}$$

$$Nu_l = \left\{ 0,825 + 0,387 \cdot (Gr \cdot Pr)^{1/6} \cdot f_1(Pr) \right\}^2 \quad \alpha = Nu_L \cdot \frac{\lambda}{L}$$

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{1}{\alpha_w} + \frac{1}{\alpha_i} \right) \quad \vartheta_{w_i} = \vartheta_i - (\vartheta_i - \vartheta_a) \cdot k / \alpha_i \quad \vartheta_{w_a} = \vartheta_a + (\vartheta_i - \vartheta_a) \cdot k / \alpha_a$$

Die Funktion $f_1(Pr)$ hat innen den Wert von 0,8386, außen den von 0,8384.

ϑ_{w_i} °C	ϑ_{w_a} °C	Ra_i $\cdot 10^{-9}$	Ra_a $\cdot 10^{-9}$	α_i	α_a W/(m ² K)	k	ϑ_{w_i} °C	ϑ_{w_a} °C
20,00	2,00	5,880	4,909	1,960	1,750	0,227	19,46	2,85
19,46	2,85	7,467	6,995	2,113	1,956	0,232	19,59	2,60
19,59	2,60	7,085	6,381	2,078	1,901	0,230	19,56	2,67
19,56	2,67	7,173	6,553	2,086	1,917	0,231	19,57	2,65
19,57	2,65	7,144	6,504	2,084	1,912	0,231	19,57	2,65

Diskussion

Die Größe der Wärmeübergangszahlen und Wärmedurchgangszahl wird durch die Temperaturunterschiede bestimmt. Daher können die Wandtemperaturen nicht direkt berechnet werden, man muss sie iterativ ermitteln. Allerdings liefert in diesem Beispiel die erste Berechnung schon fast den richtigen Wert.

4.1.1 Geneigte, ebene Flächen

Bei geneigten, ebenen Flächen treten je nachdem, ob beheizt oder gekühlt wird und ob der Wärmetransfer auf der oberen oder unteren Seite stattfindet, unterschiedliche Strömungen auf. Bei einer beheizten, geneigten Platte entsteht z. B. bei der Wärmeabgabe auf der unteren Seite der Fläche eine stabile Grenzschicht, die sich nicht ablöst. Erfolgt die Wärmeabgabe auf der oberen Seite, löst sich die Grenzschicht nach einer bestimmten Plattenlänge ab. Folgende Fälle werden unterschieden:

1. Beheizte Fläche mit Wärmeabgabe nach unten: keine Grenzschichtablösung
2. gekühlte Fläche mit Wärmeaufnahme von oben: keine Grenzschichtablösung
3. beheizte Fläche mit Wärmeabgabe nach oben: Grenzschichtablösung möglich
4. gekühlte Fläche mit Wärmeaufnahme von unten: Grenzschichtablösung möglich.

Wenn sich die Grenzschicht nicht ablöst (1. und 2.) kann Gl. 4.7 verwendet werden, nur muss die *Rayleighzahl* mit $\cos \alpha$ multipliziert werden. Dabei ist α der Neigungswinkel zur Horizontalen.

$$Ra_\alpha = Ra \cdot \cos \alpha \quad (4.9)$$

Bei dem 3. und 4. Fall entscheidet die *Rayleighzahl*, ob eine Grenzschichtablösung stattfindet oder nicht. Zur Unterscheidung wird die kritische *Rayleighzahl* Ra_c verwendet (Bild 4.2). Ist die *Rayleighzahl* größer als Ra_c , muss die Ablösung der Grenzschicht berücksichtigt werden. Für die *Nußeltzahl* gilt dann folgende Gleichung:

$$Nu_l = 0,56 \cdot (Ra_c \cdot \cos \alpha)^{1/4} + 0,13 \cdot (Ra_\alpha^{1/3} - Ra_c^{1/3}) \quad (4.10)$$

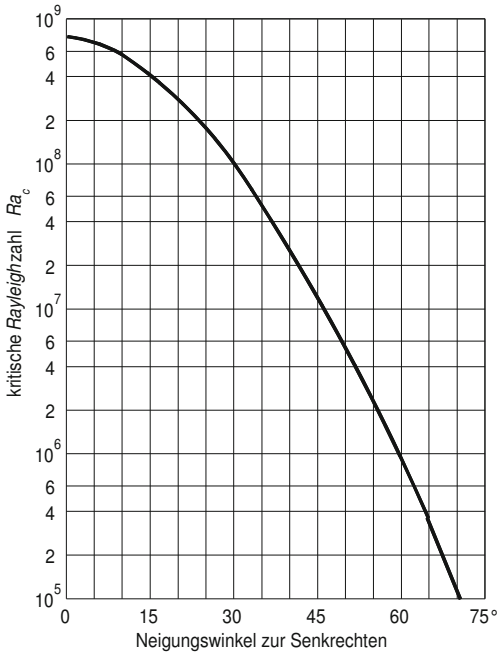


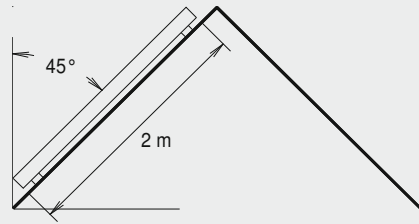
Bild 4.2: Kritische *Rayleighzahl*

BEISPIEL 4.4: Solarkollektor

Ein Solarkollektor, der auf einem Dach mit 45° Neigung zur Vertikalen installiert ist, hat eine Länge von 2 m und eine Breite von 1 m. Die Temperatur des Kollektors ist 30°C , die der Luft 10°C . Stoffwerte der Luft:

$$\lambda = 0,0257 \text{ W/(m K)}, \quad \nu = 15,11 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad Pr = 0,713.$$

Wie groß sind die durch Konvektion verursachten Wärmeverluste auf der oberen Seite des Kollektors?

Lösung**Schema** Siehe Skizze**Annahmen**

- Strahlungsbedingte Effekte werden nicht berücksichtigt.
- Die Wandtemperatur des Kollektors nimmt man als konstant an.

Analyse

Die charakteristische Länge ist die Länge $l = 2 \text{ m}$ der Platte.

$$Ra = \frac{g \cdot l^3 \cdot (\vartheta_w - \vartheta_0)}{T_0 \cdot \nu^2} \cdot Pr = \frac{9,81 \cdot \text{m} \cdot 2^3 \cdot \text{m}^3 \cdot (30 - 10) \cdot \text{K} \cdot \text{s}^2}{283,15 \cdot \text{K} \cdot 15,11^2 \cdot 10^{-12} \cdot \text{m}^4 \cdot \text{s}^2} \cdot 0,713 = 1,731 \cdot 10^{10}$$

In Bild 4.2 ist bei 45° die kritische Rayleighzahl $Ra_c = 1,2 \cdot 10^7$. Sie ist kleiner als die Rayleighzahl. Damit muss die Nusseltzahl mit Gl. (4.10) berechnet werden.

$$\begin{aligned} Nu_l &= 0,56 \cdot (Ra_c \cdot \cos \alpha)^{1/4} + 0,13 \cdot (Ra^{1/3} - Ra_c^{1/3}) = \\ &= 0,56 \cdot (1,2 \cdot 10^7 \cdot 0,707)^{1/4} + 0,13 \cdot [(1,731 \cdot 10^{10})^{1/3} - (1,2 \cdot 10^7)^{1/3}] = 336,6 \end{aligned}$$

$$\text{Wärmeübergangszahl: } \alpha = \frac{Nu_l \cdot \lambda}{l} = \frac{336,6 \cdot 0,0257 \cdot \text{W}}{2 \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{K}} = 4,32 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Der an der oberen Seite durch freie Konvektion abgeführte Wärmestrom beträgt:

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot (\vartheta_w - \vartheta_0) = 4,32 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 2 \cdot \text{m}^2 \cdot (30 - 10) \cdot \text{K} = 173 \text{ W}$$

Diskussion

Ohne Berücksichtigung der Strömungsablösung wäre die Wärmedurchgangszahl $3,28 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, also kleiner. Auch an einer vertikalen Platte gleicher Länge ist sie mit $3,45 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ kleiner. Die Strömungsablösung erhöht die Wärmeübergangszahlen.

4.2 Horizontale, ebene Flächen

Für beheizte horizontale, ebene Flächen, die Wärme nach oben abgeben oder gekühlte Flächen, die Wärme von unten erhalten, wurden folgende Beziehungen gefunden:

$$\begin{aligned}
 Nu_l &= 0,766 \cdot [Ra \cdot f_2(Pr)]^{1/5} & \text{für} & \quad Ra \cdot f_2(Pr) \leq 7 \cdot 10^4 \\
 Nu_l &= 0,15 \cdot [Ra \cdot f_2(Pr)]^{1/3} & \text{für} & \quad Ra \cdot f_2(Pr) > 7 \cdot 10^4
 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$f_2(Pr) = (1 + 0,536 \cdot Pr^{-11/20})^{-20/11} \quad (4.12)$$

Die Beziehungen gelten für Flächen, die Teil einer unendlichen horizontalen Ebene sind, d.h., die Grenzschicht wird nicht von Randeffekten gestört.

Die charakteristische Länge l wird mit Gl. (4.5) gebildet. Für eine Rechteckfläche mit den Abmessungen a und b ist sie $l = a \cdot b/2 (a + b)$ und für eine Kreisfläche $l = d/4$.

Für Flächen, die seitliche Begrenzungen haben wie z. B. eine Fußbodenheizung, gelten die hier angegebenen Beziehungen nicht, weil der an den Wänden verursachte Wärmeaustausch die Strömung wesentlich beeinflussen kann.

4.3 Freie Konvektion an gekrümmten Flächen

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen für freie Konvektion an der Oberfläche waagerechter Rohre und Kugeln behandelt. Berechnungsverfahren für Würfel, berippte Rohre und Heizkörper findet man im VDI-Wärmeatlas [4.1].

4.3.1 Horizontaler Zylinder

Die *Nußelt*- und *Rayleigh*zahl werden hier mit der Anströmlänge $L' = \pi \cdot d/2$ des Zylinders gebildet. Für den horizontalen Zylinder gilt:

$$Nu_{L'} = [0,752 + 0,387 \cdot Ra_{L'}^{1/6} \cdot f_3(Pr)]^2 \quad (4.13)$$

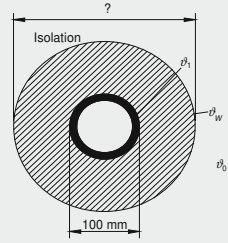
$$f_3(Pr) = (1 + 0,721 \cdot Pr^{-9/16})^{-8/27} \quad (4.14)$$

BEISPIEL 4.5: Isolierung einer Dampfleitung

In einer Stahlleitung mit 100 mm Außendurchmesser strömt Dampf bei einer Temperatur von 400 °C. Die Berufsgenossenschaft verlangt, dass bei einer Außentemperatur von 30 °C die Temperatur auf der äußeren Oberfläche nicht höher als 40 °C werden darf. Man kann annehmen, dass die Wandtemperatur des Stahlrohres fast gleich wie die Dampftemperatur ist. Das Isolationsmaterial hat eine Wärmeleitfähigkeit von 0,03 W/(m K). Stoffwerte der Luft:

$$\lambda = 0,0265 \text{ W/(m K)}, \quad \nu = 16,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad Pr = 0,711$$

Wie dick muss die Isolation sein?

Lösung**Schema** Siehe Skizze**Annahmen**

- Die Rohrwand- und Dampftemperatur sind gleich groß.
- Die Außenwandtemperatur der Isolation wird als konstant angenommen.

Analyse

Die charakteristische Länge ist die Anströmlänge $\pi \cdot D/2$. Die Außenwandtemperatur kann mit Gl. (2.29) berechnet werden.

$$\vartheta_w = \vartheta_0 + (\vartheta_1 - \vartheta_0) \cdot k / \alpha$$

Bei freier Konvektion wird die Wärmeübergangszahl α mit Gl. (4.14) bestimmt, die Wärmedurchgangszahl, bezogen auf die Außenfläche, mit Gl. (2.27):

$$k = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{D}{2 \cdot \lambda_i} \cdot \ln \frac{D}{d} \right)^{-1}$$

$$\alpha = \left[0,752 + 0,387 \cdot Ra_{L'}^{1/6} \cdot f_3(Pr) \right]^2 \cdot \frac{\lambda}{L'}$$

$$= \left[0,752 + 0,387 \cdot \left(\frac{g \cdot \pi^3 \cdot D^3 \cdot (\vartheta_w - \vartheta_0)}{2^3 \cdot T_0 \cdot \nu^2} \right)^{1/6} \cdot f_3(Pr) \right]^2 \cdot \frac{2 \cdot \lambda}{\pi \cdot D}$$

Beide Gleichungen in die Gleichung für die Außenwandtemperatur eingesetzt, erhält man:

$$\vartheta_w = \vartheta_0 + (\vartheta_1 - \vartheta_0) \cdot \frac{1}{1 + \frac{D}{2 \cdot \lambda_i} \cdot \ln \frac{D}{d} \cdot \alpha}$$

Für die Funktion $f_3(Pr)$ bekommt man 0,83026. Die Gleichung kann nur mit dem Gleichungslöser oder durch Iteration berechnet werden. Er liefert **$D = 461 \text{ mm}$** . Die Isolation ist damit **180,5 mm** dick.

Diskussion

Die Berechnung an sich ist einfach, die Lösung ist jedoch nur mit einem Gleichungslöser oder iterativ durchführbar.

4.3.2 Kugel

Bei der Kugel wird die *Nußelt-* und *Rayleighzahl* mit dem Durchmesser der Kugel gebildet. Die *Nußeltzahl* ist:

$$Nu_d = 0,56 \cdot [Pr / (0,864 + Pr) \cdot Ra]^{0,25} + 2 \quad (4.15)$$

4.4 Überlagerung freier und erzwungener Konvektion

In der Technik ist die freie Konvektion oft durch erzwungene Konvektion überlagert. In diesem Fall wird eine kombinierte *Nußeltzahl* mit den *Nußeltzahlen* der freien und erzwungenen Konvektion gebildet [4.2]. Je nachdem, ob die Strömung der erzwungenen Konvektion gegen die Strömung der freien Konvektion gerichtet ist oder parallel dazu verläuft, sind zwei Gleichungen gegeben. Für die mitgerichtete erzwungene Konvektion gilt:

$$Nu_L = \sqrt[3]{Nu_{L,erzwungen}^3 + Nu_{L,frei}^3} \quad (4.16)$$

Die entgegengerichtete erzwungene Konvektion liefert:

$$Nu_L = \sqrt[3]{Nu_{L,erzwungen}^3 - Nu_{L,frei}^3} \quad (4.17)$$

5 Kondensation reiner Stoffe

Kommt Dampf mit einer Wand, deren Temperatur kleiner als die Sättigungstemperatur des Dampfes ist, in Kontakt, kondensiert er an der Wand und schlägt sich als Flüssigkeit nieder.

Kommt Dampf mit einem Körper, dessen Temperatur tiefer als die Sättigungstemperatur des Dampfes ist, in Kontakt, kondensiert der Dampf, unabhängig davon, ob er gesättigt, überhitzt oder nass ist.

Der Niederschlag kann in Form eines geschlossenen Flüssigkeitsfilms oder in Form einzelner Tröpfchen erfolgen. Man spricht daher von *Film-* oder *Tropfenkondensation*. Die Tropfenkondensation, die höhere Wärmeübergangszahlen liefert, lässt sich nur durch besondere Vorkehrungen (z.B. Entnetzungsmittel, spezielle Oberflächenbeschichtungen) über längere Zeit aufrechterhalten. Die Anwendung der Tropfenkondensation beschränkt sich bis heute auf Demonstrationsmodelle und Laborapparate.

Die Kondensation kann wie bei der Taubildung mit reinen, gesättigten, nassen oder überhitzten Dämpfen bzw. mit Gasgemischen erfolgen. Hier wird nur die Kondensation reiner Dämpfe behandelt. Bei der Filmkondensation hängt die Wärmeübergangszahl von der Geometrie, den Stoffwerten und der Differenz zwischen Wand- und Kondensationstemperatur ab. Bei hohen Dampfgeschwindigkeiten werden Schubspannung und Wärmeübergangszahl von der Strömung stark beeinflusst.

5.1 Filmkondensation reiner, ruhender Dämpfe

Bei der Filmkondensation reiner, gesättigter, ruhender Dämpfe entsteht an einer kälteren Wand ein Kondensatfilm, der durch Einwirkung der Schwerkraft nach unten strömt und mit zunehmender Wandlänge auf Grund zusätzlich kondensierender Dampfmasse immer dicker wird. Zunächst ist die Strömung laminar und wird dann ab einer bestimmten Filmdicke turbulent. Für den laminaren und turbulenten Bereich müssen die Wärmeübergangszahlen getrennt behandelt werden.

Bei der Kondensation ruhender Dämpfe erfolgt vom ruhenden Dampf zwar eine Strömung zur kalten Wand, die aber die Kondensation nicht beeinflusst.

5.1.1 Laminare Filmkondensation

5.1.1.1 Kondensation gesättigten Dampfes an einer senkrechten Wand

Nußelt [5.1] leitete bereits 1916 die Wärmeübergangszahlen für laminare Filmkondensation bei konstanter Wandtemperatur her. Er berechnete die Dicke eines durch die Schwerkraft nach unten bewegten und von der Kondensation gespeisten laminaren Kondensatfilms (Wasserhauttheorie). Die lokale Wärmeübergangszahl α_x an der Stelle x der Wand wird durch die Wärmeleitung im Film bestimmt.

$$\alpha_x = \frac{\lambda_l}{\delta_x} \quad (5.1)$$

Dabei ist λ_l die Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit (Kondensat) und δ_x die Dicke des Films an der Stelle x . Für die Herleitung der Wärmeübergangszahl wird zunächst angenommen, dass die Temperatur der Wand konstant ϑ_w ist. Die Temperatur des Dampfes ist die Sättigungstemperatur ϑ_s .

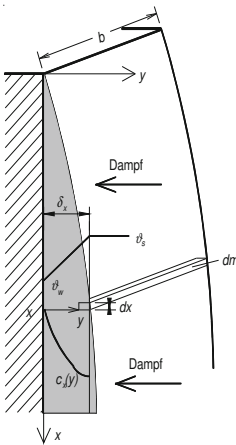


Bild 5.1: Laminare Kondensation an einer senkrechten Wand

Bild 5.1 zeigt die laminare Filmkondensation an einer senkrechten Wand. In dem Film wirken zwei Kräfte: die Schwerkraft F_s , die eine Strömung nach unten verursacht und die Reibungskraft F_τ , die dagegen wirkt. Die Strömung ist stationär. Dieses bedeutet, dass sich das Geschwindigkeitsprofil des Films und der Temperaturverlauf im Film an der Stelle x zeitlich nicht verändern.

An der Stelle x wirkt in der Entfernung y von der Wand folgende Schwerkraft dF_s auf das Massenelement dm :

$$dF_s = g \cdot dm = (\rho_l - \rho_g) \cdot b \cdot (\delta_x - y) \cdot g \cdot dx \quad (5.2)$$

Die Reibungskraft dF_τ an der Stelle y , die auf das Massenelement wirkt, ist:

$$dF_\tau = \tau \cdot A = \tau \cdot b \cdot dx \quad (5.3)$$

Da beide Kräfte entgegengesetzt gleich groß sind, erhält man:

$$\tau = -(\rho_l - \rho_g) \cdot (\delta_x - y) \cdot g \quad (5.4)$$

In einer laminaren Strömung ist die Schubspannung τ :

$$\tau = -\eta_l \cdot \frac{dc_x}{dy} \quad (5.5)$$

Damit erhalten wir für den Geschwindigkeitsverlauf an der Stelle x folgende Differentialgleichung:

$$dc_x = \frac{g \cdot (\rho_l - \rho_g)}{\eta_l} \cdot (\delta_x - y) \cdot dy \quad (5.6)$$

Da an der Wand bei $y = 0$ die Geschwindigkeit null ist, erhält man:

$$c_x(y) = \frac{g \cdot (\rho_l - \rho_g)}{\eta_l} \cdot (\delta_x \cdot y - \frac{1}{2} y^2) \quad (5.7)$$

Man bekommt den Massenstrom an der Stelle x , wenn die Geschwindigkeit über der Querschnittsfläche des Films integriert und mit der Dichte der Flüssigkeit multipliziert wird.

$$\dot{m}_x = \rho_l \cdot b \cdot \int_{y=0}^{y=\delta_x} c_x \cdot dy = \frac{g \cdot (\rho_l - \rho_g) \cdot b}{\nu_l} \cdot \frac{\delta_x^3}{3} \quad (5.8)$$

Andererseits verändert sich der Massenstrom auf dem Strömungsweg dx um den Massenstrom des Dampfes, der auf der Fläche $b \cdot dx$ an der Wand kondensiert. Aus der Wärmebilanz- und kinetischen Kopplungsgleichung erhalten wir:

$$\delta \dot{Q} = \alpha_x \cdot b \cdot (\vartheta_s - \vartheta_w) \cdot dx = \frac{\lambda_l}{\delta_x} \cdot b \cdot (\vartheta_s - \vartheta_w) \cdot dx = r \cdot d\dot{m}_x \quad (5.9)$$

Damit ist die Änderung des Massenstromes:

$$d\dot{m}_x = \frac{\lambda_l \cdot b \cdot (\vartheta_s - \vartheta_w)}{\delta_x \cdot r} \cdot dx \quad (5.10)$$

Durch Ableiten der Gl. (5.8) nach $d\delta_x$ kann ebenfalls die Änderung des Massenstromes bestimmt werden.

$$d\dot{m}_x = \frac{b \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_g)}{\nu_l} \delta_x^2 \cdot d\delta_x \quad (5.11)$$

Setzt man die Gln. (5.10) und (5.11) gleich, erhält man für die Filmdicke folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\lambda_l \cdot (\vartheta_s - \vartheta_w) \cdot v_l}{r \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_g)} \cdot dx = \delta_x^3 \cdot d\delta_x \quad (5.12)$$

Nach Integration von 0 bis x bekommt man die Dicke δ_x der Grenzschicht an der Stelle x :

$$\delta_x = \left(\frac{4 \cdot \lambda_l \cdot (\vartheta_s - \vartheta_w) \cdot v_l}{r \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_g)} \cdot x \right)^{0,25} \quad (5.13)$$

Die lokale Wärmeübergangszahl α_x an der Stelle x ist damit:

$$\alpha_x = \frac{\lambda_l}{\delta_x} = \left(\frac{\lambda_l^3 \cdot r \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_g)}{4 \cdot (\vartheta_s - \vartheta_w) \cdot v_l \cdot x} \right)^{0,25} = 0,707 \cdot \left(\frac{\lambda_l^3 \cdot r \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_g)}{(\vartheta_s - \vartheta_w) \cdot v_l \cdot x} \right)^{0,25} \quad (5.14)$$

Die lokale Wärmeübergangszahl ist in der Regel nicht von Interesse. Die mittlere Wärmeübergangszahl, die an einer Platte der Länge l vorherrscht, erhält man als:

$$\alpha = \frac{1}{l} \cdot \int_{x=0}^{x=l} \alpha_x \cdot dx = 0,943 \cdot \left(\frac{\lambda_l^3 \cdot r \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_g)}{(\vartheta_s - \vartheta_w) \cdot v_l \cdot l} \right)^{0,25} \quad (5.15)$$

Die Verdampfungswärme r wird bei der Sättigungstemperatur des Dampfes bestimmt. Die übrigen Stoffwerte sind mit der mittleren Temperatur des Kondensatfilms $(\vartheta_s + \vartheta_w)/2$ zu berechnen.

Die Wärmeübergangszahlen mit dem Index x sind lokale, ohne Index mittlere Wärmeübergangszahlen.

BEISPIEL 5.1: Berechnung der Filmdicke und Wärmeübergangszahl

Berechnen Sie die Filmdicke und die Wärmeübergangszahl von Wasser und Frigen R134a an einer vertikalen Wand bei $x = 0,1$ und $1,0$ m. Für beide Fluide beträgt die Differenz zwischen Wand- und Sättigungstemperatur 10 K. Die Stoffwerte sind:

	λ W/(m K)	ρ_l kg/m ³	ρ_g kg/m ³	v_l 10 ⁶ m ² /s	r kJ/kg
Wasser:	0,682	958,4	0,60	0,295	2 257,9
Frigen R134a:	0,094	1 295,2	14,43	0,205	198,6

Lösung

Annahmen

- Die Wandtemperatur ist konstant.
- Im Film ist die Strömung laminar.

Analyse

Die Filmdicke wird mit Gl. (5.13), die Wärmeübergangszahl mit (Gl. 5.14) berechnet.

$$\delta_x = \left(\frac{4 \cdot \lambda_l \cdot (\vartheta_s - \vartheta_w) \cdot \nu_l}{r \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_g)} \cdot x \right)^{0,25} \quad \alpha_x = \frac{\lambda_l}{\delta_x}$$

Die gegebenen Zahlenwerte eingesetzt, ergeben:

	$\delta_{x=0,1 \text{ m}}$ mm	$\alpha_{x=0,1 \text{ m}}$ W/(m ² K)	$\delta_{x=1 \text{ m}}$ mm	$\alpha_{x=1 \text{ m}}$ W/(m ² K)
Wasser:	0,078	8 690	0,140	4 887
Frigen R134a:	0,075	1 261	0,133	709

Diskussion

Für beide Fluide erhalten wir sehr dünne Kondensatfilme. Die Wärmeübergangszahl des Frigens ist wegen der wesentlich kleineren Wärmeleitfähigkeit viel geringer als die des Wassers.

Es ist zu beachten, dass Verdampfungswärme r in J/kg und nicht in kJ/kg eingesetzt werden muss.

5.1.1.2 Einfluss der veränderlichen Wandtemperatur

Die konstante Wandtemperatur ist eine Annahme, die praktisch nie erfüllt wird. Meist wird die bei der Kondensation abgegebene Wärme von einem Fluid, das sich erwärmt, aufgenommen. Ist die Temperatur des Fluids am Eintritt ϑ'_1 , am Austritt ϑ''_1 und die Wärmedurchgangszahl k , gilt für den übertragenen Wärmestrom:

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \Delta \vartheta_m = k \cdot A \cdot \frac{\vartheta''_1 - \vartheta'_1}{\ln[(\vartheta_s - \vartheta'_1)/(\vartheta_s - \vartheta''_1)]} \quad (5.16)$$

Der vom kondensierenden Dampf an die Wand abgegebene Wärmestrom, ermittelt mit einer mittleren Wandtemperatur ϑ_w , ist:

$$\dot{Q}/A = \dot{q} = \alpha \cdot (\vartheta_s - \bar{\vartheta}_w) \quad (5.17)$$

Aus den Gln. (5.16) und (5.17) erhält man für die mittlere Temperaturdifferenz zwischen der Sättigungstemperatur und der mittleren Temperatur der Wand:

$$(\vartheta_s - \bar{\vartheta}_w) = \Delta\vartheta_m \cdot k / \alpha \quad (5.18)$$

Messungen zeigen, dass die mittleren Wärmeübergangszahlen mit den nach Gl. (5.18) berechneten Temperaturdifferenzen sehr genau bestimmbar sind. Die Temperaturdifferenzen können durch die Wärmestromdichte \dot{q} aus Gl. (5.17) ersetzt werden. Durch das Ersetzen erhält man:

$$\alpha = 0,943 \cdot \left(\frac{\lambda_l^3 \cdot r \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_g) \cdot \alpha}{\dot{q} \cdot v_l \cdot l} \right)^{1/4} = 0,925 \cdot \left(\frac{\lambda_l^3 \cdot r \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_g)}{\dot{q} \cdot v_l \cdot l} \right)^{1/3} \quad (5.19)$$

Bei bekannten Abmessungen des Apparates ist die Fläche A das Produkt aus Länge l und Breite b . Besteht die senkrechte Fläche z. B. aus n senkrechten Rohren, ist die Breite $b = n \cdot \pi \cdot d_a$.

$$\alpha = 0,943 \cdot \left(\frac{\lambda_l^3 \cdot r \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_g) \cdot b \cdot \alpha}{\dot{Q} \cdot v_l} \right)^{1/4} = 0,925 \cdot \left(\frac{\lambda_l^3 \cdot r \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_g) \cdot n \cdot \pi \cdot d_a}{\dot{Q} \cdot v_l} \right)^{1/3} \quad (5.20)$$

Ist der Wärmestrom unbekannt, wird zunächst die Wärmeübergangszahl bei der Kondensation mit einer angenommenen Temperaturdifferenz ermittelt. Entsprechend der Strömungsbedingungen und Stoffeigenschaften an der Wand werden dann die Wärmeübergangs- und Wärmedurchgangszahl berechnet und die Temperaturdifferenz aus Gl. (5.17) bestimmt. Die Berechnung wird wiederholt, bis die erforderliche Genauigkeit erreicht ist.

5.1.1.3 Kondensation nassen oder überhitzten Dampfes

Bei der Kondensation ruhender Dämpfe hat der Zustand des Dampfes keinen Einfluss auf die Wärmeübergangszahl. Entsprechend der Enthalpie $h_g = h(p, \vartheta, x)$ des Dampfes verändert sich nur der Massenstrom des produzierten Kondensats. Ganz allgemein gilt für den Kondensatmassenstrom:

$$\dot{m}_l = \dot{Q} / (h_g - h_l) \quad (5.21)$$

Bei der Berechnung des Wärmestromes ist zu beachten, dass bei bekanntem Dampfmassenstrom als Enthalpieänderung nicht die Verdampfungsenthalpie r , sondern die Differenz $h_g - h_l$ einzusetzen ist.

5.1.1.4 Kondensation an geneigten Wänden

Tritt die Kondensation an geneigten Wänden auf, verringert sich die Wirkung der Schwerkraft entsprechend des Neigungswinkels φ gegenüber der Horizontalen.

$$\alpha = \alpha_{\text{senkr}} \cdot (\cos \varphi)^{0,25} \quad (5.22)$$

5.1.1.5 Kondensation an waagerechten Rohren

In Wärmeübertragern kondensiert der Dampf häufig an waagerechten Rohren. In diesem Fall wird an Stelle der Wandlänge der Durchmesser des Rohres in Gl. (5.15) eingesetzt. Die Wärmeübergangszahl ist dann:

$$\alpha = 0,728 \cdot \left(\frac{\lambda_l^3 \cdot r \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_g)}{(\vartheta_s - \vartheta_w) \cdot \nu_l \cdot d_a} \right)^{0,25} \quad (5.23)$$

Ähnlich wie bei der senkrechten Wand kann die Temperaturdifferenz hier durch den Wärmestrom und die Fläche $A = n \cdot \pi \cdot d_a \cdot l$ ersetzt werden.

$$\alpha = 0,959 \cdot \left(\frac{\lambda_l^3 \cdot r \cdot g \cdot (\rho_l - \rho_g) \cdot n \cdot l}{\dot{Q} \cdot \nu_l} \right)^{1/3} \quad (5.24)$$

5.1.2 Turbulente Filmkondensation

Ist eine senkrechte Wand relativ lang, wächst die Dicke des Kondensatfilms an und die laminare Strömung geht in eine turbulente über. Die Wärmeübergangszahl kann nicht mehr analytisch hergeleitet werden. Die Berechnung der turbulenten Kondensation und des Übergangsgebietes wird bei der Behandlung der Kondensation mit dimensionslosen Kennzahlen gezeigt.

5.2 Dimensionslose Darstellung

Ähnlich wie bei der konvektiven Wärmeübertragung können die Wärmeübergangszahlen bei der Kondensation auch als *Nußeltzahl* angegeben und als Funktion dimensionsloser Kennzahlen dargestellt werden [5.2]. Für die Bildung der *Nußeltzahl* wird die dimensionslose Länge L' folgendermaßen definiert:

$$L' = \sqrt[3]{\frac{\nu_l^2}{g}} \quad (5.25)$$

Damit ist die *Nußeltzahl*: $Nu_{L'} = \frac{\alpha \cdot L'}{\lambda_l} \quad (5.26)$

Die zweite dimensionslose Kennzahl ist die *Reynoldszahl* Re_l , sie ist definiert als:

$$Re_l = \frac{\Gamma}{\eta_l} \quad (5.27)$$

Die Größe Γ wird *Berieselungsdichte* genannt. Sie ist der Massenstrom des Kondensats pro Meter Ablaufbreite b .

$$\Gamma = \frac{\dot{m}_l}{b} = \frac{\dot{m}_l}{n \cdot \pi \cdot d} \quad (5.28)$$

Die *Ablaufbreite* b wird wie folgt bestimmt:

bei senkrechten Wänden die Breite der Wand:	$b = b$
bei senkrechten Rohren die Summe der Rohrumfänge:	$b = n \cdot \pi \cdot d$
bei waagerechten Rohren die Summe der Rohrlängen:	$b = n \cdot l$

Der Massenstrom des Kondensats, multipliziert mit der Verdampfungsenthalpie, ergibt den Wärmestrom. Damit kann die Berieselungsdichte auch als Funktion des Wärmestromes angegeben werden.

$$\Gamma = \frac{\dot{m}_l}{b} = \frac{\dot{Q}}{r \cdot b} \quad (5.29)$$

Mit diesen Kennzahlen lassen sich die lokalen und mittleren Wärmeübergangszahlen berechnen.

5.2.1 Lokale Wärmeübergangszahlen

Die lokalen laminaren Wärmeübergangszahlen können mit den dimensionslosen Kennzahlen in die Gln. (5.14), (5.17) und (5.29) eingesetzt, wie folgt angegeben werden:

$$Nu_{L', lam, x} = \frac{\alpha_x \cdot L'}{\lambda_l} = 0,693 \cdot \left(\frac{1 - \rho_g / \rho_l}{Re_l} \right)^{1/3} \cdot f_{well} \quad (5.30)$$

Dabei ist f_{well} ein Korrekturfaktor, der die Welligkeit der Filmströmung bei größeren *Reynoldszahlen* berücksichtigt. Er ist gegeben als:

$$f_{well} = \begin{cases} 1 & \text{für } Re_l < 1 \\ Re_l^{0,04} & \text{für } Re_l \geq 1 \end{cases} \quad (5.31)$$

Die lokale *Nußeltzahl* des turbulenten Kondensatfilms ist:

$$Nu_{L', turb, x} = \frac{\alpha_x \cdot L'}{\lambda_l} = \frac{0,0283 \cdot Re_l^{7/24} \cdot Pr_l^{1/3}}{1 + 9,66 \cdot Re_l^{-3/8} Pr_l^{-1/6}} \quad (5.32)$$

Eine Formel der lokalen Wärmeübergangszahlen, die für den gesamten Bereich der Kondensation ruhender Dämpfe an senkrechten Wänden gültig ist, lautet:

$$Nu_{L', x} = \frac{\alpha_x \cdot L'}{\lambda_l} = \sqrt{Nu_{L', lam}^2 + Nu_{L', turb}^2} \cdot f_\eta \quad (5.33)$$

Dabei ist f_η der Korrekturfaktor zur Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität.

$$f_\eta = (\eta_{ls} / \eta_{lw})^{0,25} \quad (5.34)$$

5.2.2 Mittlere Wärmeübergangszahlen

Die mittleren Wärmeübergangs- bzw. *Nußelt*zahlen erhält man durch Integration der lokalen Werte über die Länge der Kühlfläche. Die mittlere laminare *Nußelt*zahl ist:

$$Nu_{L', lam} = \frac{\alpha \cdot L'}{\lambda_l} = 0,925 \cdot \left(\frac{(1 - \rho_g / \rho_l)}{Re_l} \right)^{1/3} \cdot f_{well} \quad (5.35)$$

Mittlere *Nußelt*zahl des turbulenten Kondensatfilms:

$$Nu_{L', turb} = \frac{\alpha \cdot L'}{\lambda_l} = \frac{0,020 \cdot Re_l^{7/24} \cdot Pr_l^{1/3}}{1 + 20,52 \cdot Re_l^{-3/8} Pr_l^{-1/6}} \quad (5.36)$$

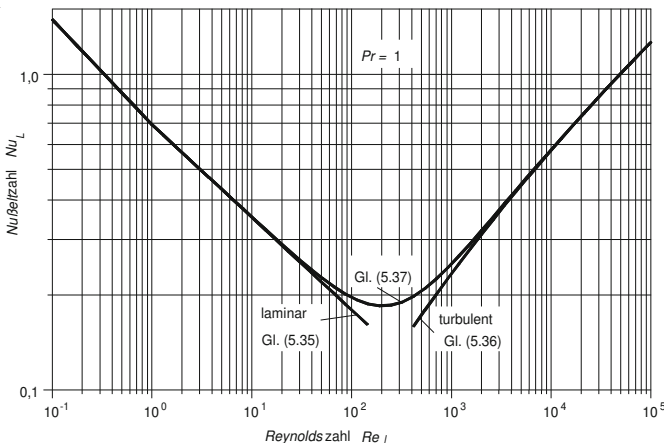


Bild 5.2: Mittlere *Nußelt*zahl bei der Kondensation ruhender Dämpfe

Eine Formel, die für den gesamten Bereich der Kondensation ruhender Dämpfe an senkrechten Wänden gültig ist, lautet:

$$Nu_{L'} = \frac{\alpha \cdot L'}{\lambda_l} = \sqrt[1,2]{Nu_{L', lam}^{1,2} + Nu_{L', turb}^{1,2}} \cdot f_\eta \quad (5.37)$$

5.2.3 Kondensation an waagerechten Rohren

Bei der Kondensation ruhender Dämpfe an waagerechten Rohren erhalten wir mit den Kennzahlen aus Gl. (5.24) für die *Nußeltzahl*:

$$Nu_{L'} = 0,959 \cdot \left(\frac{1 - \rho_g / \rho_l}{Re_l} \right)^{1/3} \quad (5.38)$$

Es ist zu beachten, dass die Ablaufbreite b mit der Rohrlänge gebildet wird, d.h., $b = n \cdot l$.

5.2.4 Vorgehen bei der Berechnung der Wärmeübergangszahlen

Meist bestehen die Übertragungsflächen der Apparate, in denen Kondensation stattfindet, aus Rohren. Daher beschränkt sich dieser Abschnitt auf die Behandlung von Apparaten, bei denen der Dampf außen an waagerechten oder senkrechten Rohren kondensiert. Hier unterscheiden wir zwischen Auslegung und Nachrechnung.

Bei der Auslegung sind die thermischen Daten (Wärmestrom, mittlere Temperaturdifferenz und Wärmeübergangszahl des Fluids, auf das die Wärme transferiert wird) gegeben. Für diese Daten muss ein Apparat ausgelegt werden, d.h., die Anzahl und Länge der Rohre werden bestimmt. Unbekannt sind dabei Anzahl, Außendurchmesser und Länge der Rohre, die Differenz zwischen Wand- und Sättigungstemperatur und die Temperatur zur Bestimmung der Stoffwerte. Diese Größen müssen zum Teil angenommen werden. Der Rohrdurchmesser ist entweder vorgegeben oder er wird optimiert. Bei Letzterem sind Berechnungen für verschiedene Rohrdurchmesser durchzuführen. Die Anzahl der Rohre wird von äußeren Größen wie z.B. Strömungsgeschwindigkeit in den Rohren bestimmt, die die Kondensation nicht beeinflussen. Deshalb werden hier die Anzahl der Rohre und der Rohrdurchmesser als gegeben vorausgesetzt. Bei senkrechten Rohren ist damit die Ablaufbreite b bekannt, bei waagerechten Rohren muss eine Rohrlänge angenommen werden. Zur Ermittlung der Stoffwerte rechnet man mit einer angenommenen mittleren Temperatur. Damit können Wärmeübergangs-, Wärmedurchgangszahl und Temperaturdifferenz bestimmt werden. Aus der erforderlichen Austauschfläche errechnet sich die Rohrlänge. Nun müssen die Stoffwerte und bei waagerechten Rohren die Ablaufbreite b neu ermittelt werden. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis die erforderliche Genauigkeit erreicht ist. Bild 5.3 zeigt das Flussdiagramm der Berechnung.

Die Nachrechnung erfasst Apparate, die bereits ausgelegt sind, d.h., Anzahl und Abmessung der Rohre sind bekannt. Die Daten des Fluids im Rohr und/oder des Dampfes ändern sich gegenüber der Auslegung. Nachstehend wird der Fall erklärt, bei dem mit den gegebenen Größen Wärmestrom, Eintrittstemperatur und Massenstrom des Kühlmediums in den Rohren die Kondensationstemperatur bestimmt werden muss.

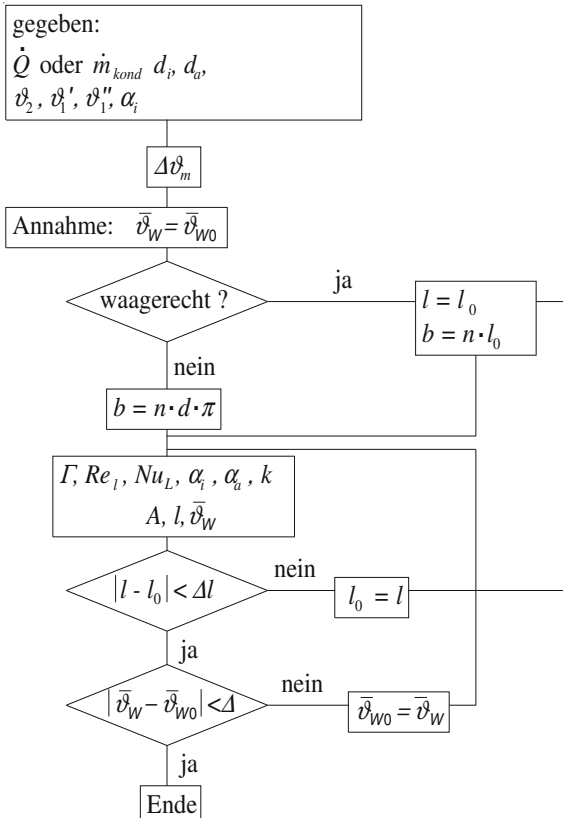


Bild 5.3: Flussdiagramm der Berechnung bei einer Auslegung

Mit dem gegebenen Wärmestrom kann die Austrittstemperatur des Kühlmediums berechnet werden. Zur Ermittlung der Stoffwerte des Kondensats nimmt man eine Sättigungstemperatur an. Damit können die Wärmeübergangszahl innen und außen und die Wärmedurchgangszahl berechnet werden. Mit Letzterer bestimmt man die mittlere Temperaturdifferenz, die zur Abfuhr des Wärmestromes notwendig ist, ferner die mittlere Wandtemperatur. Die Berechnung wird so lange wiederholt, bis die erforderliche Genauigkeit erreicht ist.

BEISPIEL 5.2: Auslegung eines Kraftwerkkondensators

Für den im Beispiel 3.3 berechneten Kraftwerkkondensator ist die Wärmeübergangszahl bei der Kondensation zu berechnen. Jetzt wird auf der Kühlwasserseite auch der Einfluss der Richtung des Wärmestromes berücksichtigt. Wir verwenden die im Beispiel 3.3 vorgegebenen Daten.

Zu bestimmen sind die notwendige Länge der Rohre und die durch Verschmutzung bedingte Änderung der Kondensationstemperatur.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Die mittlere Wärmeübergangszahl ist konstant.
- Die Einflüsse der Dampfströmung sind vernachlässigbar.

Analyse

Die Anzahl der Rohre wird durch die vorgegebene Strömungsgeschwindigkeit und den Wärmestrom berechnet und kann daher wie die mittlere Temperatur übernommen werden. Die Stoffwerte des Kondensats bestimmt man mit einer angenommenen mittleren Wandtemperatur, mit den im Beispiel 3.3 berechneten Werten sind sie:

$$\bar{\vartheta}_w = \vartheta_2 - \Delta\vartheta_m \cdot k / \alpha_a = 35^\circ\text{C} - 9,102 \cdot \text{K} \cdot 4\,403 / 13\,500 = 32,0^\circ\text{C}$$

Die für die Stoffwerte maßgebliche Temperatur beträgt $33,5^\circ\text{C}$. Aus der Dampftafel erhält man folgende Werte:

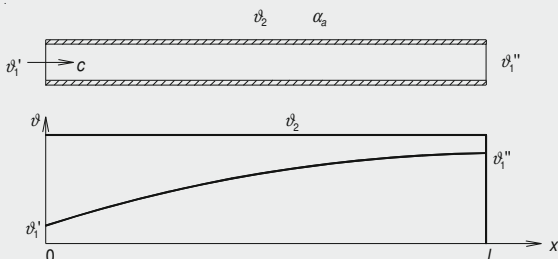
$$\rho_l = 995,5 \text{ kg/m}^3, \rho_g = 0,040 \text{ kg/m}^3, \lambda_l = 0,616 \text{ W/(m K)}, \\ \eta_l = 792,2 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}, r = 2417,9 \text{ kJ/kg}, v_l = 0,796 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Die Berieselungsdichte wird mit Gl. (5.29) berechnet.

$$\Gamma = \frac{\dot{Q}}{r \cdot n \cdot l} = \frac{2\,000 \cdot 10^6 \cdot \text{W} \cdot \text{kg}}{2\,417\,900 \cdot \text{J} \cdot 57\,727 \cdot 11,562 \cdot \text{m}} = 1,239 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

$$\text{Reynoldszahl nach Gl. (5.27): } Re_l = \Gamma / \eta_l = 1,250 \cdot 10^{-3} / 792,2 \cdot 10^{-6} = 1,564$$

Die Nußeltzahl wird mit Gl. (5.38) berechnet.



$$Nu_{L'} = 0,959 \cdot \left(\frac{1 - \rho_g / \rho_l}{Re_l} \right)^{1/3} = 0,959 \cdot \left(\frac{1 - 0,04/995,5}{1,578} \right)^{1/3} = 0,8261$$

Zur Bestimmung der Wärmeübergangszahl muss noch die charakteristische Länge L' mit Gl. (5.25) berechnet werden.

$$L' = \sqrt[3]{v_l^2 / g} = \sqrt[3]{(0,796 \cdot 10^{-6})^2 \cdot \text{m}^4 \cdot \text{s}^2 / (9,806 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2)} = 0,04013 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Die Wärmeübergangszahl ist:

$$\alpha = Nu_{L'} \cdot \lambda / L' = 0,8238 \cdot 0,616 \cdot \text{W} / (0,04013 \cdot 10^{-3} \cdot \text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{m}) = 12\,682 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Sie ist etwas kleiner als im Beispiel 3.3 mit $13\,500 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ angegeben.

Die Wärmeübergangszahl im Rohr aus Beispiel 3.3 ist $8\,481 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$. Für die Wärmedurchgangszahl erhält man:

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_a}{d_i \cdot \alpha_i} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{12\,682} + \frac{0,024}{2 \cdot 17} \cdot \ln \frac{24}{23} + \frac{24}{23 \cdot 8\,481} \right)^{-1} = 4\,273 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Die Rohrlänge wird somit zur Verkleinerung der Wärmedurchgangszahl proportional größer, d.h. $11,803 \text{ m}$. Mit der neuen Rohrlänge wird die Berieselungsdichte kleiner, die Wärmeübergangszahl nimmt etwas zu. Hier ist es zweckmäßig, nicht nur mit der geänderten Rohrlänge, sondern neu auch mit den Korrekturfunktionen für die Wärmeübergangszahl im Rohr zu rechnen. Die Wärmedurchgangszahl ergibt sich damit zu:

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_a}{d_i \cdot \alpha_i \cdot f_1 \cdot f_2} \right)$$

Die *Prandtlzahl* des Kühlwassers hat bei 30°C den Wert von $5,414$. Innen im Rohr beträgt die Wandtemperatur:

$$\vartheta_{Wi} = \vartheta_m + \Delta \vartheta_m \cdot k / \alpha_i$$

Aus der Iteration erhält man nach fünf Berechnungen die Rohrlänge auf 1 mm genau. Folgende Werte wurden ermittelt:

$$f_1 = 1,016, f_2 = 1,015, \alpha_a = 12\,700 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}), k = 4\,348 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}),$$

$$l = 11,611 \text{ m}$$

Dabei wurden auch die Änderungen der Stoffwerte des Kondensats berücksichtigt.

Diskussion

Die Korrekturfunktionen f_1 und f_2 bewirken nur eine geringfügige Änderung der Rohrlänge von 0,5 %. Bei der Auslegung von Großkondensatoren müssen die Berechnungen sehr genau sein, weil einerseits die Fläche den Preis und damit die Konkurrenzfähigkeit bestimmt, andererseits sehr hohe Geldstrafen bei Nichterreichen der garantierten Werte zu bezahlen sind.

BEISPIEL 5.3: Auslegung und Nachrechnung eines Kondensators für Frigen R134a

An den senkrechten Rohren eines Kondensators sollen 0,5 kg/s Frigen R134a bei 50 °C kondensiert werden. In den Rohren strömt Wasser mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s. Das Kühlwasser wird dabei von 40 auf 45 °C erwärmt. Die Rohre sind aus Kupfer, haben den Außendurchmesser von 12 mm und eine Wandstärke von 1 mm; die Wärmeleitfähigkeit ist 372 W/(m² K).

Stoffwerte des Kühlwassers bei 42,5 °C: $\rho = 991,3 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 4,178 \text{ kJ/(kg K)}$, $\lambda = 0,634 \text{ W/(m K)}$, $\nu = 0,629 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr = 4,1$.

Stoffwerte des Frigens: $\rho_l = 1102,3 \text{ kg/m}^3$, $\rho_g = 66,3 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 0,071 \text{ W/(m K)}$, $\eta_l = 142,7 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}$, $r = 151,8 \text{ kJ/kg}$, $\nu_l = 0,132 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr_l = 3,14$.

Sie können annehmen, dass der Einfluss der Rohrlänge und der der Richtung des Wärmestromes vernachlässigbar sind. Bei Teilaufgabe b) kann die Änderung der Stoffwerte vernachlässigt werden.

Zu berechnen sind:

- a) die Anzahl und Länge der Rohre
- b) der Wärmestrom und die Wärmeübergangszahl, wenn der Dampfmassenstrom auf 0,65 kg/s ansteigt.

Lösung

Schema Temperaturverlauf wie im Beispiel 5.2

Annahmen

- Die mittlere Wärmeübergangszahl ist konstant.
- Die Einflüsse der Dampfströmung sind vernachlässigbar.

Analyse

a) Der Massenstrom des Kühlwassers wird aus der Kombination der Wärmebilanzgleichungen für Frigen und Kühlwasser berechnet.

$$\dot{Q} = \dot{m}_{R134a} \cdot r \qquad \dot{Q} = \dot{m}_{KW} \cdot c_p \cdot (\vartheta_1'' - \vartheta_1')$$

$$\dot{m}_{KW} = \frac{\dot{m}_{R134a} \cdot r}{c_p \cdot (\vartheta_1'' - \vartheta_1')} = \frac{0,5 \cdot \text{kg} \cdot 151\,800 \cdot \text{J} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{4\,178 \cdot 5 \cdot \text{K} \cdot \text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}} = 3,633 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung erhalten wir aufgerundet die Anzahl der Rohre.

$$n = \frac{4 \cdot \dot{m}_{KW}}{c_{KW} \cdot \rho_{KW} \cdot \pi \cdot d_i^2} = \frac{4 \cdot 3,633 \cdot \text{kg} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^3}{1 \cdot \text{m} \cdot 991,3 \cdot \text{kg} \cdot \pi \cdot 0,01^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}} = 47$$

Die Berieselungsdichte wird mit Gl. (5.29) berechnet.

$$\Gamma = \frac{\dot{m}_{R134a}}{n \cdot \pi \cdot d_a} = \frac{0,5 \cdot \text{kg}}{47 \cdot \pi \cdot 0,012 \cdot \text{m} \cdot \text{s}} = 0,2822 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

Reynoldszahl nach Gl. (5.27): $Re_l = \Gamma / \eta_l = 0,2822 / 142,7 \cdot 10^{-6} = 1\,978$

Die Nusseltzahl wird mit den Gln. (5.31) bis (5.37) berechnet.

$$Nu_{L', lam} = 0,925 \cdot \left(\frac{(1 - \rho_g / \rho_l)}{Re_l} \right)^{1/3} \cdot f_{well} = 0,925 \cdot \left(\frac{(1 - 66,3/1102,3)}{1978} \right)^{1/3} \cdot 1,355 = 0,0978$$

$$Nu_{L', turb} = \frac{0,020 \cdot Re_l^{7/24} \cdot Pr_l^{1/3}}{1 + 20,52 \cdot Re_l^{-3/8} \cdot Pr_l^{-1/6}} = \frac{0,020 \cdot 1\,978^{7/24} \cdot 3,14^{1/3}}{1 + 20,52 \cdot 1\,754^{-3/8} \cdot 3,14^{-1/6}} = 0,135$$

$$Nu_{L'} = \frac{\alpha \cdot L'}{\lambda_l} = {}^{1,2}\sqrt{(Nu_{L', lam})^{1,2} + Nu_{L', turb}^{1,2}} = 0,2079$$

Zur Bestimmung der Wärmeübergangszahl muss noch die charakteristische Länge L' mit Gl. (5.25) berechnet werden.

$$L' = \sqrt[3]{\nu_l^2 / g} = \sqrt[3]{(0,132 \cdot 10^{-6})^2 \cdot \text{m}^4 \cdot \text{s}^2 / (9,806 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2)} = 0,01211 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Die Wärmeübergangszahl ist:

$$\alpha = Nu_{L'} \cdot \lambda / L' = 0,2079 \cdot 0,071 \cdot \text{W} / (0,01211 \cdot 10^{-3} \cdot \text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{m}) = 1219 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Die Wärmeübergangszahl in den Rohren wird mit Gl. (3.8) berechnet.

$$Re_{d_i} = \frac{c_1 \cdot d_i}{\nu_1} = \frac{1 \cdot 0,01}{0,629 \cdot 10^{-6}} = 15\,898$$

$$\xi = [1,8 \cdot \log(Re_{d_i}) - 1,5]^{-2} = 0,0272$$

$$Nu_{d_i} = \frac{\xi / 8 \cdot Re \cdot Pr}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi / 8} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} = 102,8$$

$$\alpha_i = Nu_{d_i} \cdot \lambda_1 / d_i = 6\,517 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$$

Für die Wärmedurchgangszahl erhält man:

$$k = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_a}{d_i \cdot \alpha_i} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{1\,219} + \frac{0,012}{2 \cdot 372} \cdot \ln \frac{12}{10} + \frac{12}{10 \cdot 6\,517} \right)^{-1} = 992,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Die mittlere Temperaturdifferenz ist:

$$\Delta \vartheta_m = \frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1'}{\ln \left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1'}{\vartheta_2 - \vartheta_1''} \right)} = \frac{(45 - 40) \cdot \text{K}}{\ln \left(\frac{50 - 40}{50 - 45} \right)} = 7,213 \text{ K}$$

Die Rohrlänge berechnet sich als:

$$l = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta \vartheta_m \cdot n \cdot \pi \cdot d_a} = \frac{75\,900 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{992,6 \cdot \text{W} \cdot 7,213 \cdot \text{K} \cdot 47 \cdot \pi \cdot 0,012 \cdot \text{m}} = 5,983 \text{ m}$$

b) Durch die Vorgabe, dass die Änderung der Stoffwerte vernachlässigt werden kann, bleibt die Wärmeübergangszahl im Rohr gleich. Die Temperatur des Kühlwassers steigt um 6,5 K, d.h., die Austrittstemperatur des Kühlwassers beträgt 46,5 °C. Mit dem erhöhten Kondensatmassenstrom erhalten wir für die Wärmeübergangs- und Wärmedurchgangszahl:

$$\Gamma = \frac{m_{R134a}}{n \cdot \pi \cdot d_a} = \frac{0,65 \cdot \text{kg}}{47 \cdot \pi \cdot 0,012 \cdot \text{m} \cdot \text{s}} = 0,3668 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

$$Re_l = \Gamma / \eta_l = 0,3668 / 142,7 \cdot 10^{-6} = 2\,571$$

$$f_{\text{well}} = Re_l^{0,04} = 1,369$$

$$Nu_{L', lam} = 0,925 \cdot \left(\frac{(1 - \rho_g / \rho_l)}{Re_l} \right)^{1/3} \cdot f_{well} = 0,0905$$

$$Nu_{L', turb} = \frac{0,020 \cdot Re_l^{7/24} \cdot Pr_l^{1/3}}{1 + 20,52 \cdot Re_l^{-3/8} Pr_l^{-1/6}} = 0,1528$$

$$Nu_{L'} = \frac{\alpha \cdot L'}{\lambda_l} = \sqrt[1,2]{(Nu_{L', lam})^{1,2} + Nu_{L', turb}^{1,2}} = 0,2138$$

$$\alpha = \frac{Nu_{L'} \cdot \lambda_2}{L'} = 1'279,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$k = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_a}{d_i \cdot \alpha_i} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{1'279,5} + \frac{0,012}{2 \cdot 372} \cdot \ln \frac{12}{10} + \frac{12}{10 \cdot 6'517} \right)^{-1} = 1'032 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Damit bei dieser Wärmedurchgangszahl der höhere Wärmestrom abgeführt werden kann, steigt die mittlere Temperaturdifferenz. Sie kann mit Gl. (5.16) berechnet werden.

$$\Delta \vartheta_m = \frac{\dot{Q}}{k \cdot A} = \frac{\dot{Q}}{k \cdot n \cdot \pi \cdot d_a \cdot l} = \frac{98'670 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{1'032 \cdot \text{W} \cdot 47 \cdot \pi \cdot 0,012 \cdot \text{m} \cdot 5,983 \cdot \text{m}} = 9,048 \text{ K}$$

Aus der mittleren Temperaturdifferenz erhält man die Kondensationstemperatur:

$$\vartheta = e^{\frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1'}{\Delta \vartheta_m}} = 2,0564 \quad \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1'}{\vartheta_2 - \vartheta_1''} = \vartheta \quad \vartheta_2 = \frac{\vartheta_1' - \vartheta \cdot \vartheta_1''}{1 - \vartheta} = 52,65 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Diskussion

Die Auslegung erfolgte mit vorgegebenen Stoffwerten und benötigte daher keine Iteration, ebenso wenig bei der vereinfachten Nachrechnung. Unter Berücksichtigung der Rohrlänge, Richtung des Wärmestromes und der Stoffwerte ist jedoch in beiden Fällen eine Iteration notwendig.

5.2.5 Druckverlust in Rohrbündeln mit waagerechten Rohren

Nußelt hat für senkrecht übereinander angeordnete, waagerechte Rohre theoretisch Gleichungen für den Einfluss des Kondensats, das auf die unteren Rohre auftrifft,

hergeleitet. Danach vermindert sich die mittlere Wärmeübergangszahl proportional zur vierten Wurzel aus der Anzahl der Rohre ($n^{-1/4}$). Diese Gesetzmäßigkeit übernahm man früher auch für Rohrbündel, wobei die Anzahl der übereinander angeordneten Rohre eingesetzt wurde. Messungen, vor allem an größeren Rohrbündeln, zeigen, dass durch die Strömungsgeschwindigkeit des Dampfes die Verminderung der Wärmeübergangszahlen kompensiert wird.

Bei sehr großen Rohrbündeln spielt der Druckverlust des Dampfes und die Ansammlung nicht kondensierbarer Gase eine wesentliche Rolle. Dieses stellte man bei großen Kraftwerkkondensatoren fest. In Dampfkraftwerken mit der elektrischen Leistung von bis zu etwa 100 MW wurden Kondensatoren mit runden Rohrbündeln verwendet. Als um 1970 die Leistung der Dampfkraftwerke auf über 1 000 MW anstiegen, machte man die Erfahrung, dass bei Verwendung großer runder Rohrbündel die Wärmedurchgangszahlen nicht die erwarteten Werte erreichten. Der Grund dafür war, dass die Oberfläche der Rohre mit dem Durchmesser des Bündels quadratisch, der Umfang jedoch nur proportional anstieg. Damit stieg die Geschwindigkeit des Dampfes, der in das Bündel strömte, zwischen den Rohren am Umfang des Bündels an. Dort entstand ein großer Druckverlust und im Bündel selbst waren der Druck und damit die Temperatur tiefer. Um dieses zu vermeiden, wurden zur Vergrößerung des Umfangs Dampfgassen in das Bündel gelegt, was jedoch bewirkte, dass Stagnationszonen entstanden, in denen sich nicht kondensierbare Gase ansammelten und die Fläche in dieser Zone für die Kondensation sperrten.

Bei der Strömung des Dampfes in das Bündel nehmen der Massenstrom und die Geschwindigkeit des Dampfes von Rohrreihe zu Rohrreihe ab. Am Umfang des Bündels in der ersten Rohrreihe kann die Strömungsgeschwindigkeit sehr groß sein und einen entsprechenden Druckverlust verursachen. Dieses bedeutet, dass die Rohre im Bündel von einem tieferen Druck umgeben sind und somit dort eine tiefere Kondensationstemperatur herrscht, was die mittlere Temperatur und damit den Wärmestrom verringert. Um den gewünschten Druck zu erhalten, muss eine entsprechend größere Fläche installiert werden. Für die genaue Berechnung dieses Effektes werden in der Literatur praktisch keine Hinweise gegeben, sie ist das Know-how der Hersteller. Beispiel 5.4 demonstriert mit einem sehr einfachen Modell den Einfluss des Druckverlustes.

Die Formen moderner Großkondensatoren werden in Versuchen oder mit Berechnungen ermittelt. Der Umfang der Bündel ist so ausgelegt, dass der Dampf keine zu hohen Geschwindigkeiten hat und dadurch große Druckverluste verursacht. Die Strömung in den Bündeln ist derart gestaltet, dass die Bildung von Stagnationszonen verhindert wird.

BEISPIEL 5.4: Einfluss des Druckverlustes auf die Wärmestromdichte

Mit einem einfachen Modell soll hier der Einfluss des Druckverlustes auf die Wärmestromdichte in Abhängigkeit von der Bündelgröße demonstriert werden. Das Rohrbündel ist ein rundes Bündel mit n Rohren, die auf gleichseitigen Dreiecken angeordnet sind. Die Rohre haben einen Außendurchmesser von 24 mm und den Abstand von 32 mm, sie sind möglichst genau in eine Kreisfläche einzupassen. Die Wärmedurchgangszahl im Bündel wird unabhängig von der Strömung, der Temperatur und dem Druck als konstant mit $3\,500\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$ angenommen. Die Eintrittstemperatur des Kühlwassers beträgt 20 °C , jene am Austritt 30 °C . Die Sättigungstemperatur außerhalb des Bündels ist 35 °C . In der Modellvorstellung wird angenommen, dass an der Rohrreihe am Umfang des Bündels ein Druckverlust entsteht und der so entstandene Druck maßgebend für die restlichen Rohre des Bündels ist. Die Reibungszahl für den Druckverlust zwischen den Rohren der ersten Rohrreihe ist 1,5, bezogen auf die Geschwindigkeit im engsten Querschnitt, d.h. zwischen den Rohren.

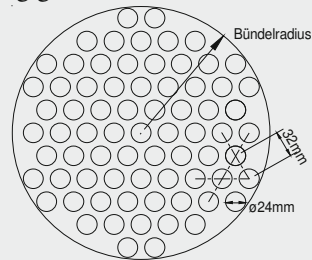
Die notwendige zusätzliche Fläche, die benötigt wird, um die 35 °C Sättigungstemperatur außen am Bündel zu erhalten, ist in Abhängigkeit der Rohrzahl zu berechnen.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Die Wärmedurchgangszahl ist konstant.
- Der Druckverlust entsteht nur am Umfang der Rohrreihe.
- Die Rohre werden möglichst genau in die Kreisfläche eingepasst.

**Analyse**

Um die Kreisfläche, die von n Rohren beansprucht wird, zu berechnen, muss zunächst die Fläche, die von einem Rohr eingenommen wird, bestimmt werden. Ein Rohr benötigt die Fläche von zwei gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge des Rohrabstandes s_1 .

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s_1^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 32^2 \cdot \text{mm}^2 = 0,887 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Der Bündelradius mit n Rohren ist damit:

$$R = \sqrt{\frac{n}{\pi} \cdot A_1} = \sqrt{\frac{n}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s_1^2} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \pi}} \cdot s_1 = \sqrt{n} \cdot 16,801 \text{ mm}$$

Der Dampf strömt am Bündelumfang zwischen den Rohren in das Bündel hinein. Die Fläche für die Strömung zwischen den Rohren ist:

$$A_0 = \frac{U \cdot l}{s_1} \cdot (s_1 - d) = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot l \cdot (1 - d / s_1) = \sqrt{n} \cdot l \cdot 0,026391 \text{ m}$$

Um den Dampfvolumenstrom, die Strömungsgeschwindigkeit, den Druckverlust und die Sättigungstemperatur zu berechnen, benötigt man die Stoffwerte des Dampfes:

$$\vartheta_s = 35 \text{ °C}, p_s = 56,36 \text{ mbar}, r = 2418 \text{ kJ/kg}, \rho = 0,03961 \text{ kg/m}^3$$

Der für die Auslegung maßgebende Dampfvolumenstrom wird durch die Wärmedurchgangszahl und mittlere logarithmische Temperaturdifferenz mit 35 °C Sättigungstemperatur bestimmt.

$$\Delta\vartheta_m = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\ln\left(\frac{\vartheta_s - \vartheta_1}{\vartheta_s - \vartheta_2}\right)} = \frac{30 - 20}{\ln(15/5)} \text{ K} = 9,102 \text{ K}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_D &= \frac{\dot{m}_D}{\rho} = \frac{\dot{Q}}{r \cdot \rho} = \frac{k \cdot A \cdot \Delta\vartheta_m}{r \cdot \rho} = \frac{k \cdot n \cdot l \cdot \pi \cdot d \cdot \Delta\vartheta_m}{r \cdot \rho} = \\ &= \frac{n \cdot l \cdot \pi \cdot 3,5 \cdot 0,024 \cdot 9,102 \cdot \text{m}^2}{2418 \cdot 0,03961 \cdot \text{s}} = n \cdot l \cdot 0,02508 \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

Ein Teil des Volumenstromes kondensiert an der äußeren Seite der Randrohre, der Rest strömt in das Bündel. Dieser einströmende Anteil ist:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{Dein} &= \dot{V}_D \cdot [1 - U / (2 \cdot s_1 \cdot n)] = \dot{V}_D \cdot [1 - 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{n} \cdot 16,801 \text{ mm} / (2 \cdot s_1 \cdot n)] = \\ &= n \cdot l \cdot 0,02508 \cdot [1 - 1,6494 / \sqrt{n}] \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit zwischen den Rohren beträgt:

$$c = \frac{\dot{V}_{Dein}}{A_0} = \frac{n \cdot l \cdot 0,02508 \cdot [1 - 1,237 / \sqrt{n}] \text{ m}^2/\text{s}}{\sqrt{n} \cdot l \cdot 0,019794 \text{ m}} = 0,950 \cdot [\sqrt{n} - 1,237] \text{ m/s}$$

Der Druckverlust ist damit:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \zeta \cdot c^2 \cdot \rho / 2 = 0,75 \cdot 0,9025 \cdot [\sqrt{n} - 1,6494]^2 \cdot 0,03961 \text{ Pa} = \\ &= 0,04769 \cdot [\sqrt{n} - 1,649]^2 \text{ Pa} \approx 0,02681 \cdot n \text{ Pa} \end{aligned}$$

Mit dem errechneten Druckverlust kann man Druck und Sättigungstemperatur im Bündel bestimmen. Mit der Abnahme des Druckverlustes ändern sich im Bündel die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz und die Wärmestromdichte.

$$\dot{q}(n) = k \cdot \Delta\vartheta_m(n)$$

Da der abzuführende Wärmestrom konstant bleibt, muss die Fläche im Inneren des Bündels umgekehrt proportional zur Änderung der Wärmestromdichte erhöht werden. Die prozentuale Änderung der Fläche ist:

$$\left(\frac{A}{A_0} - 1\right) \cdot 100 \% = \left(\frac{\dot{q}_0}{\dot{q}} - 1\right) \cdot 100 \% = \left(\frac{\Delta\vartheta_{m0}}{\Delta\vartheta_m} - 1\right) \cdot 100 \%$$

Die errechneten Werte sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

n	Δp	p_s	ϑ_s	$\Delta\vartheta_m$	$\Delta A/A \cdot 100$
-	Pa	mbar	°C	K	%
0	0,0	56,29	35,00	9,10	0,0
2 000	49,8	55,79	34,84	8,93	2,0
4 000	101,8	55,27	34,67	8,74	4,2
6 000	154,2	54,75	34,50	8,55	6,5
8 000	206,8	54,22	34,33	8,35	9,0
10 000	259,5	53,70	34,15	8,15	11,6
12 000	312,3	53,17	33,97	7,95	14,5
14 000	365,2	52,64	33,79	7,75	17,5
16 000	418,1	52,11	33,61	7,54	20,7
18 000	471,1	51,58	33,43	7,33	24,2
20 000	524,1	51,05	33,25	7,11	28,0

Bei der einfachen Modellrechnung wurde nicht berücksichtigt, dass durch die Abnahme der Sättigungstemperatur die Aufwärmung des Kühlwassers verringert und damit die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz erhöht wird. Dieser Fehler wird aber durch die Annahme, dass nur in der ersten Rohrreihe am Umfang ein Druckverlust stattfindet, mehr als kompensiert.

Diskussion

Aus den Berechnungen ist zu ersehen, dass bei großen Rohrbündeln der Druckverlust der Dampfströmung beträchtliche Mehrflächen notwendig macht. Bei kleineren Bündeln kann der Druckverlust vernachlässigt werden. Da die Stoffwerte in die Berechnung eingehen, ist von Fall zu Fall zu prüfen, ob ihre Änderung durch den Druckverlust berücksichtigt werden muss. Hersteller großer Kondensatoren rechnen bei der Auslegung ihrer Apparate den Druckverlust im Bündel zwiebel-schalenartig aus.

5.3 Kondensation strömender, reiner Dämpfe

Je nach Strömungsrichtung, Dampfgeschwindigkeit und Lage des Rohres wird durch die Strömung die Wärmeübergangszahl bei der Kondensation beeinflusst. Kondensiert z.B. in einem horizontalen Rohr reiner Dampf, nimmt mit zunehmender Rohrlänge die Strömungsgeschwindigkeit des eintretenden Dampfes zu, weil sich im Rohr immer mehr Kondensat bildet. Durch die Dampfströmung wird an der Phasentrennfläche eine zusätzliche Schubspannung auf den Kondensatfilm ausgeübt. Bei sehr hohen Dampfgeschwindigkeiten kann der Einfluss der Schwerkraft im Vergleich zu den Schubspannungskräften der Dampfströmung vernachlässigt werden. In senkrechten Rohren ändert sich die Beeinflussung durch die Dampfströmung je nachdem, ob sie nach unten oder oben verläuft. Für die Berechnung der Wärmeübergangszahlen muss zwischen den verschiedenen Strömungsformen und der Ausrichtung der Wärmeübertragungsflächen differenziert werden.

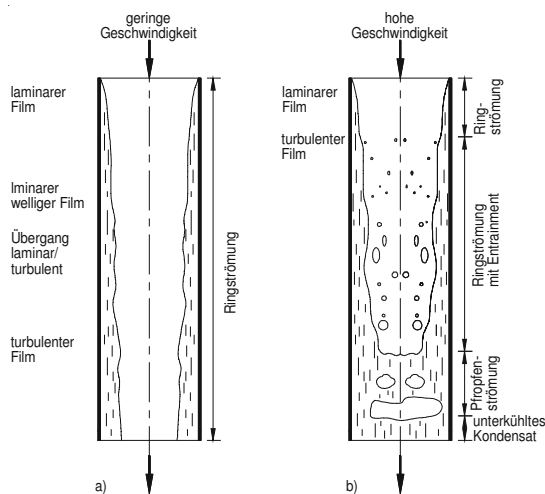


Bild 5.4: Kondensation bei abwärts gerichteter Strömung
 a) separierte Strömung b) Entrainment und Fluten

Bei der Kondensation reinen Dampfes in senkrechten Rohren kann bei kleinen Dampfgeschwindigkeiten über die gesamte Rohrlänge ein Kondensatfilm gebildet werden (separierte Strömung); bei hohen Dampfgeschwindigkeiten werden Tropfen (Entrainment) vom Kondensatfilm abgerissen. Die Dampf/Kondensatströmung geht ab einer gewissen Rohrlänge in reine Kondensatströmung über (Bild 5.4). Bei aufwärts gerichteter Dampfströmung bildet sich wiederum ein reiner Kondensatfilm, der entgegengesetzt zur Dampfströmung verläuft. Mit zunehmender Rohrlänge nimmt die Dampfströmung zu und führt zum Fluten des Rohres. Bei großen Dampfgeschwindigkeiten kann die Strömungsrichtung des Kondensatfilms umgekehrt werden. Hier muss dann aber sichergestellt sein, dass am Austritt des Rohres

noch immer genügend viel Dampf vorhanden ist, um den Kondensatfilm mitzuschleppen. Nachfolgend werden einige der wichtigsten Formen der Kondensation strömender Dämpfe behandelt.

5.3.1 Kondensation innerhalb senkrechter Rohre

Durch die Dampfströmung wirkt eine Schubspannung noch zusätzlich auf den Kondensatfilm [5.3, 5.4]. Als Folge entsteht eine Wechselwirkung zwischen Gas- und Flüssigphase. Bei der Berechnung muss zwischen Gleich- und Gegenstrom unterschieden werden.

5.3.1.1 Gleichstrom (abwärts gerichtete Dampfströmung)

Der Dampf strömt oben in das senkrechte Rohr ein und erhöht somit die Geschwindigkeit der ebenfalls nach unten gerichteten Kondensatströmung. Die von der Dampfströmung ausgeübte Schubspannung verändert die wandnahe Unterschicht und an der Oberfläche des Kondensatfilms wird die Bildung von Turbulenzen angeregt.

Bei der Kondensation mit Dampfströmung wird die lokale *Nußeltzahl* mit dem Exponent * angegeben.

$$Nu_{L',x}^* = (1 + \tau_{zp}^*)^{1/3} \cdot \sqrt{(C_{lam} \cdot Nu_{L',lam,x})^2 + (C_{turb} \cdot Nu_{L',turb,x})^2} \quad (5.39)$$

In der Zweiphasenströmung ist τ_{zp}^* die dimensionslose Schubspannung des Dampfes. Die Korrekturfaktoren C_{lam} und C_{turb} berücksichtigen den unterschiedlichen Einfluss der Schubspannung auf die laminare und turbulente Strömung. Die *Nußeltzahlen* werden mit den Gln. (5.30) und (5.32) berechnet. Die dimensionslose Schubspannung τ_{zp}^* wird mit Hilfe der Schubspannung τ_g^* der reinen Gasphase in einem leeren Rohr bestimmt.

$$\tau_g^* = \frac{\tau_g}{g \cdot \rho_l \cdot \delta^+} \quad \text{mit} \quad \tau_g = \frac{\zeta_g \cdot \rho_g \cdot \bar{c}_g^2}{8} \quad (5.40)$$

Dabei ist τ_g die Schubspannung der Dampfphase im leeren Rohr, ζ_g die Widerstandszahl des Dampfes, δ^+ die Filmdicke und \bar{c}_g die mittlere Geschwindigkeit, die der Dampf im leeren Rohr hätte.

$$\bar{c}_g = \frac{4 \cdot \dot{m}_g}{\rho_g \cdot n \cdot \pi \cdot d_i^2} = \frac{4 \cdot \dot{m} \cdot x}{\rho_g \cdot n \cdot \pi \cdot d_i^2} \quad (5.41)$$

Die Widerstandszahl wird mit der *Reynoldszahl* der Dampfphase berechnet.

$$\zeta_g = 0,184 \cdot Re_g^{-0,2} \quad \text{mit} \quad Re_g = \frac{\bar{c}_g \cdot d}{\nu_g} \quad (5.42)$$

Die dimensionslose Schubspannung ist gegeben als:

$$\tau_{zp}^* = \tau_g^* \cdot [1 + 550 \cdot F \cdot (\tau_{zp}^*)^a] \quad (5.43)$$

Der Strömungsparameter F ist eine Funktion der *Reynoldszahl* des Kondensats Gl. (5.27), des Verhältnisses der Dichte und der kinematischen Viskosität.

$$F = \frac{\max[(2 \cdot Re_l)^{0,5}; 0,132 \cdot Re_l^{0,9}]}{Re_g^{0,9}} \cdot \frac{\eta_l}{\eta_g} \cdot \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}} \quad (5.44)$$

Der Exponent a berücksichtigt das Verhältnis zwischen der Schubspannung und Schwerkraft.

$$a = \begin{cases} 0,30 & \text{für } \tau_g^* \leq 1 \\ 0,85 & \text{für } \tau_g^* > 1 \end{cases} \quad (5.45)$$

Die Korrekturfaktoren C_{lam} und C_{turb} sind definiert als:

$$C_{lam} = 1 + (Pr_l^{0,56} - 1) \cdot \tanh(\tau_{zp}^*) \quad C_{turb} = 1 + (Pr_l^{0,08} - 1) \cdot \tanh(\tau_{zp}^*) \quad (5.46)$$

Die Filmdicke δ^+ wird ebenfalls mit dem Strömungsparameter F berechnet.

$$\frac{\delta^+}{d} = \frac{6,59 \cdot F}{\sqrt{1 + 1400 \cdot F}} \quad (5.47)$$

Die dimensionslose Schubspannung muss aus Gl. (5.43) iterativ ermittelt werden.

Je nachdem, ob ein Apparat bereits bekannt oder neu auszulegen ist, erfolgt die Berechnung unterschiedlich. In beiden Fällen muss aber abschnittsweise gerechnet werden.

Beim Auslegen des Apparates müssen der Rohrdurchmesser, der zu kondensierende Dampfmassestrom und die Wärmeübergangszahl außen am Rohr bekannt sein. Man wählt Stützstellen, an denen die lokalen Wärmeübergangszahlen und Wärmedurchgangszahlen berechnet werden. Mit diesen beiden Werten wird eine mittlere Wärmedurchgangszahl gebildet und die für die Kondensation notwendige Rohrlänge berechnet. Die Stützpunkte werden als Kondensatmassenströme gewählt. Zu Beginn der Kondensation ist der Kondensatmassenstrom gleich null und damit die Wärmeübergangszahl gleich unendlich. Der erste Stützpunkt muss daher mit einem Massenstrom, der ein wenig größer als null ist, gewählt werden, z.B. 1 % des Kondensatmassenstromes.

Bei der Nachrechnung fertiger konstruierter Apparate nimmt man zunächst einen Kondensatmassenstrom an und rechnet damit wie bei der Auslegung. Der Massenstrom wird geändert, bis die vorhandene Rohrlänge erreicht ist.

5.2.1.2 Gegenstrom (Dampfströmung nach oben)

Die Berechnung erfolgt wie beim Gleichstrom, die dimensionslose Schubspannung wird jedoch wesentlich größer, sie berechnet sich folgendermaßen:

$$\tau_{zp}^* = \tau_g^* \cdot [1 + 1400 \cdot (\tau_{zp}^*)^a] \quad (5.48)$$

Beim Gegenstrom kann das Kondensat bei zu hohen Dampfgeschwindigkeiten aufgestaut werden, dadurch "verstopfen" die Rohre. Dieses führt zu Fluktuationen. Um sicherzustellen, dass kein Kondensatstau erfolgt, sind die Apparate so auszulegen, dass die kritische *Weberzahl* $We_c = 0,01$ nicht überschritten wird. Die *Weberzahl* ist definiert als:

$$We = \frac{\tau_{zp}^* \cdot \delta^+}{\sigma_l} = \frac{\tau_{zp}^* \cdot \rho_l \cdot g \cdot (\delta^+)^2}{\sigma_l} \quad (5.49)$$

Die Größe τ_{zp}^* wird mit Gl. (5.43), δ^+ mit Gl. (5.47) bestimmt, σ_l ist die Oberflächenspannung.

BEISPIEL 5.5: Berechnung des Kondensators aus Beispiel 5.3 mit Kondensation in den Rohren

Ein Kondensator, in dem Dampf innen in den vertikalen Rohren kondensiert, ist mit den im Beispiel 5.3 gegebenen Daten auszulegen. Die Anzahl der Rohre beträgt, wie im Beispiel 5.3 berechnet, 47. Die Wärmeübergangszahl außen an den Rohren ist $6500 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$. Die Stoffwerte des Kühlwassers und des Frigens werden ebenfalls aus Beispiel 5.3 übernommen. Die dynamische Viskosität der Gasphase ist $\eta_g = 14,2 \cdot 10^{-6} \text{ kg}/(\text{m s})$.

Bestimmen Sie die Länge der Rohre.

Lösung

Schema Temperaturverlauf wie im Beispiel 5.3

Annahme

- Die mittlere Wärmeübergangszahl ist konstant.

Analyse

Mit den lokalen Werten nach Gl. (5.39) wird die Wärmeübergangszahl im Rohr berechnet. Dazu nimmt man fünf Stützpunkte an. Sie sind anhand der Kondensatbildung, d.h. mit dem Dampfgehalt x gewählt. Folgende Stützpunkte wurden

ausgewählt: $x = 0,99, 0,75, 0,5, 0,25, 0,0$. Die Wärmeübergangszahlen werden mit den Mittelwerten des Dampfgehaltes zwischen den Stützstellen berechnet. Die Rechnungsgrößen sind als Funktion des Dampfgehaltes gegeben. In den nachstehenden Formeln werden die errechneten Werte zwischen den ersten beiden Stützstellen $x_0 = 1$ und $x_1 = 0,99$, d.h., $x = 0,995$, angegeben. Anschließend werden sie für alle Stützstellen tabelliert aufgeführt.

$$Re_l(x) = \frac{\Gamma}{\eta_l} = \frac{\dot{m}_{R134a} \cdot (1-x)}{n \cdot \pi \cdot d_i \cdot \eta_l} = \frac{0,5 \cdot (1-x)}{47 \cdot \pi \cdot 0,01 \cdot 142,7 \cdot 10^{-6}} = 10,522$$

$$Re_g(x) = \frac{c_g \cdot d_i}{\nu_g} = \frac{4 \cdot \dot{m}_{R134a} \cdot x \cdot d_i}{\eta_g \cdot n \cdot \pi \cdot d_i^2} = 88\,531$$

$$\xi(x) = 0,184 \cdot Re_g(x)^{-0,2} = 0,019$$

$$\tau_g(x) = \frac{\xi \cdot \rho_g \cdot c_g^2}{8} = \frac{2 \cdot \xi(x) \cdot \dot{m}_{R134a}^2 \cdot x^2}{n^2 \cdot \pi^2 \cdot d_i^4 \cdot \rho_g} = 0,508 \text{ Pa}$$

$$F(x) = \frac{\max(\sqrt{2 \cdot Re_l(x)}; 0,132 \cdot Re_l(x)^{0,9})}{Re_g(x)^{0,9}} \cdot \frac{\eta_l}{\eta_g} \cdot \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}} = 4,197 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta(x) = \frac{6,59 \cdot d_i \cdot F(x)}{\sqrt{1 + 1\,400 \cdot F(x)}} = 2,195 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\tau_g^*(x) = \frac{\tau_g(x)}{g \cdot \rho_l \cdot \delta(x)} = 2,140$$

Die dimensionslose Schubspannung der Zweiphasenströmung wird iterativ aus Gl. (5.43) bestimmt.

$$\tau_{ZP}^*(x) = \tau_g^*(x) \cdot [1 + 550 \cdot F(x) \cdot (\tau_{ZP}^*(x))^a] = 3,612$$

$$C_{lam}(x) = 1 + (Pr_l^{0,56} - 1) \cdot \tanh(\tau_{ZP}^*(x)) = 1,897$$

$$C_{turb}(x) = 1 + (Pr_l^{0,08} - 1) \cdot \tanh(\tau_{ZP}^*(x)) = 1,096$$

Die lokalen *Nußeltzahlen* des laminaren und turbulenten Kondensatfilms werden mit den Gln. (5.30) und (5.34) errechnet.

$$Nu_{L', lam, x} = \frac{\alpha_x \cdot L'}{\lambda_l} = 0,693 \cdot \left(\frac{1 - \rho_g / \rho_l}{Re_l} \right)^{1/3} \cdot f_{well} = 0,340$$

$$Nu_{L', turb, x} = \frac{\alpha_x \cdot L'}{\lambda_l} = \frac{0,0283 \cdot Re_l^{7/24} \cdot Pr_l^{1/3}}{1 + 9,66 \cdot Re_l^{-3/8} Pr_l^{-1/6}} = 0,0191$$

Der Index x bedeutet hier die Länge. Die *Nußelt*-Zahlen sind natürlich vom Dampfgehalt x abhängig. Die *Nußelt*-Zahl ist damit:

$$Nu_{L',x}^* = (1 + \tau_{zp}^*)^{1/3} \cdot \sqrt{(C_{lam} \cdot Nu_{L',lam,x})^2 + (C_{turb} \cdot Nu_{L',turb,x})^2} = 1,075$$

In diesem Abschnitt sind die Wärmeübergangs- und -durchgangszahl:

$$\alpha_x = \frac{Nu_{L',x}^* \cdot \lambda_l}{L'} = Nu_{L',x}^* \cdot \lambda_l \cdot \sqrt[3]{g / \nu^2} = 6\,302 \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \left(\frac{d_a}{d_i} \right) + \frac{d_a}{d_i \cdot \alpha_x} \right) = 2\,880 \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Im ersten Abschnitt wird von $x = 1$ auf $x = 0,99$ kondensiert, d.h., 1 % des Dampfes wird kondensiert. In diesem Abschnitt ist der Wärmestrom:

$$\dot{Q} = \dot{m}_{R134a} \cdot (x_0 - x_1) \cdot r = 795 \text{ W}$$

Die Temperatur des Kühlmediums kann als eine Funktion des Dampfgehaltes angegeben werden.

$$\vartheta_1(x) = \vartheta_1' + \frac{\dot{m}_{R134a} \cdot (1 - x)}{\dot{m}_{KW} \cdot c_{pKW}}$$

Damit ist die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz in dem Abschnitt, in dem sich der Dampfgehalt von x_1 auf x_2 ändert:

$$\Delta \vartheta_m(x_1, x_2) = \frac{\vartheta_1(x_1) - \vartheta_1(x_2)}{\ln \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1(x_2)}{\vartheta_2 - \vartheta_1(x_1)}}$$

Im ersten Abschnitt ändert sich der Dampfgehalt von 1 auf 0,99. Die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz beträgt hier 5,025 K. Die Fläche bzw. Rohrlänge, die notwendig ist, um die Wärme zu transferieren, kann aus dem Wärmestrom mit der mittleren logarithmischen Temperaturdifferenz und der Wärmedurchgangszahl bestimmt werden.

$$\Delta l(\Delta x) = \frac{\Delta A(\Delta x)}{\pi \cdot n \cdot d_a} = \frac{\dot{Q}(\Delta x)}{k(x) \cdot \Delta \vartheta_m \cdot \pi \cdot n \cdot d_a} = 0,026 \text{ m}$$

Nachfolgend sind die berechneten Werte für die anderen Stützpunkte tabellarisch zusammengestellt:

x	x_m	Re_l	Re_g	τ_g^* 10 ⁻³	τ_{zp}^*	$Nu_{L', lam}$	$Nu_{L', turb}$	$Nu_{L'}$	Q W	$\Delta\vartheta_m$ °C	k W/m ² K	Δl m	l m
1,00													0
	0,995	11	88 531	2,140	3,612	0,340	0,019	1,075	759	5,025	2 880	0,026	
0,99													0,026
	0,870	274	77 409	0,466	1,157	0,131	0,108	0,330	18 216	5,629	1 286	1,259	
0,75													1,285
	0,625	789	55 610	0,126	0,688	0,096	0,175	0,282	18 975	6,856	1 133	1,223	
0,50													2,508
	0,375	1 315	33 366	0,031	0,302	0,083	0,219	0,271	18 975	8,109	1 095	1,070	
0,25													3,578
	0,125	1 841	11 122	0,002	0,041	0,075	0,252	0,268	18 975	9,361	1 085	0,935	
0,00													4,513

Diskussion

Die Wärmeübergangszahl im Rohr wird durch die Strömung des Dampfes erhöht und die notwendige Rohrlänge verkürzt. In dem hier berechneten Beispiel ist die Verkürzung mit ca. 1,5 m recht groß. Bei noch höheren Geschwindigkeiten kann die Wärmeübergangszahl mehr als verdoppelt werden.

5.3.2 Kondensation in durchströmten, waagerechten Rohren

In sehr kurzen waagerechten Rohren, in denen die Dampfgeschwindigkeit vernachlässigbar ist, kann die *Nußeltzahl* bei der Kondensation wie in Kapitel 5.1.1.5 mit Gl. (5.23) berechnet werden, wobei der Innendurchmesser eingesetzt wird. Bei längeren Rohren nimmt der Massenstrom des Kondensats und damit der einströmende Massenstrom des Dampfes zu. Mit steigender Dampfgeschwindigkeit bestimmt sie und nicht mehr die Schwerkraft die Ausbildung des Kondensatfilms. Zur Berechnung der Wärmeübergangszahl wird die in Gl. (5.39) gegebene *Nußeltzahl* modifiziert.

$$Nu_{L', x}^* = \tau_g^{*1/3} \cdot \sqrt{(C_{lam} \cdot Nu_{L', lam, x})^2 + (C_{turb} \cdot Nu_{L', turb, x})^2} \quad (5.50)$$

Die dimensionslose Schubspannung wird mit der Dampfgeschwindigkeit c_g , die man mit dem Dampfvolumenteil ε ermittelt, bestimmt. Der Dampfvolumenteil ist als eine Funktion des Strömungsparameters F nach Gl. (5.44) gegeben.

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{8,48 \cdot F}} \quad (5.51)$$

Mit dem Dampfvolumenteil kann die Dicke δ des Kondensatfilms berechnet werden.

$$\delta = 0,25 \cdot (1 - \varepsilon) \cdot d \quad (5.52)$$

Die Dampfgeschwindigkeit c_g wird als Geschwindigkeit des Dampfes innerhalb des Kondensatfilms berechnet.

$$c_g = \frac{4 \cdot \dot{m} \cdot x}{\rho_g \cdot \pi \cdot (d_i - 2 \cdot \delta)^2} \quad (5.53)$$

Die Schubspannung berechnet sich mit den Gln. (5.40) bis (5.42):

$$\tau_g = \frac{0,184 \cdot Re_g^{-0,2}}{8} \cdot c_g^2 \cdot \rho_g \quad (5.54)$$

Die dimensionslose Schubspannung wird mit der Filmdicke bestimmt.

$$\tau_g^* = \frac{\tau_g}{g \cdot \rho_l \cdot \delta} \cdot (1 + 850 \cdot F) \quad (5.55)$$

Die Berechnung der *Nußeltzahlen* erfolgt wie in Kapitel 5.3.1.1.

BEISPIEL 5.6: Auslegung eines Kühltankskondensators

Im Kondensator eines Kühltanks soll 1,0 kW Wärmestrom abgeführt werden. Als Kältemittel wird Frigen R134a verwendet. Die Kondensationstemperatur ist 50 °C. Die auf den Außendurchmesser bezogene mittlere äußere Wärmedurchgangszahl wurde unter Berücksichtigung der Rippen mit 400 W/(m² K) bestimmt. Die Temperatur der Außenluft beträgt 22 °C. Das Rohr des Kondensators hat einen Außendurchmesser von 8 mm, die Wärmeleitfähigkeit 372 W/(m² K) und die Wandstärke von 1 mm. Nachfolgende Skizze zeigt die Anordnung des Kondensators. Die Rohrbögen können vernachlässigt werden. Stoffwerte des Frigens: $\rho_l = 1102 \text{ kg/m}^3$, $\rho_g = 66,3 \text{ kg/m}^3$, $\lambda_l = 0,071 \text{ W/(m K)}$, $\eta_l = 142,7 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}$, $\eta_g = 13,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}$, $Pr_l = 3,14$, $r = 151,8 \text{ kJ/kg}$.

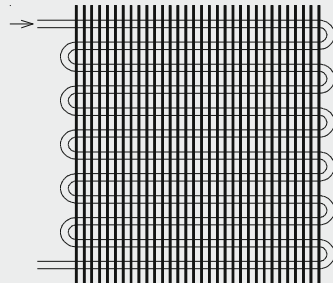
Bestimmen Sie die notwendige Länge des Kondensatorrohrs.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Die mittlere Wärmeübergangszahl ist konstant.
- Die Rohrbögen bleiben unberücksichtigt.
- Die Änderung des Druckes ist vernachlässigbar.
- Die Temperaturänderung der Luft wird vernachlässigt.



Analyse

Wie beim senkrechten Rohr wird hier in verschiedenen Abschnitten gerechnet. Die Stützstellen sind $x = 1, 0,75, 0,5, 0,25$ und $0,0$. Für die Berechnung sind die mittleren Dampfgehalte damit $0,875, 0,625, 0,375$ und $0,125$. Die nachfolgenden Gleichungen zeigen die Werte zwischen den ersten beiden Stützstellen, d.h. bei einem mittleren Dampfgehalt von $x = 0,875$. Die anderen Werte werden in einer Tabelle dargestellt.

Der Massenstrom des Frigens, der kondensiert wird, berechnet sich aus dem gegebenen Wärmestrom.

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}}{r} = \frac{1,0 \text{ kW}}{151,8 \text{ kJ/kg}} = 6,588 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}$$

Die Berechnung der *Nußeltzahlen* erfolgt im Weiteren ohne Kommentare.

$$Re_l(x) = \frac{\Gamma}{\eta_l} = \frac{\dot{m} \cdot (1-x)}{\pi \cdot d_i \cdot \eta_l} = \frac{6,588 \cdot 10^{-3} \cdot (1-x)}{\pi \cdot 0,006 \cdot 142,7 \cdot 10^{-6}} = 306,1$$

$$Re_g(x) = \frac{c_g \cdot d_i}{\nu_g} = \frac{4 \cdot \dot{m} \cdot x \cdot d_i}{\eta_g \cdot \pi \cdot d_i^2} = 90\,607$$

$$\xi(x) = 0,184 \cdot Re_g(x)^{-0,2} = 0,0190$$

$$F(x) = \frac{\max\left(\sqrt{2 \cdot Re_l(x)}; 0,132 \cdot Re_l(x)^{0,9}\right)}{Re_g(x)^{0,9}} \cdot \frac{\eta_l}{\eta_g} \cdot \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}} = 4,946 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon(x) = 1 - \frac{1}{1 + 1/[8,48 \cdot F(x)]} = 0,9596$$

$$\delta(x) = 0,25 \cdot (1 - \varepsilon) \cdot d_i = 6,034 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$c_g(x) = \frac{4 \cdot \dot{m} \cdot x}{\pi \cdot \rho_g \cdot (d_i - 2 \cdot \delta)^2} = 3,202 \text{ m/s}$$

$$\tau_g(x) = \frac{\xi \cdot \rho_g \cdot c_g^2}{8} = 2,446 \text{ Pa}$$

$$\tau_g^*(x) = \frac{\tau_g(x)}{g \cdot \rho_l \cdot \delta(x)} \cdot [1 + 850 \cdot F(x)] = 12,722$$

$$C_{lam}(x) = 1 + (Pr_l^{0,56} - 1) \cdot \tanh(\tau_{zp}^*(x)) = 1,898$$

$$C_{turb}(x) = 1 + (Pr_l^{0,08} - 1) \cdot \tanh(\tau_{zp}^*(x)) = 1,096$$

Die lokalen *Nußeltzahlen* des laminaren und turbulenten Kondensatfilms werden mit den Gln. (5.30) und (5.34) bestimmt.

$$Nu_{L', lam, x} = \frac{\alpha_x \cdot L'}{\lambda_l} = 0,693 \cdot \left(\frac{1 - \rho_g / \rho_l}{Re_l} \right)^{1/3} \cdot f_{well} = 0,127$$

$$Nu_{L', turb, x} = \frac{\alpha_x \cdot L'}{\lambda_l} = \frac{0,0283 \cdot Re_l^{7/24} \cdot Pr_l^{1/3}}{1 + 9,66 \cdot Re_l^{-3/8} Pr_l^{-1/6}} = 0,1138$$

Der Index *x* bedeutet hier, dass die lokalen *Nußeltzahlen* für die Lauflänge *x* berechnet werden. Die *Nußeltzahlen* sind natürlich vom Dampfgehalt *x* abhängig:

$$Nu_{L', x}^* = \tau_g^{*1/3} \cdot \sqrt{(C_{lam} \cdot Nu_{L', lam, x})^2 + (C_{turb} \cdot Nu_{L', turb, x})^2} = 0,632$$

Die charakteristische Länge *L'* ist:

$$L' = \sqrt[3]{v_l^2 / g} = 1,571 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Damit sind in diesem Abschnitt die Wärmeübergangs- und -durchgangszahl:

$$\alpha_x = \frac{Nu_{L', x}^* \cdot \lambda_l}{L'} = 2443 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \left(\frac{d_a}{d_i} \right) + \frac{d_a}{d_i \cdot \alpha_x} \right) = 328 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

In jedem Abschnitt werden 25 % des Dampfes kondensiert, d.h., der Wärmestrom ist in allen Abschnitten gleich groß.

$$\Delta \dot{Q} = \dot{m} \cdot (x_0 - x_1) \cdot r = 250 \text{ W}$$

Damit dieser Wärmestrom abgeführt werden kann, benötigt man eine Austauschfläche bzw. eine bestimmte Rohrlänge, die aus der notwendigen Fläche ΔA zu berechnen ist.

$$\Delta l = \frac{\Delta A}{\pi \cdot d_a} = \frac{\Delta \dot{Q}}{\pi \cdot d_a \cdot k \cdot (\vartheta_F - \vartheta_L)} =$$

$$= \frac{250 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{\pi \cdot 0,008 \cdot \text{m} \cdot 328 \cdot \text{W} \cdot (50 - 22) \cdot \text{K}} = 1,055 \text{ m}$$

Die berechneten Werte der anderen Abschnitte sind tabellarisch zusammengestellt.

x	τ_g	τ_{zP}^*	α_i	k	ΔL
-	Pa	-	W/(m ² K)	W/(m ² K)	m
0,875	1,593	12,722	2 857	336,7	1,055
0,625	1,064	8,099	2 443	328,8	1,083
0,375	0,604	5,419	2 350	325,7	1,091
0,125	0,200	3,350	2 185	321,2	1,106

Zusammengezählt ergeben die Längen der Abschnitte **4,335 m**.

Diskussion

Abgesehen vom letzten Abschnitt ist die äußere Wärmeübergangszahl in diesem Beispiel sehr viel kleiner als die innere. Da eine mittlere äußere Wärmedurchgangszahl angegeben wurde, konnte mit einer konstanten Lufttemperatur gerechnet werden. Unter Berücksichtigung der Lufterwärmung in der Strömung benötigt man Kenntnisse des Kreuzstromwärmeübertragers. Dieser wird jedoch erst später besprochen.

BEISPIEL 5.7: Kondensatorretrofit

Der Kondensator eines US-Kraftwerkbesitzers weist unzureichende Leistung auf. Es sollen neue, moderne, modular vorgefertigte Rohrbündel in den Kondensator eingesetzt werden. In der Ausschreibung sind folgende Daten gegeben:

Die drei Niederdruckturbinen A, B und C haben jeweils einen Kondensator, die kühlwasserseitig in Serie geschaltet sind (s. Skizze). Der Wärmestrom zu den einzelnen Kondensatoren ist jeweils 733 MW.

Daten der vorhandenen Kondensatoren:

Berohrung je Kondensator: 27 000 Rohre mit 1" aD und 1,2 mm Wandstärke

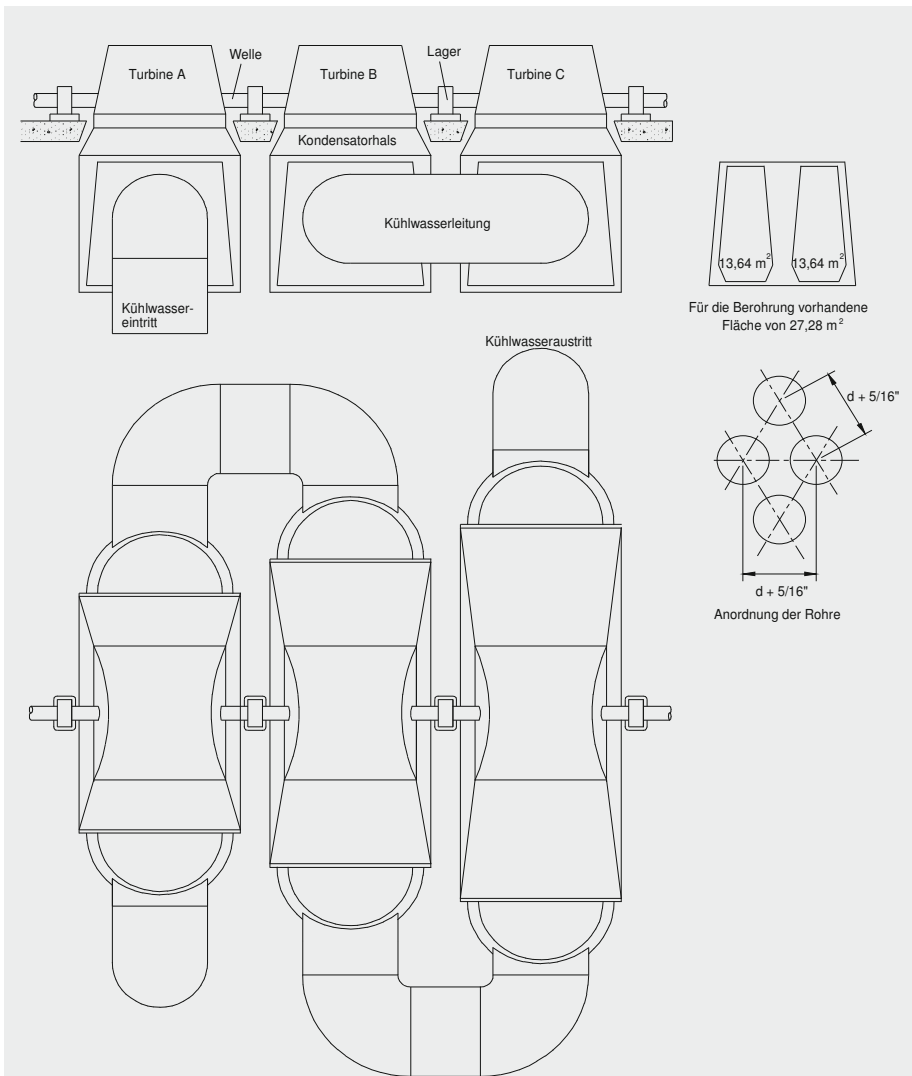
Abstand der Rohre: 1 5/16"

Rohrlängen: $l_A = 35'$ $l_B = 45'$ $l_C = 55'$

Kühlwasservolumenstrom: 381 500 GPM bei 86 ft Förderhöhe

Im Pflichtenheft wird verlangt, dass im neuen Kondensator C bei einer Kühlwassereintrittstemperatur von 35 °C der Druck von 5 inHg-Säule nicht überschritten wird. Die Rohrlängen und äußeren Abmessungen der Kondensatoren sind für die neuen Module beizubehalten.

Für die Rohrbündel des Anbieters steht in den neuen Kondensatormodulen zur Berohrung eine Fläche von 27,28 m² zur Verfügung. Die Rohraußendurchmesser werden nach US-Normen in 1/8"-Abstufungen gewählt. Das Pflichtenheft verlangt Titanrohre mit 0,7 mm Wandstärke und 15 W/(m K) Wärmeleitfähigkeit. Der Abstand zwischen den Rohren ist: Rohraußendurchmesser plus 5/16".



Links in der obigen Skizze sieht man die Anordnung der Kondensatoren in der Anlage, rechts die für die Berohrung der neuen Kondensatoren vorhandene Fläche und die Anordnung der Rohre.

Für das Kühlwasser können folgende konstante Stoffwerte verwendet werden:

$$c_p = 4,174 \text{ kJ/(kg K)}, \quad \rho = 990,2 \text{ kg/m}^3, \quad \nu = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \lambda = 0,6368 \text{ W/(m K)}, \\ Pr = 3,946.$$

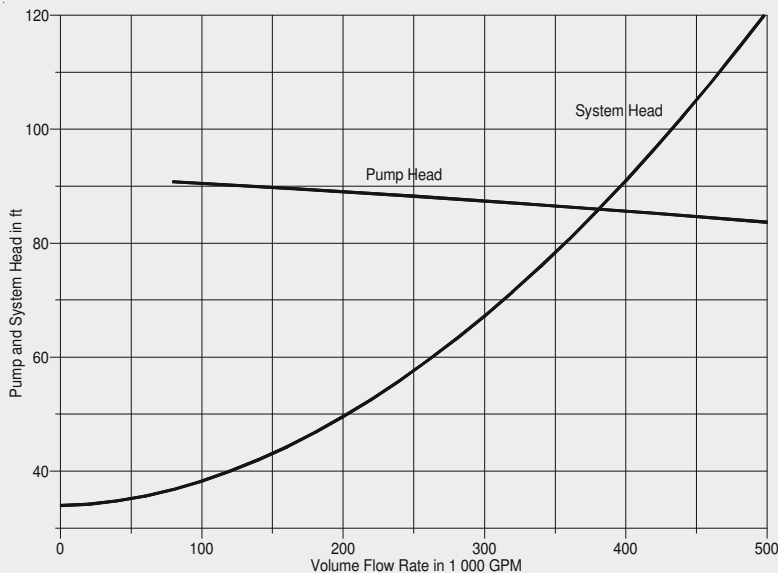
Umrechnungsfaktoren: 1 GPM (gallon per minute) = 0,063083 l/s,
 1" = 0,0254 m, 1' = 0,3048 m, 1 inHg = 3 386,39 Pa.

Die Änderung des Kühlwasservolumenstromes ist als eine Funktion des Druckverlustes entsprechend der Charakteristik der Kühlwasserpumpe zu berücksichtigen. Der Druckverlust in den Kondensatorrohren wird nach *Blasius* berechnet:

$$\Delta p_v = 0,3164 \cdot Re^{-0,25} \cdot l / d \cdot (c^2 \cdot \rho / 2)$$

Die drei Kondensatoren sind auszulegen. Bestimmen Sie den Druck in den einzelnen Kondensatoren.

Hinweis: Prüfen Sie zunächst die Endtemperatur des Kühlwassers.



Kennlinie der Kühlwasserpumpe und des Systems

Lösung

Schema Siehe Skizzen in der Aufgabenstellung

Annahmen

- In den Zu- und Abflüssen zu den Kondensatorrohren nimmt der Druckverlust quadratisch mit dem Volumenstrom zu.
- Der statische Druckverlust von 34' Wassersäule ist immer vorhanden (Höhendifferenz des Wasserniveaus in der Kühlturmtasse zu den Einspritzdüsen).
- Der Druckverlust der Dampfströmung in das Bündel bleibt unberücksichtigt.
- Um die Berechnung zu vereinfachen, werden die Einflüsse der Richtung des Wärmestromes und der Rohrlänge vernachlässigt.
- Die Wärmeübergangszahlen in den Rohren sind mit den oben angegebenen Stoffwerten zu berechnen und in allen drei Kondensatoren als konstant anzunehmen.

Analyse

Zunächst rechnen wir die amerikanischen Einheiten in SI-Einheiten um:

$$\dot{V}_0 = 381\,500 \text{ GPM} = 24,066 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$l_A = 35' = 10,668 \text{ m} \quad l_B = 13,716 \text{ m} \quad l_C = 16,764 \text{ m} \quad d_a = 1'' = 25,4 \text{ mm}$$

$$d_i = d_a - 2 \cdot s = 23 \text{ mm} \quad 5 \text{ inHg} = 16\,932 \text{ Pa} = 169,32 \text{ mbar}$$

Mit einer ersten Berechnung kann gezeigt werden, dass der gewünschte Kondensatordruck nicht mit dem gegebenen Kühlwasservolumenstrom erreicht werden kann. Die Austrittstemperatur des Kühlwassers berechnet sich mit der Bilanzgleichung zu:

$$\vartheta_1'' = \vartheta_1' + \frac{\dot{Q}_{\text{tot}}}{\dot{V}_0 \cdot \rho_1 \cdot c_{p1}} = 35 \text{ °C} + \frac{3 \cdot 733 \cdot 10^6 \cdot \text{W} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{24,066 \text{ m}^3 \cdot 990,2 \cdot \text{kg} \cdot 4\,174 \cdot \text{J}} = 57,11 \text{ °C}$$

Nach der Dampftafel beträgt die Sättigungstemperatur bei 169,31 mbar 56,50 °C, d.h., die Temperatur des Kühlwassers ist höher als die Sättigungstemperatur des Dampfes, der das Kühlwasser aufheizen soll. Dieses ist unmöglich. Um den gewünschten Druck von 5 inHg zu erreichen, muss das Kühlwasser 2 bis 3 K kälter als die Dampftemperatur sein. Das kann durch Erhöhung des Kühlwassermassenstromes erreicht werden. Die kostengünstigste Lösung ist, den Druckverlust des Kühlwassers in den Kondensatorrohren so zu senken, dass der Volumenstrom entsprechend der Kühlwasserpumpencharakteristik erhöht wird. Die Förderhöhe der Pumpe entspricht dem konstanten statischen Druck von Δp_{st} plus dem Reibungsdruckverlust Δp_{va} in den Zu- und Ableitungen zu den Kondensatoren plus dem Reibungsdruckverlust Δp_v in den Kondensatorrohren. Letzteren können wir durch die Dimensionierung der Kondensatorrohre beeinflussen. Der Druckverlust der Zu- und Ableitungen Δp_{va} ist mit den Daten des alten Kondensators zu bestimmen. Der Druckverlust in den Rohren des alten Kondensators beträgt:

$$\Delta p_{v0} = 0,3164 \cdot Re_{d_i}^{-0,25} \cdot \frac{l_{ges}}{d_i} \cdot \frac{c_0^2 \cdot \rho_1}{2}$$

Die Geschwindigkeit in den Rohren berechnet sich zu:

$$c_0 = \frac{4 \cdot \dot{V}_0}{n \cdot \pi \cdot d_i^2} = \frac{4 \cdot 24,066 \text{ m}^3}{27\,000 \cdot \pi \cdot 0,023^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}} = 2,143 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Für die Reynoldszahl erhalten wir: } Re_{d_i} = \frac{c_0 \cdot d_i}{\nu_1} = \frac{2,145 \cdot 0,023}{0,6 \cdot 10^{-6}} = 82\,239$$

Der Reibungsdruckverlust in den Rohren ist:

$$\Delta p_{v0} = 0,3164 \cdot 82\,239^{-0,25} \cdot \frac{41,148 \cdot \text{m}}{0,023 \cdot \text{m}} \cdot \frac{2,145^2 \cdot \text{m}^2 \cdot 990,2 \cdot \text{kg}}{2 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^3} =$$

$$= 76\,169 \text{ Pa} = 25,735 \text{ ft H}_2\text{O}$$

Von der Förderhöhe von 86 ft bei 381 500 GPM Volumenstrom werden für den statischen Druck 34 ft, für den Druckverlust in den Rohren 25,74 ft Wassersäule benötigt. Für den Druckverlust in den Zu- und Ableitungen verbleiben 26,27 ft. Die Kennlinie des Systems kann mit der neuen Kondensatorberohrung berechnet werden. Damit ändern sich Anzahl und Durchmesser der Rohre. Der Reibungsdruckverlust Δp_v beträgt im Verhältnis zu dem im alten Kondensator Δp_{v0} :

$$\frac{\Delta p_v}{\Delta p_{v0}} = \left(\frac{Re}{Re_0} \right)^{-0,25} \cdot \frac{d_{i0}}{d_i} \cdot \frac{c^2}{c_0^2}$$

Die Geschwindigkeit kann aus dem Volumenstrom bestimmt und in die Gleichung eingesetzt werden:

$$\Delta p_v = \Delta p_{v0} \cdot \left(\frac{n_0 \cdot d_{i0}^2 \cdot \dot{V} \cdot d_i}{n \cdot d_i^2 \cdot \dot{V}_0 \cdot d_{i0}} \right)^{-0,25} \cdot \frac{d_{i0}}{d_i} \cdot \left(\frac{n_0 \cdot d_{i0}^2 \cdot \dot{V}}{n \cdot d_i^2 \cdot \dot{V}_0} \right)^2 = 25,74 \cdot \text{ft} \cdot \left(\frac{n_0 \cdot \dot{V}}{n \cdot \dot{V}_0} \right)^{1,75} \cdot \left(\frac{d_{i0}}{d_i} \right)^{4,75}$$

Die Systemkennlinie setzt sich aus dem statischen Druck und den volumenstromabhängigen Reibungsdruckverlusten zusammen:

$$\Delta p_{tot} = \left[34 + 26,27 \cdot \left(\frac{\dot{V}}{\dot{V}_0} \right)^2 + 25,74 \cdot \left(\frac{n_0 \cdot \dot{V}}{n \cdot \dot{V}_0} \right)^{1,75} \cdot \left(\frac{d_i}{d_{i0}} \right)^{4,75} \right] \cdot \text{ft}$$

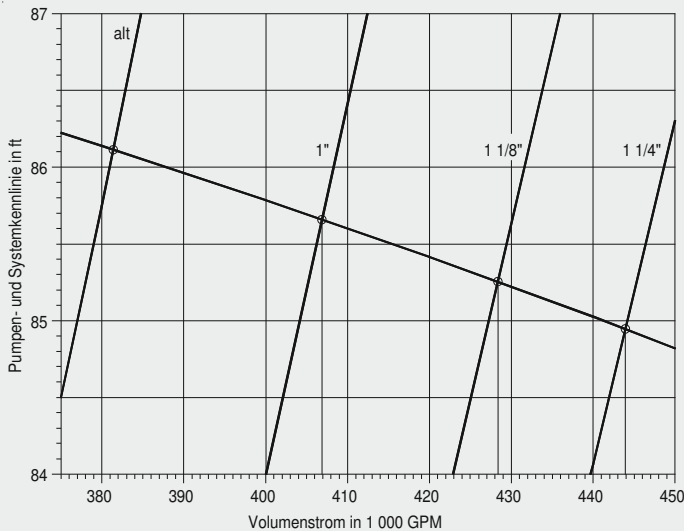
Mit dieser Gleichung kann die Systemkennlinie mit der neuen Berohrung berechnet und der Volumenstrom aus der Kennlinie der Pumpe bestimmt werden. Für den neuen Kondensator sind zunächst die Anzahl der Rohre, die in die gegebene Fläche von 27,28 m² hineinpassen, zu berechnen. Für ein Rohr mit der Anordnung in gleichseitigen Dreiecken wird die folgende Fläche, die vom Außendurchmesser abhängt, benötigt:

$$A_0(d_a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (d_a + s_0)^2$$

Die Anzahl der Rohre ist damit:
$$n(d_a) = \frac{27,28 \cdot \text{m}^2}{\sqrt{3} \cdot (d_a + 0,0079375 \text{ m})^2}$$

Für die Rohre mit 1" Rohrdurchmesser erhält man 28 343, für 1 1/8" 23 628 und für 1 1/4" 20 000 Rohre.

Die durch die Änderung der Systemkennlinie verursachte Volumenstromzunahme kann entweder iterativ mit der Kurve der Pumpenkennlinie oder grafisch aus dem Diagramm bestimmt werden. Dazu wird der geänderte, berechnete Verlauf der Systemkennlinie in das Diagramm eingetragen. Der Schnittpunkt mit der Pumpenkennlinie ergibt den Volumenstrom. Hier wurde mit dem Programm *Origin* der Kurvenverlauf in das Diagramm eingetragen. Nachstehend ist ein Ausschnitt dieses Diagramms mit dem uns interessierenden Bereich.



Für die drei untersuchten Rohrdurchmesser sind die Volumenströme:

1"	406 800 GPM	25,662 m ³ /s
1 1/8"	428 500 GPM	27,031 m ³ /s
1 1/4"	443 900 GPM	28,002 m ³ /s

Mit dem so ermittelten Volumenstrom erhalten wir für das 1"-Rohr folgende Kühlwasseraustrittstemperatur:

$$\vartheta_1'' = \vartheta_1' + \frac{\dot{Q}_{tot}}{\dot{V}_0 \cdot \rho_1 \cdot c_{p1}} = 35 \text{ °C} + \frac{3 \cdot 733 \cdot 10^6 \cdot \text{W} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{25,662 \text{ m}^3 \cdot 990,2 \cdot \text{kg} \cdot 4174 \cdot \text{J}} = 55,73 \text{ °C}$$

Damit liegt die Kühlwassertemperatur 1,9 K unter der Sättigungstemperatur, was aber noch zu wenig ist.

Die Temperatur für die Rohre mit 1 1/8" Durchmesser beträgt 54,68 °C, für die 1 1/4"-Rohre 54,00 °C. Bei der letzten Variante ist die Kühlwasseraustrittstemperatur 2,5 K tiefer als die Sättigungstemperatur. Damit kann wahrscheinlich ein Kondensator ausgelegt werden.

Mit den Beziehungen aus Kapitel 3 wird zunächst der Wärmeübergang in den Rohren bestimmt. In den Rohren beträgt die Geschwindigkeit:

$$c = \frac{4 \cdot \dot{V}}{n \cdot \pi \cdot d_i^2} = \frac{4 \cdot 28,002 \cdot \text{m}^3 / \text{s}}{20\,000 \cdot \pi \cdot 0,03035^2 \cdot \text{m}^2} = 1,935 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die *Reynoldszahl* berechnet sich zu:

$$Re_{d_i} = c \cdot d_i / \nu = 1,935 \cdot 0,03035 / 0,6 \cdot 10^{-6} = 97\,897$$

Die für die Berechnung der *Nußeltzahl* notwendige Reibungszahl ist:

$$\xi = [1,8 \cdot \lg(Re_{d_i}) - 1,5]^{-2} = 0,0180$$

Für die *Nußeltzahl* erhalten wir:

$$Nu_{d_i} = \frac{(\xi/8) \cdot Re_{d_i} \cdot Pr_i}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi/8} \cdot (Pr_i^{2/3} - 1)} = \frac{(0,018/8) \cdot 97\,897 \cdot 3,946}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{0,018/8} \cdot (3,946^{2/3} - 1)} = 454,2$$

Die Wärmeübergangszahl ist:

$$\alpha_i = Nu_{d_i} \cdot \lambda_1 / d_i = 9\,530,7 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Der für die Berechnung der Wärmedurchgangszahlen notwendige Wärmewiderstand, der in den Rohren und in der Rohrwand entsteht, wird hier bestimmt.

$$R_i = \frac{d_a}{d_i \cdot \alpha_i} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln\left(\frac{d_a}{d_i}\right) = \frac{31,75}{30,35 \cdot 9\,530,7} + \frac{0,03175}{2 \cdot 15} \cdot \ln\left(\frac{31,75}{30,35}\right) = 0,15749 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{kW}}$$

Bei der Kondensation erfolgt die Berechnung der Wärmeübergangszahl für die drei Kondensatoren getrennt. Da die Sättigungstemperatur zunächst unbekannt ist, muss sie zur Bestimmung der Stoffwerte angenommen und iterativ ermittelt werden.

Kondensator A:

Für die Sättigungstemperatur wird angenommen, dass sie 4 K höher als die Temperatur am Austritt des Kondensators A ist. Da für alle drei Kondensatoren der Wärmestrom und die Stoffwerte des Kühlwassers als gleich vorgegeben wurden, sind die Temperaturänderungen in den einzelnen Kondensatoren auch gleich 6,33 K, d.h., die Austrittstemperatur ist 41,33 °C. Die Sättigungstemperatur wird also mit 45,33 °C angenommen. Im Kondensator A ist der Druck damit 97,60 mbar. Die mittlere Temperatur des Kondensats beträgt schätzungsweise 43 °C. Aus den Dampftafeln erhalten wir folgende Werte:

$$\rho_l = 991 \text{ kg/m}^3, \rho_g = 0,0666 \text{ kg/m}^3, \eta_l = 617,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}, \nu_l = 0,623 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \lambda_l = 0,6347 \text{ W/(m K)}, r = 2\,393,2 \text{ kJ/kg}.$$

Die Berieselungsdichte kann mit Gl. (5.28) bestimmt werden.

$$\Gamma = \frac{\dot{Q}}{r \cdot n \cdot l_A} = \frac{733\,000 \cdot \text{kW} \cdot \text{kg}}{2393,2 \cdot \text{kJ} \cdot 20\,000 \cdot 10,668 \cdot \text{m}} = 1,436 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

Reynoldszahl: $Re_l = \Gamma / \eta_l = 1,436 \cdot 10^{-3} / 0,6178 \cdot 10^{-3} = 2,325$

Damit kann die *Nußeltzahl* bestimmt werden:

$$Nu_L = 0,959 \cdot \left(\frac{1 - \rho_g / \rho_l}{Re_l} \right)^{1/3} = 0,724$$

Die für die *Nußeltzahl* charakteristische Länge ist:

$$L = \sqrt[3]{v_l^2 / g} = \sqrt[3]{(0,623 \cdot 10^{-6})^2 / 9,806} = 3,408 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Die Wärmeübergangszahl ist damit:

$$\alpha = Nu_L \cdot \lambda_l / L = 0,724 \cdot 0,6374 / 3,408 \cdot 10^{-5} = 13\,483 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Jetzt können die Wärmedurchgangszahl, die mittlere Temperaturdifferenz und daraus im Kondensator A die Sättigungstemperatur des Dampfes ermittelt werden.

$$k = \left(\frac{1}{\alpha} + R_l \right)^{-1} = \left(\frac{1}{13\,483} + 0,1575 \cdot 10^{-6} \right)^{-1} = 4\,317 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$\Delta \vartheta_m = \frac{\dot{Q}}{k \cdot n \cdot \pi \cdot d_a \cdot l_a} = \frac{733 \cdot \text{MW} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{4\,317 \cdot \text{W} \cdot 20\,000 \cdot \pi \cdot 0,03175 \cdot \text{m} \cdot 10,668 \cdot \text{m}} = 7,979 \text{ K}$$

$$\Delta \vartheta_m = \frac{\vartheta'_A - \vartheta''_A}{\ln \left(\frac{\vartheta_{sA} - \vartheta'_A}{\vartheta_{sA} - \vartheta''_A} \right)} = 7,979 \text{ K} \quad \frac{\vartheta_{sA} - \vartheta'_A}{\vartheta_{sA} - \vartheta''_A} = \Theta = \exp \left(\frac{\vartheta'_A - \vartheta''_A}{\Delta \vartheta_m} \right) = 2,212$$

$$\vartheta_{sA} = \frac{\vartheta'_A - \vartheta''_A \cdot \Theta}{1 - \Theta} = \frac{35^\circ\text{C} - 2,212 \cdot 41,41^\circ\text{C}}{1 - 2,212} = 46,56^\circ\text{C}$$

Die berechnete Sättigungstemperatur ist um 1,2 K größer als der angenommene Wert. Mit den gerechneten Werten erhält man für die mittlere Temperatur des Kondensats:

$$\vartheta_m = \vartheta_{sA} - 0,5 \cdot (\vartheta_{WA} - \vartheta_{sA}) = \vartheta_{sA} - 0,5 \cdot \Delta \vartheta_m \cdot k / \alpha = 45,28^\circ\text{C}$$

Der Druck im Kondensator ist 103,91 mbar. Die Stoffwerte des Kondensats sind: $\rho_l = 990,1 \text{ kg}/\text{m}^3$, $\rho_g = 0,0707 \text{ kg}/\text{m}^3$, $\eta_l = 593,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$, $r = 2\,390,2 \text{ kJ}/\text{kg}$, $v_l = 0,599 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\lambda_l = 0,6377 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$.

Mit diesen Stoffwerten erhält man einen Sättigungsdruck von **103,70 mbar** und die Sättigungstemperatur von **46,52 °C**, welche nur um 0,04 K vom zuvor berechneten Wert abweicht. Damit kann die Iteration abgeschlossen werden.

Kondensator B:

Die Berechnung läuft wie bei Kondensator A ab. Hier werden nur noch die Stoffwerte und Ergebnisse angegeben.

$$\rho_l = 987,9 \text{ kg/m}^3, \rho_g = 0,0889 \text{ kg/m}^3, \eta_l = 545,0 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}, r = 2378,5 \text{ kJ/kg}, \\ v_l = 0,552 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}, \lambda_l = 0,6438 \text{ W/(m K)}.$$

Die Sättigungstemperatur beträgt jetzt **51,14 °C** und der Druck **130,67 mbar**.

Kondensator C:

Analog erhalten wir hier:

$$\rho_l = 985,6 \text{ kg/m}^3, \rho_g = 0,1115 \text{ kg/m}^3, \eta_l = 502,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m s)}, r = 2366,4 \text{ kJ/kg}, \\ v_l = 0,510 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}, \lambda_l = 0,6494 \text{ W/(m K)}.$$

Die Sättigungstemperatur beträgt **56,44 °C**, der Druck ist **168,80 mbar**.

Der Druck von 168,8 mbar entspricht 4,985 inHg und liegt somit unterhalb der geforderten 5 inHg.

Diskussion

Dieses Beispiel demonstriert, dass die Berechnung und Auslegung von Wärmeübertragern nicht nur Kenntnisse der Wärmeübertragung benötigt. Hier wurden zur Berechnung der Druckverluste und für die Interpretation der Pumpenkennlinie auch Kenntnisse der Fluidmechanik und Verfahrenstechnik verlangt.

Gemäß Aufgabenstellung blieben in dieser Berechnung der Einfluss der Rohrlänge und der Einfluss der Richtung des Wärmestromes unberücksichtigt. Diese beiden Größen hätten etwa eine 3 bis 5 % höhere Wärmeübergangszahl geliefert. Der Druckverlust des Dampfes im Bündel wurde nicht berücksichtigt, was etwa die gleiche Verminderung bewirkt hätte. Bei solch großen Apparaten ist eine genaue Berechnung notwendig.

Die hier behandelten Kondensatoren lieferte die Firma Brown Boveri & Cie, Schweiz. Je die Hälfte der einzelnen Kondensatoren wurde in Modulen in einer Fabrik vorgefertigt, auf die Baustelle transportiert, die alten Bündel innerhalb von vier Wochen entfernt und die neuen Module installiert. Die Kosten des Projektes betrugen 18 Mio. US\$. Die Garantiebedingungen lauteten, dass beim Überschreiten des garantierten Druckes um mehr als 0,3 inHg pro 0,1 inHg 1,8 Mio. US\$ Konventionalstrafe gezahlt werden muss. Das bedeutet: Eine zu klein berechnete Fläche, die einen größeren Druck verursacht, wird bestraft. Eine zu große Fläche bedeutet größere Kosten und ist damit nicht konkurrenzfähig. Zur exakten Berechnung großer Kondensatoren besitzen die Hersteller entsprechend genaue Berechnungsunterlagen. Beim oben angeführten Kondensator wurden die Garantiebedingungen erfüllt.

6 **Verdampfung**

Für die Berechnung von Apparaten, in denen Dampf erzeugt wird, benötigt man die in diesem Kapitel behandelten Grundlagen der Wärmeübertragung bei Verdampfung. Dampferzeuger kommen in Wärmepumpen, Kälteanlagen, Dampfkesseln, Destillier- und Rektifizierkolonnen vor. Verdampfung kann in ruhenden oder strömenden Fluiden auftreten.

Verdampfung tritt auf, wenn man eine Flüssigkeit auf Siedetemperatur ϑ_s erhitzt und ihr dann weiter Wärme zuführt. Wird einer Flüssigkeit, die Siedetemperatur hat, ein kleiner Wärmestrom zugeführt, entsteht an der Oberfläche eine Dampfproduktion, deren Massenstrom vom zugeführten Wärmestrom bestimmt wird. Erhöht man den Wärmestrom, entstehen an der Oberfläche der Heizfläche Dampfblasen, man spricht vom *Blasensieden*.

Bei der Kondensation fängt der Dampf, egal, ob überhitzt, gesättigt oder nass, immer dann an zu kondensieren, wenn er mit einem Stoff in Berührung kommt, dessen Temperatur tiefer als die Sättigungstemperatur des Dampfes ist. Bei der Verdampfung stellte man fest, dass an einer Heizfläche, deren Temperatur größer als die Sättigungstemperatur ist, zunächst keine Dampfbildung stattfindet. Bei unterkühlten Flüssigkeiten kann die Wärme durch Konvektion abgeführt werden. Eine Flüssigkeit kann sogar überhitzt sein, ohne dass es zur Verdampfung kommt. In extremen Fällen können sehr hohe Überhitzungen, auch *Siedeverzug* genannt, von über 100 K auftreten, wobei es dann zu einer plötzlichen, explosionsartigen Dampfproduktion kommen kann. Ursache hierfür ist die Tatsache, dass an einer Wand, deren Temperatur höher als die Sättigungstemperatur der Flüssigkeit ist, bei der Verdampfung Dampfblasen entstehen. Wegen der Oberflächenspannung ist der Druck und damit die Sättigungstemperatur des Dampfes in den Blasen höher als in der Flüssigkeit. Die Blase kondensiert wieder. Damit Blasen existieren können, muss die Flüssigkeit überhitzt sein. Je nach *Übertemperatur* der Wand $\Delta\vartheta = \vartheta_w - \vartheta_s$ und Geschwindigkeit der Flüssigkeit entstehen verschiedene Formen der Wärmeübertragung.

Flüssigkeiten können überhitzt werden, auch wenn dabei keine Verdampfung stattfindet. Man spricht dann von einem Siedeverzug.

6.1 **Behältersieden**

Führt man einer ruhenden Flüssigkeit in einem Behälter (z.B. Kochtopf mit Wasser) Wärme zu, so dass an der beheizten Fläche unter Blasenbildung in der Flüssigkeit

Dampf produziert wird, spricht man vom *Behältersieden*. In Bild 6.1 sind die Wärmeübergangszahl und Wärmestromdichte beim Behältersieden von Wasser über der Übertemperatur der Wand aufgetragen. Bei kleinen Übertemperaturen bis zum Punkt B wird die Wärme durch freie Konvektion übertragen. An der Wand bilden sich noch keine Blasen.

Mit zunehmender Übertemperatur setzt am Punkt B die Bildung von Blasen ein. In diesem Bereich spricht man vom Blasensieden. An der Wand des Behälters entstehen in kleinen Oberflächenvertiefungen an immer gleicher Stelle, der so genannten Keimstelle, Blasen. Mit steigender Übertemperatur nimmt die Intensität der Blasenbildung zu und es entstehen immer mehr Stellen, an denen sich Blasen bilden. Diese Blasenbildung verwirbelt die Flüssigkeit, die Konvektion wird intensiviert, die Blasen steigen nach oben. Wie in Bild 6.1 zu sehen ist, steigen Wärmestromdichte und Wärmeübergangszahl mit der Übertemperatur der Wand sehr stark an.

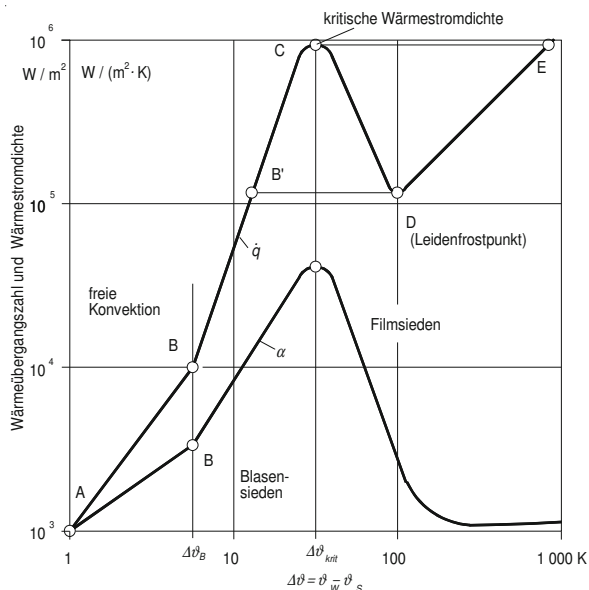


Bild 6.1: Wärmeübertragung bei der Verdampfung des Wassers bei 1 bar Druck

Schließlich entstehen an der Oberfläche so viel Blasen, dass sie einen zusammenhängenden Dampffilm bilden (*Leidenfrost*-Phänomen - ab Punkt C). Man spricht hier vom *Filmsieden*. Die Wärmeübertragung erfolgt im Wesentlichen durch Strahlung und Wärmeleitung im Dampffilm. Technische Dampferzeuger werden durch Verbrennung, nukleare Spaltung, elektrischen Strom etc. beheizt. Dabei ist die Wärmestromdichte konstant. Da die Wärmeübergangszahlen im Dampffilm wesentlich kleiner als beim Blasensieden sind, steigt die Wandtemperatur sprunghaft an, damit der entsprechende Wärmestrom übertragen werden kann. Vom Punkt C erfolgt ein spontaner Sprung zum Punkt E. Diese Temperatursprünge sind sehr groß. Am Beispiel von Wasser in Bild 6.1 beträgt die Änderung der Übertemperatur 770 K. Die Wandtemperatur erhöht sich sprunghaft von 100 °C auf 900 °C. In tech-

nischen Verdampfern hat man in der Regel höhere Drücke und damit auch höhere Sättigungstemperaturen. Die meisten Werkstoffe können eine so hohe Änderung der Temperatur nicht aushalten, es kommt zur Zerstörung des Werkstoffes, d.h., der Übergang vom Blasen- zum Filmsieden sollte auf alle Fälle vermieden werden. Bei der Auslegung der Apparate und der Regelung der Verdampfungsanlagen ist darauf zu achten, dass die *kritische Wärmestromdichte* nicht erreicht wird.

Beim Senken der Wärmestromdichte kommt man zunächst zum Punkt D, wo eine sprunghafte Verringerung der Wandtemperatur stattfindet und es wieder zum Blasensieden am Punkt B' kommt. Die Zustände zwischen den Punkten C und D sind praktisch nicht bzw. nur unter Laborbedingungen mit einigen speziellen Stoffen erreichbar.

Die Wärmeübertragung beim Filmsieden ist bei technischen Vorgängen nur selten von Bedeutung, sie wird hier nicht behandelt.

Bei der Verdampfung ist der produzierte Massenstrom des Dampfes von Wichtigkeit. Er berechnet sich als:

$$\dot{m}_g = \dot{Q} / r \quad (6.1)$$

Diese Beziehung ist bei allen Verdampfungsvorgängen gültig.

6.1.1 Sieden bei freier Konvektion

Solange in ruhenden, unterkühlten Flüssigkeiten an der Heizfläche keine Blasen entstehen, berechnet man die Wärmeübergangs- bzw. *Nußeltzahlen* wie in Kapitel 4 beschrieben. Zur Ermittlung der Wärmeübergangszahlen für horizontale, ebene Heizflächen und horizontale Rohre werden etwas vereinfachte Formeln vorgeschlagen [6.1].

Die *Nußeltzahl* ist:

$$Nu_L = 0,15 \cdot (Gr_L \cdot Pr)^{1/3} \quad (6.2)$$

Die für die *Grashof*- bzw. *Nußeltzahl* charakteristische Länge L wird folgendermaßen gebildet: Rechteckfläche $L = a \cdot b/2$ ($a + b$), Kreisfläche $L = d/4$, horizontaler Zylinder $L = d$.

6.1.2 Blasensieden

Wie schon erwähnt, bilden sich die Blasen an besonderen Stellen (Keimstellen). Die Anzahl der Keimstellen erhöht sich mit dem zugeführten Wärmestrom. Die Blasen wachsen aus mikroskopischen Vertiefungen (Rauigkeiten) der Oberfläche. Der Wärmestrom geht zunächst in die Flüssigkeitsgrenzschicht und von dort in die Blase. Der Druck p_g in den Blasen ist auf Grund der Oberflächenspannung größer als der Druck p_l in der Flüssigkeit.

Bild 6.2 zeigt die Entstehung einer Dampfblase.

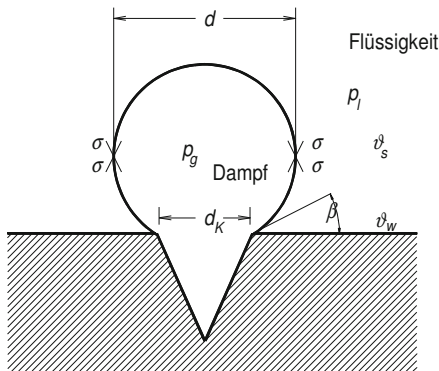


Bild 6.2: Entstehung einer Dampfblase

Der Überdruck in der Blase steht im Gleichgewicht mit der von der Oberflächenspannung σ erzeugten Kraft.

$$p_g - p_l = 4 \cdot \sigma / d \quad (6.3)$$

Damit eine Blase mit dem Durchmesser d entstehen kann, muss eine minimale Übertemperatur vorhanden sein. Der Durchmesser der Keimstelle d_K ist der kleinste Blasendurchmesser. Nach der *Laplace-Kelvin*-Ableitung gilt für die minimale Übertemperatur:

$$\frac{p_g - p_l}{T_g - T_s} = \frac{\rho_g \cdot r}{T_s} \quad (6.4)$$

Mit Gl. (6.3) erhält man für die notwendige Übertemperatur:

$$\vartheta_w - \vartheta_s = \frac{4 \cdot \sigma \cdot T_s}{d_K \cdot \rho_g \cdot r} \quad (6.5)$$

Erreicht eine Blase eine bestimmte Größe, löst sie sich von der Oberfläche und steigt nach oben. Sie transportiert von der Heizfläche Wärme in Form von Verdampfungswärme weg. Im Nachlauf der Blase erfolgt eine Driftströmung, die die konvektive Wärmeübertragung vergrößert. Gl. (6.5) zeigt auch, dass mit zunehmender Übertemperatur die mögliche Blasengröße und damit die Anzahl geeigneter Keimstellen wachsen.

Zur Berechnung der Wärmeübergangskoeffizienten lassen sich aus der Betrachtung der Entstehung und Ablösung der Blasen physikalische Modelle aufstellen. Aus den auf die Blase wirkenden Kräften kann ein Modell für den Abreißdurchmesser d_A der Blase erstellt werden. Hat man eine Vielzahl von Keimstellen, ist gemäß Häufigkeitsverteilung der Abreißdurchmesser der Blase der wahrscheinlichste Durchmesser. Anhand des Modells und durch Experimente hat man für den Blasenabreißdurchmesser folgende Beziehung gefunden:

$$d_A = 0,0149 \cdot \beta^0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \sigma}{g \cdot (\rho_l - \rho_g)}} \quad (6.6)$$

Dabei ist β^0 der *Randwinkel der Blase*. Er hat für verschiedene Stoffe unterschiedliche Werte. Nachstehend die Randwinkel einiger wichtiger Stoffe:

Wasser:	$\beta^0 = 45^\circ$
Kältemittel:	$\beta^0 = 35^\circ$
Benzol:	$\beta^0 = 40^\circ$

Die Wärmeübergangszahl beim Blasensieden ist:

$$\alpha_B = \frac{\dot{q}}{\vartheta_w - \vartheta_s} = \frac{\dot{q}}{\Delta \vartheta} \quad (6.7)$$

Die *Nußeltzahl* beim Blasensieden wird mit dem Abreißdurchmesser der Blase gebildet.

$$Nu_{d_A} = \frac{\alpha_B \cdot d_A}{\lambda_l} \quad (6.8)$$

Die zu berechnenden Wärmeübergangszahlen sind auf Vergleichswerte, die entweder experimentell ermittelt oder mit empirischen Gleichungen berechnet werden, bezogen.

Für die Wärmeübergangszahl beim Blasensieden wurde folgende Beziehung gefunden [6.2]:

$$\alpha_B = \alpha_0 \cdot f(p^*) \cdot \left(\frac{\lambda_l \cdot \rho_l \cdot c_{pl}}{\lambda_{l0} \cdot \rho_{l0} \cdot c_{pl0}} \right)^{0,25} \cdot \left(\frac{R_a}{R_{a0}} \right)^{0,133} \cdot \left(\frac{\dot{q}}{\dot{q}_0} \right)^{0,9-0,3 \cdot p^*} \quad (6.9)$$

Index 0 wird für die Vergleichsgrößen verwendet, deren Stoffwerte man bei Referenzdruck $p^* = p/p_{krit} = 0,1$ bestimmt. Die Druckkorrekturfunktion $f(p^*)$ ermittelt man mit Gl. (6.11) und die Wärmübergangszahl α_0 wird mit Gl. (6.12) berechnet. R_a ist der arithmetische *Mittenrauwert* nach DIN 4762/01.89, der den Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit bezüglich der Anzahl der Keimstellen berücksichtigt. Er ersetzt die früher verwendete *Glättungstiefe* R_p nach DIN 4672/08.60. Zwischen den beiden Werten besteht folgende Beziehung:

$$R_a = 0,4 \cdot R_p \quad (6.10)$$

Der früher verwendete Bezugswert $R_{p0} = 1 \mu\text{m}$ entspricht damit $R_{a0} = 0,4 \mu\text{m}$. Funktion $f(p^*)$ gibt die Abhängigkeit vom Druck, bezogen auf $p^* = 0,1$, an.

$$f(p^*) = \begin{cases} 1,73 \cdot p^{*0,27} + \left(6,1 + \frac{0,68}{1-p^*}\right) \cdot p^{*2} & \text{für Wasser} \\ f(p^*) = 1,2 \cdot p^{*0,27} + \left(2,5 + \frac{1}{1-p^*}\right) \cdot p^* & \text{für andere reine Stoffe} \end{cases} \quad (6.11)$$

Stephan und Preußer [6.2] fanden anhand zahlreicher Messungen bei einem Druck von $p = 0,03 \cdot p_{\text{krit}}$, einer Wärmestromdichte von $q_0 = 20\,000 \text{ W/m}^2$ und einem arithmetischen Mittenrauwert von $R_a = 0,4 \text{ } \mu\text{m}$ für die Vergleichs-*Nu*ßeltzahl Nu_{dA0} folgende Beziehung (Achtung, mit Stoffwerten bei $p^* = 0,03$ rechnen!):

$$Nu_{dA0} = 0,1 \cdot \left(\frac{\dot{q}_0 \cdot d_A}{\lambda_l \cdot T_s}\right)^{0,674} \cdot \left(\frac{\rho_g}{\rho_l}\right)^{0,156} \cdot \left(\frac{r \cdot d_A^2}{a_l^2}\right)^{0,371} \cdot \left(\frac{a_l^2 \cdot \rho_l}{\sigma \cdot d_A}\right)^{0,35} \cdot Pr_l^{-0,16} \quad (6.12)$$

Dabei ist $a_l = \lambda_l / (\rho_l c_{pl})$ die Temperaturleitfähigkeit der Flüssigkeit.

$$\alpha_0 = \frac{f(0,1)}{f(0,03)} \cdot Nu_{dA0} \cdot \frac{\lambda_l}{d_A} = \frac{1}{f(0,03)} \cdot Nu_{dA0} \cdot \frac{\lambda_l}{d_A} \quad (6.13)$$

Für die Vergleichswärmeübergangszahl α_0 liefert der mit den Gln. (6.12) und (6.13) ermittelte Wert für Wasser bei $p^* = 0,1$ den Wert von $6\,398 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. Der experimentelle Wert beträgt $5\,600 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. Bei einigen Kältemitteln ist die Übereinstimmung besser.

In Tabelle 6.1 sind die Bezugswerte für Wasser, Frigen R134a und Propan bei $p^* = 0,1$ angegeben. Weitere Werte findet man im VDI-Wärmeatlas [1.7].

Tabelle 6.1: Bezugswerte für bei $p^* = 0,1$

	p_{krit} bar	λ_{l0} W/(m K)	ρ_{l0} kg/m ³	c_{pl0} J/(kg K)	$\lambda_{l0} \cdot \rho_{l0} \cdot c_{pl0}$ kg ² /(s ⁵ K ²)	α_0 W/(m ² K)	$\alpha_{0\text{exp}}$
Wasser	220,64	0,650	843,5	4594	$2,519 \cdot 10^6$	6 398	5 600
R134a	40,60	0,088	1263,1	1368	$0,154 \cdot 10^6$	3 635	4 500
Propan	42,40	0,108	533,5	2476	$0,143 \cdot 10^6$	3 975	4 000

Die Übertemperatur zu Beginn des Blasensiedens in Bild 6.1 ermittelt man, indem der Wert bestimmt wird, bei dem die Wärmeübergangszahl beim Blasensieden größer als die bei freier Konvektion ist.

Bild 6.3 zeigt den Übergang von freier Konvektion zum Blasensieden im Wasser beim Druck von 6,62 bar an einem waagerechten Rohr mit 15 mm Durchmesser.

Aus dem Diagramm ist ersichtlich, dass freie Konvektion bei etwa 1,5 K Übertemperatur in Blasensieden übergeht.

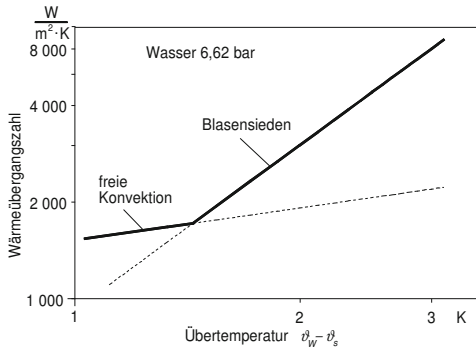


Bild 6.3: Übergang von freier Konvektion zum Blasensieden

BEISPIEL 6.1: Wassersieden im Kochtopf

Auf einer Heizplatte mit 2,5 kW Heizleistung wird Wasser in einem Kochtopf mit dem Durchmesser von 25 cm zum Sieden gebracht. Der Druck beträgt 0,98 bar. Die Rauigkeit des Kochtopfes ist $0,5 \mu\text{m}$.

Die Stoffwerte des Wassers sind bei $p = 0,03 \cdot p_{\text{krit}} = 6,6192 \text{ bar}$:

$\rho_{l0} = 904,8 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{g0} = 3,477 \text{ kg/m}^3$, $c_{p0} = 4,346 \text{ kJ/(kg K)}$, $\sigma_0 = 0,046 \text{ N/m}$,
 $Pr_{l0} = 1,07$, $\lambda_{l0} = 0,679 \text{ W/(m K)}$, $\nu_{l0} = 0,185 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $T_s = 435,85 \text{ K}$, $\beta^\circ = 45^\circ$,
 $r = 2073 \text{ kJ/kg}$, $a_l = 1,727 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

Stoffwerte bei $p^* = 0,1$:

$\rho_l = 843,5 \text{ kg/m}^3$, $\lambda_l = 0,650 \text{ W/(m K)}$, $c_p = 4,594 \text{ kJ/(kg K)}$

Stoffwerte bei $p^* = 0,004444$:

$\rho_l = 959,0 \text{ kg/m}^3$, $\lambda_l = 0,678 \text{ W/(m K)}$, $c_p = 4,215 \text{ kJ/(kg K)}$.

Bestimmen Sie die Wärmeübergangszahl und Übertemperatur.

Lösung

Annahme

- Die Wandtemperatur ist konstant.

Analyse

Der Referenzwert für die Wärmeübergangszahl kann aus Tabelle 6.1 entnommen werden. Zur Kontrolle bestimmen wir die Wärmeübergangszahl.

Bei $p^* = 0,03$ ist der Blasenabreißdurchmesser d_{A0} nach Gl. (6.6):

$$d_{A0} = 0,0149 \cdot \beta^0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \sigma}{g \cdot (\rho_l - \rho_g)}} =$$

$$= 0,0149 \cdot 45 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0,046 \cdot \text{N/m}}{9,806 \cdot \text{m/s}^2 \cdot (904,8 - 3,477) \cdot \text{kg/m}^3}} = 2,163 \text{ mm}$$

Die Berechnung der *Nußeltzahl* Nu_{dA0} , die zur Bestimmung von α_0 benötigt wird, erfolgt mit Gl. (6.12).

$$Nu_{dA0} = 0,1 \cdot \left(\frac{\dot{q}_0 \cdot d_{A0}}{\lambda_{l0} \cdot T_{s0}} \right)^{0,674} \cdot \left(\frac{\rho_{g0}}{\rho_{l0}} \right)^{0,156} \cdot \left(\frac{r \cdot d_{A0}^2}{a_{l0}^2} \right)^{0,371} \cdot \left(\frac{a_{l0}^2 \cdot \rho_{l0}}{\sigma_0 \cdot d_{A0}} \right)^{0,35} \cdot Pr_{l0}^{-0,16} = 13,85$$

In die Gleichung wurden die Stoffwerte bei 6,6192 bar eingesetzt. Die Wärmestromdichte ist 20 000 W/m².

Die Funktion für die Korrektur des Druckes erfolgt mit Gl. (6.11).

$$f(0,03) = 1,73 \cdot 0,03^{0,27} + \left(6,1 + \frac{0,68}{1 - 0,03} \right) \cdot 0,03^2 = 0,677$$

Für die Wärmeübergangszahl α_0 erhalten wir:

$$\alpha_0 = \frac{Nu_{dA0} \cdot \lambda_{l0}}{f(0,03) \cdot d_{A0}} = \frac{13,85 \cdot 0,679 \cdot \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})}{0,677 \cdot 0,002163 \cdot \text{m}} = 6398 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Das Ergebnis stimmt mit dem Wert in Tabelle 6.1 überein. Die Wärmeübergangszahl α_B wird mit Gl. (6.9) bestimmt. Dazu muss zunächst die Wärmestromdichte berechnet werden:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{4 \cdot \dot{Q}}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 2\,500 \cdot \text{W}}{\pi \cdot 0,25^2 \cdot \text{m}^2} = 50\,930 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Für die Stoffwerte erhalten wir: $\lambda_{l0} \cdot \rho_{l0} \cdot c_{pl0} = 0,650 \cdot 843,5 \cdot 4\,594 = 2,519 \cdot 10^6$
 $\lambda_l \cdot \rho_l \cdot c_{pl} = 0,679 \cdot 958,6 \cdot 4\,216 = 2,744 \cdot 10^6$

Die Druckkorrekturfunktion ist:

$$f(0,00444) = 1,735 \cdot 0,00444^{0,27} + \left(6,1 + \frac{0,68}{1 - 0,00444} \right) \cdot 0,00444^2 = 0,402$$

Damit wird die Wärmeübergangszahl nach Gl. (6.12):

$$\alpha_B = \alpha_0 \cdot f(p^*) \cdot \left(\frac{\lambda_l \cdot \rho_l \cdot c_{pl}}{\lambda_{l0} \cdot \rho_{l0} \cdot c_{pl0}} \right)^{0.25} \cdot \left(\frac{R_a}{R_{a0}} \right)^{0.133} \cdot \left(\frac{\dot{q}}{\dot{q}_0} \right)^{0.9-0.3 \cdot p^*} = 6\,271 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Die Übertemperatur kann aus der Wärmestromdichte bestimmt werden:

$$\Delta\vartheta = \vartheta_w - \vartheta_s = \frac{\dot{q}}{\alpha_B} = \frac{50\,930 \cdot \text{W/m}^2}{6\,271 \cdot \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})} = 8,12 \text{ K}$$

Diskussion

Um die zugeführte Wärmestromdichte abführen zu können, entsteht beim Kochen des Wassers eine Übertemperatur von 13,4 K. Mit den etwas kleineren, experimentell ermittelten Bezugswerten wird die Wärmeübergangszahl ca. 14 % kleiner, die Übertemperatur erhöht sich auf etwa 10 K.

BEISPIEL 6.2: Berechnung eines elektrisch beheizten Verdampfers

Mit einer elektrischen Heizung von 6 kW Leistung soll bei 2 bar Druck Dampf erzeugt werden. Die Heizung hat einen Stahlmantel von 12 mm Durchmesser, sie ist 1 m lang. Die Rauigkeit des Heizstabes beträgt 1,5 μm .

Die Bezugswerte bei $p^* = 0,03$ können aus Aufgabe 6.1 entnommen werden.

Stoffwerte bei $p^* = 0,00906$: $r = 2\,201,6 \text{ kJ/kg}$, $\rho_l = 942,9 \text{ kg/m}^3$,

$\lambda_l = 0,683 \text{ W/(m K)}$, $c_p = 4,247 \text{ kJ/(kg K)}$.

Bestimmen Sie den Dampfmassenstrom, die Wärmeübergangszahl und Übertemperatur.

Lösung

Annahmen

- Die Wandtemperatur ist konstant.
- Es wird angenommen, dass dem Verdampfer immer Wasser mit Siedetemperatur zugeführt wird.

Analyse

Den Dampfmassenstrom bestimmen wir mit Gl. (6.1).

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}}{r} = \frac{6 \cdot \text{kW}}{2\,201,6 \cdot \text{kJ/kg}} = 0,00273 \text{ kg/s} = 9,81 \text{ kg/h}$$

Der Referenzwert für die Wärmeübergangszahl ist jener aus Aufgabe 6.1.

Für die Stoffwerte erhalten wir: $\lambda_l \cdot \rho_l \cdot c_{pl} = 0,683 \cdot 942,9 \cdot 4\,247 = 2,735 \cdot 10^6$

Die Druckkorrekturfunktion ist: $f(0,00906) = 0,486$

Die Wärmestromdichte beträgt:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{\pi \cdot d \cdot l} = \frac{6 \cdot \text{kW}}{\pi \cdot 0,012 \cdot \text{m} \cdot 1 \cdot \text{m}} = 159\,155 \text{ W/m}^2$$

$$\alpha_B = f(p^*) \cdot \left(\frac{\lambda_l \cdot \rho_l \cdot c_{pl}}{\lambda_{l0} \cdot \rho_{l0} \cdot c_{pl0}} \right)^{0,25} \cdot \left(\frac{R_a}{R_{a0}} \right)^{0,133} \cdot \left(\frac{\dot{q}}{\dot{q}_0} \right)^{0,9-0,3 \cdot p^*} \cdot \alpha_0 =$$

$$= 0,486 \cdot \left(\frac{2,735}{2,519} \right)^{0,25} \cdot \left(\frac{1,5}{0,4} \right)^{0,133} \cdot \left(\frac{159\,155}{20\,000} \right)^{0,9027} \cdot 6\,398 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} = 24\,428 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$\Delta v = v_w - v_s = \frac{\dot{q}}{\alpha_B} = \frac{159\,155 \cdot \text{W/m}^2}{24\,428 \cdot \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})} = 6,52 \text{ K}$$

Diskussion

Durch die hohe Wärmestromdichte entsteht eine kräftige Blasenbildung mit sehr hoher Wärmeübergangszahl, somit ist die Übertemperatur nicht sehr groß.

BEISPIEL 6.3: Auslegung eines elektrisch beheizten Verdampfers

Zum Anfahren eines Dampfkraftwerkes wird das Wasser im Speisewasserbehälter so aufgeheizt, dass der Druck auf 10 bar ansteigt. Anschließend muss bei diesem Druck für die Hilfsdampfschiene 1,5 kg/s Dampf produziert werden. Die Beheizung erfolgt mit 6 elektrischen Heizstäben von je 100 mm Durchmesser. Die Rauigkeit des Heizstabes ist 3 μm . Die Heizstablänge soll so ausgelegt werden, dass die Dampfproduktion bei 5 K Übertemperatur erfolgt. Die Bezugswerte bei $p^* = 0,03$ können Aufgabe 6.1 entnommen werden.

Stoffwerte bei $p = 10$ bar: $r = 2014,4 \text{ kJ/kg}$, $\rho_l = 887,1 \text{ kg/m}^3$, $\lambda_l = 0,673 \text{ W/(m K)}$, $c_p = 4,405 \text{ kJ/(kg K)}$.

Bestimmen Sie die notwendige Heizleistung und Länge der Heizstäbe.

Lösung

Annahmen

- Die Wandtemperatur ist konstant.
- Es wird angenommen, dass den Heizstäben immer Wasser mit Siedetemperatur zugeführt wird.

Analyse

Die Heizleistung errechnet sich mit Gl. (6.1):

$$\dot{Q} = \dot{m} \cdot r = 1,5 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 2\,014,4 \cdot \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = \mathbf{3,022 \text{ MW}}$$

Pro Heizstab werden also 504 kW Heizleistung benötigt. Für die Stoffwerte erhalten wir: $\lambda_l \cdot \rho_l \cdot c_{pl} = 0,673 \cdot 887,1 \cdot 4\,405 = 2,669 \cdot 10^6$.

Der normierte Druck p^* ist 0,0452. Die Korrekturfunktion für die Dichte errechnet sich als:

$$f(0,0453) = 1,735 \cdot 0,0453^{0,27} + \left(6,1 + \frac{0,68}{1 - 0,0453}\right) \cdot 0,0453^2 = 0,764$$

Da die Heizstablänge unbekannt ist, wird in Gl. (6.9) die Wärmestromdichte durch die Wärmeübergangszahl ersetzt. Zunächst formen wir Gl. (6.9) um.

$$\frac{\alpha_B}{\alpha_0} = f(p^*) \cdot \left(\frac{\lambda_l \cdot \rho_l \cdot c_{pl}}{\lambda_{l0} \cdot \rho_{l0} \cdot c_{pl0}} \right)^{0,25} \cdot \left(\frac{R_a}{R_{a0}} \right)^{0,133} \cdot \left(\frac{\dot{q}}{\dot{q}_0} \right)^{0,9 - 0,3 \cdot p^*} = 1,0229 \cdot \left(\frac{\dot{q}}{\dot{q}_0} \right)^{0,8864}$$

Für die Wärmestromdichte wird $\alpha_B \cdot \Delta\vartheta$ eingesetzt. Nach Umformungen erhält man:

$$\left(\frac{\alpha_B}{\alpha_0} \right)^{0,1 - 0,3 \cdot p^*} = 1,0229 \cdot \left(\frac{\Delta\vartheta}{\Delta\vartheta_0} \right)^{0,8846} \quad \frac{\alpha_B}{\alpha_0} = 1,0229 \cdot \left(\frac{\Delta\vartheta}{\Delta\vartheta_0} \right)^{7,8028}$$

Mit den Vergleichswerten kann die Übertemperatur für die Wärmeübergangszahl und Wärmestromdichte berechnet werden.

$$\Delta\vartheta_0 = \dot{q}_0 / \alpha_0 = \frac{20\,000 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{6\,398 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2} = 3,126 \text{ K}$$

Wärmedurchgangszahl, notwendige Heizfläche und Stablänge können jetzt bestimmt werden.

$$\alpha_B = (\Delta\vartheta / \Delta\vartheta_0)^{7,803} \cdot \alpha_0 = (5 / 3,126)^{7,803} \cdot 6\,398 \cdot \text{W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K}) = 249,935 \text{ kW} / (\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

$$A = \dot{Q} / \dot{q} = \dot{Q} / (\alpha_B \cdot \Delta\vartheta) = 504 \cdot \text{kW} / (249,935 \cdot 5 \cdot \text{kW} / \text{m}^2) = \mathbf{0,403 \text{ m}^2}$$

$$l = A / (\pi \cdot d) = 0,403 \cdot \text{m}^2 / (\pi \cdot 0,1 \cdot \text{m}) = \mathbf{1,283 \text{ m}}$$

Diskussion

Durch die sehr hohe Wärmestromdichte erhöhen sich Blasenproduktion und Wärmeübergangszahl. Die Wärmeübertragung erfolgt bei einer sehr kleinen Übertemperatur von 5 K. Bei einer größeren Heizfläche wird die Wärmestromdichte verringert, was die Verminderung der Wärmeübergangszahlen und die Erhöhung der Übertemperatur bewirkt. Die Wärmeübergangszahl steigt bei diesem Druck fast mit der 8. Potenz der Übertemperatur. Schon eine kleine Verringerung der Übertemperatur hat eine wesentliche Erhöhung der Heizfläche zur Folge. In diesem Beispiel würde man bei einer Übertemperatur von 4 K eine fast 7mal so große Heizfläche von 6,56 m² benötigen. Beim Blasensieden wird die Heizfläche mit abnehmender Temperaturdifferenz extrem stark erhöht.

6.2 Sieden bei erzwungener Konvektion

Die Verdampfung kann in durchströmten Rohren oder angeströmten Körpern (Rohrbündeln) erfolgen. Das eintretende Fluid ist dabei unterkühlte Flüssigkeit, gesättigte Flüssigkeit oder ein Dampf/Flüssigkeitsgemisch. Im Verdampfer wird die Flüssigkeit teilweise oder vollständig verdampft, so dass entweder ein Dampf/Flüssigkeitsgemisch bzw. gesättigter oder überhitzter Dampf den Verdampfer verlassen. Die Wärmeübertragungsvorgänge können bei einphasiger Flüssigkeits- oder Dampfströmung oder bei zweiphasiger Dampfströmung stattfinden [6.3].

In der strömenden, unterkühlten Flüssigkeit erfolgt die Wärmeübertragung zunächst wie in Kapitel 3 beschrieben. Bereits in der unterkühlten Flüssigkeit können Dampfblasen entstehen, die dann in der Flüssigkeit wieder kondensieren. Die Dampfblasen beeinflussen die Wärmeübergangszahlen in der unterkühlten Flüssigkeit. Im weiteren Verlauf der Strömung tritt zunächst Blasensieden auf, bis in der Zweiphasenströmung schließlich der konvektive Wärmeübergang überwiegt.

6.2.1 Unterkühltes Sieden

Für die Wärmeübergangszahlen in der unterkühlten, strömenden Flüssigkeit gilt folgende asymptotische Näherung:

$$\alpha = \sqrt[1,2]{\alpha_k^{1,2} + \alpha_B^{1,2}} \quad (6.14)$$

Dabei ist α_k die Wärmeübergangszahl bei erzwungener Konvektion nach Kapitel 3 und α_B die Wärmeübergangszahl beim Blasensieden nach Gl. (6.8).

Bild 6.4 zeigt die Wärmeübergangszahl bei der Verdampfung unterkühlter Flüssigkeiten mit erzwungener Konvektion.

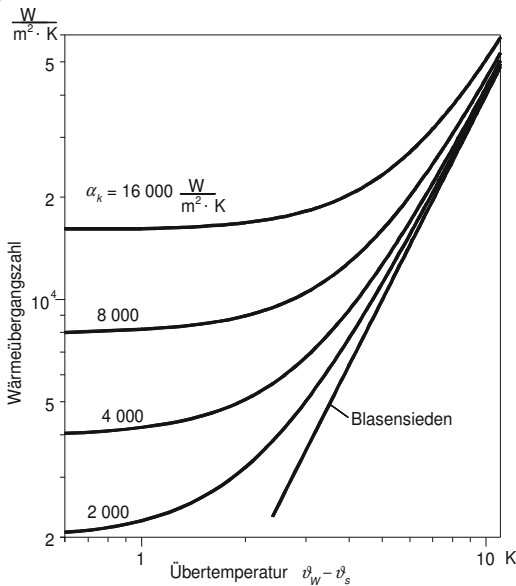


Bild 6.4: Wärmeübergangszahl bei der Verdampfung unterkühlter Flüssigkeiten mit erzwungener Konvektion

6.2.2 Konvektives Strömungssieden

Ist der Wärmewiderstand in der Strömung kleiner als beim Blasensieden, tritt konvektives *Strömungssieden* auf, das auch *stilles Sieden* genannt wird. Durch die intensive Konvektion reicht die Übertemperatur an der Wand nicht mehr aus, um die Keimstellen zu aktivieren und Blasen zu bilden. Die Verdampfung findet an der freien Oberfläche der Flüssigkeit statt. Für horizontale bzw. vertikale Rohre und Kanäle fand man unterschiedliche Beziehungen [6.1, 6.2]. Sie gelten für Dampfgehalte von $x = 0$ bis $x = 1$.

Die lokale, auf die Flüssigkeit bezogene Wärmeübergangszahl ist in vertikalen Rohren:

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_{l0}} = \left\{ (1-x)^{0,01} \cdot \left[(1-x)^{1,5} + 1,9 \cdot x^{0,6} \cdot R^{0,35} \right]^{2,2} + \left[x^{0,01} \cdot \left[\frac{\alpha_{g0}}{\alpha_{l0}} (1 + 8 \cdot (1-x)^{0,7} \cdot R^{0,67}) \right]^{-2} \right]^{-0,5} \right\} \quad (6.15)$$

Dabei ist $R = \rho_l / \rho_g$ das Dichteverhältnis der Flüssigkeit zum Dampf. α_{l0} und α_{g0} sind die Wärmeübergangszahlen der flüssigen bzw. gasförmigen Phase. Sie werden als Wärmeübergangszahl der Phase nach Kapitel 3 berechnet. Dabei wird angenommen, dass die Phasen jeweils allein im Rohr strömen. Die *Reynoldszahlen* sind:

$$Re_l = \frac{c_{0l} \cdot d_h}{\nu_l} = \frac{\dot{m} \cdot d_h}{A \cdot \eta_l} \quad Re_g = \frac{c_{0g} \cdot d_h}{\nu_l} = \frac{\dot{m} \cdot d_h}{A \cdot \eta_g} \quad (6.16)$$

Dabei ist A der Strömungsquerschnitt des Kanals und d_h der hydraulische Durchmesser. Die Berechnung für horizontale Rohre erfolgt ähnlich:

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_{l0}} = \left\{ (1-x)^{0,01} \cdot \left[(1-x)^{1,5} + 1,2 \cdot x^{0,4} \cdot R^{0,37} \right]^{-2,2} + \left[x^{0,01} \cdot \left[\frac{\alpha_{g0}}{\alpha_{l0}} (1+8 \cdot (1-x)^{0,7} \cdot R^{0,67}) \right]^{-2} \right]^{-0,5} \right\} \quad (6.17)$$

Gleichung (6.17) berücksichtigt die Verteilung der Phasen im horizontalen Rohr.

Die angegebenen Beziehungen wurden anhand von Messungen in Rohren kreisförmigen und rechteckigen Querschnitts und in Ringspalten abgeleitet. Bild 6.5 zeigt den Verlauf der Wärmeübergangszahlen bei verschiedenen Dichteverhältnissen als eine Funktion des Dampfgehaltes.

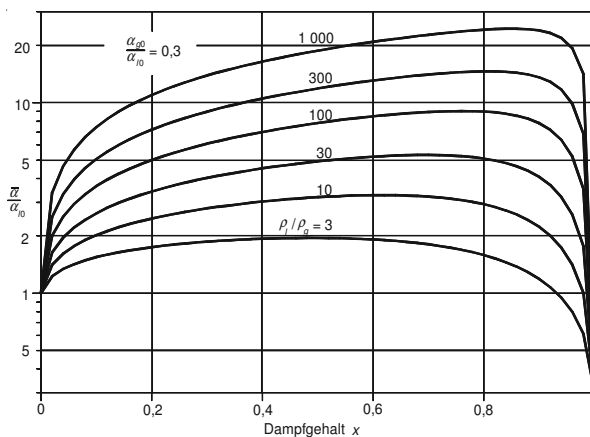


Bild 6.5: Lokale Wärmeübergangszahlen in vertikalen Rohren bei $\alpha_{g0}/\alpha_{l0} = 0,3$

Mittlere Wärmeübergangszahlen können durch Integration der Gln. (6.15) und (6.17) angegeben werden.

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x) dx \quad (6.18)$$

In Bild 6.6 sind die mittleren Wärmeübergangszahlen bei vollständiger Verdampfung von $x = 0$ bis 1 in vertikalen und in Bild 6.7 in horizontalen Rohren als eine Funktion des Dichteverhältnisses dargestellt.

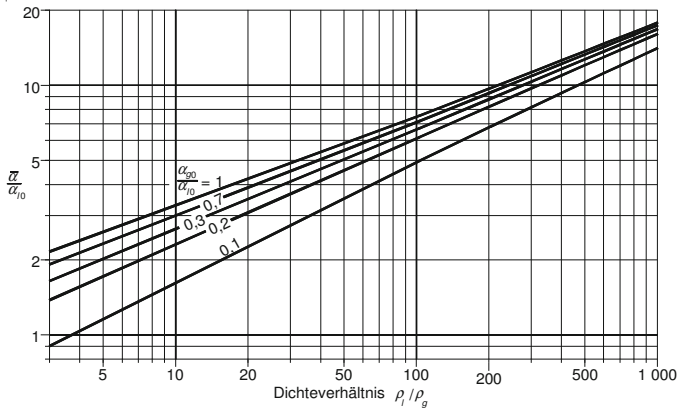


Bild 6.6: Mittlere Wärmeübergangszahlen in vertikalen Röhren bei vollständiger Verdampfung

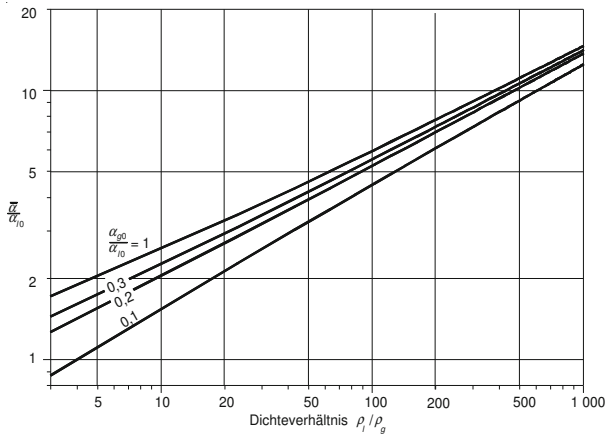


Bild 6.7: Mittlere Wärmeübergangszahlen in horizontalen Röhren bei vollständiger Verdampfung

In Verdampfern von Wärmepumpen und Kälteanlagen tritt ein Zweiphasengemisch ein und der Flüssigkeitsanteil wird vollständig verdampft. Bei den Dampferzeugern von Kraftwerken, in Naturumlaufverdampfern und in Verdampfern von Entsalzungsanlagen wird die eintretende Flüssigkeit nicht vollständig verdampft, um die Ablagerung der in Flüssigkeit gelösten Salze zu vermeiden. Bei solchen Apparaten müssen die Gln. (6.15) und (6.17) integriert oder abschnittsweise lokal berechnet werden. Eine analytische Integration der Gln. (6.15) und (6.17) ist nicht möglich. Die Berechnung kann jedoch leicht mit Programmen wie *Mathcad* oder *Maple* durchgeführt werden.

Die mit dem mittleren Dampfgehalt bestimmte mittlere Wärmeübergangszahl liefert oft Ergebnisse ausreichender Genauigkeit.

BEISPIEL 6.4: Auslegung eines Khlschrankverdampfers

Das Rohr eines Khlschrankverdampfers hat einen Innendurchmesser von 6 mm. Das Kältemittel Frigen R134a verdampft in den Rohren bei 2 bar. Der äußere, auf den Innendurchmesser bezogene Wärmewiderstand ist $0,9 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^2 \text{ K)/W}$. Das eintretende Kältemittel hat den Dampfgehalt von 0,4 und wird vollständig verdampft. Der Wärmestrom, der vom Verdampfer aufgenommen wird, soll 700 W betragen. Das Verdampferrohr verläuft horizontal. Das Frigen verdampft bei $-10,07 \text{ }^\circ\text{C}$, die Temperatur außen am Rohr beträgt $4 \text{ }^\circ\text{C}$. Die Verdampfungsenthalpie des Frigens ist: $r = 205,88 \text{ kJ/kg}$.

Stoffwerte Kondensat: $\rho_l = 1327,7 \text{ kg/m}^3$, $\lambda_l = 0,0971 \text{ W/(m K)}$, $Pr_l = 4,23$, $\eta_l = 0,3143 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m s)}$.

Stoffwerte Dampf: $\rho_g = 10,02 \text{ kg/m}^3$, $\lambda_g = 0,0111 \text{ W/(m K)}$, $Pr_g = 0,609$, $\eta_g = 0,0112 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m s)}$.

- Bestimmen Sie die notwendige Länge des Verdampferrohres mit einem mittleren Dampfgehalt von 0,7.
- Bestimmen Sie durch Integration von Gl. (6.17) die notwendige Länge des Verdampferrohres.

Lösung**Annahmen**

- Die Wandtemperatur ist konstant.
- Die Einflüsse der Rohrbögen werden vernachlässigt.

Analyse

Aus der gegebenen Heizleistung von 700 W kann der Massenstrom des Kältemittels bestimmt werden.

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}}{h'' - x_1 \cdot r - h'} = \frac{\dot{Q}}{(x_1 - 1) \cdot r} = \frac{0,700 \text{ kW}}{0,6 \cdot 205,88 \text{ kJ/kg}} = 5,667 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Zunächst werden die Wärmeübergangszahlen der reinen Flüssigkeits- und Gasströmung berechnet.

$$Re_l = \frac{4 \cdot \dot{m} \cdot d}{\pi \cdot d_i^2 \cdot \eta_l} = 3\,826$$

$$Re_g = \frac{4 \cdot \dot{m} \cdot d}{\pi \cdot d_i^2 \cdot \eta_g} = 107\,368$$

$$\xi_l = [1,8 \cdot \log(Re_l) - 1,5]^{-2} = 0,0408$$

$$\xi_g = [1,8 \cdot \log(Re_g) - 1,5]^{-2} = 0,0175$$

$$Nu_l = \frac{\xi_l / 8 \cdot Re_l \cdot Pr_l}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi_l / 8} \cdot (Pr_l^{2/3} - 1)} = 33,50$$

$$Nu_g = \frac{\xi_g / 8 \cdot Re_g \cdot Pr_g}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi_g / 8} \cdot (Pr_g^{2/3} - 1)} = 171,94$$

$$\alpha_l = \frac{Nu_l \cdot \lambda_l}{d_i} = 542,1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \quad \alpha_g = \frac{Nu_g \cdot \lambda_g}{d_i} = 318,1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

$$\alpha_g / \alpha_l = 0,587$$

a) Die Erhöhung der Wärmeübergangszahl gegenüber der Wärmeübergangszahl der Flüssigkeit wird mit Gl. (6.17) berechnet. Dabei wird $x = 0,7$ eingesetzt.

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_x}{\alpha_l} = \left\{ (1-x)^{0,01} \cdot \left[(1-x)^{1,5} + 1,2 \cdot x^{0,4} \cdot R^{0,37} \right]^{-2,2} + \right\}^{-0,5} \\ + x^{0,01} \cdot \left[\frac{\alpha_g}{\alpha_l} (1+8 \cdot (1-x)^{0,7} \cdot R^{0,67}) \right]^{-2} \Bigg\} = 7,815$$

Die mittlere Wärmeübergangszahl ist damit:

$$\bar{\alpha} = \alpha_l \cdot \varphi(0,7) = 7,815 \cdot 542,1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 4\,236,7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Wärmedurchgangszahl:

$$\bar{k} = \left(\frac{1}{\bar{\alpha}} + R_a \right)^{-1} = \left(\frac{1}{4\,236,7} + 0,9 \cdot 10^{-3} \right)^{-1} \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 880,2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Die für den Wärmetransfer notwendige Fläche beträgt:

$$A = \frac{\dot{Q}}{k \cdot (\vartheta_a - \vartheta_i)} = \frac{700 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{880,2 \cdot \text{W} \cdot (4 + 10,07) \cdot \text{K}} = 0,057 \text{ m}^2$$

Damit berechnet sich die notwendige Länge der Verdampferrohres zu:

$$l = A / (\pi \cdot d_i) = 2,998 \text{ m}$$

b) Das Integral in Gl. (6.16) kann zur Bestimmung der mittleren Wärmeübergangszahl z.B. mit dem Programm *Mathcad* berechnet werden. Man erhält:

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) \cdot dx = \frac{1}{1 - 0,4} \cdot \int_{0,4}^1 \varphi(x) \cdot dx = 7,486$$

Die mittlere Wärmeübergangszahl ist 4,4 % kleiner als die mit dem mittleren x -Wert berechnete und benötigt damit eine 0,9 % größere Länge.

Diskussion

Bei Verdampfung in der Strömung vergrößert sich im Vergleich zur Flüssigkeit die Wärmeübergangszahl um das 2,2fache. Für einfachere Berechnungen kann bei sehr guter Genauigkeit die mittlere Wärmeübergangszahl mit dem mittleren Dampfgehalt bestimmt werden.

7 Strahlung

Wärmeübertragung durch *Strahlung* erfolgt durch elektromagnetische Wellen. Im Gegensatz zur Wärmeleitung, bei der die Wärmeübertragung an Bewegungen von Molekülen, Atomen oder Elektronen gebunden ist, also ein Trägermedium erfordert, benötigt die Wärmeübertragung bei Strahlung keine Materie, d.h. sie kann auch im Vakuum erfolgen. Bei der Strahlung wird von einem wärmeren Körper durch elektromagnetische Wellen Wärme an einen kälteren Körper übertragen. Der Wärmetransfer durch Strahlung erfolgt entweder im Vakuum oder durch Stoffe (meistens Gase), die die elektromagnetischen Wellen durchlassen. Im zweiten Fall wird neben der Strahlung durch Wärmeleitung oder Konvektion zusätzlich Wärme übertragen.

Strahlung erfolgt von der Oberfläche fester und flüssiger Körper und auch von Gasen, deren Moleküle aus mehr als zwei Atomen bestehen.

Die Länge der elektromagnetischen Wellen, durch die die Wärme übertragen wird, liegt zwischen 0,8 bis 400 μm . Dieser Wellenlängenbereich wird auch als ultraroter Bereich bezeichnet. Zum Vergleich: Licht liegt im sichtbaren Wellenlängenbereich zwischen 0,35 und 0,75 μm . Bei tiefen Temperaturen ist der Anteil an sichtbarer Strahlung so gering, dass er vom Auge nicht wahrgenommen wird. Bei hohen Temperaturen erhöht sich der Anteil der sichtbaren Strahlen, er wird vom Auge registriert (z. B. Glühfaden einer Glühbirne).

Mit zunehmender Temperatur steigt die Intensität der Wärmestrahlung. Auch bei kleinen Temperaturen kann der Anteil der durch Strahlung übertragenen Wärme, z.B. Isolationsprobleme bei sehr tiefen Temperaturen, von Bedeutung sein.

Elektromagnetische Wellen, die auf einen Körper auftreffen, werden von diesem je nach seinen Eigenschaften teilweise reflektiert, durchgelassen oder absorbiert. Bezeichnet man den absorbierten Anteil (*Absorptionsverhältnis*) mit α , den durchgelassenen Anteil mit τ und den reflektierten Anteil mit ρ , gilt immer:

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (7.1)$$

Feste Stoffe und Flüssigkeiten verhindern einen Durchlass bereits bei sehr kleinen Dicken, Metalle bei etwa 1 μm , Flüssigkeiten bei 1 mm. Bei den meisten Körpern sind die Eigenschaften bezüglich Reflexion, Durchlass und Absorption zusätzlich von der Wellenlänge der Strahlung abhängig.

Jeder Körper, dessen Temperatur über dem absoluten Nullpunkt liegt, sendet Strahlen aus.

Das Vermögen, Strahlen auszusenden, hängt von den Eigenschaften des Körpers ab. Ein so genannter *schwarzer Körper* ist in der Lage, bei einer bestimmten Temperatur Strahlen mit maximaler Intensität auszusenden. Die Fähigkeit anderer Körper, bei der gleichen Temperatur Strahlen auszusenden, wird durch das *Emissionsverhältnis* ε angegeben. Das Emissionsverhältnis ist das Verhältnis der Strahlungsintensität eines Körpers bei einer bestimmten Temperatur, verglichen mit der Strahlungsintensität eines schwarzen Körpers bei gleicher Temperatur.

Das *Kirchhoff'sche Gesetz* sagt aus, dass das Emissionsverhältnis ε eines Körpers bei stationären Verhältnissen gleich seines Absorptionsverhältnisses α ist.

$$\varepsilon = \alpha \quad (7.2)$$

Körper ordnet man nach ihrem Verhalten bezüglich Reflexion, Durchlass und Absorption folgende Eigenschaften bzw. Benennungen zu:

- schwarz: alle auftreffenden Strahlen werden absorbiert ($\alpha = \varepsilon = 1$)
- weiß: alle Strahlen werden reflektiert ($\rho = 1$)
- grau: alle auftreffenden Strahlen werden im gesamten Wellenlängenbereich zum gleichen Anteil absorbiert ($\varepsilon < 1$)
- farbig: von den auftreffenden Strahlen werden bestimmte Wellenlängen (die der entsprechenden Farbe) bevorzugt reflektiert
- spiegelnd: alle auftreffenden Strahlen werden, bezogen auf die Flächennormale, unter dem gleichen Winkel reflektiert
- matt: auftreffende Strahlen werden diffus in alle Richtungen gestreut.

7.1 Grundgesetz der Temperaturstrahlung

Ein schwarzer Körper lässt sich durch die Öffnung eines Hohlraums, dessen wärmeundurchlässige (adiabate) Wände innen überall die gleiche Temperatur haben, annähernd verwirklichen. Die Wärme wird ausschließlich per Strahlung durch die Öffnung abgegeben, man spricht von *schwarzer Strahlung*.

Die *spektralspezifische Intensität* der schwarzen Strahlung $i_{\lambda,s}$ wird durch das *Planck'sche Strahlungsgesetz* beschrieben.

$$i_{\lambda,s} = \frac{C_1}{\lambda^5 \cdot (e^{C_2/(\lambda \cdot T)} - 1)} \quad (7.3)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 haben folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2 \cdot \pi \cdot c^2 \cdot h = 3,7418 \cdot 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{m}^2 \\ C_2 &= c \cdot h / k = 1,438 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Die Konstanten enthalten nur physikalische Konstanten: Lichtgeschwindigkeit c , *Planck'sches Wirkungsquantum* h und *Boltzmannkonstante* k , die keine empirisch ermittelten Größen sind. Die Werte dieser physikalischen Konstanten sind:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}, h = 6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, k = 1,380641 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

Die Größe $i_{\lambda,s}$ ist die Strahlungsintensität eines schwarzen Strahlers (der Index s steht für schwarze Strahlung) geteilt durch die Wellenlänge, bei der die Strahlung stattfindet. Da die Intensität pro Meter Wellenlänge angegeben ist, ist ihre Einheit W/m^3 .

Bild 7.1 zeigt die Verteilung der Intensität über die Wellenlänge bei verschiedenen Temperaturen. Wie aus dem Diagramm zu ersehen ist, hat die Strahlung für jede Temperatur bei einer bestimmten Wellenlänge ein Maximum. Leitet man Gl. (7.3) nach der Wellenlänge ab und setzt die Ableitung gleich null, erhält man die Stelle des Maximums.

$$\lambda_{T=\max} = 2\,898 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{K}/T \quad (7.5)$$

Mit steigender Temperatur verschiebt sich das Maximum zu immer kleineren Wellenlängen (*Wien'sches Verschiebungsgesetz*).

Die Temperatur der Sonnenoberfläche beträgt etwa 6 000 K. Das Maximum liegt bei einer Wellenlänge von 0,48 μm , also im sichtbaren Bereich.

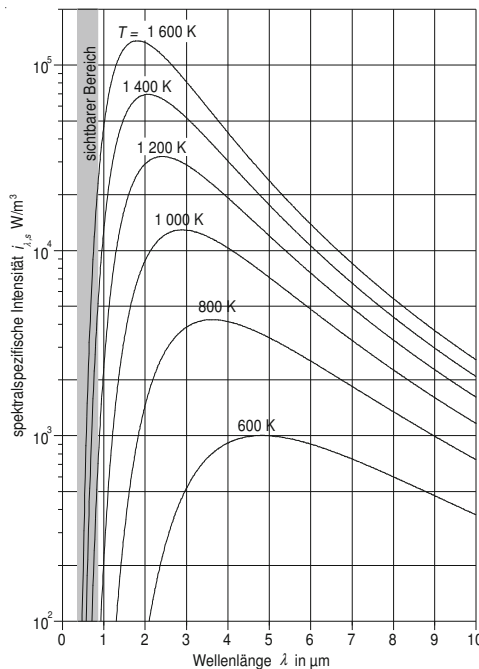


Bild 7.1: Intensität der schwarzen Strahlung in Abhängigkeit der Wellenlänge

7.2 Bestimmung der Wärmestromdichte der Strahlung

Die Intensität der Strahlung eines schwarzen Körpers pro Meter Wellenlänge kann mit Gl. (7.3) bestimmt werden. Für die technischen Berechnungen benötigt man den Wärmestrom, der vom schwarzen Körper ausgesandt wird. Wir erhalten ihn, wenn Gl. (7.3) im gesamten Wellenlängenbereich, also von der Wellenlänge null bis unendlich, integriert wird.

$$\dot{q}_s = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} i_{\lambda,s} \cdot d\lambda = \frac{2 \cdot \pi^5 \cdot k^4}{15 \cdot h^4 \cdot c^2} \cdot T^4 = \sigma \cdot T^4 \quad (7.6)$$

Die *Stefan-Boltzmann-Konstante* ist σ , mit den physikalischen Konstanten berechnet, folgenden Wert aufweist [7.1, 7.2]:

$$\sigma = (5,6696 \pm 0,0075) \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \quad (7.7)$$

Dieses ist zur Zeit der genaueste Wert, basierend auf den Messwerten der physikalischen Konstanten. In der Praxis wird der Wert $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ verwendet. Für eine leichtere Berechnung führte man folgende Vereinfachung ein:

$$\dot{q}_s = C_s \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 \quad (7.8)$$

Dabei ist C_s die *Strahlungskonstante des schwarzen Körpers*.

$$C_s = 10^8 \cdot \sigma = 5,67 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \quad (7.9)$$

Für Körper, die nicht schwarz sind, gilt:

$$\dot{q} = \varepsilon \cdot C_s \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 \quad (7.10)$$

Die von einem nicht schwarzen Körper abgestrahlte Wärmestromdichte ist die eines schwarzen Körpers, multipliziert mit dem Emissionsverhältnis.

7.2.1 Intensität und Richtungsverteilung der Strahlung

Die Abstrahlung ist je nach Beschaffenheit der Oberfläche unterschiedlich. Im Folgenden behandeln wir die grauen Körper, da man mit ihnen technische Oberflächen gut beschreiben kann.

Die Intensität einer punktförmigen Strahlungsquelle nimmt mit der Entfernung quadratisch ab. Das Richtungsgesetz von *Lambert* besagt, dass die Intensität einer von einem Flächenelement dA ausgesandten diffusen Strahlung in jede Richtung

des Raumes gleich groß ist. Die Dichte der Strahlung nimmt jedoch proportional zum Cosinus des Winkels β zum Normalen ab.

$$\dot{q}_\beta = \dot{q}_n \cdot \cos \beta \quad (7.11)$$

Aus der Integration über einer Halbkugel erhält man die Gesamtstrahlung in den Raum:

$$\dot{q} = \dot{q}_n \cdot \pi \quad (7.12)$$

Bei einem grauen Strahler ist die in einen Halbraum abgestrahlte gesamte Wärmestromdichte gleich dem π -fachen der Wärmestromdichte, die senkrecht abgestrahlt wird. Das Richtungsgesetz ist bei vielen Stoffen, da sie keine grauen Strahler sind, nur annähernd gültig. Bei Metallen nimmt das Emissionsverhältnis mit dem Winkel β zu, bei Nichtmetallen ab.

7.2.2 Emissionsverhältnisse technischer Oberflächen

Das Emissionsverhältnis einer Oberfläche ist von der Temperatur und Beschaffenheit der Oberfläche abhängig. Alterung, Verschmutzung, Oxidation und Korrosion können starke Änderungen des Emissionsverhältnisses bewirken. Der Zustand einer technischen Oberfläche kann bezüglich seines Emissionsverhältnisses nur durch Messung der Oberflächentemperatur und Strahlungsintensität exakt bestimmt werden. Folgerungen betreffend des Emissionsverhältnisses aus optischen oder anderen Beurteilungen der Oberfläche können zu total falschen Ergebnissen führen.

Die Normalkomponente des Emissionsverhältnisses kann relativ einfach zwischen zwei großen ebenen Platten gemessen werden. Deshalb sind in der Literatur die Emissionsverhältnisse meistens für die Normalkomponente der Strahlung ε_n angegeben. Mit dem Diagramm in Bild 7.2 kann das Emissionsverhältnis ε der Gesamtstrahlung bestimmt werden.

In der Praxis können die angegebenen Emissionsverhältnisse je nach Oberflächenzustand recht große Abweichungen aufweisen.

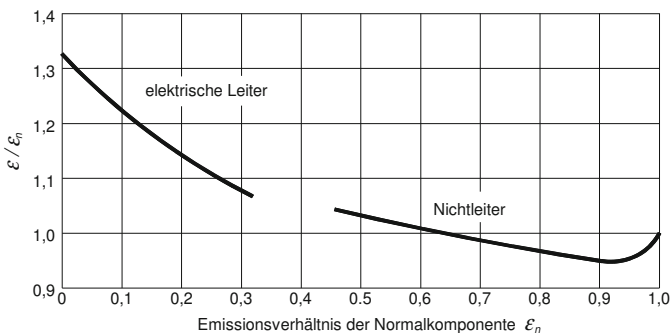


Bild 7.2: Diagramm zur Bestimmung des Emissionsverhältnisses der Gesamtstrahlung

Tabelle 7.1: Emissionsverhältnis technischer Oberflächen (Quelle: [7.2])

Material	Zustand	Temperatur °C	ε_n	ε
Aluminium	walzblank	170	0,039	0,049
		900	0,060	
	stark oxidiert	90	0,020	
		504	0,310	
Aluminiumoxid		277	0,630	
		830	0,260	
Kupfer	poliert	20	0,030	
	leicht angelaufen	20	0,037	
	schwarz oxidiert	20	0,780	
Eisen, Stahl	poliert	430	0,144	
	Gusshaut	100	0,800	
Stahl	oxidiert	200	0,790	0,024 0,150 0,450
Wolfram		25		
		1 000		
		3 000		
Glas		20	0,940	0,900
Gips		20	0,850	
Ziegelstein, Mörtel		20	0,930	
Holz, Eiche		20		
Lack	schwarz, matt	80		0,920
Lack	weiß	100		0,940
Heizkörperlack (nach VDI-74)		100	0,925	
Wasser		0	0,950	
		100	0,960	
Eis		0	0,966	

Weitere Daten sind im VDI-Wärmeatlas [7.2], bei W. Wagner: "Wärmeübertragung" [7.4], bei [7.5, 7.6] oder im Anhang A11 zu finden.

7.2.3 Wärmetransfer zwischen Flächen

Bei vielen der technisch interessanten Fälle findet der Wärmeaustausch zwischen zwei oder mehreren Flächen statt. Das Verhalten der Strahlung lässt sich am Beispiel zweier Flächen gut beschreiben. Von Fläche 1 werden entsprechend der Temperatur T_1 und den Eigenschaften der Fläche Strahlen emittiert. Gemäß Richtungsverteilung trifft ein Teil der emittierten Strahlen auf die zweite Fläche auf. Von dieser werden sie teilweise absorbiert, durchgelassen oder reflektiert. Diese zweite Fläche emittiert wiederum ihrerseits die Strahlen entsprechend der Temperatur T_2 und

Oberflächenbeschaffenheit. Die emittierten und reflektierten Strahlen der zweiten Fläche treffen entsprechend der Richtungsverteilung auf der ersten Fläche auf. Zwischen den Flächen besteht eine Wechselwirkung.

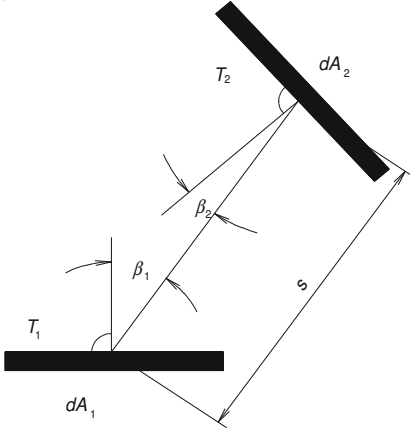


Bild 7.3: Strahlungsaustausch zwischen zwei Flächenelementen

Bild 7.3 veranschaulicht den Strahlungsaustausch zwischen zwei Flächenelementen dA_1 und dA_2 der Fläche 1 und 2. dA_1 und dA_2 sind beliebige, im Raum liegende Flächenelemente zweier Körper. Die Temperatur der Fläche 1 ist T_1 und die der Fläche 2 T_2 . Das Emissionsverhältnis der Fläche ist ε_1 und ε_2 . Mit der Richtungsverteilung nach *Lambert* erhalten wir ohne Berücksichtigung der Reflexion für den zwischen den Flächen ausgetauschten Wärmestrom:

$$\dot{Q}_{12} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot C_s \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{\pi \cdot s^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 \quad (7.13)$$

Der rein geometrische Anteil wird zur Einstrahlungszahl (auch Sichtfaktor genannt) φ_{12} zusammengefasst.

$$\varphi_{12} = \frac{1}{A_1} \cdot \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{\pi \cdot s^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 \quad (7.14)$$

Wird die Richtung des Wärmeaustausches umgekehrt, gilt:

$$A_1 \cdot \varphi_{12} = A_2 \cdot \varphi_{21} \quad (7.15)$$

Damit kann der Wärmestrom in folgender Form angegeben werden:

$$\dot{Q}_{12} = \varphi_{12} \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot C_s \cdot A_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (7.16)$$

Handelt es sich um die Flächenpaare i und k , die miteinander im Strahlungsaustausch stehen, gilt folgende *Reziprozitätsbeziehung*:

$$A_i \cdot \varphi_{ik} = A_k \cdot \varphi_{ki} \quad (7.17)$$

Bei der Betrachtung des Strahlungsaustausches der Fläche i mit den anderen Flächen des i umschließenden Raumes führt der Energieerhaltungssatz zu folgender Summationsbeziehung:

$$\sum_{k=1}^n \varphi_{ik} = 1 \quad (7.18)$$

Bei der Berechnung der Wärmestrahlung zwischen Flächen liegt das Problem in der Ermittlung der Einstrahlzahlen. Bei technischen Oberflächen, die nicht als graue Körper reagieren, sind die Probleme noch komplizierter, weil die Strahlen teilweise reflektiert oder durchgelassen werden.

Für geometrisch einfache Formen, bei denen die lineare Ausdehnung der Flächen wesentlich größer als ihr Abstand ist, können die Einstrahlzahlen berechnet werden. Die Angabe des Wärmestromes erfolgt in folgender Form:

$$\dot{Q}_{12} = C_{12} \cdot A \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (7.19)$$

Dabei ist C_{12} die *Strahlungsaustauschzahl*.

7.2.3.1 Gleich große, parallele graue Platten

Bei zwei gleich großen, parallelen grauen Platten mit den Temperaturen T_1 und T_2 (Bild 7.4) ist die Strahlungsaustauschzahl gegeben als:

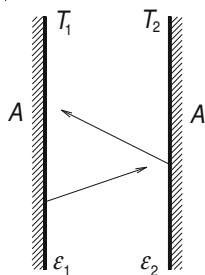


Bild 7.4: Strahlung zwischen zwei gleich großen, parallelen grauen Platten

$$C_{12} = \frac{C_s}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1} \quad (7.20)$$

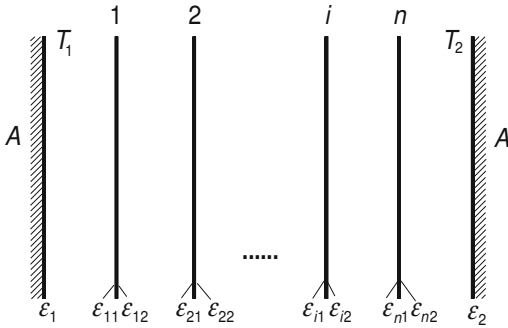


Bild 7.5: Strahlung zwischen mehreren gleich großen, parallelen grauen Platten

Befinden sich, wie in Bild 7.5 dargestellt, zwischen den zwei Platten noch n weitere parallele graue Platten, erhält man für die Strahlungsaustauschzahl:

$$C_{12} = \frac{C_s}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1 + \sum_{i=1}^n (1/\epsilon_{i1} + 1/\epsilon_{i2} - 1)} \quad (7.21)$$

Dabei ist ϵ_{i1} das Emissionsverhältnis der i -ten Platte auf der T_1 zugewandten und ϵ_{i2} das auf der T_2 zugewandten Seite. Haben alle n zwischenliegenden parallelen Platten das gleiche Emissionsverhältnis, vereinfacht sich Gl. (7.21) zu:

$$C_{12} = \frac{C_s}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1 + n \cdot (2/\epsilon_i - 1)} \quad (7.22)$$

Haben auch die äußeren Flächen das gleiche Emissionsverhältnis, vereinfacht sich Gl. (7.22) weiter.

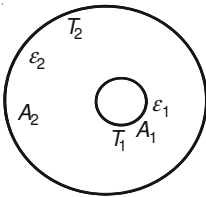
$$C_{12} = \frac{C_s}{(n+1) \cdot (2/\epsilon - 1)} \quad (7.23)$$

Da die Größe und damit die Fläche der Platten gleich groß ist, muss in Gl. (7.19) die Oberfläche A einer der Platten eingesetzt werden.

Durch die zusätzlichen Platten wird der Nenner immer größer, d.h. der Wärmestrom immer kleiner. Die zusätzlichen Platten bedeuten eine Isolation der Wärmestrahlung. Bei der Isolation sehr kalter Fluide wie z.B. bei flüssigem Helium, werden solche Isolatoren angebracht. Der Behälter ist von einem Außenmantel umgeben. Der Zwischenraum ist evakuiert und zwischen diesen Wänden befinden sich polierte dünne Aluminiumfolien (Superisolation).

7.2.3.2 Umschlossene Körper

Für umschlossene Körper wie z. B. eine Kugel in einer Hohlkugel oder ein Zylinder in einem Hohlzylinder (Bild 7.6) gilt:



Bid 7.6: Strahlung eines umschlossenen Körpers

$$C_{12} = \frac{C_s}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (7.24)$$

Hier ist zu beachten, dass in Gl. (7.24) für A_1 immer die Oberfläche des umschlossenen Körpers eingesetzt wird, d.h., A_1 ist kleiner als A_2 . Bei diesem Sonderfall kann, wenn die Temperatur T_1 des umschlossenen Körpers tiefer als die des umgebenden Körpers ist, der Wärmestrom nach Gl. (7.19) negativ werden. Dieses ist bei den Berechnungen zu berücksichtigen.

Ist die Fläche A_1 sehr viel kleiner als A_2 , vereinfacht sich Gl. (7.24) zu:

$$C_{12} = \varepsilon_1 \cdot C_s \quad (7.25)$$

Auch für relativ komplexe Körper, die von einer wesentlich größeren Fläche umschlossen werden, liefert Gl. (7.25) recht genaue Ergebnisse (z. B. Heizkörper in einem Raum).

Für viele ausgesuchte Geometrien sind die Einstrahlzahlen beispielsweise im VDI-Wärmeatlas zu finden.

BEISPIEL 7.1: Berechnung eines Wärmedämmglases

Die Glasscheiben der Fenster eines Bürohauses werden durch Wärmedämmglas ersetzt. Die Daten des Normal- und Wärmedämmglases sind:

	normal	dämmend
Absorptionsverhältnis α	0,80	0,40
Reflexionsverhältnis ρ	0,05	0,50
Durchlassverhältnis τ	0,15	0,10

Das Normalglas wird auf der Innenseite auf 35 °C, das Wärmedämmglas auf 28 °C erwärmt. Die Temperatur der Wände und der Luft im Raum beträgt 22 °C.

Die Wärmeübergangszahl der freien Konvektion ist $5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$. Die Sonnenstrahlung hat eine Intensität von $700 \text{ W}/\text{m}^2$.

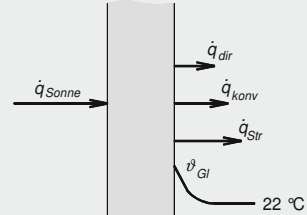
Bestimmen Sie die Verringerung der Wärmestromdichte, die in den Raum gelangt.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Bei freier Konvektion ist die Wärmeübergangszahl konstant.
- Die Temperatur des Glases ist konstant.



Analyse

Die Wärmezufuhr zum Raum kann in drei Komponente aufgeteilt werden: Der Anteil der Sonnenstrahlung, der direkt durchgelassen wird, der konvektive Wärmetransfer und die Strahlung von der Scheibe. Jetzt berechnet man die einzelnen Wärmestromdichten für die normale und die wärmedämmende Scheibe.

Der Anteil der Sonnenstrahlen, der direkt durchgelassen wird, ist mit dem Durchlassverhältnis gegeben.

	normal	gedämmt
$\dot{q}_{dir} = \dot{q}_{Sonne} \cdot \tau$	$105 \text{ W}/\text{m}^2$	$70 \text{ W}/\text{m}^2$

Die Wärmestromdichte durch freie Konvektion:

$\dot{q}_{konv} = \alpha_{konv} \cdot (\vartheta_{Gl} - \vartheta_R)$	$65 \text{ W}/\text{m}^2$	$30 \text{ W}/\text{m}^2$
---	---------------------------	---------------------------

Durch Strahlung von der Scheibe transferierte Wärmestromdichte nach Gl. (7.25):

$\dot{q}_{Str} = \varepsilon \cdot C_s \cdot \left[\left(\frac{T_{Gl}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_R}{100} \right)^4 \right]$	$65 \text{ W}/\text{m}^2$	$14 \text{ W}/\text{m}^2$
---	---------------------------	---------------------------

Für das Normalglas erhält man **$235 \text{ W}/\text{m}^2$** , für das Wärmedämmglas **$114 \text{ W}/\text{m}^2$** .

Diskussion

Die wärmedämmende Glasscheibe reflektiert 50 % der einfallenden Sonnenstrahlen; was mehr als 45 % bei normalem Glas ist. Das Absorptionsverhältnis ist damit 50 % kleiner, die Scheibe wird weniger aufgeheizt und gibt sowohl durch Konvektion als auch durch Strahlung weniger Wärme an den Raum ab. Der größere Teil des Wärmetransfers zum Raum wird durch Erwärmung der Scheibe verursacht.

BEISPIEL 7.2: Berechnung einer Glühbirne

Der Glühfaden einer 240 Volt-Glühbirne soll bei 3 100 °C Temperatur 100 W elektrische Leistung haben. Der Wolframglühfaden hat einen spezifischen elektrischen Widerstand von $\rho_{el} = 73 \cdot 10^{-9} \Omega \text{ m}$. Die Glaskörpertemperatur der Glühbirne beträgt 90 °C.

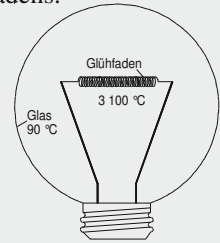
- a) Bestimmen Sie den Durchmesser und die Länge des Glühfadens.
b) Bestimmen Sie den Wirkungsgrad der Glühbirne.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Die Fläche des Glases ist sehr viel größer als die des Glühfadens und daher vernachlässigbar.
- Der Einfluss der Halterung und der des konvektiven Wärmetransfers in der Birne können vernachlässigt werden.
- Die Temperatur des Glühfadens ist konstant.

**Analyse**

a) Der durch Strahlung transferierte Wärmestrom entspricht der elektrischen Leistung. Zur Berechnung der Strahlung wird das Emissionsverhältnis des Wolframs benötigt. Aus Tabelle 7.1 erhalten wir 0,45. Die Fläche, die für die Strahlungsleistung von 100 W notwendig ist, kann mit Gl. (7.19) berechnet werden. Die Strahlungsaustauschzahl ist nach Gl. (7.25) $C_{12} = \varepsilon \cdot C_s$. Die für die Strahlungsleistung notwendige Fläche beträgt:

$$A = \frac{\dot{Q}}{C_s \cdot \varepsilon \cdot \left\{ \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right\}} = 3,028 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

Der für 100 W elektrische Leistung benötigte elektrische Widerstand ist:

$$R = \frac{U^2}{P_{el}} = \frac{240^2 \cdot \text{V}^2}{100 \cdot \text{W}} = 576 \Omega$$

Die Fläche A und der elektrische Widerstand R hängen von den Abmessungen des Drahtes ab. Folgende Abhängigkeiten bestehen:

$$A = \pi \cdot d \cdot l \qquad R = \frac{4 \cdot \rho_{el} \cdot l}{\pi \cdot d^2}$$

Nach Umformung erhalten wir für den Durchmesser d :

$$d = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot \rho \cdot A}{\pi^2 \cdot R}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 73 \cdot 10^{-9} \cdot \Omega \cdot \text{m} \cdot 3,021 \cdot 10^{-5} \cdot \text{m}^2}{\pi^2 \cdot 576 \cdot \Omega}} = \mathbf{0,0116 \text{ mm}}$$

Die notwendige Fadenlänge ist:

$$l = \frac{A}{\pi \cdot d} = \frac{3,021 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2}{\pi \cdot 12 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = \mathbf{0,832 \text{ m}}$$

b) Der Zweck der Glühbirne ist, Licht im sichtbaren Bereich zu erzeugen, der zwischen den Wellenlängen von 0,35 und 0,75 μm liegt. Integriert man Gl. (7.3) zwischen diesen Wellenlängen und multipliziert das Ergebnis mit dem Emissionsverhältnis, erhält man die Wärmestromdichte der Strahlung im sichtbaren Bereich.

$$\begin{aligned} \dot{q}_{\text{sichtbar}} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\varepsilon \cdot C_1}{\lambda^5 \cdot (e^{C_2/(\lambda \cdot T)} - 1)} d\lambda = \\ &= \int_{\lambda=0,35 \mu\text{m}}^{\lambda=0,75 \mu\text{m}} \frac{0,45 \cdot 3,7418 \cdot 10^{-16} \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2}{\lambda^5 \cdot (e^{0,01438 \cdot \text{K} \cdot \text{m} / (\lambda \cdot 3\,373 \cdot \text{K})} - 1)} d\lambda = 0,5504 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

Die gesamte, durch Strahlung abgegebene Wärmestromdichte beträgt:

$$\dot{q}_{\text{tot}} = \frac{P_{el}}{A} = \frac{100 \text{ W}}{2,7185 \cdot 10^{-5} \cdot \text{m}^2} = 3,303 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2}$$

Damit ist der Wirkungsgrad der Glühbirne:

$$\eta_G = \dot{q}_{\text{sichtbar}} / \dot{q}_{\text{tot}} = \mathbf{0,167}$$

Diskussion

Die Temperatur des Glühfadens bestimmt die Fläche, die für die Abgabe des 100 W-Wärmestromes durch Strahlung benötigt wird, d.h., die errechnete Fläche strahlt bei 3 100 °C Temperatur 100 W ab. Der Faden wird so gewählt, dass der Widerstand 100 W elektrische Leistung bewirkt und die für die Strahlung notwendige Fläche vorhanden ist. Die relativ lange Fadenlänge einer Glühbirne wird so realisiert, dass der Faden als Wendel ausgebildet und über eine oder mehrere Stützen umgelenkt wird. Fast die gesamte elektrische Leistung einer Glühbirne wird als Wärme an das Glas und von dort an die Umgebung abgegeben. Der errechnete Wirkungsgrad von 17 % ist in der Realität unerreicht. Im sichtbaren Bereich werden nur etwa 8 bis 12 % der Strahlung genutzt.

BEISPIEL 7.3: Berechnung eines Heizkörpers

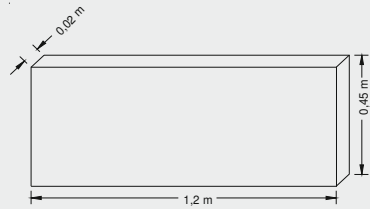
Ein Heizkörper mit 1,2 m Länge, 0,45 m Höhe und 0,02 m Dicke hat eine Oberflächentemperatur von 60 °C. Er ist mit Heizkörperlack überzogen. Die Wände des Raumes haben eine Temperatur von 20 °C, die der Luft beträgt 22 °C.

Bestimmen Sie den durch Strahlung und freie Konvektion transferierten Wärmestrom des Heizkörpers.

Die Stoffwerte der Luft sind: $\lambda = 0,0245 \text{ W/(m K)}$, $\nu = 14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr = 0,711$.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Da die Flächen der Wände sehr viel größer als die des Heizkörpers sind, können sie vernachlässigt werden.
- Die Kantenflächen des Heizkörpers werden vernachlässigt.
- Die Temperatur des Heizkörpers ist konstant.

Analyse

Der durch Strahlung bedingte Wärmestrom kann mit den Gln. (7.19) und (7.25) bestimmt werden. Das Emissionsverhältnis des Heizkörpers berechnet man mit Tabelle 7.1 und dem Diagramm in Bild 7.2:

$$\varepsilon = \varepsilon_n \cdot 0,96 = 0,925 \cdot 0,96 = 0,89$$

Die Fläche des Heizkörpers beträgt: $A = 2 \cdot l \cdot h = 2 \cdot 1,2 \cdot 0,45 \text{ m}^2 = 1,08 \text{ m}^2$

Der Wärmestrom der Strahlung ist:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{Str} &= \varepsilon \cdot C_s \cdot A \cdot \left[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4 \right] = \\ &= 0,89 \cdot 5,67 \cdot \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4) \cdot 1,08 \cdot \text{m}^2 \cdot (3,332^4 - 2,993^4) \cdot \text{K}^4 = \mathbf{257 \text{ W}} \end{aligned}$$

Der Wärmestrom, der durch freie Konvektion abgegeben wird, kann, wie in Kapitel 4 beschrieben, bestimmt werden. Die *Rayleighzahl* berechnet sich mit den Gln. (4.3) und (4.6).

$$\begin{aligned} Ra &= Gr \cdot Pr = \frac{g \cdot h^3 \cdot (\vartheta_w - \vartheta_0)}{T_0 \cdot \nu^2} \cdot Pr = \\ &= \frac{9,806 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,45^3 \cdot \text{m}^3 \cdot (60 - 22) \cdot \text{K}}{295,15 \cdot \text{K} \cdot 14^2 \cdot 10^{-12} \cdot \text{m}^4 \cdot \text{s}^{-2}} \cdot 0,711 = 417,4 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

Nach den Gln. (4.7) und (4.8) ist die *Nußeltzahl*:

$$f_1(Pr) = \left(1 + 0,671 \cdot Pr^{-9/16}\right)^{-8/27} = \left(1 + 0,671 \cdot 0,711^{-9/16}\right)^{-8/27} = 0,838$$

$$Nu_h = \left\{0,852 + 0,387 \cdot Ra^{1/6} \cdot f_1(Pr)\right\}^2 = 94,51$$

Damit ist die Wärmeübergangszahl:

$$\alpha = Nu_h \cdot \lambda / h = \frac{94,51 \cdot 0,0245 \cdot \text{W}}{0,45 \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{K}} = 5,146 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Die durch freie Konvektion transferierte Wärme ergibt sich zu:

$$\dot{Q}_{\text{konv}} = A \cdot \alpha \cdot (v_1 - v_0) = 1,08 \cdot \text{m}^2 \cdot 5,146 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \cdot (60 - 22) \cdot \text{K} = \mathbf{211 \text{ W}}$$

Diskussion

In diesem Beispiel werden die durch Strahlung und freie Konvektion transferierten Wärmeströme verglichen. Der Wärmestrom durch Strahlung ist größer. Der Anteil des Wärmetransfers durch Strahlung steigt mit zunehmender Temperatur stärker an als der der freien Konvektion. Daher ist es nicht erstaunlich, dass früher, als die Heizkörper bei Temperaturen von 80 °C arbeiteten, sie Radiatoren, also Strahler, genannt wurden.

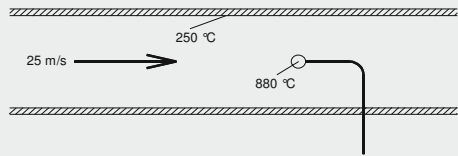
Wichtig! Hier ist zu beachten, dass für die Berechnung der Strahlung die Temperatur der Wände und für freie Konvektion die der Luft zu verwenden ist.

BEISPIEL 7.4: Verfälschung der Temperaturmessung durch Strahlung

Mit einer kugelförmigen Sonde von 2 mm Durchmesser wird die Temperatur des Autoabgases gemessen. Die ermittelten Temperaturen sind im Vergleich zu den erwarteten Werten zu tief. Da man vermutet, dass dieses durch Strahlung verursacht wird, misst man auch die Wandtemperatur des Auspuffrohres. Bei einer gemessenen Gastemperatur von 880 °C beträgt die Wandtemperatur des Auspuffrohres 250 °C. Das Emissionsverhältnis der Sonde ist 0,4, die Geschwindigkeit des Abgases 25 m/s. Die Stoffwerte des Abgases sind:

$$\lambda = 0,076 \text{ W/(m K)}, \nu = 162 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, Pr = 0,74.$$

- Bestimmen Sie die wirkliche Temperatur des Auspuffgases.
- Zeigen Sie Maßnahmen auf, um die Messung zu verbessern.

Lösung**Schema** Siehe Skizze**Annahmen**

- Da die Fläche des Auspuffrohres sehr viel größer als die der Sonde ist, kann Gl. (7.25) verwendet werden.
- Die Messung wird von der Halterung der Sonde nicht beeinflusst.

Analyse

a) Die vom Gas aufgeheizte Sonde transferiert durch Strahlung Wärme an die Wand des Auspuffrohres und kühlt deshalb ab. Da die Temperatur der Sonde kleiner als die des Gases ist, wird der Sonde vom Gas ein Wärmestrom zugeführt. Den gleichen Wärmestrom gibt die Sonde durch Strahlung an die Wand ab. Damit gilt:

$$\dot{Q}_{Str} = \dot{Q}_{konv}$$

Der Wärmetransfer durch Strahlung kann mit den Gln. (7.19) und (7.25) bestimmt werden.

$$\dot{Q}_{Str} = \varepsilon \cdot A \cdot C_s \cdot \left[(T_s / 100)^4 - (T_w / 100)^4 \right]$$

Die Temperatur der Sonde ist T_s , die des Auspuffrohres T_w . Die Wärmeübergangszahl des angeströmten Körpers wird, wie in Kapitel 3.2.3 besprochen, bestimmt. Damit wir wissen, welche Gleichungen Anwendung finden, muss zunächst die *Reynoldszahl* berechnet werden.

$$Re_{L'} = c \cdot d / \nu = 25 \cdot 0,002 / 162 \cdot 10^{-6} = 309$$

Nach Gl. (3.30) ist die *Nusseltzahl*:

$$Nu_{L',lam} = 0,664 \cdot \sqrt[3]{Pr} \cdot \sqrt{Re_{L'}} = 0,664 \cdot \sqrt[3]{0,74} \cdot \sqrt{309} = 10,55$$

Damit erhält man bei erzwungener Konvektion für die Wärmeübergangszahl:

$$\alpha = \frac{Nu_{L',lam} \cdot \lambda}{d} = \frac{10,55 \cdot 0,076 \cdot \text{W}}{0,002 \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{K}} = 401 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Der durch erzwungene Konvektion transferierte Wärmestrom beträgt:

$$\dot{Q}_{konv} = \alpha \cdot A \cdot (T_0 - T_s)$$

Beide Wärmeströme gleichgesetzt und nach der Gastemperatur T_0 aufgelöst, ergeben:

$$T_0 = \frac{\varepsilon \cdot C_s}{\alpha} \cdot [(T_s / 100)^4 - (T_w / 100)^4] + T_s =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 5,67}{401 \cdot K^3} \cdot (11,532^4 - 5,232^4) \cdot K^4 + 1153,2 \text{ K} = \mathbf{975,8 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

Die Gastemperatur ist damit um 92,8 K höher als die Sondentemperatur.

b) Die Messung kann verbessert werden, indem außen um das Auspuffrohr eine Isolierschicht installiert wird. Damit verhindert man, dass die Temperatur des Auspuffrohres durch den Fahrtwind abkühlt. Ist das nicht möglich, kann um die Sonde ein Schutzschild angebracht werden. Dieser kann z.B. ein poliertes Stahlröhrchen mit einem Durchmesser von 10 mm, einer Länge von 20 mm und einem Emissionsverhältnis von 0,06 sein. Der Temperaturfühler der Sonde hat dann praktisch nur mit dem Schutzschild Strahlungsaustausch, der an das Auspuffrohr durch Strahlung Wärme abgibt und durch Konvektion Wärme vom Abgas aufnimmt. Das Röhrchen können wir in guter Näherung als ebene Platte berechnen. Die Länge des Röhrchens ist seine charakteristische Länge. Die *Reynoldszahl* errechnet sich zu:

$$Re_l = c \cdot l / \nu = 25 \cdot 0,02 / 162 \cdot 10^{-6} = 3\,086$$

Die *Nußeltzahl* wird mit Gl. (3.21) berechnet.

$$Nu_{l,lam} = 0,664 \cdot \sqrt[3]{Pr} \cdot \sqrt{Re_l} = 0,664 \cdot \sqrt[3]{0,74} \cdot \sqrt{3\,086} = 33,42$$

Bei erzwungener Konvektion ist die Wärmeübergangszahl damit:

$$\alpha = \frac{Nu_{l,lam} \cdot \lambda}{d} = \frac{33,42 \cdot 0,076 \cdot \text{W}}{0,02 \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{K}} = 127,0 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Da das Röhrchen durch die erzwungene Konvektion sowohl innen als auch außen Wärme vom Gas aufnimmt, Wärme jedoch durch Strahlung nur nach außen an das Auspuffrohr abgibt, muss für den konvektiv transferierten Wärmestrom die doppelte Fläche eingesetzt werden.

$$\dot{Q}_{konv} = \alpha \cdot 2 \cdot A \cdot (T_0 - T_{Rohr})$$

Beide Wärmeströme gleichgesetzt und nach der Temperatur T_{Rohr} aufgelöst, ergeben:

$$T_{Rohr} = T_0 - \frac{\varepsilon_{Rohr} \cdot C_s}{2 \cdot \alpha} \cdot [(T_{Rohr} / 100)^4 - (T_w / 100)^4] =$$

$$= 1\,249 \text{ K} - \frac{0,06 \cdot 5,67}{2 \cdot 130,9 \cdot K^3} \cdot [(T_{Rohr} / 100)^4 - 5,232^4 \cdot K^4] = \mathbf{947,1 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

Die Gastemperatur ist damit um 27,6 K höher als die Temperatur des Röhrchens. Die Abweichung der Temperatur an der Sonde kann wie zuvor wie die Temperatur des Röhrchens berechnet werden. Für die Berechnung der Temperatur der Sonde setzt man die Wärmeübergangszahl an der Sonde und die Wandtemperatur des Röhrchens ein.

$$T_0 - T_s = \frac{\varepsilon \cdot C_s}{\alpha} \cdot \left[(T_s / 100)^4 - (T_{Rohr} / 100)^4 \right] =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 5,67}{401 \cdot \text{K}^3} \cdot \left[(T_s / 100)^4 - 12,202^4 \cdot \text{K}^4 \right] = \mathbf{8,51 \text{ K}}$$

Diskussion

Dieses Beispiel zeigt, dass durch Strahlung bei der Temperaturmessung von Gasen gravierende Fehler auftreten können. Insbesondere bei hohen Temperaturen sind die Fehler erheblich, da die Differenz $T_1^4 - T_2^4$ schon bei kleineren Temperaturunterschieden groß wird. In unserem Beispiel verursacht ein Temperaturunterschied von 27 K bei 950 °C zwischen Sonde und Röhrchen einen Fehler von 8,51 K. Bei Temperaturen unterhalb von 100 °C wäre dieser Fehler kleiner als 0,28 K.

Um die Fehler zu verringern, ist bei Glasthermometern zur Messung der Raumtemperatur ein metallischer Strahlungsschild um den Temperaturfühler angebracht.

7.3 Gasstrahlung

Wie Feststoffe oder Flüssigkeiten können auch einige Gase Strahlung emittieren und absorbieren. Die elementaren Gase wie z.B. O_2 , N_2 , H_2 , zweiatomige Gase und Edelgase sind diatherm, d.h. sie sind für Wärmestrahlen durchlässig. Andere Gase und Dämpfe wie z.B. H_2O , CO_2 , SO_2 , NH_3 und CH_4 sind wirksame Strahler, die innerhalb enger Wellenlängenbereiche (Banden) Strahlen emittieren und absorbieren (Selektivstrahler, Bandenstrahler). Die Strahlungsintensität von Kohlenwasserstoffen nimmt mit der Zahl der Atome pro Molekül zu. Bezüglich der technischen Belange kann die trockene Luft als diatherm betrachtet werden, da sie nur geringe Anteile an CO_2 enthält. Mit der Zunahme des CO_2 -Anteils in der Luft nimmt auch die Strahlungsfähigkeit der Luft zu. Die von der Erdoberfläche emittierten Wärmestrahlen werden vom CO_2 absorbiert und wieder an die Erde zurückgestrahlt, was zum Treibhauseffekt führt.

Die von einem Gas durch Absorption aus einer Wärmestrahlung aufgenommene Wärme ist vom Weg s der Strahlung durch das Gas abhängig. Die Abnahme der Strahlungsintensität durch eine Gasschicht der Dicke s ist im gesamten Wellenlängenbereich:

$$i = i_0 \cdot e^{-a \cdot s} \quad (7.26)$$

Dabei ist a die *Absorptionskonstante des Gases*. Die vom Gas absorbierte Intensität beträgt damit:

$$i_{\alpha} = i_0 - i = i_0 \cdot (1 - e^{-a \cdot s}) \quad (7.27)$$

Das Absorptionsverhältnis eines Gases wird definiert als:

$$\alpha_g = 1 - e^{-a \cdot s} \quad (7.28)$$

Die Absorptionskonstante eines Gases hängt von der Temperatur und dem Druck des Gases ab. Der Raum, der vom Gas eingenommen wird, kann recht komplex sein. An Stelle der Schichtdicke kann ähnlich wie beim hydraulischen Durchmesser eine *gleichwertige Schichtdicke* s_{gl} mit dem Volumen V_g und der Oberfläche A_g des Gasraumes berechnet werden.

$$s_{gl} = f \cdot \frac{4 \cdot V_g}{A_g} \quad (7.29)$$

Der Korrekturfaktor f berücksichtigt die Geometrie und den Druck, der den ungefähren Wert von 0,9 hat.

7.3.1 Emissionsverhältnisse von Rauchgasen

Insbesondere in Brennräumen ist die Gasstrahlung für technische Berechnungen von Wichtigkeit. Die dabei auftretenden strahlungsfähigen Gase sind Wasserdampf und Kohlendioxid. Das Brenngas im Brennraum besteht im Wesentlichen aus Stickstoff, unverbranntem Sauerstoff und je nach Zusammensetzung des Brennstoffes aus unterschiedlich großen Anteilen von Wasserdampf und Kohlendioxid. Bei den folgenden Berechnungen wird angenommen, dass das Brenngas eine Mischung aus nicht strahlungsfähigen Gasen (Stickstoff und Sauerstoff), aus Wasserdampf und Kohlendioxid ist. Hier wird nur die Strahlung staubfreier Gase bei 1 bar Druck behandelt. Korrekturen für höhere Drücke und der Einfluss von Feststoffpartikeln im Gas können dem VDI-Wärmeatlas [7.1] entnommen werden.

Das *Emissionsverhältnis* des Gemisches ist:

$$\varepsilon_g = \varepsilon_{H_2O} + \varepsilon_{CO_2} - (\Delta\varepsilon)_g \quad (7.30)$$

Das Absorptionsverhältnis wird ähnlich angegeben:

$$\alpha_g = \alpha_{H_2O} + \alpha_{CO_2} - (\Delta\varepsilon)_g \quad (7.31)$$

Die Korrekturen $\Delta\varepsilon$ ist den Diagrammen in Bild 7.10 zu entnehmen.

7.3.1.1 Emissionsverhältnisse des Wasserdampfes

In Bild 7.7 und 7.8 sind die Emissionsverhältnisse des Wasserdampfes und der Korrekturfaktor f in Abhängigkeit vom Partialdruck des Wasserdampfes, des Druckes und der Temperatur angegeben. Das Emissionsverhältnis bei Gasen ist nicht immer wie bei festen Körpern gleich dem Absorptionsverhältnis. Ist die Temperatur der Wand T_w nicht gleich wie die Temperatur des Gases T_g , gilt folgende Beziehung:

$$\alpha_{gW} = \varepsilon_{gW} \cdot (T_g / T_w)^{0,45} \quad (7.32)$$

Dabei ist α_{gW} das Absorptionsverhältnis des Wasserdampfes an der Wand. Aus dem Diagramm in Bild 7.7 kann ε_{gW} entnommen werden. Es ist zu berücksichtigen, dass der Partialdruck auf die Wandtemperatur umzurechnen ist.

$$p_{H_2O,W} = p_{H_2O} \cdot (T_w / T_g) \quad (7.33)$$

7.3.1.2 Emissionsverhältnisse des Kohlendioxids

In Bild 7.9 sind die Emissionsverhältnisse des Kohlendioxids in Abhängigkeit vom Partialdruck des Kohlendioxids und der Temperatur angegeben. Wie beim Wasserdampf muss hier der Einfluss der Wandtemperatur berücksichtigt werden.

$$\alpha_{gW} = \varepsilon_{gW} = (T_g / T_w)^{0,65} \quad (7.34)$$

Das Absorptionsverhältnis des Gases an der Wand ist α_{gW} , aus dem Diagramm in Bild 7.9 entnimmt man ε_{gW} . Ferner ist zu beachten, dass der Partialdruck auf die Wandtemperatur umgerechnet werden muss.

$$p_{CO_2,W} = p_{CO_2} \cdot (T_w / T_g) \quad (7.35)$$

7.3.2 Wärmeaustausch zwischen Gas und Wand

Für den Wärmestrom zwischen dem Gasvolumen und der dieses Volumen umschließenden Wand gilt:

$$\dot{Q}_{gW} = \frac{\varepsilon_w \cdot C_s \cdot A}{1 - (1 - \varepsilon_w) \cdot (1 - \alpha_{gW})} \cdot \left[\varepsilon_g \cdot \left(\frac{T_g}{100} \right)^4 - \alpha_{gW} \cdot \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right] \quad (7.36)$$

In den meisten Fällen ist die Wandtemperatur wesentlich kleiner als die Gas-temperatur. Der Einfluss des zweiten Temperaturterms wird relativ gering. Daher kann in vielen Fällen mit folgender vereinfachter Gleichung gerechnet werden:

$$\dot{Q}_{gW} \approx \frac{\varepsilon_g \cdot \varepsilon_w \cdot C_s \cdot A}{1 - (1 - \varepsilon_w) \cdot (1 - \alpha_{gW})} \cdot \left(\frac{T_g}{100} \right)^4 \quad (7.37)$$

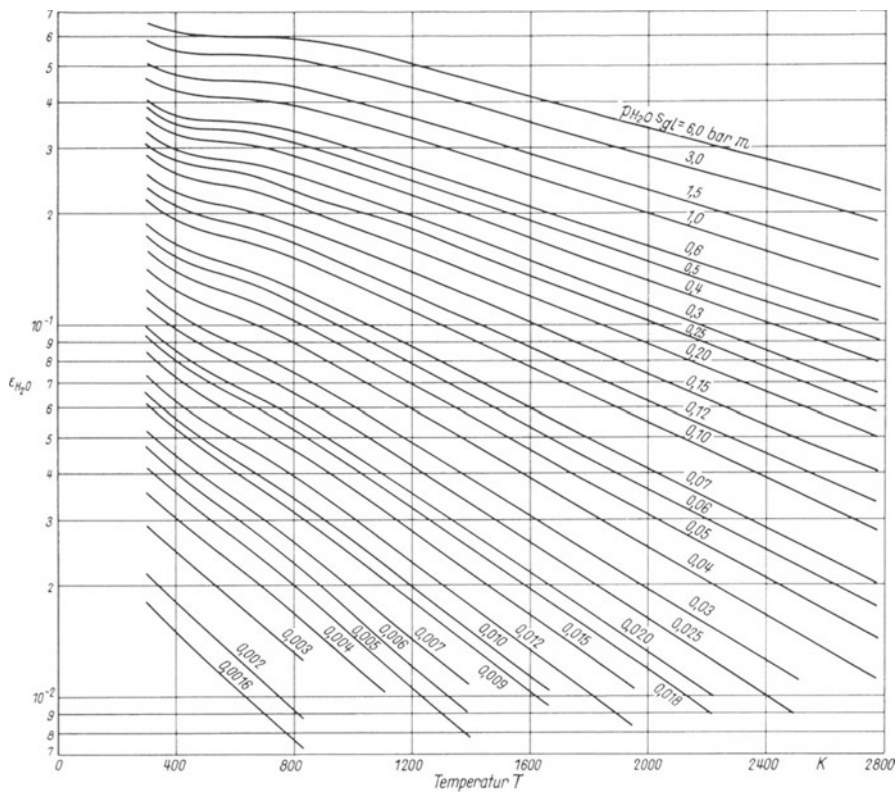


Bild 7.7: Emissionsverhältnis des Wasserdampfes (Quelle: VDI-Wärmeatlas)

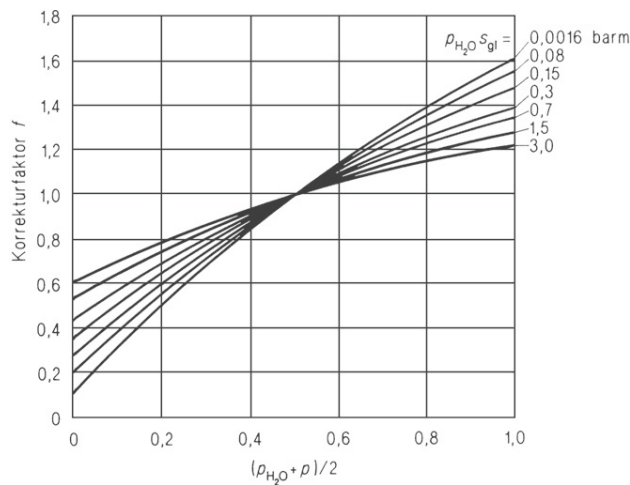


Bild 7.8: Korrekturfaktor für den Wasserdampf (Quelle: VDI-Wärmeatlas)

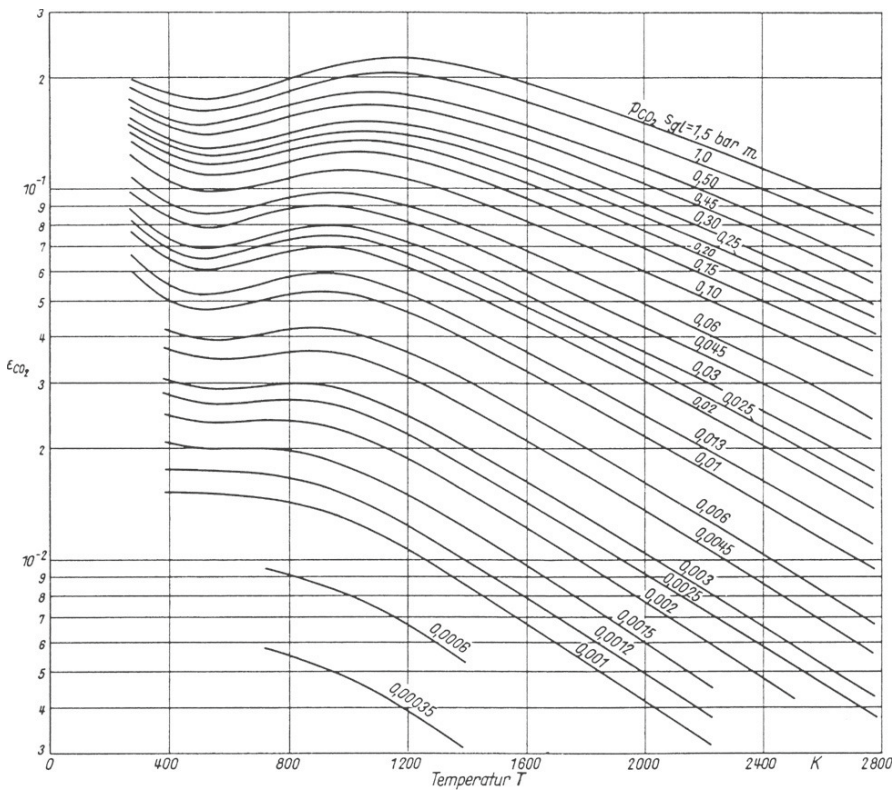


Bild 7.9: Emissionsverhältnisse des Kohlendioxids (Quelle: VDI-Wärmeatlas)

BEISPIEL 7.5: Heizleistung eines Feuerraumes

Der würfelförmige Feuerraum eines Kessels hat eine Kantenlänge von 0,5 m. Die Wandtemperatur beträgt 600 °C, die Gastemperatur 1 400 °C. Das Emissionsverhältnis der Wand ist 0,9. Das Brenngas enthält 12 Vol% Wasserdampf und 10 Vol% CO₂. Der Gesamtdruck beträgt 1 bar.

Bestimmen Sie den durch Gasstrahlung an die Wand abgegebenen Wärmestrom.

Lösung

Annahmen

- Das Brenngas ist homogen.
- Die Temperatur im Feuerraum ist konstant.

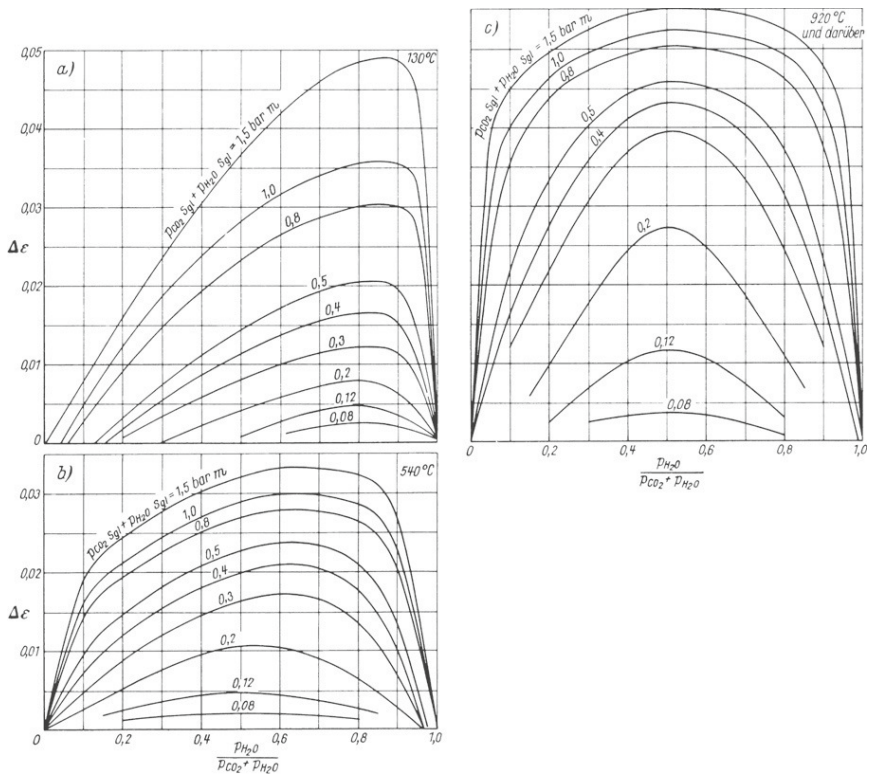


Bild 7.10: Korrektur $\Delta\epsilon$ für Gasmischungen mit Kohlendioxid und Wasserdampf bei a) 130 °C, b) 540 °C, c) 920 °C und darüber (Quelle: VDI-Wärmeatlas)

Analyse

Der Wärmestrom wird mit Gl. (7.38) berechnet. Dazu müssen die Emissions- und Absorptionsverhältnisse bestimmt werden. Die gleichwertige Schichtdicke nach Gl. (7.29) ist:

$$s_{gl} = f \cdot \frac{4 \cdot V_g}{A_g} = 0,9 \cdot \frac{4 \cdot a^2}{6 \cdot a} = 0,6 \cdot a = 0,3 \text{ m}$$

Für die Bestimmung des Emissionsverhältnisses von Wasserdampf und CO_2 muss das Produkt aus Partialdruck und gleichwertiger Schichtdicke gebildet werden. Der Partialdruck ist gleich dem Volumenanteil des Gases.

$$p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot s_{gl} = 0,12 \cdot 0,3 = 0,036 \text{ bar} \cdot \text{m}$$

$$p_{\text{CO}_2} \cdot s_{gl} = 0,1 \cdot 0,3 = 0,03 \text{ bar} \cdot \text{m}$$

Aus den Diagrammen in den Bildern 7.7 bis 7.9 erhält man für die Emissionsverhältnisse:

$$f = 1,06 \quad \varepsilon_{H_2O} = 0,025 \quad \varepsilon_{CO_2} = 0,04$$

Die Korrektur $\Delta\varepsilon$ kann aus dem Diagramm 7.10 c) abgelesen werden und ist $\Delta\varepsilon = 0,002$.

Das Emissionsverhältnis des Gases berechnet sich mit Gl. (7.31):

$$\varepsilon_g = \varepsilon_{H_2O} + \varepsilon_{CO_2} - (\Delta\varepsilon)_g = 1,06 \cdot 0,025 + 0,04 - 0,002 = 0,0645$$

Die Emissions- und Absorptionskoeffizienten an der Wand werden aus den Diagrammen in den Bildern 7.8 und 7.9 abgelesen und mit den Gln. (7.34) bis (7.37) bestimmt. Das Produkt aus der Schichtdicke und dem Partialdruck an der Wand ist:

$$s_{gl} \cdot p_{H_2O,W} = s_{gl} \cdot p_{H_2O} \cdot T_W / T_g = 873 / 1\,673 \cdot 0,036 \text{ bar} \cdot \text{m} = 0,019 \text{ bar} \cdot \text{m}$$

$$s_{gl} \cdot p_{CO_2,W} = s_{gl} \cdot p_{CO_2} \cdot T_W / T_g = 0,016 \text{ bar} \cdot \text{m}$$

Aus den Diagrammen in den Bildern 7.7 bis 7.9 erhält man für die Emissionsverhältnisse an der Wand:

$$f = 1,06 \quad \varepsilon_{H_2O,W} = 0,047 \quad \varepsilon_{CO_2,W} = 0,066$$

Das Emissionsverhältnis des Brenngases an der Wand ist:

$$\varepsilon_{gW} = f \cdot \varepsilon_{H_2O,W} + \varepsilon_{CO_2,W} - (\Delta\varepsilon)_{gW} = 1,06 \cdot 0,067 + 0,058 - 0,002 = 0,114$$

Die Absorptionsverhältnisse von Kohlendioxid und Wasserdampf an der Wand sind:

$$\alpha_{H_2O,W} = \varepsilon_{H_2O,W} \cdot (T_g / T_W)^{0,45} = 0,063 \quad \alpha_{CO_2,W} = \varepsilon_{CO_2,W} \cdot (T_g / T_W)^{0,65} = 0,101$$

Das Absorptionsverhältnis des Brenngases an der Wand ist:

$$\alpha_{gW} = \alpha_{H_2O,W} + \alpha_{CO_2,W} - (\Delta\varepsilon)_{gW} = 0,063 + 0,101 - 0,002 = 0,161$$

Diese Werte in Gl. (7.36) eingesetzt, ergeben den Wärmestrom.

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{gW} &= \frac{\varepsilon_W \cdot C_s \cdot A}{1 - (1 - \varepsilon_W) \cdot (1 - \alpha_{gW})} \cdot \left[\varepsilon_g \cdot \left(\frac{T_g}{100} \right)^4 - \alpha_{gW} \cdot \left(\frac{T_W}{100} \right)^4 \right] = \\ &= \frac{0,9 \cdot 5,67 \cdot \text{W} \cdot 6 \cdot 0,5^2 \cdot \text{m}^2}{1 - (1 - 0,9) \cdot (1 - 0,162) \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot [0,0645 \cdot 16,73^4 - 0,162 \cdot 8,73^4] \cdot \text{K}^4 = \mathbf{34,38 \text{ kW}} \end{aligned}$$

Diskussion

Bei dieser Berechnung wird davon ausgegangen, dass das Brenngas eine konstante Temperatur hat. In den Brennraum eines Kessels wird Luft eingeblasen und zusammen mit dem Brennstoff entsteht unter Flammenbildung das Brenngas. Durch Strahlung, aber auch durch erzwungene Konvektion wird die Temperatur des Brenngases abgekühlt. Im Bereich der Flammen erfolgt der Wärmetransfer hauptsächlich durch Strahlung. Die Strahlung der im Brenngas enthaltenen, noch nicht verbrannten Rußpartikel liefern einen zusätzlichen Anteil zur Strahlung, der hier unberücksichtigt blieb.

8 Wärmeübertrager

Bei der Berechnung von Wärmeübertragern sind ganz unterschiedliche Aufgaben zu behandeln:

- Auslegung von Wärmeübertragern: Massenströme und Temperaturen der Fluide sind vorgegeben, die Abmessungen des Wärmeübertragers müssen berechnet werden.
- Nachrechnung von Wärmeübertragern: Die Temperaturänderungen der Fluide werden in einem Wärmeübertrager bekannter Geometrie berechnet.
- Optimierung von Wärmeübertragern und Systemen.
- Festigkeitsrechnungen und Konstruktion von Wärmeübertragern.

In der industriellen Praxis geht die Auslegung von Wärmeübertragern Hand in Hand mit der Optimierung und Konstruktion der Apparate. Hier wird nur die thermische Berechnung von Wärmeübertragern beschrieben.

Bei den bisher behandelten *Wärmeübertragern* handelte es sich um Gleich- und Gegenstromapparate oder Fälle, in denen ein Fluidstrom seine Temperatur konstant hielt (Kondensation oder Verdampfung). Für die Berechnung von Wärmeübertragern, in denen die beiden Fluide kreuzweise strömen, genügen die bisherigen Kenntnisse nicht.

8.1 Definitionen und grundlegende Gleichungen

Bild 8.1 zeigt das Schema eines Wärmeübertragers mit den wichtigsten Bezeichnungen der Stoffströme [8.1].

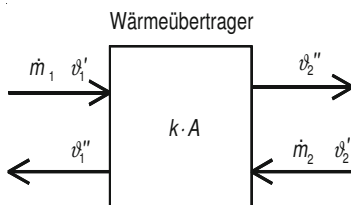


Bild 8.1: Schematische Darstellung eines Wärmeübertragers

Der Stoffstrom 1 strömt in den Wärmeübertrager mit der Temperatur ϑ_1' und verlässt ihn mit Temperatur ϑ_1'' . Der Stoffstrom 2 strömt in den Wärmeübertrager mit

der Temperatur ϑ'_2 und verlässt ihn mit Temperatur ϑ''_2 . Die Aufwärmung und Abkühlung der Fluide hängt von deren Massenströmen, Eintrittstemperaturen, spezifischen Wärmekapazitäten und der Wärmedurchgangszahl bzw. der Fläche des Wärmeübertragers ab. Der im Wärmeübertrager ausgetauschte Wärmestrom ist:

$$\dot{Q}_{12} = k \cdot A \cdot \Delta\vartheta_m \quad (8.1)$$

In Gl. (8.1) wird davon ausgegangen, dass der Wärmeübertrager eine mittlere konstante Wärmeübergangszahl hat. Dieses ist in den meisten Fällen durchaus realistisch, da fast immer die mittleren Wärmedurchgangszahlen bestimmt werden.

Ändert sich in einem Apparat die Art der Wärmeübertragung wie beispielsweise dann, wenn der Dampf bei der Kondensation in einem Rohr vollständig kondensiert und als Flüssigkeit weiterströmt, muss abschnittsweise mit lokalen Wärmedurchgangszahlen gerechnet werden.

Die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_m$ ist:

$$\Delta\vartheta_m = \frac{1}{A} \cdot \int_A (\vartheta_1 - \vartheta_2) \cdot dA \quad (8.2)$$

Die lokale Temperaturdifferenz der Fluide 1 und 2 ist $\vartheta_1 - \vartheta_2$. Für den Gegenstrom- und Gleichstrom-Wärmeübertrager und in Apparaten, in denen zumindest ein Fluid eine konstante Temperatur hat, ist die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz (Kapitel 1):

$$\Delta\vartheta_m = \frac{\Delta\vartheta_{gr} - \Delta\vartheta_{kl}}{\ln(\Delta\vartheta_{gr} / \Delta\vartheta_{kl})} \quad \text{für } \Delta\vartheta_{gr} - \Delta\vartheta_{kl} \neq 0 \quad (8.3)$$

$$\Delta\vartheta_m = (\Delta\vartheta_{gr} + \Delta\vartheta_{kl}) / 2 \quad \text{für } \Delta\vartheta_{gr} \approx \Delta\vartheta_{kl} \quad (8.4)$$

Die Temperaturdifferenzen zwischen den Fluidströmen am Ein- bzw. am Austritt des Wärmeübertragers sind $\Delta\vartheta_{gr}$ und $\Delta\vartheta_{kl}$, wobei $\Delta\vartheta_{gr}$ die größere und $\Delta\vartheta_{kl}$ die kleinere Differenz ist. Früher wurde in Gl. (8.4) der Grenzwert für $\Delta\vartheta_{gr} - \Delta\vartheta_{kl} < 1 \text{ K}$ angegeben. Bei Wärmeübertragern mit kleinen Temperaturdifferenzen kann dieses falsche Ergebnisse liefern. Mit den heutigen Taschenrechnern und Computern wird bei sehr kleinen Differenzen (z. B. 0,0001 K) die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz mit Gl. (8.4) richtig berechnet.

In der Energiebilanzgleichung erhält man aus der Enthalpieänderung der Fluidströme den Wärmestrom.

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \dot{m}_1 \cdot (h_{11} - h_{12}) \\ \dot{Q} &= -\dot{m}_2 \cdot (h_{21} - h_{22}) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Die Enthalpie h_{11} ist die des Fluids 1 am Eintritt, h_{12} die am Austritt. Entsprechend ist die Enthalpie h_{21} die des Fluids 2 am Eintritt und h_{22} die am Austritt. Gl. (8.5) gilt

allgemein, also auch bei der Strömung mit Phasenübergang. Bei Fluiden ohne Phasenübergang können die Enthalpien mit der Temperatur berechnet werden.

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \dot{m}_1 \cdot c_{p1} \cdot (\vartheta_1' - \vartheta_1'') \\ \dot{Q} &= -\dot{m}_2 \cdot c_{p2} \cdot (\vartheta_2' - \vartheta_2'')\end{aligned}\quad (8.6)$$

Bei einphasigen Fluiden wird hier der *Wärmekapazitätsstrom* eingeführt.

$$\begin{aligned}\dot{W}_1 &= \dot{m}_1 \cdot (h_{11} - h_{12}) / (\vartheta_1' - \vartheta_1'') = \dot{m}_1 \cdot c_{p1} \\ \dot{W}_2 &= \dot{m}_2 \cdot (h_{21} - h_{22}) / (\vartheta_2' - \vartheta_2'') = \dot{m}_2 \cdot c_{p2}\end{aligned}\quad (8.7)$$

Um allgemein gültige Beziehungen für Wärmeübertrager einfacher anzugeben, führen wir die folgenden dimensionslosen Größen ein:

Tabelle 8.1: Dimensionslose Größen zur Berechnung von Wärmeübertragern

Dimensionslose mittlere Temperaturdifferenz:

$$\Theta = \frac{\text{mittlere log. Temperaturdifferenz}}{\text{größte Temperaturdifferenz im System}} = \frac{\Delta \vartheta_m}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} \quad (8.8)$$

Dimensionslose Temperaturänderungen der Fluidströme:

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{\text{Änderung der Temperaturdifferenz des Fluids 1}}{\text{größte Temperaturdifferenz im System}} = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} \\ P_2 &= \frac{\text{Änderung der Temperaturdifferenz des Fluids 2}}{\text{größte Temperaturdifferenz im System}} = \frac{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}{\vartheta_1' - \vartheta_2'}\end{aligned}\quad (8.9)$$

Anzahl der Übertragungseinheiten NTU der Fluidströme:

$$\begin{aligned}NTU_1 &= \frac{\text{Temperaturänderung des Fluids 1}}{\text{mittlere log. Temperaturdifferenz}} = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1''}{\Delta \vartheta_m} = \frac{k \cdot A}{\dot{W}_1} \\ NTU_2 &= \frac{\text{Temperaturänderung des Fluids 2}}{\text{mittlere log. Temperaturdifferenz}} = \frac{\vartheta_2' - \vartheta_2''}{\Delta \vartheta_m} = \frac{k \cdot A}{\dot{W}_2}\end{aligned}\quad (8.10)$$

Wärmekapazitätsstromverhältnisse der beiden Fluidströme:

$$R_1 = \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} = \frac{1}{R_2} \quad (8.11)$$

Zwischen diesen dimensionslosen Größen ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{NTU_1}{NTU_2} = \frac{1}{R_1} = R_2 \quad (8.12)$$

$$\Theta = \frac{P_1}{NTU_1} = \frac{P_2}{NTU_2} \quad (8.13)$$

8.2 Berechnungskonzepte

Es gibt eine große Reihe von Berechnungsverfahren für Wärmeübertrager, die sich durch das Anwendungsgebiet sowie durch den Rechenaufwand und die Genauigkeit unterscheiden. Am genauesten, aber auch am rechenaufwändigsten sind das Differenzenverfahren und die schrittweise Berechnung. Bei diesen Methoden wird ein Wärmeübertrager abschnittsweise berechnet, wobei die Strömungsverhältnisse, die Wärmeübergangszahlen und Temperaturen lokal berücksichtigt werden können. Auf diese Verfahren wird hier jedoch nicht eingegangen.

8.2.1 Zellenmethode

Bei der *Zellenmethode* wird die Wärmeübertragerfläche in Teilbereiche unterteilt, die nacheinander in gleicher oder unterschiedlicher Reihenfolge von beiden Fluidströmen oder Anteilen der Fluidströme überströmt werden. Jede Teilfläche wird als Fläche eines Einzelapparates mit individuellen Ein- und Austrittstemperaturen aufgefasst. Jedem Apparat wird eine möglichst realistische Stromführung zugeordnet. So entsteht an Stelle eines Gesamtapparates ein System aus zusammengeschalteten Einzelapparaten [8.2, 8.3].

Mit den für die jeweilige Stromführung gültigen Gleichungen können an Hand der gegebenen Eintrittstemperaturen jeder Zelle die Austrittstemperaturen berechnet werden, wenn der Wert von $k \cdot A$ bekannt ist. Die Berechnung von $k \cdot A$ erfolgt mit den entsprechenden Beziehungen für Wärmeübergangszahlen.

Beginnend mit den gegebenen Eintrittstemperaturen der Fluidströme erhält man bei n Zellen $2n$ Gleichungen mit $2n$ unbekannten Austrittstemperaturen. Das Gleichungssystem liefert alle Zwischentemperaturen und die Austrittstemperaturen beider Fluidströme. Die individuellen Temperaturen in den Zellen und damit die Stoffwerte und Wärmeübergangszahlen berechnet man mit den Zwischentemperaturen. Unterschiedliche Wärmeübergangszahlen und Flächen können für die einzelnen Zellen eingesetzt werden. Sind die Temperaturänderungen nicht allzu groß und ist die Stromführung nicht unterschiedlich (z.B. Strömung in den Rohren und außen Querströmung), kann für den gesamten Apparat eine Wärmedurchgangszahl genommen werden. Vielfach sind die Wärmeübertrager so konzipiert, dass die Flächen der Zellen und die mittleren Wärmedurchgangszahlen in allen Zellen gleich

groß sind. In einem solchen Fall kann man für alle Zellen mit dem gleichen Wert für $k \cdot A$ rechnen. Der NTU -Wert ist dann auch für die einzelnen Fluidströme jeweils konstant. Die Zahl der inneren Flüsse wird mit n , die der äußeren mit z bezeichnet. Die Zahl der Flüsse ist die Anzahl der Umlenkungen plus 1.

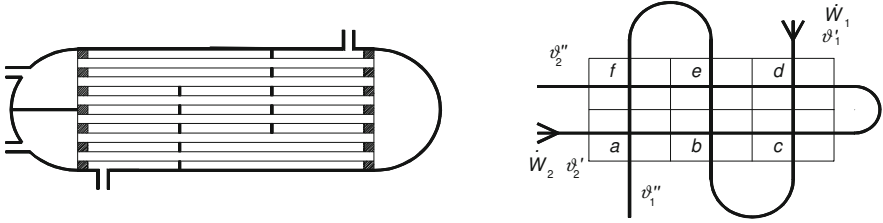


Bild 8.2: Links Wärmeübertrager mit zwei inneren und drei äußeren Flüssen im Längsschnitt, rechts das Zellenmodell

Die Zellenmethode wird an einem Rohrbündelwärmeübertrager mit zwei inneren Flüssen ($n = 2$) und mit zwei äußeren Umlenkblechen, d.h. drei Flüssen ($z = 3$), wie in Bild 8.2 dargestellt, veranschaulicht. Vereinfachend kann man annehmen, dass die Werte von $k \cdot A$ im gesamten Apparat konstant und die Flächen in den Zellen gleich groß sind. Der Apparat hat sechs Zellen, die unterschiedlich durchströmt und mit Buchstabenindizes gekennzeichnet sind. Für den Gesamtapparat gilt:

$$NTU_{1ges} = \frac{k \cdot A}{c_{p1} \cdot \dot{m}_1} \quad NTU_{2ges} = \frac{k \cdot A}{c_{p2} \cdot \dot{m}_2} = R_1 \cdot NTU_{1ges} \quad (8.14)$$

Da der Wert von $k \cdot A$ konstant ist und die Flächen der Zellen gleich groß sind, gilt für die einzelnen Zellen:

$$NTU_1 = \frac{k \cdot A_i}{c_{p1} \cdot \dot{m}_1} = \frac{NTU_{1ges}}{n \cdot z}$$

$$NTU_2 = \frac{k \cdot A_i}{c_{p2} \cdot \dot{m}_2} = \frac{NTU_{2ges}}{n \cdot z} = R_1 \cdot NTU_1 \quad (8.15)$$

Die Stromführung der Zelle (z.B. reiner Kreuzstrom oder Kreuzstrom mit quer vermishtem Mantelstrom und unvermishtem Rohrstrom etc.) bestimmt die dimensionslosen Temperaturen der Zelle. Für eine beliebige Zelle j werden sie folgendermaßen definiert:

$$T_{1j} = \frac{\vartheta_{1j} - \vartheta'_2}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} \quad \text{und} \quad T_{2j} = \frac{\vartheta_{2j} - \vartheta'_2}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} \quad (8.16)$$

Die Zelle j wird mit dem Fluidstrom 1 aus der Zelle p und mit dem Fluidstrom 2 aus der Zelle q angeströmt (Bild 8.3).

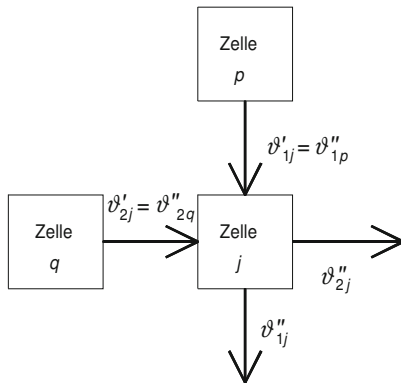


Bild 8.3: Temperaturen der Zelle j

Für die Temperaturen erhalten wir folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} (1 - P_{1j}) \cdot T_{1p}'' - T_{1j}'' + P_{1j} \cdot T_{2q}'' &= 0 \\ (1 - P_{2j}) \cdot T_{2q}'' - T_{2j}'' + P_{2j} \cdot T_{1p}'' &= 0 \end{aligned} \quad (8.17)$$

Bei P_{1j} und P_{2j} sind die Ein- beziehungsweise Austrittstemperaturen der Zelle in Gl. (8.7) einzusetzen.

$$P_{1j} = \frac{\vartheta'_{1j} - \vartheta''_{1j}}{\vartheta'_{1j} - \vartheta'_{2j}} \quad \text{und} \quad P_{2j} = \frac{\vartheta'_{2j} - \vartheta''_{2j}}{\vartheta'_{1j} - \vartheta'_{2j}} \quad (8.18)$$

Ist die Zelle j die Eintrittszelle des Fluidstromes 1 oder 2, gilt:

$$T_{1p}'' = T'_{1j} = 1 \quad \text{und} \quad T_{2q}'' = T'_{2j} = 0 \quad (8.19)$$

Entsprechend gilt, wenn Zelle j die Austrittszelle des Fluidstromes 1 oder 2 ist:

$$P_{1\text{ges}} = 1 - T_{1j}'' \quad \text{und} \quad P_{2\text{ges}} = T_{2j}'' \quad (8.20)$$

Für unser Beispiel erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} T_{2a}'' &= P_{2a} \cdot T_{1f}'' & T_{1a}'' &= (1 - P_{1a}) \cdot T_{1f}'' + P_{1a} \cdot T_{2a}'' = 1 - P_{1\text{ges}} \\ T_{2b}'' &= (1 - P_{2b}) \cdot T_{2a}'' + P_{2b} \cdot T_{1c}'' & T_{1b}'' &= (1 - P_{1b}) \cdot T_{1c}'' + P_{1b} \cdot T_{2a}'' \\ T_{2c}'' &= (1 - P_{2c}) \cdot T_{2b}'' + P_{2c} \cdot T_{1d}'' & T_{1c}'' &= (1 - P_{1c}) \cdot T_{1d}'' + P_{1c} \cdot T_{2b}'' \\ T_{2d}'' &= (1 - P_{2d}) \cdot T_{2c}'' + P_{2d} & T_{1d}'' &= (1 - P_{1d}) + P_{1d} \cdot T_{2c}'' \\ T_{2e}'' &= (1 - P_{2e}) \cdot T_{2d}'' + P_{2e} \cdot T_{1b}'' & T_{1e}'' &= (1 - P_{1e}) \cdot T_{1b}'' + P_{1e} \cdot T_{2d}'' \\ T_{2f}'' &= (1 - P_{2f}) \cdot T_{2e}'' + P_{2f} \cdot T_{1e}'' = P_{2\text{ges}} & T_{1f}'' &= (1 - P_{1f}) \cdot T_{1e}'' + P_{1f} \cdot T_{2e}'' \end{aligned}$$

Damit haben wir 12 Gleichungen mit 12 unbekannten Temperaturen, die nach bekannten mathematischen Methoden gelöst werden können. Solange k bzw. $k \cdot A$ für alle Zellen gleich angenommen werden kann und die Größen P_1 und P_2 jeweils gleich groß sind, ist die Lösung relativ einfach. In realistischen Fällen ist für jede Zelle der Wert von $k \cdot A$ unterschiedlich und muss sogar einzeln berechnet werden. Nachstehend sind Lösungen für einige Strömungsführungen angegeben.

reiner Gegenstrom

$$P_i = \frac{1 - \exp[(R_i - 1) \cdot NTU_i]}{1 - R_i \cdot \exp[(R_i - 1) \cdot NTU_i]} \quad \text{für } R_i \neq 1$$

$$P_1 = P_2 = \frac{NTU}{1 + NTU} \quad \text{für } R_1 = 1 \quad (8.21)$$

reiner Gleichstrom

$$P_i = \frac{1 - \exp[-(R_i + 1) \cdot NTU_i]}{1 + R_i} \quad (8.22)$$

reiner Kreuzstrom

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[1 - e^{-NTU_i} \cdot \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \cdot NTU_i^j \right] \cdot \\ & \cdot \left[1 - e^{-R_i \cdot NTU_i} \cdot \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \cdot NTU_i^j \right] \end{aligned} \right\} i = 1, 2 \quad (8.23)$$

Kreuzstrom mit einer Rohrreihe

$$P_1 = 1 - \exp[(e^{-R_1 \cdot NTU_1} - 1) / R_1] \quad (8.24)$$

Die Berechnungen nach der Zellenmethode sind in der Regel nur mit Computern möglich. Einfacher können Wärmeübertrager mit der mittleren Temperaturdifferenz berechnet werden.

BEISPIEL 8.1: Berechnung eines Wärmeübertragers mit der Zellenmethode

Die Stromführung des Wärmeübertragers besteht aus zwei inneren und zwei äußeren Durchgängen mit einer mantelseitigen Umlenkung. Die für die Wärmeübertragung maßgebende Größe $k \cdot A$ ist für alle Zellen gleich und beträgt 4 000 W/K. Der Strom im Außenraum hat den Index 1. Um die Berechnung zu vereinfachen, werden die beiden Wärmekapazitätsströme \dot{W}_1 und \dot{W}_2 mit 3 500 W/K gleich groß gewählt. Die Eintrittstemperatur des Stromes 1 ist $\vartheta'_1 = 100^\circ\text{C}$ und die des Stromes 2 $\vartheta'_2 = 20^\circ\text{C}$.

Zu bestimmen sind die Austrittstemperaturen ϑ''_1 und ϑ''_2 .

Diese acht linearen Gleichungen können mit bekannten mathematischen Methoden nach den dimensionslosen Temperaturen T_{ix} aufgelöst und in Celsiusstemperaturen umgewandelt werden. Die Ergebnisse folgen tabellarisch:

$$T_{1j} = \frac{\vartheta_{1j} - \vartheta'_2}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = \frac{\vartheta_{1j} - 20\text{ °C}}{80\text{ K}} \quad \text{und} \quad T_{2j} = \frac{\vartheta_{2j} - \vartheta'_2}{\vartheta'_1 - \vartheta'_2} = \frac{\vartheta_{2j} - 20\text{ °C}}{80\text{ K}}$$

T_{2a}	T_{2b}	T_{2c}	T_{2d}	T_{1a}	T_{1b}	T_{1c}	T_{1d}
0,153	0,306	0,458	0,5	0,542	0,694	0,847	0,5
ϑ_{2a}	ϑ_{2b}	ϑ_{2c}	ϑ_{2d}	ϑ_{1a}	ϑ_{1b}	ϑ_{1c}	ϑ_{1d}
32,2	44,5	56,6	60	63,4	75,5	87,8	60,0 °C

Die gesamten Temperaturänderungen $P_{1\text{ ges}}$ und $P_{2\text{ ges}}$ sind mit 0,5 jeweils gleich groß, d.h., die Austrittstemperaturen sind ebenfalls mit je 60 °C gleich groß.

Diskussion

Die Zellenmethode ist nur mit Computerprogrammen ökonomisch berechenbar. Das o. a. einfache Beispiel erfordert bereits einen großen Rechenaufwand.

Es zeigt, dass die Stromführung ungünstig ist, weil beide Fluidströme auf dem Weg zur Zelle *d* bereits fast die gleiche Temperatur von 60 °C haben und somit in dieser Zelle nur wenig Wärme transferiert wird. Ein etwas günstigeres Ergebnis erzielt man, wenn der Eintritt des Fluidstromes 1 in Zelle *d* erfolgt.

8.2.2 Berechnung mit der mittleren Temperatur

Die Berechnung des Wärmestromes mit der mittleren Temperatur ist in Gl. (8.1) gegeben. Die mittlere Temperatur kann nur für Gleich- und Gegenstromwärmeübertrager berechnet werden. Mit der Zellenmethode kann man die mittleren Temperaturen für komplexe Stromführungen bestimmen. In den Bildern 8.5 bis 8.12 sind die berechneten mittleren Temperaturen für einige Stromführungen dargestellt. Aus den Diagrammen lassen sich mit Hilfe der dimensionslosen Temperaturen P_1 und P_2 die Kenngrößen NTU_1 und NTU_2 bestimmen. Daraus kann mit Gl. (8.13) die dimensionslose Temperaturdifferenz Θ ermittelt und mit Gl. (8.8) die mittlere Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_m$ berechnet werden.

Anhand von Bild 8.4 wird die Benutzung der Diagramme erläutert. Auf den Koordinatenachsen sind die dimensionslosen Temperaturdifferenzen P_1 und P_2 der Stoffströme 1 und 2 aufgetragen. Am Randmaßstab oben ist das Verhältnis des Wärmekapazitätsstromes R_1 eingezeichnet, rechts das Verhältnis des Wärmekapazitätsstromes R_2 . Hier ist darauf zu achten, dass nur die kleinere der beiden Größen, d.h. die, die kleiner als 1 ist, verwendet werden kann.

Im Diagramm sind zwei Kurvenscharen eingetragen. Die durchgezogenen Kurven oberhalb der Diagonale sind für $NTU_1 = \text{konst.}$, die unterhalb für $NTU_2 = \text{konst.}$. Die gestrichelte Kurve gilt für den Korrekturfaktor F , der definiert ist als:

$$F = \frac{\Delta\vartheta_m}{\Delta\vartheta_{mG}} = \frac{\Delta\vartheta_m \cdot (\Delta\vartheta_{gr} - \Delta\vartheta_{kl})}{\ln(\Delta\vartheta_{gr} / \Delta\vartheta_{kl})} = \frac{NTU_{iG}}{NTU_i} \quad (8.25)$$

Der Index G steht für einen reinen Gegenstromwärmeübertrager.

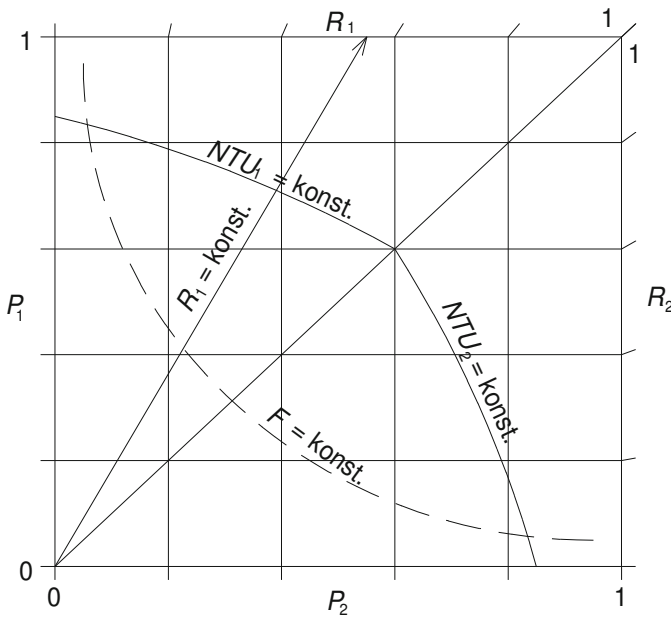


Bild 8.4: Zur Benutzung des Diagramms

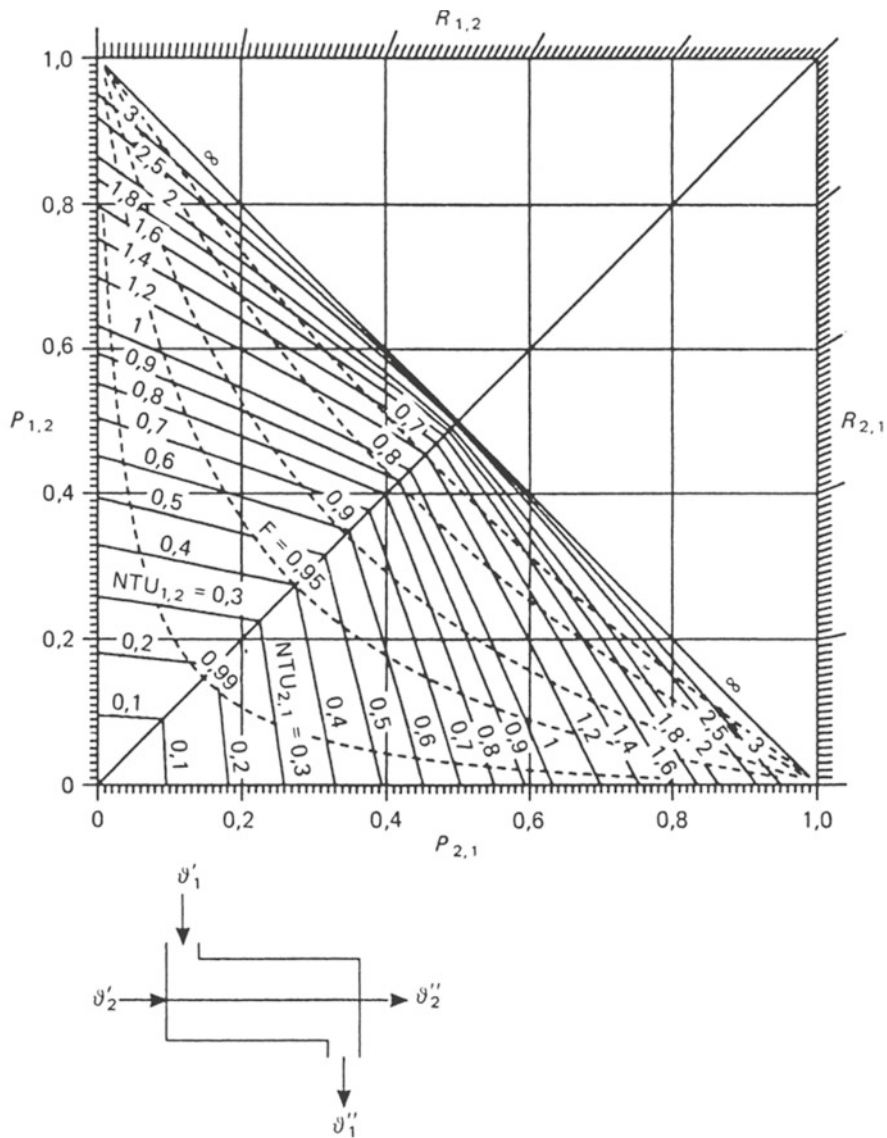


Bild 8.5: Reiner Gleichstrom (Quelle: VDI-Wärmeatlas, 9. Aufl.)

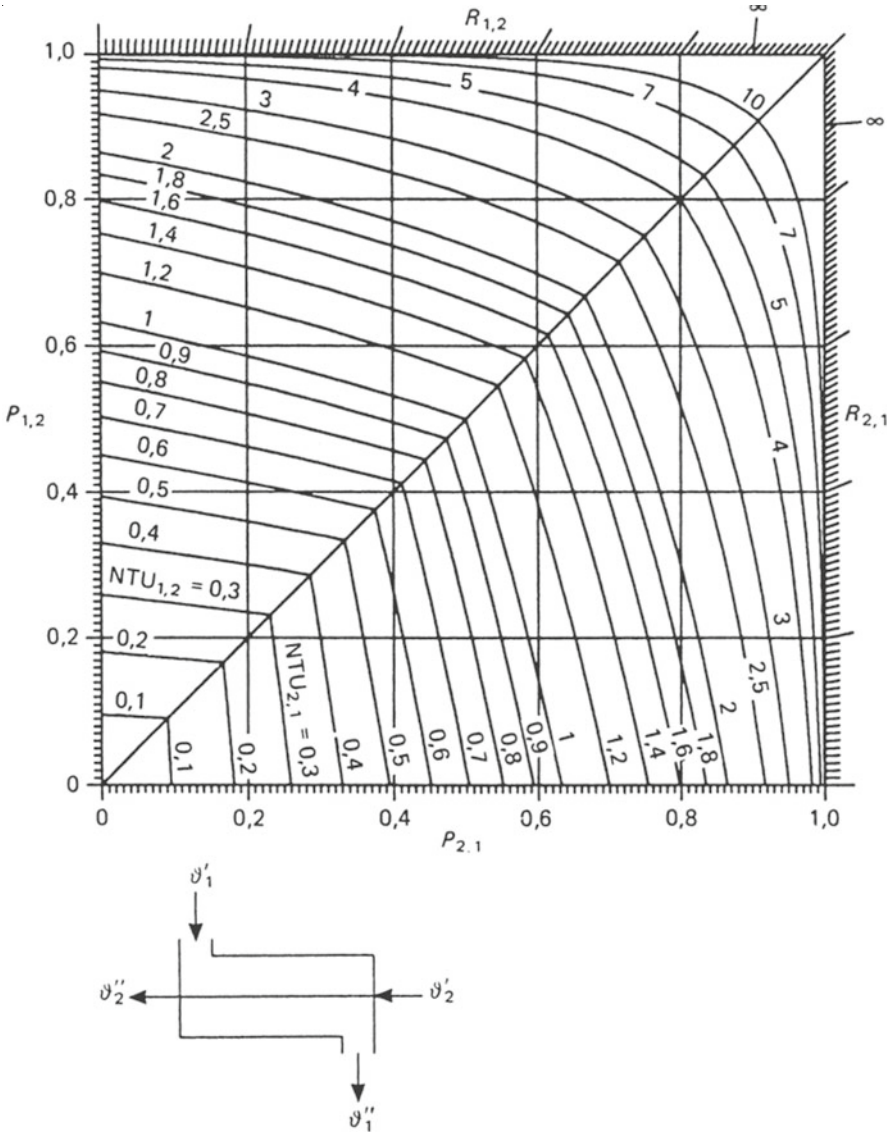


Bild 8.6: Reiner Gegenstrom (Quelle: VDI-Wärmeatlas, 9. Aufl.)

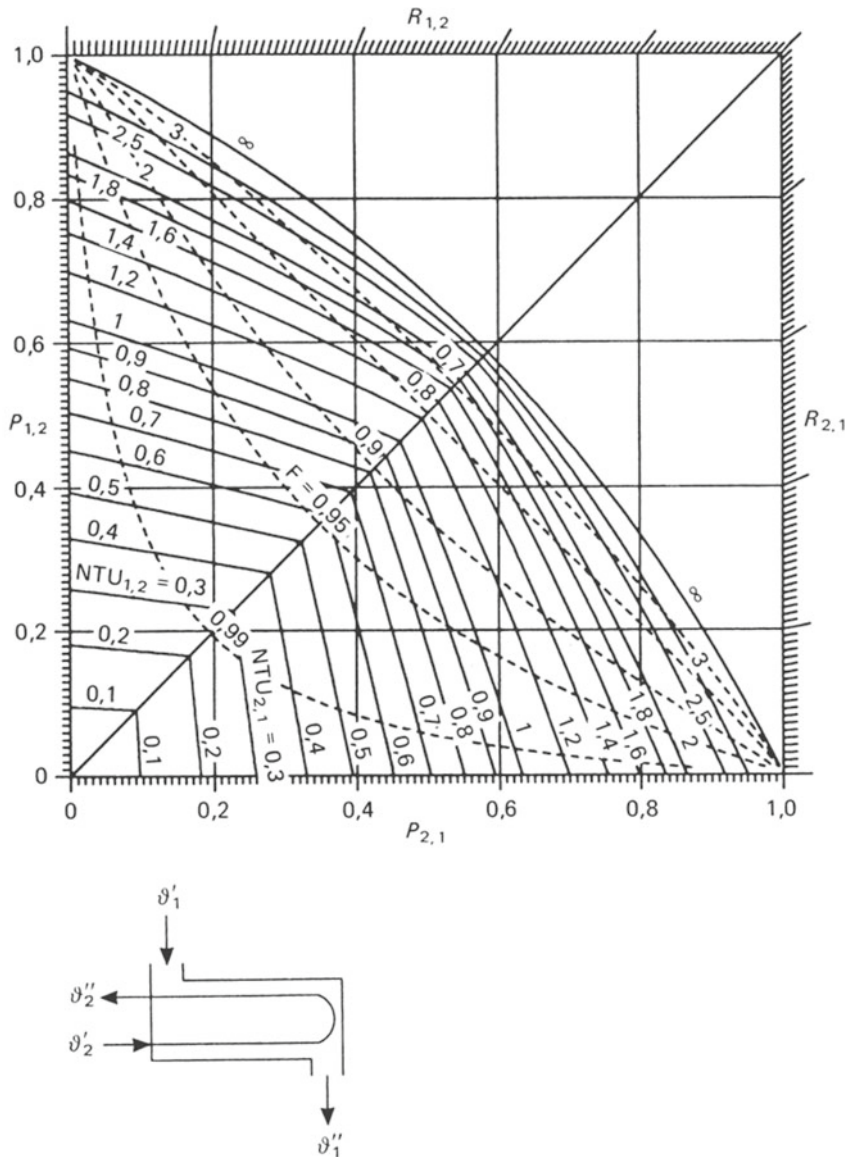


Bild 8.7: Rohrbündelwärmeübertrager mit einem äußeren und zwei inneren Durchgängen
(Quelle: VDI-Wärmeatlas, 9. Aufl.)

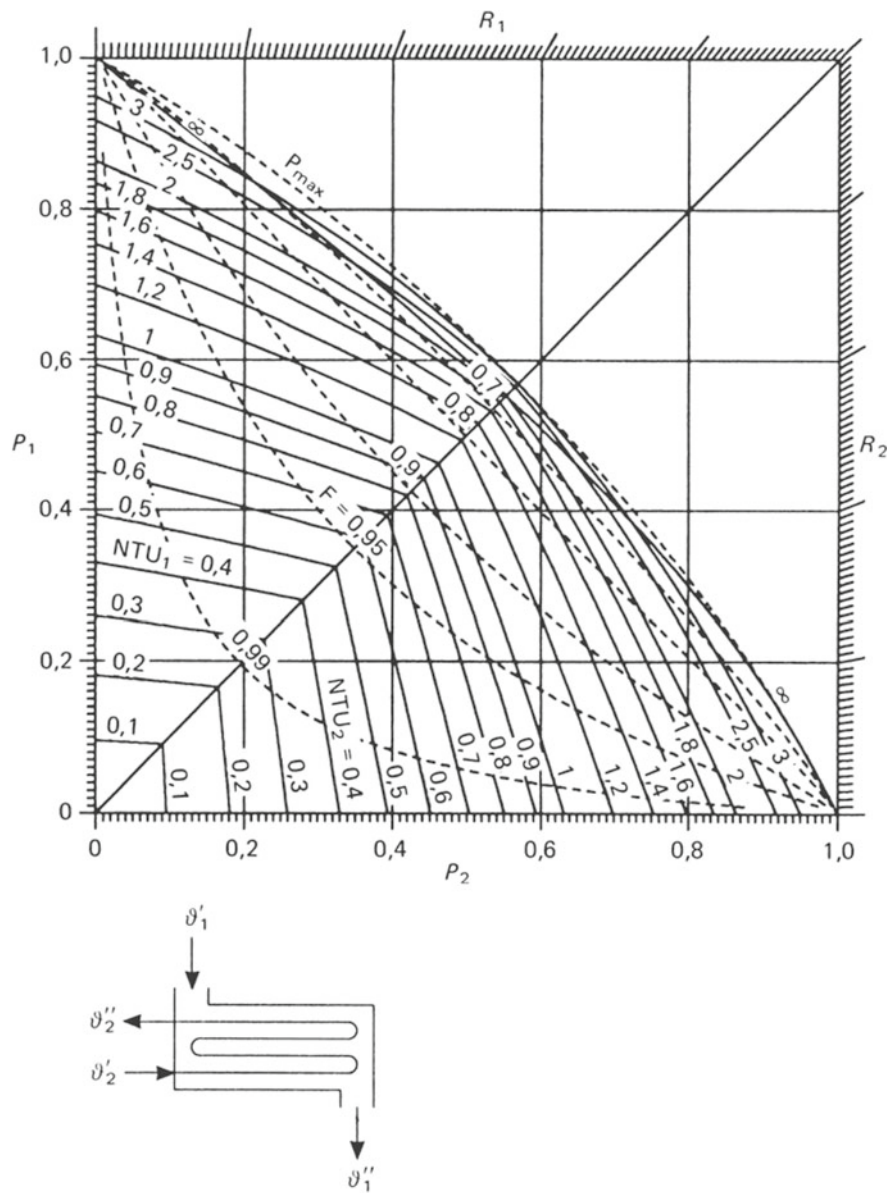


Bild 8.8: Rohrbündelwärmeübertrager mit einem äußeren und vier inneren Durchgängen
(Quelle: VDI-Wärmeatlas, 9. Aufl.)

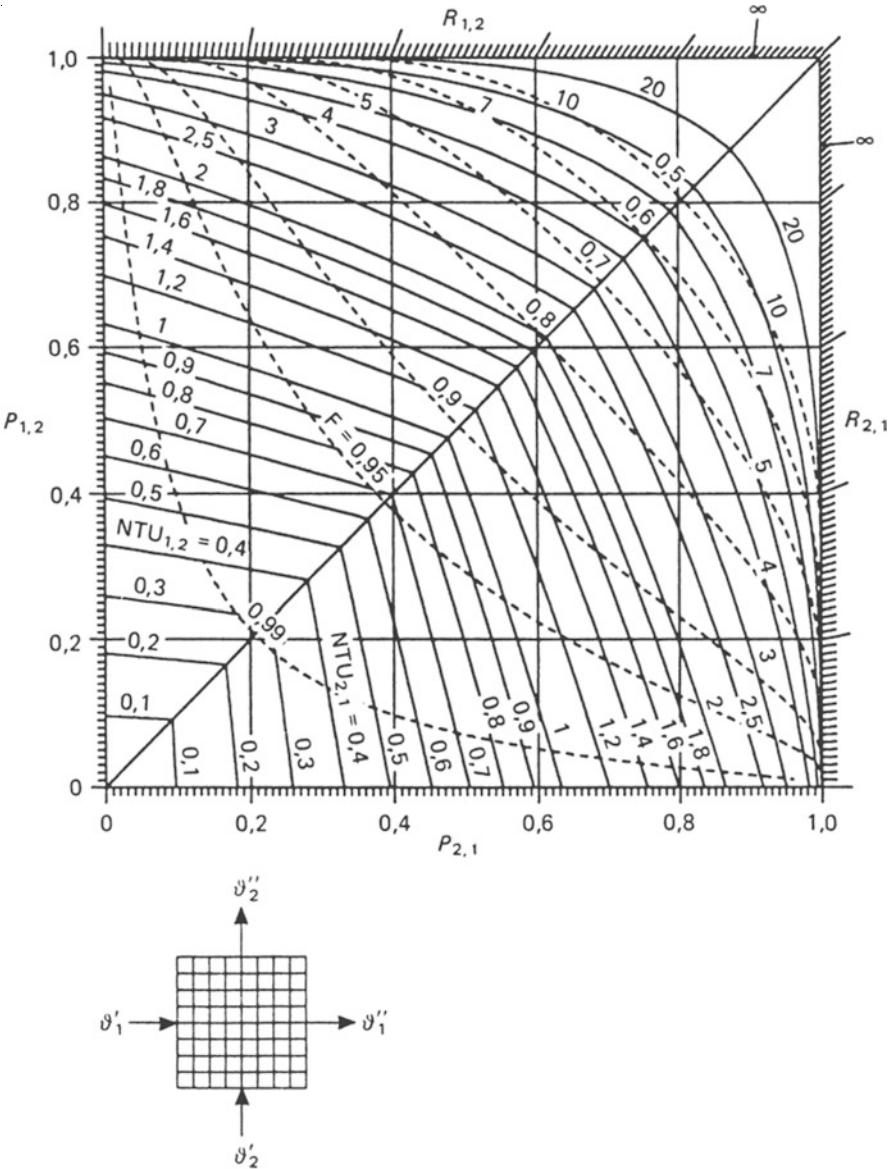


Bild 8.9: Reiner Kreuzstrom (Quelle: VDI-Wärmeatlas, 9. Aufl.)

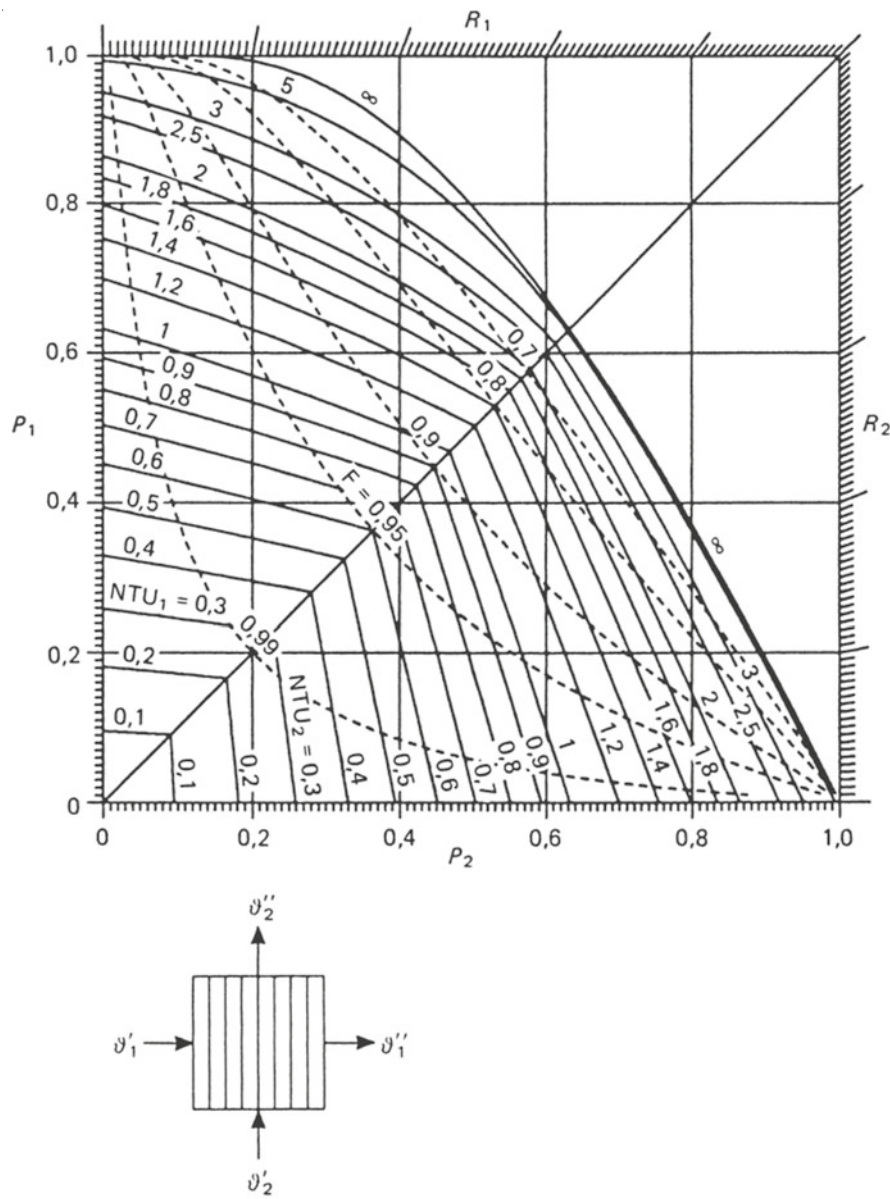


Bild 8.10: Kreuzstrom mit einer Rohrreihe und einseitig quer vermishtem Kreuzstrom (Quelle: VDI-Wärmeatlas, 9. Aufl.)

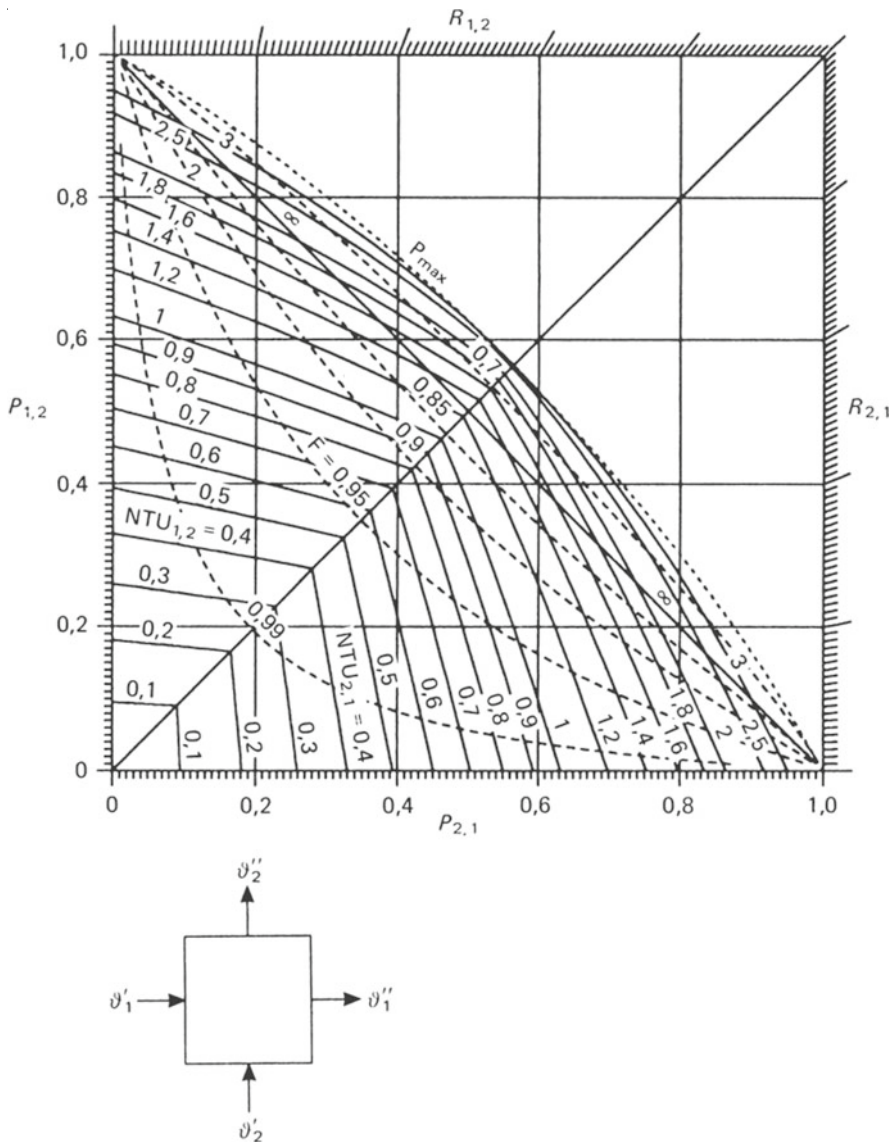


Bild 8.11: Beidseitig quer vermischter Kreuzstrom (Quelle: VDI-Wärmeatlas, 9. Aufl.)

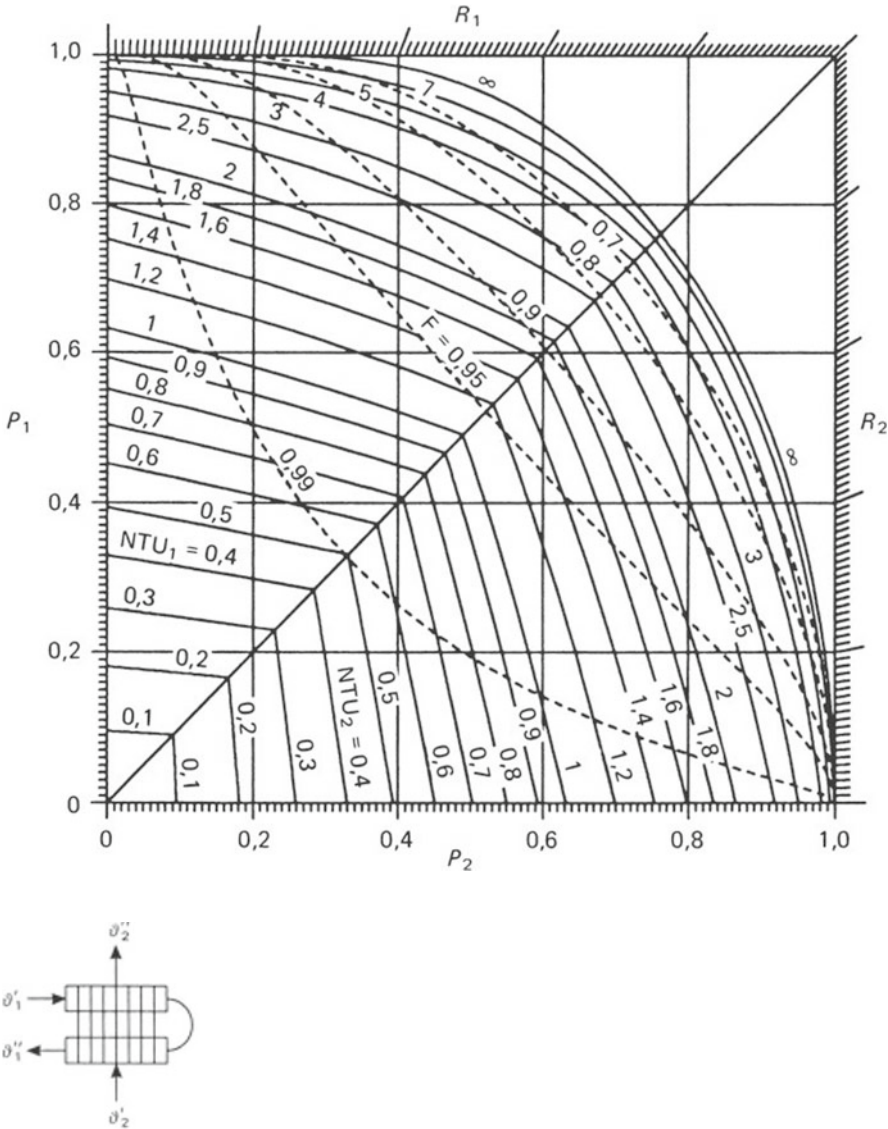


Bild 8.12: Kreuzstrom mit zwei Rohrreihen und zwei Durchgängen (Quelle: VDI-Wärme-atlas, 9. Aufl.)

BEISPIEL 8.2: Auslegung eines Autokühlers

Ein Autokühler soll bei 45 °C Außentemperatur 50 kW Wärme abführen. Dabei wird das Kühlwasser von 94 °C auf 91 °C abgekühlt. Die Luft strömt im Kühler mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s. Die rechteckigen Wasserkanäle des Kühlers haben eine Wandstärke von 1 mm und äußere Kantenlängen von 50 und 6 mm. An den Kanälen sind in 1 mm Abstand Rippen mit 0,3 mm Dicke angelötet. Die Länge der Kühlwasserkanäle ist 550 mm. Der Abstand der Kühlkanäle beträgt 60 mm. Die Kanalwände und Rippen haben eine Wärmeleitfähigkeit von 120 W/(m K). Die Stoffwerte des Kühlwassers und der Luft sind:

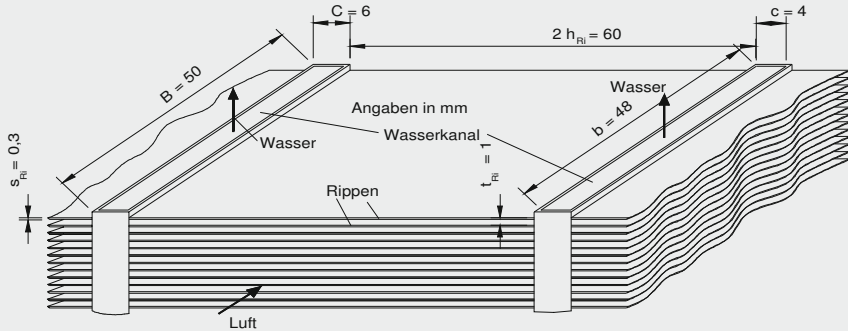
Wasser: $\rho = 963,6 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 0,676 \text{ W/(m K)}$, $\nu = 0,317 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr = 1,901$, $c_p = 4,208 \text{ kJ/(kg K)}$.

Luft: $\rho = 1,078 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 0,028 \text{ W/(m K)}$, $\nu = 18,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr = 0,711$, $c_p = 1,008 \text{ kJ/(kg K)}$.

Bestimmen Sie, wie viele Kanäle benötigt werden.

Lösung

Schema Siehe Skizze

**Annahmen**

- Im gesamten Kühler sind die Wärmedurchgangszahlen gleich groß.
- Der Einfluss der Richtung des Wärmestromes wird nicht berücksichtigt.

Analyse

Im Folgenden hat das Kühlwasser den Index 1, die Luft den von 2. Der Massenstrom des Kühlwassers kann mit der Energiebilanzgleichung berechnet werden:

$$\dot{m}_1 = \frac{\dot{Q}}{c_{p1} \cdot (\vartheta_1' - \vartheta_1'')} = \frac{50 \cdot \text{kW} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{4,208 \cdot \text{kJ} \cdot (94 - 91) \cdot \text{K}} = 3,961 \text{ kg/s}$$

Der Massenstrom der Luft hängt von der Anzahl der Kühlkanäle ab. Jeweils die Hälfte der Rippe, d.h. 30 mm, gehören zu einem Kühlwasserkanal. Pro Kühlkanal ist der Strömungsquerschnitt für die Luft:

$$A_2 = 2 \cdot h_{Ri} \cdot (t_{Ri} - s_{Ri}) \cdot n = 2 \cdot h_{Ri} \cdot (t_{Ri} - s_{Ri}) \cdot H / t_{Ri} = 2 \cdot h_{Ri} \cdot (1 - s_{Ri} / t_{Ri}) \cdot H = \\ = 2 \cdot 0,03 \cdot 0,7 \cdot 0,55 \cdot \text{m}^2 = 0,0231 \text{ m}^2$$

Der Luftmassenstrom durch den Kühler ist damit:

$$\dot{m}_2 = z \cdot A_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2 = z \cdot 0,0231 \cdot \text{m}^2 \cdot 1,078 \cdot \text{kg/m}^3 \cdot 20 \cdot \text{m/s} = z \cdot 0,498 \text{ kg/s}$$

Mit ansteigender Zahl der Kanäle nimmt der Massenstrom der Luft zu, der Massenstrom des Kühlwassers pro Kanal jedoch ab.

Jetzt sind die Wärmeübergangszahlen zu bestimmen.

Die Luftkanäle zwischen den Rippen haben den hydraulischen Durchmesser von:

$$d_{h2} = 4 \cdot h_{Ri} \cdot (t_{Ri} - s_{Ri}) / [2 \cdot (t_{Ri} - s_{Ri} + h_{Ri})] = 2 \cdot 30 \cdot 0,7 \cdot \text{mm}^2 / (30,7 \cdot \text{mm}) = 1,368 \text{ mm}$$

Die *Reynoldszahl* für die Luft ist:

$$Re_2 = c_2 \cdot d_{h2} / \nu_2 = 20 \cdot 0,001368 / (18,25 \cdot 10^{-6}) = 1499$$

Die Strömung ist laminar; die *Nußeltzahl* kann mit Gl. (3.17) und daraus wiederum die Wärmeübergangszahl berechnet werden.

$$Nu_{d_i, lam} = \sqrt[3]{3,66^3 + 0,644^3 \cdot Pr \cdot (Re_{d_{h2}} \cdot d_{h2} / l)^{3/2}} = \\ = \sqrt[3]{3,66^3 + 0,644^3 \cdot 0,711 \cdot (1499 \cdot 1,37 / 50)^{3/2}} = 4,698 \\ \alpha_2 = \frac{Nu_{d_i, lam} \cdot \lambda_2}{d_{h2}} = \frac{4,698 \cdot 0,028 \cdot \text{W}}{0,001368 \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{K}} = 96,2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Mit der Anzahl der Kanäle ändert sich die Wärmeübergangszahl in der Luft nicht, d.h., sie bleibt konstant.

Im Kühlwasserkanal ist der hydraulische Durchmesser:

$$d_{h1} = 4 \cdot b \cdot c / [2 \cdot (b + c)] = 2 \cdot 48 \cdot 4 \cdot \text{mm}^2 / (52 \cdot \text{mm}) = 7,385 \text{ mm}$$

Der Massenstrom des Kühlwassers teilt sich auf die Kanäle auf, damit ist seine Geschwindigkeit umgekehrt proportional zur Anzahl der Kanäle.

$$c_1 = \frac{\dot{m}_1}{z \cdot A_1 \cdot \rho_1} = \frac{\dot{m}_1}{z \cdot b \cdot c \cdot \rho_1} = \frac{3,961 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^3}{z \cdot 0,048 \cdot \text{m} \cdot 0,004 \cdot \text{m} \cdot 963,6 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}} = \frac{21,421}{z} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Reynoldszahl:

$$Re_1 = \frac{c_1 \cdot d_{h1}}{\nu_1} = \frac{21,421 \cdot 0,00738}{z \cdot 0,317 \cdot 10^{-6}} = \frac{499015}{z}$$

Für brauchbare Werte von z bleibt die Strömung in den Kanälen turbulent. Wegen der besseren Übersicht verwenden wir die vereinfachte Gleichung (3.14) und vernachlässigen die Korrektur der Reynoldszahl.

$$Nu_{d_{h1}} = 0,0235 \cdot (Re_{d_{h1}}^{0,8} - 230) \cdot Pr^{0,48} \cdot [1 + (d_{h1} / l_1)^{2/3}] = 1222,7 \cdot z^{-0,8} - 7,773$$

Die von z abhängige Wärmeübergangszahl ist:

$$\alpha_1 = Nu_{d_{h1}} \cdot \lambda_1 / d_{h1} = (111932 \cdot z^{-0,8} - 711,5) \cdot W / (m^2 \cdot K)$$

Um die Wärmedurchgangszahl mit Gl. (3.46) zu berechnen, müssen der Rippenwirkungsgrad und die Flächen A , A_0 und A_{Ri} bestimmt werden. Gl. (2.58) gibt den Rippenwirkungsgrad an.

$$\eta_{Ri} = \frac{\tanh(m \cdot h_{Ri})}{m \cdot h_{Ri}} = 0,444 \quad \text{mit} \quad m = \sqrt{\frac{\alpha_2 \cdot U_{Ri}}{\lambda_{Ri} \cdot A_{Ri}}} = \sqrt{\frac{\alpha_2 \cdot 2 \cdot (B + s_{Ri})}{\lambda_{Ri} \cdot B \cdot s_{Ri}}} = \frac{73,31}{m}$$

$$A = 2 \cdot (C + B) \cdot H = 0,0616 m^2 \quad A_0 = 2 \cdot B \cdot H \cdot (1 - s_{Ri} / t_{Ri}) = 0,0385 m^2$$

$$A_{Ri} = 2 \cdot h_{Ri} \cdot B \cdot H / t_{Ri} = 1,65 m^2$$

Die Wärmedurchgangszahl beträgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(z)} &= \frac{A}{A_0 + A_{Ri} \cdot \eta_{Ri}} \cdot \frac{1}{\alpha_a} + \frac{s_o}{\lambda_R} + \frac{A}{A_i} \cdot \frac{1}{\alpha_i} = \\ &= \frac{A}{A_0 + A_{Ri} \cdot \eta_{Ri}} \cdot \frac{1}{\alpha_a} + \frac{s_o}{\lambda_R} + \frac{C+B}{c+b} \cdot \frac{1}{\alpha_i} = \left(\frac{1}{1191} + \frac{1}{111932 \cdot z^{-0,8} - 711,5} \right) \frac{m^2 \cdot K}{W} \end{aligned}$$

Die Austrittstemperatur der Luft und damit die dimensionslose Temperatur, das Verhältnis des Wärmekapazitätsstromes und die mittlere Temperaturdifferenz des reinen Gegenstromübertragers sind auch von z abhängig. Damit die mittlere Temperaturdifferenz des Kühlers bestimmt werden kann, tragen wir die Werte der erwähnten Größen tabellarisch auf. Der Korrekturfaktor F kann dem Diagramm in Bild 8.9 entnommen werden.

Die Austrittstemperatur der Luft ist:

$$\vartheta_2'' = \vartheta_2' + \frac{\dot{Q}}{c_{p2} \cdot \dot{m}_2} = 45^\circ C + \frac{75 \cdot kW \cdot kg \cdot K \cdot s}{z \cdot 1,008 \cdot kJ \cdot 0,498 \cdot kg} = 45^\circ C + 99,6 K / z$$

Das Verhältnis der Wärmekapazitätsströme berechnet sich zu:

$$R_2 = \frac{\dot{m}_2 \cdot c_{p2}}{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}} = \frac{z \cdot 0,498 \cdot 1008}{3,961 \cdot 4\,208} = 0,03012 \cdot z$$

Solange z kleiner als 37 ist, bleibt R_2 kleiner als 1 und wir müssen unterhalb der Diagonale die Werte für F ermitteln. Die dimensionslose Temperatur P_2 können wir mit Gl. (8.9) bestimmen.

$$P_2 = \frac{\vartheta_2'' - \vartheta_2'}{\vartheta_1' - \vartheta_2'} = \frac{99,6 \text{ K}}{z \cdot 49 \text{ K}} = \frac{2,033}{z}$$

Mit einer angenommen Anzahl z der Kühlkanäle ermittelt man R_2 , P_2 , F , die mittlere Temperaturdifferenz, die Wärmedurchgangszahl $k(z)$ und berechnet damit die notwendige Fläche A_{tot} . Daraus bestimmt man die notwendige Anzahl der Kühlkanäle $z_{soll} = A_{tot}/A$.

$$A_{tot} = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta\vartheta_m} = \frac{\dot{Q}}{k \cdot F \cdot \Delta\vartheta_{mG}}$$

z	ϑ_2'' °C	R_2	P_2	F	$\Delta\vartheta_{mG}$ K	$\Delta\vartheta_m$ K	k W/(m ² K)	A_{tot} m ²	z_{soll}
6	61,6	0,18	0,34	0,992	38,4	38,1	1 135	1,158	19
19	50,2	0,57	0,11	0,996	44,8	44,6	1 054	1,064	17
17	50,9	0,51	0,12	0,996	44,4	44,2	1 065	1,061	17

Diskussion

Die Berechnung der mittleren Temperaturdifferenz ist mit Hilfe der Diagramme einfach durchführbar. Wie im o.a. Beispiel könnte man bei kleinen Temperaturänderungen der Stoffströme auch mit der mittleren Temperaturdifferenz eines Gegenstromwärmeübertragers rechnen.

8.3 Verschmutzungswiderstand

Bisher haben wir bei Wärmeübertragern den Wärmewiderstand in den Trennwänden berücksichtigt. Die Wärmeübertragerwände bestehen aus einem Feststoff (meistens Metall, seltener Kunststoff, Glas, Graphit etc.). Die Metalloberflächen sind in der Regel von einer Oxidschicht, deren Wärmeleitung kleiner als die des Metalls ist, überzogen. Weiterhin können sich durch die verwendeten Fluide und die in ihnen enthaltenen festen Bestandteile Ablagerungen auf der Oberfläche bilden. Ferner ist die Bildung dicker Oxidationsschichten (Rost) möglich. Auch die

gewollte Bildung sogenannter Schutzschichten gegen Korrosion (Kraftwerk Kondensatoren mit Messingrohren) stellen einen Widerstand dar.

Eine Rohrwand mit verschiedenen zusätzlichen Schichten hat einen größeren Wärmewiderstand als solche, die wir bisher berechneten. Der durch die Schichten verursachte zusätzliche Wärmewiderstand wird als *Verschmutzungswiderstand* oder *Fouling* (vom engl. fouling resistance) bezeichnet. Nachfolgend ist der Einfluss des Verschmutzungswiderstandes auf die Wärmedurchgangszahl für ein Rohr dargestellt. Für andere Geometrien wie z.B. für ebene Wände erfolgen die Berechnungen analog.

Unter Berücksichtigung der Schmutzschichten geht die exakte Berechnung der Wärmedurchgangszahl davon aus, dass sowohl an der Außen- als auch Innenwand des Rohres eine Verschmutzungsschicht entsteht. Dadurch wird der Innendurchmesser verringert, der Außendurchmesser vergrößert. Bild 8.13 illustriert diese Modellvorstellung.

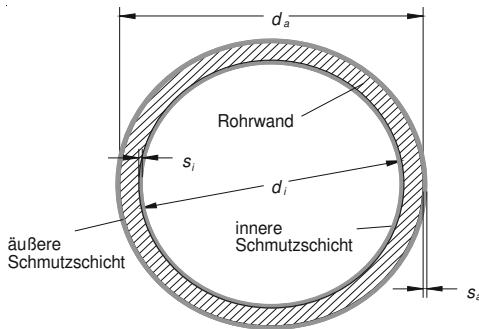


Bild 8.13: Verschmutzungswiderstand einer Rohrwand

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_a} \cdot \frac{d_a}{d_a + 2 \cdot s_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_{sa}} \cdot \ln \left(\frac{d_a + 2 \cdot s_a}{d_a} \right) + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \left(\frac{d_a}{d_i} \right) + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_{si}} \ln \left(\frac{d_i}{d_i - 2 \cdot s_i} \right) + \frac{d_a}{d_i - 2 \cdot s_i} \cdot \frac{1}{\alpha_i} \quad (8.26)$$

Dabei sind s_a und s_i die Dicken und λ_{sa} und λ_{si} die Wärmeleitfähigkeiten der äußeren und inneren Schmutzschicht. Meistens sind weder die exakte Dicke noch die Wärmeleitfähigkeit der Schmutzschicht bekannt. Aus Messungen kennt man die Verringerung der Wärmeübergangszahl und rechnet mit den aus Erfahrung bekannten Schmutzschichtwiderständen. In einigen Fällen sind die inneren und äußeren Verschmutzungswiderstände R_i und R_a bekannt. Meistens kennt man jedoch nur den kumulierten Verschmutzungswiderstand R_F .

$$\frac{1}{k} = R_a + R_i + \frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} + \frac{d_a}{d_i} \cdot \frac{1}{\alpha_i} = R_F + \frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} + \frac{d_a}{d_i} \cdot \frac{1}{\alpha_i} \quad (8.27)$$

Bedingt durch Verschmutzungswiderstände können die Wärmedurchgangszahlen wesentlich verringert sein, was verstärkt bei Wärmeübertragern mit großen Wärmedurchgangszahlen zum Tragen kommt. Für die Auslegung von Wärmeübertragern müssen die Verschmutzungswiderstände berücksichtigt und mit entsprechend größerer Fläche versehen werden.

Von einigen Herstellern, vor allem von solchen aus den USA, wird an Stelle des Verschmutzungswiderstandes ein *Verschmutzungsfaktor* ϕ (fouling factor) angegeben, der als multiplikativer Faktor die Verringerung der Wärmedurchgangszahl berücksichtigt.

$$k = k_{sauber} \cdot \phi = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} + \frac{d_a}{d_i} \cdot \frac{1}{\alpha_i} \right)^{-1} \cdot \phi \quad (8.28)$$

Ändern sich wegen äußerer Einflüsse die Wärmeübergangszahlen, liefert der Verschmutzungsfaktor bei kleineren Wärmedurchgangszahlen praktisch die gleichen Werte wie die, welche mit dem Verschmutzungswiderstand berechnet wurden. Bei großen Wärmedurchgangszahlen kann die Abweichung beträchtlich sein.

BEISPIEL 8.3: Berücksichtigung des Verschmutzungswiderstandes

Ein Kraftwerkkondensator hat bei 10 °C Kühlwasserein- und 20 °C Kühlwasser-
austrittstemperatur die Wärmedurchgangszahl von 3 540 W/(m² K) und die Sättigungstemperatur von 25 °C. Bei 25 °C Kühlwassereintrittstemperatur ist die Austrittstemperatur 35 °C. Die berechnete Sättigungstemperatur steigt auf 39 °C an. Der Verschmutzungswiderstand hat einen Wert von 0,0565 (m² K)/kW.

Bestimmen Sie die zu erwartende Sättigungstemperatur, wenn an Stelle des Verschmutzungswiderstandes ein Foulingfaktor von 0,80 verwendet wird.

Annahme

- Der dem Kondensator zugeführte Wärmestrom ist unabhängig von der Kühlwassertemperatur.

Analyse

Die Wärmestromdichte kann mit der kinetischen Kopplungsgleichung berechnet werden. Dazu wird zunächst die mittlere Temperaturdifferenz bei 10 °C Kühlwassereintrittstemperatur bestimmt.

$$\Delta\vartheta_m = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\ln\left(\frac{\vartheta_s - \vartheta_1}{\vartheta_s - \vartheta_2}\right)} = \frac{10 \text{ K}}{\ln(15/5)} = 9,102 \text{ K}$$

$$\dot{q} = k \cdot \Delta\vartheta_m = 3540 \cdot \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \cdot 9,102 \text{ K} = 32\,222 \text{ W/m}^2$$

Bei 25 °C Kühlwassertemperatur ist die mittlere Temperaturdifferenz:

$$\Delta\vartheta_m = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\ln\left(\frac{\vartheta_s - \vartheta_1}{\vartheta_s - \vartheta_2}\right)} = \frac{10 \text{ K}}{\ln(14/4)} = 7,982 \text{ K}$$

Das bedeutet, dass die Wärmedurchgangszahl bei der erhöhten Temperatur ansteigt.

$$k = \dot{q} / \Delta\vartheta_m = \frac{32\,225 \text{ W} / \text{m}^2}{7,982 \text{ K}} = 4,037 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$$

Die mit dem Verschmutzungswiderstand gerechneten "sauberen" Wärmedurchgangszahlen sind:

$$k_{\text{sauber}, 10^\circ\text{C}} = (1/k - R_v)^{-1} = (1/3540 - 0,0565 \cdot 10^{-3})^{-1} = 4\,425 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$$

$$k_{\text{sauber}, 25^\circ\text{C}} = (1/k - R_v)^{-1} = (1/4037 - 0,0565 \cdot 10^{-3})^{-1} = 5\,230 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$$

Rechnet man mit dem Foulingfaktor von 0,8, ist bei 10 °C Kühlwassereintrittstemperatur die Wärmedurchgangszahl 3,540 W/(m² K) und bei 25 °C beträgt sie 4184 W/(m² K). Der Unterschied ist 3,51 %. Mit dieser Wärmedurchgangszahl beträgt die mittlere Temperatur 7,702 K. Damit wird die berechnete Sättigungstemperatur:

$$\vartheta_s = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2 \cdot \exp[(\vartheta_2 - \vartheta_1) / \Delta\vartheta_m]}{1 - \exp[(\vartheta_2 - \vartheta_1) / \Delta\vartheta_m]} = \frac{25 - 35 \cdot \exp[10 / 7,702]}{1 - \exp[10 / 7,702]} = 38,8^\circ\text{C}$$

Diskussion

Die mit dem Foulingfaktor berechnete Temperatur ist tiefer als die exakt berechnete. Sie lässt einen besseren Kondensatordruck erwarten. Physikalisch gesehen ist der Foulingfaktor nicht korrekt. Die mit dem Verschmutzungswiderstand berechneten Werte entsprechen der Wirklichkeit. Dieses bedeutet, dass der mit dem Foulingfaktor ausgelegte Kondensator bei 25 °C Kühlwassertemperatur nicht die erwartete Sättigungstemperatur erreicht. Der Kondensator wäre mit einer um 3,5 % zu kleinen Fläche ausgelegt.

8.4 Rohrschwingungen

Durch Strömungsinstabilitäten können Rohre in kritische Schwingungen versetzt werden, so dass sie sich gegenseitig berühren oder dass hohe Schallpegel entstehen. Erstes führt zu Rohrleckagen und Rohrbrüchen, Zweites zu unzulässigen Schallpegeln.

8.4.1 Kritische Rohrschwingungen

Die Rohrschwingungen werden durch Fluidinstabilitäten verursacht. Die Schwingungen können sowohl durch senkrechte Anströmung verursachte Wirbelbildung, aber auch durch Resonanzen des Fluids im Mantelraum des Wärmeübertragers oder auch bei der Längsströmung zwischen langen, nicht abgestützten Rohren auftreten. Die Schwingungen können so stark werden, dass sich die Rohre gegenseitig berühren, was zu deren Zerstörung führt. Die Dämpfung der Schwingungen ist durch Stützplatten oder -gitter möglich. Die Länge eines Rohrabschnittes kann man so bestimmen, dass keine gefährlichen Schwingungen mehr auftreten. Diese Rohrlänge hängt von der Strömung des Fluids, vom Trägheitsmoment des Rohres, der internen Dämpfung (logarithmisches Dekrement) und der Befestigung der Rohre ab. Damit keine schädlichen Schwingungen auftreten, ist immer eine genaue Analyse notwendig. Die Stützplatten bzw. -gitter sind meist in gleichen Abständen angeordnet. Dies muss ebenfalls das Resultat einer genauen Untersuchung sein. Rohre, die von Fluidstrahlen getroffen werden, muss man gesondert untersuchen. Ausführliche Berechnungsverfahren und Literaturhinweise findet man im VDI-Wärmeatlas, Kapitel O [8.4] und TEMA Standard Of The Tubular Heat Exchanger Manufacturers Association, Section 6 [8.5]. Diese Literatur zu erläutern, würde den Rahmen dieses Buches sprengen, deshalb wird nur eine kurze und einfache Berechnungsmethode beschrieben.

Die Berechnung erfolgt mit einer empirischen Gleichung. In ihr können mit den Rohreigenschaften und der Strömungsgeschwindigkeit die ungestützte Rohrlänge l_0 , bei der keine schädlichen Schwingungen mehr auftreten, bestimmt werden.

$$c_{sp}^2 \cdot \rho \cdot l_0^5 \cdot \frac{d_a^2}{(d_a^4 - d_i^4) \cdot E} \cdot \frac{10^6}{m^3} \leq 4,5 \quad (8.29)$$

Die Spaltgeschwindigkeit c_{sp} ist die Strömungsgeschwindigkeit zwischen den Rohren, ρ die Dichte des Fluids, d_a der Außen-, d_i der Innendurchmesser und E das Elastizitätsmodul des Rohrmaterials. Der Term $10^6 / m^3$ ist eingesetzt, damit das Ergebnis ohne Zehnerpotenzen und dimensionslos erscheint.

Gl. (8.29) liefert für die maximale ungestützte Rohrlänge $l_{0,max}$:

$$l_{0,max} = \sqrt[5]{\frac{4,5 \cdot (d_a^4 - d_i^4) \cdot E}{d_a^2 \cdot c_{sp}^2 \cdot \rho} \cdot \frac{m^3}{10^6}} \quad (8.30)$$

Die Spaltgeschwindigkeit kann durch die Anzahl der angeströmten Rohre, die ungestützte Rohrlänge durch die Anzahl der Stützplatten verändert werden. Wird ein Wert, der größer als 4,5 ist, ermittelt, kann durch Änderung der Spaltgeschwindigkeit oder der ungestützten Rohrlänge der gewünschte Wert erreicht werden. Bei gleichen Stützplattenabständen kann anstelle von l_0 die Gesamtlänge des Rohres, geteilt durch die Anzahl der Stützplatten plus eins $l_0 = l_{ges} / (N+1)$ eingesetzt werden.

BEISPIEL 8.4: Berechnung der notwendigen Anzahl der Stützplatten

Hier soll untersucht werden, wie bei dem in Beispiel 5.3 ausgelegten Kondensator die Rohre abzustützen sind.

$d_a = 12 \text{ mm}$, $d_i = 10 \text{ mm}$, $m_{R134a} = 0,5 \text{ kg/s}$, $\rho = 66,3 \text{ kg/m}^3$, $l_{ges} : 5,983 \text{ m}$, $n = 47$.
Das Elastizitätsmodul des Kupfers ist $110 \text{ kN/mm}^2 = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, der Rohrabstand $s = 17 \text{ mm}$.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahme

- Die Strömung im Bündel ist gleichmäßig.

Analyse

Zunächst ist die Anordnung der Rohre zu bestimmen. Die Skizze zeigt, dass man in einem zylindrischen Mantel 48 statt der ausgelegten 47 Rohre anordnen kann. Mit dem einen Rohr mehr wird die thermische Leistung erreicht und eine realistische Rohranordnung verwirklicht. Die Einströmöffnungen (Schlitze) sind mit fetten Linien gezeichnet. Am Umfang des Bündels sind 22 Spalte vorhanden. Der für die Einströmung des Dampfes vorhandene Querschnitt ist:

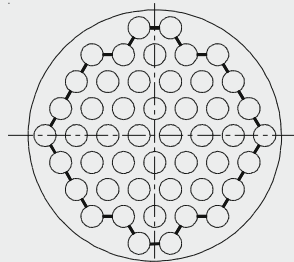
$$A_{in} = 22 \cdot l \cdot s = 22 \cdot 5,983 \text{ m} \cdot 0,005 \text{ m} = 0,658 \text{ m}^2$$

Die Spaltgeschwindigkeit zwischen den Rohren erhalten wir zu:

$$c_{Sp} = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A_{in}} = \frac{0,5 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^3}{\text{s} \cdot 0,8 \cdot \text{m}^2 \cdot 66,3 \cdot \text{kg}} = 0,11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Jetzt kann das Vibrationskriterium angewendet werden.

$$c_{Sp}^2 \cdot \rho \cdot l_0^5 \cdot \frac{d_a^2}{(d_a^4 - d_i^4) \cdot E} \cdot \frac{10^6}{\text{m}^3} \leq 4,5$$



Ohne eine Stützplatte erhält man 8,1, mit einer Stützplatte 0,25. Für die maximal erlaubte Rohrlänge $l_{0,max}$ erhalten wir mit Gl. (8.30):

$$l_{0,max} = \sqrt[5]{\frac{4,5 \cdot (d_a^4 - d_i^4) \cdot E}{d_a^2 \cdot c_{sp}^2 \cdot \rho}} \cdot \frac{m^3}{10^6} = 5,313 \text{ m}$$

Diskussion

In diesem Beispiel wären die Rohre laut Vibrationskriterium ohne Stützplatte vibrationsgefährdet. Eine ungestützte Rohrlänge von 5,313 m ist die Grenze für die Vibrationsgefährdung. Mit einer Stützplatte wird die ungestützte Rohrlänge 3,00 m. Die Anströmgeschwindigkeit ist hier sehr klein, weshalb die erlaubte ungestützte Rohrlänge ungewöhnlich groß ausfällt. Bei einer größeren Anströmgeschwindigkeit von 10 m/s müsste man eine ungestützte Rohrlänge, die kleiner als 0,5 m ist, vorsehen.

8.4.2 Akustische Resonanz

Bei senkrechter Anströmung zylindrischer Körper entstehen bei *Reynoldszahlen*, die oberhalb von 50 liegen, *Wirbelablösungen*. Am Zylinder bilden sich Wirbel, die sich ablösen und in der Strömung erhalten bleiben. Bildung und Ablösung der Wirbel erfolgen periodisch abwechselnd von der oberen und unteren Seite des Zylinders. Bild 8.14 zeigt den Wirbelbildungsvorgang. Bei der Ablösung entstehen auf der Rückseite des Zylinders Druckänderungen, die auf den Zylinder periodisch abwechselnde Kräfte ausüben.

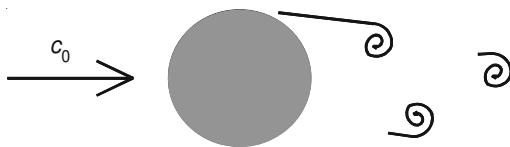


Bild 8.14: Wirbelablösungen am Zylinder

Die Pfeifgeräusche von Drähten im Wind werden durch Wirbelablösungen hervorgerufen. Die Schwingungen der Rohre, verursacht durch diese Wirbel, wurden bereits unter 8.4.1 besprochen. Hier wird die Entstehung großer Schallpegel besprochen.

Versuche zeigen, dass die Frequenz der Wirbelablösungen durch die *Struhalzahl* S angegeben werden kann, die wiederum von der *Reynoldszahl* abhängt. Die *Struhalzahl* S ist definiert als:

$$S = \frac{v \cdot d}{c_0} \quad (8.29)$$

Dabei ist v die Frequenz der Wirbelablösungen, die *Struhalfrequenz* genannt wird, d der Durchmesser des angeströmten Rohres und c_0 die Anströmgeschwindigkeit. Bei *Reynoldszahlen* unterhalb von 10^5 hat die *Struhalzahl* quer angeströmter zylindrischer Einzelkörper einen Wert von ca. 0,2. Bei höheren *Reynoldszahlen* liegen die Werte zwischen 0,17 und 0,32. Die Geometrie, die Oberflächenbeschaffenheit und bei Rohrbündeln die Anordnung der Rohre sind weitere Einflussgrößen. In Rohrbündeln bewirkt die Ablösung von einer Rohrreihe eine Änderung der Ablösefrequenz nachfolgender Rohrreihen. Bei Rohrbündeln, wie dem in Beispiel 3.6 behandelten Zwischenüberhitzer, hat man *Struhalzahlen* von 1,0 bis zu 1,6 gemessen.

Ist die *Struhalfrequenz*, die durch die *Struhalzahl* gegeben ist, in der Nähe der Eigenfrequenz des angeströmten Körpers, kann dieser durch Resonanz in so starke Schwingungen geraten, dass Schäden (Ermüdungsbruch, Kollision) auftreten. Die Tacoma-Narrows-Hängebrücke, eine große Brücke mit 840 m Spannweite im amerikanischen Bundesstaat Washington, geriet 1940 bei Windgeschwindigkeiten von ca. 70 km/h in so starke Schwingungen, dass sie einstürzte (YouTube dokumentiert dieses spektakuläre Ereignis).

Zu jeder *Struhalfrequenz* gehört auch eine akustische Wellenlänge. Sind die Strömungsbegrenzungen (z.B. Bündelhöhe) von gleicher Länge, können Resonanzen auftreten, die zwar keine Beschädigung von Bauteilen verursachen, jedoch unzulässige Lärmbelastigungen erzeugen können. Das Problematische dabei kann sein, dass eine sogenannte "*lock in*"-Resonanz entsteht, die sogar bei einer wesentlichen Änderung der Strömungsgeschwindigkeit bestehen bleibt. Je nach Größe des Bündels und des Massenstromes können die Schallpegel Werte von über 120 dB erreichen.

Bei der Konstruktion und Auslegung von Apparaten, Bauten usw., die von einem Fluid angeströmt werden, muss der Ingenieur untersuchen, ob die Wirbelablösungen nicht zu unzulässigen Resonanzen führen.

BEISPIEL 10.4: Akustische Resonanz in einem Rohrbündel

In dem von Dampf angeströmten Überhitzerbündel aus Beispiel 3.6 wurde eine *Struhalzahl* von 1,04 ermittelt. Die Rohre des Rohrbündels haben den Durchmesser von 15 mm. Die Bündelhöhe von 1,4 m ist durch eine Strömungsbegrenzung in zwei Teile mit der jeweiligen Höhe von 675 mm aufgeteilt. Die Schallgeschwindigkeit des Dampfes beträgt 517 m/s.

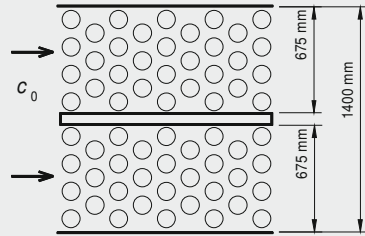
Untersuchen Sie, ob die "*lock in*"-Resonanz entstehen kann; falls nicht, bei welcher Geschwindigkeit sie zu befürchten ist.

Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahme

- Die *Struhalzahl* ist auf den Außendurchmesser der Rohre und die Anströmgeschwindigkeit bezogen.

**Analyse**

Die Wellenlänge einer akustischen Schwingung beträgt:

$$\lambda_a = \frac{a}{\nu}$$

Die Frequenz ν , die zu einer Wellenlänge von 0,675 m gehört, beträgt:

$$\nu = a / l_a = (517 \text{ m/s}) / 1,4 \text{ m} = 765 \text{ Hz}$$

Mit Gl. (8.29) ist die *Struhal*frequenz:

$$\nu_{st} = \frac{S \cdot c_0}{d} = \frac{1,04 \cdot 6 \cdot \text{m}}{0,015 \cdot \text{m} \cdot \text{s}} = \mathbf{416 \text{ Hz}}$$

Sie ist viel kleiner als die zur Wellenlänge 0,675 m gehörende Frequenz. Das Entstehen eine "lock in"-Resonanz ist nicht zu befürchten.

Die Dampfgeschwindigkeit, bei der eine "lock in"-Resonanz entstehen könnte, ermitteln wir zu:

$$c_0 = \frac{\nu_{st} \cdot d}{S} = \frac{765 \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0,015 \cdot \text{m}}{1,04} = \mathbf{11,0 \text{ m/s}}$$

Diskussion

Die Konstruktion des Zwischenüberhitzerbündels lässt keine "lock in"-Resonanz befürchten. Erst bei einer beinahe doppelt höheren Geschwindigkeit von 11 m/s könnte sie eintreten.

Anhang

A1: Wichtige physikalische Konstanten

Kritische Zustandsgrößen

Stoff	chemische Formel	Molmasse kg/kmol	T_{krit} K	p_{krit} bar	z_{krit} –
Acetylen	C_2H_2	26,0380	309,0	26,8	0,274
Ammoniak	NH_3	17,0305	406,0	112,8	0,284
Argon	Ar	39,9480	151,0	48,6	0,242
Butan	C_4H_{10}	58,1240	425,0	38,0	0,274
Ethan	C_2H_6	30,0700	305,0	48,8	0,285
Ethanol	C_2H_5OH	46,0690	516,0	63,8	0,249
Ethylen	C_2H_4	28,0540	283,0	51,2	0,270
Frigen 134a	CF_3CH_2F	102,0300	374,2	40,7	0,260
Helium	He	4,0026	5,2	2,3	0,300
Kohlendioxid	CO_2	44,0100	304,0	73,9	0,276
Kohlenmonoxid	CO	28,0100	133,0	35,0	0,294
Methan	CH_4	16,0430	191,0	46,4	0,290
Oktan	C_8H_{18}	114,2310	569,0	24,9	0,258
Propan	C_3H_8	44,0970	369,8	42,4	0,276
Sauerstoff	O_2	31,9988	154,0	50,5	0,290
Schwefeldioxid	SO_2	64,0650	431,0	78,7	0,268
Stickstoff	N_2	28,0134	126,0	33,9	0,291
Wasser	H_2O	18,0153	647,1	220,6	0,233
Wasserstoff	H_2	2,0159	33,2	13,0	0,304

Fundamentale Naturkonstanten

Avogadro-Konstante	$N_A = (6,0221367 \pm 0,00000036) \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
universelle Gaskonstante	$R_m = (8314,41 \pm 0,07)$	$J/(kmol \cdot K)$
Boltzmann-Konstante R_m/N_A	$k = (1,380641 \pm 0,000012) \cdot 10^{-23}$	J/K
elektrische Elementarladung	$e = (1,60217733 \pm 0,00000049) \cdot 10^{-19}$	C
Planck-Konstante	$h = (6,6260755 \pm 0,0000004) \cdot 10^{-23}$	$J \cdot s$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 299\,792\,458$	m/s
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma_s = (5,6696 \pm 0,0075) \cdot 10^{-8}$	$W/(m^2 \cdot K^4)$

A2: Stoffwerte unterkühlten Wassers bei 1 bar Druck

ϑ °C	ρ kg/m ³	λ W/(m K)	η 10 ⁻⁶ kg/(m s)	ν 10 ⁻⁶ m ² /s	c_p kJ/(kg K)	Pr -	β 1/K
0	999,8	0,5611	1 791,5	1,7918	4,219	13,473	-0,068
2	999,9	0,5649	1 673,4	1,6735	4,213	12,480	-0,032
4	1 000,0	0,5687	1 567,2	1,5673	4,207	11,595	0,001
6	999,9	0,5725	1 471,4	1,4715	4,203	10,802	0,032
8	999,9	0,5763	1 384,7	1,3849	4,199	10,089	0,061
10	999,7	0,5800	1 305,9	1,3063	4,195	9,445	0,088
12	999,5	0,5838	1 234,0	1,2346	4,193	8,862	0,114
14	999,2	0,5875	1 168,3	1,1692	4,190	8,332	0,139
16	998,9	0,5912	1 108,1	1,1092	4,188	7,849	0,163
18	998,6	0,5949	1 052,7	1,0541	4,186	7,408	0,185
20	998,2	0,5985	1 001,6	1,0034	4,185	7,004	0,207
22	997,8	0,6020	954,4	0,9566	4,183	6,633	0,227
24	997,3	0,6055	910,7	0,9132	4,182	6,291	0,247
26	996,8	0,6089	870,2	0,8730	4,181	5,976	0,266
28	996,2	0,6122	832,5	0,8356	4,181	5,685	0,285
30	995,7	0,6155	797,3	0,8008	4,180	5,415	0,303
32	995,0	0,6187	764,6	0,7684	4,179	5,165	0,320
34	994,4	0,6218	733,9	0,7381	4,179	4,932	0,337
36	993,7	0,6248	705,2	0,7097	4,179	4,716	0,353
38	993,0	0,6278	678,3	0,6831	4,179	4,515	0,369
40	992,2	0,6306	653,0	0,6581	4,179	4,327	0,385
42	991,4	0,6334	629,2	0,6346	4,179	4,151	0,400
44	990,6	0,6361	606,8	0,6125	4,179	3,986	0,415
46	989,8	0,6387	585,7	0,5917	4,179	3,832	0,429
48	988,9	0,6412	565,7	0,5720	4,179	3,687	0,444
50	988,0	0,6436	546,9	0,5535	4,180	3,551	0,457
52	987,1	0,6459	529,0	0,5359	4,180	3,423	0,471
54	986,2	0,6482	512,1	0,5193	4,181	3,303	0,484
56	985,2	0,6503	496,1	0,5035	4,181	3,189	0,498
58	984,2	0,6524	480,9	0,4886	4,182	3,082	0,510
60	983,2	0,6544	466,4	0,4744	4,183	2,981	0,523
62	982,2	0,6563	452,7	0,4609	4,184	2,885	0,536
64	981,1	0,6581	439,6	0,4480	4,185	2,795	0,548
66	980,0	0,6599	427,1	0,4358	4,186	2,709	0,560
68	978,9	0,6616	415,2	0,4242	4,187	2,628	0,572
70	977,8	0,6631	403,9	0,4131	4,188	2,551	0,584
72	976,6	0,6647	393,1	0,4025	4,189	2,478	0,596
74	975,5	0,6661	382,7	0,3924	4,191	2,408	0,607
76	974,3	0,6675	372,9	0,3827	4,192	2,342	0,619
78	973,0	0,6688	363,4	0,3735	4,194	2,279	0,630
80	971,8	0,6700	354,4	0,3646	4,196	2,219	0,642
82	970,5	0,6712	345,7	0,3562	4,197	2,162	0,653
84	969,3	0,6723	337,4	0,3481	4,199	2,107	0,664
86	968,0	0,6734	329,4	0,3403	4,201	2,055	0,675
88	966,7	0,6744	321,8	0,3329	4,203	2,005	0,686
90	965,3	0,6753	314,4	0,3257	4,205	1,958	0,697
92	964,0	0,6762	307,4	0,3188	4,207	1,912	0,708
94	962,6	0,6770	300,6	0,3123	4,209	1,869	0,719
96	961,2	0,6777	294,1	0,3059	4,212	1,827	0,730
98	959,8	0,6784	287,8	0,2998	4,214	1,788	0,740

Quelle [9.1]

A2: Stoffwerte unterkühlten Wassers bei 1 bar Druck (Forts.)

Näherungspolynome für den Bereich von 0 °C bis 100 °C.

$$\sum_{i=0}^6 C_i \cdot \vartheta_R^i \quad \text{mit } \vartheta_R = \vartheta / \vartheta_{krit} = \vartheta / 100 \text{ K}$$

	ρ	λ	η	c'_p	Pr	β
C_0	999,8500	0,56112	1,79016	4,21895	13,460	-0,06755
C_1	5,4395	0,18825	-6,11398	-0,32990	-51,371	1,82260
C_2	-76,5850	0,03255	15,12250	1,15869	134,214	-3,11220
C_3	43,9930	-0,23117	-26,76630	-2,35378	-244,081	5,36440
C_4	-14,3860	0,15512	30,43500	2,88758	282,198	-6,22770
C_5	0	-0,00988	-19,32300	-1,84461	-181,310	4,09430
C_6	0	-0,01697	5,13960	0,47973	48,664	-1,12330
Ergebnis in	kg/m ³	W/(m K)	10 ⁻³ kg/(m s)	kJ/kg	-	1/K
Std.-Abw. %	0,225	0,003	0,004	0,084	0,006	0,130

Wichtig: Nicht für Temperaturen über 100 °C verwenden.

A3: Stoffwerte gesättigten Wassers und Dampfes

ϑ °C	p bar	ρ' kg/m ³	ρ'' kg/m ³	λ' 10 ⁻³ W/(m K)	λ'' W/(m K)	c'_p kJ/(kg K)	c''_p kJ/(kg K)	η' 10 ⁻⁶ kg/(m s)	η'' s	v' 10 ⁻⁶ m ³ /s	v'' m ³ /s	P_r' -	P_r'' -	r kJ/kg
0,01	0,00612	999,79	0,00485	561,0	17,1	4,220	1,888	1 791,0	9,20	1,7914	1 894	13,472	1,017	2 500,9
10	0,01228	999,65	0,00941	579,5	17,2	4,196	1,896	1 316,7	9,62	1,3171	1 023	9,533	1,063	2 477,2
20	0,02339	998,16	0,01731	598,0	17,7	4,185	1,906	1 007,8	9,89	1,0096	571,2	7,053	1,063	2 453,5
30	0,04247	995,61	0,03041	615,2	18,5	4,180	1,918	798,7	10,09	0,8022	331,9	5,427	1,045	2 429,8
40	0,07384	992,18	0,05124	630,6	19,4	4,179	1,932	651,9	10,30	0,6570	201,0	4,320	1,024	2 406,0
50	0,1235	988,01	0,08314	643,7	20,4	4,180	1,948	545,2	10,53	0,5518	126,7	3,540	1,008	2 382,0
60	0,1995	983,18	0,1304	654,7	21,3	4,183	1,966	465,1	10,81	0,4731	82,89	2,972	0,999	2 357,7
70	0,3120	977,75	0,1984	663,5	22,2	4,188	1,987	403,3	11,13	0,4125	56,10	2,546	0,997	2 333,1
80	0,4741	971,78	0,2937	670,4	23,1	4,196	2,012	354,5	11,49	0,3648	39,12	2,218	1,000	2 308,1
90	0,7018	965,30	0,4239	675,7	24,1	4,205	2,042	314,9	11,87	0,3263	27,99	1,960	1,006	2 282,6
100	1,014	958,35	0,5981	679,6	25,1	4,217	2,077	282,4	12,25	0,2947	20,48	1,753	1,014	2 256,5
110	1,434	950,95	0,8269	682,2	26,2	4,230	2,121	255,3	12,63	0,2685	15,28	1,583	1,023	2 229,7
120	1,987	943,11	1,1220	683,7	27,4	4,246	2,174	232,4	13,00	0,2465	11,59	1,444	1,032	2 202,1
130	2,703	934,83	1,4968	684,3	28,7	4,265	2,237	213,0	13,34	0,2279	8,915	1,328	1,040	2 173,7
140	3,615	926,13	1,9665	683,9	30,1	4,286	2,311	196,4	13,67	0,2120	6,951	1,231	1,049	2 144,2
150	4,761	917,01	2,5478	682,8	31,6	4,310	2,396	182,1	13,97	0,1986	5,485	1,150	1,060	2 113,7
160	6,181	907,45	3,2593	680,8	33,2	4,338	2,492	169,8	14,26	0,1871	4,376	1,082	1,072	2 081,9
170	7,921	897,45	4,1217	677,9	34,8	4,369	2,599	159,1	14,55	0,1773	3,529	1,025	1,086	2 048,7
180	10,03	887,01	5,1583	674,3	36,5	4,406	2,716	149,8	14,83	0,1689	2,875	0,979	1,104	2 014,0
190	12,55	876,08	6,3948	669,7	38,3	4,447	2,846	141,6	15,13	0,1616	2,365	0,940	1,125	1 977,7
200	15,55	864,67	7,8603	664,3	40,1	4,494	2,990	134,3	15,44	0,1553	1,964	0,908	1,151	1 939,7
210	19,07	852,73	9,5875	658,0	42,0	4,548	3,150	127,7	15,77	0,1498	1,645	0,883	1,182	1 899,6
220	23,19	840,23	11,614	650,7	44,1	4,611	3,328	121,8	16,13	0,1449	1,389	0,863	1,218	1 857,4
230	27,97	827,12	13,984	642,4	46,3	4,683	3,528	116,3	16,51	0,1405	1,181	0,847	1,260	1 812,8
240	33,47	813,36	16,748	633,0	48,6	4,767	3,755	111,1	16,91	0,1366	1,010	0,837	1,306	1 765,5
250	39,76	798,89	19,965	622,5	51,2	4,865	4,012	106,3	17,33	0,1330	0,8678	0,830	1,356	1 715,3
260	46,92	783,62	23,710	610,8	54,1	4,981	4,308	101,7	17,74	0,1297	0,7482	0,829	1,412	1 661,8
270	55,03	767,46	28,072	597,7	57,3	5,119	4,655	97,30	18,15	0,1268	0,6465	0,833	1,474	1 604,6
280	64,16	750,27	33,163	583,0	60,9	5,286	5,070	93,17	18,55	0,1242	0,5592	0,845	1,544	1 543,2
290	74,42	731,91	39,128	566,9	64,9	5,492	5,581	89,26	18,93	0,1220	0,4838	0,865	1,628	1 476,8
300	85,88	712,14	46,162	549,1	69,5	5,752	6,223	85,56	19,32	0,1201	0,4185	0,896	1,729	1 404,8
310	98,65	690,67	54,529	529,8	75,1	6,088	7,051	82,02	19,74	0,1188	0,3619	0,943	1,853	1 325,9
320	112,84	667,08	64,616	509,3	82,3	6,541	8,157	78,53	20,24	0,1177	0,3132	1,009	2,006	1 238,6
373,95	220,64	322,00	322,000	1'419,0	1'419,0			43,16	43,16	0,1340	0,1340			0,0

A3: Stoffwerte gesättigten Wassers und Dampfes (Forts.)

Näherungsformeln für den Sättigungsdruck und die Dichte des gesättigten Dampfes, gültig im gesamten Sättigungsbereich:

$$p_s = \exp(11,6885 - 3\,746/T - 228\,675/T^2) \cdot \text{bar} \pm 0,8 \%$$

$$\rho'' = \exp(11,41 - 4\,194/T - 99\,183/T^2) \cdot \text{kg/m}^3 \pm 6 \%$$

Näherungspolynome für den Bereich von 0 °C bis 320 °C:

$$\sum_{i=0}^9 C_i \cdot \vartheta_R^i \quad \text{mit } \vartheta_R = \vartheta / \vartheta_{krit} = \vartheta / 373,95 \text{ °C}$$

	ρ'	λ'	λ''	c'_p	c''_p
C_0	999,80	0,561	17,10	4,2196	1,888
C_1	22,92	0,671	-7,55	-1,0880	0,341
C_2	-1 161,00	1,283	455,10	10,4200	-2,500
C_3	3 507,00	-20,700	-1 917,00	-46,5700	68,200
C_4	-9 975,00	79,630	20,50	98,8400	-571,000
C_5	19 710,00	-162,110	26 173,00	55,5340	2 525,000
C_6	-25 039,00	185,110	-89 184,00	-709,9000	-6 074,000
C_7	18 158,00	-109,560	13 5700,00	1 454,5000	8 195,000
C_8	-6 014,00	22,520	-100 790,00	-1 303,6000	-5 864,000
C_9	264,90	3,020	29 757,00	451,9000	1 748,000
Ergebnis in	kg/m ³	W/(m K)	10 ⁻³ W/(m K)	kJ/(kg K)	kJ/(kg K)
Std.-Abw. in %	0,017	0,069	0,075	0,056	0,111

	η'	η''	Pr'	Pr''	r
C_0	1,791	9,199	13,468	1,0173	2 500,9
C_1	-21,595	20,400	-181,250	2,9730	-893,0
C_2	170,010	-208,000	1 510,760	-58,9400	224,0
C_3	-902,200	1 499,000	-8 269,400	443,3200	-2 484,0
C_4	3 201,520	-4 926,000	29 914,800	-1 729,3000	1 1784,0
C_5	-7 522,950	8 326,800	-71 208,642	3 922,7000	-42 215,0
C_6	11 487,000	-7 286,300	109 707,190	-5 359,6000	87 847,0
C_7	-10 916,000	3 077,800	-104 892,380	4 367,8000	-108 004,0
C_8	5 849,410	-655,200	56 431,800	-1 971,3000	72 611,0
C_9	-1 347,780	173,290	-13 032,700	385,4100	-20 870,0
Ergebnis in	10 ⁻³ kg/(m s)	10 ⁻⁶ kg/(m s)	-	-	kJ/kg K
Std.-Abw. in %	0,017	0,069	0,075	0,056	0,111

Wichtig: Nicht für Temperaturen über 320 °C verwenden.

A4: Stoffwerte des Wassers und Dampfes

p bar	ϑ °C	ρ kg/m ³	c_p kJ/(kg K)	η 10 ⁻⁶ kg/(m s)	ν m ² /s	λ 10 ⁻³ W/(m K)	Pr -
1	0	999,844	4,219	1 791,53	1,792	561,08	13,473
	50	988,047	4,180	546,85	0,553	643,61	3,551
	100	0,590	2,074	12,27	20,810	25,08	1,015
	150	0,516	1,986	14,18	27,469	28,86	0,976
	200	0,460	1,976	16,18	35,144	33,28	0,960
	250	0,416	1,989	18,22	43,841	38,17	0,949
	300	0,379	2,012	20,29	53,543	43,42	0,940
	350	0,348	2,040	22,37	64,226	48,97	0,932
	400	0,322	2,070	24,45	75,864	54,76	0,924
2	0	999,894	4,219	1 791,28	1,791	561,13	13,468
	50	988,090	4,179	546,87	0,553	643,65	3,551
	100	958,400	4,216	281,77	0,294	679,15	1,749
	150	1,042	2,067	14,13	13,566	29,54	0,989
	200	0,925	2,014	16,15	17,446	33,68	0,965
	250	0,834	2,010	18,20	21,821	38,42	0,952
	300	0,760	2,025	20,28	26,691	43,59	0,942
	350	0,698	2,048	22,36	32,047	49,09	0,933
	400	0,645	2,076	24,45	37,877	54,85	0,925
5	0	1 000,047	4,217	1 790,53	1,790	561,30	13,454
	50	988,221	4,179	546,92	0,553	643,79	3,550
	100	958,541	4,216	281,85	0,294	679,32	1,749
	150	917,020	4,310	182,47	0,199	682,06	1,153
	200	2,353	2,145	16,05	6,822	34,93	0,986
	250	2,108	2,078	18,14	8,607	39,18	0,962
	300	1,913	2,066	20,24	10,579	44,09	0,948
	350	1,754	2,075	22,34	12,739	49,45	0,938
	400	1,620	2,095	24,44	15,086	55,14	0,929
10	0	1 000,301	4,215	1 789,28	1,789	561,57	13,430
	50	988,438	4,177	547,01	0,553	644,02	3,548
	100	958,775	4,215	281,99	0,294	679,59	1,749
	150	917,304	4,309	182,59	0,199	682,40	1,153
	200	4,854	2,429	15,89	3,274	37,21	1,037
	250	4,297	2,212	18,05	4,200	40,52	0,985
	300	3,876	2,141	20,19	5,207	44,96	0,961
	350	3,540	2,123	22,31	6,303	50,07	0,946
	400	3,262	2,128	24,42	7,488	55,62	0,935
20	100	959,242	4,212	282,25	0,294	680,14	1,748
	150	917,871	4,305	182,85	0,199	683,07	1,152
	200	865,007	4,491	134,43	0,155	663,72	0,910
	250	8,970	2,560	17,86	1,991	43,49	1,051
	300	7,968	2,320	20,08	2,519	46,82	0,995
	350	7,215	2,230	22,25	3,084	51,37	0,966
	400	6,613	2,200	24,40	3,689	56,62	0,948
	450	6,115	2,196	26,52	4,336	62,32	0,935
	500	5,692	2,207	28,60	5,025	68,34	0,924

Quelle [9.1]

A5: Stoffwerte des Wassers und Dampfes (Fortsetzung)

p bar	ϑ °C	ρ kg/m ³	c_p kJ/(kg K)	η 10 ⁻⁶ kg/(m s)	ν m ² /s	λ 10 ⁻³ W/(m K)	Pr -
50	200	867,27	4,474	666,329	135,181	0,156	0,908
	250	800,08	4,851	622,501	106,400	0,133	0,829
	300	22,05	3,171	53,848	19,799	0,898	1,166
	350	19,24	2,661	22,127	1,150	55,989	1,052
	400	17,29	2,459	24,369	1,410	60,062	0,998
	450	15,79	2,371	26,550	1,681	65,105	0,967
	500	14,58	2,333	28,681	1,967	70,743	0,946
	550	13,57	2,321	30,766	2,267	76,794	0,930
	600	12,71	2,324	32,810	2,582	83,135	0,917
100	300	715,29	5,682	86,461	0,121	550,675	0,892
	350	44,56	4,012	22,151	0,497	68,088	1,305
	400	37,82	3,096	24,487	0,647	67,881	1,117
	450	33,57	2,747	26,735	0,796	70,987	1,035
	500	30,48	2,583	28,911	0,949	75,607	0,988
	550	28,05	2,501	31,027	1,106	81,106	0,957
	600	26,06	2,460	33,089	1,270	87,139	0,934
	650	24,38	2,442	35,103	1,440	93,478	0,917
	700	22,94	2,438	37,071	1,616	99,978	0,904
200	300	734,71	5,317	90,050	0,123	571,259	0,838
	350	600,65	8,106	69,309	0,115	463,199	1,213
	400	100,51	6,360	26,034	0,259	105,458	1,570
	450	78,62	4,007	27,812	0,354	91,029	1,224
	500	67,60	3,284	29,849	0,442	89,846	1,091
	550	60,35	2,955	31,901	0,529	92,785	1,016
	600	54,99	2,781	33,923	0,617	97,553	0,967
	650	50,78	2,682	35,903	0,707	103,158	0,934
	700	47,32	2,625	37,841	0,800	109,109	0,910
500	300	776,46	4,782	98,477	0,127	618,323	0,762
	350	693,27	5,370	83,236	0,120	541,491	0,825
	400	577,74	6,778	67,983	0,118	451,173	1,021
	450	402,02	9,567	50,477	0,126	315,361	1,531
	500	257,11	7,309	40,499	0,158	202,982	1,458
	550	195,37	5,103	38,690	0,198	163,650	1,206
	600	163,70	4,097	39,121	0,239	151,983	1,055
	650	143,73	3,587	40,249	0,280	149,724	0,964
	700	129,57	3,288	41,648	0,321	150,918	0,907
1 000	300	823,18	4,400	109,110	0,133	675,330	0,711
	350	762,34	4,605	95,741	0,126	616,955	0,715
	400	692,92	4,892	84,758	0,122	548,157	0,756
	450	614,19	5,258	74,911	0,122	476,087	0,827
	500	528,20	5,576	66,062	0,125	394,700	0,933
	550	444,48	5,549	59,116	0,133	319,247	1,028
	600	374,22	5,171	54,690	0,146	272,029	1,040
	650	321,08	4,628	52,429	0,163	248,026	0,978
	700	282,00	4,191	51,587	0,183	236,000	0,916

Quelle [9.1]

A6: Stoffwerte des Frigens 134a auf der Sättigungslinie

ϑ °C	p bar	ρ' kg/m ³	ρ''	λ' 10 ⁻³ W/(m K)	λ''	c'_p kJ/(kg K)	c''_p	η' 10 ⁻⁶ kg/(m s)	η''	v' 10 ⁻⁶ m ³ /s	v''	Pr'	Pr''	r kJ/kg
-35	0,662	1403,10	3,521	108,9	8,70	1,264	0,765	405,6	9,507	0,289	2,700	4,71	0,835	222,8
-30	0,844	1388,40	4,426	106,8	9,14	1,273	0,781	381,1	9,719	0,274	2,196	4,54	0,830	219,5
-25	1,064	1373,40	5,506	104,6	9,66	1,283	0,798	358,4	9,946	0,261	1,806	4,39	0,822	216,2
-20	1,327	1358,30	6,785	102,4	10,11	1,293	0,816	337,2	10,160	0,248	1,498	4,26	0,820	213,0
-15	1,639	1342,80	8,287	100,2	10,57	1,304	0,835	317,4	10,380	0,236	1,253	4,13	0,819	209,5
-10	2,006	1327,10	10,041	98,06	11,03	1,316	0,854	298,9	10,590	0,225	1,055	4,01	0,821	206,0
-5	2,433	1311,10	12,077	95,87	11,49	1,328	0,875	281,6	10,810	0,215	0,895	3,90	0,823	202,4
0	2,928	1294,80	14,428	93,67	11,96	1,341	0,897	265,3	11,020	0,205	0,764	3,80	0,827	198,6
5	3,496	1278,10	17,131	91,46	12,43	1,355	0,921	249,9	11,240	0,196	0,656	3,70	0,832	194,7
10	4,146	1261,00	20,226	89,25	12,92	1,370	0,946	235,4	11,460	0,187	0,567	3,61	0,839	190,7
15	4,883	1243,40	23,758	87,02	13,42	1,387	0,972	221,7	11,680	0,178	0,492	3,53	0,846	186,6
20	5,717	1225,30	27,780	84,78	13,93	1,405	1,001	208,7	11,910	0,170	0,429	3,46	0,856	182,2
25	6,653	1206,70	32,350	82,53	14,46	1,425	1,032	196,3	12,140	0,163	0,375	3,39	0,867	177,8
30	7,701	1187,50	37,535	80,27	15,01	1,446	1,065	184,6	12,380	0,155	0,330	3,33	0,879	173,1
35	8,869	1167,50	43,416	77,98	15,58	1,471	1,103	173,4	12,630	0,149	0,291	3,27	0,894	168,2
40	10,165	1146,70	50,085	75,69	16,19	1,498	1,145	162,7	12,890	0,142	0,257	3,22	0,911	163,0
45	11,598	1125,10	57,657	73,37	16,84	1,530	1,192	152,5	13,170	0,136	0,228	3,18	0,932	157,6
50	13,177	1102,30	66,272	71,05	17,54	1,566	1,246	142,7	13,470	0,129	0,203	3,14	0,957	151,8
55	14,913	1078,30	76,104	68,71	18,30	1,609	1,310	133,2	13,790	0,124	0,181	3,12	0,987	145,7
60	16,816	1052,90	87,379	66,36	19,14	1,660	1,387	124,1	14,150	0,118	0,162	3,10	1,030	139,1
65	18,896	1025,60	100,400	64,02	20,09	1,723	1,482	115,2	14,560	0,112	0,145	3,10	1,070	132,0
70	21,167	996,25	115,570	61,69	21,17	1,804	1,605	106,6	15,040	0,107	0,130	3,12	1,140	124,3
75	23,641	964,09	133,490	59,39	22,44	1,911	1,771	98,1	15,600	0,102	0,117	3,16	1,230	115,9
80	26,332	928,24	155,080	57,15	24,00	2,065	2,012	89,7	16,310	0,097	0,105	3,24	1,370	106,4

A6: Stoffwerte des Frigens 134a auf der Sättigungslinie (Fortsetzung)

Näherungsformel für den Sättigungsdruck und die Dichte des gesättigten Dampfes.
Gültig von -35 bis $+80$ °C.

Näherungspolynome für den Bereich von -35 °C bis $+80$ °C.

$$\sum_{i=0}^6 C_i \cdot \vartheta_R^i \quad \text{mit } \vartheta_R = \vartheta / \vartheta_{krit} = \vartheta / 101,05 \text{ °C}$$

	ρ'	ρ''	λ'	λ''	c'_p	c''_p
C_0	1294,8000	14,432	93,6610	11,96200	1,3412	0,8975
C_1	-333,1800	50,335	-44,4710	9,46000	0,2586	0,4325
C_2	-74,8070	71,630	-1,3931	1,37592	0,1849	0,2574
C_3	-2,0400	5,0382	0,6391	0,95450	-123,7600	2,0974
C_4	-18,4720	14,333	-2,9691	-0,95880	-0,0769	-0,1909
C_5	76,9178	-79,744	4,3914	-7,73060	-2,5225	-4,0597
C_6	-159,0400	163,240	1,5307	16,07700	3,6497	5,9750
Ergebnis in	kg/m ³	kg/m ³	10 ⁻³ W/(m K)	10 ⁻³ W/(m K)	kJ/(kg K)	kJ/(kg K)
Std.-Abw. %	0,005	0,405	0,013	0,078	0,086	0,184

	η'	η''	Pr'	Pr''	r
	10 ⁻⁶ kg/(m s)	10 ⁻⁶ kg/(m s)	-	-	kJ/kg
C_0	265,2700	11,0235	3,7977	0,8271	198,6140
C_1	-319,7300	4,3362	-2,0036	0,0735	-76,8680
C_2	192,6100	0,2324	1,4628	0,2551	-26,1190
C_3	-123,7600	2,0974	-0,2527	0,4615	-14,8650
C_4	77,2810	0,1718	0,7457	0,1096	0,7774
C_5	-42,575	-5,3073	-2,8296	-3,0793	-11,9400
C_6	4,5818	9,1226	3,3467	4,0928	-16,9020
Ergebnis in	10 ⁻⁶ kg/(m s)	10 ⁻⁶ kg/(m s)	-	-	kJ/kg
Std.-Abw. in %	0,013	0,025	0,063	0,228	0,025

Wichtig: Nicht für Temperaturen, die unter -35 °C bzw. über $+80$ °C liegen, verwenden.

A7: Stoffwerte der Luft bei 1 bar Druck

ϑ °C	ρ kg/m ³	λ 10 ⁻³ W/(m K)	c_p J/(kg K)	η 10 ⁻⁶ kg/(m s)	ν 10 ⁻⁶ m ² / s	Pr -	a 10 ⁻⁹ m ² /s
-80	1,807	17,74	1 009	12,94	7,16	0,7357	9,73
-60	1,636	19,41	1 007	14,07	8,60	0,7301	11,78
-40	1,495	21,04	1 007	15,16	10,14	0,7258	13,97
-30	1,433	21,84	1 007	15,70	10,95	0,7236	15,13
-20	1,377	22,63	1 007	16,22	11,78	0,7215	16,33
-10	1,324	23,41	1 006	16,74	12,64	0,7196	17,57
0	1,275	24,18	1 006	17,24	13,52	0,7179	18,83
10	1,230	24,94	1 007	17,74	14,42	0,7163	20,14
20	1,188	25,69	1 007	18,24	15,35	0,7148	21,47
30	1,149	26,43	1 007	18,72	16,30	0,7134	22,84
40	1,112	27,16	1 007	19,20	17,26	0,7122	24,24
60	1,045	28,60	1 009	20,14	19,27	0,7100	27,13
80	0,9859	30,01	1 010	21,05	21,35	0,7083	30,14
100	0,9329	31,39	1 012	21,94	23,51	0,7070	33,26
120	0,8854	32,75	1 014	22,80	25,75	0,7060	36,48
140	0,8425	34,08	1 016	23,65	28,07	0,7054	39,80
160	0,8036	35,39	1 019	24,48	30,46	0,7050	43,21
180	0,7681	36,68	1 022	25,29	32,93	0,7049	46,71
200	0,7356	37,95	1 026	26,09	35,47	0,7051	50,30
250	0,6653	41,06	1 035	28,02	42,11	0,7063	59,62
300	0,6072	44,09	1 046	29,86	49,18	0,7083	69,43
350	0,5585	47,05	1 057	31,64	56,65	0,7109	79,68
400	0,5170	49,96	1 069	33,35	64,51	0,7137	90,38
450	0,4813	52,82	1 081	35,01	72,74	0,7166	101,50
500	0,4502	55,64	1 093	36,62	81,35	0,7194	113,10
550	0,4228	58,41	1 105	38,19	90,31	0,7221	125,10
600	0,3986	61,14	1 116	39,17	99,63	0,7247	137,50
650	0,3770	63,83	1 126	41,20	109,30	0,7271	150,30
700	0,3576	66,46	1 137	42,66	119,30	0,7295	163,50
750	0,3402	69,03	1 146	44,08	129,60	0,7318	177,10
800	0,3243	71,54	1 155	45,48	140,20	0,7342	191,00
850	0,3099	73,98	1 163	46,85	151,20	0,7368	205,20
900	0,2967	76,33	1 171	48,19	162,40	0,7395	219,70
1 000	0,2734	80,77	1 185	50,82	185,90	0,7458	249,20

Quelle: [9,3]

Formel für die oberen Stoffwerte von -80 °C bis 1 000 °C mit $\vartheta_R = \vartheta / 1\,000 \cdot K$

$$\rho = p / R \cdot T = 348,68 \cdot T^{-1} \cdot K \cdot \text{kg/m}^3 \pm 0,066 \%$$

$$\sum_{i=0}^5 C_i \cdot \vartheta_R^i \quad \text{mit } \vartheta_R = \vartheta / \vartheta_{krit} = \vartheta / 1\,000 \text{ K}$$

	λ	c_p	η	ν	Pr	a
C_0	24,18	1006,3	17,23	13,53	0,718	18,84
C_1	76,34	7,4	50,33	89,11	-0,166	128,72
C_2	-48,26	525,6	-34,17	111,36	0,686	168,71
C_3	62,81	-334,5	24,22	-48,80	-0,954	-160,40
C_4	-45,68	-195,2	-4,11	28,60	0,581	155,62
C_5	11,39	175,6	-2,67	-7,91	-0,117	-62,31
Ergebnis in	10 ⁻³ W/(m K)	J/(kg K)	10 ⁻⁶ kg/(m s)	10 ⁻⁶ m ² /s	-	10 ⁻⁸ m ² /s
Std.-Abw. in %	0,013	0,036	0,225	0,062	0,063	0,050

A8: Stoffwerte der Feststoffe

Metalle und Legierungen

	ϑ °C	ρ kg/m ³	c_p J/(kg K)	λ W/(m K)	α 10 ⁻⁶ · m ² /s
Aluminium	20	2 700	945	238	93,4
Blei	20	11 340	131	35,3	23,8
Bronze (6 Sn, 9 Zn, 84 Cu, 1 Pb)	20	8 800	377	61,7	18,6
Eisen					
Gusseisen 3 % C	20	7 870	450	58	14,7
Stahl ST 37.8	20	7 830	430	57	16,9
Cr-Ni-Stahl 1.4541	20	7 900	470	15	4,1
Cr-Stahl X8 Cr7	20	7 700	460	25,1	7,1
Gold (rein)	20	19 290	128	295	119
Kupfer (rein)	20	8 960	385	394	114

Baustoffe

Ziegelmauerwerk	20	1 400	840	0,79	0,49
		1 800	840	0,81	0,54
Verputz	20	1 690	800	0,79	0,25
Tanne, radial	20	600	2 700	0,14	0,09
Sperrholz	20	800	2 000	0,15	0,09
Korkplatten	30	190	1 880	0,041	0,11
Mineralwolle	50	200	920	0,064	0,25
Glaswolle	0	200	660	0,037	0,28

Steine und Gläser

Erdreich	20	2 040	1 840	0,59	0,16
Schamottsteine	100	1 700	840	0,50	0,35
Quarz	20	2 100	780	1,40	0,72
Sandstein	20	2 150	710	1,60	1,00
Marmor	20	2 500	810	2,80	1,30
Granit	20	2 750	890	2,90	1,20
Fensterglas	20	2 480	700	1,16	0,50
Pyrexglas	20	2 240	774	1,06	0,61
Quarzglas	20	2 210	730	1,40	0,87

Kunststoffe

Polyamide	20	1 130	2 300	0,280	0,12
Polytetrafluoräthylen (Teflon)	20	2 200	1 040	0,230	0,10
Gummi, weich	20	1 100	1 670	0,160	0,09
Styroporschaumstoff	20	15	1 250	0,029	0,36
Polyvinylchlorid (PVC)	20	1 380	960	0,150	0,11

Quellen [9.1, 9.3]

A9: Stoffwerte technischer Wärmeträger auf Mineralölbasis

Stoff	Hersteller	Anwendungs- Bereich °C	ρ kg/m ³	c_p kJ/(kg K)	ν 10 ⁻⁶ m ² /s	λ W/(m K)
Farolin U	Aral	-10	886	1,80	15,8	0,135
		325	682	3,10	0,60	0,113
Farolin S	Aral	-25	931	1,66	1 396	0,129
		305	710	2,93	0,52	0,113
Farolin T	Aral	-30	914	1,74	91,9	0,132
		300	695	2,84	0,56	0,111
Thermofluid A	AVIA	-25	947	1,70	804	0,133
		250	751	2,68	0,52	0,114
Thermofluid B	AVIA	0	878	1,81	300	0,136
		310	688	2,94	0,59	0,113
Transcal N	BP	0	889	1,95	310	0,135
		320	680	3,04	0,56	0,115
Transcal LT	BP	-20	900	1,80	300	0,136
		260	732	2,77	0,49	0,118
Deacal A 12	Shell & DEA	0	882	1,75	82,6	0,135
		250	720	2,67	0,53	0,117
Deacal 32	Shell & DEA	0	887	1,78	310	0,135
		270	711	2,78	0,68	0,115
Deacal 46	Shell & DEA	0	885	1,80	604	0,133
		280	709	2,81	0,84	0,113
Thermalöl S	Esso	-10	893	1,80	47,3	0,134
		240	731	2,67	0,52	0,116
Thermalöl T	Esso	0	877	1,81	285	0,135
		320	670	3,01	0,6	0,112
Essotherm 650	Esso	0	909	1,77	15 803	0,130
		320	702	2,92	1,34	0,108
Caloran 32	Fina	0	883	1,86	300	0,134
		320	648	3,25	0,62	0,111
Mobiltherm 594	Mobil Oil	-44	914	1,64	300	0,135
		250	724	2,70	0,42	0,116
Mobiltherm 603	Mobil Oil	-8	876	1,79	300	0,137
		300	677	2,98	0,52	0,113
Thermia Öl A	Shell	-25	917	1,71	300	0,133
		250	751	2,68	0,52	0,114
Thermia Öl B	Shell	-2	878	1,81	300	0,136
		310	688	2,93	0,59	0,113
Mihatherm WU 10	SRS	-20	914	1,69	341	0,133
		250	752	2,80	0,50	0,113
Mihatherm WU 46	SRS	0	883	1,81	529	0,135
		320	678	2,97	0,60	0,112

Quelle [9.3]

A10: Stoffwerte der Kraftstoffe bei 1,013 bar**Benzin**

ϑ °C	ρ kg/m ³	c_p J/(kg K)	λ W/(m K)	η 10 ⁻⁶ kg/(m s)	a 10 ⁻⁸ m/s	Pr
-50	775	2 051	0,142	0,981	8,89	14,20
-25	755	2 093	0,141	0,686	8,89	10,20
0	735	2 135	0,140	0,510	8,89	7,80
20	720	2 198	0,140	0,402	8,83	6,30
50	690	2 260	0,143	0,294	9,17	4,65
100	650	2 286	0,136	0,196	8,75	3,45

*Quelle [9.3]***Heizöl S**

ϑ °C	ρ kg/m ³	c_p J/(kg K)	λ W/(m K)	η 10 ⁻³ kg/(m s)	a 10 ⁻⁸ m ² /s	Pr -
80	910	2 040	0,1190	67,34	6,41	1 155
90	904	2 080	0,1180	44,30	6,28	780
100	898	2 120	0,1170	30,53	6,15	553
110	892	2 160	0,1160	22,30	6,02	415
120	885	2 205	0,1155	16,46	5,92	314
130	879	2 250	0,1150	12,31	5,81	240
140	873	2 280	0,1143	9,34	5,74	186
150	867	2 310	0,1136	7,28	5,67	148
160	861	2 350	0,1129	5,94	5,58	124
170	855	2 390	0,1122	5,13	5,49	109
180	850	2 430	0,1115	4,68	5,40	102

Quelle [9.1]

A11: Emissionskoeffizienten verschiedener Oberflächen

1. Metalle	Temperatur K	ε_n	ε
Aluminium, walzblank	443	0,039	0,049
	773	0,050	
- , hochglanzpoliert	500	0,039	
	850	0,057	
- , oxidiert bei 872 K	472	0,110	
	872	0,190	
- , stark oxidiert	366	0,200	
	777	0,310	
Aluminiumoxid	550	0,630	
	1 100	0,260	
Blei, grau oxidiert	297	0,280	
Chrom, poliert	423	0,058	0,071
	1 089	0,360	
Gold, hochglanzpoliert	500	0,018	
	900	0,035	
Kupfer, poliert	293	0,030	
- , leicht angelaufen	293	0,037	
- , schwarz oxidiert	293	0,780	
- , oxidiert	403	0,760	
- , geschabt	293	0,070	
Inconel, gewalzt	1 089		0,690
- , sandgestrahlt	1 089		0,790
Gusseisen, poliert	473	0,210	
Stahlguss, poliert	1 044	0,520	
	1 311	0,56	
oxidierte Oberflächen:			
Eisenblech			
- , rot angerostet	293	0,612	
- , stark verrostet	292	0,685	
- , Walzhaut	294	0,657	
Stahlblech, dicke raue Oxidschicht	297	0,800	
Gusseisen, raue Oberfläche, stark oxidiert	311 bis 522	0,950	
Magnesium, poliert	311	0,070	
	811	0,180	
Magnesiumoxid	550	0,550	
	1 100	0,200	
Messing, nicht oxidiert	298	0,035	
	373	0,035	
- , oxidiert	473	0,610	
	873	0,590	
Nickel, nicht oxidiert	298		0,045
	373		0,060
- , oxidiert	473		0,370
	873		0,478

A11: Emissionskoeffizienten verschiedener Oberflächen (Forts.)

	Temperatur K	ε_n	ε
Platin	422	0,022	
	1 089	0,123	
Quecksilber, nicht oxidiert	298	0,100	
	373	0,120	
Silber, poliert	311	0,022	
	644	0,031	
Titan, oxidiert	644		0,540
	1 089		0,590
Uranoxid (U_3O_8)	1 300		0,790
	1 600		0,780
Wolfram	298		0,024
	773		0,071
	1 273		0,150
	1 773		0,230
verzinktes Eisenblech			
- , blank	301	0,228	
- , grau oxidiert	297	0,276	

2. Nichtmetalle

Asbest, Pappe	296	0,960	
- , Papier	311	0,930	
	644	0,940	
Beton, rau	273 bis 366		
Dachpappe	294	0,910	
Gips	293	0,8 bis 0,9	
Glas	293	0,940	
Quarzglas (7 mm dick)	555	0,930	
	1 111	0,470	
Gummi	293	0,920	
Holz, Eiche, gehobelt	273 bis 366		0,900
- , Buche	343	0,940	0,910
Keramik, feuerfest, weißes Al_2O_3	366		0,900
Kohlenstoff, nicht oxidiert	298		0,810
	773		0,790
- , Fasern	533		0,950
- , graphitisch	373		0,760
	773		0,710
Korund, Schmirgel, rau			
	353	0,850	0,840

A11: Emissionskoeffizienten verschiedener Oberflächen (Forts.)

3. Lacke, Farben	Temperatur K	ε_n	ε
Ölfarbe, schwarz	366		0,920
- , grün	366		0,950
- , rot	366		0,970
- , weiß	366		0,940
Lack, weiß	373	0,925	
- , matt, schwarz	353	0,970	
Bakelitlack	353	0,935	
Mennigeanstrich	373	0,930	
Heizkörper (nach VDI-74)	373	0,925	
Emaile, weiß auf Eisen	292	0,897	
Marmor, hellgrau poliert	273 bis 366		0,900
Papier	273		0,920
	366		0,940
Porzellan, weiß	295		0,924
Ton, glasiert	298		0,900
- , matt	298		0,930
Wasser	273	0,950	
	373	0,960	
Eis, glatt mit Wasser	273	0,966	0,920
- , rauer Reifbelag	273	0,985	
Ziegelstein, rot	273 bis 366		0,930

Quelle [9.3]

A12: Formelsammlung

Energiebilanzgleichungen

$$V_{KV} \cdot \rho \cdot c_p \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{Q}_{12} + \dot{Q}_{Quelle} + \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) \quad \text{transient}$$

$$\dot{Q}_{12} + \dot{Q}_{Quelle} = \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) = \dot{m} \cdot c_p \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad \text{stationär}$$

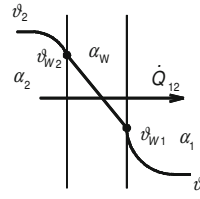
Kinetische Koppelungsgleichungen

$$\delta \dot{Q}_{12} = \alpha_2 \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_{W2}) \cdot dA_2$$

$$\delta \dot{Q}_{12} = \alpha_W \cdot (\vartheta_{W2} - \vartheta_{W1}) \cdot dA_W$$

$$\delta \dot{Q}_{12} = \alpha_1 \cdot (\vartheta_{W1} - \vartheta_1) \cdot dA_1$$

$$\delta \dot{Q}_{12} = k \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot dA_1$$



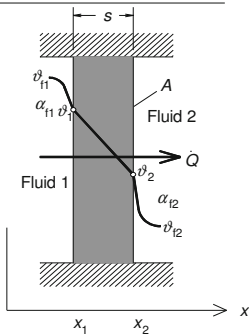
Wärmeleitung in Festkörpern

Ebene Wände

$$\alpha_i = \lambda_i / s_i$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_{f1}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_{Wi}} + \frac{1}{\alpha_{f2}} = \frac{1}{\alpha_{f1}} + \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{f2}}$$

$$\frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_1}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{f1}} \quad \frac{\vartheta_i - \vartheta_{i+1}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{Wi}} \quad \frac{\vartheta_2 - \vartheta_{f2}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{f2}}$$

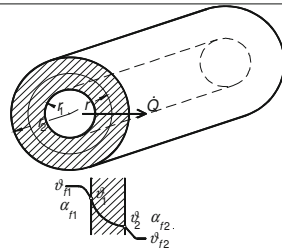


Hohlzylinder

$$\alpha_i = \frac{2 \cdot \lambda_i}{d_{n+1} \cdot \ln(d_{i+1} / d_i)}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{d_{n+1}}{d_1} \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_{n+1}}{2 \cdot \lambda_i} \cdot \ln(d_{i+1} / d_i) + \frac{1}{\alpha_{f2}}$$

$$\frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_1}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{d_{n+1}}{d_1} \cdot \frac{k}{\alpha_{f1}} \quad \frac{\vartheta_i - \vartheta_{i+1}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{d_{n+1}}{d_i} \cdot \frac{k}{\alpha_{Wi}} \quad \frac{\vartheta_{n+1} - \vartheta_{f2}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{f2}}$$



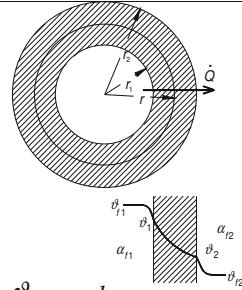
A12: Formelsammlung (Fortsetzung)

Hohlkugel

$$\alpha_{Wa} = \frac{2 \cdot \lambda}{d_2 \cdot (d_2 / d_1 - 1)}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{d_{n+1}^2}{d_1^2} \cdot \frac{1}{\alpha_{f1}} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d_{n+1} \cdot (d_{n+1} / d_i - d_{n+1} / d_{i+1})}{2 \cdot \lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{f2}}$$

$$\frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_1}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{d_{n+1}^2}{d_1^2} \cdot \frac{k}{\alpha_{f1}} \quad \frac{\vartheta_i - \vartheta_{i+1}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{d_{n+1}^2}{d_i^2} \cdot \frac{k}{\alpha_{Wa}} \quad \frac{\vartheta_{n+1} - \vartheta_{f2}}{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}} = \frac{k}{\alpha_{f2}}$$



Instationäre Wärmeleitung

Dimensionslose Temperatur Θ :
$$\Theta = \frac{\vartheta - \vartheta_{\infty}}{\vartheta_A - \vartheta_{\infty}}$$

Biotzahl:
$$Bi = \alpha \cdot s / \lambda$$

Fourierzahl:
$$Fo = a \cdot t / s^2$$

Siehe Digramme S. 50 bis 52

Kontakttemperatur:

$$\vartheta_K = \left(\vartheta_{A1} + \sqrt{\frac{\lambda_2 \cdot \rho_2 \cdot c_{p2}}{\lambda_1 \cdot \rho_1 \cdot c_{p1}}} \cdot \vartheta_{A2} \right) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\lambda_2 \cdot \rho_2 \cdot c_{p2}}{\lambda_1 \cdot \rho_1 \cdot c_{p1}}} \right)^{-1}$$

Abkühlung eines kleinen Körpers in einem großen Bad

$$(\vartheta_1 - \vartheta_{A2}) = (\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2}) \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot A}{m_1 \cdot c_{p1}} \cdot t}$$

A12: Formelsammlung (Fortsetzung)

Erzwungene Konvektion

Kennzahlen

$$Re_L = \frac{c \cdot L}{\nu} \quad L = \begin{cases} d_h = 4 \cdot A / U & \text{geschlossene Kanäle} \\ l & \text{ebene Fläche } L = \text{Strömungsweg} \\ L' = A / U_{proj} & \text{angeströmter Einzelkörper} \end{cases}$$

$$Nu_L = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}$$

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda}$$

Geschlossene Kanäle

$$Nu_{d_h, turb} = \frac{\xi}{8} \cdot \frac{Re_{d_h} \cdot Pr}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi/8} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} \cdot \left[1 + \left(\frac{d_h}{L} \right)^{2/3} \right] \cdot f_2 \quad Re_{d_h} = \frac{c \cdot d_h}{\nu} = \frac{\dot{m} \cdot d_h}{A \cdot \eta}$$

$$\xi = \left[1,8 \cdot \log(Re_{d_h}) - 1,5 \right]^{-2} \quad f_2 = \begin{cases} (Pr / Pr_W)^{0,11} \\ (T / T_W)^{0,45} \end{cases}$$

$$Nu_{d_h, lam} = \sqrt[3]{3,66^3 + 0,664^3 \cdot Pr \cdot (Re_{d_h} \cdot d_h / L)^{1,5}} \quad \gamma = \frac{Re_{d_h} - 2300}{7700}$$

$$Nu_{d_h} = \begin{cases} Nu_{d_h, lam} & \text{wenn } Re_{d_h} \leq 2300 \\ Nu_{d_h, turb} & \text{wenn } Re_{d_h} \geq 10000 \\ (1 - \gamma) \cdot Nu_{d_h, lam} (Re_{d_h} = 2300) + \gamma \cdot Nu_{d_h, turb} (Re_{d_h} = 10000) & \text{sonst} \end{cases}$$

Ebene Wand

$$Nu_{l, lam} = 0,644 \cdot \sqrt[3]{Pr} \cdot \sqrt{Re_L}$$

$$Nu_{l, turb} = \frac{0,037 \cdot Re_L^{0,8} \cdot Pr}{1 + 2,443 \cdot Re_L^{-0,1} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} \cdot \begin{cases} (Pr / Pr_W)^{0,25} & \text{für Flüssigkeiten} \\ 1 & \text{für Gase} \end{cases}$$

$$Nu_l = \sqrt{Nu_{l, lam}^2 + Nu_{l, turb}^2}$$

A12: Formelsammlung (Fortsetzung)

Quer angeströmte Einzelkörper:

$$Nu_{L',0} = \begin{cases} 2 & \text{Kugel} \\ 0,3 & \text{Zylinder} \end{cases}$$

$$Nu_{L',lam} = 0,664 \cdot \sqrt[3]{Pr} \cdot \sqrt{Re_{L'}} \quad \text{für } 1 < Re_{L'} < 1000$$

$$Nu_{L',turb} = 0,037 \cdot Re_{L'}^{0,8} \cdot Pr^{0,48} \cdot f_4 \quad \text{für } 10^5 < Re_{L'} < 10^7$$

$$Nu_{L'} = Nu_{L',0} + \sqrt{Nu_{L',lam}^2 + Nu_{L',turb}^2}$$

$$f_4 = (Pr / Pr_W)^{0,25} \quad \text{für Flüssigkeiten und } f_4 = (T / T_W)^{0,121} \quad \text{für Gase}$$

Quer angeströmte Rohrbündel:

$$a = s_1 / d_a, b = s_2 / d_a \quad s_1 \text{ Rohrteilung senkrecht zur Strömung, } s_2 \text{ parallel dazu}$$

$$\Psi = \begin{cases} 1 - \frac{V_{fest}}{V} = 1 - \frac{\pi \cdot d^2 \cdot l}{4 \cdot s_1 \cdot d \cdot l} = 1 - \frac{\pi}{4 \cdot b} & \text{für } b \geq 1 \\ 1 - \frac{V_{fest}}{V} = 1 - \frac{\pi \cdot d^2 \cdot l}{4 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot l} = 1 - \frac{\pi}{4 \cdot a \cdot b} & \text{für } b < 1 \end{cases} \quad c_{\Psi} = c_0 / \Psi$$

$$Re_{\Psi,L'} = \frac{c_{\Psi} \cdot L'}{\nu} \quad Nu_{\Psi,L'} = Nu_{L'}(Re_{\Psi,L'})$$

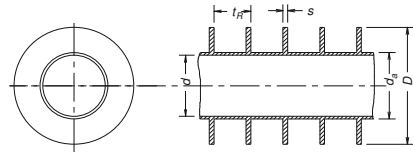
$$f_A = \begin{cases} 1 + \frac{0,7 \cdot (b/a - 0,3)}{\Psi^{1,5} \cdot (b/a + 0,7)^2} & \text{fluchtende Anordnung} \\ 1 + \frac{2}{3 \cdot b} & \text{versetzte Anordnung} \end{cases}$$

$$f_n = \begin{cases} 0,74423 + 0,8 \cdot n - 0,006 \cdot n^2 & \text{wenn } n \leq 5 \\ 0,018 + \exp[0,0004 \cdot (n - 6) - 1] & \text{wenn } n \geq 6 \end{cases}$$

$$Nu_{Bündel} = \alpha \cdot L' / \lambda = Nu_{L'} \cdot f_A \cdot f_n \quad Nu_{Rohrreihe} = \alpha \cdot L' / \lambda = Nu_{L'} \cdot f_A \cdot f_j$$

A12: Formelsammlung (Fortsetzung)

Rippenrohr



$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \Delta \vartheta_m$$

$$\frac{1}{k} = \frac{A}{A_0 + A_{Ri} \cdot \eta_{Ri}} \cdot \frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_a}{d_i} \cdot \frac{1}{\alpha_i}$$

$$\eta_{Ri} = \frac{\tanh X}{X} \quad X = \varphi \cdot \frac{d_a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha_a}{\lambda \cdot s}}$$

Kreisrippen

$$\varphi = (D/d_a - 1) \cdot [1 + 0,35 \cdot \ln(D/d_a)]$$

Rechteckrippen

$$\varphi = (\varphi' - 1) \cdot [1 + 0,35 \cdot \ln \varphi'] \quad \text{mit} \quad \varphi' = 1,28 \cdot (b_R/d_a) \cdot \sqrt{l_R/b_R} - 0,2$$

Zusammenhängende Rippen

$$\varphi = (\varphi' - 1) \cdot [1 + 0,35 \cdot \ln \varphi'] \quad \text{mit} \quad \varphi' = 1,27 \cdot (b_R/d_a) \cdot \sqrt{l_R/b_R} - 0,3$$

Gerade Rippen auf ebener Grundfläche

$$\varphi = 2 \cdot h/d_a$$

Rohrbündel mit Kreisrippenrohren

$$Nu_{d_a} = C \cdot Re_{d_a}^{0,6} \cdot [(A_{Ri} + A_0)/A]^{-0,15} \cdot Pr^{1/3} \cdot f_4 \cdot f_n$$

$C = 0,2$ fluchtend, $C = 0,38$ versetzt

$$A = \pi \cdot d_a \cdot l \quad A_0 = \pi \cdot d_a \cdot l \cdot (1 - s/t_R)$$

$$A_{Ri} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d_a^2) \cdot \frac{l}{t_R}$$

$$\frac{A_{Ri}}{A} = \left[(D/d_a)^2 - 1 \right] \cdot \frac{d_a}{2 \cdot t_R}$$

$$c_e = \begin{cases} c_0 \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{a}\right) - \frac{s \cdot (D - d_a)}{s_1 \cdot t_R} \right]^{-1} & \text{wenn } b \geq 1 \\ c_0 \cdot \left[\sqrt{1 + (2 \cdot b/a)^2} - \frac{2}{a} - \frac{2 \cdot s \cdot (D - d_a)}{s_1 \cdot t_R} \right]^{-1} & \text{wenn } b < 1 \end{cases} \quad Re = \frac{c_e \cdot d_a}{\nu}$$

A12: Formelsammlung (Fortsetzung)

Freie Konvektion

Vertikale Wände:

$$Gr = \frac{g \cdot L^3 \cdot \beta \cdot (\vartheta_w - \vartheta_0)}{\nu^2} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{T_0} \quad \text{für ideale Gase}$$

$$L = A / U_{proj} \quad Ra = Gr \cdot Pr$$

$$Nu_l = \left\{ 0,825 + 0,387 \cdot (Gr \cdot Pr)^{1/6} \cdot \left(1 + 0,671 \cdot Pr^{-9/16} \right)^{-8/27} \right\}^2$$

Geneigte Wände

$$Nu_l = \begin{cases} Ra \cdot \cos \alpha & \text{wenn } Ra \geq Ra_c \\ 0,56 \cdot (Ra_c \cdot \cos \alpha)^{1/4} + 0,13 \cdot \left[(Ra \cdot \cos \alpha)^{1/3} - Ra_c^{1/3} \right] & \text{wenn } Ra > Ra_c \end{cases}$$

Horizontale Zylinder

$$Nu_{L'} = \left[0,752 + 0,387 \cdot Ra_{L'}^{1/6} \cdot \left(1 + 0,721 \cdot Pr^{-9/16} \right)^{-8/27} \right]^2$$

Kondensation

Kondensation an senkrechten Flächen und waagerechten Rohren

$$L' = \sqrt[3]{\frac{\nu_l^2}{g}} \quad \Gamma = \frac{\dot{m}_l}{b} \quad Re_l = \frac{\Gamma}{\eta_l}$$

bei senkrechten Wänden die Breite der Wand:

$$b = b$$

bei senkrechten Rohren die Summe der Rohrumfänge:

$$b = n \cdot \pi \cdot d$$

bei waagerechten Rohren die Summe der Rohrlängen:

$$b = n \cdot l$$

Lokale Wärmeübergangszahlen

$$Nu_{L', lam, x} = 0,693 \cdot \left(\frac{1 - \rho_g / \rho_l}{Re_l} \right)^{1/3} \cdot f_{well} \quad Nu_{L', turb, x} = \frac{0,0283 \cdot Re_l^{7/24} \cdot Pr_l^{1/3}}{1 + 9,66 \cdot Re_l^{-3/8} Pr_l^{-1/6}}$$

$$f_{well} = \begin{cases} 1 & \text{für } Re_l < 1 \\ Re_l^{0,04} & \text{für } Re_l \geq 1 \end{cases}$$

$$Nu_{L', x} = \frac{\alpha_x \cdot L'}{\lambda_l} = \sqrt{Nu_{L', lam, x}^2 + Nu_{L', turb, x}^2} \cdot (\eta_{ls} / \eta_{lw})^{0,25}$$

A12: Formelsammlung (Fortsetzung)

Mittlere Wärmeübergangszahlen

$$Nu_{L', lam} = 0,925 \cdot \left(\frac{(1 - \rho_g / \rho_l)}{Re_l} \right)^{1/3} \cdot f_{well} \quad Nu_{L', turb} = \frac{0,020 \cdot Re_l^{7/24} \cdot Pr_l^{1/3}}{1 + 20,52 \cdot Re_l^{-3/8} Pr_l^{-1/6}}$$

$$Nu_{L'} = \frac{\alpha \cdot L'}{\lambda_l} = \sqrt[1,2]{Nu_{L', lam}^{1,2} + Nu_{L', turb}^{1,2}} \cdot (\eta_{ls} / \eta_{lw})^{0,25}$$

Kondensation bei der Strömung in Rohren

Lokale Wärmeübergangszahl bei abwärtsgerichteter Dampfströmung

$$Nu_{L', x}^* = (1 + \tau_{ZP}^*)^{1/3} \cdot \sqrt{(C_{lam} \cdot Nu_{L', lam, x})^2 + (C_{turb} \cdot Nu_{L', turb, x})^2}$$

$$\tau_g^* = \frac{\tau_g}{g \cdot \rho_l \cdot \delta^+} \quad \tau_g = \frac{\zeta_g \cdot \rho_g \cdot \bar{c}_g^2}{8} \quad \zeta_g = 0,184 \cdot Re_g^{-0,2} \quad Re_g = \frac{\bar{c}_g \cdot d_i}{\nu_g}$$

$$\tau_{ZP}^* = \tau_g^* \cdot [1 + 550 \cdot F \cdot (\tau_{ZP}^*)^a] \quad a = \begin{cases} 0,30 & \text{für } \tau_g^* \leq 1 \\ 0,85 & \text{für } \tau_g^* > 1 \end{cases}$$

$$F = \frac{\max[(2 \cdot Re_l)^{0,5}; 0,132 \cdot Re_l^{0,9}]}{Re_g^{0,9}} \cdot \frac{\eta_l}{\eta_g} \cdot \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}}$$

$$C_{lam} = 1 + (Pr_l^{0,56} - 1) \cdot \tanh(\tau_{ZP}^*) \quad C_{turb} = 1 + (Pr_l^{0,08} - 1) \cdot \tanh(\tau_{ZP}^*)$$

$$\frac{\delta^+}{d} = \frac{6,59 \cdot F}{\sqrt{1 + 1400 \cdot F}}$$

Lokale Wärmeübergangszahl bei aufwärtsgerichteter Dampfströmung

$$\tau_{ZP}^* = \tau_g^* \cdot [1 + 1400 \cdot (\tau_{ZP}^*)^a]$$

$$We = \frac{\tau_{ZP} \cdot \delta^+}{\sigma_l} = \frac{\tau_{ZP}^* \cdot \rho_l \cdot g \cdot (\delta^+)^2}{\sigma_l} \quad \text{muss kleiner als 0,01 sein}$$

A12: Formelsammlung (Fortsetzung)

Lokale Wärmeübergangszahl in waagerechten Rohren

$$Nu_{L',x}^* = \tau_g^{*1/3} \cdot \sqrt{(C_{lam} \cdot Nu_{L',lam,x})^2 + (C_{turb} \cdot Nu_{L',turb,x})^2}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{8,48 \cdot F}} \quad \delta = 0,25 \cdot (1 - \varepsilon) \cdot d_i \quad c_g = \frac{4 \cdot \dot{m} \cdot x}{\rho_g \cdot \pi \cdot (d_i - 2 \cdot \delta)^2}$$

$$\tau_g = \frac{0,184 \cdot Re_g^{-0,2}}{8} \cdot c_g^2 \cdot \rho_g \quad \tau_g^* = \frac{\tau_g}{g \cdot \rho_l \cdot \delta} \cdot (1 + 850 \cdot F)$$

Verdampfung

Blasensieden

$$d_A = 0,0149 \cdot \beta^0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \sigma}{g \cdot (\rho_l - \rho_g)}} \quad \alpha_B = \frac{\dot{q}}{v_W - v_s} = \frac{\dot{q}}{\Delta v} \quad Nu_{d_A} = \frac{\alpha_B \cdot d_A}{\lambda_l}$$

Wasser: $b^0 = 45^\circ$

Kältemittel: $b^0 = 35^\circ$

Benzol: $b^0 = 40^\circ$

$$\alpha_B = \alpha_0 \cdot f(p^*) \cdot \left(\frac{\lambda_l \cdot \rho_l \cdot c_{pl}}{\lambda_{l0} \cdot \rho_{l0} \cdot c_{pl0}} \right)^{0,25} \cdot \left(\frac{R_a}{R_{a0}} \right)^{0,133} \cdot \left(\frac{\dot{q}}{\dot{q}_0} \right)^{0,9 - 0,3 \cdot p^*}$$

$$p^* = p/p_{krit} \quad R_{a0} = 0,4 \mu\text{m} \quad \dot{q}_0 = 20\,000 \text{ W/m}^2 \quad p_0^* = 0,1$$

$$f(p^*) = \begin{cases} 1,73 \cdot p^{*0,27} + \left(6,1 + \frac{0,68}{1 - p^*} \right) \cdot p^{*2} & \text{für Wasser} \\ f(p^*) = 1,2 \cdot p^{*0,27} + \left(2,5 + \frac{1}{1 - p^*} \right) \cdot p^* & \text{für andere reine Stoffe} \end{cases}$$

$$Nu_{d_A0} = 0,1 \cdot \left(\frac{\dot{q}_0 \cdot d_A}{\lambda_l \cdot T_s} \right)^{0,674} \cdot \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0,156} \cdot \left(\frac{r \cdot d_A^2}{a_l^2} \right)^{0,371} \cdot \left(\frac{a_l^2 \cdot \rho_l}{\sigma \cdot d_A} \right)^{0,35} \cdot Pr_l^{-0,16}$$

$$\alpha_0 = \frac{f(0,1)}{f(0,03)} \cdot Nu_{d_A0} \cdot \frac{\lambda_l}{d_A} = \frac{1}{f(0,03)} \cdot Nu_{d_A0} \cdot \frac{\lambda_l}{d_A}$$

A12: Formelsammlung (Fortsetzung)

Strömungssieden

$$Re_l = \frac{c_{0l} \cdot d_h}{\nu_l} = \frac{\dot{m} \cdot d_h}{A \cdot \eta_l} \quad Re_g = \frac{c_{0g} \cdot d_h}{\nu_l} = \frac{\dot{m} \cdot d_h}{A \cdot \eta_g} \quad R = \rho_l / \rho_g$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x) dx$$

Vertikale Rohre

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_{l0}} = \left\{ (1-x)^{0,01} \cdot \left[(1-x)^{1,5} + 1,9 \cdot x^{0,6} \cdot R^{0,35} \right]^{-2,2} + \right. \\ \left. + x^{0,01} \cdot \left[\frac{\alpha_{g0}}{\alpha_{l0}} \left(1 + 8 \cdot (1-x)^{0,7} \cdot R^{0,67} \right) \right]^{-2} \right\}^{-0,5}$$

Horizontale Rohre

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_{l0}} = \left\{ (1-x)^{0,01} \cdot \left[(1-x)^{1,5} + 1,2 \cdot x^{0,4} \cdot R^{0,37} \right]^{-2,2} + \right. \\ \left. + x^{0,01} \cdot \left[\frac{\alpha_{g0}}{\alpha_{l0}} \left(1 + 8 \cdot (1-x)^{0,7} \cdot R^{0,67} \right) \right]^{-2} \right\}^{-0,5}$$

Strahlung

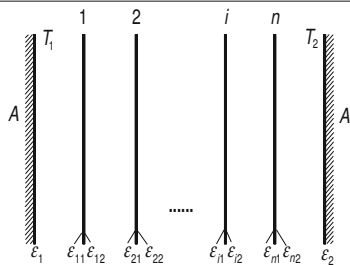
$$\dot{Q}_{12} = C_{12} \cdot A \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad C_s = 5,67 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

Zwei gleich große parallele Platten

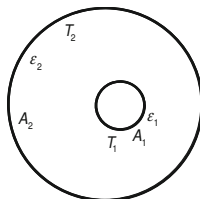
$$C_{12} = \frac{C_s}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}$$

Mehrere gleich große parallele Platten

$$C_{12} = \frac{C_s}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1 + \sum_{i=1}^n (1/\varepsilon_{i1} + 1/\varepsilon_{i2} - 1)}$$

**Umschlossene Körper**

$$C_{12} = \frac{C_s}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$$



Sachverzeichnis

A

Ablaufbreite 140
Absorptionskonstante des Gases 209
Absorptionsverhältnis 191
Ähnlichkeitsgesetze 11
Akustische Resonanz 244
Anzahl der Übertragungseinheiten 219
Arten der Wärmeübertragung 3

B

Behältersieden 174
Berieselungsdichte 140
Bilanzgleichung 9
Biotzahl 48
Blasenabreißdurchmesser 176
Blasensieden 173

D

dimensionslose Temperatur 48
dimensionslose Temperaturänderung 219
dimensionslose Wärmeübergangszahl 48
dimensionslose Zeit 48
dimensionsloser Rohrabstand 106

E

Einfluss der Rohrlänge 87
Emissionsverhältnis 192, 209
technischer Oberflächen 195
Energiebilanzgleichung 9
Energieerhaltungssatz 11
erzwungene Konvektion 79

F

Filmkondensation

laminare 134
reiner, ruhender Dämpfe 133
turbulente 139

Filmsieden 174

first row effect 107

Fouling 239

Fourier

Gesetz von 17

Fourierreihen 47

Fourierzahl 48

freie Konvektion 4, 121

an gekrümmten Flächen 130

an geneigten, ebenen Flächen 127

an horizontalen, ebenen Flächen 129

an vertikalen, ebenen Wänden 122

G

Gasstrahlung 208

Gauß'sches Fehlerintegral 60

Glättungstiefe 177

gleichwertige Schichtdicke 209

Grashofzahl 121

H

Hohlraumanteil 106

hydraulischer Durchmesser 96

I

Impulssatz 11

Intensität

spektralspezifische 192

K

Kennzahlen 80

Kirchhoff'sches Gesetz 192

Kondensation 133

an geneigten Wänden 139

an senkrechten Wänden
 lokale Wärmeübergangs-
 zahlen 140
 mittlere Wärmeübergangs-
 zahlen 141
 an waagerechten Rohren 139, 142
 dimensionslose Darstellung 139
 Druckverlust in Rohrbündeln mit
 waagerechten Rohren 149
 nassen oder überhitzten Dampf-
 fes 138
 strömender, reiner Dämpfe 154
 in waagerechten Rohren 160
 innerhalb senkrechter Rohre 155
 Kontakttemperatur 62
 Konvektion 4
 Kreisrippen 114
 Kreisrippenrohre 115
 kritische Wärmestromdichte 175

L

Leidenfrost-Phänomen 174

M

Massenerhaltungssatz 11
 Methodik 11
 Mittenrauwert 177
 mittlere logarithmische Temperatur-
 differenz 8, 218
 mittlere Temperaturdifferenz
 dimensionslose 219

N

Nadelrippen
 auf ebener Grundfläche 115
 NTU 219
 Nußeltzahl 85

P

Planck'sches Strahlungsgesetz 192
 Problemlösungsmethodik 11
 projizierter Umfang 101
 Prozess 12

Q

quer angeströmte Einzelkörper 101

R

Randwinkel der Blase 177
 Rayleighzahl 122
 Rechteckrippen 114
 Resonanz
 akustische 244
 lock in- 245
 Richtung des Wärmestromes 87
 Ringspalte 97
 Rippen 36
 gerade
 auf ebener Grundfläche 115
 zusammenhängende 115
 Rippenrohre 113
 Rippenwirkungsgrad 40, 114
 Rohrbündel 105
 Anordnung der Rohre 107
 mit Umlenklechen 112
 Rohrreibungszahl 86
 Rohrschwingungen 242
 kritische 242
 Rohrströmung 86
 turbulente 86

S

Schema 56
 schwarzer Körper 192
 Sieden
 unterkühltes 184
 Sieden bei erzwungener Konvektion 184
 Siedeverzug 173
 Stefan-Boltzmann-Konstante 194
 stilles Sieden 185
 Strahlung 191
 Strahlungsaustauschzahl 198
 Strahlungskonstante
 des schwarzen Körpers 194
 Strömungssieden 185
 konvektives 185
 Struhalfrequenz 245
 Struhalzahl 244
 System 12

T

Temperatur
 dimensionslose 48
 Temperaturgradient 17

Temperaturgrenzschicht 79
 Temperaturleitfähigkeit 47
 Temperaturverlauf in der Rippe 37
 Tropfenkondensation 133

U

Überlagerung freier und erzwungener
 Konvektion 132
 Überströmlänge 101
 Übertemperatur 173

V

Verdampfung 173
 Verschmutzungsfaktor 240
 Verschmutzungswiderstand 239

W

Wärmebilanzgleichungen 9
 Wärmedurchgangszahl 6
 Wärmeeindringkoeffizient 63
 Wärmekapazitätsstrom 219
 Wärmekapazitätsstromverhältnisse 219
 Wärmeleitfähigkeit 11
 Wärmeleitung 3
 in einem Hohlzylinder 25
 in einer ebenen Wand 18
 in einer Hohlkugel 33
 instationäre 17, 45
 bei kleinen Biotzahlen 65
 in einem Kreiszyylinder 51
 in einer Kugel 52
 in einer Platte 50
 stationäre 17
 Wärmestrom 5
 Wärmestrom am Anfang der Rippe 39
 Wärmestromdichte 5
 Wärmetransfer
 durch strömenden Wärmeträger 70
 Wärmeübergang
 durch mehrere ebene Wände 22
 Wärmeübergangszahl 5
 in einer ebenen Wand 19
 Wärmeübergangszahlen
 Bezugsfläche der 25
 Wärmeübertrager 217
 Kreuzstrom
 mit einer Rohrreihe und einseitig
 quer angeströmt 232
 mit zehn Rohrreihen und einem

 Durchgang 233
 mit zwei Rohrreihen und zwei
 Durchgängen 234
 reiner Gegenstrom 227
 reiner Gleichstrom 228
 reiner Kreuzstrom 231
 Rohrbündel
 mit einem äußeren und vier inneren
 Durchgängen 230
 mit einem äußeren und zwei inneren
 Durchgängen 229
 Wärmewiderstände 20
 Weberzahl 157
 Wien'sches Verschiebungsgesetz 193
 Wirbelablösung 244

Z

Zellenmethode 220
 Zustandsänderung 12
 zweites Newton'sches Gesetz 11

Literatur

- [1.1] Böckh P von, Cizmar J, Schlachter W (1999) Grundlagen der technischen Thermodynamik. Aarau. Bildung Sauerländer, Aarau; Fortis-Verl. FH, Mainz, Köln
- [1.2] Schlünder E-U und Martin H (1995) Einführung in die Wärmeübertragung, 8. neu bearbeitete Aufl, Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden
- [1.3] Nußelt W (1915) Das Grundgesetz des Wärmeüberganges. Gesundh. Ing. Bd 38, S 477-482 und 490-496
- [1.4] Fourier J (1822) Theorie analytique de la chaleur. Didot, Paris, Nachdruck: Paris: Éditions J. Gabay 1988. Siehe auch: Grattan-Guinness, Ravetz I u. JR: Joseph Fourier, 1768–1830. Cambridge, MA (USA): MIT Pr 1972
- [1.5] Wagner W (1991) Wärmeübertragung, 3. Aufl Vogel, (Kamprath-Reihe), Würzburg
- [1.6] Böckh P von (2001) Fluidmechanik. 1. Aufl Bildung Sauerländer, Aarau
- [1.7] VDI-Wärmeatlas (2002), 9. Aufl, Springer, Berlin, Heidelberg, New York
- [2.1] VDI-Wärmeatlas (2002), 9. Aufl, Springer, Berlin, Heidelberg, New York
- [2.2] Grigull U und Sandner H. (1979) Wärmeleitung. Springer, Berlin, Heidelberg, New York
- [2.3] Martin H und Saberian M (1992) Verbesserte asymptotische Näherungsgleichungen zur Lösung instationärer Wärmeleitungsprobleme auf einfachste Art. Vortrag GVC Fachausschuss Wärme- u. Stoffübertragung Mai 1992, Baden-Baden
- [3.1] Wagner W (1991) Wärmeübertragung, 3. Aufl, Vogel, (Kamprath-Reihe), Würzburg
- [3.2] Böckh P von (2001) Fluidmechanik. 1. Aufl Bildung Sauerländer, Aarau
- [3.3] Gnielinski V (1995) Forsch im Ing-Wes 61, 9, S. 240/248
- [3.4] VDI-Wärmeatlas (2002), 9. Aufl, Springer, Berlin, Heidelberg, New York
- [3.5] Petukhov BS, Roizen LI (1964) High Temperature 2, S 65/68
- [3.6] Gnielinski V und Gaddis ES (1978) Berechnung des mittleren Wärmeübergangskoeffizienten im Außenraum von Rohrbündel-Wärmetauschern mit Umlenklechen. Verfahrenstechnik 12, 4, S. 211/217
- [3.7] Paikert P und Schmidt KG (1990) Arbeitsbericht. Fachgeb. Verfahrenstechnik, Universität GH Duisburg, Sept. 1990
- [3.8] Briggs DE and Young EH (1963) Eng. Prog Sym Ser Vol 59 No. 41, pp 1/9
- [4.1] VDI-Wärmeatlas (2002), 9. Aufl, Springer, Berlin, Heidelberg, New York
- [4.2] Churchill SW (1977) A comprehensive correlating equation for laminar, assisting, forced and free convection. AIChE Journal Vol 23, No. 1, pp 10/16

- [5.1] Nußelt W (1916) Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes. VDI-Zeitschriften, 60, 27
- [5.2] Müller J (1992) Wärmeübergang bei der Filmkondensation und seine Einordnung in Wärme- und Stoffübergangsvorgänge bei Filmströmungen. Fortsch. Ber. VDI, Reihe 3, Nr 270
- [5.3] Numrich R (1990) Influence of Gas Flow on Heat Transfer in Film Condensation. Chem Eng Technol 13, pp 136/43
- [5.4] Blanghetti F (1979) Lokale Wärmeübergangszahlen bei der Kondensation mit überlagerter Konvektion in vertikalen Rohren. Dissertation, Universität Karlsruhe
- [5.5] Rohsenow WM, Hartnett JP, Ganic EN (1985) Handbook of Heat Transfer Fundamentals. 2nd Edition, McGraw Hill, New York
- [6.1] Stephan K and Abdelsalam M (1963) Heat-transfer Correlations for Natural Convection Boiling. Int J Heat Mass Transfer, Vol 6 pp 73/87
- [6.2] Stephan K und Preußner P (1979) Wärmeübergang und maximale Stromdichte beim Behältersieden binärer und ternärer Flüssigkeitsgemische. Chem-Ing Techn MS 649/79, Synops Chem-Ing Techn 51 S. 37
- [6.3] Steiner D (1982) Wärmeübergang bei Strömungssieden von Kältemitteln und kryogenen Flüssigkeiten in waagerechten und senkrechten Rohren. DKV-Tagungsbericht, Essen, 9. Jahrgang, S. 241/260
- [6.4] Chawla JM (1967) Wärmeübergang und Druckabfall in waagerechten Rohren bei der Strömung von verdampfenden Kältemitteln. VDI-Forsch-H 523. Düsseldorf: VDI-Verlag
- [7.1] Blevin WR and Brown WJ (1971) A Precise Measurement of the Stefan-Boltzmann Constant. Metrologica 7, S 15/29
- [7.2] VDI-Wärmeatlas (2002), 9. Aufl, Springer, Berlin, Heidelberg, New York
- [7.3] Siegel R, Howell JR, Lohrengel J (1988) Wärmeübertragung durch Strahlung. Teil 1, Springer, Berlin, Heidelberg, New York
- [7.4] Wagner W (1991) Wärmeübertragung, 3. Aufl Vogel, (Kamprath-Reihe), Würzburg
- [7.5] Gubareff, Jansen, Torborg (1960) Thermal Radiation Properties. Honeywell Research Center, Minneapolis
- [7.6] Tables of Emissivity of Surfaces. (1962) Int J Heat & Mass Transfer 5, pp 67/76
- [8.1] Martin H (1988) Wärmeübertrager. Thieme, Stuttgart, New York
- [8.2] Roetzel W und Spang B (1990) Verbessertes Diagramm zur Berechnung von Wärmeübertragern. Wärme- und Stoffübertragung 25, S 259/264
- [8.3] Spang B und Roetzel W (1995) Neue Näherungsgleichung zur einheitlichen Berechnung von Wärmeübertragern. Heat Mass Transf 30, S 417/422
- [8.4] Roetzel W, Hegg PJ, Butterworth D (Eds.) (1992) Design and Operation of Heat Exchangers. Proc. Eurotherm Seminar No. 18, Hamburg, Feb 27-March 1, 1991, Springer, Berlin, Heidelberg, New York S 19/29
- [8.5] VDI-Wärmeatlas (2002), 9. Aufl, Springer, Berlin, Heidelberg, New York
- [8.6] TEMA Standards Of The Tubular Heat Exchangers Manufacturers Association, 9th Edition, Section 6

-
- [9.1] Wagner W (1998) Software zur Industrieformulation IAPWS-IF97 zur Berechnung der Zustandsgrößen von Wasser und Wasserdampf, Ruhr Universität Bochum
 - [9.2] ICI KLEA (1988) Programm Clea Calc Windows, Version 4.0
 - [9.3] VDI-Wärmeatlas (2002), 9. Aufl, Springer, Berlin, Heidelberg, New York

Deutsch-Englisch-Glossar

A

Ablaufbreite	condensate film width
Absorptionskonstante	absorptivity
Ähnlichkeitsgesetze	similarity laws
Anzahl der Übertragungseinheiten	number of transfer units NTU

B

Behältersieden	pool boiling
Berieselungsdichte	mass flow per unit film width
Bilanzgleichung	energy balance equation
<i>Biotzahl</i>	<i>Biot</i> number
Blasensieden	nucleate boiling

C

charakteristische Länge	characteristic length
-------------------------	-----------------------

D

Dichte	density
dimensionslose Größen	dimensionless parameters
dimensionslose Temperatur	dimensionless temperature
Druck	pressure

E

ebene Wand	plain wall
elektromagnetische Wellen	electromagnetic waves
Emissionsverhältnis	emissivity
Energieerhaltungssatz	conservation of energy principle
erzwungene Konvektion	forced convection

F

Filmkondensation	film condensation
Filmsieden	film boiling
<i>Fourierzahl</i>	<i>Fourier</i> number
freie Konvektion	free convection

G

Gasstrahlung	gaseous radiation
<i>Gauß</i> 'sches Fehlerintegral	error function
Glättungstiefe	mean surface roughness
Gegenstrom-Wärmeübertrager	counterflow heat exchanger
Gleichstrom-Wärmeübertrager	parallel-flow heat exchanger
gleichwertige Schichtdicke	equivalent gas radius
Grädigkeit	Terminal Temperature Difference TTD
<i>Grashof</i> zahl	<i>Grashof</i> number

I

Isolation	insulation
-----------	------------

K

kinetische Kopplungsgleichung	rate equation
<i>Kirchhoff</i> 'sches Gesetz	<i>Kirchhoff</i> 's law
Kondensation	condensation
an senkrechten Wänden	on vertical walls
an waagerechten Rohren	on horizontal pipes
dimensionslose Gleichungen	dimensionless equations
nassen oder überhitzten Dampfes	of wet or superheated steam
strömenden Dampfes	forced convection condensation
Kondensator	condenser
Kontakttemperatur	contact temperature
Kontrollraum	control volume
Kreisrippen	annular fins
Kreuzstrom-Wärmeübertrager	cross flow heat exchanger
kritische Wärmestromdichte	critical heat flux

L

<i>Leidenfrost</i> -Phänomen	<i>Leidenfrost</i> phenomena
------------------------------	------------------------------

M

Massenerhaltungssatz	conservation of mass principle
Massenstrom	mass flow rate
mittlere Geschwindigkeit	mean velocity
mittlere logarithmische Temperaturdifferenz	Log Mean Temperature Difference LMTD
mittlere Temperatur	mean temperature
Modellvorstellungen	model approaches

N

Nußeltzahl *Nusselt's number*

O

Oberflächenspannung surface tension

P

Planck'sches Strahlungsgesetz *Planck's law of radiation*

Prandtlzahl *Prandtl number*

projizierter Umfang projected circumference

R

Randbedingung boundary condition

Rayleighzahl *Rayleigh number*

Reynoldszahl *Reynolds number*

Ringspalt concentric tube annulus

Rippen fins

Rippenrohre finned tubes

mit Kreisrippen annular finned tubes

Rippenwirkungsgrad fin efficiency

Rohrbündel tube bundle

Anordnung der Rohre tube arrangement

mit Umlenkblechen with guide vanes

-wärmeübertrager tube and shell heat exchanger

Rohrreibungszahl tube friction factor

S

Schubspannung shear stress

schwarzer Körper blackbody

Sieden boiling

gesättigter Flüssigkeiten saturated boiling

unterkühltes subcooled boiling

bei erzwungener Konvektion forced convection boiling

Stefan-Boltzmann-Konstante *Stefan-Boltzmann constant*

Stegbreite pitch

Strahlung radiation

T

Temperatur temperature

Temperaturgrenzschicht thermal boundary layer

Temperaturleitfähigkeit	thermal diffusivity
Thermodynamik	thermodynamics
erster Hauptsatz der	first law of
Trennung der Variablen	separation of variables
Tropfenkondensation	dropwise condensation
	droplet condensation

U

Übertemperatur	excess temperature
Umgebung	surroundings

V

Verdampfung	evaporation
Verschmutzung	fouling
Verschmutzungsfaktor	fouling factor
Verschmutzungswiderstand	fouling resistance
Viskosität	viscosity
dynamische	dynamic
kinetische	kinematic

W

Wand aus mehreren Schichten	composite wall
Weberzahl	Weber number
Wirkungsgrad	efficiency, effectiveness
Wärmebilanzgleichungen	heat balance equations
Wärmekapazitätsstrom	heat capacity rate
Wärmedurchgangszahl	overall heat transfer coefficient
Wärmeleitfähigkeit	thermal conductivity
Wärmeleitung	conduction
in einem Hohlzylinder	in a cylinder
in einer ebenen Wand	in a plain wall
in einer Hohlkugel	in a sphere
instationäre	transient conduction
stationäre	steady state conduction
Wärmestrom	heat transfer rate
Wärmestromdichte	heat flux
Wärmeübergangszahl	heat transfer coefficient
Wärmeübertrager	heat exchanger
Wärmewiderstand	thermal resistance
Wien'sches Verschiebungsgesetz	Wien's displacement law

Z

Zellenmethode	cell method
Zustandsänderung	change of state
Zweiphasenströmung	two phase flow