

Heinz Herwig
Andreas Moschallski

Wärmeübertragung

Weitere Titel
aus dem Programm

Strömungsmechanik A-Z

von H. Herwig

Thermodynamik für Ingenieure

herausgegeben von K. Langeheinecke

Übungsbuch Strömungsmechanik

von H. Oertel jr., M. Böhle und U. Dohrmann

Strömungsmechanik

von H. Oertel jr. und M. Böhle

**Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Band 2**

Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium

von L. Papula

**Energietechnik. Systeme zur Energieumwandlung.
Kompaktwissen für Studium und Beruf**

von R. A. Zahoransky

vieweg

Heinz Herwig
Andreas Moschallski

Wärmeübertragung

Physikalische Grundlagen
Illustrierende Beispiele
Übungsaufgaben mit Musterlösungen

Mit 108 Abbildungen und 37 Tabellen

Studium Technik



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

1. Auflage September 2006

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlag | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2006

Lektorat: Thomas Zipsner

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.vieweg.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN-10 3-8348-0060-0

ISBN-13 978-3-8348-0060-2

Vorwort

Das Fachgebiet der Wärmeübertragung gehört zu den klassischen Teilgebieten einer Ingenieurausbildung im Bereich Maschinenbau/Verfahrenstechnik. Entsprechend viele Lehrbücher sind auf dem Markt und es bedarf deshalb schon einer guten Begründung, warum ein weiteres hinzukommen soll.

Die kritische Durchsicht vorhandener Lehrbücher und die Erfahrung mit ihrem Einsatz in der Ingenieurausbildung an verschiedenen Universitäten haben die Autoren des vorliegenden Lehrbuches zu der Überzeugung geführt, dass ein in mehreren Aspekten „anderes“ Lehrbuch zur Wärmeübertragung geschrieben werden kann und sollte.

Die besonderen Merkmale dieses Buches sollen sein (und es ist der Beurteilung der Leserinnen und Leser vorbehalten, zu entscheiden, ob dies tatsächlich der Fall ist):

- *Eine konsequente Beschreibung und Erklärung des physikalischen Hintergrundes der jeweils betrachteten Wärmeübertragungs-Situationen.* In diesem Sinne geht es nicht primär darum, Berechnungsformeln bereitzustellen, sondern zu erklären, welcher physikalische Prozess bei der jeweiligen speziellen Wärmeübertragung abläuft und daraus Möglichkeiten der Berechnung abzuleiten.
- *Eine inhaltliche Verbindung zum Fachgebiet der Thermodynamik überall dort, wo dies von der Sache her als sinnvoll erscheint.* Es ist sehr erstaunlich, wie wenige Querverbindungen zwischen der Wärmeübertragung und der Thermodynamik in den Standard-Lehrbüchern vorhanden sind. Dies führt z. B. dazu, dass die physikalische Größe Entropie und ihre Vermehrung, die sog. Entropieproduktion, in vielen Lehrbüchern zur Wärmeübertragung gar nicht vorkommen, obwohl mit ihrer Hilfe erst bestimmte wichtige Teilaspekte der Physik der Wärmeübertragung beschrieben und erklärt werden können.
- *Eine Beschränkung auf die grundlegenden und wichtigsten Mechanismen der Wärmeübertragung, die eine Behandlung im Rahmen einer einsemestrigen Vorlesung gestattet.* Dies erfordert eine sorgfältige Auswahl der für das generelle Verständnis entscheidenden Aspekte und verbietet eine umfangreiche „Faktensammlung“ zu im Detail verschiedenen, aber doch ähnlichen Fällen. Die in begrenzter Anzahl aufgenommenen sog. ILLUSTRIERENDEN BEISPIELE sind sorgfältig danach ausgewählt worden, dass sie zum weiteren physikalischen Verständnis der Vorgänge beitragen können. Zusätzlich sind am Ende der Kapitel 5 bis 8 Übungsaufgaben (mit Lösungen) aufgeführt, die den Leserinnen und Lesern die Möglichkeit bieten, selbstständig Berechnungen vorzunehmen. Arbeitsblätter am Ende des Buches sollen den schnellen Einstieg in die Lösung konkreter Probleme erleichtern.

Das vorliegende Buch wendet sich an Studierende der Fachrichtungen Maschinenbau, Verfahrenstechnik und Physik an Universitäten und Fachhochschulen sowie an Ingenieurinnen und Ingenieure in der industriellen Praxis, die ihr Fachwissen auffrischen oder erweitern wollen.

Erkenntnisgewinn unterschiedlichster Art, so auch in Bezug auf die Physik der Wärmeübertragung, kann Freude bereiten oder sogar Spaß machen! Versuchen Sie es einmal, liebe Leserinnen und Leser!

Danksagung

Dieses Buch konnte in der vorliegenden Form nur entstehen, weil wir die tatkräftige Unterstützung mehrerer Studenten hatten, die mit großem Einsatz zum Gelingen beigetragen haben.

Die Hauptlast hat dabei Herr Eike Wolgast getragen, der \LaTeX geradezu „virtuos“ beherrscht. Zusätzliche Unterstützung kam von Herrn Henning Olbert, der maßgeblich die Bilder erstellte. Darüber hinaus ist Frau Moldenhauer zu nennen, die auch die unleserlichste Handschrift in einen sinnvollen Text verwandeln kann.

Der Verlag hat uns bei der Erstellung des Manuskriptes stets tatkräftig unterstützt.

Allen sei herzlich gedankt!

Formale Besonderheiten in diesem Buch

Auf folgende Besonderheiten bei der Gestaltung des Buches soll an dieser Stelle hingewiesen werden:

- Alle dimensionsbehafteten Größen sind konsequent mit einem * versehen worden. Größen ohne * sind dimensionslos.
- Bei der Angabe von Dimensionen bedeutet ein schräger Bruchstrich, dass alle folgenden Größen im Nenner stehen. In diesem Sinne hat also z. B. $[\text{kg}/\text{ms}]$ die Bedeutung von $[\text{kg}/(\text{ms})]$.
- Für Temperaturangaben gilt folgende Vereinbarung:
 - absolute (thermodynamische) Temperatur: T^* in K (Kelvin),
 - Celsius-Temperatur: t^* in $^{\circ}\text{C}$; mit $t^* = (T^* - 273,15 \text{ K})^{\circ}\text{C}/\text{K}$.
- Die weiterführenden Literaturangaben sind in Form von Fußnoten angegeben.
- In den einzelnen Kapiteln sind ILLUSTRIERENDE BEISPIELE aufgeführt, bei denen das Hauptaugenmerk auf der Beschreibung der physikalischen Zusammenhänge und nicht auf der konkreten Berechnung liegt.
- Am Ende der Kapitel 5 bis 8 sind *Übungsaufgaben* mit Kurzlösungen angegeben, die den Leserinnen und Lesern die Möglichkeit bieten, selbstständig Berechnungen durchzuführen. Am Ende des jeweiligen Kapitels sind die Lösungswege mit ausführlichen Erläuterungen dokumentiert.
- Im Anhang des Buches sind *Arbeitsblätter* zu den einzelnen Themengebieten zusammengestellt, die den schnellen Einstieg in die Lösung von Aufgaben ermöglichen sollen.

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der illustrierenden Beispiele	XIII
Formelzeichen	XV
1 Einführende Beispiele	1
1.1 Zwei Beispiele aus dem Alltag	1
1.2 Zwei Beispiele aus technischen Anwendungen	2
2 Begriffs- und Zielbestimmung	3
2.1 Was ist „Wärme“?	3
2.2 Was ist „Wärmeübertragung“?	4
2.3 Was ist eine „gute Wärmeübertragung“?	4
2.4 Was soll das Fachgebiet „Wärmeübertragung“ leisten können?	6
3 Dimensionsanalytische Überlegungen	9
3.1 Vorüberlegungen	9
3.2 Das Π -Theorem	9
3.3 Anwendung des Π -Theorems auf Probleme der Wärmeübertragung	11
4 Allgemeine Betrachtungen zum Wärmeübergang an Systemgrenzen	15
4.1 Kurz-Charakterisierung verschiedener Formen der Wärmeübertragung	15
4.2 Leitungsbasierter Energietransport über eine Systemgrenze	15
4.3 Thermische Randbedingungen, konjugierte Probleme	17
4.4 Entropieproduktion bei der Wärmeübertragung	19
4.5 Der Grenzfall reversibler Wärmeübertragung	20
5 Wärmeleitung	21
5.1 Energiebilanz	21
5.2 Fourier-Ansatz als konstitutive Gleichung	23
5.3 Stationäre, eindimensionale Wärmeleitung	25
5.4 Instationäre Wärmeleitung, Einfluss der Biot-Zahl	28
5.5 Instationäre Wärmeleitung in einer halbbunendlichen ebenen Wand	31
5.6 Übungsaufgaben zur Wärmeleitung	38
5.6.1 Übungsaufgaben und Ergebnisse	38
5.6.2 Lösungswege	42
6 Konvektiver Wärmeübergang	53
6.1 Die Physik des konvektiven Wärmeüberganges	53
6.1.1 Konvektiver Wärmeübergang für $\lambda^* \rightarrow \infty$	56
6.1.2 Konvektiver Wärmeübergang bei homogenen Geschwindigkeitsprofilen	57
6.1.3 Konvektiver Wärmeübergang bei turbulenten Strömungen	58

6.1.4	Wärmeübergang bei natürlicher Konvektion entlang von Wänden	61
6.1.5	Systematik bei konvektiven Wärmeübergängen	63
6.2	Grundgleichungen zur Beschreibung des konvektiven Wärmeüberganges	63
6.2.1	Grundgleichungen für konstante Stoffwerte	65
6.2.2	Bezugszustand für konstante Stoffwerte	66
6.2.3	Berücksichtigung variabler Stoffwerte	67
6.3	Erzwungene Konvektion, laminare Strömung	68
6.3.1	Wärmeübergang bei Körperumströmungen, laminar	69
6.3.2	Wärmeübergang bei Durchströmungen, laminar	74
6.4	Erzwungene Konvektion, turbulente Strömung	78
6.4.1	Wärmeübergang bei Körperumströmungen, turbulent	78
6.4.2	Wärmeübergang bei Durchströmungen, turbulent	82
6.5	Natürliche Konvektion bei Körperumströmungen, laminar	85
6.6	Wärmedurchgang	88
6.7	Komplexe, technisch bedeutende konvektive Wärmeübergangs-Situationen . . .	90
6.7.1	Wärmeübergang am querangeströmten Kreiszyylinder	90
6.7.2	Wärmeübergang an querangeströmten Kreiszyylinder-Bündeln	92
6.7.3	Wärmeübergang bei Prallstrahlen	93
6.8	Bewertungskriterien für konvektive Wärmeübergänge	95
6.8.1	Ökonomische Analyse konvektiver Wärmeübertragung	97
6.8.2	Exergetische Analyse konvektiver Wärmeübertragung	98
6.9	Übungsaufgaben zur konvektiven Wärmeübertragung	106
6.9.1	Übungsaufgaben und Ergebnisse	106
6.9.2	Lösungswege	109
7	Zweiphasen-Wärmeübergang	117
7.1	Die Physik des Zweiphasen-Wärmeüberganges	117
7.2	Dimensionsanalyse und Systematik bei Zweiphasen-Wärmeübergängen	120
7.3	Kondensation	122
7.3.1	Filmkondensation	122
7.3.2	Tropfenkondensation	125
7.3.3	Strömungskondensation	127
7.4	Sieden	128
7.4.1	Behältersieden	128
7.4.2	Strömungssieden	135
7.5	Übungsaufgaben zum Zweiphasen-Wärmeübergang	142
7.5.1	Übungsaufgaben und Ergebnisse	142
7.5.2	Lösungswege	143
8	Wärmeübergang durch Strahlung	147
8.1	Die Physik elektromagnetischer Energieübertragung (Wärmestrahlung)	147
8.2	Globalbilanzen	149
8.2.1	Generelles Vorgehen	150
8.3	Ideales Strahlungsverhalten / Schwarze Körper	151
8.3.1	Das Emissionsverhalten Schwarzer Körper	151
8.3.2	Das Absorptionsverhalten Schwarzer Körper	155
8.3.3	Die Realisierung Schwarzer Körper / Hohlraumstrahlung	156

8.4	Reales Strahlungsverhalten / Reale Körper	156
8.4.1	Das Emissionsverhalten realer Körper im Vergleich zum Schwarzen Körper	158
8.4.2	Das Absorptionsverhalten realer Körper im Vergleich zum Schwarzen Körper	159
8.4.3	Das Reflexionsverhalten realer Körper	161
8.4.4	Das Transmissionsverhalten realer Körper	163
8.5	Strahlungsaustausch zwischen Körpern	164
8.5.1	Sichtfaktoren für zwei Flächen im Strahlungsaustausch	164
8.5.2	Strahlungsaustausch zwischen zwei Schwarzen Körpern	166
8.5.3	Strahlungsaustausch zwischen grauen Lambert-Strahlern	167
8.6	Gasstrahlung	169
8.6.1	Die optische Dicke von Gasschichten	169
8.6.2	Absorption und Emission von Gasräumen	170
8.7	Besonderheiten bei der Solarstrahlung	171
8.7.1	Extraterrestrische Solarstrahlung	171
8.7.2	Terrestrische Solarstrahlung	173
8.8	Übungsaufgaben zum Wärmeübergang durch Strahlung	176
8.8.1	Übungsaufgaben und Ergebnisse	176
8.8.2	Lösungswege	180
9	Wärmetechnische Apparate	189
9.1	Wärmeübertrager	189
9.1.1	Bauformen	189
9.1.2	Globalanalyse	190
9.1.3	Verschmutzungen (Fouling)	191
9.2	Kondensatoren	192
9.2.1	Bauformen	193
9.3	Verdampfer	194
9.3.1	Bauformen	195
9.4	Wärmespeicher	195
9.4.1	Auswahl- und Auslegungskriterien	196
9.4.2	Bauformen und Speichermedien	198
10	Messung von Temperaturen und Wärmeströmen	203
10.1	Temperaturmessungen	203
10.1.1	Berührungsbehaftete Messmethoden	203
10.1.2	Berührungsfreie Messmethoden	206
10.1.3	Temperaturmessungen an Körperoberflächen	207
10.2	Wärmestrommessungen	208
10.2.1	Messprinzipien	208
11	Schlussbetrachtung	211
A	Arbeitsblätter	213
B	Stoffwerte	239
C	Standard-Werke zur Wärmeübertragung	243

Verzeichnis der illustrierenden Beispiele

ILLUSTRIERERENDES BEISPIEL 5.1: Messung des mittleren Wärmeübergangskoeffizienten	34
ILLUSTRIERERENDES BEISPIEL 5.2: Wärmeleitungsgeschwindigkeit	35
ILLUSTRIERERENDES BEISPIEL 5.3: Elektrische kontra Warmwasser-Fußbodenheizung	36
ILLUSTRIERERENDES BEISPIEL 6.1: Minimale Entropieproduktion	100
ILLUSTRIERERENDES BEISPIEL 6.2: Verbesserter Wärmeübergang am Rohr durch eine Wärmedämmung des Rohres	101
ILLUSTRIERERENDES BEISPIEL 6.3: Wärmeübergangsmessungen am kalten Körper	102
ILLUSTRIERERENDES BEISPIEL 6.4: Gefühlte Temperatur	103
ILLUSTRIERERENDES BEISPIEL 7.1: Nukiyamas berühmtes Siedeexperiment	139
ILLUSTRIERERENDES BEISPIEL 7.2: Verdunstungskühlung, oder: warum Menschen schwitzen?	141
ILLUSTRIERERENDES BEISPIEL 8.1: Die Erde als Treibhaus	175
ILLUSTRIERERENDES BEISPIEL 9.1: Wärmerohr	199

Formelzeichen

Lateinische Buchstaben

Symbol	Dimension	Bedeutung
a^*	m^2/s	Temperaturleitfähigkeit
\dot{a}^*	W/m^2	spezifische Einstrahlung
\dot{a}_λ^*	$\text{W}/\text{m}^3\text{sr}$	spezifische spektrale Einstrahlung
$\dot{a}_{\lambda,s}^*$	$\text{W}/\text{m}^3\text{sr}$	spezifische spektrale Einstrahlung des Schwarzen Körpers
\dot{a}_s^*	W/m^2	hemisphärische spektrale Einstrahlung des Schwarzen Körpers
$\dot{a}_{\lambda\omega}^*$	$\text{W}/\text{m}^3\text{sr}$	spezifische spektrale Einstrahlungsdichte
$\dot{a}_{\lambda\omega,s}^*$	$\text{W}/\text{m}^3\text{sr}$	spezifische spektrale Einstrahlungsdichte des Schwarzen Körpers
A^*	m^2	wärmeübertragende Fläche
B^*	m	Breite
Bi	-	Biot-Zahl
Bo	-	Bond-Zahl
c_1^*	W/m^2	Schwarzkörper-Konstante
c_2^*	m K	Schwarzkörper-Konstante
c_3^*	m K	Konstante
c^*	$\text{kJ}/\text{kg K}$	spezifische Wärmekapazität
c_s^*	m/s	Schallgeschwindigkeit
c_0^*	m/s	Lichtgeschwindigkeit
D^*	m	Durchmesser
\dot{e}^*	W/m^2	spezifische Ausstrahlung
\dot{e}_λ^*	$\text{W}/\text{m}^3\text{sr}$	spezifische spektrale Ausstrahlung
$\dot{e}_{\lambda,s}^*$	$\text{W}/\text{m}^3\text{sr}$	spezifische spektrale Ausstrahlung des Schwarzen Körpers
\dot{e}_s^*	W/m^2	hemisphärische spezifische Ausstrahlung des Schwarzen Körpers
$\dot{e}_{\lambda\omega}^*$	$\text{W}/\text{m}^3\text{sr}$	spezifische spektrale Ausstrahlungsdichte
E_0^*	W/m^2	Solarkonstante
Ec	-	Eckert-Zahl
f^*	$1/\text{s}$	Frequenz
F_{12}	-	Sichtfaktor
F_{21}	-	Sichtfaktor
Fr	-	Froude-Zahl
g^*	m/s^2	Erdbeschleunigung
Gr	-	Grashof-Zahl
\hat{Gr}	-	Grashof-Zahl
Δh_V^*	kJ/kg	spezifische Verdampfungsenthalpie
H	-	dimensionslose Höhe

Symbol	Dimension	Bedeutung
H^*	m	Höhe
I^*	W	Einstrahlungsleistung
Ja	-	Jacobs-Zahl
k	-	dimensionslose Rauheit
k^*	W/m ²	Wärmedurchgangskoeffizient
k^*	m	charakteristische Rauheitshöhe
k_G^*	1/m	spektraler Absorptionskoeffizient
$\dot{k}_{\lambda\omega}^*$	W/m ³ sr	normal-spezifische spektrale Einstrahlungsdichte
\dot{k}_{ω}^*	W/m ² sr	normal-spezifische Einstrahlungsdichte
L^*	m	Länge
$\dot{l}_{\lambda\omega}^*$	W/m ³ sr	normal-spezifische spektrale Ausstrahlungsdichte
$\dot{l}_{\lambda\omega,s}^*$	W/m ³ sr	normal-spezifische spektrale Ausstrahlungsdichte des Schwarzen Körpers
\dot{l}_{ω}^*	W/m ² sr	normal-spezifische Ausstrahlungsdichte
$\dot{l}_{\omega,s}^*$	W/m ² sr	normal-spezifische Ausstrahlungsdichte des Schwarzen Körpers
m	-	Anzahl der Einflussgrößen
\dot{m}^*	kg/s	Massenstrom
Ma	-	Mach-Zahl
n^*	m	Koordinate
Nu	-	Nußelt-Zahl
p^*	N/m ²	Druck
p_{DS}^*	N/m ²	Sättigungs-Dampfpartialdruck
Pr	-	Prandtl-Zahl
\dot{q}^*	W/m ²	Wärmestromdichte
\dot{Q}^*	W	Wärmestrom
r	-	Rückgewinnfaktor
r^*	m	Radius
r	-	Reflexionsgrad bzw. hemisphärischer Gesamt-Reflexionsgrad
r_{λ}	-	hemisphärischer spektraler Reflexionsgrad
$r_{\lambda\omega}$	-	gerichteter spektraler Reflexionsgrad
r_{ω}	-	gerichteter Gesamt-Reflexionsgrad
R	-	dimensionsloser Radius
R^*	Ω	elektrischer Widerstand
\dot{R}^*	W	Abstrahlungsleistung
R_{α}^*	K/W	Wärmeübergangswiderstand
R_k^*	K/W	Wärmedurchgangswiderstand
R_{λ}^*	K/W	Wärmeleitwiderstand
Re	-	Reynolds-Zahl
s^*	m	Schichtdicke
St	-	Stanton-Zahl
t^*	°C	Temperatur
T^*	K	Temperatur

Symbol	Dimension	Bedeutung
T_{km}^*	K	kalorische Mitteltemperatur
ΔT^*	K	Temperaturdifferenz
ΔT_{B}^*	K	Bezugstemperaturdifferenz
ΔT_{m}^*	K	mittlere Temperaturdifferenz
$\Delta_{\ln} T^*$	K	logarithmische mittlere Temperaturdifferenz
T_{u}	%	Turbulenzgrad
U^*	m	Umfang
u^*	m/s	Geschwindigkeit
\hat{U}	-	auf u_{∞}^* bezogene Geschwindigkeit
\hat{U}^*	mV	Thermospannung
V^*	m ³	Volumen
x	-	dimensionslose Koordinate
x^*	m	Koordinate
x_{th}	-	thermodynamischer Dampfgehalt
\tilde{x}	-	transformierte Koordinate
y^*	m	Koordinate
z^*	m	Koordinate

Griechische Buchstaben

Symbol	Dimension	Bedeutung
α^*	W/m ² K	Wärmeübergangskoeffizient
α	-	Absorptionsgrad bzw. hemisphärischer Gesamt-Absorptionsgrad
α_{λ}	-	hemisphärischer spektraler Absorptionsgrad
$\alpha_{\lambda \omega}$	-	gerichteter spektraler Absorptionsgrad
α_{ω}	-	gerichteter Gesamt-Absorptionsgrad
β^*	1/K	isobarer thermischer Ausdehnungskoeffizient
δ^*	m	Strömungsgrenzschichtdicke
δ_{T}^*	m	Temperaturgrenzschichtdicke
δ_{W}^*	m	Wandschicht
ε	-	Emissionsgrad bzw. hemisphärischer Gesamt-Emissionsgrad
ε_{A}	-	Thermokraft-Koeffizient
ε_{B}	-	Thermokraft-Koeffizient
ε_{λ}	-	hemisphärischer spektraler Emissionsgrad
$\varepsilon_{\lambda \omega}$	-	gerichteter spektraler Emissionsgrad
$\varepsilon_{\lambda \omega, n}$	-	gerichteter spektraler Emissionsgrad in Normalenrichtung
ε_{ω}	-	gerichteter Gesamt-Emissionsgrad
$\varepsilon_{\omega, n}$	-	gerichteter Gesamt-Emissionsgrad in Normalenrichtung
ε_{12}	-	Strahlungsaustauschzahl
η^*	kg/m s	(molekulare) dynamische Viskosität
η_{L}	-	Ladegrad
η_{S}	-	Speichernutzungsgrad
η_{t}^*	kg/m s	turbulente dynamische Viskosität

Symbol	Dimension	Bedeutung
η_{eff}^*	kg/m s	effektive dynamische Viskosität
κ	-	Isentropenexponent
κ_G	-	optische Dicke einer Gasschicht
λ^*	W/m K	(molekulare) Wärmeleitfähigkeit
λ_t^*	W/m K	turbulente Wärmeleitfähigkeit
λ_{eff}^*	W/m K	effektive Wärmeleitfähigkeit
λ^*	μm	Wellenlänge
ρ^*	kg/m ³	Dichte
ρ	-	Reflexionsanteil
σ^*	W/m ² K ⁴	Stefan-Boltzmann-Konstante
σ_j^*	N/m	Grenzflächenspannung
τ	-	Transmissionsanteil
τ^*	s	Zeit
τ_λ	-	spektraler Transmissionsgrad
Θ	-	dimensionslose Temperatur

Indizes

Symbol	Bedeutung	Symbol	Bedeutung
a	außen	M	massenbezogen
ad	adiabat	max	maximal
B	Bezug	PS	Parallelschaltung
d	dampfförmig	Ref	Referenz
D	Durchmesser	RS	Reihenschaltung
f	flüssig	S	Schwarzer Körper, Siede-
g	gasförmig	therm	thermisch
ges	gesamt	trans	Transmission
h	hydraulisch	U	Umgebung
i	innen	V	Verdampfung
j	Variablenindex	V	volumenbezogen
krit	kritisch	W	Wand
K	Körper	∞	ungestörte Anströmung
L	(Bezugs-)Länge	0	zur Zeit $\tau^* = 0$

1 Einführende Beispiele

Im Folgenden soll anhand einiger ausgesuchter Beispiele aus dem Alltag und aus technischen Anwendungen die Bedeutung der Wärmeübertragung in sehr unterschiedlichen Situationen erläutert werden. Solange allerdings noch nicht einmal definiert ist, was „Wärme“ überhaupt ist und wann und auf welche Weise sie „übertragen“ werden kann, muss sich diese Erläuterung darauf beschränken, die Situationen zu beschreiben und die Aufmerksamkeit auf interessante Teilaspekte zu lenken. Eine Erklärung dieser Phänomene erfordert die Kenntnis der physikalischen Zusammenhänge, die Inhalt des vorliegenden Lehrbuches sind.

1.1 Zwei Beispiele aus dem Alltag

Unser tägliches Leben ist durch sehr viele Vorgänge bzw. Prozesse bestimmt, in denen die Wärmeübertragung eine wesentliche Rolle spielt. Es ist ein interessantes Gedankenexperiment, einen normalen Tag einmal unter dem Gesichtspunkt der Wärmeübertragung zu betrachten und dabei auf zahlreiche Beispiele für eben solche Wärmeübertragungen zu stoßen.

Beispiel 1.1:

Der Wärmehaushalt des menschlichen Körpers ist ein hervorragendes Beispiel dafür, wie im Prinzip alle Wärmeübertragungsmechanismen zusammenspielen, um unter den unterschiedlichsten Umgebungsbedingungen dafür zu sorgen, dass im Inneren unseres Körpers eine konstante Temperatur von etwa $36,5^{\circ}\text{C}$ herrscht. Geringfügige Abweichungen von dieser Temperatur im Körperinneren sind möglich, Abweichungen um mehrere $^{\circ}\text{C}$ aber gefährlich bis tödlich. Offensichtlich gelingt es dem menschlichen Körper deshalb, in extrem unterschiedlichen Umgebungsbedingungen von -40°C bis $+40^{\circ}\text{C}$ und bei relativen Luftfeuchten von nahezu 0% bis nahezu 100% (wenn auch mit Hilfe von Kleidung bei niedrigeren Temperaturen), die Temperatur im Körperinneren einzustellen und zu halten!

Das menschliche „Temperaturgefühl“ reagiert dabei sehr pauschal mit Empfindungen von (mehr oder weniger) „warm“ oder „kalt“, ohne dabei nach den sehr unterschiedlichen physikalischen Mechanismen unterscheiden zu können, die zu diesen Empfindungen führen. Erst bei genauerer Kenntnis der physikalischen Vorgänge ist zu verstehen,

- wieso die Körpertemperatur konstant gehalten werden kann, auch wenn die Umgebungstemperatur oberhalb der Körpertemperatur liegt,
- warum wir glauben, bei starkem Wind wäre es deutlich kälter als bei Windstille (was nicht der Fall ist),
- wieso wir das Gefühl haben, in der Sauna wäre es nach einem Wasseraufguss nahezu unerträglich heiß (obwohl die Temperatur dabei gleich bleibt, oder sogar abnimmt),
- warum wir einen Raum als kalt und einen anderen Raum als angenehm warm empfinden, obwohl in beiden Räumen dieselbe Lufttemperatur herrscht.

Beispiel 1.2:

Die Fußbodenheizung ist eine Möglichkeit, eine thermisch behagliche Situation in einem Wohnumfeld zu erzeugen. Dabei wird entweder warmes Wasser durch im Fußboden verlegte Rohrschlangen geleitet, oder stromdurchflossene Heizkabel sorgen für hohe Temperaturen im Fußboden-Unterbau. Aus Sicht der Wärmeübertragung sind beide Varianten sehr verschieden, auch wenn bei entsprechender Auslegung auf beiden Wegen dieselbe mittlere Raumtemperatur erreicht werden kann. Auch hierbei ist erst bei genauerer Kenntnis der physikalischen Vorgänge verständlich, warum

- bei der Warmwasservariante an keiner Stelle im Fußbodenbereich (z. B. unter einem dicken Teppich) eine bestimmte Temperatur überschritten werden kann, bei der elektrischen Variante aber aus thermodynamischer Sicht keine obere, nicht überschreitbare Temperatur existiert,
- bei der Warmwasservariante im Vergleich zur elektrischen Variante unter der Voraussetzung gleicher (anfänglicher) Heizleistung und gleicher Wärmekapazitäten des Heizsystems die gewünschte Raumtemperatur langsamer erreicht wird, beide aber nach dem Abschalten den Raum gleich schnell abkühlen lassen.

Diese beiden Beispiele werden am Ende des Buches (in Kap. 11) noch einmal aufgegriffen. Dort werden mit einigen Stichwörtern die Erklärungen angeregt, die der Leser dann aufgrund seiner inzwischen erworbenen Kenntnis über Wärmeübertragungsvorgänge selbstständig finden wird.

1.2 Zwei Beispiele aus technischen Anwendungen

Nur in wenigen technischen Anwendungen treten *keine* Temperaturunterschiede auf und damit *keine* Wärmeströme. In einigen Prozessen ist die Wärmeübertragung ein gewollter Vorgang bis hin zum eigentlich angestrebten Prozess, wie z. B. beim technischen Wärmeübertrager. In vielen Fällen handelt es sich aber um einen ungewollten, prozessbegrenzenden physikalischen Vorgang, wie in den beiden nachfolgenden Beispiele ausgeführt wird.

Beispiel 1.3:

Die Kühlung elektronischer Bauelemente ist ein entscheidender Aspekt bei der Weiterentwicklung der Mikroelektronik zu immer kleineren und damit dichter gepackten elektronischen Baugruppen. Da in den Bauelementen stets elektrische Widerstände vorliegen, wird elektrische Energie dissipiert, die in Form von Wärme an die Umgebung abgeführt werden muss. Dabei wird bei den modernen hochintegrierten Schaltkreisen pro Leiterplattenfläche soviel Leistung freigesetzt (bis zu 100 W/cm^2), dass eine Abführung dieser Leistung durch eine Wärmeübertragung an die Umgebung bereits an die Grenzen des aus wärmetechnischer Sicht Machbaren stößt. Ähnlich wie im Fall der oben dargestellten elektrischen Fußbodenheizung existiert aus thermodynamischer Sicht keine obere Temperatur, die in dieser Situation nicht überschritten werden könnte, so dass eine unzureichende Wärmeübertragung an die Umgebung (Kühlung) zwangsläufig zur Überschreitung der funktionsbedingt maximal zulässigen Temperatur und damit zur Zerstörung von Bauteilen führt.

Beispiel 1.4:

Bei fast allen thermodynamischen Prozessen zur Energieumwandlung ist man vor dem Hintergrund hoher Wirkungsgrade an hohen Prozesstemperaturen interessiert, die aber materialbedingte Obergrenzen besitzen. Im Expansionsteil von Gasturbinenanlagen können sehr hohe Temperaturen (bis maximal etwa 1500°C) auftreten. Dies erfordert eine aktive Kühlung der Turbinenschaufeln. Die Schaufeln sind in diesem Fall von Kühlkanälen durchzogen, die meist von Luft oder Wasser durchströmt werden. Wenn hierbei an die Grenzen der materialbedingten Maximaltemperatur der Schaufeln gegangen werden soll, muss die Physik des Wärmeüberganges (die Kühlung) sicher beherrscht werden.

2 Begriffs- und Zielbestimmung

Die grundlegenden Begriffe „Wärme“ bzw. „Wärmeübertragung“ sollen zunächst definiert und eingeordnet werden, bevor zum Schluss dieses Kapitels erläutert wird, was die Aufgaben und Ziele des Fachgebietes „Wärmeübertragung“ sind.

2.1 Was ist „Wärme“?

Diese Frage ist keineswegs trivial, und in der Tat hat es historisch gesehen lange Zeiten gegeben, in denen sich mit diesem Begriff Vorstellungen verbanden, die aus heutiger Sicht irreführend und unsinnig sind. So war man früher (etwa bis Mitte des 19. Jahrhunderts) der Meinung, Wärme sei ein masseloser aber realer Stoff, der deshalb auch durch geeignete Mechanismen „übertragen“ werden könnte. Aus heutiger Sicht ist „Wärme“ (wie übrigens auch „Arbeit“) ein grundlegender Begriff der Thermodynamik, der kennzeichnet, in welcher Form Energie über eine Systemgrenze gelangen kann. Damit ist Wärme keine *Energieform* (wie z. B. die innere, die kinetische oder die potenzielle Energie), sondern eine *Energietransportform* über eine thermodynamische Systemgrenze. In Bild 2.1 ist skizziert, dass Wärme neben der „Arbeit“ eine von zwei möglichen Formen ist, durch die Energie in ein (hier: geschlossenes) System gelangen oder dieses verlassen kann.

Die Energietransportform Wärme zeichnet sich aus thermodynamischer Sicht dabei durch zwei Aspekte gegenüber dem Energietransport in Form von Arbeit aus:

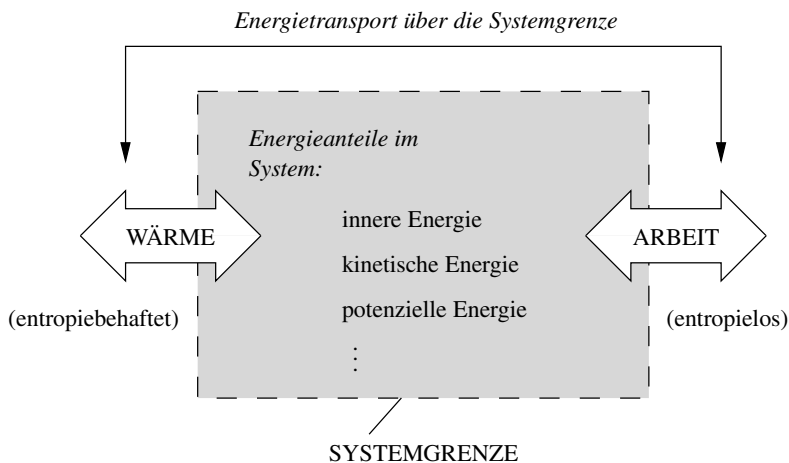


Bild 2.1: Wärme als Form eines Energietransportes über die Systemgrenze eines (hier: geschlossenen) Systems

- Im Gegensatz zur Arbeit ist die Wärme als Form eines Energietransportes die Folge von Temperaturunterschieden.
- Im Gegensatz zur Arbeit ist die Wärme als Form eines Energietransportes mit einer Veränderung der Entropie S^* des Systems verbunden. Dieser Zusammenhang ist durch die fundamentale Beziehung $\delta Q^* = T^* dS^*$ beschrieben, wobei Q^* die in Form von Wärme (reversibel) übertragene Energie, S^* die Entropie und T^* die thermodynamische Temperatur darstellt. Die unterschiedlichen Symbole δ und d bedeuten, dass δQ^* eine Prozessgröße, dS^* aber eine Zustandsgröße des Systems ist. Für weitere Einzelheiten sei auf die thermodynamische Literatur verwiesen.¹

2.2 Was ist „Wärmeübertragung“?

Dieser Begriff lässt noch erkennen, dass er auf die inzwischen als irrig erkannte Vorstellung eines „Wärmestoffes“ zurückgeht, der dann übertragen werden könnte. In diesem Sinne erhöht eine Wärmeübertragung *in ein System* auch nicht etwa „die Wärme im System“. Diese Formulierung wäre unsinnig, da Wärme keine Energieform ist und damit nicht im System enthalten sein kann. Aus thermodynamischer Sicht ist Wärme (wie auch Arbeit) keine *Zustandsgröße*, sondern eine *Prozessgröße*. Die korrekte Formulierung wäre also, dass mit einer Wärmeübertragung die Energie im System erhöht wird.

Wärmeübertragung ist aus heutiger Sicht eine Übertragung von Energie über eine Systemgrenze, die aufgrund von Temperaturunterschieden zustande kommt und eine Entropieänderung im System zur Folge hat. In diesem und ausschließlich in diesem Sinne sollte der Begriff der Wärmeübertragung benutzt werden.

Auch wenn es auf den ersten Blick übertrieben erscheint, so ist es doch wichtig, stets die genaue Bedeutung der Begriffe vor Augen zu haben. Dies wird durch die historisch bedingte „falsche“ Wortwahl erschwert. Im Folgenden sollte „Wärmeübertragung“ also stets als „Energieübertragung in Form von Wärme“ verstanden werden!

2.3 Was ist eine „gute Wärmeübertragung“?

Neben *Wärmeübertragung* wird in bestimmten Fällen auch (meist gleichwertig) von einem *Wärmeübergang* gesprochen. Beides meint den Vorgang eines Energietransportes über eine Systemgrenze in Form von Wärme. Im Folgenden werden die Begriffe Wärmeübertragung und Wärmeübergang deshalb synonym verwendet, es wird dabei lediglich auf übliche Bezeichnungen Rücksicht genommen, wie etwa bei der Einführung eines *Wärmeübergangskoeffizienten* im Zusammenhang mit der sog. konvektiven *Wärmeübertragung*. Im englischsprachigen Raum gibt es hierbei nur einen Begriff: *heat transfer coefficient for convective heat transfer situations*. In diesem Sinne ist die Eingangsfrage auch diejenige nach einem guten bzw. schlechten *Wärmeübergang*. Damit sollte es möglich sein, Wärmeübergänge qualitativ und im konkreten Fall auch quantitativ zu bewerten.

Was aber macht die „Qualität“ eines Wärmeüberganges aus? Allgemein, und zunächst pauschal, steht hinter dieser Frage folgende Überlegung. Ein Energietransport in Form von Wärme

¹ z. B. Herwig, H.; Kautz, C. (2007): *Technische Thermodynamik*, Pearson Studium, München

findet an einer Systemgrenze nur dann statt, wenn Temperaturunterschiede zwischen der Systemgrenze und dem Inneren des Systems, in das oder aus dem die Energie übertragen wird, vorhanden sind.

Damit muss prinzipiell eine sog. „treibende Temperaturdifferenz“ ΔT^* existieren, damit es an der Systemgrenze zu einer bestimmten Wärmestromdichte \dot{q}_W^* kommen kann. Der Index „W“ steht hier für eine „Wand“ als dem Prototyp einer Systemgrenze. Diese (Wand-)Wärmestromdichte stellt die pro Fläche übertragene Leistung (Energie pro Zeit) $\dot{q}_W^* = \dot{Q}_W^*/A^*$ gemessen in W/m^2 dar. Der Bezug auf die Fläche berücksichtigt, dass bei vorgegebener treibender Temperaturdifferenz durch eine Vergrößerung der Übertragungsfläche stets die *insgesamt übertragene Energie* entsprechend vergrößert werden kann, so dass nur eine flächenbezogene Größe ein Maß für die *Qualität* dieser Energieübertragung sein kann. Da auch eine Veränderung der treibenden Temperaturdifferenz zu einer Veränderung der übertragenen Energie führen wird, ist \dot{q}_W^* allein nicht geeignet, die *Qualität* (u. U. aber die „Stärke“) des Wärmeüberganges zu kennzeichnen.

Erst wenn \dot{q}_W^* zur treibenden Temperaturdifferenz ins Verhältnis gesetzt wird, entsteht eine Größe, die als Maß für die Qualität des Wärmeüberganges dienen kann. Diese Größe wird als sog. *Wärmeübergangskoeffizient*

$$\alpha^* \equiv \frac{\dot{q}_W^*}{\Delta T^*} \quad (2-1)$$

eingeführt, führt aber bzgl. seiner Interpretation leider immer wieder zu falschen Vorstellungen bzw. falschen Folgerungen. Solange α^* nicht bekannt ist, stellt (2-1) eine rein formale Abkürzung für den Quotienten aus \dot{q}_W^* und ΔT^* dar. Informationen über α^* erhält man aber nur aus der Kenntnis des konkreten physikalischen Wärmeübertragungsvorganges. Erst wenn α^* aus dieser Kenntnis heraus bestimmt worden ist, kann (2-1) sinnvoll verwendet werden. Der Wärmeübergangskoeffizient bietet damit eine Möglichkeit, Ergebnisse darzustellen und zu nutzen, führt aber durch seine formale Einführung (Definition) zu keinerlei Erkenntnisgewinn.

Trotzdem ist die Definition (2-1) nicht willkürlich gewählt, da mit α^* die Vorstellung verbunden ist, dass diese Größe in einer ganz bestimmten Situation unabhängig von der „Stärke“ des Wärmeüberganges ist. Eine Verdoppelung von ΔT^* führt dann auf eine Verdoppelung von \dot{q}_W^* . Dies trifft für viele, aber keineswegs für alle Wärmeübertragungssituationen zu. Aber auch wenn α^* für eine spezielle Situation eine Konstante darstellt, so ist deren Wert für unterschiedliche Wärmeübertragungssituationen vollkommen unterschiedlich. Zahlenwerte von α^* können (je nach Situation) in der Nähe von 1 liegen, aber auch Werte größer als 10^5 annehmen. Dies verdeutlicht, dass Wärmeübergänge nicht etwa allgemein mit einem „universellen“ Zahlenwert für α^* beschrieben werden können¹.

Ganz allgemein wird der Wärmeübergangskoeffizient verwendet, um die Qualität eines Wärmeüberganges *in einer konkreten Situation* zu charakterisieren: Je größer der Wert α^* ist, desto besser ist der Wärmeübergang.

Nach dieser Vorstellung kann man den Wärmeübergang durch bestimmte Maßnahmen verbessern, wenn dabei

- bei gleich bleibender treibender Temperaturdifferenz ΔT^* die erzielte Wandwärmestromdichte \dot{q}_W^* größer, oder
- bei gleich bleibender Wandwärmestromdichte \dot{q}_W^* die erforderliche treibende Temperaturdifferenz ΔT^* geringer wird.

¹ Weitere Erläuterungen zum α^* -Konzept finden sich in Herwig, H. (1997): *Kritische Anmerkungen zu einem weit verbreiteten Konzept: der Wärmeübergangskoeffizient α* , Forschung im Ingenieurwesen, **63**, 13-17.

Während die Größe α^* bei solchen Überlegungen offensichtlich sinnvoll verwendet werden kann, ist es u. U. problematisch, α^* -Werte aus verschiedenen Wärmeübertragungssituationen zu benutzen, um damit Vergleiche bezüglich der Qualität der Wärmeübertragung anzustellen.

Im konkreten Fall bleibt sorgfältig zu prüfen, ob, wann und warum es von Vorteil ist, in einer Wärmeübertragungssituation hohe Werte des Wärmeübergangskoeffizienten zu realisieren, oder zu versuchen, diese zu verbessern.

Analog zum elektrischen Widerstand $R_{el}^* = U^*/I^*$, der sich als Verhältnis aus der elektrischen Spannung U^* und der elektrischen Stromstärke I^* ergibt, kann ein *thermischer Widerstand* R^* eingeführt werden. Im Falle eines durch α^* beschriebenen Wärmeüberganges wird deshalb der *Wärmeübergangswiderstand*

$$R_{\alpha}^* \equiv \frac{\Delta T^*}{\dot{q}_w^* A^*} = \frac{\Delta T^*}{\dot{Q}_w^*} = \frac{1}{\alpha^* A^*} \quad (2-2)$$

definiert. Dabei ist A^* die Übertragungsfläche an der Systemgrenze, über die ein bestimmter Wärmestrom fließt. Je geringer dieser thermische Widerstand ist, der von dem übertragenen Wärmestrom überwunden werden muss, umso besser ist der Wärmeübergang.

2.4 Was soll das Fachgebiet „Wärmeübertragung“ leisten können?

Die wesentlichen Ziele, die im Fachgebiet „Wärmeübertragung“ verfolgt werden, können wie folgt umrissen werden:

Aufklärung der physikalischen Vorgänge im Zusammenhang mit Wärmeübertragungsproblemen:

Dies kann in komplexen Geometrien und wenn nicht-triviale Strömungen, wie z. B. turbulente Mehrphasenströmungen vorliegen, ein hoher Anspruch sein. Neben experimentellen Studien werden hier zunehmend auch numerische Berechnungen eingesetzt. Während im Experiment stets die reale Physik vorhanden ist, aber die gewünschten Versuchs- und Randbedingungen häufig nicht genau genug realisiert werden können, ist dies bei numerischen Studien genau umgekehrt: Rand- und Anfangsbedingungen können fast beliebig vorgegeben werden, die zu lösenden Gleichungen stellen aber nur Modelle in Bezug auf die Realität dar. Man ist deshalb häufig bemüht, beide Vorgehensweisen miteinander zu kombinieren und experimentelle bzw. numerische Ergebnisse zur gegenseitigen Absicherung und Ergänzung zu nutzen.

Entwicklung verschiedener Möglichkeiten der gezielten Beeinflussung von Wärmeübergängen:

Je nachdem, ob ein guter oder ein schlechter Wärmeübergang angestrebt wird (wie z. B. bei der Entwicklung effektiver Wärmeübertrager oder einer hochwirksamen thermischen Isolation eines Systems), wird man versuchen, den Wärmeübergang in die eine oder andere Richtung durch die unterschiedlichsten Maßnahmen zu beeinflussen. In diesem Zusammenhang spielt die Bewertung von Maßnahmen zur Beeinflussung des Wärmeüberganges eine entscheidende Rolle. Es kommt dabei sehr auf die konkrete Zielgröße und die Nebenbedingungen an, die in einem konkreten Optimierungsproblem vorliegen. Neben dem Wärmeübergangskoeffizienten (2-1) kann zur Beurteilung der Qualität einer bestimmten Maßnahme z. B. auch die Entropieproduktion im System herangezogen werden, weil damit der gesamte Vorgang, einschließlich der Veränderungen im Strömungsfeld, erfasst werden kann (s. dazu z. B. das spätere Kap. 6.8).

Bereitstellung von möglichst allgemeingültigen „Wärmeübergangsbeziehungen“ für technisch häufig vorkommende Standard-Situationen:

Dies können z.B. Wärmeübergänge in den unterschiedlichsten Rohrleitungen, aber auch Wärmeübergänge an überströmten Geometrien wie Platten, Zylindern oder Kugeln sein. In diesem Zusammenhang spielt die Dimensionsanalyse eine große Rolle, weil damit die allgemein gültigen Aussagen als Zusammenhänge von jeweils relevanten dimensionslosen Kennzahlen gefunden werden können (s. dazu Kap. 3).

Diese generellen Ziele spiegeln sich in einer großen Anzahl von einzelnen Studien wider, die laufend in einer Reihe von internationalen Zeitschriften erscheinen, wie z. B.

- INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER
- HEAT AND MASS TRANSFER
- HEAT AND FLUID FLOW
- JOURNAL OF HEAT TRANSFER,

was nur einen kleinen Ausschnitt darstellt. Viele Zeitschriften widmen sich auch speziellen Teilaspekten, wie z. B.

- NUMERICAL HEAT TRANSFER
- EXPERIMENTAL HEAT TRANSFER
- JOURNAL OF ENHANCED HEAT TRANSFER
- MICROSCALE THERMOPHYSICAL ENGINEERING.

3 Dimensionsanalytische Überlegungen

Um weitgehend allgemeingültige Lösungen wärmetechnischer Probleme angeben zu können, ist es unerlässlich, die Probleme möglichst von Anfang an in dimensionsloser Darstellung zu formulieren. In diesem Kapitel soll beschrieben werden, wie dabei methodisch vorzugehen ist.

3.1 Vorüberlegungen

Bei der Dimensionsanalyse wird ausgenutzt, dass physikalische Probleme prinzipiell durch mathematische Gleichungen beschreibbar sind, in denen die im Problem auftretenden, *relevanten* physikalischen Größen miteinander verknüpft sind. In diesen Gleichungen besitzen die linken und die rechten Seiten bzw. alle Termgruppen, die dort additiv auftreten, dieselben physikalischen Einheiten. Nur dann sind Gleichungen „dimensionsrichtig“, was eine notwendige Bedingung an Gleichungen darstellt, damit diese unabhängig von einem im Prinzip frei wählbaren Einheitensystem sind.

Damit sind die relevanten Einflussgrößen aber nicht beliebig miteinander in Gleichungen kombinierbar. Diese Einschränkung besteht auch dann fort, wenn das mathematische Modell nicht explizit aufgestellt wird (weil dies jederzeit möglich bleiben muss). Sie führt dazu, dass aus der endlichen Anzahl von Einflussgrößen eines Problems eine kleinere Anzahl von dimensionslosen Kombinationen (*Kennzahlen*) gebildet werden kann, mit deren Hilfe das Problem gleichwertig beschrieben wird.

Alle denkbaren Fälle mit unterschiedlichen Zahlenwerten für die ursprünglichen (dimensionsbehafteten) Einflussgrößen werden dann durch eine kleinere Anzahl von Fällen mit bestimmten Zahlenwerte für die dimensionslosen Kennzahlen repräsentiert. Die vollständige Beschreibung eines Problems kann deshalb mit den Gleichungen für die ursprünglichen Einflussgrößen erfolgen, gleichwertig aber auch mit Gleichungen, die eine geringere Anzahl von dimensionslosen Gruppen von Einflussgrößen enthalten. *Einer* Lösung in der dimensionslosen Formulierung entsprechen dann *mehrere* Lösungen des ursprünglichen dimensionsbehafteten Problems, so dass aus den dimensionslosen Gleichungen in diesem Sinne allgemeinere Lösungen folgen als aus den ursprünglichen Gleichungen.

3.2 Das Π -Theorem

Das sog. Π -Theorem beinhaltet Überlegungen zur Struktur von Gleichungen in mathematischen Modellen. Ausgangspunkt dieser Überlegungen ist die Bedingung, dass dimensionskonsistente Gleichungen vorliegen müssen. Aus einer Darstellung in dimensionsloser Form folgt unmittelbar, von welchen dimensionslosen Parametern, den sog. *Kennzahlen*, die gesuchte Lösung abhängt. Aber auch wenn die Gleichungen einer (mathematisch/physikalischen) Modellvorstellung nicht explizit bekannt sind, können aus den Dimensionen der beteiligten Größen Schlüsse auf die Kennzahlen gezogen werden, von denen die Lösungen abhängen.

Die Grundlage der Dimensionsanalyse ist das Π -Theorem, das von Buckingham 1914 formuliert wurde. Es besagt, dass jeder physikalische Vorgang durch den Zusammenhang einer endlichen Anzahl von (dimensionslosen) Kennzahlen dargestellt werden kann. Das Π -Theorem

bestimmt aber weder eindeutig die Form der Kennzahlen, noch legt es den funktionalen Zusammenhang zwischen den Kennzahlen fest. Die wesentliche Aussage bezieht sich auf die (minimale) Anzahl von Kennzahlen, durch die ein Problem mit n Einflussgrößen a_i^* und m Basisdimensionen beschrieben ist. Der allgemeine mathematische Zusammenhang laute dabei:

$$\boxed{f(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) = 0} \quad (3-1)$$

Das Problem besitzt dann die dimensionslose Form:

$$\boxed{F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0} \quad (3-2)$$

wenn gilt:

- $f(\dots)$ ist der einzige funktionale Zusammenhang zwischen den Einflussgrößen a_i^* ,
- $f(\dots)$ gilt unabhängig von den Einheiten, in denen die Einflussgrößen a_i^* angegeben sind.

Dabei stellen Π_i einen Satz von $(n - m)$ voneinander unabhängigen dimensionslosen Potenzprodukten der Einflussgrößen dar. Sie werden als *Kennzahlen* bezeichnet.

Alternativ zu dieser Darstellung existiert auch eine „strengere Formulierung“. An die Stelle von m (Anzahl der Basisdimensionen) tritt dann der sog. *Rang der Dimensionsmatrix* r ^{1,2}.

Ein wesentliches Element der Dimensionsanalyse ist die Identifizierung der sog. *Basisdimensionen*. Dazu werden alle in einem Problem auftretenden Dimensionen wie Länge, Zeit, Masse, Energie, Leistung, usw. in Basisdimensionen und abgeleitete Dimensionen, die Potenzprodukte der Basisdimensionen sind, aufgeteilt. Diese Aufteilung ist nicht etwa die Folge verborgener Naturgesetze, sondern hat Vereinbarungscharakter. So werden z. B. im Bereich der Thermodynamik die Länge (L), die Zeit (Z), die Masse (M) und die Temperatur (T) als Basisdimensionen eingeführt. Energie und Leistung sind dann Beispiele für abgeleitete Größen mit den Dimensionen ML^2Z^{-2} bzw. ML^2Z^{-3} . Sieben solcher Basisdimensionen reichen aus, um alle abgeleiteten Dimensionen zu bilden, die überhaupt in der Physik vorkommen.

Der entscheidende Schritt bei der Dimensionsanalyse ist die Aufstellung der Liste von Einflussgrößen eines Problems. Diese Aufstellung erfolgt jeweils problemspezifisch und stellt den ersten und für die Dimensionsanalyse wichtigsten Schritt zu einer mathematisch/physikalischen Modellbildung dar. Mit ihr ist aus Sicht der Dimensionsanalyse alles Weitere festgelegt.

Diese sog. *Relevanzliste eines Problems* kann nach dem „Fünf-Punkte-Programm R1–R5“ zusammengestellt werden, s. Tab. 3.1. Die nach den Punkten R1–R5 aufgestellte Relevanzliste kann durch folgendes „Gedankenexperiment“ daraufhin überprüft werden, ob die darin enthaltenen Größen relevante Einflussgrößen sind, bzw. ob die Relevanzliste vollständig ist.

Man prüft dabei für die einzelnen Größen, ob eine gedachte Änderung dieser Größen Auswirkungen auf die Zielvariable hat, bzw. ob es andere, nicht in der Relevanzliste enthaltene Größen gibt, deren Variation relevante Auswirkungen auf die Zielvariable zur Folge hätte.

Unter Anwendung des Π -Theorems kann auf der Basis der Relevanzliste unmittelbar die Liste der Kennzahlen Π_i aufgestellt werden. Dieser Schritt kann streng formalisiert oder einfach durch

¹ Szirtes T. (1998): *Applied Dimensional Analysis and Modelling*, McGraw-Hill, New York

² Kline, S. J. (1986): *Similitude and Approximation Theory*, Springer-Verlag, Berlin

Tabelle 3.1: „Fünf-Punkte-Programm R1–R5“ zur Aufstellung der Relevanzliste eines Problems

R1	Zielvariable:	gesuchte physikalische Größe
R2	Geometrievariable:	charakteristische geometrische Größe(n)
R3	Prozessvariable:	charakteristische Größe(n) für die Intensität des Prozesses
R4	Stoffwerte:	Stoffwerte, deren gedachte Veränderungen prozessrelevant sind
R5	Konstanten:	Konstanten aus physikalischen Gesetzen, die prozessrelevant sind

probeweise Kombination von Einflussgrößen zu dimensionslosen Potenzprodukten durchgeführt werden. Die Anzahl der Kennzahlen ist bekanntlich $n - m$, es ist lediglich darauf zu achten, dass alle $n - m$ Kennzahlen unabhängig voneinander sind.

3.3 Anwendung des Π -Theorems auf Probleme der Wärmeübertragung

Wie zuvor ausgeführt, geht mit dem entscheidenden Schritt der Aufstellung einer Relevanzliste für eine konkrete Fragestellung eine physikalisch/mathematische Modellbildung einher. Wenn ein wärmetechnisches Problem dimensionsanalytisch behandelt werden soll, muss deshalb über das Problem zumindest ein so weitgehendes physikalisches Verständnis vorhanden sein, dass eindeutig entschieden werden kann, ob eine in Frage kommende Größe relevant für das Problem ist oder nicht. In diesem Sinne muss man im konkreten Fall z. B. entscheiden können, ob die Erdbeschleunigung g^* einen Einfluss hat, oder ob die Oberflächenrauheit von Wänden eine Rolle spielt.

Nachdem die Relevanzliste für ein Problem aufgestellt worden ist, können die dimensionslosen Kennzahlen des Problems ohne Schwierigkeiten gefunden werden. Die scheinbare Willkür bei der Bestimmung der konkreten Kennzahlen erweist sich als unbedeutend, da sich zunächst unterschiedliche Sätze von dimensionslosen Kennzahlen, die aus einer gemeinsamen Relevanzliste hervorgegangen sind, als absolut gleichwertig erweisen. Es gelingt stets, einen zunächst „anderen“ Satz von Kennzahlen durch Kombinationen der einzelnen Kennzahlen in die alternativ vorliegende Form zu bringen. Daher ist es auch vollkommen berechtigt, als Kennzahlen stets solche Kombinationen zu wählen (solange dies mit der konkreten Relevanzliste vereinbar ist), die bereits in der Literatur eingeführt und meist nach verdienten Forschern benannt worden sind.

Die nachfolgende Tabelle 3.2 enthält die Relevanzliste für eine komplexe Fragestellung bei Einphasenströmungen. Diese werden in Kap. 6 im Zusammenhang mit sog. konvektiven Wärmeübertragungsproblemen ausführlich behandelt. Da darin alle wesentlichen physikalischen Größen aufgenommen worden sind, die bei Wärmeübergängen in einphasigen Strömungen vorkommen können, wird implizit ein sehr komplexes physikalisch/mathematisches Modell als zur Beschreibung erforderlich unterstellt. In Spezialfällen werden sich einzelne Größen als irrelevant erweisen, was dann im Sinne eines vereinfachten Modells zu einer reduzierten Anzahl von Kennzahlen für dieses vereinfachte Problem führt. Die genauen Beschreibungen und ggf. Definitionen der einzelnen Größen folgen an späteren Stellen. Hier interessiert zunächst nur ihr Zusammenspiel im Sinne der Dimensionanalyse. Insbesondere die wichtige Größe λ^* als Wärmeleitfähigkeit eines Stoffes (Fluid oder Festkörper) wird hier zunächst nur als Maß dafür benutzt, wie „gut“ ein Stoff Energie in Form eines Wärmestromes „transportieren“ kann. Die genaue Definition erfolgt in Kap. 5, dort in (5-5).

Tabelle 3.2: Relevanzliste und daraus abgeleitete Kennzahlen für ein komplexes Problem im Zusammenhang mit einem einphasigen konvektiven Wärmeübergang
Die (Ri)-Angaben in der rechten oberen Spalte beziehen sich auf das „Fünf-Punkte-Programm R1–R5“ zur Aufstellung von Relevanzlisten.

Relevanzliste	1	Wandwärmestromdichte	\dot{q}_W^*	kg/s ³	(R1)
	2	Koordinate	x^*	m	(R2)
	3	charakt. Körperabmessung	L^*	m	(R2)
	4	charakt. Rauheitshöhe	k^*	m	(R2)
	5	charakt. Geschwindigkeit	u^*	m/s	(R3)
	6	treibende Temperaturdifferenz	ΔT^*	K	(R3)
	7	Dichte	ρ^*	kg/m ³	(R4)
	8	isobarer thermischer Ausdehnungskoeffizient	β^*	1/K	(R4)
	9	dynamische Viskosität	η^*	kg/m s	(R4)
	10	molekulare Wärmeleitfähigkeit	λ^*	kg m/s ³ K	(R4)
	11	spez. Wärmekapazität	c_p^*	m ² /s ² K	(R4)
	12	Schallgeschwindigkeit	c_S^*	m/s	(R5)
	13	Erdbeschleunigung	g^*	m/s ²	(R5)
$m = 13; n = 4 \text{ (kg, m, s, K)} \Rightarrow 9 \text{ Kennzahlen}$					
Kennzahlen	1	$Nu = \dot{q}_W^* L^* / \lambda^* \Delta T^*$	Nußelt-Zahl		
	2	$x = x^* / L^*$	dimensionslose Lauflänge		
	3	$k = k^* / L^*$	dimensionslose Rauheitshöhe		
	4	$Re = \rho^* u^* L^* / \eta^*$	Reynolds-Zahl		
	5	$Gr = \rho^{*2} g^* \beta^* \Delta T^* L^{*3} / \eta^{*2}$	Grashof-Zahl		
	6	$Pr = \eta^* c_p^* / \lambda^*$	Prandtl-Zahl		
	7	$Fr = u^* / \sqrt{g^* L^*}$	Froude-Zahl		
	8	$Ec = u^{*2} / c_p^* \Delta T^*$	Eckert-Zahl		
	9	$Ma = u^* / c_S^*$	Mach-Zahl		

Der Tabelle ist zu entnehmen, welche Kennzahlen in der physikalischen Situation eines einphasigen Wärmeüberganges üblicherweise vorkommen können. Liegt eine andere Situation vor, wie etwa bei Wärmeübergängen mit Phasenwechsel oder bei Wärmestrahlung, müssen entsprechend abgeänderte physikalisch/mathematische Modelle zugrunde gelegt werden, was dann zu anderen Relevanzlisten und in der Folge zu teilweise anderen dimensionslosen Kennzahlen führt.

Im konkreten Anwendungsfall werden die Wärmeübergänge an einer bestimmten Geometrie (Rohr, Kugel, ...) und für bestimmte thermische Randbedingungen ($T_W^* = \text{const}$, $\dot{q}_W^* = \text{const}$, ...) gesucht. Diese beiden Aspekte kommen gewissermaßen als Parameter in der bisher gewählten allgemeinen Betrachtung konvektiver Wärmeübergänge bei Einphasenströmungen hin-

zu. Deshalb soll die allgemeine Form einer Lösung solcher Probleme jetzt als

$$\boxed{\text{Nu} = \text{Nu}(x, k, \text{Re}, \text{Gr}, \text{Pr}, \text{Fr}, \text{Ec}, \text{Ma}, \text{Geometrie}, \text{therm. RB})} \quad (3-3)$$

geschrieben werden. Wie diese Lösung genau aussieht, ist von Fall zu Fall verschieden und muss jeweils aufs Neue ermittelt werden. Die allgemeinen Abhängigkeiten werden aber durch die zuvor angestellten dimensionsanalytischen Betrachtungen beschrieben.

In Kap. 6 wird bei der Behandlung konvektiver Wärmeübergangsprobleme mehrfach auf diese Beziehung zurückgegriffen und gezeigt, welche hier noch vorhandenen Abhängigkeiten in bestimmten Spezialfällen vernachlässigt werden können.

Abschließend soll noch auf den Zusammenhang zwischen der Nußelt-Zahl Nu und dem vorher bereits eingeführten Wärmeübergangskoeffizienten α^* , (2-1) in Kap. 2.3, hingewiesen werden. Formal gilt mit λ^* als der Wärmeleitfähigkeit des Fluides und L^* als einer charakteristischen Länge der Geometrie des Problems

$$\text{Nu} = \alpha^* \frac{L^*}{\lambda^*}, \quad (3-4)$$

was aber nicht zu falschen Schlüssen verleiten sollte. Während α^* ein willkürlich, wenn auch physikalisch interpretierbares Verhältnis zweier Größen darstellt, ist Nu eine Kennzahl im Sinne der Dimensionsanalyse. Beides sind Größen, mit denen ein Wärmeübergang quantitativ beschrieben werden kann. Ihre Aussagekraft ist aber deutlich verschieden.

Angenommen, α^* sei für eine bestimmte Wärmeübertragungssituation zahlenmäßig bekannt (z. B. für die Wasserströmung in einem Rohr, was in Wärmeübertragern häufig vorkommt), so kann bei vorgegebener Temperaturdifferenz ΔT^* berechnet werden, welche Wandwärmestromdichte an der Rohrwand vorliegt. Dies ist aber im konkreten Fall nur für das vorhandene Rohr (Durchmesser D^*) und Wasser (Wärmeleitfähigkeit λ^*) möglich. Für einen anderen Rohrdurchmesser und für eine veränderte Wärmeleitfähigkeit bei Einsatz eines anderen Fluides müsste zunächst der dann gültige Zahlenwert für α^* ermittelt werden.

Wenn aber statt α^* die Nußelt-Zahl bekannt ist, so liegt damit eine deutlich erweiterte Information vor. Während α^* nur \dot{q}_W^* und ΔT^* miteinander verknüpft, stellt Nu den Zusammenhang zwischen \dot{q}_W^* , ΔT^* , D^* und λ^* her. Für einen bekannten Wert von Nu kann deshalb die Wandwärmestromdichte \dot{q}_W^* bei Vorgabe von ΔT^* für beliebige Werte von D^* und λ^* unmittelbar bestimmt werden. Dies setzt allerdings voraus, dass alle auftretenden physikalischen Situationen durch denselben Zahlenwert Nu beschrieben werden (was im hier gewählten Beispiel einer (laminaren) Rohrströmung) der Fall ist.

Ganz generell ist mit der Kenntnis dimensionsloser Kennzahlen ein höherer „Informationsgehalt“ verbunden als mit empirischen Koeffizienten, auch wenn diese formal in den Kennzahlen enthalten sind.

4 Allgemeine Betrachtungen zum Wärmeübergang an Systemgrenzen

Bevor die einzelnen zum Teil sehr verschiedenen Formen der Wärmeübertragung bzw. des Wärmeüberganges an Systemgrenzen im Detail behandelt werden, sollen diese kurz bzgl. ihrer charakteristischen Besonderheiten beschrieben werden. Darüber hinaus werden in diesem Kapitel grundsätzlich vorhandene Gemeinsamkeiten der verschiedenen Formen der Wärmeübertragung diskutiert.

4.1 Kurz-Charakterisierung verschiedener Formen der Wärmeübertragung

Die in den nachfolgenden Kapiteln ausführlich behandelten verschiedenen Formen der Wärmeübertragung über eine Systemgrenze sind:

Reine Wärmeleitung:

Transport von innerer Energie in Richtung abnehmender Temperatur in einem ruhenden Festkörper oder Fluid mit der molekularen Wärmeleitfähigkeit λ^* als Stoffparameter.

Konvektiver Wärmeübergang:

Zusammenspiel von Wärmeleitung und einer meist wandparallelen Strömung in einem Fluid; strömungsunterstützter Wärmeübergang durch Leitung in einem Fluid.

Zweiphasen-Wärmeübergang:

Konvektiver Wärmeübergang im Zusammenspiel mit einem Phasenwechsel, meist flüssig \leftrightarrow gasförmig, in der Nähe der Systemgrenze; strömungsunterstützter Wärmeübergang durch Leitung mit einem Phasenwechsel eines Fluides in Wandnähe.

Wärmestrahlung:

Austausch von Energie zwischen Wänden unterschiedlicher Temperatur durch elektromagnetische Strahlung. Anstelle einer Wand kann auch ein strahlungsaktives Fluid auftreten.

Während die ersten drei Mechanismen jeweils einen Stoff als Träger von innerer Energie benötigen, kann Wärmestrahlung als einziger Mechanismus auch im Vakuum auftreten. Insofern nimmt die Wärmestrahlung eine gewisse Sonderstellung gegenüber den drei anderen Mechanismen ein, die untereinander eine Reihe von Gemeinsamkeiten aufweisen. Auf diese soll im folgenden Kapitel eingegangen werden.

4.2 Leitungsbasierter Energietransport über eine Systemgrenze

Wenn der Wärmeübergang als Energietransport über die Grenze eines thermodynamischen Systems definiert wird, so zeigt sich, dass mit Ausnahme der Wärmestrahlung alle Formen der Wärmeübertragung einheitlich auf einer Wärmeleitung über die Systemgrenze basieren. Deshalb soll in diesem Zusammenhang von einem *leitungsbasierten* Energietransport gesprochen werden, im Gegensatz zum *strahlungsbasierten* Transport bei der Wärmestrahlung. Bild 4.1 zeigt die Gren-

ze eines thermodynamischen Systems, hier in Form einer festen Wand gegenüber einem Fluid, das zum betrachteten System gehört. Wenn Energie *in* das System übertragen wird, so muss jenseits der Wand (im System) ein „physikalischer Mechanismus“ vorhanden sein, mit dessen Hilfe die über die Wand (Systemgrenze) übertragene Energie ins Innere des Systems gelangt. Dabei soll zunächst unterstellt werden, dass eine bestimmte Wärmestromdichte an der Systemgrenze vorliegt. Wie die dafür erforderliche Energie dorthin gelangt, ist ein anderes Problem. Die Verhältnisse *in* der Wand müssen ggfs. zusätzlich berücksichtigt werden (s. dazu das nachfolgende Kap. 4.3).

Die drei leitungsbasierten Wärmeübertragungsmechanismen unterscheiden sich danach, was mit der durch Wärmeleitung über die Systemgrenze eingebrachten Energie geschieht. In einem stationären Prozess, der hier unterstellt werden soll, kann diese Energie nicht der Aufheizung des wandnahen Fluides dienen, sondern muss kontinuierlich entfernt oder „verbraucht“ werden. Die drei verschiedenen Formen der Wärmeübertragung unterscheiden sich diesbezüglich fundamental:

- Bei der reinen Wärmeleitung wird die eingebrachte Energie durch molekulare Wärmeleitung ins Innere des Systems transportiert. Dazu ist auf dem gesamten Leitungsweg ein entsprechender Temperaturgradient erforderlich.
- Beim konvektiven Wärmeübergang wird wandnahes Fluid erwärmt und gleichzeitig mit der Strömung wandparallel „entfernt“. Dabei treten Temperaturgradienten senkrecht zur Wand nur in dem Maße auf, wie sie erforderlich sind, um die übertragene Energie durch Leitung zu den zu erwärmenden wandnahen Fluidbereichen zu transportieren, bevor diese mit der Strömung wandparallel entfernt werden.
- Beim Phasenwechsel-Wärmeübergang wird in unmittelbarer Wandnähe Flüssigkeit verdampft und auf diese Weise die übertragene Energie „verbraucht“, d. h. in Form von Verdampfungsenthalpie latent gespeichert, ohne dass damit zunächst eine Temperaturveränderung verbunden wäre. Wenn dieser Prozess kontinuierlich ablaufen soll, muss ständig flüssiges Fluid nachgeführt werden, so dass direkt an der Wand ein Flüssigkeitsfilm vorhanden sein muss, an dessen

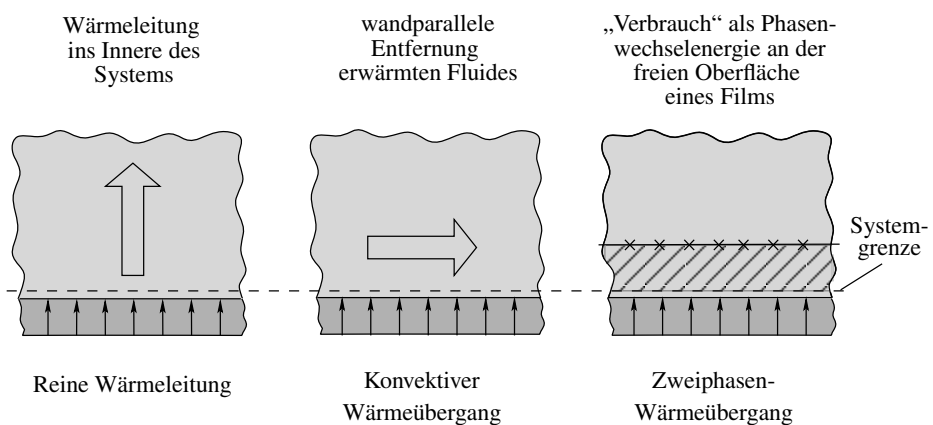


Bild 4.1: Leitungsbasierter Energietransport über eine Systemgrenze am Beispiel eines Wärmestromes *in* das System (Heizfall), Verbleib der in Form von Wärme übertragenen Energie

freier Oberfläche die Verdampfung stattfindet. Dieser Flüssigkeitsfilm muss von der übertragenen Energie durch Wärmeleitung überwunden werden, wozu ein geringer Temperaturunterschied über den Film hinweg erforderlich ist.

Ohne an dieser Stelle bereits auf weitere Einzelheiten einzugehen, verdeutlicht die qualitative Beschreibung hinlänglich, dass bei den drei Formen der Wärmeübertragung sehr unterschiedliche sog. treibende Temperaturdifferenzen ΔT^* entstehen werden, die für den jeweiligen Gesamtvorgang charakteristisch sind. Damit treten dann auch sehr unterschiedliche Werte des Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha^* = \dot{q}_W^* / \Delta T^*$ auf (s. Kap. 2.3 (2-1)). Dieser wird umso größer sein, je kleiner ΔT^* bei vorgegebener Wandwärmestromdichte \dot{q}_W^* ist. Nach den Ausführungen in Kapitel 2.3 bedeutet dies dann, dass ein besserer Wärmeübergang vorliegt als bei den Fällen mit kleineren Werten von α^* .

Bild 4.1 zeigt den sog. *Heizfall*, d. h., ein Wärmestrom fließt in das System. Im *Kühlfall* kehren sich im System lediglich die Temperaturgradienten um. Warmes Fluid wird nicht wandparallel ab-, sondern zugeführt, und an die Stelle der Verdampfung tritt die Kondensation mit der Folge, dass ein kontinuierlich entstehender Flüssigkeitsfilm entfernt werden muss.

4.3 Thermische Randbedingungen, konjugierte Probleme

In technischen Anwendungen, bei denen unterschiedliche Temperaturen und damit auch Wärmeströme auftreten, können thermodynamische Systemgrenzen gezogen werden, über die hinweg dann per Definition ein Wärmeübergang vorliegt. Wenn im Sinne einer theoretischen Modellbildung zur Beschreibung technischer Anwendungen Systeme definiert und damit Systemgrenzen eingeführt werden, so sind direkt an diesen Systemrändern thermische Randbedingungen erforderlich, die das Temperaturfeld im Inneren bestimmen.

In der Hoffnung, damit zumindest näherungsweise die tatsächlichen Verhältnisse an den Systemgrenzen beschreiben zu können, werden diese Randbedingungen standardisiert und als möglichst einfache Funktionen eingeführt. In diesem Sinne werden für viele (theoretische) Untersuchungen wahlweise folgende thermische Randbedingungen zugrunde gelegt:

Konstante Temperatur an der Systemgrenze ($T_W^ = \text{const}$):*

Der Temperaturgradient und damit letztlich der Wärmestrom an der Systemgrenze ist dann ein Teil der gesuchten Lösung des Problems.

Konstante Wandwärmestromdichte an der Systemgrenze ($\dot{q}_W^ = \text{const}$):*

Die in der Regel nicht mehr konstante Temperatur an der Systemgrenze ist dann Teil der gesuchten Lösung. Als Spezialfall dieser Randbedingung tritt die *adiabate Wand* auf, für die $\dot{q}_W^* = 0$ gilt.

Konstanter Wärmeübergangskoeffizient an der Systemgrenze ($\dot{q}_W^ / \Delta T^* = \text{const}$):*

Dabei sind zunächst sowohl \dot{q}_W^* als auch T_W^* Teil der gesuchten Lösung. Sie sind jedoch auf feste Weise durch die Vorgabe von $\alpha^* = \dot{q}_W^* / \Delta T^*$ gekoppelt. Dies erfordert in der Regel ein iteratives Vorgehen bei der Lösung eines Problems.

Der Fall einer konstanten Wandtemperatur wird in Experimenten näherungsweise für ein System realisiert, das sich in einem sog. Thermostaten befindet, also mit einem gut wärmeleitenden Material konstanter Temperatur in Kontakt steht.

Eine konstante Wandwärmestromdichte kann näherungsweise mit Hilfe einer elektrisch leitenden Systemgrenze mit einem flächenkonstanten elektrischen Widerstand realisiert werden,

der von einem flächenmäßig gleich verteilten elektrischen Strom durchflossen wird. Wenn der elektrische Widerstand pro Flächeneinheit konstant ist, wird dann eine gleichmäßige Dissipation elektrischer Energie auftreten. Diese führt zu einer konstanten Wandwärmestromdichte, mit der die entstehende innere Energie abgeführt wird.

Häufig sind die Temperaturen oder Wärmestromdichten an den Grenzen der unter bestimmten Gesichtspunkten festgelegten thermodynamischen Systeme aber nicht a priori bekannt bzw. ist nicht zu erwarten, dass sie einer der drei zuvor formulierten Standard-Randbedingungen entsprechen. Dann kann man versuchen, das System soweit zu vergrößern, dass bekannte Randbedingungen vorliegen. Die auf diesem Wege hinzugekommenen Bereiche, die nicht zum ursprünglichen System gehörten, sind jetzt Teil des neuen Systems und die dort herrschenden Verhältnisse sind als ein Teil der Gesamtlösung gesucht.

Wenn ein ursprüngliches System nur Fluid enthält, die Systemgrenze also durch die fluidzugewandte Seite einer Wand gebildet wurde, so kann es erforderlich sein, die Wand mit zum System hinzunehmen, weil die Randbedingungen des ursprünglichen Systems nicht bekannt waren. Dies setzt natürlich voraus, dass an der Außenwand jetzt sinnvolle thermische Randbedingungen gesetzt werden können. In einem solchen Fall gehört die Wand dann zum neuen, erweiterten System. In der festen Wand liegt reine Wärmeleitung vor, im restlichen System werden in der Regel zusätzliche Formen des Energietransportes auftreten. Aus diesem Grund wird man beide Bereiche getrennt behandeln und mit einem geeigneten Iterationsschema zu einer Gesamtlösung verbinden.

Probleme, die auf diese Weise (meist iterativ) gelöst werden müssen, nennt man *konjugierte Probleme*. Bild 4.2 erläutert diese Situation anhand eines einfachen thermodynamischen Systems, für das untersucht werden soll, welcher Wärmeübergang zwischen einer warmen unteren und einer kalten oberen Wand auftritt, wenn die Seitenwände adiabatisch sind. Dieses Problem ist vielfach und ausführlich untersucht worden, wobei bis heute nur eine unbefriedigende Beschrei-

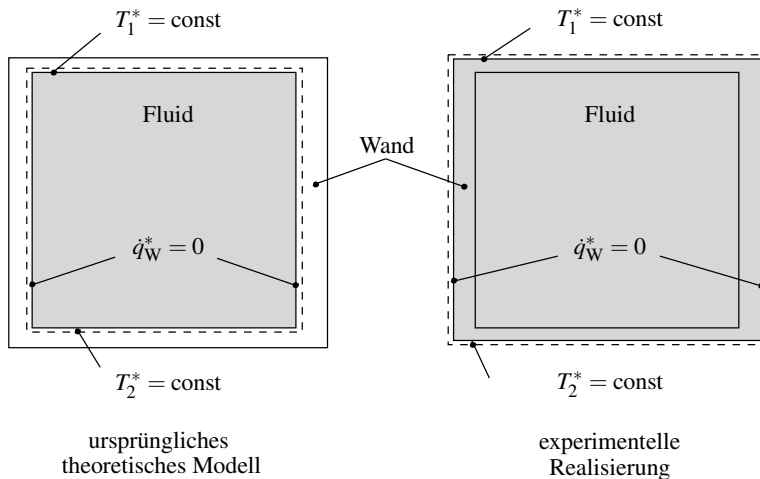


Bild 4.2: Theoretisches Modell und experimentelle Realisierung → konjugiertes Problem
 $(T_2^* > T_1^*$: Rayleigh-Bénard Problem)

bung dieser Wärmeübertragungssituation gelungen ist, wenn die auftretende Strömung turbulent ist. Es ist unter dem Namen *Rayleigh-Bénard Problem* bekannt¹. Wenn dieser Fall im Experiment untersucht werden soll, wird man die entsprechenden Randbedingungen nur an den Außenwänden setzen können. Eine theoretische Betrachtung des im Experiment realisierbaren Falles muss deshalb von einem konjugierten Problem ausgehen, bei dem die Wärmeleitungsvorgänge in den Wänden eine Rolle spielen.

4.4 Entropieproduktion bei der Wärmeübertragung

Aus thermodynamischer Sicht findet mit einem Energietransport in Form von Wärme bei endlichen Temperaturgradienten stets eine Entwertung von Energie statt, weil bei diesem irreversiblen Energietransport in Richtung abnehmender Temperaturen stets Entropie produziert wird. Dabei dient das Konzept der *Exergie-/Anergie-Aufteilung*² von Energien zur anschaulichen Bewertung der Energie. Je höher der Exergieanteil einer Energie ist (also derjenige Anteil, der sich unbeschränkt in alle anderen Energieformen umwandeln lässt), um so wertvoller ist diese. Abnehmende Exergieanteile bedeuten damit eine Energieentwertung. Da dieser Exergieverlust mit einer Entropieproduktion einhergeht, kann er quantitativ bestimmt werden, indem die Entropieproduktion berechnet wird, s. z. B. Kap. 6.8.2.

Bei reiner Wärmeleitung wird die lokale Entropieproduktion entscheidend durch den lokalen Temperaturgradienten bestimmt. Bei konvektiver Wärmeübertragung kommt hinzu, dass zusätzlich zur Entropieproduktion durch Wärmeleitung auch durch die Dissipation mechanischer Energie in der Strömung Entropie erzeugt wird. Beide Produktionsraten gemeinsam ergeben die insgesamt erzeugte Entropie. Die Entropieproduktion kann ermittelt werden, wenn die Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder in einem Wärmeübertragungsproblem bekannt sind. In diesem Sinne handelt es sich bei der Entropieproduktion um eine Größe, die in der sog. *post-processing*-Phase einer Berechnung bestimmt werden kann, d. h., sie kann nachträglich ermittelt werden und muss nicht zusammen mit den anderen gesuchten Größen von vorne herein bestimmt werden.

Bei konvektiver Wärmeübertragung kann die insgesamt auftretende Entropieproduktionsrate auch zur *Bewertung* von Maßnahmen dienen, mit denen versucht wird, den Wärmeübergang zu verbessern. Dabei „erkauft“ man sich einen verbesserten Wärmeübergang in der Regel durch einen erhöhten Druckverlust im Übertragungsprozess. Da ein verbesserter Wärmeübergangskoeffizient α^* nicht unmittelbar mit einem erhöhten Druckverlustbeiwert verglichen werden kann, bietet sich die Entropieproduktionsrate als gemeinsames Bewertungskriterium an. Ein verbesserter Wärmeübergang vermindert die Entropieproduktion aufgrund von Wärmeleitung, der erhöhte Druckverlust bedeutet aber eine erhöhte Dissipation mechanischer Energie und damit eine erhöhte Entropieproduktion in der Strömung.

Die gesamte Entropieproduktion als Kombination aus beiden Beiträgen kann Auskunft darüber geben, ob die gewählte Maßnahme aus thermodynamischer Sicht sinnvoll ist. Wenn die Entropieproduktion insgesamt sinkt, wird die Energie weniger stark entwertet als zuvor, und die Maßnahme zur Verbesserung des Wärmeüberganges ist in diesem Sinne positiv zu bewerten.

Die konkrete Berechnung der Entropieproduktion wird in Kap. 6.8.2 für die konvektive Wärmeübertragung erläutert. Das ILLUSTRIERENDE BEISPIEL 6.1 zeigt, dass mit Hilfe der Entropieproduktion Entscheidungsgrundlagen entstehen, die anderweitig nicht verfügbar sind.

¹ s. dazu z. B. Hölling, M.; Herwig, H. (2006): *Asymptotic analysis of heat transfer in turbulent Rayleigh-Bénard convection*, Int. Journal of Heat and Mass Transfer, **49**, 1129-1136

² s. dazu z. B. Herwig, H.; Kautz, C. (2007): *Technische Thermodynamik*, Pearson Studium, München

4.5 Der Grenzfall reversibler Wärmeübertragung

Wie im Zusammenhang mit dem Wärmeübergangskoeffizienten (2-1) ausgeführt, bedarf es einer treibenden Temperaturdifferenz ΔT^* , damit eine von Null verschiedene Wandwärmestromdichte \dot{q}_W^* entsteht. Je kleiner diese Differenz für einen bestimmten Wert von \dot{q}_W^* ist, umso besser ist der Wärmeübergang, d. h. umso größer ist der Wärmeübergangskoeffizient α^* . Der theoretisch optimale Wert ist danach $\alpha^* = \infty$, was für einen endlichen Wert von \dot{q}_W^* auch als $\Delta T^* = 0$ interpretiert werden kann. Dann tritt aber bei diesem Wärmeübergang keine Entropieproduktion auf, weil keine Temperaturgradienten vorhanden sind. Dieser theoretische Grenzfall entspricht aus thermodynamischer Sicht der sog. *reversiblen Wärmeübertragung*, für die gilt

$$dS^* = \frac{\delta Q_{\text{rev}}^*}{T^*}. \quad (4-1)$$

Die Entropieänderung dS^* in einem System, in das ein Wärmestrom δQ_{rev}^* bei der konstanten Temperatur T^* übertragen wird, tritt dann ausschließlich aufgrund dieser Wärmeübertragung auf. Sie kann vollständig „rückgängig“ gemacht werden, wenn derselbe Wärmestrom in umgekehrter Richtung (bei derselben Temperatur) wieder entzogen wird.

In vielen Situationen ist es von Vorteil, so wenig Entropie wie möglich (irreversibel) zu erzeugen. Eine Wärmeübertragung sollte deshalb möglichst nahe an dem theoretischen Grenzfall einer reversiblen Wärmeübertragung liegen, also einen möglichst hohen Wert von α^* aufweisen.

5 Wärmeleitung

Dieser Energietransport in Form von Wärme liegt (als alleiniger Mechanismus) in einem ruhenden Stoff vor, wenn dort Temperaturunterschiede vorhanden sind. Er stellt einen grundlegenden Transportmechanismus dar, der in fast allen wärmetechnischen Problemen zumindest als Teilaspekt auftritt und deshalb hier als erstes ausführlich behandelt werden soll. Die Erfahrung zeigt, dass dabei ein Wärmestrom in Richtung abnehmender Temperatur auftritt. Mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik lässt sich zeigen, dass dies eine Folge der bisher unwiderlegten generellen Aussage ist, dass Entropie nicht vernichtet werden kann.

Die Bilanzen unter Berücksichtigung der thermodynamischen Hauptsätze (\rightarrow Gleichgewichts-Thermodynamik) gestatten allerdings keine Aussage darüber, wie groß ein Wärmestrom ist, wenn ein bestimmtes Temperaturgefälle vorliegt. Dazu bedarf es einer Ergänzung der thermodynamischen Energiebilanz, die in diesem Kapitel als sog. konstitutive Gleichung eingeführt wird.

5.1 Energiebilanz

Die thermodynamische Bilanz der Energie für ein Kontrollvolumen V^* (erster Hauptsatz für geschlossene Systeme) in einem nicht-isothermen Feld, in dem also Temperaturgradienten und als Folge davon Wärmeströme vorhanden sind, lautet¹

$$\frac{dE^*}{d\tau^*} = \dot{Q}^* + P^*. \quad (5-1)$$

Dabei ist E^* die Gesamtenergie innerhalb der Systemgrenze, die sich als $dE^*/d\tau^*$ mit der Zeit τ^* verändert, wenn Energie in Form eines Wärmestromes \dot{Q}^* und/oder in Form einer mechanischen Leistung P^* zwischen dem Kontrollvolumen V^* und einem zweiten System (z. B. der Umgebung) übertragen wird.

Im betrachteten Fall der reinen Wärmeleitung ist keine Leistung P^* vorhanden, so dass es ausreicht, die innere Energie als Teilenergie zu bilanzieren, die sich nur infolge eines Wärmestromes in das oder aus dem Kontrollvolumen verändert. Dieser Wärmestrom fließt über die Kontrollvolumen-Oberfläche dA^* , wenn als Kontrollvolumen jetzt ein infinitesimales Volumen dV^* betrachtet wird (s. dazu Bild 5.1). Damit gilt mit dem Wärmestromdichte-Vektor \vec{q}^* und dem Flächennormalen-Vektor \vec{n} jetzt

$$\delta \dot{Q}^* = -\vec{q}^* \cdot \vec{n} dA^*. \quad (5-2)$$

Das Minuszeichen berücksichtigt, dass der Flächennormalen-Vektor per Definition nach außen weist, ein in Form von Wärme zugeführter Energiestrom, der diesem Vektor entgegen gerichtet ist, aber per Definition positiv zählt. Mit Hilfe des mathematischen Satzes von Gauss kann ein Oberflächenintegral als Volumenintegral geschrieben werden, so dass für ein infinitesimales

¹ siehe z. B. Herwig, H.; Kautz, C. (2007): *Technische Thermodynamik*, Pearson Studium, München

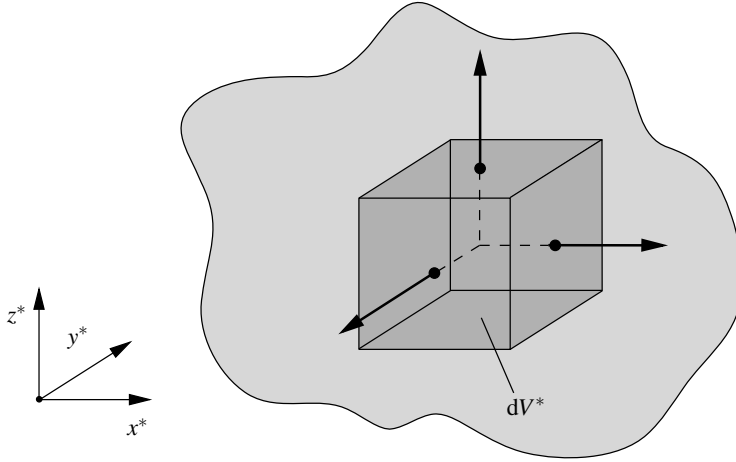


Bild 5.1: Volumenelement dV^* mit Flächennormalen (hier: kartesische Koordinaten)

Volumenelement dV^* gilt:¹

$$\vec{q}^* \cdot \vec{n} dA^* = \text{div} \vec{q}^* dV^* \quad (5-3)$$

Aus (5-1) mit $P^* = 0$ und E^* als innerer Energie sowie (5-3) folgt dann für eine infinitesimale, jetzt als ∂T^* anstelle von dT^* geschriebene Temperaturänderung ∂T^* mit $\partial E^* = c^* dm^* \partial T^*$ als Änderung der inneren Energie (c^* : spezifische Wärmekapazität) und mit $dm^* = \rho^* dV^*$, nachdem dV^* auf beiden Seiten „herausgekürzt“ wurde:

$$\boxed{\rho^* c^* \frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} = -\text{div} \vec{q}^*} \quad (5-4)$$

Die Divergenz des Vektorfeldes \vec{q}^* als seine „Ergiebigkeit“ gibt an, um welchen Betrag sich in Form von Wärme ein- und ausströmende Energien unterscheiden. Diese Differenz führt dann (je nach Vorzeichen) zu einer Erhöhung bzw. Absenkung der Temperatur im Kontrollvolumenelement, wie die linke Seite von (5-4) zeigt. Solange das Kontrollvolumen als (infinitesimal) klein angesehen werden kann, liegt darin eine räumlich konstante Temperatur $T^*(\tau^*)$ vor und es könnte $dT^*/d\tau^*$ als gewöhnliche Ableitung geschrieben werden. Für endlich große Kontrollräume muss aber auf die partielle Ableitung $\partial T^*/\partial \tau^*$ übergegangen werden, s. (5-6).

Die Energiebilanz (5-4) enthält noch *zwei* unbekannte Größen (T^* und \vec{q}^*) und kann deshalb zunächst nicht gelöst werden. Eine solche Situation ist typisch und kommt auch bei der Aufstellung anderer Bilanzen (z. B. für den Impuls) immer dann vor, wenn sog. Transportströme in einer Bilanz auftreten. Es werden dann zusätzliche Gleichungen benötigt, die als *konstitutive Gleichungen* bezeichnet werden. Sie beschreiben das Stoffverhalten bezüglich des betrachteten Transportvorganges (hier: Wärmeleitung).

¹ Die anschauliche Bedeutung des „Satzes von Gauss“ besagt im vorliegenden Fall, dass die Energie, die sich im Volumen dV^* ansammelt (dies ist $\text{div} \vec{q}^* dV^*$), dem „Netto“-Fluss durch die umgebende Oberfläche entspricht (dies ist $\vec{q}^* \cdot \vec{n} dA^*$, berücksichtigt also ein- und ausfließende Wärmeströme im Sinne eines Netto-Flusses).

5.2 Fourier-Ansatz als konstitutive Gleichung

Eine konstitutive Gleichung als Ergänzung der Energiebilanz (5-4) muss einen Zusammenhang zwischen der Wärmestromdichte \vec{q}^* und der Temperatur T^* herstellen. Dieser Zusammenhang folgt aus keiner Bilanz, sondern muss der Physik der Wärmeleitung „entnommen“ werden. Die gesuchte Beziehung könnte aus der Kenntnis der molekularen, mikroskopischen Wechselwirkungen und deren Folgen für die Wärmeleitung abgeleitet werden oder aber aus experimentellen Beobachtungen der makroskopischen Größen \vec{q}^* und T^* gefolgert werden. Für letzteres Vorgehen wird man einen bestimmten sinnvollen Ansatz formulieren und anschließend nachprüfen, ob dieser Ansatz zumindest für eine Reihe von Fällen die Verhältnisse in guter Näherung beschreibt. Da \vec{q}^* offensichtlich nur auftritt, wenn Temperaturgradienten vorhanden sind, liegt ein Ansatz als $\vec{q}^* \sim \text{grad } T^*$ nahe. Ein solcher Ansatz ist mit dem Namen *Jean Baptiste Joseph Fourier* verbunden und lautet:

$$\boxed{\vec{q}^* = -\lambda^* \text{grad } T^*} \quad (\text{Fourier-Ansatz}) \quad (5-5)$$

Dabei ist mit λ^* eine stoffspezifische sog. *Wärmeleitfähigkeit* mit der Einheit W/m K eingeführt worden. Das Minuszeichen berücksichtigt, dass der Wärmestromdichte-Vektor stets in Richtung abnehmender Temperatur weist.

Prinzipiell ist λ^* eine Funktion der Temperatur und in geringem Maße auch des Druckes. Häufig werden diese Abhängigkeiten aber vernachlässigt. Dann ist λ^* für einen bestimmten Stoff ein konstanter (ggfs. gemittelter) Zahlenwert.

Die vektorielle Gleichung (5-5) umfasst drei Komponenten-Gleichungen, die in unterschiedlichen Koordinatensystemen angegeben werden können. In Tab. 5.1 sind diese Gleichungen für drei gängige Koordinatensysteme zusammengestellt.

Ob der Ansatz (5-5) sinnvoll ist, kann nur im Vergleich mit \vec{q}^* , T^* -Messwerten aus entsprechenden Experimenten entschieden werden. Dabei zeigt sich, dass (5-5) das Wärmeleitungsverhalten in fast allen Situationen, d. h. für die verschiedensten Stoffe und für sehr unterschiedlich große Temperaturgradienten, sehr genau beschreibt. Es gibt nur wenige Ausnahmen, in denen der Ansatz (5-5) unzureichend ist. Die dann vorliegende Art der Wärmeleitung wird als *Nicht-Fouriersche Wärmeleitung* bezeichnet (s. dazu das ILLUSTRIERENDE BEISPIEL 5.2).

Tabelle 5.1: Komponenten-Gleichungen von (5-5) in drei gängigen Koordinatensystemen

Kartesische Koordinaten (x^*, y^*, z^*):

$$q_x^* = -\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*}; \quad q_y^* = -\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*}; \quad q_z^* = -\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}$$

Zylinderkoordinaten (z^*, r^*, φ):

$$q_z^* = -\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}; \quad q_r^* = -\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}; \quad q_\varphi^* = -\lambda^* \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \varphi}$$

Kugelkoordinaten (r^*, φ, ϑ):

$$q_r^* = -\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}; \quad q_\varphi^* = -\lambda^* \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \varphi}; \quad q_\vartheta^* = -\lambda^* \frac{1}{r^* \sin \varphi} \frac{\partial T^*}{\partial \vartheta}$$

Eine genaue Betrachtung der physikalischen Gesamtsituation zeigt, dass verschiedene Felder (Temperaturfeld, Konzentrationsfeld, elektrisches Feld, ...) sich gegenseitig, wenn auch nur schwach, beeinflussen. Damit entstehen sog. *Kopplungseffekte*, wie z. B. ein Thermodiffusions- und ein Diffusionsthermoeffekt. Diese können in speziellen Situationen von Bedeutung sein. Zum Beispiel beruht das Messprinzip des Thermoelementes (s. Kap. 10.1.1) auf einem Kopplungseffekt zwischen dem Temperatur- und dem elektrischen Feld.

Bisweilen wird im Zusammenhang mit (5-5) von einem *Wärmeleitungsgesetz* gesprochen. Dies ist jedoch irreführend, da es sich lediglich um einen (wenn auch sehr guten) „Ansatz“ im Sinne einer konstitutiven Gleichung handelt.

Wenn der Fourier-Ansatz (5-5) in die allgemeine Bilanz für die innere Energie (5-4) eingesetzt wird, ergibt sich die sog. *Wärmeleitungsgleichung* zu:

$$\boxed{\frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} = a^* \nabla^2 T^*} \quad (\text{Wärmeleitungsgleichung}) \quad (5-6)$$

Der Operator $\nabla^2 \dots = \text{div grad } \dots$ ist der sog. Laplace-Operator und lautet in kartesischen Koordinaten $\nabla^2 \dots = \partial^2 \dots / \partial x^{*2} + \partial^2 \dots / \partial y^{*2} + \partial^2 \dots / \partial z^{*2}$. Tab. 5.2 zeigt die Wärmeleitungsgleichung für drei verschiedene Koordinatensysteme. Da (5-6) auf endlich große Kontrollräume angewandt werden soll, muss jetzt auch die Zeitableitung als partielle Ableitung $\partial T^* / \partial \tau^*$ geschrieben werden (vgl. dazu (5-4)). Diese Gleichung vernachlässigt noch mögliche *Wärmequellen*, die im System vorhanden sein könnten, z. B. wenn exotherme chemische Reaktionen für die Freisetzung von innerer Energie sorgen, oder die Dissipation mechanischer Energie berücksichtigt werden soll (diese tritt als Wärmequelle auf, weil nicht die Gesamtenergie, sondern nur die innere Energie bilanziert wird).

Mit der Größe $a^* = \lambda^* / (\rho^* c^*)$ ist die sog. *Temperaturleitfähigkeit* eingeführt worden. Dieser Name hat sich eingebürgert, obwohl die Temperatur eine skalare Größe ist und kein Vektor, also keine gerichtete Größe darstellt.

Tab. 5.3 zeigt einige Zahlenwerte von a^* und λ^* für verschiedene Stoffe bei $t^* = 20^\circ\text{C}$ und

Tabelle 5.2: Umsetzung der vektoriellen Wärmeleitungsgleichung (5-6) in drei gängige Koordinatensysteme

$\frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} = a^* \nabla^2 T^*$	
Kartesische Koordinaten (x^*, y^*, z^*) :	
$\frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} = a^* \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right]$	
Zylinderkoordinaten (z^*, r^*, φ) :	
$\frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} = a^* \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right]$	
Kugelkoordinaten $(r^*, \varphi, \vartheta)$:	
$\frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} = a^* \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2} \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial T^*}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^{*2} \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \varphi^2} \right]$	

Tabelle 5.3: Zahlenwerte der Wärme- und Temperaturleitfähigkeit einiger ausgewählter Stoffe; $t^* = 20^\circ\text{C}$, $p^* = 1\text{ bar}$

Festkörper	$\lambda^*/(\text{W/mK})$	$a^*/(\text{m}^2/\text{s})$	Fluide	$\lambda^*/(\text{W/mK})$	$a^*/(\text{m}^2/\text{s})$
Aluminium	238	$93,4 \cdot 10^{-6}$	Luft	0,026	$21,47 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	372	$107 \cdot 10^{-6}$	Wasser	0,598	$0,1433 \cdot 10^{-6}$
Kork	0,041	$0,11 \cdot 10^{-6}$			

$p^* = 1\text{ bar}$. Während die Druckabhängigkeit von λ^* äußerst gering ist, kann bei einigen Stoffen eine deutliche Temperaturabhängigkeit vorliegen, die u. U. berücksichtigt werden muss.

5.3 Stationäre, eindimensionale Wärmeleitung

Im stationären Fall gilt $\partial T^*/\partial \tau^* = 0$ und (5-6) vereinfacht sich zu $\nabla^2 T^* = 0$. Tab. 5.4 zeigt den sich daraus ergebenden Temperaturverlauf in ebenen, zylindrischen und kugelförmigen Wänden endlicher Wandstärken s^* für die eindimensionale Wärmeleitung. Aus den in Tab. 5.4 ebenfalls aufgeführten Wärmeleitungsgleichungen für diesen Fall folgen unmittelbar die eingezeichneten Temperaturprofile, wenn die thermischen Randbedingungen $T^* = T_{W1}^*$ und $T^* = T_{W2}^*$ an der Innen- bzw. Außenwand entsprechend berücksichtigt werden. Als wesentlicher Effekt bei gekrümmten Wänden tritt die Vergrößerung der Übertragungsfläche für wachsende Radien r^* auf. Da der insgesamt übertragene Wärmestrom auf der Innen- und Außenwand derselbe ist, führt dies zu einer Verringerung der Wandwärmestromdichte zwischen der Innen- und der Außenseite

Tabelle 5.4: Stationäre, eindimensionale Wärmeleitung durch ebene und gekrümmte Wände

$\nabla^2 T^* = 0$; $\dot{q}_{W1}^* A_1^* = \dot{q}_{W2}^* A_2^*$; A_1^*, A_2^* : Flächen zwischen den unterbrochenen Begrenzungslinien		
Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
$\frac{d^2 T^*}{dx^{*2}} = 0$	$\frac{d}{dr^*} \left(r^* \frac{dT^*}{dr^*} \right) = 0$	$\frac{d}{dr^*} \left(r^{*2} \frac{dT^*}{dr^*} \right) = 0$
$\frac{A_1^*}{A_2^*} = 1 \Rightarrow \frac{\dot{q}_{W1}^*}{\dot{q}_{W2}^*} = 1$	$\frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{r_1^*}{r_2^*} \Rightarrow \frac{\dot{q}_{W1}^*}{\dot{q}_{W2}^*} = \frac{r_2^*}{r_1^*}$	$\frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{r_1^{*2}}{r_2^{*2}} \Rightarrow \frac{\dot{q}_{W1}^*}{\dot{q}_{W2}^*} = \frac{r_2^{*2}}{r_1^{*2}}$

der Wand und damit zu verminderten Temperaturgradienten außen im Vergleich zu innen.

Wenn ein Wärmestrom \dot{Q}_W^* durch eine Wand endlicher Dicke geleitet werden soll, so ist dafür eine Temperaturdifferenz ΔT^* zwischen den beiden gegenüberliegenden Oberflächen erforderlich. Die Wand stellt damit einen thermischen Widerstand dar, der analog zum Wärmeübergangswiderstand R_α^* in (2-2) als *Wärmeleitwiderstand*

$$R_\lambda^* = \frac{\Delta T^*}{\dot{q}_W^* A^*} = \frac{\Delta T^*}{\dot{Q}_W^*} \quad (5-7)$$

eingeführt werden kann. Anders als beim *Wärmeübergang*, bei dem nur *eine* Fläche für die Wärmeübertragung maßgeblich ist, treten bei der Wärmeleitung durch Wände *zwei* (Ober-)Flächen auf, zwischen denen die Wärmeübertragung stattfindet. Aus diesem Grund müssen in der vorliegenden Situation die unterschiedlichen Wandgeometrien berücksichtigt werden.

Für den ebenen Fall gilt $\dot{q}_W^* = -\lambda^* (dT^*/dy^*)_W = \lambda^* \Delta T^*/s^*$ mit s^* als Wandstärke und ΔT^* als treibender Temperaturdifferenz. Damit folgt aus (5-7) für die ebene Wand (Index: EW) mit $\dot{Q}_W^* = \dot{q}_W^* A^*$

$$R_{\lambda,EW}^* = \frac{\Delta T^*}{\dot{Q}_W^*} = \frac{s^*}{\lambda^* A^*}. \quad (5-8)$$

Eine analoge Beziehung für den Hohlzylinder (Index: HZ) der Länge L^* mit dem Innenradius r_i^* und dem Außenradius r_a^* ergibt mit $dr^*/(A^* \lambda^*) = dr^*/(2\pi L^* r^* \lambda^*)$

$$R_{\lambda,HZ}^* = \frac{\Delta T^*}{\dot{Q}_W^*} = \frac{1}{2\pi L^* \lambda^*} \ln \frac{r_a^*}{r_i^*}. \quad (5-9)$$

Für die Hohlkugel (Index: HK) mit dem Innenradius r_i^* und dem Außenradius r_a^* lautet die Beziehung unter Verwendung von $dr^*/(A^* \lambda^*) = dr^*/(4\pi r^{*2} \lambda^*)$

$$R_{\lambda,HK}^* = \frac{\Delta T^*}{\dot{Q}_W^*} = \frac{1}{4\pi \lambda^*} \left(-\frac{1}{r_a^*} + \frac{1}{r_i^*} \right). \quad (5-10)$$

Wenn mehrere Wände mit unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeiten λ_j^* , wie in Bild 5.2(a) gezeigt, zu einer mehrschichtigen Wand hintereinander geschaltet werden, ergibt sich analog zu der Reihenschaltung von Widerständen in der Elektrotechnik eine Reihenschaltung (RS) der Wärmeleitwiderstände. Damit wird der gesamte Wärmeleitwiderstand zu

$$R_{\lambda,RS}^* = \sum_j R_{\lambda,j}^*. \quad (5-11)$$

Wenn eine Wand einer bestimmten Wandstärke aus verschiedenen, parallel angeordneten Materialien mit unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeiten besteht (s. Bild 5.2(b)), so ergibt sich analog zu der Parallelschaltung von Widerständen in der Elektrotechnik eine Parallelschaltung (PS) der Wärmeleitwiderstände. Damit wird der gesamte Wärmeleitwiderstand zu

$$R_{\lambda,PS}^* = \frac{1}{\sum_j \frac{1}{R_{\lambda,j}^*}}. \quad (5-12)$$

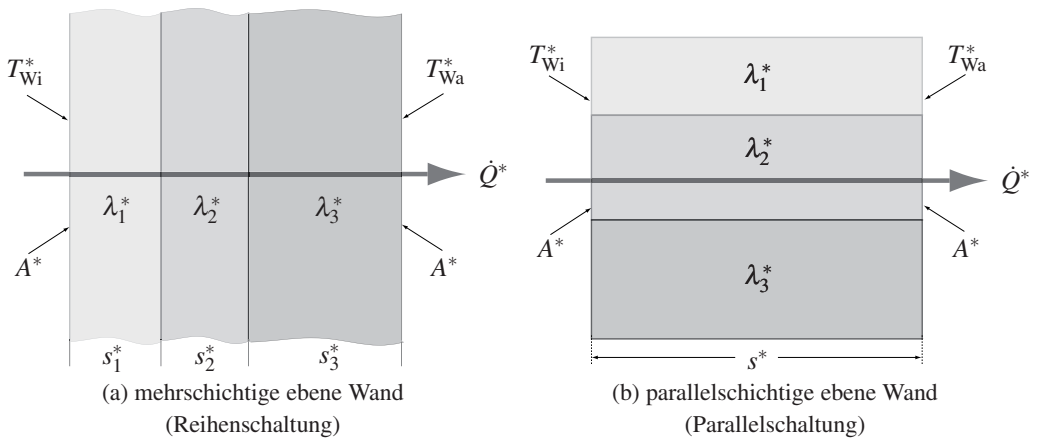


Bild 5.2: Wärmeleitung durch inhomogen aufgebaute ebene Wände

Beispielhaft ist der Temperaturverlauf in einer ebenen, dreischichtigen Wand in Bild 5.3 dargestellt. Der Wärmestrom zwischen den unterbrochenen waagerechten Linien ist im stationären Fall konstant. Damit ist die Wärmestromdichte in allen drei Schichten dieselbe. Wenn aber λ_i^* von Schicht zu Schicht variiert, so muss der Temperaturgradient gemäß (5-5) in den einzelnen Schichten ebenfalls verschieden sein.

Es ist unmittelbar erkennbar, dass der Temperaturgradient umso größer ist, je kleiner der Wert der zugehörigen Wärmeleitfähigkeit der Wand ausfällt.

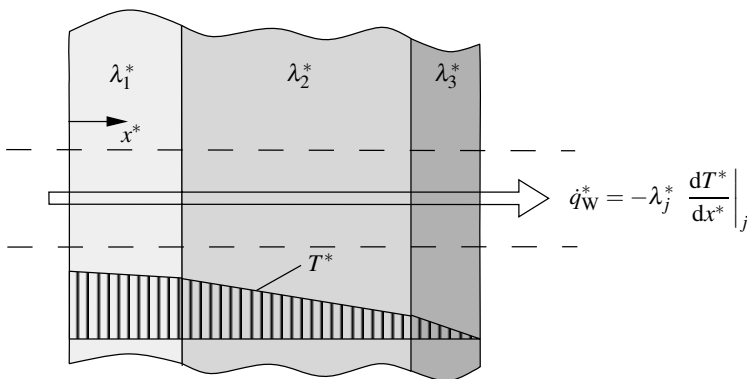


Bild 5.3: Wärmestrom durch eine ebene, dreischichtige Wand; hier: $\lambda_1^* > \lambda_2^* > \lambda_3^*$

5.4 Instationäre Wärmeleitung, Einfluss der Biot-Zahl

Häufig interessiert die Frage, wie schnell sich ein Körper erwärmt oder abkühlt und welche Temperaturverteilung dabei als Funktion des Ortes und der Zeit auftritt. Dabei ist ganz offensichtlich entscheidend, wie viel Energie in Form von Wärme in den Körper (oder aus dem Körper) gelangt, und wie sich diese Energie durch Wärmeleitung im Körper verteilt. Für den ersten Aspekt ist der Wärmeübergang zwischen dem Körper und der Umgebung, ausgedrückt durch den Wärmeübergangskoeffizienten α^* , s. dazu (2-1), maßgeblich. Für den zweiten Aspekt kommt es auf die Wärmeleitung im Körper an, ausgedrückt durch die Wärmeleitfähigkeit λ_K^* des Körpers, der hier als homogen unterstellt wird.

An dieser Stelle wird der Wärmeübergangskoeffizient α^* als pauschales Maß für den Wärmeübergang zwischen dem Körper und der Umgebung verwendet. Die physikalischen Vorgänge im Zusammenhang mit α^* werden im nachfolgenden Kap. 6 ausführlich erläutert.

Betrachtet man dieses Problem aus dimensionsanalytischer Sicht, so ergibt sich das in Tab. 5.5 gezeigte Ergebnis, das analog zur Vorgehensweise in Kap. 3.3, dort Tab. 3.2, entstanden ist. Danach ergibt sich in dimensionsloser Darstellung folgende allgemeine Form des Temperaturfeldes in einem Körper, der zu einem bestimmten Zeitpunkt $\tau_0^* = 0$ einer Umgebung ausgesetzt wird, die eine um $T_\infty^* - T_0^*$ vom Körper verschiedene Temperatur besitzt (T_0^* : Körpertemperatur für $\tau^* < \tau_0^*$; T_∞^* : Umgebungstemperatur in größerer Entfernung vom Körper):

$$\Theta = \Theta(x, y, z, \tau, \text{Bi}) \quad (5-13)$$

Als Parameter des Problems tritt die sog. *Biot-Zahl* auf, die im Wesentlichen das Verhältnis aus der Qualität des Wärmeüberganges zwischen dem Körper und der Umgebung und der Qualität der Wärmeleitung im Körper selbst beschreibt.

Tabelle 5.5: Relevanzliste und daraus abgeleitete Kennzahlen für instationäre Wärmeleitungsprobleme (Ri)-Angaben wie in Tab. 3.2

Relevanzliste	1	gesuchte Temperaturdifferenz	$T^* - T_0^*$	K	(R1)
	2	anfängliche Temperaturdifferenz zwischen Umgebung und Körper	$T_\infty^* - T_0^*$	K	(R3)
	3-5	Lage im Körper	x^*, y^*, z^*	m	(R2)
	6	Zeit nach Beginn der Wärmeübertragung	τ^*	s	(R2)
	7	charakteristisches Körpermaß	L^*	m	(R2)
	8	Wärmeübergangskoeffizient	α^*	kg/s ³ K	(R3)
	9	Wärmeleitfähigkeit des Körpers	λ_K^*	kg m/s ³ K	(R4)
	10	Temperaturleitfähigkeit des Körpers	a^*	m ² /s	(R4)
	$m = 10; n = 4 \text{ (kg, m, s, K)} \Rightarrow 6 \text{ Kennzahlen}$				
Kennzahlen	1	$\Theta = (T^* - T_0^*) / (T_\infty^* - T_0^*)$	dimensionslose Temperatur		
	2-4	$x = x^* / L^*, y = y^* / L^*, z = z^* / L^*$	dimensionslose Lagebeschreibung		
	5	$\tau = \tau^* / (L^{*2} / a^*)$	dimensionslose Zeit		
	6	$\text{Bi} = \alpha^* L^* / \lambda_K^*$	Biot-Zahl		

Von besonderem Interesse sind die Grenzwerte großer und kleiner Biot-Zahlen. Die Physik dieser Grenzfälle lässt sich besonders anschaulich interpretieren, wenn die Biot-Zahl mit Hilfe der Nußelt-Zahl $Nu = q_W^* L^* / \lambda_F^* \Delta T^* = \alpha^* L^* / \lambda_F^*$, vgl. (3-4), wie folgt umgeschrieben wird:

$$Bi \equiv \frac{\alpha^* L^*}{\lambda_K^*} = Nu \frac{\lambda_F^*}{\lambda_K^*} \quad (5-14)$$

Es tritt dann das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten im Fluid (λ_F^*) und im Körper (λ_K^*) auf. Da die Nußelt-Zahl für konvektive Wärmeübergänge an den unterschiedlichsten Körpern weder extrem klein noch extrem groß ist, können die Grenzfälle $Bi \rightarrow 0$ und $Bi \rightarrow \infty$ auch als Grenzfälle $(\lambda_F^* / \lambda_K^*) \rightarrow 0$ und $(\lambda_F^* / \lambda_K^*) \rightarrow \infty$ interpretiert werden.

Bild 5.4 zeigt die zeitliche und räumliche Entwicklung der Temperatur längs der Linie A-A in einer Kugel (Anfangstemperatur T_0^*), die für $\tau^* > \tau_0^*$ von einem warmen Luftstrom ($T^* = T_\infty^*$) umströmt und dabei aufgeheizt wird. Für die beiden Grenzfälle $Bi \rightarrow 0$ und $Bi \rightarrow \infty$ sind die Temperaturverteilungen zu vier verschiedenen Zeitpunkten in ihrem qualitativen Verlauf gezeigt. Die Grenzfälle entstehen dabei z. B. durch extrem hohe Wärmeleitfähigkeiten im Körper (für

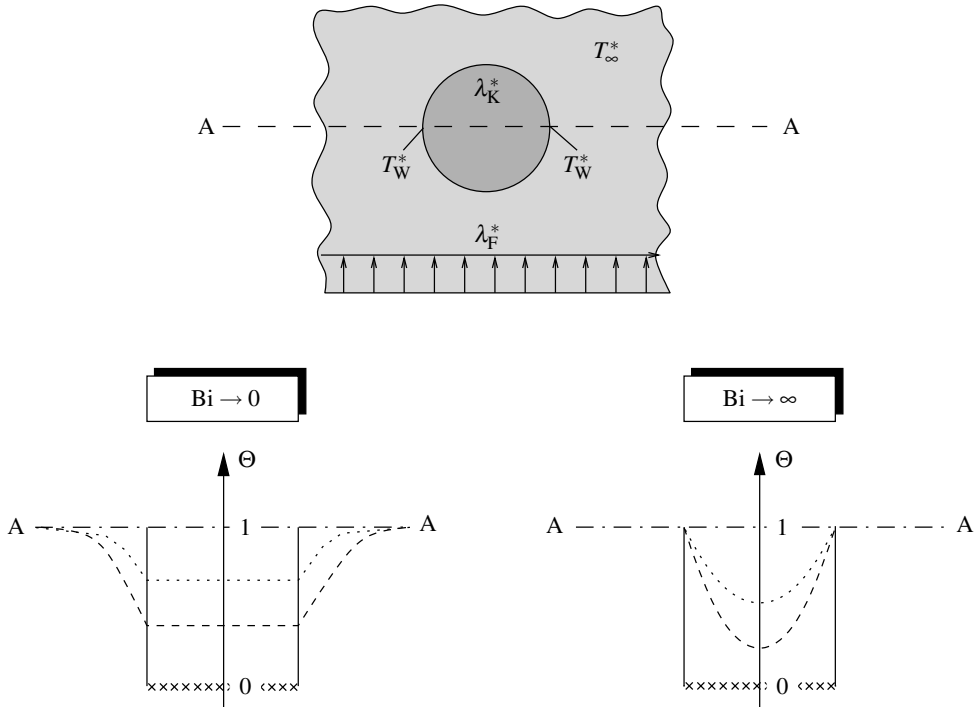


Bild 5.4: Zeitliche und räumliche Entwicklung der Temperaturverteilung an einer Kugel in einem warmen Luftstrom; $\Theta = (T^* - T_0^*) / (T_\infty^* - T_0^*)$, s. (5-18)

xxxxx: $\Theta = 0$ in der Kugel für $\tau^* = 0$ (in beiden Fällen)

-----: $0 < \Theta < 1$ in der Kugel und für $Bi \rightarrow 0$ zusätzlich in der näheren Umgebung für $0 < \tau^* < \infty$

.....: $0 < \Theta < 1$ in der Kugel und für $Bi \rightarrow 0$ zusätzlich in der näheren Umgebung für $0 < \tau^* < \infty$

- . - . -: $\Theta = 1$ in der Kugel und der Umgebung für $\tau^* \rightarrow \infty$ (in beiden Fällen)

$Bi \rightarrow 0$) bzw. im Fluid (für $Bi \rightarrow \infty$). Dann sind die Temperaturgradienten in diesen Bereichen extrem gering, so dass erkennbare, nicht konstante Temperaturverläufe nur in den jeweils anderen Bereichen auftreten.

Für kleine Biot-Zahlen ($Bi \rightarrow 0$) ergibt sich damit zu jedem Zeitpunkt $\tau^* > \tau_0^*$ eine einheitliche Körpertemperatur, die mit der Zeit veränderlich ist und für große Zeiten den Wert der Umgebungstemperatur erreicht. Die Berechnung dieses Falles ist sehr einfach und kann dazu genutzt werden, den mittleren Wärmeübergangskoeffizienten α_m^* eines Körpers zu bestimmen, wie dies später gezeigt wird, siehe ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 5.1. Dazu wird zunächst die Energiebilanz für den Körper aufgestellt. Diese besagt, dass der Wärmestrom über die Körperoberfläche $\dot{q}_W^* A^*$ gleich der zeitlichen Veränderung der inneren Energie des Körpers $m^* c^* dT^*/d\tau^*$ ist. Mit $m^* = \rho^* V^*$ und der Annahme konstanter Stoffwerte ρ^* und c^* gilt

$$\rho^* V^* c^* \frac{dT^*}{d\tau^*} = \dot{q}_W^* A^* \quad (5-15)$$

mit der konstanten Wandwärmestromdichte $\dot{q}_W^* = \alpha_m^* \Delta T^* = \alpha_m^* (T_\infty^* - T^*)$. Mit T^* als der Temperatur des Körpers zur Zeit τ^* und T_∞^* als der Temperatur des umgebenden Fluides wird daraus

$$\frac{dT^*}{(T_\infty^* - T^*)} = \frac{\alpha_m^* A^*}{c^* \rho^* V^*} d\tau^*. \quad (5-16)$$

Eine Integration zwischen den Zeiten $\tau^* = 0$, zu der die (homogene) Körpertemperatur T_0^* und zur Zeit τ^* , zu der die homogene Körpertemperatur T^* vorliegt, ergibt

$$\frac{T^* - T_\infty^*}{T_0^* - T_\infty^*} = \exp\left(\frac{-\alpha_m^* A^*}{c^* \rho^* V^*} \tau^*\right). \quad (5-17)$$

Mit Einführung der dimensionslosen Temperatur Θ folgt

$$\Theta = \frac{T^* - T_0^*}{T_\infty^* - T_0^*} = 1 - \exp\left(\frac{-\alpha_m^* A^*}{c^* \rho^* V^*} \tau^*\right). \quad (5-18)$$

Dies zeigt, dass eine mit der Zeit exponentielle Anpassung der Körpertemperatur T^* an die Temperatur des umgebenden Fluides T_∞^* stattfindet.

Können Körpertemperaturen unter der Annahme kleiner Biot-Zahlen auf diese Weise berechnet werden, spricht man im englischsprachigen Raum von der „method of lumped capacitance“. Eine (nicht wörtliche, aber sinngemäße) Übersetzung dieses Begriffes ist etwa „Methode der gleichmäßigen Erwärmung bzw. Abkühlung“ eines Körpers. In diesem Zusammenhang ist auch der Begriff der sog. *Blockkapazität* gebräuchlich. Die Anwendung dieser Methode stellt eine gute Näherung dar, solange reale Biot-Zahlen kleiner als etwa 0,1 sind.

Für größere Biot-Zahlen treten nicht-konstante Temperaturverteilungen sowohl im Körper als auch in seiner unmittelbaren Umgebung auf. Im Grenzfall $Bi \rightarrow \infty$ wird unmittelbar nach $\tau^* = \tau_0^*$ die Wand bereits die Außentemperatur annehmen, während im Inneren des Körpers erst eine allmähliche Angleichung der Temperatur an die Umgebungstemperatur stattfindet, wie dies im Bild

angedeutet ist. Eine solche Situation wird im nächsten Kapitel für die eindimensionale instationäre Wärmeleitung in einer halbunendlichen Wand¹ erläutert.

5.5 Instationäre Wärmeleitung in einer halbunendlichen ebenen Wand

Die in Bild 5.5 skizzierte Situation zeigt eine halbunendliche Wand, deren Oberflächentemperatur bei $\tau_0^* = 0$ schlagartig um $T_\infty^* - T_0^*$ gegenüber der anfänglichen Temperatur T_0^* ansteigt. Damit springt $\Theta = (T^* - T_0^*) / (T_\infty^* - T_0^*)$ an der Wandoberfläche von 0 auf 1. Es wird unterstellt, dass die Fluidtemperatur T_∞^* bis zur Wand hin konstant ist. Nach den Ausführungen des vorigen Kapitels handelt es sich damit um ein Beispiel für $Bi \rightarrow \infty$, weil voraussetzungsgemäß im angrenzenden Fluid keine Temperaturgradienten auftreten. Für relativ kleine Zeiten sind nennenswerte Temperaturänderungen im Körper nur in unmittelbarer Nähe des Temperatursprunges vorhanden. Deshalb spielt in der Realität die endliche Wanddicke anfangs keine Rolle, da noch kein Einfluss der gegenüberliegenden Oberfläche auftritt. In diesem Sinne ist eine „halbunendliche Wand“ eine sinnvolle Näherung für die Anfangsphase eines Wärmeüberganges an eine Wand endlicher Dicke.

Für $\tau^* > \tau_0^*$ erwärmt sich die halbunendliche Wand allmählich. Bild 5.5 zeigt den qualitativen Temperaturverlauf zu drei verschiedenen Zeiten τ_i^* . Dieser Verlauf kann physikalisch anschaulich interpretiert werden. Dazu stellt man sich zunächst vor, die halbunendliche Wand sei in schmale Scheiben unterteilt, von denen die n -te Scheibe zusammen mit den beiden benachbarten Scheiben in Bild 5.5 eingezeichnet ist.

Angenommen, die $(n-1)$ -te Scheibe habe bereits eine gegenüber der Anfangstemperatur T_0^* erhöhte Temperatur, die n -te Scheibe aber noch nicht, dann gibt es ein Temperaturgefälle von der $(n-1)$ -ten zur n -ten Scheibe und als Folge davon einen Wärmestrom. Mit diesem Wärmestrom gelangt innere Energie in die n -te Scheibe. Diese kann prinzipiell gespeichert werden oder

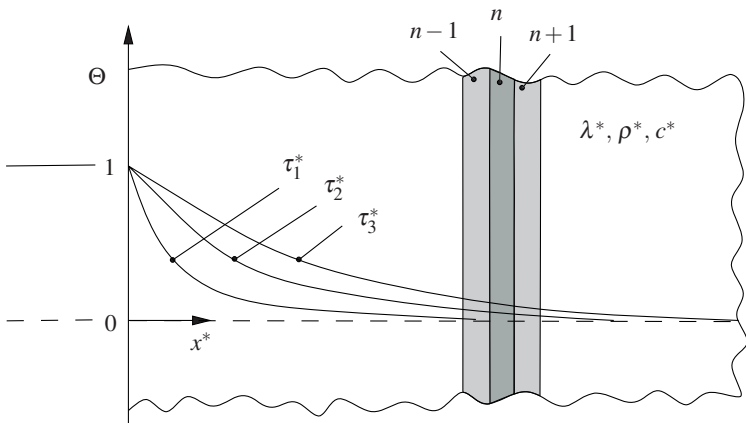


Bild 5.5: Erwärmung einer halbunendlichen ebenen Wand; $\Theta = (T^* - T_0^*) / (T_\infty^* - T_0^*)$

¹ Unter einer *halbunendlichen Wand* versteht man eine Wand, die so dick ist, dass ihre Gegenseite nicht im Einflussbereich der betrachteten Vorgänge liegt, die sich also im Nahbereich so verhält, als sei die Gegenseite unendlich weit entfernt.

an die $(n+1)$ -te Scheibe durch Wärmeleitung wieder abgegeben werden. Dazu wäre aber ein Temperaturgefälle erforderlich, das nach den bisherigen Überlegungen aber „noch nicht“ existiert. Deshalb geschieht beides: In der n -ten Scheibe wird von der einströmenden Energie soviel gespeichert, dass die damit verbundene Temperaturerhöhung ausreicht, den restlichen (nicht gespeicherten) Anteil der Energie an die $(n+1)$ -te Scheibe weiterzuleiten. Auf diese Weise entsteht für zunehmende x^* -Werte ein Temperaturverlauf, dessen Gradient kontinuierlich abnimmt, aber bei endlichen Werten von x^* nicht null wird!

Die skizzierte Erklärung war von der Vorstellung ausgegangen, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt $\tau^* > \tau_0^*$ eine n -te Scheibe bei endlichen Werten von x^* existiert, die noch die Anfangstemperatur T_0^* besitzt. Dies ist aber nur möglich, wenn die Wärmeleitung ein Vorgang ist, der mit einer endlichen Geschwindigkeit abläuft. Ob dies der Fall ist, und wie groß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Energie bei der Wärmeleitung gegebenenfalls ist, wird später erläutert (s. das ILLUSTRIERENDE BEISPIEL 5.2).

Für das beschriebene Zusammenspiel von Wärmeleitung und Energiespeicherung sind einerseits die Wärmeleitfähigkeit λ^* und andererseits die sog. volumetrische Wärmekapazität $\rho^* c^*$ maßgeblich. Beide treten in Form der kombinierten Größe $a^* = \lambda^* / (\rho^* c^*)$, der *Temperaturleitfähigkeit*, in der Wärmeleitungsgleichung (5-6) auf, die diese Vorgänge beschreibt.

In diesem Zusammenhang wird auch deutlich, dass bei einer *stationären* Wärmeleitung durch Wände endlicher Wandstärken an der gegenüberliegenden Wandoberfläche stets ein Mechanismus vorhanden sein muss, mit dem die in Form von Wärme dort ankommende Energie entfernt wird. Andernfalls würde die Energie in der Wand gespeichert werden, was zu einer (instationären) Aufheizung der Wand führen würde.

Die Wärmeleitung in einer halbbunendlichen Wand kann als Spezialfall der allgemeinen instationären Wärmeleitung angesehen werden, und muss deshalb als besonderer Fall in den dimensionsanalytischen Überlegungen gemäß Tab. 5.5 enthalten sein. Da es sich um eine halbbunendliche Wand handelt, existiert für diesen Fall keine charakteristische geometrische Länge L^* . Zusätzlich ist nur eine Raumkoordinate (jetzt x^*) relevant, da es sich um ein eindimensionales Problem handelt. Tab. 5.5 reduziert sich deshalb auf den Spezialfall in Tab. 5.6. Danach lautet die allgemeine Form der Lösung $\Theta = \Theta(\hat{\tau}, \hat{B}i)$ bzw. für den hier zusätzlich unterstellten Sonderfall $\hat{B}i \rightarrow \infty$:

$$\Theta = \Theta(\hat{\tau}) \quad (5-19)$$

Die dimensionslose Zeit $\hat{\tau} = \tau^* / (x^{*2} / a^*)$ stellt eine Kombination aus der Zeit τ^* und der Koordinate x^* dar. Sie kann auch als sog. *Ähnlichkeitsvariable* interpretiert werden, die typischerweise in Problemen auftritt, die keine *ausgezeichnete Länge* im Sinne einer charakteristischen Körperabmessung besitzen. In diesem Zusammenhang würde man dann eine solche Ähnlichkeitsvariable als $\hat{\eta} = x^* / \sqrt{a^* \tau^*}$ einführen, die aus dimensionsanalytischer Sicht vollkommen gleichwertig mit $\hat{\tau}$ ist, da $\hat{\eta} = \hat{\tau}^{-1/2}$ gilt. Da in der Literatur im vorliegenden Fall üblicherweise $\eta = \hat{\eta} / 2$ verwendet wird, soll im Weiteren die Lösung $\Theta = \Theta(\eta)$ gesucht werden.

Der Ausgangspunkt dafür ist die Wärmeleitungsgleichung (5-6), die für den hier vorliegenden eindimensionalen Fall mit der kartesischen Koordinate x^* (in zunächst dimensionsbehafteter Form) lautet:

$$\frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} = a^* \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \quad (5-20)$$

Aus dieser partiellen Differentialgleichung in τ^*, x^* wird nach der Transformation in die zuvor beschriebene Ähnlichkeitsvariable $\eta = x^* / (2\sqrt{a^* \tau^*})$ und mit Θ anstelle von T^* die gewöhnliche

Tabelle 5.6: Sonderfall von Tab. 5.5 für instationäre Wärmeleitung in ebenen halbumendlichen Wänden

Relevanzliste	1	gesuchte Temperaturdifferenz	$T^* - T_0^*$	K	(R1)
	2	anfängliche Temperaturdifferenz zwischen Umgebung und Körper	$T_\infty^* - T_0^*$	K	(R3)
	3	Lage im Körper	x^*	m	(R2)
	4	Zeit nach Beginn der Wärmeübertragung	τ^*	s	(R2)
	5	Wärmeübergangskoeffizient	α^*	kg/s ³ K	(R3)
	6	Wärmeleitfähigkeit des Körpers	λ_K^*	kg m/s ³ K	(R4)
	7	Temperaturleitfähigkeit des Körpers	a^*	m ² /s	(R4)
$m = 7; n = 4 \text{ (kg, m, s, K)} \Rightarrow 3 \text{ Kennzahlen}$					
Kennzahlen	1	$\Theta = (T^* - T_0^*) / (T_\infty^* - T_0^*)$	dimensionslose Temperatur		
	2	$\hat{\tau} = \tau^* / (x^{*2} / a^*)$	dimensionslose Zeit		
	3	$\hat{Bi} = \alpha^* x^* / \lambda_K^*$	Biot-Zahl		

Differentialgleichung

$$\Theta'' + 2\eta \Theta' = 0 \quad (5-21)$$

mit den Randbedingungen $\Theta = 1$ für $\eta = 0$ und $\Theta = 0$ für $\eta \rightarrow \infty$.

Die Lösung von (5-21) ist in der Literatur als *komplementäre Fehlerfunktion* (engl.: inverse error function) $\text{erfc}(\eta) = 1 - \text{erf}(\eta)$ bekannt. Es gilt damit

$$\Theta = \frac{T^* - T_0^*}{T_\infty^* - T_0^*} = 1 - \text{erf}(\eta) = \text{erfc}(\eta) = \text{erfc}\left(\frac{x^*}{2\sqrt{a^* \tau^*}}\right). \quad (5-22)$$

Zahlenwerte von $\text{erfc}(\eta)$ sind in Tab. 5.7 zusammengestellt. Mit (5-22) sind nun Aussagen über

Tabelle 5.7: Zahlenwerte für die komplementäre Fehlerfunktion $\text{erfc}(\eta)$

η	$\text{erfc}(\eta)$	η	$\text{erfc}(\eta)$	η	$\text{erfc}(\eta)$
0,00	1,0000	1,00	0,1573	2,00	0,0047
0,10	0,8875	1,10	0,1198	2,10	0,0030
0,20	0,7773	1,20	0,0897	2,20	0,0019
0,30	0,6714	1,30	0,0660	2,30	0,0011
0,40	0,5716	1,40	0,0477	2,40	0,0007
0,50	0,4795	1,50	0,0339	2,50	0,0004
0,60	0,3961	1,60	0,0237	2,60	0,0002
0,70	0,3222	1,70	0,0162	2,70	0,0001
0,80	0,2579	1,80	0,0109	2,80	0,0001
0,90	0,2031	1,90	0,0072	:	:

das „Eindringverhalten der Temperatur“ möglich. Für einen bestimmten Wert von Θ kann ermittelt werden, an welcher Stelle dieser Wert zu einer vorgegebenen Zeit vorliegt ($x_E^* = x_E^*(\tau^*)$), bzw. nach welcher Zeit er an einer vorgegebenen Stelle auftritt ($\tau_E^* = \tau_E^*(x^*)$).

ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 5.1: Messung des mittleren Wärmeübergangskoeffizienten α_m^*

Unter Ausnutzung des Abkühlverhaltens (5-17) eines Körpers bei kleinen Biot-Zahlen ($Bi < 0,1$) kann auf erstaunlich einfache Weise der sonst schwer bestimmbare (mittlere) Wärmeübergangskoeffizient an einem Körper ermittelt werden. Wie in Kap. 5.4 ausgeführt, stellt die Bedingung $Bi < 0,1$ sicher, dass im Körper zwar zeitabhängige, aber räumlich (weitgehend) einheitliche Temperaturen auftreten. Der Abkühlprozess eines Körpers ist dann durch die Temperatur $T^*(\tau^*)$ bzgl. seines thermischen Verhaltens vollständig beschrieben und kann unmittelbar mit Hilfe von (5-17), also

$$T^*(\tau^*) = T_\infty^* + (T_0^* - T_\infty^*) \exp\left(\frac{-\alpha_m^* A^*}{c^* \rho^* V^*} \tau^*\right) \quad (5-23)$$

ausgewertet werden. Dabei ist T_∞^* die Temperatur in großer Entfernung vom Körper und T_0^* die Anfangstemperatur zum Zeitpunkt $\tau^* = 0$.

Bild 5.6 zeigt als Beispiel für einen zu untersuchenden Körper einen einfachen Würfel, der auf einer thermisch isolierenden Bodenplatte montiert ist.

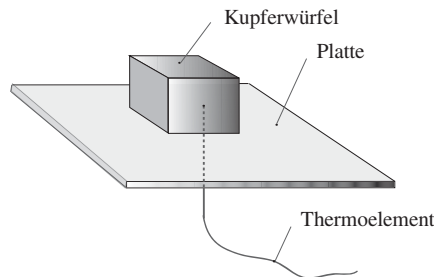


Bild 5.6: Kupferwürfel mit adiabater Bodenplatte und Thermoelement

Durch diese Bodenplatte sind die Anschlussdrähte eines Thermoelementes (s. Kap. 10.1.1) geführt, mit dem der Temperatur/Zeit-Verlauf aufgenommen werden kann. Die wärmeübertragende Fläche A^* besteht insgesamt aus den fünf Seitenflächen, die mit dem Fluid in Berührung kommen. Die Dichte ρ^* , die spezifische Wärmekapazität c^* und das Volumen des Würfels V^* sind bekannt, so dass bei Vorliegen von $T^*(\tau^*)$ jetzt nur noch eine Anpassung dieses gemessenen Temperaturverlaufes an die Beziehung (5-23) für $T^*(\tau^*)$ erfolgen muss. Dazu wählt man verschiedene Werte für α_m^* und ermittelt, bei welchem Wert eine akzeptable Übereinstimmung zwischen dem gemessenen und dem theoretischen Temperaturverlauf erzielt werden kann. Dies ist dann der gesuchte Wert für α_m^* .

Bild 5.7 zeigt für zwei unterschiedliche Strömungssituationen, dass auf diese Weise eine Bestimmung von α_m^* problemlos möglich ist. Für die Versuche wurde der Kupferwürfel jeweils in siedendem Wasser auf eine Anfangstemperatur von etwa 100°C gebracht. Anschließend wurde das Abkühlverhalten $T^*(\tau^*)$ in den beiden unterschiedlichen Strömungssituationen aufgezeichnet. Die Anpassung des Wärmeübergangskoeffizienten erfolgt hier erst ab einer Temperatur von $t^* = 80^\circ\text{C}$, da unmittelbar nach dem Herausnehmen des Würfels aus dem Wasserbad undefinierte Zustände vorliegen.

Durch die Bodenplatte liegt eine geometrisch stark unsymmetrische Situation vor, so dass es von Bedeutung ist, wie der Würfel bei der erzwungenen Konvektion zur Anströmung und bei der natürlichen

Konvektion zum Erdbeschleunigungsvektor orientiert ist. Es werden dann jeweils die α_m^* -Werte der konkreten Situation bestimmt.

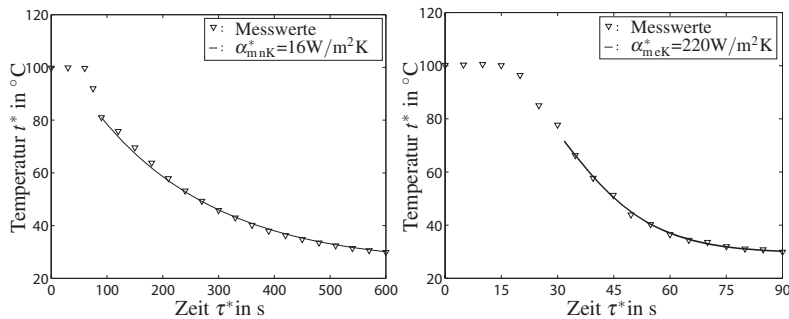


Bild 5.7: Kupferwürfel mit einer Kantenlänge von 6 mm: Bestimmung des mittleren Wärmeübergangskoeffizienten für
 links: natürliche Konvektion mit Anpassung des Wärmeübergangskoeffizienten an die Messwerte nach (5-23) mit $t_{\infty}^* = 25^{\circ}\text{C} \rightarrow \alpha_{mK}^* = 16 \text{ W/m}^2\text{K}$
 rechts: erzwungene Konvektion mit Anpassung des Wärmeübergangskoeffizienten an die Messwerte nach (5-23) mit $t_{\infty}^* = 30^{\circ}\text{C}$; $u_{\infty}^* = 11 \text{ m/s} \rightarrow \alpha_{mE}^* = 220 \text{ W/m}^2\text{K}$

ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 5.2: Wärmeleitungsgeschwindigkeit

Wenn ein Metallstab an einem Ende erwärmt wird, indem er z. B. in eine Kerzenflamme gehalten wird, so dauert es erfahrungsgemäß einige Zeit, bis am anderen Ende eine Temperaturerhöhung zu spüren ist. Wenn der Stab eine Länge L^* besitzt und erst nach einer Zeit $\Delta\tau^*$ eine Temperaturerhöhung am anderen Ende „ankommt“, so scheint sich der Energietransport in Form von Wärme offensichtlich mit einer Geschwindigkeit $c_Q^* \approx L^*/\Delta\tau^*$ zu vollziehen. Eine grobe Schätzung könnte mit $L^* = 1 \text{ m}$ und $\Delta\tau^* = 10 \text{ s}$ die Geschwindigkeit zu etwa $c_Q^* = 0,1 \text{ m/s}$ bestimmen.

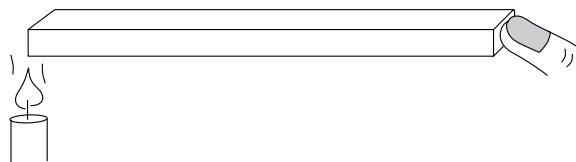


Bild 5.8: Zur „Wärmeleitungsgeschwindigkeit“

Es ist schon erstaunlich, bei genauerer Analyse bzw. nach eingehenden Versuchen festzustellen, dass c_Q^* z. B. für Metalle von der Größenordnung 10^5 m/s ist, also etwa um den Faktor eine Million größer als der zuvor geschätzte Wert! Diese Diskrepanz ist ein sicherer Hinweis darauf, dass sich mit der ursprünglich gegebenen Erklärung eine falsche Vorstellung verbindet. Bevor die Frage nach einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit im Zusammenhang mit der Wärmeleitung weiter beleuchtet wird, soll aber zunächst einmal die richtige Erklärung für die beobachtete Zeitverzögerung in der Wahrnehmung der Staberwärmung gegeben werden. Dafür sind drei Aspekte von Bedeutung:

1. Der Stab besitzt eine Masse m^* und eine spezifische Wärmekapazität c^* . Wenn er insgesamt um ΔT^* erwärmt werden soll, so ist dafür die Energie $m^*c^*\Delta T^*$ erforderlich.

2. Der Stab erwärmt sich nicht gleichmäßig (das wäre nur für eine Biot-Zahl $Bi \rightarrow 0$ der Fall, was hier nicht unterstellt werden soll, s. dazu Kap. 5.4). Es liegt vielmehr eine ungleichmäßige Erwärmung vor. Wenn am „kalten Ende“ eine Temperaturerhöhung spürbar ist, d. h. dort ein Anstieg um ΔT^* erfolgt, so hat der Stab insgesamt bereits eine Energie $C m^* c^* \Delta T^*$ mit der Konstanten $C > 1$ gespeichert.
3. Am „warmen Ende“ wird in der Zeitspanne $\Delta \tau^*$ die Energie $\dot{q}_W^* A^* \Delta \tau^*$ auf einer Fläche A^* mit einer auf jeden Fall endlichen (wenn vielleicht auch großen) Wandwärmestromdichte \dot{q}_W^* übertragen. Dies ist aber genau die Energie, die insgesamt im Stab gespeichert wird, wenn von Verlusten an die Umgebung abgesehen wird.

Damit ergibt eine einfache Bilanz

$$\dot{q}_W^* A^* \Delta \tau^* = C m^* c^* \Delta T^* \quad \rightarrow \quad \Delta \tau^* = \frac{C m^* c^* \Delta T^*}{\dot{q}_W^* A^*} \quad (5-24)$$

als Zeitverzögerung. Diese kommt also zustande, weil der Stab eine endliche Energiemenge speichern muss, bevor eine Erwärmung wahrgenommen wird, gleichzeitig die Energie aber nur mit einer endlichen Rate (Energie pro Zeit) übertragen wird.

Eine genauere Betrachtung des Temperatur/Zeit-Verhaltens bei der instationären Wärmeübertragung zeigt anhand des Ergebnisses für die halbumendliche Wand, s. (5-22), dass eine Temperaturverteilung auftritt, bei der zu einem bestimmten festen Zeitpunkt τ^* eine Änderung des Temperaturfeldes gegenüber der Anfangstemperatur T_0^* bis zu unendlich großen x^* -Werten erfolgt. In großen Entfernungen ist die Temperaturerhöhung zwar extrem gering, aber nicht null. Das bedeutet aber, dass diese Lösung des Problems einen Wert $c_Q^* = \infty$ unterstellt, da nach endlichen Zeiten $\Delta \tau^*$ unendlich weit von der „Quelle“ ($x^* = 0$) prinzipiell eine Temperaturerhöhung registriert werden kann.

In der Tat gehört zum Fourier-Ansatz, auf dem das Ergebnis (5-22) beruht, eine unendlich große Ausbreitungsgeschwindigkeit der Energie in Form von Wärme. Wenn Effekte endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeiten untersucht werden sollen, ist ein erweiterter Ansatz als konstitutive Gleichung in der Energiebilanz (5-4) an Stelle des Fourier-Ansatzes (5-5) erforderlich. Im Zusammenhang mit solchen Untersuchungen ergeben sich dann Zahlenwerte, wie sie zuvor mit 10^5 m/s für Metalle genannt worden sind.

Für eine aufschlussreiche Kontroverse in diesem Zusammenhang sei verwiesen auf: Herwig, H.; Beckert, K. (2000): *Fourier versus Non-Fourier Heat Conduction in Materials with a Non-homogeneous Inner Structure*, Journal of Heat Transfer, **122**, 363-365 .

ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 5.3: Elektrische kontra Warmwasser-Fußbodenheizung

Fußbodenheizungen sind in der Lage, ein angenehmes Raumklima zu schaffen, indem großflächig und bei relativ niedrigen Oberflächentemperaturen geheizt wird. Zwei, aus Sicht der Wärmeübertragung unterschiedliche Prinzipien werden dabei durch die elektrische Fußbodenheizung und die Warmwasser-Fußbodenheizung realisiert:

- bei der elektrischen Fußbodenheizung wird in dicht verlegten elektrischen Leitern elektrische Energie dissipiert und danach in Form von Wärme zunächst in den Fußboden und anschließend in den Raum abgegeben. Bei vorgegebener elektrisch dissipierter Leistung wird dabei in guter Näherung die thermische Randbedingung $\dot{q}_W^* = \text{const}$ realisiert.
- bei der Warmwasser-Fußbodenheizung wird warmes Wasser einer bestimmten Vorlauftemperatur durch die im Fußboden verlegten Heizrohre geführt. Dieses Wasser gibt Energie in Form von Wärme zunächst an den Fußboden und anschließend an den Raum ab. Bei entsprechender Verlegeform der Heizleiter kann dabei in guter Näherung die thermische Randbedingung $T_W^* = \text{const}$ realisiert werden.

Wenn die entsprechend bestückten Räume leer sind und insbesondere der beheizte Fußboden nicht

teilweise z. B. durch Teppiche oder Möbel abgedeckt wird, können mit beiden Systemen weitgehend gleiche thermische Verhältnisse hergestellt werden.

Es soll im Folgenden untersucht werden, wie sich beide Heizsysteme verhalten, wenn ein Teil der Fußbodenfläche durch einen stark wärmeisolierenden Teppich bedeckt wird. Dazu wird im nachfolgenden Bild eine idealisierte Situation skizziert, bei der Energie in Form von Wärme vom Fußboden nur an den Raum abgegeben werden kann (keine Leitung in den Baukörper), und bei der eine Hälfte des Raumes durch einen stark isolierenden Teppich bedeckt ist.

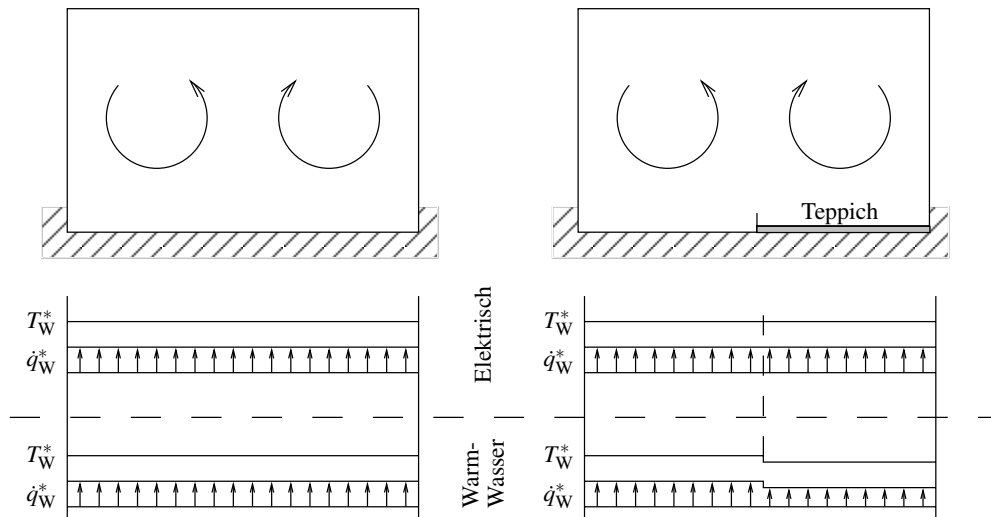


Bild 5.9: Unterschiedliche thermische Verhältnisse nach der Isolierung einer Raumhälfte bei einer elektrischen und einer Warmwasser-Fußbodenheizung

T_W^* : Temperatur des Bodens bzw. der Teppichoberseite

Bei der elektrischen Fußbodenheizung bewirkt der Teppich im Prinzip keine Veränderung *im* Raum. Die im Fußboden dissipierte Energie muss in Form von Wärme weiterhin an den Raum abgegeben werden. Aufgrund des größeren Wärmewiderstandes mit Teppich muss aber eine größere treibende Temperaturdifferenz zwischen dem elektrischen Leiter und der Fußboden- (Teppich-) Oberfläche vorhanden sein, wenn weiterhin \dot{q}_W^* auftritt. Da die Fußboden-Oberflächentemperatur durch die thermischen Vorgänge im Raum bestimmt wird, und diese sich nicht ändern, erhöht sich die Temperatur des elektrischen Leiters entsprechend. Dessen Temperatur ist durch den Wärmeleitungsvorgang bedingt und nach oben prinzipiell nicht begrenzt.

Bei der Warmwasser-Fußbodenheizung kann aber an keiner Stelle eine Temperatur oberhalb der Vorlauftemperatur entstehen. Deshalb führt der erhöhte Wärmewiderstand zu einer reduzierten Wandwärmestromdichte und als Folge davon zu einer reduzierten Oberflächentemperatur (und damit zu veränderten thermischen Verhältnissen im Raum).

Als Abstraktion dieser Situation kann man sich vorstellen, dass der gesamte Raum adiabatisch ist, d. h. über die Seitenwände und die Decke wird keine Energie in Form von Wärme abgeführt. Wenn ein solcher Raum über lange Zeiten mit beiden Systemen geheizt würde, könnte bei der Warmwasser-Heizung maximal die Vorlauftemperatur als Raumtemperatur erreicht werden. Die Raumtemperatur bei der elektrischen Heizung würde hingegen unbegrenzt ansteigen.

Die zuvor beschriebene Isolationsfunktion des Teppichs zeigt die grundsätzlich unterschiedliche Wirkung einer Isolationsschicht auf einer Wärmeübertragungsfläche:

- Bei $T_W^* = \text{const}$ führt sie zu einer Reduktion des Wärmestromes.
- Bei $\dot{Q}_W^* = \text{const}$ führt sie zu einer Erhöhung der Temperatur des Heizkörpers bei unverändertem Wärmestrom.

5.6 Übungsaufgaben zur Wärmeleitung

Für die Bearbeitung der nachfolgenden Übungsaufgaben wird empfohlen, die zugehörigen Arbeitsblätter zur Wärmeleitung im Anhang zu benutzen. Die ausführlich beschriebenen Lösungswege zu diesen Übungsaufgaben befinden sich im Kap. 5.6.2.

5.6.1 Übungsaufgaben und Ergebnisse

Übungsaufgabe 5.1: „Ebene mehrschichtige Wand“

Der Wandaufbau eines Gebäudes von innen nach außen besteht aus

- Innenputz: $s_{IP}^* = 1,5 \text{ cm}$, $\lambda_{IP}^* = 0,8 \text{ W/mK}$,
- Ziegel $s_Z^* = 24,0 \text{ cm}$, $\lambda_Z^* = 0,45 \text{ W/mK}$,
- Außenputz: $s_{AP}^* = 2,5 \text{ cm}$, $\lambda_{AP}^* = 0,9 \text{ W/mK}$.

Im Auslegungszustand betragen die Innenwandtemperatur $t_{Wi}^* = 20^\circ\text{C}$ und die Außenwandtemperatur $t_{Wa}^* = -12^\circ\text{C}$. Die Wandfläche des Gebäudes beträgt $A^* = 250 \text{ m}^2$.

- Welcher Temperaturverlauf ergibt sich in den drei Schichten?
- Wie groß ist der gesamte Wärmeleitungswiderstand?
- Welcher Wärmestrom wird an die Umgebung abgegeben?
- Zur Reduzierung des Wärmestromes an die Umgebung soll die gesamte Wandfläche des Gebäudes mit einer zusätzlichen Wärmedämmschicht von $s_{WD}^* = 8 \text{ cm}$ ($\lambda_{WD}^* = 0,04 \text{ W/mK}$) versehen werden.
 - Wie groß sind die Wärmeströme an die Umgebung, wenn die Wärmedämmung zwischen Außenputz und Ziegel (Variante A) oder zwischen Innenputz und Ziegel (Variante B) angebracht wird?
 - Welche Temperaturverläufe ergeben sich in den Schichten für beide Varianten?
 - Welche Variante ist zu bevorzugen (Begründung)?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 5.1:

- Grafische Darstellung, siehe Lösungsweg
- $R_{\lambda, \text{ges}}^* = 0,00232 \text{ K/W}$
- $\dot{Q}^* = 13796,4 \text{ W}$
- $R_{\lambda, \text{ges, mod}}^* = 0,01032 \text{ K/W}$
 - $\dot{Q}_{\text{mod}}^* = 3100,8 \text{ W}$
 - Grafische Darstellung, siehe Lösungsweg
 - Variante A

Übungsaufgabe 5.2: „Mehrschichtiger Hohlzylinder“

Ein von innen beheiztes 1 m langes Stahlrohr mit dem Innenradius $r_i^* = 100 \text{ mm}$, der Wandstärke $s_1^* = 5 \text{ mm}$ und der Wärmeleitfähigkeit $\lambda_1^* = 21 \text{ W/mK}$ ist mit einer Wärmedämmschicht der Wandstärke $s_2^* = 30 \text{ mm}$ mit der Wärmeleitfähigkeit $\lambda_2^* = 0,03 \text{ W/mK}$ versehen. Die Innenwandtemperatur beträgt $t_{Wi}^* = 80^\circ \text{C}$, die Außenwandtemperatur $t_{Wa}^* = 28^\circ \text{C}$.

- Welcher Wärmestrom wird übertragen?
- Wie ist der Verlauf der Wärmestromdichte von der Innenwand zur Außenwand?
- Wie groß ist die Temperatur am Übergang vom Stahlrohr zur Wärmedämmschicht beim Radius r_m^* ?
- Welcher Temperaturverlauf ergibt sich in der doppelschichtigen Wand?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 5.2:

- $\dot{Q}^* = 39,0 \text{ W}$
- Grafische Darstellung, siehe Lösungsweg
- $t_{Wm}^* = 79,986^\circ \text{C}$
- Grafische Darstellung, siehe Lösungsweg

Übungsaufgabe 5.3: „Reihenschaltung und Parallelschaltung von Wärmeleitwiderständen“

Ein Raum mit dicken Betonwänden ($s_B^* = 20 \text{ cm}$, $\lambda_B^* = 1,1 \text{ W/mK}$) soll als Kühlraum genutzt werden. Dazu werden die Innenwände mit einer Wärmedämmschicht versehen ($s_{WD}^* = 5 \text{ cm}$, $\lambda_{WD}^* = 0,035 \text{ W/mK}$), die mit einer Abdeckung aus Edelstahlblech ($s_E^* = 0,15 \text{ cm}$, $\lambda_E^* = 21 \text{ W/mK}$) verblendet ist. Es soll berücksichtigt werden, dass die Wärmedämmschicht von Stegen gehalten wird, die an der Betonwand befestigt sind. Diese Stege bestehen ebenfalls aus Edelstahl ($\lambda_{Steg}^* = 21 \text{ W/mK}$) mit einer Querschnittsfläche von $A_{Steg}^* = 1,8 \text{ cm}^2$ pro m^2 Wandfläche. Die Außenwandtemperatur beträgt $t_{Wa}^* = 32^\circ \text{C}$, die Innenwandtemperatur $t_{Wi}^* = 6^\circ \text{C}$. Die Gesamtwandfläche des Raumes umfasst $A^* = 54 \text{ m}^2$; der Unterschied zwischen Außen- und Innenwandfläche kann unberücksichtigt bleiben.

- Wie groß ist die erforderliche Kühlleistung?
- Welche Kühlleistung ergäbe sich, wenn auf den Einbau der Stege verzichtet werden könnte?
- Welche Wärmedämmschichtdicke würde für die in a) berechnete Kühlleistung ausreichen, wenn auf den Einbau der Stege verzichtet werden könnte?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 5.3:

- $\dot{Q}_{Kühl}^* = 954,18 \text{ W}$
- $\dot{Q}_{Kühl,mod}^* = 871,9 \text{ W}$
- $s_{WD,mod}^* = 4,51 \text{ cm}$

Übungsaufgabe 5.4: „Temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit“

Die beiden Seiten einer ebenen Wand ($A^* = 1 \text{ m}^2$) mit einer Wandstärke von $s^* = 10 \text{ cm}$ werden auf zeitlich konstanten Temperaturen $T_1^* = 800 \text{ K}$ und $T_2^* = 300 \text{ K}$ gehalten. Die Wärmeleitfähigkeit des Wandmaterials ist

$$\frac{\lambda^*(T^*)}{\lambda^*(T_{\text{Ref}}^*)} = \frac{T^*}{T_{\text{Ref}}^*} \quad \text{mit} \quad T_{\text{Ref}}^* = 300 \text{ K} \quad \text{und} \quad \lambda^*(T_{\text{Ref}}^*) = 0,04 \text{ W/mK}.$$

Bei der Berechnung des stationären Zustandes sollen folgende Fälle gegenübergestellt werden:

- Variante A: konstante, arithmetisch gemittelte Wärmeleitfähigkeit,
- Variante B: temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit.

Für beide Varianten sollen folgende Fragen beantwortet werden:

- Welche Wärmeströme fließen durch die Wand?
- Wie lauten die funktionalen Zusammenhänge zwischen Temperatur und Koordinate in der Wand?
- Wie lauten die funktionalen Zusammenhänge zwischen Temperaturgradient und Koordinate in der Wand? Begründen Sie die Verläufe!

Ergebnis zu Übungsaufgabe 5.4:

a) $\dot{Q}^* = 366,67 \text{ W}$

b) Variante A: $T_A^*(x^*) = T_1^* - (T_1^* - T_2^*) \frac{x^*}{s^*}$

Variante B: $T_B^*(x^*) = \sqrt{\frac{-2\dot{Q}_W^* T_{\text{Ref}}^* x^*}{A^* \lambda^*(T_{\text{Ref}}^*)} + T_1^{*2}}$

c) Variante A: $\frac{dT^*}{dx^*} = \frac{-\dot{Q}_W^*}{\lambda^* A^*} = \text{const}$

Variante B: $\frac{dT^*}{dx^*} = \frac{-\dot{Q}_W^* T_{\text{Ref}}^*}{\lambda_{\text{Ref}}^* A^* \sqrt{\frac{-2\dot{Q}_W^* T_{\text{Ref}}^* x^*}{A^* \lambda^*(T_{\text{Ref}}^*)} + T_1^{*2}}}$

Übungsaufgabe 5.5: „Instationäre Wärmeleitung in einem Stab“

Ein dünner Aluminiumstab (Länge $L^* = 1 \text{ m}$, Temperaturleitfähigkeit $a^* = 93,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda^* = 238 \text{ W/mK}$), der radial ideal wärmegeklärt ist, wird ausgehend von einer konstanten Anfangstemperatur $T_0^* = 300 \text{ K}$ an seiner Stirnfläche $x^* = 0$ schlagartig auf eine Temperatur $T_\infty^* = 400 \text{ K} = \text{const}$ gebracht.

- Wie lautet der allgemeine Zusammenhang zwischen der Stabtemperatur T^* als Funktion der Koordinate x^* und der Zeit τ^* ?
- Wie ist der Temperaturverlauf im Stab als Funktion der Koordinate zu drei verschiedenen Zeiten $\tau_1^* = 1000 \text{ s}$, $\tau_2^* = 100 \text{ s}$ und $\tau_3^* = 10 \text{ s}$?
- Wie ist der Temperaturverlauf im Stab als Funktion der Zeit $T^*(\tau^*)$ an drei verschiedenen Orten $x_1^* = 0,01 \text{ m}$, $x_2^* = 0,1 \text{ m}$ und $x_3^* = 1 \text{ m}$?
- Wie ist der Verlauf der Wandwärmestromdichte als Funktion der Zeit $\dot{q}_W^*(\tau^*)$ an der Stirnfläche?

Anmerkung: Es gilt $\frac{d}{d\eta} \text{erfc}(\eta) = \frac{-2 \exp(-\eta^2)}{\sqrt{\pi}}$.

Ergebnis zu Übungsaufgabe 5.5:

a) $T^* = T_0^* + (T_\infty^* - T_0^*) \text{erfc}\left(\frac{x^*}{2\sqrt{a^* \tau^*}}\right)$

b) Grafische Darstellung, siehe Lösungsweg

c) Grafische Darstellung, siehe Lösungsweg

d) $\dot{q}_W^*(\tau^*) = \lambda^* \frac{(T_\infty^* - T_0^*)}{2\sqrt{a^* \tau^*}}$

Übungsaufgabe 5.6: „Instationäre Wärmeleitung in einem Würfel“

Ein Würfel mit der Kantenlänge $l^* = 5 \text{ mm}$ und den Stoffdaten $\rho^* = 8500 \text{ kg/m}^3$, $c^* = 316 \text{ J/kgK}$, $\lambda^* = 380 \text{ W/mK}$ wird innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne $\Delta\tau^* = 10 \text{ min}$ von $T_0^* = 295 \text{ K}$ auf eine Temperatur $T_1^* = 365 \text{ K}$ erwärmt. Dazu wird der Würfel in ruhende Luft (= Heizmedium) mit einer konstanten Temperatur $T_\infty^* = 373 \text{ K}$ gelegt.

Anmerkungen:

- Strahlungseffekte können vernachlässigt werden.
- Die Wärmeleitfähigkeit des Würfels kann als konstant betrachtet werden.
- Die Stoffwerte des Heizmediums können bei einer mittleren Temperatur von $T_m^* = 333 \text{ K}$ eingesetzt werden.
- Es gilt $\int \frac{dx^*}{C_1^* x^* + C_2} = \frac{1}{C_1^*} \ln(C_1^* x^* + C_2)$.

- a) Wie lautet der funktionale Zusammenhang zwischen der Temperaturerhöhung des Würfels und der Zeit?
- b) Wie groß ist der mittlere Wärmeübergangskoeffizient?
- c) Wie groß sind die mittleren Wärmestromdichten zu Beginn und am Ende des Prozesses?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 5.6:

- a) $\frac{T_\infty^* - T^*(\tau^*)}{T_\infty^* - T_0^*} = \exp\left(-\frac{\alpha_m^* 6}{c^* \rho^* l^*} \tau^*\right)$
- b) $\alpha_m^* = 8,5 \text{ W/m}^2\text{K}$
- c) $\dot{q}_{m,L}^*(\tau^* = 0 \text{ min}) = 663 \text{ W/m}^2$
 $\dot{q}_{m,L}^*(\tau^* = 10 \text{ min}) = 68 \text{ W/m}^2$

Übungsaufgabe 5.7: „Instationäre Wärmeleitung in einem Behälter“

In einen Becher (Außendurchmesser: $d_B^* = 8 \text{ cm}$, Höhe $h_B^* = 10 \text{ cm}$, Wandstärke $s_B^* = 0,1 \text{ cm}$) aus Blech mit der Wärmeleitfähigkeit $\lambda_B^* = 21 \text{ W/mK}$ wird zum Zeitpunkt $\tau_0^* = 0 \text{ s}$ Kaffee mit einer Temperatur $t_0^* = 80^\circ\text{C}$ und einer Wärmeleitfähigkeit $\lambda_K^* = 0,65 \text{ W/mK}$ gegossen. Der Becher wird durch die ihn umgebene Luft (Temperatur $t_L^* = 20^\circ\text{C}$, Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_a^* = 15 \text{ W/m}^2\text{K}$) abgekühlt. Die mittlere Wärmekapazität und die mittlere Dichte des Bechers samt Inhalt seien $c_B^* = 1600 \text{ J/kgK}$ und $\rho_B^* = 2700 \text{ kg/m}^3$.

Anmerkungen:

- Der innenseitige Wärmeübergangswiderstand ($1/(\alpha_i^* A_i^*)$) sowie Wärmeverluste über die Stirnflächen sollen vernachlässigt werden.
- Es gilt $\int \frac{dx^*}{C_1^* x^* + C_2} = \frac{1}{C_1^*} \ln(C_1^* x^* + C_2)$.

- a) Wie muss hier die Biot-Zahl definiert werden, damit diese den Vorgang der instationären Abkühlung charakterisiert?
- b) Welcher Zahlenwert ergibt sich für diese Biot-Zahl und welche Folgerung kann daraus gezogen werden?
- c) Welche Zeiten vergehen, bis der Becher auf 60°C bzw. auf 40°C abgekühlt ist?

- d) Wie groß sind die zeitlich gemittelten Wärmeströme, die von dem Becher samt Inhalt in den in c) berechneten Zeiten abgegeben werden?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 5.7:

- a) $Bi = \frac{\alpha_a^* d_B^*}{\lambda_K^*}$
 b) $Bi = 0,057$
 c) $\tau^*(60^\circ\text{C}) = 1459,7\text{s}$ sowie $\tau^*(40^\circ\text{C}) = 3955\text{s}$
 d) $\dot{Q}_m^*(60^\circ\text{C}) = 29,75\text{W}$ sowie $\dot{Q}_m^*(40^\circ\text{C}) = 21,96\text{W}$

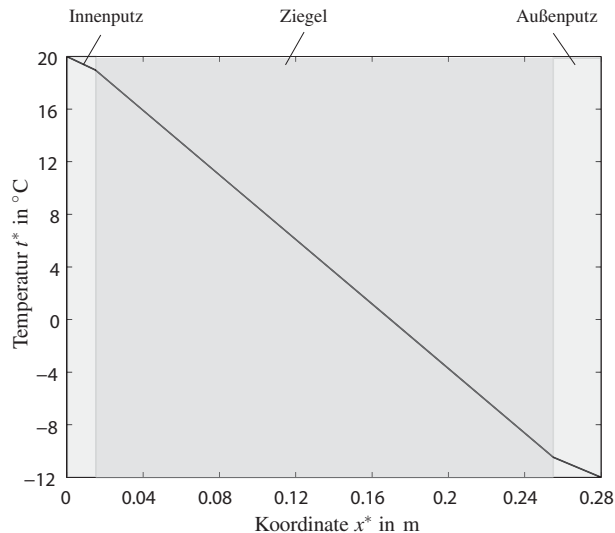
5.6.2 Lösungswege

Lösungsweg zu Übungsaufgabe 5.1: „Ebene mehrschichtige Wand“

- a) Der Temperaturverlauf in den drei Schichten j folgt aus dem Fourierschen Ansatz ((5-5) bzw. Tab. 5.1) für eine ebene Wand unter Verwendung von (5-8) und (5-11) mit $\Delta t_{W,j}^* > 0$ aus

$$\dot{Q}^* = \dot{q}^* A^* = -\lambda_j^* A^* \frac{dT_j^*}{dx_j^*} = \lambda_j^* A^* \frac{\Delta t_{W,j}^*}{s_j^*} = \frac{\Delta t_{W,j}^*}{R_{\lambda,j}^*} = \text{const.}$$

D. h., in jeder Schicht ist der Temperaturverlauf linear und die Steigung ist proportional zu $1/\lambda_j^*$. Die nachfolgende grafische Darstellung zeigt den konkreten Temperaturverlauf.



- b) Da die einzelnen Wärmeleitwiderstände analog zur Elektrotechnik als Reihenschaltung vorliegen, ergibt sich der gesamte Wärmeleitwiderstand aus der Summe der einzelnen Widerstände gemäß (5-11) zu

$$R_{\lambda,\text{ges}}^* = R_{\lambda,\text{RS}}^* = \sum R_{\lambda,j}^* = \frac{s_{\text{IP}}^*}{\lambda_{\text{IP}}^* A^*} + \frac{s_Z^*}{\lambda_Z^* A^*} + \frac{s_{\text{AP}}^*}{\lambda_{\text{AP}}^* A^*} = 0,00232\text{ K/W.}$$

c) Aus (5-7) folgt im vorliegenden Fall

$$\dot{Q}^* = \frac{-(t_{\text{Wa}}^* - t_{\text{Wi}}^*)}{R_{\lambda, \text{ges}}^*} = 13\,796,4 \text{ W}.$$

d) Der Wärmeleitwiderstand erhöht sich (additiv) um den Widerstand der zusätzlichen Wärmedämmschicht auf

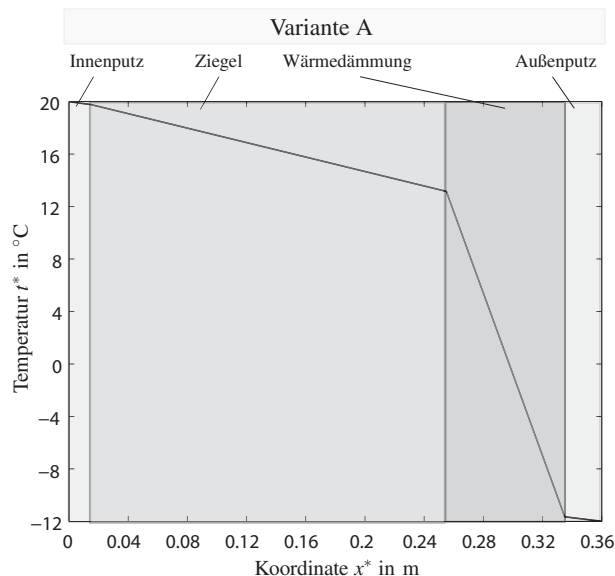
$$R_{\lambda, \text{ges}, \text{mod}}^* = R_{\lambda, \text{ges}}^* + \frac{s_{\text{WD}}^*}{\lambda_{\text{WD}}^* A^*} = 0,01032 \text{ K/W}.$$

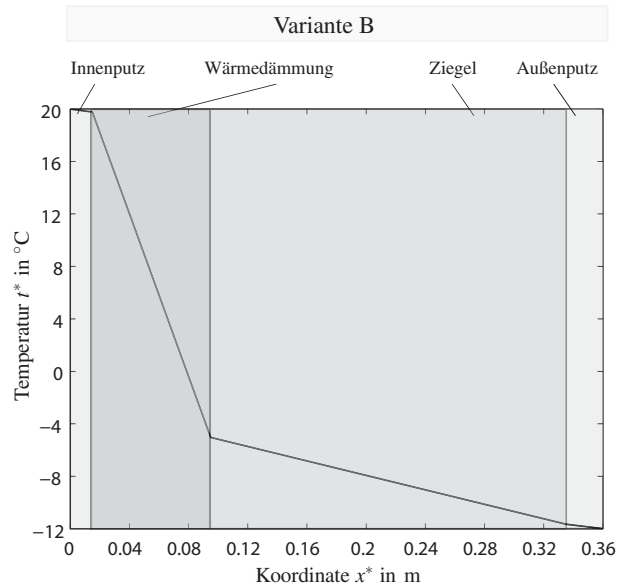
- Damit ergibt sich ein modifizierter Wärmestrom von

$$\dot{Q}_{\text{mod}}^* = 3\,100,8 \text{ W}.$$

Dieser Wärmestrom liegt unabhängig davon vor, ob die Wärmedämmung innenseitig oder außenseitig angebracht wird.

- Der Wärmestrom \dot{Q}_{mod}^* ist in jeder Schicht gleich groß. Deshalb gilt der Fouriersche Ansatz für \dot{Q}_{mod}^* auch in der Wärmedämmschicht der Dicke s_{WD}^* . Dabei muss beachtet werden, dass die Temperaturen an der Grenzfläche zwischen Wärmedämmschicht und Ziegel, abhängig von der gewählten Variante, unterschiedlich sind. Die Temperaturen an den Grenzflächen zwischen Innenputz und Ziegel (bzw. Wärmedämmung) sowie Außenputz und Wärmedämmung (bzw. Ziegel) bleiben jeweils unverändert.





- Die außenseitige Wärmedämmung ist zu bevorzugen, da in der Ziegelwand eine Taupunktunterschreitung vermieden wird. Bei einer solchen Taupunktunterschreitung kondensiert die Luftfeuchtigkeit und die Wand wird feucht (Schimmelbildung!). Zudem bleibt das Wohnraumvolumen bei außenseitiger Wärmedämmung unverändert.

Lösungsweg zu Übungsaufgabe 5.2: „Mehrschichtiger Hohlzylinder“

- a) Bei den Wärmewiderständen der Stahlrohrwand und der Wärmedämmschicht handelt es sich um Wärmeleitwiderstände eines Hohlzylinders $R_{\lambda,j}^*$ gemäß (5-9), die sich als Reihenschaltung zum Gesamtwärmewiderstand $R_{\lambda,ges}^* = R_{\lambda,RS}^*$ nach (5-11) addieren. Es ergibt sich

$$R_{\lambda,ges}^* = R_{\lambda,RS}^* = \sum R_{\lambda,j}^* = \frac{1}{2\pi L^* \lambda_1^*} \ln \frac{r_m^*}{r_i^*} + \frac{1}{2\pi L^* \lambda_2^*} \ln \frac{r_a^*}{r_m^*}.$$

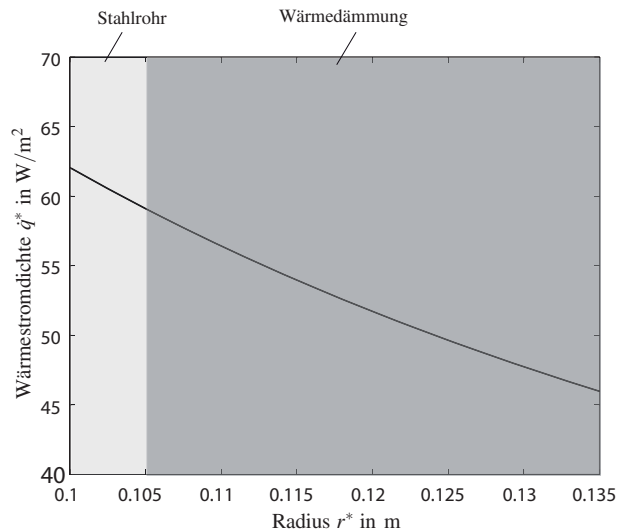
Mit den vorgegebenen Daten und $r_m^* = 105 \text{ mm}$ sowie $r_a^* = 135 \text{ mm}$ ergibt sich $R_{\lambda,ges}^* = 1,334 \text{ K/W}$. Der übertragene Wärmestrom folgt aus (5-7) zu

$$\dot{Q}^* = \frac{-(t_{Wa}^* - t_{Wi}^*)}{R_{\lambda,ges}^*} = 39,0 \text{ W}.$$

- b) Die Wärmestromdichte \dot{q}^* verändert sich mit dem Radius, da die wärmeübertragende Fläche mit wachsendem Radius größer wird, der Wärmestrom \dot{Q}^* (aus a)) aber überall gleich groß ist. Es gilt für jeden Radius r^* :

$$\dot{q}^* = \frac{\dot{Q}^*}{2\pi L^* r^*}$$

Der Verlauf der Wärmestromdichte als Funktion des Radius ist im folgenden Diagramm dargestellt:



- c) Für den Wärmestrom \dot{Q}^* durch die Stahlwand von r_i^* bis r_m^* gilt nach (5-7)

$$\dot{Q}^* = \frac{-(t_{Wm}^* - t_{Wi}^*)}{R_{\lambda,1}^*} = \frac{2\pi L^* \lambda_1^*}{\ln \frac{r_m^*}{r_i^*}} (t_{Wi}^* - t_{Wm}^*).$$

Daraus folgt mit $R_{\lambda,1}^* = 0,000370 \text{ K/W}$:

$$t_{Wm}^* = t_{Wi}^* - \dot{Q}^* R_{\lambda,1}^* = 79,986^\circ \text{C}$$

Diese Temperatur könnte auch durch eine analoge Berechnung durch die Wärmedämmschicht ermittelt werden.

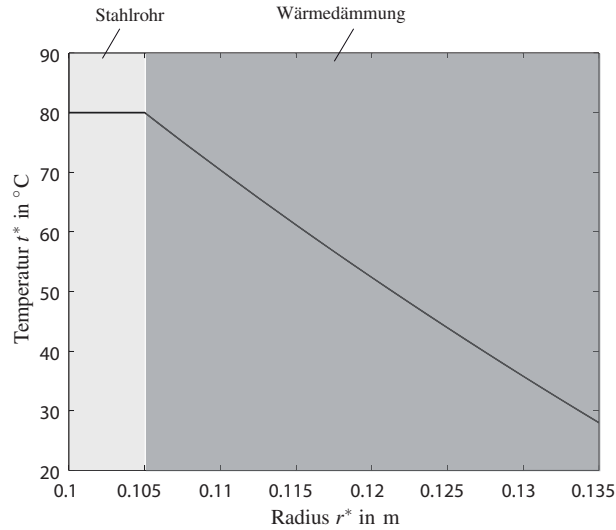
- d) Im Bereich $r_i^* \leq r^* \leq r_m^*$ gilt

$$t_W^*(r^*) = t_{Wi}^* - \dot{Q}^* \frac{\ln \frac{r^*}{r_i^*}}{2\pi L^* \lambda_1^*}.$$

Im Bereich $r_m^* \leq r^* \leq r_a^*$ gilt

$$t_W^*(r^*) = t_{Wm}^* - \dot{Q}^* \frac{\ln \frac{r^*}{r_m^*}}{2\pi L^* \lambda_2^*}.$$

Mit den konkreten Zahlenwerten ergibt sich der nachfolgend dargestellte Verlauf.



Lösungsweg zu Übungsaufgabe 5.3: „Reihenschaltung und Parallelschaltung von Wärmeleitwiderständen“

- a) Die erforderliche Kühlleistung ergibt sich aus dem Quotienten der treibenden Temperaturdifferenz und dem gesamten Wärmeleitwiderstand gemäß (5-7)

$$\dot{Q}_{\text{Kühl}}^* = \frac{\Delta t_{\text{W}}^*}{R_{\lambda, \text{ges}}^*} = \frac{-(t_{\text{Wa}}^* - t_{\text{Wi}}^*)}{R_{\lambda, \text{ges}}^*}.$$

Der gesamte Wärmeleitwiderstand $R_{\lambda, \text{ges}}^*$ ergibt sich hier aus einer Reihenschaltung nach (5-11) und einer Parallelschaltung nach (5-12) von Wärmeleitwiderständen. Der Widerstand der parallel geschalteten Widerstände (Stege und Isolierung) ergibt sich zu

$$R_{\lambda, \text{PS}}^* = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_{\lambda, j}^*}} = \frac{1}{\frac{1}{R_{\text{Steg}}^*} + \frac{1}{R_{\text{WD}}^*}} = \frac{1}{\frac{\lambda_{\text{Steg}}^* A_{\text{Steg}}^*}{s_{\text{Steg}}} + \frac{\lambda_{\text{WD}}^* A_{\text{WD}}^*}{s_{\text{WD}}}} = 0,02388 \text{ W/K}.$$

Hierbei sind die unterschiedlichen, wärmeübertragenden Flächen $A_{\text{Steg}}^* = 54 \cdot 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ bzw. $A_{\text{WD}}^* = 54(1 - 1,8 \cdot 10^{-4}) \text{ m}^2$ zu berücksichtigen.

Mit dem Wärmeleitwiderstand der Betonwand $R_{\text{B}}^* = s_{\text{B}}^* / \lambda_{\text{B}}^* A_{\text{B}}^* = 0,00337 \text{ K/W}$ sowie dem Wärmeleitwiderstand des Edelstahlbleches $R_{\text{E}}^* = s_{\text{E}}^* / \lambda_{\text{E}}^* A_{\text{E}}^* = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ K/W}$ ergibt sich der gesamte Wärmeleitwiderstand

$$R_{\lambda, \text{ges}}^* = R_{\text{B}}^* + R_{\lambda, \text{PS}}^* + R_{\text{E}}^* = 0,02725 \text{ K/W}.$$

Die erforderliche Kühlleistung beträgt damit $\dot{Q}_{\text{Kühl}}^* = 954,18 \text{ W}$.

- b) Ohne Berücksichtigung der Stege ergibt sich der gesamte modifizierte Wärmeleitwiderstand zu

$$R_{\lambda, \text{ges, mod}}^* = R_{\text{B}}^* + R_{\text{WD}}^* + R_{\text{E}}^* = R_{\text{B}}^* + \frac{s_{\text{WD}}^*}{\lambda_{\text{WD}}^* A_{\text{WD}}^*} + R_{\text{E}}^* = 0,02982 \text{ K/W}.$$

Die treibende Temperaturdifferenz von $\Delta t^* = 28,46 \text{ K}$ bleibt unverändert, so dass sich eine modifizierte Kühlleistung von $\dot{Q}_{\text{Kühl, mod}}^* = 871,9 \text{ W}$ ergibt.

- c) Mit der vorgegebenen treibenden Temperaturdifferenz und der in a) berechneten Kühlleistung ergibt sich, dass der gesamte Wärmeleitwiderstand dem bereits in a) berechneten entspricht. Allerdings sind hier die drei Wärmeleitwiderstände (Beton, Wärmedämmung, Abdeckung) in Reihe geschaltet. Es ergibt sich

$$R_{\text{WD,mod}}^* = R_{\lambda,\text{ges}}^* - R_{\text{B}}^* - R_{\text{E}}^* = 0,02339 \text{ K/W}$$

und damit $s_{\text{WD,mod}}^* = R_{\text{WD,mod}}^* \lambda_{\text{WD}}^* A_{\text{WD,mod}}^* = 4,51 \text{ cm}$.

Lösungsweg zu Übungsaufgabe 5.4: „Temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit“

- a) Variante A: Konstante, mittlere Wärmeleitfähigkeit

Mit

$$\lambda^*(T^*) = \lambda^*(T_{\text{Ref}}) \frac{T^*}{T_{\text{Ref}}} = 0,04 \frac{T^*}{300 \text{ K}} \text{ W/mK}$$

folgt $\lambda^*(300 \text{ K}) = 0,04 \text{ W/mK}$ und $\lambda^*(800 \text{ K}) = 0,1067 \text{ W/mK}$.

Damit ergibt sich eine arithmetisch gemittelte Wärmeleitfähigkeit von $\lambda_{\text{m}}^* = 0,0733 \text{ W/mK}$.

Der übertragene Wärmestrom ergibt sich aus dem Fourierschen Ansatz (5-5) zu

$$\dot{Q}^* = q^* A^* = -\lambda_{\text{m}}^* A^* \frac{dT^*}{dx^*} = -\lambda_{\text{m}}^* A^* \frac{\Delta T^*}{s^*} = 366,67 \text{ W}.$$

Variante B: Temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit

Im Fourierschen Ansatz muss die temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit berücksichtigt werden:

$$\dot{Q}^* = -\lambda^*(T^*) A^* \frac{dT^*}{dx^*} = -\left(\frac{\lambda^*(T_{\text{Ref}}^*)}{T_{\text{Ref}}^*} T^* \right) A^* \frac{dT^*}{dx^*}$$

Mit der Trennung der Variablen, also

$$T^* dT^* = \frac{-T_{\text{Ref}}^* \dot{Q}^*}{\lambda^*(T_{\text{Ref}}^*) A^*} dx^*$$

und der Integration zwischen T_1^* und T_2^* bzw. x_1^* und x_2^* mit $x_2^* - x_1^* = s^*$ folgt

$$\dot{Q}^* = \left(\frac{-\lambda^*(T_{\text{Ref}}^*)}{2 T_{\text{Ref}}^*} (T_2^{*2} - T_1^{*2}) \right) \frac{A^*}{s^*} = 366,67 \text{ W},$$

also exakt derselbe Zahlenwert wie bei Variante A. Dies ist eine Folge der *linearen* Abhängigkeit $\lambda^*(T^*)$.

- b) Variante A:

Aus dem Fourierschen Ansatz (5-5) mit $\lambda_{\text{m}}^* = \text{const}$ folgt, dass sich die Temperatur mit der Koordinate linear verändert:

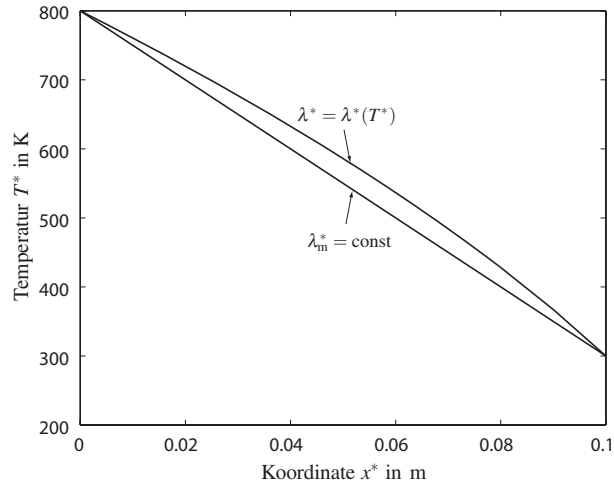
$$T_A^*(x^*) = T_1^* - (T_1^* - T_2^*) \frac{x^*}{s^*}$$

Variante B:

Aus dem Fourierschen Ansatz (5-5) mit $\lambda^* \sim T^*$ folgt, dass sich die Temperatur mit der Wurzel der Koordinate verändert:

$$T_B^*(x^*) = \sqrt{\frac{-2 \dot{Q}^* T_{\text{Ref}}^* x^*}{A^* \lambda^*(T_{\text{Ref}}^*)}} + T_1^{*2}$$

Mit den konkreten Zahlenwerten ergeben sich die nachfolgend dargestellten Verläufe:



c) Variante A:

Umstellung des Fourierschen Ansatzes ergibt

$$\frac{dT^*}{dx^*} = \frac{-\dot{Q}^*}{\lambda_m^* A^*} = \text{const.}$$

Variante B:

Umstellung des Fourierschen Ansatzes sowie Einsetzen der Beziehung für die Temperatur als Funktion der Koordinate ergibt

$$\frac{dT^*}{dx^*} = \frac{-\dot{Q}^* T_{\text{Ref}}^*}{\lambda^*(T_{\text{Ref}}^*) A^* T^*(x^*)} = \frac{-\dot{Q}^* T_{\text{Ref}}^*}{\lambda^*(T_{\text{Ref}}^*) A^* \sqrt{\frac{-2\dot{Q}^* T_{\text{Ref}}^* x^*}{A^* \lambda^*(T_{\text{Ref}}^*)} + T_1^{*2}}}.$$

Daraus ist zu erkennen, dass eine Abhängigkeit der Form $dT^*/dx^* = C_1^*/\sqrt{C_2^* - x^*}$ vorliegt, also dT^*/dx^* mit wachsendem x^* ansteigt.

Dies folgt auch aus

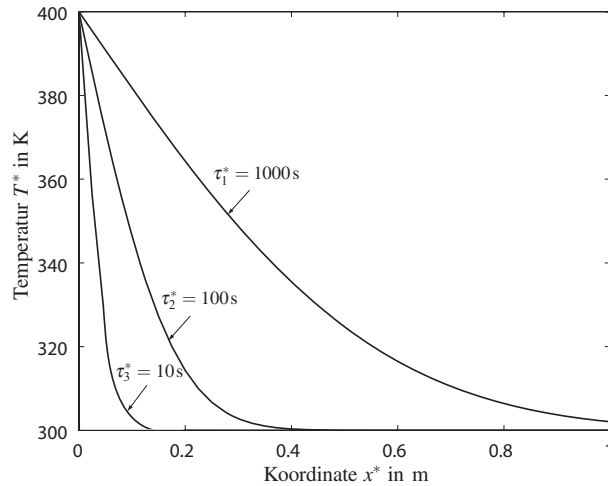
$$\dot{Q}^* = -\lambda^*(T^*) A^* \frac{dT^*}{dx^*} = \text{const.}$$

Bei sinkender Wärmeleitfähigkeit in Richtung von x^* muss der Temperaturgradient mit wachsender Koordinate ansteigen, wenn das Produkt aus beiden Größen konstant ist.

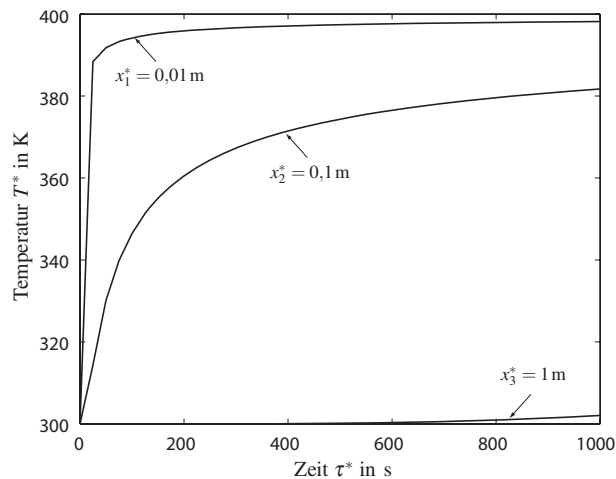
Lösungsweg zu Übungsaufgabe 5.5: „Instationäre Wärmeleitung in einem Stab“

a) Aus (5-22) folgt $T^* = T_0^* + (T_\infty^* - T_0^*) \operatorname{erfc}\left(\frac{x^*}{2\sqrt{a^* \tau^*}}\right)$.

b) Aus der Gleichung in a) ergibt sich mit den Werten für die komplementäre Fehlerfunktion „erfc“ aus Tab. 5.7 der nachfolgend dargestellte Temperaturverlauf über der Koordinate bei den drei Zeiten $\tau_1^* = 1000\text{s}$, $\tau_2^* = 100\text{s}$ und $\tau_3^* = 10\text{s}$.



- c) Aus der Gleichung in a) ergibt sich mit den Werten für die komplementäre Fehlerfunktion „erfc“ aus Tab. 5.7 der nachfolgende Temperaturverlauf über der Zeit an den drei Orten $x_1^* = 0,01$ m, $x_2^* = 0,1$ m und $x_3^* = 1$ m.



- d) Für die Wandwärmestromdichte an der Stirnfläche gilt gemäß dem Fourier'schen Ansatz (5-5)

$$\dot{q}_W^* = -\lambda^* \frac{dT^*}{dx^*}.$$

Der Temperaturgradient an der Stirnfläche ($x^* = 0$) ergibt sich mit Kenntnis des Temperaturverlaufes im Stab nach (5-22)

$$T^* = T_0^* + (T_\infty^* - T_0^*) \operatorname{erfc} \left(\frac{x^*}{2\sqrt{a^* \tau^*}} \right)$$

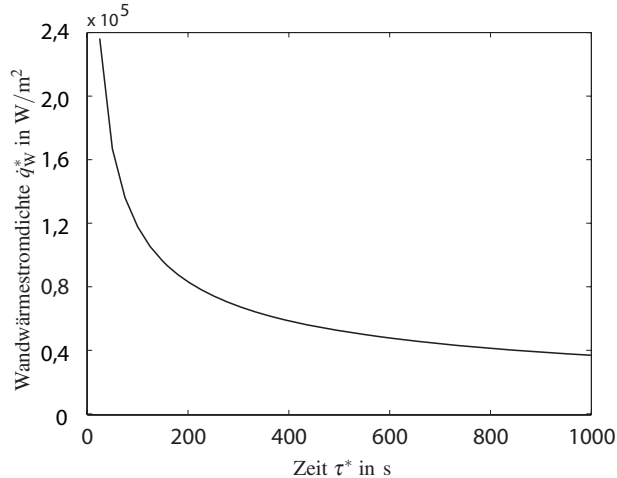
und unter Verwendung der in der Aufgabenstellung angegebenen Ableitung (mit $\eta = \frac{x^*}{2\sqrt{a^* \tau^*}}$) zu

$$\frac{dT^*}{dx^*} = (T_\infty^* - T_0^*) \left(\frac{-2 \exp(-(\frac{x^*}{2\sqrt{a^* \tau^*}})^2)}{\sqrt{\pi}} \right) \frac{1}{2\sqrt{a^* \tau^*}} = \frac{-(T_\infty^* - T_0^*)}{2\sqrt{a^* \tau^*}}.$$

Die Wandwärmestromdichte ergibt sich damit zu

$$\dot{q}_W^* = \dot{q}_W^*(\tau^*) = \lambda^* \frac{(T_\infty^* - T_0^*)}{2\sqrt{a^* \tau^*}}.$$

Nachfolgend ist dieser Zusammenhang grafisch dargestellt:



Lösungsweg zu Übungsaufgabe 5.6: „Instationäre Wärmeleitung in einem Würfel“

- a) Die Energiebilanz am Würfel (momentan zusätzlich gespeicherte Energie = momentan übertragene Energie) lautet analog zu (5-15):

$$m^* c^* \frac{dT^*}{d\tau^*} = \alpha_m^* A^* (T_\infty^* - T^*(\tau^*))$$

Mit Trennung der Variablen und $m^* = \rho^* V^*$ gilt

$$\frac{dT^*}{(T^*(\tau^*) - T_\infty^*)} = \frac{\alpha_m^* A^*}{V^* \rho^* c^*} d\tau^*$$

sowie integriert zwischen $\tau^* = 0$ und τ^* bzw. T_0^* und $T^*(\tau^*)$ gemäß der angegebenen Integration:

$$\ln \frac{(T_\infty^* - T_0^*)}{(T_\infty^* - T^*(\tau^*))} = \frac{\alpha_m^* A^*}{V^* \rho^* c^*} \tau^*.$$

- b) Für den Würfel gilt $A^*/V^* = 6/l^*$, so dass sich der mittlere Wärmeübergangskoeffizient zu

$$\alpha_m^* = \ln \frac{(T_\infty^* - T_0^*)}{(T_\infty^* - T^*(\tau^*))} \frac{\rho^* c^* l^*}{6 \tau^*}$$

mit $\tau^* = \Delta\tau^*$ ergibt.

Aus a) folgt für $T^*(\tau^* = 10 \text{ min}) = 365 \text{ K}$ der mittlere Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_m^* = 8,5 \text{ W/m}^2\text{K}$.

- c) Die mittleren Wandwärmestromdichten ergeben sich mit (2-1) zu
 $\dot{q}_{Wm}^*(\tau^* = 0 \text{ min}) = \alpha_m^* (T_\infty^* - T^*(\tau^* = 0 \text{ min})) = 663 \text{ W/m}^2$ bzw.
 $\dot{q}_{Wm}^*(\tau^* = 10 \text{ min}) = \alpha_m^* (T_\infty^* - T^*(\tau^* = 10 \text{ min})) = 68 \text{ W/m}^2$.

Lösungsweg zu Übungsaufgabe 5.7: „Instationäre Wärmeleitung in einem Behälter“

- a) Die maßgeblichen Größen sind hier α_a^* , d_B^* und λ_K^* , so dass gilt

$$\text{Bi} = \frac{\alpha_a^* d_B^*}{\lambda_K^*}.$$

- b) Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$\text{Bi} = \frac{\alpha_a^* d_B^*}{\lambda_K^*} = 0,057.$$

Bei kleinen Biot-Zahlen ($\text{Bi} < 0,1$) kann das Temperaturprofil im Körper in guter Näherung als (zu jedem Zeitpunkt) homogen angesehen werden, weil sich die von außen übertragene Energie unmittelbar im Körper verteilt.

- c) Die vom Becher samt Inhalt in Form von Wärme abgegebene Energie muss konvektiv an die umgebende Luft gelangen. So ergibt die Energiebilanz am Becher

$$m_B^* c_B^* \frac{dT^*}{d\tau^*} = -\alpha_a^* A_a^* (T^*(\tau^*) - T_\infty^*).$$

Umgestellt als

$$\frac{dT^*}{(T^*(\tau^*) - T_\infty^*)} = -\frac{\alpha_a^* A_a^*}{V_B^* \rho_B^* c_B^*} d\tau^*$$

sowie integriert und nach τ^* aufgelöst entsteht folgender Zusammenhang

$$\tau^* = -\ln \frac{(T^*(\tau^*) - T_\infty^*)}{(T^*(\tau^* = 0 \text{ min}) - T_\infty^*)} \frac{\frac{\pi d_B^{*2} h_B^*}{4} \rho_B^* c_B^*}{\alpha_a^* A_a^*},$$

wobei $(T^*(\tau^*) - T_\infty^*)$ die momentane Temperaturdifferenz zwischen Becher und Umgebung und $(T^*(\tau^* = 0 \text{ min}) - T_\infty^*)$ die (anfängliche) treibende Temperaturdifferenz zwischen Becher und Umgebung darstellt.

Es ergibt sich eine Abkühlzeit von $\tau^*(60^\circ\text{C}) = 1459,7 \text{ s}$, bis der Becher eine Temperatur von 60°C erreicht hat.

Die Abkühlzeit zur Erzielung einer Temperatur von 40°C erhöht sich um den Faktor $\ln(20/60)/\ln(40/60) = 2,71$, d. h. die Abkühlzeit beträgt nun $\tau^*(40^\circ\text{C}) = 3955 \text{ s}$.

- d)

$$\dot{Q}_m^* = m_B^* c_B^* \frac{\Delta T^*}{\Delta \tau} = V_B^* \rho_B^* c_B^* \frac{\Delta T^*}{\Delta \tau} = \frac{\pi d_B^{*2} h_B^*}{4} \rho_B^* c_B^* \frac{\Delta T^*}{\Delta \tau}$$

Der mittlere Wärmestrom zur Abkühlung des Bechers auf 60°C beträgt $\dot{Q}_m^*(60^\circ\text{C}) = 29,75 \text{ W}$ bzw. zur Abkühlung auf 40°C , $\dot{Q}_m^*(40^\circ\text{C}) = 21,96 \text{ W}$

6 Konvektiver Wärmeübergang

In vielen wärmetechnischen Problemen treten Strömungen gasförmiger oder flüssiger Fluide auf. Diese Strömungen beeinflussen den Wärmeübergang erheblich, in bestimmten Fällen gibt es auch eine Rückwirkung des Wärmeüberganges auf die Strömung. Diese einseitige bzw. gegenseitige Beeinflussung von Strömungs- und Temperaturfeldern ist bei sehr vielen Wärmeübergangsproblemen von fundamentaler Bedeutung und soll deshalb hier ausführlich behandelt werden.

Bevor auf konkrete Formen des konvektiven Wärmeüberganges bei der Durchströmung von Kanälen¹ und der Umströmung von Körpern mit laminaren oder turbulenten Strömungen bei erzwungener oder natürlicher Konvektion genauer eingegangen wird, soll die allen gemeinsame Wirkung von Strömungen auf den leitungsbasierten Energietransport über eine Wand (die gleichzeitig Systemgrenze ist) qualitativ beschrieben werden. Dabei wird in diesem Kapitel unterstellt, dass es sich jeweils um einphasige Strömungen, als reine Gas- oder Flüssigkeitsströmungen handelt.

Es wird vorausgesetzt, dass strömungsmechanische Grundkenntnisse vorhanden sind. Beispielsweise sollte der Unterschied zwischen laminaren und turbulenten Strömungen bekannt sein und ebenso die Tatsache, dass diese Strömungsformen jeweils bei Reynolds-Zahlen unter- bzw. oberhalb problemspezifischer kritischer Reynolds-Zahlen Re_{krit} auftreten. Auf spezielle Strömungsphänomene und deren Auswirkungen auf den Wärmeübergang wird in diesem Buch aber zumindest qualitativ eingegangen.²

6.1 Die Physik des konvektiven Wärmeüberganges

Für das physikalische Verständnis der Vorgänge bei der konvektiven Wärmeübertragung ist es sinnvoll, danach zu unterscheiden, ob

- der Wärmeübergang an eine begrenzte Fluidmenge bei der Durchströmung eines Kanals oder an eine prinzipiell unbegrenzte Fluidmenge bei der Umströmung eines Körpers erfolgt, oder
- die thermische Randbedingung $\dot{q}_W^* = \text{const}$ oder $T_W^* = \text{const}$ vorliegt.

In der Kombination entstehen damit bei der konvektiven Wärmeübertragung vier verschiedene Fälle mit sehr unterschiedlichem physikalischen Verhalten.

Die entscheidenden, unterschiedlichen Vorgänge und auch die Gemeinsamkeiten in den vier Wärmeübertragungs-Situationen sollen im Folgenden erläutert werden. Dabei wird insbesondere darauf hingewiesen, welche Auswirkungen eine Verbesserung des Wärmeüberganges hat. Es wird zunächst von der sog. *erzwungenen Konvektion* ausgegangen, die im Falle der Durchströmung eines Kanals immer als hydraulisch ausgebildet unterstellt wird³. Die Besonderheiten der

¹ Unter *Kanälen* werden hierbei alle durchströmten Geometrien zusammengefasst, wie z. B. Rohr, Diffusor und Düse mit unterschiedlichen geometrischen Querschnitten, einschließlich dem zweidimensionalen (ebenen) Kanal.

² Für strömungsmechanische Grundlagen s. z. B. Herwig, H. (2002): *Strömungsmechanik*, Springer-Verlag, Berlin

³ Unter „hydraulisch ausgebildeter Kanalströmung“ ist zu verstehen, dass sich (nach einem hydraulischen Einlauf) das Strömungsprofil nicht mehr mit der Hauptströmungs-Koordinate x^* verändert. Dies setzt eine in Strömungsrichtung unveränderte Kanalgeometrie voraus.

Physik bei *natürlicher Konvektion* werden an späterer Stelle (Kap. 6.1.4) am Beispiel der Strömung an beheizten Wänden behandelt.

Bild 6.1 zeigt die qualitativen Verläufe der kalorischen Mitteltemperaturen¹ bzw. Wandwärmestromdichten für die vier Fälle, die anschließend einzeln bzgl. ihrer charakteristischen Eigenschaften beschrieben werden. Die Veränderungen aufgrund verbesserter Wärmeübergänge werden für die prinzipiellen Verläufe der Wandtemperaturen bzw. Wandwärmestromdichten gezeigt ($\Delta Wü$). Auf die damit verbundenen Veränderungen in den Temperaturprofilen und Grenzschicht-dicken wird in Bild 6.1 aber nicht eingegangen.

(1) Kanal, $\dot{q}_W^* = \text{const.}$

In einem Kanal mit einer hydraulisch ausgebildeten Strömung wird ein begrenzter Massenstrom \dot{m}^* einer Anfangstemperatur T_0^* , beginnend bei $x^* = 0$, kontinuierlich erwärmt. Die Energiebilanz $\dot{m}^* c^* (T_{km}^* - T_0^*) = \dot{q}_W^* A^*$ mit A^* als bis zur Stelle x^* wirksamen Übertragungsfläche für \dot{q}_W^* zeigt, dass die kalorische Mitteltemperatur T_{km}^* linear mit x^* ansteigt, da $A^* \sim x^*$ gilt. Je besser nun der Wärmeübergang ist, umso geringer ist die erforderliche Temperaturdifferenz $T_W^* - T_{km}^*$ (vgl. (2-1) mit $\Delta T^* = T_W^* - T_{km}^*$), die nach einer thermischen Einlaufphase x^* -unabhängig wird.

Eine Verbesserung des Wärmeüberganges führt lediglich zu einer niedrigeren Wandtemperatur, die kalorische Mitteltemperatur bleibt unbeeinflusst.

(2) Ebene Wand, $\dot{q}_W^* = \text{const.}$

Im Unterschied zur Strömung durch einen Kanal ist der Massenstrom, in den Energie in Form von Wärme übertragen werden kann, bei der Überströmung einer ebenen Platte prinzipiell unbegrenzt. Die Energiebilanz lautet analog zum vorher beschriebenen Fall $\dot{m}^* c^* (T_{km}^* - T_\infty^*) = \dot{q}_W^* A^*$ mit T_∞^* als Temperatur der Anströmung. Sie ergibt aber für einen Massenstrom $\dot{m}^* \rightarrow \infty$ für die kalorische Mitteltemperatur $T_{km}^* \rightarrow T_\infty^*$, also keinen Wert, der zur Bildung einer Temperaturdifferenz herangezogen werden könnte. Diese muss jetzt als Differenz zwischen der Wandtemperatur T_W^* und der „Außentemperatur“ T_∞^* gebildet werden und liegt als Temperaturdifferenz über eine thermische Grenzschicht vor. Durch die Wärmeübertragung steigt die Wandtemperatur kontinuierlich, aber „unter-linear“ an ($(T_W^* - T_\infty^*) \sim x^{*n}$ mit $n < 1$). Es bildet sich eine thermische Grenzschicht der Dicke δ_T^* aus.

Eine Verbesserung des Wärmeüberganges führt zu einer niedrigeren Wandtemperatur (vgl. (2-1) mit $\Delta T^* = T_W^* - T_\infty^*$).

(3) Kanal, $T_W^* = \text{const.}$

In einem Kanal mit hydraulisch ausgebildeter Strömung wird ein begrenzter Massenstrom \dot{m}^* für $x^* \rightarrow \infty$ um $\Delta T^* = T_W^* - T_0^*$ erwärmt. Dazu wird die Energie $\dot{m}^* c^* (T_W^* - T_0^*)$ benötigt. Die kalorische Mitteltemperatur steigt ausgehend von $T_{km}^* = T_0^*$ bei $x^* = 0$ kontinuierlich an, bis sie für $x^* \rightarrow \infty$ asymptotisch den Wert $T_{km}^* = T_W^*$ erreicht. Für praktische Anwendungen wählt man als Kriterium, um festzulegen, nach welcher endlichen Lauflänge x^* die Wärmeübertragung beendet ist, einen bestimmten geringen Prozentsatz (z. B. 2%), um den T_{km}^* noch von T_W^* abweicht.

Eine Verbesserung des Wärmeüberganges verkürzt diese Lauflänge, führt also zu kürzeren „Heizstrecken“ (ohne die insgesamt aufzuwendende Energie zu verändern), weil die lokale Wandwärmestromdichte ansteigt (vgl. (2-1) mit $\Delta T^* = T_W^* - T_{km}^*$).

¹ Die kalorische Mitteltemperatur bei der Koordinate x^* ist als $T_{km}^* = 1/(\dot{m}^* \hat{A}^*) \int \int T^* u^* d\hat{A}^*$ definiert, wobei \hat{A}^* der durchströmte Querschnitt und u_{m}^* die querschnittsgemittelte axiale Geschwindigkeit sind.

(4) Ebene Wand, $T_W^* = \text{const.}$

Durch die gegenüber der Temperatur des strömenden Fluides erhöhte Wandtemperatur entsteht eine Wärmestromdichte an der Wand. Diese wird mit steigender Lauflänge stets kleiner, weil die Temperaturgradienten (mit denen insgesamt die konstante Temperaturdifferenz $\Delta T^* = T_W^* - T_\infty^*$ überbrückt wird) in dem Maße abnehmen, in dem das Temperaturprofil in die Strömung „hineinwächst“. Damit nimmt auch der Temperaturgradient an der Wand in Laufrichtung ab, was zur beschriebenen Verringerung der Wandwärmestromdichte führt (vgl. (5-5)). An jeder Stelle x^* muss die mit diesem Temperaturprofil gespeicherte innere Energie genau der Energie entsprechen, die bis zu dieser Stelle insgesamt in Form von Wär-

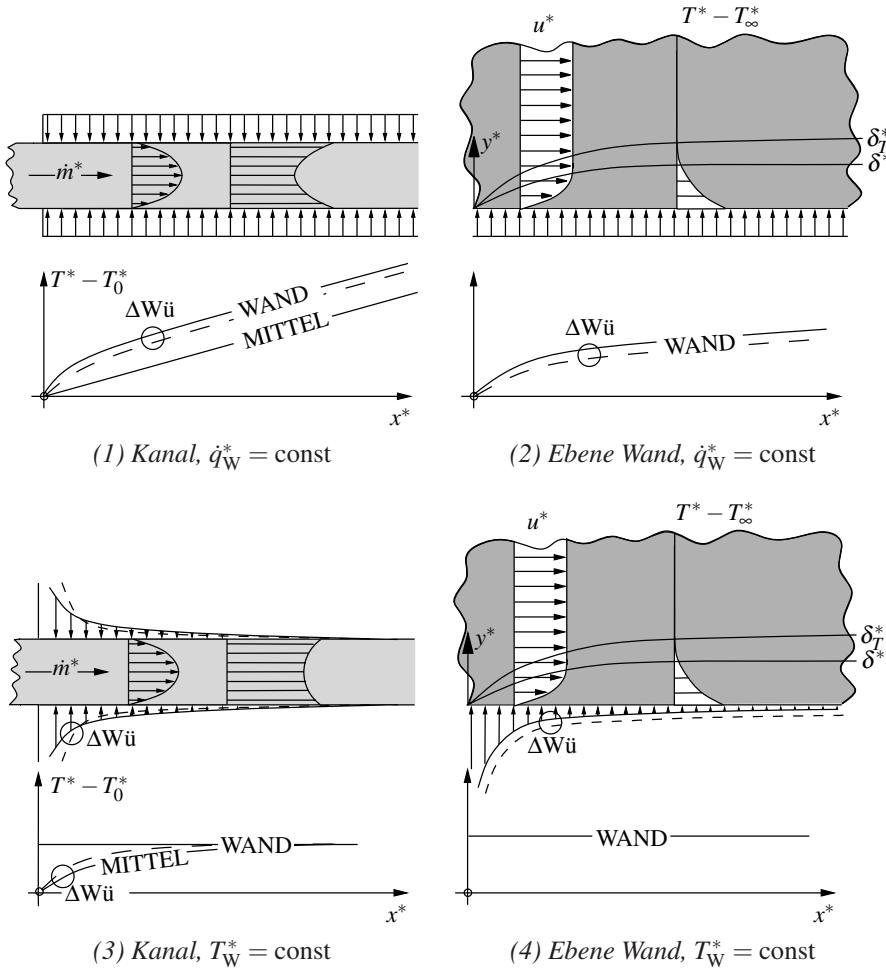


Bild 6.1: Durchströmung eines Kanals und Überströmung einer ebenen Wand: Prinzipieller Verlauf der

- Wand- und kalorischen Mitteltemperaturen für $\dot{q}_W^* = \text{const}$

- Wandwärmestromdichten für $T_W^* = \text{const}$

$\Delta W_{\dot{u}}$: Veränderung bei einem verbesserten Wärmeübergang (— \Rightarrow - - -)

δ^* : Dicke der Strömungsgrenzschicht

δ_T^* : Dicke der Temperaturgrenzschicht

me über die Wand übertragen worden ist. Es muss also gelten $\rho^* c^* \int u^*(y^*) (T^* - T_\infty^*) dy^* = \int q_W^* dx^*$, wobei $u^*(y^*)$ das wandparallele Geschwindigkeitsprofil ist. Wegen der zweidimensionalen Anordnung wird hier statt über \hat{A}^* (durchströmte Fläche) und A^* (Wandfläche) nur über y^* bzw. x^* integriert.

Eine Verbesserung des Wärmeüberganges führt über der gesamten Lauflänge zu einer Erhöhung der Wandwärmestromdichte (vgl. (2-1) mit $\Delta T^* = T_W^* - T_\infty^*$) und damit für eine bestimmte Lauflänge x^* zu einer Erhöhung der auf dieser Strecke insgesamt in Form von Wärme übertragenen Energie.

An den Ausführungen zu den vier verschiedenen Fällen wird deutlich, dass eine Verbesserung des Wärmeüberganges sehr unterschiedliche Konsequenzen hat. Es sollte deshalb im konkreten Anwendungsfall genau geprüft werden, ob eine Verbesserung des Wärmeüberganges wirklich von entscheidendem Vorteil ist.

Für die weitere Behandlung unterschiedlicher konvektiver Wärmeübertragungssituationen ist es sehr hilfreich, bestimmte Grenzbetrachtungen anzustellen, weil bestimmte Maßnahme in Richtung dieser Veränderungen gehen und ihre Wirkungen damit besser verstanden werden können. In diesem Sinne soll anschließend diskutiert werden, was in den vier zuvor behandelten Fällen geschieht, wenn

1. die Wärmeleitfähigkeit unendlich groß würde,
2. die Geschwindigkeitsprofile homogen wären, d.h. unabhängig von der Querkordinate einheitliche Werte besitzen (und damit die Haftbedingung an der Wand verletzen) würden.

Beim Übergang von laminaren zu turbulenten Strömungen treten Veränderungen auf, die sowohl „in Richtung“ von 1. als auch von 2. gehen, wie später genauer ausgeführt wird.

6.1.1 Konvektiver Wärmeübergang für $\lambda^* \rightarrow \infty$

Gemäß (5-5) würde im Grenzfall unendlich großer Wärmeleitfähigkeit des Fluides

- bei vorgegebenem Temperaturgradienten eine unendlich große Wandwärmestromdichte auftreten,
- bei vorgegebener Wandwärmestromdichte kein Temperaturgradient erforderlich sein, um den entsprechenden Energietransport zu ermöglichen. Die Temperatur bliebe dann konstant und es würde keine Entropie erzeugt, weil keine Temperaturgradienten vorhanden wären.

Als Konsequenz daraus würden in den vier Standardfällen für $\lambda^* \rightarrow \infty$ folgende Veränderungen auftreten, wenn weiterhin die axiale Wärmeleitung in Strömungsrichtung vernachlässigt wird (die für $\lambda^* \rightarrow \infty$ aber an Bedeutung gewinnen würde), vgl. dazu Bild 6.1:

Kanal, $\dot{q}_W^ = \text{const.}$*

Wand- und Mitteltemperaturen wären gleich, an jeder Stelle x^* würde ein über den Querschnitt konstantes Temperaturprofil $T^* = T_{km}^*$ vorliegen; diese Temperatur würde (wie zuvor schon T_{km}^*) linear mit x^* ansteigen.

Ebene Wand, $\dot{q}_W^ = \text{const.}$*

Die Wand würde sich nicht erwärmen und die bis zu einer Stelle x^* übertragene innere Energie würde sich bis $y^* \rightarrow \infty$ im Fluid ausbreiten; die Temperaturgrenzschicht (Dicke δ_T^*) würde über alle Grenzen wachsen.

Kanal, $T_W^* = \text{const.}$:

Die kalorische Mitteltemperatur würde direkt bei $x^* = 0$ auf den Wert $T_{\text{km}}^* = T_W^*$ „springen“. Die endliche, zu übertragende Energie $\dot{m}^* c^* (T_W^* - T_\infty^*)$ würde mit einer unendlich großen Wandwärmestromdichte direkt am Kanalbeginn übertragen. (Die Wärmeübertragung wäre „beendet, bevor sie richtig begonnen hätte“).

Ebene Wand, $T_W^* = \text{const.}$:

Es würde unendlich viel Energie übertragen, da die Dicke der Temperaturgrenzschicht über alle Grenzen wachsen würde und der gesamte unbegrenzte Fluidraum über der Wand auf T_W^* aufgeheizt würde.

6.1.2 Konvektiver Wärmeübergang bei homogenen Geschwindigkeitsprofilen

Um die Wirkung homogener Geschwindigkeitsprofile im Vergleich zu real vorliegenden Profilen diskutieren zu können, sollte zunächst noch einmal in Erinnerung gerufen werden, welche Wirkung auftritt, wenn überhaupt eine Strömung vorhanden ist.

In Bild 4.1 war die Wirkung einer wandparallelen Strömung pauschal als „wandparallele Entfernung erwärmten Fluides“ beschrieben worden. Dies soll in Bild 6.2 näher erläutert werden, in dem zwei Fälle gegenübergestellt sind.

Im Fall (a) liegt keine Strömung vor und die mit \dot{q}_W^* in Form von Wärme übertragene Energie wird durch Wärmeleitung senkrecht zur Wand transportiert. Dazu ist ein konstanter Temperaturgradient in y^* -Richtung erforderlich. Jenseits der gestrichelten Linie muss ein Mechanismus vorhanden sein, der die dort übertretende Energie „übernimmt“.

Im Fall (b) liegt eine ganz andere Situation vor, weil die durch Wärmeleitung über die Systemgrenze fließende Energie jetzt auf eine wandparallele Strömung trifft. Diese Strömung wird erwärmt, führt gleichzeitig aber auch die übertragene Energie in Form von innerer Energie wandparallel stromabwärts. Dies ist in Bild 6.2 (b) durch den abnehmenden Betrag der in y^* -Richtung auftretenden Wärmestromdichte angedeutet. Dies muss aus Gründen der Energieerhaltung durch einen entsprechenden wandparallelen konvektiven Transport kompensiert werden. Damit ist gemeint, dass die wandnahen Fluidbereiche aufgeheizt werden, aber auch gleichzeitig die dadurch

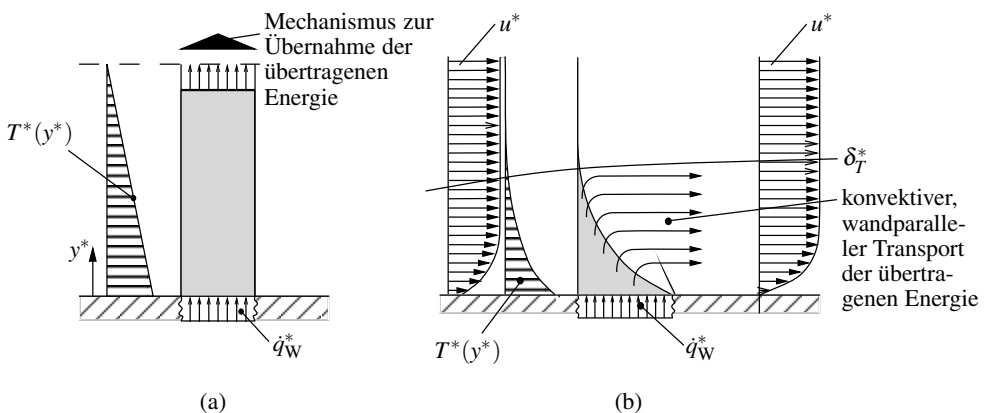


Bild 6.2: Illustration der reinen Wärmeleitung (a) im Vergleich zur konvektiven Wärmeübertragung (b)
 grau unterlegt: Wärmestromdichten senkrecht zur Wand
 δ_T^* : Dicke der Temperaturgrenzschicht

gespeicherte innere Energie auf dem Weg stromabwärts „mitnehmen“. Damit sind Temperaturerhöhungen gegenüber der Wandtemperatur auf wandnahe Bereiche, die sog. *Temperaturgrenzschichten* mit der Dicke δ_T^* , begrenzt.

Dieser Mechanismus ist umso wirkungsvoller, je größer der Massenstrom in unmittelbarer Wandnähe ist, der dafür zur Verfügung steht. Bei geringem Massenstrom in Wandnähe kann dort nur wenig innere Energie stromabwärts geführt werden. Der größte Teil der an der Wand übertragenen Energie muss deshalb zunächst senkrecht zur Wand in das Fluid geleitet werden (wobei weiter entfernt liegende Schichten entsprechend aufgeheizt werden), bevor ein wandparalleler Transport in stromabwärtige Richtung erfolgen kann.

Je „völliger“ also ein wandparalleles Geschwindigkeitsprofil ist, umso effektiver ist der wandparallele Transport innerer Energie bereits unmittelbar nachdem sie durch Wärmeleitung in die Strömung gelangt ist. Als Folge davon ist die Dicke der Temperaturgrenzschicht dann entsprechend geringer, was stets zu einem verbesserten Wärmeübergang führt. Bei $T_W^* = \text{const}$ entstehen dann größere Temperaturgradienten an der Wand, d. h. größere Wandwärmestromdichten; bei $\dot{q}_W^* = \text{const}$ ergeben sich verringerte treibende Temperaturdifferenzen. Beides erhöht den Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha^* = \dot{q}_W^* / \Delta T^*$.

Für den Wärmeübergang liegen damit optimale Verhältnisse vor, wenn die Geschwindigkeit zur Wand hin nicht abnimmt, wenn also ein homogenes Geschwindigkeitsprofil vorliegt. Dies ist zunächst „nur“ eine Modellvorstellung, weil in der Realität stets die Haftbedingung gilt (solange eine Kontinuumsströmung vorliegt). Dieser gedachte Grenzfall kann aber mehr oder weniger gut angenähert auftreten.

Folgende Maßnahmen führen zu völligeren Geschwindigkeitsprofilen und damit auch zu verbesserten Wärmeübergängen:

- Erhöhung der Geschwindigkeit bei der Überströmung von Wänden (\rightarrow geringere Grenzschichtdicken),
- Übergang von laminaren zu turbulenten Strömungen (dabei ist aber die Veränderung der Profilform zu völligeren Profilen nicht der alleinige Mechanismus für die Verbesserung des Wärmeüberganges),
- Absaugen von wandnahe Fluid durch eine poröse Wand.

6.1.3 Konvektiver Wärmeübergang bei turbulenten Strömungen

Turbulente Strömungen zeigen im Vergleich zu entsprechenden laminaren Strömungen einen deutlich verbesserten Wärmeübergang, weil durch die Turbulenz beide Effekte eintreten, die zuvor als positiv für den Wärmeübergang beschrieben worden waren:

- Turbulente Strömungen weisen eine deutlich höhere (effektive) Wärmeleitfähigkeit auf als vergleichbare laminare Strömungen.
- Turbulente Geschwindigkeitsprofile sind deutlich „völliger“ als vergleichbare laminare Profile.

Beides ist auf die Wirkung der turbulenten Schwankungsbewegungen in der Strömung zurückzuführen. Die wesentlichen Auswirkungen der Schwankungsbewegungen auf den Wärmeübergang sollen im Folgenden kurz skizziert werden.

Turbulente Schwankungsbewegungen in einer Strömung führen zu einer erheblichen Intensivierung des Austausches von Impuls und innerer Energie benachbarter Fluidteilchen. Dieser Austausch findet zwischen Fluidbereichen statt, in denen beide Größen ungleich groß sind. Während

bei laminaren wandparallelen Strömungen ein Impulstransport und ein Transport innerer Energie jeweils quer zur Hauptströmungsrichtung (d. h. quer zur Wand) ausschließlich aufgrund molekularer Transportmechanismen erfolgt, tritt bei turbulenten Strömungen ein zweiter sehr wirksamer Mechanismus hinzu. Turbulente Schwankungsbewegungen führen zu einer lokalen Vermischung und damit zu einem erheblichen Quertransport von Impuls und Energie.

Zu den molekularen Transportkoeffizienten Viskosität η^* (für den Impuls) und Wärmeleitfähigkeit λ^* (für die innere Energie) treten deshalb jeweils turbulenzbedingte, zusätzliche Koeffizienten hinzu. In diesem Sinne gilt

$$\eta^* \rightarrow (\eta^* + \eta_t^*) \equiv \eta_{\text{eff}}^* \quad (6-1)$$

$$\lambda^* \rightarrow (\lambda^* + \lambda_t^*) \equiv \lambda_{\text{eff}}^* \quad (6-2)$$

beim Übergang von einer laminaren zu einer turbulenten Strömung. Dabei gelten für die neu hinzutretenden Transportkoeffizienten η_t^* und λ_t^* drei entscheidende Eigenschaften:

- Sie stellen *keine* Stoffwerte wie η^* und λ^* dar, sondern sind sog. *Strömungsgrößen*, die Ausdruck der Turbulenzwirkung auf den Impuls- und Energietransport sind. Diese Größen sind so definiert, dass sie die Wirkung der Turbulenz auf eine Weise beschreiben „als hätte das Fluid eine um diesen Betrag erhöhte Viskosität bzw. Wärmeleitfähigkeit“. Sie werden deshalb auch als *scheinbare Transportkoeffizienten* bezeichnet. Damit wird klar, dass η_t^* und λ_t^* im konkreten Fall nur bestimmt werden können, wenn man die Wirkung der Turbulenz auf den Impuls- und Energietransport kennt.
- η_t^* und λ_t^* sind in weiten Bereichen des Strömungsfeldes zahlenmäßig um ein Vielfaches größer als η^* bzw. λ^* .
- Während η^* und λ^* (bis auf geringfügige Abhängigkeiten vom Druck und von der Temperatur) konstante Stoffwerte des Fluides sind, zeigen die Strömungsgrößen η_t^* und λ_t^* eine starke Abhängigkeit vom Wandabstand, weil die Turbulenz (abhängig vom Wandabstand) in einer Strömung sehr unterschiedlich ausgeprägt ist. Für den Wärmeübergang ist dabei entscheidend, dass η_t^* und λ_t^* an der Wand selbst null sind, weil die Wand sehr wandnahe Schwankungsbewegungen stark dämpft und an der Wand selbst keine Strömung und damit auch keine Schwankungen vorliegen.

Damit ergeben sich prinzipiell die in Bild 6.3 gezeigten Verläufe der Transportkoeffizienten. Da diese Koeffizienten die Form des Geschwindigkeits- bzw. Temperaturprofils (jeweils als Funktion des Wandabstandes y^*) bestimmen, treten in diesen Profilen zwei Bereiche auf, was als *Zweischichtenstruktur* turbulenter, wandgebundener Profile bezeichnet wird. In diesem Sinne gibt es folgende zwei Bereiche:

① Wandschicht:

In diesem wandnächsten Bereich spielen sowohl die molekularen als auch die turbulenten Austauschkoeffizienten bei der Bestimmung der Profilform eine Rolle. Innerhalb dieser Schicht kann noch eine sog. *viskose Unterschicht* identifiziert werden, in der ausschließlich der molekulare Austausch wirksam ist (im Bild 6.3 als ①a gekennzeichnet).

② Außenschicht:

Bei größeren Wandabständen dominiert der turbulente Austauschkoeffizient (η_t^* bzw. λ_t^*) und die molekularen Koeffizienten können in ihrer Wirkung vernachlässigt werden.

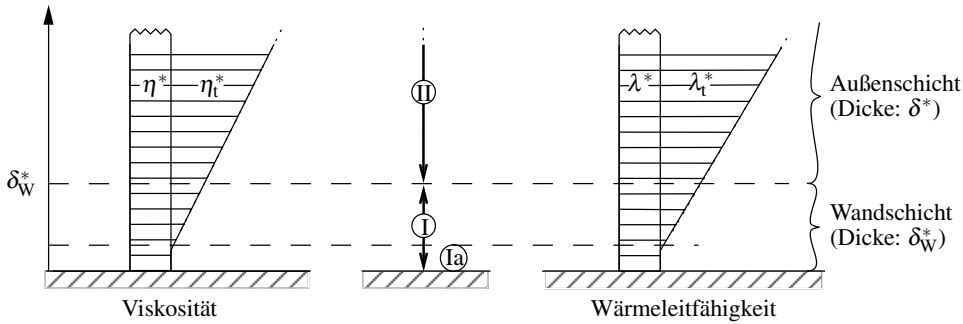


Bild 6.3: Prinzipieller Verlauf der Transportkoeffizienten, Aufteilung in Wand- und Außenschicht

η^* , λ^* : molekulare Koeffizienten

η_t^* , λ_t^* : turbulente (scheinbare) Koeffizienten

horizontal schraffiert: effektive Koeffizienten

An dieser Stelle kann nur die prinzipielle Wirkung der Turbulenzbewegung auf die Strömung und damit auch auf den Wärmeübergang beschrieben werden. Details einer Turbulenzmodellierung müssen der entsprechenden Spezialliteratur entnommen werden¹. Die im Bild 6.3 gezeigten Verhältnisse sind aber entscheidend für den turbulenten konvektiven Wärmeübergang. Bestimmte Parameterabhängigkeiten beim turbulenten Wärmeübergang (gegenüber dem laminaren Fall) sind nur vor dem Hintergrund der in Bild 6.3 skizzierten Verhältnisse erklärbar. In diesem Zusammenhang sind dabei folgende Aspekte von besonderer Bedeutung:

- Die Wandschichtdicke δ_w^* ist erheblich kleiner als die Dicke der Außenschicht δ^* . Oftmals wird δ_w^* nur einen Bruchteil eines Millimeters betragen. Trotzdem ist diese Schicht von entscheidender Bedeutung, weil sich die Übertragungsprozesse an der Wand abspielen.
- Das Verhältnis δ_w^*/δ^* der Dicken beider Schichten zueinander ist für eine bestimmte Strömungsform nicht konstant, sondern eine Funktion der Reynolds-Zahl $Re = \rho^* u^* L^* / \eta^*$, s. Tab. 3.2. Dabei gilt insbesondere

$$\frac{\delta_w^*}{\delta^*} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad Re \rightarrow \infty, \quad (6-3)$$

wobei δ^* die Dicke der Außenschicht beschreibt.

- Die Wandschichtdicken δ_w^* für das Geschwindigkeits- und das Temperaturprofil sind nur für Prandtl-Zahlen $Pr = \eta^* c_p^* / \lambda^*$ in der Nähe von Eins (wie z. B. bei Luft) etwa gleich groß, so wie dies in Bild 6.3 eingezeichnet ist.

Für $Pr \rightarrow 0$ (z. B. bei flüssigen Metallen) ist die Wandschicht des Geschwindigkeitsprofils sehr viel kleiner als diejenige des Temperaturprofils, für $Pr \rightarrow \infty$ (z. B. bei Ölen) hingegen sehr viel größer. Damit entstehen in diesen Grenzfällen komplizierte Mehrschichtenstrukturen, deren physikalische Bedeutung besonders für $Pr \rightarrow 0$ bis heute noch nicht vollständig aufgeklärt werden konnte.

¹ z. B. : Speziale, C. G.; So, R. M. C. (1998): *Turbulence Modeling and Simulation in Fluid Dynamics* (Ed. Johnson, R. W.), CRC Press, Boca Raton

Die generelle Wirkung der speziellen Verhältnisse bei den Transportkoeffizienten turbulenter Strömungen in Bezug auf die Verbesserung des Wärmeüberganges ist zweifach:

- Sie führt zu „völligen“ Geschwindigkeitsprofilen, weil die effektive Viskosität *mit dem Wandabstand zunimmt*. Für die in der Wandschicht in erster Näherung konstante Schubspannung gilt $\tau^* = (\eta^* + \eta_t^*) \partial \bar{u}^* / \partial y^*$, wobei \bar{u}^* die zeitlich gemittelte Geschwindigkeitskomponente parallel zur Wand ist. Da die Geschwindigkeit insgesamt, ausgehend vom Wert $\bar{u}^* = 0$ an der Wand (Haftbedingung bei $y^* = 0$) nur auf $\bar{u}^* = u_\infty^*$, d. h. auf den Wert außerhalb der Wandgrenzschicht anwächst, ist für die Form des Geschwindigkeitsprofils entscheidend, wie die Geschwindigkeitsgradienten $\partial \bar{u}^* / \partial y^*$ verteilt sind. Bei turbulenten Strömungen sind diese nahe der Wand groß, weil dort die effektive Viskosität $(\eta^* + \eta_t^*)$ klein ist, und weiter entfernt klein, weil dort die effektive Viskosität groß ist. Dies führt zu völligen Profilen mit großen Wandgradienten $\partial \bar{u}^* / \partial y^*$ (und deshalb auch großen Wandschubspannungen bei turbulenten Strömungen).
- Sie führt zu großen Werten der (effektiven) Wärmeleitfähigkeit. Da Nußelt-Zahlen (als Maß für die Qualität von Wärmeübergängen, s. Tab. 3.2) mit der molekularen Wärmeleitfähigkeit λ^* und nicht mit einer (großen) effektiven Wärmeleitfähigkeit λ_{eff}^* gebildet werden, nehmen die Nußelt-Zahlen bei turbulenten Strömungen große Werte an. Dies ist Ausdruck des guten Wärmeüberganges bei turbulenten Strömungen. Mit $\alpha^* = \text{Nu} \lambda^* / L^*$ sind dann auch die Wärmeübergangskoeffizienten α^* bei turbulenten Strömungen deutlich größer als bei vergleichbaren laminaren Strömungen.

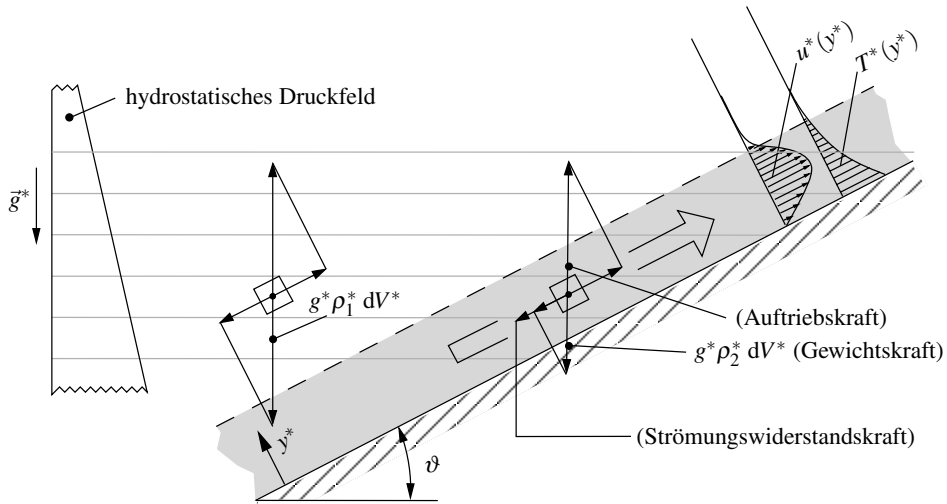
6.1.4 Wärmeübergang bei natürlicher Konvektion entlang von Wänden

Bei den bisher behandelten vier unterschiedlichen Fällen des konvektiven Wärmeüberganges (vgl. Bild 6.1) wurde davon ausgegangen, dass eine Strömung *vorliegt*, deren Wirkung auf einen zusätzlich aufgebrachten Wärmeübergang untersucht werden kann. Solche, durch externe Maßnahmen zustande gekommenen Strömungen werden unter dem Begriff der *erzwungenen Konvektion* zusammengefasst.

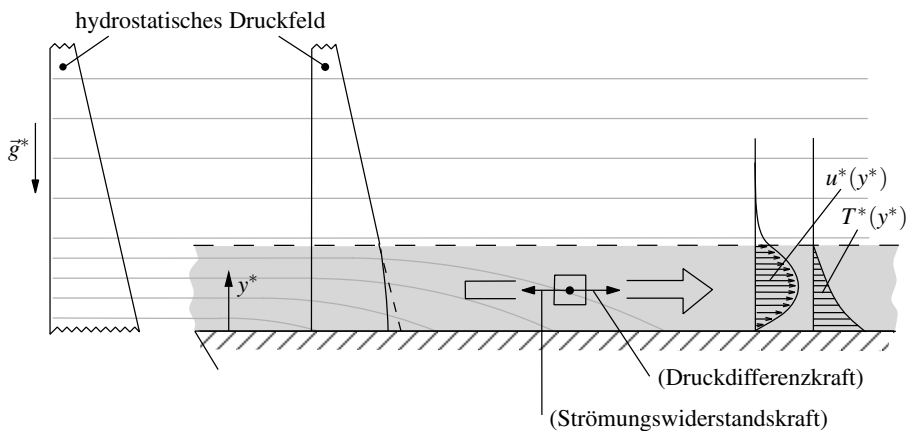
Im Gegensatz dazu kommen sog. *natürliche Strömungen* erst durch einen Wärmeübergang zustande, beeinflussen diesen aber auch wiederum. Es handelt sich dann um gekoppelte Wärmeübergangs- und Strömungsprobleme, die durch Effekte im Zusammenhang mit der Temperaturabhängigkeit der Fluid-Dichte ρ^* entstehen. Dabei müssen für die Strömung entlang von Wänden zwei grundsätzlich verschiedene Fälle unterschieden werden, die in Bild 6.4 bezüglich der entscheidenden Wirkmechanismen erläutert werden.

Bild 6.4 (a) zeigt den häufig auftretenden Fall einer natürlichen Konvektion an geneigten Wänden. Als Sonderfall liegt eine senkrechte Wand vor ($\vartheta = 90^\circ$). Im hellgrau markierten Fluidbereich tritt eine erhöhte Temperatur auf, wenn die Wand wärmer als das umgebende Fluid ist. Da die Dichte von Fluiden (mit wenigen Ausnahmen) bei steigenden Temperaturen abnimmt, ist die Dichte ρ_2^* in diesem Bereich kleiner als die Dichte ρ_1^* im angrenzenden, nicht erwärmten Bereich. Ein Fluidelement im Außenbereich befindet sich in Ruhe und es gilt das Kräftegleichgewicht zwischen der Gewichtskraft $g^* \rho_1^* dV^*$ und der gleich großen, entgegengerichteten Auftriebskraft, die ein Resultat der nicht konstanten Druckverteilung auf der Oberfläche des Volumens dV^* im hydrostatischen Druckfeld ist. Zusätzlich zu diesen, in der Vertikalen wirkenden Kräften sind deren Komponenten parallel zur Wandoberfläche eingezeichnet.

Das Kräftegleichgewicht an einem solchen Fluidelement (gleiches Volumen dV^*), jetzt aber im erwärmten, wandnahen Bereich ist durch die unveränderte Auftriebskraft aber geringere Ge-



(a) direkte natürliche Konvektion an einer geneigten Wand



(b) indirekte natürliche Konvektion an einer horizontalen Wand

Bild 6.4: Die Entstehung natürlicher Konvektion durch die Temperaturabhängigkeit von ρ^* , hier: beheizte Wand

Die dünn ausgezogenen (weitgehend horizontalen) Linien stellen Druck-Isolinien des hydrostatischen Druckfeldes dar.

wichtskraft (beachte: $\rho_2^* < \rho_1^*$) nicht mehr gegeben. Die überwiegende Auftriebskraft sorgt (mit ihrer wandparallelen Komponente) für eine Bewegung des Fluidelementes entlang der Wand. Daraus entsteht eine Strömungsgrenzschicht, gekoppelt mit einer Temperaturgrenzschicht, wie dies im Bild angedeutet ist. Das Kräftegleichgewicht ist dann wieder erfüllt, weil die Widerstandskraft der Strömung als dritte Kraft hinzukommt.

Eine solche *direkte natürliche Konvektion* kommt zustande, solange die Wandneigung ϑ eine hinreichend große Erdbeschleunigungs-Komponente $g^* \sin \vartheta$ zulässt, die zu einer wandparallelen

Bewegung führt.

An gekühlten Wänden kehrt sich die Strömungsrichtung gegenüber dem im Bild gezeigten Fall um, weil eine im wandnahen Bereich *erhöhte* Gewichtskraft durch eine entsprechend entgegengerichtete Widerstandskraft kompensiert werden muss.

Bild 6.4 (b) zeigt die Situation an einer horizontalen Wand, an der dasselbe hydrostatische Druckfeld wie im Fall (a) jetzt eine ganz andere Wirkung hat. Ausgehend von der Vorderkante der Wand entsteht dabei eine Strömung senkrecht zum Erdbeschleunigungsvektor, also *nicht* aufgrund von Auftriebseffekten. Die Skizze in Bild 6.4 (b) zeigt, dass im erwärmten Bereich oberhalb der Platte aufgrund der dort geringeren Dichte im Vergleich zum selben Höhenniveau vor der Wand ein geringerer hydrostatischer Druck herrscht. Druck-Isolinien verlaufen deshalb nicht mehr parallel zur Wand, sondern wie in der Skizze gezeigt, gekrümmt. Dadurch erfährt ein Fluidteilchen in diesem Bereich aber eine Kraft, die von der Vorderkante der Platte weg weist. Diese Kraft kann nur durch die Widerstandskraft auf das bewegte Fluidteilchen kompensiert werden. Die auf diese Weise zustandekommenden Strömungs- und Temperaturgrenzschichten sind im Bild ebenfalls angedeutet. Diese Art der natürlichen Konvektion wird *indirekt* genannt, weil sie auf dem „Umweg“ über einen wandparallelen Druckgradienten und nicht direkt durch Auftriebskräfte entsteht.

6.1.5 Systematik bei konvektiven Wärmeübergängen

Die Erläuterungen in den vorherigen Kapiteln haben gezeigt, dass sowohl die Strömungsform (laminar, turbulent), als auch die geometrischen und thermischen Randbedingungen (Kanal, Wand, $\dot{q}_W^* = \text{const}$, $T_W^* = \text{const}$) einen erheblichen Einfluss auf die physikalischen Vorgänge bei der Wärmeübertragung besitzen. Zusätzlich ist von Bedeutung, ob es sich um eine erzwungene oder eine natürliche Konvektion handelt. Die Vielzahl der Fälle führt zu einer großen Anzahl verschiedener Wärmeübergangsbeziehungen. Im Rahmen des vorliegenden Buches ist eine vollständige Darstellung aller denkbaren Kombinationen von verschiedenen Strömungsformen und Randbedingungen nicht möglich. Neben dem Verweis auf Fälle, die in diesem Buch anschließend behandelt werden, sind deshalb in Tab. 6.1 einige Literaturangaben zusammengestellt, die hier nicht im Detail vorkommende Fälle ausführlich abhandeln.

Bei allen Fällen in dieser Tabelle handelt es sich um Standard-Situationen mit klar definierten, einfachen Randbedingungen. Im konkreten Anwendungsfall werden aber häufig Situationen auftreten, in denen keine dieser Idealisierungen zutrifft. Es gilt dann zu prüfen, ob einzelne Fälle näherungsweise vorliegen, eventuell miteinander kombiniert werden können, oder nur als Anhaltspunkte für eine spezielle Behandlung des Wärmeübergangsproblems im konkreten Fall dienen können. Unter allen Umständen sollte man sich aber stets die physikalischen Zusammenhänge vor Augen führen, weil nur dann eine angemessene Modellierung der u. U. sehr komplexen Vorgänge möglich ist.

6.2 Grundgleichungen zur Beschreibung des konvektiven Wärmeüberganges

Der Wärmeübergang in Form des Wärmeübergangskoeffizienten α^* gemäß (2-1), bzw. der Nusselt-Zahl Nu gemäß (3-4), kann ermittelt werden, wenn in der Umgebung der Wärmeübertragungsfläche die Temperaturverteilung auf eine Weise bekannt ist, dass daraus die Größen $(\partial T^* / \partial y^*)_W$ (Wand-Temperaturgradient, vgl. (5-5)), T_W^* (Wandtemperatur) und T_∞^* (Tempera-

Tabelle 6.1: Überblick über die verschiedenen Fälle konvektiver Wärmeübergänge.

„Kanal“ und „Wand“ stehen hier stellvertretend für Durchströmungs- bzw. Umströmungssituationen, also für Fälle mit begrenzter oder unbegrenzter Fluidmenge in Bezug auf die Wärmeübertragung.

Natürliche Konvektionen in geschlossenen Innenräumen mit Wärmeübergängen an den Seitenwänden oder den Boden- und Deckenflächen sind in der Spezialliteratur zu finden.⁵

¹Wickern, G. (1987), Fortschr.-Ber., VDI-Reihe 7, Nr. 129, VDI-Verlag

²Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 8.4

³wie ² / Kap. 18.4.2

⁴wie ² / Kap. 18.4.3

⁵Müller, U.; Ehrhard, P. (1999): *Freie Konvektion und Wärmeübertragung*, C. F. Müller-Verlag, Heidelberg

Erzwungene Konvektion		
laminar	Kanal, $\dot{q}_W^* = \text{const}$ (Kap. 6.3.2)	Wand, $\dot{q}_W^* = \text{const}$ (Kap. 6.3.1)
	Kanal, $T_W^* = \text{const}$ (Kap. 6.3.2)	Wand, $T_W^* = \text{const}$ (Kap. 6.3.1)
turbulent	Kanal, $\dot{q}_W^* = \text{const}$ (Kap. 6.4.2)	Wand, $\dot{q}_W^* = \text{const}$ (Kap. 6.4.1)
	Kanal, $T_W^* = \text{const}$ (Kap. 6.4.2)	Wand, $T_W^* = \text{const}$ (Kap. 6.4.1)
Natürliche Konvektion		
laminar	geneigte Wand, $\dot{q}_W^* = \text{const}$ (Kap. 6.5)	horizontale Wand, $\dot{q}_W^* = \text{const}$ ¹
	geneigte Wand, $T_W^* = \text{const}$ (Kap. 6.5)	horizontale Wand, $T_W^* = \text{const}$ ²
turbulent	geneigte Wand, $\dot{q}_W^* = \text{const}$ ³	horizontale Wand, $\dot{q}_W^* = \text{const}$ ⁴
	geneigte Wand, $T_W^* = \text{const}$ ³	horizontale Wand, $T_W^* = \text{const}$ ⁴

tur in großem Wandabstand) bestimmt werden können. Die Bestimmung des Temperaturfeldes erfordert prinzipiell die Lösung der Differentialgleichung für die Temperatur.

Diese Differentialgleichung stellt eine Erweiterung der Wärmeleitungsgleichung (5-6) um zusätzliche Effekte dar, die durch das Strömungsfeld hinzukommen. Eine deutliche Vereinfachung dieser Gleichung ergibt sich, wenn unterstellt wird, dass die Abhängigkeiten der darin vorkommenden Stoffwerte ρ^* (Dichte), η^* (Viskosität), λ^* (Wärmeleitfähigkeit) und c_p^* (isobare spezifische Wärmekapazität) von der Temperatur und dem Druck in erster Näherung vernachlässigt werden können (konstante Stoffwerte). Da Gleichungen für verschiedene Anwendungsfälle in unterschiedlichen Koordinatensystemen gelöst werden (kartesische Koordinaten, Zylinderkoordinaten, ...) sollen sie hier in Vektorform angegeben werden. Diese Darstellung ist unabhängig vom Koordinatensystem, kann aber anschließend in ein bestimmtes System „übersetzt“ werden, indem die Vektoroperatoren (div ..., grad ..., ...) für ein bestimmtes Koordinatensystem spezifiziert werden.

6.2.1 Grundgleichungen für konstante Stoffwerte

In Vektorform lautet die sog. *thermische Energiegleichung*¹, für konstante Stoffwerte

$$\rho^* c_p^* \frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} + \underbrace{\vec{v}^* \text{ grad } T^*}_{1.} = a^* \nabla^2 T^* + \underbrace{\Phi^*}_{2.} + \underbrace{\dot{q}_{wQ}^*}_{3.} \quad (6-4)$$

mit drei zusätzlichen Effekten gegenüber (5-6):

1. *Konvektiver Transport innerer Energie*: Da strömende Fluide „Träger“ von innerer Energie sind, wird mit ihrer Bewegung (Strömungsgeschwindigkeit \vec{v}^*) Energie transportiert.
2. *Dissipation mechanischer Energie*: Durch den Dissipationsprozess in strömenden Fluiden wird mechanische in innere Energie verwandelt und trägt damit zur Veränderung des Temperaturfeldes bei.
3. *Wärmequellen bzw. -senken*: Beeinflussung des Temperaturfeldes z. B. durch exotherme oder endotherme chemische Reaktionen.

Gleichung (6-4) stellt eine Teil-Energiegleichung dar, in der nur die *thermische Energie* bilanziert wird. Für diese gilt (anders als für die Gesamtenergie) kein Erhaltungsprinzip. In diesem Sinne stellen die Terme 2. und 3. sog. Quellterme in der Bilanz dar.

In Kapitel 6.2.2 wird erläutert, für welche Zustände die zunächst als konstant unterstellten Stoffwerte gelten, in Kap. 6.2.3 werden Möglichkeiten aufgezeigt, wie die Ergebnisse bezüglich des Einflusses variabler Stoffwerte korrigiert werden können.

Die Lösung von (6-4) zur Bestimmung des Temperaturfeldes ist allerdings erst möglich, wenn das Geschwindigkeitsfeld \vec{v}^* bekannt ist. Dies ist das entscheidende Problem bei der konvektiven Wärmeübertragung, da die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes in den meisten Fällen ein erhebliches Problem darstellt. Besonders bei turbulenten Strömungen, die in technischen Anwendungen fast immer vorliegen, muss ein erheblicher Aufwand getrieben werden, um Strömungen unter dem Einsatz von Turbulenzmodellen mit numerischen Verfahren näherungsweise zu berechnen.²

Die zugrunde liegenden Gleichungen für das Strömungsfeld lauten in Vektorform³

$$\text{div } \vec{v}^* = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}), \quad (6-5)$$

$$\rho^* \left(\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial \tau^*} + (\vec{v}^* \text{ grad }) \vec{v}^* \right) = \rho^* \vec{g}^* - \text{grad } p^* + \text{Div } 2 \eta^* \mathbf{E}^* \quad (\text{Impulsgleichung}). \quad (6-6)$$

Dabei stellt \vec{g}^* den Erdbeschleunigungsvektor, p^* den Druck und \mathbf{E}^* den sog. Deformationsgeschwindigkeitstensor, der verschiedene Geschwindigkeitsgradienten enthält, dar.

Mit (6-4) ÷ (6-6) stehen 5 Gleichungen zur Verfügung (beachte: (6-6) ist eine Vektorgleichung, die drei Komponenten-Gleichungen umfasst) mit deren Hilfe prinzipiell die fünf Größen T^* , p^* , u^* , v^* , w^* ermittelt werden können, wobei der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}^* = (u^*, v^*, w^*)$ ist. Diese Gleichungen ermöglichen die Bestimmung der Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder

¹ Herwig, H. (2002): *Strömungsmechanik*, Springer-Verlag, Berlin / Kap. 4.7

² Herwig, H. (2002): *Strömungsmechanik*, Springer-Verlag, Berlin / Kap. 12

³ Herwig, H. (2002): *Strömungsmechanik*, Springer-Verlag, Berlin / Kap. 4

- für laminare Strömungen,
- für turbulente Strömungen im Sinne der sog. direkten numerischen Simulation (DNS)¹,
- für turbulente Strömungen im Sinne zeitlich gemittelter Werte. Dafür müssen diese Gleichungen einer Zeitmittelung unterzogen und um Turbulenzmodell-Gleichungen erweitert werden.²

Im vorliegenden Buch können die Methoden zur numerischen Lösung der zuvor aufgestellten Gleichungen nicht behandelt werden. Für diese numerischen Lösungen (CFD: computational fluid dynamics) sei deshalb auf die Spezialliteratur verwiesen.³ Die in den nachfolgenden Kapiteln vorgestellten Ergebnisse folgen prinzipiell aus diesen Gleichungen. Wo dies möglich ist und zum Verständnis beiträgt, wird jeweils erläutert, um welchen Spezialfall der allgemeinen Grundgleichungen es sich handelt. Dafür ist es sinnvoll, die Gleichungen auch in ihrer dimensionslosen Form anzugeben, da dann erkennbar wird, welche dimensionslosen Kennzahlen in ihnen auftreten.

Mit einer Entdimensionierung gemäß Tab. 6.2 folgt (ohne Wärmequellen \dot{q}_{WQ}^*):

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \vec{v} \text{grad} T = (\text{RePr})^{-2} \nabla^2 T + \text{Ec} \Phi \quad (6-7)$$

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (6-8)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{v} = \text{Fr}^{-2} \vec{g} - \text{grad} p + \text{ReDiv} 2\mathbf{E} \quad (6-9)$$

mit den Kennzahlen Re, Pr, Ec, Fr gemäß Tab. 3.2. Bei natürlicher Konvektion tritt die Grashof-Zahl Gr als $\sqrt{\text{Gr}}$ an die Stelle der Reynolds-Zahl, weil u_B^* durch $(g^* L^* \beta^* \Delta T^*)^{1/2}$ ersetzt wird.

6.2.2 Bezugszustand für konstante Stoffwerte

Die Annahme konstanter Stoffwerte stellt bzgl. der Temperaturabhängigkeit von Stoffwerten immer dann eine Näherung dar, wenn eine nicht-isotherme Situation vorliegt, was bei Wärmeübergangsvorgängen naturgemäß der Fall ist. Dann stellt sich aber unmittelbar die Frage, bei welchen Temperaturen die einheitlichen Zahlenwerte der Stoffwerte bestimmt werden sollen. Bild 6.1 zeigt, dass in den verschiedenen Situationen durchaus sehr unterschiedliche Temperaturen vorkommen. Man muss sich aber jeweils für eine Temperatur entscheiden, bei der die Zahlenwerte für ρ^* , η^* , λ^* und c_p^* im Sinne konstanter Stoffwerte bestimmt werden. Diese Temperatur soll im Folgenden *Bezugstemperatur* genannt werden.

Tabelle 6.2: Entdimensionierung der Variablen in den Grundgleichungen.

u_B^* , p_B^* , T_B^* : Bezugswerte

τ	\vec{v}	p	\vec{g}	T	Φ	E
$\frac{\tau^*}{L^*/u_B^*}$	$\frac{\vec{v}^*}{u_B^*}$	$\frac{p^* - p_B^*}{\rho^* u_B^{*2}}$	$\frac{\vec{g}^*}{u_B^{*2}/L^*}$	$\frac{T^* - T_B^*}{\Delta T^*}$	$\frac{\Phi^*}{\rho^* u_B^{*3}/L^*}$	$\frac{E^*}{u_B^*/L^*}$

¹ Herwig, H. (2004): *Strömungsmechanik A-Z*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Stichwort: DNS

² Herwig, H. (2002): *Strömungsmechanik*, Springer-Verlag, Berlin / Kap. 5

³ Z. B. Ferziger, J. H.; Peric, J. (2002): *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin

Prinzipiell ist die Wahl einer solchen Bezugstemperatur weitgehend willkürlich, man wird sie aber sinnvollerweise aus dem vorkommenden Temperaturbereich innerhalb eines Problems auswählen. Wenn z. B., wie beim Wärmeübergang an der ebenen Wand, Temperaturen zwischen T_∞^* und T_W^* vorkommen, so könnten diese beiden Temperaturen als Bezugstemperaturen dienen, es wäre aber auch sinnvoll $(T_\infty^* + T_W^*)/2$ zu wählen und zu hoffen, dass sich bei einer „mittleren“ Temperatur gewisse Fehler im Zusammenhang mit der Annahme konstanter Stoffwerte kompensieren.

Da mit unterschiedlicher Wahl der Bezugstemperatur Fehler „gleicher Größenordnung“ verbunden sind, soll im Folgenden als „Voreinstellung“ gelten, dass bei Umströmungsproblemen die Temperatur der ungestörten Zuströmung T_∞^* und bei Durchströmungsproblemen die Temperatur zu Beginn der Wärmeübertragung T_0^* (bei hydraulisch ausgebildeter Strömung) als Bezugstemperatur gewählt werden. Abweichungen von dieser Vereinbarung werden jeweils explizit erwähnt (weil z. B. eine bestimmte Endbeziehung, die aus der Literatur übernommen wird, mit einer anderen Wahl der Bezugstemperatur zustande gekommen ist).

In diesem Zusammenhang muss lediglich eine spezielle Situation gesondert betrachtet werden: Der Wärmeübergang bei Durchströmungen mit $\dot{q}_W^* = \text{const.}$ Bild 6.1 zeigt im linken oberen Teilbild, dass die kalorische Mitteltemperatur und die Wandtemperatur linear mit der Lauflänge ansteigen und damit sehr große Unterschiede zur Temperatur im Eintrittsquerschnitt entstehen können. Damit bleibt der Fehler für große Lauflängen aber nicht begrenzt, da die aktuellen Stoffwerte immer mehr von denjenigen abweichen, die bei der Eintrittstemperatur als konstante Stoffwerte gebildet worden sind. In diesem Fall wird eine gleitende Bezugstemperatur eingeführt, indem zwar konstante Stoffwerte unterstellt werden, die Zahlenwerte aber für jeden Kanalquerschnitt an der entsprechenden Stelle x^* (mit der dort vorliegenden kalorischen Mitteltemperatur) gebildet werden. Für endliche Lauflängen ist dann eine Integration über die x^* -abhängigen Ergebnisse erforderlich. Da auf diese Weise ein Teilaspekt variabler Stoffwerte berücksichtigt wird, spricht man dann von der Näherungsannahme *quasi-konstanter Stoffwerte*.

6.2.3 Berücksichtigung variabler Stoffwerte

Der Tatsache, dass die Stoffwerte (von Reinstoffen) von der Temperatur und vom Druck abhängen, kann auf zwei grundsätzlich verschiedenen Wegen Rechnung getragen werden:

- durch die vollständige Berücksichtigung dieser Abhängigkeiten in den Grundgleichungen zur Lösung eines bestimmten Wärmeübertragungsproblems. Die dort auftretenden Stoffwerte werden dann mit ihrer Abhängigkeit von der Temperatur und vom Druck als fluidspezifische Werte eingeführt.
- durch die näherungsweise Korrektur von Ergebnissen für konstante Stoffwerte im Hinblick auf den Einfluss der tatsächlich vorhandenen Abhängigkeit der Stoffwerte von T^* und p^* .

Häufig reicht es aus, den Einfluss variabler Stoffwerte nachträglich (näherungsweise) in den Lösungen für konstante Stoffwerte aufzunehmen. Dazu haben sich zwei Methoden bewährt, die bzgl. der Korrektur von Wärmeübergangsergebnissen (in Form von Nußelt-Zahlen) kurz erläutert werden sollen.

Stoffwertverhältnis-Methode

Die Nußelt-Zahl eines bestimmten Wärmeübertragungsproblems, die als Nu_{cp} unter der Annahme konstanter Stoffwerte bestimmt worden ist (cp: constant properties), wird mit einem Faktor

F_{SVM} multipliziert und ergibt dann näherungsweise das Ergebnis unter Berücksichtigung variabler Stoffwerte. Dabei gilt

$$\text{Nu} = F_{\text{SVM}} \text{Nu}_{\text{cp}} \quad \text{mit} \quad F_{\text{SVM}} = \prod_i \left[\frac{\alpha_i^*(T_1^*)}{\alpha_i^*(T_2^*)} \right]^{m_{\alpha_i}} \quad (6-10)$$

Mit α_i^* werden alle Stoffwerte ρ^*, η^*, \dots erfasst, die im betrachteten Problem vorkommen. Die Temperaturen T_1^* und T_2^* sind zwei verschiedene charakteristische Temperaturen eines Problems (z. B. T_{km}^* und T_{W}^* bei der Kanalströmung). Von der konkreten Wahl der beiden Temperaturen T_1^* und T_2^* hängt ab, welche Zahlenwerte die Exponenten m_{α_i} in dieser zunächst rein empirischen Methode besitzen. Statt die Exponenten für verschiedene Strömungen durch einen Vergleich von (6-10) mit Ergebnissen unter vollständiger Berücksichtigung variabler Stoffwerte zu ermitteln, können diese auch mit Hilfe asymptotischer Betrachtungen (systematische Entwicklung der Gleichungen nach einem Parameter, der die Stärke der Wärmeübertragung behandelt) gefunden werden.¹

Referenztemperatur-Methode

Die Nußelt-Zahl-Beziehung eines bestimmten Wärmeübertragungsproblems, die unter der Annahme konstanter Stoffwerte ermittelt worden ist, wird beibehalten. Die Stoffwerte in dieser Beziehung werden aber nicht bei der anfangs gewählten Bezugstemperatur T_{B}^* für konstante Stoffwerte gebildet, sondern bei einer neuen, zunächst unbekannten sog. *Referenztemperatur* T_{R}^* . Diese muss so gewählt werden, dass die ursprünglich erhaltene Beziehung (gültig für konstante Stoffwerte bei T_{B}^*) jetzt die Verhältnisse unter Berücksichtigung variabler Stoffwerte beschreibt.

Wiederum mit zwei verschiedenen Temperaturen T_1^* und T_2^* eines Problems gilt es also, die *richtige* Referenztemperatur

$$T_{\text{R}}^* = T_1^* + j(T_2^* - T_1^*) \quad (6-11)$$

zu bestimmen, d. h. den „richtigen“ Faktor j zu finden. Dies kann wiederum im Sinne einer empirischen Methode erfolgen, indem j aus dem Vergleich mit Ergebnissen unter Berücksichtigung variabler Stoffwerte ermittelt wird, oder unter Zuhilfenahme asymptotischer Überlegungen (wie bei der Stoffwertverhältnis-Methode). Zu verschiedenen Strömungen gehören unterschiedliche Werte von j , die (wie die Exponenten bei der Stoffwertverhältnis-Methode) zusätzlich eine Funktion der Prandtl-Zahl sind.

Sowohl die Exponenten m_{α_i} für die Stoffwertverhältnis-Methode als auch die Faktoren j für die Referenztemperatur-Methode sind als vertafelte Werte in der Literatur zu finden.²

6.3 Erzwungene Konvektion, laminare Strömung

Wie bereits in Kap. 6.1 ausgeführt worden war, sollte grundsätzlich danach unterschieden werden, ob die Wärmeübertragung an einem umströmten Körper stattfindet (prinzipiell unbegrenzte Fluidmenge) oder ob sie im Zusammenhang mit der Durchströmung von Kanälen (und damit bei einer begrenzten Fluidmenge) auftritt. In beiden Fällen entscheidet die Reynolds-Zahl im Vergleich zur problemspezifischen kritischen Reynolds-Zahl darüber, ob eine laminare ($\text{Re} < \text{Re}_{\text{krit}}$) oder eine turbulente ($\text{Re} > \text{Re}_{\text{krit}}$) Strömung vorliegt. Bei der Umströmung liegen häufig hohe

¹ zu Details dieser Vorgehensweise, s.: Herwig, H. (1985): *Asymptotische Theorie zur Erfassung des Einflusses variabler Stoffwerte auf den Impuls- und Wärmeübergang*, VDI-Fortschritt-Berichte, Reihe 7, Nr. 93, VDI-Verlag, Düsseldorf

² z. B. in: Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig

Reynolds-Zahlen vor, so dass die Strömung einen sog. *Grenzschichtcharakter* besitzt. Dann wird das Temperaturfeld nur in unmittelbarer Wandnähe durch den Wärmeübergang beeinflusst. Da diese Situation auch im Einlaufbereich von Kanälen vorliegt, soll dieser Fall des Wärmeüberganges bei Körperumströmung zunächst behandelt werden.

6.3.1 Wärmeübergang bei Körperumströmungen, laminar

Der Charakter des Strömungsfeldes wird entscheidend durch die Reynolds-Zahl

$$\text{Re} = \frac{\rho^* u_B^* L^*}{\eta^*} = \frac{u_B^* L^*}{\nu^*} \quad (6-12)$$

bestimmt. Für Reynolds-Zahlen $\text{Re} < \text{Re}_{\text{krit}}$ liegen laminare Strömungen vor. Für eine längs überströmte Platte der Länge L^* gilt z. B. $\text{Re}_{\text{krit}} \approx 5 \cdot 10^5$. Von besonderem Interesse sind die beiden Grenzfälle kleiner und großer Reynolds-Zahlen, da dann jeweils eine spezielle physikalische Situation vorliegt:

$\text{Re} \rightarrow 0$:

Für die sog. *schleichenden Strömungen* spielen die Trägheitskräfte in der Strömung keine Rolle. Dies führt zu einer erheblichen Vereinfachung bei der Beschreibung des Strömungsfeldes und als Folge davon auch bei der Beschreibung des Temperaturfeldes. Für Wärmeübergänge bei schleichenden Strömungen sei auf die Literatur verwiesen.¹

$\text{Re} \rightarrow \infty$:

Wie bereits erwähnt, liegt in diesem Grenzfall eine Strömung mit *Grenzschichtcharakter* vor, was nachfolgend genauer beschrieben wird.

Wärmeübergänge für Strömungen mit Reynolds-Zahlen im mittleren Bereich, von der sog. „Größenordnung Eins“ (geschrieben als $\text{Re} = O(1)$), erfordern die Lösung der vollständigen Grundgleichungen (6-4) ÷ (6-6) und können in der Regel nur mit numerischen Verfahren (oder experimentell) ermittelt werden.

Bei hohen Reynolds-Zahlen liegt eine Situation vor, die prinzipiell bereits in Bild 6.2 (b) skizziert worden ist. Danach besteht ausgehend von einer geometrischen „Vorderkante“ oder einem „Staupunkt“ an einem sog. stumpfen Körper die in Bild 6.5 genauer erläuterte Strömungs- und Wärmeübergangssituation.

Aufgrund der sog. *Haftbedingung* ist die Geschwindigkeit an der Wand null und wächst in einer sehr dünnen Schicht (der Strömungsgrenzschicht) auf einen weitgehend konstanten Wert in der Außenströmung an. Die Temperatur verhält sich ähnlich, d. h., nennenswerte Temperaturgradienten liegen nur in einer sog. *Temperaturgrenzschicht* der Dicke δ_T^* vor. Deren Zustandekommen ist bereits in Kap. 6.1.2 erläutert worden.

Eine genauere Analyse der physikalischen Vorgänge führt zu folgenden wichtigen Aussagen über die laminaren Strömungs- und Temperaturgrenzschichten.²

- δ^* und δ_T^* sind proportional zu $\text{Re}^{-1/2}$, d. h., Grenzschichten werden für wachsende Reynolds-Zahlen stets dünner. Im Grenzfall $\text{Re} = \infty$ ist ihre Dicke formal null, was einen sog. *singulären Grenzfall* darstellt. Dies ist aber nur ein mathematisch interessanter Grenzfall, weil reale Strömungen stets endliche Reynolds-Zahlen aufweisen.

¹ z. B.: Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 10.4

² Ausführliche Darstellungen z. B. in:

Schlichting, H.; Gersten, K. (2006): *Grenzschicht-Theorie*, 10. Aufl., Springer-Verlag, Berlin

Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 7

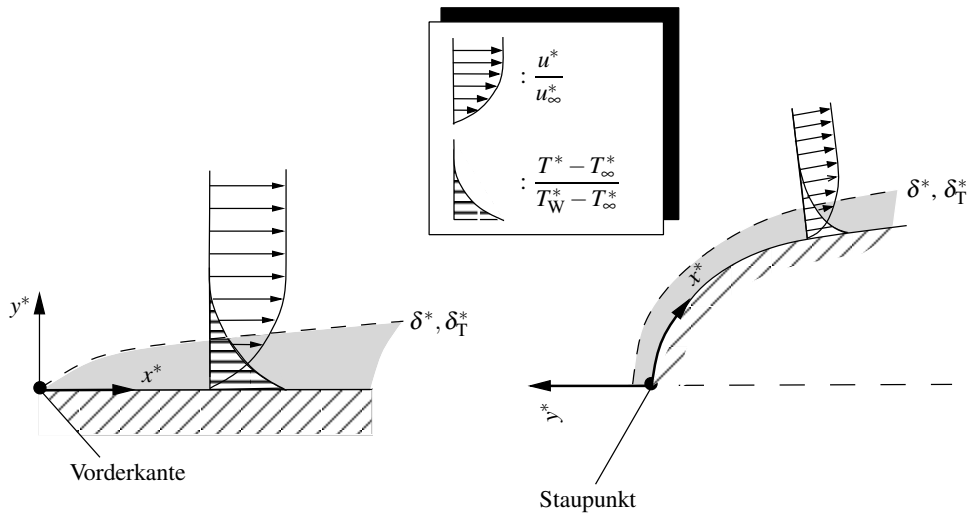


Bild 6.5: Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung in laminaren Grenzschichten bei erzwungener Konvektion ($Pr \approx 1$), die Dicken δ^* und δ_T^* sind charakteristische Dicken für die Grenzschichten, sie markieren nicht notwendigerweise den „Rand“ der Grenzschichten

u_∞^* : Bezugsgeschwindigkeit

T_∞^* : Temperatur in größerem Wandabstand

δ^* : Dicke der Strömungsgrenzschicht

δ_T^* : Dicke der Temperaturgrenzschicht

Das Koordinatensystem folgt der Wand, Krümmungseinflüsse können im Rahmen der einfachen Grenzschichttheorie vernachlässigt werden.

- δ^* und δ_T^* steigen in der Regel mit der Lauflänge x^* an. Für eine ebene Platte z. B. gilt $\delta^* \sim \sqrt{x^*}$ und $\delta_T^* \sim \sqrt{x^*}$.
- δ^* und δ_T^* sind nur für Prandtl-Zahlen $Pr \approx 1$ etwa gleich groß. Für extreme Prandtl-Zahlen gilt

$$\frac{\delta^*}{\delta_T^*} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad Pr \rightarrow 0; \quad \frac{\delta^*}{\delta_T^*} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad Pr \rightarrow \infty$$

Sehr kleine Prandtl-Zahlen liegen z. B. bei flüssigen Metallen vor, sehr große Prandtl-Zahlen bei Ölen.

Für große Reynolds-Zahlen können die Grundgleichungen (6-4) ÷ (6-6) bzw. (6-7) ÷ (6-9) im Sinne der Grenzschichttheorie erheblich vereinfacht werden. Ein entscheidender Aspekt ist dabei, dass es gelingt, die Reynolds-Zahl durch eine Koordinatentransformation formal zu beseitigen und gegenüber (6-7) ÷ (6-9) vereinfachte Gleichungen herzuleiten. Die anschließenden Lösungen gelten dann für alle großen Reynolds-Zahlen. Der Re-Einfluss taucht explizit erst wieder nach der Rücktransformation in die physikalischen Variablen auf. Die Ergebnisse gelten formal für

$Re \rightarrow \infty$, da laminare Strömungen aber nur für $Re < Re_{krit}$ vorliegen, haben sie nur für diesen begrenzten Reynolds-Zahlen Bereich eine physikalische Bedeutung. Weil die transformierte Koordinate $\hat{y} = (y^*/L^*) Re^{1/2}$ lautet, tritt in den Ergebnissen für laminare Grenzschichten nach der Rücktransformation der Faktor $Re^{1/2}$ auf.

Aus den Lösungen der laminaren Grenzschichtgleichungen¹ (Gleichungen (6-7)÷(6-9) für $Re \rightarrow \infty$) folgen nach der Rücktransformation die Ergebnisse für den Wärmeübergang an der überströmten Wand. Diese können aus der Auswertung der berechneten Grenzschicht-Temperaturprofile mit Hilfe der beiden Größen $T_W^* - T_\infty^*$ und $(\partial T^*/\partial y^*)_W$ gewonnen werden. Je nach Randbedingung ist eine dieser Größen von vorne herein gegeben (bei $T_W^* = \text{const}$: $T_W^* - T_\infty^*$; bei $\dot{q}_W^* = \text{const}$: $(\partial T^*/\partial y^*)_W = -\dot{q}_W^*/\lambda^*$), so dass „nur noch“ die jeweils andere Größe bestimmt werden muss. Wenn das Ergebnis in dimensionsloser Form geschrieben wird, kann der Wärmeübergang als

$$Nu = Nu(x, Re, Pr, Ec, \text{Geometrie, therm. RB}) \quad (6-13)$$

und damit als Spezialfall von (3-3) angegeben werden. Die nachfolgenden Tabellen (Tab. 6.3 und Tab. 6.4) enthalten die entsprechenden Angaben für die Grenzschichten an einer ebenen Platte und im Bereich des Staupunktes an einem ebenen stumpfen Körper.

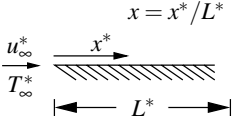
Die Grenzschichten sind für diese Fälle *selbstähnlich*, d. h. sie sind nach einer sog. *Ähnlichkeitstransformation* durch einheitliche, x^* -unabhängige Geschwindigkeits- bzw. Temperaturprofile beschrieben. Die tatsächlich vorhandene x^* -Abhängigkeit tritt erst wieder auf, wenn die Ähnlichkeitstransformation rückgängig gemacht wird. Damit existiert für diese Grenzschichten keine

Tabelle 6.3: Wärmeübergang an einer laminar überströmten ebenen Platte

Ergebnisse für $Pr \rightarrow 0$ und $Pr \rightarrow \infty$ folgen aus einer asymptotischen Analyse des Problems (siehe dazu Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 7.5.5)

Bezugsgeschwindigkeit: u_∞^* (Anströmgeschwindigkeit)

thermische Randbedingung: $T_W^* = \text{const} \rightarrow r = 0$; $\dot{q}_W^* = \text{const} \rightarrow r = \frac{1}{2}$



$$\frac{Nu_L}{\sqrt{Re_L}} = \frac{A_j - B_j Pr Ec / x^*}{\sqrt{2x}} \quad (6-14)$$

	$Pr \rightarrow 0$	$Pr = 0,1$	$Pr = 0,7$	$Pr = 7$	$Pr = 10$	$Pr \rightarrow \infty$
$Nu_L = \frac{\dot{q}_W^*(x^*) L^*}{\lambda^* (T_W^*(x^*) - T_\infty^*)}$						
$Re_L = \frac{\rho^* u_\infty^* L^*}{\eta^*}$						
$Pr = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*}$						
$Ec = \frac{u_\infty^{*2}}{c_p^* (T_W^*(L^*) - T_\infty^*)}$						
$x = \frac{x^*}{L^*}$						
$A_{T_W=\text{const}}$	$0,798 Pr^{1/2}$	0,1980	0,4139	0,9135	1,0297	$0,479 Pr^{1/3}$
$A_{q_W=\text{const}}$	$1,253 Pr^{1/2}$	0,2838	0,5740	1,2525	1,4112	$0,656 Pr^{1/3}$
$B_{T_W=\text{const}}$	0,3692	0,3043	0,2471	0,1649	0,1525	$0,4604 Pr^{-1/3}$
$B_{q_W=\text{const}}$	0,3692	0,3043	0,2471	0,1649	0,1525	$0,4604 Pr^{-1/3}$

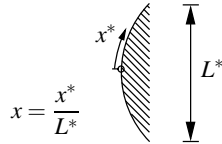
¹ Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 7

Tabelle 6.4: Wärmeübergang im Staupunktbereich eines ebenen stumpfen Körpers

Ergebnisse für $Pr \rightarrow 0$ und $Pr \rightarrow \infty$ folgen aus einer asymptotischen Analyse des Problems (siehe dazu Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 7.5.5)

Bezugsgeschwindigkeit: u_B^* gemäß (6-18)

thermische Randbedingung: $T_W^* = \text{const}$ oder $\dot{q}_W^* = \text{const}$



$$\frac{Nu_L}{\sqrt{Re_L}} = A - B Pr Ec x^2 \quad (6-15)$$

$$Nu_L = \frac{\dot{q}_W^*(x^*) L^*}{\lambda^* (T_W^*(x^*) - T_\infty^*)} \quad Re_L = \frac{\rho^* u_B^* L^*}{\eta^*} \quad Pr = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*} \quad Ec = \frac{u_B^{*2}}{c_p^* (T_W^*(L^*) - T_\infty^*)} \quad x = \frac{x^*}{L^*}$$

	$Pr \rightarrow 0$	$Pr = 0,1$	$Pr = 0,7$	$Pr = 7$	$Pr = 10$	$Pr \rightarrow \infty$
A	$0,798 Pr^{1/2}$	0,2195	0,4959	1,1784	1,3388	$0,661 Pr^{1/3}$
B	0,7129	0,6076	0,5085	0,3524	0,3276	$0,6353 Pr^{-1/3}$

ausgezeichnete Länge in Strömungsrichtung, also zunächst keine charakteristische Größe L^* .

Für eine formale Entdimensionierung kann L^* damit beliebig gewählt werden. Sinnvolle Werte für L^* werden in der Regel an die geometrischen Abmessungen des überströmten Körpers gekoppelt (z. B. wenn L^* dem Durchmesser eines überströmten Kreiszylinders entspricht, dessen Wärmeübergang in der Umgebung des vorderen Staupunktes durch (6-15) beschrieben wird).

Als Alternative zur willkürlichen Festlegung einer Bezugslänge L^* kann $x = 1$ gesetzt werden, was formal $L^* = x^*$ entspricht. Mit (6-14) und (6-15) wird dann weiterhin der lokale Wärmeübergang an einer Stelle x^* angegeben, weil die Reynolds-Zahl dann als $Re_x = \rho^* u_\infty^* x^* / \eta^*$ bzw. $Re_x = \rho^* u_B^* x^* / \eta^*$ eine x^* -abhängige Größe ist.

Obwohl man also auf die Einführung einer (willkürlichen) Länge L^* als Bezugslänge verzichten könnte, hat es durchaus Vorteile, die Gleichungen und Ergebnisse formal mit L^* zu entdimensionieren. Es entsteht dann in den Ergebnissen eine explizite x^* -Abhängigkeit, die sehr anschaulich interpretiert werden kann. Während die charakteristische Geschwindigkeit des Problems für die Plattengrenzschicht als $u_B^* = u_\infty^*$ (Anströmgeschwindigkeit) unmittelbar einsichtig ist, bedarf es für die Staupunktgrenzschicht einer zusätzlichen Überlegung, um die Geschwindigkeit u_B^* (Bezugsgeschwindigkeit) festzulegen.

Für die Staupunktgrenzschicht in Tab. 6.4 ist zunächst formal eine Bezugsgeschwindigkeit u_B^* eingeführt worden, die mit der Anströmgeschwindigkeit u_∞^* des Körpers, an dem sich der Staupunkt befindet, in Zusammenhang gebracht werden muss, wenn eine einheitliche Behandlung von Strömungen in Staupunktnähe durch die Staupunktgrenzschicht erreicht werden soll.

Es lässt sich zeigen¹, dass die Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht, $U^*(x^*)$, in Staupunktnähe ausgehend vom Wert null im Staupunkt linear mit x^* ansteigt. Mit der Anströmge-

¹ Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 7.5.2

schwindigkeit u_∞^* als Bezugsgröße gilt

$$\hat{U}(x^*) \equiv \frac{U^*(x^*)}{u_\infty^*} = \left(\frac{d\hat{U}}{dx} \right)_0 x + \dots = Cx + \dots \quad (6-16)$$

Der Gradient $(d\hat{U}/dx)_0$ ist aber für verschiedene Körper unterschiedlich, so dass sich mit (6-16) zunächst keine einheitliche Außengeschwindigkeit für die Staupunktgrenzschicht ergibt.

Wenn aber als Bezugsgeschwindigkeit $u_B^* = Cu_\infty^*$ gewählt wird, gilt für die dimensionslose Außengeschwindigkeit einheitlich

$$U(x^*) \equiv \frac{U^*(x^*)}{u_B^*} = \frac{U^*(x^*)}{Cu_\infty^*} = x + \dots \quad \text{mit } C = \left(\frac{d\hat{U}}{dx} \right)_0. \quad (6-17)$$

Die Grenzschichtlösung zu dieser Außengeschwindigkeit ist in Tab. 6.4 vertafelt und gilt als einheitliche Lösung für verschiedene Körper, weil die Anströmgeschwindigkeit u_∞^* und der Wert C aus der Körperumströmung zur Bezugsgeschwindigkeit

$$u_B^* = Cu_\infty^* \quad (6-18)$$

kombiniert worden sind. Auf diese Weise wird die Bezugsgeschwindigkeit u_B^* in (6-15) an die Strömungsverhältnisse in einem konkreten Fall angepasst.

Bild 6.6 zeigt den Wärmeübergang in Form der lokalen Nußelt-Zahl Nu gemäß (6-14) und (6-15) für die Platten- und die Staupunktgrenzschicht, jeweils für $T_W^* = \text{const}$ und $Pr = 0,71$. Für $Ec = 0$ wird der Dissipationseinfluss vernachlässigt. Nur mit einem unrealistisch hohen Wert $Ec = 1$ ist gut erkennbar, welchen Einfluss die Dissipation besitzt. Realistische Werte von Ec liegen in der Größenordnung von $Ec \approx 10^{-1} \dots 10^{-3}$.

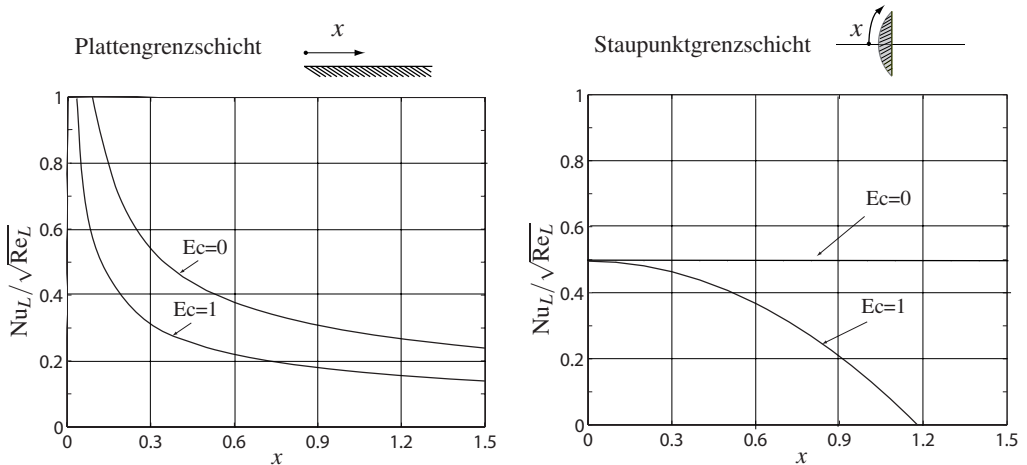


Bild 6.6: Wärmeübergang bei laminaren Grenzschichtströmungen für $T_W^* = \text{const}$ und $Pr = 0,71$

links: ebene Platte, s. Tab. 6.3 bzw. (6-14)

rechts: Staupunktbereich eines ebenen stumpfen Körpers, s. Tab. 6.4 bzw. (6-15)

Der qualitativ sehr unterschiedliche Verlauf der Nußelt-Zahlen ist eine unmittelbare Folge des Verhaltens der Grenzschicht jeweils für $x \rightarrow 0$. Während die Dicke der Plattengrenzschicht bei Annäherung an die Vorderkante (also für $x \rightarrow 0$) zu null geht, ist sie bei der Staupunktgrenzschicht für $x \rightarrow 0$ konstant. Über diese Grenzschichtdicke hinweg verändert sich die Temperaturverteilung jeweils von T_W^* zu T_∞^* (am Grenzschichtrand). Dies führt bei einer endlichen Grenzschichtdicke zu endlichen Gradienten $(\partial T^*/\partial y^*)_W$ und damit gemäß (5-5) zu endlichen Werten \dot{q}_W^* . Wenn die Grenzschichtdicke aber zu null geht, folgt $(\partial T^*/\partial y^*)_W \rightarrow \infty$ und damit $\dot{q}_W^* \rightarrow \infty$, wie dies bei der Annäherung an die Vorderkante ($x \rightarrow 0$) bei der Plattengrenzschicht der Fall ist.

Formal liegt an der Plattenvorderkante damit eine Singularität vor ($Nu \rightarrow \infty$). In realen Strömungen ist die Nußelt-Zahl dort sehr groß, aber endlich. In diesem Sinne versagt die Grenzschichttheorie zur Beschreibung der Verhältnisse an der Vorderkante und muss dort durch eine weitergehende Modellierung ersetzt werden¹.

6.3.2 Wärmeübergang bei Durchströmungen, laminar

Der entscheidende Aspekt bei der Durchströmung mit Wärmeübergang ist, dass dabei nur eine begrenzte Fluidmenge am Wärmeübergang beteiligt ist, wie dies schon im Abschnitt 6.1 ausgeführt wurde. Im konkreten Fall spielt aber auch die Geometrie des durchströmten Körpers eine wichtige Rolle. Für komplexe Geometrien, die in Strömungsrichtung starke Veränderungen aufweisen, ist es erforderlich, die vollständigen Grundgleichungen numerisch zu lösen, um den Wärmeübergang auf theoretischem Wege (und nicht experimentell) zu bestimmen.

Wenn aber die Geometrie bestimmte Besonderheiten aufweist, wie z. B. einen unveränderten Querschnitt in Strömungsrichtung (wie beim Rohr oder ebenen Kanal) oder einen gleichmäßig zunehmenden Querschnitt, so können dafür meist sehr einfache, analytisch formulierbare Lösungen gefunden werden.

Wegen der großen technischen Bedeutung sollen im Folgenden Durchströmungen in geraden Rohren und Kanälen mit konstantem Querschnitt betrachtet werden. Dabei wird eine Geometrie mit Kreis- oder Ellipsen-Querschnitt als *Rohr* bezeichnet, alle anderen Geometrien als *Kanal* (Rechteck, Dreieck, ...). Als *ebener Kanal* wird im Folgenden die Spaltgeometrie zwischen zwei in der Breite unendlichen Wänden bezeichnet, die zu einer zweidimensionalen Modellvorstellung gehört.

Der Wärmeübergang in solchen Geometrien kann in zwei Abschnitte unterteilt werden, wenn auf der gesamten Länge einheitliche thermische Randbedingungen vorliegen, wie z. B. $T_W^* = \text{const}$ oder $\dot{q}_W^* = \text{const}$:

- einen thermischen Einlaufbereich der Länge L_{therm}^* (thermische Einlaufänge),
- einen anschließenden Bereich thermisch ausgebildeter Zustände.

Bild 6.7 zeigt die physikalischen Zustände in beiden Bereichen für die thermischen Randbedingungen $\dot{q}_W^* = \text{const}$ und $T_W^* = \text{const}$. Im thermisch ausgebildeten Bereich weisen die Temperaturprofile folgende Besonderheiten auf:

$\dot{q}_W^* = \text{const}$:

Die *Form* des Temperaturprofils und seine maximalen Unterschiede $T_W^* - T_{\min}^*$ sind x^* -unabhängig

¹ s. z. B. Veldman, A. E. P. (1976): *Boundary layer flow past a finite flat plate*, Dissertation, Rijksuniversiteit, Groningen/Holland

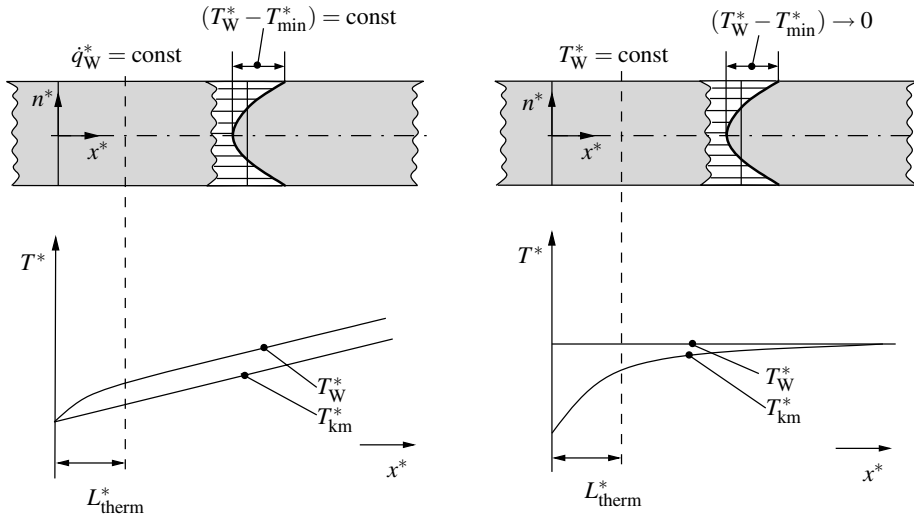


Bild 6.7: Prinzipieller Verlauf der Wandtemperaturen T_W^* und der kalorischen Mitteltemperaturen T_{km}^* bei Durchströmungen mit konstanten Strömungsquerschnitten; hier: Heizfall
 L_{therm}^* : Länge des thermischen Einlaufbereiches

$T_W^* = \text{const.}$

Die *Form* des Temperaturprofils ist x^* -unabhängig, seine maximalen Unterschiede werden aber stromabwärts stets kleiner, das Temperaturprofil wird „gestaucht“.

Mathematisch lässt sich dies wie folgt ausdrücken:

$$\dot{q}_W^* = \text{const} : \quad T^*(x^*, n^*) - T_{km}^*(x^*) = f(n^*) \quad (6-19)$$

$$T_W^* = \text{const} : \quad \frac{T(x^*, n^*) - T_W^*(x^*)}{T_{km}^*(x^*) - T_W^*(x^*)} = g(n^*) \quad (6-20)$$

Hierbei ist n^* die einheitliche Querkordinate (y^* für den Kanal, r^* für das Rohr). Der stromabwärtige Übergang in dieses besondere (thermisch ausgebildete) Verhalten erfolgt asymptotisch. Deshalb wird ein bestimmtes Kriterium gesetzt, ab wann eine Situation als thermisch ausgebildet gewertet wird. Wenn z. B. eine 2%-ige Abweichung von der endgültigen, ausgebildeten Profilform zugelassen wird, so können damit konkrete Zahlenwerte für L_{therm}^* ermittelt werden. In diesem Sinne gilt für Fälle, in denen der Wärmeübergang bei $x^* = 0$ beginnt, die Strömung dort aber bereits hydrodynamisch ausgebildet ist (x^* -unabhängige Geschwindigkeitsprofile)

$$\frac{L_{\text{therm}}^*}{D_h^*} \approx 0,04 \text{Re}_D \text{Pr}. \quad (6-21)$$

Dabei ist D_h^* der sog. *hydraulische Durchmesser*¹, der es erlaubt, (6-21) auf Fälle mit sehr unterschiedlichen Strömungsquerschnitten anzuwenden. Die Definition von D_h^* lautet

$$D_h^* \equiv \frac{4A^*}{U^*} \quad (6-22)$$

¹ Herwig, H. (2004): *Strömungsmechanik A-Z*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Stichwort: Hydraulischer Durchmesser

mit A^* als durchströmter Querschnittsfläche und U^* als demjenigen Teil des Umfanges, der mit dem Fluid in Berührung steht (benetzter Umfang). Die Unterscheidung zwischen Umfang und benetztem Umfang spielt lediglich bei sog. offenen Gerinneströmungen eine Rolle. Bei Rohrströmungen mit Kreisquerschnitt entspricht der hydraulische Durchmesser dem geometrischen Durchmesser, bei ebenen Kanälen ist D_h^* das Doppelte des Wandabstandes (was unmittelbar aus (6-22) folgt).

Gleichung (6-21) besagt, dass bei hohen Reynolds-Zahlen mit großen Einlaufängen zu rechnen ist, aber auch, dass Fluide mit hohen Prandtl-Zahlen (wie z. B. Öle) erst nach sehr großen Lauflängen den thermisch ausgebildeten Zustand erreichen¹.

Wärmeübergang im thermisch ausgebildeten Bereich

Im thermisch ausgebildeten Zustand können die Temperaturprofile für eine Reihe von Querschnittsgeometrien analytisch angegeben werden. Daraus kann dann unmittelbar die Nußelt-Zahl

$$Nu_D = \frac{\dot{q}_W^* D_h^*}{\lambda^* (T_W^* - T_{km}^*)} \quad (6-23)$$

bestimmt werden. Diese ist, wie (6-23) zeigt, mit dem hydraulischen Durchmesser als charakteristischer Länge und der Differenz von Wand- und kalorischer Mitteltemperatur als charakteristischer Temperaturdifferenz gebildet. Dabei ergibt sich im ausgebildeten Zustand für die unterschiedlichsten Geometrien und bei unterschiedlichen thermischen Randbedingungen jeweils eine konstante, x^* -unabhängige Nußelt-Zahl. Tab. 6.5 enthält einige solche Zahlenwerte, deren Zustandekommen hier nicht im Einzelnen dargestellt werden kann, die aber letztlich immer aus einer Auswertung der in den einzelnen Querschnitten ermittelten Temperaturprofile folgen.

Im Gegensatz zum Wärmeübergang bei laminaren Grenzschichtströmungen, liegt bei thermisch ausgebildeten Rohr- und Kanalströmungen kein Einfluss der Reynolds-Zahl vor. Dies ist

Tabelle 6.5: Wärmeübergang bei laminar durchströmten Rohren und Kanälen im thermisch ausgebildeten Bereich, Vernachlässigung von Dissipationseffekten ($Ec = 0$)
(Daten aus: Çengel, Y. A. (1997): *Introduction to Thermodynamics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York)

$$\text{Nu}_D = \frac{\dot{q}_W^* D_h^*}{\lambda^* (T_W^* - T_{\text{km}}^*)} = A \quad (6-24)$$

	1	2	4	1	2	4	∞	30°	60°	90°
$A_{T_W=\text{const}}$	3,66	3,74	3,79	2,98	3,39	4,44	7,54	2,26	2,47	2,34
$A_{q_W=\text{const}}$	4,36	4,56	4,88	3,61	4,12	5,33	8,24	2,91	3,11	2,98

¹ Wenn der Wärmeübergang am Rohr- bzw. Kanalanschluss beginnt, kommt es zu einer gleichzeitigen Ausbildung des Strömungs- und des Temperaturfeldes. Dann sind die thermischen Einlaufängen kürzer als durch (6-21) vorhergesagt, da anfangs wegen der völligeren Strömungsprofile ein besserer Wärmeübergang vorliegt.

zunächst erstaunlich, da eine erhöhte Strömungsgeschwindigkeit (und damit eine erhöhte Reynolds-Zahl) zu einem besseren konvektiven Transport innerer Energie führt. Deshalb gilt z. B. bei laminaren Grenzschichtströmungen $Nu_L \sim \sqrt{Re_L}$.

In Kap. 6.1.2 wurde bereits gezeigt, dass ein völliger werdendes Geschwindigkeitsprofil unmittelbar eine Verbesserung des Wärmeüberganges (steigende Nußelt-Zahl) zur Folge hat. Dies ist bei laminaren Grenzschichten der Fall, weil die Grenzschichtdicke proportional zu $1/\sqrt{Re_L}$ abnimmt und damit in unmittelbarer Wandnähe die Strömungsgeschwindigkeiten größer werden (völligere Profile).

Bei ausgebildeten laminaren Rohr- und Kanalströmungen verändert sich aber die *Form* des Profiles nicht. Für Rohrströmungen z. B. gilt (unabhängig von $Re_D = \rho^* u_m^* D^* / \eta^*$)

$$\frac{u^*}{u_m^*} = 2 \left(1 - \frac{r^*}{R^*} \right) \quad (\text{laminare Rohrströmung}) \quad (6-25)$$

mit u_m^* als Querschnitts-Mittelwert von $u^*(r^*)$ und $R^* = D^*/2$ als Rohrradius. Deshalb bleibt die Temperaturverteilung über den Querschnitt hinweg unverändert, wenn die Reynolds-Zahl variiert. Aus dieser unveränderten Temperaturverteilung folgt mit $T_W^* - T_{km}^*$ und $(\partial T^* / \partial r^*)_W$ aber unmittelbar die Nußelt-Zahl. Aus diesem Grund liegt kein Einfluss der Reynolds-Zahl vor.

Das Problem insgesamt ist aber durchaus von der Reynolds-Zahl abhängig, weil der Anstieg der (kalorischen) Mitteltemperatur $T_{km}^*(x^*)$ direkt von der Reynolds-Zahl beeinflusst wird. Für die Rohrströmung folgt aus einer einfachen Energiebilanz über eine Rohrstrecke dx^* , die mit $\dot{q}_W^* = \text{const}$ geheizt wird

$$\dot{m}^* c_p^* dT_{km}^* = \dot{q}_W^* \pi D^* dx^* \quad \rightarrow \quad \frac{dT_{km}^*}{dx^*} = \frac{\dot{q}_W^* \pi D^*}{\dot{m}^* c_p^*} = \frac{4 \dot{q}_W^* / \lambda^*}{Re_D Pr} \quad (6-26)$$

d. h., der axiale Temperaturanstieg ist umso geringer, je größer die Reynolds-Zahl wird. Dies ist unmittelbar einsichtig, weil mit steigender Reynolds-Zahl ein höherer Massenstrom dieselbe übertragene Energie aufnimmt und deshalb die mittlere Temperatur entsprechend schwächer ansteigt.

Übrigens: Neben völligeren Geschwindigkeitsprofilen war in Kapitel 6.1.1 ein steigender Wert der Temperaturleitfähigkeit λ^* als förderlich für den Wärmeübergang beschrieben worden. Man könnte deshalb erwarten, dass die Nußelt-Zahl im vorliegenden Fall von der Prandtl-Zahl $Pr = \eta^* c_p^* / \lambda^*$ abhängt, in der λ^* explizit auftritt. Aber: Die Nußelt-Zahl selbst enthält in ihrer Definition ($Nu = \dot{q}_W^* D_h^* / \lambda^* (T_W^* - T_{km}^*)$) die Wärmeleitfähigkeit, so dass deren Effekt implizit enthalten ist und es deshalb zu keiner expliziten Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl kommt.

An dieser Stelle wird deutlich, dass eine dimensionslose Schreibweise bisweilen die tatsächlichen Zusammenhänge nicht offensichtlich werden lässt. Deshalb soll (6-23) explizit nach der Temperaturdifferenz $(T_W^* - T_{km}^*)$ aufgelöst werden. Diese Größe ist bei einer Berechnung des Wärmeüberganges gesucht, wenn \dot{q}_W^* gegeben ist. Es gilt

$$T_W^* - T_{km}^* \sim \frac{\dot{q}_W^* D_h^*}{\lambda^*} \quad (6-27)$$

d. h., die Temperaturunterschiede in einem Querschnitt steigen (erwartungsgemäß) mit steigender Wandwärmestromdichte (\dot{q}_W^*) und der Querschnittsfläche (gekennzeichnet durch D_h^*), nehmen aber mit steigender Wärmeleitfähigkeit des Fluides (λ^*) ab.

Wärmeübergang im thermischen Einlaufbereich

Im thermischen Einlaufbereich der Länge L_{therm}^* kann die Nußelt-Zahl durch Überlegungen zum asymptotischen Verhalten für kleine und große Werte der Lauflänge x^* bestimmt werden. Dabei

zählt x^* ab der Stelle, an der die Wärmeübertragung in einer hydrodynamisch ausgebildeten Strömung beginnt (s. Bild 6.7).

Für diese Analyse wird eine transformierte x^* -Koordinate als

$$\tilde{x} = \frac{x^*}{D_h^* \text{Re}_D \text{Pr}} \quad (6-28)$$

eingeführt. Anschließend kann eine Reihenentwicklung für $\tilde{x} \rightarrow \infty$ durchgeführt werden, deren führender Term gerade dem Ergebnis für den ausgebildeten Fall entspricht (s. Tab. 6.5). Weitere Reihenglieder ergeben dann die Abweichungen von diesen konstanten Werten und beschreiben damit das Verhalten im stromabwärtigen Teil des thermischen Anlaufbereiches¹.

Für $\tilde{x} \rightarrow 0$ liegt eine Situation vor, in der sich das Temperaturprofil als Grenzschichtprofil in einer Strömung mit einem (von der Wand ausgehend) linear ansteigenden Geschwindigkeitsprofil entwickelt (Taylor-Reihenentwicklung des Geschwindigkeitsprofils $u^*(r^*)$ um $r^* = D^*/2$ und Abbruch nach dem linearen Term). Daraus folgt die sog. *Lévéque*-Lösung z. B. für die Rohrströmung als

$$\text{Nu}_D(x^*/D_h^*) = C_1 \tilde{x}^{-1/3} = C_1 \left(\frac{x^*}{D_h^* \text{Re}_D \text{Pr}} \right)^{-1/3} \quad (6-29)$$

mit $C_1 = 2,0668/4^{1/3}$ bei $\dot{q}_W^* = \text{const}$ und $C_1 = 1,7092/4^{1/3}$ bei $T_W^* = \text{const}$ ². Damit tritt für $x^* \rightarrow 0$, wie schon an der Plattenvorderkante, formal eine Singularität auf, weil die Grenzschichttheorie sehr nahe an der Stelle $x^* = 0$ versagt (die physikalischen Voraussetzungen für die Grenzschichttheorie sind in einem sehr kleinen Bereich um $x^* = 0$ nicht mehr erfüllt).

6.4 Erzwungene Konvektion, turbulente Strömung

Da der konvektive Wärmeübergang entscheidend von der konkret vorliegenden Strömung beeinflusst wird, und turbulente Strömungen einen deutlich anderen „physikalischen Charakter“ besitzen als laminare Strömungen, kann es nicht verwundern, dass der Wärmeübergang bei turbulenten Strömungen deutlich von demjenigen bei vergleichbaren laminaren Strömungen abweicht.

Im Folgenden wird deshalb zunächst stets auf den Unterschied zwischen turbulenter und laminarer Strömung eingegangen, bevor daran anschließend die Auswirkungen auf den Wärmeübergang betrachtet werden. Soweit dies möglich ist, sollen die physikalischen Hintergründe für das gegenüber dem laminaren Fall veränderte Wärmeübertragungsverhalten turbulenter Strömungen erläutert werden.

6.4.1 Wärmeübergang bei Körperumströmungen, turbulent

Bild 6.8 zeigt analog zu Bild 6.5, jetzt aber für turbulente Grenzschicht-Strömungen, in welchen Bereichen des Strömungsfeldes nennenswerte turbulente Schwankungsbewegungen auftreten.

Im Zusammenhang mit (6-12) war für die längs überströmte Platte die kritische Reynolds-Zahl $\text{Re}_{\text{krit}} \approx 5 \cdot 10^5$ angegeben worden. Die Länge der laminaren Anlaufstrecke in Bild 6.8 folgt deshalb aus der Bedingung $\text{Re}_x = \rho^* u_\infty^* x^* / \eta^* < 5 \cdot 10^5$. Mit diesem Bild soll Folgendes deutlich werden (vgl. auch Kap. 6.1.3):

¹ Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 12.5

² Für die ebene Kanalströmung gelten andere Konstanten, s. dazu Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 12.5.

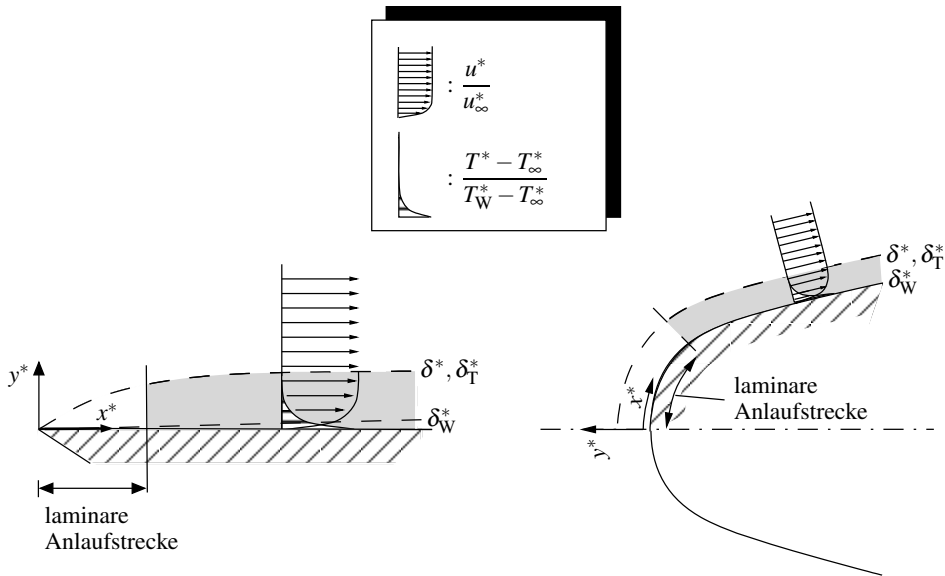


Bild 6.8: Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung in turbulenten Grenzschichten bei $Pr \approx 1$
 dunkelgrau unterlegt: Bereiche mit nennenswerten turbulenten Schwankungsgeschwindigkeiten
 δ^* , δ_T^* : Dicke der Strömungs- und Temperaturgrenzschichten
 δ_W^* : Dicke der Wandschicht

- Turbulente Schwankungen treten keineswegs im ganzen Feld auf, sondern nur in den Grenzschichten und dort auch nur stromabwärts einer bestimmten laminaren Anlaufstrecke.
- Neben den Grenzschichtdicken δ^* und δ_T^* tritt eine weitere Schichtdicke als diejenige einer sog. *Wandschicht* δ_W^* auf, in der turbulente Schwankungsbewegungen wegen der Wandnähe z. T. stark gedämpft sind.
- Die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile sind deutlich völliger als bei laminaren Strömungen, was zu deutlich erhöhten Wandschubspannungen (\rightarrow Strömungswiderständen) und verbesserten Wärmeübergängen führt.

In Kap. 6.1.3 war bereits beschrieben worden, dass die turbulenten Schwankungsbewegungen ursächlich für eine effektiv höhere Viskosität und Wärmeleitfähigkeit verantwortlich sind, womit sich deutlich höhere Nußelt-Zahlen ergeben als in laminaren Strömungen. Die eigentliche Ursache sind Geschwindigkeitsschwankungen. Temperaturschwankungen treten dann als Folge auf, wenn ein nicht-isothermes Temperaturfeld besteht. Deshalb wird die Temperatur in diesem Zusammenhang auch als ein sog. *passiver Skalar* bezeichnet. Die entscheidende Folgerung daraus ist, dass eine turbulente Wärmeübertragungen nur dort auftreten kann, wo die Strömung turbulent ist. Deshalb gibt es weder eine turbulente (verbesserte) Wärmeübertragung in der Nähe einer Plattenvorderkante, noch in der Umgebung eines Staupunktes¹.

¹ Es gibt jedoch einen Effekt der Turbulenz auf den Wärmeübergang im Staupunkt, der hier aber nicht betrachtet wird. Dieser liegt vor, wenn die Anströmung nicht vollständig homogen ist, sondern geringe (turbulente) Schwankungen aufweist. Diese führen zu einem verbesserten Wärmeübergang in der Grenzschicht. Bisweilen wird diese Verbesserung im Wärmeübergang auch benutzt, um damit den Turbulenzgrad der Anströmung zu bestimmen.

Wie auch schon bei laminaren Grenzschichten kann der Wärmeübergang dann bestimmt werden, wenn das Temperaturprofil bekannt ist. Bei turbulenten Strömungen ist dies das Profil der zeitgemittelten Temperatur, aus dem wiederum die beiden Größen $(T_w^* - T_\infty^*)$ und $(\partial \bar{T}^* / \partial y^*)_w$ ermittelt werden können, mit denen unmittelbar die Nußelt-Zahl gebildet wird.

Die Bestimmung des Temperaturprofils ist bei turbulenten Strömungen aber keineswegs trivial. Eine asymptotische Analyse zeigt, dass zunächst das Strömungs-Grenzschichtprofil und als Folge davon auch das Temperatur-Grenzschichtprofil bei turbulenten Strömungen einen Zweischichtencharakter aufweist.¹ Wenn von der hier zunächst unterstellten Prandtl-Zahl $Pr = O(1)$ abgewichen wird (im asymptotischen Sinne als $Pr \rightarrow 0$ bzw. $Pr \rightarrow \infty$), so treten sogar erheblich komplexere Strömungs- und Temperaturfelder auf.²

Wegen des weitgehend passiven Charakters des Temperaturfeldes in Bezug auf das Strömungsfeld, kann der Wärmeübergang in Form der Nußelt-Zahl unmittelbar mit dem Strömungs-Widerstandsgesetz für turbulente Grenzschichtströmungen in Verbindung gebracht werden. Dies soll hier am Beispiel der turbulenten Grenzschicht an einer ebenen Platte gezeigt werden.

Das Widerstandsgesetz basiert auf der Zweischichtenstruktur des Geschwindigkeitsprofils und lautet als asymptotisches Gesetz (in diesem Sinne korrekt für $Re \rightarrow \infty$, aber auch eine gute Näherung für große Re -Zahlen)³

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(Re_x \frac{c_f}{2} \right) + C^+ + \bar{C} \quad (6-30)$$

mit:

$$c_f = \frac{2 \tau_w^*(x^*)}{\rho^* u_\infty^{*2}} \quad Re_x = \frac{\rho^* u_\infty^* x^*}{\eta^*} \quad C^+ = 5 \text{ (glatte Wand)} \quad \bar{C} = -0,56$$

Hierbei ist $\tau_w^*(x^*)$ die Wandschubspannung an der Stelle x^* . Die in (6-30) auftretende Konstante κ ist die sog. *Karman-Konstante* $\kappa = 0,41$. Dieses Widerstandsgesetz tritt unmittelbar in einer asymptotisch korrekten Form des Wärmeübergangsgesetzes in Form der Nußelt-Zahl auf⁴, s. die Nu_x -Beziehung in Tab. 6.6.

Bild 6.9 zeigt den Vergleich dieser asymptotischen Beziehung mit der in Tab. 6.6 ebenfalls angegebenen sog. *nicht-rationalen Näherung*, die durch Anpassen eines Potenzansatzes an Messwerte zustande kommt. Zur besseren Vergleichbarkeit mit dem Ergebnis für die laminare Plattenströmung in Bild 6.6 erfolgt die Auftragung neben der Form $Nu_x = Nu_x(Re_x, Pr)$ mit Re_x als unabhängiger Variablen auch noch als $Nu_L = Nu_x/x$ mit $x = x^*/L^*$. Wenn x als unabhängige Variable gewählt wird, gilt dann der Zusammenhang $Nu_L = Nu_L(x, Re_L, Pr)$ und es ist erkennbar, dass Nu_L eine Funktion der Reynolds-Zahl Re_L ist, die nicht durch eine Transformation formal beseitigt werden kann (im laminaren Fall führt eine solche Transformation auf $Nu/\sqrt{Re_L}$, s. Bild 6.6). Bild 6.9 zeigt Nu_L für $Pr = 0,7$ und drei verschiedene Reynolds-Zahlen Re_L .

Für erste Abschätzungen sind nicht-rationale Näherungen durchaus attraktiv, es muss aber stets der begrenzte Gültigkeitsbereich beachtet werden. Zusätzlich ist in Tab. 6.6 die mittlere Nußelt-Zahl $Nu_m = 1/L^* \int Nu_x dx^*$ auf einer Platte der Länge L^* für die nicht-rationale Näherung angegeben (Integration von (6-32) von $x^* = 0$ bis $x^* = L^*$).

Entscheidende Aspekte im Zusammenhang mit dem asymptotischen Wärmeübergangsgesetz (6-31) sind:

¹ Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 14 und 15

² Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 12.2.2 und 15.2.3

³ Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 17.1.6

⁴ Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 17.2.3

Tabelle 6.6: Wärmeübergang an der turbulent überströmten ebenen Platte (glatt) für beliebige Temperaturverteilungen an der Wand; keine laminare Anlaufstrecke

Daten der asymptotisch korrekten Form für große Re-Zahlen aus:

Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 17.1.6 und Kap. 17.2.3

$$\boxed{\text{Nu}_x = \frac{\dot{q}_W^* x^*}{\lambda^* (T_W^* - T_\infty^*)} = \frac{\text{Re}_x \text{Pr} c_f / 2}{\frac{\kappa}{\kappa_\Theta} + \sqrt{\frac{c_f}{2}} D_\Theta(\text{Pr})}} \quad (6-31)$$

$$\text{Re}_x = \frac{\rho^* u_\infty^* x^*}{\eta^*} \quad D_\Theta(\text{Pr}) = C_\Theta^+(\text{Pr}) + \bar{C}_\Theta - \frac{\kappa}{\kappa_\Theta} (C^+ + \bar{C}) \quad \sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\text{Re}_x \frac{c_f}{2} \right) + C^+ + \bar{C}$$

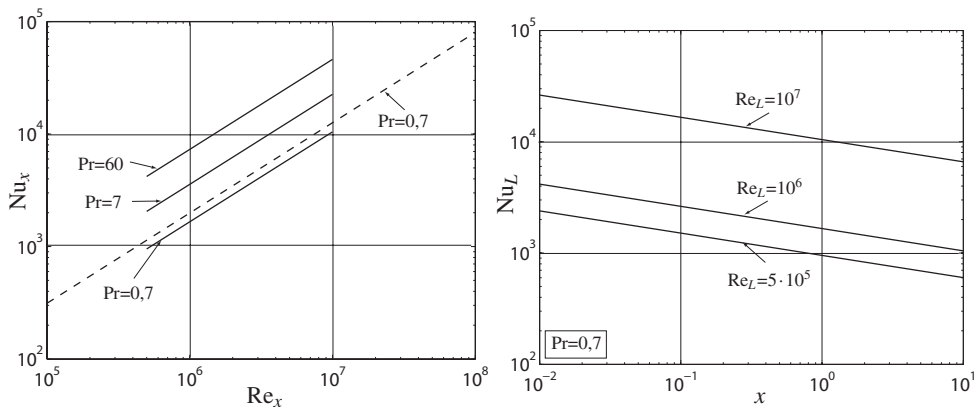
$$\kappa = 0,41 \quad \kappa_\Theta = 0,47 \quad C_\Theta^+ = 13,7 \text{Pr} - 7,5 \quad \bar{C}_\Theta = 0,42 \quad C^+ = 5,0 \quad \bar{C} = -0,56$$

Daten der nicht-rationalen Näherung für $0,6 < \text{Pr} < 60$ und $5 \cdot 10^5 < \text{Re}_x < 10^7$ aus:

Baehr, H. D.; Stephan, K. (2004): *Wärme- und Stoffübertragung*, 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin / Kap. 3.7.1.2

lokaler Wärmeübergang: $\boxed{\text{Nu}_x = 0,0296 \text{Re}_x^{4/5} \text{Pr}^{1/3}} \quad (6-32)$

mittlerer Wärmeübergang: $\boxed{\text{Nu}_m = \frac{1}{L^*} \int_0^{L^*} \text{Nu}_x dx^* = 0,037 \text{Re}_L^{4/5} \text{Pr}^{1/3}} \quad (6-33)$

**Bild 6.9:** Wärmeübergang an der glatten, ebenen Platte bei turbulenter Grenzschichtströmung

—: nach (6-32)

- - -: nach (6-31)

links: $\text{Nu}_x = \dot{q}_W^*(x^*) x^* / (\lambda^* \Delta T^*) = \text{Nu}_x(\text{Re}_x, \text{Pr})$

rechts: $\text{Nu}_L = \dot{q}_W^*(x^*) L^* / (\lambda^* \Delta T^*) = 0,0296 \text{Re}_L^{4/5} \text{Pr}^{1/3} x^{-1/5} = \text{Nu}_L(x, \text{Re}_L, \text{Pr})$

- Gleichung (6-31) gilt für beliebige Temperaturverteilungen an der Wand, so dass im turbulenten Fall (anders als bei laminaren Strömungen) hier nicht nach verschiedenen thermischen Randbedingungen unterschieden werden muss. Der physikalische Hintergrund dafür ist, dass die turbulente Wärmeübertragung wegen des sehr effektiven Übertragungsmechanismus' eine sehr lokal dominierte Situation darstellt und deshalb von der thermischen Vorgeschichte weitgehend unabhängig ist. Dies kann für spezielle Messverfahren ausgenutzt werden¹.
- Anders als im laminaren Fall spielt die Wandrauheit bei turbulenten Strömungen eine große Rolle. Dabei ist stets entscheidend, ob Rauheitselemente so weit in das Strömungs- und Temperaturfeld hineinragen, dass die Turbulenz davon nennenswert beeinflusst wird. Wenn dies nicht der Fall ist, spricht man von *hydraulisch und thermisch glatten Wänden*. Andernfalls wird in (6-31) die Konstante $C_\Theta^+(\text{Pr})$ erheblich durch den Rauheitseinfluss verändert, was sich stark auf die Nußelt-Zahl Nu_x auswirken kann.^{2,3}
- Wie in Bild 6.8 gezeigt ist, liegt nahe der Vorderkante einer Plattenströmung stets eine laminare Anlaufstrecke vor, die in (6-31) nicht berücksichtigt ist. Deshalb gilt (6-31) näherungsweise (Vernachlässigung des laminaren Anlaufes) mit dem Ursprung der x^* -Koordinate an der Vorderkante, oder exakt mit einem verschobenen Ursprung von x^* als einem sog. *fiktiven Ursprung*. Um wieviel der Ursprung von x^* verschoben werden muss, um damit die Verhältnisse im voll turbulenten Bereich richtig wiedergeben zu können, kann aber nur aus der Kenntnis der laminaren Anlaufstrecke gefolgert werden.
- Die Form von (6-31) legt es nahe, die Nußelt-Zahl Nu_x mit Re_x und Pr zu einer neuen Kennzahl zu kombinieren. Diese ist als *Stanton-Zahl* St

$$\text{St} \equiv \frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_x \text{Pr}} = \frac{\dot{q}_w^*}{\rho^* c_p^* (T_w^* - T_\infty^*) u_\infty^*} = \frac{c_f/2}{\frac{\kappa}{\kappa_\infty} + \sqrt{\frac{c_f}{2}} D_\Theta(\text{Pr})} \quad (6-34)$$

bekannt (und enthält formal nicht mehr die Koordinate x^* !). Die x^* -Abhängigkeit der Stanton-Zahl ist dann durch die x^* -Abhängigkeit von c_f gemäß (6-30) bestimmt.

6.4.2 Wärmeübergang bei Durchströmungen, turbulent

Der prinzipielle Verlauf der Wand- und Mitteltemperaturen bei Durchströmungen mit konstanten Strömungsquerschnitten ist bei turbulenten Strömungen vergleichbar mit denjenigen bei laminaren Strömungen in Bild 6.7.

Die thermische Einlaufänge ist jedoch erheblich kürzer und weder nennenswert von der Reynolds- noch von der Prandtl-Zahl abhängig. Für sie gilt⁴

$$\frac{L_{\text{therm}}^*}{D_h^*} \approx 20 \dots 40, \quad (6-35)$$

¹ Mocikat, H.; Herwig, H. (2006): *An advanced thin foil sensor concept for heat flux and heat transfer measurements in fully turbulent flows*, Heat and Mass Transfer, Online First, s. auch ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 6.3

² Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 15.6

³ Yaglom, A.M. (1979): *Similarity laws for constant-pressure and pressure-gradient turbulent wall flows*, Annu. Rev. Fluid Mech, **11**, 505-540

⁴ White, F.M. (1988): *Heat and Mass Transfer*, Addison Wesley / Kap. 6.5.2

wenn die Strömung bei Beginn der Wärmeübertragung ($x^* = 0$) hydraulisch ausgebildet ist. Wenn $x^* = 0$ dem Eintritt in das Rohr oder in den Kanal entspricht, sind die thermischen Einlaufängen kürzer.

Im anschließenden, thermisch ausgebildeten Bereich bestehen die zeitgemittelten Temperaturprofile für Reynolds-Zahlen $Re = \rho^* u_m^* D^* / \eta^* > Re_{krit}$ (mit $Re_{krit} \approx 2300$ für eine Rohrströmung) wieder aus einer Wandschicht und einer anschließenden vollturbulenten Schicht. Diese wird bei Durchströmungen auch *Kernschicht* genannt, weil sie zu beiden Seiten durch die Wandschichten begrenzt ist.

Wärmeübergang im thermisch ausgebildeten Bereich ($Re > Re_{krit}$)

Da die physikalischen Vorgänge bei turbulenten Strömungen in der Nähe von Wänden einen stark lokalen Charakter besitzen, sind Einflüsse von weiter entfernten Orten nahezu ohne Bedeutung. Deshalb sind die lokalen Vorgänge, hier also die lokalen Wärmeübergänge, weitgehend unabhängig von der insgesamt vorliegenden Strömungsform. Die Vorgänge in unmittelbarer Wandnähe einer turbulenten Rohr- oder Kanalströmung in Wandnähe ähneln deshalb sehr stark derjenigen einer turbulenten Grenzschichtströmung. Dies ist auch der Grund, warum turbulente Strömungsgrößen stets mit lokalen Wandgrößen (wie z. B. der Wandschubspannung) entdimensioniert werden. Auf diese Weise erhält man für turbulente Strömungen lokal-universelle Ergebnisse, wie z. B. bestimmte Wandgesetze für die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung in Wandnähe.¹

Da Wärmeübergänge stark durch die Verhältnisse in unmittelbarer Wandnähe geprägt sind, sollte es deshalb nicht verwundern, dass die Wärmeübergangsgesetze bei turbulenten Strömungen für unterschiedliche Geometrien sehr ähnlich aufgebaut sind². So ist auch die Nußelt-Beziehung für die turbulente Durchströmung, s. dazu die nachfolgende Tab. 6.7, sehr ähnlich wie die entsprechende Beziehung für die turbulente Plattengrenzschicht nach Tab. 6.6. Das Widerstandsgesetz für turbulente, ausgebildete Strömungen durch Rohre und Kanäle entsteht in Folge der Zweischichten-Struktur von turbulenten, wandgebundenen Strömungen in der bereits bekannten Form und lautet³

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(Re_D \sqrt{\frac{c_f}{2}} \right) + 0,27. \quad (6-36)$$

Die Angabe im Zusammenhang mit Tab. 6.7, dass die dort aufgeführte Wärmeübergangsbeziehung (6-37) sowohl für die thermische Randbedingung $T_W^* = \text{const}$ als auch für $\dot{q}_W^* = \text{const}$ gilt, ist streng genommen nur für sehr große Reynolds-Zahlen ($Re \rightarrow \infty$) gültig. Abweichungen sind aus asymptotischer Sicht sog. Effekte höherer Ordnung. Tab. 6.8 zeigt die genauen Werte für drei Prandtl-Zahlen.⁴ Daran ist zu erkennen, dass:

- die Nußelt-Zahlen für $Re \rightarrow \infty$ sehr stark ansteigen,
- die Prandtl-Zahl einen erheblichen Einfluss besitzt,
- turbulente Nußelt-Zahlen um Größenordnungen größer sind als Nußelt-Zahlen für laminare Strömungen (laminare Rohrströmung: $Nu_D = 3,66$ für $T_W^* = \text{const}$ bzw. $Nu_D = 4,36$ für $\dot{q}_W^* = \text{const}$, s. Tab. 6.5),

¹ Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 14.1 und 15.2

² Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 16.1.3

³ Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 16.1.1

⁴ Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 16.1.5

Tabelle 6.7: Wärmeübergang bei turbulent durchströmten Röhren und Kanälen im thermisch ausgebildeten Bereich, gültig für die thermischen Randbedingungen $T_W^* = \text{const}$ und $\dot{q}_W^* = \text{const}$.
Asymptotisch motivierte Formen und nicht-rationale Näherung

Daten der asymptotisch korrekten Form für große Re-Zahlen aus:
Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 16.1.3 bis Kap. 16.1.5

$$\text{Nu}_D = \frac{\dot{q}_W^* D_h^*}{\lambda^* (T_W^* - T_{km}^*)} = \frac{\text{Re}_D \text{Pr} c_f / 2}{\frac{\kappa}{\kappa_\Theta} + \sqrt{\frac{c_f}{2}} D_\Theta(\text{Pr})} \quad (6-37)$$

$$\text{Re}_D = \frac{\rho^* u_m^* D_h^*}{\eta^*} \quad D_\Theta(\text{Pr}) = C_\Theta^+(\text{Pr}) - \frac{\kappa}{\kappa_\Theta} C^+ \quad \sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\text{Re}_D \sqrt{\frac{c_f}{2}} \right) + 0,27$$

$\kappa = 0,41 \quad \kappa_\Theta = 0,47 \quad C^+ = 5,0$

Pr	0,5	0,72	14,3
C_Θ^+	1,23	3,61	73,3

Daten für $0,6 \leq \text{Pr} \leq 1000$, $10^4 \leq \text{Re}_D = \frac{\rho^* u_m^* D_h^*}{\eta^*} \leq 10^6$ aus:
Verein Deutscher Ingenieure (2002): *VDI-Wärmeatlas*, 9. Auflage, Springer-Verlag, Berlin / Ga5

$$\text{Nu}_D = \frac{\dot{q}_W^* D_h^*}{\lambda^* (T_W^* - T_{km}^*)} = \frac{\text{Re}_D \text{Pr} (\zeta / 8)}{1 + 12,7 \sqrt{\zeta / 8} (\text{Pr}^{2/3} - 1)} \quad (6-38)$$

$$\zeta = (1,8 \log_{10} \text{Re}_D - 1,5)^{-2}$$

Daten der nicht-rationalen Näherung für $\text{Pr} \approx 1$ und $\text{Re}_D = \frac{\rho^* u_m^* D_h^*}{\eta^*} < 10^5$ aus:
Merker, G. P. (1987): *Konvektive Wärmeübertragung*, Springer-Verlag, Berlin

$$\text{Nu}_D = \frac{\dot{q}_W^* D_h^*}{\lambda^* (T_W^* - T_{km}^*)} = C \text{Re}_D^{0,8} \text{Pr}^{1/2} \quad (6-39)$$

$$C = 0,021 \text{ für } T_W^* = \text{const} \quad C = 0,022 \text{ für } \dot{q}_W^* = \text{const}$$

- die nicht-rationale Näherung gemäß (6-39) nur für den angegebenen Parameter-Bereich $\text{Pr} \approx 1$ und $\text{Re} < 10^5$ eine akzeptable Näherung darstellt.

Wärmeübergang im thermischen Einlaufbereich

Die asymptotische Analyse im thermischen Einlaufbereich ist bei turbulenten Strömungen erheblich aufwändiger als bei laminaren Strömungen.¹ Deshalb soll hier nur näherungsweise und

¹ Herwig, H.; Voigt, M. (1995): *Eine asymptotische Analyse des Wärmeüberganges im Einlaufbereich von turbulenten Kanal- und Rohrströmungen*, Heat and Mass Transfer, **31**, 65-76

Tabelle 6.8: Nußelt-Zahlen Nu_D nach (6-37)zusätzlich: Vergleich mit (6-38) und (6-39) mit einem mittleren $C_m = 0,0215$.

Re_D	Pr = 0,5			Pr = 0,72			Pr = 14,3		
	(6-37)	(6-38)	(6-39)	(6-37)	(6-38)	(6-39)	(6-37)	(6-38)	(6-39)
10^4	26,2	27,2	24,1	31,5	32,8	28,9	107	113	129
10^5	150	143	152	189	181	182	778	809	813
10^6	951	879	959	1225	1150	1151	5953	6148	5130

Tabelle 6.9: Empirische Beziehung für die mittlere Nußelt-Zahl im thermischen Einlaufbereich von turbulenten Rohr- und Kanalströmungen ($T_W^* = \text{const}$)(Daten aus: White, F. M. (1988): *Heat and Mass Transfer*, Addison-Wesley, Publ. Comp.)

$$\frac{Nu_m}{Nu_D} = 1 + \frac{C}{x^*/D_h^*} \quad (6-40)$$

$$Nu_m = \frac{\dot{q}_{Wm}^* D_h^*}{\lambda^* \Delta T^*} = \frac{1}{L_{\text{therm}}^*} \int_0^{L_{\text{therm}}^*} Nu_D dx^* \quad Nu_m = Nu_D \quad \text{für } \frac{x^*}{D_h^*} \rightarrow \infty \quad \dot{q}_{Wm}^* = \frac{1}{L_{\text{therm}}^*} \int_0^{L_{\text{therm}}^*} \dot{q}_W^* dx^*$$

Pr =	0,01	0,7	10
C =	9	2	0,7

pauschal angegeben werden, wie sich die mittlere Nußelt-Zahl Nu_m , die sich aus einer Integration der lokalen Nußelt-Zahl im Bereich $0 \leq x^* \leq L_{\text{therm}}^*$ ergibt, von der Nußelt-Zahl im ausgebildeten Bereich unterscheidet. Zahlenwerte dazu sind in Tab. 6.9 enthalten. Eine solche Mittelung ist jedoch nur für die thermische Randbedingung $T_W^* = \text{const}$ sinnvoll anwendbar.

6.5 Natürliche Konvektion bei Körperumströmungen, laminar

Der Wärmeübergang bei natürlicher Konvektion soll nicht in der gleichen Ausführlichkeit behandelt werden, wie dies zuvor bei erzwungener Konvektion geschehen ist, weil seine technische Bedeutung deutlich geringer ist. Als Beispiel soll deshalb hier nur der Fall des laminaren Wärmeüberganges bei der Umströmung von Körpern behandelt werden. Wie bei der erzwungenen Konvektion in Kapitel 6.3.1 werden im Folgenden die Grenzschichten an einer ebenen Platte und in der Umgebung eines Staupunktes an einem ebenen stumpfen Körper beschrieben und die dort auftretenden Wärmeübergänge in Form der Nußelt-Zahl angegeben.

Bild 6.10 zeigt analog zu Bild 6.5 die Verhältnisse bei natürlicher Konvektion. Der entscheidende Unterschied zur erzwungenen Konvektion ist, dass eine Strömung nur in unmittelbarer Wandnähe auftritt, wo diese durch Auftriebseffekte induziert wird. An die Stelle der Reynolds-Zahl Re tritt jetzt eine Kennzahl, in der statt u_∞^* (charakteristische, vorgegebene Geschwindigkeit bei erzwungener Konvektion) eine charakteristische Geschwindigkeit u_B^* auftritt. In dieser Geschwindigkeit muss eine Größe vorkommen, die charakteristisch für die Temperaturdifferenz

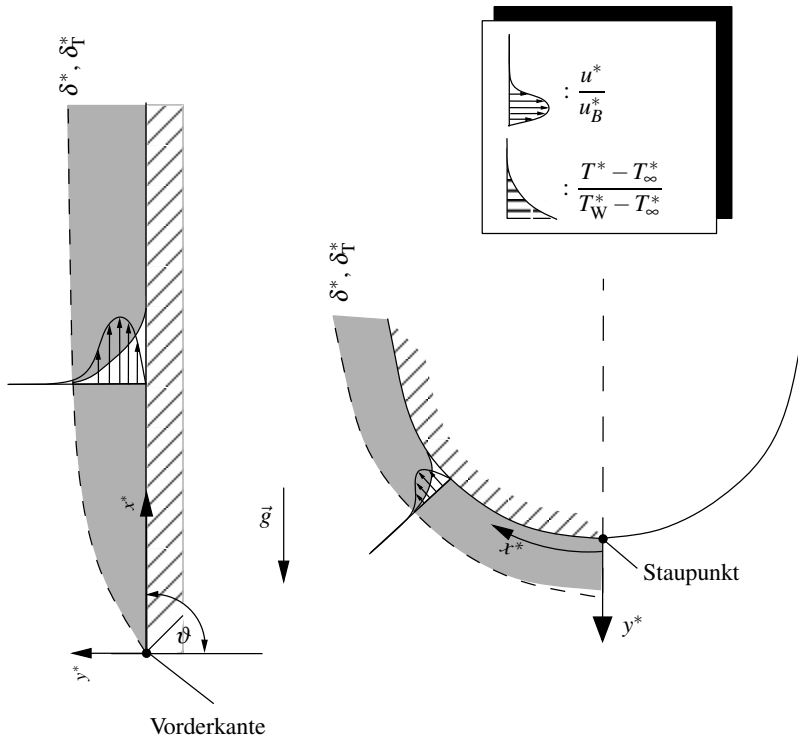


Bild 6.10: Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung in laminaren Grenzschichten bei natürlicher Konvektion ($Pr \approx 1$), die Dicken δ^* und δ_T^* sind charakteristische Dicken für die Grenzschichten, sie markieren nicht notwendigerweise den „Rand“ der Grenzschichten.

u_B^* : Bezugsgeschwindigkeit

T_∞^* : Temperatur in größerem Wandabstand

δ^* : Dicke der Strömungsgrenzschicht

δ_T^* : Dicke der Temperaturgrenzschicht

Das Koordinatensystem folgt der Wand, Krümmungseinflüsse können im Rahmen der einfachen Grenzschichttheorie vernachlässigt werden.

hier: $\vartheta = 90^\circ$ (senkrechte Platte)

zwischen dem Körper und der Umgebung ist, da diese Temperaturdifferenz die Ursache für die Strömung ist.

Eine genauere Analyse des Problems¹ ergibt

$$u_B^* = \sqrt{g^* L^* \beta_\infty^* \Delta T^*}; \quad \beta_\infty^* = - \left[\frac{\partial \rho^* / \partial T^*}{\rho^*} \right]_\infty \quad (6-41)$$

mit g^* als dem Betrag des Erdbeschleunigungsvektors, L^* als frei wählbarer Bezugslänge, β_∞^* als isobarem thermischen Ausdehnungskoeffizienten bei T_∞^* und ΔT^* als charakteristischer Tempe-

¹ Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap 8.3.2

raturdifferenz des Problems. Damit wird aus $Re = \rho^* u_\infty^* L^* / \eta^*$ jetzt formal

$$\frac{\rho^* u_B^* L^*}{\eta^*} = \frac{\rho^* \sqrt{g^* \beta_\infty^* \Delta T^*} L^{*3/2}}{\eta^*} = \sqrt{Gr_L}; \quad Gr_L = \frac{\rho^{*2} g^* \beta_\infty^* \Delta T^* L^{*3}}{\eta^{*2}} \quad (6-42)$$

mit der *Grashof-Zahl* Gr , vgl. Tab. 3.2.

Die im Sinne der Grenzschichttheorie vereinfachten Grundgleichungen erlauben (analog zur erzwungenen Konvektion mit Re als Parameter) Lösungen, die für laminare Strömungen formal frei von der Grashof-Zahl Gr sind und damit für alle (großen) Grashof-Zahlen gleichermaßen gelten. Dies wird möglich, wenn eine Koordinatentransformation durchgeführt wird ($y \rightarrow y Gr^{1/4}$) und hat zur Folge, dass die Gr -Abhängigkeit erst nach der Rücktransformation in physikalische Variable wieder explizit auftritt. Die Auswertung der Lösung für das Temperatur-Grenzschichtprofil nach dieser Rücktransformation führt dann unmittelbar auf die Nu -Beziehung für die beiden hier betrachteten Grenzschichtströmungen in den beiden nachfolgenden Tabellen.

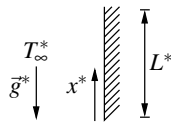
Bei der Analyse des Problems im Rahmen der Grenzschichttheorie stellt sich heraus, dass die Wandtemperatur $T_W^*(x^*)$ für die thermische Randbedingung $\dot{q}_W^* = \text{const}$ bei der Plattengrenzschicht proportional zu $x^{*1/5}$ ist, während bei der Staupunktgrenzschicht keine x^* -Abhängigkeit von T_W^* vorliegt. Damit gilt mit der frei wählbaren Länge L^* für $\dot{q}_W^* = \text{const}$:

$$T_W^*(x^*) - T_\infty^* = \Delta T_B^* x^r; \quad \Delta T_B^* = T_W^*(L^*) - T_\infty^* \quad (6-44)$$

mit $r = 1/5$ für die Plattengrenzschicht und $r = 0$ für die Staupunktgrenzschicht.

Zahlenwerte für den Wärmeübergang in Form der Nußelt-Zahl Nu können den Tabellen 6.10 und 6.11 entnommen werden. Wenn bei der Plattengrenzschicht ein Winkel $\vartheta \neq 90^\circ$ vorliegt (s. Bild 6.10), dann ist lediglich die entsprechende Komponente $g^* \sin \vartheta$ in der Grashof-Zahl zu berücksichtigen.¹ Dies schließt auch diejenigen Fälle ein, in denen die Wand gekühlt wird.

Tabelle 6.10: Wärmeübergang bei natürlicher Konvektion an der senkrechten Platte (laminar)
Ergebnisse für $Pr \rightarrow 0$ und $Pr \rightarrow \infty$ folgen aus einer asymptotischen Analyse des Problems
thermische Randbedingung: $T_W^* = \text{const} \rightarrow r = 0$; $\dot{q}_W^* = \text{const} \rightarrow r = 1/5$

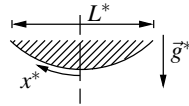


$$\frac{Nu_L}{Gr_L^{1/4}} = \frac{A}{\sqrt{2}} x^{\frac{r-1}{4}} \quad (6-43)$$

	$Nu_L = \frac{\dot{q}_W^*(x^*) L^*}{\lambda^* (T_W^*(x^*) - T_\infty^*)}$	$Gr_L = \frac{\rho^{*2} g^* \beta_\infty^* \Delta T_B^* L^{*3}}{\eta^{*2}}$	$Pr = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*}$	$x = \frac{x^*}{L^*}$		
	$Pr \rightarrow 0$	$Pr = 0,1$	$Pr = 0,7$	$Pr = 7$	$Pr = 10$	$Pr \rightarrow \infty$
$A_{T_W=\text{const}}$	$0,8491 Pr^{1/2}$	0,2302	0,4995	1,0543	1,1693	$0,7110 Pr^{1/4}$
$A_{q_W=\text{const}}$	$1,0051 Pr^{1/2}$	0,2670	0,5701	1,1881	1,3164	$0,7964 Pr^{-1/4}$

¹ Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 8.3.2

Tabelle 6.11: Wärmeübergang bei natürlicher Konvektion im Staupunktbereich eines ebenen stumpfen Körpers
 Ergebnisse für $Pr \rightarrow 0$ und $Pr \rightarrow \infty$ folgen aus einer asymptotischen Analyse des Problems
 thermische Randbedingungen: $T_W^* = \text{const}$ oder $\dot{q}_W^* = \text{const}$



$$\frac{Nu_L}{Gr_L^{1/4}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (6-45)$$

	$Nu_L = \frac{\dot{q}_W^*(x^*)L^*}{\lambda^*(T_W^*(x^*) - T_\infty^*)}$		$Gr_L = \frac{\rho^{*2} g^* \beta_\infty^* \Delta T_B^* L^{*3}}{\eta^{*2}}$		$Pr = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*}$	
	Pr $\rightarrow 0$	Pr = 0,1	Pr = 0,7	Pr = 7	Pr = 10	Pr $\rightarrow \infty$
A	0,8695Pr ^{1/2}	0,2384	0,5236	1,1210	1,2452	0,764Pr ^{1/4}

Bei der Plattenströmung liegen dann Winkel $180^\circ < \vartheta < 360^\circ$ vor, weil die Plattenvorderkante in diesen Fällen „oben“ liegt. Das Produkt $\Delta T_B^* \sin \vartheta$ ändert nicht das Vorzeichen, weil ΔT_B^* im Kühlfall negativ ist. Es müssen aber Winkel ϑ in der Nähe von 0° und 180° ausgeschlossen werden (nahezu horizontale Platten), weil dann die physikalischen Mechanismen diejenigen der sog. *indirekten natürlichen Konvektion* sind (s. dazu Kap. 6.1.4). Die Staupunktströmung tritt im Kühlfall an einem oberen Staupunkt auf, weil dann insgesamt eine Strömung in Richtung des Erdbeschleunigungs-Vektors vorliegt.¹

6.6 Wärmedurchgang

Bei den bisherigen Ausführungen ist nur der Wärmeübergang zwischen einer Wandoberfläche als Systemgrenze und dem angrenzenden Fluid betrachtet worden. Häufig besteht aber die Aufgabe, Energie in Form von Wärme vom „Außenraum“ durch eine Wand in das betrachtete System („Innenraum“) zu übertragen. Dieser Vorgang besteht aus drei Teilaspekten:

- Wärmeübergang vom Außenraum an die Außenwand, beschrieben durch α_a^* als äußerem Wärmeübergangskoeffizienten bzw. durch den äußeren Wärmeübergangswiderstand $R_{\alpha a}^* = \frac{1}{\alpha_a^* A_a^*}$,
- Wärmeleitung durch die Wand, beschrieben durch die Wärmeleitfähigkeit λ^* bzw. den Wärmeleitwiderstand R_λ^* ,
- Wärmeübergang von der Innenwand an den Innenraum, beschrieben durch α_i^* als innerem Wärmeübergangskoeffizienten bzw. den inneren Wärmeübergangswiderstand $R_{\alpha i}^* = \frac{1}{\alpha_i^* A_i^*}$.

Der gesamte Vorgang wird anschaulich als *Wärmedurchgang* bezeichnet. Als *Wärmedurchgangskoeffizient* k^* wird analog zu (2-1) definiert:

¹ Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Kap. 8.3.3

$$k^* \equiv \frac{\dot{q}_W^*}{\Delta T^*} \quad (6-46)$$

mit $\Delta T^* = T_a^* - T_i^*$ als treibender Temperaturdifferenz zwischen dem Außen- und dem Innenraum. Bild 6.11 verdeutlicht die Verhältnisse an einer ebenen Wand. Die Wärmeübergangskoeffizienten α_i^* und α_a^* beschreiben den Wärmeübergang in den Wandgrenzschichten (erzwungene oder natürliche Konvektion).

Wenn (6-46) auch auf gekrümmte Wände angewandt werden soll, muss beachtet werden, dass die Wandwärmestromdichte \dot{q}_W^* innen und außen verschiedene Werte annimmt. Deshalb sollte $k_j^* = \dot{q}_{Wj}^*/\Delta T^*$ geschrieben werden. Der Index $j=a$ oder i weist dann darauf hin, mit welchem \dot{q}_W^* , d.h. \dot{q}_{Wa}^* oder \dot{q}_{Wi}^* , der k^* -Wert gebildet worden ist.

Für den *Wärmedurchgangswiderstand* R_k^* gilt

$$R_k^* \equiv \frac{\Delta T^*}{\dot{Q}_W^*} = R_{\alpha a}^* + R_{\lambda}^* + R_{\alpha i}^* = \frac{1}{\alpha_a^* A_a^*} + R_{\lambda}^* + \frac{1}{\alpha_i^* A_i^*} = \frac{1}{k_j^* A_j^*} \quad (6-47)$$

d.h., die drei Einzelwiderstände addieren sich zum Gesamtwiderstand des Wärmedurchganges.

Die Indizierung bei k_j^* und A_j^* weist wieder darauf hin, dass bei gekrümmten Wänden sowohl die Innen- als auch die Außenwand gewählt werden kann und davon der Zahlenwert von k_j^* abhängt.

Während im Zusammenhang mit dem Wärmeübergangskoeffizienten α^* eine dimensionslose Kennzahl $Nu = \alpha^* L^*/\lambda^*$, vgl (3-4), existiert, ist dies für den Wärmedurchgangskoeffizienten k^* nicht der Fall. Dies ist Ausdruck der Tatsache, dass der Wärmedurchgang kein physikalischer Vorgang ist, der mit *einer* charakteristischen Länge beschrieben werden könnte, die dann in einer entsprechenden Kennzahl auftreten würde. Vielmehr handelt es sich um eine willkürliche Kombination von drei Effekten, wobei jeder zwar für sich in dimensionsloser Form beschrieben werden kann, deren Kombination ist aber nicht in *einer* Kennzahl darstellbar.

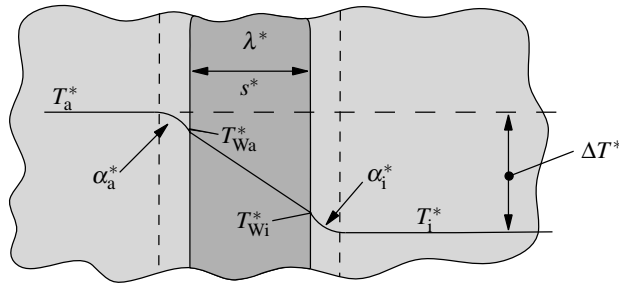


Bild 6.11: Wärmedurchgang an einer ebenen Wand

6.7 Komplexe, technisch bedeutende konvektive Wärmeübergangs-Situationen

Mit den bisher behandelten Grenzschicht-, Rohr- und Kanalströmungen waren stets relativ „einfache“ Strömungsfelder verbunden (z. B. selbstähnliche Grenzschichten oder vollausgebildete Geschwindigkeitsprofile), so dass die anschließend ermittelten Wärmeübergangs-Gesetzmäßigkeiten ebenfalls mathematisch einfach beschrieben werden konnten (z. B. als Konstanten oder Potenzfunktionen der Lauflänge).

In technischen Anwendungen sind die Geometrie sowie Rand- und Anfangsbedingungen häufig aber so komplex, dass für eine Berechnung nur numerische Lösungen der zugrunde liegenden Bilanzgleichungen in Frage kommen. Dabei wird man auch nur bestimmte Standard-Situationen unabhängig von einer konkreten Anwendung quasi „auf Vorrat“ berechnen (oder experimentell untersuchen), um die Ergebnisse für unterschiedliche Anwendungen zur Verfügung stellen zu können. Solche Fälle sind z. B. :

- der Wärmeübergang an einem querangeströmten Kreiszylinder (Anwendung z. B. : querangeströmtes Wärmeübertrager-Rohr),
- der Wärmeübergang an mehreren räumlich nahe zueinander angeordneten querangeströmten Kreiszylindern (Anwendung z. B. : querangeströmtes Wärmeübertrager-Rohrbündel),
- der Wärmeübergang im Zusammenhang mit einem sog. *Prallstrahl*, d. h., an einer Wand, auf die ein Fluidstrahl auftrifft, der dort radial abgelenkt wird (Anwendung z. B. : konvektive Kühlung heißer Oberflächen mit kalten Prallstrahlen).

Alle drei Beispiele sollen im Folgenden kurz behandelt werden.

6.7.1 Wärmeübergang am querangeströmten Kreiszylinder

Obwohl die Geometrie des Kreiszylinders (Durchmesser D^*) denkbar einfach ist, entsteht bei der Queranströmung des Zylinders mit einer homogenen Geschwindigkeit u_∞^* , je nach der Größe der Reynolds-Zahl $Re_D = \rho^* u_\infty^* D^* / \eta^*$, eine sehr komplexe Strömung mit Strömungsablösung, Instationaritäten, Transition (laminar \rightarrow turbulent) und sehr unterschiedlich geformten Nachlaufgebieten¹. In der Folge ist der Wärmeübergang stark von der Winkelposition auf der Zylinderoberfläche sowie der Reynolds-Zahl abhängig. Die lokale Verteilung der Nußelt-Zahl ist exemplarisch in Bild 6.12 für die Prandtl-Zahl $Pr = 0,7$ und drei verschiedene Reynolds-Zahlen dargestellt.

Wenn nur der insgesamt auftretende Wärmeübergang interessiert, so kann dieser als mittlere Nußelt-Zahl

$$Nu_m = \frac{\dot{q}_{Wm}^* D^*}{\lambda^* \Delta T_m^*} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Nu_D d\vartheta \quad (6-48)$$

mit $\dot{q}_{Wm}^* = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \dot{q}_W^* d\vartheta$ und $\Delta T_m^* = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (T_W^* - T_\infty^*) d\vartheta$ bestimmt werden (Annahme: symmetrische Verteilung).

Eine nicht-rationale Näherung für die mittlere Nußelt-Zahl eines querangeströmten Kreiszylinders für $0,7 \leq Pr \leq 300$ und $10 \leq Re_D \leq 10^5$ lautet²

¹ Herwig, H. (2002): *Strömungsmechanik*, Springer-Verlag, Berlin / Beispiel 9.4

² White, F.M. (1988): *Heat and Mass Transfer*, Addison Wesley / Kap. 6.6.2

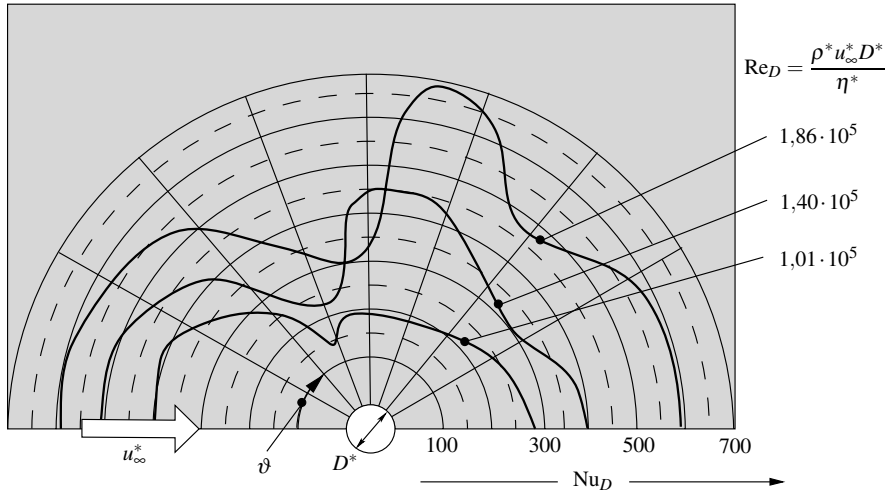


Bild 6.12: Lokale Verteilung der Nußelt-Zahl Nu am querangeströmten Kreiszylinder
 $Pr = 0,7$; thermische Randbedingung: $T_W^* = \text{const}$
 $Nu_D = \dot{q}_W^*(\vartheta) D^* / \lambda^* (T_W^* - T_\infty^*)$

$$Nu_m = \frac{\dot{q}_{Wm}^* D^*}{\lambda^* \Delta T_m^*} = \frac{\alpha_m^* D^*}{\lambda^*} = 0,3 + \frac{0,62 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{[1 + (0,4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{280000} \right)^{5/8} \right]^{4/5} \quad (6-49)$$

mit $Re_D = \rho^* u_\infty^* D^* / \eta^*$. Dieser Zusammenhang ist in Bild 6.13 für drei konkrete Prandtl-Zahlen dargestellt.

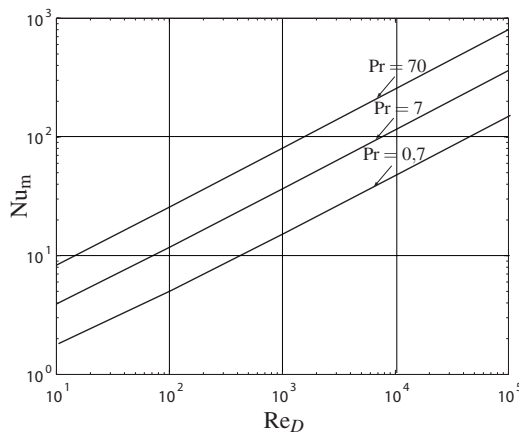


Bild 6.13: Mittlere Nußelt-Zahl Nu_m am querangeströmten Kreiszylinder gemäß (6-49)
mit $Re_D = \rho^* u_\infty^* D^* / \eta^*$
(Daten aus: White, F.M. (1988): *Heat and Mass Transfer*, Addison Wesley)

6.7.2 Wärmeübergang an querangeströmten Kreiszyylinder-Bündeln

Wenn mehrere überströmte Kreiszyylinder räumlich nahe zueinander angeordnet sind, so ist die Strömung im Nahfeld der einzelnen Zylinder von den umgebenden Zylindern beeinflusst und deshalb von derjenigen des einzeln angeströmten Zylinders verschieden. Häufig findet man in diesem Zusammenhang die Bezeichnung *Wärmeübergang an Rohrbündeln*. Hier wird aber die Bezeichnung als *Kreiszyylinder-Bündel* bevorzugt, um deutlich zu machen, dass es sich um den Wärmeübergang an den querangeströmten Außenwänden und nicht etwa um denjenigen in den Rohren handelt.

In gleichmäßig angeordneten Bündeln von Kreiszyklindern, tritt ab einer bestimmten Anzahl umströmter Zylinder, d. h. aus Sicht der ankommenden Strömung nach einer bestimmten Eindringtiefe in das Zylinderbündel, ein ausgebildeter Zustand auf, bei dem die Strömung und als Folge davon auch der Wärmeübergang an den einzelnen Zylindern gleich ist. Deshalb kann der Wärmeübergang am Zylinderbündel durch denjenigen am einzelnen Zylinder (der sich in hinreichender Tiefe in einem Bündel befindet) beschrieben werden. Dieser Wärmeübergang ist stets höher als der Wärmeübergang am (mit u_∞^* angeströmten) „freien“ Einzelzylinder, weil die „effektive Anströmgeschwindigkeit“ der einzelnen Zylinder im Bündel wegen der Versperrungswirkung höher ist. Zusätzlich muss eine Korrekturmöglichkeit für diejenigen Einzelzylinder angegeben werden, die sich nicht in hinreichender Tiefe im Bündel befinden.

Daten zum Wärmeübergang an Zylinderbündeln (die meist experimentell gewonnen werden), können in empirischen Wärmeübergangs-Beziehungen korreliert werden, wobei die Reynolds-Zahl mit der Geschwindigkeit u_{eff}^* gebildet wird. Diese mehr oder weniger willkürlich eingeführte charakteristische Geschwindigkeit wird für unterschiedliche Bündel-Anordnungen unterschiedlich definiert.

Tab. 6.12 enthält Angaben über die sog. *fluchtende* und *versetzte* Anordnung von Einzelzylindern in einem Zylinderbündel. Die Nußelt-Zahl Nu_m des Einzelzylinders besitzt dabei folgende Parameter-Abhängigkeit

$$\text{Nu}_m = \text{Nu}_m \left(\text{Re}_D, \underbrace{\frac{S_L^*}{D^*}, \frac{S_T^*}{D^*}}_{\text{Geometrie}}, \text{ANO}, \text{Pr}, N \right) = \text{Nu}_m (\text{Re}_{\text{Def}}, \text{Pr}, N). \quad (6-54)$$

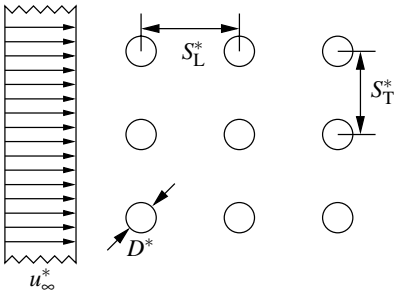
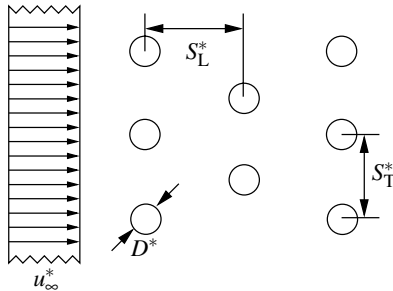
Die Art der Anordnung (ANO) ergänzt um den Einfluss der Parameter S_L^*/D^* und S_T^*/D^* wird näherungsweise und einheitlich mit der Einführung von u_{eff}^* berücksichtigt. Damit besteht dann nur noch die Abhängigkeit von Re_{Def} und Pr sowie von der „Reihen-Nummer“ N . Diese gibt an, um die wievielte Bündel-Reihe in Strömungsrichtung (ausgehend von $N = 1$ für die vorderste Reihe) es sich handelt. Ausgebildete Zustände liegen etwa ab der zehnten Reihe vor (also für $N > 10$).

Für die vorderen Reihen ($N < 10$) gilt als grobe Näherung

$$\text{Nu}_m(\text{Re}_{\text{Def}}, \text{Pr}, N) = \left[\frac{N}{10} \right]^{0,18} \text{Nu}_m(\text{Re}_{\text{Def}}, \text{Pr}, N > 10) \quad (6-55)$$

woran erkennbar wird, dass der Wärmeübergang in den vorderen Reihen schlechter ist, als im ausgebildeten Bereich ab der zehnten Reihe.

Tabelle 6.12: Mittlere Nußelt-Zahl Nu_m am querangeströmten Kreiszyylinder im Zylinderbündel mit $N > 10$ (Daten aus: Zukauskas, A. (1972): *Heat Transfer from Tubes in Crossflow, Advances in Heat Transfer*, **8**, 93-160)

fluchtende Anordnung	versetzte Anordnung
	
$u_{\text{eff}}^* = u_{\infty}^* \frac{S_T^*}{S_T^* - D^*}$	$u_{\text{eff}}^* = u_{\infty}^* \frac{S_T^*}{2(\sqrt{S_L^{*2} + \frac{1}{2}S_T^{*2}} - D^*)}$
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $Nu_m = 0,27 Re_{\text{Def}}^{0,63} Pr^{0,36}$ </div> <div style="margin-left: 20px;">(6-50)</div> <p style="text-align: center;">($100 < Re_{\text{Def}} < 2 \cdot 10^5$)</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $Nu_m = 0,4 Re_{\text{Def}}^{0,6} Pr^{0,36}$ </div> <div style="margin-left: 20px;">(6-51)</div> <p style="text-align: center;">($100 < Re_{\text{Def}} < 2 \cdot 10^5$; $S_T^* > 2S_L^*$)</p>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $Nu_m = 0,021 Re_{\text{Def}}^{0,84} Pr^{0,36}$ </div> <div style="margin-left: 20px;">(6-52)</div> <p style="text-align: center;">($Re_{\text{Def}} > 2 \cdot 10^5$)</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $Nu_m = 0,022 Re_{\text{Def}}^{0,84} Pr^{0,36}$ </div> <div style="margin-left: 20px;">(6-53)</div> <p style="text-align: center;">($Re_{\text{Def}} > 2 \cdot 10^5$)</p>

6.7.3 Wärmeübergang bei Prallstrahlen

Zur konvektiven Kühlung oder Erwärmung von Wänden werden häufig sog. Prallstrahlen eingesetzt, die aufgrund von Untertemperaturen Energie in Form von Wärme aufnehmen oder in Folge von Übertemperaturen entsprechend abgeben können. Dabei tritt die größte Temperaturdifferenz in der unmittelbaren Umgebung des Staupunktes auf. In größerer Entfernung vom Staupunkt klingt die Temperaturdifferenz zwischen der Wand und dem Fluid rasch ab, weil mit dem Strahl nur ein endlicher Fluid-Massenstrom für den Wärmeübergang zur Verfügung steht.

Bild 6.14 zeigt die prinzipielle Anordnung, die zweidimensional bzw. eben ist, wenn die Düse als Schlitzdüse (Düsenaustrittsbreite B^*) ausgeführt ist. Im Fall eines kreisförmigen Düsenauslasses (Düsenaustrittsdurchmesser D^*) liegt eine rotationssymmetrische Strömung vor, die in Bild 6.14 gezeigt ist. In Klammern sind dort die Angaben zum ebenen Fall enthalten.

Der Strahlrand stellt keine scharfe Begrenzung zur ruhenden Umgebung dar, sondern wird mit Hilfe eines Kriteriums (z. B. Ort, an dem die Geschwindigkeit 1% der maximalen Geschwindig-

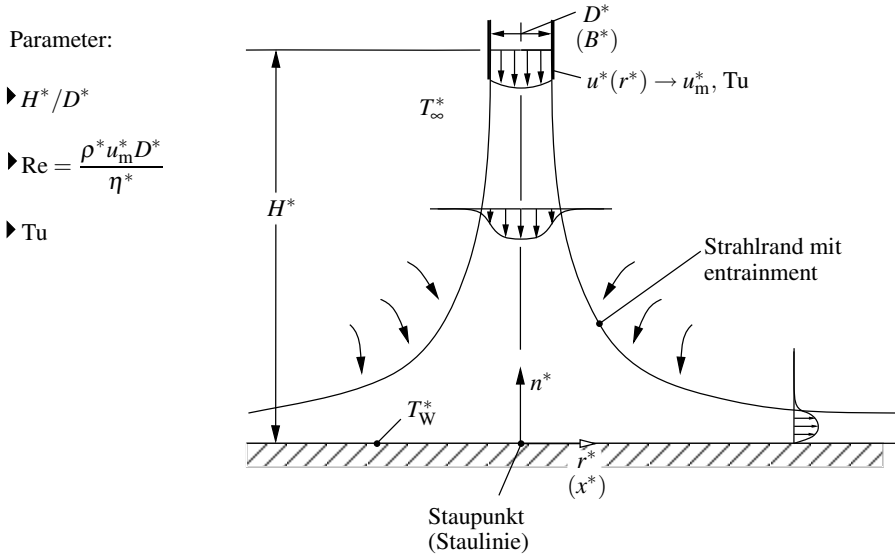


Bild 6.14: Rotationssymmetrische (ebene) Prallstrahlströmung

keit im Querschnitt $n^* = \text{const}$ bzw. $r^* = \text{const}$ beträgt) festgelegt. Der Massenstrom bleibt nach dem Austritt aus der Düse nicht konstant, sondern wächst aufgrund des sog. *entrainment-Effektes* („Mitreißen“ von ruhendem Umgebungsfluid) in Strömungsrichtung an. Als entscheidende Parameter treten neben dem Verhältnis H^*/D^* die Reynolds-Zahl Re und der Turbulenzgrad im Düsenaustritt, Tu^1 , auf.

Die Auswertung des zugehörigen Temperaturfeldes ergibt für jede Stelle r^* (bzw. im ebenen Fall x^*) die beiden entscheidenden Größen $T_W^*(r^*) - T_\infty^*$ und $(\partial T^*(r^*)/\partial n^*)_W$, mit denen der Wärmeübergang in Form der Nußelt-Zahl beschrieben werden kann. Bild 6.15 zeigt den qualitativen Verlauf der Nußelt-Zahl für zwei typische Fälle. Dabei tritt entweder ein monotoner Abfall der Nußelt-Zahl in radialer Richtung auf, oder es entsteht ein lokales Maximum. Dies ist die Folge des Überganges von laminarer zu turbulenter Strömung an der Stelle des Maximums in der Nußelt-Zahl. Solche Verläufe treten bei relativ hohen Reynolds-Zahlen und geringem Wandabstand auf.

Tab. 6.13 enthält eine empirische Nußelt-Beziehung für eine einzelne Runddüse, die den mittleren Wärmeübergang über eine kreisförmige Fläche mit dem dimensionslosen Radius $R = r^*/D^*$ um den Staupunkt angibt. Zu beachten ist dabei, dass sowohl die Re -Zahl als auch die Nu -Zahl mit dem Durchmesser der Runddüse D^* gebildet wird.

Tab. 6.14 zeigt eine empirische Nußelt-Beziehung für eine einzelne Schlitzdüse der Breite B^* , die den mittleren Wärmeübergang über eine rechteckige Fläche $2x^*L^*$ (mit der auf der Staulinie beginnenden Koordinate x^* und der Schlitzdüsenlänge L^*) um die Staulinie charakterisiert. Die Re -Zahl und auch die Nu -Zahl werden hier jeweils mit dem hydraulischen Durchmesser gebildet, der sich für $L^* \gg B^*$ zu $D_h^* = 2B^*$ ergibt².

¹ Der Turbulenzgrad ist das Verhältnis aus einer mittleren Schwankungsgeschwindigkeit und einer charakteristischen Geschwindigkeit des Problems.

² Weitere Nu -Beziehungen zu Runddüsen und Schlitzdüsen in: Goeppert, S. (2004): *Wärmeübergang an einer ebenen Platte bei Anströmung durch instationäre Prallstrahlen*, Dissertation, TU Chemnitz

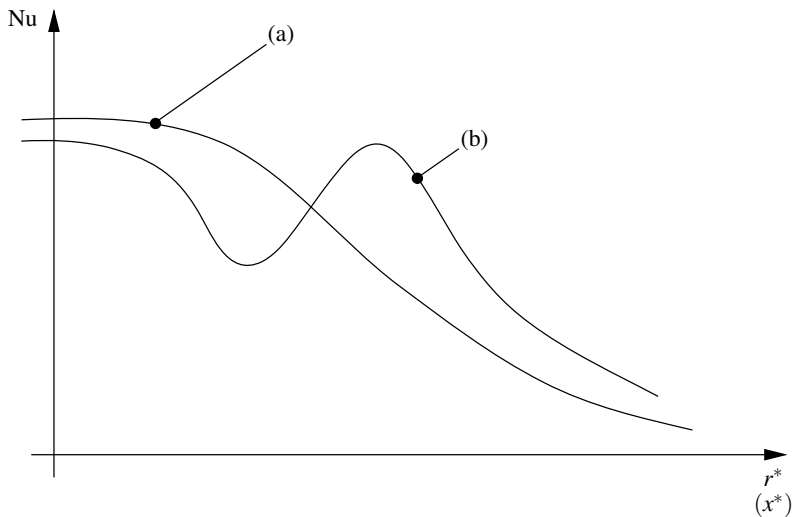


Bild 6.15: Typische Verläufe des lokalen Wärmeüberganges
 (a) bei niedrigen Reynolds-Zahlen und großen Wandabständen
 (b) bei hohen Reynolds-Zahlen und kleinen Wandabständen

6.8 Bewertungskriterien für konvektive Wärmeübergänge

Der Wärmeübergangskoeffizient α^* gemäß (2-1) und in dimensionsloser Form die Nußelt-Zahl $Nu = \alpha^* L^* / \lambda^*$ dienen zur Beurteilung der „Qualität“ des Wärmeüberganges. In Kap. 2.3 war die Frage nach einer „guten Wärmeübertragung“ pauschal dahingehend beantwortet worden, dass ein steigender Wert von α^* bzw. Nu einen verbesserten Wärmeübergang bedeutet. Bild 6.1 zeigt, wie sich ein solcher verbesserter Wärmeübergang in den unterschiedlichen Situationen bei konvektiver Wärmeübertragung auswirkt.

Es wäre aber voreilig, aus diesen Überlegungen zu folgern, dass grundsätzlich versucht werden müsste, α^* bzw. Nu zu erhöhen, um ein Wärmeübertragungsproblem optimal zu lösen. Die Wärmeübertragung stellt bei konvektiven Übertragungssituationen nur einen Teilaspekt des Gesamtproblems dar. Zusätzlich müssen mindestens folgende zwei Aspekte berücksichtigt werden:

- Der Aufwand für Maßnahmen zur Erhöhung des Wärmeüberganges muss ins Verhältnis zum „Gewinn“, der damit erzielt werden kann, gesetzt werden (\rightarrow ökonomische Analyse des Problems).
- Die Maßnahme sollte aus thermodynamischer Sicht sinnvoll sein, was sich wesentlich auf die Entropieproduktion im Zusammenhang mit unterschiedlichen Realisierungen des Wärmeüberganges bezieht (\rightarrow exergetische Analyse des Problems).

Wenn beide Teilanalysen im konkreten Fall zu widersprüchlichen Ergebnissen führen, muss ein Optimum unter gleichzeitiger Berücksichtigung beider Aspekte gesucht werden, was dann (etwas „sperrig“) als *exergoökonomische Analyse*¹ des Problems bezeichnet werden kann.

¹ s. dazu z. B.: Tsatsaronis, G. (1985): *Thermoökonomische Analyse von Energieumwandlungsprozessen*, Habilitationsschrift, RWTH Aachen

Tabelle 6.13: Mittlerer Wärmeübergang über dem dimensionslosen Radius R bei einem rotationssymmetrischen Prallstrahl auf eine ebene Platte, Parameter: dimensionsloser Abstand H und Re_D .
(Daten aus: Verein Deutscher Ingenieure (2002): *VDI-Wärmeatlas*, 9. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Kapitel Gk)

$$Nu_m = Pr^{0,4} \frac{1 - \frac{1}{R}}{R + 0,1(H-6)} f(Re_D) \quad (6-56)$$

$$Nu_m = \frac{\dot{q}_{Wm}^* D^*}{\lambda^* (T_W^* - T_\infty^*)} \quad Re_D = \frac{\rho^* u_m^* D^*}{\eta^*} \quad Pr = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*} \quad H = \frac{H^*}{D^*} \quad R = \frac{r^*}{D^*}$$

mit $f(Re_D) = 2 [Re_D (1 + 0,005 Re_D^{0,55})]^{0,5}$
 u_m^* : mittlere Düsenaustrittsgeschwindigkeit
 D^* : Düsendurchmesser
 H^* : Abstand Düsenaustritt/Platte
 T_∞^* : Düsenaustrittstemperatur
 T_W^* : Wandtemperatur der Platte
 Gültigkeitsbereich: $2,5 \leq R \leq 7,5$; $2 \leq H \leq 12$; $2000 \leq Re_D \leq 400000$
 Stoffwerte bei $T_m^* = \frac{T_W^* + T_\infty^*}{2}$

Tabelle 6.14: Mittlerer Wärmeübergang über der dimensionslose Breiten x bei einem Prallstrahl aus einer Schlitzdüse auf eine ebene Platte, Parameter: dimensionsloser Abstand H und Re_D .
(Daten aus: Verein Deutscher Ingenieure (2002): *VDI-Wärmeatlas*, 9. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Kapitel Gk)

$$Nu_m = \frac{1,53 Re_{2B}^m}{x + H + 1,39} Pr^{0,42} \quad (6-57)$$

$$Nu_m = \frac{\dot{q}_{Wm}^* 2B^*}{\lambda^* (T_W^* - T_\infty^*)} \quad Re_{2B} = \frac{\rho^* u_m^* 2B^*}{\eta^*} \quad Pr = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*} \quad H = \frac{H^*}{2B^*} \quad x = \frac{x^*}{2B^*}$$

mit $m = 0,695 - \frac{1}{x + H + 1,33 + 3,06}$
 u_m^* : mittlere Düsenaustrittsgeschwindigkeit
 B^* : Schlitzdüsenbreite
 H^* : Abstand Düsenaustritt/Platte
 T_∞^* : Düsenaustrittstemperatur
 T_W^* : Wandtemperatur der Platte
 Gültigkeitsbereich: $2 \leq x \leq 25$; $2 \leq H \leq 10$; $3000 \leq Re_{2B} \leq 90000$
 Stoffwerte bei $T_m^* = \frac{T_W^* + T_\infty^*}{2}$

Im Folgenden soll anhand von Beispielen erläutert werden, wie dabei grundsätzlich vorzugehen ist.

6.8.1 Ökonomische Analyse konvektiver Wärmeübertragung

In vielen technischen Problemen liegt eine Situation vor, in der Energie in Form von Wärme kontinuierlich an ein strömendes Fluid übertragen werden soll und dabei eine bestimmte Temperaturdifferenz ΔT^* zur Verfügung steht. Diese Temperaturdifferenz hat im Weiteren die Bedeutung einer „charakteristischen Temperaturdifferenz“ des Problems. Sie muss in Bezug auf die in der Regel ortsabhängigen Temperaturunterschiede zwischen dem Fluid und der Systemgrenze insofern „charakteristisch“ sein, als sie einem Mittelwert, einem Anfangswert o. ä. entspricht. Die Zielgröße in einem solchen Problem ist damit der zu übertragende Wärmestrom \dot{Q}_W^* , gemessen in Watt, der insgesamt an den Fluid-Massenstrom \dot{m}^* übertragen werden soll. Wenn dies konvektiv geschieht, kann der Vorgang durch die entsprechende Nußelt-Zahl beschrieben werden, und es gilt mit $\dot{q}_W^* = \dot{Q}_W^*/A^*$

$$\dot{Q}_W^* = \text{Nu} \frac{A^*}{L^*} \lambda^* \Delta T^*. \quad (6-58)$$

Bei vorgegebenem ΔT^* kann ein bestimmter Wärmestrom an ein bestimmtes Fluid (λ^* liegt fest) prinzipiell auf allen Wegen erreicht werden, auf denen das Produkt $\text{Nu}A^*/L^*$ denselben Wert besitzt. Wenn die Übertragungsflächen geometrisch ähnlich bleiben, können sie als $A^* = c\hat{L}^*L^*$ mit zwei geometrischen Längen \hat{L}^* und L^* beschrieben werden. Damit lautet die einzuhaltende Forderung jetzt $\text{Nu}\hat{L}^* = \text{const}$. Daraus folgt unmittelbar, dass die gestellte Aufgabe

- mit einer großen Übertragungsfläche (\hat{L}^* groß) und einem schlechten Wärmeübergang (Nu klein), oder
- mit einer kleinen Übertragungsfläche (\hat{L}^* klein) und einem guten Wärmeübergang (Nu groß)

gelöst werden kann.

Wenn die Entscheidung für eine bestimmte Variante unter ökonomischen Gesichtspunkten getroffen werden soll, so ist zunächst zu klären, welche Bedeutung im konkreten Fall den Investitionskosten und welche den Betriebskosten zukommt. Erst danach kann prinzipiell entschieden werden, welcher Kostenfaktor (KF) einer bestimmten Variante zugeschrieben werden kann. Dieser Kostenfaktor muss die Investitions- und Betriebskosten auf der Basis eines bestimmten Nutzungsprofils ins Verhältnis setzen und soll eine Variante als vorteilhaft ausweisen, wenn sein Zahlenwert niedrig ist.

Zusätzlich bewegt sich die Entscheidung in einem bestimmten Rahmen, der durch Beschränkungen bzgl. der Baugröße, des Gewichts, der Leistungsversorgung u. ä. gesetzt wird. Damit wird auch ein Rahmen für die charakteristische Länge \hat{L}^* vorgegeben.

Diese Überlegungen sind in Bild 6.16 skizziert, indem $\text{Nu}\hat{L}^* = \text{const}$ qualitativ aufgetragen ist. Wenn einerseits *Baugrößenbeschränkungen* und andererseits *physikalische Beschränkungen* berücksichtigt werden, verbleibt ein Bereich von prinzipiell möglichen Varianten. Wenn dort z. B. fünf Varianten bzgl. ihres Kostenfaktors KF quantifiziert werden können, kann diejenige mit dem niedrigsten Wert von KF als (nahezu) optimal unter ökonomischen Gesichtspunkten ausgewählt werden.

Die physikalischen Beschränkungen ergeben sich im vorliegenden Fall aus dem Bereich, innerhalb dessen die Nußelt-Zahl des Problems variieren kann. Bei völliger geometrischer Ähnlichkeit aller Varianten bleibt im Wesentlichen die Reynolds-Zahl des Problems, über deren Veränderungen die Nußelt-Zahl beeinflusst werden kann. Dies setzt aber voraus, dass die Reynolds-Zahl bei (unterstellt) konstantem Massenstrom variiert werden kann. Dies ist z. B. bei Rohrströmungen der Fall ($\dot{m}^* = \text{Re}_D D^* \eta^* \pi/4$), nicht aber bei Strömungen durch ebene Kanäle der

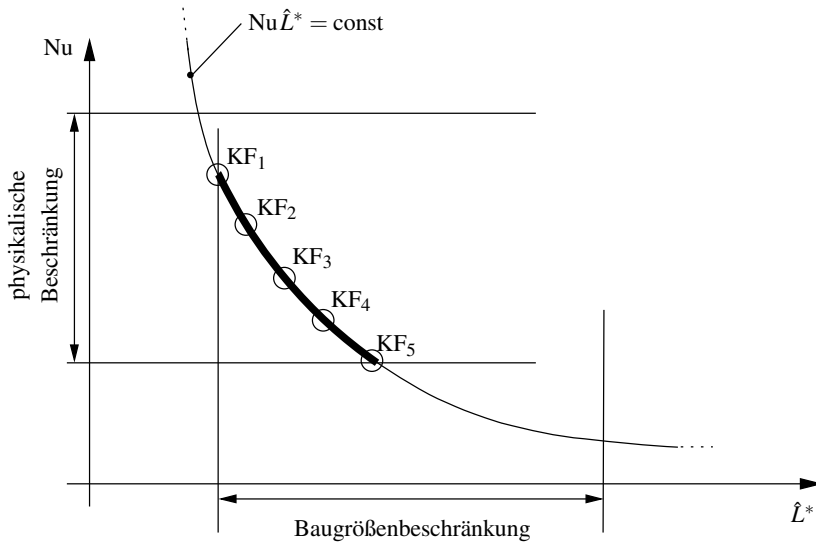


Bild 6.16: Mögliche Varianten eines konvektiven Wärmeübertragungsproblems; Auswahl unter ökonomischen Gesichtspunkten

variablen Höhe H^* und der konstanten Breite B^* ($\dot{m}^* = \text{Re}_H B^* \eta^*$). Wenn eine Beeinflussung durch unterschiedliche Reynolds-Zahlen nicht möglich ist, wird man versuchen, durch spezielle Maßnahmen (wie Turbulenzerzeuger oder strukturierte Oberflächen) die Nußelt-Zahl zu beeinflussen.

6.8.2 Exergetische Analyse konvektiver Wärmeübertragung

Die ökonomische Analyse betrachtet ein Problem weitgehend unter *energetischen* Gesichtspunkten (übertragene Anteile von Energien, Antriebsleistung,...) und greift dabei letztlich auf den 1. Hauptsatz der Thermodynamik zurück (\rightarrow Energiebilanz). Exergetische Gesichtspunkte, d. h., die Frage danach, wieviel Exergie in einem Prozess vernichtet wird, weil darin Entropie erzeugt wird, bleibt dabei völlig unberücksichtigt. Dies kann aber durchaus von Bedeutung sein und ergibt eine weitere Möglichkeit, konvektive Wärmeübertragungsprozesse zu optimieren. Dafür wird dann der 2. Hauptsatz der Thermodynamik herangezogen (weshalb solche Analysen im englischsprachigen Raum auch als „second law analysis“ bezeichnet werden).

Dabei wird davon ausgegangen, dass Entropieerzeugung und eine damit unmittelbar verbundene Exergievernichtung in einem Wärmeübertragungs-Prozess so gering wie möglich gehalten werden sollte. Dies ist z. B. bei Kreisprozessen im Zusammenhang mit Wärmekraftanlagen von großer Bedeutung. In diesen Kreisprozessen kann maximal die mit der Wärmeübertragung eingebrachte Exergie als technische Arbeit (in der Turbine) genutzt werden. Dieser Anteil wird aber in dem Maße verringert, in dem in den einzelnen Teilprozessen (und damit auch bei der Wärmeübertragung) Entropieproduktion¹ auftritt, die unmittelbar als Exergievernichtung interpretiert werden kann.

Die Bestimmung der Entropieproduktion auch in komplexen konvektiven Wärmeübertragungs-

¹ Herwig, H. (2004): *Strömungsmechanik A-Z*, Vieweg Verlag, Braunschweig / Stichwort: Entropieproduktion

situationen ist stets möglich, wenn die Geschwindigkeits- und Temperaturfelder in den Prozessen im Detail bekannt sind. Wenn Wärmeübergänge numerisch berechnet werden, liegt diese Information vor, und die Entropie (sowie ihre Erzeugung bzw. Produktion) kann als sog. *post-processing* Größe im Zuge solcher Berechnungen bestimmt werden.

Da Entropieproduktion bei der konvektiven Wärmeübertragung im Zusammenhang mit

- der Wärmeleitung und
- der Dissipation mechanischer Energie

vorkommt (vgl. dazu Kap. 4.4), können und sollten beide Anteile auch getrennt berechnet werden. Dies ist besonders einfach, wenn eine laminare Strömung vorliegt. Bei turbulenten Strömungen bedarf es einiger Zusatzüberlegungen, auf die hier nicht eingegangen werden kann.¹

Bei laminaren Strömungen werden beide Anteile der Entropieproduktion durch die molekularen Austauschgrößen λ^* (Wärmeleitfähigkeit) und η^* (dynamische Viskosität) sowie die zugehörigen Temperatur- und Geschwindigkeitsgradienten bestimmt. Für die lokalen Entropieproduktionsraten $\dot{S}_{\text{irr}}^{*'''}$ (mit den Einheiten W/Km³) gilt:

$$\dot{S}_{\text{irr,W}}^{*'''} = \frac{\lambda^*}{T^{*2}} \left[\left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] \quad (6-59)$$

$$\dot{S}_{\text{irr,D}}^{*'''} = \frac{\eta^*}{T^*} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] \right. \quad (6-60)$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right)^2 \right\} \quad (6-61)$$

Die gesamte Entropieproduktion in einem endlichen Kontrollraum mit dem Volumen V^* ist dann

$$\dot{S}_{\text{irr}}^* = \iiint (\dot{S}_{\text{irr,W}}^{*'''} + \dot{S}_{\text{irr,D}}^{*'''}) dV^*. \quad (6-62)$$

Da die Temperatur- und Geschwindigkeitsgradienten für eine bekannte Lösung (in Form eines Strömungs- und Temperaturfeldes) bestimmt werden können, kann die Entropieproduktion gemäß (6-62) als sog. *post-processing-Größe* im Anschluss an die eigentliche Lösung eines Problems ermittelt werden.

Als ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 6.1 für eine solche Analyse wird eine einfache turbulente Rohrströmung daraufhin untersucht, ob es bei der Wärmeübertragung mit konstanter Wandwärmestromdichte \dot{q}_W^* ein *exergetisches* Optimum bzgl. der Kombination D^*/L^* (D^* : Rohrdurchmesser, L^* : Rohrlänge) gibt.

Optimierungen unter exergetischen Gesichtspunkten können zu anderen Ergebnissen bzgl. der Optima führen als diejenigen unter ökonomischen Aspekten. Es müssen dann (wie zuvor erläutert) zusätzliche Kriterien herangezogen werden, die z. B. im Sinne einer exergoökonomischen Analyse zu einer Entscheidung führen können, welche von verschiedenen möglichen Varianten als insgesamt optimal angesehen werden kann.

¹ Herwig, H.; Kock, F. (2006): *Direct and Indirect Methods of Calculating Entropy Generation Rates in Turbulent Convective Heat Transfer Problems*, Heat and Mass Transfer, Online First

ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 6.1: Minimale Entropieproduktion

Wenn ein Massenstrom \dot{m}^* um eine bestimmte Temperaturdifferenz, z. B. 10°C , erwärmt werden soll, und dafür eine Rohrleitung mit einer Wandwärmestromdichte $\dot{q}_W^* = 10^5 \text{ W/m}^2$ zur Verfügung steht, so ist zunächst nicht klar, ob es von Vorteil ist, ein kurzes Rohr mit großem Durchmesser, oder ein langes Rohr mit kleinem Durchmesser zu wählen. Wenn die Frage unter *exergetischen* Gesichtspunkten entschieden werden soll, geht es darum, diejenige geometrische Variante auszuwählen, bei der die geringste Entropieproduktion auftritt. Eine physikalische Vorüberlegung ergibt dabei folgende qualitativen Aussagen:

- in kurzen Rohren mit großen Durchmessern werden über den Querschnitt hinweg kleine Geschwindigkeits-, aber große Temperaturunterschiede auftreten ($\rightarrow \dot{S}_{\text{irr,D}}^{III*}$ klein, $\dot{S}_{\text{irr,W}}^{III*}$ groß),
- bei langen Rohren mit kleinen Durchmessern treten umgekehrt große Geschwindigkeits- aber kleine Temperaturunterschiede auf ($\rightarrow \dot{S}_{\text{irr,D}}^{III*}$ groß, $\dot{S}_{\text{irr,W}}^{III*}$ klein).

Damit kann erwartet werden, dass „im mittleren geometrischen Bereich“ Zustände auftreten, bei denen keine der beiden Ursachen zu großen Werten von $\dot{S}_{\text{irr,D}}^{III*}$ und $\dot{S}_{\text{irr,W}}^{III*}$ führt, und damit die gesamte Entropieproduktionsrate \dot{S}_{irr}^* ein relatives Minimum annimmt.

Die konkrete Auswertung für dieses Beispiel ergibt einen Verlauf der Entropieproduktionsrate wie im Bild 6.17 gezeigt. Dieser entsteht als Interpolationskurve durch sieben konkrete numerische Lösungen für das turbulente Problem. Details finden sich in: Kock, F. (2003): *Bestimmung der lokalen Entropieproduktion in turbulenten Strömungen und deren Nutzung zur Bewertung konvektiver Transportprozesse*, Dissertation, TU Hamburg-Harburg bzw. Bejan, A. (1996): *Entropy Generation Minimization*, CRC Press, Boca Raton .

Anstelle des Durchmesser D^* ist auf der Abszisse die Reynolds-Zahl $\text{Re}_D = \rho u_m^* D^* / \eta^*$ aufgetragen. Es ist erkennbar, dass etwa bei $\text{Re}_D = 10^5$ und damit für einen ganz bestimmten Durchmesser ein klares Minimum der Entropieproduktionsrate auftritt. Diese Information wäre weder dem Verlauf der Nußelt-Zahl noch dem des Druckverlustbeiwertes (jeweils als Funktion der Reynolds-Zahl) zu entnehmen gewesen.

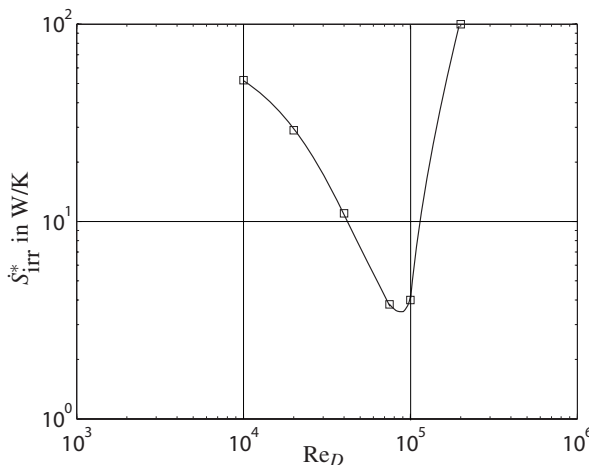


Bild 6.17: Entropieproduktion in einer turbulenten ausgebildeten Rohrströmung
Daten einer CFD-Simulation (CFD: computational fluid dynamics)

ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 6.2: Verbesserter Wärmeübergang am Rohr durch eine Wärmedämmung des Rohres, vgl. auch Übungsaufgabe 6.3

Die Überschrift klingt zunächst paradox, da eine Wärmedämmung üblicherweise angebracht wird, um den Wärmeübergang zu verschlechtern, d. h. Verluste durch einen unerwünschten Wärmeübergang an die Umgebung zu reduzieren. Wie die anschließende Analyse zeigt, wirkt eine angebrachte Wärmedämmung aber nicht immer so wie gewünscht.

Dazu wird eine Rohrleitung mit dem Außendurchmesser D^* betrachtet, die zunächst keine Wärmedämmschicht aufweist. Wenn die (Außen-) Wandtemperatur T_W^* größer als die Umgebungstemperatur T_∞^* ist, entsteht durch den Temperaturunterschied $\Delta T^* = T_W^* - T_\infty^*$ eine natürliche Konvektionsströmung um die (horizontal) verlaufende Rohrleitung, wie dies in Bild 6.18 angedeutet ist (linkes Teilbild). Der damit verbundene Wärmeübergang kann durch einen mittleren Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_m^* = \dot{q}_W^* / \Delta T^*$ beschrieben werden, wobei dann \dot{q}_W^* und ΔT^* ebenfalls jeweils mittlere Werte sind. Bei einer Rohrlänge L^* beträgt die Übertragungsfläche $A^* = \pi D^* L^*$ und für den insgesamt auftretenden Wärmestrom gilt

$$\dot{Q}_W^* = \dot{q}_W^* A^* = \alpha_m^* \pi D^* L^* (T_W^* - T_\infty^*).$$

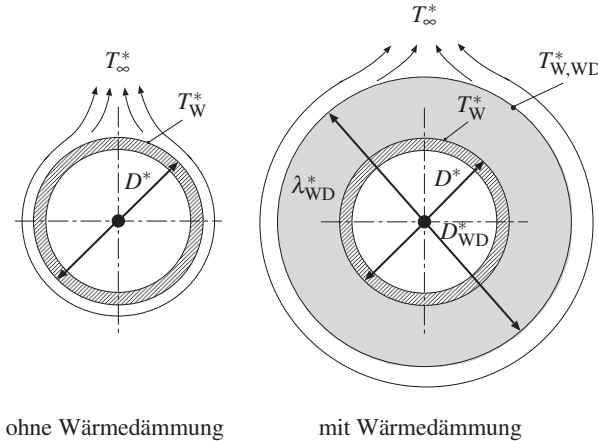


Bild 6.18: Rohr ohne und mit Isolierung (Wärmedämmung)

Wird nun eine thermische Dämmung der Wandstärke $s^* = (D_{WD}^* - D^*)/2$ aufgebracht, so verlagert sich die natürliche Konvektionsströmung, wie im rechten Teilbild angedeutet, nach außen und für den Wärmestrom $\dot{Q}_{W,WD}^*$ gilt jetzt

$$\dot{Q}_{W,WD}^* = \alpha_m^* \pi D_{WD}^* L^* (T_{W,WD}^* - T_\infty^*).$$

Da der Durchmesser D_{WD}^* gegenüber dem Fall ohne Wärmedämmung D^* größer geworden ist, die charakteristische Temperaturdifferenz aber kleiner wird (in der Wärmedämmung erfolgt ein Temperaturabfall von T_W^* auf $T_{W,WD}^*$), ist nicht auf Anhieb zu erkennen, ob $\dot{Q}_{W,WD}^*$ kleiner, gleich oder größer als \dot{Q}_W^* ist! Um dies zu entscheiden, muss der Wärmedurchgang durch die Wärmedämmung näher betrachtet werden. Er besitzt einen *Wärmeleitungswiderstand* (vgl. (5-9)) in der Wärmedämmung

$$R_{WD}^* = \frac{1}{2\pi L^* \lambda_{WD}^*} \ln \frac{D_{WD}^*}{D^*}.$$

Zusammen mit dem Wärmeübergangswiderstand (vgl. (2-1)) zwischen der Oberfläche und der Umgebung

$$R_{\alpha}^* = \frac{1}{\alpha_m^* A_{\text{WD}}^*}$$

lautet der thermische Gesamtwiderstand

$$R^* = R_{\text{WD}}^* + R_{\alpha}^* = \frac{1}{2\pi L^*} \left(\frac{\ln(D_{\text{WD}}^*/D^*)}{\lambda_{\text{WD}}^*} + \frac{2}{\alpha_m^* D_{\text{WD}}^*} \right).$$

Diese Funktion besitzt als $R^* = R^*(D_{\text{WD}}^*)$ ein Minimum (!) beim sog. kritischen Durchmesser

$$D_{\text{WD},k}^* = \frac{2\lambda_{\text{WD}}^*}{\alpha_m^*}.$$

Für einen (realistischen) Wert von $\alpha_m^* = 5 \text{ W/m}^2\text{K}$ und $\lambda_{\text{WD}}^* = 0,06 \text{ W/mK}$ gilt $D_{\text{WD},k}^* = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$.

Rohre mit einem kleineren Durchmesser als ihrem zugehörigen kritischen Durchmesser zeigen damit ein „merkwürdiges Verhalten“, wenn auf sie eine immer dickere Wärmedämmschicht aufgebracht wird:

- Für Dämmstärken $s^* < (D_{\text{WD},k}^* - D^*)/2$ nimmt der Wärmestrom $\dot{Q}_{\text{W,WD}}^*$ gegenüber dem Wert \dot{Q}_{W}^* zu.
- Erst bei Dämmstärken $s^* = (D_{\text{WD},k}^* - D^*)/2$ kehrt sich dieser Trend um.
- Erst bei einer Dämmstärke $s^* > (D_{\text{WD},k}^* - D^*)/2$ wird wieder derselbe Wert des Wärmestromes wie ohne Wärmedämmung erreicht. Wird s^* dann weiter erhöht, tritt die gewünschte Wirkung ein, und es gilt $\dot{Q}_{\text{W,WD}}^* < \dot{Q}_{\text{W}}^*$.

Diese Situation wirkt sich übrigens bei elektrischen Leitern, die mit einer Dämmschicht versehen sind, positiv aus. Die elektrische Isolierung ist gleichzeitig eine thermische Isolierung (Wärmedämmung). Wegen der kleinen Leitungsquerschnitte gilt häufig $D^* < D_{\text{WD},k}^*$, so dass die Isolierung zu einem besseren Wärmeübergang führt. Da der elektrische Widerstand von Metallen mit sinkender Temperatur abnimmt, verringert sich durch die Isolierung der elektrische Widerstand des Leiters. Bei gleich bleibender Spannung steigt damit die Stromstärke im Leiter an.

ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 6.3: Wärmeübergangsmessungen am kalten Körper

Diese Überschrift klingt zunächst ebenfalls paradox, dahinter steht aber ein sinnvolles Konzept zur Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten bei voll entwickelten turbulenten Strömungen. Es ist durchaus attraktiv, Wärmeübergänge am „kalten Objekt“ messen zu können, weil dann z. B. bestimmt werden kann, wie sich Turbinenschaufeln in einer Gasturbine bzgl. des Wärmeüberganges verhalten, ohne dass man sie einer möglicherweise zerstörerischen thermischen Beaufschlagung unterziehen müsste.

Die Grundideen für Messungen „am kalten Objekt“ sind folgende:

- In voll turbulenten Strömungen ist der Wärmeübergang lokal bestimmt, d.h. nur die lokalen Strömungs- und Temperaturgrößen bestimmen den Wärmeübergang. Die thermische Vorgeschichte spielt (in erster Näherung) keine Rolle. Eine Folge davon ist z. B., dass bei turbulenten Strömungen bzgl. des Wärmeüberganges (anders als bei laminaren Strömungen) nicht nach verschiedenen thermischen Randbedingungen unterschieden werden muss.
- Bei konvektiven Wärmeübergängen ist der Wärmeübergangskoeffizient (anders als bei natürlicher Konvektion) nicht von der treibenden Temperaturdifferenz abhängig.

Beide Punkte zusammen genommen führen zu folgender Überlegung: Statt den Wärmeübergang an einem insgesamt thermisch beaufschlagten Körper (mit dann vorliegenden großen treibenden Tem-

peraturdifferenzen) zu messen, genügt es, lokal einen sehr geringen Wärmeübergang (mit kleinen treibenden Temperaturdifferenzen) zu *erzeugen* und ihn gleichzeitig zu messen.

Dieses Konzept kann mit einem Sensor verwirklicht werden, dessen prinzipieller Aufbau in Bild 6.19 gezeigt ist. Er besteht aus zwei dünnen Nickel-Folien, die übereinander liegen und durch eine ebenfalls dünne Polyimid-Isolierschicht getrennt sind. Alle drei Folien sind als Sensor auf der zu vermessenden Oberfläche angebracht. Die Nickelfolien können von einem elektrischen Strom durchflossen werden und dienen dann als Heizfolie und (bzw. gleichzeitig) als zu kalibrierendes Widerstandsthermometer.

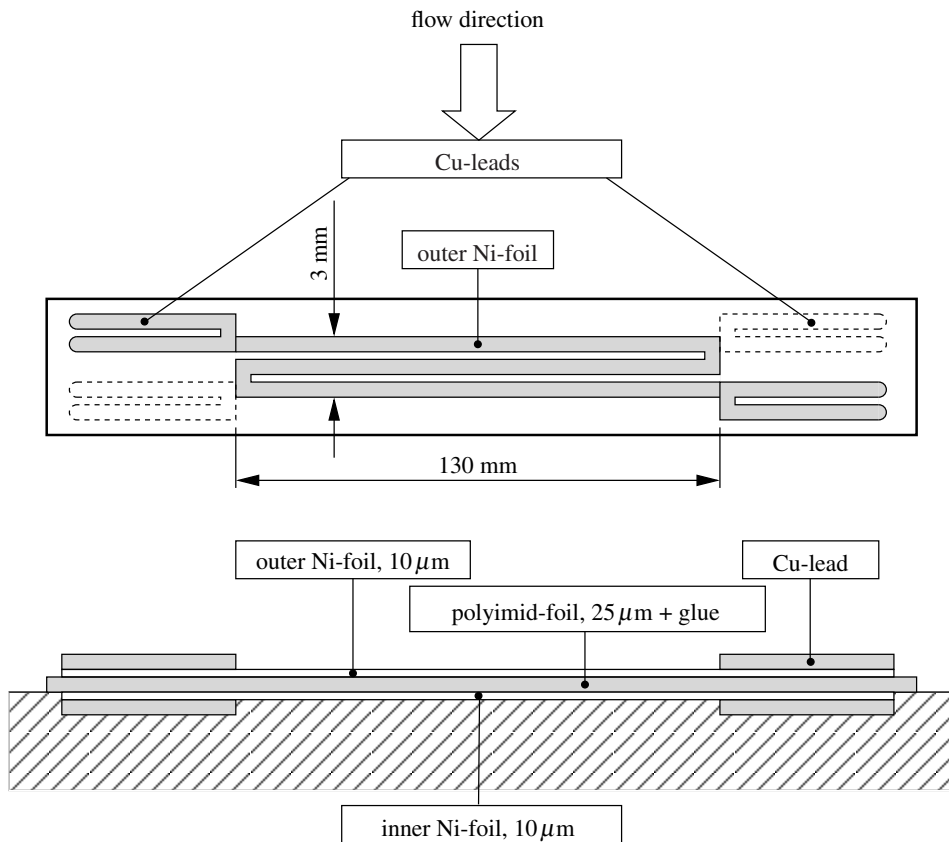


Bild 6.19: Prinzipieller Sensoraufbau, Bild aus der Originalarbeit mit englischer Beschriftung

Die obere, der Strömung zugewandte Folie ist die eigentliche Heizfolie. Die dort dissipierte elektrische Energie soll in Form eines dann bekannten Wandwärmestromes in die Strömung gelangen. Um zu verhindern, dass ein Teil dieser Energie in den Körper geleitet wird, muss die untere Folie als „Gegenheizung“ so betrieben werden, dass zwischen den beiden Folien kein Temperaturunterschied entsteht und damit auch kein Wärmestrom von der oberen Folie in die Wand fließt.

Man kennt dann die aktuelle Wärmestromdichte (aufgrund der elektrischen Heizung), die Temperatur der oberen Folie sowie aus einer Messung, bevor geheizt wurde, die Temperatur T_{∞}^* des Außenraumes. Aus diesen drei Größen kann der Wärmeübergangskoeffizient an der Messstelle als $\alpha^* = \dot{q}_W^* / (T_W^* - T_{\infty}^*)$ ermittelt werden.

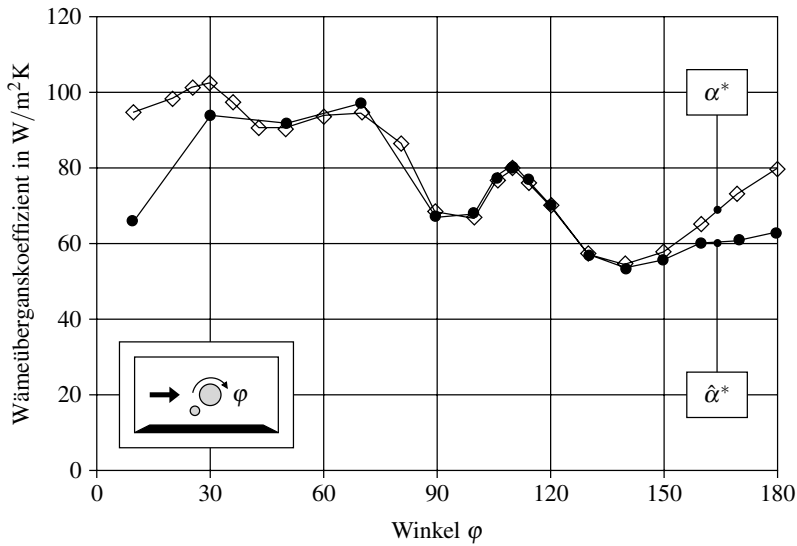


Bild 6.20: Wärmeübergang am querangeströmten Kreiszylinder (mit zusätzlichem Turbulenzgenerator, unten links)

$\hat{\alpha}^*$: Messungen am kalten Zylinder

α^* : konventionelle Messungen am beheizten Zylinder

Dieses Messprinzip wurde an einem querangeströmten Kreiszylinder getestet. Bild 6.20 zeigt den Vergleich mit konventionellen Messungen an einem insgesamt beheizten Zylinder. Im dunkelgrau unterlegten Winkelbereich des Kreiszylinders sind die getroffenen Voraussetzungen gut erfüllt, so dass dort eine gute Übereinstimmung erwartet werden kann. Dies ist der Fall, aber selbst außerhalb dieses Bereiches liegt eine recht gute Übereinstimmung vor.

Details dieser Messungen sind zu finden in: Mocikat, H.; Herwig, H. (2006): *An advanced thin foil sensor concept for heat flux and heat transfer measurements in fully turbulent flows*, Heat and Mass Transfer, Online First

ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 6.4: Gefühlte Temperatur

Viele von uns werden sich schon über Wetterberichtsmeldungen gewundert haben, in denen es etwa heißt: „... herrschen Temperaturen von bis zu -12°C , die allerdings gefühlten Werten von -25°C entsprechen“. Dies klingt nach einer wenig wissenschaftlich fundierten Aussage, hat aber durchaus einen klar beschreibbaren physikalischen Hintergrund, der zu einer Definition der *gefühlten Temperatur* t_f^* führt.

Unter der *gefühlten Temperatur* versteht man diejenige fiktive Temperatur, die unter der Bedingung $u_\infty^* = 0$ (keine Umströmung des menschlichen Körpers) auf denselben Wärmeübergang zwischen dem menschlichen Körper und seiner Umgebung führen würde, wie er tatsächlich bei $u_\infty^* > 0$ vorhanden ist. Der tatsächliche erzwungene Wärmeübergang bei $u_\infty^* > 0$ wird also durch einen fiktiven Wärmeübergang bei natürlicher Konvektion ($u_\infty^* = 0$) ersetzt.

Unterstellt man eine einheitliche und zeitlich konstante Körperoberflächentemperatur t_K^* , so gilt

$Nu_W(t_K^* - t_\infty^*) = Nu_0(t_K^* - t_f^*)$, woraus folgt:

$$t_f^* = t_K^* - \frac{Nu_W}{Nu_0}(t_K^* - t_\infty^*) \quad (6-63)$$

Dabei sind Nu_W die Nußelt-Zahl bei Wind ($u_\infty^* > 0$) und Nu_0 die Nußelt-Zahl bei Windstille ($u_\infty^* = 0$). Diese Definition unterstellt also,

- dass wir Temperaturen „fühlen“ können,
- dass wir den erhöhten Wärmeübergang aufgrund von Wind (erzwungene Konvektion, Nu_W) gegenüber demjenigen bei Windstille (natürliche Konvektion, Nu_0) als ein „Absinken“ der Umgebungstemperatur auf ein Niveau $t_f^* < t_\infty^*$ interpretieren, und diese fiktive Temperatur dann „fühlen“.

Das Konzept der gefühlten Temperatur ist nur insofern problematisch, als es unterstellt, dass der Mensch ein *Temperatur*empfinden besitzt, d. h., über entsprechende Sensoren in der Haut mit der Körperoberfläche als Thermometer agieren kann. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie ein einfacher Versuch zeigt:

Kühlt man eine Hand in kaltem Wasser ab, erwärmt die andere Hand in heißem Wasser und bringt anschließend beide Hände in engen Kontakt, so interpretieren wir über lange Zeit die Empfindungen der einen Hand als „kalt“ (niedrige Temperatur) und die der anderen Hand als „warm“ (hohe Temperatur). Aber: An der „Messstelle“, d. h., Kontaktfläche beider Hände, liegt wegen des dort herrschenden lokalen thermischen Gleichgewichtes eine einheitliche Temperatur vor.

In Wirklichkeit haben wir kein Empfinden für die *Temperatur* an der Körperoberfläche, sondern für den *Temperaturgradienten*, d. h. für die dort vorliegende Wärmestromdichte \dot{q}^* . Im angeführten Beispiel ist diese in der einen Hand positiv (\dot{q}^* fließt in Richtung der nach außen weisenden Flächennormalen; Empfindung: kalt), in der anderen Hand aber entsprechend negativ (\dot{q}^* fließt entgegen der nach außen weisenden Flächennormalen; Empfindung: warm). Dass wir diesen Empfindungen Temperaturen zuordnen, ist psychologisch, aber nicht physiologisch oder physikalisch begründbar.

Vor diesem Hintergrund ist die mit (6-63) eingeführte gefühlte Temperatur wie folgt zu interpretieren: t_f^* nach (6-63) ist eindeutig definiert, nur haben wir keine Möglichkeit, t_f^* über unser thermisches Empfinden zu „messen“. Dies bedeutet umgekehrt, dass wir eine Angabe über t_f^* nur höchst subjektiv als Information nutzen können. Gleichwohl wird stets die Tendenz richtig erfasst. Die Tatsache, dass $t_f^* < t_\infty^*$ gilt (da in (6-63) stets $Nu_W > Nu_0$), ist Ausdruck der erhöhten Wärmestromdichte aufgrund des Umströmungseinflusses (erzwungene Konvektion bei $u_\infty^* > 0$). Diese Wärmestromdichte können wir wiederum mit den thermischen Sensoren in unserer Haut „messen“.

Die Auswertung der Definitionsgleichung für t_f^* ist in verschiedenen Literaturquellen älteren Datums zu finden und wird stets in folgender Form angegeben (s. z. B. Court, A. (1948): *Windchill*, Bull. Amer. Meteor. Soc., **29**, 487 - 493)

$$t_f^* = 33^\circ\text{C} - \left[a_1 + a_2^* \sqrt{u_\infty^*} - a_3^* u_\infty^* \right] (33^\circ\text{C} - t_\infty^*) \quad (6-64)$$

mit: $a_1 = 0,45 \dots 0,55$

$$a_2^* = (0,417 \dots 0,432)(\text{s/m})^{1/2}$$

$$a_3^* = 0,0432 \text{ s/m}$$

Die Körperoberflächentemperatur wird also zu $t_K^* = 33^\circ\text{C}$ gewählt. Der Ausdruck [...] in (6-64) stellt das Verhältnis Nu_W/Nu_0 dar und ist insofern problematisch, als er keine monoton steigende Funktion für $u_\infty^* \rightarrow \infty$ ist, sondern etwa bei $u_\infty^* = 25 \text{ m/s}$ ein Maximum besitzt. Dies ist physikalisch in keiner Weise begründet, da der Wärmeübergang mit steigender Konvektionsgeschwindigkeit stets ansteigt. Gleichung (6-64) kann also allenfalls für Geschwindigkeiten unterhalb von 25 m/s eine Korrelationsgleichung darstellen.

Darüber hinaus irritiert, dass t_f^* für $u_\infty^* = 0$ nicht gleich der Umgebungstemperatur t_∞^* ist. Dies wäre nur der Fall, wenn bei $u_\infty^* = 0$ zusätzlich $a_1 = 1$ gelten würde, wie (6-64) zeigt. Gleichung (6-64) mit

den jeweils niedrigsten Zahlenwerten für a_1 und a_2^* ergibt die nachfolgenden Werte für die fühlbare Temperatur t_f^* bei vier verschiedenen Umgebungstemperaturen t_∞^* .

Die „Eingangsmeldung“ zu diesem Beispiel ist in der Tabelle grau markiert. Offensichtlich herrscht an diesem Tag ein Wind mit $u_\infty^* = 8 \text{ m/s}$, was etwa der Windstärke 5 Bft (Beaufort) entspricht. Weitere Details finden sich unter dem Stichwort „gefühlbare Temperatur“ in: Herwig, H. (2000): *Wärmeübertragung A - Z*, Springer-Verlag, Berlin.

Tabelle 6.15: Gefühlte Temperatur bei verschiedenen Umgebungstemperaturen und Windgeschwindigkeiten

$t_\infty^*/^\circ\text{C}$	4	−4	−12	−20
$u_\infty^*/(\text{m/s})$	$t_f^*/^\circ\text{C}$			
4	0,8	−8,1	−17,0	−25,9
8	−4,2	−14,5	−24,7	−35,0
16	−8,4	−19,8	−31,2	−42,6
20	−9,1	−20,7	−32,3	−43,9

6.9 Übungsaufgaben zur konvektiven Wärmeübertragung

Für die Bearbeitung der nachfolgenden Übungsaufgaben wird empfohlen, die zugehörigen Arbeitsblätter zum konvektiven Wärmeübergang im Anhang zu benutzen. Die ausführlich beschriebenen Lösungswege zu diesen Übungsaufgaben befinden sich im Kap. 6.9.2.

6.9.1 Übungsaufgaben und Ergebnisse

Übungsaufgabe 6.1: „Ebene Plattenströmung“

Eine auf eine konstante Oberflächentemperatur von 100°C beheizte ebene Platte der Länge $L^* = 1,0 \text{ m}$ wird wahlweise von Luft oder Wasser, jeweils mit einer Geschwindigkeit $u_\infty^* = 2 \text{ m/s}$ und einer Temperatur $t_\infty^* = 60^\circ\text{C}$ bei einem Druck von 1 bar waagrecht angeströmt.

- Wie groß sind in beiden Fällen die Lauflängen der Strömung vom Plattenanfang bis zum Umschlagpunkt laminar/turbulent?
- Welche örtlichen Nußelt-Zahlen, Wandwärmestromdichten und Wärmeübergangskoeffizienten stellen sich jeweils in einer Entfernung von $0,5 \text{ m}$ vom Plattenanfang ein?
- Wie groß sind für Luft der Wärmeübergangskoeffizient am Plattenende und der mittlere Wärmeübergangskoeffizient über der gesamten Platte?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 6.1:

- Luft: $x_{\text{krit}}^* = 4,818 \text{ m}$, d. h. $x_{\text{krit}}^* > L^*$
Wasser: $x_{\text{krit}}^* = 0,119 \text{ m}$
- Luft: $\text{Nu}(x^* = 0,5 \text{ m}) = 66,67$; $q_{\text{W}}^*(x^* = 0,5 \text{ m}) = 142,54 \text{ W/m}^2$; $\alpha^*(x^* = 0,5 \text{ m}) = 3,81 \text{ W/m}^2\text{K}$
Wasser: $\text{Nu}(x^* = 0,5 \text{ m}) = 4884$; $q_{\text{W}}^*(x^* = 0,5 \text{ m}) \approx 2,56 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$; $\alpha^*(x^* = 0,5 \text{ m}) = 6392 \text{ W/m}^2\text{K}$
- $\alpha^*(L^* = 1,0 \text{ m}) = 2,70 \text{ W/m}^2\text{K}$; $\alpha_{\text{m}}^* = 5,40 \text{ W/m}^2\text{K}$

Übungsaufgabe 6.2: „Rohrströmung“

Durch ein Rohr mit dem Innendurchmesser $D^* = 10\text{ mm}$, dessen Innenwand auf eine konstante Temperatur beheizt wird, strömt Luft bzw. Wasser mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s bei einem Druck von 1 bar . Die Temperatur der Fluide zu Beginn eines 1 m langen, beheizten Rohrsegmentes beträgt in beiden Varianten 20°C . Anmerkung: Die Strömung kann als hydrodynamisch ausgebildet betrachtet werden.

- Welche thermischen Einlaufängen treten in beiden Varianten auf, nach denen die Strömung als thermisch ausgebildet angesehen werden kann?
- Wie groß sind in beiden Varianten die Verhältnisse der mittleren Nußelt-Zahlen zwischen thermisch nicht ausgebildeter und thermisch ausgebildeter Strömung? Dabei soll angenommen werden, dass die L  v  que-Lösung (Lösung für $x^* \rightarrow 0$) für laminare Strömungen eine hinreichend gute Näherung im gesamten Rohr darstellt.
- Nun soll von einer thermisch ausgebildeten Rohrströmung ausgegangen werden.
 - Wie groß sind die Nu  lt-Zahlen und die Wärmeübergangskoeffizienten bei der Durchströmung des Rohres?
 - Wie ändern sich die zuvor ermittelten Größen, wenn der Systemdruck auf 10 bar erhöht wird? Anmerkung: Die Druckabhängigkeit der dynamischen Viskosität, der Wärmeleitfähigkeit und der Pr-Zahl sind vernachlässigbar, die Geschwindigkeit und die Temperatur bleiben unverändert.
- Genügt die Angabe der Wandtemperatur, um die lokalen Wandwärmestromdichten zu bestimmen?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 6.2:

- Luft: $L_{\text{therm}}^* = 0,56\text{ m}$; Wasser: $L_{\text{therm}}^* = 0,3\text{ m}$
- Luft: $\frac{\text{Nu}_m}{\text{Nu}_D} = 1,063$; Wasser: $\frac{\text{Nu}_m}{\text{Nu}_D} = 1,007$
- i) Luft: $\text{Nu}_D = 3,66$; $\alpha^* = 9,48\text{ W/m}^2\text{K}$
Wasser: $\text{Nu}_D = 225,9$; $\alpha^* = 13519\text{ W/m}^2\text{K}$
- ii) Luft: $\text{Nu}_D = 55,15$; $\alpha^* = 141,7\text{ W/m}^2\text{K}$
Wasser: wie in c-i)
- siehe Lösungsweg

Übungsaufgabe 6.3: „W  rmege  mmte Rohrleitung“

Durch eine Rohrleitung aus Kupfer ($\lambda_{\text{Cu}}^* = 372\text{ W/mK}$) mit der Länge $L^* = 1\text{ m}$, dem Innendurchmesser $D_i^* = 6\text{ mm}$ und der Wandstärke $s^* = 1\text{ mm}$ fließt Wasser mit einer mittleren (kalorischen) Temperatur zwischen Ein- und Austritt von 80°C . Die Rohrleitung befindet sich in Umgebungsluft von $t_U^* = 20^\circ\text{C}$.

Anmerkungen:

- Die Wärmeübergangskoeffizienten an der Innen- und Außenseite des Rohres betragen $\alpha_{\text{mi}}^* = 2300\text{ W/m}^2\text{K}$ und $\alpha_{\text{ma}}^* = 6\text{ W/m}^2\text{K}$.
- Zum Verständnis dieser Aufgabe s. auch das ILLUSTRIERENDE BEISPIEL 6.2.

- Wie groß ist der abgegebene Wärmestrom, wenn die Leitung nicht w  rmege  mmt ist?
- Wie groß ist der abgegebene Wärmestrom, wenn die Leitung mit einer 4 mm dicken Korksicht ($\lambda_K^* = 0,042\text{ W/mK}$) w  rmege  mmt ist?

- c) Wie ist der Verlauf des Wärmedurchgangswiderstandes R_k^* als Funktion des Außendurchmessers bei einer Wärmedämmschicht aus Kork?
- d) Welche Korksicht muss mindestens gewählt werden, um eine Reduzierung des Wärmeverlustes gegenüber Fall a) zu erreichen?
- e) Wie groß müsste die Wärmeleitfähigkeit eines Wärmedämmmaterials sein, um bei der vorgegebenen Dämmstärke von 4 mm eine Dämmwirkung zu erreichen?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 6.3:

- a) $\dot{Q}_W^* = 9,02 \text{ W}$
- b) $\dot{Q}_{W,K}^* = 10,06 \text{ W}$
- c) siehe Lösungsweg
- d) $s_{K,\min}^* = 10 \text{ mm}$
- e) $\lambda_{WD}^* \leq 0,0332 \text{ W/mK}$

Übungsaufgabe 6.4: „Kreiszyylinderumströmung“

Ein zwischen zwei Haltespitzen horizontal angeordneter Draht mit den Abmessungen $D^* = 0,5 \text{ mm}$ und $L^* = 18 \text{ mm}$ wird von einem elektrischen Strom durchflossen. Die Drahttemperatur beträgt $t^* = 260^\circ\text{C} = \text{const.}$, der Drahtwiderstand $R_D^* = 4 \Omega = \text{const.}$ Die Umgebungstemperatur sei $t_\infty^* = t_U^* = 20^\circ\text{C} = \text{const.}$

Anmerkung: Der Wärmestrom über die Stirnflächen kann vernachlässigt werden.

- a) Welcher Wärmestrom wird an die Umgebung abgegeben, wenn sich der Draht in ruhender Luft befindet?

Nach Verein Deutscher Ingenieure (2002): *VDI-Wärmeatlas*, 9. Auflage, Springer-Verlag, Berlin / Kap. Fa4 gilt für die mittlere Nußelt-Zahl einer natürlichen Konvektionsströmung um einen horizontal angeordneten Kreiszyylinder

$$\text{Nu}_m = \left\{ 0,752 + 0,387 \left[\text{GrPr} \left(1 + \left(\frac{0,559}{\text{Pr}} \right)^{9/16} \right)^{-16/9} \right]^{1/6} \right\}^2$$

mit der charakteristischen Länge $x^* = \frac{\pi}{2} D^*$ für die Nu-Zahl und die Gr-Zahl sowie den Stoffwerten bei einer Bezugstemperatur von $t_B^* = (t_\infty^* + t_W^*)/2$.

- b) Wie groß sind im Fall a) der durch den Draht fließende elektrische Strom, der Spannungsabfall am Draht und der mittlere Wärmeübergangskoeffizient?
- c) Wie groß ist der an die Umgebung abgegebene Wärmestrom, wenn der Draht mit einer Luftgeschwindigkeit von $u_\infty^* = 11,2 \text{ m/s}$ und einer Lufttemperatur $t_\infty^* = t_U^*$ quer angeströmt wird?
- d) Welcher elektrische Strom fließt nun durch den Draht und welcher Spannungsabfall stellt sich am Draht ein? Wie groß ist der mittlere Wärmeübergangskoeffizient?
- e) Wie lautet der Zusammenhang zwischen dem Spannungsabfall am Draht und der Anströmgeschwindigkeit?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 6.4:

- a) $\dot{Q}_{W,nK}^* = 1,10 \text{ W}$

- b) $I_{nK}^* = 0,524 \text{ A}$; $U_{nK}^* = 2,098 \text{ V}$; $\alpha_{m,nK}^* = 16,21 \text{ W/m}^2\text{K}$
 c) $\dot{Q}_{W,eK}^* = 3,39 \text{ W}$
 d) $I_{eK}^* = 0,921 \text{ A}$; $U_{eK}^* = 3,68 \text{ V}$; $\alpha_{m,eK}^* = 499,4 \text{ W/m}^2\text{K}$
 e) siehe Lösungsweg

6.9.2 Lösungswege

Lösungsweg zu Übungsaufgabe 6.1: „Ebene Plattenströmung“

- a) Die kritische Reynolds-Zahl bei einer ebenen Plattenströmung, d. h. die Reynolds-Zahl des Umschlages laminar/turbulent, beträgt $Re_{krit} = \frac{\rho^* u_{\infty}^* x_{krit}^*}{\eta^*} = \frac{u_{\infty}^* x_{krit}^*}{\nu^*} \approx 5 \cdot 10^5$, siehe Kap. 6.3.1. Umgestellt ergibt sich die (kritische) Lauflänge, bei der der Umschlag laminar/turbulent stattfindet zu

$$x_{krit}^* = \frac{Re_{krit} \nu^*}{u_{\infty}^*}.$$

Die Bezugstemperatur für die Stoffwerte entspricht der Anströmtemperatur, also $t_B^* = t_{\infty}^* = 60^\circ\text{C}$, s. 6.2.2.

Es ergeben sich

- für Luft aus Tab. B.1: $\nu_L^* = 19,27 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr_L = 0,71$, $\lambda_L^* = 0,0286 \text{ W/mK}$, $c_{pL}^* = 1,009 \text{ kJ/kg K}$,
- für Wasser aus Tab. B.2: $\nu_W^* = 0,474 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr_W = 2,981$, $\lambda_W^* = 0,6544 \text{ W/mK}$.

Somit folgt für Luft

$$x_{krit}^* = \frac{Re_{krit} \nu_L^*}{u_{\infty}^*} = 4,818 \text{ m}$$

d. h. , die Überströmung der gesamten Platte mit Luft erfolgt laminar, bzw. für Wasser

$$x_{krit}^* = \frac{Re_{krit} \nu_W^*}{u_{\infty}^*} = 0,119 \text{ m}$$

d. h. , die Überströmung der Platte mit Wasser ist nur zu Beginn laminar (ca. 12% der Plattenlänge) und anschließend turbulent.

- b) Luft:

Aus Tab. 6.3 ergibt sich für die laminare Strömung über eine ebene, mit konstanter Temperatur beheizte Platte

$$\frac{Nu_L}{\sqrt{Re_L}} = \frac{A - B Pr Ec / x^r}{\sqrt{2x}}$$

mit den Konstanten $r = 0$, $A = 0,4139$ und $B = 0,2471$ für eine Prandtl-Zahl $Pr = 0,7$ (die näherungsweise der korrekten Prandtl-Zahl $Pr(60^\circ\text{C}) = 0,71$ entspricht).

Zur Bestimmung der Nußelt-Zahl bei $x^* = 0,5 \text{ m}$ wird die Bezugslänge $L^* = 0,5 \text{ m}$ gesetzt, weil es sich hier um ein selbstähnliches Problem handelt, s. Kap. 6.3.1. L^* ist hier also nicht die Plattenlänge, sondern eine frei wählbare Bezugslänge.

Mit $Re = \frac{u_{\infty}^* L^*}{\nu_L^*} = 51\,894$ und $Ec = \frac{u_{\infty}^{*2}}{c_p^* (t_W^* - t_{\infty}^*)} = 9,91 \cdot 10^{-5}$ ergibt sich

$$\text{Nu}(x^* = 0,5 \text{ m}) = 66,67.$$

Die Wandwärmestromdichte ergibt sich zu

$$\dot{q}_W^*(x^* = 0,5 \text{ m}) = \frac{\text{Nu}(x^* = 0,5 \text{ m})(t_W^* - t_\infty^*)\lambda_L^*}{L^*} = 142,54 \text{ W/m}^2$$

$$\text{und der Wärmeübergangskoeffizient zu } \alpha^*(x^* = 0,5 \text{ m}) = \frac{\dot{q}_W^*(x^* = 0,5 \text{ m})}{(t_W^* - t_\infty^*)} = 3,81 \text{ W/m}^2\text{K}.$$

Wasser:

Aus (6-32) ergibt sich für die turbulente Strömung über eine ebene, beheizte Platte mit $x^* = L^* = 0,5 \text{ m}$

$$\text{Nu}_L = 0,0296 \text{Re}_L^{4/5} \text{Pr}^{1/3}$$

$$\text{mit } \text{Re}_L = \frac{u_\infty^* L^*}{\nu_W^*} \approx 2,11 \cdot 10^6 \text{ und } \text{Pr}(60^\circ\text{C}) = 2,981$$

$$\text{Nu}(x^* = 0,5 \text{ m}) = 4884.$$

$$\text{Die Wandwärmestromdichte ergibt sich damit zu } \dot{q}_W^*(x^* = 0,5 \text{ m}) = \frac{\text{Nu}(x^* = 0,5 \text{ m})(t_W^* - t_\infty^*)\lambda_W^*}{L^*} \approx 2,56 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$$

$$\text{und der Wärmeübergangskoeffizient zu } \alpha^*(x^* = 0,5 \text{ m}) = \frac{\dot{q}_W^*(x^* = 0,5 \text{ m})}{(t_W^* - t_\infty^*)} = 6392 \text{ W/m}^2\text{K}.$$

c) Luft:

Zur Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten am Plattenende $L^* = 1,0 \text{ m}$ wird wiederum die oben genannte Beziehung

$$\frac{\text{Nu}_L}{\sqrt{\text{Re}_L}} = \frac{A - B \text{PrEc}/x^r}{\sqrt{2x}}$$

bei der Lauflänge $L^* = 1,0 \text{ m}$ mit den Konstanten $r = 0$, $A = 0,4139$ und $B = 0,2471$ für eine Prandtl-Zahl $\text{Pr} = 0,7$ (die näherungsweise der korrekten Prandtl-Zahl $\text{Pr}(60^\circ\text{C}) = 0,7100$ entspricht) verwandt.

Die Re-Zahl verdoppelt sich gegenüber der Teilaufgabe b) auf $\text{Re}_L \approx 1,04 \cdot 10^5$, die Ec-Zahl bleibt konstant, $\text{Ec} = 9,91 \cdot 10^{-5}$. Es wird wiederum $x^* = L^*$ gesetzt, so dass $x = 1$ gilt. Damit folgt

$$\text{Nu}(L^* = 1,0 \text{ m}) = \sqrt{\text{Re}_L} \frac{A - B \text{PrEc}/x^{*r}}{\sqrt{2x^*}} = \sqrt{\frac{u_\infty^* L^*}{\nu_L^*}} \frac{A - B \text{PrEc}}{\sqrt{2}} = 94,28,$$

$$\alpha^*(L^* = 1,0 \text{ m}) = \frac{\text{Nu}(L^* = 1,0 \text{ m}) \lambda_L^*}{L^*} = \sqrt{\frac{u_\infty^* L^*}{\nu_L^*}} \frac{A - B \text{PrEc}}{\sqrt{2}} \frac{\lambda_L^*}{L^*} = 2,70 \text{ W/m}^2\text{K},$$

$$\dot{q}_W^*(L^* = 1,0 \text{ m}) = \alpha^*(L^* = 1,0 \text{ m})(t_W^* - t_\infty^*) = 107,86 \text{ W/m}^2.$$

Der mittlere Wärmeübergangskoeffizient über die gesamte Platte ergibt sich aus

$$\alpha_m^* = \frac{1}{L^*} \int_0^{L^*} \alpha^*(x^*) dx^*.$$

Wird $\alpha^*(x^*)$ durch die Nußelt-Beziehung ersetzt, so folgt

$$\alpha_m^* = \frac{1}{L^*} \int_0^{L^*} \sqrt{\text{Re}_L} \frac{\lambda_L^*}{L^*} \frac{A - B \text{PrEc}/x^r}{\sqrt{2x}} dx^* = \frac{\lambda_L^*}{L^{*2}} \sqrt{\frac{u_\infty^* L^*}{\nu_L^*}} \int_0^{L^*} \frac{A - B \text{PrEc}}{\sqrt{2x}} dx^*.$$

Mit $dx^* = dx L^*$ sowie den (dimensionslosen) Integrationsgrenzen 0 und 1 folgt

$$\alpha_m^* = \frac{\lambda_L^*}{L^{*2}} \sqrt{\frac{u_\infty^* L^*}{\nu_L^*}} L^* \int_0^1 \frac{A - B \text{PrEc}}{\sqrt{2}} x^{-1/2} dx = \frac{\lambda_L^*}{L^*} \sqrt{\frac{u_\infty^* L^*}{\nu_L^*}} \frac{A - B \text{PrEc}}{\sqrt{2}} 2x^{1/2}$$

$$\alpha_m^* = \sqrt{\frac{u_\infty^* L^*}{\nu_L^*}} \frac{A - B \text{PrEc}}{\sqrt{2}} \frac{\lambda_L^*}{L^*} 2 = 2 \alpha^* (L^* = 1,0 \text{ m}) = 5,40 \text{ W/m}^2 \text{ K}.$$

Damit ergibt sich, dass α_m^* als der mittlere Wärmeübergangskoeffizient über eine Plattenlänge L^* dem doppelten Wert des Wärmeübergangskoeffizienten bei der Lauflänge L^* entspricht.

Lösungsweg zu Übungsaufgabe 6.2: „Rohrströmung“

- a) Zunächst erfolgt die Berechnung der Reynolds-Zahlen für Luft und Wasser bei den vorgegebenen Betriebsbedingungen, um die Strömungsform (laminar oder turbulent) zu charakterisieren.

Die kritische Reynolds-Zahl bei Rohrströmungen (Umschlag laminar/turbulent) beträgt

$$\text{Re}_{\text{krit}} = \frac{\rho^* u_m^* D^*}{\eta^*} = \frac{u_m^* D^*}{\nu^*} \approx 2300.$$

Die Bezugstemperatur für die Stoffwerte entspricht der Temperatur der Fluide zu Beginn der Beheizung, also $t_B^* = t_0^* = 20^\circ \text{C}$, s. 6.2.2.

Es ergeben sich

- für Luft aus Tab. B.1: $\nu_L^* = 15,35 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $\text{Pr}_L = 0,7148$; $\lambda_L^* = 0,02569 \text{ W/mK}$,
- für Wasser aus Tab. B.2: $\nu_W^* = 1,001 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $\text{Pr}_W = 7,004$; $\lambda_W^* = 0,5985 \text{ W/mK}$.

Für Luft folgt

$$\text{Re}_D = \frac{u_m^* D^*}{\nu_L^*} = \frac{\rho_L^* u_m^* D^*}{\eta_L^*} = 1954$$

d. h. , die Durchströmung des Rohres mit Luft erfolgt laminar.

Aus (6-21) umgestellt nach L_{therm}^* folgt

$$L_{\text{therm}}^* \approx D^* 0,04 \text{RePr} = 0,56 \text{ m}.$$

Für Wasser ergibt sich

$$\text{Re}_D = \frac{u_m^* D^*}{\nu_W^*} = \frac{\rho_W^* u_m^* D^*}{\eta_W^*} = 29910,$$

d. h. , die Durchströmung des Rohres mit Wasser erfolgt turbulent.

Aus (6-35) umgestellt nach L_{therm}^* mit dem mittleren Wert von 30 folgt

$$L_{\text{therm}}^* \approx D^* 30 = 0,3 \text{ m}.$$

b) Luft:

Aus Tab. 6.5 folgt für eine ausgebildete laminare Strömung mit konstanter Wandtemperatur $t_W^* = \text{const}$

$$\text{Nu}_D = \frac{\dot{q}_W^* D^*}{\lambda_L^* (t_W^* - t_{\text{km}}^*)} = 3,66$$

und mit der mittleren Nußelt-Zahl für die Einlaufströmung von $x^* = 0$ bis $x^* = L^* = 1 \text{ m}$ nach Integration von (6-29) (mit $C_1 = 1,7092/4^{1/3}$ für ein Rohr)

$$\text{Nu}_m = \frac{1}{L^*} \int_0^{L^*} \text{Nu}_D(x^*) dx^* = \frac{1}{L^*} \int_0^{L^*} C_1 \left(\frac{x^*}{D^* \text{Re}_D \text{Pr}} \right)^{-1/3} dx^* = \frac{C_1}{L^*} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{D^* \text{Re}_D \text{Pr}} \right)^{-1/3} L^{*2/3}$$

$$\text{Nu}_m = C_1 \frac{3}{2} \left(\frac{1}{D^* \text{Re}_D \text{Pr}} \right)^{-1/3} L^{*-1/3} = 3,89.$$

So ergibt sich

$$\frac{\text{Nu}_m}{\text{Nu}_D} = 1,063.$$

Wasser:

Aus Tab. 6.9 folgt angenähert für $\text{Pr} \approx 10$ die Konstante $C = 0,7$ und damit

$$\frac{\text{Nu}_m}{\text{Nu}_D} = 1 + \frac{C}{x^*/D^*} = 1,007.$$

Interpretation dieser Ergebnisse: Die laminare Strömung ist bezogen auf den Durchmesser später thermisch ausgebildet als die turbulente Strömung. Ursache dafür ist, dass bei laminaren Strömungen der Wärmetransport ausschließlich durch molekulare Wärmeleitung erfolgt, während bei turbulenten Strömungen ein zusätzlicher Wärmetransport infolge der turbulenten Schwankungsbewegungen auftritt.

c-i) Für Luft folgt aus Tab. 6.5 (mit konstanter Wandtemperatur $t_W^* = \text{const}$)

$$\text{Nu}_D = \frac{\dot{q}_W^* D^*}{\lambda_L^* (t_W^* - t_{\text{km}}^*)} = 3,66$$

und der Wärmeübergangskoeffizient mit (3-4) zu

$$\alpha^* = \frac{\text{Nu}_D \lambda_L^*}{D^*} = 9,48 \text{ W/m}^2 \text{K}.$$

Für Wasser folgt aus Tab. 6.7 mit (6-38) und unter Verwendung von $\zeta = (1,8 \log_{10} \text{Re}_D - 1,5)^{-2} = 0,02326$

$$\text{Nu}_D = \frac{\dot{q}_W^* D^*}{\lambda_W^* (t_W^* - t_{\text{km}}^*)} = \frac{(\zeta/8) \text{Re}_D \text{Pr}}{1 + 12,7 \sqrt{\zeta/8} (\text{Pr}^{2/3} - 1)} = 225,9.$$

Anmerkung: (6-39) kann aufgrund der eingeschränkten Gültigkeit der Pr-Zahl nicht angesetzt werden. Es folgt

$$\alpha^* = \frac{\text{Nu}_D \lambda_W^*}{D^*} = 13519 \text{ W/m}^2 \text{K}.$$

c-ii) Bei Luft erhöht sich bei einer Druckerhöhung auf 10 bar die Re-Zahl um den Faktor 10 auf

$$\text{Re}_D = \frac{u_m^* D^*}{\nu_L^*} = \frac{\rho_{L,10\text{bar}}^* u_m^* D^*}{\eta_L^*} = 19540.$$

Damit erfolgt die Strömung durch das Rohr nunmehr turbulent und es ergibt sich wiederum aus Tab. 6.7 mit (6-38) unter Verwendung von $\zeta = (1,8 \log_{10} \text{Re}_D - 1,5)^{-2} = 0,02582$

$$\text{Nu}_D = \frac{q_W^* D^*}{\lambda_L^* (t_W^* - t_{\text{km}}^*)} = \frac{(\zeta/8) \text{Re}_D \text{Pr}}{1 + 12,7 \sqrt{\zeta/8} (\text{Pr}^{2/3} - 1)} = 55,15$$

sowie

$$\alpha^* = \frac{\text{Nu}_D \lambda_L^*}{D^*} = 141,7 \text{ W/m}^2 \text{K}.$$

Da Wasser als nahezu inkompressibel betrachtet werden kann, bleiben die charakteristischen Stoffwerte konstant und es ergeben sich bei Änderung des Druckniveaus keine Auswirkungen auf den Wärmeübergang.

d) Nein, da die Wandwärmestromdichte von der treibenden Temperaturdifferenz $(t_W^* - t_{\text{km}}^*)$ abhängt und sich die kalorische Mitteltemperatur t_{km}^* mit der Koordinate x^* ändert. Bei $x^* \rightarrow \infty$ ergibt sich $(t_W^* - t_{\text{km}}^*) \rightarrow 0$ und damit auch $q_W^* \rightarrow 0$.

Lösungsweg zu Übungsaufgabe 6.3: „Wärmegedämmte Rohrleitung“

a) Zunächst erfolgt die Berechnung des gesamten Wärmewiderstandes, der sich aus konvektivem Wärmeübergang auf der Innenseite, Wärmeleitung in der Rohrwand und konvektivem Wärmeübergang auf der Außenseite zusammensetzt.

Es gilt mit (6-47)

$$R_k^* \equiv \frac{\Delta T^*}{\dot{Q}_W^*} = R_{\alpha a}^* + R_{\lambda}^* + R_{\alpha i}^* = \frac{1}{k_j^* A_j^*}$$

und den Beziehungen für den Wärmeübergangswiderstand innen und außen

$$R_{\alpha,a}^* = \frac{1}{\alpha_{\text{ma}}^* A_a^*} \quad \text{bzw.} \quad R_{\alpha,i}^* = \frac{1}{\alpha_{\text{mi}}^* A_i^*}$$

sowie für die Wärmeleitung im Hohlzylinder (5-9) mit $r_i^* = 3 \text{ mm}$ und $r_a^* = 4 \text{ mm}$

$$R_{\lambda,\text{HZ}}^* = \frac{\Delta T^*}{\dot{Q}_W^*} = \frac{1}{2\pi L^* \lambda_{\text{Cu}}^*} \ln \frac{r_a^*}{r_i^*}$$

$$R_k^* = 6,66 \text{ K/W}.$$

Der Wärmestrom ergibt sich damit zu

$$\dot{Q}_W^* = [(80 - 20)/6,66] \text{ W} = 9,02 \text{ W}.$$

- b) Eine zusätzliche Wärmedämmung aus Kork (Index: K) führt dazu, dass sich der Wärmedurchgangswiderstand nunmehr aus vier Anteilen zusammensetzt

$$R_{kK}^* = \frac{1}{\alpha_i^* 2\pi r_i^* L^*} + \frac{1}{2\pi L^* \lambda_{Cu}^*} \ln \frac{r_a^*}{r_i^*} + \frac{1}{2\pi L^* \lambda_K^*} \ln \frac{r_{Ka}^*}{r_{Ki}^*} + \frac{1}{\alpha_a^* 2\pi r_{Ka}^* L^*}.$$

mit $r_i^* = 3 \text{ mm}$, $r_a^* = r_{Ki}^* = 4 \text{ mm}$ und $r_{Ka}^* = 8 \text{ mm}$.

Trotz des zusätzlichen Wärmeleitwiderstandes der Korkschicht, verringert sich der gesamte Wärmedurchgangswiderstand, da der vergrößerte Außendurchmesser gleichzeitig den äußeren Wärmeübergangswiderstand verringert. Es ergibt sich

$$R_{kK}^* = 5,965 \text{ K/W}$$

und damit ein Wärmestrom von

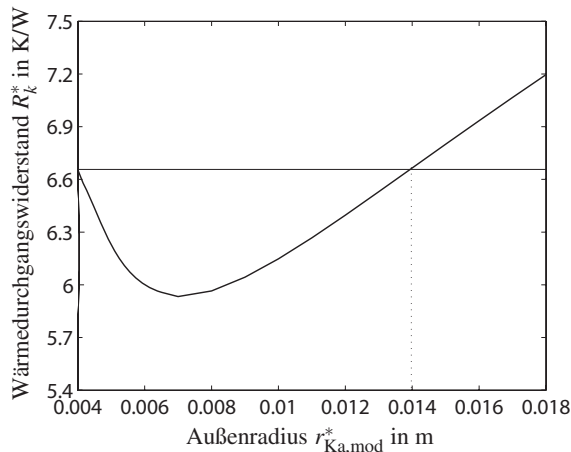
$$\dot{Q}_{W,K}^* = 10,06 \text{ W},$$

d. h. , der Wärmeverlust ist trotz einer zusätzlichen Wärmedämmung größer als ohne Wärmedämmung.

- c) Die obige Gleichung in b) wird wieder angesetzt mit $r_i^* = 3 \text{ mm}$, $r_a^* = r_{Ki}^* = 4 \text{ mm}$ und dem unbekannten Radius $r_{Ka,mod}^*$, der dem Außenradius der Korkschicht entspricht

$$R_{kK,mod}^* = 6,66 \text{ K/W} = \frac{1}{\alpha_i^* 2\pi r_i^* L^*} + \frac{1}{2\pi L^* \lambda_{Cu}^*} \ln \frac{r_a^*}{r_i^*} + \frac{1}{2\pi L^* \lambda_K^*} \ln \frac{r_{Ka,mod}^*}{r_{Ki}^*} + \frac{1}{\alpha_a^* 2\pi r_{Ka,mod}^* L^*}.$$

Dieser Zusammenhang ist im folgenden Bild grafisch dargestellt.



- d) Es ergibt sich aus der grafischen Darstellung, dass ab einem Außendurchmesser der Korkschicht von $r_{Ka,mod}^* > 0,014 \text{ m}$ der Wärmedurchgangswiderstand $R_{kK,mod}^*$ größer als derjenige ohne Korkschicht wird. Das bedeutet, dass erst ab einer Korkschichtdicke von $s_{K,min}^* > 10 \text{ mm}$ eine wärmedämmende Wirkung eintritt.

- e) Wiederum wird die in b) benutzte Gleichung angesetzt, nun mit der gesuchten Wärmeleitfähigkeit des Dämmmaterials WD und den vorgegebenen Radien mit $r_i^* = 3 \text{ mm}$, $r_{WDi}^* = 4 \text{ mm}$ und $r_{WDa}^* = 8 \text{ mm}$

$$R_k^* = 6,66 \text{ K/W} = \frac{1}{\alpha_i^* 2 \pi r_i^* L^*} + \frac{1}{2 \pi L^* \lambda_{Cu}^*} \ln \frac{r_a^*}{r_i^*} + \frac{1}{2 \pi L^* \lambda_{WD}^*} \ln \frac{r_a^*}{r_{Ki}^*} + \frac{1}{\alpha_a^* 2 \pi r_a^* L^*}.$$

Es ergibt sich

$$\lambda_{WD}^* \leq 0,0332 \text{ W/mK}.$$

Lösungsweg zu Übungsaufgabe 6.4: „Kreiszyylinderumströmung“

- a) Die Stoffwerte für Luft für eine mittlere Temperatur $t_B^* = (t_U^* + t_W^*)/2 = (t_\infty^* + t_W^*)/2 = 140^\circ \text{C}$ betragen nach Tab. B.1:

$$v_L^* = 28,07 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \text{Pr}_L = 0,7054, \quad \lambda_L^* = 0,03408 \text{ W/mK}, \quad \beta_L^* = 0,002422 \text{ 1/K}.$$

Nach Verein Deutscher Ingenieure (2002): *VDI-Wärmeatlas*, 9. Auflage, Springer-Verlag, Berlin / Kap. Fa4 gilt für die mittlere Nußelt-Zahl einer natürlichen Konvektionsströmung (Index: nK) um einen horizontal angeordneten Kreiszyylinder

$$\text{Nu}_m = \left\{ 0,752 + 0,387 \left[\text{GrPr} \left(1 + \left(\frac{0,559}{\text{Pr}} \right)^{9/16} \right)^{-16/9} \right]^{1/6} \right\}^2$$

mit der charakteristischen Länge $x^* = \frac{\pi}{2} D^* = 0,007854 \text{ m}$ und $\text{Gr} = \frac{g^* \beta_L^* (t_W^* - t_U^*) x^{*3}}{\nu_L^{*2}} = 3506,2$.

Damit ergibt sich

$$\text{Nu}_m = \frac{\dot{q}_W^* x^*}{\lambda_L^* (t_W^* - t_U^*)} = 3,736$$

und daraus

$$\dot{q}_{W,nK}^* = 3890,7 \text{ W/m}^2 \text{ sowie } \dot{Q}_{W,nK}^* = \dot{q}_{W,nK}^* A^* = \dot{q}_{W,nK}^* \pi D^* L^* = 1,10 \text{ W}.$$

- b) Der in Form von Wärme abgegebene Energiestrom \dot{Q}_{Wm}^* entspricht dem in Form von elektrischer Energie zugeführten Energiestrom $P^* = U^* I^*$. Mit dem Ohmschen Gesetz $U^* = R^* I^*$ folgt

$$I_{nK}^* = \sqrt{\frac{\dot{Q}_{W,nK}^*}{R_D^*}} = 0,524 \text{ A und } U_{nK}^* = 2,098 \text{ V}.$$

Der mittlere Wärmeübergangskoeffizient ergibt sich mit $\text{Nu}_m = \frac{\alpha_{m,nK}^* x^*}{\lambda_L^*}$ zu $\alpha_{m,nK}^* = 16,21 \text{ W/m}^2 \text{K}$.

- c) Für die erzwungene Konvektion (Index: eK) an einem quer angeströmten, horizontal angeordneten Kreiszyylinder gilt gemäß (6-49)

$$\text{Nu}_m = \frac{\dot{q}_W^* D^*}{\lambda_L^* (t_W^* - t_U^*)} = 0,3 + \frac{0,62 \text{Re}_D^{1/2} \text{Pr}_L^{1/3}}{[1 + (0,4/\text{Pr})^{2/3}]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{\text{Re}_D}{280000} \right)^{5/8} \right]^{4/5}.$$

Hier müssen die Stoffwerte anders als in a) bei der Anströmtemperatur $t_\infty^* = t_U^* = 20^\circ \text{C}$ eingesetzt werden, s. 6.2.2.

Nach Tab. B.1 ergeben sich dann folgende Daten:

$$v_L^* = 15,35 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \text{Pr}_L = 0,7148 \text{ und } \lambda_L^* = 0,02569 \text{ W/mK}$$

Daraus folgt

$$\text{Re}_D = u_\infty^* D^* / \nu_L^* = 364,8$$

sowie

$$\text{Nu}_m = \frac{\dot{q}_{\text{W,eK}}^* D^*}{\lambda_L^* (t_W^* - t_U^*)} = \frac{\alpha_{\text{m,eK}}^* D^*}{\lambda_L^*} = 9,72$$

und daraus

$$\dot{q}_{\text{W,eK}}^* = 119839 \text{ W/m}^2 \text{ sowie } \dot{Q}_{\text{W,eK}}^* = \dot{q}_{\text{W,eK}}^* A^* = \dot{q}_{\text{W,eK}}^* \pi D^* L^* = 3,39 \text{ W.}$$

d) Mit den Gesetzmäßigkeiten aus b) folgt

$$I_{\text{eK}}^* = \sqrt{\frac{\dot{Q}_{\text{W,eK}}^*}{R^*}} = 0,921 \text{ A und } U_{\text{eK}}^* = 3,68 \text{ V sowie der mittlere Wärmeübergangskoeffizient zu } \alpha_{\text{m,eK}}^* = 499,4 \text{ W/m}^2 \text{K.}$$

e) Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{W,eK}}^* &= P_{\text{eK}}^* = U_{\text{eK}}^* I_{\text{eK}}^* = \frac{U_{\text{eK}}^{*2}}{R^*} \\ &= \frac{\lambda_L^*}{D^*} (t_W^* - t_U^*) A^* \left[0,3 + \frac{0,62 \text{Re}_D^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}{[1 + (0,4/\text{Pr})^{2/3}]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{\text{Re}_D}{280000} \right)^{5/8} \right]^{4/5} \right]. \end{aligned}$$

Wird diese Gleichung nach U_{eK}^* aufgelöst und alle konstanten Terme mit Ausnahme der Geschwindigkeit u_∞^* zusammengefasst ergibt sich

$$U_{\text{eK}}^* = \sqrt{C_1^* \left[0,3 + C_2^* u_\infty^{*1/2} \left[1 + C_3^* u_\infty^{*5/8} \right]^{4/5} \right]}$$

$$\text{mit } C_1^* = \frac{\lambda_L^*}{D^*} (t_W^* - t_U^*) A^* R_D^*; \quad C_2^* = \frac{0,62 \frac{D^{*1/2}}{\nu_L^*} \text{Pr}^{1/3}}{[1 + (0,4/\text{Pr})^{2/3}]^{1/4}} \quad \text{und} \quad C_3^* = \left(\frac{D^*}{\nu_L^* 280000} \right)^{5/8}.$$

7 Zweiphasen-Wärmeübergang

Anders als im vorigen Kapitel wird jetzt kein einphasiges Fluid unterstellt, sondern untersucht, wie der Wechsel des Fluides zwischen der Gas- und der Flüssigkeitsphase zur Physik des Wärmeüberganges beiträgt. Wegen der großen technischen Bedeutung sollen die dabei auftretenden Phänomene ausführlich erläutert werden.

In Bild 4.1 war der Zweiphasen-Wärmeübergang neben der reinen Wärmeleitung und dem konvektiven Wärmeübergang als dritte Form des leitungs-basierten Energietransportes über eine Systemgrenze beschrieben worden. Bei dieser Form des Wärmeüberganges können große Wandwärmestromdichten auftreten, weil große Energiemengen in unmittelbarer Nähe der Wand absorbiert oder freigesetzt werden. Aus diesem Grund müssen diese Energiemengen weder durch Leitung noch konvektiv von der Wand weggeführt bzw. der Wand zugeführt werden. Es ist üblich, auch diese Form des Wärmeüberganges durch einen Wärmeübergangskoeffizienten α^* bzw. eine Nußelt-Zahl Nu zu bewerten. Dies ist allerdings nicht ganz unproblematisch, da eine „treibende Temperaturdifferenz“ nicht mehr unmittelbar charakterisiert, wie stark der Mechanismus ist, der die an der Wand übertragene Energie aufnimmt bzw. abgibt. Dieser Mechanismus ist bei Phasenwechselvorgängen prinzipiell nicht mehr mit Temperaturänderungen verbunden und wird deshalb auch als Mechanismus einer latenten, d. h. verborgenen Energiespeicherung bezeichnet.

Die Beibehaltung von α^* bzw. Nu auch zur Bewertung dieser Vorgänge führt zu Zahlenwerten, die um mehrere Größenordnungen über denen liegen, die bei rein sensibler Wärmespeicherung auftreten. „Sensibel“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Energie als innere Energie gespeichert wird und je nach Größe der Wärmekapazität des Fluides zu mehr oder weniger starken Temperaturänderungen sowohl bei reiner Wärmeleitung als auch bei konvektivem Wärmeübergang führt.

7.1 Die Physik des Zweiphasen-Wärmeüberganges

Wenn an einer Systemgrenze (meist einer Wand) ein Phasenwechsel flüssig \leftrightarrow gasförmig stattfindet und die hohen dabei freiwerdenden oder benötigten Energien über die Systemgrenze ab- oder zugeführt werden können, so entsteht ein stationärer, im Sinne hoher Werte von α^* bzw. Nu hocheffektiver Wärmeübergang. Da der Phasenwechsel bei der Siedetemperatur T_S^* des Fluides stattfindet, treten an einer Wand als Systemgrenze Temperaturen in der Nähe der Siedetemperaturen auf, bzw. kann ein solcher Wärmeübergang nur stattfinden, wenn die Wand solche Temperaturen aufweist. Dabei muss unterschieden werden, ob Sieden oder Kondensation vorliegt, vgl. Bild 7.1. Es gilt:

Sieden:

Dies ist ein Phasenwechsel flüssig \rightarrow gasförmig, für den die Wand eine Temperatur oberhalb von T_S^* besitzen muss. Die Temperaturdifferenz $T_W^* - T_S^*$ wird *Wandüberhitzung* genannt. Der übertragene Wärmestrom fließt aus der Wand in das Fluid, die Wand wird also gekühlt.

Kondensation:

Dabei handelt es sich um den Phasenwechsel gasförmig \rightarrow flüssig, für den die Wand eine Temperatur unterhalb von T_S^* haben muss. Die Temperaturdifferenz $T_S^* - T_W^*$ wird *Wand-*

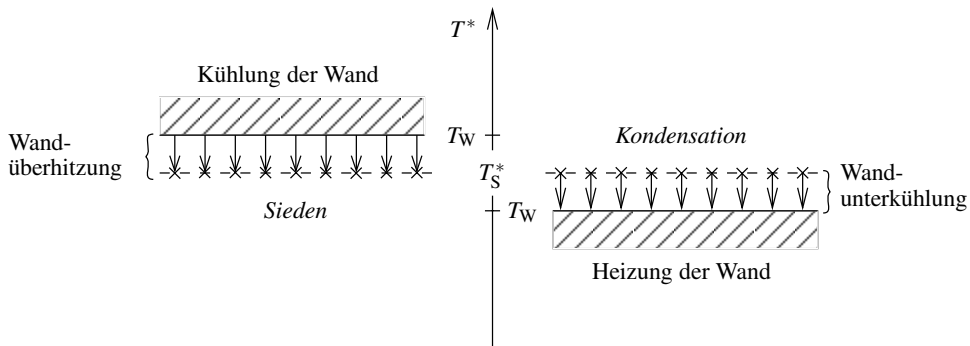


Bild 7.1: Veranschaulichung der unterschiedlichen Temperaturniveaus beim Sieden und bei der Kondensation sowie der Richtung der benötigten bzw. freigesetzten Wärmeströme im Zusammenhang mit dem Phasenwechsel (angedeutet durch $\times\times\times$)

unterkühlung genannt. Der übertragene Wärmestrom fließt aus dem Fluid in die Wand, die Wand wird also geheizt.

Bei welchen konkreten Temperatur- und Druckwerten diese Vorgänge mit einem bestimmten Fluid ablaufen hängt entscheidend von dessen Gleichgewichtszuständen gasförmig/flüssig ab. Diese manifestieren sich in der sog. *Dampfdruckkurve* des Fluides, die einen festen Zusammenhang zwischen dem Druck und der Temperatur im Zweiphasengleichgewicht darstellt. Sie beschreibt aus thermodynamischer Sicht diejenigen p^*, T^* -Kombinationen, für die die molaren Gibbsfunktionen der gasförmigen und der flüssigen Phase gleiche Werte besitzen, was als Bedingung für das sog. *stoffliche Gleichgewicht* abgeleitet werden kann.

Im Folgenden werden entscheidende Aspekte des Zweiphasen-Wärmeüberganges vor dem Hintergrund der physikalischen Vorgänge erläutert¹:

Reine Gasphase oder Gasphase mit Inertgasanteil:

Bild 7.2 zeigt zwei grundsätzlich verschiedene Situationen des Phasenwechsels flüssig \leftrightarrow gasförmig, in denen die physikalischen Vorgänge beim Zweiphasen-Wärmeübergang deutlich verschieden sind:

- Phasenwechsel bei Reinstoffen: Der messbare Druck im System (Systemdruck) entspricht dem Sättigungsdruck des Reinstoffes gemäß seiner Dampfdruckkurve. In Bild 7.2 (a) sind zwei Beispiele für unterschiedliche Temperaturen T_1^* und T_2^* gezeigt.
- Phasenwechsel bei Gas-Dampfgemischen in der Gasphase: Bei diesen Gemischen mit einer kondensierenden Komponente (dem Dampf) stellt der Druck gemäß der Dampfdruckkurve dieser Komponente jetzt den Sättigungs-*Partialdruck* im Gemisch dar. Zusätzlich existiert der Partialdruck des restlichen Gases im Gemisch (des Inertgases). Beide zusammen ergeben den messbaren Druck im System (Systemdruck). Während

¹ Zweiphasen-Wärmeübergänge von Gemischen, d. h. von Stoffen mit mehr als einer Komponente in der flüssigen Phase und in der Gasphase sind nicht Gegenstand dieses Buches.

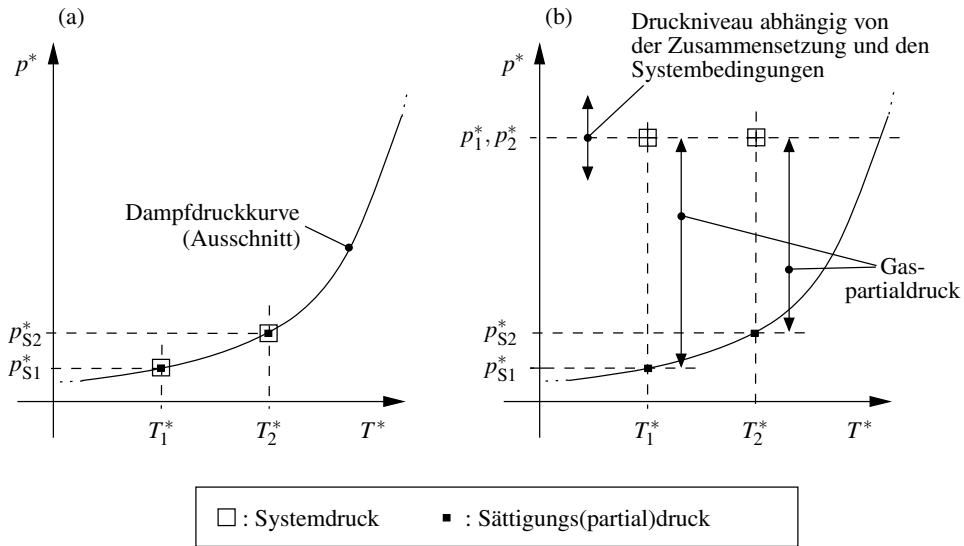


Bild 7.2: Druck-Temperatur-Verhältnisse bei Systemen mit einem Phasenwechsel flüssig ↔ gasförmig
 (a) Reinstoff: Systemdruck = Sättigungsdruck
 (b) Gas-Dampf-Gemisch: Systemdruck = Gaspartialdruck + Sättigungspartialdruck

der Sättigungs-Partialdruck des Dampfes bei Vorgabe einer Temperatur festliegt, kann der Inertgas-Partialdruck je nach den Systembedingungen und der Gemischzusammensetzung verschieden sein. Entsprechend ist auch der Systemdruck erst durch die Systembedingungen und die Zusammensetzung des Gemisches in der Gasphase festgelegt. In Bild 7.2 (b) sind wiederum zwei Beispiele für zwei unterschiedliche Temperaturen gezeigt.

Für die Zweiphasen-Wärmeübergänge entstehen deutlich andere physikalische Situationen, je nachdem, ob ein Reinstoff vorliegt oder ein Inertgas vorhanden ist (Gas-Dampf Gemisch).

Blasen-, Tropfen- und Filmbildung:

Der Phasenwechsel findet zunächst unmittelbar an der Wand statt. Dabei bilden sich beim Sieden Blasen und bei der Kondensation Tropfen. Wenn diese jeweils sehr dicht nebeneinander entstehen, können sie zu einem Dampf- bzw. Kondensatfilm zusammenwachsen. Danach findet der weitere Phasenwechsel aber nicht mehr direkt an der Wand statt, sondern am Außenrand des Dampf- bzw. Kondensatfilms. In beiden Fällen muss der Wärmestrom von der Wand bzw. zur Wand diesen Film (im Wesentlichen) durch Wärmeleitung überwinden. Dazu ist eine treibende Temperaturdifferenz erforderlich, die umso größer ist, je dicker der Film und je kleiner die Wärmeleitfähigkeit λ^* in diesem Film ist. Da λ^* -Werte von Dämpfen stets deutlich kleiner als diejenigen der zugehörigen Flüssigkeiten sind, entstehen bei der Verdampfung besonders große Wärmewiderstände, wenn sich dabei ein Dampffilm bildet.

Für die Filmbildung ist die Oberflächenspannung des Fluides von besonderer Bedeutung. Diese bestimmt entscheidend die sog. Randwinkel bei Einzelblasen bzw. Einzeltropfen an

festen Wänden. Als Folge der unterschiedlichen Werte der Grenzflächenspannung eines Fluides für die Grenzflächen fest/flüssig und fest/gasförmig ist beim Sieden das Blasen-sieden, bei der Kondensation aber die Filmkondensation der „Regelfall“.

Bei Filmbildung liegen stets deutlich schlechtere Wärmeübergänge vor als bei Phasenwechsel-Wärmeübergängen mit Blasen- bzw. Tropfenbildung.

Ruhendes und strömendes Fluid:

Grundsätzliche Unterschiede ergeben sich, je nachdem ob das siedende oder kondensierende Fluid keinen großräumigen Strömungsbewegungen unterliegt (dabei wird von lokalen Bewegungen abgesehen), oder ob es eine definierte mittlere Strömungsgeschwindigkeit aufweist. Dies ist vorzugsweise in Strömungskanälen der Fall, in denen der Phasenwechsel in einer erzwungenen Konvektion abläuft.

7.2 Dimensionsanalyse und Systematik bei Zweiphasen-Wärmeübergängen

Für das generelle Verständnis ist es hilfreich, auch bei Zweiphasen-Wärmeübergängen zunächst einige dimensionsanalytische Überlegungen anzustellen, auch wenn in diesen Fällen häufig empirische Beziehungen verwendet werden, die nicht eine direkte Korrelation von dimensionsanalytisch ermittelten Kennzahlen darstellen.

Gegenüber dem einphasigen Wärmeübergang, dimensionsanalytisch durch (3-3) und die zugehörigen Details in Tab. 3.2 beschrieben, gibt es entscheidende Veränderungen. Diese äußern sich in veränderten physikalisch/mathematischen Modellen, was zu entsprechend veränderten allgemeinen Relevanzlisten führt. Im Vergleich zur Relevanzliste bei einphasigen (konvektiven) Wärmeübergängen

- verlieren an Bedeutung und werden deshalb aus der Relevanzliste für Zweiphasen-Wärmeübergänge gestrichen:
 - der Volumenausdehnungskoeffizient β^* ,
 - die Erdbeschleunigung g^* ,
 - die Schallgeschwindigkeit c^* ,
- treten neu hinzu und werden deshalb in die Relevanzliste aufgenommen:
 - die Auftriebskraft pro Volumen $g^*(\rho_f^* - \rho_g^*)$ mit dem Index „f“ für flüssig und „g“ für gasförmig,
 - die spezifische Verdampfungsenthalpie Δh_V^* ,
 - die Oberflächenspannung σ^* .

Da weiterhin vier Basisdimensionen vorliegen ($n = 4$) treten auch bei einem allgemeinen Modell für den Zweiphasen-Wärmeübergang mit dreizehn Einflussgrößen ($m = 13$) insgesamt neun dimensionslose Kennzahlen auf. Details sind Tab. 7.1 zu entnehmen. Die allgemeine Form einer Lösung für Zweiphasen-Wärmeübergänge lautet damit

$$\text{Nu} = \text{Nu}(x, k, \text{Re}, \hat{\text{Gr}}, \text{Pr}, \text{Ec}, \text{Ja}, \text{Bo}, \text{Geometrie}, \text{therm. Randbedingungen}). \quad (7-1)$$

Tabelle 7.1: Relevanzliste und daraus abgeleitete Kennzahlen für Probleme im Zusammenhang mit Zweiphasen-Wärmeübergängen (Kondensation, Sieden)
Die (Ri)-Angaben in der rechten oberen Spalte beziehen sich auf das „Fünf-Punkte-Programm R1–R5“ zur Aufstellung von Relevanzlisten, s. Tab. 3.1.

¹: Abhängig davon, ob Kondensations- oder Siedevorgänge betrachtet werden, sind die Stoffwerte der flüssigen oder gasförmigen Phase gemeint.

Relevanzliste	1	Wandwärmestromdichte	\dot{q}_W^*	kg/s ³	(R1)
	2	Lauflänge	x^*	m	(R2)
	3	charakt. Körperabmessung	L^*	m	(R2)
	4	charakt. Rauheitshöhe	k^*	m	(R2)
	5	charakt. Geschwindigkeit	u^*	m/s	(R3)
	6	treibende Temperaturdifferenz	ΔT^*	K	(R3)
	7	Dichte ¹	ρ^*	kg/m ³	(R4)
	8	Auftriebskraft pro Volumen	$g^*(\rho_f^* - \rho_g^*)$	kg/m ² s ² = N/m ³	(R4)
	9	dynamische Viskosität ¹	η^*	kg/ms	(R4)
	10	molekulare Wärmeleitfähigkeit ¹	λ^*	kg m/s ³ K	(R4)
	11	spez. Wärmekapazität	c_p^*	m ² /s ² K	(R4)
	12	spez. Verdampfungsenthalpie	Δh_V^*	m ² /s ²	(R4)
	13	Oberflächenspannung	σ^*	kg/s ² = N/m	(R4)
$m = 13; n = 4 \text{ (kg, m, s, K)} \Rightarrow 9 \text{ Kennzahlen}$					
Kennzahlen	1	$Nu = \dot{q}_W^* L^* / \lambda^* \Delta T^*$	Nußelt-Zahl		
	2	$x = x^* / L^*$	dimensionslose Lauflänge		
	3	$k = k^* / L^*$	dimensionslose Rauheit		
	4	$Re = \rho^* u^* L^* / \eta^*$	Reynolds-Zahl		
	5	$\hat{Gr} = \rho^* g^* (\rho_f^* - \rho_g^*) L^{*3} / \eta^{*2}$	Grashof-Zahl		
	6	$Pr = \eta^* c_p^* / \lambda^*$	Prandtl-Zahl		
	7	$Ec = u^{*2} / c_p^* \Delta T^*$	Eckert-Zahl		
	8	$Ja = c_p^* \Delta T^* / \Delta h_V^*$	Jacobs-Zahl		
	9	$Bo = g^* (\rho_f^* - \rho_g^*) L^{*2} / \sigma^*$	Bond-Zahl		

In speziellen Situationen werden einige Kennzahlen keine Rolle spielen, wie z. B. die Reynolds-Zahl bei Siedevorgängen in ruhenden Fluiden. Die Grashof-Zahl \hat{Gr} ist gegenüber der bisher verwendeten Grashof-Zahl Gr besonders gekennzeichnet, weil in beiden Fällen unterschiedliche physikalische Situationen vorliegen. Während bei einphasigen Fluiden Auftriebskräfte durch die Temperaturabhängigkeit der Dichte entstehen ($\rho^{*2} g^* \beta^* \Delta T^*$ in Gr), sind diese bei zweiphasigen Fluiden eine direkte Folge der Dichteunterschiede in beiden Phasen ($\rho^* g^* (\rho_f^* - \rho_g^*)$ in \hat{Gr}).

Auch wenn (wie bereits erwähnt) die Ergebnisse bei Zweiphasen-Wärmeübergängen selten konsequent in dimensionsloser Form dargestellt werden, zeigt die generelle Form (7-1) im Ver-

gleich zu (3-3) die wesentlichen neuen Aspekte.

Die Erläuterungen in Kap. 7.1 haben gezeigt, dass deutlich unterschiedliche physikalische Situationen auftreten, wenn Reinstoffe oder Gemische, Film- oder Blasen- bzw. Tropfenbildung vorliegen und wenn das Fluid in Ruhe ist oder strömt. Tab. 7.2 zeigt die unterschiedlichen Kombinationen und gibt an, welche Fälle in welchen Kapiteln anschließend genauer betrachtet werden.

7.3 Kondensation

Im Folgenden soll danach unterschieden werden, ob der Kondensationsvorgang in einer (weitgehend) ruhenden Umgebung stattfindet, oder ob er durch eine Strömung des kondensationsfähigen Fluides beeinflusst wird. In beiden Fällen tritt Kondensation an festen Wänden auf, wenn deren Temperatur unterhalb der Sättigungstemperatur des umgebenden Dampfes liegt. Der Dampf wird dabei zunächst als gesättigt unterstellt, d. h. seine Temperatur entspricht derjenigen eines Zustandes auf der Dampfdruckkurve des (reinen) Fluides. Erweiterungen der einfachen Theorie werden anschließend behandelt.

7.3.1 Filmkondensation

Häufig bildet das Kondensat auf der „kühlen“ Wand einen zusammenhängenden Flüssigkeitsfilm, weil die Benetzungseigenschaften der Fluid/Wandkombination eine Tropfenbildung verhindern (s. dazu das nachfolgende Kap. 7.3.2). Dieser Film wird bei horizontalen Wänden zunächst auf der Wand verbleiben (und weiter anwachsen), bei schrägen oder senkrechten Wänden aber unter der Wirkung der Schwerkraft abfließen. Dabei kann dann eine stationäre Situation entstehen, wenn gerade die jeweils neu kondensierte Fluidmenge durch die Filmbewegung „abtransportiert“ wird. Bild 7.3 zeigt einen solchen stationären Film an einer senkrechten, ebenen Wand als Querschnitt durch eine zweidimensionale Anordnung. Der Film beginnt dabei an der Vorderkante einer senkrechten Platte, die eine konstante Temperatur $T_W^* < T_S^*$ habe. Die Temperaturdifferenz $\Delta T^* = T_S^* - T_W^*$ wird in diesem Zusammenhang als *Unterkühlung der Wand* bezeichnet. Das Bild enthält die Skizze eines Geschwindigkeitsprofils $u^*(x^*, y^*)$ des abfließenden Films, sowie an zwei Stellen x^* den prinzipiellen Verlauf der Temperaturverteilung im Film (in Form von $T^* - T_W^*$).

Wenn es zur Kondensation kommt, so wird dabei pro infinitesimalem Flächenelement $B^* dx^*$ an der Phasengrenze der Energiestrom $\Delta h_v^* dm^*$ als Verdampfungsenthalpie „freigesetzt“. Dieser Energiestrom muss in Form von Wärme durch den Flüssigkeitsfilm geleitet werden und führt

Tabelle 7.2: Verschiedene Kondensations- und Siedeformen

	Kondensation	Sieden
ruhende Umgebung	—————	Stilles Sieden (Kap. 7.4.1)
	Tropfenkondensation (Kap. 7.3.2)	Blasensieden (Kap. 7.4.1)
	Filmkondensation (Kap. 7.3.1)	Filmsieden (Kap. 7.4.1)
Strömung	Strömungskondensation (Kap. 7.3.3)	Strömungssieden (Kap. 7.4.2)

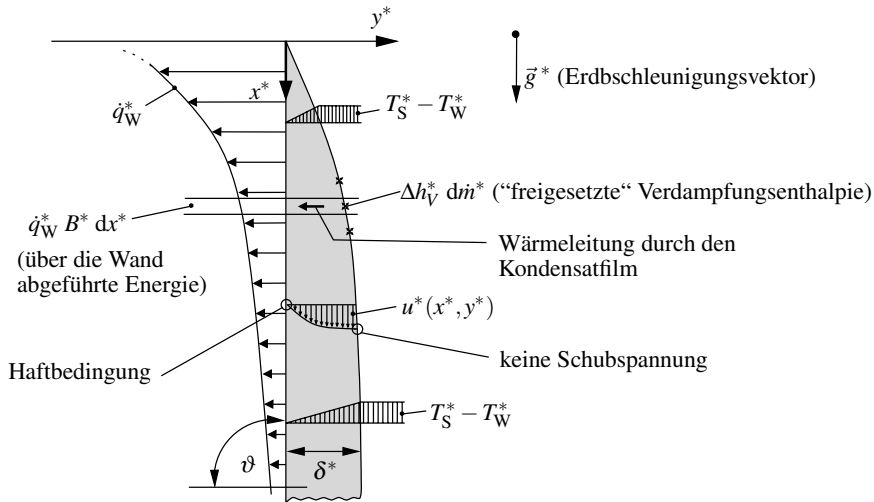


Bild 7.3: Qualitative Verhältnisse bei der Filmkondensation an einer senkrechten Wand ($\vartheta = 90^\circ$)

B^* : Breite senkrecht zur Zeichenebene

auf der Wand zur Wandwärmestromdichte $\dot{q}_W^*(x^*)$. Unterstellt man einen linearen Temperaturverlauf über die Filmdicke, so gilt mit dem Ansatz (5-5) der Fourierschen Wärmeleitung für die Wärmestromdichte $\dot{q}_W^*(x^*) = \dot{q}^*(x^*)$ im Film

$$\dot{q}^*(x^*) = -\lambda_f^* \frac{dT^*}{dy^*} = \lambda_f^* \frac{T_W^* - T_S^*}{\delta^*(x^*)} \quad (7-2)$$

Da $(T_W^* - T_S^*)$ als konstant unterstellt wurde, gilt $\dot{q}^*(x^*) \sim 1/\delta^*(x^*)$, d. h., die Wärmestromdichte $\dot{q}^*(x^*)$ nimmt mit ansteigender Filmdicke $\delta^*(x^*)$ ab. Insgesamt stellt sich eine Situation ein, bei der das an der Phasengrenze kondensierende Fluid gerade zu einem Film führt, über den die freigesetzte Verdampfungsenthalpie per Wärmeleitung zur Wand gelangen kann (und dort kontinuierlich entfernt werden muss, um den Vorgang stationär aufrechtzuerhalten).

Eine genauere Analyse¹ führt auf ein Wärmeübergangsgesetz, das erstmals von Nußelt im Jahr 1916 angegeben wurde.² Dafür werden folgende Voraussetzungen getroffen:

- Das Geschwindigkeitsprofil ist laminar mit $u^*(x^*, 0) = 0$ (Haftbedingung) und für den Geschwindigkeitsgradienten gilt $\partial u^*(x^*, \delta^*)/\partial y^* = 0$ (keine Schubspannung an der Phasengrenze).
- Das Temperaturprofil erfüllt die Bedingungen $T^*(x^*, 0) = T_W^* = \text{const}$, sowie $T^*(x^*, \delta^*) = T_S^* = \text{const}$.
- Es herrscht ein Kräftegleichgewicht zwischen Auftriebs- und Reibungskräften (keine Trägheitskräfte).

¹ Zu Details der Herleitung s. z. B.:

Baehr, H. D.; Stephan, K. (2004): *Wärme- und Stoffübertragung*, 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin / Kap. 4.12

White, F.M. (1988): *Heat and Mass Transfer*, Addison Wesley / Kap. 9.2.1

² Nußelt, W. (1916): *Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes*, VDI-Z., **60**, 541-546; 569-575

- Es gilt $\dot{q}_x^* = 0$ (keine wandparallele Wärmeleitung).

Mit diesen Voraussetzungen folgen parabolische Geschwindigkeits- und lineare Temperaturprofile. Als Wärmeübergangsgesetz ergibt sich für $\vartheta = 90^\circ$ (s. Bild 7.3)

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{\dot{q}_w^* x^*}{\lambda_f^* (T_S^* - T_W^*)} = 0,707 \left[\frac{\rho_f^* (\rho_f^* - \rho_g^*) g^* \Delta h_v^* x^{*3}}{\eta_f^* \lambda_f^* (T_S^* - T_W^*)} \right]^{1/4} \quad (7-3)$$

für die lokale Nußelt-Zahl, woraus durch Integration unmittelbar die mittlere Nußelt-Zahl

$$\text{Nu}_m \equiv \frac{\dot{q}_{wm}^* L^*}{\lambda_f^* (T_S^* - T_W^*)} = \frac{4}{3} \text{Nu}_L \quad (7-4)$$

mit $\dot{q}_{wm}^* = 1/L^* \int_0^{L^*} \dot{q}_w^* dx^*$ und Nu_L nach (7-3) bei $x^* = L^*$ folgt. Gleichung (7-3) kann mit den dimensionslosen Kennzahlen aus Tab. 7.1 auch als

$$\text{Nu}_x = 0,707 \left[\frac{\hat{\text{Gr}} \text{Pr} x^3}{\text{Ja}} \right]^{1/4} \quad (7-5)$$

geschrieben werden. Dabei zeigt sich, dass in der vorliegenden speziellen Situation eine so starke Kopplung der ursprünglich unabhängigen Kennzahlen $\hat{\text{Gr}}$, Pr , x und Ja vorliegt, dass diese nur in der festen Kombination gemäß (7-5) auftreten. Da ähnlich starke Kopplungen auch in anderen Zweiphasen-Wärmeübergängen auftreten, wird häufig auf die formale Schreibweise mit dimensionslosen Kennzahlen verzichtet (und z. B. (7-3) anstelle von (7-5) verwendet).

Obwohl die Wärmeübergangsbeziehungen (7-3)÷(7-5) zunächst nur für eine vertikale Wand ($\vartheta = 90^\circ$ in Bild 7.3) hergeleitet worden sind, können sie auch für geneigte Wände angewandt werden. Dafür muss der Betrag des Erdbeschleunigungsvektors g^* durch die effektiv wirksame Komponente $g^* \sin \vartheta$ ersetzt werden, wobei ϑ den Winkel gegenüber der Horizontalen darstellt. Für Winkel $\vartheta > 30^\circ$ ist dies eine sehr gute Näherung.¹

Anstelle von (bisher unterstellten) ebenen Wänden, gelten die Beziehungen auch für gekrümmte Außenwände von (senkrechten) Rohren, solange der Krümmungsradius groß gegenüber der Filmdicke bleibt. Die Anwendung auf Rohrrinnenwände ist problematisch, da eine wachsende Filmdicke zu einer starken Beschleunigung der Strömung führt, die von der Nußeltschen Theorie nicht berücksichtigt wird. Ebenso ist die Anwendung auf geneigte Rohre nicht ohne weiteres möglich, da die Filmdicke dann über den Umfang variabel ist (ungleichmäßig ablaufende Filme bei geneigten Rohren).

Erweiterungen der einfachen Theorie sind in mehrfacher Hinsicht möglich. Einige Ansätze dazu berücksichtigen folgende Aspekte:

- Wandparallele Dampfströmung, d. h. endliche Schubspannung am Außenrand des Kondensatfilms, s. Kap. 7.3.3,
- Welligkeit der Phasengrenze²,

¹ Für Körper mit einer vertikalen Rotationssymmetrie-Achse wie Zylinder, Kugel oder Kegel s. z. B. Dhir, V. K.; Lienhard, J. H. (1971): *Laminar Film Condensation on Plane and Axisymmetric Bodies in Non-Uniform Gravity*, J. Heat Transfer, **93**, 97-100

² Van der Valt, J.; Kröger, D. G. (1974): *Heat transfer resistances during film condensation*, Proc. Vth Int. Heat Transfer Conf., Tokyo, **3**, 284-288

- variable Stoffwerte¹,
- Kondensatunterkühlung, Dampfüberhitzung³.
- turbulente Kondensatfilme: Bei höheren Film-Strömungsgeschwindigkeiten kommt es zum Übergang (Transition) vom laminaren zum turbulenten Strömungsverhalten. Dies erhöht die effektive Wärmeleitfähigkeit im Kondensatfilm und führt damit letztendlich zu einem deutlich verbesserten Wärmeübergang mit einer expliziten Abhängigkeit der Nußelt-Zahl von der Prandtl-Zahl.²
- Inertgas-Zusatz zum Dampf: Schon geringe Mengen nicht kondensierender „Fremdgas“-Zusätze zur Dampfphase haben einen erheblichen (negativen) Einfluss auf den Wärmeübergang bei der Filmkondensation, weil durch den Inertgas-Zusatz die Temperatur an der Phasengrenze durch zwei Effekte herabgesetzt wird, die in Bild 7.4 erläutert werden. Zum einen stellt der Dampfdruck nur noch einen Partialdruck im Gas-Dampfgemisch dar. Zum anderen entsteht an der Phasengrenze eine Konzentrationsgrenzschicht, in der ein zusätzlicher Abfall des Dampf-Partialdruckes auftritt. Da die Sättigungstemperatur gemäß der Dampfdruckkurve des kondensierenden Fluides monoton mit dem (Partial-) Druck fällt, erniedrigt sich die Temperaturdifferenz, die zur Wärmeleitung durch den Kondensatfilm verbleibt. Damit wird aber der Wärmeübergang der Filmkondensation insgesamt erheblich schlechter. So kann ein Inertgas-Zusatz von 10% zu einer Reduktion des Wärmeüberganges von mehr als 80% führen. Bei der Kondensation von Reinstoffen sind deshalb unbedingt Maßnahmen erforderlich, die einen Inertgas-Eintrag verhindern oder rückgängig machen.

Bild 7.4 zeigt die Verhältnisse ohne und mit Inertgas-Zusatz im Vergleich. Aufgrund des reduzierten Dampfdruckes (Sättigungs-Partialdruck) an der Phasengrenze mit Inertgas-Zusatz liegt dort eine niedrigere (Sättigungs-) Temperatur vor.

7.3.2 Tropfenkondensation

Abhängig von den Benetzungseigenschaften der Wand in Bezug auf ein bestimmtes Fluid kommt es entweder zur Filmbildung an der Wand oder es entstehen bei der Kondensation einzelne Flüssigkeitstropfen. Diese Tropfen wachsen durch weitere Kondensationsvorgänge an ihrer Oberfläche und durch Koaleszenz mit anderen Tropfen bis zu einer Größe an, bei der sie unter der Wirkung der Schwerkraft abfließen oder durch Scherkräfte der strömenden Gasphase entfernt werden.

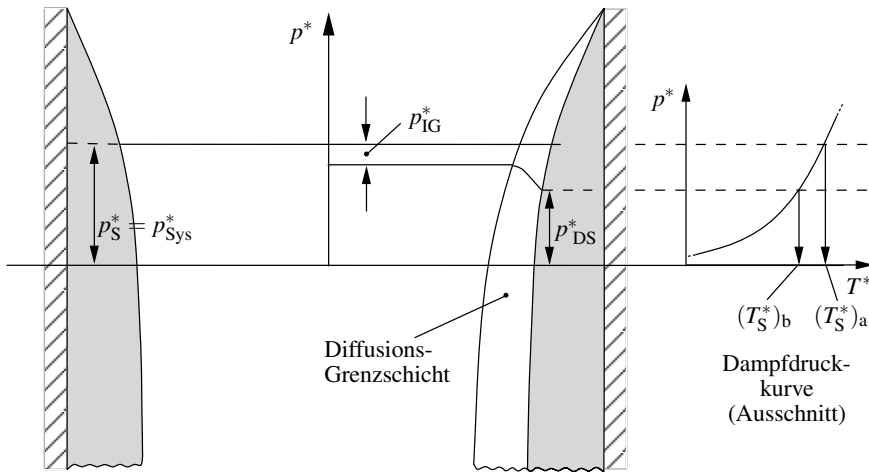
Wenn es zur Tropfenbildung kommt, so ist damit ein hoch wirksamer Wärmeübergangsmechanismus verbunden. Bei der Kondensation wird die Verdampfungsenthalpie in unmittelbarer Wandnähe freigesetzt und muss nicht (wie bei der Filmkondensation) mit Hilfe einer „treibenden Temperaturdifferenz“ durch einen Flüssigkeitsfilm geleitet werden. Deshalb treten bei der Tropfenkondensation (mittlere, d. h. flächengemittelte) Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha^* = \dot{q}_W^* / (T_S^* - T_W^*)$ auf, die häufig fünf- bis zehnmal größer sind als die Wärmeübergangskoeffizienten bei Filmkondensation. Ob es zu einer stabilen Tropfenbildung kommt, ist von den Kräfteverhältnissen an der Kontaktlinie zwischen der Wand und dem (zumindest kurzfristig existierenden) Tropfen abhängig. Bild 7.5 zeigt das Kräftegleichgewicht der drei Grenzflächenspannungen zwischen jeweils zwei Phasen (fest=Wand „W“, flüssig „f“, gasförmig „g“). Danach ist

¹ Baehr, H. D.; Stephan, K. (2004): *Wärme- und Stoffübertragung*, 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin / Kap. 4.1.3

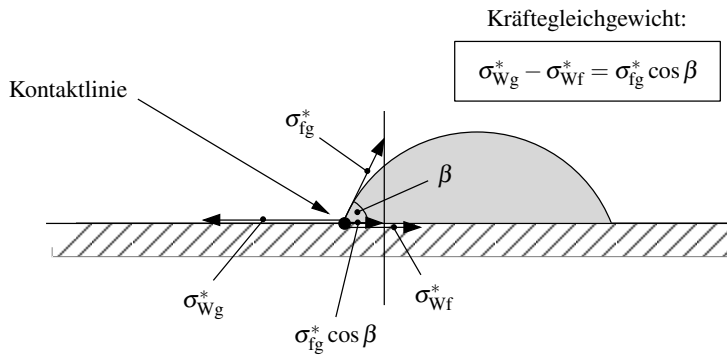
² Zu Details turbulenter Kondensatfilme s. z. B. White, F.M. (1988): *Heat and Mass Transfer*, Addison Wesley / Kap. 9.2.3

(a) ohne Inertgas

(b) mit Inertgas

**Bild 7.4:** Vergleich der Druckverhältnisse bei der Filmkondensation ohne und mit Inertgas-Zusatz(a) Sättigungsdruck $p_S^* =$ Systemdruck p_{Sys}^* (b) Sättigungs-Dampf-Partialdruck $p_{DS}^* <$ Systemdruck p_{Sys}^*
Inertgas-Partialdruck p_{IG}^*

die sog. *Benetzungsspannung* $\sigma_{Wg}^* - \sigma_{Wf}^*$ im Gleichgewicht mit der wandparallelen Komponente der Grenzflächenspannung σ_{fg}^* (= Oberflächenspannung des Fluides). Dieses Gleichgewicht, und

**Bild 7.5:** Kräftegleichgewicht an der Kontaktlinie eines Flüssigkeitstropfens mit einer festen Wand σ_{Wg}^* : Grenzflächenspannung Wand/Gasphase σ_{Wf}^* : Grenzflächenspannung Wand/Flüssigphase σ_{fg}^* : Grenzflächenspannung Flüssig-/Gasphase $\sigma_{Wg}^* - \sigma_{Wf}^*$: Benetzungsspannung β : Randwinkel ($\beta > 0$: Tropfen, $\beta = 0$: Film)

damit eine stabile Tropfenbildung, existiert nur für

$$\sigma_{\text{Wg}}^* - \sigma_{\text{Wf}}^* > \sigma_{\text{fg}}^* \quad (7-6)$$

so dass (7-6) die notwendige Bedingung für die Tropfenbildung an einer Wand darstellt.

Um eine Tropfenbildung an Stelle der Filmkondensation zu ermöglichen, müssen die Grenzflächenspannungen σ_{Wg}^* und σ_{Wf}^* im Sinne von (7-6) beeinflusst werden. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten, wie z. B.:

- Zusatz von Fremdstoffen zum Fluid (sog. Antineuzmittel, Impfstoffe oder Promotoren), die an der festen Wand adsorbiert werden. Dies können organische Stoffe wie Öle oder Wachse sein.
- Elektrolytisch aufgetragene Edelmetallplattierungen (Gold, Rhodium, Palladium, Platin) mit einer Schichtdicke im μm -Bereich (Minstdicke bei Gold: $0,2 \mu\text{m}$, d. h. ca. 4 g/m^2)¹,
- Polymerbeschichtung der Heizfläche (z. B. mit Teflon),
- Ionendotierung von Metalloberflächen².

Bezüglich der theoretischen Beschreibung der Tropfenkondensation bestehen verschiedene Modellvorstellungen, die aber nicht alle mit entsprechenden experimentellen Befunden im Einklang stehen. Eine sehr anschauliche und weitgehend experimentell bestätigte Vorstellung geht davon aus, dass zunächst extrem kleine Tropfen an sog. Keimstellen (Wandrauheiten, Fremdstoffe) entstehen und diese dann in dem Maße anwachsen, wie es die Überwindung der im Tropfen und an seiner Oberfläche bestehenden Wärmewiderstände erlaubt. Die Tropfengrößen variieren dabei über eine Längenskala von bis zu sechs Zehnerpotenzen, d. h. zwischen dem Nanometer- und dem Millimeter-Bereich.

7.3.3 Strömungskondensation

Solange eine geneigte Wand vorliegt, können die Kondensationsvorgänge an einer überströmten Kühlfläche als Modifikation der in Kap. 7.3.1 beschriebenen Filmkondensation in ruhender Umgebung angesehen werden. Eine Strömung in Richtung der Erdbeschleunigung (bzw. eine Komponente der Erdbeschleunigung) wirkt mit ihrer Schubspannung am Film-Außenrand beschleunigend. Damit liegt im Vergleich zum Fall mit ruhender Umgebung eine geringere Filmdicke und damit ein verminderter Wärmewiderstand über den Film hinweg vor. Dies führt zu einem verbesserten Wärmeübergang, besonders dann, wenn eine turbulente Strömung vorliegt.³

Speziell für die Strömungskondensation in Rohren wird versucht, empirische Beziehungen in Anlehnung an die Wärmeübergangskoeffizienten für einphasige Rohrströmungen aufzustellen.⁴

¹ Details in: Woodruff, D.W.; Westwater, J.W. (1981): *Steam Condensation on Various Gold Surfaces*, Journal of Heat Transfer, **103**, 685-692

² s. z. B.: Koch, G.; Kraft, K.; Leipertz A. (1998): *Parameter Study on the Performance of Dropwise Condensation*, Rev. Gen. Therm., **37**, 539-548

³ Baehr, H. D.; Stephan, K. (2004): *Wärme- und Stoffübertragung*, 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin

⁴ s. z. B.: Shah, M. M. (1979): *A General Correlation for Heat Transfer During Film Condensation Inside Pipes*, Int. J. Heat Mass Transfer, **22**, 547-556

7.4 Sieden

Die in Kap. 7.1 aufgeführten unterschiedlichen Aspekte des Siedevorganges (Reine Gasphase und Gasphase mit Inertgasanteil, Blasen-, Tropfen- und Filmbildung, ruhendes und strömendes Fluid) lassen sich am besten systematisch darstellen, wenn zunächst danach unterschieden wird, ob der Siedevorgang in einem ruhenden Fluid (Behältersieden) oder während eines Strömungsvorganges (Strömungssieden) auftritt.

7.4.1 Behältersieden

Dieser Begriff ist durchaus wörtlich gemeint, weil der Siedevorgang dabei in einem ruhenden beheizten Behälter stattfindet, in dem das Fluid allenfalls durch den Siedevorgang in Bewegung gerät. Ansonsten sind aber keine von außen bewirkten Bewegungen in dem Behälter vorhanden (wie etwa auf Grund eines mechanisch betriebenen Rührwerkes).

Bild 7.6 zeigt den Prototyp einer solchen Anordnung, bei der über die Bodenfläche eine Heizung aufgebracht ist, die Seitenwände thermisch isoliert sind und über der Flüssigkeitsoberfläche entweder

- eine reine Dampfatmosfera herrscht (Dampf: gasförmige Phase der Flüssigkeit), oder
- eine Gas-Dampfatmosfera vorliegt (Dampf: gasförmige Phase der Flüssigkeit als eine Komponente des Gas-Dampfgemisches). Das zusätzlich vorhandene Gas wird in diesem Zusammenhang wiederum als *Inertgas* bezeichnet, weil es in dem interessierenden Druck- und Temperaturbereich nicht kondensieren kann.

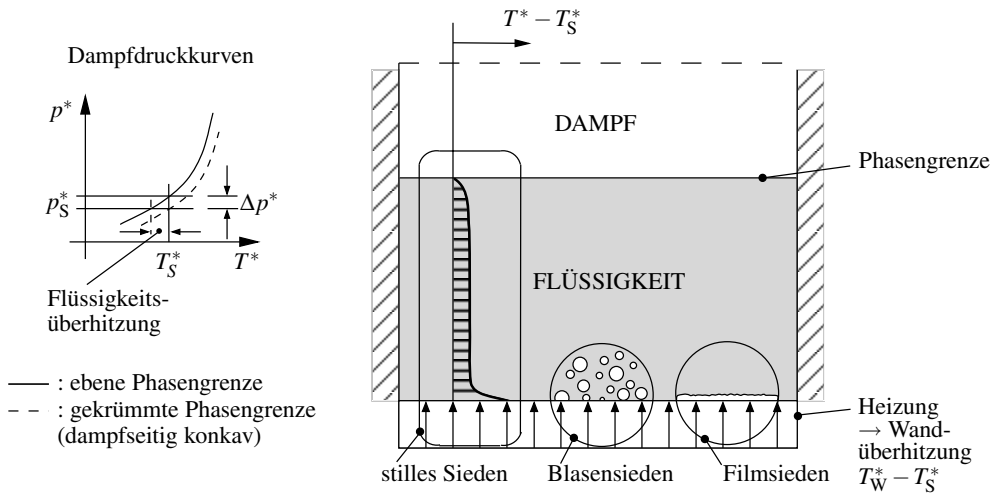


Bild 7.6: Behältersieden eines Fluides.

Die drei eingezeichneten Siedeformen treten abhängig von der Wandüberhitzung $T_W^* - T_S^*$ auf.

p_U^* : Umgebungsdruck; T_U^* : Umgebungstemperatur

p_S^* : Sättigungs-Partialdruck des Fluides

Im Weiteren wird davon ausgegangen, dass der Abstand zwischen dem Behälterboden und der Flüssigkeitsoberfläche so gering ist, dass die hydrostatische Druckerhöhung im Fluid vernachlässigt werden kann.

Für einen Siedevorgang ist es erforderlich, dass die Siedetemperatur T_S^* an der Phasengrenze erreicht bzw. (geringfügig) überschritten wird¹, und dass genügend Energie an der Phasengrenze „bereitgestellt“ wird, um einen Phasenwechsel zu ermöglichen (Bereitstellung der Verdampfungsenthalpie z. B. in der Grenzschicht unterhalb der Phasengrenze).

Abhängig von der sog. *Wandüberhitzung* $T_W^* - T_S^*$ treten unterschiedliche Siedeformen auf, die als *stilles Sieden*, *Blasensieden* bzw. *Filmsieden* in Bild 7.6 angedeutet sind und anschließend der Reihe nach genauer beschrieben werden. Zusätzlich ist die Dampfdruckkurve der siedenden Flüssigkeit skizziert, die für die verschiedenen Vorgänge von entscheidender Bedeutung ist (vgl. auch Bild 7.2). Im Folgenden wird zunächst von einer reinen Dampfphase oberhalb der Flüssigkeit ausgegangen, d. h. der Behälter enthält nur einen Stoff im Zweiphasengleichgewicht flüssig/gasförmig. Die möglichen Zustände (p^*, T^*) liegen damit alle auf der Dampfdruckkurve des Stoffes und sind durch *eine* Angabe, z. B. die Temperatur $T^* = T_S^*$ festgelegt. Solange noch keine Beheizung über die Bodenfläche erfolgt, liegt im gesamten Behälter eine einheitliche Temperatur vor, wenn der (geschlossene, adiabate) Behälter hinreichend Zeit hatte, einen echten Gleichgewichtszustand zu erreichen.

Wenn anschließend die Bodenbeheizung einsetzt, kommt es zu Temperaturverteilungen im Behälter und es liegen nur noch lokale und momentane Gleichgewichtszustände vor, für die aber weiterhin die Gesetzmäßigkeiten der Gleichgewichtsthermodynamik gelten.

Mit steigender Wandüberhitzung $T_W^* - T_S^*$ treten nacheinander folgende Siedeformen auf:

Stilles Sieden (Flüssigkeit \rightarrow Dampf):

Der Siedevorgang läuft an der Phasengrenze zwischen der Flüssigkeit und dem Dampf ab. Die erforderliche Energie für den Phasenwechsel wird durch die Heizung am Behälterboden bereitgestellt und muss anschließend an die Phasengrenze gelangen. Die in Bild 7.6 eingezeichnete vertikale Temperaturverteilung zeigt, dass dies nicht durch reine Wärmeleitung geschieht (dann müsste ein linearer Temperaturverlauf vorliegen), sondern dass offensichtlich großräumige Konvektionsbewegungen vorhanden sind, die u. a. zu Temperaturgrenschichten an der Bodenfläche und der Phasengrenze führen.

In einer stationären Situation folgt aus der Energiebilanz „am Boden übertragene Energie pro Zeiteinheit ($\dot{q}_W^* A^*$)“ gleich „an der Grenzfläche benötigte Verdampfungsenthalpie pro Zeiteinheit ($\Delta h_V^* \dot{m}_V^*$)“ unmittelbar der Verdampfungsmassenstrom

$$\dot{m}_V^* = \frac{\dot{q}_W^* A^*}{\Delta h_V^*}. \quad (7-7)$$

Dieser ist erwartungsgemäß proportional zur Wandwärmestromdichte \dot{q}_W^* , zur Übertragungsfläche A^* und zum Kehrwert der spezifischen Verdampfungsenthalpie Δh_V^* des siedenden Fluides.

Die Bezeichnung als „stilles“ Sieden bringt zum Ausdruck, dass der Siedevorgang (anders als beim anschließend behandelten Blasensieden) nicht von Geräuschen begleitet ist, und darüber hinaus auch keine optischen Auffälligkeiten aufweist (wenn man von manchmal zu beobachteten Schlierenbildungen absieht).

¹ Die geringfügige Überschreitung von T_S^* an der Phasengrenze (um Bruchteile eines Kelvin) ist ein molekularkinetisch erklärbarer Aspekt des Verdampfungsvorganges. Für technische Auslegungen kann die Temperatur an der Phasengrenze aber stets als T_S^* gewählt werden.

Der Wärmeübergangskoeffizient $\alpha^* \equiv \dot{q}_W^*/(T_W^* - T_S^*)$ kann im Sinne einer empirischen Korrelation durch den Ansatz

$$\alpha^* = c_n^*(T_W^* - T_S^*)^n = \hat{c}_n^* \dot{q}_W^{*\frac{n}{1+n}} \quad (7-8)$$

beschrieben werden.¹ Wie bei natürlichen Konvektionsströmungen allgemein (diese liegen hier als großräumige Konvektionsbewegungen in der Flüssigkeit vor), ist α^* nicht konstant, sondern von der treibenden Temperaturdifferenz abhängig (dies folgt z. B. aus (6-45)). In (7-8) gilt für laminare Strömungen $n = 1/4$, für turbulente Strömungen $n = 1/3$. Die Konstanten c_n^* und \hat{c}_n^* sind der jeweiligen Geometrie der (waagrecht angeordneten) Heizfläche sowie der Strömungsform (laminar oder turbulent) anzupassen. Auch ohne Kenntnis dieser Konstanten zeigt (7-8) die Art der Proportionalität zwischen α^* und ΔT^* bzw. \dot{q}_W^* .

Blasensieden (Flüssigkeit \rightarrow Dampf):

Bei weiter steigender Heizrate bzw. Wandüberhitzung kommt es zur Bildung einzelner Dampfblasen direkt auf dem beheizten Boden. Diese wachsen bis zu einer bestimmten Größe an und lösen sich dann vom Boden ab, um unter der Wirkung von Auftriebskräften aufzusteigen. Die Blasenbildung erfolgt unregelmäßig, wobei der genaue Mechanismus, der zur Bildung der Dampfblasen führt, noch nicht wirklich verstanden wird. Systematische Versuche zeigen, dass die Oberflächenbeschaffenheit der Heizfläche eine große Rolle spielt, daraus können aber bisher nur weitgehend qualitative Aussagen zur Blasenbildung gewonnen werden (wie z. B. die Vermutung, dass Inertgas-Einschlüsse in Oberflächenrauheiten die Blasenbildung initiieren könnten). Da diese Dampfblasen in einer Flüssigkeit aufsteigen, deren Temperatur stets oberhalb der Siedetemperatur T_S^* liegt (sog. *überhitzte Flüssigkeit*), könnte man erwarten, dass alle Blasen während des Aufstiegens stets anwachsen, weil ein andauernder Siedevorgang vorliegt.

Eine genauere Analyse zeigt aber, dass die Dampfdruckkurve eines Fluides abhängig von der Krümmung der Phasengrenze ist. Die in Bild 7.6 vermeintlich allgemeingültige Dampfdruckkurve (durchgezogene Linie) eines bestimmten Fluides gilt aber nur für ebene Phasengrenzen. An einer Dampfblase liegt eine gekrümmte Phasengrenze vor, für welche die Dampfdruckkurve (abhängig vom Krümmungsradius der Blase) gegenüber derjenigen bei ebener Phasengrenze nach unten verschoben ist. Zu einer vorgegebenen Temperatur T_S^* gehört jetzt ein um den Wert

$$\Delta p^* = \frac{\rho_d^*}{\rho_f^* - \rho_d^*} \frac{2\sigma^*}{R^*} \quad (7-9)$$

geringerer Sättigungsdruck p_S^* . Neben der Dampf- und Flüssigkeitsdichte (ρ_d^*, ρ_f^*) treten in (7-9) die Oberflächenspannung σ^* und der Blasenradius R^* auf. Ein Blasen-Gleichgewichtszustand auf dieser verschobenen Kurve kann als überhitzter Zustand in Bezug auf die ebene Phasengrenze interpretiert werden. Mit anderen Worten: eine Blase liegt im Gleichgewichtszustand vor, wenn die Flüssigkeit einen bestimmten Überhitzungsgrad (in Bezug auf die ebene Phasengrenze) aufweist. Ist das Fluid kälter, kondensiert die Blase, ist es wärmer, wächst die Blase weiter an. Dies kann erklären, warum eine bestimmte Mindestüberhitzung des Fluides vorhanden sein muss, damit ablösende und aufsteigende Blasen weiterwachsen können.

¹ s. dazu: Stephan, K. (1988): *Wärmeübergang beim Kondensieren und beim Sieden*, Springer-Verlag, Berlin / Kap. 9.1

Da mit den Gasblasen jetzt im Behälter weitere Phasengrenzen entstehen (an denen der Siede-Phasenwechsel abläuft), diese sich aber in unmittelbarer Nähe der Wärmeübertragungsfläche befinden, tritt ein hoch effektiver Wärmeübertragungsmechanismus hinzu. Die lokal an der Bodenfläche übertragene Energie $\dot{q}_W^* dA^*$ wird weitgehend unmittelbar als Verdampfungsenthalpie $\Delta h_V^* dm^*$ „verbraucht“, ohne dass eine nennenswerte treibende Temperaturdifferenz erforderlich wäre, um die Energie an die Phasengrenze zu transportieren (wie dies z. B. beim ausschließlich stillen Sieden der Fall ist). Wenn also zum stillen Sieden Blasensieden hinzukommt und dies in nennenswertem Maße auftritt, so werden die integralen Wärmeübergangskoeffizienten (die stilles Sieden mit Blasenbildung gemeinsam umfassen) mit weiter steigender Wandüberhitzung sehr viel stärker anwachsen, als dies bei reinem stillen Sieden der Fall wäre. Bei nennenswerter Blasenbildung überwiegt der Wärmeübergang durch den Blasenbildungsmechanismus und man spricht dann von reinem *Blasensieden*.

Ein empirischer Ansatz analog zu (7-8) beschreibt die Verhältnisse für $n = 3$ in vernünftiger Näherung, so dass damit dann für Blasensieden näherungsweise gilt:

$$\alpha^* \equiv \frac{\dot{q}_W^*}{T_W^* - T_S^*} = c_n^* (T_W^* - T_S^*)^3 = \hat{c}_n^* \dot{q}_W^{*3/4} \quad (7-10)$$

Bild 7.7 zeigt den Wärmeübergangskoeffizienten α^* für siedendes Wasser bei 100°C.

Filmsieden (Flüssigkeit \rightarrow Dampf):

Eine weitere Steigerung der Heizrate führt zu immer intensiverer Blasenbildung. Unter der Wirkung der Oberflächenspannung kann es dabei zu einem Zusammenwachsen benachbarter Dampfblasen und damit zu einer Filmbildung kommen. Damit entsteht aber in Bezug auf den Wärmeübergang eine vollständige neue Situation. Während bei der Bildung von Einzelblasen die Flüssigkeit partiell noch einen direkten Wandkontakt besitzt und damit durch ihre gute Wärmeleitfähigkeit die an der Blasen-Phasengrenze benötigte Verdamp-

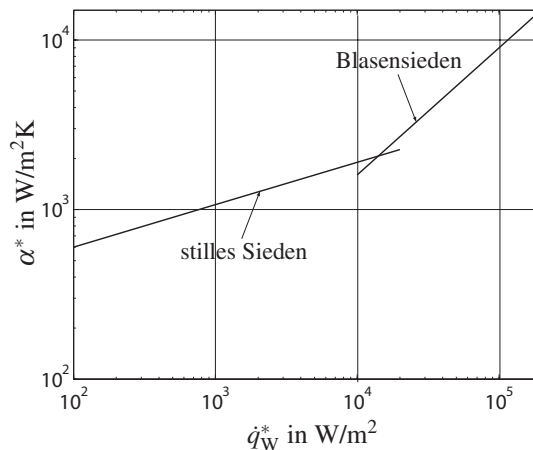


Bild 7.7: Wärmeübergang bei siedendem Wasser (100°C) an einer horizontalen Heizfläche
(Daten aus: Jakob, M.; Fritz, W. (1931), *Forsch. Ing. Wesen*, **2**, 435-447 und Jakob, M.; Linke, W. (1933), *Forsch. Ing. Wesen*, **4**, 75-81)

fungsenthalpie ohne nennenswerte Temperaturunterschiede bereitstellen kann, liegt bei einem Dampffilm zwischen der Wand und der Phasengrenze ein erheblicher Wärmewiderstand vor. Dieser kann wegen der schlechten Wärmeleitfähigkeit des Dampfes nur mit Hilfe eines deutlich größeren Temperaturunterschiedes $T_W^* - T_S^*$ überwunden werden.

Wenn dieser Vorgang an einer geneigten Wand auftritt, so ist die physikalische Situation ähnlich zur *Filmkondensation* an geneigten Wänden (s. Kap. 7.3.1). Statt eines ablaufenden Kondensatfilms tritt jetzt ein aufsteigender Dampffilm auf. Obwohl der Dampffilm deutlich dicker ist als der Kondensatfilm, gelten analoge Beziehungen zu (7-3) und (7-4), wenn die entsprechenden Stoffdaten der Flüssigkeit und des Dampfes vertauscht werden und die Konstante um etwa 15% kleiner gewählt werden.¹ In diesem Sinne gilt für $\vartheta = 90^\circ$

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{\dot{q}_W^* x^*}{\lambda_g^* (T_W^* - T_S^*)} = 0,85 \cdot 0,707 \left[\frac{\rho_g^* (\rho_f^* - \rho_g^*) g^* \Delta h_V^* x^{*3}}{\eta_g^* \lambda_g^* (T_W^* - T_S^*)} \right]^{1/4} \quad (7-11)$$

bzw.

$$\text{Nu}_m \equiv \frac{\dot{q}_{Wm}^* L^*}{\lambda_g^* (T_W^* - T_S^*)} = \frac{4}{3} \text{Nu}_L \quad (7-12)$$

mit $\dot{q}_{Wm}^* = 1/L^* \int_0^{L^*} \dot{q}_W^* dx^*$ und Nu_L gemäß (7-11) mit $x^* = L^*$.

Beim Übergang vom Blasen- zum Filmsieden, unterstellt die Wandwärmestromdichte \dot{q}_W^* bleibt unverändert, kommt es zu einer plötzlichen Erhöhung der Wandtemperatur T_W^* , weil mit dem Dampffilm ein großer Wärmewiderstand entsteht. Dieser Temperatursprung kann so groß sein, dass damit die Wand gefährdet wird (s. dazu das ILLUSTRIERENDE BEISPIEL 7.1). Die in diesem Zusammenhang auftretende Wandwärmestromdichte wird als *kritische Wandwärmestromdichte* \dot{q}_{Wkrit}^* bezeichnet. Das Phänomen selbst wird *Siedekrise* (1. Art) genannt. Genauere Untersuchungen zeigen, dass die kritische Wandwärmestromdichte nahezu unabhängig von der Oberflächenbeschaffenheit und nur wenig abhängig von der Oberflächengeometrie ist. In guter Näherung gilt für die kritische Wandwärmestromdichte

$$\dot{q}_{Wkrit}^* = 0,15 \rho_g^{*1/2} \Delta h_V^* [g^* (\rho_f^* - \rho_g^*) \sigma^*]^{1/4} \quad (7-13)$$

mit einem Korrekturfaktor für sehr kleine Heizflächen.²

Dieser Beziehung ist zu entnehmen, dass \dot{q}_{Wkrit}^* eine starke Druckabhängigkeit aufweist. Für alle gewöhnlichen Fluide steigt die Dichte ρ_g^* mit zunehmendem Druck an, sowohl die Verdampfungsenthalpie als auch die Oberflächenspannung σ^* fallen aber monoton ab (und erreichen beim kritischen Druck p_{krit}^* den Wert Null). Wegen dieser gegenläufigen Trends steigt \dot{q}_{Wkrit}^* bei steigenden Drücken bis etwa zu $p^* = p_{krit}^*/3$ an und fällt anschließend ab, bis bei $p^* = p_{krit}^*$ der Wert $\dot{q}_{Wkrit}^* = 0$ erreicht wird. Dies ist einmal mehr ein Ausdruck für die besondere physikalische Situation von Fluiden in ihrem thermodynamisch kritischen Zustand.

Die bisherige Beschreibung des Siedevorganges war von einem Reinstoff in beiden Phasen ausgegangen. Häufig liegt aber eine Situation vor, bei der die Gasphase neben dem Dampf der Flüssigkeit noch Inertgas enthält (Gas-Dampfgemisch über der Flüssigkeit). Eine solche Situation

¹ Details in: White, F.M. (1988): *Heat and Mass Transfer*, Addison Wesley / Kap. 9.4.5

² Details z. B. in: Lienhardt, J.H. (1987): *A Heat Transfer Textbook*, Prentice Hall, 2nd. ed. / 407 - 410

liegt z. B. am häuslichen Herd vor, wenn Wasser erhitzt wird bis es „kocht“. Über der Wasseroberfläche befindet sich ein Gemisch aus Wasserdampf und trockener Luft (sog. feuchte Luft, die unmittelbar an der Wasseroberfläche stets gesättigt ist). Die bisher beschriebenen drei Siedemechanismen können auch in dieser Situation auftreten, es muss aber beachtet werden, dass an der ebenen Phasengrenze am Rand des Flüssigkeitsgebietes jetzt ein Zweiphasengleichgewicht vorliegt, bei dem der (relativ niedrige) Partialdruck des Dampfes als Sättigungs-Partialdruck zugehörig zur Umgebungstemperatur auftritt. Neben dem für das Phasengleichgewicht entscheidenden (Sättigungs-) Partialdruck existiert jetzt auch noch der *Systemdruck* (hier der Umgebungsdruck als Summe aus dem Sättigungs-Partialdruck des Dampfes und dem Partialdruck des zusätzlichen Inertgases). In Bild 7.8 ist gezeigt, dass die Umgebungstemperatur damit den Sättigungs-Partialdruck an der Phasengrenze bestimmt. Andererseits bestimmt der Umgebungsdruck als Systemdruck dort die Sättigungstemperatur ($T_S^*(p_U^*) > T_U^*$). Ein Siedevorgang in Form von Stilem Sieden findet damit an der Oberfläche bei einer Temperatur in der Nähe der Umgebungstemperatur T_U^* statt. Wenn es zum Blasensieden am Behälterboden kommt, so findet dieser bei einer Temperatur in der Nähe der Siedetemperatur $T_S^*(p_U^*) > T_U^*$ statt, also bei Werten deutlich oberhalb der Umgebungstemperatur T_U^* .

Vor diesem Hintergrund weisen die drei Siedemechanismen in der jetzt vorliegenden Situation folgende Besonderheiten auf:

Stilles Sieden (Flüssigkeit \rightarrow Gas-Dampfgemisch):

Eine Wandüberhitzung $T_W^* - T_S^*$ bezieht sich jetzt auf die niedrige Sättigungstemperatur T_S^* des zum Sättigungs-Partialdruck p_{DS}^* gehörenden Gleichgewichtszustandes an der Flüssigkeitsoberfläche. Stilles Sieden tritt jetzt bis zu relativ hohen Wandüberhitzungen auf, weil

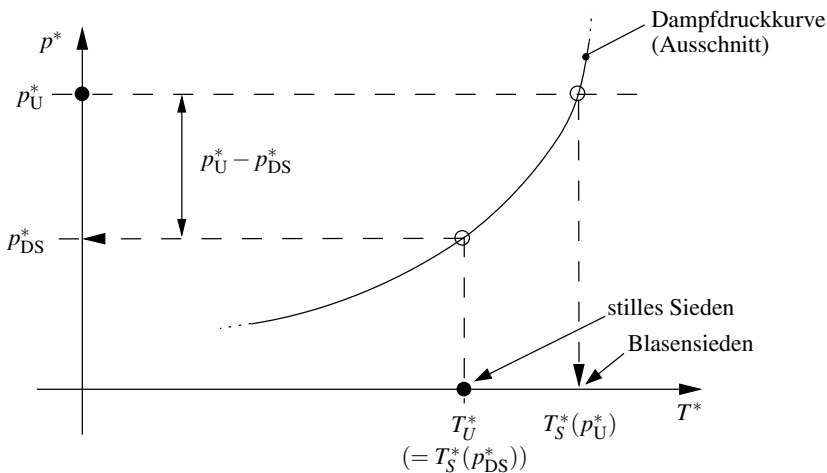


Bild 7.8: Gleichgewichtszustände beim Behältersieden mit einer Gas-Dampf-Atmosphäre (Zusatz von Inertgas)

- T_U^* : Umgebungstemperatur (an der Flüssigkeitsoberfläche)
- p_{DS}^* : Sättigungs-Partialdruck (an der Phasengrenzfläche)
- p_U^* : Umgebungsdruck
- T_S^* : Sättigungstemperatur
- $p_U^* - p_{DS}^*$: Inertgas-Partialdruck (an der Flüssigkeitsoberfläche)

das Einsetzen des Blasensiedens am Behälterboden stark verzögert ist. Erst wenn an der Heizfläche Temperaturen überschritten werden, die zum Gleichgewichtszustand bzgl. des Systemdruckes gehören ($T_S^*(p_U^*) > T_U^*$), können sich Blasen bilden (die weiterhin den reinen Dampf enthalten).

Blasensieden (Flüssigkeit \rightarrow Gas-Dampfgemisch):

Wenn Blasen unter der Wirkung von Auftriebskräften vom Boden aufsteigen, geraten sie in Fluidbereiche außerhalb der (heißen) Bodengrenzschicht und damit in eine deutlich kühleren Fluidumgebung. Anders als im Fall der reinen Dampf-Atmosphäre besteht jetzt im Fluid zunächst eine starke Temperaturschichtung zwischen dem Boden, an dem es zur Blasenbildung kommt, wenn Temperaturen deutlich über $T_S^*(p_U^*) > T_U^*$ auftreten und der Flüssigkeitsoberfläche, an der stilles Sieden bereits bei Temperaturen oberhalb von $T_U^* = T_S^*(p_{DS}^*)$ vorkommt. Dies führt einerseits zur raschen Kondensation der aufsteigenden Dampfblasen, andererseits aber auch zur Erwärmung des Fluidbereiches, in dem die Dampfblasen kondensieren, weil beim Kondensationsvorgang die (latent gespeicherte) Verdampfungsenthalpie freigesetzt wird (und danach im Fluid sensibel, d. h. durch eine Temperaturerhöhung, gespeichert wird). Dieser Vorgang wird *unterkühltes Sieden* genannt. Wenn durch die aufsteigenden und kondensierenden Dampfblasen die Unterkühlung des Fluides beseitigt ist, liegt wieder die zuvor schon beschriebene Situation vor, die jetzt als *nicht-unterkühltes Sieden* bezeichnet werden soll.

Bild 7.9 soll diesen Übergang zwischen den beiden Siedeformen durch die qualitativ gezeigten Verhältnisse verdeutlichen.

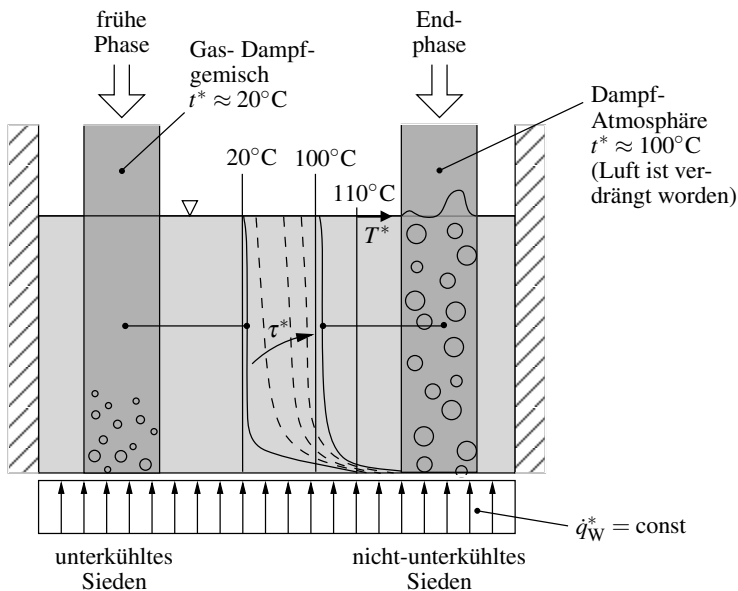


Bild 7.9: Prinzipielle Vorgänge beim Übergang vom unterkühlten Sieden (linke Säule) zum nicht-unterkühlten Sieden (rechte Säule) von Wasser bei einem Systemdruck $p_U^* = 1$ bar. Die gezeigten Temperaturprofile zeigen qualitativ den Temperaturverlauf im Behälter zu fünf verschiedenen Zeiten τ^* .

Links und rechts sind Fluidsäulen als Ausschnitt des Gesamtverhaltens zu unterschiedlichen Zeiten gezeigt (links: frühe Phase, unmittelbar nach Einsetzen des Blasensiedens; rechts: Endphase). In der Mitte sind die Temperaturverläufe in der Flüssigkeit bzgl. ihres prinzipiellen Verlaufes zu fünf verschiedenen Zeiten τ^* gezeigt. Die Zahlenwerte stellen realistische Anhaltswerte dar, es ist aber zu beachten, dass es sich bei dem Übergang von unterkühltem zu nicht-unterkühltem Sieden um einen insgesamt instationären Vorgang handelt, dessen genauer Ablauf stark von den apparativen Randbedingungen abhängt. Ein solcher Vorgang ist auf dem häuslichen Herd zu beobachten, wenn Wasser „zum Kochen gebracht wird“.

Die physikalischen Vorgänge beim stillen Sieden in einer Gas-Dampfatosphäre sind eng verwandt mit der *Verdunstungskühlung*, die z. B. beim menschlichen Schwitzen auftritt. Die Flüssigkeit ist dann nur ein dünner Film, oder es liegen einzelne Wassertropfen vor. Es handelt sich insofern um stilles Sieden, als durch die Flüssigkeit ein Wärmestrom geleitet wird, der an der Oberfläche die Verdampfungsenthalpie (zum Teil) bereitstellt. Als wesentlicher Aspekt tritt jetzt aber noch die Wirkung eines ungesättigten Stromes feuchter Luft an der Wasseroberfläche hinzu. Das Zusammenspiel dieser beiden Mechanismen wird im ILLUSTRIERENDEN BEISPIEL 7.2 erläutert.

7.4.2 Strömungssieden

Beim bisher behandelten Behältersieden traten im Fluid Strömungen nur in dem Maße auf, wie sie durch natürliche Konvektion induziert (stilles Sieden) oder durch aufsteigende Dampfblasen hervorgerufen wurden (Blasensieden/Filmsieden). Wenn nun eine erzwungene Konvektion überlagert wird, so entsteht durch die Wechselwirkung zwischen der (meist wandparallelen) Strömung und den entgegen dem Erdbeschleunigungsvektor aufsteigenden Dampfblasen ein sehr komplexes Strömungs- und Temperaturfeld. Dabei ist grundsätzlich danach zu unterscheiden, ob die *Umströmung* eines Körpers im Siedezustand vorliegt (wie z. B. bei der Umströmung eines Rohres) oder ob der Siedevorgang in einem eng begrenzten durchströmten Volumen stattfindet (wie z. B. bei der *Durchströmung* eines Rohres). Bei Durchströmungen erfolgt aufgrund der Massenerhaltung stets eine starke Beschleunigung der Strömung. Da der Wärmeübergang in diesem Fall den Phasenwechsel eines begrenzten Massenstromes bewirkt, wird dieser bei hinreichenden Lauflängen vollständig verdampfen.

Nachfolgend sollen einige charakteristische Besonderheiten bzw. Trends aufgezeigt werden, für genauere Angaben muss aber auf die Spezialliteratur verwiesen werden.

Strömungssieden bei Körperumströmungen:

In diesen Fällen kann von einer Modifikation des Behältersiedens ausgegangen werden, d. h. je nach Stärke der Strömung kommt es zu mehr oder weniger starken Abweichungen vom Verhalten beim Behältersieden. Bild 7.10 zeigt im Teilbild (a) die qualitativen Veränderungen durch eine zusätzliche Strömung. Der Wärmeübergang im Bereich des stillen Siedens ist derjenige bei erzwungener Konvektion und damit stets höher als derjenige bei ausschließlich natürlicher Konvektion. Der Übergang zum Blasensieden erfolgt in allen Fällen bei etwa gleich bleibender Fluidüberhitzung. Da die Strömung entstehende Dampfblasen tendenziell von der Heizfläche entfernt, treten mit zunehmenden Strömungsgeschwindigkeiten höhere Wandwärmestromdichten (d. h. bessere Wärmeübergänge) auf.

Dieser Effekt ist im Teilbild (b) durch quantitative Angaben für \dot{q}_{Wkrit}^* belegt. Diese sind im Sinne allgemeingültiger Angaben möglich, weil \dot{q}_{Wkrit}^* weitgehend unabhängig von der geometrischen Form der Heizfläche ist. Zusätzlich ist diesem Diagramm der starke Einfluss

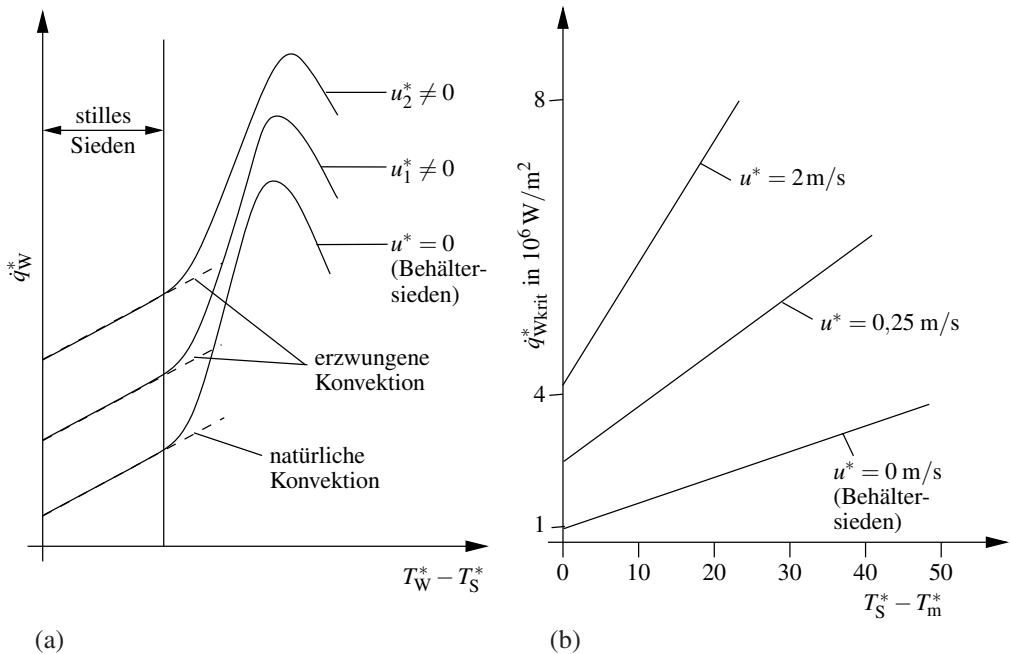


Bild 7.10: Einfluss der Strömung auf das Siedeverhalten bei der Umströmung von Körpern

(a) bei gesättigtem Sieden; qualitativ mit $u_2^* > u_1^* > 0$

(b) Veränderung der kritischen Wandwärmestromdichte bei Unterkühlung des Fluides

T_s^* : Siedetemperatur, T_w^* : Wandtemperatur; T_m^* : mittlere Temperatur der Strömung

u^* : Strömungsgeschwindigkeit

Die Daten folgen aus einer Näherungsbeziehung für kleine Heizflächen, s. dazu: Lienhardt, J. H.; Eichhorn, R. (1976): *Peak Boiling Heat Flux on Cylinders in Crossflow*, Int. J. Heat Mass Transfer, **19**, 1135-1142

der Fluidunterkühlung zu entnehmen (der auch schon bei reinem Behältersieden, d. h. bei $u^* = 0$ m/s, wirksam ist).

Strömungssieden bei Körperdurchströmungen:

Bei Körperdurchströmungen wird ein begrenzter Massenstrom einer Wärmeübertragung ausgesetzt, so dass dieser auf einer endlichen Lauflänge vollständig verdampft, wenn die Wandwärmestromdichte einen dafür erforderlichen Mindestwert überschreitet.

Ein typisches Beispiel ist die vollständige Verdampfung einer Flüssigkeit in einem senkrechten Rohr, das von außen mit einer (konstanten) Wandwärmestromdichte beaufschlagt wird. Die beiden Grenzzustände vor bzw. nach der Siede/Verdampfungszone sind die unterkühlte Flüssigkeit stromaufwärts und der überhitzte Dampf stromabwärts, s. dazu Bild 7.11, in dem die Siede/Verdampfungszone grau unterlegt ist. In den beiden Grenzzuständen liegt jeweils ein rein konvektiver Wärmeübergang (an die Flüssigkeit bzw. an den Dampf) vor. Dabei ist zu beachten, dass bei einem stationären Betrieb die Reynolds-Zahl $Re = \rho^* u_m^* D^* / \eta^* = 4 \dot{m}^* / \pi D^* \eta^*$ im überhitzten Dampf um den Faktor η_f^* / η_d^* größer ist als in der unterkühlten Flüssigkeit. Bei Wasser z. B. kann das Verhältnis der beiden Visko-

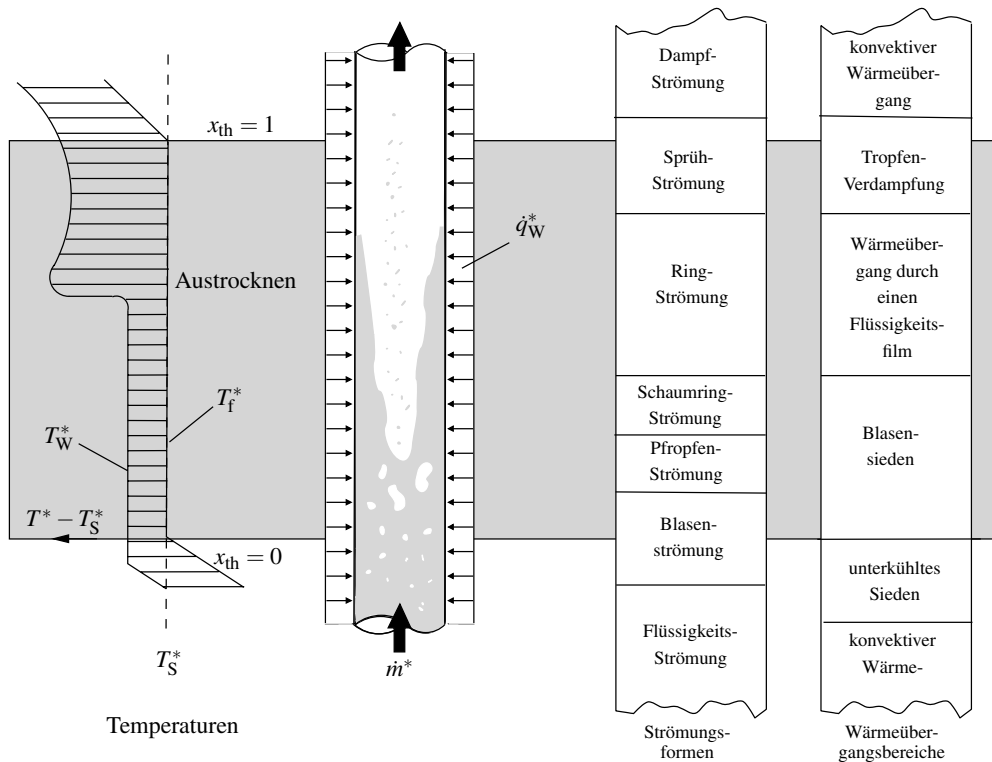


Bild 7.11: Strömungs- und Wärmeübergangsformen am senkrechten beheizten Rohr

x_{th} : thermodynamischer Dampfgehalt

T_S^* : Sättigungstemperatur

T_W^* : Wandtemperatur

T_f^* : Fluidtemperatur

sitäten Werte über 20 erreichen.

In der Siede/Verdampfungszone, in der die vollständige Verdampfung (vom Strömungsdampfgehalt $x \equiv \dot{m}_d^*/(\dot{m}_d^* + \dot{m}_f^*) = 0$ auf den Wert $x = 1$) stattfindet, liegt ein komplizierter Verdampfungsprozess vor, der in physikalisch unterschiedliche Stadien unterteilt werden kann. In Bild 7.11 wird statt des Strömungsdampfgehaltes x dazu der sog. *thermodynamische Dampfgehalt* x_{th} verwendet, der aus einer globalen Energiebilanz folgt. Dieser ist mit dem Strömungsdampfgehalt x identisch, wenn Dampf und Flüssigkeit im betrachteten Querschnitt dieselbe Temperatur besitzen. Im Eintrittsbereich ist die Flüssigkeit in der Rohrmitte jedoch noch unterkühlt, im Austrittsbereich dafür der Dampf in Wandnähe schon überhitzt, so dass bei $x_{th} = 0$ schon Dampfblasen und bei $x_{th} = 1$ noch Flüssigkeitstropfen vorhanden sind.

Der prinzipielle Temperaturverlauf in Bild 7.11 zeigt kleine treibende Temperaturdifferenzen ($T_W^* - T_f^*$), solange die Rohrwand benetzt ist. Am Ende des Ringströmungsbereiches ist der Flüssigkeitsfilm verdampft und die an der Wand übertragene Energie muss durch den hohen

Wärmewiderstand des Dampfes an die verbliebenen Phasengrenzen (Tropfen in der Strömung) gelangen. Dazu sind aber entsprechend hohe Temperaturdifferenzen erforderlich, was letztlich zu einem starken Ansteigen der Wandtemperatur führt. Dieser starke Anstieg der Wandtemperatur an der Stelle des sog. *Austrocknens* (engl.: dryout) bedeutet eine deutliche Verschlechterung des Wärmeüberganges ($\alpha^* = \dot{q}_W^* / (T_W^* - T_f^*)$).

Eine solche plötzliche Verschlechterung des Wärmeüberganges wird (wie schon im Zusammenhang mit ähnlichen Erscheinungen beim Behältersieden) als *kritischer Siedezustand* oder auch *Siedekrise* (2. Art) bezeichnet. Bei vorgegebener Wandwärmestromdichte tritt dabei eine starke Temperaturerhöhung der Wand auf, bei vorgegebener Wandtemperatur entsprechend ein starker Abfall in der Wandwärmestromdichte.

Beim Strömungssieden im Rohr können zwei verschiedene Formen der Siedekrise auftreten:

- Bei niedrigem Dampfgehalt kann eine ähnliche Situation wie in Bild 7.10 (a) für die Umströmung von Körpern entstehen, wenn sich an der Rohrwand ein Dampffilm ausbildet, weil die kritische Wandwärmestromdichte \dot{q}_{Wkrit}^* überschritten ist. Neben der generellen Erhöhung der kritischen Wandwärmestromdichte gegenüber dem Fall des Behältersiedens durch die Strömung (Reynolds-Zahl-Einfluss, s. Bild 7.10(b)) kommt es zu einer Absenkung des kritischen Wertes von \dot{q}_W^* , wenn der Dampfgehalt ansteigt (Einfluss des Dampfgehaltes). Bild 7.12 zeigt den qualitativen Verlauf von \dot{q}_{Wkrit}^* für diese Situation als Kurve „Filmsieden (Siedekrise 1. Art)“ für einen bestimmten Massenstrom \dot{m}^* (und damit für eine bestimmte Reynolds-Zahl).
- Bei hohem Dampfgehalt kommt es zum bereits beschriebenen Austrocknen, wenn die insgesamt in Form von Wärme zugeführte Energie ausreicht, diesen Zustand im Rohr zu erreichen. Bild 7.12 enthält den Zusammenhang zwischen der für das Austrocknen erforderlichen kritischen Wandwärmestromdichte und dem dann erreichten Dampfgehalt als Kurve „Austrocknen (Siedekrise 2. Art)“. Ihr flacherer Verlauf bei kleineren kritischen Wandwärmestromdichten kommt zustande, weil einzelne auf die Wand auftreffende Flüssigkeitstropfen nur noch unvollständig verdampfen und damit eine sog. *Spriihkühlung* (engl.: deposition controlled burn out) darstellen.

Die einheitlich verwendeten Begriffe der „Siedekrise“ und „kritischen Wandwärmestromdichte“ für beide zuvor beschriebenen Phänomene ist allerdings leicht irreführend, weil beiden Mechanismen eine deutlich unterschiedliche Bedeutung zukommt. Wenn in einem Rohr die vollständige Verdampfung einer Flüssigkeit erfolgen soll, so kann die Siedekrise 1. Art (Filmsieden) ohne weiteres vermieden werden, die Siedekrise 2. Art (Austrocknen) ist aber ein Bestandteil des Gesamtprozesses.

Für die Abschätzung der einzustellenden Wandwärmestromdichte, mit der in einer gegebenen Situation (Massenstrom, Rohrlänge, ...) eine vollständige Verdampfung erreicht werden kann, ist es hilfreich, auch die mindestens erforderliche Wandwärmestromdichte zu ermitteln. Diese ergibt sich aus der benötigten Energie, um einen Massenstrom \dot{m}^* mit der Anfangstemperatur T_1^* (die gleichzeitig Sättigungstemperatur sein soll) vollständig zu verdampfen, also aus einer einfachen Globalbilanz der thermischen Energie zu

$$\dot{q}_W^* = \frac{\dot{Q}_W^*}{A^*} = \frac{\dot{m}^* \Delta h_V(T_1^*)}{A^*}. \quad (7-14)$$

Stellt sich dabei z. B. heraus, dass dabei die Siedekrise 1. Art auftreten würde (die man vermeiden möchte), so kann eine Verlängerung des Rohres Abhilfe schaffen, weil dann derselbe Wandwärmestrom \dot{Q}_W^* mit einer geringeren Wandwärmestromdichte \dot{q}_W^* übertragen wird.

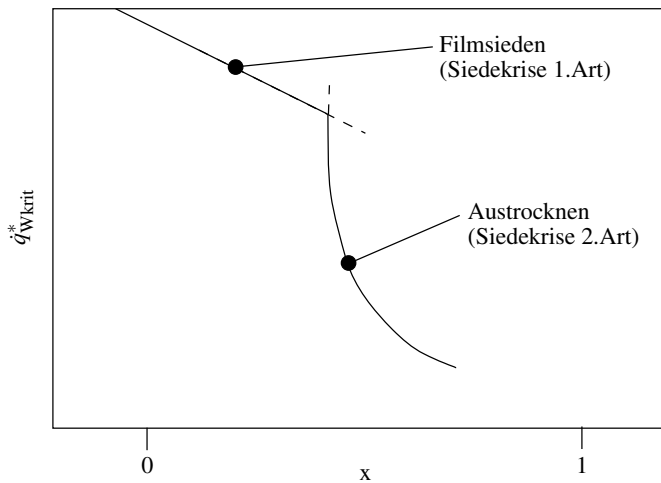


Bild 7.12: Qualitativer Verlauf der kritischen Wandwärmestromdichte als Funktion des Dampfgehaltes x beim Strömungssieden in einem senkrechten Rohr
 Daten aus: Stephan, K. (1988): *Wärmeübergang beim Kondensieren und beim Sieden*, Springer-Verlag, Berlin

ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 7.1: Nukiyamas berühmtes Siedeexperiment (Übersetzung der Originalarbeit aus dem Jahr 1934 in: Int J. Heat Mass Transfer, **9**, 1419-1433 (1966))

Im Jahr 1934 führte der Japanische Forscher S. Nukiyama das nachfolgend beschriebene Experiment durch, welches damals eine Reihe von Fragen aufwarf, die noch nicht hinreichend beantwortet werden konnten. Heute kann man dieses Experiment in allen Details befriedigend interpretieren.

Bild 7.13 zeigt die prinzipielle Versuchsanordnung und Bild 7.14 die Messergebnisse in Form eines \dot{q}_W^*, t_W^* -Diagrammes. Ein Metalldraht, der sich in Wasser bei $t^* = 100^\circ\text{C}$ und $p^* \approx 1$ bar (gesättigter Zustand) befindet, wird von einem elektrischen Strom variabler Stärke durchflossen. Aufgrund des elektrischen Widerstandes dissipiert elektrische Energie und wird in Form von sog. *Joulescher Wärme* als \dot{q}_W^* von der Drahtoberfläche an das umgebende Fluid abgegeben. Soweit der Draht homogene Materialeigenschaften und einen konstanten Querschnitt besitzt, wird bei gleicher Temperatur entlang des Drahtes durch den elektrischen Strom eine gleichmäßige Wandwärmestromdichte \dot{q}_W^* erzeugt. Ihr Wert kann direkt über die vorzugebende Stromstärke eingestellt werden. Aus der Stromstärke I^* und dem Spannungsabfall U^* entlang des Drahtes kann dessen elektrischer Widerstand zu $R^* = U^*/I^*$ ermittelt werden. Wenn nun bekannt ist, wie R^* von der Temperatur T^* abhängt, kann aus diesem Zusammenhang unmittelbar die Drahttemperatur t_W^* bestimmt werden. An dieser Anordnung wurden von S. Nukiyama folgende Beobachtungen gemacht, die in Bild 7.14 bereits in das uns heute geläufige Schema aus verschiedenen Siedebereichen eingetragen sind.

- Mit einem Nichrome-Draht (Schmelzpunkt bei $\approx 1400^\circ\text{C}$) erhöhte er die Stromstärke kontinuierlich vom Anfangswert Null aus. Dabei traten (nach heutiger Kenntnis) folgende Siedeformen auf (t_W^* : Drahttemperatur):
 - bis $t_W^* \approx 105^\circ\text{C}$: stilles Sieden,
 - bis $t_W^* \approx 130^\circ\text{C}$: Blasensieden mit einem Maximalwert $\dot{q}_{W,krit}^* \approx 10^6 \text{ W/m}^2$.

Kurz nachdem die kritische Wandwärmestromdichte erreicht war, schmolz der Draht durch. Die plötzliche Erhitzung des Drahtes (die zu seiner Zerstörung führte) trat ein, weil die intensive Bla-

senbildung am Draht zur Ausbildung eines geschlossenen Dampffilmes führte. Um weiterhin den inzwischen erreichten hohen Wert von \dot{q}_W^* an das Fluid abzugeben wäre eine sehr hohe Temperaturdifferenz $\Delta t^* = t_W^* - t_S^*$ und damit eine sehr hohe Wandtemperatur t_W^* erforderlich gewesen. Diese lag aber oberhalb der Schmelztemperatur des Nichrome-Drahtes.

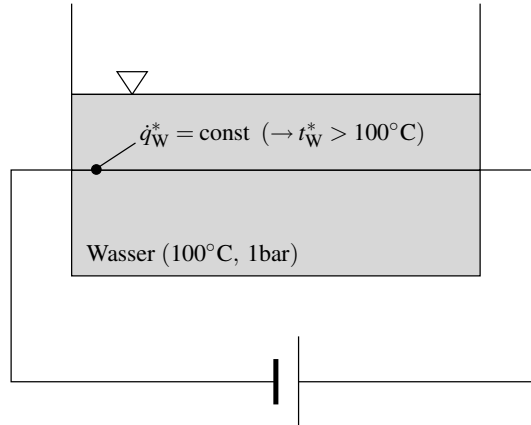


Bild 7.13: Messanordnung des Siedeexperimentes von S. Nukiyama aus dem Jahr 1934; gesättigtes Sieden, $t_S^* = 100^\circ\text{C}$ ($p_S^* \approx 1 \text{ bar}$).

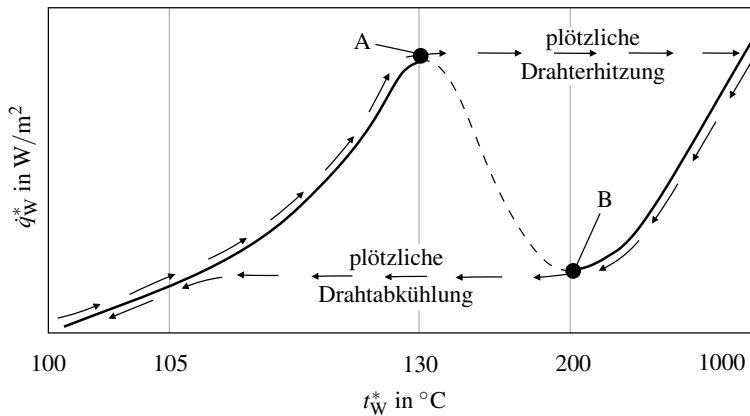


Bild 7.14: Messergebnisse des Siedeexperimentes von S. Nukiyama aus dem Jahr 1934; gesättigtes Sieden, $t_S^* = 100^\circ\text{C}$ ($p_S^* \approx 1 \text{ bar}$).

Ausgezeichnete Punkte:

A: kritische Wandwärmestromdichte (auch: burn out point, $\text{DNB} \hat{=}$ departure from nucleate boiling)

B: „Leidenfrost“-Punkt, erstmaliges Auftreten von Filmsieden bei ansteigender Temperatur

- Erneute Versuche, jetzt aber mit einem Platin-Draht (Schmelzpunkt bei $\approx 1770^\circ\text{C}$) zeigten bis zum Erreichen von \dot{q}_{Wkrit}^* ein ähnliches Verhalten wie zuvor beschrieben. Jetzt führte die plötzliche Temperaturerhöhung bei Erreichen von \dot{q}_{Wkrit}^* aber nicht zur Zerstörung des Drahtes. Vielmehr konnte (mit einem weiß glühenden Draht) der Bereich des Filmsiedens mit Temperaturen oberhalb von $t_{\text{W}}^* \approx 1400^\circ\text{C}$ erreicht werden.
- Ausgehend vom Zustand des Filmsiedens mit $\dot{q}_{\text{W}}^* > \dot{q}_{\text{Wkrit}}^*$ traten bei einer Verkleinerung der Stromstärke folgende Phänomene auf:
 - bis $t_{\text{W}}^* \approx 200^\circ\text{C}$: Filmsieden,
 - bei $t_{\text{W}}^* \approx 200^\circ\text{C}$: plötzliches Sinken der Drahttemperatur von $\approx 200^\circ\text{C}$ auf $\approx 110^\circ\text{C}$ mit anschließendem Blasensieden,
 - unterhalb $t_{\text{W}}^* \approx 105^\circ\text{C}$: stilles Sieden.

Das in Bild 7.14 gezeigte ausgeprägte Hysterese-Verhalten (mehrere Lösungen für die Temperatur t_{W}^* bei Vorgabe von \dot{q}_{W}^*) ist prinzipiell an allen Heizflächen zu beobachten, die mit genügend hohen Wandwärmestromdichten beaufschlagt werden. Die Zustände im sog. Übergangsbereich zwischen Blasen- und Filmsieden sind nicht stabil und nur erreichbar, wenn nicht, wie im Nukiyama-Experiment, \dot{q}_{W}^* vorgegeben wird, sondern t_{W}^* (z. B. mit einem von Dampf entsprechender Temperatur durchströmten Rohr anstelle des elektrisch geheizten Drahtes).

ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 7.2: Verdunstungskühlung, oder: warum Menschen schwitzen

Die menschliche Körper-Innentemperatur beträgt ca. $36,5^\circ\text{C}$, an der Hautoberfläche liegen etwa 31°C vor. Dieses Temperaturgefälle ist erforderlich, um kontinuierlich Energie (die in Stoffwechsel-Prozessen freigesetzt wird) in Form von Wärme an die Körperoberfläche zu bringen und anschließend an die Umgebung abgeben zu können. Wenn die Umgebungstemperatur niedriger als die Oberflächen-temperatur der Haut ist, stehen für diesen erforderlichen Wärmeübergang prinzipiell die drei Mechanismen *reine Wärmeleitung*, *konvektiver Wärmeübergang* und *Wärmestrahlung* zur Verfügung. Alle drei Mechanismen werden allerdings unwirksam bzw. kehren sich in ihrer Wirkung um, wenn die Umgebungstemperatur oberhalb der Hauttemperatur liegt.

Dann bleibt als einziger und auch überlebenswichtiger Wärmeübertragungs-Mechanismus die sog. *Verdunstungskühlung* als Zweiphasen-Wärmeübergang. Verdunstung beschreibt aus thermodynamischer Sicht den Phasenwechsel flüssig \rightarrow gasförmig, wenn dieser wie bei feuchter Luft in eine Gas-Dampf-atmosphäre hinein erfolgt (bei einer reinen Gasatmosphäre spricht man von Verdampfung). Der entscheidende Aspekt bei diesem Vorgang ist, dass für diesen Phasenwechsel Energie in Form der Verdampfungsenthalpie an der Phasengrenze benötigt wird (bei Wasser: $\Delta h_{\text{V}}^* = 2430,7 \text{ kJ/kg}$ bei $t^* = 30^\circ\text{C}$). Diese entstammt der inneren Energie der näheren Umgebung der Phasengrenze und führt damit zur Abkühlung der Flüssigkeit (Schweiß) bzw. der darunterliegenden Haut und der darüberliegenden (bzw. vorbeistreichenden) Luft. Für eine genauere Analyse sind folgende Punkte von Bedeutung:

- Anders als beim stillen Sieden in Bild 7.6 ist die Flüssigkeitsschicht sehr dünn. Um ein Austrocknen zu verhindern, muss diese Flüssigkeitsschicht deshalb ständig erneuert werden (Schweißdrüsen).
- Im Zusammenhang mit dem Behältersieden (Bild 7.6) wurde davon ausgegangen, dass die Verdampfungsenthalpie, die beim stillen Sieden an der Flüssigkeitsoberfläche benötigt wird, vollständig aus der Flüssigkeit stammt. Der darüberliegende gas- bzw. dampfförmige Bereich wurde nicht näher betrachtet.
- Bei der Verdunstungskühlung stammt ein Teil der Verdampfungsenthalpie aus der feuchten Luft (und kühlt diese ab) und ein Teil aus der Flüssigkeit (und kühlt diese sowie die darunterliegenden Bereiche ab). Die genaue Aufteilung in beide Anteile kann nur mit einer detaillierten Betrachtung

des Gesamtvorganges bestimmt werden, siehe z.B. Bosnakovic, F.; Knoche, K. F. (1998): *Technische Thermodynamik Teil I*, 8. korrigierte Auflage, Steinkopff Verlag, Darmstadt.

- Die Temperatur an der Flüssigkeitsoberfläche nimmt am Ende eines instationären Prozesses ihren minimal möglichen Wert an, wenn die Verdampfungsenthalpie dann ausschließlich aus der feuchten Luft stammt. In diesem Fall wäre die Grenzfläche zwischen Gas und Flüssigkeit adiabat und die Flüssigkeit hätte insgesamt die Grenzflächentemperatur. Die dann auftretende Temperatur wird in der Thermodynamik als *Kühlgrenztemperatur* bezeichnet, siehe z.B. Herwig, H.; Kautz, C. (2007): *Technische Thermodynamik*, Pearson Studium, München .
- Die im Sinne einer Kühlung auftretenden Temperaturabsenkungen gegenüber der Umgebungstemperatur hängen entscheidend von der sog. Wasserbeladung der umgebenden (feuchten) Luft ab. Je trockener diese ist, umso wirksamer ist die Verdunstungskühlung. Umgekehrt bedeutet dies aber auch, dass bei gesättigter feuchter Luft keine Verdunstungskühlung auftreten kann. Dies erklärt, warum hohe Luftfeuchtigkeiten bei hohen Temperaturen als extrem unangenehm empfunden werden. In einer gesättigten Umgebung oberhalb der Körpertemperatur könnten wir nicht dauerhaft überleben!

7.5 Übungsaufgaben zum Zweiphasen-Wärmeübergang

Für die Bearbeitung der nachfolgenden Übungsaufgaben wird empfohlen, die zugehörigen Arbeitsblätter zum Zweiphasen-Wärmeübergang im Anhang zu benutzen. Die ausführlich beschriebenen Lösungswege zu diesen Übungsaufgaben befinden sich im Kap. 7.5.2.

7.5.1 Übungsaufgaben und Ergebnisse

Übungsaufgabe 7.1: „Laminare Filmkondensation“

An einer senkrechten Wand kondensiert gesättigter Wasserdampf bei einer Temperatur $t_{\text{S}}^* = 10^\circ\text{C}$. Die Wandtemperatur liegt um 4°C unter der Sättigungstemperatur. Es kann eine laminare Filmkondensation vorausgesetzt werden.

- a) Es sind folgende Größen in bzw. bis zu einer Entfernung $L^* = 0,2\text{m}$ von der Wandoberkante $x^* = 0$ zu berechnen:
- die lokale und die mittlere Nußelt-Zahl,
 - der lokale und der mittlere Wärmeübergangskoeffizient,
 - die Filmdicke $\delta^*(L^*)$,
 - der insgesamt auftretende Kondensatmassenstrom pro Meter Wandbreite,
 - die mittlere Geschwindigkeit u_{m}^* des abfließenden Kondensats an der Stelle L^* . der Stelle L^* ?
- b) Warum verschlechtert sich der Wärmeübergangskoeffizient mit der Koordinate x^* ?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 7.1:

- $\text{Nu}(x^* = 0,2\text{m}) = 144,2$; $\text{Nu}_{\text{m}} = 4/3 \text{Nu}_L = 192,3$
 - $\alpha^*(x^* = 0,2\text{m}) = 418,2\text{W/m}^2\text{K}$; $\alpha_{\text{m}}^* = 557,6\text{W/m}^2\text{K}$
 - $\delta^*(x^* = 0,2\text{m}) = 1,39\text{mm}$
 - $\dot{m}_{\text{Kond}}^*/B^* = 0,18\text{g/s m}$
 - $u_{\text{m}}^* = 0,130\text{mm/s}$.
- b) siehe Lösungsweg

Übungsaufgabe 7.2: „Siedevorgänge“

Ein horizontal angeordnetes, zylindrisches Heizelement mit dem Durchmesser $d^* = 50\text{ mm}$ befindet sich bei Umgebungsdruck ($p_U^* \approx 1\text{ bar}$) in gesättigtem Wasser bei einer Temperatur von $t_s = 100^\circ\text{C}$.

Die Wandtemperatur des Heizelementes beträgt $t_W^* = 110^\circ\text{C}$.

- Welche Form des Siedevorganges tritt auf?
- Wie groß sind die Wandwärmestromdichte und der Wärmeübergangskoeffizient am Heizelement?
- Wie groß ist die kritische Wandwärmestromdichte?
- Welche Temperaturdifferenz zwischen Wand und gesättigter Flüssigkeit ergäbe sich, wenn bei der in b) berechneten Wandwärmestromdichte Filmsieden aufträte? Wie hoch ist in diesem Fall der Wärmeübergangskoeffizient?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 7.2:

- Blasensieden
- $\dot{q}_W^* = 65\,536\text{ W/m}^2$
 $\alpha^* = 6\,553,6\text{ W/m}^2\text{K}$
- $\dot{q}_{W\text{krit}}^* = 1,38 \cdot 10^6\text{ W/m}^2$
- $t_{W,\text{mod}}^* = 683,3^\circ\text{C}$
 $\alpha_{\text{mod}}^* = 112,4\text{ W/m}^2\text{K}$

7.5.2 Lösungswege**Lösungsweg zu Übungsaufgabe 7.1:** „Laminare Filmkondensation“

- a1) Für die laminare Filmkondensation an einer senkrechten Wand gilt gemäß (7-3) für die lokale Nußelt-Zahl

$$\text{Nu}_x = \frac{\dot{q}_W^* x^*}{\lambda_f^* (T_S^* - T_W^*)} = 0,707 \left[\frac{\rho_f^* (\rho_f^* - \rho_g^*) g^* \Delta h_V^* x^{*3}}{\eta_f^* \lambda_f^* (T_S^* - T_W^*)} \right]^{1/4}$$

Die Stoffwerte von Wasser sind bei der Bezugstemperatur $t_B^* = t_S^* = 10^\circ\text{C}$, s. Kap. 6.2.2, zu verwenden. Mit Tab. B.2 sowie Verein Deutscher Ingenieure (2002): *VDI-Wärmeatlas*, 9. Auflage, Springer-Verlag, Berlin / Kapitel Dba ergeben sich

- spezifische Verdampfungsenthalpie: $\Delta h_V^* = 2477,18\text{ kJ/kg}$,
- Dichte der gesättigten Flüssigkeit: $\rho_f^* = 999,65\text{ kg/m}^3$,
- Dichte des gesättigten Dampfes: $\rho_g^* = 0,009407\text{ kg/m}^3$,
- Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit: $\lambda_f^* = 0,580\text{ W/mK}$,
- dynamische Viskosität der Flüssigkeit: $\eta_f^* = 1,3059 \cdot 10^{-3}\text{ kg/ms}$.

Mit diesen Daten folgt

$$\text{Nu}(x^* = 0,2\text{ m}) = 144,2$$

und die mittlere Nußelt-Zahl mit (7-4) ($\text{Nu}_L = \text{Nu}_x$ bei $x^* = L^*$) zu

$$\text{Nu}_m = 4/3 \text{Nu}_L = 192,3.$$

a2) Der lokale Wärmeübergangskoeffizient ist

$$\alpha^*(x^* = 0,2\text{m}) = \text{Nu}(x^* = 0,2\text{m}) \lambda_f^* / x^* = 418,2 \text{ W/m}^2\text{K},$$

der mittlere Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha_m^* = 4/3 \alpha_L^* = 557,6 \text{ W/m}^2\text{K}.$$

a3) Da im Flüssigkeitsfilm reine Wärmeleitung mit unterstelltem linearen Temperaturverlauf vorliegt, (7-2), gilt folgender Zusammenhang

$$\dot{q}_W^* = \alpha^*(t_S^* - t_W^*) = \frac{\lambda_f^*}{\delta^*(x^*)} (t_S^* - t_W^*)$$

Die Filmdicke folgt damit zu $\delta^*(x^*) = \lambda_f^* / \alpha^*$, also gilt

$$\delta^*(x^* = 0,2\text{m}) = 1,39 \text{ mm}.$$

a4) Die Kondensatmenge ergibt sich aus einer Energiebilanz, d.h. der durch Leitung übertragene Wärmestrom entspricht dem durch Kondensation frei werdenden Wärmestrom

$$\alpha_m^* B^* L^* (t_S^* - t_W^*) = \dot{m}_{\text{Kond}}^* \Delta h_V^*.$$

Daraus folgt $\frac{\dot{m}_{\text{Kond}}^*}{B^*} = 0,18 \text{ g/s.m}.$

a5) Mit der Massenstrombeziehung $\dot{m}^* = \rho^* A^* u^*$ und A^* als durchströmter Fläche gilt

$$\dot{m}_{\text{Kond}}^* = \rho_f^* \delta^*(x^* = 0,2\text{m}) B^* u_m^*$$

und damit

$$u_m^* = \frac{\dot{m}_{\text{Kond}}^*}{B^*} \frac{1}{\delta^* \rho_f^*} = 0,130 \text{ mm/s}.$$

b) Mit wachsender Koordinate x^* wird der Kondensatfilm δ^* bei gleich bleibender Temperaturdifferenz ($t_S^* - t_W^*$) dicker. Das bedeutet eine Verringerung des Temperaturgradienten $dt^*/dy^* = \Delta t^*/\delta^*$ und gemäß dem Fourierschen Ansatz (7-2) eine Verringerung der Wandwärmestromdichte. Damit sinkt auch der Wärmeübergangskoeffizient. Dies ist auch aus der Beziehung unter a3) erkennbar, aus der unmittelbar $\alpha^* \sim 1/\delta^*(x^*)$ folgt.

Lösungsweg zu Übungsaufgabe 7.2: „Siedevorgänge“

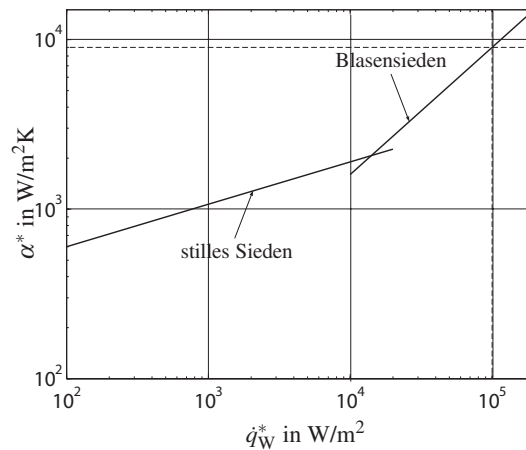
a) Aus dem ILLUSTRIERENDEN BEISPIEL 7.1 und Bild 7.13 folgt, dass bei siedendem Wasser von $t_S^* = 100^\circ\text{C}$ und einer Wandtemperatur von $t_W^* = 110^\circ\text{C}$ *Blasensieden* auftritt.

b) Für das Blasensieden gilt der empirische Ansatz (7-10)

$$\alpha^* = \frac{\dot{q}_W^*}{T_W^* - T_S^*} = c_n^* (T_W^* - T_S^*)^3 = \hat{c}_n^* \dot{q}_W^{*3/4},$$

der im rechten Teil des Bildes 7.7 (das nachfolgend noch einmal gezeigt wird) grafisch dargestellt ist.

Für ein Wertepaar $\dot{q}_W^* = 10^5 \text{ W/m}^2$ und $\alpha^* = 9000 \text{ W/m}^2\text{K}$, siehe nachfolgendes Bild, kann der Term \hat{c}_n^* bestimmt werden zu $\hat{c}_n^* = 1,6 \text{ W}^{4/3}/\text{m}^{4/3}\text{K}$.



Die Wandwärmestromdichte ergibt sich nach einer Umstellung mit $(T_W^* - T_S^*) = 10\text{ K}$ zu

$$\dot{q}_W^* = [\hat{c}_n^* (T_W^* - T_S^*)]^4 = 65536 \text{ W/m}^2.$$

Der Wärmeübergangskoeffizient ergibt sich damit zu

$$\alpha^* = \frac{\dot{q}_W^*}{T_W^* - T_S^*} = \hat{c}_n^* \dot{q}_W^{*3/4} = 6553,6 \text{ W/m}^2\text{K}.$$

c) Zur Bestimmung der kritischen Wandwärmestromdichte nach (7-13) werden die Stoffwerte von Wasser im Sättigungszustand bei $t^* = t_S^* = 100^\circ\text{C}$ benötigt, s. Tab. B.2 sowie Verein Deutscher Ingenieure (2002): VDI-Wärmeatlas, 9. Auflage, Springer-Verlag, Berlin / Kapitel Dba:

- Dichte der gesättigten Flüssigkeit: $\rho_f^* = 958,64 \text{ kg/m}^3$,
- Dichte des gesättigten Dampfes: $\rho_g^* = 0,59 \text{ kg/m}^3$
- spezifische Verdampfungsenthalpie: $\Delta h_V^* = 2477,18 \text{ kJ/kg}$,
- Oberflächenspannung: $\sigma^* = 0,0589 \text{ N/m}$
- Wärmeleitfähigkeit des gesättigten Dampfes: $\lambda_g^* = 0,0251 \text{ W/mK}$,
- dynamische Viskosität des gesättigten Dampfes: $\eta_g^* = 12,27 \cdot 10^{-6} \text{ kg/ms}$.

Damit ergibt sich

$$\dot{q}_{W\text{krit}}^* = 0,15 \rho_g^{*1/2} \Delta h_V^* [g^* (\rho_f^* - \rho_g^*) \sigma^*]^{1/4} = 1,38 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2,$$

d. h. , die in b) berechnete Wandwärmestromdichte ist deutlich kleiner als die kritische Wandwärmestromdichte. Es besteht somit nicht die Gefahr, dass das Heizelement infolge zu geringer Kühlung „durchbrennt“.

d) Die mittlere Nu-Zahl bei der Filmverdampfung nach (7-12) und (7-11) gilt genaugenommen nur für vertikale bzw. geneigte, ebene Wände. Hier wird der halbe Umfang des Heizelementes $\pi D^*/2$ als charakteristische Länge betrachtet und es ergibt sich aufgelöst nach der Temperaturdifferenz:

$$T_{W,\text{mod}}^* - T_S^* = \left[\frac{4}{3} 0,85 \cdot 0,707 \left[\frac{\rho_g^* (\rho_l^* - \rho_g^*) g^* \Delta h_v^* (\pi D^*/2)^3}{\eta_g^* \lambda_g^*} \right]^{1/4} \frac{\lambda_g^* 2}{\dot{q}_W^* \pi D^*} \right]^{-4/3} = 583,3 \text{ K},$$

d. h. , die Wandtemperatur beträgt im Falle der Filmkondensation mit der in b) berechneten Wandwärmestromdichte $\dot{q}_W^* = 65536 \text{ W/m}^2$ nunmehr

$$t_{W,\text{mod}}^* = 683,3^\circ \text{C}.$$

Damit ergibt sich ein Wärmeübergangskoeffizient von

$$\alpha_{\text{mod}}^* = \frac{\dot{q}_{W,\text{mod}}^*}{T_{W,\text{mod}}^* - T_S^*} = 112,4 \text{ W/m}^2 \text{K}.$$

8 Wärmeübergang durch Strahlung

Der physikalische Mechanismus eines strahlungsbasierten Wärmeüberganges unterscheidet sich grundsätzlich von den bisher behandelten leitungs-basierten Wärmeübergängen. Die leitungs-basierten Wärmeübergänge erfolgen aus molekularer Sicht stets mit Hilfe von Wechselwirkungen benachbarter Moleküle bzw. durch freie Elektronen. Es liegt stets eine Wärmeleitung über die Systemgrenze (Ort des Wärmeüberganges) vor, es muss „lediglich“ danach unterschieden werden, wie die per Leitung übertragene Energie „abtransportiert“ wird (siehe Bild 4.1). Im Gegensatz dazu erfolgt der Wärmeübergang durch Strahlung auf *elektromagnetischem Weg*. Strahlungsbasierte Wärmeübergänge sind die Folge von „Fernwirkungen“ zwischen Molekülen mit elektromagnetischen Feldern als Übertragungswegen.

Diese Form der Wärmeübertragung ist keineswegs auf wenige besondere Situationen beschränkt, sondern in fast allen Wärmeübertragungsproblemen als Teilaspekt vorhanden. Um entscheiden zu können, ob die Effekte der Wärmestrahlung in einem bestimmten Problem eine wesentliche Rolle spielen oder nicht, müssen die Vorgänge gut verstanden sein. Die Grundlage dazu soll in diesem Kapitel gelegt werden.

8.1 Die Physik elektromagnetischer Energieübertragung (Wärmestrahlung)

Die als Wärme- oder Temperaturstrahlung bezeichnete Form des Energietransportes im Raum ist ein *elektromagnetisches Phänomen*.¹ Diese Strahlung stellt *keine* Wechselwirkung benachbarter Moleküle dar und ist deshalb nicht auf ein „Trägerfluid“ angewiesen. Sie existiert also (anders als leitungs-basierte Mechanismen) auch im Vakuum.

Abhängig von der Temperatur T^* besitzen Moleküle verschiedene, *intramolekular* gespeicherte Energien, deren Veränderung mit der Abgabe oder Aufnahme diskreter Energiemengen verbunden ist. Die konstante Temperatur eines makroskopischen Körpers bedeutet dabei lediglich, dass die insgesamt von einzelnen Molekülen abgegebene Energie gerade die (wiederum von einer großen Anzahl einzelner Moleküle) aufgenommene Energie kompensiert. Auch in diesem Fall existiert ein elektromagnetisches Strahlungsfeld als Folge der ständigen Veränderung molekularer Energiezustände. Aus makroskopischer Sicht kommt es zu Wärmeübergängen zwischen makroskopischen Körpern, die sich nicht berühren, wenn Temperaturunterschiede zwischen den Körpern zu einer Ungleichverteilung von Energieabgabe und Energieaufnahme in Form der skizzierten Wärmestrahlung führen.

Der kontinuumstheoretisch beschreibbare Aspekt der Wärmestrahlung identifiziert diese als Energietransport in einem elektromagnetischen Feld. Die dabei auftretenden elektromagnetischen Wellen (u.a. gekennzeichnet durch die Wellenlänge λ^* , die nicht mit der Wärmeleitfähigkeit λ^* zu verwechseln ist!) besitzen die höchsten Energiedichten in einem abgrenzbaren Wellenlängenbereich von ca. (beachte: $1\ \mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$)

$$0,1\ \mu\text{m} < \lambda^* < 1000\ \mu\text{m}. \quad (8-1)$$

¹ Eine genauere Beschreibung erfolgt sowohl mit Hilfe kontinuumsmechanischer Modellvorstellungen (elektromagnetische Felder), als auch mit Hilfe der quantenmechanischen Theorie (Photonen, Energiequanten).

Außerhalb dieser Wellenlängen sind die durch Temperaturanregung ausgelösten Energieniveau-Änderungen der einzelnen Moleküle makroskopisch gesehen vernachlässigbar gering, so dass nur der bei Wellenlängen aus (8-1) beschriebene elektromagnetische Energietransport als Wärmestrahlung bezeichnet wird.

Bild 8.1 zeigt das gesamte elektromagnetische Wellenspektrum im Wellenlängen-Bereich von $10^{-10} \mu\text{m}$ bis $10^{+10} \mu\text{m}$ sowie grau unterlegt den Bereich der Wärmestrahlung. Innerhalb des Wellenlängenbereiches der Wärmestrahlung liegt auch das Wellenlängenband des sichtbaren Lichtes. Dies ist lediglich deshalb ein besonderer Bereich, weil das menschliche Auge diesen Ausschnitt der elektromagnetischen Strahlung in Reizungen der Sehnerven umwandeln kann (und diese anschließend im Gehirn zu Seheindrücken verarbeitet werden).

Mit der (wellenlängen-unabhängigen) Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum, $c_0^* = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ („Lichtgeschwindigkeit“), ergeben sich die zu λ^* gehörigen Frequenzen $f^* = c_0^*/\lambda^*$ zu

$$0,1 \mu\text{m} < \lambda^* < 1000 \mu\text{m} \rightarrow 3 \cdot 10^{15} \text{ Hz} > f^* > 3 \cdot 10^{11} \text{ Hz.} \quad (8-2)$$

Für das physikalische Verständnis von Wärmeübergängen durch Strahlung sind folgende Aspekte von besonderer Bedeutung:

- Viele Körper, die undurchlässig für sichtbares Licht sind (lichtundurchlässige Körper mit sog. *opaken Oberflächen*) sind auch undurchlässig für den gesamten Spektralbereich der Wärme-

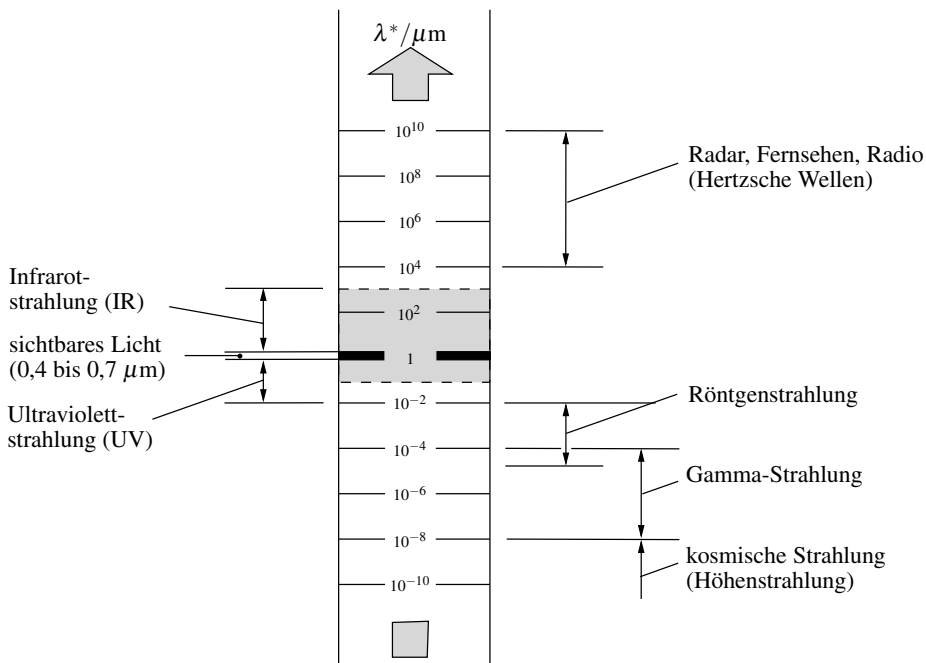


Bild 8.1: Elektromagnetisches Wellenspektrum
grau unterlegt: Wärmestrahlung

strahlung. In diesen Fällen handelt es sich bei der Wärmestrahlung, die von diesen Körpern ausgeht bzw. auf diese trifft, um ein reines *Oberflächenphänomen*. Nur wenige oberflächennahe Moleküllagen in einer Gesamttiefe von etwa $1\ \mu\text{m}$ sind unmittelbar an der Wärmestrahlung beteiligt. Die entsprechenden Phänomene in tiefer im Körper liegende Molekülschichten kompensieren sich zwischen den benachbarten Molekülen ohne makroskopische Gesamtwirkung.

Der Strahlungsaustausch zwischen Körpern ist damit unmittelbar durch ihre Oberflächen (d. h. deren Lage, Beschaffenheit und Temperatur) bestimmt. Die Körper als Einheit „kommen ins Spiel“, wenn Oberflächen-Energieströme in die Körper geleitet und dort ggf. gespeichert werden. Die Körperoberfläche entscheidet damit im Zusammenhang mit der Wärmestrahlung über die dort auftretenden Energieströme (Wandwärmeströme), die Körper selbst über das Zusammenspiel mit den weiteren Mechanismen des thermischen Energietransportes (Leitung, Speicherung, Phasenwechsel, ...).

Körper, bei denen Wärmestrahlung in größere Tiefen eindringen kann, bedürfen einer gesonderten Betrachtung (s. dazu z. B. das spätere Kap. 8.6 zur Gasstrahlung).

- Es zeigt sich, dass eine genauere Analyse der Wärmestrahlung eine Wellenlängen- und Temperaturabhängigkeit berücksichtigen muss. Bei realen Oberflächen treten zusätzlich Richtungsabhängigkeiten hinzu, was zu sehr komplexen physikalischen Verhältnissen führt, die oftmals nur in grober Näherung beschrieben werden können.
- Wärmestrahlungen stellen (im Vakuum) einen Energietransport entlang von Geraden dar (ausgehend von einem Strahlungsursprung). Ein Flächenelement dA^* ist deshalb im gesamten Halbraum über dem (ebenen) Flächenelement dA^* strahlungsaktiv, so dass die Gesamtwirkung durch eine Integration über diesen Halbraum bestimmt werden muss.
- Ein Flächenelement dA^* ist stets gleichzeitig Empfänger und Sender (Emitter) von Wärmestrahlung. Beide Phänomene können getrennt analysiert, müssen bei Gesamtbilanzen aber stets gemeinsam berücksichtigt werden.
- Wärmestrahlung tritt häufig gleichzeitig mit anderen (leitungsbasierten) Mechanismen der Wärmeübertragung auf. Dann sind eventuelle Kopplungen (meist über die Oberflächentemperaturen) zu beachten. Zusätzlich muss bei Globalbilanzen sorgfältig auf eine vollständige Berücksichtigung aller Energieströme geachtet werden.
- Ist ein Körper der Temperatur T_K^* vollständig von einer umschließenden Fläche der Temperatur $T_U^* \neq T_K^*$ umgeben, so stellt sich über einen Netto-Strahlungstransport vom oder zum Körper ein thermodynamischer Gleichgewichtszustand mit $T_K^* = T_U^*$ ein, wenn die Wärmekapazität des zur Umschließungsfläche gehörigen Körpers sehr viel größer als diejenige des umschlossenen Körpers ist.

8.2 Globalbilanzen

Bevor in den nächsten Kapiteln Details zur Wärmestrahlung an Körperoberflächen behandelt werden, erfolgt zunächst mit Bild 8.2 die schematische Darstellung der Globalbilanz an einem Körper. Die Pfeile symbolisieren dabei lediglich einzelne Anteile des insgesamt auftretenden Energietransportes durch Strahlung, wobei nur ihr Auftreten selbst und ihre Richtung, nicht aber ihre Größe und genaue Lage gemeint sind.

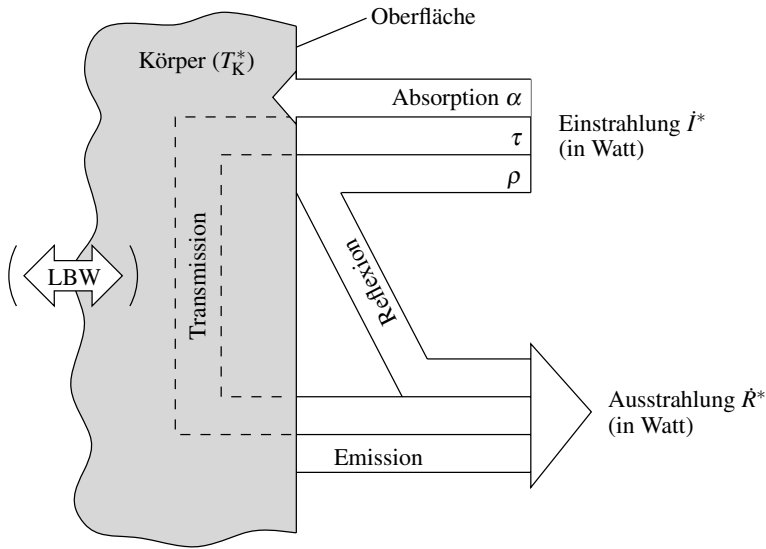


Bild 8.2: Globalbilanz der Wärmestrahlung (schematisch)

Zusammensetzung der Einstrahlung aus den Anteilen Absorption (α), Transmission (τ) und Reflexion (ρ) mit $\alpha + \tau + \rho = 1$

LBW: leitungsbasierte Wärmeübergänge

Die *Einstrahlung* (engl.: irradiation) kann danach vom Körper zum Teil absorbiert werden (Umwandlung in innere Energie), reflektiert werden oder durch diesen hindurch treten (Transmission, wenn die Körperbeschaffenheit dies zulässt). Die entsprechenden Anteile α , ρ und τ werden so definiert, dass die Summe den Wert Eins ergibt.

Die *Ausstrahlung* (engl.: radiosity) wiederum kann (anteilig) in Form von Emission (Abstrahlung innerer Energie), Reflexion oder Transmission erfolgen.

Das Bild verdeutlicht, dass eine stationäre Situation mit einer zeitunabhängigen Körpertemperatur T_K^* nur möglich ist, wenn die Einstrahlungsleistung \dot{I}^* genauso groß wie die Abstrahlungsleistung \dot{R}^* ist. Anderenfalls verbleibt bezogen auf den Körper eine Differenz, die zu einer Aufheizung ($\dot{I}^* > \dot{R}^*$) bzw. zu einer Abkühlung ($\dot{I}^* < \dot{R}^*$) des Körpers führt. Dies gilt so allerdings nur, wenn die Wärmestrahlung den einzigen Wärmeübertragungsmechanismus in Bezug auf den Körper darstellt.

Wenn andere Mechanismen zusätzlich vorhanden sind (was häufig der Fall ist), so müssen diese in der Globalbilanz entsprechend berücksichtigt werden. In Bild 8.2 sind diese weiteren Wärmeübergänge symbolisch durch $\text{LBW} \hat{=}$ leitungsbasierte Wärmeübergänge angedeutet.

8.2.1 Generelles Vorgehen

Bild 8.2 verdeutlicht, dass zur Bestimmung des Strahlungs-Wärmeüberganges mehrere Teilaspekte (Emission, Absorption, ...) berücksichtigt bzw. im Detail ermittelt werden müssen. Diese Teilaspekte wiederum sind von einer Reihe von Parametern abhängig, so dass ihre Ermittlung für reale (nicht idealisierte) Fälle sehr kompliziert werden kann. Oftmals fehlen auch die Informationen über eigentlich benötigte Größen. Vor diesem Hintergrund ist es sinnvoll und hilf-

reich, zunächst den theoretischen Grenzfall einer (anschließend näher beschriebenen) idealen Strahlungs-Wärmeübertragung zu betrachten und anschließend reale Situationen im Vergleich zu diesem Grenzfall zu behandeln. Damit erschließen sich einerseits die grundlegenden Vorgänge am idealisierten Fall und andererseits ergibt sich die Möglichkeit, reale Fälle durch die Einführung entsprechender Koeffizienten auf den idealen Fall zu beziehen. Dieses Vorgehen hat ähnliche Vorteile wie in der Thermodynamik die Einführung von (idealisierten) reversiblen Prozessen, die für den Vergleich mit realen Prozesse herangezogen werden können.

Insgesamt kommt einer formal korrekten und vor allem auch vollständigen Kennzeichnung der relativ vielen Größen, die in diesem Zusammenhang benötigt werden, eine erhebliche Bedeutung zu. Da in der Literatur keine einheitliche Bezeichnung der verschiedenen benötigten Größen vorhanden ist, wird im Folgenden der konsequente Systematik in der Bezeichnung der einzelnen Größen der Vorrang gegenüber dem Versuch gegeben, unbedingt gleiche Bezeichnungen wie in bestimmten, vielleicht als „Standardwerke“ anzusehenden Literaturstellen zu verwenden.

Obwohl zunächst nur der idealisierte Fall behandelt wird, werden im Folgenden einige wichtige Größen für allgemeine, d. h. auch reale Körper eingeführt und anschließend für den idealisierten Fall spezifiziert.

8.3 Ideales Strahlungsverhalten / Schwarze Körper

Die Abstraktion des beobachtbaren Strahlungsverhaltens realer Körper auf ein „ideales Verhalten“ führt auf die Einführung eines (idealen) gedachten Körpers mit folgenden Eigenschaften (vgl. Bild 8.2):

- Er emittiert bei jeder Temperatur die maximal mögliche Energie, d. h., er besitzt die maximal mögliche *spezifische Ausstrahlung* (spezifisch: pro Flächenelement dA^*).
- Er absorbiert die gesamte *spezifische Einstrahlung* ($\alpha = 1$) und lässt deshalb weder Transmission noch Reflexion zu ($\tau = \rho = 0$).

Weil ein solcher Körper bei Umgebungstemperatur optisch als schwarz erscheinen würde, wird er *Schwarzer Körper* genannt. Dieser Name ist einprägsam, sollte aber nicht allzu wörtlich genommen werden. Schwarze Körper sehr hoher Temperatur sind wegen ihrer grundsätzlich optimalen Emission (jetzt aber im Bereich des sichtbaren Lichtes) sehr gut sichtbar und keineswegs optisch „schwarz“. Zum Beispiel stellt die Sonne mit ihrer Oberflächentemperatur von ca. 5800 K in guter Näherung einen Schwarzen Körper dar, wie anschließend deutlich werden wird.

8.3.1 Das Emissionsverhalten Schwarzer Körper

Das Strahlungsverhalten des Modellkörpers vom Typ *Schwarzer Körper* kann analytisch durch sehr einfache Beziehungen beschrieben werden. Diese gehen auf den Physiker Max Planck¹ zurück, der zuvor schon bestehende Theorien mit quantenphysikalischen Überlegungen (diskrete Energieniveaus, Photonen als Energiequanten) verknüpfte. Danach gilt folgende fundamentale Aussage über die sog. (*hemisphärische*) *spezifische spektrale Ausstrahlung* $\dot{e}_{\lambda,s}^*$ des Schwarzen

¹ Max Planck (1858 - 1947), theoretischer Physiker in Kiel und Berlin, 1918 Nobel-Preis für Physik

Körpers¹:

$$\dot{e}_{\lambda,s}^* = \frac{c_1^*}{\lambda^{*5} [\exp(c_2^*/\lambda^* T^*) - 1]} \quad (8-3)$$

mit den beiden sog. *Schwarzkörper-Konstanten*

$$c_1^* = 3,7418 \cdot 10^{-16} \text{ Wm}^2 \quad ; \quad c_2^* = 1,4388 \cdot 10^{-2} \text{ mK} \quad (8-4)$$

die als $c_1^* = 2\pi h^* c_0^{*2}$ und $c_2^* = h^* c_0^*/k^*$ mit dem Planckschen Wirkungsquantum h^* , der Lichtgeschwindigkeit c_0^* und der Boltzmann-Konstante k^* verbunden sind.

Die Größe $\dot{e}_{\lambda,s}^*$ hat die Bedeutung einer abgestrahlten Leistung pro Flächenelement dA^* (*spezifisch*) und pro Wellenlängenbereich $d\lambda^*$ (*spektral*, Index λ). Der Index s steht für „Schwarzer Körper“. Der Bezug auf die Fläche dA^* wird durch keinen eigenen Index gekennzeichnet, sondern durch die Wahl eines Kleinbuchstaben „e“. Die Größe $\dot{e}_{\lambda,s}^*$ ist eine hemisphärische Größe (integraler Wert über den gesamten Halbraum). Dies gilt hier und im Folgenden stets, wenn nicht durch einen weiteren Index gekennzeichnet wird, dass eine solche Größe nur in einem bestimmten Raumwinkel-Bereich gilt. Die Einheit von $\dot{e}_{\lambda,s}^*$ ist $[\dot{e}_{\lambda,s}^*] = (\text{W}/\text{m}^2)/\text{m} = \text{W}/\text{m}^3$.

Gemäß (8-3) ist $\dot{e}_{\lambda,s}^*$ eine Funktion der Wellenlänge λ^* und der Temperatur T^* . Sie kann als $\dot{e}_{\lambda,s}^*$ über λ^* mit T^* als Parameter an einer entsprechenden Kurvenschar dargestellt werden, wie dies in Bild 8.3 gezeigt ist. Die eingezeichneten Kurven besitzen jeweils einen Maximalwert bei $\lambda^* = \lambda_{\max}^*$, wobei gilt

$$\lambda_{\max}^* = \frac{c_3^*}{T^*} \quad ; \quad c_3^* = 2,8978 \cdot 10^{-3} \text{ mK}. \quad (8-5)$$

Diese Verkleinerung von λ_{\max}^* mit steigenden Temperaturen wird auch als *Wiensches Verschiebungsgesetz*² bezeichnet.

Nachfolgend wird auf einige Besonderheiten in der Verteilung gemäß (8-3) bzw. Bild 8.3 hingewiesen. Diese gelten tendenziell auch für das Strahlungsverhalten realer Körper, soweit diese sich näherungsweise wie Schwarze Körper verhalten.

- Die Strahlung des Schwarzen Körpers ist weder von Material- noch von Oberflächeneigenschaften abhängig.
- Die Funktion $\dot{e}_{\lambda,s}^*$ ist bei jeder festen Wellenlänge λ^* eine mit T^* monoton ansteigende Funktion, d. h., die Ausstrahlung des Schwarzen Körpers nimmt bei jeder Wellenlänge mit ansteigender Temperatur zu.
- Die tatsächliche Energieverteilung über der Wellenlänge ist durch die doppelt-logarithmische Darstellung in Bild 8.3 stark verzerrt dargestellt. Bei Wellenlängen bis zu derjenigen des Maximums in $\dot{e}_{\lambda,s}^*$, also bis zu Wellenlängen λ_{\max}^* , sind nur etwa 25% der gesamten Strahlungsleistung enthalten.
- Durch Einsetzen von (8-5) in (8-3) erhält man für die Maximalwerte der (hemisphärischen) spezifischen spektralen Ausstrahlung des Schwarzen Körpers $\dot{e}_{\lambda,s}^* = 1,2865 \cdot 10^{-5} T^{*5} \text{ W}/\text{m}^3 \text{K}^5$, also einen Anstieg mit der 5. Potenz von T^* . Eine Verdoppelung der (thermodynamischen) Temperatur führt damit zu einer um den Faktor 32 höheren spezifischen spektralen Ausstrahlung.

¹ Zur Herleitung s. z. B.: Reif, F. (1987): *Statistische Physik und Theorie der Wärme*, Verlag W. de Gruyter, Berlin

² Benannt nach Wilhelm Wien (1864 - 1928), Physiker in Aachen, Würzburg und München, 1911 Nobel-Preis für Physik

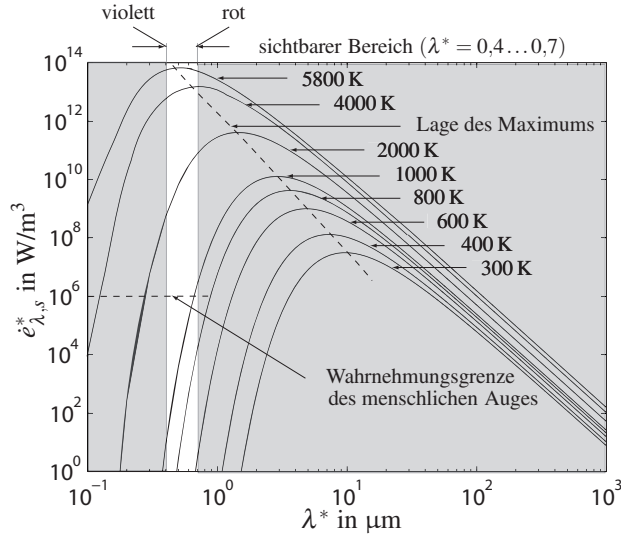


Bild 8.3: (Hemisphärische) Spezifische spektrale Ausstrahlung des Schwarzen Körpers

- Eine Integration von (8-3) über den gesamten relevanten Wellenlängenbereich ergibt die (hemisphärische) *spezifische Ausstrahlung* $\dot{e}_s^*(T^*)$ zu

$$\dot{e}_s^* = \int \dot{e}_{\lambda,s}^* d\lambda^* = \sigma^* T^{*4} \quad (8-6)$$

mit der sog. *Stefan-Boltzmann-Konstante* $\sigma^* = 5,6696 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$. Gleichung (8-6) wird auch *Stefan-Boltzmann-Gesetz* genannt.

- Aufgrund der Wahrnehmungsgrenze des menschlichen Auges bei $\dot{e}_{\lambda,s}^* \approx 10^6 \text{ W/m}^3$ können nur Körper mit Temperaturen ab etwa 1000 K aufgrund ihrer emittierten Strahlung (und nicht aufgrund von Reflexionen sichtbaren Lichtes) optisch wahrgenommen werden. Kältere Schwarze Körper wären für uns unsichtbar, da diese grundsätzlich kein Licht reflektieren, sie wären also in der Tat „schwarz“. Diese Körper erscheinen zunächst als rot (glühend) und wechseln dann mit steigender Temperatur die Farbe, bis sie bei ca. 5800 K als weiß (glühend) erscheinen (würden).

Zusätzlich zur spezifischen Ausstrahlung gemäß (8-6) und zur spezifischen spektralen Ausstrahlung gemäß (8-3), die beide hemisphäre Werte darstellen (integrale Werte über den Halbraum), ist es üblich, zur genaueren Beschreibung der Verteilung über den Halbraum sog. *gerichtete* Werte einzuführen. Diese beschreiben die Ausstrahlung in einen infinitesimalen Winkelbereich, der als

$$d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (8-7)$$

einen sog. (infinitesimalen) *Raumwinkel-Bereich* darstellt. Die Winkel ϑ und φ , die den Halbraum über der Fläche dA^* aufspannen, sind Bild 8.4 zu entnehmen. Der Raumwinkel ist formal eine dimensionslose Größe, er wird aber gelegentlich als sr (für Steradian) in die Einheitengruppe aufgenommen.

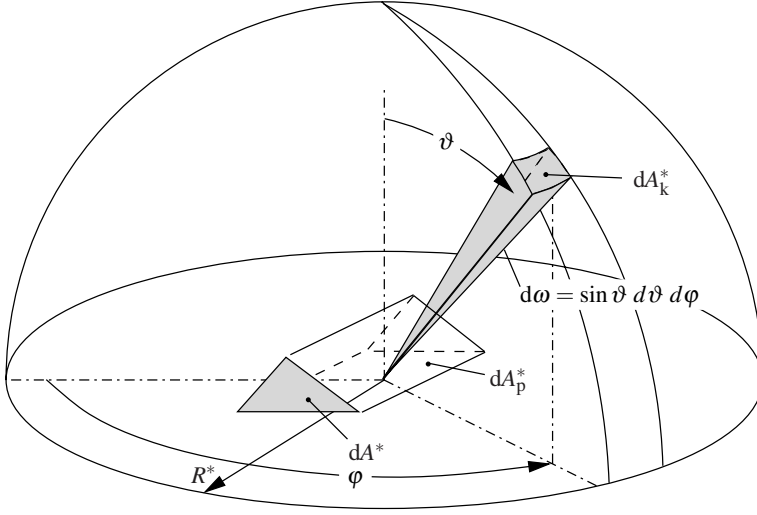


Bild 8.4: Halbraum über dem Flächenelement dA^*

$d\omega$: infinitesimaler Raumwinkel-Bereich ($= dA_K^*/R^{*2} = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$)

dA_p^* : Projektion von dA^* in eine Ebene senkrecht zum Winkel ϑ ($= dA^* \cos \vartheta$)

In diesem Sinne wird eine *spezifische spektrale Ausstrahlungsdichte*

$$\dot{e}_{\lambda\omega}^* = \dot{e}_{\lambda\omega}^*(\lambda^*, \vartheta, \varphi, T^*) \quad (8-8)$$

eingeführt. Dabei zeigt sich, dass als Besonderheit Schwarzer Körper keine Abhängigkeit vom Winkel φ , wohl aber vom Winkel ϑ auftritt, d. h., es gilt $\dot{e}_{\lambda\omega,s}^* = \dot{e}_{\lambda\omega}^*(\lambda^*, \vartheta, T^*)$. Da ein gleich großes Flächenelement dA_K^* auf der Hemisphäre bei unterschiedlichen Winkeln ϑ unterschiedlich stark bestrahlt wird, s. Bild 8.4, weil es nur die Projektion $dA^* \cos \vartheta$ der strahlenden Fläche dA^* „sieht“, entsteht eine explizite Abhängigkeit vom Winkel ϑ .

Anstatt die Ausstrahlung auf dA^* zu beziehen, wird deshalb in einer weiteren Definition die Projektionsfläche $dA_p^* = dA^* \cos \vartheta$ als Bezugsgröße gewählt. Um dies formal zu unterscheiden wird l anstelle von e verwendet. In diesem Sinne wird eingeführt

$$l_{\lambda\omega}^* = \frac{\dot{e}_{\lambda\omega}^*}{\cos \vartheta}, \quad (8-9)$$

was als *normal-spezifische spektrale Ausstrahlungsdichte* bezeichnet werden soll. Weniger präzise Bezeichnungen, die in der Literatur für $l_{\lambda\omega}^*$ vorkommen, sind *spektrale Strahldichte*, oder (engl.): *monochromatic intensity*. Die Einheit von $\dot{e}_{\lambda\omega}^*$ bzw. $l_{\lambda\omega}^*$ ist W/m^3 oder auch $W/m^3 \cdot sr$. Bzgl. der allgemeinen Abhängigkeit von $l_{\lambda\omega}^*$ gilt analog zu (8-8)

$$l_{\lambda\omega}^* = l_{\lambda\omega}^*(\lambda^*, \vartheta, \varphi, T^*). \quad (8-10)$$

Im Spezialfall des Schwarzen Körpers entfällt die φ -Abhängigkeit (wie schon bei $\dot{e}_{\lambda\omega,s}^*$), jetzt aber zusätzlich noch die ϑ -Abhängigkeit, weil diese explizit beim Übergang von $\dot{e}_{\lambda\omega}^*$ auf $l_{\lambda\omega}^*$, s. (8-9), berücksichtigt worden ist. Es gilt also im Fall des Schwarzen Körpers $l_{\lambda\omega,s}^* = l_{\lambda\omega,s}^*(\lambda^*, T^*)$.

Damit erscheint ein Schwarzer Körper unter allen Blickwinkeln als „gleich hell“, was als *diffuse Strahlung* bezeichnet wird. Reale Körper können diese Eigenschaft in guter Näherung besitzen.

Nach der Integration über alle Raumwinkel zur Bestimmung der hemisphärischen Ausstrahlungen gilt (wegen der Unabhängigkeit von $i_{\lambda\omega,s}^*$ vom Raumwinkel)

$$\dot{e}_{\lambda,s}^*(\lambda^*, T^*) = \iint \dot{e}_{\lambda\omega,s}^* d\omega = \iint \underbrace{(i_{\lambda\omega,s}^* \cos \vartheta)}_{(8-9)} \underbrace{\sin \vartheta d\vartheta d\varphi}_{(8-7)} \quad (8-11)$$

$$= i_{\lambda\omega,s}^* \underbrace{\iint \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}_{=\pi} \quad (8-12)$$

Für Schwarze Körper (bzw. alle diffusen Körper) gilt also für den Zusammenhang zwischen den spezifischen und den normal-spezifischen hemisphärischen Größen

$$\dot{e}_{\lambda,s}^*(\lambda^*, T^*) = \pi i_{\lambda\omega,s}^*(\lambda^*, T^*). \quad (8-13)$$

Integriert man beide Seiten von (8-13) über alle relevanten Wellenlängen, ergibt dies

$$\dot{e}_s^*(T^*) = \pi i_{\omega,s}^*(T^*). \quad (8-14)$$

Damit ist die *spezifische Ausstrahlung* des Schwarzen Körpers, $\dot{e}_s^*(T^*)$, gleich dem π -fachen Wert der *normal-spezifischen Ausstrahlungsdichte* $i_{\omega,s}^*(T^*)$. Da $i_{\omega,s}^*$ des Schwarzen Körpers für alle Raumwinkel denselben Wert besitzt (diffuser Strahler), kann zur Interpretation von (8-14) der Wert senkrecht zur strahlenden Fläche dA^* gewählt werden. Mit dieser Interpretation handelt es sich bei (8-14) um das sog. *Lambertsche Cosinusetz*, das besagt: Die hemisphärische Ausstrahlung einer Fläche dA^* entspricht dem π -fachen der Ausstrahlungsdichte senkrecht zu dieser Fläche (jeweils in der Einheit W/m^2).

In Tab. 8.1 sind die bisher eingeführten Emissions-Größen noch einmal übersichtlich zusammengestellt.

8.3.2 Das Absorptionsverhalten Schwarzer Körper

Per Definition absorbiert der Schwarze Körper alle auf ihn einfallende Wärmestrahlung vollständig. Zur Bestimmung des Absorptionsverhaltens im konkreten Fall muss deshalb nur noch die

Tabelle 8.1: In Kap. 8.3 eingeführte Ausstrahlungsgrößen

spezifisch: bezogen auf dA^* , Buchstabe e

normal-spezifisch: bezogen auf $dA_p^* = dA^* \cos \vartheta$, Buchstabe i

spezifische spektrale Ausstrahlungsdichte	$\dot{e}_{\lambda\omega}^*(\lambda^*, \vartheta, \varphi, T^*)$	$\text{W}/\text{m}^3\text{sr}$
spezifische spektrale Ausstrahlung $\int \dot{e}_{\lambda\omega}^* d\omega$	$\dot{e}_{\lambda}^*(\lambda^*, T^*)$	W/m^3
spezifische Ausstrahlung $\int \dot{e}_{\lambda}^* d\lambda^*$	$\dot{e}^*(T^*)$	W/m^2
normal-spezifische spektrale Ausstrahlungsdichte	$i_{\lambda\omega}^*(\lambda^*, \vartheta, \varphi, T^*)$	$\text{W}/\text{m}^3\text{sr}$
normal-spezifische Ausstrahlungsdichte $\int i_{\lambda\omega}^* d\lambda^*$	$i_{\omega}^*(\vartheta, \varphi, T^*)$	$\text{W}/\text{m}^2\text{sr}$

einfallende Wärmestrahlung beschrieben werden. Dies kann ganz analog zur Einführung verschiedener Ausstrahlungsgrößen im Kap. 8.3.1 erfolgen.

Die einfallende Wärmestrahlung ist durch ihre Stärke als Funktion der Wellenlänge λ^* und der Einfallrichtung ϑ, φ gekennzeichnet. Eine Temperaturabhängigkeit liegt nur indirekt vor, weil die einfallende Wärmestrahlung einer bestimmten Art von strahlenden Körpern mit einer bestimmten Temperatur stammt. Deshalb wird die Temperatur (der „Strahlungsquelle“) nicht als expliziter Parameter bei der Kennzeichnung einfallender Strahlung aufgenommen.

Analog zu Tab. 8.1 enthält die nachfolgende Tab. 8.2 die zur genaueren Beschreibung der einfallenden Wärmestrahlung erforderlichen Größen.

8.3.3 Die Realisierung Schwarzer Körper / Hohlraumstrahlung

Mit der nachfolgend beschriebenen Anordnung gelingt es, experimentell in sehr guter Näherung eine sog. *Schwarzkörperstrahlung* zu realisieren. Dazu muss eine endliche Fläche ΔA^* die Eigenschaft besitzen, alle auf sie einfallende Wärmestrahlung zu absorbieren und gleichzeitig Strahlung auszusenden, deren spezifische spektrale Ausstrahlung genau der Verteilung $\epsilon_{\lambda,s}^*$ gemäß Bild 8.3 gehorcht. Diese Fläche ΔA^* ist die Öffnung der in Bild 8.5 dargestellten Anordnung, die *Hohlraumstrahler* genannt wird.

Wie in der Abbildung gezeigt ist, wird mit der Anordnung ein Hohlraum gebildet, der durch eine kleine Öffnung ΔA^* mit der Umgebung im Strahlungsaustausch steht. Mit Hilfe einer (kurzzeitig aktivierbaren) Heizung und einer thermischen Isolierung gegenüber der Umgebung können in dem von einem Kupferzylinder gebildeten Hohlraum isotherme Bedingungen auf unterschiedlichen Temperaturniveaus hergestellt werden. Die durch die kleine Öffnung einfallende Strahlung wird mehrfach reflektiert und dabei jeweils teilweise absorbiert. Weil danach nur ein verschwindend geringer Anteil der einfallenden Strahlung durch die Öffnung ΔA^* wieder austritt, liegt insgesamt eine (fast) vollständige Absorption an der Öffnungsfläche vor. Damit weist diese Fläche in sehr guter Näherung die Eigenschaft eines Flächenelementes des Schwarzen Körpers auf. Ist der Hohlraum isotherm und gut isoliert, so entspricht die emittierte Strahlung in ebenfalls sehr guter Näherung der eines Schwarzen Strahlers bei der im Hohlraum eingestellten Temperatur.

8.4 Reales Strahlungsverhalten / Reale Körper

Reale Körper zeigen (z. T. erhebliche) Abweichungen vom idealen Strahlungsverhalten der im vorigen Kapitel beschriebenen Schwarzen Körper. Dabei treten sowohl quantitative Unterschiede

Tabelle 8.2: Einstrahlungsgrößen

spezifisch: bezogen auf dA^* , Buchstabe a

normal-spezifisch: bezogen auf $dA_p^* = dA^* \cos \vartheta$, Buchstabe k

spezifische spektrale Einstrahlungsdichte	$\dot{a}_{\lambda\omega}^*(\lambda^*, \vartheta, \varphi)$	$\text{W/m}^3\text{sr}$
spezifische spektrale Einstrahlung $\int \dot{a}_{\lambda\omega}^* d\omega$	$\dot{a}_{\lambda}^*(\lambda^*)$	W/m^3
spezifische Einstrahlung $\int \dot{a}_{\lambda}^* d\lambda^*$	\dot{a}^*	W/m^2
normal-spezifische spektrale Einstrahlungsdichte	$\dot{k}_{\lambda\omega}^*(\lambda^*, \vartheta, \varphi)$	$\text{W/m}^3\text{sr}$
normal-spezifische Einstrahlungsdichte $\int \dot{k}_{\lambda\omega}^* d\lambda^*$	$\dot{k}_{\omega}^*(\vartheta, \varphi)$	$\text{W/m}^2\text{sr}$

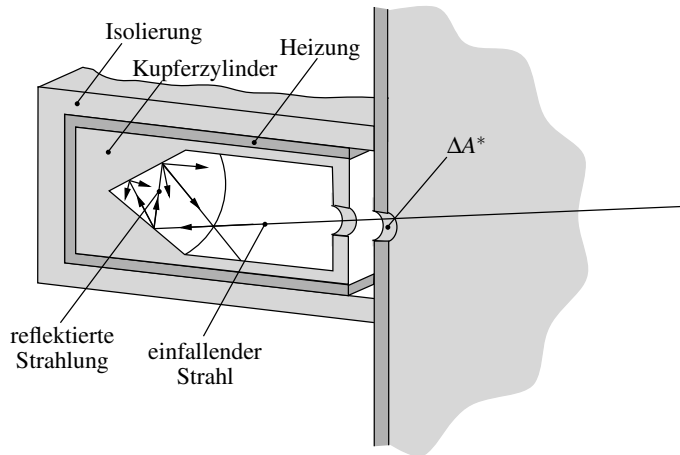


Bild 8.5: Schnitt durch einen Hohlraumstrahler

Weitere Details in: Siegel, R.; Howell, J. R.; Lohrengel, J.: (1988): *Wärmeübertragung durch Strahlung, Teil 1: Grundlagen und Materialeigenschaften*, Springer-Verlag, Berlin / Kap. 2.5

(bzgl. der „Stärke“ bestimmter Effekte) als auch qualitative Unterschiede (im Sinne zusätzlicher Effekte) auf. Im Wesentlichen können vier Aspekte ausgemacht werden, in denen reale Körper in ihrem Verhalten im Zusammenhang mit der Wärmestrahlung entscheidend vom Verhalten Schwarzer Körper abweichen:

1. Die Ausstrahlung realer Körper ist geringer als diejenige Schwarzer Körper (kleinere Werte von $\dot{e}_{\lambda\omega}^*$, \dot{e}_{λ}^* , \dot{e}^* vgl. Tab. 8.1). Die spezifische spektrale Ausstrahlungsdichte $\dot{e}_{\lambda\omega}^*$ ist darüber hinaus *richtungsabhängig*, d. h., die Strahlung ist *nicht* diffus.
2. Die Einstrahlung ($\dot{a}_{\lambda\omega}^*$, \dot{a}_{λ}^* , \dot{a}^* vgl. Tab. 8.2) wird von realen Körpern *nur teilweise absorbiert*, während Schwarze Körper alle einfallende Strahlung vollständig absorbieren.
3. An der Oberfläche realer Körper wird ein Teil der einfallenden Strahlung *reflektiert*. Dies ist bei Schwarzen Körpern nicht der Fall.
4. Ein Teil der einfallenden Strahlung kann von sog. *transparenten* oder *semitransparenten* realen Körpern durch den Körper hindurchgeleitet werden. Nur bei sog. *opaken* Oberflächen realer Körper findet dies nicht statt. Eine solche Transmission von Wärmestrahlung ist bei Schwarzen Körpern grundsätzlich ausgeschlossen.

Damit ist zu erwarten, dass die Beschreibung des Verhaltens realer Körper im Zusammenhang mit Wärmestrahlung sehr aufwändig wird und häufig nur eine näherungsweise Erfassung der einzelnen Phänomene gelingt. Bezüglich der ersten beiden Aspekte (Ausstrahlung, Einstrahlung) wählt man üblicherweise eine Darstellung, die das Verhalten realer Körper im Vergleich zu demjenigen Schwarzer Körper beschreibt. Für die beiden anderen Aspekte (Reflexion, Transmission) ist dies naturgemäß nicht möglich. Alle vier Aspekte werden im Folgenden nacheinander behandelt.

8.4.1 Das Emissionsverhalten realer Körper im Vergleich zum Schwarzen Körper

Es ist üblich, die Ausstrahlungsgrößen realer Körper auf diejenigen von Schwarzen Körpern derselben Temperatur zu beziehen und damit formal sog. *Emissionsgrade* einzuführen. Damit ist zunächst kein unmittelbarer Erkenntnisgewinn verbunden, weil die interessierenden Größen lediglich als dimensionslose „bezogene Größen“ dargestellt werden. Durch den Vergleich mit dem (als bekannt unterstellten) Strahlungsverhalten Schwarzer Körper gibt es aber zusätzliche Interpretationsmöglichkeiten für die interessierenden Ausstrahlungsgrößen.

In diesem Sinne werden die in Tab. 8.3 zusammengestellten Emissionsgrade eingeführt. Diese besitzen definitionsgemäß für Schwarze Körper alle den Zahlenwert Eins. Abweichungen davon sind damit ein Maß für die Abweichungen im Strahlungsverhalten realer Körper von demjenigen des idealen Strahlers.

Die verschiedenen Emissionsgrade sind für reale Körper nur ansatzweise bekannt und damit verfügbar, weil eine experimentelle Bestimmung extrem aufwändig ist und die Ergebnisse stark von der individuellen Beschaffenheit der zu untersuchenden Körper abhängen (Oberflächenrauheit, Verschmutzungen, ...). Aus diesem Grund können in technischen Anwendungen in der Regel nur Strahlungsaspekte behandelt werden, für die der hemisphärische Gesamt-Emissionsgrad eine ausreichende Information zum Strahlungsverhalten darstellt.

Theoretische Überlegungen (elektromagnetische Theorie) ergeben erste Anhaltswerte für die Emissionsgrade, indem diese mit den optischen Konstanten (Brechungsindex n und Absorptionszahl k) der Materialien, verbunden werden. Daraus ergibt sich, dass grundsätzlich nach zwei Materialklassen unterschieden werden muss. Diese sind:

- *Elektrische Nichtleiter* (sog. Dielektrika)
typische Werte: $n = 2 \dots 4$, $k = 0$ (keine Felddämpfung)
- *Elektrische Leiter* (Metalle)
typische Werte: $n = 10 \dots 30$, $k \approx n$ (starke Felddämpfung)

Für den gerichteten spektralen Emissionsgrad senkrecht (normal) zur strahlenden Fläche gilt

Tabelle 8.3: Emissionsgrade realer Körper

gerichteter spektraler Emissionsgrad	$\varepsilon_{\lambda\omega}(\lambda^*, \vartheta, \varphi, T^*) = \frac{i_{\lambda\omega}^*(\lambda^*, \vartheta, \varphi, T^*)}{i_{\lambda\omega,s}^*(\lambda^*, T^*)}$ <p>mit $i_{\lambda\omega,s}^* = \dot{e}_{\lambda,s}^* / \cos \vartheta$, $\dot{e}_{\lambda,s}^*$ nach (8-3)</p>
gerichteter Gesamt-Emissionsgrad	$\varepsilon_{\omega}(\vartheta, \varphi, T^*) = \frac{i_{\omega}^*(\vartheta, \varphi, T^*)}{i_{\omega,s}^*(T^*)}$ <p>mit $i_{\omega,s}^* = \sigma^* T^{*4} / \pi$</p>
hemisphärischer spektraler Emissionsgrad	$\varepsilon_{\lambda}(\lambda^*, T^*) = \frac{\dot{e}_{\lambda}^*(\lambda^*, T^*)}{\dot{e}_{\lambda,s}^*(\lambda^*, T^*)}$ <p>mit $\dot{e}_{\lambda,s}^*$ nach (8-3)</p>
hemisphärischer Gesamt-Emissionsgrad (auch: Emissionsgrad)	$\varepsilon(T^*) = \frac{\dot{e}^*(T^*)}{\dot{e}_s^*(T^*)}$ <p>mit $\dot{e}_s^* = \sigma^* T^{*4}$</p>

nach dieser Theorie¹

$$\varepsilon_{\lambda\omega,n} = \frac{4n}{(n+1)^2 + k^2}. \quad (8-15)$$

Daran ist zu erkennen, dass Dielektrika mit einem typischen Wert $n = 3$, $k = 0$, also $\varepsilon_{\lambda\omega,n} = 3/4$ einen deutlich größeren Wert als Metalle mit einem typischen Wert $n = k = 20$, also $\varepsilon_{\lambda\omega,n} \approx 1/10$ besitzen. Ähnliche Zahlenwerte gelten für die gerichteten Gesamtemissionsgrade in Normalenrichtung $\varepsilon_{\omega,n}$. Dies wird durch Messungen betätigt, die sich häufig auf diese Größe beschränken. Tab. 8.4 enthält Zahlenwerte von $\varepsilon_{\omega,n}$ für einige typische Stoffe. Zusätzlich sind die hemisphärischen Gesamt-Emissionsgrade ε angegeben. An den Angaben für Kupfer ist zu erkennen, dass die Emissionsgrade entscheidend von der Oberflächenstruktur abhängen. Während eine polierte Oberfläche fast nicht emittiert, sorgt eine dünne Oxidationsschicht schon nahezu für ein Emissionsverhalten wie beim Schwarzen Körper.

Bezüglich der Richtungsabhängigkeit von ε_{ω} verhalten sich Dielektrika und Metalle ebenfalls vollkommen verschieden, wie in Bild 8.6 für typische Stoffe aus beiden Materialklassen gezeigt ist.

8.4.2 Das Absorptionsverhalten realer Körper im Vergleich zum Schwarzen Körper

Ganz analog zu den Emissionsgraden im vorigen Kapitel werden Absorptionsgrade eingeführt, die das Absorptionsverhalten des realen Körpers in Relation zu demjenigen des Schwarzen Körpers setzen. Tab. 8.5 enthält die einzelnen Definitionen weitgehend analog zu Tab. 8.3 für die Emission. Die dabei auftretenden Einstrahlgrößen a und k sind in Tab. 8.2 eingeführt worden.

Tabelle 8.4: Gerichtete Gesamt-Emissionsgrade senkrecht zur Oberfläche ($\varepsilon_{\omega,n}$) und hemisphärische Gesamt-Emissionsgrade (ε) von elektrischen Nichtleitern (Dielektrika) und elektrischen Leitern (Metalle)

Daten aus und weitere Daten in: Baehr, H. D.; Stephan, K. (2004): *Wärme- und Stoffübertragung*, 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin

Dielektrika (elektrische Nichtleiter)			
Stoff	$t^*/^{\circ}\text{C}$	$\varepsilon_{\omega,n}$	ε
Buchenholz	70	0,94	0,91
Eis, glatt, Dicke > 4mm	−10	0,97	0,92
Wasser, Dicke > 0,1 mm	10...50	0,97	0,91
Papier, weiß, matt	95	0,92	0,90
Metalle (elektrische Leiter)			
Stoff	$t^*/^{\circ}\text{C}$	$\varepsilon_{\omega,n}$	ε
Aluminium, walzblank	170	0,04	0,05
Eisen, poliert	−70...700	0,04...0,2	0,06...0,25
Kupfer, poliert	300...700	0,01...0,02	0,015...0,025
Kupfer, oxidiert	130	0,76	0,73
Nickel, poliert	100	0,05	0,05

¹ Zu Detail s. z. B.: Siegel, R.; Howell, J. R.; Lohrengel, J. (1988): *Wärmeübertragung durch Strahlung, Teil 1: Grundlagen und Materialeigenschaften*, Springer-Verlag, Berlin

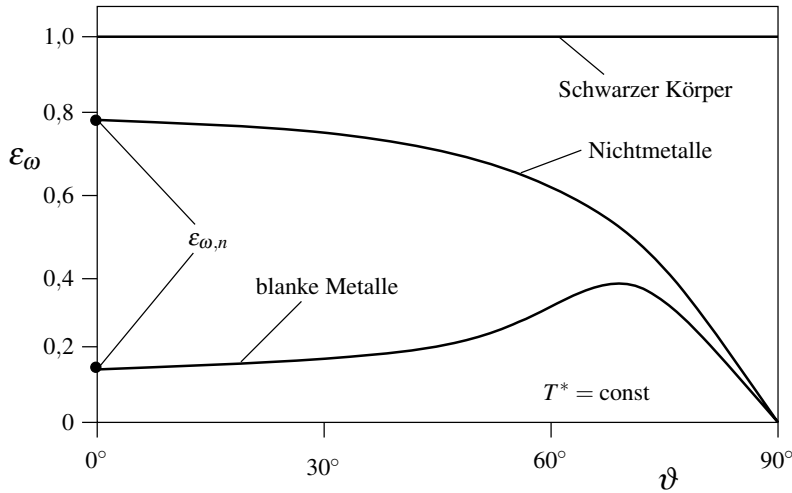


Bild 8.6: Typische Werte gerichteter Gesamt-Emissionsgrade ϵ_ω

$\epsilon_{\omega,n}$: ϵ_ω senkrecht zur emittierenden Fläche

Daten aus: White, F.M. (1988): *Heat and Mass Transfer*, Addison Wesley

Eine wichtige Frage ist nun, ob ein Zusammenhang zwischen dem Emissions- und Absorptionsverhalten eines bestimmten Körpers besteht, und wenn ja, welcher? Eine genauere Analyse der physikalischen Vorgänge bei der Emission und Absorption ergibt dazu, dass stets gilt

$$\alpha_{\lambda\omega}(\lambda^*, \vartheta, \varphi, T^*) = \epsilon_{\lambda\omega}(\lambda^*, \vartheta, \varphi, T^*). \quad (8-16)$$

Dies ist Ausdruck weitgehend analoger physikalischer Mechanismen bei der Emission und Absorption von Wärmestrahlung. Gleichung (8-16) ist als eines der *Kirchhoffschen Gesetze* zur Wärmestrahlung bekannt.

Es ist nun erstaunlich und vielleicht zunächst unerwartet, dass für die „integralen Werte“ α_λ , α_ω und α nicht unmittelbar die Gleichheit zu ϵ_λ , ϵ_ω und ϵ folgt. Entscheidend dafür ist, dass ϵ_λ , ϵ_ω und ϵ reine Materialeigenschaften des betrachteten Körpers sind, während α_λ , α_ω und α zu-

Tabelle 8.5: Absorptionsgrade realer Körper

Index abs: absorbiertes Anteil

gerichteter spektraler Absorptionsgrad	$\alpha_{\lambda\omega}(\lambda^*, \vartheta, \varphi, T^*) = \frac{\dot{k}_{\lambda\omega, \text{abs}}^*}{\dot{k}_{\lambda\omega}^*}$
gerichteter Gesamt-Absorptionsgrad	$\alpha_\omega(\vartheta, \varphi, T^*) = \frac{\dot{k}_{\omega, \text{abs}}^*}{\dot{k}_\omega^*}$
hemisphärischer spektraler Absorptionsgrad	$\alpha_\lambda(\lambda^*, T^*) = \frac{\dot{a}_{\lambda, \text{abs}}^*}{\dot{a}_\lambda^*}$
hemisphärischer Gesamt-Absorptionsgrad (auch: Absorptionsgrad)	$\alpha(T^*) = \frac{\dot{a}_{\text{abs}}^*}{\dot{a}^*}$

sätzlich noch von der Art der einfallenden Strahlung, d. h. insbesondere auch ihrer Wellenlängen- und Raumwinkelverteilung, abhängig sind. Deshalb wird eine Gleichheit $\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda$, $\alpha_\omega = \varepsilon_\omega$ und $\alpha = \varepsilon$ für beliebige Körper nur gelten, wenn die einfallende Strahlung bestimmte Bedingungen erfüllt. Diese Bedingungen sind:

- Die einfallende Strahlung stammt von einem Schwarzen Strahler (d. h., es handelt sich um eine sog. *Schwarzkörperstrahlung* gemäß Bild 8.3).
- Der strahlende und der bestrahlte Körper besitzen dieselbe Temperatur.

Der zweite Punkt ist bei Wärmeübertragungsproblemen stets verletzt, selbst wenn die einfallende Strahlung in guter Näherung eine Schwarzkörperstrahlung darstellt (wie z. B. die Sonnenstrahlung).

Eine genauere Analyse zeigt zusätzlich, dass die Gleichheit der Absorptions- und Emissionskoeffizienten unabhängig von der Art der einfallenden Strahlung auch dann gegeben ist, wenn die Oberflächen bestimmte Emissionseigenschaften besitzen.¹ Dies führt zur Definition bestimmter Modell-Oberflächen, die an realen Körpern in guter Näherung realisiert sein können. Dies sind:

- *Diffus strahlende Oberflächen* (sog. *Lambert-Strahler*)
Bedingung: $\varepsilon_{\lambda\omega}(\lambda^*, \vartheta, \varphi, T^*) = \varepsilon_{\lambda\omega}(\lambda^*, T^*) = \varepsilon_\lambda(\lambda^*, T^*)$
Für diese gilt

$$\alpha_\lambda(\lambda^*, T^*) = \varepsilon_\lambda(\lambda^*, T^*). \quad (8-17)$$

- *Grau strahlende Oberflächen*
Bedingung: $\varepsilon_{\lambda\omega}(\lambda^*, \vartheta, \varphi, T^*) = \varepsilon_{\lambda\omega}(\vartheta, \varphi, T^*) = \varepsilon_\omega(\vartheta, \varphi, T^*)$
Für diese gilt

$$\alpha_\omega(\vartheta, \varphi, T^*) = \varepsilon_\omega(\vartheta, \varphi, T^*). \quad (8-18)$$

- *Diffus und grau strahlende Oberflächen* (sog. *Graue Lambert-Strahler*)
Bedingung: $\varepsilon_{\lambda\omega}(\lambda^*, \vartheta, \varphi, T^*) = \varepsilon_{\lambda\omega}(T^*) = \varepsilon(T^*)$
Für diese gilt

$$\alpha(T^*) = \varepsilon(T^*). \quad (8-19)$$

Elektrische Nichtleiter (Dielektrika) können häufig in guter Näherung sowohl als diffuse als auch als graue Strahler behandelt werden. Beides (diffus und grau) trifft auf elektrische Leiter (Metalle) aber nicht zu. Eine häufig benutzte Modellvorstellung ist diejenige der sog. *Grauen Strahler* mit den Strahlungseigenschaften gemäß (8-19), der präziser *Grauer Lambert-Strahler* genannt wird.

8.4.3 Das Reflexionsverhalten realer Körper

Reale Körper können einen Teil der einfallenden Strahlung reflektieren, d. h. weder absorbieren noch transmittieren (durchlassen), sondern unter bestimmten Winkeln „zurückwerfen“. Unter

¹ Details dazu z.B. in Baehr, H. D.; Stephan, K. (2004): *Wärme- und Stoffübertragung*, 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin / Kap. 5.3.2.2

welchen Winkeln dies geschieht, ist sowohl von der Oberflächenbeschaffenheit als auch von der Wellenlänge der einfallenden Strahlung abhängig, weil das Verhältnis von Oberflächenrauheiten zu Wellenlängen maßgeblich ist. Bild 8.7 zeigt die beiden Grenzfälle der sog. *spiegelnden* und *diffusen* Reflexion. Wird die Reflexionsrichtung mit betrachtet, so entstehen aufwändige Beschreibungen, die Ein- und Ausfallswinkel berücksichtigen müssen. Sieht man von der Frage nach der Reflexionsrichtung ab, so können Reflexionsgrade $r_{\lambda\omega}$, r_ω , r_λ und r ganz analog zu den Absorptionsgraden $\alpha_{\lambda\omega}$, α_ω , α_λ und α gemäß Tab. 8.5 eingeführt werden.

Für Körper ohne Transmission (mit sog. *opaken* Oberflächen) gilt dann unmittelbar

- gerichteter spektraler Reflexionsgrad:

$$r_{\lambda\omega} = 1 - \alpha_{\lambda\omega} \quad (8-20)$$

- gerichteter Gesamt-Reflexionsgrad:

$$r_\omega = 1 - \alpha_\omega \quad (8-21)$$

- hemisphärischer spektraler Reflexionsgrad:

$$r_\lambda = 1 - \alpha_\lambda \quad (8-22)$$

- Reflexionsgrad:

$$r = 1 - \alpha \quad (8-23)$$

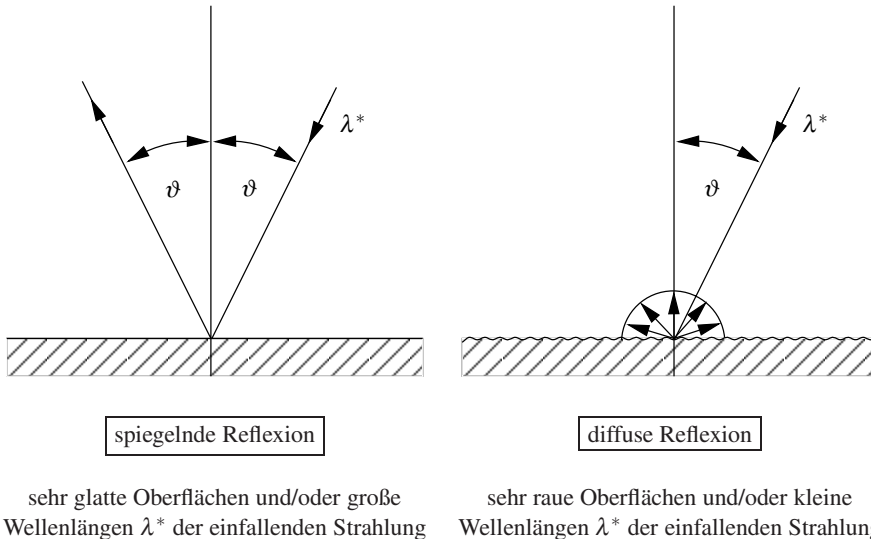


Bild 8.7: Grenzfälle des Reflexionsverhaltens realer Körperoberflächen

8.4.4 Das Transmissionsverhalten realer Körper

Flüssigkeiten und feste Stoffe wie Glas und einige Mineralien sind nicht opak, sondern lassen Wärmestrahlung teilweise durchtreten. Für den Anteil $\dot{a}_{\lambda,\text{trans}}^*$ der ankommenden spezifischen spektralen Einstrahlung \dot{a}_{λ}^* gilt die Bilanz

$$\dot{a}_{\lambda,\text{trans}}^* = \dot{a}_{\lambda}^* - \dot{a}_{\lambda,\text{abs}}^* - \dot{a}_{\lambda,\text{ref}}^* \quad (8-24)$$

Entscheidende Aspekte in diesem Zusammenhang sind

- eine selektive Transmission, d. h., das Transmissionsverhalten ist stark *wellenlängenabhängig*. Bild 8.8 zeigt qualitativ das Transmissionsverhalten von Glas in Form des spektralen Transmissionsgrades $\tau_{\lambda} \equiv \dot{a}_{\lambda,\text{trans}}^* / \dot{a}_{\lambda}^* = (\dot{a}_{\lambda}^* - \dot{a}_{\lambda,\text{abs}}^* - \dot{a}_{\lambda,\text{ref}}^*) / \dot{a}_{\lambda}^* = 1 - \alpha_{\lambda} - r_{\lambda}$. Daran ist zu erkennen, dass kurzwellige Strahlung (z. B. Sonnenstrahlung, $T^* \approx 5800 \text{ K}$, $\lambda^*(\dot{e}_{\lambda,\text{max}}^*) \approx 0,5 \mu\text{m}$, s. Bild 8.3) weitgehend durchgelassen wird, während die langwellige sog. Rückstrahlung (Infrarotstrahlung, $T^* \approx 300 \text{ K}$, $\lambda^*(\dot{e}_{\lambda,\text{max}}^*) \approx 10 \mu\text{m}$) kaum durch das Glas hindurchtritt. Dies ist der entscheidende Mechanismus beim sog. *Treibhauseffekt*, s. dazu Kap. 8.7.2 bzw. das ILLUSTRIERENDE BEISPIEL 8.1.
- eine schichtdickenabhängige Absorption im Körperinneren, die durch sog. *spektrale Absorptionskoeffizienten* beschrieben werden kann, die das wellenlängenabhängige Absorptionsvermögen pro Schichtdicke erfassen.
- eine Mehrfachreflexion an den (von innen gesehenen) Grenzflächen endlicher durchstrahlter Schichten.

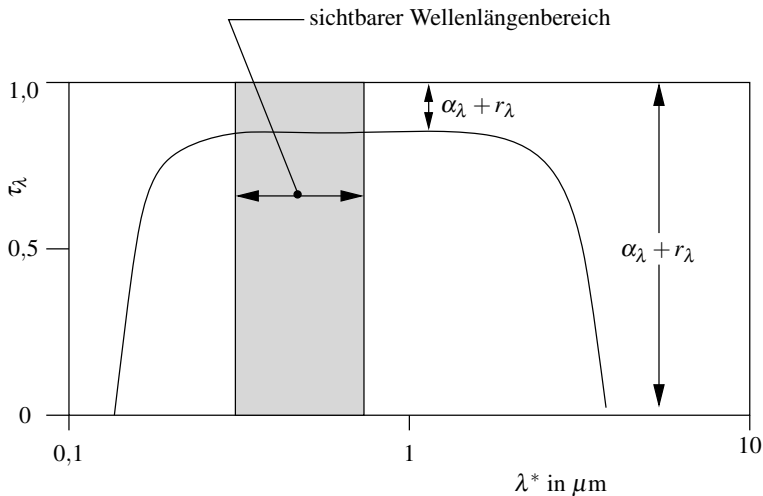


Bild 8.8: Typischer Verlauf des spektralen Transmissionsgrades τ_{λ} für Glas als Ausdruck eines selektiven Transmissionsverhaltens (s. ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 8.1)

8.5 Strahlungsaustausch zwischen Körpern

Da alle Körper mit von Null verschiedenen thermodynamischen Temperaturen Wärmestrahlung emittieren (für Schwarze Körper s. Bild 8.3) unterliegen zwei „benachbarte“ Körper einem Energieaustausch in Form von Wärmestrahlung. Die genauere Analyse zeigt, dass dabei ganz generell ein Netto-Strahlungswärmestrom in Richtung des Körpers mit niedrigerer Temperatur fließt. Die Bestimmung dieses Netto-Wärmestromes ist ohne vereinfachende Annahmen extrem aufwändig. Ein wesentlicher Grund dafür ist, dass der Strahlungsaustausch zwischen zwei einzelnen Körpern durch alle anderen Körper beeinflusst wird, die mit den ursprünglich betrachteten beiden Körpern zusätzlich im Strahlungsaustausch stehen. Teile der von diesen Körpern stammenden Strahlung werden reflektiert und treten damit zwischen den ursprünglich betrachteten Körpern auf. Nur zwei Schwarze Körper können bzgl. ihres Strahlungsaustausches für sich betrachtet werden, da dann keine Reflexionen vorkommen. Bei allen anderen Körpern ist stets eine simultane Betrachtung aller Körper erforderlich, die untereinander im Strahlungsaustausch stehen. Dies sind alle Körper, die sich prinzipiell „sehen können“, die also vom linearen Strahlengang des jeweils anderen Körpers „getroffen“ werden können. Dazu zählen z. B. alle Flächen eines umschließenden Raumes, sofern diese nicht durch andere Körper verdeckt sind.

Im Weiteren werden nur Körper betrachtet, deren Oberflächen eine konstante spezifische Ausstrahlung sowie eine konstante Oberflächentemperatur besitzen, und die entweder

- Schwarze Körper (d. h.: keine Reflexion, diffuse Strahlung) oder
- Graue Körper (d. h. graue Lambert-Strahler; λ^* -unabhängige, diffuse Strahlung)

sind. Für alle anderen Fälle sei auf die Spezialliteratur verwiesen.¹

8.5.1 Sichtfaktoren für zwei Flächen im Strahlungsaustausch

Unabhängig von den Strahlungseigenschaften zweier Oberflächen im Strahlungsaustausch benötigt man eine Beschreibung der geometrischen Lage beider Flächen zueinander. Unter dem Gesichtspunkt des Strahlungsaustausches geht es um die Frage, wieviel die Flächen voneinander „sehen“, weil dies darüber entscheidet, wieviel von der an einer Fläche ausgesandten Strahlung an der anderen Fläche ankommt.

Dieser Aspekt wird in einem sog. *Sichtfaktor* erfasst, der in Bild 8.9 am Beispiel zweier infinitesimaler Flächenelemente dA_1^* und dA_2^* erläutert wird. Wenn dA_1^* die normal-spezifische Ausstrahlungsdichte $i_\omega^*(\vartheta, \varphi, T^*)$ besitzt, für die (diffuse Strahlung) hier $i_\omega^*(T^*)$ gilt, so wird dA_2^* von der Ausstrahlung getroffen, die bei dA_2^* ankommt. Dies ist aber die (von dA_1^*) in den Raumwinkel $dA_2^* \cos \vartheta_2 / r^{*2}$ ausgehende Strahlung, also $(i_\omega^* dA_1^* \cos \vartheta_1) dA_2^* \cos \vartheta_2 / r^{*2}$.

Für endliche Flächen A_1^* und A_2^* ergibt eine Integration dafür

$$i_\omega^* \int_{A_1^*} \int_{A_2^*} \frac{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{r^{*2}} dA_2^* dA_1^*$$

Als Sichtfaktor F_{12} wird nun eingeführt, welcher Anteil der Strahlung, die A_1^* in den Halbraum aussendet (dies ist $\pi i_\omega^* A_1^*$, vgl. (8-13)) bei A_2^* ankommt.

Damit gilt also:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1^*} \int_{A_1^*} \int_{A_2^*} \frac{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{r^{*2}} dA_2^* dA_1^* \quad (8-25)$$

¹ z.B.: Siegel, R.; Howell, J. R. (2001): *Thermal radiation heat transfer*, 4th ed., Taylor & Francis

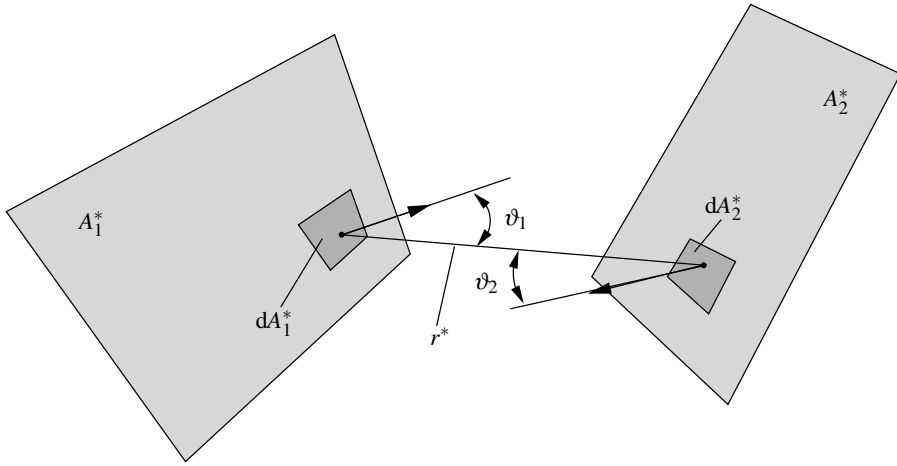


Bild 8.9: Erläuterung zum Sichtfaktor F_{12} zwischen zwei endlichen Flächen A_1^* und A_2^* , hier mit Hilfe der infinitesimalen Flächenelemente dA_1^* und dA_2^* mit dem Abstand r^*

Dies ist eine rein geometrische Größe und kann für zwei beliebig zueinander angeordnete Flächen ausgewertet werden. Tab. 8.6 enthält einige Zahlenwerte von Sichtfaktoren F_{12} , die in der Literatur uneinheitlich auch als *Einstrahlzahl*, *Formfaktor* oder *Winkelverhältnis* (engl.: *view factor*, *configuration factor* oder *shape factor*) bezeichnet werden.

Die Auswertung der geometrischen Verhältnisse ergibt eine Reihe von allgemeinen Beziehungen bzgl. der einzelnen Sichtfaktoren (was auch als „view factor algebra“ bezeichnet wird). Dabei bedeutet eine Vertauschung der Indizes ij , dass die Flächen A_i^* und A_j^* ihre Rolle als aussendende bzw. empfangende Flächen tauschen. Einige dieser Regeln sind:

$$A_1^* F_{12} = A_2^* F_{21} \quad (\text{Reziprozitätsbeziehung}) \quad (8-26)$$

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8-27)$$

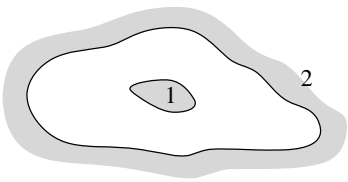
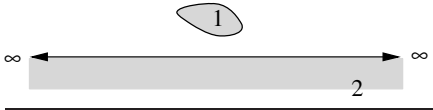
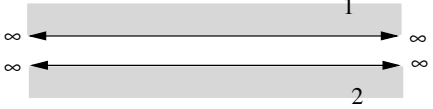
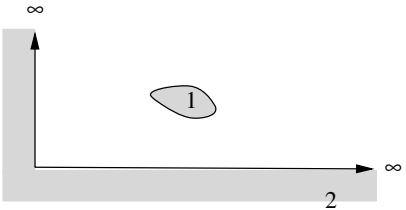
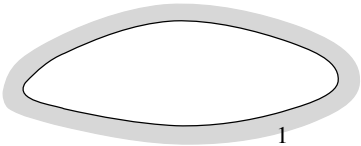
(Summationsregel für n Flächen, die einen geschlossenen Hohlraum bilden)

$$F_{ii} = 0 \quad \text{für ebene und konvexe Flächen} \quad (8-28)$$

$$F_{ii} > 0 \quad \text{für konkave Flächen} \quad (8-29)$$

Die Anwendung dieser Regeln ergibt z. B., dass ein Hohlraum, der aus n Einzelflächen besteht, maximal $n(n-1)/2$ unabhängige und damit zu berechnende Sichtfaktoren besitzt. Für $n = 5$ z. B. gilt, dass statt der zunächst formal existierenden 25 Sichtfaktoren, nur maximal 10 Sichtfaktoren voneinander unabhängig sind und einzeln bestimmt werden müssen. Es könnten sogar weniger sein, wenn ebene oder konvexe Flächen mit $F_{ii} = 0$ darunter sind.

Tabelle 8.6: Sichtfaktoren für ausgesuchte Flächen-Kombinationen A_1^* , A_2^*

Flächenanordnung	Sichtfaktor F_{12}	Sichtfaktor F_{21}
	1	$\frac{A_1^*}{A_2^*}$
	0,5	0
	1	1
	0,75	0
	$F_{11} = 1$	

8.5.2 Strahlungsaustausch zwischen zwei Schwarzen Körpern

Zwei Schwarze Körper, die sich „sehen“, stehen im Strahlungsaustausch zueinander, wobei die jeweils ausgesandten Strahlungsanteile, die den anderen Körper nicht treffen, unberücksichtigt bleiben. Für die spezifische Ausstrahlung des Schwarzen Körpers gilt $\dot{e}_s^* = \sigma^* T^{*4}$, s. (8-6). Dies ist die pro Flächeneinheit in den Halbraum ausgestrahlte Leistung gemessen in W/m^2 . Die ausgestrahlte Leistung einer Fläche A_1^* ist damit $A_1^* \sigma^* T_1^{*4}$, der davon bei der Fläche A_2^* ankommende Anteil $A_1^* F_{12} \sigma^* T_1^{*4}$. Umgekehrt empfängt die Fläche A_1^* von A_2^* die eingestrahelte Leistung $A_2^* F_{21} \sigma^* T_2^{*4}$. Der bzgl. A_1^* auftretende Wärmestrom \dot{Q}_{12}^* als Differenz der aus- und eingestrahlten Leistung ist mit $A_1^* F_{12} = A_2^* F_{21}$ gemäß (8-26) dann

$$\dot{Q}_{12}^* = A_1^* F_{12} \sigma^* (T_2^{*4} - T_1^{*4}) \quad (8-30)$$

Für $T_2^* > T_1^*$ ist damit \dot{Q}_{12}^* positiv, d. h., der Körper mit der Oberfläche A_1^* erwärmt sich, wenn keine weiteren Wärmeströme auftreten. Umgekehrt tritt für $T_2^* < T_1^*$ eine Abkühlung ein, da \dot{Q}_{12}^* dann negativ ist. Das thermodynamische Strahlungs-Gleichgewicht zwischen zwei Schwarzen Körpern ist damit bei Temperaturgleichheit erreicht. In Gleichung (8-30) kann der Ausdruck

$(T_2^{*4} - T_1^{*4})$ für kleine Temperaturdifferenzen $(T_2^* - T_1^*)$ wie folgt in eine Reihe entwickelt und damit approximiert werden

$$T_2^{*4} - T_1^{*4} = 4T_1^{*3}(T_2^* - T_1^*) + \Delta^*. \quad (8-31)$$

Wenn in einer Konfiguration T_2^* bekannt ist, wird in (8-31) an die Stelle von T_1^{*3} der Term T_2^{*3} gesetzt. Dadurch verändert sich die Größenordnung der Fehler nicht. In Bild 8.10 sind für drei ausgewählte Temperaturen T_1^* die relativen Fehler $\Delta^*/(T_2^{*4} - T_1^{*4}) = \{(T_2^{*4} - T_1^{*4}) - 4T_1^{*3}(T_2^* - T_1^*)\}/(T_2^{*4} - T_1^{*4})$ als Funktion der Temperaturdifferenz $(T_2^* - T_1^*)$ aufgetragen. Dabei zeigt sich, dass für eine Temperatur $T_1^* = 400$ K und eine Temperaturdifferenz $(T_2^* - T_1^*) = 30$ K ein relativer Fehler von etwa 10% auftritt.

8.5.3 Strahlungsaustausch zwischen grauen Lambert-Strahlern

Graue Lambert-Strahler sind durch eine wellenlängenunabhängige diffuse Ausstrahlung gekennzeichnet. Sie besitzen damit also einen konstanten Wert für die spezifische Ausstrahlung $e^*(T^*) = \varepsilon \dot{e}_s^*(T^*) = \varepsilon \sigma^* T^{*4}$. Mit dieser Modellvorstellung können z. B. Dielektrika in erster Näherung bzgl. ihres Strahlungsverhaltens beschrieben werden. Weil aber $\varepsilon < 1$ gilt, ist auch die Absorption nicht vollständig (mit der Begründung aus Kap. 8.4.2, s. (8-19), gilt $\varepsilon = \alpha$), so dass Reflexion mit dem Reflexionsgrad $r = 1 - \alpha = 1 - \varepsilon$ auftritt. Damit können aber zwei graue Körper nicht mehr im gegenseitigen und alleinigen Strahlungsaustausch betrachtet werden, weil die zusätzlich reflektierte Strahlung, die von weiteren vorhandenen Körpern stammt, ebenfalls berücksichtigt werden muss.

Lediglich für diejenigen Fälle, in denen keine „dritten“ Körper beteiligt sind, können zu (8-30) analoge Beziehungen auch für graue (diffuse) Strahler angegeben werden. Ein solcher Fall liegt z. B. für folgende Geometrien vor:

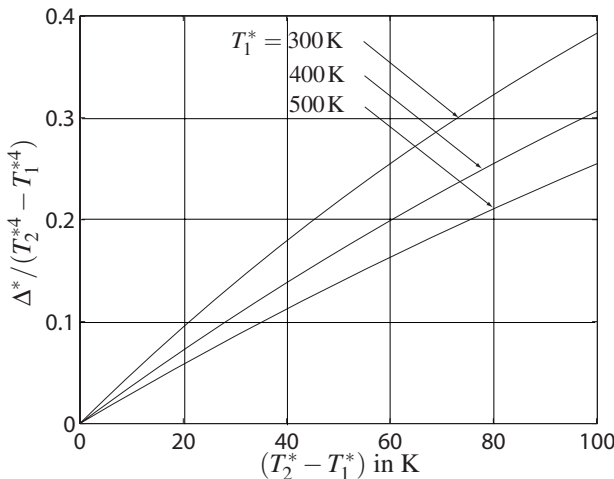


Bild 8.10: Relativer Fehler bei der Approximation des Termes $T_2^{*4} - T_1^{*4}$ im Strahlungsaustausch, s. (8-31) als Funktion von $T_2^* - T_1^*$ mit $\Delta^* = (T_2^{*4} - T_1^{*4}) - 4T_1^{*3}(T_2^* - T_1^*)$

- Zwei ebene parallele Platten der Fläche A^* im Abstand h^* mit $h^*/\sqrt{A^*} \rightarrow 0$.
- Einen Hohlraum mit der Innenfläche A_2^* , der einen Körper mit der Oberfläche A_1^* umschließt.

Für beide Fälle gilt die allgemeine Beziehung¹

$$\dot{Q}_{12}^* = \varepsilon_{12} A_1^* \sigma^* (T_2^{*4} - T_1^{*4}) \quad (8-32)$$

mit der sog. *Strahlungsaustauschzahl* ε_{12} als

$$\frac{1}{\varepsilon_{12}} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1^*}{A_2^*} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right). \quad (8-33)$$

Für die beiden zuvor genannten Fälle gilt damit

- Parallele Platten mit $h^*/\sqrt{A^*} \rightarrow 0$ und $A_1^* = A_2^*$

$$\dot{Q}_{12}^* = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 A_1^* \sigma^* (T_2^{*4} - T_1^{*4})}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 (1 - \varepsilon_2)}, \quad (8-34)$$

was für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \rightarrow 1$ erwartungsgemäß in (8-30) mit $F_{12} = 1$ übergeht.

- Hohlraum plus Innenkörper mit $A_1^*/A_2^* \rightarrow 0$

$$\dot{Q}_{12}^* = \varepsilon_1 A_1^* \sigma^* (T_2^{*4} - T_1^{*4}), \quad (8-35)$$

was für $\varepsilon_1 \rightarrow 1$ wiederum mit $F_{12} = 1$ in (8-30) übergeht. Der Emissionsgrad der Hohlraumfläche, ε_2 , hat keinen Einfluss, weil im Grenzfall $A_1^*/A_2^* = 0$ jeder noch so kleine Emissionsgrad ε_2 ausreicht, dieselbe Wirkung zu erzielen, wie der Schwarze Körper mit $\varepsilon_2 = 1$. Es muss lediglich $\varepsilon_2 > 0$ gelten, da für $\varepsilon_2 = 0$ und $A_1^*/A_2^* = 0$ in (8-33) ein mathematisch unbestimmter Ausdruck entsteht.

Für ein endliches Flächenverhältnis $A_1^*/A_2^* > 0$ gilt (8-35) nur, wenn die Hohlraumfläche A_2^* ein Schwarzer Strahler ($\varepsilon_2 = 1$) ist. Dann treten an A_2^* keine Reflexionen auf und die Größe von A_2^* bzw. das Flächenverhältnis A_1^*/A_2^* spielen keine Rolle.

- In den vorhergehenden Beziehungen kann $(T_2^{*4} - T_1^{*4})$ wieder näherungsweise durch (8-31) ersetzt werden. Nach dieser Linearisierung kann der Strahlungswärmeübergang in Form eines von ΔT^* unabhängigen (Strahlungs-)Wärmeübergangskoeffizienten α_S^* beschrieben werden. Analog zu (2-1) gilt dann

$$q_{12}^* = \frac{\dot{Q}_{12}^*}{A_1^*} = \alpha_S^* (T_2^* - T_1^*). \quad (8-36)$$

Formal folgt damit für den Fall (8-30) mit der Näherung (8-31)

$$\alpha_S^* = F_{12} \sigma^* 4 T_1^{*3}. \quad (8-37)$$

¹ Die Herleitung kann z.B. mittels der anschließend erwähnten elektrischen Analogie erfolgen.

Von den zuvor behandelten Spezialfällen abgesehen ist die Berechnung des Strahlungsaustausches realer Körper sehr aufwändig. Die erforderliche Berücksichtigung aller auftretenden Flächen kann mit Hilfe der *Analogie zur Elektrizitätsleitung* in verzweigten Netzen oder mit Hilfe der sog. *Netto-Strahlungsmethode* (Energiebilanzgleichungen für alle Einzelflächen) erfolgen.¹ In beiden Methoden werden die Sichtfaktoren zwischen allen einzelnen Flächen benötigt, was oft einen großen Rechenaufwand bedeutet, oder mit physikalisch motivierten Approximationen z. T. umgangen werden kann.

8.6 Gasstrahlung

Wärmestrahlung ist bisher weitgehend als ein Oberflächenphänomen beschrieben worden. Emission, Absorption und Reflexion treten dabei an Oberflächen auf. Wenn zwei Körper im Strahlungsaustausch stehen, so kann der Einfluss der Gasschicht zwischen beiden Körpern in guter Näherung vernachlässigt werden, wenn diese „optisch dünn“ ist. Bevor dieser Begriff im nachfolgenden Kapitel erläutert wird, sollen einige entscheidende Eigenschaften von Gasen im Zusammenhang mit der Wärmestrahlung aufgeführt werden:

- Gase absorbieren und emittieren Wärmestrahlung nicht in einem kontinuierlichen Wellenlängenspektrum, sondern nur in abgegrenzten Wellenlängenbereichen, den sog. *Strahlungsbanden*. Sie können deshalb nicht als Graue Strahler approximiert werden (grau: wellenlängenunabhängige Strahlungseigenschaften).
- Technisch relevant ist häufig nur das Strahlungsverhalten von Gasen im Infrarotbereich, d. h. bei Wellenlängen $\lambda^* > 1 \mu\text{m}$. In diesem Bereich liegen die strahlungsaktiven Banden z. B. von H_2O und CO_2 , nicht aber von N_2 und O_2 . Dies ist für das Strahlungsverhalten von Luft von Bedeutung. Luft besteht im Wesentlichen aus diesen vier Bestandteilen und wird deshalb bezüglich ihres Strahlungsverhaltens von den geringen Anteilen H_2O und CO_2 dominiert.
- Eine nennenswerte Streuung von Wärmestrahlung an den Gasmolekülen liegt nur als sog. *Rayleigh-Streuung* vor. Diese tritt auf, wenn streuende Partikel sehr viel kleiner als die Wellenlänge des gestreuten Lichtes sind, wobei die Abschwächung der Strahlung durch Streuung sehr stark von der Wellenlänge abhängt. Für sie gilt eine Proportionalität $\sim 1/\lambda^{*4}$, so dass kurzwellige Strahlung stark, langwellige Strahlung aber nur schwach gestreut wird. Im Infrarotbereich der Strahlung kann der Streueffekt deshalb vernachlässigt werden.

8.6.1 Die optische Dicke von Gasschichten

Im Infrarotbereich ($\lambda^* > 1 \mu\text{m}$) können bestimmte Gase in begrenzten Strahlungsbanden Wärmestrahlung absorbieren (und folglich auch emittieren). Grenzt ein Gas an eine Oberfläche mit der normal-spezifischen spektralen Ausstrahlungsdichte $\dot{I}_{\lambda\omega}^*$, vgl. Tab. 8.1, so wird diese durch die Absorption im Gas abgeschwächt, und zwar pro Schichtdicke ds^* des Gases um den Anteil $d\dot{I}_{\lambda\omega}^*/\dot{I}_{\lambda\omega}^*$. Die Stärke der Abschwächung wird als *spektraler Absorptionskoeffizient* k_G^* des Gases bezeichnet. Unterstellt man, das absorbierende Gas sei eine Komponente in einem Gemisch, deren andere Komponenten die Strahlung ungehindert hindurchlassen, so ist k_G^* eine Funktion

¹ Genauere Ausführungen zu beiden Methoden in:

Poljak, G. (1935): *Analysis of Heat Interchange by Radiation between Diffuse Surfaces* (russ.), Techn. Phys. USSR 1, 555-590.

Oppenheim, K. A. (1956): *Radiation Analysis by the Network Method*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs., **78**, 725-735.

des Partialdruckes p_G^* im Gemisch. Zusätzlich treten als Einflussgrößen die Temperatur und der Druck des Gemisches, aber auch die Wellenlänge der absorbierten Strahlung auf. Damit gilt

$$-\frac{d\dot{i}_{\lambda\omega}^*}{\dot{i}_{\lambda\omega}^*} = k_G^* ds^* \quad \text{mit} \quad k_G^* = k_G^*(\lambda^*, p^*, t^*, p_G^*). \quad (8-38)$$

Die Integration über eine endliche Schichtdicke s^* ergibt

$$\kappa_G \equiv \int_0^{s^*} k_G^* ds^* = -\ln(\dot{i}_{\lambda\omega,s}^*/\dot{i}_{\lambda\omega,0}^*) \quad (8-39)$$

mit κ_G als sog. *optischer Dicke* einer Gasschicht der Dicke s^* . Der Fall eines *optisch dünnen* Gases liegt für $\kappa_G \rightarrow 0$ vor. Ein homogenes Gas besitzt einen ortsunabhängigen Wert von k_G^* , so dass für diesen Fall $\kappa_G = k_G^* s^*$ gilt.

Das Verhältnis $\dot{i}_{\lambda\omega,s}^*/\dot{i}_{\lambda\omega,0}^*$ in (8-39) stellt einen *gerichteten spektralen Transmissionsgrad* $\tau_{\lambda\omega,G}$ der Gasschicht s^* dar (vgl. dazu den spektralen Transmissionsgrad τ_λ in Kap 8.4.4), wobei für den *gerichteten Absorptionsgrad* $\alpha_{\lambda\omega,G} = 1 - \tau_{\lambda\omega,G}$ gilt.

Damit folgt für ein homogenes Gas ($\kappa_G = k_G^* s^*$) aufgrund von (8-39)

$$\alpha_{\lambda\omega,G} = 1 - \exp(-k_G^* s^*) \quad (8-40)$$

Der Absorptionsgrad gibt auch hier wieder an, welcher Anteil der einfallenden Strahlung absorbiert wird.

8.6.2 Absorption und Emission von Gasräumen

Während Absorptions- und Emissionsgrade bei Oberflächenstrahlung reine Materialeigenschaften darstellen, sind diese Größen bei der Gasstrahlung von der Geometrie des Gasraumes abhängig. Analog zum Kirchhoffschen Gesetz (8-16) für Oberflächenstrahlung gilt bei der Gasstrahlung

$$\alpha_{\lambda\omega,G}(\lambda^*, p^*, T^*, p_G^*, s^*) = \varepsilon_{\lambda\omega,G}(\lambda^*, p^*, T^*, p_G^*, s^*) \quad (8-41)$$

Dabei beschreibt $\varepsilon_{\lambda\omega,G}$ den Anteil der maximal möglichen Strahlung (Schwarzkörperstrahlung mit $\dot{e}_{\lambda,s}^*$ nach (8-3)), der vom Gasraum auf ein Element dA^* seiner Oberfläche fällt. Die Abhängigkeit von der Gasschicht s^* zeigt, dass $\alpha_{\lambda\omega,G}$ und $\varepsilon_{\lambda\omega,G}$ von der Geometrie des Gasraumes abhängig sind. Eine Integration über alle Wellenlängen und Raumwinkel führt auf den Gesamtemissionsgrad ε_G , der für den Gasraum einer Halbkugel mit dem Radius R^* für verschiedene Gase vertafelt ist. Dieser Radius kann als *gleichwertige Schichtdicke* bei Gasräumen interpretiert werden, deren Geometrien von derjenigen der Halbkugel abweichen. Es muss dann also zunächst für einen bestimmten Gasraum die gleichwertige Schichtdicke R^* ermittelt werden. Als erste Näherung kann hierfür $R^* \approx 3,6V^*/A^*$ mit V^* als Volumen und A^* als Oberfläche des Gasraumes verwendet werden.

Bild 8.11 zeigt den Gesamtemissionsgrad von CO_2 als Funktion der Temperatur T^* und des Produktes $p_{CO_2}^* s^*$ für $p^* = 1$ bar. Das Produkt $p_{CO_2}^* s^*$ ist ein unmittelbares Maß für die Anzahl von CO_2 -Molekülen im Gemisch, denen die Strahlung auf ihrem Weg durch den Gasraum „begegnet“, bzw. die zur Emission beitragen.¹

¹ Die Proportionalität zu $p_G^* s^*$ wird als „Beersches Gesetz“ bezeichnet, es gilt aber keineswegs für alle Gase, so z. B. nicht für H_2O .

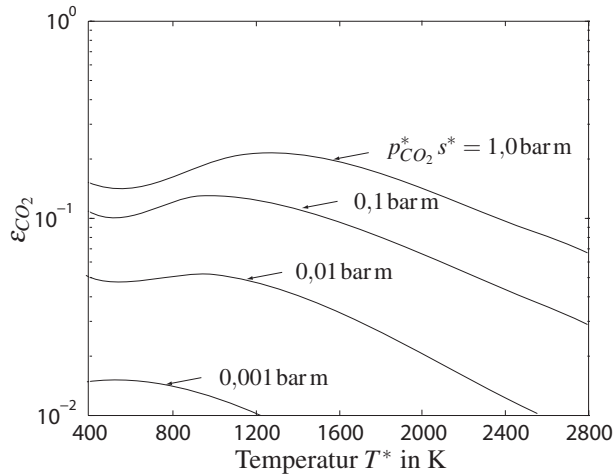


Bild 8.11: Gesamtemissionsgrad von Kohlendioxid bei $p^* = 1 \text{ bar}$

$p_{CO_2}^*$: Partialdruck von Kohlendioxid in bar

s^* : Gasschicht in m

8.7 Besonderheiten bei der Solarstrahlung

Die von der Sonne ausgehende Wärmestrahlung (Solarstrahlung) ist für das irdische Leben von existentieller Bedeutung. Deshalb sollen einige wichtige Teilaspekte nachfolgend kurz benannt und erläutert werden.¹ Die am Rand der Erdatmosphäre ankommende Solarstrahlung wird als „extraterrestrische Solarstrahlung“ bezeichnet. Folgerichtig wird dann für die an der Erdoberfläche ankommende, von der Erdatmosphäre auf verschiedene Weise beeinflusste Solarstrahlung der Begriff „terrestrische Solarstrahlung“ gewählt. Beide Arten von Solarstrahlung sollen anschließend kurz erläutert werden.

8.7.1 Extraterrestrische Solarstrahlung

Die Sonne als Strahlungsquelle (Durchmesser $\approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ km}$) besitzt einen mittleren Abstand zur Erde von $\approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$, was etwa 100 Sonnendurchmessern entspricht. Jahreszeitliche Schwankungen dieses Abstandes betragen etwa $\pm 2\%$. Aufgrund dieses großen Abstandes zur Sonne wird die Erde von einem nahezu parallelen Strahlenbündel mit der spezifischen Einstrahlung $\dot{a}^* = (1367 \pm 1,6) \text{ W/m}^2$ getroffen. Dieser Wert wird auch als *Solarkonstante* E_0^* bezeichnet.

Detaillierte Messungen der spezifischen spektralen Einstrahlungsdichte senkrecht zur bestrahlten Fläche, $\dot{a}_{\lambda\omega}^*(\lambda^*, 0^\circ, \varphi)$, zeigen, dass die Solarstrahlung in guter Näherung eine Schwarzkörperstrahlung darstellt. Bild 8.12 zeigt die spektrale Verteilung der am Atmosphärenrand ankommenden Solarstrahlung. Zusätzlich ist die äquivalente Kurve einer Schwarzkörperstrahlung eingezeichnet. Diese wurde unter der Annahme bestimmt, dass die Sonne ein schwarzer Körper ist und am Atmosphärenrand der Erde zum tatsächlich vorliegenden Wert $\dot{a}^*(=E_0^*)$ der spezifischen Einstrahlung führt. Dies ist für eine Temperatur $T_S^* = 5777 \text{ K}$ des Schwarzen Körpers der Fall, die deshalb als (äquivalente) Sonnentemperatur gilt.

¹ Eine sehr ausführliche Darstellung findet man z.B. in: Iqbal, M. (1983): *An Introduction to Solar Radiation*, Academic Press, Toronto

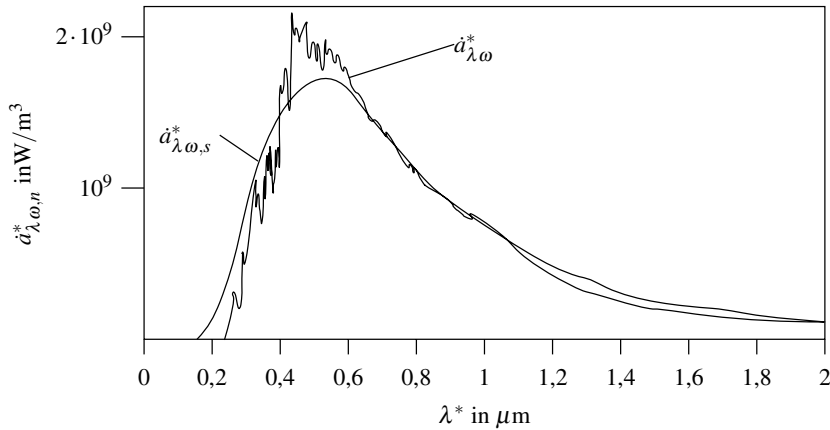


Bild 8.12: Spezifische spektrale Einstrahlungsdichte am Rand der Erdatmosphäre der Solarstrahlung ($\dot{a}_{\lambda\omega}^*$) und einer äquivalenten Schwarzkörperstrahlung ($\dot{a}_{\lambda\omega,s}^*$), jeweils senkrecht zur Einstrahlungsfläche

Eine Besonderheit der Solarstrahlung ist, dass sie im Vergleich zur Strahlung aus irdischen Strahlungsquellen eine (relativ) kurzwellige Strahlung darstellt (das Energiemaximum der Solarstrahlung befindet sich bei $\lambda^* \approx 0,5 \mu\text{m}$, während das der irdischen Strahlungsquellen bei $\lambda^* \approx 10 \mu\text{m}$ liegt). Die für diffus strahlende Oberflächen (Lambert-Strahler, s. (8-17)) geltenden hemisphärischen spektralen Emissions- und Absorptionsgrade $\epsilon_\lambda = \alpha_\lambda$ sind bei den meisten Stoffen aber für kurz- und langwellige Strahlung deutlich verschieden. Gemäß (8-18) können diese Oberflächen dann nicht (!) als Graue Strahler approximiert werden, so dass dann auch nicht $\alpha(T^*) = \epsilon(T^*)$, vgl. (8-19), gilt. Bei der Bestimmung des Strahlungsverhaltens von Oberflächen, die von Solarstrahlung getroffen werden, muss diesem Umstand Rechnung getragen werden, was häufig durch eine getrennte Bestimmung von Absorptionsgraden α_{sol} für Solarstrahlung geschieht. Diese Werte weichen z. T. erheblich von den Gesamt-Emissionsgraden ϵ der Oberflächen ab, wie Tab. 8.7 für einige Oberflächen beispielhaft zeigt.

Hohe Werte des Verhältnisses $\alpha_{\text{sol}}/\epsilon$ sind bei solartechnischen Anwendungen interessant, wobei dann aber auch die absoluten Werte von α_{sol} wichtig sind (beachte: $r = 1 - \alpha$ gemäß (8-23) als Reflexionsgrad). Niedrige Werte dieses Verhältnisses führen zu niedrigen Temperaturen des „zugehörigen“ Körpers, weil dann eine vergleichsweise starke Emission vorliegt. Tab. 8.7 zeigt, dass dies bei einem weißen Farbanstrich der Fall ist.

Tabelle 8.7: Absorptionsgrade für Solarstrahlung α_{sol} im Vergleich zu den Gesamtemissionsgraden bei Umgebungstemperatur für ausgesuchte Oberflächen

Stoff	ϵ	α_{sol}	$\alpha_{\text{sol}}/\epsilon$
Gold, poliert	0,026	0,29	11,1
Kupfer, poliert	0,03	0,18	6,0
Ölfarbe, schwarz	0,92	0,90	0,98
Zinkfarbe, weiß	0,92	0,22	0,24

8.7.2 Terrestrische Solarstrahlung

Bild 8.13 zeigt die unterschiedlichen Effekte, die beim Durchgang der Solarstrahlung durch die Erdatmosphäre auftreten. Die einfallende, kurzwellige extraterrestrische Solarstrahlung wird

- z. T. durchgelassen: diese *direkte Strahlung* stellt einen Anteil τ_λ (spektraler Transmissionsgrad) an der gesamten Strahlung dar. Die durch $\tau_\lambda < 1$ ausgedrückte Abschwächung hat mehrere Ursachen in Effekten, die in den folgenden Punkten benannt werden.
- z. T. gestreut: dabei tritt eine Streuung an Molekülen (Rayleigh-Streuung) und an Aerosolen (Staub und Wassertropfchen, Aerosol-Streuung) auf. Ein Teil der gestreuten Strahlung trifft als diffuse Strahlung auf dem Erdboden auf, ein Teil wird in den Weltraum zurückgestrahlt.
- z. T. mehrfach reflektiert: ein Teil der an der Oberfläche reflektierten Strahlung geht dieser „nicht verloren“, sondern wird durch Reflexionen in der Erdatmosphäre an die Erdoberfläche (diffus) zurückgestrahlt.
- z. T. absorbiert: der in der Erdatmosphäre absorbierte Teil der Solarstrahlung wird als zusätzliche innere Energie der Atmosphäre gespeichert und trägt damit zur langwelligen Strahlung der Atmosphäre (Emission der Atmosphäre bei ihrer Temperatur) bei. Sie ist dann ein Teil der sog. (langwelligen) *atmosphärischen Gegenstrahlung*.

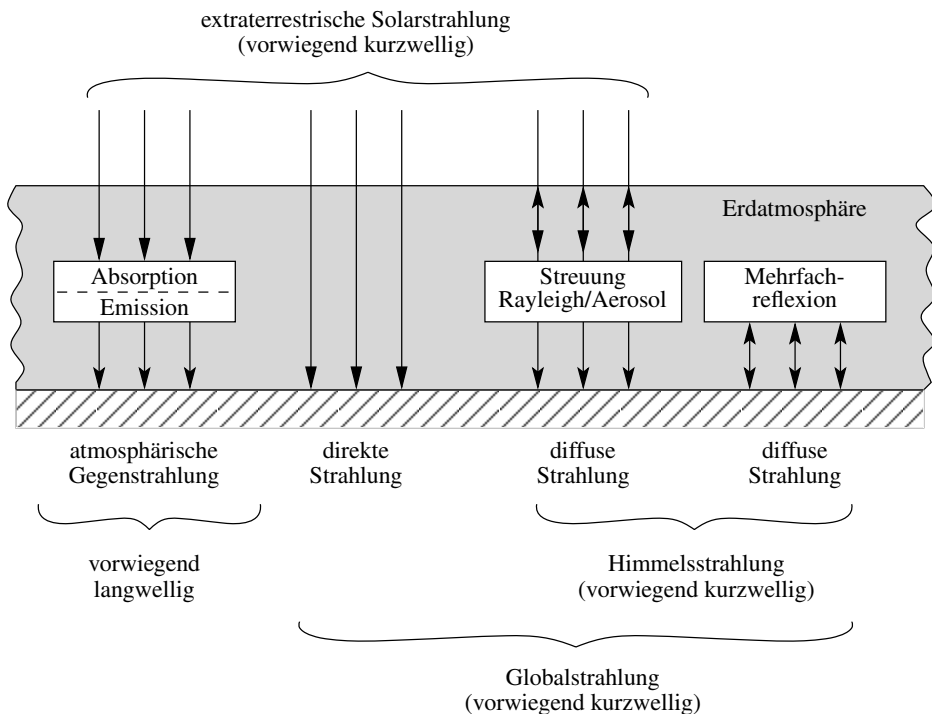


Bild 8.13: Einfluss der Erdatmosphäre auf die extraterrestrische Solarstrahlung

Alle kurzwelligen Anteile werden zur sog. *Globalstrahlung* zusammengefasst, ihr diffuser Anteil wird *Himmelsstrahlung* genannt. Eine genaue Berechnung der einzelnen Effekte ist im Rahmen des vorliegenden Buches nicht möglich, dazu sei auf die Spezialliteratur verwiesen.

Abschließend sollen einige Aspekte/Effekte im Zusammenhang mit der speziellen Wirkung der Erdatmosphäre auf die Solarstrahlung erläutert werden:

- *blauer Himmel*: Ein wolkenloser Himmel ist für uns blau, weil die Rayleigh-Streuung an den Gasmolekülen der Atmosphäre proportional zu $1/\lambda^4$ erfolgt. Damit wird innerhalb des sichtbaren Wellenlängenspektrums blaues Licht (kleinste Wellenlängen) deutlich stärker gestreut als die anderen Farbkomponenten, so dass der „gesamte Himmel“ diffus blau strahlt. Ohne Streuung würde der Himmel schwarz erscheinen.
- *rotglühende Sonnenuntergänge*: Auch dies ist ein Effekt, der auf die Wirkung der Rayleigh-Streuung an den Gasmolekülen zurückzuführen ist. Wie zuvor beschrieben, ist diese stark wellenlängenabhängig. Zusätzlich tritt aber auch eine Abhängigkeit von der Länge des optischen Weges auf, den die Solarstrahlung in der Erdatmosphäre zurücklegt. In Bild 8.14 ist die abschwächende Wirkung der Rayleigh-Streuung auf die direkte Solarstrahlung am Erdboden (s. Bild 8.13) in Form eines „Rayleigh-strahlungsbedingten“ Transmissionsgrades τ_λ dargestellt. Dieser verläuft zwischen 0 (totale Abschwächung) und 1 (keine Abschwächung). Der Kurvenverlauf ist aber auch vom optischen Weg abhängig, der umso länger ist, je niedriger der Sonnenstand in Bezug auf die Erdoberfläche am Beobachtungsort ist. Als Maß für diesen Weg ist der Strahlwinkel β gegenüber der Vertikalen angegeben ($\beta = 0$: höchststehende Sonne, $\beta \approx 90^\circ$: sehr flach stehende Sonne). Daran ist erkennbar, dass für einen flachen Sonnenstand kurzwelliges Licht fast vollständig gestreut wird (niedriger Transmissionsgrad), während langwelliges („rotes“) Licht weitgehend durchgelassen wird. Dadurch erscheint die Sonne rotglühend.
- *Treibhauseffekt*: Dieser viel diskutierte Effekt einer allmählichen Erderwärmung basiert auf der selektiven Transmission der Erdatmosphäre bezüglich unterschiedlicher Wellenlängen der Wärmestrahlung. Diese Eigenschaft der Erdatmosphäre ist vergleichbar zum selektiven Transmissionsverhalten von Glas: Kurzwellige Solarstrahlung ($T_s^* \approx 5800\text{ K}$) wird weitgehend durchgelassen, langwellige Rückstrahlung der Erdoberfläche ($T_E^* \approx 300\text{ K}$) dagegen weitgehend absorbiert und reflektiert. Dies führt zu relativ hohen Temperaturen der Erdoberfläche und eben auch zu einer weiteren Erderwärmung, wenn die Erdatmosphäre durch menschliche Eingriffe so verändert wird, dass dieser Effekt verstärkt auftritt. Der komplexe Aufbau der Erdatmosphäre erschwert die genaue Analyse der Vorgänge gegenüber dem einfachen Fall des Gartentreibhauses erheblich. Es ist aber unbestritten, dass der Erd-Treibhauseffekt (den wir als solchen zum Überleben unbedingt benötigen) durch menschliches Handeln beeinflusst werden kann und damit das fragile Gleichgewicht im Energiehaushalt der Erde gestört wird, s. dazu auch das ILLUSTRIERENDE BEISPIEL 8.1.
- *Ozonloch*: Ozon (O_3) ist eine Komponente im Gasgemisch der Erdatmosphäre, die stark im Wellenlängenbereich von $0,2\text{ }\mu\text{m} \dots 0,35\text{ }\mu\text{m}$ absorbiert. Dies verhindert eine starke direkte Einstrahlung der energiereichen UV-B-Strahlung und ist ein Aspekt des Treibhauseffektes. Langlebige Fluor-Chlor-Kohlenwasserstoffe (FCKW), die in die Stratosphäre gelangen, zerstören die schützende Ozonschicht z. T. und führen damit zu einer verstärkten UV-B-Strahlung am Erdboden. Als „Ozonloch“ werden dabei die hauptsächlich über den Polargebieten auftretenden Verminderungen der Ozonkonzentration bezeichnet.

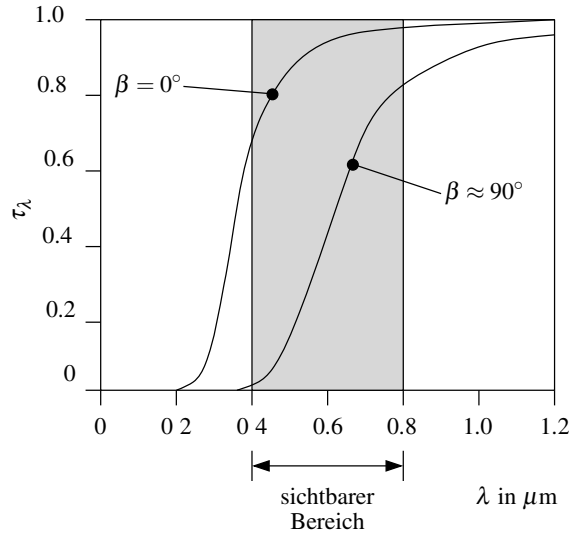


Bild 8.14: Spektraler Transmissionsgrad τ_λ der Solarstrahlung infolge der Rayleigh-Streuung für zwei verschiedene Sonnenstände, β : solarer Einstrahlwinkel gegenüber der Vertikalen

ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 8.1: Die Erde als Treibhaus

Mit der Erdatmosphäre als „Glaseratz“ verhält sich die Erde unter dem Gesichtspunkt des Strahlungsaustausches mit der Umgebung (Weltall) ähnlich wie ein Gartentreibhaus. Um die Wirkung der Erdatmosphäre auf den Wärmehaushalt der Erde abzuschätzen, kann ermittelt werden, welche globale Mitteltemperatur T_m^* sich einstellen würde, wenn die Erde keine Atmosphäre besäße. Dazu werden folgende (realistische) Annahmen getroffen:

- Der mittlere Reflexionsgrad des sonnenbeschienenen Teiles der Erdoberfläche ist $r_m = 0,3$. Das bedeutet, die Erde absorbiert 70% der einfallenden Sonnenstrahlung (besitzt also einen mittleren Absorptionsgrad $\alpha_m = 0,7$).
- Ohne Erdatmosphäre gelangt die spezifische Solareinstrahlung $\dot{a}^* = 1,367 \text{ kW/m}^2$ auf die Erdoberfläche (Solarkonstante).
- Die Erde emittiert mit einem mittleren Emissionsgrad von
 - a) $\varepsilon_m = 1$, d.h., sie strahlt wie ein Schwarzer Körper mit $\alpha_m \neq \varepsilon_m$, oder
 - b) $\varepsilon_m = \alpha_m = 0,7$, d.h., es wird angenommen, daß sich die Erde (ohne Atmosphäre) wie ein Grauer Körper verhält.

Aus der Gleichheit von ein- und ausgestrahlter Wärmestrahlung ergibt sich die globale Gleichgewichts-Mitteltemperatur T_m^* zu (R^* = Erdradius, πR^{*2} = Projektion, $4\pi R^{*2}$ = Oberfläche):

$$\alpha_m \dot{a}^* \pi R^{*2} = \varepsilon_m \sigma^* T_m^{*4} 4\pi R^{*2} \rightarrow T_m^* = \left[\frac{\alpha_m \dot{a}^*}{\varepsilon_m 4 \sigma^*} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (8-42)$$

Daraus folgt für

- a) $\alpha_m = 0,7$; $\varepsilon_m = 1$: $T_m^* = 254,2 \text{ K}$ bzw. $t_m^* \approx -19^\circ \text{C}$
 b) $\alpha_m = \varepsilon_m = 0,7$: $T_m^* = 278 \text{ K}$ bzw. $t_m^* \approx 4,8^\circ \text{C}$

Die beiden Modellannahmen a) und b) sind in gewisser Weise willkürlich, da der Fall „Erde ohne Atmosphäre“ ein gedachtes Modell ist. Üblicherweise wird in diesem Zusammenhang von der Annahme a) ausgegangen.

Die tatsächlich beobachtete globale Mitteltemperatur liegt bei $T_{m,\text{real}}^* = 288 \text{ K}$ bzw. $t_{m,\text{real}}^* \approx 15^\circ \text{C}$. Die Differenz zwischen $T_{m,\text{real}}^*$ und T_m^* ist im Wesentlichen auf die Wirkung der Erdatmosphäre zurückzuführen. Mit der Erdatmosphäre liegt dann ein hochkomplexes physikalisches System vor, dessen Wärmebilanz durch selektive Transmission, Streuung, selektive Absorption, atmosphärische Gegenstrahlung sowie die Wirkung zusätzlicher Wärmeübertragungsmechanismen (vor allem konvektiver Wärmeübergang sowie Kondensations- und Verdunstungsvorgänge) bestimmt wird.

Wenn wesentliche Aspekte des Wärmehaushaltes der Erde mit dem Begriff des Treibhauseffektes beschrieben werden, so ist zu beachten, daß dieser ein integraler Bestandteil der physikalischen Vorgänge ist, seit sich die Erdatmosphäre gebildet hat. Wenn es durch menschliches Handeln (sog. *anthropogene Eingriffe*) zu Auswirkungen auf den Wärmehaushalt der Erde kommt, so ist dies also nicht etwa die Auslösung des Treibhauseffektes, sondern lediglich seine Beeinflussung. Die vermutlich entscheidenden Eingriffe in diesem Sinne sind

- der Abbau des stratosphärischen Ozons (O_3) durch die katalytische Wirkung von Stickoxiden (NO_x) sowie durch die Beeinflussung durch Chloroxid-Radikale (als Folge der Freisetzung von Fluorchlorkohlenwasserstoffen (FCKW)).
- die Anreicherung von Kohlendioxid (CO_2 , Verbrennung fossiler Brennstoffe) und Methan (CH_4 , Reisproduktion und Viehhaltung).

8.8 Übungsaufgaben zum Wärmeübergang durch Strahlung

Für die Bearbeitung der nachfolgenden Übungsaufgaben wird empfohlen, die zugehörigen Arbeitsblätter zum Wärmeübergang durch Strahlung im Anhang zu benutzen. Die ausführlich beschriebenen Lösungswege zu diesen Übungsaufgaben befinden sich im Kap. 8.8.2.

8.8.1 Übungsaufgaben und Ergebnisse

Übungsaufgabe 8.1: „Heizdraht“

Zwischen zwei Haltespitzen befindet sich ein gerader, horizontal angeordneter Kupferdraht mit einem Durchmesser $D^* = 0,4 \text{ mm}$ und einer Länge von $L^* = 10 \text{ cm}$. Der von einem elektrischen Strom ($I^* = 7 \text{ A}$) beheizte Draht wird von Luft mit $T_\infty^* = 293,15 \text{ K}$ quer angeströmt. Der Widerstand des Kupferdrahtes beträgt in dieser Situation $R_1^* = 0,0158 \Omega$. Er ist temperaturabhängig gemäß

$$R^* = R_{\text{Bezug}}^* (1 + \gamma^* (T^* - T_{\text{Bezug}}^*))$$

mit $R_{\text{Bezug}}^* = 0,0137 \Omega$, $T_{\text{Bezug}}^* = 293,15 \text{ K}$ und $\gamma^* = 0,0038 \text{ 1/K}$.

Anmerkung: Die Wärmeabgabe über die Stirnflächen des Drahtes und über die Haltespitzen können vernachlässigt werden.

- a) Wie hoch ist im stationären Zustand die Drahttemperatur und die zugeführte Heizleistung?
 b) Wie groß sind der Wärmeübergangskoeffizient und die Nußelt-Zahl unter der Annahme, dass der Kupferdraht blank poliert ist ($\varepsilon = 0$)?

c) Nun soll angenommen werden, dass der Draht ideal geschwärzt ist:

- Wie groß sind bei sonst gleichen Bedingungen die Drahttemperatur, der Widerstand und die Heizleistung?
- Welche thermischen Leistungen werden in Form von Konvektion und Strahlung abgegeben?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 8.1:

a) $T_1^* = 333,38 \text{ K}$ entspricht $t_1^* = 60,23^\circ \text{C}$

$$P_{\text{zu}}^* = 0,7742 \text{ W}$$

b) $\alpha^* = 152,7 \text{ W/m}^2 \text{K}$

$$\text{Nu} = 2,38$$

c) • $T_2^* = 331,83 \text{ K}$ entspricht $t_2^* = 58,68^\circ \text{C}$

$$R_2^* = 0,0157 \Omega$$

$$P_{\text{zu}2}^* = 0,77 \text{ W}$$

- $\varphi_K^* = 96,4\%$; $\varphi_S^* = 3,6\%$

Übungsaufgabe 8.2: „Absorptionsglas“

Eine Scheibe aus Absorptionsglas der Dicke $s^* = 10 \text{ mm}$ befindet sich in Umgebungsluft der Temperatur $T_U^* = 292 \text{ K}$. Die Glasscheibe wird auf der einen Seite gleichmäßig mit Solarstrahlung der Energiestromdichte $\dot{q}_S^* = 0,8 \text{ kW/m}^2$ beaufschlagt und absorbiert dabei 60 % der eingestrahlt Energie.

Die absorbierte Energie wird ausschließlich durch Konvektion an die Umgebungsluft abgeführt, wobei auf beiden Seiten der Glasscheibe in dem betrachteten Bereich von gleich großen und konstanten Wärmeübergangskoeffizienten ausgegangen werden kann. Damit liegen dann jeweils konstante Oberflächentemperaturen T_E^* (Eintrittsseite) und T_A^* (Austrittsseite) vor.

Im stationären Fall kann der Temperaturverlauf über die Dicke der Glasscheibe, $T^*(x^*)$ (x^* : Koordinate in der Glasscheibe mit $x^* = 0$ an der sonnenzugewandten Oberfläche), in Abhängigkeit von den Glasscheiben-Oberflächentemperaturen T_E^* (Eintrittsseite) und T_A^* (Austrittsseite) durch die Beziehung

$$T^*(x^*) = T_E^* - C_1^* (\exp(-x^*/s^*) - 1) + (T_A^* - T_E^* - C_2^*) \frac{x^*}{s^*}$$

mit $C_1^* = 21 \text{ K}$ und $C_2^* = 13,2746 \text{ K}$ angenähert werden.

Die Differenz zwischen den Oberflächentemperaturen der Glasscheiben beträgt $T_E^* - T_A^* = 1 \text{ K}$.

Anmerkung: Es gilt für $y^* = \exp(-x^*/s^*) \rightarrow \frac{dy^*}{dx^*} = \frac{-1}{s^*} \cdot \exp(-x^*/s^*)$.

- Welche Temperaturgradienten und konvektiven Wandwärmestromdichten ergeben sich an der Eintritts- und Austrittsseite der Glasscheibe?
- Wie groß ist die Wärmeleitfähigkeit der Glasscheibe?
- Welche konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten ergeben sich bei diesen Bedingungen?
- Wie groß sind die Oberflächentemperaturen auf der Eintritts- und Austrittsseite?
- Welcher Temperaturverlauf ergibt sich in der Scheibe?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 8.2:

- a) $\left(\frac{dT^*}{dx^*}\right)_E = \frac{C_1^*}{s^*} + \frac{(T_A^* - T_E^* - C_2^*)}{s^*} = 672,5 \text{ W/K}$
 $\left(\frac{dT^*}{dx^*}\right)_A = \frac{C_1^*}{s^*} e^{-1} + \frac{(T_A^* - T_E^* - C_2^*)}{s^*} = -654,91 \text{ W/K}$
 $\dot{q}_E^* = -243,2 \text{ W/m}^2; \quad \dot{q}_A^* = 236,8 \text{ W/m}^2$
- b) $\lambda^* = 0,361 \text{ W/mK}$
- c) $\alpha^* = 6,37 \text{ W/m}^2\text{K}$
- d) $T_E^* = -\frac{\dot{q}_E^*}{\alpha^*} + T_U^* = 330,15 \text{ K}$
 $T_A^* = \frac{\dot{q}_A^*}{\alpha^*} + T_U^* = 329,15 \text{ K}$
- e) Grafische Darstellung, siehe Lösungsweg

Übungsaufgabe 8.3: „Thermoskanne“

Eine Thermoskanne besteht aus einem Doppelglaszylinder mit einem Innendurchmesser von $D_i^* = 66 \text{ mm}$, einem Außendurchmesser von $D_a^* = 80 \text{ mm}$ und einer Höhe von $h^* = 300 \text{ mm}$. Die Thermoskanne ist mit heißem Wasser der Temperatur $t^* = 60^\circ\text{C}$ gefüllt. Der äußere Wärmeübergangskoeffizient zwischen Thermoskanne und Umgebung ($t_U^* = 20^\circ\text{C}$) beträgt unter Berücksichtigung der Strahlung $\alpha_a^* = 4 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Folgende Annahmen können getroffen werden:

- Die Glasschichten sind vernachlässigbar dünn.
- Es kann stets mit einer mittleren Oberfläche $A_m^* = (A_i^* + A_a^*)/2$ anstelle von A_i^* oder A_a^* gerechnet werden.
- Wärmeverluste über den Boden und über den Deckel sowie Speichereffekte sind vernachlässigbar.
- Der Wärmeübergangswiderstand vom Fluid an die Innenwand ist vernachlässigbar.

a) Wieviel Energie in Wh ist erforderlich, um eine dem Thermoskannenvolumen entsprechende Wassermasse von 20°C auf 60°C zu erwärmen (Stoffwerte: $\rho_W^* = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c_W^* = 4,19 \text{ kJ/kgK}$)?

b) Wie hoch ist der Wärmeverluststrom zu Beginn für die folgenden Varianten:

- Variante A: Der Zwischenraum des Glaszylinders ist evakuiert. Die Emissionsgrade der Außenwand des Innenzylinders sowie der Innenwand des Außenzylinders betragen jeweils $\varepsilon = 0,02$ (versilberte Oberflächen).
- Variante B: Der Zwischenraum des Glaszylinders ist evakuiert. Die Emissionsgrade der Außenwand des Innenzylinders sowie der Innenwand des Außenzylinders betragen nun jeweils $\varepsilon = 0,9$.
- Variante C: Der Zwischenraum des Glaszylinders ist mit Luft ($\lambda^* = 0,027 \text{ W/mK}$), die sich in Ruhe befindet, gefüllt. Die Emissionsgrade der Außenwand des Innenzylinders sowie der Innenwand des Außenzylinders betragen jeweils $\varepsilon = 0,9$.

Ergebnis zu Übungsaufgabe 8.3:

- a) $Q_{zu}^* = 47,78 \text{ Wh}$.

- b) Variante A: $\dot{Q}_V^* = 0,23 \text{ W}$
 Variante B: $\dot{Q}_V^* = 7,0 \text{ W}$
 Variante C: $\dot{Q}_V^* = 8,06 \text{ W}$

Übungsaufgabe 8.4: „Sonnenkollektor“

Ein einfacher Sonnenkollektor besteht aus einer geschwärzten Absorberplatte (Absorptionsgrad $\alpha_A = 0,92$; Reflexionsgrad $r_A = 0,08$), in der mäanderförmig Rohrleitungen verlegt sind, die von einem Wasservolumenstrom $\dot{V}_W = 1 \text{ l/min}$ durchflossen werden.

Auf den Sonnenkollektor (Fläche $A^* = 12 \text{ m}^2$) trifft eine Strahlungsstromdichte (spezifische Einstrahlung) der Sonne von $\dot{q}_S^* = 800 \text{ W/m}^2$ sowie eine Strahlungsstromdichte der Umgebung von $\dot{q}_U^* = 75 \text{ W/m}^2$.

Anmerkung: Es handelt sich um einen stationären Vorgang, bei dem Wärmeverluste durch Leitung und Konvektion vernachlässigt werden können.

- Wie hoch ist der wasserseitig nutzbare Wärmestrom \dot{Q}_{Nutz}^* , wenn der Wasservolumenstrom um 20 K erwärmt wird (Stoffdaten: $\rho_W^* = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c_W^* = 4,19 \text{ kJ/kg K}$)?
- Wie groß ist der vom Absorber emittierte Energiestrom und welche (mittlere) Absorbtemperatur stellt sich ein?
- Zur Erhöhung des Wirkungsgrades des Sonnenkollektors wird dieser mit einer Glasplatte bedeckt und der Zwischraum evakuiert. Es stellt sich eine mittlere Glastemperatur von $t_G^* = 30^\circ \text{C}$ ein. Die Glasplatte weist im kurzwelligen Bereich im Mittel einen Transmissionsgrad von $\tau_{G,KW} = 0,9$ und einen Absorptionsgrad $\alpha_{G,KW} = 0,1$ auf. Im langwelligen Bereich betragen die Daten $\tau_{G,LW} = 0,08$ und $\alpha_{G,LW} = 0,92$.
 - Wie groß ist nun der vom Absorber emittierte Energiestrom und welche (mittlere) Absorbtemperatur stellt sich ein?
 - Welcher Energiestrom kann nun genutzt werden?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 8.4:

- $\dot{Q}_{\text{Nutz}}^* = 1396,7 \text{ W}$
- $\epsilon_A \dot{E}_A^* = 8263,3 \text{ W}$
 $T_A^* = 332 \text{ K}$
- $\epsilon_A \dot{E}_{A,\text{mod}}^* = 10008,1 \text{ W}$
 $T_{A,\text{mod}}^* = 363 \text{ K}$
 • $\dot{Q}_{\text{Nutz,mod}}^* = 3293,6 \text{ W}$

Übungsaufgabe 8.5: „Bestimmung des Emissionsgrades“

Zur Bestimmung des Emissionsgrades einer Probe (Masse $m^* = 2,5 \text{ g}$, Wärmekapazität $c^* = 1,2 \text{ kJ/kg K}$ und Oberfläche $A^* = 12 \text{ cm}^2$) wird diese in einen temperierten Behälter gelegt. Die Temperatur der Behälterinnenwand beträgt $T_B^* = 335 \text{ K} = \text{const}$, der Emissionsgrad der Behälterinnenwand $\epsilon_B = 1,0$. Dann wird der Behälter nahezu vollkommen evakuiert und der Temperaturverlauf mit der Zeit protokolliert.

Anmerkungen:

- Wärmeleitungseffekte können vernachlässigt werden.
 - Die Probe verhalte sich bezüglich der Temperatur homogen.
 - Es gilt $\int \frac{dT^*}{C_1^* T^* + C_2^*} = \frac{1}{C_1^*} \ln(C_1^* T^* + C_2^*)$.
- a) Wie lautet der funktionale Zusammenhang zwischen der Probentemperatur und der Zeit mit dem Parameter Emissionsgrad der Probe ε_P ?
- b) Welche Kurvenverläufe $T_P^* = f(\tau^*, \varepsilon_P)$ ergeben sich für zwei unterschiedliche Emissionsgrade der Probe ($\varepsilon_{P1} < \varepsilon_{P2}$)?
- c) Nach dem Einstellen des Vakuums in dem Behälter wird zum Zeitpunkt, $\tau^* = 0$ eine Probentemperatur von $T_{P0}^* = 300 \text{ K}$ bestimmt, die sich nach einer Zeitspanne von $\Delta\tau^* = 280 \text{ s}$ auf $T_{P1}^* = 317 \text{ K}$ verändert hat.
- Wie groß ist der Emissionsgrad der Probe?
 - Welche Wandwärmestromdichte wird zum Zeitpunkt $\tau_1^* = 280 \text{ s}$ übertragen?

Ergebnis zu Übungsaufgabe 8.5:

- a) $T_P^*(\tau^*) = T_B^* + (T_{P0}^* - T_B^*) \exp\left(\frac{-\varepsilon_P \sigma^* A^* 4 T_B^{*3}}{m^* c^*} \tau^*\right)$
- b) Grafische Darstellung, siehe Lösungsweg
- c) • $\varepsilon_P = 0,696$
- $\dot{q}_{Wm}^* = 106,8 \text{ W/m}^2$

8.8.2 Lösungswege

Lösungsweg zu Übungsaufgabe 8.1: „Heizdraht“

- a) Die Temperatur T_1^* ergibt sich aus der Beziehung

$$R_1^* = R_{\text{Bezug}}^* \cdot (1 + \gamma^* \cdot (T_1^* - T_{\text{Bezug}}^*))$$

zu $T_1^* = 333,38 \text{ K}$ entspricht $t_1^* = 60,23^\circ \text{C}$.

Die Heizleistung ergibt sich unter Verwendung des Ohmschen Gesetzes zu $P_{zu}^* = R_1^* \cdot I^{*2} = 0,7742 \text{ W}$

- b) Mit (2-1) und der Beziehung $\dot{q}_W^* A^* = \dot{Q}_W^* = P_{zu}^*$ (Drahtoberfläche $A^* = \pi D^* L^*$) folgt

$$P_{zu}^* = \alpha^* \pi D^* L^* (T_{\text{Draht}}^* - T_{\infty}^*)$$

und daraus

$$\alpha^* = 152,7 \text{ W/m}^2 \text{K}.$$

Mit der Wärmeleitfähigkeit der Luft bei der Anströmtemperatur $\lambda^*(t_{\infty}^* = 20^\circ \text{C}) = 0,02569 \text{ W/mK}$ nach Tab. B.1 ergibt sich unter Verwendung von (3-4)

$$\text{Nu} = \frac{\alpha^* D^*}{\lambda^*} = 2,38$$

- c) Die Bilanzgleichung für den neuen Zustand 2 lautet

$$P_{zu2}^* = R_2^* \cdot I^{*2} = \alpha^* \pi D^* L^* (T_2^* - T_{\infty}^*) + \varepsilon \sigma^* \pi D^* L^* (T_2^{*4} - T_{\infty}^{*4})$$

Mit dem Drahtwiderstand $R_2^* = R_{\text{Bezug}}^* (1 + \gamma^* (T_2^* - T_{\text{Bezug}}^*))$ und der Linearisierung des Strahlungsanteiles gemäß (8-31) (mit der bekannten Größe T_{∞}^{*3} anstelle von T_2^{*3}) ergibt sich

$$R_{\text{Bezug}}^* (1 + \gamma^* (T_2^* - T_{\text{Bezug}}^*)) I^{*2} = \alpha^* \pi D^* L^* (T_2^* - T_{\infty}^*) + \varepsilon \sigma^* \pi D^* L^* 4 T_{\infty}^{*3} (T_2^* - T_{\infty}^*).$$

Aufgelöst nach der Drahttemperatur im Zustand 2 folgt

$$T_2^* = \frac{\pi D^* L T / \infty^* (-\alpha^* - \varepsilon \sigma^* 4 T_{\infty}^{*3}) - R_{\text{Bezug}}^* I^{*2} (1 - \gamma^* T_{\text{Bezug}}^*)}{\pi D^* L (-\alpha^* - \varepsilon \sigma^* 4 T_{\infty}^{*3}) + R_{\text{Bezug}}^* I^{*2} \gamma^*}$$

$$T_2^* = 331,83 \text{ K bzw. } t_2^* = 58,68^\circ \text{C}.$$

Diese Drahttemperatur ist etwas geringer als die unter a) berechnete Temperatur T_1^* , weil die Strahlungseffekte zusätzlich berücksichtigt werden.

Der Drahtwiderstand beträgt dann $R_2^* = 0,0157 \Omega$ und die in Form elektrischer Energie zugeführte Leistung $P_{\text{zu}2}^* = 0,77 \text{ W}$.

Der Anteil der Konvektion ergibt sich dann zu $\varphi_K^* = 96,4\%$, der Anteil der Strahlung zu $\varphi_S^* = 3,6\%$.

Lösungsweg zu Übungsaufgabe 8.2: „Absorptionsglas“

- a) Die Temperaturgradienten an den Glasscheibenwänden ergeben sich jeweils aus der Ableitung der gegebenen Temperaturverläufe am Eintritt E bzw. am Austritt A

$$\left(\frac{dT^*}{dx^*} \right)_E = \frac{C_1^*}{s^*} + \frac{(T_A^* - T_E^* - C_2^*)}{s^*} = 672,5 \text{ W/K}$$

$$\left(\frac{dT^*}{dx^*} \right)_A = \frac{C_1^*}{s^*} e^{-1} + \frac{(T_A^* - T_E^* - C_2^*)}{s^*} = -654,91 \text{ W/K}$$

Mit dem Fourier-Ansatz (5-5) ergibt sich das Verhältnis der Wandwärmestromdichten am Eintritt und Austritt der Glasscheibe zu

$$\frac{\dot{q}_E^*}{\dot{q}_A^*} = \frac{-\lambda^* \left(\frac{dT^*}{dx^*} \right)_E}{-\lambda^* \left(\frac{dT^*}{dx^*} \right)_A} = \frac{C_1^* + (T_A^* - T_E^* - C_2^*)}{\exp^{-1} C_1^* + (T_A^* - T_E^* - C_2^*)} = -1,027$$

Mit der Gesamtenergiebilanz für die Glasscheibe

$$0,6 \dot{q}_S^* = |\dot{q}_E^*| + \dot{q}_A^*$$

folgt

$$\dot{q}_E^* = -243,2 \text{ W/m}^2 \text{ und } \dot{q}_A^* = 236,8 \text{ W/m}^2$$

- b) Die Wärmeleitfähigkeit der Glasscheibe kann mit dem in a) bereits verwendeten Fourier-Ansatz ermittelt werden. Es gilt

$$\lambda^* = -\frac{\dot{q}_E^*}{\left(\frac{dT^*}{dx^*} \right)_E} = \frac{\dot{q}_A^*}{\left(\frac{dT^*}{dx^*} \right)_A}$$

und damit

$$\lambda^* = 0,361 \text{ W/mK}$$

- c) Da die konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten auf beiden Seiten der Scheibe gleich groß sind, kann die Definitionsgleichung (2-1) für den Eintritt oder den Austritt zu

$$\dot{q}_E^* = \alpha^* (T_U^* - T_E^*) \text{ und } \dot{q}_A^* = \alpha^* (T_A^* - T_U^*)$$

angesetzt werden. Beide Seiten addiert ergibt

$$\dot{q}_E^* + \dot{q}_A^* = \alpha^* (T_U^* - T_E^* + T_A^* - T_U^*)$$

und damit

$$\alpha^* = \frac{\dot{q}_E^* + \dot{q}_A^*}{T_A^* - T_E^*} = 6,37 \text{ W/m}^2 \text{K}.$$

- d) Mit den berechneten Wandwärmestromdichten und dem Wärmeübergangskoeffizienten erfolgt die Bestimmung der Temperaturen auf der Eintrittsseite der Glasscheibe

$$T_E^* = -\frac{\dot{q}_E^*}{\alpha^*} + T_U^* = 330,15 \text{ K}$$

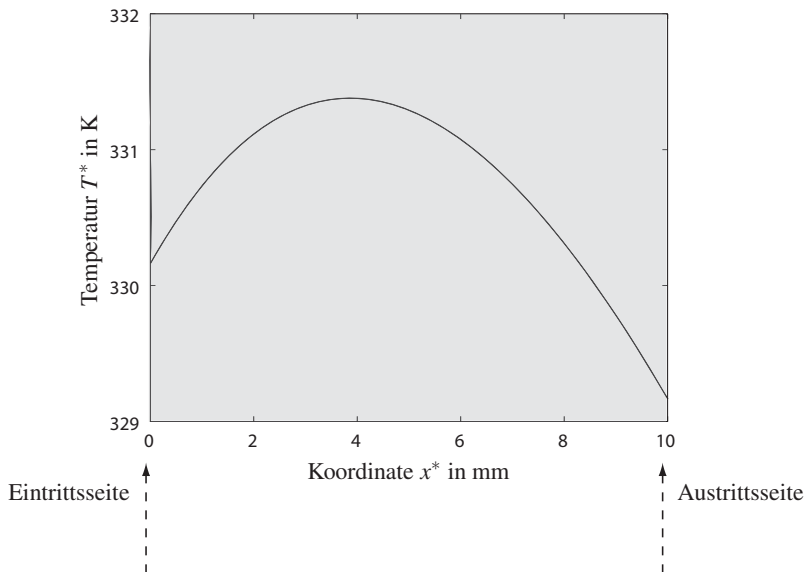
und am Austritt der Glasscheibe

$$T_A^* = \frac{\dot{q}_A^*}{\alpha^*} + T_U^* = 329,15 \text{ K}$$

- e) Die Auswertung der Beziehung

$$T^*(x^*) = T_E^* - C_1^* (\exp^{(-x^*/s^*)} - 1) + (T_A^* - T_E^* - C_2^*) \frac{x^*}{s^*}$$

von $x^* = 0$ bis $x^* = s^* = 10 \text{ mm}$ ergibt folgende grafische Darstellung für den Temperaturverlauf in der Glasscheibe:



Lösungsweg zu Übungsaufgabe 8.3: „Thermoskanne“

- a) Die zur Erwärmung des Wasservolumens von 20°C auf 60°C erforderliche Energie beträgt

$$Q_{zu}^* = m_W^* c_W^* \Delta T_W^* = \frac{\pi D^2}{4} h^* \rho_W^* c_W^* \Delta T_W^* = 172 \text{ kJ} = 47,78 \text{ Wh.}$$

- b) Hier soll nur der Wärmeverluststrom zu Beginn, wenn das Wasser in der Thermoskanne noch eine Temperatur von 60°C hat, berechnet werden. Mit der Zeit wird sich das Wasser abkühlen und damit auch der Wärmeverluststrom sich verringern. Speichereffekte in den Wänden können vernachlässigt werden.

Grundsätzlich sind zwei Berechnungswege zur Bestimmung der Wärmeverluste möglich:

- Berechnung mit dem elektrischen Analogiemodell:

In diesem Fall werden die in Reihe (s. (5-11)) und/oder parallel (s. (5-12)) geschalteten Widerstände zu einem Gesamt-Wärmewiderstand analog zu (6-47) zusammengefasst und daraus, mit Kenntnis der treibenden Temperaturdifferenz, der Wärmeverlust berechnet.

Anmerkung dazu: Dieser Berechnungsweg ist nur möglich, wenn der Strahlungsanteil gemäß (8-31) linearisiert werden kann. Dieses setzt allerdings eine vergleichsweise geringe Temperaturdifferenz der strahlenden Flächen voraus.

- Berechnung auf Basis einer Gesamtenergiebilanz:

Der Energietransport in Form von Wärme vom Wasser an die Umgebung kann momentan als stationär angesehen werden, d. h. der Wärmestrom im Zwischenraum des Glaszylinders (Strahlung und ggfs. Leitung) entspricht dem konvektiven Wärmeübergang von der Außenwand der Thermoskanne an die Umgebung.

Anmerkung dazu: Eine Linearisierung des Strahlungsanteiles macht die Berechnung einfacher, ist allerdings nicht unbedingt erforderlich.

In allen Fällen darf von einer mittleren Oberfläche von $A_m^* = (A_i^* + A_a^*)/2 = 0,0688 \text{ m}^2$ ausgegangen werden.

Die Strahlungsaustauschzahl ergibt sich nach (8-33) zu

$$\frac{1}{\varepsilon_{12}} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1^*}{A_2^*} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1.$$

Variante A:

- Analogiemodell:

Mit einem Sichtfaktor $F_{12} = 1$ und einer Strahlungsaustauschzahl nach (8-33)

$$\frac{1}{\varepsilon_{12}} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1^*}{A_2^*} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 = \frac{1}{0,0101}$$

ergibt sich die Strahlungsleistung gemäß (8-32) zu

$$\dot{Q}_V^* = \varepsilon_{12} A_m^* \sigma^* (T_i^{*4} - T_{Wa}^{*4}).$$

Mit der Linearisierung nach (8-31) folgt

$$\dot{Q}_V^* = \varepsilon_{12} A_m^* \sigma^* 4 T_i^{*3} (T_i^* - T_{Wa}^*)$$

und es kann ein Wärmewiderstand infolge Strahlung gemäß

$$R_S^* = \frac{1}{\varepsilon_{12} A_m^* \sigma^* 4 T_i^{*3}} = 171,6 \text{ K/W}$$

eingeführt werden. So ergibt sich

$$\dot{Q}_V^* = \frac{(T_i^* - T_{Wa}^*)}{R_S^*}.$$

Allerdings sind hier neben der bekannten Wassertemperatur T_i^* und dem bekannten Wärmewiderstand infolge Strahlung noch zwei Unbekannte, nämlich der Wärmeverluststrom \dot{Q}_V^* und die Temperatur an der Außenwand T_{Wa}^* , enthalten.

Anmerkung: Es ist hier zu berücksichtigen, dass der innenseitige Wärmeübergangswiderstand und die Wärmeleitwiderstände in den Glaswänden vernachlässigt werden. Ein Wärmeleitwiderstand im evakuierten Glaszwischenraum tritt nicht auf.

Dieser Wärmeverlust tritt auch an der Außenwand infolge der konvektiven Wärmeübertragung

$$\dot{Q}_V = \frac{(T_{Wa}^* - T_U^*)}{R_{\alpha a}^*}$$

auf, so dass eine zweite Gleichung zur Lösung des Problems zur Verfügung steht. Der außenseitige Wärmeübergangswiderstand ergibt sich zu

$$R_{\alpha a}^* = \frac{1}{\alpha_a^* A_m^*} = 3,6 \text{ K/W}.$$

Beide Wärmewiderstände sind in Reihe geschaltet und addieren sich zum Gesamtwärmewiderstand

$$R_{ges}^* = R_S^* + R_{\alpha a}^* = \frac{1}{\varepsilon_{12} A_m^* \sigma^* 4 T_i^{*3}} + \frac{1}{\alpha_a^* A_m^*} = 175,2 \text{ K/W},$$

so dass der Wärmeverluststrom zu

$$\dot{Q}_V^* = \frac{(T_i^* - T_U^*)}{R_{ges}^*} = 0,23 \text{ W}$$

folgt.

- Gesamtenergiebilanz:

Die Gesamtbilanz ergibt

$$\dot{Q}_V^* = \varepsilon_{12} A_m^* \sigma^* (T_i^{*4} - T_{Wa}^{*4}) = \alpha_a^* A_m^* (T_{Wa}^* - T_U^*)$$

Mit der oben genannten Linearisierung für den Strahlungsteil ergibt sich

$$\varepsilon_{12} A_m^* \sigma^* 4 T_i^{*3} (T_i^* - T_{Wa}^*) = \alpha_a^* A_m^* (T_{Wa}^* - T_U^*).$$

Diese Gleichung kann nach T_{Wa}^* aufgelöst werden und ergibt dann $T_{Wa}^* = 293,98 \text{ K}$ bzw. $t_{Wa}^* = 20,83^\circ \text{C}$.

Damit folgt ebenfalls ein Wärmeverluststrom von $\dot{Q}_V^* = 0,23 \text{ W}$.

Variante B:

Im Unterschied zu Variante A haben sich nur die Emissionsgrade der Glasoberflächen auf $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,9$ verändert, d. h. die Flächen sind nicht mehr verspiegelt.

Die Berechnungswege bleiben unter Verwendung der neu berechneten Strahlungsaustauschzahl $\varepsilon_{12} = 0,8182$ erhalten.

- Analogiemodell:

Es ergeben sich nun:

$R_S^* = 2,12 \text{ K/W}$, $R_{\alpha a}^* = 3,6 \text{ K/W}$, $R_{ges}^* = 5,7 \text{ K/W}$ und damit ein Wärmeverluststrom von $\dot{Q}_V^* = 7,0 \text{ W}$.

- Gesamtenergiebilanz:

Es ergibt sich $T_{Wa}^* = 318,59 \text{ K}$ bzw. $t_{Wa}^* = 45,44^\circ \text{C}$ und damit ebenfalls ein Wärmeverluststrom von

$$\dot{Q}_V^* = 7,0 \text{ W}.$$

Variante C:

• Analogiemodell:

Im Gegensatz zu den Varianten A und B kommt infolge der Luft im Glaszwischenraum noch ein Wärmeleitwiderstand $R_L^* = \frac{s^*}{\lambda^* A_m^*} = 3,77 \text{ K/W}$ hinzu. Dieser Wärmeleitwiderstand tritt parallel zum Strahlungswiderstand $R_S^* = 2,12 \text{ K/W}$ auf, d. h. es handelt sich um eine Parallelschaltung von Wärmewiderständen nach (5-12)

$$R_{SL}^* = \frac{R_S^* R_L^*}{R_S^* + R_L^*} = 1,36 \text{ K/W}.$$

Der Gesamtwärmewiderstand ergibt sich additiv aus dem Wärmewiderstand infolge Strahlung/Leitung sowie dem außenseitigen Wärmeübergangswiderstand zu

$$R_{\text{ges}}^* = R_{SL}^* + \frac{1}{\alpha_a^* A_m^*} = 4,96 \text{ K/W}.$$

Daraus folgt ein Wärmeverluststrom von $\dot{Q}_V^* = 8,06 \text{ W}$.

• Gesamtenergiebilanz:

Die Gesamtbilanz ergibt

$$\dot{Q}_V^* = \frac{\lambda^*}{s^*} A_m^* (T_i^* - T_{Wa}^*) + \varepsilon_{12} A_m^* \sigma^* (T_i^{*4} - T_{Wa}^{*4}) = \alpha_a^* A_m^* (T_{Wa}^* - T_U^*),$$

wobei nach der Linearisierung des Strahlungstermes mit

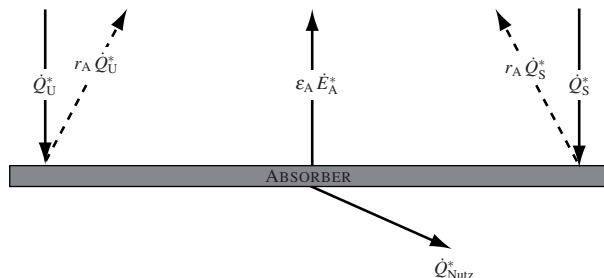
$$\dot{Q}_V^* = \frac{\lambda^*}{s^*} A_m^* (T_i^* - T_{Wa}^*) + \varepsilon_{12} A_m^* \sigma^* 4 T_i^{*3} (T_i^* - T_{Wa}^*) = \alpha_a^* A_m^* (T_{Wa}^* - T_U^*)$$

eine Auflösung nach T_{Wa}^* mit dem Ergebnis $T_{Wa}^* = 322,44 \text{ K}$ bzw. $t_{Wa}^* = 49,29^\circ \text{C}$ möglich wird. Es ergibt sich damit ebenfalls ein Wärmeverluststrom von $\dot{Q}_V^* = 8,06 \text{ W}$.

Lösungsweg zu Übungsaufgabe 8.4: „Sonnenkollektor“

a) Der nutzbare Wärmestrom ergibt sich aus der Energiebilanz zu $\dot{Q}_{\text{Nutz}}^* = \dot{V}_W^* \rho_W^* c_W^* \Delta t_W^* = 1396,7 \text{ W}$.

b) Die Energiebilanz am Absorber ergibt im thermischen Gleichgewicht mit $\varepsilon_A = \alpha_A$ gemäß (8-18) sowie $\dot{Q}_S^* = \dot{q}_S^* A^*$ und $\dot{Q}_U^* = \dot{q}_U^* A^*$, siehe Skizze:



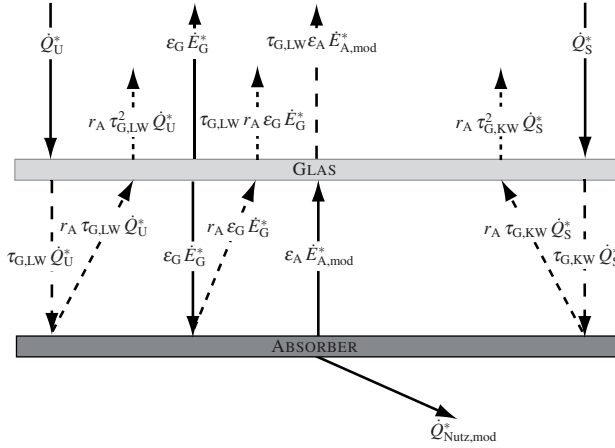
$$\varepsilon_A \dot{E}_A^* = \dot{q}_S^* A^* - \dot{q}_S^* A^* r_A + \dot{q}_U^* A^* - \dot{q}_U^* A^* r_A - \dot{Q}_{\text{Nutz}}^* = 8263,3 \text{ W}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass ein Teil der langwelligen Umgebungsstrahlung und ein Teil der kurzwelligen Sonnenstrahlung vom Absorber mit $r_A = 1 - \alpha_A$ reflektiert wird und der Absorber selbst Strahlung emittiert.

Daraus folgt

$$T_A^* = \left(\frac{\varepsilon_A \dot{E}_A^*}{\sigma^* A^*} \right)^{0,25} = 332 \text{ K.}$$

- c) Die optischen Eigenschaften des Glases und des Absorbers, wie Reflexion und Absorption, spielen zur Bestimmung der thermischen Nutzleistung des Sonnenkollektors eine entscheidende Rolle. Deshalb werden Energiebilanzen sowohl am Glas als auch am Absorber aufgestellt, siehe Skizze.



- Die Bilanz am Glas ergibt mit $\varepsilon_G = \alpha_{G,LW}$ und unter Berücksichtigung der langwelligen Umgebungsstrahlung ($\tau_{G,LW} = 0,08$ und $\alpha_{G,LW} = 0,92$) und der kurzwelligen Solarstrahlung ($\tau_{G,KW} = 0,9$ und $\alpha_{G,KW} = 0,10$):

$$2\varepsilon_G \dot{E}_G^* = \dot{q}_U^* A^* - \dot{q}_S^* A^* \tau_{G,KW} + \dot{q}_S^* A^* \tau_{G,KW} r_A - \dot{q}_S^* A^* \tau_{G,KW}^2 r_A + \dot{q}_U^* A^* - \dot{q}_U^* A^* \tau_{G,LW} + \dot{q}_U^* A^* \tau_{G,LW} r_A - \dot{q}_U^* A^* \tau_{G,LW}^2 r_A + \varepsilon_A \dot{E}_{A,mod}^* - \varepsilon_A \dot{E}_{A,mod}^* \tau_{G,LW} + \varepsilon_G \dot{E}_G^* r_A - \varepsilon_G \dot{E}_G^* r_A \tau_{G,LW}.$$

Mit der Glastemperatur $t_G^* = 30^\circ \text{C}$ folgt $\varepsilon_G \dot{E}_G^* = \sigma^* A^* T_A^{*4} = 5746,4 \text{ W}$. Die Umstellung der Energiebilanz nach $\varepsilon_A \dot{E}_{A,mod}^*$ ergibt sich

$$\varepsilon_A \dot{E}_{A,mod}^* = \{2\varepsilon_G \dot{E}_G^* - \dot{q}_S^* A^* + \dot{q}_S^* A^* \tau_{G,KW} - \dot{q}_S^* A^* \tau_{G,KW} r_A + \dot{q}_S^* A^* \tau_{G,KW}^2 r_A - \dot{q}_U^* A^* + \dot{q}_U^* A^* \tau_{G,LW} - \dot{q}_U^* A^* \tau_{G,LW} r_A + \dot{q}_U^* A^* \tau_{G,LW}^2 r_A - \varepsilon_G \dot{E}_G^* r_A + \varepsilon_G \dot{E}_G^* r_A \tau_{G,LW}\} / \{(1 - \tau_{G,LW})\}.$$

Daraus folgt

$$\varepsilon_A \dot{E}_{A,mod}^* = 10008,1 \text{ W}$$

und die Absorbtemperatur berechnet sich zu

$$T_{A,mod}^* = \left(\frac{\varepsilon_A \dot{E}_{A,mod}^*}{\sigma^* A^*} \right)^{0,25} = 363 \text{ K.}$$

- Aus der Bilanz am Absorber folgt

$$\dot{Q}_{Nutz,mod}^* = \dot{q}_U^* A^* \tau_{G,LW} - \dot{q}_U^* A^* \tau_{G,LW} r_A + \dot{q}_S^* A^* \tau_{G,KW} - \dot{q}_S^* A^* \tau_{G,KW} r_A + \varepsilon_G \dot{E}_G^* - \varepsilon_A \dot{E}_{A,mod}^* - \varepsilon_G \dot{E}_G^* r_A$$

und damit

$$\dot{Q}_{Nutz,mod}^* = 3293,6 \text{ W.}$$

Lösungsweg zu Übungsaufgabe 8.5: „Bestimmung des Emissionsgrades“

- a) Die Energiebilanz zwischen Probe (Index P) und Behälter (Index B) lautet unter Verwendung der Linearisierung des Strahlungsteils (s. (8-31))

$$m^* c^* \frac{dT_P^*}{d\tau^*} = \varepsilon_P \sigma^* A^* (T_B^{*4} - T_P^{*4}) = \varepsilon_P \sigma^* A^* 4 T_B^{*3} (T_B^* - T_P^*).$$

Anmerkung: Die Linearisierung des Strahlungsteils gilt mit einer genügenden Genauigkeit nur für kleine Temperaturdifferenzen zwischen den strahlungsaustauschenden Flächen. Zusätzlich verändert sich u.U. der Emissionsgrad der Probe mit der Temperatur, so dass insgesamt nur vergleichsweise geringe Temperaturdifferenzen auftreten dürfen.

Umgestellt ergibt sich

$$\frac{m^* c^* dT_P^*}{\varepsilon_P \sigma^* A^* 4 T_B^{*3} (T_B^* - T_P^*)} = d\tau^*$$

bzw.

$$\frac{dT_P^*}{(T_B^* - T_P^*)} = \frac{\varepsilon_P \sigma^* A^* 4 T_B^{*3}}{m^* c^*} d\tau^*.$$

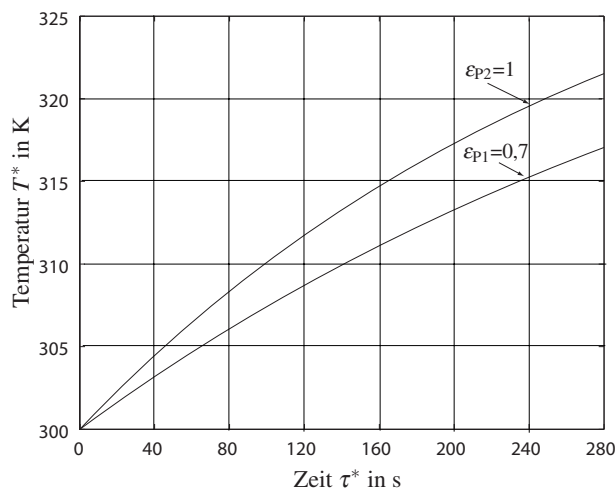
Mit dem in der Aufgabenstellung gegebenen Integral zwischen τ_0^* und τ^* bzw. T_0^* und T^* folgt

$$\ln \left(\frac{T_B^* - T_P^*}{T_B^* - T_{P0}^*} \right) = \frac{-\varepsilon_P \sigma^* A^* 4 T_B^{*3}}{m^* c^*} (\tau^* - \tau_0^*).$$

Es ergibt sich somit der Temperaturverlauf als Funktion der Zeit mit dem Parameter Emissionsgrad zu

$$T_P^*(\tau^*) = T_B^* + (T_{P0}^* - T_B^*) \exp\left(\frac{-\varepsilon_P \sigma^* A^* 4 T_B^{*3}}{m^* c^*} \tau^*\right).$$

- b) Die Auswertung der in a) berechneten Beziehung ergibt folgende grafische Darstellung für zwei Emissionsgrade $\varepsilon_{P1} < \varepsilon_{P2}$:



- c) • Bestimmungsgleichung aus a) umgestellt nach ε_P ergibt

$$\varepsilon_P = \ln \left(\frac{T_{P1}^* - T_B^*}{T_{P0}^* - T_B^*} \right) \frac{-m^* c^*}{\sigma^* A^* 4 T_B^{*3} \tau_1^*}.$$

Mit den Messwerten für τ_1^* und T_{P1}^* folgt $\varepsilon_P = 0,696$.

- Die mittlere Wandwärmestromdichte zur Zeit $\tau_1^* = 280$ s ergibt sich zu

$$\dot{q}_{Wm}^* = \varepsilon_P \sigma^* 4 T_B^{*3} (T_B^* - T_{P1}^*) = 106,8 \text{ W/m}^2.$$

Insgesamt liegt hier eine ähnliche physikalische Situation vor wie im ILLUSTRIERENDEN BEISPIEL 5.1.

9 Wärmetechnische Apparate

In diesem Kapitel sollen die Grundprinzipien der Prozessgestaltung in wärmetechnischen Apparaten erläutert werden, in denen auf vielfältige Weise die bisher behandelten Mechanismen der Wärmeübertragung auftreten. Für die Details der technischen Umsetzung sowie für Einzelheiten der Berechnung und Auslegung solcher Apparate wird jeweils auf die umfangreiche Spezialliteratur verwiesen.

9.1 Wärmeübertrager

Unter einem Wärmeübertrager¹ versteht man einen Apparat, der von zwei oder mehreren fluiden Medien durchströmt wird, von denen zumindest eines Energie in Form von Wärme an die anderen überträgt. Die Medien können dabei u. U. ihren Aggregatzustand ändern. Die Energiespeicherung durch die beteiligten Fluide kann entweder durch den Mechanismus der sensiblen Wärmespeicherung (Enthalpieänderung durch Temperaturänderung bei endlichen Wärmekapazitäten) oder den der latenten Wärmespeicherung (Enthalpieänderung durch Kondensation oder Verdampfung) erfolgen. Die Wärmeübertragung geschieht in der Regel konvektiv. Bei höheren Temperaturen spielt die Wärmeübertragung durch Strahlung häufig eine entscheidende Rolle.

9.1.1 Bauformen

Aufgrund sehr unterschiedlicher Anforderungen an die Leistungsfähigkeit und die Baugröße haben sich eine Vielzahl von Bauformen durchgesetzt, die nach verschiedenen Gesichtspunkten geordnet werden können. Eine grobe Einteilung ergibt sich wie folgt:

- Kontaktart der beteiligten Medien:

indirekte Wärmeübertrager:

Die wärmeübertragenden Medien sind durch Wände getrennt.

direkte Wärmeübertrager:

Unmittelbarer Kontakt der wärmeübertragenden Medien; in der Regel ist dies mit einer Stoffübertragung verbunden.

- Zwischengeschaltete Wärmespeicherung:

Rekuperatoren:

Die Wärmeübertragung erfolgt unmittelbar ohne zwischengeschaltete Speicherung und damit ohne Zeitverzögerung.

Regeneratoren:

Der zu übertragende Wärmestrom wird zunächst an ein Speichermaterial übertragen und dann zeitverzögert an das „Zielfluid“ abgegeben. Dieser Vorgang kann zyklisch (periodisch) ablaufen oder auch in einer kontinuierlich arbeitenden Anordnung.

¹ Siehe z. B.: Roetzel, W; Spang, B. (2002): *Berechnung von Wärmeübertragern*, in: VDI-Wärmeatlas, 9. Aufl., Ca1-Ce4, Springer-Verlag, Berlin

- Strömungsführung:

Gleichstromwärmeübertrager:

Wärmeabgebendes und wärmeaufnehmendes Fluid haben dieselbe Hauptströmungsrichtung: Da die Enthalpie des wärmeabgebenden Fluides abnimmt, ergeben sich die im Bild 9.1 gezeigten prinzipiellen Temperaturverläufe bei sensibler Wärmespeicherung bzw. die gezeigten Phasenwechsel bei latenter Wärmespeicherung.

Gegenstromwärmeübertrager:

Wärmeabgebendes und wärmeaufnehmendes Fluid haben die entgegengesetzte Hauptströmungsrichtung. Damit ergibt sich ein prinzipieller Temperaturverlauf wie in Bild 9.2 gezeigt.

Kreuzstromwärmeübertrager:

Wärmeabgebendes und wärmeaufnehmendes Fluid strömen quer zueinander. Es kommt zu Temperaturverteilungen quer zur jeweiligen Hauptströmungsrichtung, wenn die Temperatur des anderen Stromes nicht konstant ist. Diese ungleichmäßige Temperaturverteilung kann durch Vermischungsvorgänge bereits innerhalb des Wärmeübertragers ausgeglichen werden. Man spricht dann von einem einseitig oder zweiseitig mischenden Kreuzstrom.

9.1.2 Globalanalyse

Ohne Details konkreter Bauformen zu berücksichtigen, kann mit groben Anhaltswerten für einen Wärmedurchgangskoeffizienten k^* , vgl. (6-46), für Wärmeübertrager eine globale Angabe zum insgesamt übertragenen Wärmestrom \dot{Q}_{ges}^* gemacht werden:

$$\dot{Q}_{\text{ges}}^* = k^* A^* \Delta_{\text{ln}} T^* \quad (9-1)$$

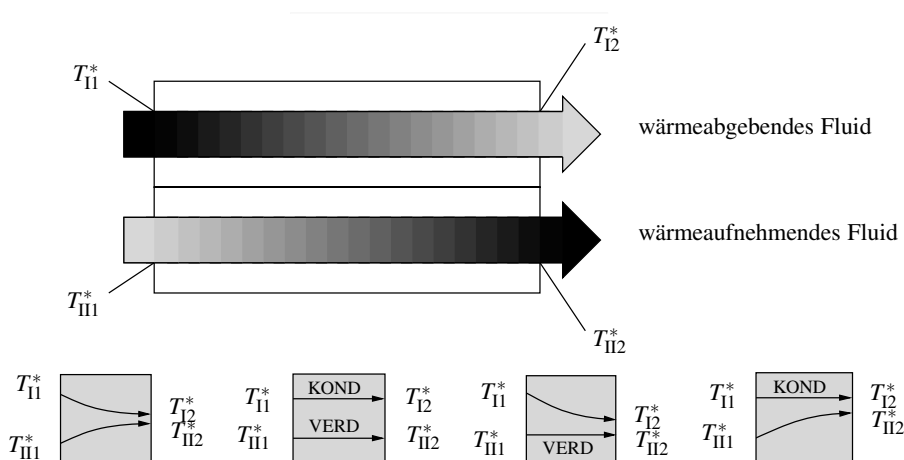


Bild 9.1: Gleichstromwärmeübertrager: prinzipieller Temperaturverlauf

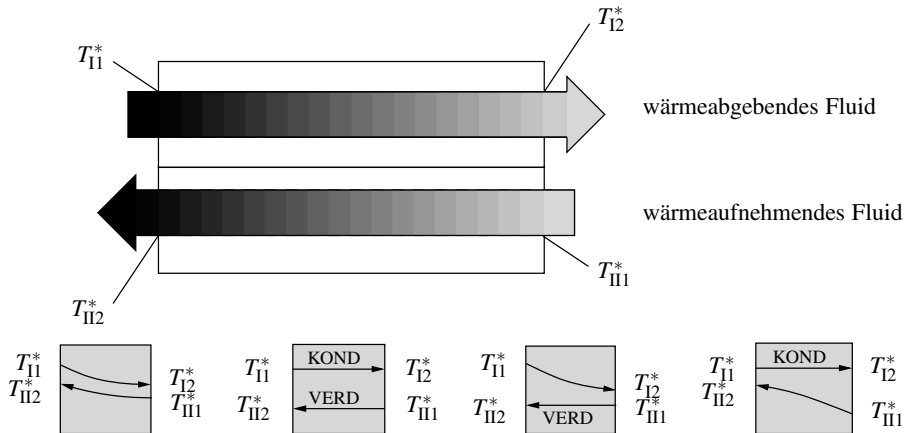


Bild 9.2: Gegenstromwärmeübertrager: prinzipieller Temperaturverlauf

Dabei sind

k^* : der als konstant unterstellte Wärmedurchgangskoeffizient der speziellen Wärmeübertrager-Konfiguration; Zahlenbeispiele sind in Tab. 9.1 enthalten.

A^* : die gesamte, am Wärmeübergang beteiligte Übertragungsfläche

$\Delta_{\ln} T^*$:
die logarithmische mittlere Temperaturdifferenz

$$\Delta_{\ln} T^* = \frac{\Delta T_2^* - \Delta T_1^*}{\ln(\Delta T_2^* / \Delta T_1^*)}$$

mit den Temperaturunterschieden ΔT_1^* und ΔT_2^* der Fluide an den jeweiligen Ein- bzw. Austritten. Zum Beispiel gilt für Gleichstromwärmeübertrager $\Delta T_1^* = T_{I1}^* - T_{II1}^*$ und $\Delta T_2^* = T_{I2}^* - T_{II2}^*$ gemäß den prinzipiellen Temperaturverläufen in Bild 9.1.

Die logarithmische (und nicht die arithmetische) Temperaturdifferenz entsteht aufgrund des exponentiellen Temperaturverlaufes in Hauptströmungsrichtung auf beiden Seiten der Wärmeübertragungsflächen. Der Zahlenwert des Wärmedurchgangskoeffizienten ist wesentlich durch die beteiligten Fluide bestimmt. Tab. 9.1 gibt einige Anhaltswerte.

9.1.3 Verschmutzungen (Fouling)

Es handelt sich um ein bekanntes, aber leider oftmals ungelöstes Problem bei sehr vielen Wärmeübertragern. Verschmutzungen können dabei je nach Bauart und beteiligten Fluiden durch Ablagerungen von Kesselstein, Ruß, Kohlestaub, Öl, Eis, Salz, usw. entstehen. Es handelt sich zwar häufig nur um sehr dünne Schichten, wegen der geringen Wärmeleitfähigkeit λ^* vieler dieser Stoffe können dadurch aber trotzdem erhebliche Verschlechterungen im Wärmeübergang auftreten. In Bild 9.3 ist die Abhängigkeit des mittleren Wärmedurchgangskoeffizienten ($k^* =$

Tabelle 9.1: Zahlenwerte des Wärmedurchgangskoeffizienten k^*

Daten aus: Incropera, F. P.; DeWitt, D. P. (1996): *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons, New York

Fluid-Paarung	k^* in $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$
Wasser gegen Luft (mit Berippung)	25...50
Wasser gegen Öl	110...350
Wasser gegen Alkohol (Kondensation)	250...700
Wasser gegen Ammoniak (Kondensation)	800...1400
Wasser gegen Wasser	850...1700
Wasser gegen Wasserdampf (Kondensation)	1000...6000

$\dot{Q}_{\text{ges}}^*/(A^*\Delta_{\ln}T^*)$) eines Rohrbündel-Wärmeübertragers in Abhängigkeit von der Verschmutzungsschichtdicke aufgetragen. In diesem Fall ist der Wärmedurchgang bereits bei einer Schichtdicke von 0,2 mm und sonst gleichen Verhältnissen auf die Hälfte zurückgegangen.

9.2 Kondensatoren

Unter einem Kondensator¹ versteht man einen wärmetechnischen Apparat oder das Bauteil einer wärmetechnischen Anlage, in dem der Phasenwechsel gasförmig \rightarrow flüssig (Kondensation) stattfindet. Das Ziel ist entweder die Gewinnung des Kondensates in verfahrenstechnischen Prozessen oder die Gewinnung der Kondensationsenthalpie in energietechnischen Anwendungen.

Als grundsätzliche Ausführungsformen ist zwischen Kondensatoren mit indirektem Kontakt zwischen dem Dampf und dem Kühlmittel (Trennung durch undurchlässige Wände) und solchen mit direktem Kontakt (Einspritzkondensatoren) zu unterscheiden.

Das physikalische Prinzip besteht einheitlich darin, an bestimmten Stellen im Kondensator die Sättigungstemperatur des zu kondensierenden Dampfes zu unterschreiten. Diese ist durch

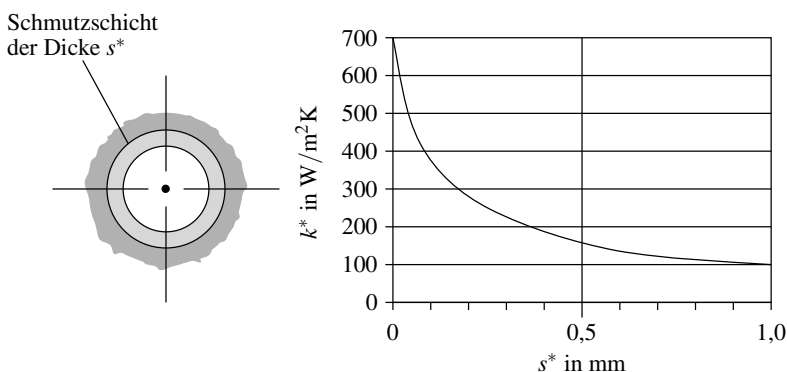


Bild 9.3: Typische Abhängigkeit des Wärmedurchgangskoeffizienten k^* von der Schmutzschichtdicke s^* (Rohrbündelwärmeübertrager)

¹ Siehe z.B.: Kakac, S. (1991): *Boilers, Evaporators and Condensers*, John Wiley & Sons, New York

die entsprechende Dampfdruckkurve als Funktion des Druckes gegeben, wobei zu beachten ist, dass bei Gemischen der jeweilige Partialdruck im Gemisch maßgeblich ist. Bei der überwiegenden Anzahl von Kondensatorbauarten liegt ein indirekter Kontakt zwischen dem Dampf und dem Kühlmittel vor, so dass die Unterschreitung der Sättigungstemperatur an der dampfseitigen Wandoberfläche vorliegen muss. Bei stationärem Betrieb ist dann durch die Wand hindurch genau die an der Oberfläche freiwerdende Kondensationsenthalpie („negative“ Verdampfungsenthalpie) abzuführen sowie die durch eine eventuell vorliegende Unterkühlung des Kondensates abgegebene sensible Wärme des Kondensates.¹

Bei einem direkten Dampf/Kühlmittel-Kontakt, wie er bei Einspritzkondensatoren vorliegt, erfolgt die Kondensation unmittelbar an der Oberfläche der Kühlmittel-Sprayteilchen. Es handelt sich zwar um eine sehr effektive Form der Kondensation (keine Wärmewiderstände in Trennwänden), jedoch mischt sich das Kühlmittel zwangsläufig mit dem Kondensat, was in vielen Anwendungsfällen nicht akzeptabel ist.

9.2.1 Bauformen

Eine häufig gewählte Bauform ist diejenige eines sog. *Rohrbündel-Kondensators*, s. Bild 9.4. Er wird z. B. eingesetzt, wenn hohe Wärmeströme abzuführen sind, wie etwa nach einer Turbine in einem Dampfkraftwerk. Rohrbündel-Kondensatoren bestehen aus kompakt angeordneten Rohrbündeln (Innenrohr-Bündeln), die einerseits durchströmt sind und zum anderen umströmt werden. Dazu befinden sich die Innenrohre in einem alle umschließenden Mantel, der Ein- und Ausflusstutzen besitzt, wie dies in Bild 9.4 gezeigt ist.

Ohne weitere Einbauten, sog. Trennwänden in den Hauben, durchströmt das Fluid $F1$ die Innenrohre einmal, bei entsprechender Trennwandanordnung kann ein mehrgängiges Durchströmen (2, 4, 8, ...) erreicht werden. Es wird damit eine Vergrößerung der Geschwindigkeit in den Rohren sowie eine Verlängerung der Strömungswege erreicht. Die Größe des Kondensators

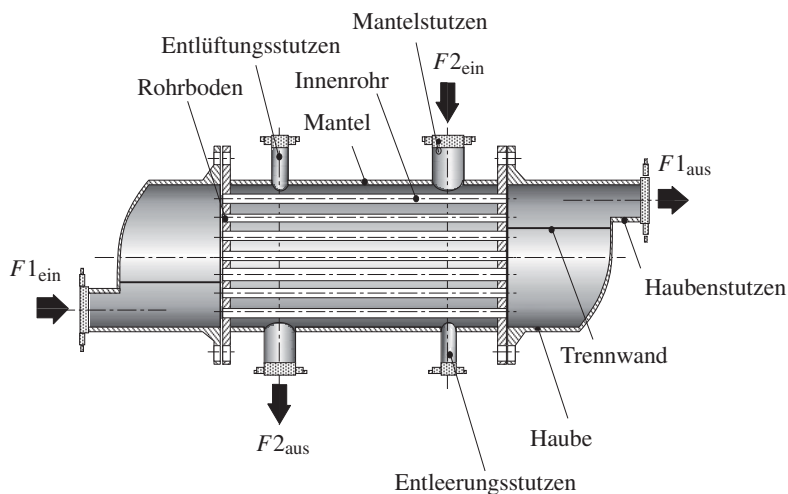


Bild 9.4: Wesentliche Bauelemente eines Rohrbündelkondensators

¹ Dabei wird eine mögliche axiale Wärmeleitung in der Wand vernachlässigt.

sowie die Anzahl der Innenrohre ist dem konkreten Einsatzfall anzupassen. In großen Kraftwerksblöcken sind Kondensatoren bis zu 3 m Manteldurchmesser mit bis zu 6000 Innenrohren installiert.

Da der Dampfvolumenstrom zumindest zu Beginn der Kondensation noch relativ groß ist, wird man diesen in der Regel durch den Mantelraum leiten (Fluid F2 in der Skizze), obwohl prinzipiell die Kondensation auch in den Rohren erfolgen kann. Die häufigste Anordnung ist eine liegende Konstruktion, aber auch senkrechte Bauformen sind möglich (z. B. angewandt, wenn mit der Verdampfungsenthalpie des um die Rohre kondensierenden Dampfes ein Fallfilm eines Produktes in den Rohren verdampft werden soll).

Wenn der zu kondensierende Dampf Inertgas-Anteile (nicht-kondensierbare Anteile) enthält, muss ein separater Inertgasstutzen vorgesehen werden, über den dann das nicht-kondensierende „Fremdgas“ abgelassen oder abgesaugt werden kann. Der physikalische Mechanismus, der zu einer erheblichen Verschlechterung des Wärmeüberganges schon bei geringen Inertgaskonzentrationen führt, wurde im Zusammenhang mit Bild 7.4 in Kap. 7.3.1 erläutert.

Zur Regelung der Kondensatorleistung bei gegebener Kondensatorfläche und Kühlmittel(eintritts)temperatur kann man sich zunutze machen, dass die mittlere Temperaturdifferenz zwischen der Kondensationstemperatur (Sättigungstemperatur des Dampfes) und der Kühlmitteltemperatur maßgeblich für den Energietransport zwischen dem kondensierenden Dampf und dem Kühlmittel ist, da sich der Wärmedurchgang proportional zu dieser Temperaturdifferenz verhält. Diese Temperaturdifferenz kann über das Einstellen einer gewünschten Kondensationstemperatur (in gewissen Grenzen) gesteuert werden, indem entweder der Druck (Zusammenhang zur Temperatur über die Dampfdruckkurve) oder der Inertgasanteil gezielt verändert werden.

9.3 Verdampfer

Unter einem Verdampfer¹ (als Oberbegriff) versteht man eine Apparatekomponente, einen Apparat oder eine Anlage zur teilweisen oder vollständigen Verdampfung eines Reinstoffes, einer Gemischkomponente oder eines Gemisches. Das Ziel ist entweder die stoffliche Trennung, besonders bei Gemischen (verfahrenstechnische Prozesse), oder die Übertragung großer Wärmemengen auf ein Arbeitsfluid (Wärmeträger). Dies gilt z. B. für Dampfkraftprozesse oder bei der Bereitstellung von Prozesswärme.

Das physikalische Prinzip besteht einheitlich darin, durch eine gezielte Wärmezufuhr genügend Energie bereitzustellen, um die Verdampfungsenthalpie für den Phasenwechsel flüssig → gasförmig aufzubringen. Der Phasenwechsel kann dabei entweder unmittelbar an der Übertragungsfläche erfolgen, wie beim Blasensieden und Filmsieden, oder an der Oberfläche einer beheizten Flüssigkeit wie beim stillen Sieden (zu allen drei Siedeformen s. Kap. 7.4.1).

Zusätzlich zur Verdampfungsenthalpie muss auch noch die Energie zur Erwärmung des Fluides auf Verdampfungstemperatur und ggf. die für eine Überhitzung des Dampfes benötigte Energie zugeführt werden.

Bei vielen (unbefeuerten) Verdampfern wird kondensierender Dampf (oft Wasserdampf) zur Wärmezufuhr verwendet. Die Regelung der Verdampferleistung (Verdampfungs Massenstrom) kann dann sehr einfach über den Druck des zur Heizung eingesetzten kondensierenden Dampfes erfolgen. Mit diesem Druck steuert man die Kondensationstemperatur (Zusammenhang über die Dampfdruckkurve) des Dampfes und damit die treibende Temperaturdifferenz für den Wärmedurchgang.

¹ Siehe z. B.: Kakac, S. (1991): *Boilers, Evaporators and Condensers*, John Wiley & Sons, New York

Befeuerte Verdampfer, die z. B. als Dampferzeuger der Bereitstellung von Prozessdampf oder in Dampfkraftanlagen als Teilkomponenten der Dampferzeugung dienen, arbeiten häufig mit Wasser als Arbeitsfluid. Die zwei grundsätzlich verschiedenen Anordnungen zur Verdampfung sind dabei:

- *Flammrohr-Rauchrohrkessel:*

In einem zusätzlich eingebrachten Flammrohr findet eine Verbrennung statt. Die heißen Rauchgase werden anschließend durch die Rohre geführt, die Verdampfung erfolgt in einem Wasserreservoir, das die Rohre umgibt. Diese Ausführung ist bis zu Drücken von 32 bar zulässig.

- *Wasserrohrkessel:*

Das zu verdampfende Wasser wird in den Rohren geführt. Die Rohre werden von außen befeuert, wobei der Wärmeübergang an die Rohrwand konvektiv, aber zu einem erheblichen Teil auch durch Strahlung erfolgt. Je nach Ausführungsform sind hierbei Drücke bis in die Nähe des kritischen Druckes (220,64 bar für Wasser) möglich. Diese hohen Drücke werden im Dampfkraftprozess benötigt. Bei der Erzeugung reiner Prozesswärme hingegen richtet sich der Druck nach der nötigen Prozesstemperatur.

9.3.1 Bauformen

Wie bei den Kondensatoren ist eine häufig gewählte Bauform diejenige von Rohrbündel-Verdampfern (auch: Rohrkessel-Verdampfer). Sie werden häufig zur Dampferzeugung in industriellen oder energietechnischen Anwendungsfällen eingesetzt. Die zuvor eingeführte Unterscheidung nach *Rauchrohr-* und *Wasserrohrkesseln* beschreibt die grundsätzlich unterschiedlichen Ausführungsformen. Darüber hinaus ist besonders bei Wasserrohrkesseln (meist in vertikaler Anordnung) danach zu unterscheiden, ob eine *Umlauf-* oder eine *Durchlaufanordnung* realisiert ist. In der Umlaufanordnung verdampft nur ein Teil des zugeführten Wassers (Speisewasser), so dass das Dampf-Wasser-Gemisch getrennt werden muss, bevor das Wasser wieder in den Verdampfungsprozeß zurückgeführt wird. Bei der Durchlaufanordnung entfällt dies, weil das Speisewasser vollständig verdampft wird. Eine weitere Unterscheidung ergibt sich bzgl. der Durchströmung der (Siede-)Rohre. Diese kann im *Naturumlauf* unter Ausnutzung des Dichteunterschiedes zwischen dem Wasser in den beheizten und den unbeheizten Rohren erfolgen, oder aber im *Zwangsumlauf* unter Einsatz einer Umwälzpumpe.

Die Nomenklatur im Zusammenhang mit Verdampfern ist sehr uneinheitlich und besonders im englischen Sprachraum deshalb oftmals verwirrend. Dies besonders, weil dort die Begriffe zur Prozessbeschreibung, nämlich *vaporization*, *evaporation* und *vapor generation* synonym verwendet werden, während die Begriffe zur Kennzeichnung spezieller Wärmeübertrager *vaporizer*, *evaporator* und *vapor generator* jeweils spezifischen Anwendungen vorbehalten sind. Auch im deutschen Sprachraum werden die Bezeichnungen *Verdampfer*, *Dampferzeuger* und *Kessel* nicht immer einheitlich verwendet.

9.4 Wärmespeicher

Unter einem Wärmespeicher¹ versteht man einen technischen Apparat zur Speicherung von Energie, die in Form von Wärme in den Speicher fließen kann und diesem auch wieder in Form

¹ Siehe z. B.: Kübler, R.; Fisch, N. (1998): *Wärmespeicher*: ein Informationspaket, TÜV-Verlag, Köln

von Wärme entnommen werden kann. Diese Formulierung klingt etwas umständlich, trägt aber dem Umstand Rechnung, dass Wärme als Prozessgröße prinzipiell nicht gespeichert werden kann, sondern nur Zustandsänderungen in einem System bewirkt (die im konkreten Fall dann der Speicherung von Energie dienen).

Auf diese Weise wird ein verfügbarer Energievorrat geschaffen, der mit dem (problematischen) Begriff der „Wärmespeicherung“ üblicherweise wie folgt charakterisiert wird.

- *Sensible Wärmespeicherung:*
Temperaturänderung des Speichermediums,
- *Latente Wärmespeicherung:*
Phasenwechsel des Speichermediums (z. B.: fest/flüssig),
- *Thermochemische Wärmespeicherung:*
Chemische Reaktionen des Speichermediums.

Bezüglich der Speicherdauer unterscheidet man nach den Kategorien (Speicherzyklus $\hat{=}$ Beladen/Speichern/Entladen):

- *Kurzzeitspeicher:*
Speicherzyklen im Bereich von Stunden oder wenigen Tagen
- *Langzeitspeicher:*
Speicherzyklen im Bereich von Wochen bis zu Jahren

Bezüglich der Temperaturbereiche unterscheidet man nach den Kategorien ($t_{\text{Sp}}^* \hat{=}$ Speichertemperatur):

- *Niedertemperaturspeicher:*
 $t_{\text{Sp}}^* < 100^\circ\text{C}$
- *Mitteltemperaturspeicher:*
 $100^\circ\text{C} < t_{\text{Sp}}^* < 500^\circ\text{C}$
- *Hochtemperaturspeicher:*
 $t_{\text{Sp}}^* > 500^\circ\text{C}$

Für viele thermische Energieanlagen, z.B. thermische Solaranlagen zur Heiz- und Brauchwassererwärmung, stellt der Wärmespeicher eine entscheidende Anlagenkomponente dar. Häufig begrenzt die nur unzureichende Speicherkapazität einer thermischen Anlage ihre Einsatzmöglichkeiten.

9.4.1 Auswahl- und Auslegungskriterien

Die wichtigsten Kriterien für die Auswahl und die Auslegung von Wärmespeichern sind:

- die *Netto-Speicherkapazität*, definiert als die maximale Energie, die während eines Speicherzyklus (Beladen/Speichern/Entladen) vom Speicher an die Energieanlage abgegeben werden kann. Die Brutto-Speicherkapazität berücksichtigt darüber hinaus noch die Verluste des Speichers an die Umgebung. Zum Beispiel gilt für einen sensiblen Wärmespeicher mit jeweils homogener Temperaturverteilung (keine Temperaturschichtungen) zwischen der minimalen Temperatur T_0^* und der maximalen Temperatur $T_1^* = T_0^* + \Delta T^*$ (ΔT^* ist die sog. Temperaturspreizung) für die Brutto-Speicherkapazität Q_{\max}^* in kJ:

$$Q_{\max}^* = m^* c^* \Delta T^* \quad (9-2)$$

Dabei sind m^* die Speichermasse und c^* die als konstant unterstellte spezifische Wärmekapazität. Für eine klare Trennung zwischen Netto- und Brutto-Speicherkapazität muss dabei unterstellt werden, dass Verluste nur in der Speicherphase auftreten, nicht aber während des Be- und Entladevorganges.

- die *spezifische Energiedichte*, definiert als die auf die Masse (dann gilt q_M^*) oder auf das Volumen (dann gilt q_V^*) bezogene Speicherkapazität, jeweils in kJ/kg bzw. kJ/m³.

Für die sensible Wärmespeicherung gilt damit wiederum (mit $m^* = \rho^* V^*$, ρ^* : Dichte, V^* : Volumen):

$$q_M^* = c^* \Delta T^* \quad \text{und} \quad q_V^* = \rho^* c^* \Delta T^* \quad (9-3)$$

als spezifische (Brutto-) Energiedichte.

- die *Be- und Entladeleistung*, definiert als der momentane Wärmestrom $\dot{Q}^* = dQ^*/d\tau^*$ der Beladung bzw. der Entladung. Beide Wärmeströme sind in ihrer aktiven Phase (Beladen bzw. Entladen) nicht konstant, sondern zeigen ein jeweils anlagenspezifisches Zeitprofil $\dot{Q}^*(\tau^*)$. In der Regel ist $\dot{Q}^*(\tau^*)$ sowohl für die Beladung als auch für die Entladung eine mit der Zeit monoton fallende Funktion.
- die *Speicherdauer*, definiert als die Dauer eines Speicherzyklus, bestehend aus Beladen, Speichern und Entladen.
- der *Nutzungsgrad* η_S , definiert als Verhältnis der während eines Speicherzyklus in Form von Wärme abgeführten und zugeführten Energie, also als

$$\eta_S \equiv \frac{Q_{\text{ab}}^*}{Q_{\text{zu}}^*} = \frac{Q_{\text{zu}}^* - Q_{\text{Verl}}^*}{Q_{\text{zu}}^*} = 1 - \frac{Q_{\text{Verl}}^*}{Q_{\text{zu}}^*} \quad (9-4)$$

Mit den thermischen Speicherverlusten Q_{Verl}^* sind die Abweichungen von einer optimalen Betriebsweise unmittelbar als Abweichungen vom Zahlenwert $\eta_S = 1$ erkennbar. Für den Betrieb des Speichers wird zusätzlich ein *Ladegrad* $\eta_L \equiv Q^*/Q_{\max}^*$ definiert, der angibt, wieviel der Speicherkapazität jeweils genutzt wird.

- *Ökonomische Kennwerte*, wie Investitions- und Wartungskosten sowie Lebensdauer und Amortisationszeiten.

Alle genannten Kriterien werden von keinem technisch realisierbaren Wärmespeicher gleichzeitig optimal erfüllt, so dass stets eine anforderungs- und anlagenspezifische Auswahl getroffen werden muss.

Aus physikalisch/technischer Sicht spielen dabei zwei Gesichtspunkte eine entscheidende Rolle:

1. die Auswahl des Speichermaterials und damit die Entscheidung über die Speicherart (sensibel/latent/thermochemisch),
2. der technische Aufbau des Speichers, der entscheidend den Wärmeübergang während der Be- und Entladephase beeinflusst und damit die Be- und Entladeleistungs-Zeitprofile sowie den Lade- und Nutzungsgrad bestimmt.

9.4.2 Bauformen und Speichermedien

Typische Speichermedien und Speicheraufbauten sind:

- *Für die sensible Wärmespeicherung:*

Flüssigkeiten, vorzugsweise Wasser und Feststoffe oftmals als Schüttungen (z. B. Kieselschüttungen). Die Wärmeübertragung bei der Be- und Entladung erfolgt bei Flüssigkeiten durch getrennte Kreisläufe, bei Feststoffschüttungen i. A. durch Direktkontakt zwischen dem durchströmenden Fluid (vorzugsweise Luft oder Wasser) und dem Speichermaterial. Die Baugrößen reichen dabei von kleinen Tanks in privat genutzten Solaranlagen bis zu Aquifer-Speichern von mehreren tausend Kubikmetern in Nahwärme-Versorgungsnetzen. Noch größere Dimensionen treten bei geothermischen Untergrundspeichern auf.

- *Für die latente Wärmespeicherung:*

Paraffine, anorganische Salzhydrate und Eis. Die Wirkungsweise beruht hauptsächlich auf der Bindung und Freisetzung der Phasenänderungsenergie beim Schmelzen bzw. Erstarren des Speichermaterials. Während dies (für einen Reinstoff) bei konstanter Temperatur geschieht, wird häufig trotzdem eine gewisse Temperaturspreizung ΔT^* realisiert, weil eine Unterkühlung des Feststoffes bzw. eine Überhitzung der Flüssigkeit (jeweils bezogen auf die Schmelztemperatur) vorgesehen wird.

Da die häufig verwendeten Latentwärmespeichermaterialien sehr niedrige Wärmeleitfähigkeiten besitzen, müssen im Wärmespeicher große Übertragungsflächen vorgesehen werden. Dies kann z.B. durch eine enge Anordnung von Rohrbündeln (gefüllt mit Latentwärmespeichermaterial) erreicht werden. Während in der festen Phase ein Wärmeübergang nur durch Wärmeleitung im Speichermaterial möglich ist, wird dieser in der flüssigen (oder teilweise flüssigen) Phase durch natürliche Konvektionsströmungen unterstützt und oftmals erheblich verbessert.

- *Für die thermochemische Wärmespeicherung:*

Salzhydrate, Säuren und Metalloxide. Die Wirkungsweise beruht hauptsächlich auf der Bindung und Freisetzung chemischer Reaktionsenergie bei einer endothermen chemischen Reaktion bzw. der zugehörigen exothermen Rückreaktion. Dies können z. B. Hydratisierungs- und Oxidationsreaktionen oder die Zersetzung und Kombination von Salzen sein. Ein typisches Beispiel sind die Ad- und Desorptionsvorgänge von Wasser in Zeolith (einem Aluminium-Silizium-Oxid). Ein entscheidender Vorteil ist, dass die Energie bei entsprechender Ausführung des Speichers bei Umgebungstemperatur gespeichert werden kann und damit keine thermischen Verluste auftreten.

Wegen des naturgemäß komplexen Aufbaus solcher Anlagen und dem vergleichsweise hohen Preis der Speichermaterialien haben sich solche Speicher jedoch nur für Spezialanwendungen durchsetzen können.

Tabelle 9.2: Kenngrößen typischer Wärmespeichermaterialien bei einer Temperaturspreizung von $\Delta T^* = 20\text{ K}$

Daten aus: Khartchenko, N. V. (1995): *Thermochemische Solaranlagen*, Springer-Verlag, Berlin / Kap. 6: Energiespeicher

	Sensibel		Latent		Thermochem.
	Wasser	Gestein	Glaubersalz	Paraffin	NH ₄ Br
ρ^* in kg/m ³	1000	1600	1330	770	2900
c_p^* in m ² /s ² K	4190	840	3300	2500	—
λ^* in W/mK	0,6	0,45	1,85	0,5	—
Δh^* in kJ/kg	334	—	250	210	1910
q_M^* in kJ/kg	84	17	317	259	1910
q_V^* in MJ/m ³	84	27	422	199	5540

Tab. 9.2 gibt die wichtigen Kenngrößen von Speichermaterialien aus den drei Kategorien der sensiblen, latenten und thermochemischen Wärmespeicherung an. Die Angaben zu den spezifischen Energiedichten beziehen sich dabei auf eine Temperaturspreizung von $\Delta T^* = 20\text{ K}$. Neben der Dichte ρ^* , der spez. Wärmekapazität c_p^* , der Wärmeleitfähigkeit λ^* , der Schmelz- bzw. Reaktionsenthalpie Δh^* sind auch die spez. Energiedichten q_M^* und q_V^* gemäß (9-3) gezeigt.

Als entscheidende Aussage ist dieser Tabelle zu entnehmen, dass die spezifischen Energiedichten von der sensiblen über die latente zur thermochemischen Energiespeicherung jeweils um einen Faktor 5 ... 10 zunehmen, also fast jeweils um eine Größenordnung ansteigen. Dies wirkt sich unmittelbar auf die Baugrößen (bei vergleichbaren Speicherkapazitäten) aus.

Beim Einsatz von Latentwärmespeichermaterialien wird häufig der zusätzliche Effekt der sensiblen Wärmespeicherung durch Vorgabe einer gewissen Temperaturspreizung genutzt. Oftmals macht es Sinn, gezielt verschiedene Materialien zu kombinieren, um die verschiedenen Effekte der Wärmespeicherung zusammen zu nutzen. Man spricht dann von *Hybridwärmespeichern*. Ein typisches Beispiel ist die Verwendung von Salzen (als Latentwärmespeichermaterial) in den Poren einer keramischen Matrix (als Material für die sensible Wärmespeicherung).

Häufig wird durch den gezielten Einsatz von Zusatzstoffen (sog. Inhibitoren) bei Latentwärmespeichermaterialien versucht, die Unterkühlung des Materials zu verhindern. Diese Unterkühlung ist ein sog. metastabiler Zustand, bei dem das Material unterhalb der eigentlichen Schmelz- bzw. Erstarrungstemperatur in flüssiger Form vorliegt. Erst wenn der Kristallisations- (Erstarrungs-) Vorgang durch einen entsprechenden Auslösemechanismus in Gang gesetzt wird, kommt es zum Phasenwechsel mit Energiefreisetzung und als Folge davon zur Materialerwärmung.

Neuere Entwicklungen versuchen, diese Unterkühlung nicht zu vermeiden, sondern gezielt zu nutzen, um damit die als latente Wärme vorhandene Energie auf dem Temperaturniveau der Umgebung ohne thermische Verluste zu speichern. Durch geeignete Auslösemechanismen kann der Phasenwechsel dann bei Bedarf ausgelöst werden.

ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 9.1: Wärmerohr

Das sog. *Wärmerohr* (engl.: heat pipe) ist äußerlich ein unscheinbares beidseitig geschlossenes Rohr. Es ermöglicht wegen seines besonderen Aufbaus im Inneren einen höchst effektiven Energietransport zwischen seinen beiden Enden und wirkt deshalb wie ein Stab mit einer ungewöhnlich großen Wärmeleitfähigkeit. Dieses Rohr stellt deshalb einen hochwirksamen Wärmeübertrager zwischen zwei

Fluiden unterschiedlicher Temperatur dar, wenn es mit einem Ende in ein warmes und mit dem anderen Ende in ein kaltes Fluid eintaucht. Was geschieht nun im Innern eines solchen Wärmerohres?

Dies soll zunächst beschrieben und anschließend anhand von Bild 9.5 erläutert werden. Das Wärmerohr ist mit einem Arbeitsfluid so gefüllt, dass dieses gleichzeitig in flüssiger und in gasförmiger Phase vorliegt. Das Wärmerohr nimmt auf einer Seite einen Wärmestrom aus einem Fluid 1 auf, indem Arbeitsfluid im Rohr verdampft, und gibt diesen Wärmestrom auf der anderen Seite an ein Fluid 2 wieder ab, indem das Arbeitsfluid dort kondensiert. Das Arbeitsfluid zirkuliert im Inneren des Wärmerohres ohne Mitwirkung einer Pumpe.

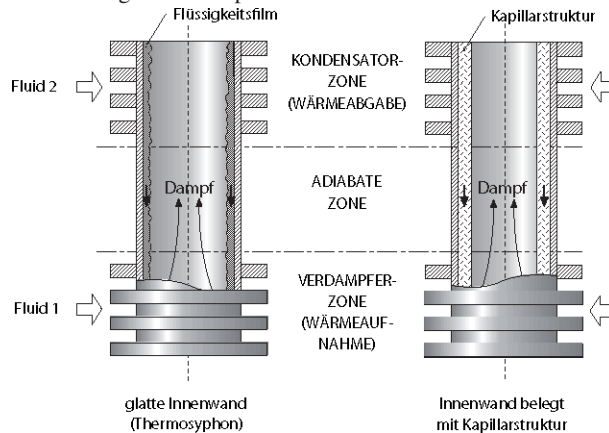


Bild 9.5: Wärmerohr – Bauformen

Im Wärmerohr macht man sich die Physik des Phasenwechsels flüssig \leftrightarrow gasförmig zunutze, der stets mit hohen spezifischen Energieumsätzen verbunden ist (Aufnahme bzw. Freisetzung der Verdampfungsenthalpie des eingesetzten Arbeitsfluides). Wegen der geringen Temperaturdifferenzen, die dabei insgesamt auftreten, weisen Wärmerohre stets sehr hohe Werte eines *Wärmedurchgangskoeffizienten* auf, wenn dieser analog zum Wärmedurchgangskoeffizienten zwischen zwei Fluiden mit der Temperaturdifferenz ΔT^* , die durch eine Wand getrennt sind, definiert wird (vgl. Kap. 6.6).

Mit Blick auf den Zirkulationsmechanismus des Arbeitsfluides im Wärmerohr sind zwei verschiedene Bauformen zu unterscheiden, die in Bild 9.5 gezeigt sind.

- Zirkulation durch Schwerkrafteinwirkung: Hierbei muss die Kondensatorseite des Wärmerohres stets oberhalb der Verdampferseite liegen. Das flüssige Arbeitsmittel fließt dann in Form eines Wandfilmes in die Verdampferzone zurück, während das gasförmige Arbeitsmittel im Gegenstrom in Richtung Kondensator strömt. Diese Bauform nennt man *Thermosyphon* (gelegentlich auch *Gravitations-Wärmerohr*).
- Zirkulation durch Kapillarkraft in einer wandnahen porösen Schicht (engl.: wick): Hierbei ist die Innenwand des Wärmerohres mit einem porösen Material belegt, in dem sich das flüssige Arbeitsmittel von der Kondensator- zur Verdampferseite bewegt. Die treibende Kraft hierfür ist eine Druckdifferenz im porösen Material längs der Rohrinne. Diese Druckdifferenz entsteht, weil die Druckverhältnisse in den Kapillaren auf der Verdampfer- und auf der Kondensatorseite unterschiedlich sind. Unterschiedliche Krümmungen der Flüssigkeitsoberfläche in den Kapillaren führen zu unterschiedlichen Kapillardrücken auf beiden Seiten des Wärmerohres und damit zu der treibenden Kapillardruckdifferenz. Diese Bauform nennt man *Kapillar-Wärmerohr*.

Beiden Bauformen gemeinsam ist die grundsätzliche Aufteilung in drei Zonen: Verdampferzone, adiabate Zone und Kondensatorzone. Zur Verbesserung des Wärmeüberganges zwischen dem wärmeabgebenden bzw. wärmeaufnehmenden Fluid und dem Wärmerohr werden auf der Verdampfer- und

Kondensatorseite häufig Rippen angebracht, wie dies in der Skizze angedeutet ist. Beide Bauformen können auch unter einem Winkel gegenüber der Vertikalen betrieben werden. Beim Thermosyphon muss dieser Winkel stets kleiner als 90° sein, beim Kapillar-Wärmerohr unterliegt er keinen Einschränkungen.

Als Kapillarstruktur für den Flüssigkeitsrückfluss kommen an die Innenwand gepresste Gewebe (z. B. Drahtnetze), in die Rohrwand gefräste Rückflusskanäle oder auch im Rohrrinneren entsprechend angeordnete Kapillarmaterialien zum Einsatz.

Wärmerohre können je nach verwendetem Arbeitsfluid in sehr unterschiedlichen Temperaturbereichen eingesetzt werden, wie Tab. 9.3 zeigt. Für ein bestimmtes Arbeitsfluid ergibt sich aufgrund der generellen Wirkungsweise von Wärmerohren jeweils ein bestimmter Temperaturbereich für die Anwendungen. Die Verhältnisse im Inneren des Wärmerohres werden dabei entscheidend durch die jeweilige Dampfdruckkurve des Arbeitsfluides bestimmt. Diese gibt als Funktion $p_S^*(T_S^*)$ die jeweils zugehörigen Werte von Druck und Temperatur im Zweiphasen-Gleichgewicht Flüssigkeit/Dampf an. Ein höheres Temperaturniveau führt dabei stets zu höheren Drücken im Wärmerohr. Die bei einem bestimmten Temperaturniveau maximal erreichbaren Wärmeströme \dot{Q}^* durch das Wärmerohr sind durch eine Reihe unterschiedlicher Effekte im Inneren des Wärmerohres begrenzt. Diese Effekte beschränken hauptsächlich den zirkulierenden Massenstrom und damit über den Zusammenhang $\dot{Q}^* = \Delta h_V^* \dot{m}^*$ den übertragenen Wärmestrom. Dabei ist Δh_V^* die spezifische Verdampfungsenthalpie in kJ/kg und \dot{m}^* der zirkulierende Massenstrom in kg/s.

Eine aktuelle Entwicklung ist der Einsatz von Miniatur-Wärmerohren zur Kühlung elektronischer Bauteile z.B. in Laptops. Eine detaillierte Beschreibung von Wärmerohren findet man in: Faghri, A. (1995): *Heat Pipe Science and Technology*, Taylor and Francis, Philadelphia, sowie Dunn, P.D.; Raey, D.A. (1994): *Heat Pipes*, 4th Edition, Pergamon Press, New York.

Tabelle 9.3: Wärmerohr-Arbeitsfluide

Arbeitsfluid	Siedetemperatur bei $p^* = 1 \text{ bar}$ in $^\circ\text{C}$	Anwendungsbereich in $^\circ\text{C}$
Stickstoff	–197	–203 ... –160
Ammoniak	–33	–60 ... 100
Methanol	64	10 ... 130
Wasser	100	30 ... 200
Quecksilber	361	250 ... 650
Natrium	892	600 ... 1200
Silber	2212	1800 ... 2300

10 Messung von Temperaturen und Wärmeströmen

Im Fachgebiet der Wärmeübertragung werden die beiden folgenden zentralen Fragen behandelt:

- Welche Wärmeströme treten als Folge eines bestimmten Temperaturfeldes bzw. zwischen zwei Körpern unterschiedlicher Temperatur auf?
- Welche Temperaturfelder bzw. Oberflächentemperaturen stellen sich als Folge bestimmter Wärmeströme ein?

Damit kommt aus experimenteller Sicht der Messung von *Temperaturen* und *Wärmeströmen* eine entscheidende Bedeutung zu. Wie sich zeigen wird, werden Wärmestrommessungen ihrerseits wiederum auf Temperaturmessungen zurückgeführt, so dass die letztlich entscheidende Messgröße bei der experimentellen Behandlung von Wärmeübertragungsproblemen die Temperatur ist. Deren messtechnische Bestimmung wird deshalb zunächst ausführlich behandelt. Auf Wärmestrommessungen wird danach in Kap. 10.2 kurz eingegangen.

10.1 Temperaturmessungen

Bei der Temperaturmessung handelt es sich um eine Methode zur Bestimmung der Zustandsgröße Temperatur eines zu untersuchenden thermodynamischen Systems. Man unterscheidet dabei grundsätzlich nach

- *Berührungsbehafteten Messmethoden:*

Diese basieren auf dem thermodynamischen Gleichgewicht zwischen dem Messgerät (z. B. Thermoelement) und dem thermodynamischen System. Über die thermometrische Eigenschaft des Thermometers kann dabei auf die (dem System und dem Thermometer gemeinsame) Temperatur geschlossen werden.

- *Berührungsfreien Messmethoden:*

Diese basieren in der Regel auf den Strahlungseigenschaften des zu untersuchenden thermodynamischen Systems.

10.1.1 Berührungsbehaftete Messmethoden

Die Basis für alle *berührungsbehafteten Temperatur-Messmethoden* ist das thermodynamische Gleichgewicht zwischen dem Messgerät bzw. Messfühler (dem Thermometer) und dem thermodynamischen System. Als Thermometer ist dabei jedes Gerät geeignet, das „klein gegenüber dem thermodynamischen System“ ist (d. h., dieses bei der Einstellung des thermodynamischen Gleichgewichtes vernachlässigbar gering beeinflusst) und eine sog. thermometrische Eigenschaft besitzt. Diese ist gekennzeichnet durch ihre

- hinreichend starke, kontinuierliche und monotone Temperaturabhängigkeit,
- strikte Reproduzierbarkeit,

- weitgehende Unabhängigkeit von anderen physikalischen Größen.

Thermometrische Materialeigenschaften sind:

- die Volumenausdehnung von Flüssigkeiten oder Gasen als Funktion der Temperatur (Ausdehnungsthermometer),
- die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Metallen oder Halbleitern (Widerstandsthermometer),
- die temperaturabhängige elektrische Spannung in Metallpaarungen (Thermoelement).

Darüber hinaus werden viele andere spezielle Effekte als thermometrische Eigenschaften genutzt.

Zwei wichtige Beispiele für berührungsbehaftete Temperaturmessungen sind:

- *Widerstandsthermometer Pt 100*

Es handelt sich um ein elektrisches Widerstandsthermometer. Es basiert auf der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Metallen und Halbleitern (sog. Thermistoren) als thermometrische Eigenschaft. Bei den Metallen erweist sich dabei Platin als besonders geeignet, weil es einen nahezu linearen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Widerstand und der Temperatur aufweist und sich darüber hinaus als sehr langzeitstabil und in den verschiedensten Medien einsetzbar erweist. Deshalb hat sich das Platin-Widerstandsthermometer in der Praxis durchgesetzt. Der sog. Pt 100-Messfühler gilt als genormter Standard-Fühler. Er weist bei 0°C einen elektrischen Widerstand von $100\,\Omega$ auf. Für ihn gilt unabhängig von der Größe und der Bauart im Temperaturbereich $0^\circ\text{C} < t^* < 850^\circ\text{C}$ die Widerstands/Temperaturbeziehung (R^* in Ω , t^* in $^\circ\text{C}$; $\{R^*\}$, $\{t^*\}$ als Zahlenwerte von R^* und t^*).

$$\{R^*\} = 100(1 + 3,908 \cdot 10^{-3}\{t^*\} + 0,580195 \cdot 10^{-6}\{t^*\}^2) \quad (10-1)$$

Hier, wie bei Widerstandsthermometern generell, ist zu beachten, dass zur Widerstandsmessung ein Messstrom durch den Messfühler erforderlich ist, der zu einer messwertverfälschenden Temperaturerhöhung führt und deshalb sehr klein gehalten werden muss. Pt 100 Widerstandsthermometer gibt es in sehr unterschiedlichen Bauformen, wobei üblicherweise ein dünner gewickelter Platindraht in einem Schutzrohr angebracht ist. Die Durchmesser dieser Schutzrohre liegen im mm-Bereich.

Speziell für Temperaturmessungen an überströmten Oberflächen gibt es flache Pt 100 - Oberflächen-Temperatursensoren, die aus einem in eine elastische Folie eingeschweißten Platin-Messwiderstand bestehen und direkt auf die zu vermessende Oberfläche appliziert werden.

- *Thermoelement*

Unter einem Thermoelement versteht man eine Messanordnung, deren prinzipieller Aufbau in Bild 10.1 skizziert ist. Zwei Metalldrähte aus unterschiedlichem Material A und B sind an der Messstelle elektrisch leitend miteinander in Kontakt. Die anderen beiden Enden werden durch ein drittes Metall C mit einem Spannungsmesser (Voltmeter) verbunden, wobei die Kontaktstellen A/C und B/C z.B. in einem Thermostaten auf der konstanten Referenztemperatur t_0^* gehalten werden.

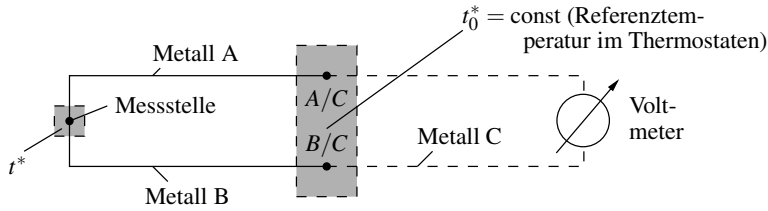


Bild 10.1: Prinzipieller Aufbau einer Thermoelement-Messanordnung

Es handelt sich um eine Anordnung zur Temperaturmessung, die auf der Wirkung thermoelektrischer Effekte in Metallen beruht. Diese kommen zustande, weil es eine Wechselwirkung zwischen elektrischen Feldern (charakterisiert durch das elektrische Potential) und thermischen Feldern (charakterisiert durch die Temperatur) gibt, bei der eine Reihe von sog. Kopplungseffekten auftreten. Zum Beispiel fließt in einem geschlossenen Stromkreis aus verschiedenen Metallen ein elektrischer Strom, wenn die beiden Kontaktstellen unterschiedliche Temperaturen aufweisen. Wird dieser Stromkreis an einer der beiden Kontaktstellen unterbrochen, so liegt dort dann eine elektrische Spannung vor, die zur Temperaturmessung genutzt werden kann. Diese wird als *Thermospannung* bezeichnet, ihr Auftreten als *Seebeck-Effekt*. Für ein bestimmtes Thermoelement hängt sie nur von den beiden Temperaturen t^* und t_0^* ab und kann deshalb unmittelbar zur Temperaturbestimmung herangezogen werden. Mit $t_0^* = \text{const}$ folgt für die Thermospannung:

$$\frac{d\hat{U}^*}{dt^*} = \varepsilon_A^*(t^*) - \varepsilon_B^*(t^*) \quad (10-2)$$

bzw. mit $\varepsilon^* = \text{const}$

$$\hat{U}^* = (\varepsilon_A^* - \varepsilon_B^*)(t^* - t_0^*) \quad (10-3)$$

Dabei sind ε_A^* und ε_B^* die sog. *Thermokraft-Koeffizienten*, die angeben, welche elektrischen Stromstärken aufgrund von Temperaturgradienten (Kopplungseffekt) auftreten. Diese Koeffizienten sind materialspezifische Größen und können einer sog. thermoelektrischen Spannungsreihe entnommen werden. Ihre Temperaturabhängigkeit ist so schwach, dass sie in erster Näherung wie in (10-3) als Konstanten angesehen werden können.

Da in (10-3) nur Differenzen der Thermokraft-Koeffizienten benötigt werden und $\varepsilon_A^* - \varepsilon_B^* = (\varepsilon_A^* - \varepsilon_C^*) + (\varepsilon_C^* - \varepsilon_B^*)$ gilt, kann der Koeffizient für ein bestimmtes Metall willkürlich zu Null gesetzt werden. Alle anderen Werte gelten dann als Differenz zu diesem Wert. Tab. 10.1 zeigt einige Zahlenwerte, wobei der Thermokraft-Koeffizient für Pb (Blei) willkürlich gleich Null gesetzt wurde. Die Differenzen $\Delta\varepsilon^*$ liegen in der Größenordnung von 10^{-5} V/K, so dass Temperaturdifferenzen von 100 K auf Thermospannungen im mV-Bereich führen. Zur genauen Messung von \hat{U}^* müssen Voltmeter eingesetzt werden, die im μV (10^{-6} V)-Bereich messen können.

Für besonders geeignete Materialpaarungen werden die auftretenden Thermospannungen (abhängig von der Temperatur der Messlötstelle bei konstanter Temperatur der Vergleichslötstelle) von Normenorganisationen in sog. Grundwertetabellen festgehalten. Tab. 10.2 zeigt einige Werte nach der Norm DIN 43 710.

Tabelle 10.1: Thermokraft-Koeffizient $\varepsilon^* - \varepsilon_{pb}^*$ in $\mu\text{V}/\text{K}$ bei 0°C Daten aus: Gerthsen, C. (1997): *Gerthsen Physik*, Springer-Verlag, Berlin

Sb	Fe	Zn	Cu	Ag	Pb	Al	Pt	Ni	Bi
35	16	3	2,8	2,7	—	-0,5	-3,1	-19	-70

Tabelle 10.2: Grundwerte und zulässige Abweichungen in mV

Daten aus: DIN 43 710

Materialpaarung	0°C	50°C	100°C	200°C
Kupfer-Konstantan (Cu-CuNi)	0	2,05 ($\pm 0,13$)	4,25 ($\pm 0,14$)	9,2 ($\pm 0,16$)
Nickelchrom-Nickel (NiCr-Ni)	0	2,022 ($\pm 0,12$)	4,095 ($\pm 0,12$)	8,137 ($\pm 0,13$)
Platinrhodium-Platin (PtRh10-Pt)	0	0,299 ($\pm 0,018$)	0,645 ($\pm 0,022$)	1,440 ($\pm 0,025$)

Die zulässigen Abweichungen ($\pm \dots$) in der Tabelle) sind zum Teil erheblich. Höhere Genauigkeitsanforderungen lassen sich durch engere Toleranzen bei der Herstellung und eine individuelle Kalibrierung der Thermoelemente realisieren.

10.1.2 Berührungsfreie Messmethoden

Berührungsfreie Temperaturmessungen nutzen in der Regel die Wärmestrahlungseigenschaften der Körper aus, deren Temperatur bestimmt werden soll. Es handelt sich dann um sog. optische Verfahren im Infrarotbereich der elektromagnetischen Strahlung, vorzugsweise im Wellenlängenbereich $1\mu\text{m} < \lambda^* < 15\mu\text{m}$ s. dazu auch Kap. 8.1 und Bild 8.1. Die Basis für diese Art der Temperaturmessung ist die Temperaturabhängigkeit der Strahlungsintensität. Diese ist jedoch nur für den Schwarzen Körper eindeutig und bekannt (vgl. (8-3) und Bild 8.3), für alle anderen realen Körper müssen die Abweichungen von diesem idealen Modellverhalten durch Emissionsgrade mehr oder weniger genau bekannt sein. Die Einschränkung „mehr oder weniger“ bezieht sich auf die Tatsache, dass das Emissionsverhalten realer Körper nicht einheitlich von demjenigen des Schwarzen Körpers abweicht, sondern diese Abweichungen wellenlängen- und richtungsabhängig sind, s. dazu Tab. 8.3. Häufig kann dies jedoch nicht im Detail berücksichtigt werden und man begnügt sich mit der Einführung eines einzigen Faktors zur Beschreibung dieser Abweichungen, dem sog. Emissionsgrad ε , der stets kleiner als Eins ist (*Strahlung Grauer Körper* s. (8-18) und Kap.8.5.3).

Da das Intensitätsmaximum bei einer Wellenlänge $\lambda^* = (2897,8/T^*)\mu\text{m}$ liegt (*Wiensches Verschiebungsgesetz*) (8-5)), arbeiten Hochtemperatur-Infrarotmessgeräte für Temperaturen $T^* = 1000\text{K} \dots 3000\text{K}$ vorzugsweise bei Wellenlängen $\lambda^* \approx 3\mu\text{m} \dots 5\mu\text{m}$, Messgeräte für Temperaturen $T^* = 300\text{K} \dots 500\text{K}$ bei $\lambda^* \approx 8\mu\text{m} \dots 14\mu\text{m}$. Zusätzlich ist jedoch zu beachten, in welchem Wellenlängenbereich die jeweilige Körperoberfläche einen besonders hohen Emissionsgrad ε aufweist.

Ein Infrarot-Thermografiesystem besteht aus einem Optikteil, einem Infrarot-Detektor und ei-

nem Signalverarbeitungssystem einschl. einer Ausgabeeinheit. Infrarot-Detektoren sind in der Regel Quanten- oder thermische Detektoren, wobei Quantendetektoren im Betrieb gekühlt werden müssen, um das Störsignal hinreichend zu unterdrücken. Generell gilt für alle Quantendetektoren, dass sie bei umso tieferen Temperaturen betrieben werden müssen, je langwelliger ihre empfindlichsten Wellenlängen sind. Eine typische Betriebstemperatur liegt bei $t^* \approx -196^\circ\text{C}$, der Siedetemperatur von Stickstoff bei $p^* = 1 \text{ bar}$.

Der Vorteil der Infrarot-Thermografie besteht darin, dass damit Oberflächentemperaturen nicht nur als punktuelle Einzelwerte, sondern als flächenmäßige Verteilung bestimmt werden können. Diese sog. Pixelbilder (typische Auflösung: 320×240 Pixel) entstehen durch ein „Scanning-Verfahren“ aus einem Einzeldetektor oder als „Focal-Plane-Array“ (FPA) mit einer Detektoranzahl, die der Pixel-Zahl entspricht. Nachteilig wirken sich der hohe Aufwand sowie die Beschränkungen durch alle die Wärmestrahlung beeinflussenden Effekte (z. B. Messung durch Fenster oder in strahlungsabsorbierender Umgebung) sowie die hohe Empfindlichkeit gegenüber der Umgebungsstrahlung aus.

Als entscheidende Kriterien für die Auswahl eines Temperatur-Messsystems können gelten:

- der Messbereich in $^\circ\text{C}$,
- die Auflösung und Genauigkeit,
- die Ansprechzeit (Zeitkonstante), evtl. die räumliche Auflösung,
- der Aufwand (Kosten).

10.1.3 Temperaturmessungen an Körperoberflächen

Bei der Bestimmung der Oberflächentemperatur angeströmter Objekte ist zu beachten, dass die Wandtemperatur in der Regel von der Temperatur der ungestörten Strömung abweicht. Dies gilt insbesondere auch an der Oberfläche eines Messfühlers, der in eine Strömung eingebracht wird. Zu Temperaturerhöhungen ΔT^* kommt es dabei durch zwei Effekte:

1. durch einen adiabaten (und reversiblen) Aufstau der Strömung. Wird die Strömung von der Geschwindigkeit u_∞^* bis auf den Wert Null aufgestaut (Staupunkt), so gilt für die damit verbundene Temperaturerhöhung

$$\Delta T_{\text{ad}}^* = T_\infty^* - T_0^* = \frac{u_\infty^{*2}}{2c_p^*} \quad (10-4)$$

Für ideale Gase kann für die Temperaturerhöhung auch $\Delta T_{\text{ad}}^* = \text{Ma}^2 \frac{\kappa-1}{2} T_\infty^*$ geschrieben werden, mit Ma als Mach-Zahl und dem Isentropenexponenten $\kappa = c_p^*/c_v^*$.

2. durch Dissipationseffekte in der Grenzschicht, die sich am Temperaturfühler ausbildet. Wird die Wand als adiabat unterstellt, so führt dies zu einer Temperaturerhöhung, die in der Größenordnung von ΔT_{ad}^* liegt und deshalb als

$$\Delta T_r^* = r \frac{u_\infty^{*2}}{2c_p^*} \quad (10-5)$$

angesetzt wird. Der sog. *Rückgewinnfaktor* r ist von der konkret vorliegenden Strömung und von der Prandtl-Zahl abhängig. Er liegt häufig in der Nähe von Eins.

Zum Beispiel gilt für Luft mit $c_p^* = 1014 \text{ J/kgK}$ für $u_\infty^* = 20 \text{ m/s}$: $\Delta T_{\text{ad}}^* \approx 0,2^\circ\text{C}$; für $u_\infty^* = 100 \text{ m/s}$ aber bereits $\Delta T_{\text{ad}}^* \approx 5^\circ\text{C}$.

10.2 Wärmestrommessungen

Wärmeströme treten als leitungsbasierte Ströme gemäß dem Fourier-Ansatz (5-5) überall dort auf, wo Temperaturgradienten vorhanden sind. Im Zusammenhang mit Wärmestrahlung handelt es sich um strahlungsbasierte Ströme wie z.B. in (8-30) beim Strahlungsaustausch zwischen zwei Schwarzen Körpern.

Da für Wärmeübergänge fast immer die Wärmeströme an Körperoberflächen als Übertragungsflächen interessieren, sollen hier im weiteren nur diese Wandwärmeströme unter dem Gesichtspunkt ihrer Messbarkeit am Beispiel der konvektiven Wärmeübertragung betrachtet werden.

10.2.1 Messprinzipien

Insgesamt können Wärmestromsensoren nach ihren Messprinzipien folgenden Kategorien zugeordnet werden:

- *Sensoren auf der Basis von zwei Temperaturmessungen*

Das Grundprinzip ist die Bestimmung der Wärmestromdichte der Fourierschen Wärmeleitung. Für die Wärmestromdichte an einer Wand gilt gemäß (5-5)

$$\dot{q}_W^* = -\lambda_F^* \frac{\partial T^*}{\partial n^*} \Big|_F = -\lambda_W^* \frac{\partial T^*}{\partial n^*} \Big|_W \quad (10-6)$$

Dabei ist \dot{q}_W^* die Wärmestromdichte senkrecht zur Wand und n^* die von der Wand in das Fluid weisende Normalkoordinate. Die beiden Teile von (10-6) beschreiben die Wärmestromdichte an der Grenze zum Fluid ($-\lambda_F^* \partial T^* / \partial n^*$ mit λ_F^* als Wärmeleitfähigkeit des Fluides) bzw. die Wärmestromdichte an der Grenze zum Wandmaterial ($-\lambda_W^* \partial T^* / \partial n^*$ mit λ_W^* als Wärmeleitfähigkeit des Wandmaterials). Dabei ist zu beachten, dass n^* hier einheitlich von der Wand in das Fluid weist.

Um \dot{q}_W^* zu erhalten, muss bei bekannter Wärmeleitfähigkeit also lediglich der Temperaturgradient $\partial T^* / \partial n^*$ bestimmt werden. Im Wandmaterial (dort liegt stets reine Wärmeleitung vor) kann der Gradient $\partial T^* / \partial n^*$ durch $\Delta T^* / \Delta n^*$ ersetzt werden, d. h., es müssen zwei Temperaturen in einem kleinen Abstand Δn^* senkrecht zur Oberfläche gemessen werden. Nur in seltenen Fällen gelingt es allerdings, zwei Messfühler so anzubringen, dass damit z. B. die Temperaturen an der Oberfläche und in einer geringen Wandtiefe von Δn^* bestimmt werden können.

Stattdessen „erweitert“ man die Wand durch eine dünne Schicht, über die hinweg der Wärmestrom als $-\lambda_S^* \Delta T^* / s^*$ bestimmt wird. Diese zusätzliche Schicht der Dicke s^* , bestehend aus einem Material mit der Wärmeleitfähigkeit λ_S^* , dient als Wärmestromsensor. Er führt die Wärmestrommessung auf die Bestimmung der Temperaturdifferenz ΔT^* zurück, die zwischen den beiden Seiten der Schicht mit der Dicke s^* auftritt. Um die Verfälschung der ursprünglichen physikalischen Situation durch den Wärmestromsensor so gering wie möglich zu halten, muss sein Wärmewiderstand möglichst klein sein, da dieser im Bereich des Sensors zusätzlich und verfälschend auftritt. Dieser führt tendenziell zu einem „hot spot“ auf der Oberfläche, an der die Wärmestromdichte bestimmt werden soll. Da diese Bedingung zu geringen Schichtdicken und insgesamt zu einer Miniaturisierung des Sensors führt, werden gleichzeitig die Zeitkonstanten klein, so dass diese Sensoren auch instationäre Vorgänge auflösen können. Konkrete Zahlenangaben sind nur für spezielle Ausführungen möglich.

- *Sensoren auf der Basis von einer Temperaturmessung*

Hierbei wird stets das instationäre Temperaturverhalten des Wandmaterials analysiert. Kann die Wärmeleitung z.B. als eindimensional angesehen werden, wird (5-22) für die instationäre Wärmeleitung zugrunde gelegt und dann der Wärmestrom unmittelbar aus dem Zeitverhalten der Temperatur ermittelt. Es muss also stets die Temperatur als Funktion der Zeit bestimmt werden. In diesem Zusammenhang kommt auch die Infrarot-Thermografie zum Einsatz (vgl. Kap. 10.1.2).

- *Sensoren auf der Basis der Energiebilanz über den Sensor*

Ist der Sensor z. B. als dünne elektrisch heizbare Folie ausgeführt, wird die elektrische Energie dieser „Widerstandsheizung“ unmittelbar als Wärmestrom abgegeben. Damit sind Wärmeübergangsmessungen möglich, deren Ergebnisse anschließend der Bestimmung des Wärmestromes in einer veränderten physikalischen Situation zugrunde gelegt werden können.

Allen drei Messprinzipien ist gemeinsam, dass die Messung von Wärmeströmen auf die Bestimmung von Temperaturen an verschiedenen Orten bzw. zu verschiedenen Zeiten zurückgeführt wird.¹ Ein Beispiel dafür ist der speziell für Wärmeübergangsmessungen entwickelte Sensor, der in Kap. 6 im ILLUSTRIERENDEN BEISPIEL 6.3 beschrieben und bzgl. seiner Wirkungsweise erläutert worden ist.

¹ Einen sehr guten Überblick über verschiedenen konkrete Bauarten von Wärmestromsensoren findet man in: Diller, T.E. (1993): *Advances in Heat Flux Measurements*, Adv. in Heat Transfer, **23**, 279-355

11 Schlussbetrachtung

Leserinnen und Leser, die systematisch und ohne Kapitel zu überschlagen bis hierhin vorgedrungen sind, sollten einiges über die verschiedenen Formen der Wärmeübertragung erfahren haben. Sie dürften jetzt in der Lage sein, die zu Anfang des Buches mit den Beispielen 1.1 und 1.2 vorgestellten Wärmeübertragungsphänomene aus dem Alltag zu verstehen.

Wir möchten zum Abschluss mit einigen Stichwörtern zur Erklärung der einzelnen Aspekte beitragen. Dazu führen wir beide Beispiele hier noch einmal auf und ergänzen sie in den Unterpunkten um eben diese Stichwörter. Dies mag dazu beitragen, die genaue Erklärung mit Hilfe des inzwischen vorhandenen Wissens bzgl. der Wärmeübertragung zu finden.

Beispiel 1.1:

Der Wärmehaushalt des menschlichen Körpers ist ein hervorragendes Beispiel dafür, wie im Prinzip alle Wärmeübertragungsmechanismen zusammenspielen, um unter den unterschiedlichsten Umgebungsbedingungen dafür zu sorgen, dass im Inneren unseres Körpers eine konstante Temperatur von etwa $36,5^{\circ}\text{C}$ herrscht. Geringfügige Abweichungen von dieser Temperatur im Körperinneren sind möglich, Abweichungen um mehrere $^{\circ}\text{C}$ aber gefährlich bis tödlich. Offensichtlich gelingt es dem menschlichen Körper deshalb, in extrem unterschiedlichen Umgebungsbedingungen von -40°C bis $+40^{\circ}\text{C}$ und bei relativen Luftfeuchten von nahezu 0% bis nahezu 100% (wenn auch mit Hilfe von Kleidung bei niedrigeren Temperaturen), die Temperatur im Körperinneren einzustellen und zu halten!

Das menschliche „Temperaturgefühl“ reagiert dabei sehr pauschal mit Empfindungen von (mehr oder weniger) „warm“ oder „kalt“, ohne dabei nach den sehr unterschiedlichen physikalischen Mechanismen unterscheiden zu können, die zu diesen Empfindungen führen. Erst bei genauerer Kenntnis der physikalischen Vorgänge ist zu verstehen,

- wieso die Körpertemperatur konstant gehalten werden kann, auch wenn die Umgebungstemperatur oberhalb der Körpertemperatur liegt,
⇒ *Verdunstungskühlung, Zweiphasen-Wärmeübergang* (s. ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 7.2)
- warum wir glauben, bei starkem Wind wäre es deutlich kälter als bei Windstille (was nicht der Fall ist),
⇒ *gefühlte Temperatur* (s. ILLUSTRIERENDES BEISPIEL 6.4)
- wieso wir das Gefühl haben, in der Sauna wäre es nach einem Wasseraufguss nahezu unerträglich heiß (obwohl die Temperatur dabei gleich bleibt, oder sogar abnimmt),
⇒ *verstärkte Kondensation von Wasserdampf auf der Haut, Zweiphasen-Wärmeübergang, menschliches „Temperaturempfinden“*
- warum wir einen Raum als kalt und einen anderen Raum als angenehm warm empfinden, obwohl in beiden Räumen dieselbe Lufttemperatur herrscht.
⇒ *Strahlungsaustausch mit (kalten) Umgebungswänden*

Beispiel 1.2:

Die Fußbodenheizung ist eine Möglichkeit, eine thermisch behagliche Situation in einem Wohnumfeld zu erzeugen. Dabei wird entweder warmes Wasser durch im Fußboden verlegte Rohrschlangen

geleitet, oder stromdurchflossene Heizkabel sorgen für hohe Temperaturen im Fußboden-Unterbau. Aus Sicht der Wärmeübertragung sind beide Varianten sehr verschieden, auch wenn bei entsprechender Auslegung auf beiden Wegen dieselbe mittlere Raumtemperatur erreicht werden kann. Auch hierbei ist erst bei genauerer Kenntnis der physikalischen Vorgänge verständlich, warum

- bei der Warmwasservariante an keiner Stelle im Fußbodenbereich (z. B. unter einem dicken Teppich) eine bestimmte Temperatur überschritten werden kann, bei der elektrischen Variante aber aus thermodynamischer Sicht keine obere, nicht überschreitbare Temperatur existiert,

⇒ Warmwasservariante: am Rohr gilt $T_W^* = \text{const}$

⇒ elektrische Variante: am Stromleiter gilt $\dot{q}_W^* = \text{const}$

- bei der Warmwasservariante im Vergleich zur elektrischen Variante unter der Voraussetzung gleicher (anfänglicher) Heizleistung und gleicher Wärmekapazitäten des Heizsystems die gewünschte Raumtemperatur langsamer erreicht wird, beide aber nach dem Abschalten den Raum gleich schnell abkühlen lassen.

⇒ Aufheizung:

Warmwasservariante: \dot{q}_W^* wird mit der Zeit kleiner; elektrische Variante: \dot{q}_W^* bleibt konstant

⇒ Abkühlung:

der Abkühlungsvorgang erfolgt nicht über das (in beiden Fällen unterschiedliche) Heizsystem

A Arbeitsblätter

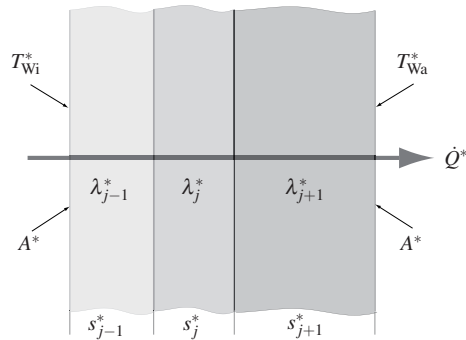
Die nachfolgend zusammengestellten Arbeitsblätter sollen eine Hilfestellung bei der Lösung von häufig auftretenden „Standardproblemen“ sein.

Zusätzlich zu den entscheidenden mathematischen Beziehungen werden jeweils alle Größen einzeln aufgeführt, benannt und mit der zugehörigen SI-Einheit belegt. Abschließend werden die Voraussetzungen aufgelistet, unter denen die jeweiligen Beziehungen zum Einsatz kommen dürfen.

Der Verweis auf die Kapitel, in denen die aufgeführten Beziehungen ausführlich behandelt werden, erlaubt es, den physikalischen Hintergrund der jeweils vorliegenden Situation zu vertiefen.

Diese Arbeitsblätter ersetzen nicht das Studium der jeweiligen Wärmeübergangssituation, sondern sind als Zusammenstellung wichtiger Beziehungen und damit als *zusätzliche* Hilfestellung gedacht.

Arbeitsblatt 5.1: Wärmeleitung in einer mehrschichtigen, ebenen Wand (Kap. 5.3)



$$\dot{Q}^* = q^* A^* = \frac{(T_{Wi}^* - T_{Wa}^*)}{R_{\lambda,RS}^*} = \text{const} \quad \text{s. (5-7)}$$

$$R_{\lambda,ges}^* = R_{\lambda,RS}^* = \sum R_{\lambda,j}^* = \sum \frac{s_j^*}{\lambda_j^* A^*}; \quad q^* = \frac{\dot{Q}^*}{A^*} = \text{const}$$

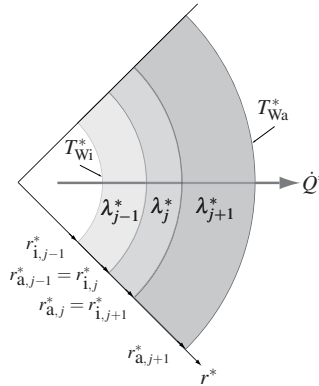
\dot{Q}^* : Wärmestrom in W
 q^* : Wärmestromdichte in W/m^2
 A^* : wärmeübertragende Fläche in m^2
 T_{Wi}^* : Innenwandtemperatur in K
 T_{Wa}^* : Außenwandtemperatur in K
 $R_{\lambda,ges}^*$: gesamter Wärmeleitwiderstand in K/W

$R_{\lambda,RS}^*$: Wärmeleitwiderstand bei Reihenschaltung in K/W
 λ_j^* : Wärmeleitfähigkeit der Schicht j in W/mK
 s_j^* : Dicke der Schicht j in m

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- stationär und eindimensional
- keine Wärmesenken und -quellen
- konstante Wärmeleitfähigkeiten λ_j^*

Arbeitsblatt 5.2: Wärmeleitung in einer mehrschichtigen Hohlzylinder- und Hohlkugelwand (Kap. 5.3)



$$\dot{Q}^* = \dot{q}^*(r^*) A^*(r^*) = \frac{(T_{Wi}^* - T_{Wa}^*)}{R_{\lambda,RS}^*} = \text{const} \quad \text{s. (5-7)}$$

Hohlzylinderwand (HZ): $R_{\lambda,ges}^* = R_{\lambda,RS}^* = \sum R_{\lambda,j}^* = \sum \frac{1}{2\pi L^* \lambda_j^*} \ln \frac{r_{a,j}^*}{r_{i,j}^*}; \quad \dot{q}^*(r^*) = \frac{\dot{Q}^*}{2\pi L^* r^*}$

Hohlkugelwand (HK): $R_{\lambda,ges}^* = R_{\lambda,RS}^* = \sum R_{\lambda,j}^* = \sum \frac{1}{4\pi \lambda_j^*} \left(\frac{1}{r_{i,j}^*} - \frac{1}{r_{a,j}^*} \right); \quad \dot{q}^*(r^*) = \frac{\dot{Q}^*}{4\pi r^{*2}}$

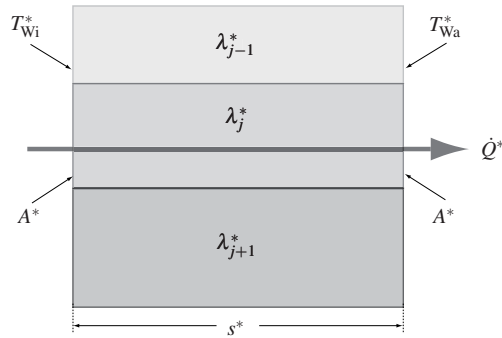
\dot{Q}^* : Wärmestrom in W
 $\dot{q}^*(r^*)$: Wärmestromdichte in W/m²
 $A^*(r^*)$: wärmeübertragende Fläche in m²
 T_{Wi}^* : Innenwandtemperatur in K
 T_{Wa}^* : Außenwandtemperatur in K
 $R_{\lambda,ges}^*$: gesamter Wärmeleitwiderstand in K/W
 $R_{\lambda,RS}^*$: Wärmeleitwiderstand bei Reihenschaltung in K/W

λ_j^* : Wärmeleitfähigkeit der Schicht j in W/mK
 L^* : Länge des Zylinders in m
 r^* : Radius in m
 $r_{i,j}^*$: Innenradius der Schicht j in m
 $r_{a,j}^*$: Außenradius der Schicht j in m

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- stationär und eindimensional
- keine Wärmesenken und -quellen
- konstante Wärmeleitfähigkeiten λ_j^*

Arbeitsblatt 5.3: Wärmeleitung in einer parallelschichtigen, ebenen Wand (Kap. 5.3)



$$\dot{Q}^* = \dot{q}^* A^* = \frac{(T_{Wi}^* - T_{Wa}^*)}{R_{\lambda,PS}^*} = \text{const} \quad \text{s. (5-7)}$$

$$R_{\lambda,ges}^* = R_{\lambda,PS}^* = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_{\lambda,j}^*}} = \frac{1}{\sum \frac{s_j^*}{\lambda_j^* A^*}}; \quad \dot{q}^* = \frac{\dot{Q}^*}{A^*} = \text{const}$$

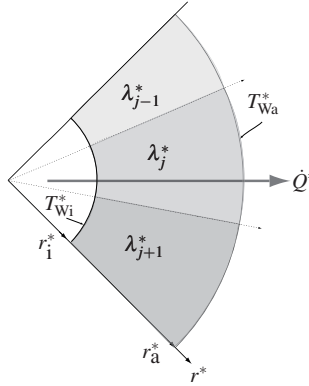
\dot{Q}^* : Wandwärmestrom in W
 \dot{q}^* : Wandwärmestromdichte in W/m²
 A^* : wärmeübertragende Fläche in m²
 T_{Wi}^* : Innenwandtemperatur in K
 T_{Wa}^* : Außenwandtemperatur in K
 $R_{\lambda,ges}^*$: gesamter Wärmeleitwiderstand in K/W

$R_{\lambda,PS}^*$: Wärmeleitwiderstand bei Parallelschaltung in K/W
 λ_j^* : Wärmeleitfähigkeit der Schicht j in W/mK
 s^* : Dicke der Schichten in m

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- stationär und eindimensional
- keine Wärmesenken und -quellen
- konstante Wärmeleitfähigkeiten λ_j^*

Arbeitsblatt 5.4: Wärmeleitung in einer parallelschichtigen Hohlzylinder- und Hohlkugelwand (Kap. 5.3)



$$\dot{Q}^* = \dot{q}^* A^* = \frac{(T_{Wi}^* - T_{Wa}^*)}{R_{\lambda,PS}^*} = \text{const} \quad \text{s. (5-7)}$$

$$\text{Hohlzylinderwand (HZ): } R_{\lambda,ges}^* = R_{\lambda,PS}^* = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_{\lambda,j}^*}} = \frac{1}{\sum \frac{1}{2\pi L^* \lambda_j^* \ln \frac{r_a^*}{r_i^*}}}; \quad \dot{q}^* = \frac{\dot{Q}^*}{2\pi L^* r^*} = \dot{q}^*(r^*)$$

$$\text{Hohlkugelwand (HK): } R_{\lambda,ges}^* = R_{\lambda,PS}^* = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_{\lambda,j}^*}} = \frac{1}{\sum \frac{1}{4\pi \lambda_j^* (\frac{1}{r_i^*} - \frac{1}{r_a^*})}}; \quad \dot{q}^* = \frac{\dot{Q}^*}{4\pi r^{*2}} = \dot{q}^*(r^*)$$

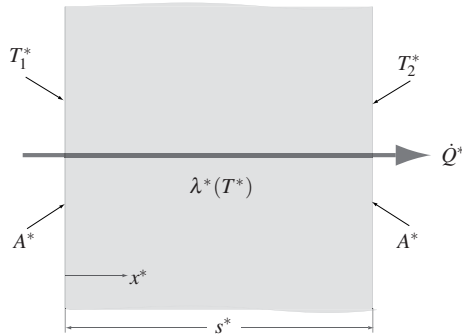
\dot{Q}^* : Wandwärmestrom in W
 \dot{q}^* : Wandwärmestromdichte in W/m²
 A^* : wärmeübertragende Fläche in m²
 T_{Wi}^* : Innenwandtemperatur in K
 T_{Wa}^* : Außenwandtemperatur in K
 $R_{\lambda,ges}^*$: gesamter Wärmeleitwiderstand in K/W
 $R_{\lambda,PS}^*$: Wärmeleitwiderstand bei Parallelschaltung in K/W

λ_j^* : Wärmeleitfähigkeit der Schicht j in W/mK
 L^* : Länge des Zylinders in m
 r^* : Radius in m
 r_i^* : Innenradius der Schicht j in m
 r_a^* : Außenradius der Schicht j in m

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- stationär und eindimensional
- keine Wärmesenken und -quellen
- konstante Wärmeleitfähigkeiten λ_j^*

Arbeitsblatt 5.5: Wärmeleitung in einer ebenen Wand mit linear temperaturabhängiger Wärmeleitfähigkeit (Kap. 5.3)



$$\lambda^*(T^*) = C_1^* \left(\frac{T^*}{T_{\text{Ref}}^*} \right)$$

$$\dot{Q}^* = \frac{C_1^* A^* (T_1^{*2} - T_2^{*2})}{2 T_{\text{Ref}}^* s^*}$$

$$T^*(x^*) = \sqrt{T_1^{*2} - 2 \frac{\dot{Q}^* T_{\text{Ref}}^* x^*}{C_1^* A^*}}$$

$$\frac{dT^*}{dx^*} = \frac{-\dot{Q}^* T_{\text{Ref}}^*}{C_1^* A^* T^*} = \frac{-\dot{Q}^* T_{\text{Ref}}^*}{C_1^* A^* \sqrt{T_1^{*2} - 2 \frac{\dot{Q}^* T_{\text{Ref}}^* x^*}{C_1^* A^*}}}$$

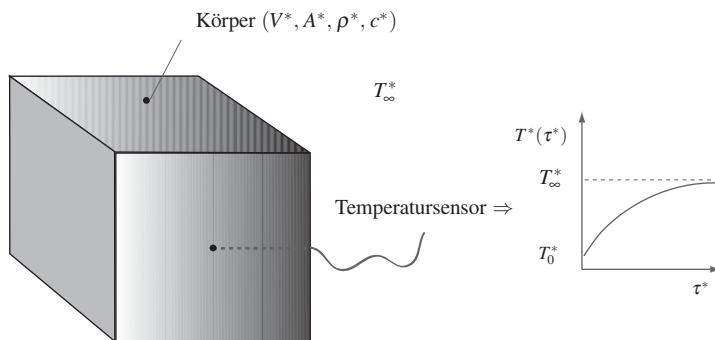
$\lambda^*(T^*)$: temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit in W/mK
 C_1^* : Konstante in W/mK
 T_{Ref}^* : Referenztemperatur in K
 \dot{Q}^* : Wärmestrom in W
 A^* : wärmeübertragende Fläche in m²
 x^* : Koordinate in Richtung des Temperaturgefälles in m
 s^* : Dicke der Schicht in m

T_1^* : Temperatur an der Oberfläche 1 in K
 T_2^* : Temperatur an der Oberfläche 2 in K
 $T^*(x^*)$: Temperatur als Funktion der Koordinate x^* in K
 $\frac{dT^*}{dx^*}$: Temperaturgradient als Funktion der Koordinate x^* in K/m

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- stationär und eindimensional
- keine Wärmesenken und -quellen

Arbeitsblatt 5.6: Instationäre eindimensionale Wärmeleitung in einem Körper (Kap. 5.4)



$$T^*(\tau^*) = T_0^* + (T_\infty^* - T_0^*) \left[1 - \exp \left(\frac{-\alpha_m^* A^* \tau^*}{c^* \rho^* V^*} \right) \right] \quad \text{s. (5-17)}$$

$$\alpha_m^* = \ln \left(\frac{T_0^* - T_\infty^*}{T^*(\tau^*) - T_\infty^*} \right) \left(\frac{c^* \rho^* V^*}{A^* \tau^*} \right)$$

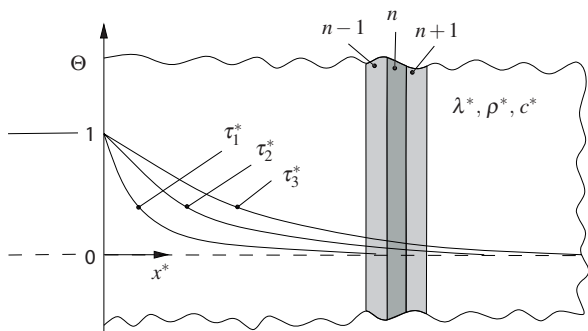
$T^*(\tau^*)$: Körpertemperatur zur Zeit τ^* in K
 T_∞^* : (konstante) Temperatur der Körperumgebung in K
 T_0^* : Körpertemperatur zur Zeit $\tau_0^*=0$ in K
 τ^* : Zeit in s
 α_m^* : mittlerer Wärmeübergangskoeffizient in $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$

A^* : Körperoberfläche in m^2
 V^* : Körpervolumen in m^3
 c^* : Wärmekapazität des Körpers in $\text{J}/\text{kg K}$
 ρ^* : Dichte des Körpers in kg/m^3

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- $\text{Bi} = \frac{\alpha_m^* L^*}{\lambda^*} \leq 0,1$, wobei L^* eine charakteristische Körperabmessung (z. B. Kantenlänge eines Würfels oder Durchmesser einer Kugel) und λ^* die Wärmeleitfähigkeit des Körpers darstellt
- keine Wärmesenken und -quellen
- konstante Stoffwerte

Arbeitsblatt 5.7: Instationäre, eindimensionale Wärmeleitung in einer halbumendlichen Wand (Kap. 5.5)



$$\Theta = \frac{T^* - T_0^*}{T_\infty^* - T_0^*} = \operatorname{erfc} \left(\frac{x^*}{2\sqrt{a^* \tau^*}} \right) \quad \text{s. (5-22)}$$

$$a^* = \frac{\lambda^*}{\rho^* c^*}$$

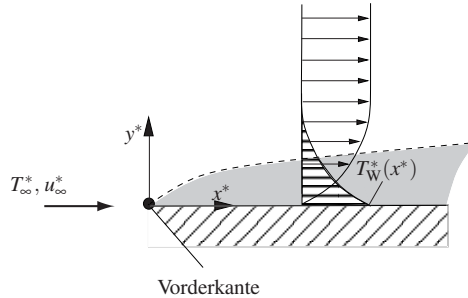
T^* : Wandtemperatur in K
 T_∞^* : Temperatur an der Stirnfläche der halbumendlichen Wand zur Zeit $\tau_0^* = 0$ in K
 T_0^* : Wandtemperatur zur Zeit $\tau_0^* = 0$ in K
 erfc : komplementäre Fehlerfunktion, siehe Tab. 5.7

τ^* : Zeit in s
 x^* : Koordinate in m
 a^* : Temperaturleitfähigkeit in m^2/s
 λ^* : Wärmeleitfähigkeit in W/mK
 ρ^* : Dichte in kg/m^3
 c^* : spezifische Wärmekapazität in $\text{J}/\text{kg K}$

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- keine Wärmesenken und -quellen
- konstante Stoffwerte

Arbeitsblatt 6.1: Laminare Plattenströmung (Kap. 6.3.1)



$$\frac{\text{Nu}_L}{\sqrt{\text{Re}_L}} = \frac{A_j - B_j \text{PrEc}/x^r}{\sqrt{2x}} \quad \text{s. (6-14)}$$

$$\text{Nu}_L = \frac{\dot{q}_W^*(x^*) L^*}{\lambda^* (T_W^*(x^*) - T_\infty^*)} \quad \text{Re}_L = \frac{\rho^* u_\infty^* L^*}{\eta^*} \quad \text{Pr} = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*} \quad \text{Ec} = \frac{u_\infty^{*2}}{c_p^* (T_W^*(L^*) - T_\infty^*)} \quad x = \frac{x^*}{L^*}$$

Konstanten A_j, B_j und r je nach Randbedingung aus Tab. 6.3

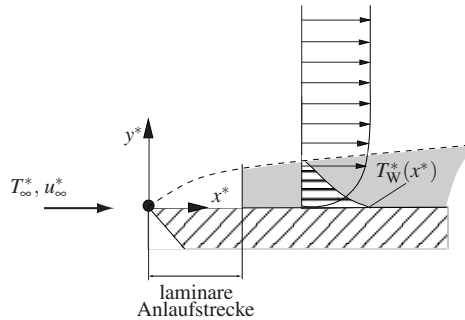
Nu_L : Nusselt-Zahl bei der Koordinate x^*
 $\dot{q}_W^*(x^*)$: Wandwärmestromdichte in W/m^2
 L^* : Bezugslänge in m
 x^* : Koordinate in m
 λ^* : Wärmeleitfähigkeit in W/mK
 $T_W^*(x^*)$: Temperatur an der Wand bei der Koordinate x^* in K

T_∞^* : Temperatur des ungestörten Fluides in K
 u_∞^* : Geschwindigkeit des ungestörten Fluides in m/s
 ρ^* : Dichte des Fluides in kg/m^3
 η^* : dynamische Viskosität des Fluides in kg/ms
 c_p^* : spezifische Wärmekapazität des Fluides in J/kgK

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- $\text{Re}_L \leq \text{Re}_{\text{krit}} = 5 \cdot 10^5$
- Stoffwerte bei der Anströmtemperatur des ungestörten Fluides, T_∞^* , s. Kap. 6.2.2

Arbeitsblatt 6.2: Turbulente Plattenströmung (Kap. 6.4.1)



$$Nu_x = 0,0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3} \quad \text{s. (6-32)}$$

$$Nu_m = 0,037 Re_L^{4/5} Pr^{1/3} \quad \text{s. (6-33)}$$

$$Nu_x = \frac{\dot{q}_W^*(x^*) x^*}{\lambda^* (T_W^*(x^*) - T_\infty^*)} \quad Nu_m = \frac{1}{L^*} \int_0^{L^*} Nu_x dx^*$$

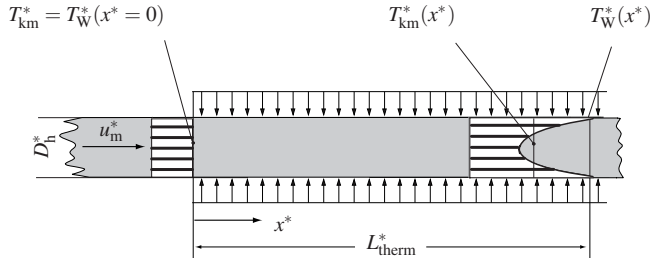
$$Re_x = \frac{\rho^* u_\infty^* x^*}{\eta^*} \quad Re_L = \frac{\rho^* u_\infty^* L^*}{\eta^*} \quad Pr = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*}$$

Nu_x : lokale Nußelt-Zahl bei x^*
 Nu_m : mittlere Nußelt-Zahl zwischen $x^*=0$ und $x^*=L^*$
 $\dot{q}_W^*(x^*)$: Wandwärmestromdichte in W/m^2
 L^* : Bezugslänge in m
 x^* : Koordinate in m
 λ^* : Wärmeleitfähigkeit in W/mK
 $T_W^*(x^*)$: Temperatur an der Wand bei der Koordinate x^* in K

T_∞^* : Temperatur des ungestörten Fluides in K
 u_∞^* : Geschwindigkeit des ungestörten Fluides in m/s
 ρ^* : Dichte des Fluides in kg/m^3
 η^* : dynamische Viskosität des Fluides in $kg/m s$
 c_p^* : spezifische Wärmekapazität des Fluides in J/kgK

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- Vernachlässigung der laminaren Anlaufstrecke
- nicht-rationale Näherung für $Re_L > Re_{krit} = 5 \cdot 10^5$ sowie $0,6 < Pr < 60$
- turbulente Strömung ohne Berücksichtigung eines laminaren Anlaufes
- Stoffwerte bei der Anströmtemperatur des ungestörten Fluides, T_∞^* , s. Kap. 6.2.2

Arbeitsblatt 6.3: Laminare Rohr-/Kanaleinlaufströmung (Kap. 6.3.2)

$$Nu_D = C_1 \tilde{x}^{-1/3} = C_1 \left(\frac{x^*}{D_h^* Re_D Pr} \right)^{-1/3} \quad \text{für } \tilde{x} \rightarrow 0 \quad \text{s. (6-29)}$$

$$C_1 = 2,0668/4^{1/3} \quad \text{für } \dot{q}_W^* = \text{const}$$

$$C_1 = 1,7092/4^{1/3} \quad \text{für } T_W^* = \text{const}$$

$$Nu_D = \frac{\dot{q}_W^*(x^*) D_h^*}{\lambda^* (T_W^*(x^*) - T_{km}^*(x^*))} \quad \tilde{x} = \frac{x^*}{D_h^* Re_D Pr} \quad Re_D = \frac{\rho^* u_m^* D_h^*}{\eta^*} \quad Pr = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*} \quad D_h^* = \frac{4A^*}{U^*}$$

Nu_D : lokale Nußelt-Zahl gebildet mit dem hydraulischen Durchmesser D_h^*

$\dot{q}_W^*(x^*)$: Wandwärmestromdichte in W/m^2

$T_W^*(x^*)$: Temperatur an der Wand bei der Koordinate x^* in K

$T_{km}^*(x^*)$: kalorische Mitteltemperatur bei der Koordinate x^* in K

D_h^* : hydraulischer Durchmesser in m

A^* : Rohr-/Kanalquerschnittsfläche in m^2

L_{therm}^* : thermischen Einlauflänge in m

U^* : Rohr-/Kanalumfang in m

u_m^* : mittlere Geschwindigkeit in m/s

λ^* : Wärmeleitfähigkeit in W/mK

ρ^* : Dichte des Fluides in kg/m^3

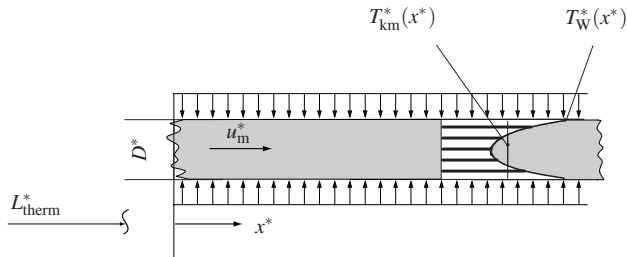
η^* : dynamische Viskosität des Fluides in kg/ms

c_p^* : spezifische Wärmekapazität des Fluides in J/kgK

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- $Re_D \leq Re_{krit} \approx 2300$ (Rohr)
- Koordinate $x^* < L_{therm}^* \approx 0,04 D_h^* Re_D Pr$, s. (6-21)
- hydraulisch ausgebildete Strömung
- Stoffwerte bei der kalorischen Mitteltemperatur des Fluides zu Beginn der Wärmeübertragung $T_0^* = T_{km}^*(x^* = 0)$, s. Kap. 6.2.2

Arbeitsblatt 6.4: Laminare ausgebildete Rohrströmung (Kap. 6.3.2)



$$Nu_D = 4,36 \quad \text{für} \quad \dot{q}_W^* = \text{const} \quad \text{s. (6-24)}$$

$$Nu_D = 3,66 \quad \text{für} \quad T_W^* = \text{const} \quad \text{s. (6-24)}$$

$$Nu_D = \frac{\dot{q}_W^*(x^*) D^*}{\lambda^* (T_W^*(x^*) - T_{km}^*(x^*))}$$

Weitere Geometrien in Tab. 6.5

Nu_D : Nußelt-Zahl gebildet mit dem Durchmesser D^*

$\dot{q}_W^*(x^*)$: Wandwärmestromdichte in W/m^2

$T_W^*(x^*)$: Temperatur an der Wand bei der Koordinate x^* in K

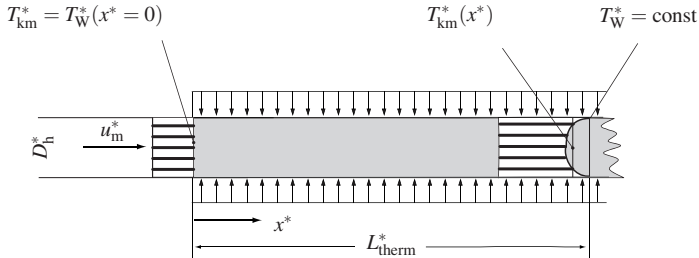
$T_{km}^*(x^*)$: kalorische Mitteltemperatur bei der Koordinate x^* in K

D^* : Rohrdurchmesser in m

λ^* : Wärmeleitfähigkeit in W/mK

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- $Re_D \leq Re_{krit}$
- Lauflänge $x^* \geq L_{therm}^* \approx 0,04 D_h^* Re_D Pr$, s. (6-21) mit der thermischen Einlaufänge L_{therm}^*
- hydraulisch und thermisch ausgebildete Strömung
- Stoffwerte bei der kalorischen Mitteltemperatur des Fluides an der Stelle x^* , s. Kap. 6.2.2

Arbeitsblatt 6.5: Turbulente Rohr-/Kanaleinlaufströmung (Kap. 6.4.2)

$$\frac{\text{Nu}_m}{\text{Nu}_D} = 1 + \frac{C}{x^*/D_h^*} \quad \text{s. (6-40)}$$

$$\text{Nu}_m = \frac{1}{L_{\text{therm}}^*} \int_0^{L_{\text{therm}}^*} \text{Nu}_D \, dx^* \quad (\text{Nu}_m = \text{Nu}_D \quad \text{für } x^*/D_h^* \rightarrow \infty)$$

$$\text{Nu}_m = \frac{\dot{q}_{Wm}^* D_h^*}{\lambda^* \Delta T^*} \quad \dot{q}_{Wm}^* = \frac{1}{L_{\text{therm}}^*} \int_0^{L_{\text{therm}}^*} \dot{q}_W^* \, dx^*$$

Pr	0,01	0,7	10
C	9	2	0,7

Nu_m : mittlere Nußelt-Zahl im Einlaufbereich

Nu_D : Nußelt-Zahl bei x^*

$T_W^*(x^*)$: Temperatur an der Wand bei der Koordinate x^* in K

$T_{km}^*(x^*)$: kalorische Mitteltemperatur bei der Koordinate x^* in K

ΔT^* : mittlere Temperaturdifferenz bei der Einlauflänge in K

L_{therm}^* : thermische Einlauflänge $\approx 30 D_h^*$ in m

D_h^* : hydraulischer Durchmesser des Rohres/Kanales in m

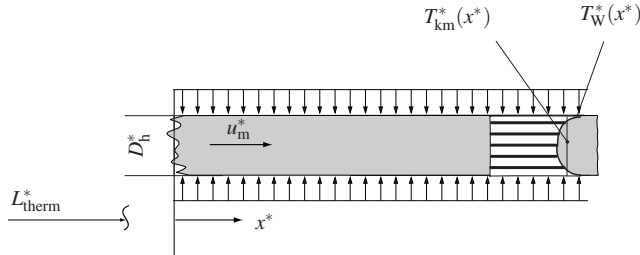
x^* : Koordinate in m

λ^* : Wärmeleitfähigkeit in W/mK

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- $T_W^* = \text{const}$
- $\text{Re}_D > \text{Re}_{\text{krit}}$
- hydraulisch ausgebildete Strömung
- Stoffwerte bei der kalorischen Mitteltemperatur des Fluides zu Beginn der Wärmeübertragung, $T_0^* = T_{km}^*(x^* = 0)$, s. Kap. 6.2.2

Arbeitsblatt 6.6: Turbulente ausgebildete Rohr-/Kanalströmung (Kap. 6.4.2)



$$0,6 \leq \text{Pr} \leq 1000 \quad 10^4 \leq \text{Re}_D \leq 10^6 : \quad \text{Nu}_D = \frac{(\zeta/8) \text{Re}_D \text{Pr}}{1 + 12,7 \sqrt{\zeta/8} (\text{Pr}^{2/3} - 1)} \quad \text{mit} \quad \zeta = (1,8 \log_{10} \text{Re}_D - 1,5)^{-2} \quad \text{s. (6-38)}$$

$$\text{Pr} \approx 1 \quad \text{Re}_D < 10^5 : \quad \text{Nu}_D = 0,022 \text{Re}_D^{4/5} \text{Pr}^{1/2} \quad \text{für} \quad \dot{q}_W^* = \text{const} \quad \text{s. (6-39)}$$

$$\text{Nu}_D = 0,021 \text{Re}_D^{4/5} \text{Pr}^{1/2} \quad \text{für} \quad T_W^* = \text{const} \quad \text{s. (6-39)}$$

$$\text{Nu}_D = \frac{\dot{q}_W^*(x^*) D_h^*}{\lambda^*(T_W^*(x^*) - T_{km}^*(x^*))} \quad \text{Re}_D = \frac{\rho^* u_m^* D_h^*}{\eta^*} \quad \text{Pr} = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*} \quad D_h^* = \frac{4A^*}{U^*}$$

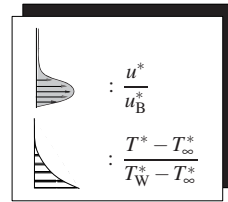
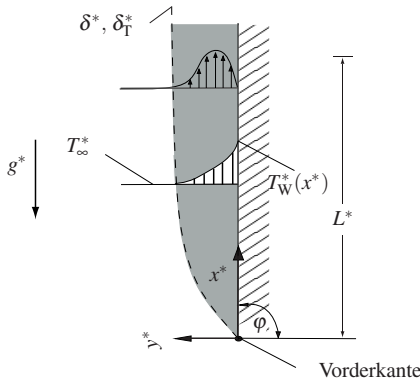
Nu_D : Nußelt-Zahl gebildet mit dem hydraulischen Durchmesser D_h^*
 $\dot{q}_W^*(x^*)$: Wandwärmestromdichte in W/m^2
 $T_W^*(x^*)$: Temperatur an der Wand bei der Koordinate x^* in K
 $T_{km}^*(x^*)$: kalorische Mitteltemperatur bei der Koordinate x^* in K
 D_h^* : hydraulischer Durchmesser des Rohres/Kanales in m

A^* : Rohr-/Kanalquerschnittsfläche in m^2
 U^* : Rohr-/Kanalumfang in m
 u_m^* : mittlere Geschwindigkeit in m/s
 λ^* : Wärmeleitfähigkeit in W/mK
 ρ^* : Dichte des Fluides in kg/m^3
 η^* : dynamische Viskosität des Fluides in kg/ms

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- $\text{Re}_D \geq \text{Re}_{\text{krit}}$
- Lauflänge $x^* > L_{\text{therm}}^* \approx 30 D_h^*$
- hydraulisch und thermisch ausgebildete Strömung
- Stoffwerte bei der kalorischen Mitteltemperatur des Fluides zu Beginn der Wärmeübertragung, $T_0^* = T_{km}^*(x^* = 0)$, s. Kap. 6.2.2

Arbeitsblatt 6.7: Wärmeübergang bei natürlicher Konvektion an einer senkrechten Wand (Kap. 6.5)



$$\frac{Nu_L}{Gr_L^{1/4}} = \frac{A}{\sqrt{2}} x^{\frac{r-1}{4}} \quad \text{s. (6-43)}$$

$$Nu_L = \frac{\dot{q}_W^*(x^*) L^*}{\lambda^* (T_W^*(x^*) - T_\infty^*)} \quad Gr_L = \frac{\rho^{*2} g^* \beta_\infty^* \Delta T_B^* L^{*3}}{\eta^{*2}} \quad Pr = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*} \quad x = \frac{x^*}{L^*}$$

Konstanten A und r je nach Randbedingung aus Tab. 6.10

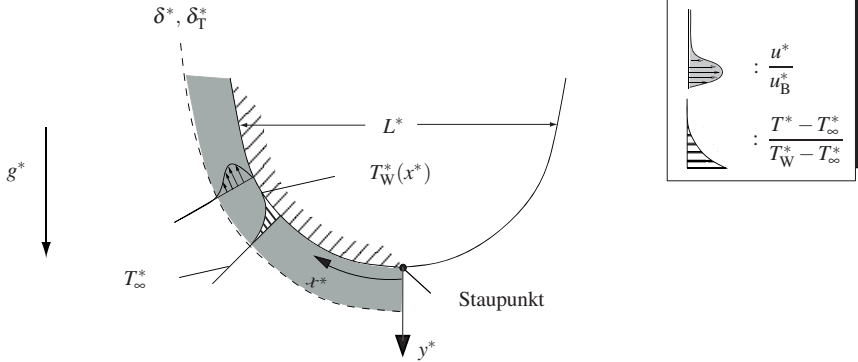
Nu_L : lokale Nußelt-Zahl bei x^*
 L^* : Bezugslänge in m
 x^* : Koordinate in m
 $\dot{q}_W^*(x^*)$: Wandwärmestromdichte bei x^* in W/m^2
 ΔT_B^* : Bezugstemperaturdifferenz in K
 $T_W^*(x^*)$: Temperatur an der Wand bei x^* in K
 $T_W^*(L^*)$: Temperatur an der Wand bei L^* in K

T_∞^* : Temperatur des umgebenden Fluides in K
 λ^* : Wärmeleitfähigkeit des Fluides in W/mK
 ρ^* : Dichte des Fluides in kg/m^3
 η^* : Viskosität des Fluides in kg/ms
 β_∞^* : isobarer thermischer Ausdehnungskoeffizient in $1/K$
 c_p^* : Wärmekapazität des Fluides in $kJ/kg K$

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- laminare Strömung
- stationär und zweidimensional
- keine Wärmesenken und -quellen
- konstante Wärmeleitfähigkeit
- Stoffwerte bei der Temperatur des umgebenden Fluides, T_∞^* , s. Kap. 6.2.2

Arbeitsblatt 6.8: Wärmeübergang bei natürlicher Konvektion im Staupunktbereich eines ebenen Körpers (Kap. 6.5)



$$\frac{\text{Nu}_L}{\text{Gr}_L^{1/4}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad \text{s. (6-45)}$$

$$\text{Nu}_L = \frac{\dot{q}_W^*(x^*) L^*}{\lambda^* (T_W^*(x^*) - T_\infty^*)} \quad \text{Gr}_L = \frac{\rho^{*2} g^* \beta_\infty^* \Delta T_B^* L^{*3}}{\eta^{*2}} \quad \text{Pr} = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*}$$

$\Delta T_B^* = (T_W^*(L^*) - T_\infty^*)$ Konstante A aus Tab. 6.11

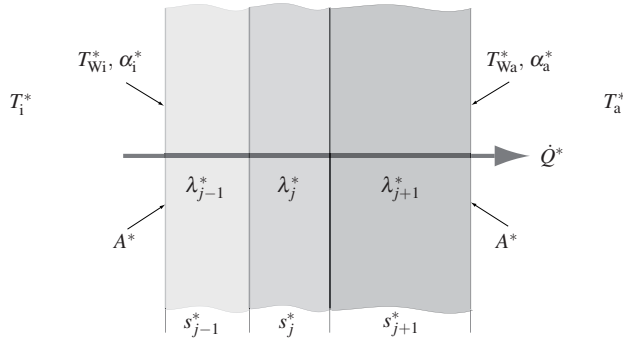
Nu_L : Nußelt-Zahl bei x^*
 L^* : charakteristische Länge in m
 $\dot{q}_W^*(x^*)$: Wandwärmestromdichte bei x^* in W/m^2
 ΔT_B^* : Bezugstemperaturdifferenz in K
 $T_W^*(x^*)$: Temperatur an der Wand bei x^* in K
 $T_W^*(L^*)$: Temperatur an der Wand bei L^* in K
 T_∞^* : Temperatur des umgebenden Fluides in K

λ^* : Wärmeleitfähigkeit des Fluides in W/mK
 ρ^* : Dichte des Fluides in kg/m^3
 η^* : Viskosität des Fluides in kg/ms
 β_∞^* : isobarer thermischer Ausdehnungskoeffizient in $1/\text{K}$
 c_p^* : Wärmekapazität des Fluides in $\text{kJ}/\text{kg K}$

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- laminare Strömung
- stationär und zweidimensional
- keine Wärmesenken und -quellen
- konstante Wärmeleitfähigkeit
- Stoffwerte bei der Temperatur des umgebenden Fluides, T_∞^* , s. Kap. 6.2.2

Arbeitsblatt 6.9: Wärmedurchgang an einer mehrschichtigen, ebenen Wand (Kap. 6.6)



$$\dot{Q}^* = q^* A^* = \frac{1}{R_k^*} (T_i^* - T_a^*) = \text{const} \quad \text{s. (6-47)}$$

$$R_k^* = \frac{1}{\alpha_i^* A^*} + \sum \frac{s_j^*}{\lambda_j^* A^*} + \frac{1}{\alpha_a^* A^*}; \quad q^* = \frac{\dot{Q}^*}{A^*} = \text{const}$$

\dot{Q}^* : Wärmestrom in W

q^* : Wärmestromdichte in W/m²

A^* : Wärmeübertragende Fläche in m²

T_i^* : Innentemperatur in K

T_a^* : Außentemperatur in K

T_{Wi}^* : Innenwandtemperatur in K

T_{Wa}^* : Außenwandtemperatur in K

R_k^* : Wärmedurchgangswiderstand in K/W

α_i^* : Wärmeübergangskoeffizient innen in W/m²K ($= q^* / (T_i^* - T_{Wi}^*)$)

α_a^* : Wärmeübergangskoeffizient außen in W/m²K ($= q^* / (T_{Wa}^* - T_a^*)$)

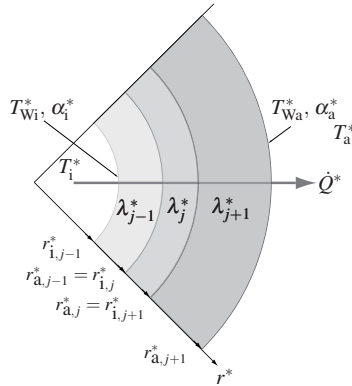
λ_j^* : Wärmeleitfähigkeit der Schicht j in W/mK

s_j^* : Dicke der Schicht j in m

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- stationär und eindimensional
- keine Wärmesenken und -quellen
- konstante Wärmeleitfähigkeit

Arbeitsblatt 6.10: Wärmedurchgang in einer mehrschichtigen Hohlzylinder- und Hohlkugelwand (Kap. 6.6)



$$\dot{Q}^* = \dot{q}^*(r^*) A^*(r^*) = \frac{(T_i^* - T_a^*)}{R_k^*} = \text{const} \quad \text{s. (6-47)}$$

Hohlzylinderwand (HZ): $R_k^* = \frac{1}{\alpha_i^* 2\pi L^* r_i^*} + \sum \frac{1}{2\pi L^* \lambda_j^*} \ln \frac{r_{a,j}^*}{r_{i,j}^*} + \frac{1}{\alpha_a^* 2\pi L^* r_a^*}; \quad \dot{q}^*(r^*) = \frac{\dot{Q}^*}{2\pi L^* r^*}$

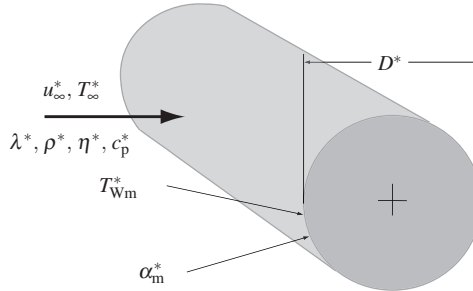
Hohlkugelwand (HK): $R_k^* = \frac{1}{\alpha_i^* 4\pi r_i^{*2}} + \sum \frac{1}{4\pi \lambda_j^*} \left(-\frac{1}{r_{a,j}^*} + \frac{1}{r_{i,j}^*} \right) + \frac{1}{\alpha_a^* 4\pi r_a^{*2}}; \quad \dot{q}^*(r^*) = \frac{\dot{Q}^*}{4\pi r^{*2}}$

\dot{Q}^* : Wärmestrom in W
 $\dot{q}^*(r^*)$: Wärmestromdichte in W/m²
 $A^*(r^*)$: Wärmeübertragende Fläche in m²
 T_i^* : Innentemperatur in K
 T_a^* : Außentemperatur in K
 T_{Wi}^* : Innenwandtemperatur in K
 T_{Wa}^* : Außenwandtemperatur in K
 R_k^* : Wärmedurchgangswiderstand in K/W
 α_i^* : Wärmeübergangskoeffizient innen in W/m²K (= $\dot{q}^*/(T_i^* - T_{Wi}^*)$)

α_a^* : Wärmeübergangskoeffizient außen in W/m²K (= $\dot{q}^*/(T_{Wa}^* - T_a^*)$)
 λ_j^* : Wärmeleitfähigkeit der Schicht j in W/mK
 L^* : Länge des Zylinders in m
 r^* : Radius in m
 r_i^* : Innenradius (min. Radius) in m
 r_a^* : Außenradius (max. Radius) in m
 $r_{i,j}^*$: Innenradius der Schicht j in m
 $r_{a,j}^*$: Außenradius der Schicht j in m

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- stationär und eindimensional
- keine Wärmesenken und -quellen
- konstante Wärmeleitfähigkeit

Arbeitsblatt 6.11: Querangeströmter Kreiszylinder (Kap. 6.7.1)

$$\text{Nu}_m = 0,3 + \frac{0,62 \text{Re}_D^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}{[1 + (0,4/\text{Pr})^{2/3}]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{\text{Re}_D}{280000} \right)^{5/8} \right]^{4/5} \quad \text{s. (6-49)}$$

$$\text{Nu}_m = \frac{\dot{q}_{Wm}^* D^*}{\lambda^* \Delta T_m^*} = \frac{\alpha_m^* D^*}{\lambda^*} \quad \text{Re}_D = \frac{\rho^* u_\infty^* D^*}{\eta^*} \quad \text{Pr} = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*}$$

$$\Delta T_m^* = T_\infty^* - T_{Wm}^*$$

Nu_m : mittlere Nußelt-Zahl

\dot{q}_{Wm}^* : mittlere Wandwärmestromdichte in W/m^2

α_m^* : mittlerer Wärmeübergangskoeffizient in $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$

D^* : Durchmesser des Kreiszylinders in m

ΔT_m^* : mittlere Temperaturdifferenz zwischen Anströmung und Wand in K

T_{Wm}^* : mittlere Temperatur an der Wand in K

T_∞^* : Anströmtemperatur in K

u_∞^* : Anströmgeschwindigkeit in m/s

λ^* : Wärmeleitfähigkeit des Fluides in W/mK

ρ^* : Dichte des Fluides in kg/m^3

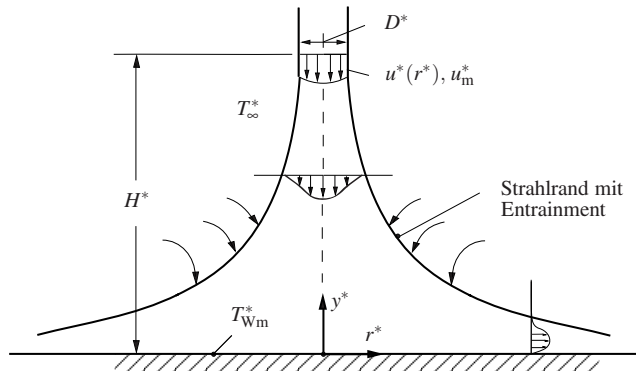
η^* : Viskosität des Fluides in kg/ms

c_p^* : Wärmekapazität des Fluides in $\text{kJ}/\text{kg K}$

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- Gültigkeitsbereich: $0,7 \leq \text{Pr} \leq 300$ und $10 \leq \text{Re}_D \leq 10^5$
- stationär und zweidimensional
- keine Wärmesenken und -quellen
- konstante Wärmeleitfähigkeit
- Stoffwerte bei Anströmtemperatur, T_∞^* , s. Kap. 6.2.2

Arbeitsblatt 6.12: Rotationssymmetrischer Prallstrahl (Kap. 6.7.3)



$$\text{Nu}_m = \text{Pr}^{0,4} \frac{1 - \frac{1,1}{R}}{R + 0,1(H - 6)} f(\text{Re}_D) \quad \text{s. (6-56)}$$

$$\text{Nu}_m = \frac{\dot{q}_{\text{Wm}}^* D^*}{\lambda^* (T_{\text{Wm}}^* - T_{\infty}^*)} = \frac{\alpha_m^* D^*}{\lambda^*} \quad \text{Re}_D = \frac{\rho^* u_m^* D^*}{\eta^*} \quad \text{Pr} = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*} \quad H = \frac{H^*}{D^*} \quad R = \frac{r^*}{D^*}$$

$$f(\text{Re}_D) = 2 [\text{Re}_D (1 + 0,005 \text{Re}_D^{0,55})]^{0,5}$$

Nu_m : mittlere Nußelt-Zahl

\dot{q}_{Wm}^* : mittlere Wandwärmestromdichte in W/m^2

α_m^* : mittlerer Wärmeübergangskoeffizient in $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$

T_{Wm}^* : mittlere Temperatur an der Wand in K

T_{∞}^* : Düsenaustrittstemperatur in K

u_m^* : mittlere Düsenaustrittsgeschwindigkeit in m/s

D^* : Düsendurchmesser in m

H^* : Abstand Düsenaustritt/Platte in m

r^* : Koordinate in radialer Richtung in m

λ^* : Wärmeleitfähigkeit des Fluides in W/mK

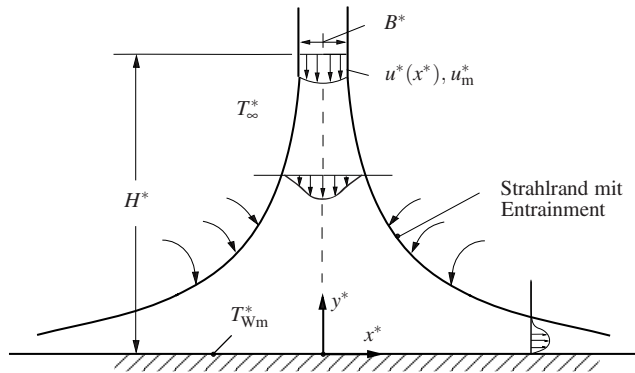
ρ^* : Dichte des Fluides in kg/m^3

η^* : Viskosität des Fluides in kg/ms

c_p^* : Wärmekapazität des Fluides in $\text{kJ}/\text{kg K}$

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- Gültigkeitsbereich: $2,5 \leq R \leq 7,5$; $2 \leq H \leq 12$ und $2000 \leq \text{Re}_D \leq 400000$
- stationär und zweidimensional (rotationssymmetrisch)
- keine Wärmesenken und -quellen
- konstante Wärmeleitfähigkeit
- Stoffwerte bei $T_m^* = (T_{\text{W}}^* + T_{\infty}^*)/2$

Arbeitsblatt 6.13: Prallstrahl aus einer Schlitzdüse (Kap. 6.7.3)

$$\text{Nu}_m = \frac{1,53 \text{Re}_{2B}^m}{x + H + 1,39} \text{Pr}^{0,42} \quad \text{s. (6-57)}$$

$$\text{Nu}_m = \frac{\dot{q}_{Wm}^* D^*}{\lambda^* (T_{Wm}^* - T_{\infty}^*)} = \frac{\alpha_m^* D^*}{\lambda^*} \quad \text{Re}_{2B} = \frac{\rho^* u_m^* 2B^*}{\eta^*} \quad \text{Pr} = \frac{\eta^* c_p^*}{\lambda^*} \quad H = \frac{H^*}{2B^*} \quad x = \frac{x^*}{2B^*}$$

$$m = 0,695 - \frac{1}{x + H^{1,33} + 3,06}$$

Nu_m : mittlere Nußelt-Zahl

\dot{q}_{Wm}^* : mittlere Wandwärmestromdichte in W/m^2

α_m^* : mittlerer Wärmeübergangskoeffizient in $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$

T_{Wm}^* : mittlere Temperatur an der Wand in K

T_{∞}^* : Düsenaustrittstemperatur in K

u_m^* : mittlere Düsenaustrittsgeschwindigkeit in m/s

B^* : Schlitzdüsenbreite in m

H^* : Abstand Düsenaustritt/Platte in m

x^* : Koordinate in Richtung der Schlitzdüsenbreite in m

λ^* : Wärmeleitfähigkeit des Fluides in W/mK

ρ^* : Dichte des Fluides in kg/m^3

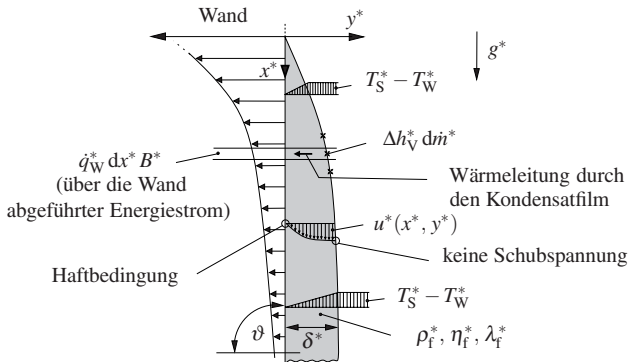
η^* : Viskosität des Fluides in kg/ms

c_p^* : Wärmekapazität des Fluides in $\text{kJ}/\text{kg K}$

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- Gültigkeitsbereich: $2 \leq x \leq 25$; $2 \leq H \leq 10$ und $3000 \leq \text{Re}_{2B} \leq 90000$
- stationär und zweidimensional
- keine Wärmesenken und -quellen
- konstante Wärmeleitfähigkeit
- Stoffwerte bei $T_m^* = (T_W^* + T_{\infty}^*)/2$

Arbeitsblatt 7.1: Laminare Filmkondensation (Kap. 7.3.1)



$$Nu_x = \frac{\dot{q}_W^* x^*}{\lambda_f^* (T_S^* - T_W^*)} = 0,707 \left[\frac{\rho_f^* (\rho_f^* - \rho_g^*) g^* \sin \vartheta \Delta h_V^* x^{*3}}{\eta_f^* \lambda_f^* (T_S^* - T_W^*)} \right]^{1/4} \quad \text{s. (7-3)}$$

$90^\circ \geq \vartheta > 30^\circ$

$$Nu_m = \frac{\dot{q}_{Wm}^* L^*}{\lambda_f^* (T_S^* - T_W^*)} = \frac{4}{3} Nu_L \quad \text{s. (7-4)}$$

$$\dot{q}_{Wm}^* = 1/L^* \int_0^{L^*} \dot{q}_W^* dx^* \quad Nu_L \text{ nach (7-3) bei } x^* = L^*$$

Nu_x : lokale Nußelt-Zahl bei x^*

Nu_m : mittlere Nußelt-Zahl zwischen $x^* = 0$ (Kondensationsbeginn) und $x^* = L^*$

Nu_L : Nußelt-Zahl bei $x^* = L^*$

\dot{q}_W^* : Wandwärmestromdichte bei x^* in W/m^2

\dot{q}_{Wm}^* : mittlere Wandwärmestromdichte zwischen $x^* = 0$ und $x^* = L^*$ in W/m^2

x^* : Koordinate in m

B^* : Plattenbreite in m

L^* : Plattenlänge in m

T_S^* : Siedetemperatur des Dampfes in K

T_W^* : Wandtemperatur in K

g^* : Erdbeschleunigung in m/s^2

ϑ : Winkel gegenüber der Horizontalen

λ_f^* : Wärmeleitfähigkeit der flüssigen Phase (Kondensat) in W/mK

ρ_f^* : Dichte der flüssigen Phase (Kondensat) in kg/m^3

ρ_g^* : Dichte der gasförmigen Phase in kg/m^3

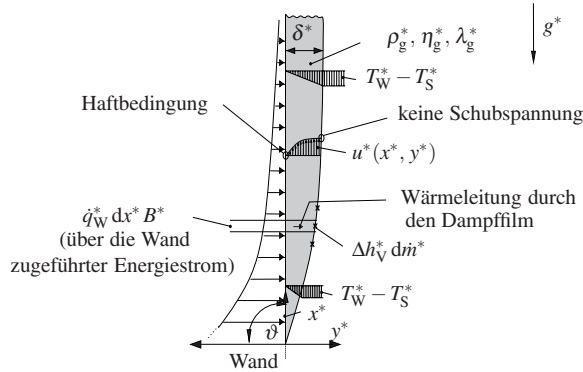
Δh_V^* : spezifische Verdampfungsenthalpie in J/kgK

η_f^* : dynamische Viskosität der flüssigen Phase in kg/ms

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- laminare Filmkondensation
- gegenüber der Horizontalen um den Winkel $90^\circ \geq \vartheta > 30^\circ$ geneigte Wand
- Stoffwerte bei Siedetemperatur T_S^*

Arbeitsblatt 7.2: Laminare Filmsieden (Kap. 7.4.1)



$$Nu_x = \frac{\dot{q}_W^* x^*}{\lambda_g^* (T_W^* - T_S^*)} = 0,85 \cdot 0,707 \left[\frac{\rho_g^* (\rho_f^* - \rho_g^*) g^* \sin \vartheta \Delta h_V^* x^{*3}}{\eta_g^* \lambda_g^* (T_W^* - T_S^*)} \right]^{1/4} \quad \text{s. (7-11)}$$

$$90^\circ \geq \vartheta > 30^\circ$$

$$Nu_m = \frac{\dot{q}_{Wm}^* L^*}{\lambda_g^* (T_W^* - T_S^*)} = \frac{4}{3} Nu_L \quad \text{s. (7-12)}$$

$$\dot{q}_{Wm}^* = 1/L^* \int_0^{L^*} \dot{q}_W^* dx^* \quad Nu_L \text{ nach (7-11) bei } x^* = L^*$$

Nu_x : lokale Nußelt-Zahl bei x^*

Nu_m : mittlere Nußelt-Zahl zwischen $x^* = 0$ (Kondensationsbeginn) und $x^* = L^*$

Nu_L : Nußelt-Zahl bei $x^* = L^*$

\dot{q}_W^* : Wandwärmestromdichte bei der Laufkoordinate x^* in W/m^2

\dot{q}_{Wm}^* : mittlerer Wandwärmestromdichte zwischen $x^* = 0$ und $x^* = L^*$ in W/m^2

x^* : Koordinate in m

B^* : Plattenbreite in m

L^* : Plattenlänge in m

T_S^* : Siedetemperatur des Dampfes in K

T_W^* : Wandtemperatur in K

g^* : Erdbeschleunigung in m/s^2

ϑ : Winkel gegenüber der Horizontalen

λ_g^* : Wärmeleitfähigkeit der gasförmigen Phase in W/mK

ρ_f^* : Dichte der flüssigen Phase (Kondensat) in kg/m^3

ρ_g^* : Dichte der gasförmigen Phase in kg/m^3

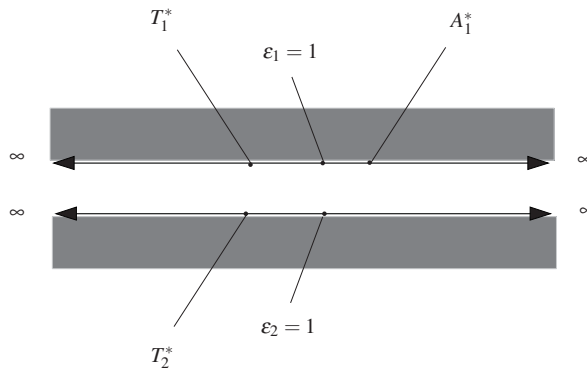
Δh_V^* : spezifische Verdampfungsenthalpie in J/kgK

η_g^* : dynamische Viskosität der gasförmigen Phase in $kg/m \cdot s$

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- laminares Filmsieden
- gegenüber der Horizontalen um den Winkel $90^\circ \geq \vartheta > 30^\circ$ geneigte Wand
- Stoffwerte bei Siedetemperatur T_S^*

Arbeitsblatt 8.1: Strahlungsaustausch zwischen zwei Schwarzen Körpern (Kap. 8.5.2)



$$\dot{Q}_{12}^* = A_1^* F_{12} \sigma^* (T_2^{*4} - T_1^{*4}) \quad \text{s. (8-30)}$$

$$\sigma^* = 5,6696 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$$

andere Flächenanordnungen mit zugehörigen Sichtfaktoren befinden sich in Tab. 8.6

\dot{Q}_{12}^* : Wärmestrom zwischen den beteiligten Flächen in W

F_{12} : Sichtfaktor nach Tab. 8.6

A_1^* : Wärmeübertragende Fläche in m^2

σ^* : Stefan-Boltzmann-Konstante in $\text{W/m}^2 \text{K}^4$

ε_1 : Emissionsgrad der Oberfläche 1

ε_2 : Emissionsgrad der Oberfläche 2

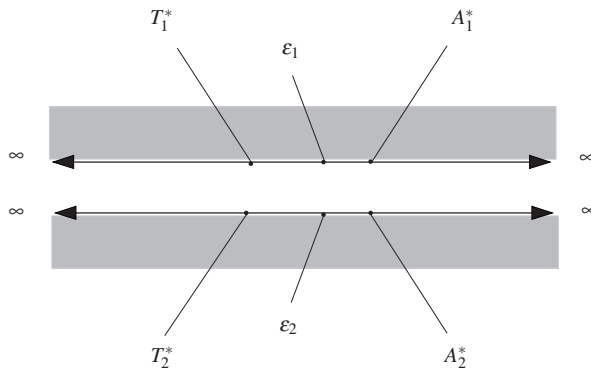
T_1^* : Oberflächentemperatur 1 in K

T_2^* : Oberflächentemperatur 2 in K

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- stationär
- zwei schwarze Flächen mit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$

Arbeitsblatt 8.2: Strahlungsaustausch zwischen zwei Grauen Körpern (Kap. 8.5.3)



$$\dot{Q}_{12}^* = \varepsilon_{12} A_1^* \sigma^* (T_2^{*4} - T_1^{*4}) \quad \text{s. (8-32)}$$

$$\sigma^* = 5,6696 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{12}} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1^*}{A_2^*} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)$$

\dot{Q}_{12}^* : Wärmestrom zwischen den beteiligten Flächen in W

A_1^* : Wärmeübertragende Fläche 1 in m²

A_2^* : Wärmeübertragende Fläche 2 in m²

σ^* : Stefan-Boltzmann-Konstante in W/m²K⁴

ε_{12} : Strahlungsaustauschzahl

ε_1 : Emissionsgrad der Oberfläche 1

ε_2 : Emissionsgrad der Oberfläche 2

T_1^* : Oberflächentemperatur 1 in K

T_2^* : Oberflächentemperatur 2 in K

Voraussetzungen / Besondere Bedingungen:

- stationär
- gültig für zwei ebene parallele Platten mit den Flächen $A_1^* = A_2^*$ oder einen Hohlraum mit der Innenfläche A_2^* , der einen Körper der Oberfläche A_1^* umschließt

B Stoffwerte

In den folgenden Tabellen sind die wichtigsten Stoffwerte für Luft und Wasser zur Berechnung der Übungsaufgaben zusammengestellt.

Tabelle B.1: Stoffwerte von Luft bei $p = 1$ bar

Daten aus Verein Deutscher Ingenieure (2002): *VDI-Wärmeatlas*, 9. Auflage, Springer-Verlag, Berlin / Kap. Dbb1

t^* °C	ρ^* $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	h^* $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$	s^* $\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$	c_p^* $\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$	β^* $10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$	λ^* $10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{mK}}$	η^* $10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$	ν^* $10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	a^* $10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	Pr -
-200	5,106	68,20	5,407	1,186	17,24	6,886	4,997	9,786	11,37	0,8606
-180	3,851	90,52	5,678	1,071	11,83	8,775	6,623	17,20	21,27	0,8086
-160	3,126	111,5	5,882	1,036	9,293	10,64	7,994	25,58	32,86	0,7784
-140	2,639	132,1	6,050	1,020	7,726	12,47	9,294	35,22	46,77	0,7602
-120	2,287	152,4	6,192	1,014	6,657	14,26	10,55	46,14	61,50	0,7502
-100	2,019	172,7	6,316	1,011	5,852	16,02	11,77	58,29	78,51	0,7423
-80	1,807	192,9	6,427	1,009	5,227	17,74	12,94	71,59	97,30	0,7357
-60	1,636	213,0	6,526	1,007	4,725	19,41	14,07	85,98	117,8	0,7301
-40	1,495	233,1	6,618	1,007	4,313	21,04	15,16	101,4	139,7	0,7258
-30	1,433	243,2	6,660	1,007	4,133	21,84	15,70	109,5	151,3	0,7236
-20	1,377	253,3	6,701	1,007	3,968	22,63	16,22	117,8	163,3	0,7215
-10	1,324	263,3	6,740	1,006	3,815	23,41	16,74	126,4	175,7	0,7196
0	1,275	273,4	6,778	1,006	3,674	24,18	17,24	135,2	188,3	0,7179
10	1,230	283,5	6,814	1,007	3,543	24,94	17,74	144,2	201,4	0,7163
20	1,188	293,5	6,849	1,007	3,421	25,69	18,24	153,5	214,7	0,7148
30	1,149	303,6	6,882	1,007	3,307	26,43	18,72	163,0	228,4	0,7134
40	1,112	313,7	6,915	1,007	3,200	27,16	19,20	172,6	242,4	0,7122
60	1,045	333,8	6,978	1,009	3,007	28,60	20,14	192,7	271,3	0,7100
80	0,9859	354,0	7,036	1,010	2,836	30,01	21,05	213,5	301,4	0,7083
100	0,9329	374,2	7,092	1,012	2,683	31,39	21,94	235,1	332,6	0,7070
120	0,8854	394,5	7,145	1,014	2,546	32,75	22,80	257,5	364,8	0,7060
140	0,8425	414,8	7,195	1,016	2,422	34,08	23,65	280,7	398,0	0,7054
160	0,8036	435,1	7,243	1,019	2,310	35,39	24,48	304,6	432,1	0,7050
180	0,7681	455,6	7,289	1,022	2,208	36,68	25,29	329,3	467,1	0,7049
200	0,7356	476,0	7,334	1,026	2,115	37,95	26,09	354,7	503,0	0,7051
250	0,6653	527,5	7,437	1,035	1,912	41,06	28,02	421,1	596,2	0,7063
300	0,6072	579,6	7,532	1,046	1,745	44,09	29,86	491,8	694,3	0,7083
350	0,5585	632,1	7,620	1,057	1,605	47,05	31,64	566,5	796,8	0,7109
400	0,5170	685,3	7,702	1,069	1,486	49,96	33,35	645,1	903,8	0,7137
450	0,4813	739,0	7,779	1,081	1,383	52,82	35,01	727,4	1015	0,7166
500	0,4502	793,4	7,852	1,093	1,293	55,64	36,62	813,5	1131	0,7194
550	0,4228	848,3	7,921	1,105	1,215	58,41	38,19	903,1	1251	0,7221
600	0,3986	903,9	7,986	1,116	1,145	61,14	39,71	996,3	1375	0,7247
650	0,3770	959,9	8,049	1,126	1,083	63,83	41,20	1093	1503	0,7271
700	0,3576	1016	8,108	1,137	1,027	66,46	42,66	1193	1635	0,7295
750	0,3402	1074	8,165	1,146	0,9772	69,03	44,08	1296	1771	0,7318
800	0,3243	1131	8,220	1,155	0,9317	71,54	45,48	1402	1910	0,7342
850	0,3099	1189	8,273	1,163	0,8902	73,98	46,85	1512	2052	0,7368
900	0,2967	1247	8,324	1,171	0,8523	76,33	48,19	1624	2197	0,7395
1000	0,2734	1365	8,420	1,185	0,7853	80,77	50,82	1859	2492	0,7458

Tabelle B.2: Stoffwerte von Wasser bei $p = 1$ bar

Daten aus Verein Deutscher Ingenieure (2002): *VDI-Wärmeatlas*, 9. Auflage, Springer-Verlag, Berlin / Kap. Db2

t^* °C	ρ^* $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	c_p^* $\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$	β^* $10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$	λ^* $10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{mK}}$	η^* $10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$	ν^* $10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	α^* $10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	Pr -
-30	983,83	4,801	-1,4078	495,7	8653,0	8,795	0,1050	83,80
-25	989,60	4,542	-0,9607	511,5	5961,3	6,024	0,1138	52,94
-20	993,57	4,401	-0,6604	523,0	4361,9	4,390	0,1196	36,70
-15	996,33	4,321	-0,4488	532,9	3338,0	3,350	0,1238	27,06
-10	998,13	4,272	-0,2911	542,3	2644,2	2,649	0,1272	20,83
-9	998,40	4,265	-0,2641	544,2	2532,6	2,537	0,1278	19,85
-8	998,66	4,258	-0,2384	546,0	2428,2	2,432	0,1284	18,94
-7	998,88	4,252	-0,2139	547,9	2330,5	2,333	0,1290	18,08
-6	999,08	4,246	-0,1904	549,8	2238,8	2,241	0,1296	17,29
-5	999,26	4,241	-0,1679	551,6	2152,7	2,154	0,1302	16,55
-4	999,42	4,236	-0,1463	553,5	2071,7	2,073	0,1308	15,85
-3	999,55	4,231	-0,1255	555,4	1995,4	1,996	0,1313	15,20
-2	999,67	4,227	-0,1055	557,3	1923,5	1,924	0,1319	14,59
-1	999,77	4,223	-0,0863	559,2	1855,7	1,856	0,1324	14,01
0	999,84	4,219	-0,0677	561,1	1791,5	1,792	0,1330	13,47
1	999,90	4,216	-0,0497	563,0	1730,9	1,731	0,1335	12,96
2	999,94	4,213	-0,0324	564,9	1673,4	1,673	0,1341	12,48
3	999,97	4,210	-0,0156	566,8	1618,9	1,619	0,1346	12,03
4	999,97	4,207	0,0006	568,7	1567,2	1,567	0,1352	11,60
5	999,97	4,205	0,0163	570,6	1518,1	1,518	0,1357	11,19
6	999,94	4,203	0,0315	572,5	1471,4	1,472	0,1362	10,80
7	999,90	4,201	0,0463	574,4	1427,0	1,427	0,1367	10,44
8	999,85	4,199	0,0606	576,3	1384,7	1,385	0,1373	10,09
9	999,78	4,197	0,0746	578,2	1344,4	1,345	0,1378	9,759
10	999,70	4,195	0,0881	580,0	1305,9	1,306	0,1383	9,445
15	999,10	4,189	0,1509	589,4	1137,6	1,139	0,1408	8,085
20	998,21	4,185	0,2066	598,5	1001,6	1,003	0,1433	7,004
25	997,05	4,182	0,2569	607,2	890,08	0,893	0,1456	6,130
30	995,65	4,180	0,3029	615,5	797,35	0,801	0,1479	5,415
35	994,04	4,179	0,3453	623,3	719,32	0,724	0,1501	4,822
40	992,22	4,179	0,3849	630,6	652,98	0,658	0,1521	4,327
45	990,22	4,179	0,4222	637,4	596,07	0,602	0,1540	3,908
50	988,05	4,180	0,4574	643,6	546,85	0,553	0,1559	3,551
55	985,71	4,181	0,4910	649,3	503,98	0,511	0,1575	3,245
60	983,21	4,183	0,5231	654,4	466,40	0,474	0,1591	2,981
65	980,57	4,185	0,5541	659,0	433,27	0,442	0,1606	2,752
70	977,78	4,188	0,5841	663,1	403,90	0,413	0,1619	2,551
75	974,86	4,192	0,6132	666,8	377,75	0,387	0,1632	2,375
80	971,80	4,196	0,6417	670,0	354,35	0,365	0,1643	2,219
85	968,62	4,200	0,6695	672,8	333,35	0,344	0,1654	2,081
90	965,32	4,205	0,6970	675,3	314,41	0,326	0,1664	1,958
95	961,89	4,211	0,7241	677,4	297,29	0,309	0,1672	1,848
99,61	958,64	4,216	0,7489	679,0	282,92	0,295	0,1680	1,757

C Standard-Werke zur Wärmeübertragung

Fettdruck: von den Autoren dieses Buches besonders empfohlen

- **Baehr, H. D.; Stephan, K. (2004): *Wärme- und Stoffübertragung*, 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin**
- Bejan, A. (1995): *Convection Heat Transfer*, 2. Aufl., John Wiley & Sons, Inc., New York
- Elsner, N.; Fischer, S.; Huhn, J. (1993): *Grundlagen der Technischen Thermodynamik, Band 2: Wärmeübertragung*, 8. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin
- Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg-Verlag, Braunschweig
- Herwig, H. (2000): *Wärmeübertragung A - Z*, Springer-Verlag, Berlin
- Holman, J. P. (1997): *Heat Transfer*, 8. Aufl., Mc Graw-Hill, Inc., New York
- **Incropera, F. P.; De Witt, D. P. (1996): *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 4. Aufl., John Wiley & Sons, New York**
- Kays, W. M.; Crawford, M. E. (1993): *Convective Heat and Mass Transfer*, 3. Aufl., Mc Graw-Hill, Inc., New York
- Merker, G. P. (1987): *Konvektive Wärmeübertragung*, Springer-Verlag, Berlin
- Özisik, M. N. (1985): *Heat Transfer – A Basic Approach*, Mc Graw-Hill, New York
- Polifke, W.; Kopitz, J. (2005): *Wärmeübertragung*, Pearson Studium, München
- Verein Deutscher Ingenieure (2002): *VDI-Wärmeatlas*, 9. Auflage, Springer-Verlag, Berlin
- Wagner, W. (2004): *Wärmeübertragung*, 6. Auflage, Vogel Buchverlag, Würzburg
- **White, F. M. (1988): *Heat and Mass Transfer*, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading (Mass.)**

Index

- Absorptionsgrad, 160
- adiabate Wand, 17
- Ausstrahlung, 150

- Beersches Gesetz, 170
- Behaeltersieden, 128
- Bewertungskriterien, 95
- Bezugstemperatur, 66
- Biot-Zahl, 28
- Blasensieden, 130, 134
- Blockkapazität, 30
- Bond-Zahl, 121

- Dampfdruckkurve, 118
- diffuse Strahlung, 155
- Dimensionsanalyse, 9, 120

- Eckert-Zahl, 12, 121
- Einstrahlung, 150
- Einstrahlzahl, 165
- Elektromagnetische Spektrum, 148
- Emissionsgrad, 158
- Entropie, 19
- Entropieproduktion, 19, 98, 100
- Exergetische Analyse, 98

- Fehlerfunktion, 33
- Filmkondensation, 122
 - mit Inertgas, 125
- Filmsieden, 131
- Fouling, 191
- Fourier-Ansatz, 23
- Froude-Zahl, 12

- Gasstrahlung, 169
- Gefühlte Temperatur, 104
- gerichteter Gesamt-Absorptionsgrad, 160
- gerichteter Gesamt-Emissionsgrad, 158
- gerichteter Gesamt-Reflexionsgrad, 162
- gerichteter spektraler Absorptionsgrad, 160
- gerichteter spektraler Emissionsgrad, 158
- gerichteter spektraler Reflexionsgrad, 162
- gleichwertige Schichtdicke, 170
- Globalstrahlung, 174
- Grashof-Zahl, 12, 66, 87, 121
- Grauer Lambert-Strahler, 161
- Grauer Strahler, 161
- Grenzschichten, 69

- hemisphärischer Gesamt-Absorptionsgrad, 160
- hemisphärischer Gesamt-Emissionsgrad, 158
- hemisphärischer spektraler Absorptionsgrad, 160
- hemisphärischer spektraler Emissionsgrad, 158
- hemisphärischer spektraler Reflexionsgrad, 162
- Hohlraumstrahlung, 156
- Hybridwärmespeicher, 199
- hydraulischer Durchmesser, 75

- Inertgas-Zusatz, 132
- Infrarot-Thermografie, 207

- Jacobs-Zahl, 121

- kalorische Mitteltemperatur, 54
- Karman-Konstante, 80
- Kennzahlen, 10
- Kirchhoffsche Gesetze, 160
- Kondensation, 117, 122
- Kondensator, 192
- konjugierte Probleme, 17
- konstitutive Gleichung, 23
- Kopplungseffekt, 24, 205
- kritische Wärmestromdichte, 132
- kritischer Durchmesser, 102
- Kühlgrenztemperatur, 142

- Lambert-Strahler, 161

- Lambertsches Cosinusgesetz, 155
 L  v  que-Lösung, 78
 Mach-Zahl, 12
 natürliche Konvektion, 61
 direkte, 62
 indirekte, 63
 normal-spezifische spektrale Ausstrahlungsdichte, 154
 Nu  belt-Zahl, 12, 13, 121
 für Rohre und Kanäle, 76
 Nukiyama-Experiment, 139
   konomische Analyse, 97
 opake Oberfläche, 148, 157
 optische Dicke, 170
 Prandtl-Zahl, 12, 121
 Randbedingungen, 17, 63
 Raumwinkel, 153
 Rayleigh-Streuung, 169, 174
 Referenztemperatur, 68
 Referenztemperatur-Methode, 68
 Reflexionsgrad, 162
 Relevanzliste, 28
 für instationäre Wärmeleitung, 33
 für konvektive Wärmeübergänge, 12
 Reynolds-Zahl, 12, 69, 121
 kritische, 68
 Schwarzer Körper, 151
 Schwarzkörperstrahlung, 156
 Seebeck-Effekt, 205
 Sichtfaktor, 164
 Siedekrise (1. Art), 132
 Siedekrise (2. Art), 138
 Sieden, 117, 128
 Solarkonstante, 171
 Solarstrahlung, 171
 spektraler Absorptionskoeffizient, 169
 spektraler Transmissionsgrad, 163
 spezifische Ausstrahlung, 153
 spezifische spektrale Ausstrahlung, 151
 spezifische spektrale Ausstrahlungsdichte, 154
 Stanton-Zahl, 82
 Stefan-Boltzmann-Gesetz, 153
 Stefan-Boltzmann-Konstante, 153
 Stilles Sieden, 129
 Stoffwerte
 konstante, 66
 quasi-konstante, 67
 variable, 67
 Stoffwertverhältnis-Methode, 67
 Strahlungsaustausch, 167
 Strahlungsaustauschzahl, 168
 Stroemungskondensation, 127
 Temperaturgrenzschicht, 58, 69
 Temperaturleitfähigkeit, 24
 Temperaturmessung, 203
 thermische Einlaufänge, 74, 82
 thermische Energiegleichung, 65
 Thermoelement, 204
 Thermosyphon, 200
 Treibhaus, 175
 Treibhauseffekt, 174
 Tropfenkondensation, 125
 Turbulenz, 58
 unterkühltes Sieden, 134
 Verdampfer, 194
 Verdunstungskühlung, 135, 141
 Wärme, 3
 Wärmedämmung, 101
 Wärmedurchgang, 88
 Wärmedurchgangskoeffizient, 88
 Wärmedurchgangswiderstand, 89
 Wärmeleitfähigkeit, 23, 60
 Wärmeleitung, 15, 16, 21
 eindimensional, 25
 instationäre, 28
 Wärmeleitungsgeschwindigkeit, 35
 Wärmeleitungsgleichung, 24
 Wärmeleitwiderstand, 26
 Wärmerohr, 199
 Wärmespeicher, 195
 Wärmestrahlung, 15, 147
 Wärmestromdichte, 5
 Wärmeübergang
 am Kreiszylinder, 90
 an der ebenen Platte, 71
 an Kreiszylinder-Bündeln, 92

- bei Durchströmungen, laminar, 74
- bei Durchströmungen, turbulent, 82
- bei natürlicher Konvektion, 85
- bei Prallstrahlen, 93
- bei Umströmungen, laminar, 69
- bei Umströmungen, turbulent, 78
- im Staupunkt, 72
- konvektiver, 15, 16, 53
- Zweiphasen-, 15, 16
- Wärmeübergangskoeffizient, 5
 - für Strahlung, 168
 - Messung, 34
- Wärmeübergangswiderstand, 6
- Wärmeübertrager, 189
- Wärmeübertragung, 4
 - reversible, 20
- Wandüberhitzung, 117, 129
- Wandunterkühlung, 118
- Widerstandsthermometer, 204
- Wiensches Verschiebungsgesetz, 152
- Zweiphasen-Wärmeübergang, 117
- Zweischichtenstruktur, 59