Vorlesung Baumautomaten (Mitschrift)

Benedikt Elßmann (3720358)
be57xocu@studserv.uni-leipzig.de

Universität Leipzig

24. April 2019

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Automaten lesen Wörter $w = a_1 \dots a_n$ und geben "accept" aus oder nicht.
Dafür gibt es Erweiterungen, wie etwa:

- gewichtete Automaten, das heißt der Output ist ein Semiringelement
- Automaten mit Gedächtnis (Stack)
- Automaten über anderen Strukturen
  - ω-Wörter $w = a_1 \dots a_n$
  - Graphen
  - Bäume

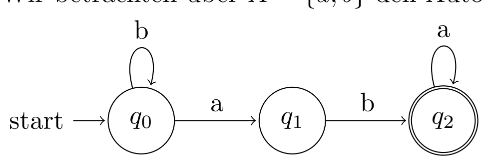
  - Kombinationen dieser

Typische Fragestellungen:

- Ausdrucksstärke
- Darstellung als rationale Ausdrücke (Kleene)
- Darstellung als Grammatik
- Darstellung als Logik

1 Bäume und Baumautomaten

Wir betrachten über $A = \{a, b\}$ den Automaten $\mathcal{A}$:

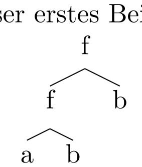


mit $L(\mathcal{A}) = b^*aba^*$.
Betrachtung des Wortes $w = baba \in L(\mathcal{A})$:

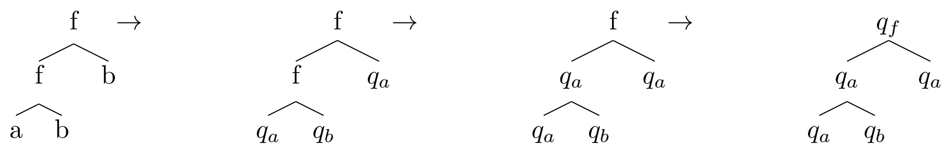
Der eindeutige erfolgreiche Lauf für w lässt sich darstellen als:

$q_0baba \to bq_0aba \to baq_1ba \to babq_2a \to babaq_2 \in F$ (Finalzustand)

Baumautomaten funktionieren analog. Unser erstes Beispiel wird



Akzeptiert mit dem Lauf:



mit $q_f \in F$

1.1 Definition Rangalphabet

Ein paar (Σ, rk), wobei Σ eine endliche Menge von Symbolen und $rk : \Sigma \to \mathbb{N}$ eine Abbildung ist, heißt Rangalphabet.
Für $f \in \Sigma$ heißt $rk(f)$ der Rang (oder die Stelligkeit) von f.

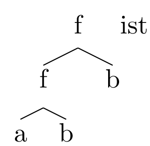
Intuitiv: $rk(f)$ ist die Anzhal der Kinder von f in einem Baum.
Insbesondere ist die Anzahl der Kinder für jedes Symbol fest.

Gilt $rk(f) = n$, schreiben wir auch $f^{(n)}$ statt f. wir schreiben:

- 0-stellige Symbole (Konstanten) $a, b, \ldots$
- unär, binär, $\ldots f, g, \ldots$

Wir setzen $\Sigma^{(n)} = \{f \in \Sigma | rk(f) = n\}$

In



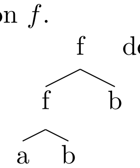
ist also $rk(f) = 2, rk(b) = 0$

1.2 Definition Term, Tree

Sei (Σ, rk) ein Rangalphabet. Die Menge T_Σ der Bäume üeber Σ ist induktiv definiert durch:

- $\Sigma^0 \subseteq T_\Sigma$
- $f^{(n)} \in \Sigma$. $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma$, dann ist $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma$

Intuitiv sind $t_1, \ldots, t_n$ die Kinder von f.
Z.B. ist



der Term $f(f(a, b), b)$.

1.3 Definition Höhe

Sei (Σ, rk) ein Rangalphabet. Die Höhe ht ist gegeben durch:

- für $a^{(0)} \in \Sigma : ht(a) = 1.$
- für $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma : ht(f) = 1 + max\{ht(t_i)|i \in \{i, \ldots, n\}\}$

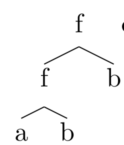
Ziel: Zugriff auf einen Knoten innterhalb eines Baumes und deren Label.
Dafür ordnen wir den Knoten Positionen zu. Das geht induktiv wie folgt:

1.4 Definition Position

Sei (Σ, rk) ein Rangalphabet. Die Positionenmenge ist definiert durch:

- für $a^{(0)} \in T_\Sigma$ ist $Pos(a) = \{\varepsilon\}$
- für $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma$ ist $Pos(f(t_1, \ldots, t_n)) = \{\varepsilon\}1 \cdot Pos(t_1) \cup \cdots \cup n \cdot Pos(t_n)$

Beispiel:
Betrachtung von $f(f(a, b), b)$ bzw.



der Term $f(f(a, b), b)$

$Pos(f) = \{\varepsilon, 1, 2, 1.1, 1.2\}$

1.5 Definition der Label an den Positionen

Für einen Term der Form $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ ist das Symbol $t(p)$ in t an p-ter Position induktiv definert durch:

- $t(\varepsilon) = f$
- $t(ip) = t_i(p), i \in \{1, \ldots, n\}$

Beispiel: Betrachtung von $f(f(a, b), b)$
Dann ist
$t(\varepsilon) = f$
$t(1) = t(1 \cdot \varepsilon) = t_1(\varepsilon) = f$
$t(2) = t(2 \cdot \varepsilon) = t_2(\varepsilon) = b$
$t(1.1) = t_1(1) = a$
$t(1.2) = t_2(1) = b$

1.6 Definition Sub-Baum

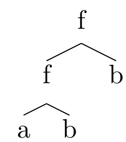
Für T_Σ ist ein Sub-Baum $t_{|p}$ an p-ter Position wie folgt definiert:

- $Pos(t_{|p}) = \{i|pi \ \in Pos(t)\}$

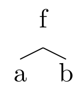
- $\forall q \in Pos(t_{|p}$ ist $t_{|p}(q) = t(pq)$

Wir schreiben $t[u]_p$ für den Baum, der entsteht, wenn man in t den sub-Baum $t_{|p}$ durch n ersetzt.

Beispiel: $f(f(a,b),b)$ bzw.

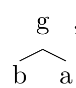


$t_{|1} = f(a,b)$



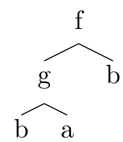
$t_{|2} = t(1.2) = b$

$u = g(b,a)$



, dann ist

$t[u]_{|1} = f(g(b,a),b)$



1.7 Definition Baumautomat

Ein Buamautomat $\mathcal{A}$ ist ein 4-Tupel (Q, Σ, F, Δ), wobei:
$Q \ldots$ endliche Menge an Zusänden
$\Sigma \ldots$ Rangalphabet, wobei $\Sigma \cup Q \neq \emptyset$
$F \cdots \subseteq Q$ Finalzustände
$\Delta \ldots$ Menge von Regeln

$r : f(q_1 \ldots q_n) \to q$
für $q, q_1, \ldots, q_n \in Q$, für $a^{(0)} \in T_\Sigma : a \to q$

Beispiel:
$\mathcal{A} = \{\{q_a, q_b, q_f\}, \{a^{(0)}, b^{(0)}, f^{(2)}\}, \{q_f\}, \Delta\}$
mit $\Delta = \{a \to q_a, b \to q_b, f(q_a, q_b) \to q_a, f(q_a, q_b), f(q_a, q_b) \to q_f\}$

1.8 Definition Lauf/Run

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ ein Baumautomat und $t \in T_\Sigma$. Ein Lauf r für t von $\mathcal{A}$ ist ein Term mit

- $Pos(r) = Pos(t)$
- Ist $t(p) = a$ ein Blatt, dann ist $r(p) = q_a$, nur wenn $(a \to q_a) \in \Delta$
- Ist $t(p) = f^{(m)}$, dann ist $r(p) = q$, wenn $(f(q_1, \ldots, q_n) \to q) \in \Delta$ und $r(p_i) = q_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$

Ein Lauf ist erfolgreich, wenn $r(\varepsilon) \in F$. Der Automat $\mathcal{A}$ akzeptiert t, falls es einen erfolgreichen Lauf für t von $\mathcal{A}$ gibt.
Wir bezeichnen mit $L(\mathcal{A}) = \{t \in T_\Sigma | \mathcal{A} \text{ akzeptiert } t\}$ die von $\mathcal{A}$ erkannte Baumsprache. Eine Sprache $L \subseteq T_\Sigma$ heißt erkennbar, falls ein Baumautomat $\mathcal{A}$ existiert mit $L = L(\mathcal{A})$.

Um einzelne Schritte von Baumautomaten zu formalisieren, betrachten wir die *move relation* $\rightarrow_{\mathcal{A}}$, definiert wie folgt:
Gegeben sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$, dann ist $t \rightarrow_{\mathcal{A}} t'$ mit $t, t' \in T_{\Sigma \cup Q}$, falls

- $t(p) = f^{(n)}$
- $t(pi) = q_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und p_i sind Blätter
- $(f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q) \in \Delta$
- und $t' = t[q]_p$

Mit $\rightarrow^*_{\mathcal{A}}$ bezeichnen wir die transitive Hülle von $\rightarrow_{\mathcal{A}}$.

1.9 Lemma

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ ein Baumautomat. Dann ist $L(\mathcal{A}) = \{t \in T_\Sigma | t \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q \text{ mit } q \in F\} (= Z)$

Beweis: „$L(\mathcal{A}) \subseteq Z$“:

Wir zeigen: Es existiert ein Run r für t von $\mathcal{A}$ mit $r(\varepsilon) = q$, dann ist $t \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q$

Inuktionsannahme:
$t = a^{(0)} \in T_\Sigma$. Dann gilt $a \in L(\mathcal{A})$, falls ein Lauf r existiert mit $r(a) = q_a$ und $(a \rightarrow q_a) \in \Delta$. Dann folgt $a \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q_a$.
Sei nun $t = f(t_1, \dots, t_n)$

Induktionsvoraussetzung:
Falls für $t_1, \dots, t_n$ Läufe r_i existieren mit $r_i(\varepsilon) = q_i$, dann gilt auch $t_i \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q_i$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$

Induktionsschritt:
zu zeigen: Es existiert ein Lauf r für t mit $r(\varepsilon) = q$, dann $t \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q$.
Sei also r ein Lauf mit $r(\varepsilon) = q$. Dann ist $r(i) = q_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, mit $(f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q) \in \Delta$.
Laut Induktionsvoraussetzung gilt nun, $t_i \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$.
Damit $t = f(t_1, \dots, t_n) \rightarrow^*_{\mathcal{A}} f(q_1, t_2, \dots, t_n) \rightarrow^*_{\mathcal{A}} \dots \rightarrow^*_{\mathcal{A}} f(q_1, \dots, q_n)$
Des weiteren haben wir die regel $f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q$, das heißt $f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q$.

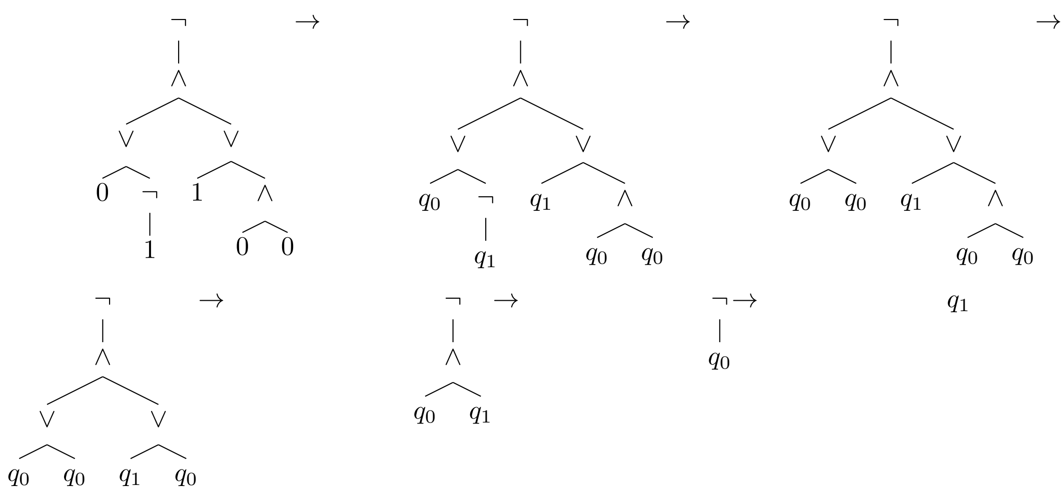
Insgesamt also $t \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q$

Beweis: „$L(Z \subseteq \mathcal{A})$“: analog

Einige Beispiele für Baumautomaten:

1. Sei $B = (\{q_0, q_1\}, \{0^{(0)}, 1^{(0)}, \neg^{(1)}, \wedge^{(2)}, \vee^{(2)}\ \{q_1\}, \Delta\}$ mit
$\Delta = \{0 \to q_0, 1 \to q_1,$
$\neg(q_0) \to q_1, \neg(q_1) \to q_0,$
$\wedge\,(q_0, q_0) \to q_0, \wedge(q_0, q_1) \to q_0, \wedge(q_1, q_0) \to q_0, \wedge(q_1, q_1) \to q_1$
$\vee\,(q_0, q_0) \to q_0, \vee(q_0, q_1) \to q_1, \vee(q_1, q_0) \to q_1, \vee(q_1, q_1) \to q_1\}$

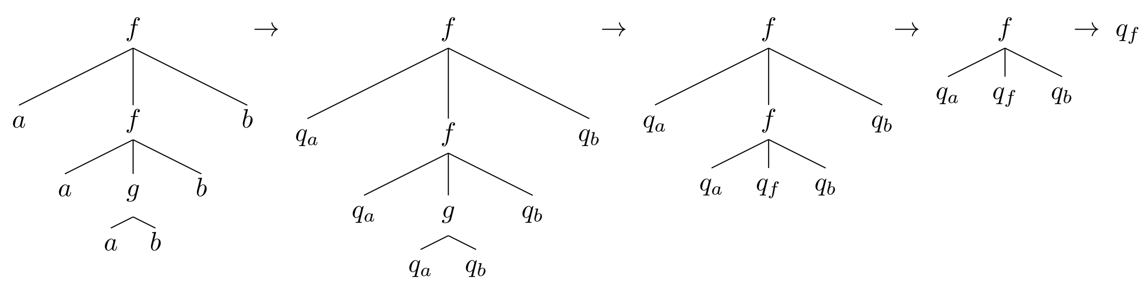
Beispiellauf:



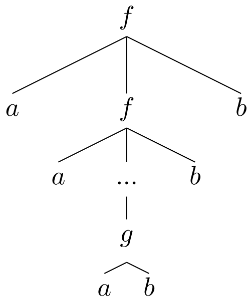
2. $(a^n b^n light)$

Betrachten $\mathcal{A} = (\{q_a, q_b, q_f\}, \{a^{(0)}, b^{(0)}, f^{(3)}, g^{(2)}\}, \{q_f\}, \Delta)$
mit $\Delta =$
$\{a \to q_a, b \to q_b, g(q_a, q_b) \to q_f, f(q_a, q_f, q_b) \to q_f\}$

Beispiellauf:



$\mathcal{A}$ akzeptiert also alle Bäume der Form:



3. Simulation eines Wortautomaten: (siehe Übung)

Betrachtet man $\Sigma = \{a^{(0)}, f^{(2)}, g^{(1)}\}$. Dann ist $L = \{f(g^i(a), g^i(a)) | i \geq 0\}$ nicht erkennbar.

1.10 Definition Determinismus

Ein Automat $\mathcal{A}(Q, \Sigma, F, \Delta)$ heißt deterministisch, falls: aus $f(q_1, \ldots, q_n) \to q$ und $f(q_1, \ldots, q_n) \to q'$ folgt $q = q'$

1.11 Satz

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ ein Baumautomat, dann existiert ein deterministischer Baumautomat $\mathcal{A}_d$, so dass $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_d)$.

Beweis: Setze $\mathcal{A}_d = (Q_d, \Sigma, F_d, \Delta_d)$
mit $Q_d = 2^Q$ $(*)$
und $f(s_1, \ldots, s_n) \to s \in \Delta_d$
$\Leftrightarrow s = \{q \in Q | \exists q_1 \in s_1 \ldots q_n \in s_n : (f(q_1, \ldots, q_n) \to q) \in \Delta\}$
und $F_d = \{s \in Q_d | s \cap F \neq \emptyset\}$.

Wir zeigen:
1. $\mathcal{A}$ ist deterministisch
2. $L(\mathcal{A}) \subset L(\mathcal{A}_d)$
3. $L(\mathcal{A}_d) \subset L(\mathcal{A})$

1. ist klar, denn $(*)$ ist mit einer Äquivalenz definiert.
2. „$L(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{A}_d)$“:

Wir zeigen hierzu: Ist $Z = \{q | t \to_{\mathcal{A}}^* q\}$, dann $t \to_{\mathcal{A}_d}^* z$.

Induktionsannahme:
Angenommen $a \to_{\mathcal{A}} q_a$, dann ist $q_a \in \{q \in Q | q \to_{\mathcal{A}}^* q\}$, das heißt

$a \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q_a \Leftrightarrow q_a \in \{q \in Q | a \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q\}$
$\Leftrightarrow q_a \in \{q \in Q | (a \rightarrow q) \in \Delta\}$
also $a \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q_a \Leftrightarrow q_a \in \{q \in Q | (a \rightarrow q) \in \Delta\}$, das heißt
$z := \{q_a \in Q | a \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q_a\} = \{q \in Q | (a \rightarrow q) \in \Delta\} =: s$

Nun ist $(a \rightarrow s) \in \Delta_d$ per Definition, also auch $(a \rightarrow z) \in \Delta_d$, damit: $a \rightarrow^*_{\mathcal{A}_d} z$.

Betrachten wir nun $t = \sigma(t_1, \ldots, t_n)$

Induktionsvoraussetzung:
$t_i \rightarrow^*_{\mathcal{A}_d} z_i$ mit $Z_i = \{q \in Q | t_i \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q\}$
Das heißt, es existieren Läufe r_i für t_i von $\mathcal{A}_d$ mit $r_i(\varepsilon) = z_i$

Induktionsschritt:
zu zeigen: $t \rightarrow^*_{\mathcal{A}} z$ mit $Z = \{q \in Q | t \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q\}$
Das heißt, es existiert ein Lauf r für t von $\mathcal{A}_d$ mit $r(\varepsilon) = z$
Das heißt, $\exists r$:

- $r(\varepsilon) = z$
- $r(i) = z_i$
- $\sigma(z_1, \ldots, z_n) \rightarrow z \in \Delta_d$

Setze nun $r_{|i} = r_i$, damit ist insbesondere $r(i) = r_i(\varepsilon) = z := \{q | t_i \rightarrow^*_{\mathcal{A}_d} q\}$

Es bleibt also zu zeigen: $\exists$ Regel $\sigma(z_i, \ldots, z_m) \rightarrow z \in \Delta_d$.
Es ist nun $z \in Z \Leftrightarrow t \rightarrow^*_{\mathcal{A}} z$
$\Leftrightarrow \exists q_i \in Q : t_i \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q_i, \sigma(q_1, \ldots, q_m) \rightarrow z \in \Delta$
$\Leftrightarrow \exists z_i \in Z_i$ und $\sigma/z_1, \ldots, z_m) \rightarrow z \in \Delta$
Also $Z = \{z \in Q | \exists z_i \in Z_i : (\sigma/z_1, \ldots, z_m) \rightarrow z) \in \Delta)$ also per Definition $\sigma/z_1, \ldots, z_m) \rightarrow z \in \Delta_d$

2. „$L(\mathcal{A}_d) \subseteq L(\mathcal{A})$“:

Sei $t \in T_\Sigma$ mit $t \notin L(\mathcal{A})$, dann ist $Z \cap F = \{q \in Q | t \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q\} \cap F = \emptyset$
Laut 2. ist $t \rightarrow^*_{\mathcal{A}_d} z$ (und $\mathcal{A}$ ist deterministisch) Wegen $Z \cap F = \emptyset$ ist $Z \notin F_d$, also $t \notin L(\mathcal{A}_d)$

Wir vereinbaren die Abkürzungen: NBA/NTA für nichtdeterministischer Baumautomat und DBA/DTA für deterministischer Baumautomat.
Wie im Wortfall ist die Konstruktion exponentiell, das heißt wir benötigen expontntiell viele Zustände ($Q_d = 2^{|Q|}$). Und wie im Wortfall lässt sich das im Allgemeinen nicht vermeiden.

Beispiel: Betrachtet man $\Sigma = \{f^{(1)}, g^{(1)}, a^{(0)}\}$ und sei $L_n = \{f \in T_\Sigma | t(\underbrace{1 \ldots 1}_{\text{n-mal}}) = f\}$

Ein NTA benötigt $n+2$ Zustände:
$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ mit $Q = \{q, q_1, \ldots, q_{n+1}\}$, $F = \{q_{n+1}\}$
mit Übergängen $\Delta = \{a \to q, f(q) \to q, g(q) \to q, f(q) \to q_1,$
$f(q_i) \to q_{i+1}, g(q_i) \to q_{i+1}\}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$

Man kann zeigen: Ein DTA $\mathcal{A}'$ mit $L(\mathcal{A}') = L_n$ hat mindestens 2^{n+1} Zustände.

1.12 Definition vollständing und reduziert

Ein Automat ($\mathcal{A} = Q, \Sigma, F, \Delta$) heißt:

- vollständig, falls für jedes $f^{(n)} \in \Sigma$ und alle $q_1, \ldots, q_n \in Q$ eine Regel $f(q_1, \ldots, q_n) \to q \in \Delta$ existiert.
- reduziert, falls für jeden Zustand $q \in Q$ ein Term $t \in T_\Sigma$ exisitert mit $f \to^*_{\mathcal{A}} q$

1.13 Satz

Sei $\mathcal{A}$ ein Baumautomat. Dann existiert ein vollständiger, reduzierter Baumautomat $\mathcal{A}'$ mit $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$.

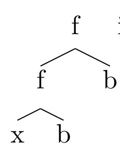
Für Wortautomaten gibt es das Pumping-Lemma, das die Gedächtnislosigkeit der Automaten formalisiert. Formal besagt es: Ist L eine reguläre Wortsprache, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass sich $w \in L$ mit $|w| > n$ zerlegen lässt in $w = xyz$, $y \neq \varepsilon$ und $\forall i \geq 0$ ist $xy^iz \in L$.

Baumautomaten haben auch kein Gedächtnis, also erwarten wir ein analoges Resultat. Dazu müssen wir formalisierten, was „aufgepumpt “werden soll.

1.14 Definition Kontext

Es sei Σ ein Rangalphabet und $x^{(0)} \notin \Sigma$. Es sei $C \in T_{\Sigma \cup \{x\}}$. Falls es genau eine Position $p \in Pos(C)$ gibt mit $C(p) = x$, dann heißt C ein Kontext.

Beispiel:

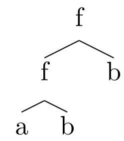


ist ein Kontext.

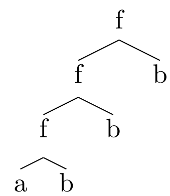
Wir schreiben $T_\Sigma(x)$ für die Menge aller solcher Kontexte.

Ist $C \in T_\Sigma(x)$ mit $C(p) = x$, dann schreiben wir $C[u]$ statt $C[u]_p$ für den Baum, der entsteht, wenn wir x durch u ersetzen.
Wir schreiben $C^0 = x$, $C^1 = C$, $C^n = C^{n-1}[C]$

Beispiel: Betrachtet $t =$



Setze $u = f(a,b)$ und $C = f(x,b)$.
Dann ist $t = C[u]$ und $C^2[u] =$

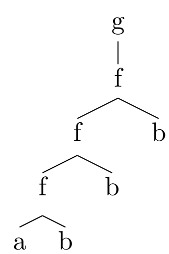


1.15 Pumping-Lemma

Sei $L \subseteq t_\Sigma$ erkennbar, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass:
Für alle $T \in L$ mit $ht(t) > k$ gibt es einen Kontext $C \in T_\Sigma(x)$, einen nicht-trivialen Kontext $C' \in T_\Sigma(x)$ und einen Term $u \in T_\Sigma$ mit $t = C[C'[u]]$ und $C[(C')^n[u]] \in L$ für alle $n \geq 0$.

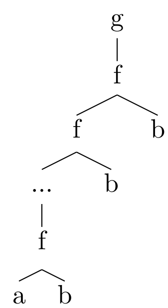
Beweis: Sei L erkennbar, das heißt $\exists$ Baumautomat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ mit $L = L(\mathcal{A})$. Setze $|Q| = k$ und betrachte $t \in L$ mit $ht(t) > k$. Betrachte nun einen Lauf r und einen Pfad in t, der länger als k ist. Nun gibt es $p_1, p_2 \in Pos(r)$ mit $r(p_1) = r(p_2) = q \in Q$. Sei nun $u = t_{|p_2}$ der Sub-Baum von t bei p_2 und $u' = t_{|p_1}$. Dann existiert C' mit $C'[u] = u'$ und es existiert C mit $t = C[C'[u]]$. Es ist wegen $t \in L$
$C[C'[u]] \rightarrow^*_{\mathcal{A}} C[C'[q]] \rightarrow^*_{\mathcal{A}} C[q] \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q_f \in F$, also auch
$C[(C')^n[u]] \rightarrow^*_{\mathcal{A}} C[(C')^n[q]] \rightarrow^*_{\mathcal{A}} CC[(C')^{(n-1)}[q]] \rightarrow^*_{\mathcal{A}} \cdots \rightarrow^*_{\mathcal{A}} C[q] \rightarrow^*_{\mathcal{A}} q_f \in F$. q.e.d.

Beispiel: Betrachte den Baumautomaten $\mathcal{A} = (\{q_a, q_b, q_g, q_f\}, \{a^{(0)}, b^{(0)}, g^{(1)}, f^{(2)}\}, \{q_f\}, \Delta)$ mit
$\Delta = \{a \rightarrow q_a, b \rightarrow q_b, f(q_a, q_b) \rightarrow q_g, g(q_g) \rightarrow q_f\}$



$u = f(a,b)$, $u' = C'[u] = f(f(a,b),b)$
$C = g(f(x,b))$, $C' = f(x,b)$

$C[(C')^n[u]] =$



Die Sprache $L = \{f(g^i(a), g^i(a)) | i \geq 0\}$ kann nicht erkennbar sein, denn für große i würde man ein k finden, so dass ein gegebener Baumautomat auch $f(g^{i+lk}(a), g^i(a))$ für alle $l \geq 0$ akzeptiert.

1.16 Korollar

Für $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ ist $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists t \in L$ mit $ht(t) \leq |Q|$:

- $L(\mathcal{A})|$ nicht endlich $\Leftrightarrow \exists t \in L$ mit $|Q| < ht(t) \leq 2|Q|$

1.17 Abschlusseigenschaften

Erkennbare Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung, Schnitt und Komplement. Das heißt, sind L_1 und L_2 erkennbar, dann auch $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$ und L_1^c (in T_Σ).

Beweis:
Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ vollständige DTA. Betrachte für die Vereinigung
$\mathcal{A}_\cup = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2, \Delta_1 \times \Delta_2)$ mit
$\Delta_1 \times \Delta_2 = \{f((q_1, q_1'), \ldots, (q_n, q_n')) \to (q, q') | f(q_1, \ldots, q_n) \to q \in \Delta_1, f(q_1', \ldots, q_n') \to q' \in \Delta_2\}$
Dann akzeptiert $\mathcal{A}_\cup$ die Sprache $L(\mathcal{A}_1) \cup L(\mathcal{A}_2)$.

Für $L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$ betrachte den Automaten
$\mathcal{A}_\cap = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, F_1 \times F_2, \Delta_1 \times \Delta_2)$

Für $T_\Sigma\ L(\mathcal{A}_1) = L(A_1)^c$ betrachte
$\mathcal{A}_C = (Q_1, \Sigma, Q_1\ F_1, \Delta_1)$.
Der Automat A_C akzeptiert $L(A_1)^c$.

Beispiel:

Betrachte $\Sigma = \{a^{(0)}, g^{(1)}, f^{(2)}\}$ und $L = \{f(g^i(a), g^j(a)) | i \leq j\}$
Dann ist L nicht erkennbar, denn: Wäre L erkennbar, dann auch L' mit $L' = \{f(g^i(a), g^j(a) | i \geq j\}$, also auch $L \cap L'$ ↯.

Bemerkung: Wenn $\mathcal{A}$ deterministisch und vollständig ist, dann können wir eine Übergangsfunktion $\delta : T_\Sigma \to Q$ definieren mit $\delta(t) = q$, fals $t \to_{\mathcal{A}}^* q$.

Wiederholung - Äquivalenzrelation:

Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M ist eine Relation mit

- $\forall m \in M : m \sim m$
- $\forall m, n \in M : m \sim n \Rightarrow n \sim m$
- $\forall l, m, n \in M : l \sim m, m \sim n \Rightarrow l \sim n$

Insbesondere: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, so induziert $\sim$ eine Partition auf und umgekehrt, das heißt Mengen $(M_i)_{i \in I}$ mit $M_i \cup M_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $M = \bigcup_{i \in I} M_i$

1.18 Definition Kongruenz

Eine Äquivalenzrelation $\equiv$ auf T_Σ heißt Kongruenz, falls für alle $f^{(n)} \in \Sigma$:

$v_1 \equiv u_1, \ldots, v_n \equiv u_n \Rightarrow f(v_1, \ldots, v_n) \equiv f(u_1, \ldots, u_n)$.
Beispiel:
Die Relation $t \equiv t'$, falls t und t' die gleiche Anzahl Blätter modulo 2 haben.

- Außerdem: $t \equiv t' \Leftrightarrow ht(t) = ht(t')$
- Nicht: gleiche Höhe modulo 2

1.19 Definition

Eine Kongruenz $\equiv$ hat endlichen Index, falls $\equiv$ endlich viele Äquivalenzklassen indiziert.

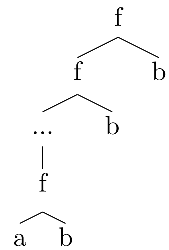
1.20 Lemma

Sei Σ ein Rangalphabet. Dann ist $\equiv$ genau dann eine Konguenz auf T_Σ, wenn $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist mit $u \equiv v \Rightarrow C[u] \equiv C[v]$ für alle Kontexte.

Beweis:
„$\Rightarrow$ “Induktion:
Induktionsannahme: $C = x$, dann ist $u \equiv v \Rightarrow C[u] \equiv C[v]$ klar.
Sei nun $C = f(C_1, \ldots C_n)$. Sei $x = C[ip] = C_i[p]$.
Dann ist $C[u]_{ip} = f(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i[p], C_{i+1}, \ldots, C_n) = C[u]_{ip} = f(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i[v], C_{i+1}, \ldots, C_n)$

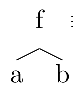
„$\Leftarrow$ “: Angenommen $u \equiv v$ und $C[u] \equiv C[v]$ für alle Kontexte.
Sei $f^{(n)} \in \Sigma$. Dann ist:
$f(u_1, \ldots u_n)$
$= C^1[u_1] \equiv C^1[v_1] = f(v_1, u_2, \ldots, u_n)$
$= \ldots$
$= C^1[u_n] \equiv C^1[v_n] = f(v_1, \ldots, v_n)$
Betrachte nun eine Sprache $L \subseteq T_\Sigma$ von Bäumen. Wir definieren $\equiv_L$ als:
$u \equiv_L v \Leftrightarrow \forall C \in T_\Sigma(x) : C[u] \in L \Leftrightarrow C[v] \in L$.

Beispiel: Betrachte alle Bäume der Form

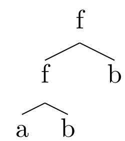


$L = \{f(f(\dots f(a,b),b)\dots,b)\}$

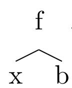
Dann gilt:



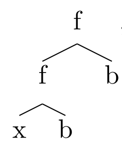
$\equiv$



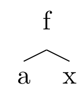
$C =$



, $C' =$



, $C'' =$



1.21 Theorem (Myhill-Nerode)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a) L ist erkennbar
b) L ist die Vereinigung von Äquivalenzklassen einer Kongruenz mit endlichem Index
c) $\equiv_L$ hat endlichen Index

Beweis:
„a $\Rightarrow$ b “: Sei $\mathcal{A}$ vollständiger DTA mit $L(\mathcal{A}) = L$. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$.
Definiere $u \equiv_{\mathcal{A}} v \Leftrightarrow \delta(u) = \delta(v)$.
Offensichtlich hat $\equiv_{\mathcal{A}}$ höchstens $|Q|$-viele Äquivalenzklassen. Außerdem ist $\equiv_{\mathcal{A}}$ eine Kongruenz. Nun ist L Vereinigung aller Klassen $[u]_{\equiv_{\mathcal{A}}}$ mit $\delta(u) \in F$.

„b $\Rightarrow$ c “: Sei $\sim$ eine Kongruenz mit dnlichem Index. Sei $u \sim v$. Wegen Lemma 1.20 gilt $C[u] \sim C[v] \forall C \in T_\Sigma(x)$. Nun ist aer L die Vereinigung von Äquivalenzklassen von $\sim$, das heißt $C[u] \in L \Leftrightarrow C[v] \in L$. Insbesondere ist also $u \equiv_L v$
Wir haben gezeigt: $v \in [u]_\sim \Rightarrow v \in [u]_{\equiv_L}$, also $[u]_\sim \leq [u]_{\equiv_L}$
(Also ist $\sim$ eine Verfeinerung von $\equiv_L$
Insbesondere hat $\equiv_L$ kleinern Index als $\sim$, also endlichen.

„c $\Rightarrow$ a “: Die Zustände $Q_{\min}$ sind die Äquivalenzklassen bezüglich $\equiv_L$. (Damit ist $Q_{\min}$ endlich).
Wir definieren Regeln
$f([u_1], \dots, [u_n]) \to [f(u_1, \dots, u_n)]$.
Das ist wohldefiniert, weil $\equiv_L$ eine Kompetenz ist. Finalzustände $F_{\min}$ sind $\{[u]_{\equiv_L} | u \in L\}$.

Dann akzeptiert $\mathcal{A}_{\min} = (Q_{\min}, \Sigma, F_{\min}, \Delta_{\min})$ die Sprache L.

Beispeiel:
Betrachte $\Sigma = \{a^{(0)}, g^{(1)}, f^{(2)}\}$ und
$L = \{f(g^i(a), g^i(a)) | i \geq 0\}$

Betrachte $g^i(a)$ und $g^j(a)$ mit $i \neq j$. Dann ist $C^i = f(x, g^i(a))$ ein Kontext mit $C^i[g^i(a)] \in L$, aber $C^i[g^j(a)] \notin L$. Da ex unenlich viele $g^i(a)$ gibt, hat die Kongruenz bezüglich L unendlichen Index, also ist L nicht erkennbar.

1.22 Korollar

Ist L erkennbar, gibt es einen bis auf Umbenennung der Zustände eindeutigen, vollständigen DBA $\mathcal{A}$ mit $L = L(\mathcal{A})$. Dieser ist $\mathcal{A}_{\min}$ aus obigem Beweis.
Beweis:
Sei $L = L(\mathcal{A})$. Vorher gesehen:
$\equiv_{\mathcal{A}}$ ist Verfeinerung von $\equiv_L$
Also ist $|Q| \geq |Q_{\min}|$. Wir nehmen OBDA an: beide reduziert. Sei nun $qinQ$. Getrachte ein $u \in T_\Sigma$ mit $\delta(u) = q$. Betrachte die Funktion $\rho : Q \to Q_{\min}$ mit $\delta(u) = q \mapsto \delta_{\min}(u)$
Die Abbildung ρ ist wohldefiniert, denn falls $\delta(u) = \delta(v)$, dann $u \equiv_{\mathcal{A}} v \Rightarrow u \equiv_L v \Leftrightarrow \delta_{\min}(u) = \delta_{\min}(v)$. Außerdem ist ρ surjektiv, denn $\delta_{\min}(u)$ hat das Urbild $\delta(u)$.
Also: $|Q| = |Q_{\min}| \Rightarrow \rho$ ist Bijektion. $\square$