Vorlesung Baumautomaten (Mitschrift)

Benedikt Elßmann (3720358)
be57xocu@studserv.uni-leipzig.de

Universität Leipzig

5. April 2019

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Automaten lesen Wörter $w = a_1 \dots a_n$ und geben "accept" aus oder nicht.
Dafür gibt es Erweiterungen, wie etwa:

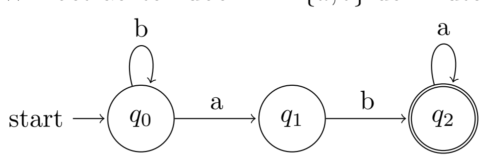
- gewichtete Automaten, das heißt der Output ist ein Semiringelement
- Automaten mit Gedächtnis (Stack)
- Automaten über anderen Strukturen
  - ω-Wörter $w = a_1 \dots a_n$
  - Graphen
  - Bäume
  - Kombinationen dieser

Typische Fragestellungen:

- Ausdrucksstärke
- Darstellung als rationale Ausdrücke (Kleene)
- Darstellung als Grammatik
- Darstellung als Logik

1 Bäume und Baumautomaten

Wir betrachten über $A = \{a, b\}$ den Automaten $\mathcal{A}$:

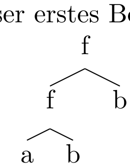


mit $L(\mathcal{A} = b * aba*$.
Betrachtung des Wortes $w = baba \in L(\mathcal{A})$:

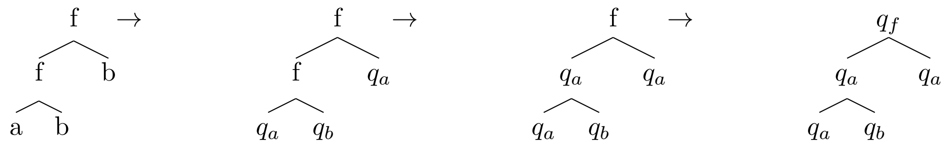
Der eindeutige erfolgreiche Lauf für w lässt sich darstellen als:

$q_0baba \to bq_0aba \to baq_1ba \to babq_2a \to babaq_2 \in F$ (Finalzustand)

Baumautomaten funktionieren analog. Unser erstes Beispiel wird



Akzeptiert mit dem Lauf:



mit $q_f \in F$

1.1 Definition Rangalphabet

Ein paar (Σ, rk), wobei Σ eine endliche Menge von Symbolen und $rk : \Sigma \to \mathbb{N}$ eine Abbildung ist, heißt Rangalphabet.
Für $f \in \Sigma$ heißt $rk(f)$ der Rang (oder die Stelligkeit) von f.

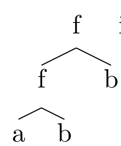
Intuitiv: $rk(f)$ ist die Anzhal der Kinder von f in einem Baum.
Insbesondere ist die Anzahl der Kinder für jedes Symbol fest.

Gilt $rk(f) = n$, schreiben wir auch $f^{(n)}$ statt f. wir schreiben:

- 0-stellige Symbole (Konstanten) $a, b, \ldots$
- unär, binär, $\ldots f, g, \ldots$

Wir setzen $\Sigma^{(n)} = \{f \in \Sigma | rk(f) = n\}$

In



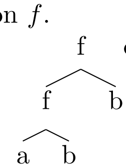
ist also $rk(f) = 2, rk(b) = 0$

1.2 Definition Term, Tree

Sei (Σ, rk) ein Rangalphabet. Die Menge T_Σ der Bäume üeber Σ ist induktiv definiert durch:

- $\Sigma^0 \subseteq T_\Sigma$
- $f^{(n)} \in \Sigma$. $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma$, dann ist $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma$

Intuitiv sind $t_1, \ldots, t_n$ die Kinder von f.
Z.B. ist



der Term $f(f(a, b), b)$.

1.3 Definition Höhe

Sei (Σ, rk) ein Rangalphabet. Die Höhe ht ist gegeben durch:

- für $a^{(0)} \in \Sigma : ht(a) = 1$.
- für $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma : ht(f) = 1 + max\{ht(t_i)|i \in \{i, \ldots, n\}\}$

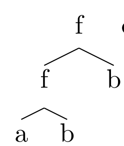
Ziel: Zugriff auf einen Knoten innterhalb eines Baumes und deren Label.
Dafür ordenen wir den Knoten Positionen zu. Das geht induktiv wie foelgt:

1.4 Definition Position

Sei (Σ, rk) ein Rangalphabet. Die Positionenmenge ist definiert durch:

- für $a^{(0)} \in T_\Sigma ist Pos(a) = \{\varepsilon\}$
- für $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma$ ist $Pos(f(t_1, \ldots, t_n)) = \{\varepsilon\} 1 \cdot Pos(t_1) \cup \cdots \cup n \cdot Pos(t_n)$

Beispiel:
Betrachtung von $f(f(a, b), b)$ bzw.



der Term $f(f(a, b), b)$

$Pos(f) = \{\varepsilon, 1, 2, 1.1, 1.2\}$

1.5 Definition der Label an den Positionen

Für einen Term der Form $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ ist das Symbol $t(p)$ in t an p-ter Position induktiv definert durch:

- $t(\varepsilon) = f$
- $t(ip) = t_i(p), i \in \{1, \ldots, n\}$

Beispiel: Betrachtung von $f(f(a, b), b)$
Dann ist
$t(\varepsilon) = f$
$t(1) = t(1 \cdot \varepsilon) = t_1(\varepsilon) = f$
$t(2) = t(2 \cdot \varepsilon) = t_2(\varepsilon) = b$
$t(1.1) = t_1(1) = a$
$t(1.2) = t_2(1) = b$

1.6 Definition Sub-Baum

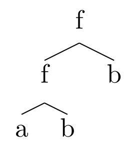
Für T_Σ ist ein Sub-Baum $t_{|p}$ an p-ter Position wie folgt definiert:

- $Pos(t_{|p}) = \{i | pi \ \in Pos(t)\}$

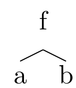
- $\forall q \in Pos(t_{|p}$ ist $t_{|p}(q) = t(pq)$

Wir schreiben $t[u]_p$ für den Baum, der entsteht, wenn man in t den sub-Baum $t_{|p}$ durch n ersetzt.

Beispiel: $f(f(a,b),b)$ bzw.

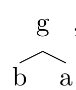


$t_{|1} = f(a,b)$



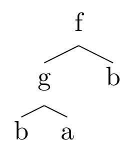
$t_{|2} = t(1.2) = b$

$u = g(b,a)$



, dann ist

$t[u]_{|1} = f(g(b,a),b)$



1.7 Definition Baumautomat

Ein Buamautomat $\mathcal{A}$ ist ein 4-Tupel (Q, Σ, F, Δ), wobei:
$Q \ldots$ endliche Menge an Zusänden
$\Sigma \ldots$ Rangalphabet
$F \cdots \subset Q$ Finalzustände
$\Delta \ldots$ Menge von regeln

$r : f(q_1 \ldots q_n) \to q$
für $q, q_1, \ldots, q_n \in Q$, für $a^{(0)} \in T_\Sigma : a \to q$

Beispiel:
$\mathcal{A} = \{\{q_a, q_b, q_f\}, \{a^{(0)}, b^{(0)}, f^{(2)}\}, \{q_f\}, \Delta\}$
mit $\Delta = \{a \to q_a, b \to q_b, f(q_a, q_b) \to q_a, f(q_a, q_b), f(q_a, q_b) \to q_f\}$