

# Vorlesung Baumautomaten (Mitschrift)

Benedikt Elßmann (3720358)  
be57xocu@studserv.uni-leipzig.de

Universität Leipzig

6. Juni 2019

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Bäume und Baumautomaten</b>	<b>3</b>
1.1	Definition Rangalphabet . . . . .	4
1.2	Definition Term, Tree . . . . .	4
1.3	Definition Höhe . . . . .	5
1.4	Definition Position . . . . .	5
1.5	Definition der Label an den Positionen . . . . .	5
1.6	Definition Sub-Baum . . . . .	5
1.7	Definition Baumautomat . . . . .	6
1.8	Definition Lauf/Run . . . . .	6
1.9	Lemma . . . . .	7
1.10	Definition Determinismus . . . . .	9
1.11	Satz . . . . .	9
1.12	Definition vollständig und reduziert . . . . .	11
1.13	Satz . . . . .	11
1.14	Definition Kontext . . . . .	11
1.15	Pumping-Lemma . . . . .	12
1.16	Korollar . . . . .	13
1.17	Abschlusseigenschaften . . . . .	13
1.18	Definition Kongruenz . . . . .	14
1.19	Definition . . . . .	14
1.20	Lemma . . . . .	14
1.21	Theorem (Myhill-Nerode) . . . . .	15
1.22	Korollar . . . . .	16
1.23	Einschub - Homomorphismen von Baumsprachen . . . . .	16
1.23.1	Allgemeine Homomorphismen . . . . .	16
1.23.2	Worthomomorphismen . . . . .	16
1.23.3	Baumhomomorphismen . . . . .	17
1.23.4	lineare Terme . . . . .	18
1.23.5	linearer Homomorphismus . . . . .	18
1.23.6	Satz . . . . .	19
1.23.7	Satz . . . . .	19
1.24	Top-Down Baumautomaten . . . . .	20
1.25	Satz . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Grammatiken</b>	<b>21</b>
2.1	Definition - Grammatik . . . . .	21
2.2	Definition . . . . .	22
2.3	Definition - reduziert . . . . .	22
2.4	Satz . . . . .	23
2.5	Definition - Normalisierung . . . . .	23
2.6	Satz . . . . .	23
2.7	Theorem . . . . .	23
2.8	Satz . . . . .	25

2.9 Satz . . . . .	25
2.10 Definition . . . . .	26
2.11 Theorem . . . . .	26

## 0 Einleitung

Automaten lesen Wörter  $w = a_1 \dots a_n$  und geben "accept" aus oder nicht. Dafür gibt es Erweiterungen, wie etwa:

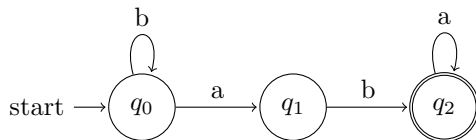
- gewichtete Automaten, das heißt der Output ist ein Semiringelement
- Automaten mit Gedächtnis (Stack)
- Automaten über anderen Strukturen
  - $\omega$ -Wörter  $w = a_1 \dots a_n$
  - Graphen
  - Bäume
  - Kombinationen dieser

Typische Fragestellungen:

- Ausdrucksstärke
- Darstellung als rationale Ausdrücke (Kleene)
- Darstellung als Grammatik
- Darstellung als Logik

## 1 Bäume und Baumautomaten

Wir betrachten über  $A = \{a, b\}$  den Automaten  $\mathcal{A}$ :



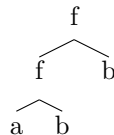
mit  $L(\mathcal{A}) = b^*aba^*$ .

Betrachtung des Wortes  $w = baba \in L(\mathcal{A})$ :

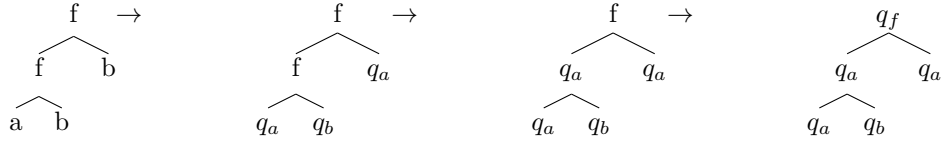
Der eindeutige erfolgreiche Lauf für  $w$  lässt sich darstellen als:

$q_0baba \rightarrow bq_0aba \rightarrow baq_1ba \rightarrow babq_2a \rightarrow babaq_2 \in F$  (Finalzustand)

Baumautomaten funktionieren analog. Unser erstes Beispiel wird



Akzeptiert mit dem Lauf:



mit  $q_f \in F$

## 1.1 Definition Rangalphabet

Ein paar  $(\Sigma, rk)$ , wobei  $\Sigma$  eine endliche Menge von Symbolen und  $rk : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$  eine Abbildung ist, heißt Rangalphabet.

Für  $f \in \Sigma$  heißt  $rk(f)$  der Rang (oder die Stelligkeit) von  $f$ .

Intuitiv:  $rk(f)$  ist die Anzahl der Kinder von  $f$  in einem Baum.

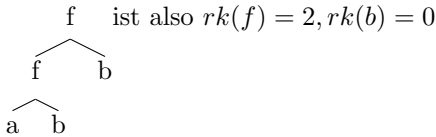
Insbesondere ist die Anzahl der Kinder für jedes Symbol fest.

Gilt  $rk(f) = n$ , schreiben wir auch  $f^{(n)}$  statt  $f$ . wir schreiben:

- 0-stellige Symbole (Konstanten)  $a, b, \dots$
- unär, binär,  $\dots f, g, \dots$

Wir setzen  $\Sigma^{(n)} = \{f \in \Sigma \mid rk(f) = n\}$

In



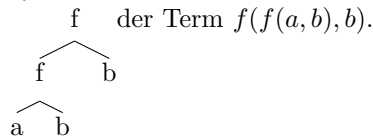
## 1.2 Definition Term, Tree

Sei  $(\Sigma, rk)$  ein Rangalphabet. Die Menge  $T_\Sigma$  der Bäume über  $\Sigma$  ist induktiv definiert durch:

- $\Sigma^0 \subseteq T_\Sigma$
- $f^{(n)} \in \Sigma$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T_\Sigma$ , dann ist  $f(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma$

Intuitiv sind  $t_1, \dots, t_n$  die Kinder von  $f$ .

Z.B. ist



### 1.3 Definition Höhe

Sei  $(\Sigma, rk)$  ein Rangalphabet. Die Höhe  $ht$  ist gegeben durch:

- für  $a^{(0)} \in \Sigma : ht(a) = 1.$
- für  $f(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma : ht(f) = 1 + \max\{ht(t_i) | i \in \{1, \dots, n\}\}$

Ziel: Zugriff auf einen Knoten innerhalb eines Baumes und deren Label.  
Dafür ordnen wir den Knoten Positionen zu. Das geht induktiv wie folgt:

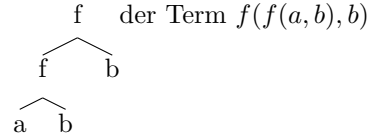
### 1.4 Definition Position

Sei  $(\Sigma, rk)$  ein Rangalphabet. Die Positionenmenge ist definiert durch:

- für  $a^{(0)} \in T_\Sigma$  ist  $Pos(a) = \{\varepsilon\}$
- für  $f(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma$  ist  $Pos(f(t_1, \dots, t_n)) = \{\varepsilon\} \cup 1 \cdot Pos(t_1) \cup \dots \cup n \cdot Pos(t_n)$

Beispiel:

Betrachtung von  $f(f(a, b), b)$  bzw.



$$Pos(f) = \{\varepsilon, 1, 2, 1.1, 1.2\}$$

### 1.5 Definition der Label an den Positionen

Für einen Term der Form  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  ist das Symbol  $t(p)$  in  $t$  an  $p$ -ter Position induktiv definiert durch:

- $t(\varepsilon) = f$
- $t(ip) = t_i(p), i \in \{1, \dots, n\}$

Beispiel: Betrachtung von  $f(f(a, b), b)$

Dann ist

$$t(\varepsilon) = f$$

$$t(1) = t(1 \cdot \varepsilon) = t_1(\varepsilon) = f$$

$$t(2) = t(2 \cdot \varepsilon) = t_2(\varepsilon) = b$$

$$t(1.1) = t_1(1) = a$$

$$t(1.2) = t_1(2) = b$$

### 1.6 Definition Sub-Baum

Für  $T_\Sigma$  ist ein Sub-Baum  $t|_p$  an  $p$ -ter Position wie folgt definiert:

- $Pos(t|_p) = \{i|pi \in Pos(t)\}$

- $\forall q \in Pos(t|_p)$  ist  $t|_p(q) = t(pq)$

Wir schreiben  $t[u]_p$  für den Baum, der entsteht, wenn man in  $t$  den sub-Baum  $t|_p$  durch  $u$  ersetzt.

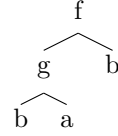
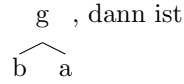
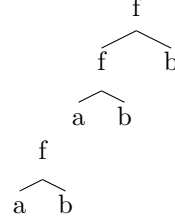
Beispiel:  $f(f(a, b), b)$  bzw.

$$t|_1 = f(a, b)$$

$$t|_2 = t(1.2) = b$$

$$u = g(b, a)$$

$$t[u]_1 = f(g(b, a), b)$$



## 1.7 Definition Baumautomat

Ein Baumautomat  $\mathcal{A}$  ist ein 4-Tupel  $(Q, \Sigma, F, \Delta)$ , wobei:

$Q \dots$  endliche Menge an Zuständen

$\Sigma \dots$  Rangalphabet, wobei  $\Sigma \cup Q \neq \emptyset$

$F \dots \subseteq Q$  Finalzustände

$\Delta \dots$  Menge von Regeln

$$r : f(q_1 \dots q_n) \rightarrow q$$

für  $q, q_1, \dots, q_n \in Q$ , für  $a^{(0)} \in T_\Sigma : a \rightarrow q$

Beispiel:

$$\mathcal{A} = \{\{q_a, q_b, q_f\}, \{a^{(0)}, b^{(0)}, f^{(2)}\}, \{q_f\}, \Delta\}$$

$$\text{mit } \Delta = \{a \rightarrow q_a, b \rightarrow q_b, f(q_a, q_b) \rightarrow q_a, f(q_a, q_b) \rightarrow q_f\}$$

## 1.8 Definition Lauf/Run

Sei  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$  ein Baumautomat und  $t \in T_\Sigma$ . Ein Lauf  $r$  für  $t$  von  $\mathcal{A}$  ist ein Term mit

- $Pos(r) = Pos(t)$
- Ist  $t(p) = a$  ein Blatt, dann ist  $r(p) = q_a$ , nur wenn  $(a \rightarrow q_a) \in \Delta$
- Ist  $t(p) = f^{(m)}$ , dann ist  $r(p) = q$ , wenn  $(f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q) \in \Delta$  und  $r(p_i) = q_i, i \in \{1, \dots, n\}$

Ein Lauf ist erfolgreich, wenn  $r(\varepsilon) \in F$ . Der Automat  $\mathcal{A}$  akzeptiert  $t$ , falls es einen erfolgreichen Lauf für  $t$  von  $\mathcal{A}$  gibt.

Wir bezeichnen mit  $L(\mathcal{A}) = \{t \in T_\Sigma \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } t\}$  die von  $\mathcal{A}$  erkannte Baumsprache. Eine Sprache  $L \subseteq T_\Sigma$  heißt erkennbar, falls ein Baumautomat  $\mathcal{A}$  existiert mit  $L = L(\mathcal{A})$ .

Um einzelne Schritte von Baumautomaten zu formalisieren, betrachten wir die *move relation*  $\rightarrow_{\mathcal{A}}$ , definiert wie folgt:

Gegeben sei  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ , dann ist  $t \rightarrow_{\mathcal{A}} t'$  mit  $t, t' \in T_{\Sigma \cup Q}$ , falls

- $t(p) = f^{(n)}$
- $t(pi) = q_i$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $p_i$  sind Blätter
- $(f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q) \in \Delta$
- und  $t' = t[q]_p$

Mit  $\rightarrow_{\mathcal{A}}^*$  bezeichnen wir die transitive Hülle von  $\rightarrow_{\mathcal{A}}$ .

## 1.9 Lemma

Sei  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$  ein Baumautomat. Dann ist  $L(\mathcal{A}) = \{t \in T_\Sigma \mid t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q \text{ mit } q \in F\} (= Z)$

Beweis: „ $L(\mathcal{A}) \subseteq Z$ “:

Wir zeigen: Es existiert ein Run  $r$  für  $t$  von  $\mathcal{A}$  mit  $r(\varepsilon) = q$ , dann ist  $t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$

Inuktionsannahme:

$t = a^{(0)} \in T_\Sigma$ . Dann gilt  $a \in L(\mathcal{A})$ , falls ein Lauf  $r$  existiert mit  $r(a) = q_a$  und  $(a \rightarrow q_a) \in \Delta$ . Dann folgt  $a \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_a$ .

Sei nun  $t = f(t_1, \dots, t_n)$

Induktionsvoraussetzung:

Falls für  $t_1, \dots, t_n$  Läufe  $r_i$  existieren mit  $r_i(\varepsilon) = q_i$ , dann gilt auch  $t_i \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_i$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$

Induktionsschritt:

zu zeigen: Es existiert ein Lauf  $r$  für  $t$  mit  $r(\varepsilon) = q$ , dann  $t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$ .

Sei also  $r$  ein Lauf mit  $r(\varepsilon) = q$ . Dann ist  $r(i) = q_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , mit  $(f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q) \in \Delta$ .

Laut Induktionsvoraussetzung gilt nun,  $t_i \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Damit  $t = f(t_1, \dots, t_n) \rightarrow_{\mathcal{A}}^* f(q_1, t_2, \dots, t_n) \rightarrow_{\mathcal{A}}^* \dots \rightarrow_{\mathcal{A}}^* f(q_1, \dots, q_n)$

Des weiteren haben wir die regel  $f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q$ , das heißt  $f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$ .

Insgesamt also  $t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$

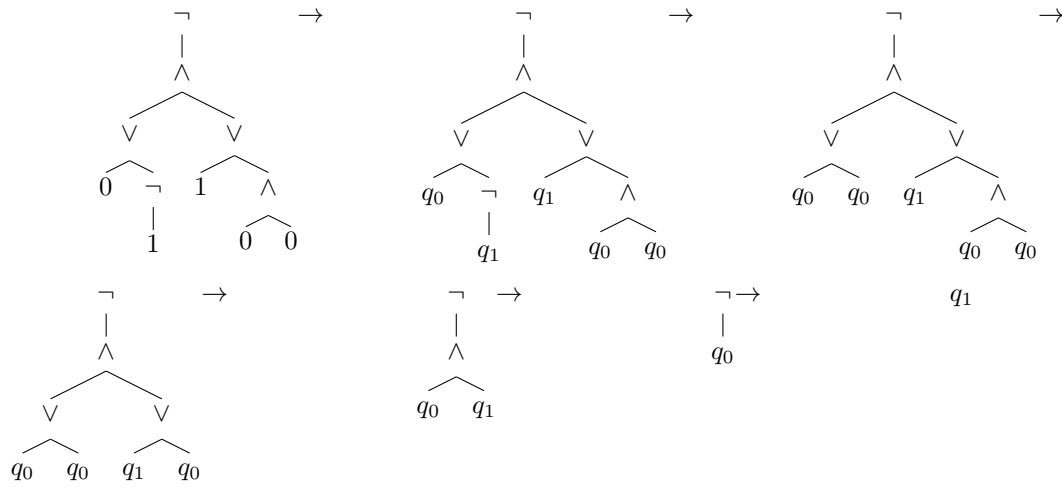


Beweis: „ $L(Z \subseteq \mathcal{A})$ “: analog

Einige Beispiele für Baautomaten:

1. Sei  $B = (\{q_0, q_1\}, \{0^{(0)}, 1^{(0)}, \neg^{(1)}, \wedge^{(2)}, \vee^{(2)}\} \{q_1\}, \Delta)$  mit  
 $\Delta = \{0 \rightarrow q_0, 1 \rightarrow q_1,$   
 $\neg(q_0) \rightarrow q_1, \neg(q_1) \rightarrow q_0,$   
 $\wedge(q_0, q_0) \rightarrow q_0, \wedge(q_0, q_1) \rightarrow q_0, \wedge(q_1, q_0) \rightarrow q_0, \wedge(q_1, q_1) \rightarrow q_1$   
 $\vee(q_0, q_0) \rightarrow q_0, \vee(q_0, q_1) \rightarrow q_1, \vee(q_1, q_0) \rightarrow q_1, \vee(q_1, q_1) \rightarrow q_1\}$

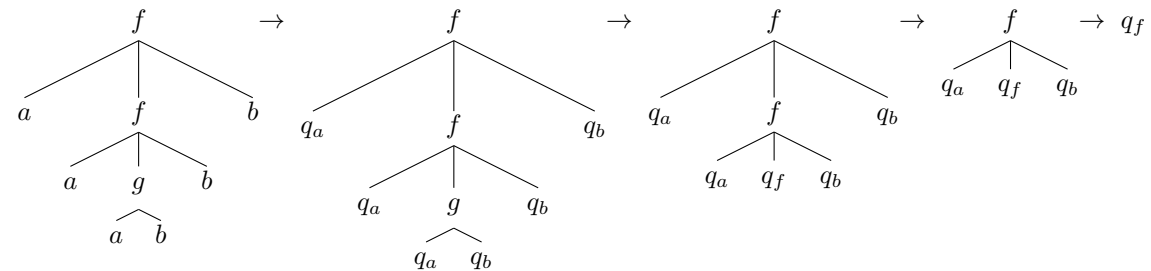
Beispiellauf:



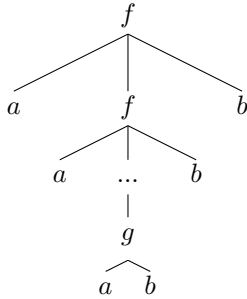
## 2. ( $a^n b^n$ light)

Betrachten  $\mathcal{A} = (\{q_a, q_b, q_f\}, \{a^{(0)}, b^{(0)}, f^{(3)}, g^{(2)}\}, \{q_f\}, \Delta)$   
mit  $\Delta =$   
 $\{a \rightarrow q_a, b \rightarrow q_b, g(q_a, q_b) \rightarrow q_f, f(q_a, q_f, q_b) \rightarrow q_f\}$

Beispiellauf:



$\mathcal{A}$  akzeptiert also alle Bäume der Form:



3. Simulation eines Wortautomaten: (siehe Übung)

Betrachtet man  $\Sigma = \{a^{(0)}, f^{(2)}, g^{(1)}\}$ . Dann ist  $L = \{f(g^i(a), g^i(a)) | i \geq 0\}$  nicht erkennbar.

### 1.10 Definition Determinismus

Ein Automat  $\mathcal{A}(Q, \Sigma, F, \Delta)$  heißt deterministisch, falls: aus  $f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q$  und  $f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q'$  folgt  $q = q'$

### 1.11 Satz

Sei  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$  ein Baumatom, dann existiert ein deterministischer Baumatom  $\mathcal{A}_d$ , so dass  $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_d)$ .

Beweis: Setze  $\mathcal{A}_d = (Q_d, \Sigma, F_d, \Delta_d)$   
mit  $Q_d = 2^Q$  (\*)  
und  $f(s_1, \dots, s_n) \rightarrow s \in \Delta_d$   
 $\Leftrightarrow s = \{q \in Q | \exists q_1 \in s_1 \dots q_n \in s_n : (f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q) \in \Delta\}$   
und  $F_d = \{s \in Q_d | s \cap F \neq \emptyset\}$ .

Wir zeigen:

1.  $\mathcal{A}$  ist deterministisch
2.  $L(\mathcal{A}) \subset L(\mathcal{A}_d)$
3.  $L(\mathcal{A}_d) \subset L(\mathcal{A})$

1. ist klar, denn (\*) ist mit einer Äquivalenz definiert.
2. „ $L(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{A}_d)$ “:

Wir zeigen hierzu: Ist  $Z = \{q | t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q\}$ , dann  $t \rightarrow_{\mathcal{A}_d}^* z$ .

Induktionsannahme:

Angenommen  $a \rightarrow_{\mathcal{A}} q_a$ , dann ist  $q_a \in \{q \in Q | q \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q\}$ , das heißt

$a \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_a \Leftrightarrow q_a \in \{q \in Q \mid a \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q\}$   
 $\Leftrightarrow q_a \in \{q \in Q \mid (a \rightarrow q) \in \Delta\}$   
 also  $a \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_a \Leftrightarrow q_a \in \{q \in Q \mid (a \rightarrow q) \in \Delta\}$ , das heißt  
 $z := \{q_a \in Q \mid a \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_a\} = \{q \in Q \mid (a \rightarrow q) \in \Delta\} =: s$

Nun ist  $(a \rightarrow s) \in \Delta_d$  per Definition, also auch  $(a \rightarrow z) \in \Delta_d$ , damit:  $a \rightarrow_{\mathcal{A}_d}^* z$ .

Betrachten wir nun  $t = \sigma(t_1, \dots, t_n)$

Induktionsvoraussetzung:

$t_i \rightarrow_{\mathcal{A}_d}^* z_i$  mit  $Z_i = \{q \in Q \mid t_i \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q\}$

Das heißt, es existieren Läufe  $r_i$  für  $t_i$  von  $\mathcal{A}_d$  mit  $r_i(\varepsilon) = z_i$

Induktionsschritt:

zu zeigen:  $t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* z$  mit  $Z = \{q \in Q \mid t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q\}$

Das heißt, es existiert ein Lauf  $r$  für  $t$  von  $\mathcal{A}_d$  mit  $r(\varepsilon) = z$

Das heißt,  $\exists r$  :

- $r(\varepsilon) = z$
- $r(i) = z_i$
- $\sigma(z_1, \dots, z_n) \rightarrow z \in \Delta_d$

Setze nun  $r|_i = r_i$ , damit ist insbesondere  $r(i) = r_i(\varepsilon) = z := \{q \mid t_i \rightarrow_{\mathcal{A}_d}^* q\}$

Es bleibt also zu zeigen:  $\exists$  Regel  $\sigma(z_i, \dots, z_m) \rightarrow z \in \Delta_d$ .

Es ist nun  $z \in Z \Leftrightarrow t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* z$

$\Leftrightarrow \exists q_i \in Q : t_i \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_i, \sigma(q_1, \dots, q_m) \rightarrow z \in \Delta$

$\Leftrightarrow \exists z_i \in Z_i$  und  $\sigma/z_1, \dots, z_m) \rightarrow z \in \Delta$

Also  $Z = \{z \in Q \mid \exists z_i \in Z_i : (\sigma/z_1, \dots, z_m) \rightarrow z) \in \Delta\}$  also per Definition  $\sigma/z_1, \dots, z_m) \rightarrow z \in \Delta_d$

2. „ $L(\mathcal{A}_d) \subseteq L(\mathcal{A})$ “:

Sei  $t \in T_{\Sigma}$  mit  $t \notin L(\mathcal{A})$ , dann ist  $Z \cap F = \{q \in Q \mid t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q\} \cap F = \emptyset$

Laut 2. ist  $t \rightarrow_{\mathcal{A}_d}^* z$  (und  $\mathcal{A}$  ist deterministisch) Wegen  $Z \cap F = \emptyset$  ist  $Z \notin F_d$ , also  $t \notin L(\mathcal{A}_d)$

Wir vereinbaren die Abkürzungen: NBA/NTA für nichtdeterministischer Baumautomat und DBA/DTA für deterministischer Baumautomat.

Wie im Wortfall ist die Konstruktion exponentiell, das heißt wir benötigen exponentiell viele Zustände ( $Q_d = 2^{|Q|}$ ). Und wie im Wortfall lässt sich das im Allgemeinen nicht vermeiden.

Beispiel: Betrachtet man  $\Sigma = \{f^{(1)}, g^{(1)}, a^{(0)}\}$  und sei  $L_n = \{f \in T_{\Sigma} \mid t(\underbrace{1 \dots 1}_{n\text{-mal}}) = f\}$

Ein NTA benötigt  $n + 2$  Zustände:

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$  mit  $Q = \{q, q_1, \dots, q_{n+1}\}$ ,  $F = \{q_{n+1}\}$   
mit Übergängen  $\Delta = \{a \rightarrow q, f(q) \rightarrow q, g(q) \rightarrow q, f(q) \rightarrow q_1,$   
 $f(q_i) \rightarrow q_{i+1}, g(q_i) \rightarrow q_{i+1}\}$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$

Man kann zeigen: Ein DTA  $\mathcal{A}'$  mit  $L(\mathcal{A}') = L_n$  hat mindestens  $2^{n+1}$  Zustände.

## 1.12 Definition vollständig und reduziert

Ein Automat  $(\mathcal{A} = Q, \Sigma, F, \Delta)$  heißt:

- vollständig, falls für jedes  $f^{(n)} \in \Sigma$  und alle  $q_1, \dots, q_n \in Q$  eine Regel  $f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q \in \Delta$  existiert.
- reduziert, falls für jeden Zustand  $q \in Q$  ein Term  $t \in T_\Sigma$  existiert mit  $f \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$

## 1.13 Satz

Sei  $\mathcal{A}$  ein Baumat. Dann existiert ein vollständiger, reduzierter Baumat  $\mathcal{A}'$  mit  $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$ .

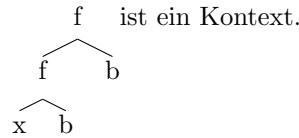
Für Wortautomaten gibt es das Pumping-Lemma, das die Gedächtnislosigkeit der Automaten formalisiert. Formal besagt es: Ist  $L$  eine reguläre Wortsprache, dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass sich  $w \in L$  mit  $|w| > n$  zerlegen lässt in  $w = xyz$ ,  $y \neq \varepsilon$  und  $\forall i \geq 0$  ist  $xy^iz \in L$ .

Baumat haben auch kein Gedächtnis, also erwarten wir ein analoges Resultat. Dazu müssen wir formalisieren, was „aufgepumpt“ werden soll.

## 1.14 Definition Kontext

Es sei  $\Sigma$  ein Rangalphabet und  $x^{(0)} \notin \Sigma$ . Es sei  $C \in T_{\Sigma \cup \{x\}}$ . Falls es genau eine Position  $p \in \text{Pos}(C)$  gibt mit  $C(p) = x$ , dann heißt  $C$  ein Kontext.

Beispiel:

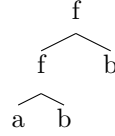


Wir schreiben  $T_\Sigma(x)$  für die Menge aller solcher Kontexte.

Ist  $C \in T_\Sigma(x)$  mit  $C(p) = x$ , dann schreiben wir  $C[u]$  statt  $C[u]_p$  für den Baum, der entsteht, wenn wir  $x$  durch  $u$  ersetzen.

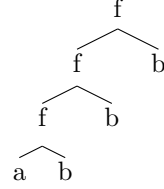
Wir schreiben  $C^0 = x$ ,  $C^1 = C$ ,  $C^n = C^{n-1}[C]$

Beispiel: Betrachtet  $t =$



Setze  $u = f(a, b)$  und  $C = f(x, b)$ .

Dann ist  $t = C[u]$  und  $C^2[u] =$



### 1.15 Pumping-Lemma

Sei  $L \subseteq t_\Sigma$  erkennbar, dann existiert ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass:

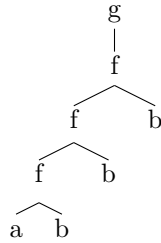
Für alle  $T \in L$  mit  $ht(t) > k$  gibt es einen Kontext  $C \in T_\Sigma(x)$ , einen nicht-trivialen Kontext  $C' \in T_\Sigma(x)$  und einen Term  $u \in T_\Sigma$  mit  $t = C[C'[u]]$  und  $C[(C')^n[u]] \in L$  für alle  $n \geq 0$ .

Beweis: Sei  $L$  erkennbar, das heißt  $\exists$  Baumentautomat  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$  mit  $L = L(\mathcal{A})$ . Setze  $|Q| = k$  und betrachte  $t \in L$  mit  $ht(t) > k$ . Betrachte nun einen Lauf  $r$  und einen Pfad in  $t$ , der länger als  $k$  ist. Nun gibt es  $p_1, p_2 \in Pos(r)$  mit  $r(p_1) = r(p_2) = q \in Q$ . Sei nun  $u = t|_{p_2}$  der Sub-Baum von  $t$  bei  $p_2$  und  $u' = t|_{p_1}$ . Dann existiert  $C'$  mit  $C'[u] = u'$  und es existiert  $C$  mit  $t = C[C'[u]]$ . Es ist wegen  $t \in L$

$C[C'[u]] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* C[C'[q]] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* C[q] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_f \in F$ , also auch

$C[(C')^n[u]] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* C[(C')^n[q]] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* C[C[(C')^{n-1}[q]]] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* \dots \rightarrow_{\mathcal{A}}^* C[q] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_f \in F$ . q.e.d.

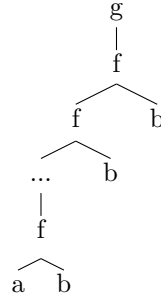
Beispiel: Betrachte den Baumentautomaten  $\mathcal{A} = (\{q_a, q_b, q_g, q_f\}, \{a^{(0)}, b^{(0)}, g^{(1)}, f^{(2)}\}, \{q_f\}, \Delta)$  mit  $\Delta = \{a \rightarrow q_a, b \rightarrow q_b, f(q_a, q_b) \rightarrow q_g, g(q_g) \rightarrow q_f\}$



$u = f(a, b)$ ,  $u' = C'[u] = f(f(a, b), b)$

$C = g(f(x, b))$ ,  $C' = f(x, b)$

$$C[(C')^n[u]] =$$



Die Sprache  $L = \{f(g^i(a), g^i(a)) \mid i \geq 0\}$  kann nicht erkennbar sein, denn für große  $i$  würde man ein  $k$  finden, so dass ein gegebener Baumatomat auch  $f(g^{i+lk}(a), g^i(a))$  für alle  $l \geq 0$  akzeptiert.

### 1.16 Korollar

Für  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$  ist  $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists t \in L$  mit  $ht(t) \leq |Q|$ :

- $|L(\mathcal{A})|$  nicht endlich  $\Leftrightarrow \exists t \in L$  mit  $|Q| < ht(t) \leq 2|Q|$

### 1.17 Abschlusseigenschaften

Erkennbare Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung, Schnitt und Komplement. Das heißt, sind  $L_1$  und  $L_2$  erkennbar, dann auch  $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 \cap L_2$  und  $L_1^c$  (in  $T_\Sigma$ ).

Beweis:

Seien  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  vollständige DTA. Betrachte für die Vereinigung

$\mathcal{A}_\cup = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2, \Delta_1 \times \Delta_2)$  mit

$\Delta_1 \times \Delta_2 = \{f((q_1, q'_1), \dots, (q_n, q'_n)) \rightarrow (q, q') \mid f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q \in \Delta_1, f(q'_1, \dots, q'_n) \rightarrow q' \in \Delta_2\}$

Dann akzeptiert  $\mathcal{A}_\cup$  die Sprache  $L(\mathcal{A}_1) \cup L(\mathcal{A}_2)$ .

Für  $L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$  betrachte den Automaten

$\mathcal{A}_\cap = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, F_1 \times F_2, \Delta_1 \times \Delta_2)$

Für  $T_\Sigma$   $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_1)^c$  betrachte

$\mathcal{A}_C = (Q_1, \Sigma, Q_1, F_1, \Delta_1)$ .

Der Automat  $\mathcal{A}_C$  akzeptiert  $L(\mathcal{A}_1)^c$ .

Beispiel:

Betrachte  $\Sigma = \{a^{(0)}, g^{(1)}, f^{(2)}\}$  und  $L = \{f(g^i(a), g^j(a)) \mid i \leq j\}$

Dann ist  $L$  nicht erkennbar, denn: Wäre  $L$  erkennbar, dann auch  $L'$  mit  $L' = \{f(g^i(a), g^j(a)) \mid i \geq j\}$ , also auch  $L \cap L' \not\subseteq$ .

Bemerkung: Wenn  $\mathcal{A}$  deterministisch und vollständig ist, dann können wir eine Übergangsfunktion  $\delta : T_\Sigma \rightarrow Q$  definieren mit  $\delta(t) = q$ , falls  $t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$ .

Wiederholung - Äquivalenzrelation:

Eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf einer Menge  $M$  ist eine Relation mit

- $\forall m \in M : m \sim m$
- $\forall m, n \in M : m \sim n \Rightarrow n \sim m$
- $\forall l, m, n \in M : l \sim m, m \sim n \Rightarrow l \sim n$

Insbesondere: Ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$ , so induziert  $\sim$  eine Partition auf und umgekehrt, das heißt Mengen  $(M_i)_{i \in I}$  mit  $M_i \cup M_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  und  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$

### 1.18 Definition Kongruenz

Eine Äquivalenzrelation  $\equiv$  auf  $T_\Sigma$  heißt Kongruenz, falls für alle  $f^{(n)} \in \Sigma$ :

$$v_1 \equiv u_1, \dots, v_n \equiv u_n \Rightarrow f(v_1, \dots, v_n) \equiv f(u_1, \dots, u_n).$$

Beispiel:

Die Relation  $t \equiv t'$ , falls  $t$  und  $t'$  die gleiche Anzahl Blätter modulo 2 haben.

- Außerdem:  $t \equiv t' \Leftrightarrow ht(t) = ht(t')$
- Nicht: gleiche Höhe modulo 2

### 1.19 Definition

Eine Kongruenz  $\equiv$  hat endlichen Index, falls  $\equiv$  endlich viele Äquivalenzklassen indiziert.

### 1.20 Lemma

Sei  $\Sigma$  ein Rangalphabet. Dann ist  $\equiv$  genau dann eine Kongruenz auf  $T_\Sigma$ , wenn  $\equiv$  eine Äquivalenzrelation ist mit  $u \equiv v \Rightarrow C[u] \equiv C[v]$  für alle Kontexte.

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “ Induktion:

Induktionsannahme:  $C = x$ , dann ist  $u \equiv v \Rightarrow C[u] \equiv C[v]$  klar.

Sei nun  $C = f(C_1, \dots, C_n)$ . Sei  $x = C[ip] = C_i[p]$ .

Dann ist  $C[u]_{ip} = f(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i[p], C_{i+1}, \dots, C_n) = C[u]_{ip} = f(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i[v], C_{i+1}, \dots, C_n)$

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen  $u \equiv v$  und  $C[u] \equiv C[v]$  für alle Kontexte.

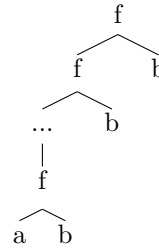
Sei  $f^{(n)} \in \Sigma$ . Dann ist:

$$\begin{aligned} & f(u_1, \dots, u_n) \\ &= C^1[u_1] \equiv C^1[v_1] = f(v_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= \dots \\ &= C^1[u_n] \equiv C^1[v_n] = f(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

Betrachte nun eine Sprache  $L \subseteq T_\Sigma$  von Bäumen. Wir definieren  $\equiv_L$  als:

$$u \equiv_L v \Leftrightarrow \forall C \in T_\Sigma(x) : C[u] \in L \Leftrightarrow C[v] \in L.$$

Beispiel: Betrachte alle Bäume der Form

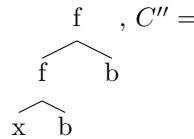
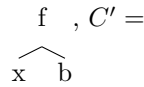


$$L = \{f(f(\dots f(a, b), b) \dots, b)\}$$

Dann gilt:



$C =$



## 1.21 Theorem (Myhill-Nerode)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- a)  $L$  ist erkennbar
- b)  $L$  ist die Vereinigung von Äquivalenzklassen einer Kongruenz mit endlichem Index
- c)  $\equiv_L$  hat endlichen Index

Beweis:

„a  $\Rightarrow$  b“: Sei  $\mathcal{A}$  vollständiger DTA mit  $L(\mathcal{A}) = L$ . Sei  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ .

Definiere  $u \equiv_{\mathcal{A}} v \Leftrightarrow \delta(u) = \delta(v)$ .

Offensichtlich hat  $\equiv_{\mathcal{A}}$  höchstens  $|Q|$ -viele Äquivalenzklassen. Außerdem ist  $\equiv_{\mathcal{A}}$  eine Kongruenz.

Nun ist  $L$  Vereinigung aller Klassen  $[u]_{\equiv_{\mathcal{A}}}$  mit  $\delta(u) \in F$ .

„b  $\Rightarrow$  c“: Sei  $\sim$  eine Kongruenz mit endlichem Index. Sei  $u \sim v$ . Wegen Lemma 1.20 gilt

$C[u] \sim C[v] \forall C \in T_{\Sigma}(x)$ . Nun ist  $L$  die Vereinigung von Äquivalenzklassen von  $\sim$ , das heißt

$C[u] \in L \Leftrightarrow C[v] \in L$ . Insbesondere ist also  $u \equiv_L v$

Wir haben gezeigt:  $v \in [u]_{\sim} \Rightarrow v \in [u]_{\equiv_L}$ , also  $[u]_{\sim} \leq [u]_{\equiv_L}$

(Also ist  $\sim$  eine Verfeinerung von  $\equiv_L$ )

Insbesondere hat  $\equiv_L$  kleineren Index als  $\sim$ , also endlichen.

„c  $\Rightarrow$  a“: Die Zustände  $Q_{\min}$  sind die Äquivalenzklassen bezüglich  $\equiv_L$ . (Damit ist  $Q_{\min}$  endlich).

Wir definieren Regeln

$$f([u_1], \dots, [u_n]) \rightarrow [f(u_1, \dots, u_n)].$$

Das ist wohldefiniert, weil  $\equiv_L$  eine Kongruenz ist. Finalzustände  $F_{\min}$  sind  $\{[u]_{\equiv_L} \mid u \in L\}$ .



Dann akzeptiert  $\mathcal{A}_{\min} = (Q_{\min}, \Sigma, F_{\min}, \Delta_{\min})$  die Sprache  $L$ .

Beispiel:

Betrachte  $\Sigma = \{a^{(0)}, g^{(1)}, f^{(2)}\}$  und

$L = \{f(g^i(a), g^i(a)) \mid i \geq 0\}$

Betrachte  $g^i(a)$  und  $g^j(a)$  mit  $i \neq j$ . Dann ist  $C^i = f(x, g^i(a))$  ein Kontext mit  $C^i[g^i(a)] \in L$ , aber  $C^i[g^j(a)] \notin L$ . Da es unendlich viele  $g^i(a)$  gibt, hat die Kongruenz bezüglich  $L$  unendlichen Index, also ist  $L$  nicht erkennbar.

## 1.22 Korollar

Ist  $L$  erkennbar, gibt es einen bis auf Umbenennung der Zustände eindeutigen, vollständigen DBA  $\mathcal{A}$  mit  $L = L(\mathcal{A})$ . Dieser ist  $\mathcal{A}_{\min}$  aus obigem Beweis.

Beweis:

Sei  $L = L(\mathcal{A})$ . Vorher gesehen:

$\equiv_{\mathcal{A}}$  ist Verfeinerung von  $\equiv_L$

Also ist  $|Q| \geq |Q_{\min}|$ . Wir nehmen OBDA an: beide reduziert. Sei nun  $q \in Q$ . Betrachte ein  $u \in T_{\Sigma}$  mit  $\delta(u) = q$ . Betrachte die Funktion  $\rho : Q \rightarrow Q_{\min}$  mit  $\delta(u) = q \mapsto \delta_{\min}(u)$

Die Abbildung  $\rho$  ist wohldefiniert, denn falls  $\delta(u) = \delta(v)$ , dann  $u \equiv_{\mathcal{A}} v \Rightarrow u \equiv_L v \Leftrightarrow \delta_{\min}(u) = \delta_{\min}(v)$ . Außerdem ist  $\rho$  surjektiv, denn  $\delta_{\min}(u)$  hat das Urbild  $\delta(u)$ .

Also:  $|Q| = |Q_{\min}| \Rightarrow \rho$  ist Bijektion.  $\square$

## 1.23 Einschub - Homomorphismen von Baumsprachen

### 1.23.1 Allgemeine Homomorphismen

$(M, \cdot), (N, *)$ ;  $h : M \rightarrow N$  heißt Homomorphismus, falls

$\forall m, \hat{m} : h(m \cdot \hat{m}) = h(m) * h(\hat{m})$

### 1.23.2 Worthomomorphismen

$(A^*, \cdot), (B^*, \cdot)$ ;  $h : A^* \rightarrow B^*$  ist Homomorphismus, falls  $h(w \cdot \hat{w}) = h(w) \cdot h(\hat{w})$ . (zusätzlich  $h(\varepsilon) = \varepsilon$ )

Nutze für die Definition des Homomorphismus die induktive Definition von Wörtern aus  $A^*$ .

0.)  $\varepsilon \in A^*$

1.)  $a \in A^* \forall a \in A$

2.)  $a \cdot w \in A^* \forall a \in A, w \in A^*$

Ein Wort-Homomorphismus entsteht deshalb aus einer Abbildung  $\bar{h} : A \rightarrow B$  wie folgt:

0.)  $h(\varepsilon) = \varepsilon$

1.)  $h(a) = \bar{h}(a) \forall a \in A$

2.)  $h(a \cdot w) = h(a) \cdot h(w) = \bar{h}(a) \cdot h(w) \forall a \in A, w \in A^*$

### 1.23.3 Baumhomomorphismen

$T_\Sigma$  :

- 1.)  $a \in T_\Sigma \ \forall a^{(0)} \in \Sigma$
- 2.)  $f(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma \ \forall f^{(n)} \in T_\Sigma$

Zunächst: Schreibe  $\Sigma = \bigcup_{n=0}^r \Sigma^{(n)}$ , wobei  $\Sigma^{(n)} = rk^{-1}(n)$ .

Sei  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  und  $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}, X_0 = \emptyset$

Dann ist für ein Rangalphabet  $\Gamma$  auch  $\Gamma \cup X_n$  ein Rangalphabet mit  $rk(x_i) = 0$

Nachtrag - Substitution:

$t, s \in T_{\Sigma \cup X_n}$  (für ein  $n \in \mathbb{N}$ )

Sei  $P \subseteq pos(t), P = \{p \in pos(t) | t(p) = x_i\}$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$

Etwa  $P = \{p_1, \dots, p_m\}$

Dann ist  $t_{[x_i \leftarrow s]} = t[s]_{p_1} \cdot \dots \cdot t[s]_{p_m}$ .

Definition von Homomorphismen für jeden Rang  $n = 0, \dots, r$

Wähle eine Funktion  $\bar{h}_n : \Sigma^{(n)} \rightarrow T_{\Gamma \cup X_n}$

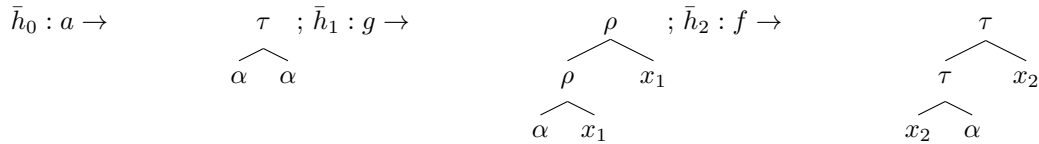
Der von  $\bar{h}_0, \dots, \bar{h}_r$  erzeugte Homomorphismus  $h : T_\Sigma \rightarrow T_\Gamma$

- 1.)  $h(a) = \bar{h}_0(a) \ \forall a \in \Sigma$
- 2.)  $h(f(t_1, \dots, t_n)) = \bar{h}_n(f)[x_1 \leftarrow h(t_1)] \dots [x_n \leftarrow h(t_n)]$

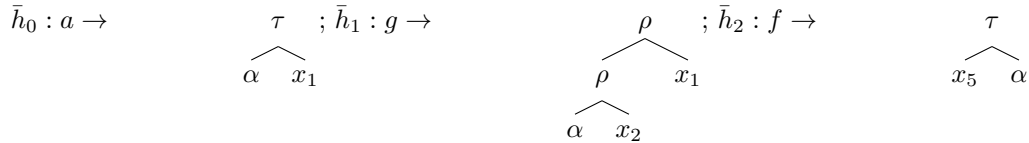
Beispiel:

$\Sigma = \{a^{(0)}, g^{(1)}, f^{(2)}\}$

$\Gamma = \{\alpha^{(0)}, \delta^{(2)}, \tau^{(2)}\}$

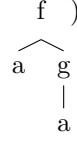


Gegenbeispiel:



Erzeugter Homomorphismus  $h : T_\Sigma \rightarrow T_\Gamma$  wie oben

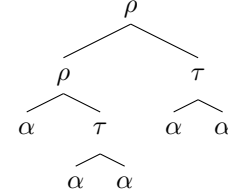
$h($



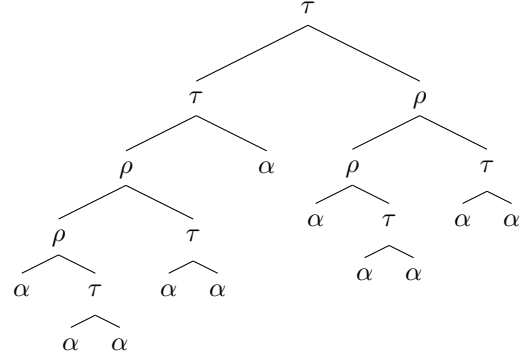
$h(a) = \bar{h}_0(a) =$



$h(g(a)) = \bar{h}_1(g)[x_1 \leftarrow h(a)] =$



$h(f(a, g(a))) = \bar{h}_2(f)[x_1 \leftarrow h(a)][x_2 \leftarrow h(g(a))]$



#### 1.23.4 lineare Terme

Ein Term  $t \in T_{\Sigma \cup X_n}$  heißt linear, falls jede Variable höchstens einmal vorkommt, d.h. falls  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : |\{p \in \text{pos}(t) \mid t(p) = x_i\}| \leq 1$

#### 1.23.5 linearer Homomorphismus

Ein Homomorphismen  $h : T_{\Sigma} \rightarrow T_{\Gamma}$  erzeugt von  $\bar{h}_0, \dots, \bar{h}_r$  heißt linear, falls  $\forall f^{(n)} \in T_{\Sigma}$  gilt:  $\bar{h}_n(f) \in T_{\Gamma \cup X_n}$  ist linear.

Beispiel: im Allgemeinen erhalten Homomorphismen die Erkennbarkeit nicht.

Betrachte

$$\Sigma = \{f^{(1)}, g^{(1)}, a^{(0)}\}, \Gamma = \{\hat{f}^{(2)}, g^{(1)}, a^{(0)}\}$$

$$\bar{h}_0 : a \rightarrow a, \bar{h}_1 : g \rightarrow g(x_1), \bar{h}_1 : f \rightarrow \hat{f}(x_1, x_1)$$

Für  $L \subseteq T_{\Sigma}, L = \{f(g^i(a)) \mid i \in \mathbb{N}\}$  ist  $h(L) = \{\hat{f}(g^i(a), g^i(a)) \mid i \in \mathbb{N}\}$  nicht erkennbar, obwohl  $L$  erkennbar ist.

### 1.23.6 Satz

Sei  $L \subseteq T_\Sigma$  erkennbar,  $h : T_\Sigma \rightarrow T_\Gamma$  ein linearer Homomorphismen, dann ist  $h(L) \subseteq T_\Gamma$  erkennbar.

Beweisskizze:

Sei  $A = (Q, \Sigma, F, \Delta)$  ein reduzierter DFTA mit  $L(A) = L$

- Seien  $(\bar{h}_n)_{n=0}^r$  die erzeugenden Funktionen von  $h$
- Definiere NFTA  $A' = (Q', \Gamma, F', \Delta)$  wie folgt:  
für jede Regel  $\rho : f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q \in \Delta$  :  
Setze  $Q^\rho = \{q_p^\rho \mid q \in \text{pos}(\bar{h}_n(f))\}$  und  
 $\Delta^\rho$  für jedes  $p \in \text{pos}(\bar{h}_n(f))$   
falls  $(\bar{h}_n f)(p) = g^{(k)} \in \Gamma^{(k)}$  für ein  $k$ ,  
 $g(q_{p-1}^\rho, \dots, q_{p-k}^\rho) \rightarrow q_p \in \Delta^\rho$   
falls  $(\bar{h}_n f)(g) = x_i$  für ein  $i$   
 $q_i \rightarrow q_p^\rho \in \Delta^\rho$   
 $q_\varepsilon^\rho \rightarrow q \in \Delta^\rho$   
OBdA  $Q^\rho$  paarweise disjunkt auch mit  $Q$
- $Q' = \bigcup_{\rho \in \Delta} Q^\rho \cup Q$
- $\Delta = \bigcup_{\rho \in \Delta} \Delta^\rho \cup Q$
- $F' = F$

### 1.23.7 Satz

Sei  $h : T_\Sigma \rightarrow T_\Gamma$  beliebiger Homomorphismus und  $L \subseteq T_\Gamma$  erkennbar. Dann ist auch  $h^{-1}(L) \subseteq T_\Sigma$  erkennbar.

Beweis:

Sei  $A' = (Q', \Gamma, F', \Delta')$  ein vollständiger DFTA mit  $L(A') = L$ .

Definiere  $A = (Q, \Sigma, F, \Delta)$  wie folgt:

$$Q = Q', F = F'$$

$$f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q \in \Delta$$

$$\Leftrightarrow \bar{h}_n(f)[x_1 \leftarrow q_1] \cdots [x_n \leftarrow q_n] \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q$$

Beweis der Korrektheit (strukturelle Induktion):

Zeige die stärkere Aussage: für  $q \in Q = Q'$  gilt

$$t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q \Leftrightarrow h(t) \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q$$

$$(h^{-1}(s) \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q \Leftrightarrow s \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q)$$

Induktionsannahme:

Sei  $t = a \in \Sigma^{(0)}$ . Dann gilt  $h(a) \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q \Leftrightarrow \bar{h}_0(a) \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q \Leftrightarrow a \rightarrow q \in \Delta \Leftrightarrow a \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$

Induktionsvoraussetzung:

Die Aussage gelte für Terme mit Höhe  $\leq k$

Induktionsschritt: Dann gilt sie auf für  $t$  mit Höhe  $k + 1$ .

Sei  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  mit  $ht(t_i) \leq k \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
 t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q &\Leftrightarrow \exists q_1, \dots, q_n : t_i \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_i \text{ und } f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q \in \Delta \\
 &\Leftrightarrow \exists q_1, \dots, q_n : h(t_i) \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q_i \text{ und } f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q \in \Delta \\
 &\Leftrightarrow \exists q_1, \dots, q_n : h(t_i) \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q_i \text{ und } \bar{h}_n(f)[x \leftarrow q_i] \cdot \dots \cdot [x_n \leftarrow q_n] \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q \\
 &\Leftrightarrow \bar{h}_n(f)[x_1 \leftarrow h(t_1)] \cdot \dots \cdot [x_n \leftarrow h(t_n)] \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q \\
 &\Leftrightarrow h(f(t_1, \dots, t_n))(= h(t)) \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q
 \end{aligned}$$

## 1.24 Top-Down Baumautomaten

Bisher: Bottom-Up TA - laufen Bäume von den Blättern zu der Wurzel nach oben.

Nun: Top-Down TA - umgekehrt

Definition:

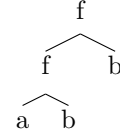
Ein nicht-deterministischer Top-Down Baumautomat ist ein Tupel  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, \Delta)$ , wobei:

- $Q$  eine endliche Menge Zustände
- $\Sigma$  ein Rangalphabet
- $I \subseteq Q$  Initialzustände
- $\Delta$  eine endliche Menge Regeln der Form  
 $q(f(x_1, \dots, x_n)) \rightarrow f(q_1(x_1), \dots, q_n(x_n))$   
bzw. für  $n = 0$ :  $q(a) \rightarrow a$

ist.

Beispiel:

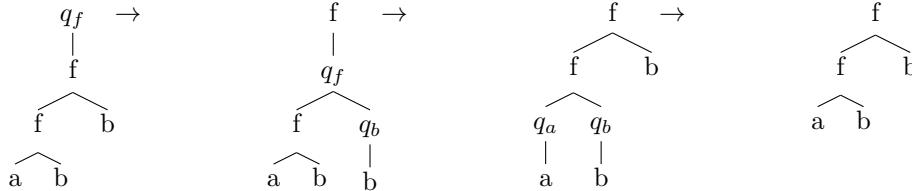
Wir betrachten wieder  $\Sigma = \{a^{(0)}, b^{(0)}, f^{(2)}\}$  und  $t =$



Setze

$$Q = \{q_f(f(x_1, x_2)) \rightarrow f(q_f(x_1), q_b(x_2)), q_f(f(x_1, x_2)) \rightarrow f(q_a(x_1), q_b(x_2)), q_a(a) \rightarrow a, q_b(b) \rightarrow b\}$$

Run für  $t$  (intuitiv):



Betrachte folgende Übergangsrelation:

$C[q(f(t_1, \dots, t_n))] \rightarrow C[f(q_1(t_1), \dots, q_n(t_n))], C \in T_{\Sigma \cup Q}(x),$   
 falls  $q(f(x_1, \dots, x_n)) \rightarrow f(q_1(x_1), \dots, q_n(x_n)) \in \Delta$

$\rightarrow^*$  transitive Hülle

$L(\mathcal{A}) = \{t \in T_\Sigma | q(t) \rightarrow^*, q \in I\}$

## 1.25 Satz

Eine Sprache  $L \subseteq T_\Sigma$  ist genau dann erkennbar, wenn es einen nichtdeterministischen Top-Down TA  $\mathcal{A}$  gibt mit  $L = L(\mathcal{A})$ .

Bemerkung:

Top-Down Automaten sind nicht determinisierbar. Deterministische Top-Down TA erkennen „path closed“ Sprachen.

## 2 Grammatiken

### 2.1 Definition - Grammatik

Eine Grammatik ist ein Tupel  $G = (S, N, \Sigma, R)$ . Dabei ist:

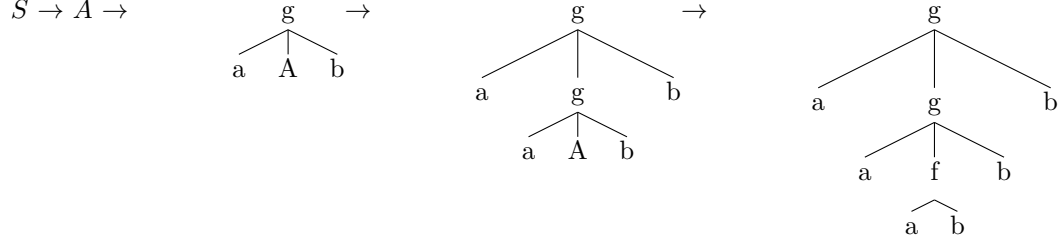
- $S$  Startsymbol ( $S = S^{(0)}, S \in N$ )
- $N$  (Rangalphabet) nichtterminale Symbole
- $\Sigma$  (Rangalphabet) terminale Symbole ( $\Sigma \cap N = \emptyset$ )
- $R$  Regeln der Form  $\alpha \rightarrow \beta$  mit:  
 $\alpha, \beta \in T_{\Sigma \cup N \cup X}$  ( $X \cap (\Sigma \cup N) = \emptyset$  Variablen),  
 $\alpha$  enthält mindestens ein Nichtterminal-Symbol

Eine reguläre Grammatik enthält nur Regeln der Form  $A \rightarrow B$ , wobei  $A$  den Rang 0 hat und  $b \in T_{\Sigma \cup N}$ . Insbesondere enthält  $N$  nur Symbole mit Rang 0.

Beispiel: Betrachte  $G = (S, \{S, A\}, \{a^{(0)}, b^{(0)}, f^{(2)}\}, R)$  mit  
 $R = \{S \rightarrow f(A, b), A \rightarrow a, A \rightarrow f(A, b)\}$   
 zum Beispiel haben wir:



Beispiel: Betrachte  $G = (S, \{S, A\}, \{a^{(0)}, g^{(3)}, f^{(2)}\}, R)$  mit  
 $R = \{S \rightarrow A, A \rightarrow f(a, b), A \rightarrow g(a, A, b)\}$   
zum Beispiel:



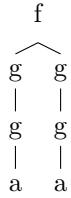
Bemerkung - kontextfreie Baumgrammatik:

$F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow t, t \in T_{\Sigma \cup N \cup \{x_1, \dots, x_n\}}$

z.B.  $S \rightarrow F(a, a), F(x, x) \rightarrow F(G(x), G(x)), F(x, x) \rightarrow f(x, x), G(x) \rightarrow g(x)$

Damit können wir erzeugen:

$S \rightarrow F(a, a) \rightarrow F(G(a), G(a)) \rightarrow F(G(G(a)), G(G(a))) \rightarrow \dots \rightarrow f(g(g(a)), g(g(a)))$



Betrachte nun folgende Ableitungsrelation für reguläre Grammatiken:

Wir schreiben  $s \rightarrow_G$  genau dann wenn ein Kontext  $C \in T_{\Sigma \cup N}(x)$  existiert, sodass

$s = C[A], t = C[\alpha], A \rightarrow \alpha \in R$  für  $G = (S, N, \Sigma, R)$ .

Mit  $\rightarrow_G^*$  bezeichnen wir die transitive Hülle von  $\rightarrow_G$ .

## 2.2 Definition

Ist  $G$  eine reguläre Grammatik, dann heißt  $L(G) = \{t \in T_\Sigma \mid S \rightarrow_G^* t\}$  die von  $G$  akzeptierte Sprache.

Eine Sprache  $L \subseteq T_\Sigma$  heißt regulär, falls  $L = L(G)$  für eine reguläre Grammatik.

Betrachte reguläre Grammatik  $G = (S, N, \Sigma, R)$  Wir bezeichnen mit  $L_G(A)$ ,  $A \in N$ , die von  $G$  erzeugte Sprache mit  $A$  als Startsymbol.

## 2.3 Definition - reduziert

Sei  $G = (S, N, \Sigma, R)$  eine reguläre Grammatik und  $A \in N$ . Dann heißt  $A$

- erreichbar, falls ein Kontext  $C \in T_\Sigma(x)$  existiert, so dass  $S \rightarrow_G^* C[A]$
- produktiv, falls  $L_G(A) \neq \emptyset$

$G$  heißt reduziert, falls alle  $A \in N$  erreichbar und produktiv sind.

## 2.4 Satz

Ist  $G$  eine reguläre Grammatik mit  $L(G) = L$ , dann existiert eine reduzierte reguläre Grammatik  $G'$  mit  $L(G') = L$ .

Nun: zu  $G$  eine „Normalform“ konstruieren.

## 2.5 Definition - Normalisierung

Eine reguläre Grammatik  $G$  heißt normalisiert, falls alle Regeln aus  $R$  die Form

- $A \rightarrow f(A_1, \dots, A_n), A, A_1, \dots, A_n \in N, v \in \Sigma^{(n)}$
- $A \rightarrow a, A \in N, a \in \Sigma$

## 2.6 Satz

Ist  $G$  eine reguläre Grammatik mit  $L(G) = L$ , dann existiert eine normalisierte reguläre Grammatik  $G'$  mit  $L(G') = L$ .

Beweis: Wir ersetzen Regeln der Form  $A \rightarrow f(s_1, \dots, s_n)$  durch  $A \rightarrow f(A_1, \dots, A_n)$  wobei: Ist  $s_i \in N$ , dann ist  $A_i = s_i$ , ansonsten ist  $A_i$  ein neues Symbol und wir fügen  $A_i \rightarrow s_i$  hinzu.  
...Iterieren...

Es bleiben übrig:

$A \rightarrow f(A_1, \dots, A_n), A \rightarrow a \in \Sigma, A_i \rightarrow A_j$  (letztere überbrücken)

Wir erhalten nun:

## 2.7 Theorem

$L$  ist erkennbar  $\Leftrightarrow L$  ist regulär.

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “ Ist  $L$  erkennbar, so existiert ein nicht-deterministischer Top-Down-TA  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, \Delta)$  mit  $L = L(\mathcal{A})$ . Betrachte eine Grammatik  $G = (S, N, \Sigma, R)$  mit

- $S$  ist ein neues Symbol
- $N = \{A_q | q \in Q\}$
- $R = \{A_q \rightarrow f(A_{q_1}, \dots, A_{q_n}) | q(f(x_1, \dots, x_n)) \rightarrow f(q_1(x_1), \dots, q_n(x_n)) \in \Delta\} \cup \{S \rightarrow A_{q_i} | q_i \in I\}$

Offensichtlich ist  $L(G) = L(\mathcal{A})$

„ $\Leftarrow$ “ analog (gehe von normalisierter Grammatik aus)  $\square$

Ziel: Definieren Konkatination und Kleene-Stern

Problem hierbei ist: Wir müssen erklären, wie wir Bäume zusammensetzen.



Dazu definieren wir: Substitution von Sprachen.

Betrachte  $t \in T_{\Sigma \cup k}$ , wobei  $k = \{\square_1, \dots, \square_n\}$ ,  $\square_i$  sind Konstanten.

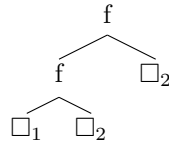
Es seien  $L_i \subseteq T_{\Sigma \cup k}$  Sprachen. Dann ist die Substitution  $t\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\}$  induktiv wie folgt definiert:

- $\square_i\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\} = L_i$
- $a\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\} = \{a\}$ ,  $a \neq \square_i$ ,  $a \in \Sigma^0$
- $f(s_1, \dots, s_n)\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\} = \{f(t_1, \dots, t_n) \mid t_i \in s_i\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\}\}$

Außerdem setzen  $L\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\} = \bigcup_{t \in L} t\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\}$

Beispiel: Betrachte  $k = \{\square_1, \square_2\}$

$t =$



$L_2 = \{a, b\}$

Dann ist  $t\{\square_2 \leftarrow L_2\} = \{$

$\}$

Nun setzen wir für zwei Sprachen  $L, M$ :

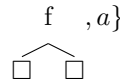
$$L \cdot_{\square} M = \bigcup_{t \in L} t\{\square \leftarrow M\}$$

Des weiteren ergibt sich der Kleene-Stern:

- $L^{0.\square} = \{\square\}$
- $L^{n+1.\square} = L^{n.\square} \cup L \cdot_{\square} L^{n.\square}$

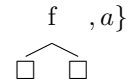
$$\Rightarrow L^{*.\square} = \bigcup_{n \geq L^{n.\square}}$$

Beispiel: Betrachte  $L = \{$



$L^{0.\square} = \{\square\}$

$L^{1.\square} = \{\square\} \cup L \cdot_{\square} \{\square\} = \{\square\} \cup \{$



$L^{2.\square} = \{\square,$



$L^{1.\square} \cdot_{\square} \{\square\} = \dots$



Abschlusseigenschaften:

## 2.8 Satz

Es sei  $L \subseteq T_{\Sigma \cup k}$  regulär, sowie  $\square_1, \dots, \square_n \in k$ . Dann ist  $L\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\}$  regulär.

Beweis:

Betrachte normalisierte Grammatiken  $G, G_1, \dots, G_n$  mit  $L(G) = L, L(G_1) = L_1, \dots, L(G_n) = L_n$ ,  $G = (S, N, \Sigma \cup k, R), G_i = (S_i, N_i, \Sigma \cup k, R_i)$ . (alle Nichtterminale paarweise disjunkt)

Konstruiere  $G' = (S, N', \Sigma \cup k, R')$  mit:

- $N' = N \cup N_1 \cup \dots \cup N_n$
- $R'$  enthält alle Regeln in  $R, R_1, \dots, R_n$ , wobei  $A \rightarrow \square_i$  ersetzt werden durch  $A \rightarrow S_i$

Direkt zeigen:  $L\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\} \subseteq L(G')$

Wir zeigen „ $\supseteq$ “

Induktion: über die Anzahl der Ableitungsschritte zeigen wir  $A \rightarrow_{G'}^* s'$  mit  $S \in T_{\Sigma \cup k}$  —  $s'$  enthält keine Nichtterminale

$\exists s$  mit  $A_{G'}^*$  und  $s' \in s\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\}$  — das heißt  $s' \in L_G(A)\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\}$

Induktionsannahme: Angenommen  $A \rightarrow_G^*$  in einem Schritt, das heißt  $s' \in L$ , die Regel kann nicht  $A \rightarrow \square_i$  sein (existiert nicht in  $G'$ ) und auch nicht  $A \rightarrow s_i$  (kein  $s' \in T_{\Sigma \cup k}$ . Damit:  $S' \in L$ . Seze  $s = s'$ , damit enthält  $s$  kein  $\square_i$ , also  $\{s'\} = \{s\} = s\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\}$ , also insbesondere  $s' \in s\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\} \subseteq L(A)\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\}$

Induktionsschritt:  $A \rightarrow_{G'}^* s'$ : zerlege  $A \rightarrow_{G'}^* s_1 \rightarrow_{G'}^* s'$  Fälle für  $s_1$  (bzw.  $A \rightarrow s_1$ )

- $a \rightarrow f(A_1, \dots, A_m) \Rightarrow s' = f(t_1, \dots, t_n)$ . Laut Induktionsvoraussetzung:  $t_i \in L(A_i)\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\} \Rightarrow s' \in L(A)$
- $A \rightarrow s_i \in R' \Rightarrow A \rightarrow \square_i \in R$  (laut Konstruktion)  $\Rightarrow \square_i \in L(A) \Rightarrow s' \in L_i \Rightarrow s' \in L(A)\{\square_1 \leftarrow L_1, \dots, \square_n \leftarrow L_n\}$

Aussage gilt für alle Nichtterminale  $A_i$ , also auch für Startsymbol  $S$ .  $\square$

## 2.9 Satz

Ist  $L \subseteq T_{\Sigma \cup K}$  regulär und  $\square \in K$ , dann ist  $L^*.\square$  regulär.

Beweis: Betrachte normalisierte Grammatik  $G = (S, N, \Sigma \cup K, R)$  mit  $L(G) = L$ .

Konstruiere  $G' = (S', N \cup \{S'\}, \Sigma \cup K, R')$  (mit  $S' \notin N$ ) wie folgt:

$R'$  enthalte alle Regeln aus  $R$ , wobei:

- $A \rightarrow \square$  wird ersetzt durch  $A \rightarrow S'$
- $S' \rightarrow S$
- $S' \rightarrow \square$  (damit  $\square \in L(G')$ )

Induktion liefert:  $L(G') = L^*.\square$

## 2.10 Definition

Wir formalisieren nun die rationalen Ausdrücke:

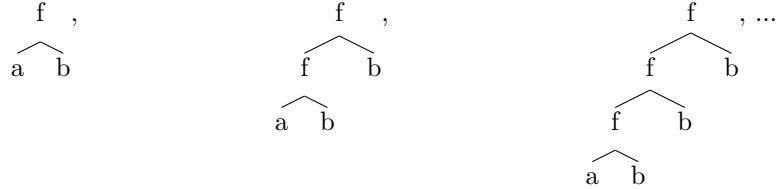
Sei  $\Sigma$  ein Rangalphabet,  $K$  eine Menge Konstanten mit  $\square \in K$ : Dann ist  $Rat(\Sigma, K)$  die kleinste Menge, sodass:

- $\emptyset \in Rat(\Sigma, K)$
- $a \in \Sigma^0 \cup K' \Rightarrow a \in Rat(\Sigma, K)$
- $f \in \sigma^n, E_1, \dots, E_n \in Rat(\Sigma, K) \Rightarrow f(E_1, \dots, E_n) \in Rat(\Sigma, K)$
- $E_1, E_2 \in Rat(\Sigma, K) \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in Rat(\Sigma, K)$
- $E_1, E_2 \in Rat(\Sigma, K), \square \in K \Rightarrow E_1 \cdot \square E_2 \in Rat(\Sigma, K)$
- $E_1 \in Rat(\Sigma, K), \square \in K \Rightarrow E_1^* \cdot \square \in Rat(\Sigma, K)$

Die Ausdrücke  $Rat(\Sigma, K)$  heißen rational über  $\Sigma$  und  $K$ . Ist  $E$  ein rationaler Ausdruck in  $Rat(\Sigma, K)$ , dann repräsentiert  $E$  eine Menge von Termen aus  $T_{\Sigma \cup K}$ , bezeichnet mit  $\|E\|$ .

- $\|\emptyset\| = \emptyset$
- $\|a\| = \{a\}$
- $\|f(E_1, \dots, E_n)\| = \{f(t_1, \dots, t_n) \mid t_i \in \|E_i\|\}$
- $\|E_1 \cup E_2\| = \|E_1\| \cup \|E_2\|$
- $\|E_1 \cdot E_2\| = \|E_1\| \cdot \|E_2\|$
- $\|E^* \cdot \square\| = \|E\|^* \cdot \square$

Beispiel: Der Ausdruck  $(f(\square, b))^* \cdot \square a$  ist rational und repräsentiert alle Terme der Form



Wir erhalten die „Baumautomaten“-Variante von Kleene:

## 2.11 Theorem

Rationale Ausdrücke haben die selbe Ausdrucksstärke wie bottom-up Baumautomaten.

Beweis: Ist  $E$  ein rationaler Ausdruck, so existiert laut Sätzen 2.8 und 2.9 und den Abschlusseigenschaften von Baumautomaten ein Baumautomat  $\mathcal{A}$  mit  $L(\mathcal{A}) = \|E\|$ . Umgekehrt: Sei  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$  ein Baumautomat. Wir zeigen: Es existiert ein rationaler Ausdruck  $E$  aus  $Rat(\Sigma, K)$  mit  $\|E\| = L(\mathcal{A})$ .

Betrachte hierzu für  $1 \leq i, j \leq |Q|$  und  $Z \subseteq Q$  Terme  $T(i, j, Z)$  definiert wie folgt:  $t \in T(i, j, Z)$ , falls  $t \in T_{\Sigma \cup K}$  mit einem Lauf  $R$  in  $t$ , so dass:

- $v(\varepsilon) = q_i$
- ist  $p \neq \varepsilon$  und  $t(p)/inZ$ , dann ist  $r(p) \in \{q_1, \dots, q_j\}$

Damit:  $L(\mathcal{A}) = \bigcup_{q_i \in F} T(i, |Q|, \emptyset)$

Induktion über  $j$ :  $T(i, j, Z) \in Rat(\Sigma, K)$   $j = 0$ :  $t \in T(i, 0, Z)$  bedeutet, es existiert ein Lauf  $r$

- $r(\varepsilon) = q_i$
- kein Symbol, das nicht nullstellig ist, darf gelabelt sein  $\Rightarrow t = a$  oder  $t = f(a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n \in \Sigma^0 \Rightarrow$  endlich viele, also existiert ein rationaler Ausdruck

Induktionsschritt: Angenommen für  $j' < j$  ist  $T(i, j', Z) \in Rat(\Sigma, Q)$ .

Schreibe  $T(i, j, Z) = T(i, j-1, Z) \cup T(i, j-1, Z \cup \{q_j\}) \cdot_{q_j} (T(j, j-1, Z \cup \{q_j\}))^{*, q_j} \cdot_{q_j} T(j, j-1, Z)$