

Vorlesung Baumautomaten (Mitschrift)

Benedikt Elßmann (3720358)
be57xocu@studserv.uni-leipzig.de

Universität Leipzig

9. Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	2
1	Bäume und Baumautomaten	2
1.1	Definition Rangalphabet	3
1.2	Definition Term, Tree	3
1.3	Definition Höhe	4
1.4	Definition Position	4
1.5	Definition der Label an den Positionen	4
1.6	Definition Sub-Baum	4
1.7	Definition Baumautomat	5
1.8	Definition Lauf/Run	5
1.9	Lemma	6
1.10	Definition Determinismus	8
1.11	Satz	8
1.12	Definition vollständig und reduziert	10
1.13	Satz	10
1.14	Definition Kontext	10
1.15	Pumping-Lemma	11
1.16	Korollar	12
1.17	Abschlusseigenschaften	12
1.18	Definition Kongruenz	13
1.19	Definition	13
1.20	Lemma	13
1.21	Theorem (Myhill-Nerode)	14
1.22	Korollar	15
1.23	Einschub - Homomorphismen von Baumsprachen	15
1.23.1	Allgemeine Homomorphismen	15
1.23.2	Worthomomorphismen	15
1.23.3	Baumhomomorphismen	16
1.23.4	lineare Terme	17
1.23.5	linearer Homomorphismus	17
1.23.6	Satz	18
1.23.7	Satz	18

0 Einleitung

Automaten lesen Wörter $w = a_1 \dots a_n$ und geben "accept" aus oder nicht. Dafür gibt es Erweiterungen, wie etwa:

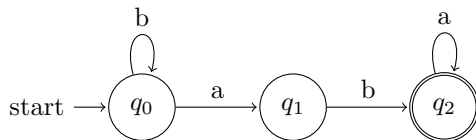
- gewichtete Automaten, das heißt der Output ist ein Semiringelement
- Automaten mit Gedächtnis (Stack)
- Automaten über anderen Strukturen
 - ω -Wörter $w = a_1 \dots a_n$
 - Graphen
 - Bäume
 - Kombinationen dieser

Typische Fragestellungen:

- Ausdrucksstärke
- Darstellung als rationale Ausdrücke (Kleene)
- Darstellung als Grammatik
- Darstellung als Logik

1 Bäume und Baumautomaten

Wir betrachten über $A = \{a, b\}$ den Automaten \mathcal{A} :



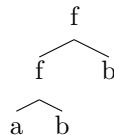
mit $L(\mathcal{A}) = b^*aba^*$.

Betrachtung des Wortes $w = baba \in L(\mathcal{A})$:

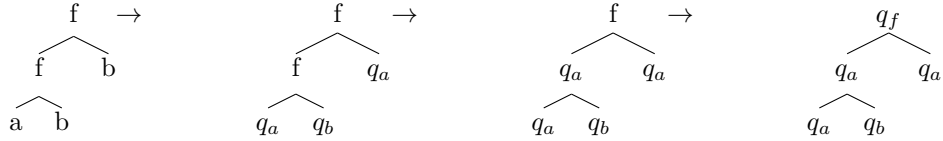
Der eindeutige erfolgreiche Lauf für w lässt sich darstellen als:

$q_0baba \rightarrow bq_0aba \rightarrow baq_1ba \rightarrow babq_2a \rightarrow babaq_2 \in F$ (Finalzustand)

Baumautomaten funktionieren analog. Unser erstes Beispiel wird



Akzeptiert mit dem Lauf:



mit $q_f \in F$

1.1 Definition Rangalphabet

Ein paar (Σ, rk) , wobei Σ eine endliche Menge von Symbolen und $rk : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung ist, heißt Rangalphabet.

Für $f \in \Sigma$ heißt $rk(f)$ der Rang (oder die Stelligkeit) von f .

Intuitiv: $rk(f)$ ist die Anzahl der Kinder von f in einem Baum.

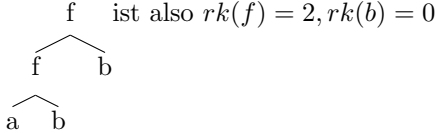
Insbesondere ist die Anzahl der Kinder für jedes Symbol fest.

Gilt $rk(f) = n$, schreiben wir auch $f^{(n)}$ statt f . wir schreiben:

- 0-stellige Symbole (Konstanten) a, b, \dots
- unär, binär, $\dots f, g, \dots$

Wir setzen $\Sigma^{(n)} = \{f \in \Sigma \mid rk(f) = n\}$

In



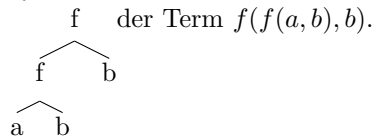
1.2 Definition Term, Tree

Sei (Σ, rk) ein Rangalphabet. Die Menge T_Σ der Bäume über Σ ist induktiv definiert durch:

- $\Sigma^0 \subseteq T_\Sigma$
- $f^{(n)} \in \Sigma$. $t_1, \dots, t_n \in T_\Sigma$, dann ist $f(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma$

Intuitiv sind t_1, \dots, t_n die Kinder von f .

Z.B. ist



1.3 Definition Höhe

Sei (Σ, rk) ein Rangalphabet. Die Höhe ht ist gegeben durch:

- für $a^{(0)} \in \Sigma : ht(a) = 1.$
- für $f(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma : ht(f) = 1 + \max\{ht(t_i) | i \in \{1, \dots, n\}\}$

Ziel: Zugriff auf einen Knoten innerhalb eines Baumes und deren Label.
Dafür ordnen wir den Knoten Positionen zu. Das geht induktiv wie folgt:

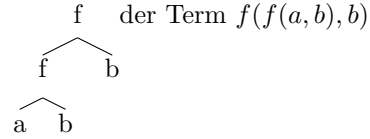
1.4 Definition Position

Sei (Σ, rk) ein Rangalphabet. Die Positionenmenge ist definiert durch:

- für $a^{(0)} \in T_\Sigma$ ist $Pos(a) = \{\varepsilon\}$
- für $f(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma$ ist $Pos(f(t_1, \dots, t_n)) = \{\varepsilon\} \cup 1 \cdot Pos(t_1) \cup \dots \cup n \cdot Pos(t_n)$

Beispiel:

Betrachtung von $f(f(a, b), b)$ bzw.



$$Pos(f) = \{\varepsilon, 1, 2, 1.1, 1.2\}$$

1.5 Definition der Label an den Positionen

Für einen Term der Form $t = f(t_1, \dots, t_n)$ ist das Symbol $t(p)$ in t an p -ter Position induktiv definiert durch:

- $t(\varepsilon) = f$
- $t(ip) = t_i(p), i \in \{1, \dots, n\}$

Beispiel: Betrachtung von $f(f(a, b), b)$

Dann ist

$$t(\varepsilon) = f$$

$$t(1) = t(1 \cdot \varepsilon) = t_1(\varepsilon) = f$$

$$t(2) = t(2 \cdot \varepsilon) = t_2(\varepsilon) = b$$

$$t(1.1) = t_1(1) = a$$

$$t(1.2) = t_1(2) = b$$

1.6 Definition Sub-Baum

Für T_Σ ist ein Sub-Baum $t|_p$ an p -ter Position wie folgt definiert:

- $Pos(t|_p) = \{i|pi \in Pos(t)\}$

- $\forall q \in Pos(t|_p)$ ist $t|_p(q) = t(pq)$

Wir schreiben $t[u]_p$ für den Baum, der entsteht, wenn man in t den sub-Baum $t|_p$ durch u ersetzt.

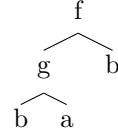
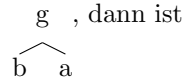
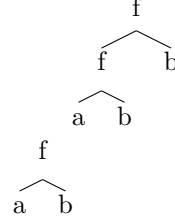
Beispiel: $f(f(a, b), b)$ bzw.

$$t|_1 = f(a, b)$$

$$t|_2 = t(1.2) = b$$

$$u = g(b, a)$$

$$t[u]_1 = f(g(b, a), b)$$



1.7 Definition Baumautomat

Ein Baumautomat \mathcal{A} ist ein 4-Tupel (Q, Σ, F, Δ) , wobei:

$Q \dots$ endliche Menge an Zuständen

$\Sigma \dots$ Rangalphabet, wobei $\Sigma \cup Q \neq \emptyset$

$F \dots \subseteq Q$ Finalzustände

$\Delta \dots$ Menge von Regeln

$$r : f(q_1 \dots q_n) \rightarrow q$$

für $q, q_1, \dots, q_n \in Q$, für $a^{(0)} \in T_\Sigma : a \rightarrow q$

Beispiel:

$$\mathcal{A} = \{\{q_a, q_b, q_f\}, \{a^{(0)}, b^{(0)}, f^{(2)}\}, \{q_f\}, \Delta\}$$

$$\text{mit } \Delta = \{a \rightarrow q_a, b \rightarrow q_b, f(q_a, q_b) \rightarrow q_a, f(q_a, q_b), f(q_a, q_b) \rightarrow q_f\}$$

1.8 Definition Lauf/Run

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ ein Baumautomat und $t \in T_\Sigma$. Ein Lauf r für t von \mathcal{A} ist ein Term mit

- $Pos(r) = Pos(t)$
- Ist $t(p) = a$ ein Blatt, dann ist $r(p) = q_a$, nur wenn $(a \rightarrow q_a) \in \Delta$
- Ist $t(p) = f^{(m)}$, dann ist $r(p) = q$, wenn $(f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q) \in \Delta$ und $r(p_i) = q_i, i \in \{1, \dots, n\}$

Ein Lauf ist erfolgreich, wenn $r(\varepsilon) \in F$. Der Automat \mathcal{A} akzeptiert t , falls es einen erfolgreichen Lauf für t von \mathcal{A} gibt.

Wir bezeichnen mit $L(\mathcal{A}) = \{t \in T_\Sigma \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } t\}$ die von \mathcal{A} erkannte Baumsprache. Eine Sprache $L \subseteq T_\Sigma$ heißt erkennbar, falls ein Baumautomat \mathcal{A} existiert mit $L = L(\mathcal{A})$.

Um einzelne Schritte von Baumautomaten zu formalisieren, betrachten wir die *move relation* $\rightarrow_{\mathcal{A}}$, definiert wie folgt:

Gegeben sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$, dann ist $t \rightarrow_{\mathcal{A}} t'$ mit $t, t' \in T_{\Sigma \cup Q}$, falls

- $t(p) = f^{(n)}$
- $t(pi) = q_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und p_i sind Blätter
- $(f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q) \in \Delta$
- und $t' = t[q]_p$

Mit $\rightarrow_{\mathcal{A}}^*$ bezeichnen wir die transitive Hülle von $\rightarrow_{\mathcal{A}}$.

1.9 Lemma

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ ein Baumautomat. Dann ist $L(\mathcal{A}) = \{t \in T_\Sigma \mid t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q \text{ mit } q \in F\} (= Z)$

Beweis: „ $L(\mathcal{A}) \subseteq Z$ “:

Wir zeigen: Es existiert ein Run r für t von \mathcal{A} mit $r(\varepsilon) = q$, dann ist $t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$

Inuktionsannahme:

$t = a^{(0)} \in T_\Sigma$. Dann gilt $a \in L(\mathcal{A})$, falls ein Lauf r existiert mit $r(a) = q_a$ und $(a \rightarrow q_a) \in \Delta$. Dann folgt $a \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_a$.

Sei nun $t = f(t_1, \dots, t_n)$

Induktionsvoraussetzung:

Falls für t_1, \dots, t_n Läufe r_i existieren mit $r_i(\varepsilon) = q_i$, dann gilt auch $t_i \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_i$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$

Induktionsschritt:

zu zeigen: Es existiert ein Lauf r für t mit $r(\varepsilon) = q$, dann $t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$.

Sei also r ein Lauf mit $r(\varepsilon) = q$. Dann ist $r(i) = q_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, mit $(f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q) \in \Delta$.

Laut Induktionsvoraussetzung gilt nun, $t_i \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Damit $t = f(t_1, \dots, t_n) \rightarrow_{\mathcal{A}}^* f(q_1, t_2, \dots, t_n) \rightarrow_{\mathcal{A}}^* \dots \rightarrow_{\mathcal{A}}^* f(q_1, \dots, q_n)$

Des weiteren haben wir die regel $f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q$, das heißt $f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$.

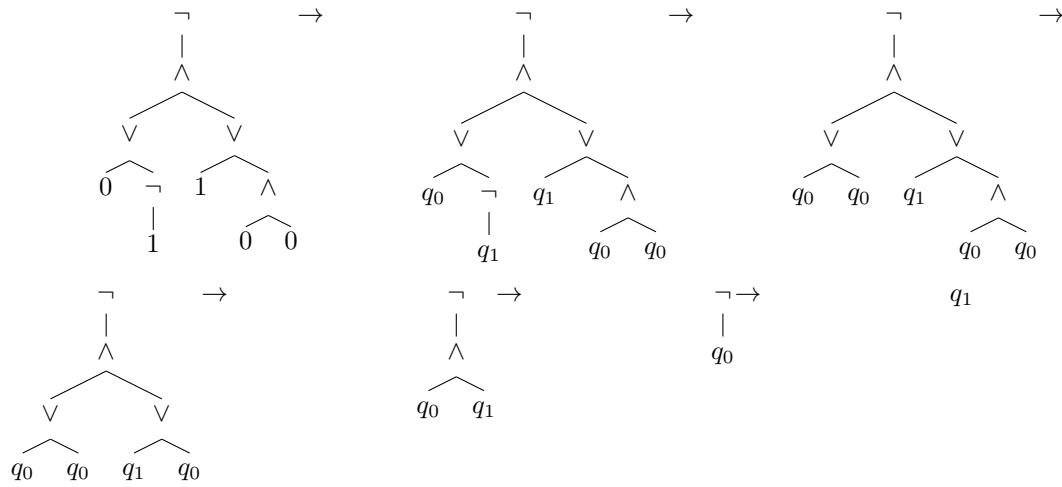
Insgesamt also $t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$

Beweis: „ $L(Z \subseteq \mathcal{A})$ “: analog

Einige Beispiele für Baumentautomaten:

- Sei $B = (\{q_0, q_1\}, \{0^{(0)}, 1^{(0)}, \neg^{(1)}, \wedge^{(2)}, \vee^{(2)}\} \{q_1\}, \Delta)$ mit
 $\Delta = \{0 \rightarrow q_0, 1 \rightarrow q_1,$
 $\neg(q_0) \rightarrow q_1, \neg(q_1) \rightarrow q_0,$
 $\wedge(q_0, q_0) \rightarrow q_0, \wedge(q_0, q_1) \rightarrow q_0, \wedge(q_1, q_0) \rightarrow q_0, \wedge(q_1, q_1) \rightarrow q_1$
 $\vee(q_0, q_0) \rightarrow q_0, \vee(q_0, q_1) \rightarrow q_1, \vee(q_1, q_0) \rightarrow q_1, \vee(q_1, q_1) \rightarrow q_1\}$

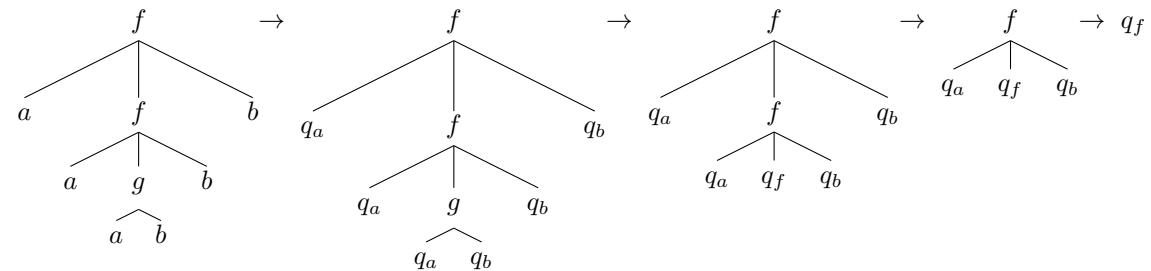
Beispiellauf:



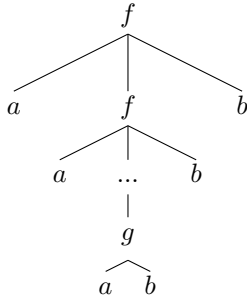
2. $(a^n b^n \text{light})$

Betrachten $\mathcal{A} = (\{q_a, q_b, q_f\}, \{a^{(0)}, b^{(0)}, f^{(3)}, g^{(2)}\}, \{q_f\}, \Delta)$
mit $\Delta =$
 $\{a \rightarrow q_a, b \rightarrow q_b, g(q_a, q_b) \rightarrow q_f, f(q_a, q_f, q_b) \rightarrow q_f\}$

Beispiellauf:



\mathcal{A} akzeptiert also alle Bäume der Form:



3. Simulation eines Wortautomaten: (siehe Übung)

Betrachtet man $\Sigma = \{a^{(0)}, f^{(2)}, g^{(1)}\}$. Dann ist $L = \{f(g^i(a), g^i(a)) | i \geq 0\}$ nicht erkennbar.

1.10 Definition Determinismus

Ein Automat $\mathcal{A}(Q, \Sigma, F, \Delta)$ heißt deterministisch, falls: aus $f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q$ und $f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q'$ folgt $q = q'$

1.11 Satz

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ ein Baumautomat, dann existiert ein deterministischer Baumautomat \mathcal{A}_d , so dass $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_d)$.

Beweis: Setze $\mathcal{A}_d = (Q_d, \Sigma, F_d, \Delta_d)$
mit $Q_d = 2^Q$ (*)
und $f(s_1, \dots, s_n) \rightarrow s \in \Delta_d$
 $\Leftrightarrow s = \{q \in Q | \exists q_1 \in s_1 \dots q_n \in s_n : (f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q) \in \Delta\}$
und $F_d = \{s \in Q_d | s \cap F \neq \emptyset\}$.

Wir zeigen:

1. \mathcal{A} ist deterministisch
2. $L(\mathcal{A}) \subset L(\mathcal{A}_d)$
3. $L(\mathcal{A}_d) \subset L(\mathcal{A})$

1. ist klar, denn (*) ist mit einer Äquivalenz definiert.
2. „ $L(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{A}_d)$ “:

Wir zeigen hierzu: Ist $Z = \{q | t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q\}$, dann $t \rightarrow_{\mathcal{A}_d}^* z$.

Induktionsannahme:

Angenommen $a \rightarrow_{\mathcal{A}} q_a$, dann ist $q_a \in \{q \in Q | q \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q\}$, das heißt

$a \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_a \Leftrightarrow q_a \in \{q \in Q \mid a \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q\}$
 $\Leftrightarrow q_a \in \{q \in Q \mid (a \rightarrow q) \in \Delta\}$
 also $a \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_a \Leftrightarrow q_a \in \{q \in Q \mid (a \rightarrow q) \in \Delta\}$, das heißt
 $z := \{q_a \in Q \mid a \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_a\} = \{q \in Q \mid (a \rightarrow q) \in \Delta\} =: s$

Nun ist $(a \rightarrow s) \in \Delta_d$ per Definition, also auch $(a \rightarrow z) \in \Delta_d$, damit: $a \rightarrow_{\mathcal{A}_d}^* z$.

Betrachten wir nun $t = \sigma(t_1, \dots, t_n)$

Induktionsvoraussetzung:

$t_i \rightarrow_{\mathcal{A}_d}^* z_i$ mit $Z_i = \{q \in Q \mid t_i \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q\}$

Das heißt, es existieren Läufe r_i für t_i von \mathcal{A}_d mit $r_i(\varepsilon) = z_i$

Induktionsschritt:

zu zeigen: $t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* z$ mit $Z = \{q \in Q \mid t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q\}$

Das heißt, es existiert ein Lauf r für t von \mathcal{A}_d mit $r(\varepsilon) = z$

Das heißt, $\exists r$:

- $r(\varepsilon) = z$
- $r(i) = z_i$
- $\sigma(z_1, \dots, z_n) \rightarrow z \in \Delta_d$

Setze nun $r|_i = r_i$, damit ist insbesondere $r(i) = r_i(\varepsilon) = z := \{q \mid t_i \rightarrow_{\mathcal{A}_d}^* q\}$

Es bleibt also zu zeigen: \exists Regel $\sigma(z_i, \dots, z_m) \rightarrow z \in \Delta_d$.

Es ist nun $z \in Z \Leftrightarrow t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* z$

$\Leftrightarrow \exists q_i \in Q : t_i \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_i, \sigma(q_1, \dots, q_m) \rightarrow z \in \Delta$

$\Leftrightarrow \exists z_i \in Z_i$ und $\sigma/z_1, \dots, z_m) \rightarrow z \in \Delta$

Also $Z = \{z \in Q \mid \exists z_i \in Z_i : (\sigma/z_1, \dots, z_m) \rightarrow z) \in \Delta\}$ also per Definition $\sigma/z_1, \dots, z_m) \rightarrow z \in \Delta_d$

2. „ $L(\mathcal{A}_d) \subseteq L(\mathcal{A})$ “:

Sei $t \in T_{\Sigma}$ mit $t \notin L(\mathcal{A})$, dann ist $Z \cap F = \{q \in Q \mid t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q\} \cap F = \emptyset$

Laut 2. ist $t \rightarrow_{\mathcal{A}_d}^* z$ (und \mathcal{A} ist deterministisch) Wegen $Z \cap F = \emptyset$ ist $Z \notin F_d$, also $t \notin L(\mathcal{A}_d)$

Wir vereinbaren die Abkürzungen: NBA/NTA für nichtdeterministischer Baumautomat und DBA/DTA für deterministischer Baumautomat.

Wie im Wortfall ist die Konstruktion exponentiell, das heißt wir benötigen exponentiell viele Zustände ($Q_d = 2^{|Q|}$). Und wie im Wortfall lässt sich das im Allgemeinen nicht vermeiden.

Beispiel: Betrachtet man $\Sigma = \{f^{(1)}, g^{(1)}, a^{(0)}\}$ und sei $L_n = \{f \in T_{\Sigma} \mid t(\underbrace{1 \dots 1}_{n\text{-mal}}) = f\}$

Ein NTA benötigt $n + 2$ Zustände:

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ mit $Q = \{q, q_1, \dots, q_{n+1}\}$, $F = \{q_{n+1}\}$
mit Übergängen $\Delta = \{a \rightarrow q, f(q) \rightarrow q, g(q) \rightarrow q, f(q) \rightarrow q_1,$
 $f(q_i) \rightarrow q_{i+1}, g(q_i) \rightarrow q_{i+1}\}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$

Man kann zeigen: Ein DTA \mathcal{A}' mit $L(\mathcal{A}') = L_n$ hat mindestens 2^{n+1} Zustände.

1.12 Definition vollständig und reduziert

Ein Automat $(\mathcal{A} = Q, \Sigma, F, \Delta)$ heißt:

- vollständig, falls für jedes $f^{(n)} \in \Sigma$ und alle $q_1, \dots, q_n \in Q$ eine Regel $f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q \in \Delta$ existiert.
- reduziert, falls für jeden Zustand $q \in Q$ ein Term $t \in T_\Sigma$ existiert mit $f \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$

1.13 Satz

Sei \mathcal{A} ein Baumat. Dann existiert ein vollständiger, reduzierter Baumat \mathcal{A}' mit $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$.

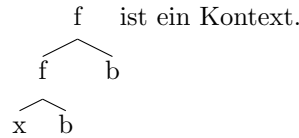
Für Wortautomaten gibt es das Pumping-Lemma, das die Gedächtnislosigkeit der Automaten formalisiert. Formal besagt es: Ist L eine reguläre Wortsprache, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass sich $w \in L$ mit $|w| > n$ zerlegen lässt in $w = xyz$, $y \neq \varepsilon$ und $\forall i \geq 0$ ist $xy^iz \in L$.

Baumat haben auch kein Gedächtnis, also erwarten wir ein analoges Resultat. Dazu müssen wir formalisieren, was „aufgepumpt“ werden soll.

1.14 Definition Kontext

Es sei Σ ein Rangalphabet und $x^{(0)} \notin \Sigma$. Es sei $C \in T_{\Sigma \cup \{x\}}$. Falls es genau eine Position $p \in \text{Pos}(C)$ gibt mit $C(p) = x$, dann heißt C ein Kontext.

Beispiel:

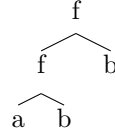


Wir schreiben $T_\Sigma(x)$ für die Menge aller solcher Kontexte.

Ist $C \in T_\Sigma(x)$ mit $C(p) = x$, dann schreiben wir $C[u]$ statt $C[u]_p$ für den Baum, der entsteht, wenn wir x durch u ersetzen.

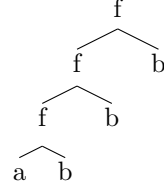
Wir schreiben $C^0 = x$, $C^1 = C$, $C^n = C^{n-1}[C]$

Beispiel: Betrachtet $t =$



Setze $u = f(a, b)$ und $C = f(x, b)$.

Dann ist $t = C[u]$ und $C^2[u] =$



1.15 Pumping-Lemma

Sei $L \subseteq t_\Sigma$ erkennbar, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass:

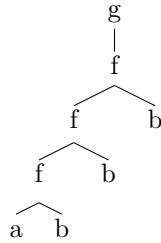
Für alle $T \in L$ mit $ht(t) > k$ gibt es einen Kontext $C \in T_\Sigma(x)$, einen nicht-trivialen Kontext $C' \in T_\Sigma(x)$ und einen Term $u \in T_\Sigma$ mit $t = C[C'[u]]$ und $C[(C')^n[u]] \in L$ für alle $n \geq 0$.

Beweis: Sei L erkennbar, das heißt \exists Baumentautomat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ mit $L = L(\mathcal{A})$. Setze $|Q| = k$ und betrachte $t \in L$ mit $ht(t) > k$. Betrachte nun einen Lauf r und einen Pfad in t , der länger als k ist. Nun gibt es $p_1, p_2 \in Pos(r)$ mit $r(p_1) = r(p_2) = q \in Q$. Sei nun $u = t|_{p_2}$ der Sub-Baum von t bei p_2 und $u' = t|_{p_1}$. Dann existiert C' mit $C'[u] = u'$ und es existiert C mit $t = C[C'[u]]$. Es ist wegen $t \in L$

$C[C'[u]] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* C[C'[q]] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* C[q] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_f \in F$, also auch

$C[(C')^n[u]] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* C[(C')^n[q]] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* C[C[(C')^{n-1}[q]]] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* \dots \rightarrow_{\mathcal{A}}^* C[q] \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_f \in F$. q.e.d.

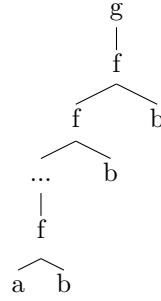
Beispiel: Betrachte den Baumentautomaten $\mathcal{A} = (\{q_a, q_b, q_g, q_f\}, \{a^{(0)}, b^{(0)}, g^{(1)}, f^{(2)}\}, \{q_f\}, \Delta)$ mit $\Delta = \{a \rightarrow q_a, b \rightarrow q_b, f(q_a, q_b) \rightarrow q_g, g(q_g) \rightarrow q_f\}$



$u = f(a, b)$, $u' = C'[u] = f(f(a, b), b)$

$C = g(f(x, b))$, $C' = f(x, b)$

$$C[(C')^n[u]] =$$



Die Sprache $L = \{f(g^i(a), g^i(a)) | i \geq 0\}$ kann nicht erkennbar sein, denn für große i würde man ein k finden, so dass ein gegebener Baumatomat auch $f(g^{i+lk}(a), g^i(a))$ für alle $l \geq 0$ akzeptiert.

1.16 Korollar

Für $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ ist $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists t \in L$ mit $ht(t) \leq |Q|$:

- $|L(\mathcal{A})|$ nicht endlich $\Leftrightarrow \exists t \in L$ mit $|Q| < ht(t) \leq 2|Q|$

1.17 Abschlusseigenschaften

Erkennbare Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung, Schnitt und Komplement. Das heißt, sind L_1 und L_2 erkennbar, dann auch $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$ und L_1^c (in T_Σ).

Beweis:

Seien \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 vollständige DTA. Betrachte für die Vereinigung

$\mathcal{A}_\cup = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2, \Delta_1 \times \Delta_2)$ mit

$\Delta_1 \times \Delta_2 = \{f((q_1, q'_1), \dots, (q_n, q'_n)) \rightarrow (q, q') | f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q \in \Delta_1, f(q'_1, \dots, q'_n) \rightarrow q' \in \Delta_2\}$

Dann akzeptiert \mathcal{A}_\cup die Sprache $L(\mathcal{A}_1) \cup L(\mathcal{A}_2)$.

Für $L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$ betrachte den Automaten

$\mathcal{A}_\cap = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, F_1 \times F_2, \Delta_1 \times \Delta_2)$

Für T_Σ $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_1)^c$ betrachte

$\mathcal{A}_C = (Q_1, \Sigma, Q_1, F_1, \Delta_1)$.

Der Automat \mathcal{A}_C akzeptiert $L(\mathcal{A}_1)^c$.

Beispiel:

Betrachte $\Sigma = \{a^{(0)}, g^{(1)}, f^{(2)}\}$ und $L = \{f(g^i(a), g^j(a)) | i \leq j\}$

Dann ist L nicht erkennbar, denn: Wäre L erkennbar, dann auch L' mit $L' = \{f(g^i(a), g^j(a)) | i \geq j\}$, also auch $L \cap L' \not\subseteq$.

Bemerkung: Wenn \mathcal{A} deterministisch und vollständig ist, dann können wir eine Übergangsfunktion $\delta : T_\Sigma \rightarrow Q$ definieren mit $\delta(t) = q$, falls $t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$.

Wiederholung - Äquivalenzrelation:

Eine Äquivalenzrelation \sim auf einer Menge M ist eine Relation mit

- $\forall m \in M : m \sim m$
- $\forall m, n \in M : m \sim n \Rightarrow n \sim m$
- $\forall l, m, n \in M : l \sim m, m \sim n \Rightarrow l \sim n$

Insbesondere: Ist \sim eine Äquivalenzrelation auf M , so induziert \sim eine Partition auf und umgekehrt, das heißt Mengen $(M_i)_{i \in I}$ mit $M_i \cup M_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $M = \bigcup_{i \in I} M_i$

1.18 Definition Kongruenz

Eine Äquivalenzrelation \equiv auf T_Σ heißt Kongruenz, falls für alle $f^{(n)} \in \Sigma$:

$$v_1 \equiv u_1, \dots, v_n \equiv u_n \Rightarrow f(v_1, \dots, v_n) \equiv f(u_1, \dots, u_n).$$

Beispiel:

Die Relation $t \equiv t'$, falls t und t' die gleiche Anzahl Blätter modulo 2 haben.

- Außerdem: $t \equiv t' \Leftrightarrow ht(t) = ht(t')$
- Nicht: gleiche Höhe modulo 2

1.19 Definition

Eine Kongruenz \equiv hat endlichen Index, falls \equiv endlich viele Äquivalenzklassen indiziert.

1.20 Lemma

Sei Σ ein Rangalphabet. Dann ist \equiv genau dann eine Kongruenz auf T_Σ , wenn \equiv eine Äquivalenzrelation ist mit $u \equiv v \Rightarrow C[u] \equiv C[v]$ für alle Kontexte.

Beweis:

„ \Rightarrow “ Induktion:

Induktionsannahme: $C = x$, dann ist $u \equiv v \Rightarrow C[u] \equiv C[v]$ klar.

Sei nun $C = f(C_1, \dots, C_n)$. Sei $x = C[ip] = C_i[p]$.

Dann ist $C[u]_{ip} = f(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i[p], C_{i+1}, \dots, C_n) = C[u]_{ip} = f(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i[v], C_{i+1}, \dots, C_n)$

„ \Leftarrow “: Angenommen $u \equiv v$ und $C[u] \equiv C[v]$ für alle Kontexte.

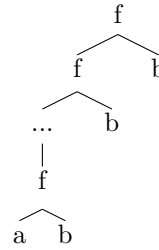
Sei $f^{(n)} \in \Sigma$. Dann ist:

$$\begin{aligned} & f(u_1, \dots, u_n) \\ &= C^1[u_1] \equiv C^1[v_1] = f(v_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= \dots \\ &= C^1[u_n] \equiv C^1[v_n] = f(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

Betrachte nun eine Sprache $L \subseteq T_\Sigma$ von Bäumen. Wir definieren \equiv_L als:

$$u \equiv_L v \Leftrightarrow \forall C \in T_\Sigma(x) : C[u] \in L \Leftrightarrow C[v] \in L.$$

Beispiel: Betrachte alle Bäume der Form

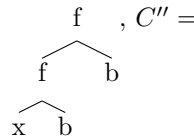
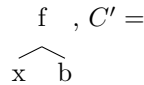


$$L = \{f(f(\dots f(a, b), b) \dots, b)\}$$

Dann gilt:



$C =$



1.21 Theorem (Myhill-Nerode)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- a) L ist erkennbar
- b) L ist die Vereinigung von Äquivalenzklassen einer Kongruenz mit endlichem Index
- c) \equiv_L hat endlichen Index

Beweis:

„a \Rightarrow b“: Sei \mathcal{A} vollständiger DTA mit $L(\mathcal{A}) = L$. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, F, \Delta)$.

Definiere $u \equiv_{\mathcal{A}} v \Leftrightarrow \delta(u) = \delta(v)$.

Offensichtlich hat $\equiv_{\mathcal{A}}$ höchstens $|Q|$ -viele Äquivalenzklassen. Außerdem ist $\equiv_{\mathcal{A}}$ eine Kongruenz.

Nun ist L Vereinigung aller Klassen $[u]_{\equiv_{\mathcal{A}}}$ mit $\delta(u) \in F$.

„b \Rightarrow c“: Sei \sim eine Kongruenz mit endlichem Index. Sei $u \sim v$. Wegen Lemma 1.20 gilt

$C[u] \sim C[v] \forall C \in T_{\Sigma}(x)$. Nun ist L die Vereinigung von Äquivalenzklassen von \sim , das heißt

$C[u] \in L \Leftrightarrow C[v] \in L$. Insbesondere ist also $u \equiv_L v$

Wir haben gezeigt: $v \in [u]_{\sim} \Rightarrow v \in [u]_{\equiv_L}$, also $[u]_{\sim} \leq [u]_{\equiv_L}$

(Also ist \sim eine Verfeinerung von \equiv_L)

Insbesondere hat \equiv_L kleineren Index als \sim , also endlichen.

„c \Rightarrow a“: Die Zustände Q_{\min} sind die Äquivalenzklassen bezüglich \equiv_L . (Damit ist Q_{\min} endlich).

Wir definieren Regeln

$$f([u_1], \dots, [u_n]) \rightarrow [f(u_1, \dots, u_n)].$$

Das ist wohldefiniert, weil \equiv_L eine Kongruenz ist. Finalzustände F_{\min} sind $\{[u]_{\equiv_L} \mid u \in L\}$.

Dann akzeptiert $\mathcal{A}_{\min} = (Q_{\min}, \Sigma, F_{\min}, \Delta_{\min})$ die Sprache L .

Beispiel:

Betrachte $\Sigma = \{a^{(0)}, g^{(1)}, f^{(2)}\}$ und

$L = \{f(g^i(a), g^i(a)) \mid i \geq 0\}$

Betrachte $g^i(a)$ und $g^j(a)$ mit $i \neq j$. Dann ist $C^i = f(x, g^i(a))$ ein Kontext mit $C^i[g^i(a)] \in L$, aber $C^i[g^j(a)] \notin L$. Da es unendlich viele $g^i(a)$ gibt, hat die Kongruenz bezüglich L unendlichen Index, also ist L nicht erkennbar.

1.22 Korollar

Ist L erkennbar, gibt es einen bis auf Umbenennung der Zustände eindeutigen, vollständigen DBA \mathcal{A} mit $L = L(\mathcal{A})$. Dieser ist \mathcal{A}_{\min} aus obigem Beweis.

Beweis:

Sei $L = L(\mathcal{A})$. Vorher gesehen:

$\equiv_{\mathcal{A}}$ ist Verfeinerung von \equiv_L

Also ist $|Q| \geq |Q_{\min}|$. Wir nehmen OBDA an: beide reduziert. Sei nun $q \in Q$. Betrachte ein $u \in T_{\Sigma}$ mit $\delta(u) = q$. Betrachte die Funktion $\rho : Q \rightarrow Q_{\min}$ mit $\delta(u) = q \mapsto \delta_{\min}(u)$

Die Abbildung ρ ist wohldefiniert, denn falls $\delta(u) = \delta(v)$, dann $u \equiv_{\mathcal{A}} v \Rightarrow u \equiv_L v \Leftrightarrow \delta_{\min}(u) = \delta_{\min}(v)$. Außerdem ist ρ surjektiv, denn $\delta_{\min}(u)$ hat das Urbild $\delta(u)$.

Also: $|Q| = |Q_{\min}| \Rightarrow \rho$ ist Bijektion. \square

1.23 Einschub - Homomorphismen von Baumsprachen

1.23.1 Allgemeine Homomorphismen

$(M, \cdot), (N, *); h : M \rightarrow N$ heißt Homomorphismus, falls

$\forall m, \hat{m} : h(m \cdot \hat{m}) = h(m) * h(\hat{m})$

1.23.2 Worthomomorphismen

$(A^*, \cdot), (B^*, \cdot); h : A^* \rightarrow B^*$ ist Homomorphismus, falls $h(w \cdot \hat{w}) = h(w) \cdot h(\hat{w})$. (zusätzlich $h(\varepsilon) = \varepsilon$)

Nutze für die Definition des Homomorphismus die induktive Definition von Wörtern aus A^* .

0.) $\varepsilon \in A^*$

1.) $a \in A^* \forall a \in A$

2.) $a \cdot w \in A^* \forall a \in A, w \in A^*$

Ein Wort-Homomorphismus entsteht deshalb aus einer Abbildung $\bar{h} : A \rightarrow B$ wie folgt:

0.) $h(\varepsilon) = \varepsilon$

1.) $h(a) = \bar{h}(a) \forall a \in A$

2.) $h(a \cdot w) = h(a) \cdot h(w) = \bar{h}(a) \cdot h(w) \forall a \in A, w \in A^*$

1.23.3 Baumhomomorphismen

T_Σ :

- 1.) $a \in T_\Sigma \ \forall a^{(0)} \in \Sigma$
- 2.) $f(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma \ \forall f^{(n)} \in T_\Sigma$

Zunächst: Schreibe $\Sigma = \bigcup_{n=0}^r \Sigma^{(n)}$, wobei $\Sigma^{(n)} = rk^{-1}(n)$.

Sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}, X_0 = \emptyset$

Dann ist für ein Rangalphabet Γ auch $\Gamma \cup X_n$ ein Rangalphabet mit $rk(x_i) = 0$

Nachtrag - Substitution:

$t, s \in T_{\Sigma \cup X_n}$ (für ein $n \in \mathbb{N}$)

Sei $P \subseteq pos(t), P = \{p \in pos(t) | t(p) = x_i\}$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$

Etwa $P = \{p_1, \dots, p_m\}$

Dann ist $t_{[x_i \leftarrow s]} = t[s]_{p_1} \cdot \dots \cdot t[s]_{p_m}$.

Definition von Homomorphismen für jeden Rang $n = 0, \dots, r$

Wähle eine Funktion $\bar{h}_n : \Sigma^{(n)} \rightarrow T_{\Gamma \cup X_n}$

Der von $\bar{h}_0, \dots, \bar{h}_r$ erzeugte Homomorphismus $h : T_\Sigma \rightarrow T_\Gamma$

- 1.) $h(a) = \bar{h}_0(a) \ \forall a \in \Sigma$
- 2.) $h(f(t_1, \dots, t_n)) = \bar{h}_n(f)[x_1 \leftarrow h(t_1)] \dots [x_n \leftarrow h(t_n)]$

Beispiel:

$$\Sigma = \{a^{(0)}, g^{(1)}, f^{(2)}\}$$

$$\Gamma = \{\alpha^{(0)}, \delta^{(2)}, \tau^{(2)}\}$$

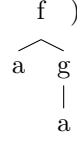
$$\bar{h}_0 : a \rightarrow \begin{array}{c} \tau \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \quad \alpha \end{array} ; \bar{h}_1 : g \rightarrow \begin{array}{c} \rho \\ \swarrow \quad \searrow \\ \rho \quad x_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \quad x_1 \end{array} ; \bar{h}_2 : f \rightarrow \begin{array}{c} \tau \\ \swarrow \quad \searrow \\ \tau \quad x_2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x_2 \quad \alpha \end{array}$$

Gegenbeispiel:

$$\bar{h}_0 : a \rightarrow \begin{array}{c} \tau \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \quad x_1 \end{array} ; \bar{h}_1 : g \rightarrow \begin{array}{c} \rho \\ \swarrow \quad \searrow \\ \rho \quad x_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \alpha \quad x_2 \end{array} ; \bar{h}_2 : f \rightarrow \begin{array}{c} \tau \\ \swarrow \quad \searrow \\ x_5 \quad \alpha \end{array}$$

Erzeugter Homomorphismus $h : T_\Sigma \rightarrow T_\Gamma$ wie oben

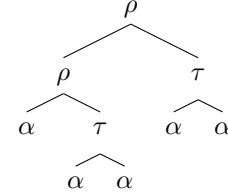
$h($



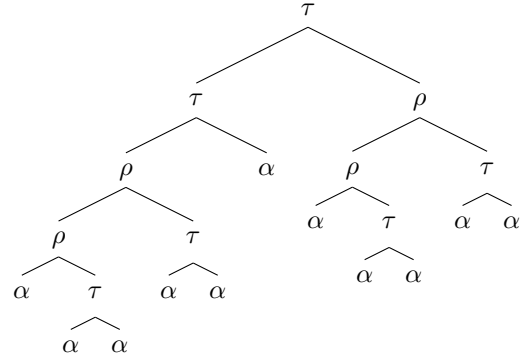
$h(a) = \bar{h}_0(a) =$



$h(g(a)) = \bar{h}_1(g)[x_1 \leftarrow h(a)] =$



$h(f(a, g(a))) = \bar{h}_2(f)[x_1 \leftarrow h(a)][x_2 \leftarrow h(g(a))]$



1.23.4 lineare Terme

Ein Term $t \in T_{\Sigma \cup X_n}$ heißt linear, falls jede Variable höchstens einmal vorkommt,
d.h. falls $\forall i \in \{1, \dots, n\} : |\{p \in \text{pos}(t) \mid t(p) = x_i\}| \leq 1$

1.23.5 linearer Homomorphismus

Ein Homomorphismen $h : T_{\Sigma} \rightarrow T_{\Gamma}$ erzeugt von $\bar{h}_0, \dots, \bar{h}_r$ heißt linear, falls $\forall f^{(n)} \in T_{\Sigma}$ gilt:
 $\bar{h}_n(f) \in T_{\Gamma \cup X_n}$ ist linear.

Beispiel: im Allgemeinen erhalten Homomorphismen die Erkennbarkeit nicht.

Betrachte

$$\Sigma = \{f^{(1)}, g^{(1)}, a^{(0)}\}, \Gamma = \{\hat{f}^{(2)}, g^{(1)}, a^{(0)}\}$$

$$\bar{h}_0 : a \rightarrow a, \bar{h}_1 : g \rightarrow g(x_1), \bar{h}_1 : f \rightarrow \hat{f}(x_1, x_1)$$

Für $L \subseteq T_{\Sigma}, L = \{f(g^i(a)) \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist $h(L) = \{\hat{f}(g^i(a), g^i(a)) \mid i \in \mathbb{N}\}$ nicht erkennbar, obwohl L erkennbar ist.

1.23.6 Satz

Sei $L \subseteq T_\Sigma$ erkennbar, $h : T_\Sigma \rightarrow T_\Gamma$ ein linearer Homomorphismen, dann ist $h(L) \subseteq T_\Gamma$ erkennbar.

Beweisskizze:

Sei $A = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ ein reduzierter DFTA mit $L(A) = L$

- Seien $(\bar{h}_n)_{n=0}^r$ die erzeugenden Funktionen von h
- Definiere NFTA $A' = (Q', \Gamma, F', \Delta)$ wie folgt:
für jede Regel $\rho : f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q \in \Delta$:
Setze $Q^\rho = \{q_p^\rho \mid q \in \text{pos}(\bar{h}_n(f))\}$ und
 Δ^ρ für jedes $p \in \text{pos}(\bar{h}_n(f))$
falls $(\bar{h}_n f)(p) = g^{(k)} \in \Gamma^{(k)}$ für ein k ,
 $g(q_{p-1}^\rho, \dots, q_{p-k}^\rho) \rightarrow q_p \in \Delta^\rho$
falls $(\bar{h}_n f)(g) = x_i$ für ein i
 $q_i \rightarrow q_p^\rho \in \Delta^\rho$
 $q_\varepsilon^\rho \rightarrow q \in \Delta^\rho$
OBdA Q^ρ paarweise disjunkt auch mit Q
- $Q' = \bigcup_{\rho \in \Delta} Q^\rho \cup Q$
- $\Delta = \bigcup_{\rho \in \Delta} \Delta^\rho \cup Q$
- $F' = F$

1.23.7 Satz

Sei $h : T_\Sigma \rightarrow T_\Gamma$ beliebiger Homomorphismus und $L \subseteq T_\Gamma$ erkennbar. Dann ist auch $h^{-1}(L) \subseteq T_\Sigma$ erkennbar.

Beweis:

Sei $A' = (Q', \Gamma, F', \Delta')$ ein vollständiger DFTA mit $L(A') = L$.

Definiere $A = (Q, \Sigma, F, \Delta)$ wie folgt:

$$Q = Q', F = F'$$

$$f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q \in \Delta$$

$$\Leftrightarrow \bar{h}_n(f)[x_1 \leftarrow q_1] \cdots [x_n \leftarrow q_n] \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q$$

Beweis der Korrektheit (strukturelle Induktion):

Zeige die stärkere Aussage: für $q \in Q = Q'$ gilt

$$t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q \Leftrightarrow h(t) \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q$$

$$(h^{-1}(s) \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q \Leftrightarrow s \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q)$$

Induktionsannahme:

Sei $t = a \in \Sigma^{(0)}$. Dann gilt $h(a) \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q \Leftrightarrow \bar{h}_0(a) \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q \Leftrightarrow a \rightarrow q \in \Delta \Leftrightarrow a \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q$

Induktionsvoraussetzung:

Die Aussage gelte für Terme mit Höhe $\leq k$

Induktionsschritt: Dann gilt sie auf für t mit Höhe $k + 1$.

Sei $t = f(t_1, \dots, t_n)$ mit $ht(t_i) \leq k \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
t \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q &\Leftrightarrow \exists q_1, \dots, q_n : t_i \rightarrow_{\mathcal{A}}^* q_i \text{ und } f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q \in \Delta \\
&\Leftrightarrow \exists q_1, \dots, q_n : h(t_i) \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q_i \text{ und } f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow q \in \Delta \\
&\Leftrightarrow \exists q_1, \dots, q_n : h(t_i) \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q_i \text{ und } \bar{h}_n(f)[x \leftarrow q_i] \cdot \dots \cdot [x_n \leftarrow q_n] \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q \\
&\Leftrightarrow \bar{h}_n(f)[x_1 \leftarrow h(t_1)] \cdot \dots \cdot [x_n \leftarrow h(t_n)] \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q \\
&\Leftrightarrow h(f(t_1, \dots, t_n))(= h(t)) \rightarrow_{\mathcal{A}'}^* q
\end{aligned}$$