

Versuch Nr.V302

Elektrische Brückenschaltungen

Niklas Düser
niklas.dueser@tu-dortmund.de

Benedikt Sander
benedikt.sander@tu-dortmund.de

Durchführung: 15.06.2021

Abgabe: 23.06.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Zielsetzung	3
1.2	Allgemeine Brückenschaltung	3
1.3	Spezielle Brückenschaltungen	4
1.3.1	Wheatstonesche Brücke (Widerstandsmessbrücke)	4
1.3.2	Kapazitätsmessbrücke	4
1.3.3	Induktivitätsmessbrücke	5
1.3.4	Induktivitätsmessung mittels Maxwell-Brücke	6
1.3.5	Wien-Robinson-Brücke	7
2	Durchführung	8
2.1	Wheatstonesche Brücke	8
2.2	Kapazitätsmessbrücke	8
2.3	Induktivitätsmessbrücke	8
2.4	Maxwell-Brücke	9
2.5	Wien-Robinson-Brücke	9
3	Auswertung	10
3.1	Wheatstonesche Brückenschaltung	10
3.2	Kapazitätsmessbrücke	10
3.3	Induktivitätsbrückenschaltung	11
3.4	Maxwell-Brücke	11
3.5	Wien-Robinson-Brücke	11
4	Diskussion	14
5	Anhang	15
	Literatur	15

1 Theorie

1.1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden unterschiedliche Brückenschaltungen als Messapparaturen betrachtet. Damit lässt sich jede physikalische Größe, die sich als elektrischen Widerstand darstellen kann, messen.

1.2 Allgemeine Brückenschaltung

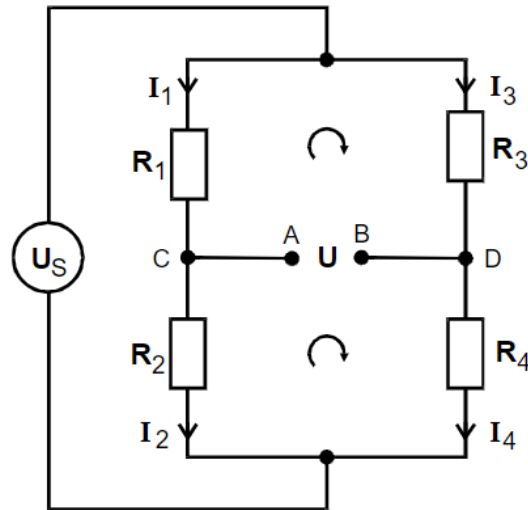


Abbildung 1: Prinzipielle Brückenschaltung[5].

In Abbildung(1) ist eine allgemeine Brückenschaltung zu sehen. Über die Potentialdifferenz kann nun ein Verhältnis der Widerstände bestimmt werden. Dies geschieht mittels des ersten Kirchhoffschen Gesetz. Dies ist die Knotenregel, welche besagt, dass der Strom der in einen Knoten fließt gleich dem Strom ist der aus dem Knoten raus fließt. Es ist also

$$I_1 = I_2 \quad \text{und} \quad I_3 = I_4,$$

aus dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz, der Maschenregel, welche besagt, dass die Summe aller Spannungen innerhalb einer Masche gleich 0 ist, folgt

$$\begin{aligned} U &= -R_1 I_1 + R_3 I_3 \\ -U &= -R_2 I_2 + R_4 I_4 . \end{aligned}$$

Einsetzen von der Speisespannung $U_S = I_1(R_1 + R_2)$ und umstellen ergibt

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S .$$

Es gilt also für

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 \quad , \quad (1)$$

verschwindet die Brückenspannung unabhängig von der Speisespannung. Die Brücke ist abgeglichen.

1.3 Spezielle Brückenschaltungen

Brückenschaltungen können weiterhin auch zur Vermessung anderer elektrischer Bauteile genutzt werden. Einige davon sind im Folgenden aufgelistet.

1.3.1 Wheatstonesche Brücke (Widerstandsmessbrücke)

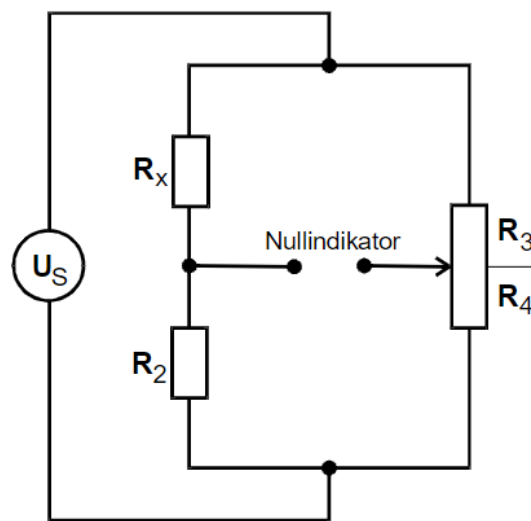


Abbildung 2: Wheatstonesche Brückenschaltung[5].

Die Wheatstonesche Brückenschaltung aus Abbildung(2) besteht genau wie die bereits betrachtete allgemeine Brückenschaltung(1) nur aus ohmschen Widerständen und wird benutzt um den Widerstand R_x zu bestimmen. Nach Formel(1) ergibt sich schnell

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (2)$$

für den unbekannten Widerstand.

1.3.2 Kapazitätsmessbrücke

Kondensatoren besitzen in der Realität neben ihrer Kapazität auch immer einen Widerstand, da sie elektrische Energie in Wärme transformieren. Daher werden ideale Kondensatoren in Ersatzschaltbildern noch mit einem fiktiven Widerstand versehen. Um

nun den Widerstand und die Kapazität dieses realen Kondensators zu bestimmen eignet sich die Schaltung aus Abbildung(3).

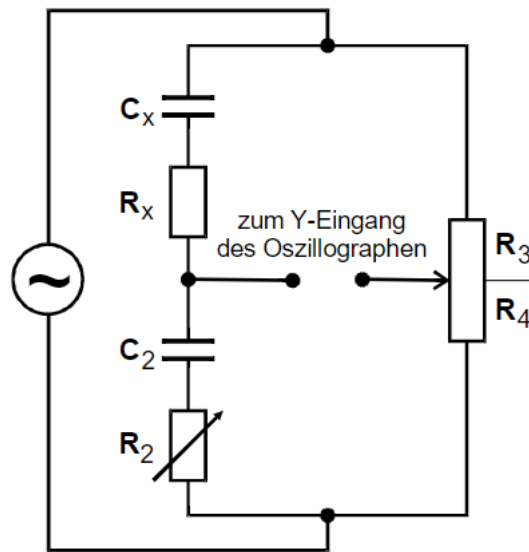


Abbildung 3: Eine Kapazitätsmessbrücke[5].

Hier ist R_2 ein veränderlicher Widerstand um die Phasenverschiebung des fiktiven Widerstandes auszugleichen. Es ergibt sich

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

und

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3}$$

für die Eigenschaften des realen Kondensators.

1.3.3 Induktivitätsmessbrücke

Analog zu den Kondensatoren haben auch reale Spulen neben der Induktivität einen Widerstand der im Ersatzschaltbild durch einen fiktiven Widerstand dargestellt wird.

Zur Bestimmung der Induktivität L_x und des Widerstandes R_x einer realen Spule kann eine Schaltung wie in Abbildung(4) verwendet werden.

Die Formeln für den Widerstand ergeben sich analog zu denen der Kapazitätsmessbrücke zu

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4},$$

für den fiktiven Widerstand und

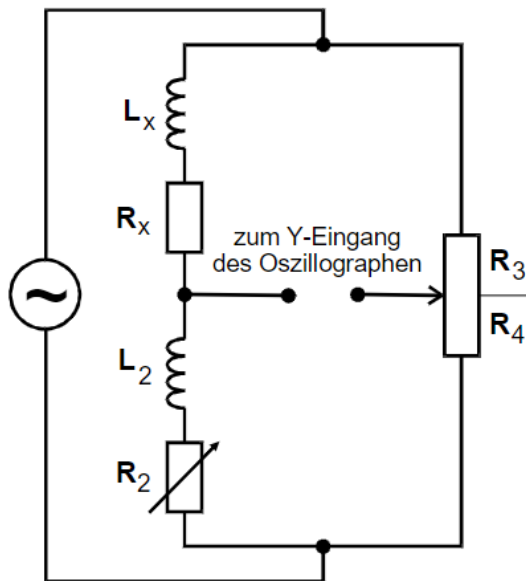


Abbildung 4: Eine Induktivitätsmessbrücke[5].

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4}$$

für die Induktivität.

In dieser Schaltung bekommt nur die zu vermessende Spule einen fiktiven Widerstand. Die Spule L_2 wird jedoch als ideale Spule genähert. Dies ist gerade für kleine Spulen nicht realisierbar. Dieses Problem wird mit der Maxwell-Brücke überwunden.

1.3.4 Induktivitätsmessung mittels Maxwell-Brücke

Das Schaltbild der bereits erwähnten Maxwell-Brücke ist in Abbildung(5) zu finden. Hier sind R_3 , R_4 regelbare Widerstände und C_4 ein möglichst verlustarmer Kondensator. Hieraus ergibt sich

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4}$$

und

$$L_x = R_2 R_3 C_4 \ .$$

In diesen Formeln entsteht keine Frequenzabhängigkeit, jedoch besitzt die Maxwell-Brücke einen optimalen Frequenzbereich da die realen Bauteile eine Streukapazität aufweisen.

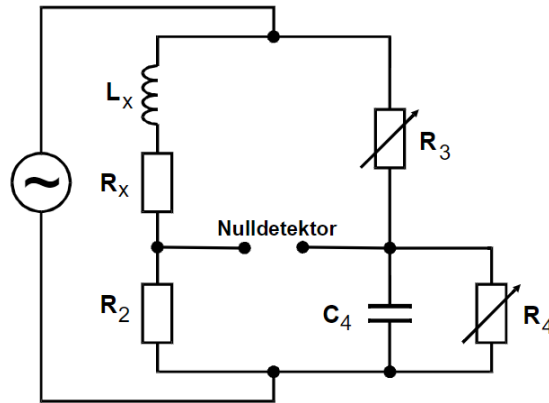


Abbildung 5: Eine Maxwell-Brücke [5].

1.3.5 Wien-Robinson-Brücke

In Abbildung(6) ist das Schaltbild einer Wien-Robinson-Brücke aufgezeichnet. Hier werden keine Abgleichelemente benötigt da in dieser Schaltung über die Frequenz abgeglichen wird. Somit werden nun die zum Teil komplexen Impedanzen der vier Zweige

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2R' \\ Z_2 &= R' \\ Z_3 &= R + \frac{1}{i\omega C} \\ Z_4 &= \frac{R}{1 + i\omega RC} \end{aligned}$$

benötigt. Mittels der Maschenregel ergibt sich dann für das Verhältnis aus Brückenspannung U_{Br} und Speisespannung U_{Sp}

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_{Sp}} \right|^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{(1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9\omega^2 R^2 C^2}.$$

Dieses Verhältnis nähert sich für $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ Null an. Weiterhin entsteht mit der Substitution $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ die Gleichung

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_{Sp}} \right|^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2} . \quad (3)$$

Nun ist schnell zu erkennen, dass die Wien-Robinson-Brücke Frequenzen um ω_0 raus filtert.

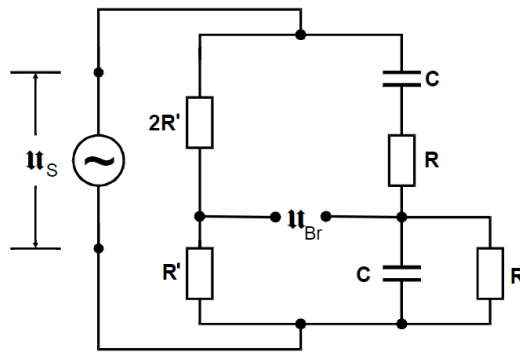


Abbildung 6: Schaltbild einer Wien-Robinson-Brücke [5].

2 Durchführung

Im Folgenden wird die Benutzung der unterschiedlichen Brückenschaltungen zur Vermessung der elektrischen Bauteile erklärt. Die nicht frequenzabhängigen Schaltungen werden mit einer Sinus-Spannung von 1000 Hz betrieben, die Brückenspannungen werden mittels eines Oszilloskops gemessen.

2.1 Wheatstonesche Brücke

Da hier nur der Quotient $\frac{R_3}{R_4}$ benötigt wird, wird als Widerstand für R_3 und R_4 ein Potentiometer mit einem Gesamtwiderstand von 1 k Ω benutzt. An diesem ist der Widerstand von R_3 abzulesen und R_4 kann einfach aus der Differenz zu 1000 berechnet werden. Das Potentiometer wird auch in den folgenden Schaltungen als veränderlicher Widerstand benutzt.

Durch variieren des Quotienten an dem Potentiometer wird nun die Brückenspannung minimiert. Aus dem Minimum lässt sich dann R_x berechnen. Dieser Vorgang wird noch einmal mit einem anderem Widerstand R_2 wiederholt.

2.2 Kapazitätsmessbrücke

Die Kapazitätsmessbrücke wird nach dem Schaltbild mit dem Referenz Kondensator C_2 aufgebaut. Der Kondensator mit der Kapazität C_x und dem Innenwiderstand R_x werden bestimmt in dem abwechselnd die beiden Potentiometer verändert werden um die Brückenspannung zu minimieren. Diese Messreihe wird dann erneut mit einer anderen Referenz Kapazität C_2 durchgeführt.

2.3 Induktivitätsmessbrücke

Die Induktivitätsmessbrücke wird auch wieder nach dem Schaltbild aufgebaut. Das Referenzbauteil ist nun die Spule mit der Induktivität L_2 . Die restlichen Messungen werden analog zur Kapazitätsmessbrücke durchgeführt.

2.4 Maxwell-Brücke

Die selbe Induktivität wird ebenfalls mit der Maxwell-Brücke vermessen. Dazu wird die Schaltung nach dem Schaltbild aufgebaut und eine Messreihe analog zu der der Induktivitätsmessbrücke durchgeführt.

2.5 Wien-Robinson-Brücke

Auch die Wien-Robinson-Brücke kann einfach nach dem Schaltbild aufgebaut werden. Nun wird jedoch nicht mehr der Widerstand variiert, sondern die Frequenz der anliegenden Quellspannung. Die Frequenz wird hier in einem Bereich zwischen von 20-10 000 Hz variiert. Es ist darauf zu achten, dass die die meisten Messwerte um die Resonanzfrequenz ω_0 aufgenommen werden.

Diese wird aus den in der Schaltung verwendeten Widerständen und Kapazitäten berechnet.

3 Auswertung

3.1 Wheatstonesche Brückenschaltung

Für die erste Messreihe werden die Widerstände so eingestellt, dass die Brückenspannung minimal wird. Die aufgenommenen Widerstände finden sich in Tabelle 1.

Anhand der Gleichung

$$R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4} \quad , \quad (4)$$

lässt sich der zu untersuchende Widerstand R_x des Bauteils „Wert 12“ bestimmen.

Der Theoriewert von „Wert 12“ beträgt $R_x = 392,9 \Omega$.

Tabelle 1: Messwerte der Wheatstoneschen-Brückenschaltung

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	R_x / Ω
332	542	448	392,90
665	370	630	389,96

3.2 Kapazitätsmessbrücke

Bei der Kapazitätsmessbrücke waren für das Bauteil „Wert 9“ der unbekannte Widerstand R_x und die unbekannte Kapazität C_x zu bestimmen. Dabei wurde wieder das Minimum des Brückenstroms herbeigeführt.

Mit Hilfe der Bauteildaten

$$R_2 = 502 \Omega$$

$$R_3 = 451 \Omega$$

$$R_4 = 549 \Omega$$

$$C_2 = 399 \text{ nF}$$

lässt sich über Gleichung 4 der Widerstand zu $R_x = 413,21 \Omega$ berechnen.

Über

$$C_x = C_2 \cdot \frac{R_4}{R_3} \quad (5)$$

ergibt sich $C_x = 485,70 \text{ nF}$.

Die dazugehörigen Theoriewerte sind

$$R_{x,Theo} = 413,2 \Omega$$

$$C_{x,Theo} = 483,7 \text{ nF} \quad .$$

3.3 Induktivitätsbrückenschaltung

Bei dieser Brückenschaltung werden zu dem Bauteil „Wert 18“, der Widerstand R_x und die Induktivität L_x berechnet. Dafür wird für R_x die Gleichung 4 genutzt. Die Induktivität lässt sich mit

$$L_x = L_2 \cdot \frac{R_4}{R_3} \quad (6)$$

bestimmen.

$$R_2 = 104 \Omega$$

$$R_3 = 775 \Omega$$

$$R_4 = 225 \Omega$$

$$L_2 = 16,6 \text{ mH}$$

Aus diesen ergeben sich für „Wert 18“ für $R_x = 358,22 \Omega$ und $L_x = 4,82 \text{ mH}$.

3.4 Maxwell-Brücke

Hier wird ein Bauteil auf seine Induktivität und seinen Widerstand untersucht. Die genutzten Bauteile besitzen folgende Spezifika:

$$R_2 = 1000 \Omega$$

$$R_3 = 64 \Omega$$

$$R_4 = 638 \Omega$$

$$C_2 = 399 \text{ nF}$$

Über Gleichung 4 ergibt sich $R_x = 100,31 \Omega$.

Die Induktivität des Bauteils lässt sich über den Zusammenhang $L_x = C_2 R_3 R_4$ zu $L_x = 25,536 \text{ mH}$ bestimmen. Die damit korrespondierenden Theoriewerte sind

$$R_{x,Theo} = 108,7 \Omega$$

$$L_{x,Theo} = 26,9 \text{ mH} .$$

3.5 Wien-Robinson-Brücke

Mit den Widerständen $R = 1 \text{ k}\Omega$, $R' = 332 \Omega$ und einer Kapazität von $C = 399 \text{ nF}$ wurden für die Frequenzabhängigkeit der Spannungen in dieser Schaltung, die in Tabelle 2 aufgetragenen Werte, gemessen. Diese sind, inklusive Theoriekurve, auch in Abbildung ?? zu finden.

Für die Messreihe wurde eine konstante Spannung von $U_0 = 10 \text{ V}$ angelegt. Die Grenzfrequenz dieses Aufbaus ν_0 entspricht hier

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = 539,50 \text{ Hz} .$$

Für die Theoriekurve wird dann $\Omega = \frac{\nu}{\nu_0}$ aufgetragen, mit $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$. Die Funktion hat dabei folgende Form:

$$\frac{U_{Br}}{U_0} = \sqrt{\frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2}}$$

Gegen die Messwerte aufgetragen ist sie in Abbildung ??.

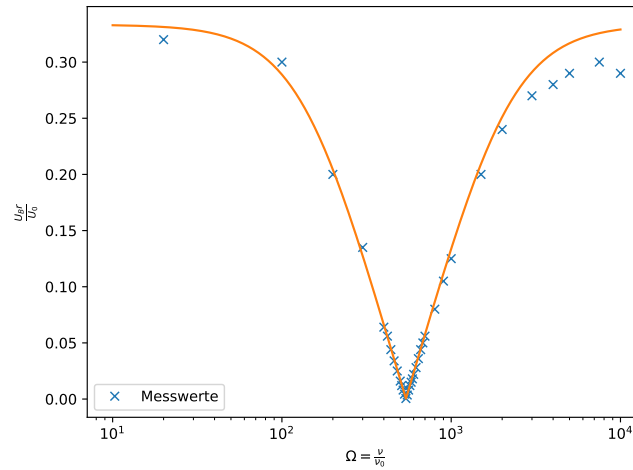


Abbildung 7: Messdaten zur Wien-Robinson-Brücke

Es ist zu sehen, dass die Messwerte und vorallem die Grenzfrequenz der Brückenspannung sich sehr gut mit der Theoriekurve decken. Nur für sehr hohe Frequenzen weichen sie leicht ab.

Des Weiteren berechnet sich der Klirrfaktor des Sinusgenerators zu $k = 3.35 \cdot 10^{-3}$.

Tabelle 2: Messdaten zur Wien-Robinson-Brücke

ν / Hz	Amplitude / V
20	3,2
100	3
200	2
300	1,35
400	0,64
420	0,56
440	0,44
460	0,34
480	0,25
500	0,16
510	0,12
520	0,08
530	0,044
540	0,005
550	0,036
560	0,08
570	0,12
580	0,15
590	0,18
600	0,22
620	0,28
640	0,36
660	0,44
680	0,5
700	0,56
800	0,8
900	1,05
1000	1,25
1500	2
2000	2,4
3000	2,7
4000	2,8
5000	2,9
7500	3
10 000	2,9

4 Diskussion

Dieser Versuch lief alles in allem Recht gut. Die Messwerte konnten alle sehr genau aufgenommen werden, auch wenn am Ende immer ein Hintergrundrauschen übrig geblieben ist.

Es gab bei der Durchführung zwar ein paar Probleme mit nicht durchführbaren Messungen, diese konnten aber durch rumprobieren mit anderen Bauteilen behoben werden. Dies ist auch der Grund warum bei der Maxwell-Brücke und der Induktivitätsmessbrücke nicht das selbe Bauteil untersucht werden konnten.

Die relative Abweichung von den Theoriewerten ist in Tabelle 3 zu finden.

Die zu den Messwerten gehörigen Theoriewerte wurden schon in den Auswertungen, der einzelnen Brückenschaltungen aufgeführt.

Tabelle 3: Relative Aweichung von den Theoriewerten für die einzelnen Messungen

Brückenart	Messgröße	relative Abweichung von der Theorie
Wheatstone	R_1	0,0023 %
	R_2	0,75 %
Kapazität	R	-0,0027 %
	C	-0,41 %
Maxwell	R	7,72 %
	L	5,07 %

Die relativen Abweichungen sind alle sehr gering, was ein Indikator dafür ist, dass die Messinstrumente sehr genau gearbeitet haben und die Messungen ohne große Störungen durchgeführt werden konnten.

Alles in allem lieferte die Durchführung also sehr gute Messwerte.

5 Anhang

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [5] *Versuchsanleitung zu Versuch V302: Elektrische Brückenschaltungen*. Fakultät Physik, TU Dortmund. 2021.