

Versuch Nr.V406

Beugung am Spalt

Niklas Düser
niklas.dueser@tu-dortmund.de

Benedikt Sander
benedikt.sander@tu-dortmund.de

Durchführung: 29.06.2021

Abgabe: 06.07.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Parallelspalt	3
2.2	Doppelspalt	6
2.3	Fraunhofersche Beugung und Fourier-Transformation	6
3	Durchführung	7
4	Auswertung	8
4.1	Auswertung des Einzelspaltes	8
4.2	Auswertung des Doppelspaltes	10
5	Diskussion	13
6	Anhang	14
6.1	Versuchsaufbau	14
6.2	Messwerte	15
	Literatur	16

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird ein Zusammenhang zwischen den Beugungsmustern, dem beugenden Objekt und der Aperturfunktion hergestellt. Dazu wird das Licht als Welle betrachtet nach dem es auf einen Spalt mit, relativ zur Wellenlänge des Lichts, kleinen Abmessungen trifft.

2 Theoretische Grundlagen

Licht kann nicht mehr mittels geometrischen Optik betrachtet werden nach dem es durch eine Öffnung hindurchtritt, die kleine Abmessungen im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts aufweist.

Es entsteht Beugung. Dieser Effekt lässt sich quantenmechanisch beschreiben, es ist jedoch bei einer großen Anzahl an Lichtquanten einfacher das Licht als Welle zu nähern.

Zunächst wird zwischen der Fresnelschen und Fraunhoferschen Lichtbeugung unterschieden, diese sind in Abbildung(1) zu sehen.

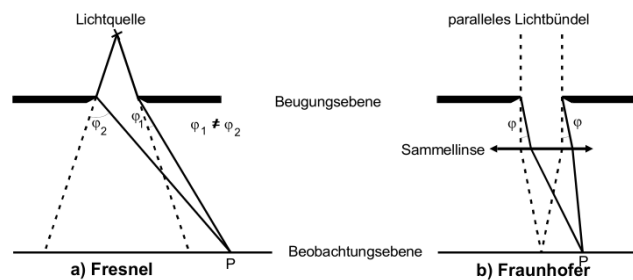


Abbildung 1: Fresnelsche und Fraunhofersche Beugung an einem Spalt[7].

Bei der Fresnelschen Lichtbeugung am Spalt liegt die Lichtquelle in einer endlichen Entfernung vom Spalt und Beobachter. Damit nun zwei unterschiedliche Strahlenbündel an der gleichen Stelle auf dem Schirm ankommen, müssen sie am Spalt mit unterschiedlichen Winkeln gebeugt werden.

Bei der Fraunhoferschen Lichtbeugung liegt die Lichtquelle und der Beobachter im unendlichen, so dass die eingehende Welle durch eine ebene Welle beschrieben werden kann. Weiterhin werden die Strahl hinter dem Spalt durch eine Sammellinse gebündelt. Somit wird erreicht, dass die unterschiedlichen Lichtbündel die im Punkt P interferieren, mit dem gleichem Winkel gebeugt wurden.

Der Parallelspalt wird im folgenden mit der Fraunhofer Lichtbeugung betrachtet.

2.1 Parallelspalt

Hier wird ein Spalt mit hoher Länge im Vergleich zur Breite genutzt. Somit wird die Beugung auf eine Dimension beschränkt.

Die Feldstärke der einfallenden ebenen Welle wird durch

$$A(z, t) = A_0 \exp \left(i\omega t - \frac{i2\pi z}{\lambda} \right)$$

mit der Zeit t und dem Abstand in z -Richtung z beschrieben.

Licht dieser Art kann mit einem Laser erzeugt werden. Dieser liegt nicht in der unendlich großen Entfernung, sondern in einer Entfernung die groß im Vergleich zur Spaltbreite ist. Das erscheinende Beugungsbild lässt sich mittels dem Huygenschen Prinzip der Elementarwellen und dem Interferenzprinzip erklären.

A. Fresnel schrieb erstmalig in 1818: Jeder Punkt einer Wellenfläche sendet zur gleichen Zeit sogenannte Elementarwellen aus, die die Form von Kugelwellen haben. Diese Wellen interferieren miteinander und erzeugen eine neue Wellenfront, die gleich der Einhüllenden der Elementarwelle ist. Um nun den Schwingzustand in einem Punkt zu bestimmen, werden sämtliche Elementarwellen die in einem Punkt zusammen laufen, überlagert.

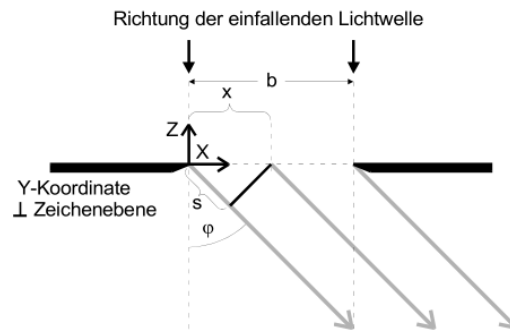


Abbildung 2: Fresnelsche und Fraunhofersche Beugung an einem Spalt[7].

Wird nun die Amplitude einer in Richtung φ gebeugten Welle betrachtet, müssen alle Strahlbündel die an jedem Punkt der Spaltöffnung emittiert werden, summiert werden. Sie alle wurden in φ Richtung gebeugt, haben aber einen Phasendifferenzterm

$$\delta = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin(\varphi)}{\lambda}.$$

Da die einzelnen Strahlenbündel auf einer infinitesimal kleinen Breite dx entstehen, kann die Amplitude B in φ Richtung mittels des Integrals

$$\begin{aligned} B(z, t, \varphi) &= A_0 \cdot \int_0^b \exp \left\{ i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \delta \right) \right\} dx \\ &= A_0 \cdot \exp \left\{ i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right\} \cdot \int_0^b \exp \left(\frac{2\pi i x \sin(\varphi)}{\lambda} \right) dx \end{aligned}$$

berechnet werden. Wird das Integral ausgerechnet und die Eulersche Formel $\sin(\alpha) = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$ eingesetzt, ergibt sich für die Amplitudenfunktion

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \exp \left\{ i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{\pi i b \sin(\varphi)}{\lambda} \right\} \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin(\varphi)} \sin \left\{ \frac{\pi b \sin(\varphi)}{\lambda} \right\} . \quad (1)$$

Die erste Exponentialfunktion stellt nun die Zeit- und Ortsabhängigkeit dar. Die zweite ist ein richtungsabhängiger Phasenfaktor. Von besonderer experimenteller Bedeutung ist hier der letzte Faktor. Mittels der Substitution

$$\eta := \frac{\pi b \sin(\varphi)}{\lambda}$$

kann dieser als

$$B(\varphi) = A_0 b \frac{\sin(\eta)}{\eta}$$

dargestellt werden. Dies ist eine gerade Funktion mit unendlich vielen Nullstellen bei

$$\sin(\varphi_n) = \pm n \frac{\lambda}{b}$$

und fallender Amplitude mit wachsendem η . Eine solche Funktion ist in Abbildung(3) dargestellt.

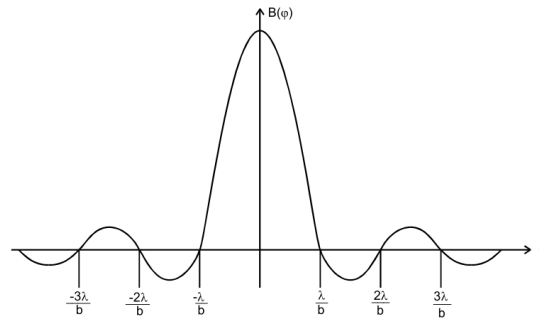


Abbildung 3: Amplitude einer an einem Parallelschlitz gebeugten, ebenen Welle[7].

Aufgrund der hohen Lichtfrequenz des Lichts ist es jedoch nicht möglich die Amplitude einer einzelnen Welle zu messen. In diesem Versuch wird somit die zeitlich gemittelte Intensität betrachtet. Diese wird durch

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = A_0^2 \left\{ \frac{\lambda}{\pi b \sin(\varphi)} \right\}^2 \cdot \sin^2 \left\{ \frac{\pi b \sin(\varphi)}{\lambda} \right\} \quad (2)$$

beschrieben. Diese ist minimal bei den Nullstellen der Amplitudenfunktion(1), die Maxima nehmen wiederum mit dem Quadrat des Beugungswinkel ab.

2.2 Doppelspalt

Wird das Integral über die Spaltöffnung analog zum Einzelspalt integriert, entsteht beim Doppelspalt (siehe Abbildung(4)) die Intensitätsverteilung

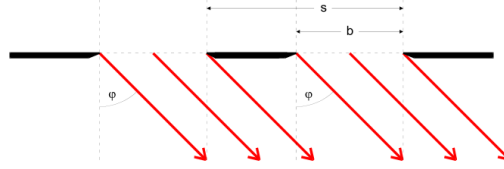


Abbildung 4: Beugung am Doppelspalt.[7].

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = 4 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi s \sin(\varphi)}{\lambda} \right) \cdot \left\{ \frac{\lambda}{\pi b \sin(\varphi)} \right\}^2 \cdot \sin^2 \left\{ \frac{\pi b \sin(\varphi)}{\lambda} \right\}^2 . \quad (3)$$

Diese setzt sich aus der Intensitätsverteilung des Einzelspalt (6) und einer \cos^2 -Verteilung zusammen. Die Minima dieser Verteilung sind nun die gleichen des Einzelspalt und die Nullstellen der \cos^2 -Verteilung bei

$$\varphi(k) = \arcsin \left(\frac{2k+1}{2s} \right) \cdot \lambda.$$

2.3 Fraunhofersche Beugung und Fourier-Transformation

Die Amplitudenverteilung bei der Fraunhofer Beugung lässt sich auch allgemeiner mittels einer Fourier-Transformation berechnen. Dazu wird die einfallende Welle in der Beugungsebene, die Aperturfunktion, transformiert.

Allgemein wird die Fouriertransformation durch den Ausdruck

$$g(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx \quad (4)$$

beschrieben. Angewandt auf die Aperturfunktion des Spalts der Breite b

$$\begin{aligned} f(x) &= A_0 & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ f(x) &= 0 & \text{sonst} \end{aligned}$$

ergibt die Fouriertransformation

$$g(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx = A_0 \cdot \int_0^b e^{ix\xi} dx = \frac{A_0}{i\xi} (-1 + e^{i\xi b}) .$$

Mittels der Eulerschen Formel ergibt sich hieraus

$$g(\xi) = \frac{2A_0}{\xi} \exp \left(\frac{i\xi b}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi b}{2} \right) .$$

Wird hier die Substitution

$$\xi := \frac{2\pi \sin(\varphi)}{2} \quad (5)$$

durchgeführt, ergibt sich die bereits berechnete Amplitudenfunktion für den Einzelspalt(1).

Es ist zu erkennen, dass die Fourier-Transformation das Huygensche Prinzip mathematisch formuliert, den der Faktor $e^{ix\xi}$ beschreibt die Phasendifferenz die durch x entsteht. Mittels einer zwei oder mehrdimensionalen Aperturfunktion kann also über die Fouriertransformation die Beugung an einem zweidimensionalen Objekt berechnet werden. Umgekehrt lässt sich somit auch über die Amplitudenfunktion die Aperturfunktion, also die Form des Objekts berechnen.

3 Durchführung

In diesem Versuch wird die Aufbau aus Abbildung(5)

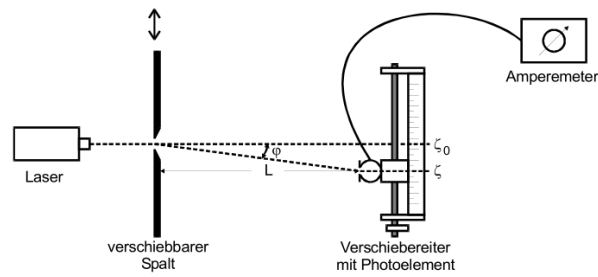


Abbildung 5: Versuchsanordnung [7].

verwendet, lediglich der verschiebbare Spalt wird nicht genutzt.

Der Laser ist ein He-Ne-Laser mit einer Wellenlänge von 635 nm und leuchtet entweder auf einen Einzel- oder Doppelspalt. Etwa 140 cm hinter dem Spalt ist der Detektor aus einer Photodiode auf einem Verschiebereiter aufgebaut. Das Photoelement nimmt auch im Dunkeln einen Dunkelstrom I_{du} auf, dieser wird zu Anfang des Versuch bei abgedecktem Sensor gemessen.

Der gesamte Versuchsaufbau wird justiert indem zunächst der Detektor auf die Mittelstellung gestellt wird. Dann wird der Laser so eingestellt, dass das Maximum genau auf dem Mittelpunkt des Sensors liegt.

Nun wird je nach Versuch der Einzel- oder Doppelspalt so in die Vorrichtung gesetzt, dass die maximale Intensität am Sensor ankommt. Die Nebenmaxima sollten auf beiden Seiten ungefähr die gleiche Intensität haben.

Nun werden für die beiden Teilversuche mit dem Einzel- und Doppelspalt über die 50 mm Verschiebeweg des Sensors mindestens 50 Datenpunkte aufgenommen. Dafür wird der

gemessene Photostrom vom Amperemeter abgelesen.

Der Bereich um das Maximum im Zentrum sollte dabei genauer als die Außenbereiche ausgemessen werden.

4 Auswertung

Für die Auswertung wurde zuerst der Dunkelstrom $I_{Dunkel} = 5,6 \text{ nA}$ gemessen. Dieser Wert wird im folgenden von den aufgenommenen Strömen abgezogen.

Zusätzlich wurde die Entfernung des Photoelements von dem Spalt zu $L = 1,472 \text{ m}$ gemessen.

4.1 Auswertung des Einzelspaltes

Für die Untersuchung der Beugungsmaxima wurde ein Spalt mit der Breite $b = 0,15 \text{ mm}$ genutzt.

Die aufgenommenen Messwerte sind in Tabelle 1 zu finden.

Über $\varphi = \frac{d}{L}$ lässt sich mit den Messwerten die Verschiebung des Photoelements in den benötigten Winkel umrechnen.

Damit wird dann für eine Funktion der Form

$$B(\varphi')^2 = A_0^2 \left\{ \frac{\lambda}{\pi b \sin(\varphi')} \right\}^2 \cdot \sin^2 \left\{ \frac{\pi b \sin(\varphi')}{\lambda} \right\} \quad (6)$$

eine Ausgleichsrechnung durchgeführt. Des Weiteren gilt hier $\varphi' = \varphi - a$, da das Maximum der Messwerte nicht genau um 0 zentriert ist und dies mit diesem Term kompensiert wird.

Die Parameter der Funktion berechnen sich dann zu

$$\begin{aligned} A_0 &= (5,447 \pm 0,012) \sqrt{\text{A}} \\ a_1 &= (-0,648 \pm 0,003) \cdot 10^{-3^\circ} \\ b_1 &= (0,1734 \pm 0,0004) \text{ mm} . \end{aligned}$$

Zusammen mit den Messwerten finden sich diese Funktion grafisch dargestellt in Abbildung 6.

Tabelle 1: Messdaten zur Messung des Photostroms beim Einzelspalt, in Abhängigkeit von der Verschiebung des Photoelements d um die Mitte.

d / mm	Photostrom / nA	d / mm	Photostrom / nA
-25	3	0,25	760
-23	1,5	0,5	700
-21	1,5	0,75	640
-19	7	1	560
-17	3,5	1,25	500
-15	9	1,5	420
-13	12	1,75	360
-11	6	2	290
-10	17,5	2,25	230
-9	32	2,5	180
-8	32	3	95
-7	16	3,5	40
-6	15,5	4	15
-5	88	4,5	10
-4,5	170	5	19
-4	280	6	44
-3,5	400	7	47
-3	540	8	27
-2,5	670	9	10
-2,25	730	10	7,5
-2	780	11	15
-1,75	830	13	13,5
-1,5	860	15	3
-1,25	880	17	9
-1	900	19	4,5
-0,75	890	21	3
-0,5	880	23	5
-0,25	850	25	1
0	800		

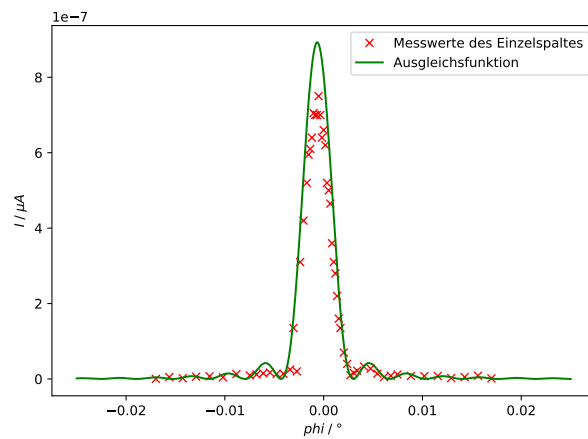


Abbildung 6: Die Messwerte der Intensitäten des Einzelspaltes inklusive der darauf bestimmten Ausgleichsfunktion.

4.2 Auswertung des Doppelspaltes

Für die Untersuchung des Doppelspaltes wurde ein Doppelspalt mit der Spaltentfernung $s = 1 \text{ mm}$ und der Spaltbreite $b = 0,15 \text{ mm}$ genutzt.

Hier wird die Funktion

$$B(\varphi)^2 = A_0^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi s \sin(\varphi')}{\lambda} \right) \cdot \left\{ \frac{\lambda}{\pi b \sin(\varphi')} \right\}^2 \cdot \sin^2 \left\{ \frac{\pi b \sin(\varphi')}{\lambda} \right\}^2 . \quad (7)$$

Für die Ausgleichsrechnung genutzt. Dabei wurden wieder die Werte mit $\varphi = \frac{d}{L}$ umgerechnet und es gilt auch wieder $\varphi' = \varphi - a$.

Die Parameter ergeben sich dann zu

$$A_0 = (0,983 \pm 0,054) \cdot 10^{-3} \sqrt{\text{A}}$$

$$s = (0,9954 \pm 0,0171) \text{ mm}$$

$$a_2 = (0,588 \pm 0,016) \cdot 10^{-3}^\circ$$

$$b_2 = (0,1740 \pm 0,0251) \text{ mm} .$$

Zusammen mit den Messwerten finden sich diese Funktion grafisch dargestellt in Abbildung 7.

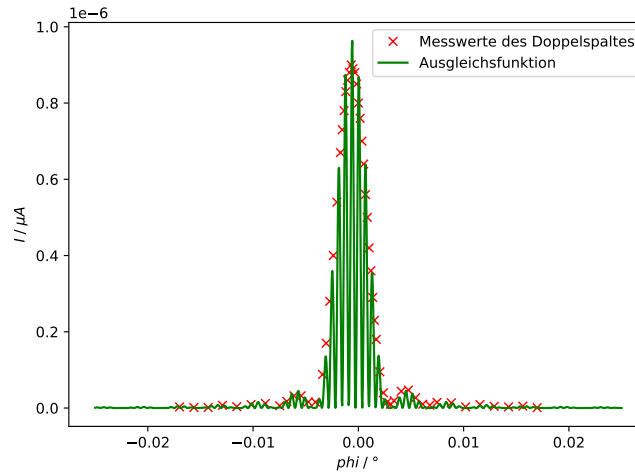


Abbildung 7: Die Messwerte der Intensitäten des Doppelspaltes inklusive der darauf bestimmten Ausgleichsfunktion.

Wenn nun beide Funktionen normiert und in eine Abbildung gesetzt werden sollte die Intensitätsfunktion des Einzelspaltes die Einhüllende der Doppelspaltfunktion sein. Dies ist in Abbildung 8 dargestellt. Es ist zu sehen, dass dies gilt und die Funktion sehr genau aufeinander liegen.

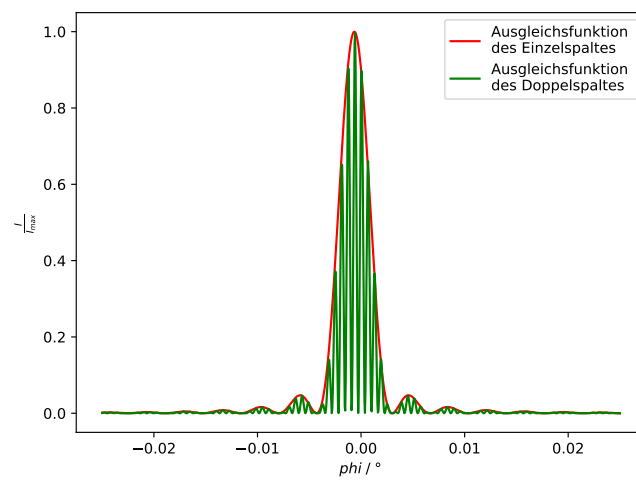


Abbildung 8: Die normierten Ausgleichsfunktion in einer Grafik aufgetragen.

Tabelle 2: Messdaten zur Messung des Photostroms beim Doppelspalt, in Abhängigkeit von der Verschiebung des Photoelements d um die Mitte.

d / mm	Photostrom / nA	d / mm	Photostrom / nA
-25	0,25	0,25	620
-23	5	0,5	520
-21	2	0,75	500
-19	6	1	465
-17	7	1,25	360
-15	4,5	1,5	310
-13	13	1,75	280
-11	9,5	2	220
-10	12	2,25	160
-9	15	2,5	135
-8	17	3	70
-7	13,5	3,5	40
-6	14	4	10
-5	25	4,5	16
-4,5	135	5	22
-4	20	6	33
-3,5	310	7	27,5
-3	420	8	14
-2,5	520	9	5
-2,25	595	10	8,5
-2	610	11	12
-1,75	640	13	8
-1,5	705	15	7,5
-1,25	700	17	8
-1	700	19	2,5
-0,75	750	21	5
-0,5	700	23	8,5
-0,25	640	25	1,5
0	660		

5 Diskussion

Die Aufnahme der Messwerte lief alles in allem gut. Die Messwerte für die Photoströme und die damit korrespondierenden Auslenkungen der Photozelle konnten sehr genau vorgenommen werden und decken sich ungefähr mit den Erwartungen.

Allerdings konnte der Laser nicht genau auf eine nicht vorhandene Auslenkung der Zelle zentriert werden, weswegen das globale Maximum der Intensitätsverteilung um ≈ 1 mm verschoben ist.

Dies stellt aber kein Problem dar, da dies durch eine Verschiebung der Ausgleichsfunktionen behoben werden konnte.

Die Ausgleichsfunktion für den Einzelspalt liefert für die Breite des Spaltes den Wert $b_1 = (0,1734 \pm 0,0004)$ mm. Mit dem Theoriewert $b_{theo} = 0,15$ mm ergibt sich die relative Abweichung von diesem zu

$$\frac{b_{theo} - b_1}{b_{theo}} \approx -15,645 \% .$$

Dieses Ergebnis ist gut. Allerdings ist in Abbildung 6 zu erkennen, dass die Ausgleichsfunktion sich nicht perfekt mit den Messwerten deckt. Dies liegt vermutlich daran, dass die Anpassung auf die Maxima erster Ordnung die Werte der Funktion so ändert, dass sie höher wird. Dies könnte dann auch zu der Abweichung führen.

Für den Doppelspalt wurde $s = (0,9954 \pm 0,0171)$ mm und $b_2 = (0,1740 \pm 0,0251)$ mm über die Ausgleichsrechnung bestimmt.

Mit den Theoriewert $s_{theo} = 1$ mm ergibt sich eine relative Abweichung von $\approx 0,459$ %. Für $b_{theo} = 0,15$ mm ergibt sich $\approx -15,975$ %.

Das Ergebnis für den Abstand der Spalten ist also sehr gut. Für die Breite von ihnen ist der Wert und die Abweichung in der selben Größenordnung wie beim Einzelspalt.

Dies könnte die selben Ursachen haben wie beim Einzelspalt, könnte aber auch auf eventuelle Probleme bei der Durchführung hindeuten.

Zum Beispiel könnte das Hauptmaxima der Funktion nicht fein genug aufgespalten worden sein, so dass die gemessenen Ströme dort kleiner ausfallen.

Für die gemessenen Ströme des Doppelspaltes ist es allerdings sonderbar, dass die Messwerte, wie in Abbildung 7 zu sehen, um 0 herum nur auf der Einhüllenden liegen. Eigentlich wäre es zu erwarten, dass die Werte auch wesentlich kleinere Werte annehmen. Da die Ausgleichsrechnung auf diese Werte aber sehr gute Ergebnisse liefert, scheint dies nicht weiter besorgniserregend zu sein.

Die in Abbildung 8 zusammen dargestellten normierten Funktionen des Einzelspaltes und des Doppelspaltes decken sich sehr gut.

Alles in allem sind die Ergebnisse also gut.

6 Anhang

6.1 Versuchsaufbau

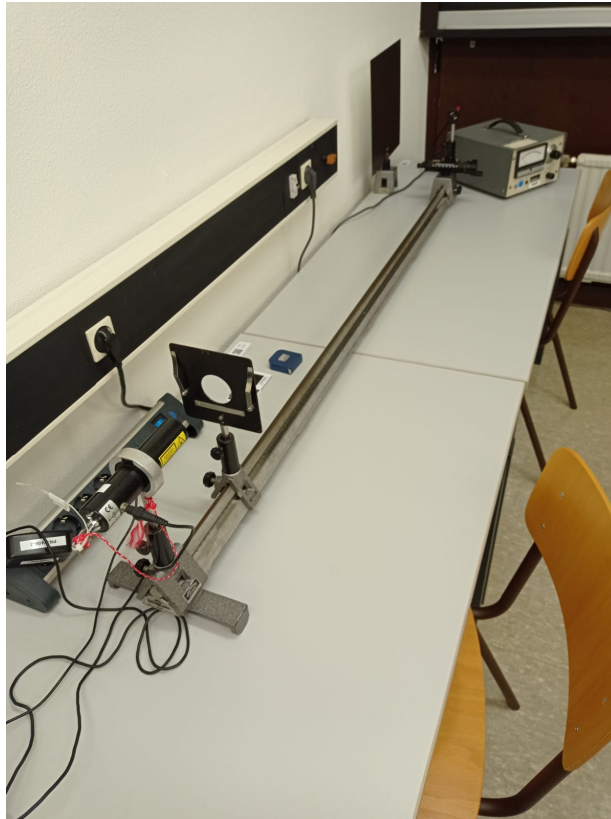


Abbildung 9: Der Versuchsaufbau.

6.2 Messwerte

! Einzelspalt: ~~0,15~~ 0,15 (mm)

d in mm	# in 1/11	d in mm	# in 1/11	d in mm	# in 1/11
+25	0,003	0,75	0,89	13	0,005
23	0,0015	0,5	0,88	15	0,003
21	0,0015	0,25	0,88	17	0,009
19	0,007	0	0,8	19	0,0045
17	0,0035	-0,25	0,76	21	0,003
15	0,009	0,5	0,7	23	0,005
13	0,012	0,75	0,64	25	0,001
11	0,006	1	0,56		
10	0,0175	1,25	0,5		
9	0,032	1,5	0,42		
8	0,032	1,75	0,36		
7	0,016	2	0,29		
6	0,0155	2,25	0,23		
5	0,0088	2,5	0,18		
4,5	0,17	3	0,095		
4	0,28	3,5	0,074		
3,5	0,4	4	0,015		
3	0,54	4,5	0,01		
2,5	0,67	5	0,019		
2,25	0,73	6	0,044		
2	0,78	7	0,047		
1,75	0,83	8	0,027		
1,5	0,86	9	0,01		
1,25	0,88	10	0,0075		
1	0,9	11	0,015		

29.06.21
M. Weidner

Abbildung 10: Die Messwerte des Einzelspaltes.

V406 Beugung am Spalt
 Dunkelstrom: 5,6 nA $\lambda = 635 \text{ nm}$
 Doppelspalt: 1 mm - Laser - Spalt: 17 cm
 $d = 0,5 \text{ mm}$ $L = 1,472 \text{ m}$

d in mm	Strom in A	A	d	A
+25 mm	0,0025	1,75	6,4	0,016
23	0,005	1,5	7,5	0,022
21	0,002	1,25	8	0,033
19	0,006	1	9	0,0275
17	0,007	0,75	10	0,014
15	0,0045	0,5	11	0,005
13	0,013	0,25	12	0,0085
11	0,0095	0	13	0,012
10	0,012	-0,25	14	0,008
9	0,015	0,5	15	0,0075
8	0,017	0,75	17	0,008
7	0,0135	1	19	0,0025
6	0,014	1,25	21	0,005
5	0,025	1,5	23	0,0085
4,5	0,0135	1,75	25	0,0015
4	0,2	2		
3,5	0,31 mA	2,25		
3	4,2	2,5		
2,5	5,2	3		
2,25	5,95	3,5		
2	6,7	4		

Abbildung 11: Die Messwerte des Doppelspaltess.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] *Literaturwert für die Lichtgeschwindigkeit c*. 2020. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/lichtgeschwindigkeit/9012> (besucht am 05.12.2020).
- [5] *Literaturwerte für das plancksche Wirkungsquantum*. 2020. URL: https://www.chemie.de/lexikon/Plancksches_Wirkungsquantum.html (besucht am 05.12.2020).
- [6] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.

- [7] *Versuchsanleitung zu Versuch V406: "Beugung am Spalt"*. Fakultät Physik, TU Dortmund. 2021.