

Versuch Nr.V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Niklas Düser
niklas.dueser@tu-dortmund.de

Benedikt Sander
benedikt.sander@tu-dortmund.de

Durchführung: 8.11.2020

Abgabe: 15.12.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen verschiedenen Eigenschaften eines LRC-Kreises untersucht werden. Diese sind der Dämpfungswiderstand aus der Zeitabhängigen Amplitude und der Widerstand bei dem der Aperiodische Grenzfall eintritt. Zusätzlich wird an einem Serienresonanzkreis noch die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung untersucht.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Herleitung gedämpfter Schwingkreis

Das 2. Kirchhoffsche Gesetz führt direkt zu seiner Beziehung der abfallenden Spannungen:

$$U_R + U_C + U_L = 0 \quad (1)$$

In die Formel 1 lassen sich nun die Schaltelement spezifischen Formeln einsetzen

$$\begin{aligned} U_R &= RI \\ U_C &= \frac{Q}{C} \\ U_L &= L \cdot \frac{d}{dt} I \end{aligned}$$

Dies führt zu einer Differentialgleichung der Form:

$$\begin{aligned} L \frac{d}{dt} I + RI + \frac{Q}{C} &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} I + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} I + \frac{1}{LC} I &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Diese Differentialgleichung wird über den Ansatz einer komplexen e Funktion gelöst.

$$I(t) = Z \cdot e^{j\tilde{\omega}t} \quad (3)$$

Einsetzen von 3 in die DGL2 ergibt:

$$\tilde{\omega}^2 - j\frac{R}{L}\tilde{\omega} - \frac{1}{LC} = 0$$

Umstellen nach $\tilde{\omega}$ ergibt:

$$\tilde{\omega}_{1,2} = j\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}}$$

$I(t)$ lässt sich nun also durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$I(t) = Z_1 \cdot e^{j\tilde{\omega}_1 t} + Z_2 \cdot e^{j\tilde{\omega}_2 t}$$

Die Definitionen für μ und ν bieten sich an um die Formel übersichtlicher zu gestalten.

$$2\pi\mu := \frac{R}{2L}$$

$$2\pi\tilde{\nu} := \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$I(t)$ lässt sich dann als:

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} \cdot (Z_1 e^{j2\pi\tilde{\nu}t} + Z_2 e^{-j2\pi\tilde{\nu}t})$$

schreiben. Um $I(t)$ weiter zu untersuchen muss eine Fallunterscheidung gemacht werden. Hier wird unterschieden ob der Inhalt der Wurzel positiv oder negativ definiert ist und somit der Exponent reel oder imaginär ist.

2.2 Fallunterscheidung

2.2.1 1.Fall

Zu erst wird der Fall

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

untersucht. Hier ist $v \in \mathbb{R}$. Damit die Lösungsfunktion $I(t) \in \mathbb{R}$ ist muss $Z_1 = \overline{Z_2}$ sein. Dies lässt sich durch den Ansatz

$$Z_1 = \frac{1}{2}A_0 e^{j\eta}$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}A_0 e^{-j\eta}$$

erreichen.

Die folgende Eigenschaft komplexer e-Funktionen;

$$\frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} = \cos(\phi)$$

wird nun auf das Problem angewandt.

Es ergibt sich:

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cdot \cos(2\pi\tilde{\nu}t + \eta)$$

Aus diesem Term kann nun eine Beziehung für die Periodendauer bestimmt werden:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

mit der Näherung

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

entsteht die Thomsonsche Schwingungsformel

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

die Zeit T_{exp} , beschreibt den Zeitraum in dem die Amplitude auf den e-ten Teil abfällt

$$T_{\text{exp}} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}$$

2.2.2 2. Fall

Der zweite Fall beschreibt:

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$$

Hier ist dann $\tilde{\nu} \in \mathbb{C}$. Für große Zeiten ergibt sich die Proportionalität:

$$I \sim e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}$$

Ein Spezialfall für diesen Fall ist:

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{\text{ap}}^2}{4L^2}$$

Dadurch ist dann $\nu = 0$ und somit

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} = Ae^{-\frac{t}{LC}}$$

2.3 Vergleich Mechanik

2.4 erzwungene Schwingungen

In diesem Abschnitt werden LRC-Schwingkreise untersucht die von außen angeregt sind. Dazu wird eine Spannungsquelle an den Stromkreis angeschlossen die eine Sinusfoermige Spannung liefert.

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t}$$

$u(t)$ ist hier die anregende Spannung.

Die Differentialgleichung erhält nun also die folgende Form:

$$L\dot{I} + RI + \frac{Q(t)}{C} = U_0 e^{j\omega t}$$

oder mit:

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

ergibt sich:

$$LC\ddot{V}_C + RC\dot{V}_C + V_C = U_0 e^{j\omega t} \quad (4)$$

mit $A \in \mathbb{C}$ der Amplitude der Kodensatorspannung:

$$u_C(t) = A(\omega)e^{j\omega t} \quad (5)$$

Einsetzen von 5 in 4 liefert:

$$-LC\omega^2 A + j\omega R C A + A = U_0$$

Die Formel nach A umgestellt ergibt:

$$A = \frac{U_0}{1 - LC\omega^2 + j\omega R C} = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - j\omega R C)}{(1 - LC\omega^2)^2}$$

oder

$$|A| = U_0 \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{((1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2)^2}} \quad (6)$$

Die Phase berechnet sich zu:

$$\tan(\phi(\omega)) = \frac{\text{Im}(A)}{\text{Re}(A)} = \frac{\omega R C}{1 - LC\omega^2}$$

bzw.

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega R C}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (7)$$

Da der Betrag der gesuchten Lösungsfunktion $u_c(t)$ nach 5 gleich dem Betrag von A ist, entsteht aus 6 das Ergebnis:

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (8)$$

Somit ist die gesuchte Funktion für U_C in Abhängigkeit von ω , der Frequenz der Erregerspannung gefunden. Durch weiters Untersuchen von 8 ergibt sich, dass U_C für $\omega \rightarrow \infty$ gegen 0 und für $\omega \rightarrow 0$ gegen das U_0 der Erregerspannung geht. Jedoch gibt es auch ein ω bei dem das U_C innerhalb eines Maximums die Erregerspannung übertrifft. Dies Phänomen wird als Resonanz bezeichnet und tritt bei der Resonanzfrequenz ω_{res} . Eine Rechnung ergibt eine Formel für ω_{res} :

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

für:

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

ergibt sich ein Fall von besonderer Bedeutung in der sich ω_{res} an ω_0 der Frequenz einer ungedämpften Schwingung annähert. In diesem Fall übertrifft U_C die Erregerspannung.

$$U_{C,\text{max}} = \frac{1}{\omega_0 R C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0$$

Somit kann $U_{C,\max} \rightarrow \infty$ für $R \rightarrow 0$ gehen, dies wird als "Resonanzkatastrophe" bezeichnet. Der Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$ wird auch als Resonanzüberhöhung oder Güte q des Schwingkreises bezeichnet. Die Schärfe der Resonanz der Resonanzkurve wird durch die Schnittpunkte ω_{\pm} die jeweils den Ort an dem U_C auf einen Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ absinken. Somit werden ω_+ und ω_- durch

$$\frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{U_0}{C \sqrt{\omega_{\pm}^2 R^2 + \left(\omega_{\pm}^2 L - \frac{1}{C}\right)}}$$

beschrieben.

Für $\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$ folgt ebenfalls für die Breite der Resonanzkurve

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \quad (9)$$

Somit besteht auch folgende Beziehung zwischen der Güte und der Breite:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}$$

Im Gegensatz dazu ist im Falle der Starken Dämpfung:

$$\frac{R^2}{2L^2} \gg \frac{1}{LC}$$

Hier fällt jetzt die Spannung U_C ausgehend von U_0 mit steigender Frequenz ω gegen 0. Bei hohen Frequenzen fällt die Spannung proportional zu $\frac{1}{\omega^2}$. Unter diesen Umständen kann der RLC-Kreis auch als Tiefpass benutzt werden.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Als nächstes wird die Frequenzabhängigkeit der Phase untersucht. Aus 7 ist zu erkennen, dass für kleine ω die Kondensatorspannung und die Erregerspannung fast in Phase sind jedoch bei hohen Frequenzen U_C etwa eine um π kleinere Phase als U hat. ϕ ist $= \frac{-\pi}{2}$ an der Stelle $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Aus 7 folgt ebenfalls, dass $\omega_{1,2}$ bei denen $\phi = \frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3\pi}{4}$ ist die Beziehung:

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

Und daraus auch:

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L} \quad (10)$$

Somit ist im Vergleich von 9 und 10 zu sehen, dass im Falle schwacher Dämpfung ω_1 und ω_2 $\omega_+ - \omega_-$ zusammenfällt.

3 Impedanz des Schwingkreises

Ein Schwingkreis lässt sich auch wie in Abbildung ?ref? als Zweipol beschreiben. An seinen Enden kann nun ein frequenzabhängiger Widerstand r , dieser wird als Impedanz bezeichnet. Aufgrund der Phasenverschiebung zwischen der Spannung und dem Strom muss r als komplexe Zahl definiert werden :

$$r = X + jY$$

Hier sind X und Y reelle Widerstände, X ist der Wirkwiderstand und Y ist der Blindwiderstand oder die Reaktanz. Der Betrag

$$|r| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

wird als Scheinwiderstand bezeichnet. In der komplexen Zahlenebene wird der Verlauf der Größe $r(\omega)$ als Ortskurve bezeichnet. r ist dort nun ein Pfeil vom Ursprung dessen Länge der Scheinwiderstand und der Winkel zur reellen Achse die Phasenverschiebung beschreibt.

$$\begin{aligned} r_C &= -j \frac{1}{\omega C} \\ r_L &= j\omega L \\ r_R &= R_s \end{aligned}$$

$$r_S = R_S + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$\begin{aligned} X_S &= R_S \\ Y_S &= j\omega L - \frac{1}{\omega C} \end{aligned}$$

$$|r_S| = \sqrt{R_S^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$r_p = \frac{\frac{1}{R_p} + j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)}{\frac{1}{R_p^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}$$

$$|r_p| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}}$$