

Versuch Nr.106

Gekoppelte Pendel

Niklas Düser
niklas.dueser@tu-dortmund.de

Benedikt Sander
benedikt.sander@tu-dortmund.de

Durchführung: 25.05.2021

Abgabe: 01.06.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theoretische Grundlagen	3
3	Durchführung	6
4	Auswertung	7
4.1	Pendellänge 1	7
4.1.1	Gleichsinnige Schwingung	7
4.1.2	Gegensinnige Schwingung	7
4.1.3	Gekoppelte Schwingung	8
4.1.4	Frequenzen	9
4.2	Pendellänge 2	10
4.2.1	Gleichsinnige Schwingung	10
4.2.2	Gegensinnige Schwingung	10
4.2.3	Gekoppelte Schwingung	11
4.2.4	Frequenzen	11
5	Diskussion	12
5.1	Vergleichen der Werte	12
5.2	Diskussion der Werte	12

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen die verschiedenen Schwingungsmodi gekoppelter Pendel untersucht werden. Dabei werden die Schwingungs- und Schwebungsdauern von gleichsinniger, gegensinniger und gekoppelter Schwingung gemessen.

2 Theoretische Grundlagen

Bei einem schwingendem Pendel wirkt die Gravitationskraft $\vec{F}_g = m\vec{g}$ der Bewegung entgegen, wobei m die Masse des Pendels und g die Gravitationsbeschleunigung ist.

Dadurch wirkt auf das Pendel ein Drehmoment von $M = D_p\phi$, mit ϕ als Auslenkwinkel und D_p als die Winkelrichtgröße.

Für die Bewegung des Teilchens lässt sich dann unter der Kleinwinkelnäherung folgende Differentialgleichung herleiten:

$$J\ddot{\phi} + D_p\phi = 0$$

Dies ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators. Lösen führt zu einer Frequenz der Bewegung von $\omega = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Die Frequenz ist also für kleine Winkel unabhängig vom Auslenkwinkel.

Nun sollen aber nicht nur einfache Schwingungen der Pendel untersucht werden sondern auch gekoppelte.

Dafür wird noch ein zusätzlicher Drehmoment-Term bei beiden Pendeln ergänzt, der in Abhängigkeit der Differenz der Winkel voneinander steht.

Dieser lautet dann $M_1 = D_F(\phi_2 - \phi_1)$ beziehungsweise $M_1 = -M_2$. Daraus ergibt sich dann folgendes gekoppeltes Differentialgleichungssystem:

$$J\ddot{\phi}_1 + D_p\phi_1 + D_F(\phi_2 - \phi_1)$$

$$J\ddot{\phi}_2 + D_p\phi_2 + D_F(\phi_1 - \phi_2)$$

Durch geeignete Wahl der Winkel lässt sich das Differentialgleichungssystem entkoppeln und als Überlagerung zweier Eigenschwingungen mit Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 lösen. Die im folgenden besprochenen Fallunterscheidungen können das System mit richtiger Wahl der Anfangsbedingungen lösen.

- Gleichsinnige Schwingung

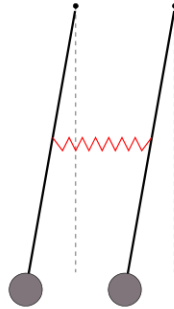


Abbildung 1: Die schematische Abbildung einer gleichsinnigen gekoppelten Schwingung[9].

Für den gleichsinnigen Fall lässt sich das Differentialgleichungssystem lösen mit der Anfangsbedingung $\alpha_1 = \alpha_2$.

Abbildung 1 stellt diesen Fall dar.

Bei diesem Fall übt die Kopplung keine Kraft aus. Es ergibt sich also als Lösung für beide Pendel einfach der ungekoppelte klassische Fall.

Aus der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ lässt sich über $T = \frac{2\pi}{\omega}$ die Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ bestimmen.

- Gegensinnige Schwingung

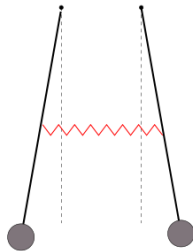


Abbildung 2: Die schematische Abbildung einer gegensinnigen gekoppelten Schwingung[9].

Die Anfangsbedingung für den gegensinnigen Fall ist $\alpha_1 = -\alpha_2$.

Grafisch dargestellt ist dies in Abbildung 2. Hier wirkt die Kraft der Kopplung der Bewegung entgegen und bremst diese somit ab. Die Schwingungsfrequenz ergibt sich hier zu $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}}$ mit der Kopplungskonstante K.

Damit ist dann die Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g} + \frac{l}{2K}}$.

- Gekoppelte Schwingung

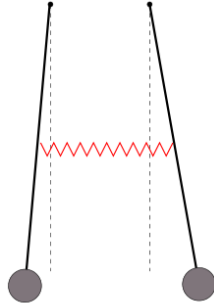


Abbildung 3: Die schematische Abbildung einer gegenseitigen gekoppelten Schwingung[9].

In diesem Fall befindet sich eines der gekoppelten Pendel in Ruhe und das andere wird ausgelenkt. Die Anfangsbedingungen ergeben sich also zu $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 \neq 0$. Hier regt das schwingende Pendel das ruhende zum Schwingen an. Dabei überträgt es seine Energie und verliert dadurch an Amplitude.

Dieser Vorgang setzt sich fort bis das Pendel komplett in Ruhe ist und seine gesamte Energie übertragen hat. Nun beginnt das jetzt ruhende Pendel angeregt zu werden. Der Zeitraum zwischen zwei identischen Zuständen eines Pendels wird Schwebung genannt. Ihre charakteristischen Größen sind:

$$T = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-}$$

$$\omega_s = \omega_+ - \omega_-$$

Alle mit ‚+‘ gekennzeichneten Größen beziehen sich dabei auf die gleichsinnige Schwingung und alle mit ‚-‘ gekennzeichneten auf die gegensinnige.

Zusätzlich kann mit diesen Definitionen auch die zuvor erwähnte Kopplungskonstante K definiert werden.

Diese ist dann nämlich:

$$K = \frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_+ + \omega_-}$$

3 Durchführung

Für die Durchführung dieses Versuches wurden zwei nebeneinander an der Wand angebrachte und frei gelagerte Metallpendel genutzt. Die Schwungmasse ist dabei höhenverstellbar, so dass unterschiedliche Pendellängen untersucht werden können.

Zu erst werden beide Pendel auf die selbe Pendellänge eingestellt. Anschließend werden von beiden Pendeln die Periodendauer der Schwingung gemessen.

Dabei werden sie um einen kleinen Winkel ausgelenkt und dann für eine Messung fünf Perioden gemessen. Mit diesem vorgehen wird der Fehler verkleinert, da diese Messung einfacher zu realisieren ist als eine Periode zu messen.

Dies wird für beide Pendel jeweils zehn mal wiederholt.

Nun wird die mit dem selben Vorgehen die Periode der gegensinnigen gekoppelten Schwingung gemessen. Dafür wird zwischen den beiden Pendeln eine Feder angebracht, die zur Kopplung der Bewegung dient. Nun werden beide Pendel um den gleichen Winkel in entgegengesetzte Winkel ausgelenkt. Dies wird am besten realisiert in dem die Pendel nach innen hin auslenkt werden. Die Messung dieser Schwingungsperiode sollte auch mehrfach wiederholt werden.

Zuletzt soll die Periodendauer der gekoppelten Schwingung und auch die Schwebungsdauer gemessen werden. Eins der beiden gekoppelten Pendeln muss sich dabei in Ruhe befinden, während das andere ausgelenkt werden.

Für das ausgelenkte sollen dann für ein bis zwei Perioden die Dauer gemessen werden. Die Schwebungsdauer wird gemessen in dem der Zeitraum zwischen den Ruhezuständen des unausgelenkten Pendels aufgenommen wird.

Dies sollte auch mehrfach wiederholt werden.

Die zuvor beschriebenen Messungen sollten nun mit einer anderen Pendellänge wiederholt werden.

4 Auswertung

4.1 Pendellänge 1

Die ersten Messreihen wurden mit einem Pendel der Länge $l = 0,25\text{m}$ durchgeführt.

4.1.1 Gleichsinnige Schwingung

Zur Bestimmung der Schwingungsdauern wurde die Zeit gemessen nach dem das jeweilige Pendel 10 vollständige Schwingungen durchlaufen hat. Somit müssen diese Messdaten(1) noch einmal durch 10 dividiert werden.

Tabelle 1: Messdaten für frei schwingende Pendel der ersten Messreihe.

T_1/s	T_2/s
5.78	5.66
5.69	5.84
5.85	5.85
5.76	5.67
5.70	5.43
5.85	5.92
5.84	5.86
5.81	5.95
5.71	6.01
5.66	5.69

Mit der Formel für den Mittelwert

$$x = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (1)$$

und der Formel für den Fehler des Mittelwertes

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (2)$$

mit N , der Anzahl der Messungen und σ die Standardabweichung, lassen sich die Messwerte mitteln.

Hieraus ergibt sich für Pendel 1 eine Schwingungsdauer $T_{+,1} = 1.153 \pm 0.014\text{s}$ und eine Schwingungsdauer von $T_{+,2} = 1.158 \pm 0.033\text{s}$ für das zweite Pendel. Im Mittel hat dieses System eine Schwingungsdauer von $T_+ = 1.15 \pm 0.014\text{s}$.

4.1.2 Gegensinnige Schwingung

Nun wird die Schwingungsdauer T_- bei gegensinniger Schwingung untersucht. Auch hier wurden 10 Schwingungen gemessen, weshalb die Daten(2) noch einmal durch 10 geteilt wurden.

Tabelle 2: Messdaten für frei gegensinniges Pendel der ersten Messreihe.

T_-/s
4.61
4.68
4.83
5.03
4.67
4.72
4.86
4.55
5.02
4.87

Nach den bereits benutzten Fehlerformeln ergibt sich die Schwingungsdauer $T_- = 0,957 \pm 0,031s$. Mit diesen Messwerten lässt sich nach der Formel

$$K = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2}$$

mit der zugehörigen Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2} \quad (3)$$

über

$$\sigma_K = \sqrt{\sigma_{T_+}^2 \left(-\frac{2T_+(T_+^2 - T_-^2)}{(T_+^2 + T_-^2)^2} + \frac{2T_+}{T_+^2 + T_-^2} \right)^2 + \sigma_{T_-}^2 \left(-\frac{2T_-(T_+^2 - T_-^2)}{(T_+^2 + T_-^2)^2} - \frac{2T_-}{T_+^2 + T_-^2} \right)^2}$$

der Kopplungsgrad zu $K = 0,93 \pm 0,05$ bestimmen

4.1.3 Gekoppelte Schwingung

Zuletzt wird noch das System gekoppelter Pendel untersucht und die Schwingungsdauer sowie die Schwebungsdauer gemessen. Hier wurde die Schwebungsdauer für eine einfache und die Schwingungsdauer für eine doppelte Periode gemessen.

Somit muss diese auch noch einmal halbiert werden. Die Daten zu diesen Messungen sind in Tabelle(4) zu finden.

Analog zu den bisher ausgerechneten Schwingungsdauern wird nun wieder der Durchschnittswert für diese Werte ausgerechnet. Es ergibt sich für die Schwingungsdauer $T = 1,11 \pm 0,06$ und $T_S = 5,98 \pm 0,14s$ für die Schwebungsdauer. Diese gemessenen Werte können aber auch nach der Formel

Tabelle 3: Messdaten für das gekoppelte Pendel der ersten Messreihe.

T/s	T_S/s
2.30	5.85
2.24	6.01
2.02	6.13
2.34	6.12
2.25	5.77

$$T_{S, \text{theoretisch}} = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-}$$

mit den vorher gemessenen Werten berechnet werden. Die dazu genutzten Werte T_+ und T_- sind jedoch auch fehlerbehaftet, somit wird auch hier nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung mittels der Formel

$$\sigma_{T_S} = \sqrt{\sigma_{T_+}^2 \left(-\frac{T_+ T_-}{(T_+ - T_-)^2} + \frac{T_-}{T_+ - T_-} \right)^2 + \sigma_{T_-}^2 \left(\frac{T_+ T_-}{(T_+ - T_-)^2} + \frac{T_+}{T_+ - T_-} \right)^2}$$

die theoretische Schwebungsdauer zu $T_{S, \text{theo}} = 5,6 \pm 1,1 \text{ s}$ berechnet

Tabelle 4: Messdaten für das gekoppelte Pendel der ersten Messreihe.

T/s	T_S/s
2.30	5.85
2.24	6.01
2.02	6.13
2.34	6.12
2.25	5.77

4.1.4 Frequenzen

Die Frequenzen ω_+ , ω_- und ω_S lassen sich aus den gemessenen Werten nach der Formel

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

zu $\omega_+ = 5,44 \pm 0,08 \text{ Hz}$, $\omega_- = 6,57 \pm 0,21 \text{ Hz}$ und $\omega_S = 1,051 \pm 0,025 \text{ Hz}$ berechnen. Diese Frequenzen können aber auch mit den aus der Theorie hergeleiteten Formeln

$$\omega_{+, \text{theo}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_{-, \text{theo}} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}}$$

$$\omega_{S, \text{theo}} = \omega_{+, \text{theo}} - \omega_{-, \text{theo}}$$

berechnet werden. Dies ergibt dann $\omega_{+, \text{theo}} = 6,26\text{Hz}$, $\omega_{-, \text{theo}} = 6,830 \pm 0,030\text{Hz}$ und $\omega_{S, \text{theo}} = -0,567 \pm 0,030\text{Hz}$.

4.2 Pendellänge 2

Die nächsten Messreihen wurden mit einem Pendel der Länge $l = 0,25\text{m}$ durchgeführt. Hier werden die Formeln nicht noch einmal aufgelistet.

4.2.1 Gleichsinnige Schwingung

Die Messwerte zur gleichsinnigen Schwingung aus Tabelle(5) wurden analog zur ersten Messreihe analog auf eine Schwingungsdauer gemittelt.

Tabelle 5: Messdaten für das frei schwingende Pendel der zweiten Messreihe.

T_1/s	T_2/s
6.44	6.55
6.42	6.50
6.52	6.31
6.58	6.37
6.26	6.43
6.30	6.41
6.28	6.50
6.65	6.56
6.48	6.53
6.57	6.55

Es berechnet sich eine Schwingungsdauer von $T_{+,1} = 1,290 \pm 0,026\text{s}$, $T_{+,2} = 1,294 \pm 0,016\text{s}$ und somit eine gesamt Schwingungsdauer $T_+ = 1,292 \pm 0,015\text{s}$

4.2.2 Gegensinnige Schwingung

Auch hier werden die Werte aus Tabelle(2) wie in der ersten Messreihe auf eine Schwingung reduziert um dann eine Schwingungsdauer von $T_- = 0,957 \pm 0,031\text{s}$ zu erhalten. Mit den Messwerten T_+ und T_- kann jetzt der Kopplungsgrad zu $K = 1,25 \pm 0,05$ berechnet werden.

Tabelle 6: Messdaten für das gegensinnige Pendel System der zweiten Messreihe.

T_-/s
5.50
5.58
5.57
5.43
5.45
5.52
5.52
5.45
5.38
5.50

4.2.3 Gekoppelte Schwingung

Analog zu den bisherigen Rechnungen werden die Daten(7) wieder auf eine Schwingung reduziert und gemittelt um dann $T = 1.088 \pm 0.031$ und $T_S = 7.65 \pm 0.24s$ zu erhalten.

Tabelle 7: Messdaten für das gekoppelte Pendel der zweiten Messreihe.

T/s	T_S/s
2.14	7.22
2.17	7.58
2.17	7.77
2.11	7.91
2.29	7.77

Die Schwebungsdauer kann aber auch wieder theoretisch zu $T_{S,theo} = 7,3 \pm 0,7s$ berechnet werden.

4.2.4 Frequenzen

Die Unterscheidung zwischen gemessenen und theoretisch berechneten Frequenzen ergibt hier $\omega_+ = 4,86 \pm 0,06Hz$, $\omega_- = 5,72 \pm 0,06Hz$ und $\omega_S = 0,821 \pm 0,026Hz$ für die gemessenen Frequenzen.

Nach den bereits genutzten Formeln für die theoretischen Werte ergibt sich $\omega_{+,theo} = 5,29Hz$, $\omega_{-,theo} = 5,930 \pm 0,022Hz$ und $\omega_{S,theo} = -0,637 \pm 0,022Hz$.

5 Diskussion

5.1 Vergleichen der Werte

Zunächst werden die gemessenen Werte mit den aus der Theorie berechneten Werten verglichen.

Für das erste Pendel wurde eine Schwingungsdauer $T_+ = 1,155 \pm 0,018\text{s}$ gemessen und eine Schwingungsdauer von $T_{+, \text{theo}} = 1,001\text{s}$ berechnet, daraus ergibt sich eine Abweichung von $15,2 \pm 1,8\%$. Die Abweichung von T_+ für das zweite Pendel berechnet sich aus $T_+ = 1,292 \pm 0,015\text{s}$ und $T_{+, \text{theo}} = 1,187\text{s}$ zu $8,9 \pm 1,3\%$.

Logischerweise ergeben die Abweichungen von ω_+ analog zu den Schwingungsdauer T_+ eine Abweichung von $15,2 \pm 1,8\%$ für die erste Pendellänge und $8,9 \pm 1,3\%$ für die zweite Pendellänge.

Werden die Frequenzen ω_- verglichen, ergibt sich für die erste Länge aus $\omega_- = 6,57 \pm 0,21\text{Hz}$ und $\omega_{-, \text{theo}} = 6,830 \pm 0,030\text{Hz}$ eine Abweichung von $4,0 \pm 3,3\%$.

Übertragen auf die zweite Pendellänge berechnet sich aus $\omega_- = 5,72 \pm 0,06\text{Hz}$ und $\omega_{-, \text{theo}} = 5,930 \pm 0,022\text{Hz}$ eine Differenz von $3,6 \pm 1,1\%$.

Beim Vergleichen von ω_S ergibt sich das Problem, dass die theoretischen Werte ein anderes Vorzeichen als die gemessenen Werte haben. Wird dieses nicht beachtet ergibt sich aus $\omega_S = 1,051 \pm 0,025\text{Hz}$ und $\omega_{S, \text{theo}} = -0,567 \pm 0,030\text{Hz}$ eine Abweichung von $46,1 \pm 3,1\%$ für das erste Pendel. Die selbe Rechnung ergibt zuletzt für das zweite Pendel aus $\omega_S = 0,821 \pm 0,026\text{Hz}$ und $\omega_{S, \text{theo}} = -0,637 \pm 0,022\text{Hz}$ eine Abweichung von $22,0 \pm 4,0\%$.

5.2 Diskussion der Werte

Insgesamt entstehen in den Rechnungen relativ kleine Messungenauigkeiten innerhalb der Messreihen.

Somit wurden die Messungen insich relativ gut und identisch aufgenommen, jedoch ergibt der Vergleich zwischen theoretischen und praktisch gemessenen Werten eine relativ große Abweichung. Diese Abweichung ist bei der ersten Pendellänge von $l = 0,25\text{m}$ konstant größer. Über beide Versuch hin weg ist die Abweichung bei der Schwebungs-Frequenz mit $46,1\%$ und 22% deutlich größer als bei den anderen Messwerten. Dies lässt sich dadurch erklären, dass in der Rechnung zu diesem Wert, sich die Abweichungen der vorherigen Messgrößen kummulieren.

Mögliche Erklärungen für diese Abweichung sind einige systematischen Fehler die in diesem Versuch auftreten. Dazu gehören Reibung an den aufhänge Punkten, eventuell bei leichten Berührungen an der Wand oder innererhalb der Kopplungsfeder. Dies führt alles zu Energieverlusten und somit zu Abweichungen der gemessenen Schwingungsdauer von der theoretischen Vorhergesage.

Die Rechnungen für die Theoriewerte basieren auch auf dem mathematischem Pendel, was nicht der Realität entspricht.

Auch menschliche Fehler wie ungenaues Ablesen der Zeit und eine ungleichmäßige Aus-

lenkung der Pendel sind nicht auszuschließen. Weiterhin ist die in der Theorie benutzte Näherung $\sin(\alpha) \approx \alpha$ nur für kleine Winkel gültig, es entstehen relativ schnell Fehler im Bereich 0,5% entstehen.

Insgesamt sind die Ergebnisse aber recht gut, wenn in Betracht gezogen wird, dass sehr schnell systematische Fehler auftreten können.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] *Literaturwert für die Elementarladung*. 2020. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Elementarladung.html> (besucht am 05.12.2020).
- [5] *Literaturwert für die Lichtgeschwindigkeit c*. 2020. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/lichtgeschwindigkeit/9012> (besucht am 05.12.2020).
- [6] *Literaturwert für die Ruhemasse eines Elektrons*. 2020. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Elektron.html> (besucht am 05.12.2020).
- [7] *Literaturwerte für das plancksche Wirkungsquantum*. 2020. URL: https://www.chemie.de/lexikon/Plancksches_Wirkungsquantum.html (besucht am 05.12.2020).
- [8] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [9] *Versuchsanleitung zu Versuch V106: "Gekoppelte Pendel"*. Fakultät Physik, TU Dortmund. 2021.