

Versuch Nr.V204

## Wärmeleitung von Metallen

Niklas Düser  
niklas.dueser@tu-dortmund.de

Benedikt Sander  
benedikt.sander@tu-dortmund.de

Durchführung: 22.06.2021

Abgabe: 29.06.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Versuchsaufbau und Durchführung</b>	<b>4</b>
3.1	Versuchsaufbau . . . . .	4
3.2	Durchführung . . . . .	5
3.2.1	Statische Methode . . . . .	5
3.2.2	Dynamische Methode . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1	Statische Methode . . . . .	6
4.2	Dynamische Methode . . . . .	8
4.2.1	Messingstab (breit) . . . . .	9
4.2.2	Aluminiumstab . . . . .	10
4.2.3	Edelstahlstab . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>15</b>
	<b>Literatur</b>	<b>15</b>

## 1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuchs ist es die Wärmeleitfähigkeit diverser Metalle zu untersuchen. Dabei wird eine statische und eine dynamische Methode angewandt.

## 2 Theoretische Grundlagen

Befindet sich ein Körper nicht im Temperaturgleichgewicht entsteht ein Wärmestrom. Dieser transportiert Wärme entlang des negativen Temperaturgradienten.

Dies kann über Konvektion, Wärmestrahlung oder Wärmeleitung geschehen. Letzteres beinhaltet dabei den Wärmetransport über Phononen und über freie Elektronen.

In diesem Versuch wird dabei von allem genannten nur der Wärmetransport über die Elektronen betrachtet.

Wird nun ein Stab, dessen eines Ende wärmer ist, mit der Länge  $L$ , der Querschnittsfläche  $A$  und der Dichte  $\rho$  betrachtet, ergibt sich für die transportierte Wärmemenge

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt . \quad (1)$$

Dabei ist  $\kappa$  die materialabhängige Wärmeleitfähigkeit. Aus dieser Gleichung lässt sich auch die Richtung des Wärmeflusses ablesen. Dieser findet, wie zuvor genannt, von warm zu kalt statt.

Für die Dichte des Wärmestroms  $j_W$  gilt damit

$$j_W = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} .$$

Über die Kontinuitätsgleichung lässt sich hiermit dann folgende Gleichung, die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung, herleiten

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} .$$

Mit dieser Gleichung lässt sich die zeitliche und räumliche Entwicklung der Temperatur beschreiben. Dabei wird  $\sigma_T = \frac{\kappa}{\rho c}$  auch Temperaturleitfähigkeit genannt.

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für mit der Periode  $T$  wechselnden Stabendtemperaturen ist die einer gedämpften Welle.

Diese besitzt die Gleichung

$$T(x, t) = T_{max} e^{-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x} \cos \left( \omega T - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x \right) .$$

Die Phasengeschwindigkeit dieser eindimensionalen Welle  $v$  ergibt sich zu

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}}} = \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}} .$$

Für die Wärmeleitfähigkeit lässt sich dann weiter mit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  und der Phase  $\phi = \frac{2\pi\Delta t}{T}$  der Term

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2\Delta t \ln\left(\frac{A_{nah}}{A_{fern}}\right)}$$

finden. Dabei lässt sich über die Amplituden in einem nahen und einem fernen Messpunkt  $A_{nah}$  und  $A_{fern}$  ein Dämpfungsterm bilden. Der Abstand zwischen diesen Messpunkten ist  $\Delta x$ .

Die Phasendifferenz der Welle zwischen den Messpunkten entspricht  $\Delta t$ .

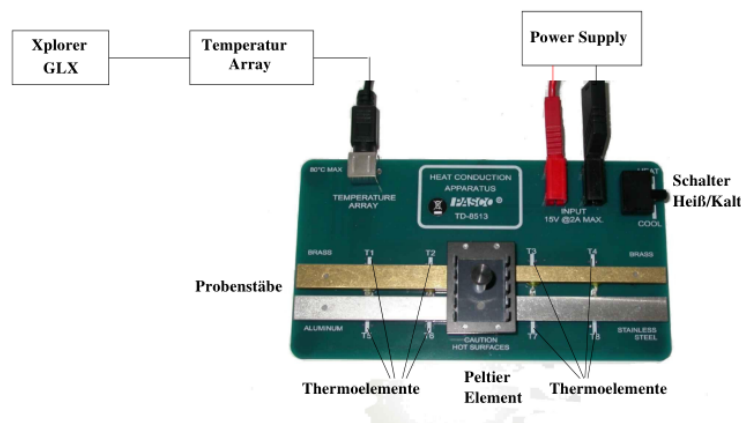
### 3 Versuchsaufbau und Durchführung

Um die Wärmeleitfähigkeit unterschiedlicher Materialien zu untersuchen werden mit einem Xplorere GLX als Messgeräte die Temperaturen an den Thermoelementen abgegriffen.

#### 3.1 Versuchsaufbau

Auf einer Platte sind Probenstäbe mit unterschiedlichen Querschnittsflächen aus Aluminium, Edelstahl und zwei mal Messing aufgebracht. Dies ist in Abbildung 1 abgebildet. Diese Stäbe können alle von einem Peltierelement simultan erhitzt werden. Auf den Stäben sollte dabei zu jedem Zeitpunkt die Isolation liegen.

An das Peltierelement können für die in den Messreihen benötigten unterschiedlichen Verfahren unterschiedliche Spannungen angelegt werden. Für die statische Methode entspricht dies einer Spannung von  $U_p = 5\text{ V}$  und für die dynamische Methode  $U_p = 8\text{ V}$ . An den in Abbildung 1 eingezeichneten Thermoelementen lassen sich mit dem in Abbildung 2 dargestellten Datenlogger die Temperaturen der Stäbe aufnehmen. Diese Elemente sind  $\Delta x = 3\text{ cm}$  von einander entfernt.



**Abbildung 1:** Die Platte mit dem Peltierelement und denn aufgebrachten Probestäben [11]



**Abbildung 2:** Der Datenlogger Xplorer GLX, mit dem die Messwerte aufgenommen werden [11]

## 3.2 Durchführung

Nach dem alle auf der Platte aufgetragenen Elemente der Abbildung 1 entsprechend verkabelt wurden, können am Datenlogger die für die Messung benötigten Einstellungen getätigt werden.

### 3.2.1 Statische Methode

Für die statische Methode entspricht dies dem Einstellen der Abtastrate zu  $\Delta T = 0,2 \text{ s}$ . Dabei werden dann bei einer an das Peltierelement angelegten Spannung  $U_P = 5 \text{ V}$  für 700 Sekunden die Temperaturen aller Thermoelemente aufgenommen.

Hieraus lassen sich dann die Temperaturverläufe der einzelnen Stäbe grafisch darstellen. Zusätzlich lässt sich hieraus der Wärmestrom bestimmen und ablesen welcher Stab die beste Wärmeleitfähigkeit besitzt.

Für den Edelstahlstab sollen dann auch noch die Differenzen zwischen den Temperaturen an den Messpunkten grafisch dargestellt werden.

### 3.2.2 Dynamische Methode

Wenn die Stäbe hinreichend abgekühlt sind können sie bei  $U_P = 8 \text{ V}$  wieder erhitzt werden.

Dabei ist aber zu beachten, dass für das Angström-Verfahren der Stab periodisch erhitzt werden muss. Deswegen muss periodisch, manuell zwischen erhitzen und abkühlen hin und her geschaltet werden.

Für die erste Messreihe wird eine Welle mit der Periodendauer  $T = 80\text{s}$  erzeugt werden. Deswegen muss alle  $T = 40\text{s}$  umgeschaltet werden. Die Werte sollen dann auch zehn Perioden ausgelesen werden.

Hiermit soll dann für den breiten Messingstab der Temperaturverlauf grafisch dargestellt werden. Zusätzlich soll auch noch  $\kappa$  berechnet und aus den Grafiken die Phasendifferenz  $\Delta t$  der Wellen bestimmt werden.

Nach hinreichendem Abkühlen wird diese Messung mit sechs Perioden deren Dauer  $T = 200\text{s}$  entspricht, wiederholt.

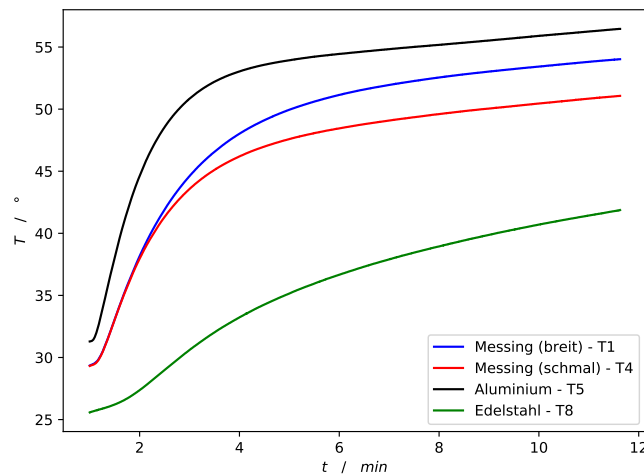
Dabei wird die Auswertung zu der vorigen Messreihe identisch durchgeführt, nur auf den Edelstahlstab bezogen.

## 4 Auswertung

Die Messung der Wärmeleitung wird in diesem Versuch mit zwei unterschiedlichen Methoden durchgeführt. Die folgende Auswertung ist in zwei Teilen eingeteilt in denen dann diese Methoden ausgewertet werden.

Sämtliche in diesem Versuch aufgenommenen Daten können nicht im Protokoll dargestellt werden da bereits einzelne Messreihen um die 10000 Werte beinhalten. Aus diesem Grund sind die Daten in den Plots auch nicht als einzelne Punkte sondern durch eine Verbindungslinie dargestellt, da dies die Daten besser darstellt.

### 4.1 Statische Methode



**Abbildung 3:** Die Temperaturen an den fernen Messpunkte der einzelnen Stäbe bei der statischen Messung.

Im Abbildung(3) sind die Temperaturen  $T_1$ ,  $T_4$ ,  $T_5$  und  $T_8$  geplottet. Diese stellen die vom Peltier-Element ferner liegenden Messtellen dar. Edelstahl startet bei der niedrigsten Temperatur mit circa  $26^\circ\text{C}$ , die beiden Messingstäbe starten bei ungefähr  $29^\circ\text{C}$  und Aluminium startet am höchsten bei  $31^\circ\text{C}$ .

Die Temperaturverläufe lassen sich nun in unterschiedliche Phasen einteilen. Zunächst ändern sich die Temperaturen kaum, die Energie des Heizgerätes ist noch nicht an dem hinteren Messgerät angekommen. Dieser Bereich ist bei Messing und Aluminium ungefähr gleich lang, dauert jedoch bei Edelstahl ca. 3 mal so lang.

Nun beginnt die Phase der höchsten Steigung. Hier hat Aluminium die höchste Steigung, die beiden Messingstäbe haben zunächst die gleiche Steigung, sie ist nur etwas kleiner als die von Aluminium. Die Steigung von Edelstahl ist deutlich kleiner als die der anderen Metalle. Die Phase des hohen Temperaturanstiegs hält bei Aluminium auch am längsten. Bei den Messingstäben fällt die Steigung des schmalen Stabs früher wieder ab. Die Phase der hohen Steigung hält bei Edelstahl nur sehr kurz.

Zuletzt steigen alle Metalle mit einer relativ kleinen aber ähnlichen Steigung konstant weiter an. Die Temperatur der jeweiligen Stäbe zum Zeitpunkt  $t = 700\text{ s}$  lassen sich in den Messdaten ablesen und ergeben sich zu:

$$\text{für den breiten Messingstab: } T = 54,02^\circ\text{C} \quad (2)$$

$$\text{für den schmalen Messingstab: } T = 51,07^\circ\text{C} \quad (3)$$

$$\text{für den Aluminiumstab: } T = 56,46^\circ\text{C} \quad (4)$$

$$\text{für den Edelstahlstab: } T = 41,87^\circ\text{C} \quad (5)$$

Nach der Gleichung

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (6)$$

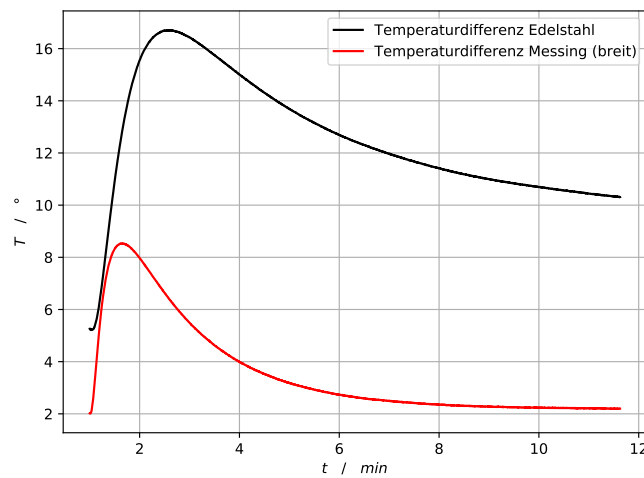
lässt sich der Wärmestrom  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  für die verschiedenen Metallstäbe errechnen (siehe Tabelle 1). Dabei wird für  $\kappa$  ein Wert aus der Literatur[9] entnommen:

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{Messing}} &= 120 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \\ \kappa_{\text{Aluminium}} &= 237 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \\ \kappa_{\text{Edelstahl}} &= 19 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \end{aligned}$$

Abschließend werden die Temperaturdifferenzen zwischen den Temperaturmessstellen eines Stabes für den breiten Messingstab und den Edelstahlstab in einem  $t$ - $T$ - Diagramm(4) aufgetragen.

**Tabelle 1:** Der Wärmestrom der verschiedenen Metallstäben zu 5 verschiedenen Zeitpunkten.

$t[\text{s}]$	$\frac{\Delta Q}{\Delta t} [\text{J/s}]$			
	Messing (breit)	Messing (schmal)	Aluminium	Edelstahl
100	0,466	0,359	0,796	0,125
200	0,710	0,532	1,440	0,131
350	1,082	0,780	2,089	0,156
450	1,267	0,906	2,320	0,177
600	1,459	1,034	2,491	0,212



**Abbildung 4:** Die Temperaturdifferenzen zwischen den Messstellen auf einem Stab.

In der Abbildung(4) fällt auf, dass bei beiden Stoffen der Temperaturunterschied tief startet und dann stark ansteigt. Die Temperaturdifferenz innerhalb des breiten Messingstabes hat bei etwa  $t = 50 \text{ s}$  sein Maximum von  $8,3^\circ\text{C}$  erreicht. Dann fällt die Kurve, flacht ab und nähert sich einem Wert um die  $2^\circ\text{C}$  an.

Die Temperaturdifferenz des Edelstahlstabes steigt höher als die des breiten Messingstabes bis sie ihr Maximum bei etwa 160 s und  $17^\circ\text{C}$  erreicht hat. Die Kurve fällt daraufhin asymptotisch auf den Wert  $9,5^\circ\text{C}$  ab.

## 4.2 Dynamische Methode

In der dynamische Methode wurden die Stäbe in periodischen Abständen gewärmt und gekühlt. Hier wird der breite Messingstab und der Aluminiumstab mit einer Periodendauer von 80 s betrieben. Der Edelstahlstab wird mit einer Periode von 200 s betrieben und ausgewertet.

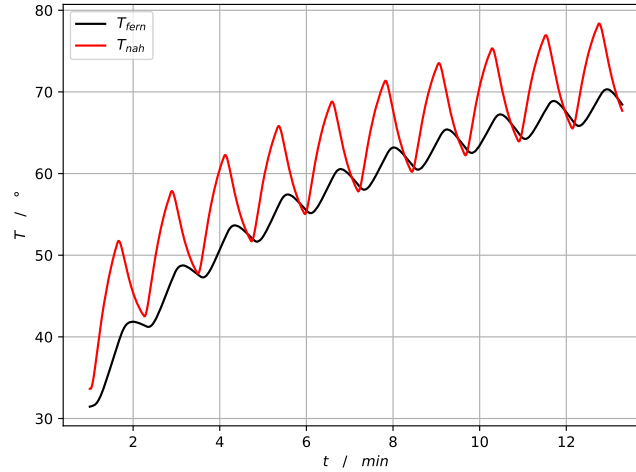
Bei allen Stäben werden 2 Messungen pro Sekunde an zwei Stellen mit einem Abstand



von 3 cm aufgenommen. Bei der Messung mit einer Periodendauer von 80 s werden 10 Perioden gemessen, für die Periodendauer von 200 s werden nur 6 Perioden gemessen.

#### 4.2.1 Messingstab (breit)

Im folgenden wird zunächst der breite Messingstab betrachtet.



**Abbildung 5:** Die Temperaturen an den verschiedenen Messstellen des Messingstabes in der dynamischen Methode mit einer Periode von 80 s.

In Abbildung(5) sind die Temperaturverläufe der beiden Messstellen von Messing gegen die Zeit geplottet. Hier ist eindeutig die Periodizität der Messung zu sehen. Es fällt klar auf, dass die Amplituden der Messstelle die näher am Peltier-Element liegt deutlich höher sind. Auch ein Phasenunterschied zwischen den beiden Messstellen ist zu erkennen. Die Amplituden und deren Phasendifferenz sind in der Tabelle 2 aufgelistet. Es ergibt sich aus den Werten der Mittelwert:

$$\ln \left( \frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}} \right) = 0,888 \pm 0,014$$

$$\Delta t = (14,80 \pm 0,34) \text{ s}$$

Aus diesen Werten kann nun nach der Gleichung

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2 \Delta t \ln \left( \frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}} \right)}$$

die Wärmeleitfähigkeit

$$\kappa = (117,264 \pm 0,937) \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

berechnet werden.

**Tabelle 2:** Die Amplituden und Phasendifferenzen des Messingstabes.

$A_{\text{nah}}[\text{K}]$	$A_{\text{fern}}[\text{K}]$	$\log\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)$	$\Delta t[\text{s}]$
19,81	10,93	0,595	22
16,07	8,01	0,696	16
15,17	6,77	0,807	16
14,58	6,43	0,819	20
13,55	5,38	0,924	14
13,98	5,29	0,972	12
13,76	5,11	0,991	12
13,55	4,92	1,013	12
13,46	4,85	1,021	12
13,27	4,65	1,049	12

Für die Temperaturwellen lassen sich nach der Formel

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2\pi\Delta t \ln\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)}{T^*(\Delta x)^2}}}$$

die Frequenz  $f$  und die Wellenlänge  $\lambda$  zu

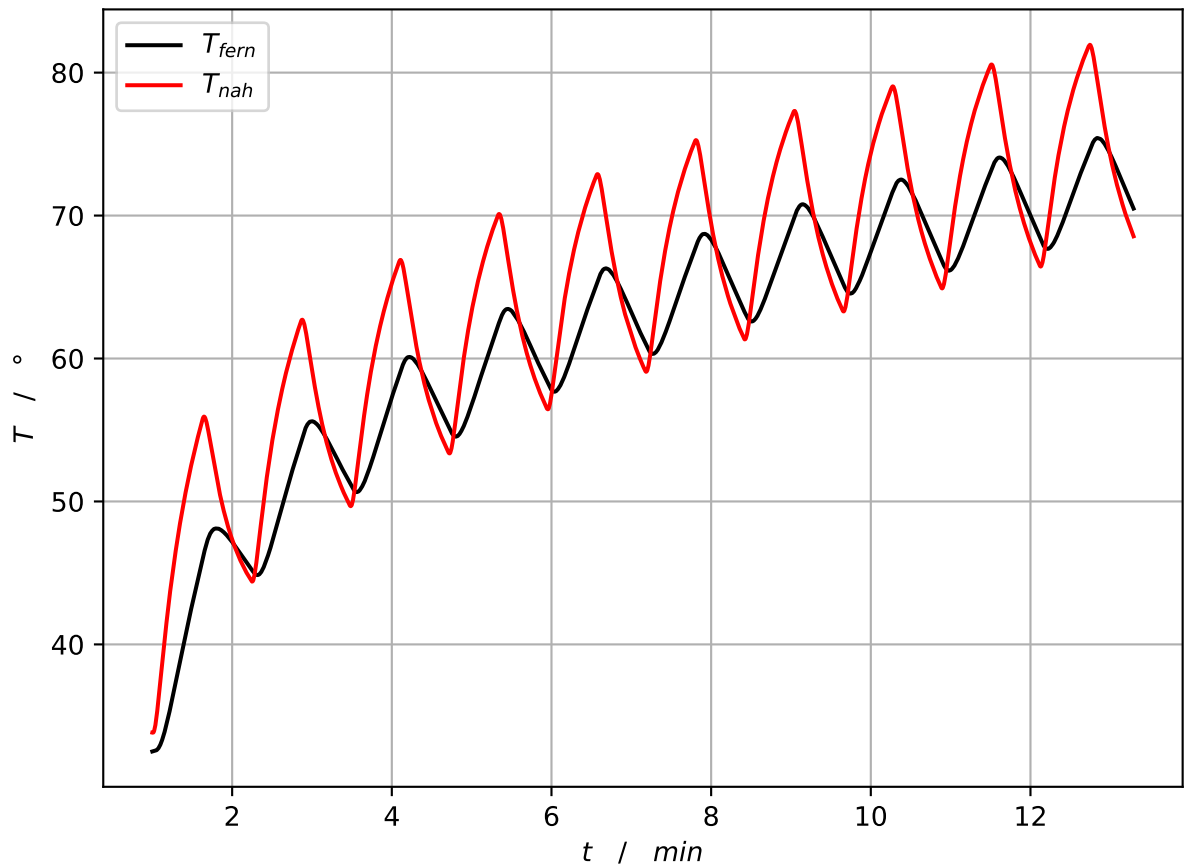
$$f = \frac{1}{T} = 0,0125 \text{ Hz}$$

$$\lambda = (0,189 \pm 0,003) \text{ m}$$

berechnen.

#### 4.2.2 Aluminiumstab

Für den Aluminiumstab wird diese Rechnung analog wiederholt. Die Temperaturverläufe werden in Abbildung(6) dargestellt.



**Abbildung 6:** Die Temperaturen an den einzelnen Messstellen des Aluminiumstabes, bei der dynamischen Methode mit  $T = 80$  s.

Hier sind bezüglich der Amplitude und der Phasenverschiebung wieder die gleichen Beobachtungen wie bei dem Messingstab festzustellen. Mittels der Daten aus Tabelle(3) lassen sich nun analog zum Messingstab folgende Werte berechnen:

$$\log \left( \frac{A_{nah}}{A_{fern}} \right) = 0,604 \pm 0,009$$

$$\Delta t = (8,20 \pm 0,26) \text{ s}$$

$$kappa = (231,646 \pm 3,763) \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$f = 0,0125 \text{ Hz}$$

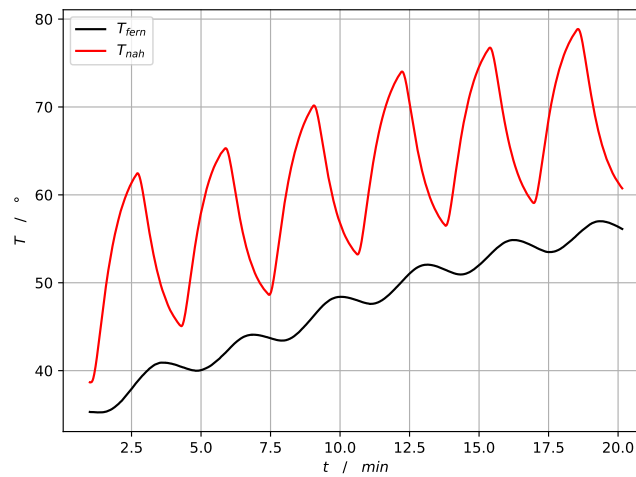
$$\lambda = (0,315 \pm 0,003) \text{ m}$$

**Tabelle 3:** Die Amplituden und Phasendifferenz der Temperaturmessungen am Aluminiumstab.

$A_{\text{nah}}[\text{K}]$	$A_{\text{fern}}[\text{K}]$	$\log\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)$	$\Delta t[\text{s}]$
23,96	16,91	0,348	12
19,19	11,49	0,513	8
17,96	10,01	0,585	8
17,27	9,59	0,588	14
16,25	8,42	0,657	6
16,71	8,66	0,657	8
16,43	8,51	0,658	6
16,23	8,28	0,673	6
16,22	8,23	0,678	6
16,01	8,08	0,684	8

#### 4.2.3 Edelstahlstab

Der Edelstahlstab wird in der dynamischen Methode nun mit einer Periodendauer von 200s ausgewertet. Die Daten dieser Messreihe sind in Abbildung(7) zu finden



**Abbildung 7:** Die Temperaturen der verschiedenen Messstellen des Edelstahlstabes.

Auch hier sind die gleichen Verschiebungen der Amplitude und Phase zwischen den beiden Messstellen festzustellen. Die relevanten Daten hierzu sind in Tabelle(4) dargestellt. Die Mittelwerte dieser Daten ergeben sich zu

**Tabelle 4:** Die Amplituden und Phasendifferenz beim Edelstahlstab.

$A_{\text{nah}}[\text{K}]$	$A_{\text{fern}}[\text{K}]$	$\log(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}})$	$\Delta t[\text{s}]$
23,8	5,66	1,436	57,5
20,25	4,1	1,597	61
21,55	4,98	1,464	62
20,82	4,47	1,538	58
20,68	3,93	1,660	55
19,81	3,52	1,727	52

$$\ln\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right) = 1,570 \pm 0,017$$

$$\Delta t = (57,58 \pm 1,82) \text{ s} .$$

Weiterhin berechnet sich die Wärmeleitfähigkeit, die Frequenz und die Wellenlänge zu

$$\kappa = (16,000 \pm 0,129) \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$f = 0,005 \text{ Hz}$$

$$\lambda = (7,08 \pm 0,28) \cdot 10^{-2} \text{ m} .$$

## 5 Diskussion

Zunächst folgt die Diskussion der statischen Methode.

Hier wurde neben dem Wärmefluss, die Temperatur nach 700s betrachtet. Die Daten hierzu sind in den Gleichungen 3 bis 5 dargestellt. Aus diesen Daten lässt sich bestimmen, dass Aluminium die höchste Wärmeleitfähigkeit besitzt. Messing hat die nächst höhere Wärmeleitfähigkeit.

Die in den Messwerten zu findende höhere Temperatur des breiteren Messingstabes lässt sich darauf zurück führen, dass der Wärmefluss neben der spezifischen Wärmeleitfähigkeit auch von der Querschnittsfläche abhängt. Zuletzt kommt Edelstahl mit der geringsten Wärmeleitfähigkeit. Diese Beobachtungen stimmen mit den Werten aus der Literatur[9] überein.

Der Verlauf der Temperaturdifferenz aus Abbildung(4) ist damit zu erklären, dass die Temperatur des Heizelements als erstes bei dem näherem Messelement ankommt und dieses somit als erstes aufheizt. Sobald die Energie dann bei dem zweiten Messelement angekommen ist, ist das Maximum der Temperaturdifferenz erreicht.

Die Differenz nähert sich dann einem Wert an, weil die beiden Messstellen konstant

aufgewärmt werden.

Mittels der dynamischen Methode wurden Werte für die Wärmeleitfähigkeit berechnet, diese können nun mit den Theorie Werten verglichen werden. Dies erfolgt in Tabelle(5).

**Tabelle 5:** Vergleich der im Experiment ermittelten Größen mit den damit korrespondierenden Literaturwerten.

Metall	$\kappa_{\text{Messung}}$ [W/(m K)]	$\kappa_{\text{Literatur}}$ [W/(m K)] [9]	Abweichung [%]
Messing (breit)	117,264	120	2,280
Aluminium	231,646	237	2,259
Edelstahl	16,000	15 bis 21	

Aus den geringen Abweichungen lässt sich schließen, dass das Experiment insgesamt gut geklappt hat.

## 6 Anhang

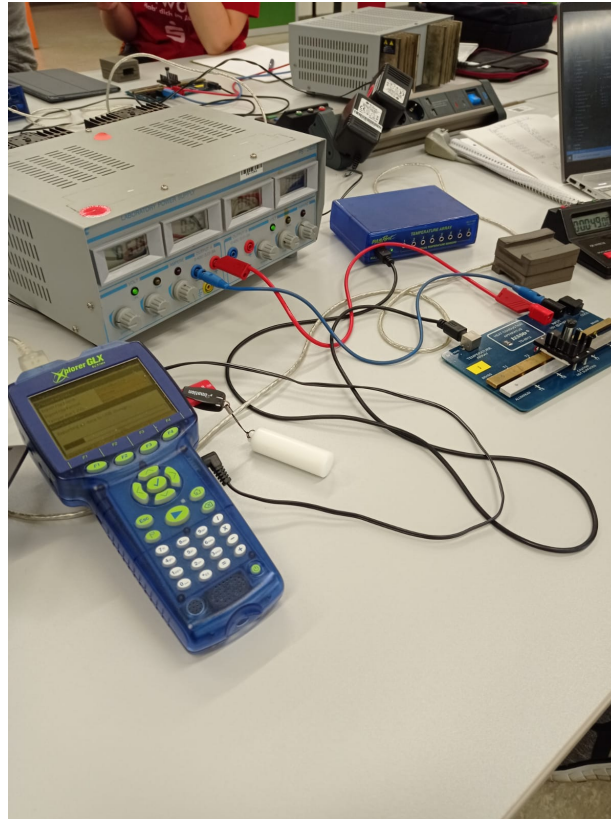


Abbildung 8: Der Versuchsaufbau.

## Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] *Literaturwert für die Elementarladung*. 2020. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Elementarladung.html> (besucht am 05.12.2020).
- [5] *Literaturwert für die Lichtgeschwindigkeit c*. 2020. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/lichtgeschwindigkeit/9012> (besucht am 05.12.2020).

- [6] *Literaturwert für die Ruhemasse eines Elektrons*. 2020. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Elektron.html> (besucht am 05.12.2020).
- [7] *Literaturwerte für das plancksche Wirkungsquantum*. 2020. URL: [https://www.chemie.de/lexikon/Plancksches\\_Wirkungsquantum.html](https://www.chemie.de/lexikon/Plancksches_Wirkungsquantum.html) (besucht am 05.12.2020).
- [8] *Literaturwerte für die Rydberg-Konstante und Energie*. 2020. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Rydberg-Konstante.html> (besucht am 06.12.2021).
- [9] *Literaturwerte für Wärmeleitfähigkeiten*. 2021. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/W%C3%A4rmeleitf%C3%A4higkeit.html>.
- [10] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [11] *Versuchsanleitung zu Versuch V204: "Wärmeleitung von Metallen"*. Fakultät Physik, TU Dortmund. 2021.