Versuch Nr.V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Niklas Düser
niklas.dueser@tu-dortmund.de

Benedikt Sander
benedikt.sander@tu-dortmund.de

Durchführung: 8.11.2020 Abgabe: 15.12.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen verschieden Eigenschaften eines LRC-Kreises untersucht werden. Diese sind der Dämpfungswiderstand aus der Zeitabhängigen Amplitude und der Widerstand bei dem der Aperiodische Grenzfall eintritt. Zusätzlich wird an einem Serienresonanzkeisnoch die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung untersucht.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Herleitung gedämpfter Schwingkreis

Das 2. Kirchhoffsche Gesetz führt direkt zu seiner Beziehung der abfallenden Spannungen:

$$U_\mathrm{R} + U_\mathrm{C} + U_\mathrm{L} + = 0 \tag{1}$$

In die Formel 1 lassen sich nun die Schaltelement spezifischen Formeln einsetzten

$$\begin{aligned} U_\mathrm{R} &= RI \\ U_\mathrm{C} &= \frac{Q}{C} \\ U_\mathrm{L} &= L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} I \end{aligned}$$

Dies führt zu einer Differentialgleichung der Form:

$$\begin{aligned} L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}I + RI + \frac{Q}{C} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}I + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}I + \frac{1}{LC}I &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Diese Differetialgleichung wird über den Ansatz einer komplexen e Funktion gelöst.

$$I(t) = Z \cdot \mathrm{e}^{j\tilde{w}t} \tag{3}$$

Einsetzen von 3 in die DGL2 ergibt:

$$\tilde{\omega}^2 - j\frac{R}{L}\tilde{\omega} - \frac{1}{LC} = 0$$

Umstellen nach $\tilde{\omega}$ ergibt:

$$\tilde{\omega}_{1,2} = j\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}}$$

$I(t)$ lässt sich nun also durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$I(t) = Z_1 \cdot \mathrm{e}^{j\tilde{w}_1 t} + Z_2 \cdot \mathrm{e}^{j\tilde{w}_2 t}$$

Die Definitionen für μ und ν bieten sich an um die Formel übersichtlicher zu gestalten.

$$2\pi\mu := \frac{R}{2L}$$
$$2\pi\tilde{\nu} := \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$I(t)$ lässt sich dann als:

$$I(t) = \mathrm{e}^{-2\pi\mu t} \cdot (Z_1 \mathrm{e}^{j2\pi\tilde{v}t} + Z_2 \mathrm{e}^{-j2\pi\tilde{v}t})$$

schreiben. Um $I(t)$ weiter zu unterschen muss eine Fallunterscheidung gemacht werden. Hier wird unterschieden ob der Inhalt der Wurzel positiv oder negativ definiert ist und somit der Exponent reel oder imaginär ist.

2.2 Fallunterscheidung

2.2.1 1.Fall

Zu erst wird der Fall

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

untersucht. Hier ist $v \in \mathbb{R}$. Damit die Lösungsfunktion $I(t) \in \mathbb{R}$ ist muss $Z_1 = \overline{Z_2}$ sein. Dies lässt sich durh den Ansatz

$$Z_1 = \frac{1}{2} A_0 \mathrm{e}^{j\eta}$$
$$Z_2 = \frac{1}{2} A_0 \mathrm{e}^{-j\eta}$$

erreichen.

Die folgende Eigendschaft komplexer e-Funktionen;

$$\frac{\mathrm{e}^{j\phi} + \mathrm{e}^{-j\phi}}{2} = cos(\phi)$$

wird nun auf das Problem angewandt.

Es ergibt sich:

$$I(t) = A_0 \mathrm{e}^{-2\pi\mu t} \cdot cos(2\pi\nu t + \eta)$$

Aus diesem Term kann nun eine Beziehung für die Periodendauer bestimmt werden:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

mit

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

ist

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$T_{\exp} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}$$

2.2.2 2. Fall

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$$

$\tilde{v} \in \mathbb{C}$

$$I \sim \mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}$$

Spefzialfall für:

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{\mathrm{ap}}^2}{4L^2}$$

$\nu = 0$

$$I(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{LC}}$$

2.3 vergleich Mechanik

$$m\ddot{x} + s\dot{x} + Dx = 0$$

$$\begin{aligned} m &\Leftrightarrow L \\ s &\Leftrightarrow R \\ D &\Leftrightarrow \frac{1}{C} \end{aligned}$$

2.4 erzwungene Schwingungen

$$u(t) = \mathrm{U}_0\mathrm{e}^{j\omega t}$$

$$L\dot{I} + RI + \frac{Q(t)}{C} = \mathrm{U}_0\mathrm{e}^{j\omega t}$$

oder mit:

$$V_{\mathrm{C}}(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

ergibt sich:

$$LC\ddot{V}_{\mathrm{C}} + RC\dot{V}_{\mathrm{C}} + V_{\mathrm{C}} = \mathrm{U}_0\mathrm{e}^{j\omega t}$$

mit $A \in \mathbb{C}$ der Amplitude der Kodensatorspannung:

$$u_{\mathrm{C}}(t) = A(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}$$

$$-LC\omega^2 A + j\omega RCA + A = \mathrm{U}_0$$

$$A = \frac{\mathrm{U}_0}{1 - LC\omega^2 + j\omega RC} = \frac{\mathrm{U}_0(1 - LC\omega^2 - j\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2}$$

$$|A| = \mathrm{U}_0\sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{((1 - LC\omega^2)^2 + w^2 R^2 C^2)^2}}$$

$$\tan(\phi(\omega)) = \frac{\mathrm{Im}(A)}{\mathrm{Re}(A)} = \frac{\omega RC}{1 - LC\omega^2}$$

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right)$$

$$U_\mathrm{C}(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2))^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\omega_\mathrm{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

für:

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

$$U_\mathrm{C,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}U_0$$

$$\frac{U_0}{\sqrt{2}}\frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{U_0}{C\sqrt{\omega_\pm^2 R^2 + \left(\omega_\pm^2 L - \frac{1}{C}\right)}}$$

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}$$

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}$$

$$\frac{R^2}{2L^2} \gg \frac{1}{LC}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_{1,2} = \pm\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L}$$

$$r = X + jY$$

$$|r| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$r_\mathrm{C} = -j\frac{1}{\omega C}$$
$$r_\mathrm{L} = j\omega L$$
$$r_\mathrm{R} = R_\mathrm{s}$$

$$r_\mathrm{S} = R_\mathrm{S} + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$X_\mathrm{S} = R_\mathrm{S}$$
$$Y_\mathrm{S} = j\omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$|r_\mathrm{S}| = \sqrt{R_\mathrm{S}^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$r_\mathrm{p} = \frac{\frac{1}{R_\mathrm{p}} + j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)}{\frac{1}{R_\mathrm{p}^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

$$|r_\mathrm{p}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_\mathrm{p}^2}\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}$$