

Versuch Nr.V401

Das Michelson-Interferometer

Niklas Düser
niklas.dueser@tu-dortmund.de

Benedikt Sander
benedikt.sander@tu-dortmund.de

Durchführung: 01.06.2021

Abgabe: 08.06.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Begriff der Interferenz	3
1.2	Interferenzfähigkeit des Lichtes	3
1.3	Fourier-Spektroskopie mit dem Michelson-Interferometer	5
1.4	Prinzipieller Aufbau des Michelson-Interferometers	5
2	Durchführung	8
2.1	Bestimmung der Wellenlänge	8
2.2	Bestimmung des Brechungsindex	9
3	Auswertung	10
3.1	Bestimmung der Wellenlänge des Laserlichts	10
3.2	Bestimmung des Brechungsindex von Luft	10
4	Diskussion	12
5	Anhang	13

1 Theorie

In diesem Versuch werden die Begriffe der Interferenz und Kohärenz diskutiert um die Bedingungen für Interferenzerscheinungen zu verstehen. Dabei wird das Michelson-Interferometer als optisches Messinstrument zur Bestimmung von einer Wellenlängen und einem Brechungsindex benutzt.

1.1 Begriff der Interferenz

Die Ort und Zeitabhängigkeit der Feldstärke einer elektromagnetischen Welle lässt sich durch

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t - \delta)$$

beschreiben mit der Ortskoordinate x , der Zeit t , der Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$, der Kreisfrequenz ω und dem Phasenwinkel δ . Die kombinierte Lichtintensität $I = \text{const}|\vec{E}|^2$ an einem Ort aus zwei Lichtwellen berechnet sich zu

$$I_{\text{ges}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\vec{E}|^2(x, t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (|\vec{E}_1 + \vec{E}_2|)^2(x, t) dt.$$

Hier sollte $t_2 - t_1$ deutlich größer als die Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ sein. Besitzen die beiden Lichtwellen eine gemeinsame Feldstärke \vec{E}_0 aber unterschiedliche Phasenbeziehungen δ_1 und δ_2 , entsteht daraus

$$I_{\text{ges}} = \frac{\vec{E}_0^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (1 + e^{i(\delta_2 - \delta_1)} + e^{-i(\delta_2 - \delta_1)} + 1) dt = 2 \cdot \vec{E}_0^2 (1 + \cos(\delta_2 - \delta_1)).$$

1.2 Interferenzfähigkeit des Lichtes

In der Regel ist das Licht von zwei Quellen jedoch nicht in der Lage miteinander zu interferieren, da die beiden Wellen unterschiedliche zeitabhängige Phasenbeziehungen haben und sich die Interferenzeffekte somit im Mittel ausgleichen

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \text{const} \cos(\delta_2(t) - \delta_1(t)) dt \approx 0.$$

Dies liegt daran, dass das Licht bei diskreten Emissionsakten innerhalb des Atoms entsteht.

Das Licht eines dieser Akte ist kohärent. Wird jedoch das Licht aus unterschiedlichen Emissionsakten untersucht ist dies inkohärent. Es ist also notwendig kohärentes Licht zu erzeugen um Interferenzeffekte zu untersuchen. Generell ist Licht kohärent wenn es durch eine einheitliche Gleichung mit festem k , ω und δ beschrieben werden kann. Kohärenz ist also wie bereits erwähnt nur möglich wenn das Licht aus der selben Quelle stammt. Dies kann dann wie in Abbildung(1) geteilt werden und durch unterschiedliche optische Mechanismen verändert werden um Interferenz zu ermöglichen.

Weiterhin ist zu beachten, dass die Emissionsakte nur eine endliche zeitliche Länge τ haben. Daraus folgt, dass es auch nur einen endlichen Wegunterschied l geben kann bei dem das Licht noch Interferieren kann, dieser wird als Kohärenzlänge bezeichnet.

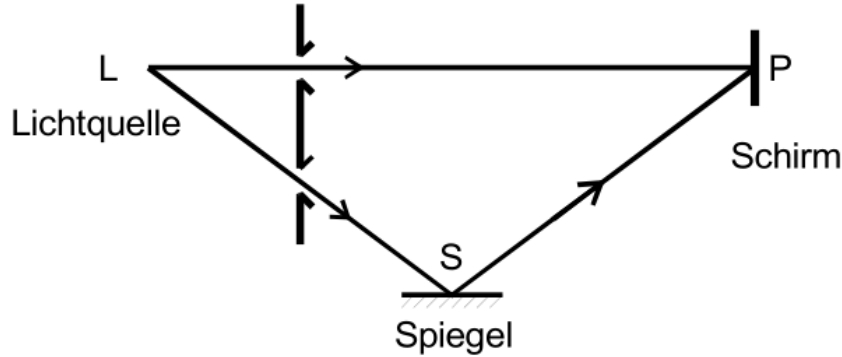


Abbildung 1: Prinzipielle Versuchsanordnung zur Erzeugung von Interferenzerscheinung unter Verwendung einer konventionellen Lichtquelle [10].

Im folgenden wird die Kohärenzlänge l und die Verteilung $\Delta\omega$ der Frequenzverteilung untersucht. Dazu wird ein sinusförmiger Wellenzug endlicher Länge

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega_0 t} \quad \text{für } -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}$$

betrachtet. Die Fouriertransformation dieser Welle ergibt

$$g(\omega) = E_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = E_0 \frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau}{\omega - \omega_0}$$

und somit die Intensität

$$I = G(\omega) = |g(\omega)|^2 = E_0^2 \frac{\sin^2(\omega - \omega_0)\tau^2}{(\omega - \omega_0)^2}$$

Aus diesem Ausdruck ist nun ein Maximum bei $\omega = \omega_0$ und ein Minimum bei

$$\omega_N = \omega_0 \pm 2\frac{\pi}{\tau}$$

abzulesen. Weiterhin ist zu erkennen, dass der größte Teil der Energie im Bereich

$$\omega_0 - 2\frac{\pi}{\tau} < \omega < \omega_0 + 2\frac{\pi}{\tau}$$

liegt. Dieser Bereich bzw. diese Breite ist die Verteilungsfunktion

$$\Delta\omega = 2\frac{\pi}{\tau} \tag{1}$$

Die Breite der Wellenlängenverteilung kann durch die Formel

$$\lambda_0 := \frac{2\pi c}{\omega_0}$$

ausgedrückt werden. Differenzieren und einsetzen von Formel (1) ergibt dann

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{c\tau},$$

über die Kohärenzzeit $\tau = \frac{l}{c}$ ergibt sich

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{l}.$$

Auch die Polarisation muss noch kurz betrachtet werden, denn falls das Licht polarisiert ist, entsteht nur Interferenz wenn die Lichtquellen nicht senkrecht zueinander polarisiert sind da sonst das Skalarprodukt

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

0 entspricht.

1.3 Fourier-Spektroskopie mit dem Michelson-Interferometer

Wird die gemessene Lichtintensität in Abhängigkeit von der Spiegelverschiebung $L(x)$ fouriertransformiert ist es möglich die spektrale Verteilung der Lichtquelle zu bestimmen. Nach dem Fourierschen Theorem gilt

$$G(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(x) e^{ikx} dx$$

mit der Wellenzahl k und der zugehörigen Intensität $G(k)$. Es wird also eine möglichst große Spiegelverschiebung gemessen und dann die Fouriertransformation numerisch berechnet. Das einzige Limit dieser Methode ist die Messgenauigkeit des Interferometers und die Rechenleistung des Computers.

1.4 Prinzipieller Aufbau des Michelson-Interferometers

Generell sind Interferometer Geräte die mittels Interferenzeffekten optische Größen messen.

Im Michelson Interferometer wird Interferenz dadurch ermöglicht, dass ein Lichtstrahl in mindestens zwei Teilbündel aufgeteilt wird und anschließend wieder zusammen geführt wird, nach dem einer der Teilstrahlen verändert wurde.

Die Aufteilung geschieht hier wie in Abbildung(2) zu sehen ist durch eine semipermeable Platte.

Die Teilbündel werden denn an den Spiegel S_1 und S_2 wieder auf die semipermeable Platte P reflektiert. Von dort werden dann Teile des Lichts auf den Lichtdetektor geleitet. Falls der Wegunterschied nicht größer als die Kohärenzlänge ist, sind die beiden Lichtstrahlen auch kohärent. Um das zu ermöglichen wird auf der Seite des S_2 Spiegels eine

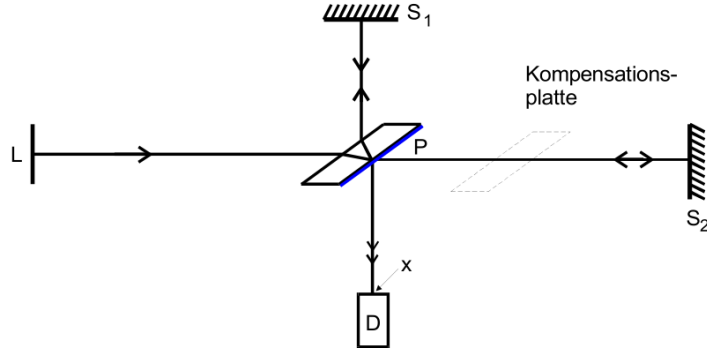


Abbildung 2: Schematischer Aufbau des Michelson-Interferometers (L = Lichtquelle, S₁ und S₂ Spiegel, P = semipermeabler Spiegel, D = Lichtdetektor)[10].

Kompensationsplatte in den Weg des Lichtstrahls gestellt um die Diskrepanz an der semipermeablen Platten auszugleichen. Ist nun also $\overline{S_1 P}$ gleich $\overline{S_2 P}$ entsteht eine destruktive Interferenz aufgrund des $\lambda/2$ Wegunterschied des Phasensprungs, welcher an dem P Spiegel bei der zweiten Reflektion entsteht.

Wird jetzt aber ein Spiegel um die Länge d verschoben, entsteht zwischen den beiden Lichtstrahlen ein Wegunterschied von $w = 2d$, wodurch sich das Interferenzverhalten ändert. Diese Verschiebung lässt sich mit den Formeln der elektrischen Feldstärke der einzelnen Wellen beschreiben. Diese sind

$$\vec{E}_1(x) = \vec{E}_0 e^{ikx} \quad \text{und} \quad \vec{E}_2(x) = \vec{E}_0 e^{ikx+2d+\pi},$$

und mit

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

folgt

$$\begin{aligned} I(d) &= \vec{E}_0^2 \left(e^{ikx} + e^{ik(x+2d+\pi)} \right) \left(e^{-ikx} + e^{-ik(x+2d+\pi)} \right) \\ &= 2 \cdot \vec{E}_0^2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} 2d + \pi \right) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Somit schwankt $I(d)$ periodisch zwischen 0 und einem Maximum wenn d verändert wird. Es lässt sich also hiermit mittels der Verschiebung Δd und der Anzahl der Maxima z über

$$\Delta d = z \cdot \frac{\lambda}{2}$$

die Wellenlänge bestimmen.

Des Weiteren lässt sich innerhalb des Interferometers ein Weglängenunterschied generieren in dem ein Medium mit einem anderen Brechungsindex in den Strahlengang geführt wird. Skizziert ist dies in Abbildung(3).

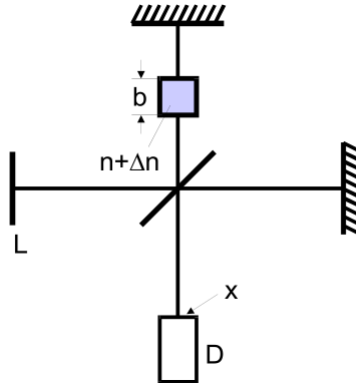


Abbildung 3: Prinzipieller Versuchsaufbau zur Messung von Brechungsindexen mit Hilfe des Michelson-Interferometers [10].

Nun durchläuft das Licht ein Medium mit dem Brechungsindex $n + \Delta n$ und der Breite b . Wird b ausgedehnt laufen dann nach der Formel

$$b \cdot \Delta n = \frac{z\lambda}{2}$$

z Maxima über den Sensor. Weiterhin gilt nach der klassischen Dispersionstheorie, dass sich der Brechungsindex nach

$$n = \sqrt{1 + f(\lambda)N}$$

aus der Anzahl der Dipole pro Volumeneinheit die durch die Wellenlänge angeregt werden, berechnen lässt. Die hier benutzten Gase werden durch die Ideale Gasgleichung

$$N(r, T) = \frac{p}{T} \frac{T_0}{p_0} N_L$$

beschrieben, da im Bereich von 0 bis 1 Bar gemessen wird. Die Differenz berechnet sich somit nach $\Delta n(p, p') = \frac{f}{2}(N(p, T) - N(p', T))$ und unter Normalbedingungen ist

$$n(p_0, T_0) = 1 + \Delta n(p, p') \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p - p'}.$$

Hiermit kann nun der Brechungsindex mittels

$$n = 1 + z \cdot \frac{\lambda}{2b} \cdot \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p - p'}$$

berechnet werden.

2 Durchführung

Die Messapparatur wird nach Abbildung(4) aufgebaut und zusätzlich der Raum verdunkelt um keine falschen Signale an den optischen Sensor zu senden.

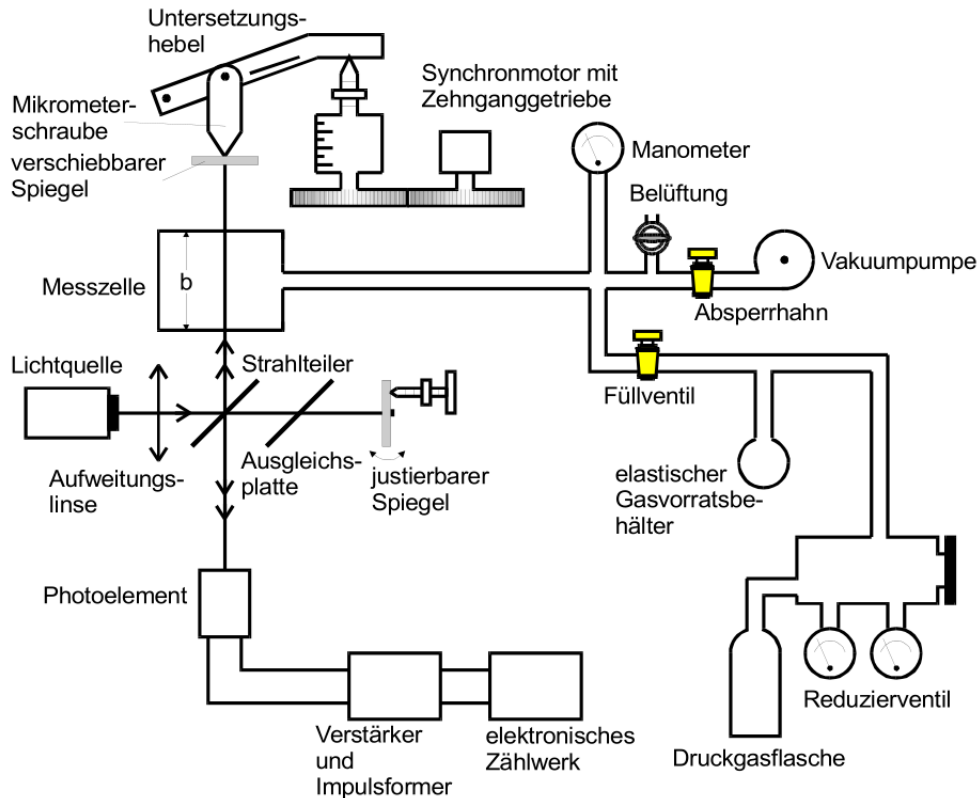


Abbildung 4: Der schematische Aufbau der Messapparatur[10].

Zusätzlich muss das Interferometer noch justiert werden.

Dazu wird der eine Spiegel erst grob verschoben so, dass die Maxima übereinander liegen. Danach wird der Spiegel noch nach dem Einschieben einer Streulinse feinjustiert um ein möglichst klares Interferenzmuster zu erzeugen. Dieses Interferenzbild innerhalb des Maximums sollte nun genau in den Detektor fallen.

2.1 Bestimmung der Wellenlänge

Zur Bestimmung der Wellenlänge des Lasers wird ein Spiegel mittels einer Mikrometerschraube immer um 5mm verschoben. Um sicherzustellen, dass wirklich genau 5mm vermessen wurden wird auf dem Rückweg von 5,5mm bis 0,5mm gemessen.

Um die durchlaufenen Maxima zu zählen wird eine Photozelle, welche an einem Zählgerät angeschlossen ist, genutzt.

Die Mikrometerschraube sollte bei Messdurchläufen nur auf normaler einfacher Geschwindigkeit laufen, damit die Photozelle keine Maxima verpasst. Es werden nun acht

Messreihen aufgenommen bei denen die Mikrometerschraube insgesamt 4 mal hin und zurück fährt.

Dabei wird jeweils die Anzahl der Maxima abgelsen und zurückgesetzt. Aus diesen Werten lässt sich nun die Wellenlänge des Lasers berechnen.

2.2 Bestimmung des Brechungsindex

Für die Bestimmung des Brechungsindex von Luft wird der Versuchsaufbau nicht geändert. Jetzt wird jedoch nicht mehr die Position des Spiegels geändert sondern der Druck innerhalb einer mit Luft gefüllten Messkammer.

Es werden also wieder die durchlaufenen Maxima gezählt während durch eine per Hand betriebene Vakuumpumpe der Druck innerhalb der Messkammer um 600 mmHg geändert wird. Hier werden die Maxima beim Reduzieren des Drucks und beim Wiederherstellen des Drucks gemessen. Hierbei ist zu beachten, dass die Messungen während die Apparatur unter Druck steht, relativ schnell abgelesen werden muss um Fehler durch undichte Stellen zu minimieren. Diese Messung wird insgesamt fünf mal wiederholt.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der Wellenlänge des Laserlichts

Im ersten Teil des Versuches wurden Messwerte aufgenommen mit denen die Wellenlänge des vom Laser abgestrahlten Lichts bestimmt werden soll.

Bei der Messung wurde dabei einer der Spiegel der Arme des Interferometers mit Hilfe eines feinen Motors um die Länge $l = (5 \pm 00\,002)$ mm verschoben.

Dies gilt für alle Messungen außer der vierten. Dort wurde um $(5,05 \pm 000,02)$ mm verschoben, was auch bei der daraus berechneten wahren Verschiebung d in den in Tabelle 1, zu sehen ist.

Die wahre Verschiebung d wird benötigt, da das Verstellrad des Spiegels keine 1:1 Übersetzung besitzt, sondern eine 1:5,056 Übersetzung.

Daraus berechnet sich d mit folgender Gleichung:

$$d = l \cdot 5.056$$

Die daraus berechneten Werte finden sich, inklusive der gemessenen Interferenzmaximaanzahl und den berechneten Wellenlängen in Tabelle 1.

Diese Wellenlängen lassen sich mit der folgenden Gleichung bestimmen:

$$\lambda = \frac{2d}{z}$$

Tabelle 1: Die Werte für die Verschiebung d des Spiegels, mit den dazu korrespondierenden gezählten Interferenzmaxima und daraus berechneten Wellenlängen inklusive Abweichung.

Die Verschiebung ist dabei auch mit einer Abweichung von 0,395 57 nm und die Anzahl der Maxima mit einer Abweichung von 40 behaftet.

d / mm	Interferenzmaximaanzahl z	λ / nm
0,99	2957	$668,870 \pm 9,052$
0,99	2950	$670,457 \pm 9,095$
0,99	2966	$666,840 \pm 8,997$
1,00	2943	$678,772 \pm 9,229$
0,99	2634	$750,891 \pm 11,407$
0,99	2936	$673,654 \pm 9,182$
0,99	2964	$667,290 \pm 9,009$
0,99	2961	$667,966 \pm 9,027$

Gemittelt ergibt sich hieraus ein Wert für die Wellenlänge von $\lambda = (680,593 \pm 26,831)$ nm.

3.2 Bestimmung des Brechungsindex von Luft

Im Folgenden soll nun der Brechungsindex von Luft untersucht werden.

Die beim Herauspumpen und beim wieder hereinlassen der Luft der Messzelle gemessenen

Anzahlen der Intensitätsmaxima sind in Tabelle 2 zu finden.
Der abgeschätzte Fehler dieser Werte ist wesentlich kleiner als 1, weswegen er für die weiteren Rechnungen nicht beachtet wird.

Tabelle 2: Die Messwerte für die Anzahl der Interferenzmaxima. Der abgeschätzte Fehler dabei ist kleiner als 1 und wird deswegen nicht weiter beachtet.

Interferenzmaximaanzahl für das Abpumpen	Interferenzmaximaanzahl für das Vakuum ablassen
32	50
31	20
31	39
30	30
30	26

Die Messzelle hat dabei die Länge $b = 50$ mm. Anschließend wurde der Druck innerhalb der Zelle um $\Delta p = 600$ mmHg = 7999,32 Pa verringert.

Mit diesen Werten und mit $T_0 = 273,15$ K und dem vom Laser abgelesenen Wert für die Wellenlängen $\lambda = 635$ nm, lässt sich dann Δn bestimmen.

Zusätzlich wird aber noch z benötigt, welches durch das Bestimmen des Mittelwertes aus den in Tabelle 2 aufgetragenen Messwerten zu $z = 32 \pm 8$ führt.

Mit diesen Werten lässt sich dann im Folgenden weiter rechnen.

$$\Delta n(p_0, T_0) = \frac{z\lambda}{2b} = 0,000\,20 \pm 0,000\,05$$

Aus diesem Ergebnis lässt sich dann der gesuchte Brechungsindex bestimmen.

$$n(p_0, T_0) = 1 + \Delta n(p, p') \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{\Delta p}$$

$$n(p_0, T_0) = 1,000\,28\,7$$

Dabei gilt noch zusätzlich für $p_0 = 101\,320$ Pa.

4 Diskussion

Die Versuchsdurchführung lief ohne allzu große Probleme ab. Die Messwerte 1 der ersten Messreihe, die zur Bestimmung der Wellenlänge genutzt wurden, zeigen fast alle nur kleine Abweichung voneinander.

Allerdings zeigt ein Wert eine große Abweichung und die später gemessenen Werte sind allesamt ungenauer. Dies liegt daran, dass die erzeugten Interferenzlinien nicht sehr deutlich waren, wodurch der Zähler sie nicht registriert hat. Bei den späteren Messungen musste deswegen nachjustiert werden, so dass überhaupt Interferenzlinien gemessen werden konnten.

Zusätzlich wurde einmal für eine etwas längere Spiegelstrecke die Interferenzmaxima gezählt. Da der untersuchte Vorgang allerdings linear ist sollte dies zu vernachlässigen sein.

Die obigen Gründe führen dazu, dass die Abweichung der Messwerte mit einem Wert von 40 Zählern recht hoch abgeschätzt wurde.

Das Ergebnis dieser Messreihe ist $\lambda = (680,593 \pm 26,831) \text{ nm}$. Im Vergleich mit dem vom Laser abgelesenen Theoriewert von $\lambda_{theo} = 635 \text{ nm}$ ergibt sich die relative Abweichung vom Theoriewert zu:

$$\frac{\lambda_{theo} - \lambda}{\lambda_{theo}} = (-7 \pm 4) \%$$

Dieses Ergebnis ist wenn die nicht optimale Durchführung in Betracht gezogen wird trotzdem recht gut. Dies liegt vermutlich an der langen Durchführungsdauer.

Für die zweite Messreihe, die zur Bestimmung des Brechungsindex von Luft unternommen wurde, sind die Messreihe in Tabelle 2 zu finden. Obwohl diese Werte eine halbwegs große Streuung besitzen und die Messungen die beim Pumpen aufgenommen wurden schwierig fein zu justieren waren, liefert die Auswertung ein sehr gutes Ergebnis.

Für den Brechungsindex ergibt sich dabei $n = 1,000\,28\,7$, wobei der Theoriewert $n_{theo} = 1,000\,273\,16[9]$ der Brechungsindex von Luft für λ_{theo} ist.

Für die relative Abweichung von dem Theoriewert ergibt sich damit nach der obigen Formel $(0,000 \pm 0,007) \%$.

Trotz nicht optimaler Durchführung ist diese Ergebnis also sehr gut.

Alles in allem sind die gemessenen Werte also sehr zufriedenstellend. Sie führen alle zu Ergebnissen, die nur eine recht kleine relative Abweichung von der Theorie zeigen.

5 Anhang

V 401

Heliumausstrahlung $\lambda = 668 \text{ nm}$
 $d = 1,5046$

1. 0 \rightarrow Summe Messungen

(n)	5.75 mm	3524
1	5.00 mm	2957
2	5.00 mm	2950
3	5.00 mm	2966
4	5.05 mm	2943
5	5.00 mm	2934
6	5.00 mm	2936
7	5.00 mm	2964
8	5.00 mm	2961

$V = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Druckdifferenz 600 mm Hg

1	150 - 32 ↓
2	120 - 31 ↓
3	139 - 31 ↓
4	130 - 30 ↓
5	126 - 30 ↓

Abbildung 5: Die Messwerte der Interferenzmaximaanzahl



Abbildung 6: Der Versuchsaufbau des Michelson-Interferometers

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] *Literaturwert für die Elementarladung*. 2020. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Elementarladung.html> (besucht am 05.12.2020).
- [5] *Literaturwert für die Lichtgeschwindigkeit c*. 2020. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/lichtgeschwindigkeit/9012> (besucht am 05.12.2020).
- [6] *Literaturwert für die Ruhemasse eines Elektrons*. 2020. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Elektron.html> (besucht am 05.12.2020).
- [7] *Literaturwerte für das plancksche Wirkungsquantum*. 2020. URL: https://www.chemie.de/lexikon/Plancksches_Wirkungsquantum.html (besucht am 05.12.2020).
- [8] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.

- [9] Mikhail Polyanskiy. *Literaturwerte für den Brechungsindex*. 2021. URL: <https://refractiveindex.info/?shelf=other&book=air&page=Ciddor> (besucht am 06.07.2021).
- [10] *Versuchsanleitung zu Versuch V401: "Das Michelson-Interferometer"*. Fakultät Phyik, TU Dortmund. 2021.