

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Fehlerrechnung	6
4 Durchführung	7
5 Auswertung	9
6 Diskussion	16
Literatur	16

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen die Amplitude und der effektive Dämpfungswiderstand eines gedämpften Schwingkreises untersucht werden. Zudem wird der Widerstand ermittelt, bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt. Zuletzt wird noch die Frequenzabhängigkeit der Spannung und der Phasenverschiebung bei einem von außen angeregten Schwingkreis untersucht.

2 Theorie

Ein Schwingkreis besteht aus einem Kondensator mit der Kapazität C und einer Spule mit der Induktivität L . Im Idealfall wird eine einmal eingespeicherte Energiemenge immer wieder zwischen den beiden oben genannten Energiespeichern ausgetauscht. Dies geschieht, da der Kondensator beim Entladen gemäß der Energieerhaltung in der Spule ein Magnetfeld aufbaut. Sobald dieses sich wieder abbaut, lädt sich der Kondensator erneut auf und der Vorgang wiederholt sich.

Bei einem gedämpften und damit bei jedem realen Schwingkreis ist zudem noch ein ohmscher Widerstand R vorhanden. Über diesen Widerstand wird laufend Energie in Wärme umgewandelt und entsprechend aus dem Schwingkreis entfernt. Damit ist R als Dämpfungsfaktor anzusehen. Ein schematischer Aufbau eines RCL -Schwingkreises ist in Abbildung 1 zu sehen.

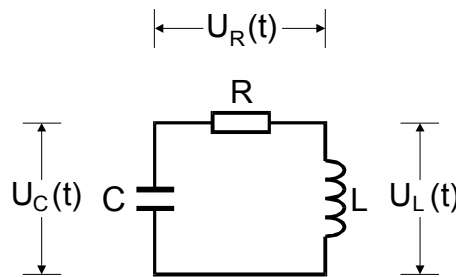


Abbildung 1: Schematische Darstellung eines RCL -Kreises[2, S. 284].

Die eingezeichneten Spannungen U_R , U_C und U_L sind die Spannungen, die über die entsprechenden Bauteile abfallen. Entsprechend des 2. Kirchhoffschen Gesetzes addieren sich diese zu Null auf:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0. \quad (1)$$

Werden die Spannungen durch den Strom I ausgedrückt:

$$\begin{aligned} U_R(t) &= RI(t) \\ U_C(t) &= \frac{Q(t)}{C} \quad \text{mit} \quad I = \dot{Q} \\ U_L(t) &= L\dot{I}, \end{aligned}$$

so ergibt sich nach Umformungen eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{LC}I(t) = 0. \quad (2)$$

Diese Differentialgleichung hat folgende Lösung:

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (A_1 e^{i2\pi\nu t} + A_2 e^{-i2\pi\nu t}), \quad (3)$$

wobei die Abkürzungen

$$\mu := \frac{R}{4\pi L} \quad (4)$$

$$\text{und} \quad \nu := \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (5)$$

verwendet wurden.

Hier müssen jetzt zwei Fälle unterschieden werden: Zum Einen, dass ν reell ist, und zum Anderen, dass es imaginär ist. Im reellen Fall gilt also:

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}.$$

Ist dies erfüllt, so lässt sich (3) mit der Eulerschen Formel zu:

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta) \quad (6)$$

umschreiben. Daran ist zu erkennen, dass unter der genannten Bedingung eine gedämpfte Schwingung ausgeführt wird, die bei $t \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Diese hat die definierte Abklingdauer:

$$T_{\text{ex}} := \frac{1}{2\pi\mu}. \quad (7)$$

In dem Fall, dass ν imaginär ist, also:

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$$

gilt, kann (3) zu:

$$I(t) \propto e^{-(2\pi\mu - i2\pi\nu)t} \quad (8)$$

umgeschrieben werden. Da sich dabei das i mit dem imaginären ν zu einem insgesamt reellen Exponenten verrechnet, fällt die Amplitude des Stroms exponentiell ab. Diese hat, abhängig von den Anfangsbedingungen, einen oder keinen Extremwert. In dem Spezialfall:

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{\text{ap}}^2}{4L^2}, \quad \Rightarrow \nu = 0 \quad (9)$$

ist der Exponent weiterhin reell. Die Amplitude des Stroms fällt hier am schnellsten gegen Null ab, ohne dabei über zu schwingen. Dieser Fall wird aperiodischer Grenzfall genannt.

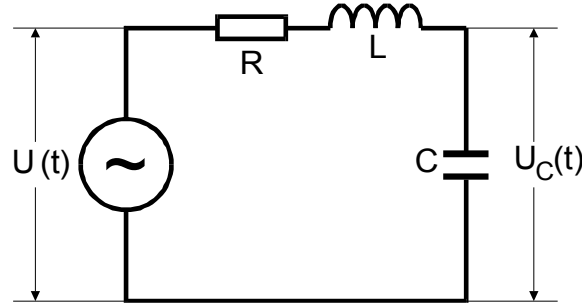


Abbildung 2: Schematische Darstellung eines angeregten RCL -Kreises[2, S. 289].

In diesem Versuch wird zusätzlich auch ein von außen angeregter RCL -Schwingkreis betrachtet. Dabei wird eine Wechselstromquelle mit eingebaut, ein schematischer Aufbau ist in Abbildung 2 zu sehen. Nach einer kurzen Einschwingzeit nimmt der Schwingkreis die Frequenz der Wechselstromquelle an. Die anfangs aufgestellte Differentialgleichung (2) ist nun inhomogen und lautet:

$$LC\ddot{U}_C(t) + RC\dot{U}_C(t) + U_C(t) = U_0 e^{i\omega t}. \quad (10)$$

Daraus ergibt sich die Lösung für die Spannung in Abhängigkeit von der Zeit:

$$U(t) = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}. \quad (11)$$

Durch den Vergleich von Imaginär- und Realteil ergibt sich für die Phasenverschiebung zur Erregerspannung:

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(U)}{\text{Re}(U)}\right) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right). \quad (12)$$

An dieser Gleichung lässt sich erkennen, dass bei den Frequenzen ϕ_1 und ϕ_2 , bei denen die Phasenverschiebung die Werte $\frac{\pi}{4}$ beziehungsweise $\frac{3\pi}{4}$ hat, gilt:

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}. \quad (13)$$

Zusätzlich kann die Spannung auch in Abhängigkeit von der Frequenz ω angegeben werden:

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (14)$$

Hier zeigt sich, dass die Amplitude der Spannung bei sehr hohen Frequenzen gegen Null und bei kleinen Frequenzen gegen U_0 strebt. Zusätzlich gibt es eine Resonanzfrequenz:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}, \quad (15)$$

bei der U_C einen Maximalwert erreicht, welcher auch höher als U_0 sein kann.

Gilt

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC},$$

so wird von schwacher Dämpfung gesprochen. Unter dieser Voraussetzung gilt $\omega_{\text{res}} \approx \omega_0$, wobei ω_0 die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung ist. Dabei hat ω_0 den Wert:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (16)$$

Das Maximum der Spannung am Kondensator ist dann um den Faktor:

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (17)$$

größer als die Erregerspannung. Diesen Faktor wird als Güte des Schwingkreises bezeichnet. Eine weitere wichtige Größe in diesem Zusammenhang ist die Breite der Resonanzkurve, die durch (14) beschrieben wird. Sie ist durch die Differenz der beiden Frequenzen definiert, bei denen die zugehörige Kondensatorspannung um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ abgefallen ist. Wird zusätzlich die Näherung

$$\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$$

verwendet, so ergibt sich eine Formel für die Berechnung der Breite durch:

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}. \quad (18)$$

3 Fehlerrechnung

Im Folgenden werden alle Mittelwerte mit folgender Formel bestimmt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (19)$$

Der zugehörige Fehler des Mittelwertes berechnet sich mit

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (20)$$

Werden fehlerbehaftete Größen in einer späteren Formel benutzt, so wird der neue Fehler mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung angegeben:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \quad (21)$$

Eventuelle Ausgleichsgeraden berechnen sich über

$$y = a \cdot x + b \quad (22a)$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (22b)$$

$$b = \frac{\overline{x^2 y} - \bar{x} \bar{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (22c)$$

Die Regression sowohl von Ausgleichsgeraden als auch von anderen Polynomen, sowie die Bestimmung der zugehörigen Fehler, wird mit iPython 2.1.0 durchgeführt.

4 Durchführung

Zunächst werden die angegebenen Werte für die einzelnen Bauteile notiert.

Zur Bestimmung der Abklingdauer T_{ex} und des effektiven Dämpfungswiderstandes R_{eff} , wird die Amplitudenabnahme eines RCL -Schwingkreises untersucht. Dazu wird die in Abbildung 3 dargestellte Schaltung aufgebaut. Der Nadelimpulsgenerator wird so

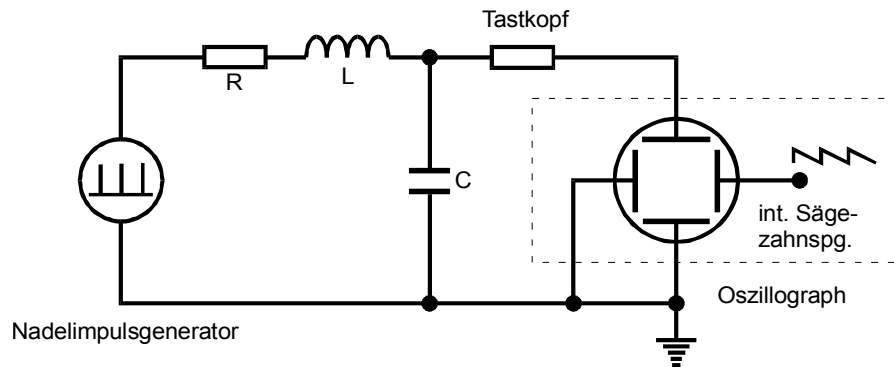


Abbildung 3: Aufbau eines RCL -Schwingkreises zur Untersuchung der Spannung am Kondensator[2, S. 294].

eingestellt, dass die Spannungsamplitude U_C am Kondensator etwa um den Faktor 3 bis 8 abnimmt. Die Spannung wird am Oszilloskop gegen die Zeit abgetragen und auf den Abfall des Nadelimpulses getriggert. Von dem angezeigten Bild wird ein Thermodruck angefertigt und die Spannungsamplituden werden mit der zugehörigen Zeitdifferenz t zum Nadelimpuls notiert. Dazu wird die Cursorfunktion des Oszilloskopes genutzt. Dabei sollten etwa 15 Messwertepaare notiert werden.

Zur Messung des Widerstandes R_{ap} , bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt, wird fast die gleiche Schaltung wie zuvor verwendet. Lediglich der Widerstand R wird mit einem variablen Widerstand ausgetauscht. Dieser ist zu Anfang der Messung auf seinen Maximalwert eingestellt. Am Oszilloskop wird erneut der Spannungsverlauf am Kondensator betrachtet. Zunächst sollte sich ein typisches Bild für einen Relaxationsvorgang, also ein stetiges Abfallen der Spannung, zeigen. Der Widerstand wird jetzt kontinuierlich

verringert, bis ein Überspringen der Spannung zu sehen ist. An diesem Punkt ist bereits der Schwingfall eingetreten und der Widerstand muss wieder erhöht werden, bis dieses Phänomen gerade eben wieder verschwindet. Der nun eingestellte Widerstand wird als R_{ap} notiert.

Um die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung zu untersuchen, wird die in Abbildung 4 zu sehende Schaltung aufgebaut. Zunächst wird die Erregerspannung

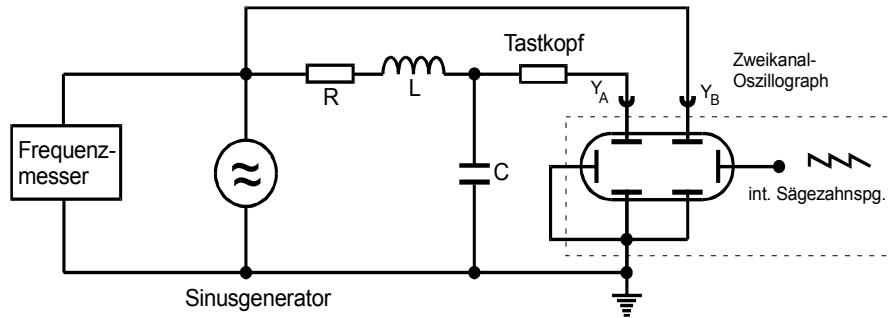


Abbildung 4: Aufbau eines von außen angeregten RCL -Schwingkreises zur Untersuchung der Kondensatorspannung[2, S. 295].

U gemessen, danach wird der Ausgang nicht mehr benötigt und zur besseren Ablesbarkeit deaktiviert. Daraufhin wird die Frequenz ν am Sinusgenerator im Bereich von (100–100 000) Hz variiert. Es werden etwa 15 zusammengehörige Datenpaare aus Spannung und Frequenz notiert. Da in der späteren Auswertung der Bereich um die Resonanzfrequenz genauer betrachtet werden soll, wird der Bereich $\pm 10\,000$ Hz um das Spannungsmaximum erneut mit 1000 Hz Frequenzschritten gemessen.

Zuletzt wird die Phasenverschiebung ϕ zwischen Kondensatorspannung U_C und Erregerspannung U in Abhängigkeit von der Frequenz ν ermittelt. Dazu wird der obige Aufbau erneut verwendet. Nun werden beide Spannungsverläufe übereinander angezeigt, es sollte sich ein Bild wie in Abbildung 5 zeigen. Die Frequenz wird mit den gleichen Werten wie zuvor nacheinander eingestellt. Es wird jeweils der zugehörige Abstand a der Nulldurchgänge gemessen und notiert. Die Periodenlänge b lässt sich über die eingestellte Frequenz berechnen und muss nicht ausgemessen werden.

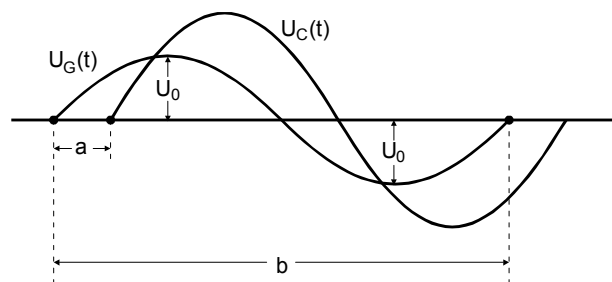


Abbildung 5: Schematische Darstellung des am Oszilloskop zu sehenden Bildes[1, S. 282].

5 Auswertung

Die notierten Werte lauten:

$$\begin{aligned} L &= (16,78 \pm 0,09) \cdot 10^{-3} \text{ H} \\ C &= (2,066 \pm 0,006) \cdot 10^{-9} \text{ F} \\ R_1 &= (67,2 \pm 0,2) \Omega \\ R_2 &= (682 \pm 1) \Omega. \end{aligned}$$

Die gemessenen Daten der Spannungsamplituden U_C und die zugehörigen Zeiten t befinden sich in Tabelle 1. Der angefertigte Thermodruck des Abklingvorganges sowie

Tabelle 1: Messdaten zur Bestimmung der Abklingdauer und des Dämpfungswiderstandes.

U_C / V	$t / 10^{-6} \text{ s}$
37,40	36,00
33,30	72,00
30,40	112,0
26,30	148,0
22,60	188,0
20,00	224,0
16,10	264,0
14,80	300,0
12,00	336,0
10,70	376,0
8,84	412,0
7,80	452,0
6,76	488,0
5,20	528,0
4,68	564,0

die eingezeichnete Einhüllende ist in Abbildung 6 zu sehen. Die Form der Einhüllenden ist, da $U(t) \propto I(t)$ gilt, nach (6) gegeben durch:

$$A = A_0 e^{-2\pi\mu t}. \quad (23)$$

Mit der Ausgleichsrechnung ergeben sich die Werte:

$$\begin{aligned} A_0 &= (44,3 \pm 0,7) \text{ V} \\ \mu &= (598 \pm 14) \frac{1}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich nach (4) und (7) die Werte für den Effektivwiderstand R_{eff} und die

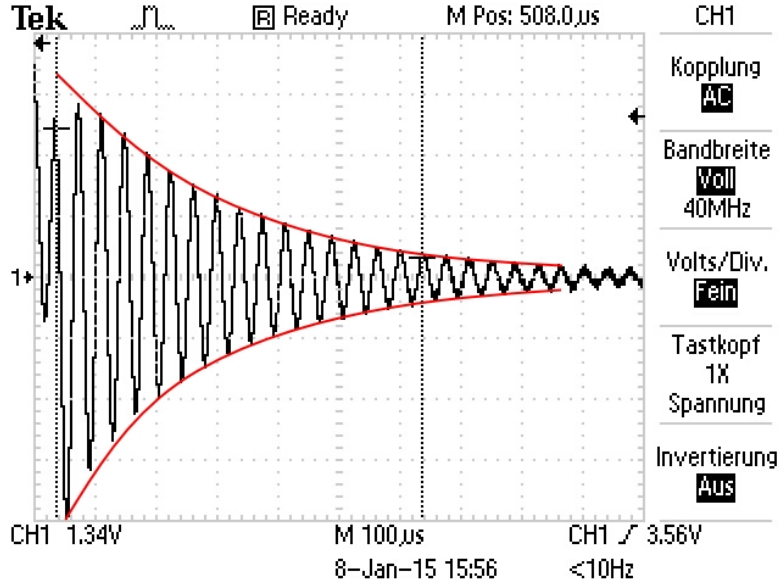


Abbildung 6: Abklingvorgang des gedämpften RCL -Schwingkreises.

Abklingdauer T_{ex} :

$$R_{\text{eff}} = (126 \pm 3) \, \Omega$$

$$T_{\text{ex}} = (266 \pm 6) \cdot 10^{-6} \, \text{s}.$$

Der in die Schaltung verbaute Widerstand $R = (67,2 \pm 0,2) \, \Omega$ weicht um $58,8 \, \Omega$ ab. Dies lässt sich durch den bisher nicht betrachteten Generatorinnenwiderstand von $50 \, \Omega$ erklären. Entsprechend wird dieser nun bei allen weiteren Rechnungen mitbeachtet. Die restliche Differenz lässt sich durch eine gewisse Fehlertoleranz erklären.

Der gemessene Wert für den Widerstand R_{ap} , bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt, beträgt $4,80 \cdot 10^3 \, \Omega$. Verglichen mit dem durch (9) berechneten Wert von $(5,700 \pm 0,017) \cdot 10^3 \, \Omega$, zeigt sich eine Differenz von $1,1 \cdot 10^3 \, \Omega$. Dieses ist zum Einen dadurch zu erklären, dass die restlichen Bauteile, vor allem die Spule, ebenfalls in der Theorie nicht beachtete Widerstände haben. Zum Anderen konnte ein genaues Einstellen nicht erfüllt werden, da im Bereich um den Grenzwiderstand keine wesentlichen Änderungen am Spannungsverlauf zu erkennen waren.

Die gemessenen Daten zur Bestimmung der Resonanzüberhöhung q , sowie der Breite der Resonanzkurve $\nu_+ - \nu_-$ befinden sich in Tabelle 2. Die Erregerspannung U beträgt dabei $180 \cdot 10^{-3} \, \text{V}$. Das Verhältnis $\frac{U_C}{U}$ wird gegen ν in einem halblogarithmischen Diagramm, zu sehen in Abbildung 7, abgetragen. Der Maximalwert q_{exp} wird aus dem Graphen als Güte abgelesen. Wird der theoretische Wert für die Güte nach (17) bestimmt,

Tabelle 2: Messdaten zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung.

$U_C / 10^{-3} \text{ V}$	$\frac{U_C}{U}$	$\nu / 10^3 \text{ Hz}$
176	0,98	0,1000
176	0,98	0,2000
176	0,98	0,3000
180	1,00	0,5000
188	1,04	0,800
198	1,10	1,000
246	1,37	2,000
298	1,66	3,000
388	2,16	5,000
476	2,64	8,00
512	2,84	10,00
680	3,78	15,00
784	4,36	17,00
848	4,71	18,00
928	5,16	19,00
1020	5,67	20,00
1140	6,33	21,00
1280	7,11	22,00
1450	8,06	23,00
1640	9,11	24,00
1800	10,00	25,00
1880	10,44	26,00
1820	10,11	27,00
1640	9,11	28,00
1400	7,78	29,00
1180	6,56	30,00
1020	5,67	31,00
880	4,89	32,00
764	4,24	33,00
672	3,73	34,00
592	3,29	35,00
532	2,96	36,00
480	2,67	37,00
184	1,02	50,00
56,0	0,31	80,0
31,2	0,17	100,0

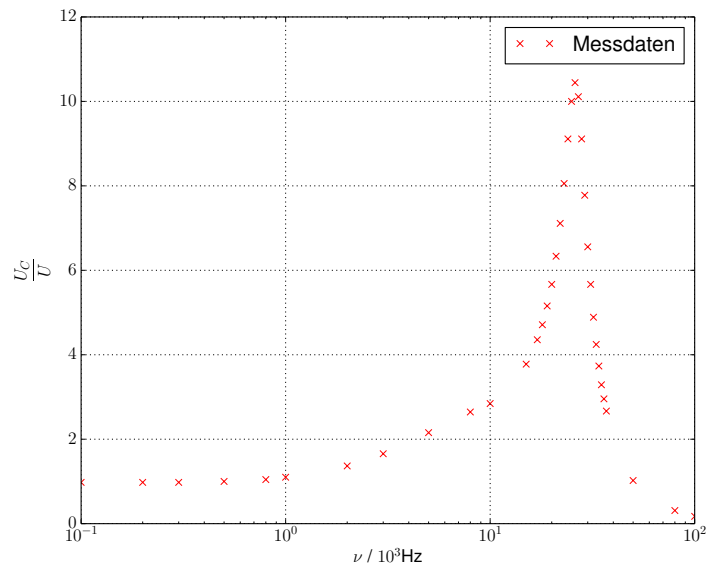


Abbildung 7: Halblogarithmische Darstellung der normierten Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.

so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 q_{\text{exp}} &= 10,44 \\
 q_{\text{theo}} &= 4,179 \pm 0,013 \\
 \text{relative Abweichung: } \frac{q_{\text{exp}} - q_{\text{theo}}}{q_{\text{theo}}} &= 150 \%.
 \end{aligned}$$

Um die Breite der Resonanzkurve bestimmen zu können, wird der Frequenzbereich um das Maximum nun linear dargestellt. Das Ergebnis ist in Abbildung 8 zu sehen. Aus dieser wird die Breite der Resonanzkurve abgelesen und die Werte werden mit den nach (18) theoretisch berechneten Werten verglichen:

$$\begin{aligned}
 \text{Experimentell: } \nu_+ - \nu_- &= 6,9 \cdot 10^3 \text{ Hz} \\
 \text{Theoretisch: } \nu_+ - \nu_- &= (6,47 \pm 0,04) \cdot 10^3 \text{ Hz} \\
 \text{relative Abweichung: } &= 6,6 \%.
 \end{aligned}$$

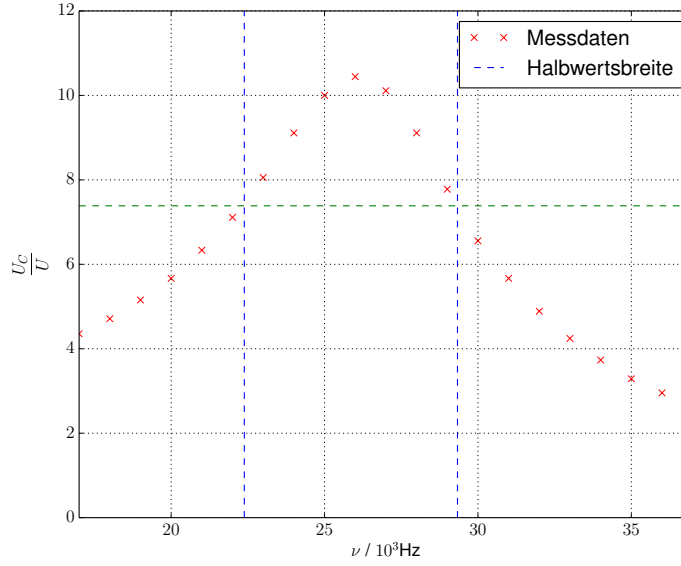


Abbildung 8: Lineare Darstellung der normierten Kondensatorsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.

Die Messdaten, um die Werte für die Resonanzfrequenz ν_{res} , sowie für die Frequenzen ν_1 beziehungsweise ν_2 , an denen die Phase $\frac{\pi}{4}$ beziehungsweise $\frac{3\pi}{4}$ beträgt, berechnen zu können, befinden sich in Tabelle 3. Die Phase ϕ wird in Abbildung 9 halblogarithmisch gegen die Frequenz ν abgetragen. Bis auf den Bereich bis einschließlich $10 \cdot 10^3 \text{ Hz}$, ist der erwartete Verlauf des Graphen zu sehen. Die Abweichungen in diesem niedrigen Frequenzbereich sind im weiteren Auswertungsteil nicht weiter relevant und sind auf baubedingte Randerscheinungen zurückzuführen. Der Bereich um die Resonanzfrequenz wird, wie in Abbildung 10 erkennbar, zur besseren Ablesbarkeit linear dargestellt. ν_{res} wird nach (15) und ν_1 und ν_2 werden nach (13) errechnet und mit den abgelesenen Werten verglichen:

$$\nu_{\text{res, exp}} = 24,2 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$\nu_{\text{res, theo}} = (26,58 \pm 0,08) \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$\text{relative Abweichung: } 9,0 \%$$

$$\nu_{1, \text{exp}} = 26,9 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$\nu_{1, \text{theo}} = (23,78 \pm 0,07) \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$\text{relative Abweichung: } 13,1 \%$$

$$\nu_{2, \text{exp}} = 30,5 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$\nu_{2, \text{theo}} = (30,72 \pm 0,10) \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$\text{relative Abweichung: } 0,7 \%$$

Tabelle 3: Messdaten zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung.

$a / 10^{-6} \text{ s}$	$\nu / 10^3 \text{ Hz}$	$\phi / \text{ rad}$
-42,00	0,1000	-0,026
38,00	0,2000	0,048
50,00	0,3000	0,094
48,00	0,5000	0,151
52,00	0,800	0,261
50,00	1,000	0,314
35,00	2,000	0,440
25,00	3,000	0,471
12,40	5,000	0,390
6,000	8,00	0,302
3,200	10,00	0,201
0,1000	15,00	0,009
0,7200	17,00	0,077
1,120	18,00	0,127
1,520	19,00	0,181
2,000	20,00	0,251
2,500	21,00	0,330
3,140	22,00	0,434
3,960	23,00	0,572
5,040	24,00	0,760
6,360	25,00	0,999
8,000	26,00	1,307
9,500	27,00	1,612
10,70	28,00	1,882
11,60	29,00	2,114
12,00	30,00	2,262
12,30	31,00	2,396
12,40	32,00	2,493
12,30	33,00	2,550
12,30	34,00	2,628
12,10	35,00	2,661
11,90	36,00	2,692
11,80	37,00	2,743
9,300	50,00	2,922
6,080	80,0	3,056
4,880	100,0	3,066

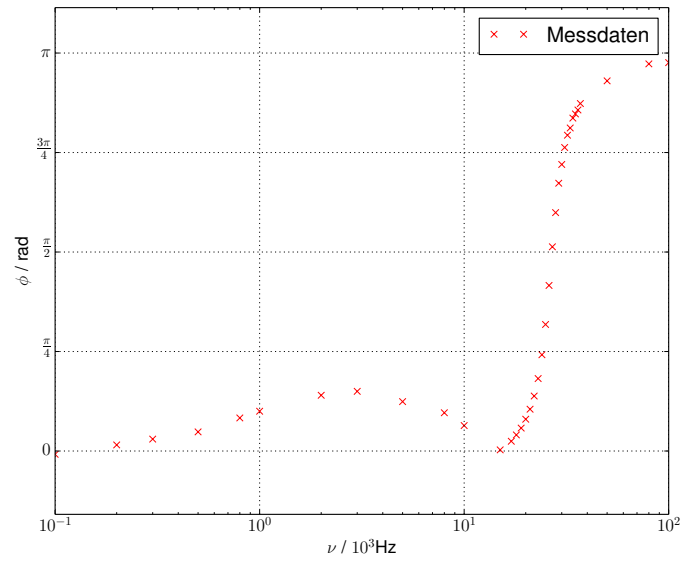


Abbildung 9: Halblogarithmische Darstellung der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Erregerspannung.

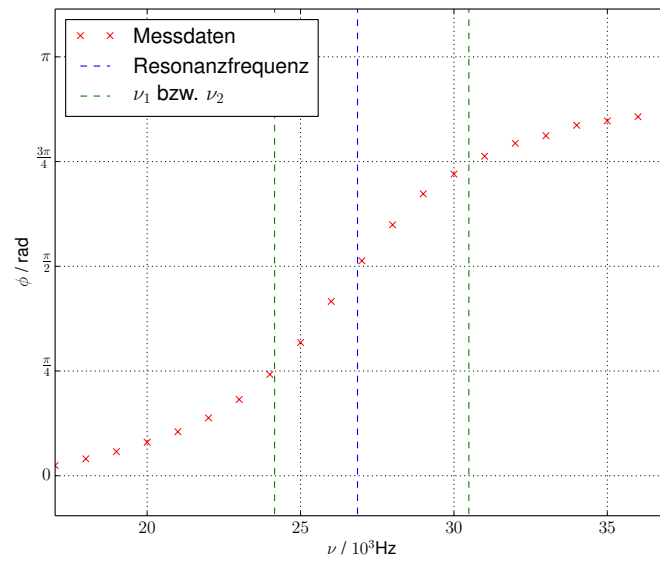


Abbildung 10: Lineare Darstellung der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Erregerspannung.

6 Diskussion

Abgesehen von der Güte q liegen alle anderen Messgrößen im Toleranzbereich. Dieser Fehler ist allerdings zu groß, um sich durch nicht beachtete Innenwiderstände erklären zu lassen. Es ist zu vermuten, dass systematische Fehler vorliegen und unsere Werte dementsprechend nicht dazu geeignet sind, um die Güte zu bestimmen. Bei diesem Fehler ist allerdings zu beachten, dass die gemessene Spannung bei $\nu \rightarrow 0$ und bei $\nu \rightarrow \infty$ den erwarteten Verlauf sehr gut aufzeigt.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 353, Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 18. Dez. 2014. eprint: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf>.
- [2] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 354, Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 9. Jan. 2015. eprint: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf>.