V106 Gekoppelte Pendel

Ziel: Es sollen die Schwingungsdauern und die Schwebungsdauer von gekoppelten Pendeln bei gleichsinniger-, gegensinniger- und gekoppelter Schwingung bestimmt werden

Stichworte: Drehmoment, Eigenschwingung, Energieerhaltung, Fadenpendel, gekoppelte Schwingung, harmonischer Oszillator, Hooksche Gesetz, Kleinwinkelnäherung, Kopplungsgrad, rücktreibende Kraft, Schwebung, Schwingungsdauer, Trägheitsmoment

Theoretische Grundlagen

Betrachtet wird zuerst ein einzelnes Fadenpendel mit Fadenlänge l und Masse m mit reibungsfreier Aufhängung. Wird das Pendel ausgelenkt, so wirkt die Gewichtskraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ der Bewegung entgegen und es wird ein Drehmoment $M = D_p \cdot \phi$ auf das Pendel ausgeübt mit ϕ den Auslenkwinkel und D_p die Winkelrichtgröße des Pendels. Für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage ($\sin\psi \approx \psi$) lautet die Bewegungsgleichung des Pendels

$$J \cdot \ddot{\phi} + D_p \phi = 0 \tag{1}$$

mit J dem Trägheitsmoment des Pendels. Die Lösung der Bewegungsgleichung beschreibt eine *harmonische Schwingung* mit der *Schwingungsfrequenz*

$$\omega = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad . \tag{2}$$

Die Schwingungdauer eines Fadenpendels ist also bei kleinen Auslenkwinkeln unabhängig von der Pendelmasse und dem Auslenkwinkel.

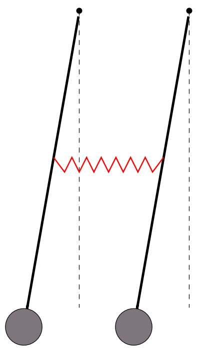
Werden zwei identische Pendel durch eine Feder gekoppelt, so wirkt auf jedes Pendel ein zusätzliches Drehmoment $M_1 = D_F\ (\phi_2 - \phi_1)$ bzw $M_2 = D_F\ (\phi_1 - \phi_2)$. Die Pendel schwingen nicht mehr unabhängig voneinander. Die Bewegung läßt sich durch ein System gekoppelter Differentialgleichungen

$$J\ \ddot{\phi}_1 + D\ \phi_1 = D_F\ (\phi_2 - \phi_1) \tag{3}$$
$$J\ \ddot{\phi}_2 + D\ \phi_2 = D_F\ (\phi_1 - \phi_2) \tag{4}$$

beschreiben bei dem die linke Seite der Gleichungen die Schwingung des einzelnen Pendels beschreibt, während die rechte Seite die Kopplung der Feder berücksichtigt. Durch eine geeignete Wahl der Winkel lassen sich die Schwingungsgleichungen entkoppeln und als eine Überlagerung zweier Eigenschwingungen darstellen. Die Lösungen der unabhängigen Differentialgleichungen sind wieder harmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω_1 und ω_2. Die Auslenkwinkel α_1 und α_2

Je nach Anfangsbedingung $\alpha(t = 0)$ und $\dot{\alpha}(t = 0)$ werden verschiedene Schwingungsarten unterschieden.

- **Gleichsinnige Schwingung:** $\alpha_1 = \alpha_2$
  Im Fall der gleichsinnigen Schwingung werden zwei identische Pendel um den gleichen Winkel $\alpha_1 = \alpha_2$ ausgelenkt. Die Kopplungsfeder übt keine Kraft auf die Pendel aus, die Feder könnte entfernt werden, da die rücktreibende Kraft nur durch die Gravitation verursacht wird. Die Schwingungsfrequenz

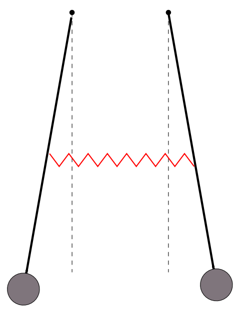


$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{5}$$

  der gleichsinnigen Schwingungist identisch mit den Eigenfrequenzen der einzelnen Pendel. Die Schwingungsdauer T_+ der gleichsinnigen Schwingung ergibt sich dann zu

$$T_+ = 2\ \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{6}$$

- **Gegensinnige Schwingung:** $\alpha_1 = -\alpha_2$
  Im Fall der gegensinnigen Schwingung werden zwei identische Pendel um den entgegengesetzten Winkel $\alpha_1 = -\alpha_2$ ausgelenkt. Die Kopplungsfeder übt eine gleich große aber entgegengesetzte Kraft auf die einzelnen Pendel aus. Hierdurch entsteht eine symmetrische Schwingung mit der Schwingungsfrequenz



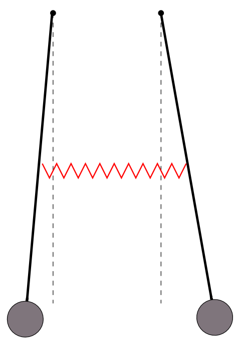
$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2\ K}{l}} \tag{7}$$

  und der Schwingungsdauer

$$T_- = 2\ \pi \sqrt{\frac{l}{g + 2\ K}} \quad . \tag{8}$$

  Hierbei ist K die Kopplungskonstante der Feder.

- **Gekoppelte Schwingung:** $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0$
  Im Fall der gekoppelten Schwingung befindet sich ein Pendel in Ruhe $\alpha_1 = 0$, während das andere Pendel um einen Winkel $\alpha_2 \neq 0$ ausgelenkt wird. Wird das zweite Pendel losgelassen, fängt es an zu schwingen und überträgt seine Energie an das erste Pendel. Das letztere Pendel fängt langsam an zu schwingen, wobei die Amplitude zunimmt. Sie erreicht ihr Maximum, wenn das zweite Pendel vollständig zur Ruhe gekommen ist. Dieser Vorgang der vollständigen Energieübertragung wiederholt sich immer wieder. Die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels wird *Schwebung* genannt.
  Die Schwebungsdauer T_S und Schwebungsfrequenz ω_S



$$T_S = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \qquad \text{und} \qquad \omega_S = \omega_+ - \omega_- \tag{9}$$

wird durch die Schwingungsdauer T_+ der gleichsinnigen und T_- der gegensinnigen Schwingung bestimmt. Als Maß für die Kopplung der beiden Fadenpendel wird die *Kopplungskonstante K*

$$K = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} \tag{10}$$

definiert.

Vorbereitung

- Wann spricht man von einer harmonischen Schwingung?
- Wie weit kann man ein Fadenpendel mit einer Pendellänge von $l = 70$cm auslenken, damit die Kleinwinkelnäherung noch gilt?

Aufgaben

- Bestimmen Sie die Schwingungsdauern T_1 und T_2 der beiden frei schwingenden Pendel.
- Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T_+ für eine gleichphasige Schwingung für mindestens zwei Pendellängen.
- Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T_- für eine gegenphasige Schwingung für mindestens zwei Pendellängen.
- Bestimmen Sie mindestens zehn mal die Schwingungsdauer T sowie die Schwebungsdauer T_S für eine gekoppelte Schwingung für mindestens zwei Pendellängen.
- Berechnen Sie aus den Schwingungsdauern den Kopplungsgrad K.
- Vergleichen Sie die gemessenen Schwebungsdauer T_S mit der aus den den Schwingungsdauern T_+ und T_- berechneten Schwebungsdauer T_S.

Versuchsaufbau

Die gekoppelten Pendel bestehen aus zwei Stabpendel mit einer reibungsarmen Spitzenlagerung. Die zwei Spitzen am Ende eines jeden Pendels befinden sich in einer Keilförmigen Nut um so eine reibungsfreie, harmonische Schwingung zu gewährleisten. Beide Pendel werden durch eine Feder miteinander gekoppelt. Die scheibenförmigen Pendelmassen ($m = 1\ kg$) am Ende des Stabes lassen sich verschieben, sodaß verschiedene Pendellängen eingestellt werden können. Die Pendellänge wird vom Aufhängepunkt bis zum Mittelpunkt der verschiebbaren Massen gemessen. Die Schwingungsdauern T werden mit einer Stoppuhr gemessen.

Versuchsdurchführung und Auswertung

- Stellen Sie für beide Stabpendel dieselbe Pendellänge ein. Entfernen Sie die Kopplungsfeder und messen Sie für jedes Pendel die Schwingungsdauer T_1 und T_2. Messen Sie hierzu immer 5 Schwingungen. Wiederholen Sie die Messungen 9 mal. Überprüfen Sie, daß die Schwingungsdauern T_1 und T_2 im Rahmen der Meßgenauigkeit übereinstimmen. Ist dies nicht der Fall, verschieben Sie eine der Pendelmassen bis die Schwingungsdauern nahezu gleich sind und wiederholen Sie die Messungen.

- Verbinden Sie die beiden Stabpendel mit der Kopplungsfeder. Messen Sie die Schwingungsdauern T_+ und T_- für die gleichphasige- und die gegenphasige Schwingung. Messen Sie hierzu mehrfach die Schwingungsdauern für je 5 Schwingungen.

- Messen Sie die Schwingungsdauer T und Schwebungsdauer T_S für die gekoppelte Schwingung. Messen Sie wieder mehrfach die Zeit für jeweils 5 Schwingungen.

- Berechnen Sie aus den Zeiten die Schwingungsfrequenzen ω_+, ω_-, ω_S und den Kopplungsgrad κ. Vergleichen Sie die gemessenen Schwingungsfrequenzen ω_+, ω_-, ω_S mit den Schwingungsfrequenzen, die aus den Eigenfrequenzen ω_+ und ω_- bestimmt worden sind.

- Wiederholen Sie die Messungen für eine weitere Pendellänge.