Versuch Nr.311

Hall-Effekt und Elektrizitätsleitung bei Metallen

Niklas Düser
niklas.dueser@tu-dortmund.de

Benedikt Sander
benedikt.sander@tu-dortmund.de

Durchführung: 24.11.2020 Abgabe: 8.12.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen die mikroskopischen Parameter untersucht werden die die Bewegung von Leitungselektronen in Metallen beschreiben.
Dafür werden der elektrische Widerstand und die Hall-Spannung bei unterschiedlichen Materialien untersucht und dann ein Zusammenhang zwischen diesen Größen und Parametern wie der mittleren Driftgeschwindigkeit in Stromrichtung hergestellt.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Bandstruktur und elektrische Leitfähigkeit von Kristallen

In einem kristallinen Festkörper lassen sich die Energieniveaus seiner Elektronen und seine Leitfähigkeit durch ein Modell mit Energiebändern beschreiben.
Die Valenzelektronen des Materials, also die Elektronen der äußersten Schale, bilden in einem kristallinen Festkörper ein zusammenhängendes System. Nach dem Pauli-Prinzip dürfen in einem System nur Elektronen mit entgegengesetztem Spin den gleichen Zustand und damit gleiche Energie besitzen.
Die möglichen energetischen Zustände der Elektronen lassen sich dann, wie in Abb.**??** sichtbar, durch quasikontinuierliche Energiebänder darstellen.
Die Lücken zwischen ihnen heißen „verbotene Zone“ und bilden die nicht möglichen Zustände ab. Sie bilden oft eine Grenze zwischen den Bändern. Es ist allerdings auch möglich, dass sich die Bänder überlappen.
Mit diesem Modell der Energiebänder lassen sich nun sehr gut Vorgänge, die die Elektronen des Festkörpers betreffen, beschreiben.
In einem komplett mit Elektronen gefülltem Band, wie es oft bei den Bändern der inneren Schalen der Fall ist, kann, da jeder mögliche Zustand besetzt ist, kein Elektron Energie aufnehmen oder abgeben.
Durch einen dieser Prozesse würde das Elektron nämlich einen Zustand einnehmen müssen, der schon besetzt ist, was das Pauli-Prinzip untersagt. Daraus folgt dann auch dass die Elektronen dieser Bänder nicht, zum Beispiel durch äußere elektrische Felder, beschleunigt werden können und damit nicht zur elektrischen Leitfähigkeit beitragen können.
Die Elektronen die beschleunigt werden können sind die, die in dem äußersten, nicht gefülltem Band sitzen. In diesen Bändern gibt es Quantenzustände welche noch unbesetzt sind. Zum Beispiel die von Elektronen mit umgekehrtem Spin. Die Elektronen in diesen Bändern haben also die Möglichkeit beschleunigt zu werden, wodurch sich in dem kristallinen Festkörper ein makroskopischer Strom ausbilden kann.
Da dieser Strom durch Elektronen des nur teilweise besetzten Bandes hervorgerufen wird, werden sie auch Leitungselektronen und das Band das Leitfähigkeitsband genannt.

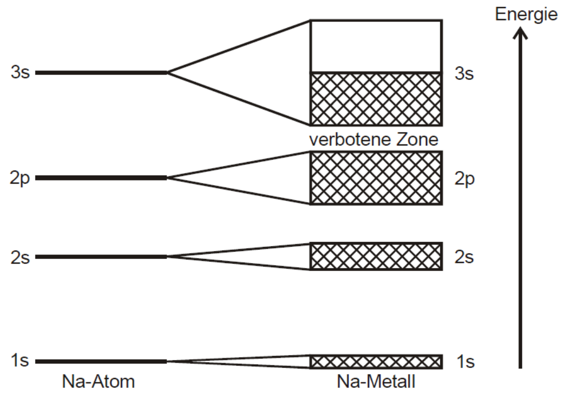

Abbildung 1: Eine Darstellung der Energiebänder eines Natrium-Atoms [**V311**].

Ein Beispiel dafür wären natürlich in erster Linie Metalle, die mit ihrer hervorragenden Leitfähigkeit, die sich nach diesem Prinzip beschreiben lässt, glänzen.
Ein anderes Beispiel ist in Abb.**??** in der die Bänder eines Natrium-Atoms aufgeführt sind zu sehen.
Die einzelnen sichtbaren Bänder sind dabei die einzelnen Schalen des Atoms. Die Lücken zwischen ihnen sind dabei die zuvor genannten verbotenen Zonen. Die 1s-, 2s-, 2p-, Bänder sind komplett gefüllt und tragen nichts zur elektrischen Leitfähigkeit bei.
Das 3s-Band, welches mit der 3s-Schale korrespondiert, ist allerdings nicht komplett gefüllt. In der Schale befindet sich ein ungepaartes Elektron. Es ist also noch Platz für eins mit entgegengesetztem Spin. Dadurch trägt dieses zur Leitfähigkeit bei.

Bei nichtleitenden Festkörpern, oder auch Isolatoren, ist die verbotene Zone so breit, dass die Energie, die zum überspringen von ihr nötig wäre, nicht aufgebracht werden kann. Des Weiteren besitzt die äußerste Schale kein Elektron, welches überhaupt erst beschleunigt werden könnte.

Nach der Quantenmechanik sollten ideale Metallkristalle eine unendlich hohe Leitähigkeit besitzen, da die Elektronen als Materiewellen betrachtet werden können, welche nicht in Wechselwirkung untereinander oder mit den Atomrümpfen treten.
Die endliche reale Leitfähigkeit lässt sich also auf Abweichungen vom Ideal und damit mit Fehlern im Kristallgitter begründen.

2.2 Berechnung der Leitfähigkeit

Die zuvor beschriebene Bewegung der Leitungselektronen durch das Kristallgitter lässt mit der Bewegung der Teilchen eines idealen Gases vergleichen.
Die Elektronen kollidieren mit Fehlstellungen im Gitter und auch mit Ionenrümpfen, die sich aus dem Gitterverband entfernt haben. Sie werden, wenn ein elektrisches Feld anliegt, also nicht kontinuirlich beschleunigt sondern auch immer wieder in zufällige Richtungen

gestreut.
Die Zeit zwischen solchen Zusammenstößen lässt sich über die mittlere Flugzeit $\overline{\tau}$ ausdrücken.
Während $\overline{\tau}$ wird, bei angelegtem Feld, ein Elektron also in Richtung $\vec{E}$ gleichmäßig beschleunigt. Diese Beschleunigung lässt bei der Ladunng e_0 und der Ruhemasse m_0 durch $\vec{b}$ ausdrücken.

$$\vec{b} = -\frac{\mathrm{e}_0}{\mathrm{m}_0} \cdot \vec{E}$$

Die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{\overline{v}}$ während $\overline{\tau}$ in Richtung $\vec{E}$ ergibt sich dann zu:

$$\Delta\vec{\overline{v}} = -\frac{\mathrm{e}_0}{\mathrm{m}_0} \cdot \vec{E} \cdot \overline{\tau} \tag{1}$$

Da die Elektronen, wie zuvor bereits erwähnt, immer zufällig gestreut werden, ändert sich immer ihre Geschwindigkeitskomponenten in Richtung des elektrischen Feldes. Diese ist nach der Streuung, im Durchschnitt, immer null. Nach jedem Stoß müssen die Elektronen also immer komplett neu in Richtung des elektrischen Feldes beschleunigt werden.
Dieser Sachverhalt lässt sich dann beschreiben in dem eine mittlere Driftgeschwindigkeit eingeführt wird, welche das Mittel aus $\Delta\vec{\overline{v}}$ und 0 ist. Die Formel dafür ergibt sich dann zu:

$$\vec{\overline{v_d}} = \frac{1}{2}\Delta\vec{\overline{v}} \tag{2}$$

Mit dieser Gleichung lässt sich sich dann eine Formel für die Stromdichte j herleiten. Diese ist nämlich die Anzahl n der Ladungen, hier ausgedrückt über die Elektronenladung $-\mathrm{e}_0$, die sich mit dem Betrag der Geschwindigkeit $\overline{v_d}$ bewegen, also:

$$j = -n\overline{v_d} \cdot \mathrm{e}_0 \tag{3}$$

Oder anders gesagt; Der Strom I, der durch die Querschnittsfläche des Drahtes Q fließt, also $\frac{I}{Q}$. Einsetzen von $\overline{v_d}$ führt dann zu:

$$j = \frac{1}{2}n\frac{\mathrm{e}_0^2}{\mathrm{m}_0} \cdot \vec{E} \cdot \overline{\tau}$$

Unter der Annahme, dass wir uns in einem homogenen Leiter befinden, lässt sich $j = \frac{I}{Q}$ und für das elektrische Feld $E = \frac{U}{L}$, wie im homogenen Feld eines Plattenkondensators, annehmen. Erneutes einsetzen führt dann zu einer dem Ohm'schen Gesetz sehr ähnlichen Gleichung:

$$I = \frac{1}{2}n\frac{\mathrm{e}_0^2}{\mathrm{m}_0} \cdot \overline{\tau}\frac{Q}{L} \cdot U \tag{4}$$

Wenn nun **??** mit dem Ohm'schen Gesetz $U = R \cdot I$ verglichen wird, wird sichtbar, dass

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2}n\frac{\mathrm{e}_0^2}{\mathrm{m}_0} \cdot \overline{\tau}\frac{Q}{L} = S$$

gelten muss.
Dieser Term, das Reziprok des Widerstands, wird als elektrische Leitfähigkeit S bezeichnet. Wie aus **??** ersichtlich bildet sie einen Proportionalitätsfaktor zwischen Spannung und Strom.
Um allgemeinere Größen zu erhalten werden nun die geometrieabhängigen Größen Q und L weggelassen.
Dadurch wird S zur spezifischen Leitfähigkeit σ und R wieder zu dem dazu reziproken spezifischen Widerstand ρ.

$$\sigma = \frac{n}{2} \frac{\mathrm{e}_0^2}{\mathrm{m}_0} \cdot \overline{\tau} \tag{5}$$

$$\rho = \frac{2}{n} \frac{\mathrm{m}_0}{\mathrm{e}_0^2 \cdot \overline{\tau}} \tag{6}$$

2.3 Hall-Effekt

Für die weitere Bestimmung von I in **??** fehlen noch die Variablen n und $\overline{\tau}$.
Die Anzahl der Teilchen n lässt sich einfach mit Hilfe des Hall-Effektes bestimmen.
Beim Hall-Effekt wird eine Spannung U_H, die an einer Metallplatte, in einem Magnetfeld, abfällt, gemessen. Die Platte besitzt dabei die Maße, wie in Abb **??** sichtbar, Breite b und Dicke d. Wenn sie nun in senkrecht in ein homogenes Magnetfeld gehalten wird und sie an eine Spannung angeschlossen wird, fließt ein Strom I_q durch sie. Wenn dann der Elektronenstrom durch die Platte und damit durch das Magnetfeld fließt werden sie duch die Lorentzkraft F_L abgelenkt.
Dieser Aufbau ist schematisch in der unteren Abbildung **??** dargestellt. Dort ist die Platte, die senkrecht im Magnetfeld liegt, an der ein Konstantstromgerät angeschlossen ist und das Voltmeter, welches die Hall-Spannung abgreift, zu sehen.

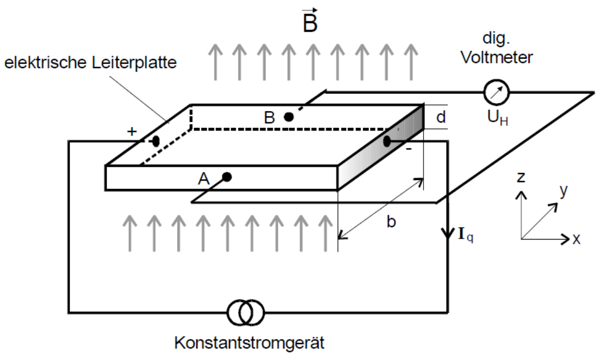

Abbildung 2: Die schematische Abbildung eines Aufbaus zur Messung des Hall-Effektes [**V311**].

Die Lorentzkraft hat bei orthogonaler Elektronenbewegung zum Magnetfeld, mit B als

Betragsstärke des Magnetfeldes und den anderen zuvor erklärten Variablen, den Betrag:

$$F_L = \mathrm{e}_0 \cdot \overline{v_d} B$$

Diese Kraft treibt die Elektronen dann an den Rand der Platte, wodurch sich dann eine Ladungsdifferenz zwischen den beiden Seiten der Platte ausbildet. Dies ist die bereits genannte Hall-Spannung U_H. Sie ist allerdings nicht nur von F_L abhängig, da sich an den Rändern entgegenwirkend zur Lorentz-Kraft ein elektrisches Feld ausbildet. Bei konstantem Strom bildet sich dann dort ein Gleichgewichtszustand aus. Deswegen gilt mit U_H als Hall-Spannnung, b als Breite der Platte und e_0 als Betrag der Elementarladung, da bei der Lorentzkraft auch nur der Betrag betrachtet wurde:

$$\mathrm{e}_0 \cdot \overline{v_d} B = \mathrm{e}_0 \cdot \frac{U_H}{b}$$

Umformen führt dann zu:

$$U_H = b \overline{v_d} B \tag{7}$$

Mit Hilfe der Gleichung **??** lässt sich dann weiter umformen:

$$j = \frac{I_q}{Q} = \frac{I_q}{bd} = -n \cdot \overline{v_d} \cdot bd \cdot \mathrm{e}_0 \tag{8}$$

$$\implies \overline{v_d} = -\frac{I_q}{nbd \cdot \mathrm{e}_0} \tag{9}$$

Erneutes einsetzen:

$$\implies U_H = -\frac{I_q \cdot B}{n \cdot d \cdot \mathrm{e}_0} \tag{10}$$

Die ist nun die Formel mit der sich n berechnen lässt.

2.4 Berechnung der mikroskopischen Leitfähigkeitsparameter R und U_H

Für weitere Rechnungen ist die mittlere freie Weglänge $\bar{l}$ von Nöten. Diese ist die die Strecke die ein Leitungselektron im Durchschnitt zwischen zwei Zusammenstößen zurücklegt. Sie ist dabei abhängig von der mittleren Flugzeit und der Totalgeschwindigkeit.

$$\bar{l} = \bar{\tau} \cdot |v| \tag{11}$$

Die Totalgeschwindigkeit $|v|$ ist dabei die wirkliche Geschwindigkeit und nicht wie zuvor betrachtet die relativ Geschwindigkeit. Sie wird durch die thermische Energie der Teilchen hervorgerufen. Außerdem ist sie in der Regel auch deutlich höher als die Driftgeschwindigkeit.

Wenn nun für die Elektronen wieder angewendet wird, dass sich die Atome wie die eines idealen Gases verhalten, lässt sich über das Äquipartitionstheorem ihre mittlere

Energie pro Freiheitsgrad bestimmen. Diese beträgt nämlich $\frac{\mathrm{k} \cdot T}{2}$ pro Freiheitsgrad mit T als Temperatur und k [**Boltzmann**] als Boltzmann-Konstante.
Insgesamt ergibt sich das dann zu:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{3}{2}\mathrm{k} \cdot T$$

Mit der klassischen Formel für die kinetische Energie lässt sich das ganze dann durch gleichsetzen und umformen nach der mittleren Totalgeschwindigkeit $|\overline{v}_{\mathrm{kl}}|$ zu

$$\overline{E}_{\mathrm{kin}} = \frac{\mathrm{m}_0}{2} \cdot |\overline{v}_{\mathrm{kl}}|^2 \tag{12}$$

$$\implies |\overline{v}_{\mathrm{kl}}| = \sqrt{\frac{3\mathrm{k}T}{\mathrm{m}_0}} \tag{13}$$

umstellen.
Dabei ist m_0 wieder die Elektronenruhemasse.
Allerdings lässt sich die Energie der Elektronen, aus dem zuvor genannten Grund des Pauli-Prinzips, die Energieverteilung der Elektronen, nicht wie bei einem idealen Gas typisch, über die Maxwell-Boltzmann-Statistik darstellen. Für diesen Fall wird dafür die Fermi-Dirac-Verteilung genutzt.
Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit $f(E)$ um ein Teilchen mit der Energie $E + (d)E$ anzutreffen. E_F ist dabei die Fermi-Energie. Dies ist die Energie welche die energiereichsten Elektronen am absoluten Nullpunkt besitzen. Sie ist dabei abhängig von der Dichte der Elektronen, dem Planck'schen Wirkungsquantum [**Planck**] h und wieder der Elektronenmasse.

$$f(E)\mathrm{d}E = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{E-E_F}{\mathrm{k} \cdot T}} + 1}\mathrm{d}E \tag{14}$$

$$E_F = \frac{\mathrm{h}^2}{2 \cdot \mathrm{m}_0}\sqrt{\left(\frac{3}{8\pi}\right)^2} \tag{15}$$

Die beiden Formeln werden auch noch mal in der Grafik **??** veranschaulicht. Dort ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Elektronen dargestellt. Dabei ist die Energie E_F besonders hervorgehoben. Die gestrichelte Linie zeigt die Verteilung bei $T = 0$ und die durchgezogene für $T > 0$.

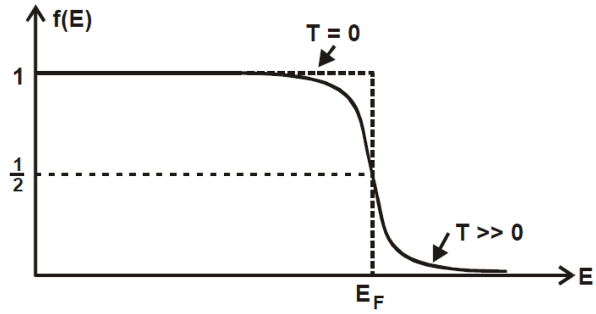

Abbildung 3: Ein Diagramm der Fermi-Dirac-Verteilung. Die Abweichung zwischen dem gestrichelten Graphen für $T = 0$ und dem durchgezogenen für $T > 0$ sind übertrieben dargestellt. [**V311**].

Die Formel **??** lässt sich nun mit der Formel **??** annähern.
Denn es gilt $E \approx E_F$, da hauptsächlich nur die Elektronen mit diese Energie durch das Feld beschleunigt werden können. Der Rest hat kleinere Energien und kann wegen des Pauli-Prinzips nicht beschleunigt werden.
Der zuvor gewählte Ansatz aus **??** mit der reinen thermischen Energie für die Totalgeschwindigkeit ist hier also in der Form, für die interessanten Elektronen, nicht anwendbar.
Die Totalgeschwindigkeit lässt sich also zu

$$|\overline{v}| \approx \sqrt{\frac{2E_F}{\mathrm{m}_0}}$$

approximieren.
Einsetzen dieser Gleichung in **??** führt dann zu einer Formel für die mittlere freie Weglänge:

$$\bar{l} \approx \overline{\tau}\sqrt{\frac{2E_F}{\mathrm{m}_0}}$$

Das $\overline{\tau}$ lässt sich über die Gleichung **??** bestimmen.
Des Weiteren lässt sich aus $\overline{\tau}$ auch noch die Beweglichkeit μ berechenen. Dafür wird Formel **??** in **??** eingesetzt.

$$\overline{\vec{v}_d} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}_0}{\mathrm{m}_0} \cdot \overline{\tau} \cdot \vec{E}$$

$$\overline{\vec{v}_d} = \mu \cdot \vec{E} \qquad \text{mit} \qquad \mu = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}_0}{\mathrm{m}_0} \cdot \overline{\tau}$$

2.5 Elektrizitätsleitung mit positiven Ladungsträgern

Obwohl Elektronen die einzigen Teilchen sind, die sich im Kristallgitter bewegen können, kann es auch zu einer Art Bewegung positiver Ldungen kommen. Dabei bewegen sich

keine Ionen, sondern Ladungslöcher, also Leerstellen an denen normalerweise Elektronen sitzen sollten.
Dies kann zum Beispiel bei zweiwerigen Metallen, also Metallen die zwei Wasserstoffatome binden könnten, vorkommen. Dort können sich nämlich die Energiebänder überlappen, so dass Elektronen aus den unteren Bändern einfach in das obere übergehen können und so dann Lücken hinterlassen.
Diese Löcher können sich frei bewegen und werden als positive Ladungen behandelt. Analog zum Elektron beeinflussen sie die Leitfähigkeit und erzeugen eine entegengerichteten Hall-Effekt, den anomalen Hall-Effekt.
Allerdings muss für die Löcher mit anderen Massen und anderen Beweglichkeiten gerechnet werden.

3 Durchführung

3.1 Bestimmung der Widerstände

Zuallererst wird der Widerstand von Kupfer und Zink bestimmt. Dafür werden Spulen aus den Materialien an eine Gleichstromquelle angeschlossen. An dieser Gleichstromquelle lassen sich auch die Spannung und der Strom ablesen. Anschließend wird parallel zu der Spule ein Voltmeter angeschlossen um die zum Strom korrespondierende abfallende Spannung zu messen.
Eine schematische Darstellung dieses Aufbaus ist in in Abb. **??** dargestellt.

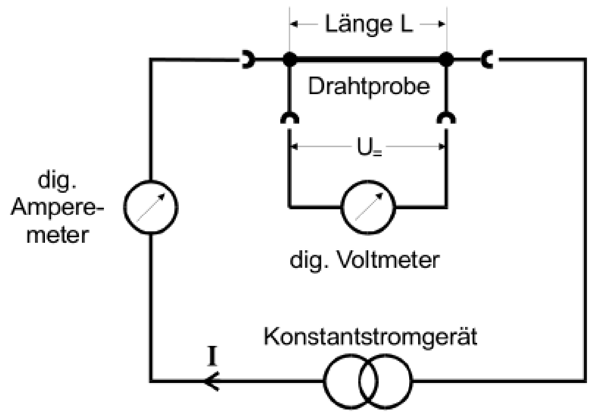

Abbildung 4: Der Schaltplan für die Bestimmung des Widerstands[**V311**].

Für diesen Aufbau werden dann diverse Messungen mit unterschiedlichen Stromstärken für Kupfer und Zink gemacht.
Des Weiteren werden, mit Hilfe eines digitalen Messschiebers, die Breite und Dicke zweier Metallplatten gemessen. Diese Platte sind denen, die zur Messung des Hall-Effektes genutzt werden, von ihren Ausmaßen sehr ähnlich.
Mit Hilfe dieser Werte lässt sich dann für die beiden Platten der Widerstand berechnen.

3.2 Hall-Effekt

Die folgende Durchführung des Versuches wird für beide Metalle identisch durchgeführt. Der Aufbau besteht aus zwei Spulen die parallel an ein Konstantstromgerät angeschloßen werden. Oben auf den Spulen sind zwei Metallblöcke, die von den Spulen magnetisiert werden und so zwischen ihnen ein annähernd homogenes Magnetfeld erzeugen. In diesen Bereich lässt sich, auf eine Schiene, das zu untersuchende, auf einer Platte aufgebrachte, Substrat einführen

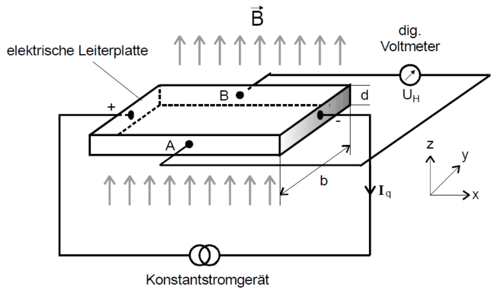

Abbildung 5: Der Schaltplan der Platte an der die Hall-Spannung gemessen wird [**V311**].

Die Platten mit den Substraten haben Anschlüsse, so dass sich an den Rändern des aufgebrachten Metalls die Hallspannung abgreifen lässt und so, dass sich zusätzlich ein Strom durch das Metall schicken lässt. An der einen Seite der Platte wird also ein feines Voltmeter angeschloßen, um die Hallspannung abzugreifen und an dem anderen ein Konstantstromgerät. Den Schaltplan die Platte betreffend ist in Abb.**??** zu sehen.
Bevor die Hall-Spannung gemessen wird wird zuerst die Spule geeicht. Dies geschieht, in dem mit Hilfe einer Hallsonde, die zwischen den magnetisierten Metallen eingebracht wird, das Magnetfeld für die später für das Magnetfeld genutzten Stromstärken gemessen wird.
Nun wird bei konstantem Magnetfeld der Stromfluss durch die Platte variiert und dabei die Hall-Spannung abgelesen. Natürlich werden auch vom Konstantstromgerät die Stromstärken die durch die Platte und durch die Spule notiert. Da die beiden Punkte an denen die Hall-Spannung abgegriffen wird keine Äquipotentialflächen seien müssen kann eine Spannungsabfall zwischen den beiden Punkten auftreten. Dieser Spannungsabfall wird $U_{\text{Stör}}$ genannt.
Da diese Stör-Spannung bei konstantem Strom auch konstant ist lässt sie sich durch umpolen des Magnetfeldes herausrechnen.

$$\begin{aligned} U_{\text{ges+}} &= U_{\text{Hall}} + U_{\text{Stör}} \\ U_{\text{ges-}} &= -U_{\text{Hall}} + U_{\text{Stör}} \\ U_{\text{Hall}} &= \frac{1}{2}(U_{\text{ges+}} - U_{\text{ges-}}) \end{aligned}$$

Es muss aber unbedingt darauf geachtet werden, dass die Umpolung der Spulen nicht abrupt geschehen darf, sondern die Spulen erst heruntergeregelt werden müssen. Ansonsten können Schäden an dem Konstantstromgerät auftreteten.
Als letztes wird dann noch einmal eine Messreihe mit konstantem Stromfluss und variierter Magnetfeldstärke durchgeführt, bei der auch immer umgepolt wird.

4 Auswertung

4.1 Widerstand

Das Außmessen der Proben ergibt:

Metall	Höhe	Breite	Dicke	Durchmesser	Länge
Zink	0,026 03	0,0280	0,000 430	0,000 263	1,73
Kupfer	0,044 06	0,0253	0,000 018	0,000 105 2	1,73

Tabelle 1: Eine Tabelle zu den Dimensionen der Metall Proben

Die Messwerte zur Höhe, Breite und Dicke beziehen sich hier auf die Metallplatte, die Messwerte zum Durchmesser und zur Länge beschreiben das jeweilige Kabel zur Berechnung des Widerstandes. Hier gehen wir jeweils von einer Ungenauigkeit von einem Prozent des jeweiligen Messwertes aus.
Der Widerstand eines Metalls berechnet sich Mittels

$$U = R * I \tag{16}$$

Die Berechnung des Widerstandes gibt eine Reihe an Widerstaenden 4, der Mittelwert dieser Reihen ergibt dann einen Widerstand fuer Zink und Kupfer:

$$R_{\text{Zink}} = (13{,}68 \pm 0{,}23)\,\text{m}\Omega \tag{17}$$

$$R_{\text{Kupfer}} = (7{,}73 \pm 0{,}05)\,\text{m}\Omega \tag{18}$$

Der spezifische Widerstand eines Metalls berechnet sich nun mittels der Formel

$$\rho = \frac{RA}{l} \tag{19}$$

mit R dem Widerstand, A der Querschnittsflaeche und l der Laenge des Kabels. Somit ergibt sich mit denn Werten aus 1 und den berechneten Widerstaenden der spezifische Widerstand:

$$\rho = (1{,}72 \pm 0{,}05)\,\text{n}\Omega\,\text{m} \tag{20}$$

$$\rho = (0{,}16 \pm 3{,}10)\,\text{n}\Omega\,\text{m} \tag{21}$$

4.2 Hall-Effekt

Zur Berechnung der Hall Spannung wird zunaechst das Magnetfeld der Spule in abhaengigkeit von der Stromstaerke bestimmt.

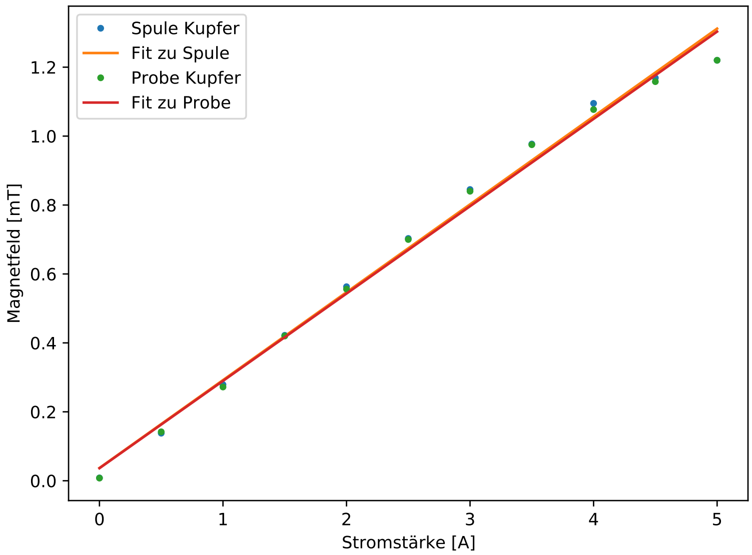

Abbildung 6: Ein Plot der Magnetfeldstaerke gegen die Stromstaerke.

In diesem Plot sind die Magnetfelder bei steigender und abfallender Stromstaerke 6 und der jeweilige lineare Fit zu den Messwerten eingezeichnet. Die Ausgleichsgerade der Form $\mathrm{a} \cdot x = \mathrm{b}$ hat dann die Werte:

$$\mathrm{a} = (254 \pm 5) \cdot 10^{-3} \tag{22}$$

$$\mathrm{b} = (36{,}750 \pm 0{,}016) \cdot 10^{-3} \tag{23}$$

Und gibt nun in allen folgenden Rechnungen einen Wert für das Magnetfeld wenn nur ein Wert für den Spulenstrom bekannt ist.

In den folgenden Plots ist sind die Messergebnisse der Hallspannung aufgetragen mit denen die weiteren Rechnungen ausgeführt werden. Die Zahlenwerte sind hier ?ref? zu finden.

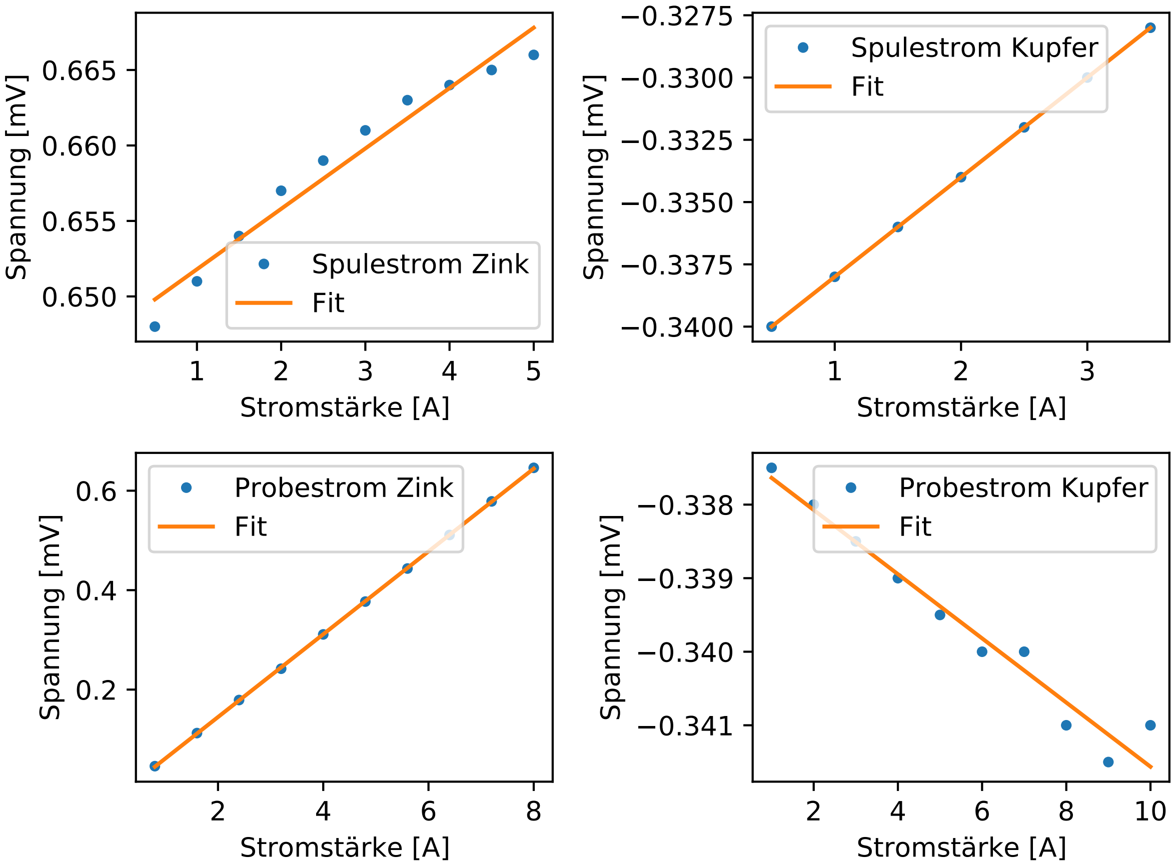

Abbildung 7: Ein Plot der Hall Spannungen gegen die Stromstaerke.

4.3 Ladungsträger pro Volumen

Zur Berechnung der Hall Spannung wird zunaechst das Magnetfeld der Spule in abhaengigkeit von der Stromstaerke bestimmt.

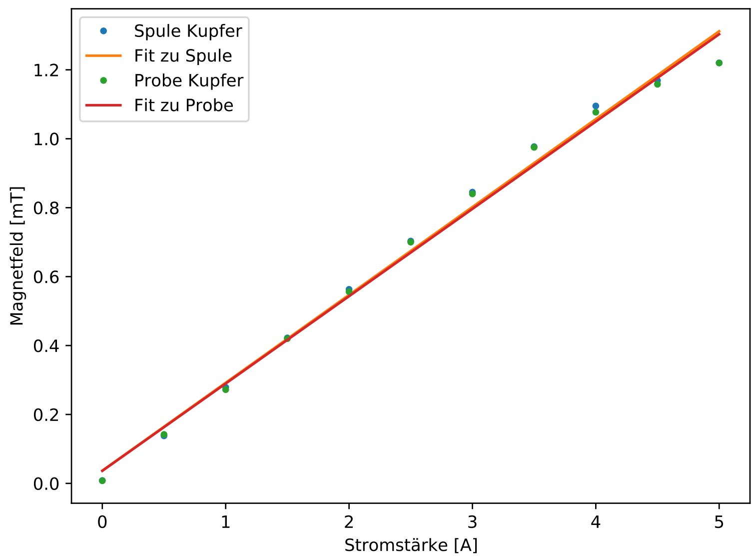

Abbildung 8: Ein Plot der Magnetfeldstaerke gegen die Stromstaerke.

In diesem Plot sind die Magnetfelder bei steigender und abfallender Stromstaerke 6 und der jeweilige lineare Fit zu den Messwerten eingezeichnet. Die Ausgleichsgerade der Form $\mathrm{a} \cdot x = \mathrm{b}$ hat dann die Werte:

$$\mathrm{a} = (254 \pm 5) \cdot 10^{-3} \tag{24}$$
$$\mathrm{b} = (36{,}750 \pm 0{,}016) \cdot 10^{-3} \tag{25}$$

Und gibt nun in allen folgenden Rechnungen einen Wert für das Magnetfeld wenn nur ein Wert für den Spulenstrom bekannt ist

Aus der Formel **??** lässt sich nun eine Formel für die Ladungsträger pro Volumen herleiten:

$$n = \frac{-BI}{Ud \cdot \mathrm{e}_0} \tag{26}$$

mit B der magnetischen Feldstärke, I der Stromstärke, U der Hall-Spannung, d der Dicke der jeweiligen Proben und e_0 der elementar Ladung eines Elektron.

Mit den angegeben Messwerten berechnen sich nun folgende Messwert:

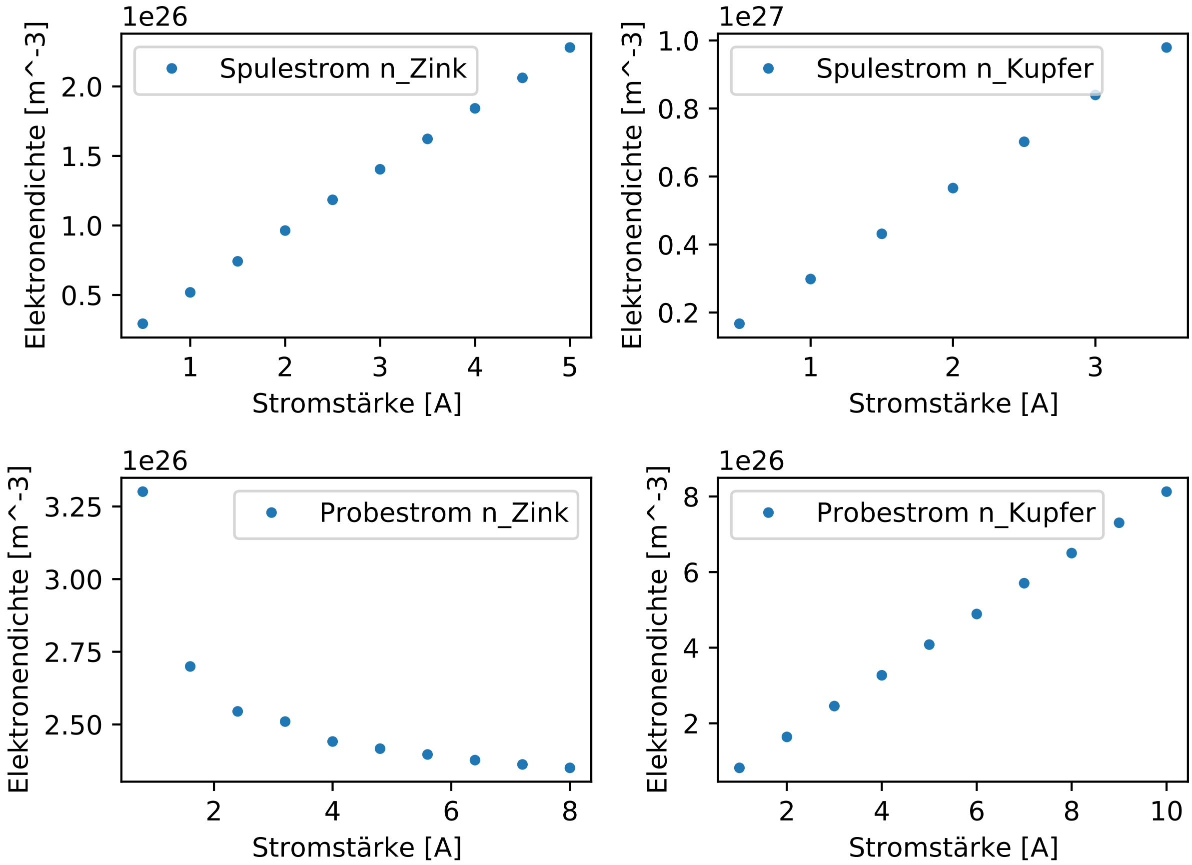

Abbildung 9: Ein Plot der Elektronendichte gegen die Stromstaerke.

Die durch die Plots veranschaulichten Werte sind auch in der Tabelle ?ref? zu finden.

4.4 Ladungsträger pro Atom

Die Anzahl der Atome pro Volumen berechnet sich mittels der Formel:

$$\frac{\mathrm{Atome}}{\mathrm{V}} = \frac{\rho \cdot \mathrm{N_A}}{\mathrm{m_{mol}}} \tag{27}$$

Mit ρ der Dichte des Metalls, $\mathrm{N_A} = 6{,}022\,140\,76 \cdot 10^{23}/\mathrm{mol}$ der Avogrado-Konstante und $\mathrm{m_m}$ol der molaren Masse des Metalls. Aus dieser Formel ergibt sich direkt die Formel für Z die Anzahl der Ladungsträger pro Atom:

$$Z = \frac{n \cdot \mathrm{m_{mol}}}{\rho \cdot \mathrm{N_A}} \tag{28}$$

Mit den stoffspezifischen Größen:

Metall	ρ[g/mol]	m_{mol}[g/mol]
Zink	7,14	65,38
Kupfer	8,92	63,55

Tabelle 2: Eine Tabelle mit stoffspezifischen Größen der Metalle

lässt sich nun Z berechnen. In den folgenden Plots ist Z für die unterschiedlichen Messreihen angegeben.

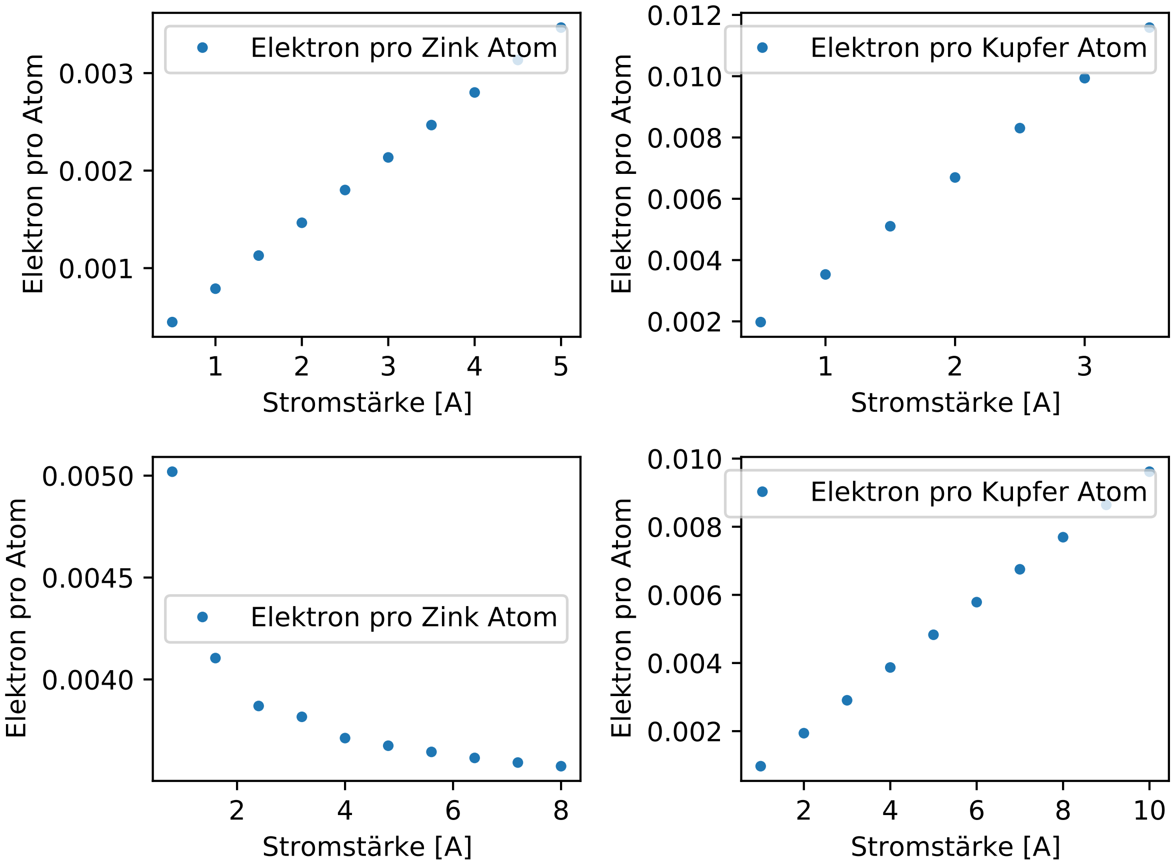

Abbildung 10: Ein Plot der Elektronendichte gegen die Stromstaerke.

Die zugehörigen sind auch wieder in der Tabelle ?ref? zu finden.

4.5 mittlere Flugzeit

Die Formel **??** wir so umgestellt, dass wir folgende Formel erhalten:

$$\bar{\tau} = \frac{2}{n} \frac{m_0}{e_0^2 \cdot \rho} \tag{29}$$

In dieser Formel rechnen wir wieder mit dem reziproken spezifischen Widerstand ρ und der Elektronenmasse $\mathrm{m_0} = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$. Das einsetzten der Werte für n und ρ ergibt dann folgende Werte ?ref?:

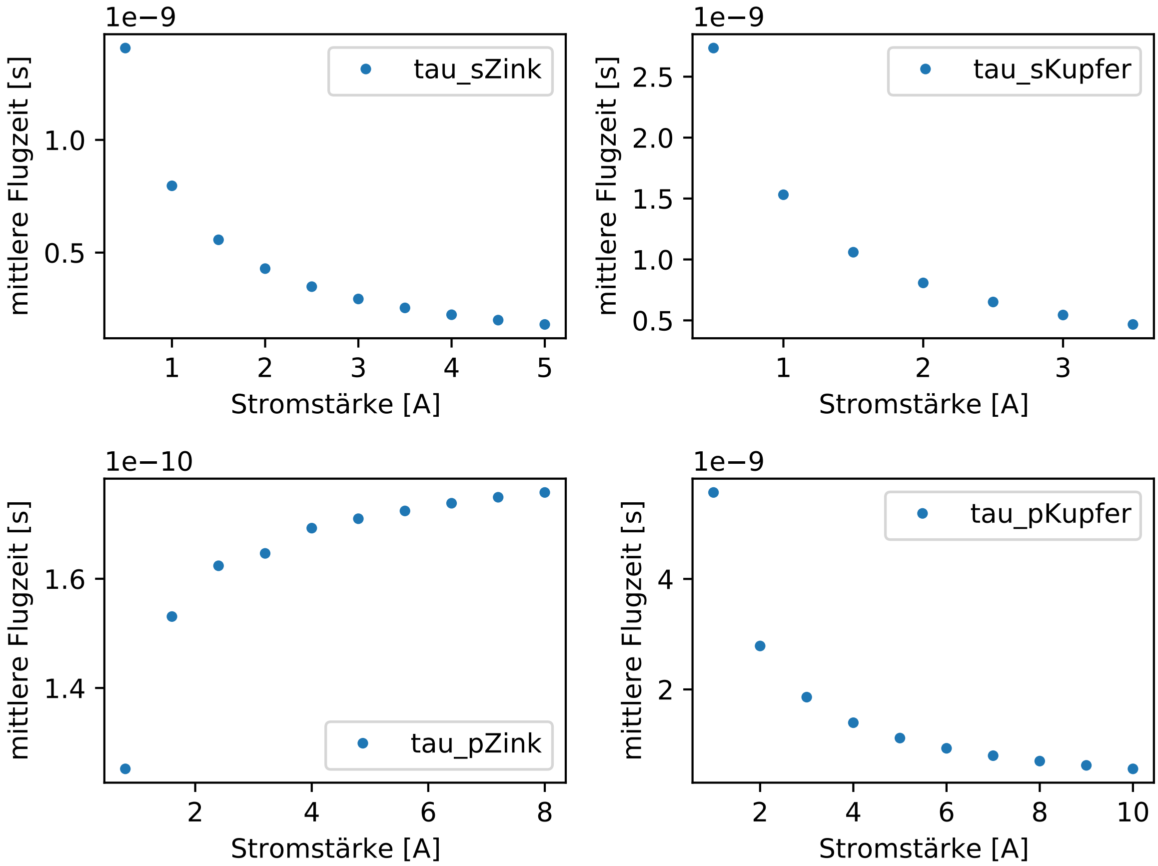

Abbildung 11: Ein Plot der mittleren Flugzeit gegen die Stromstaerke.

4.6 mittlere Driftgeschwindigkeit

Die mittlere Driftgeschwindigkeit $\overline{v_d}$ berechnet sich aus:

$$\overline{v_d} = \frac{-n \cdot \mathrm{e_0}}{\mathrm{j}} \tag{30}$$

mit der Stromdichte $\mathrm{j} = 1\,\mathrm{A/mm^2}$.

Einsetzten ergibt dann ?ref?:

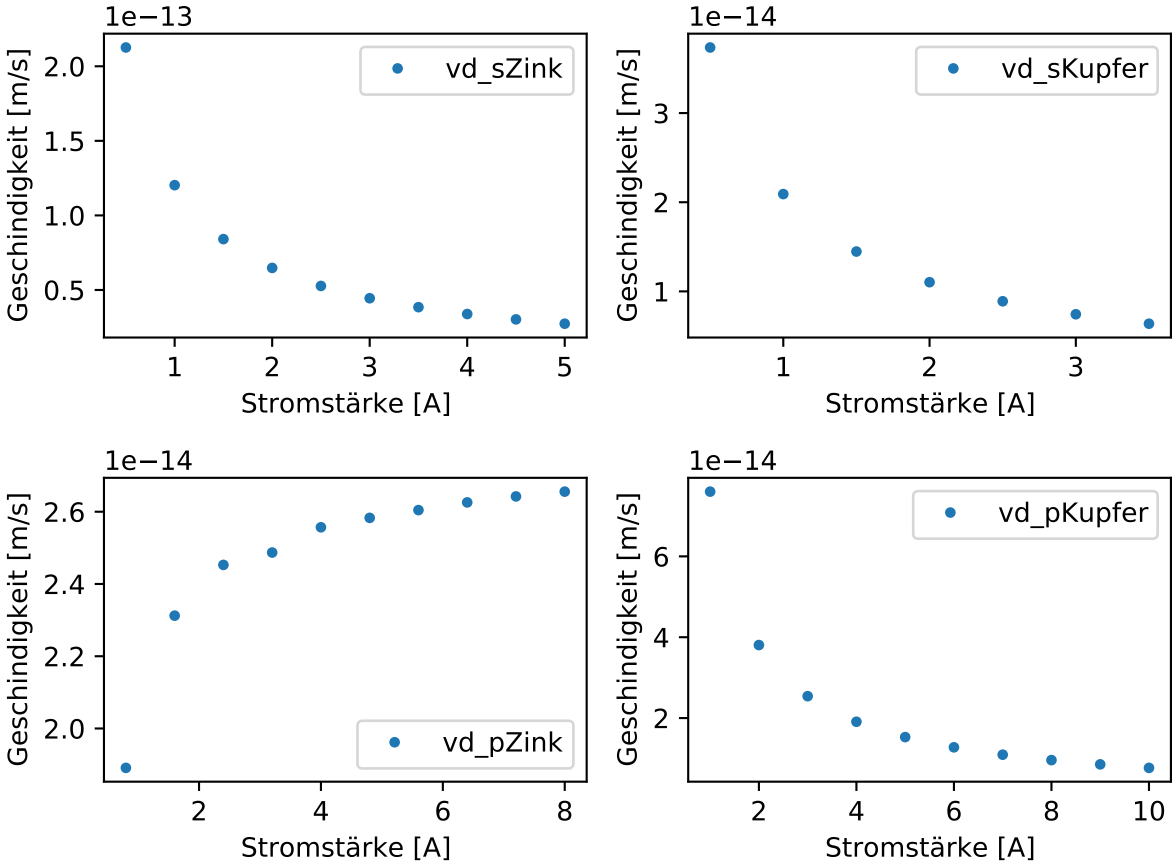

Abbildung 12: Ein Plot der Driftgeschwindigkeit gegen die Stromstaerke.

4.7 Beweglichkeit

Die Formel

$$\mu = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}_0}{\mathrm{m}_0} \cdot \bar{\tau} \tag{31}$$

stellt eine Beziehung zwischen τ und μ auf, mit den Werten für τ ?ref? berechnen sich nun folgende Werte für τ ?ref?:

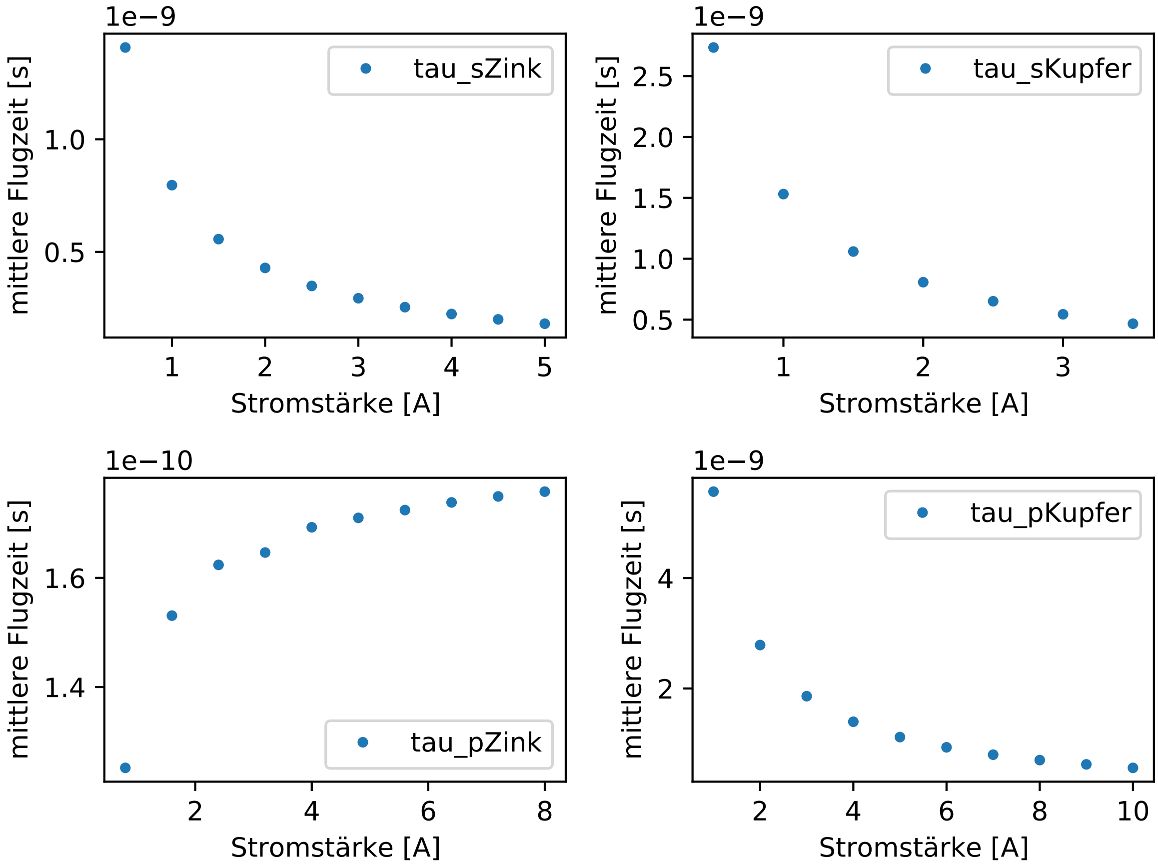

Abbildung 13: Ein Plot der Beweglichkeit gegen die Stromstaerke.

4.8 Totalgeschwindigkeit

Für die Totalgeschwindigkeit wird zunaechst ein Wert für die Fermi-Energie berechnet werden, diese berechnet sich mittels der Formel:

$$E_F = \frac{\mathrm{h}^2}{2 \cdot \mathrm{m}_0} \sqrt{\left(\frac{3}{8\pi}\right)^2} \tag{32}$$

Hier ist h das plancksche Wirkungsquantum($6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J s). Die Fermi-Energie berechnet sich zu: ?ref?

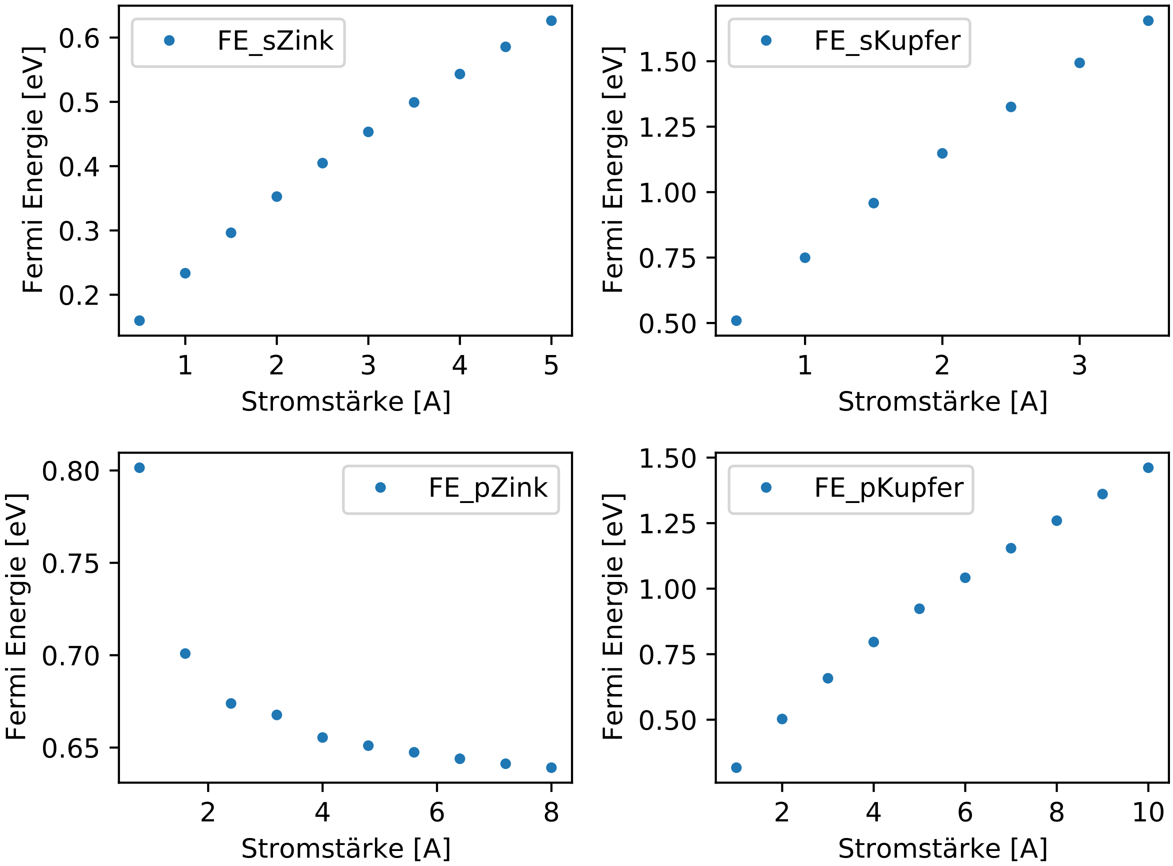

Abbildung 14: Ein Plot der Fermi-Energie gegen die Stromstaerke.

Mittels der Fermi-Energie lässt sich nun über

$$|\overline{v}| \approx \sqrt{\frac{2E_F}{\mathrm{m}_0}}$$

die Totalgeschwindigkeit bestimmen: ?ref?

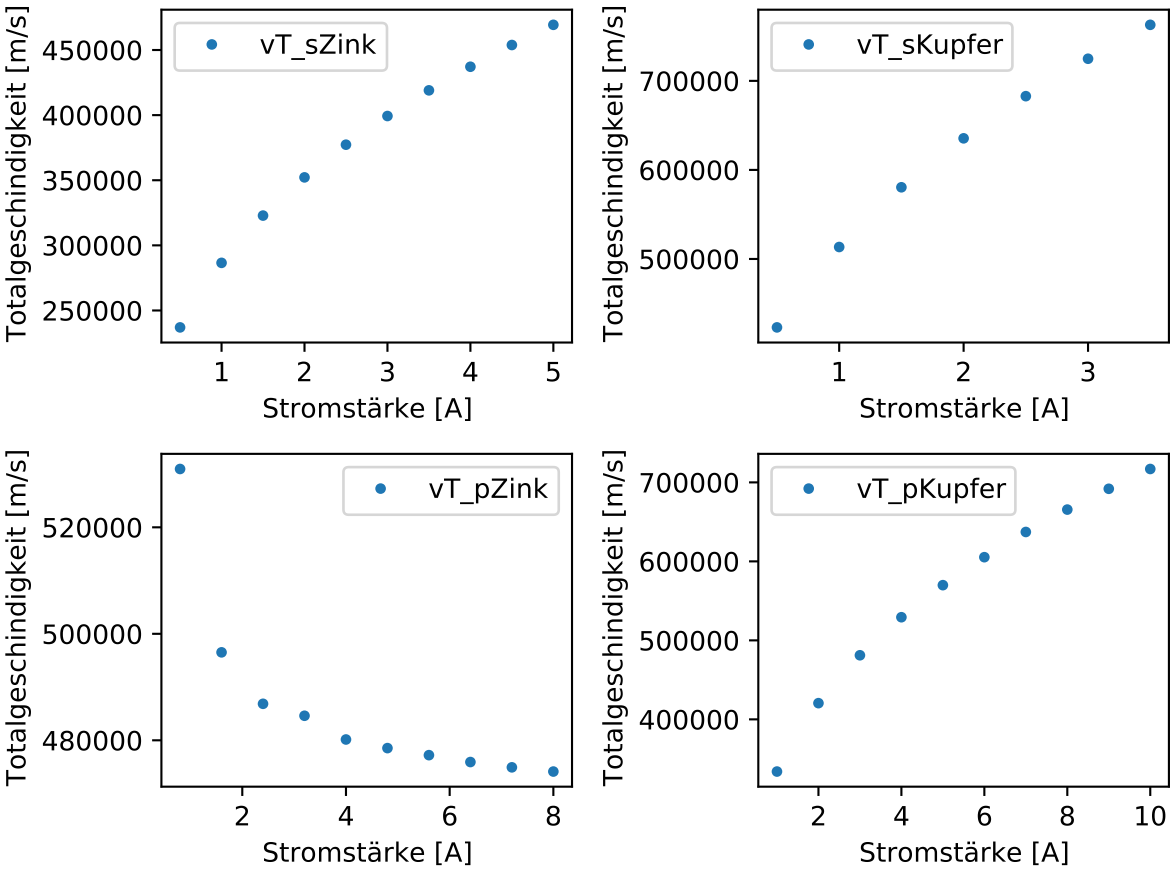

Abbildung 15: Ein Plot der Totalgeschwindigkeit gegen die Stromstaerke.

4.9 mittlere freie Weglänge

Die mittlere freie Weglänge lässt sich nun mit der Totalgeschwindigkeit$|\overline{v}|$ und mittleren Flugzeitτ berechnen:

$$\bar{l} \approx \overline{\tau} \cdot |\overline{v}|$$

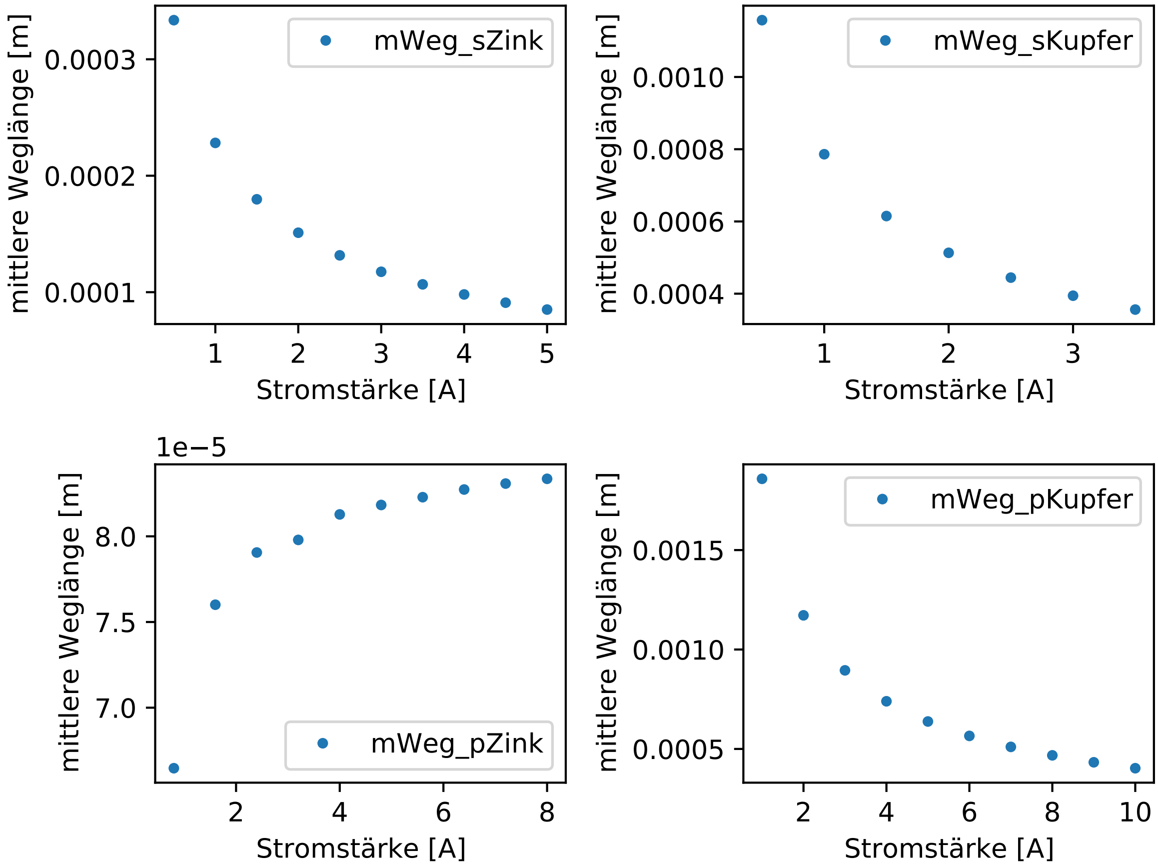

Abbildung 16: Ein Plot der mittleren freien Weglänge gegen die Stromstaerke.

Die Zahlenwerte zu den Plots befinden sich hier ?ref?

4.10 Elektronenleitung

Da von der Tatsache ausgegangen wird, dass Kupfer ein Elektronenleiter ist und bei Kupfer und Zink unterschiedliche Vorzeichen für die Hall-Spannung gemessen wurde, ist relativ Sicher, dass bei Zink die Löcherleitung überwiegt.

5 Tabellen

StromstaerkeA	Spannung ZinkV	Spannung KupferV
1,0	0,0141	0,0078
2,0	0,0277	0,0155
3,0	0,0411	0,0233
4,0	0,0555	0,0309
5,0	0,0683	0,0386
6,0	0,0815	0,0463
7,0	0,0947	0,0539
8,0	0,1071	0,0615
9,0	0,1203	0,0688
10,0	0,1337	0,0765

Tabelle 3: Messwerte zur Berechnung der Widerstaende

$R_{\text{Kupfer}}\Omega$	$R_{\text{Zink}}\Omega$
0,014 13	0,007 83
0,013 85	0,007 77
0,013 70	0,007 77
0,013 87	0,007 73
0,013 66	0,007 72
0,013 58	0,007 72
0,013 52	0,007 70
0,013 38	0,007 69
0,013 37	0,007 64

Tabelle 4: Messwerte zur Berechnung der Widerstaende

Stromstaerke+A	Magnetfeld+T	Stromstaerke-A	Magnetfeld-T
0,5	0,142	5,0	1,220
1,0	0,272	4,5	1,169
1,5	0,420	4,0	1,095
2,0	0,556	3,5	0,977
2,5	0,700	3,0	0,845
3,0	0,840	2,5	0,703
3,5	0,975	2,0	0,563
4,0	1,077	1,5	0,422
4,5	1,158	1,0	0,279
5,0	1,220	0,5	0,138

Tabelle 5: Messwerte zur Berechnung der Widerstaende

Stromstaerke+A	Magnetfeld+T
0,5	1,220
1,0	1,169
1,5	1,095
2,0	0,977
2,5	0,845
3,0	0,703
3,5	0,563
4,0	0,422
4,5	0,279
5,0	0,138

Tabelle 6: Messwerte zur Berechnung der Widerstaende

6 Diskussion