

Versuch Nr.V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Niklas Düser
niklas.dueser@tu-dortmund.de

Benedikt Sander
benedikt.sander@tu-dortmund.de

Durchführung: 8.11.2020

Abgabe: 22.12.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	RLC-Kreis	3
2.2	Herleitung gedämpfter Schwingkreis	3
2.3	Fallunterscheidung	5
2.3.1	1.Fall	5
2.3.2	2. Fall	6
2.4	Erzwungene Schwingungen	7
3	Impedanz des Schwingkreises	10
3.1	Serienschwingkreis	10
3.2	Parallelschwingkreis	12
4	Durchführung	14
5	Auswertung	17
5.1	Schwingungskurve	17
5.2	Aperiodischer Grenzfall	19
5.3	Resonanzüberhöhung	19
5.4	Phasenverschiebung	22
6	Diskussion	26
7	Anhang	28

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen verschiedenen Eigenschaften eines LRC-Kreises untersucht werden. Diese sind der Dämpfungswiderstand, der aus der zeitabhängigen Amplitude bestimmt wird, und der Widerstand bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt. Zusätzlich wird an einem Serienresonanzkreis noch die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung untersucht.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 RLC-Kreis

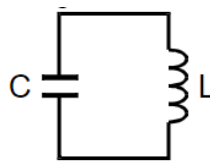


Abbildung 1: Ein ungedämpfter Schwingkreis[5].

In Abbildung 1 ist ein Schaltkreis aus einer Spule und einem Kondensator aufgezeichnet. Dies ist ein Schwingkreis in dem der Strom ungedämpft zwischen den beiden Schaltelementen hin und her fließt.

Wird in diesen Schwingkreis noch ein Widerstand eingebaut, entsteht ein gedämpfter Schwingkreis, wie in Abbildung 2 zu sehen. In diesem Schwingkreis fällt die Amplitude konstant monoton.

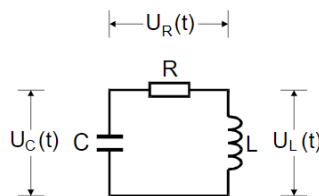


Abbildung 2: Ein gedämpfter Schwingkreis[5].

2.2 Herleitung gedämpfter Schwingkreis

Zunächst wird nun eine Formel hergeleitet die gedämpfte Schwingkreise unterschiedlicher Formen beschreiben kann. Das 2. Kirchhoffsche Gesetz führt direkt zu einer Beziehung der abfallenden Spannungen:

$$U_R + U_C + U_L = 0 \quad (1)$$

In die Formel 1 lassen sich nun die für die Schaltelemente spezifischen Formeln einsetzen.

$$\begin{aligned}U_R &= RI \\U_C &= \frac{Q}{C} \\U_L &= L \cdot \frac{d}{dt}I\end{aligned}$$

Dies führt zu einer Differentialgleichung der Form:

$$\begin{aligned}L \frac{d}{dt}I + RI + \frac{Q}{C} &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2}I + \frac{R}{L} \frac{d}{dt}I + \frac{1}{LC}I &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

Diese Differentialgleichung wird über den Ansatz einer komplexen e-Funktion gelöst.

$$I(t) = Z \cdot e^{j\tilde{\omega}t}\tag{3}$$

Einsetzen von 3 in die DGL 2 ergibt:

$$\tilde{\omega}^2 - j\frac{R}{L}\tilde{\omega} - \frac{1}{LC} = 0$$

Umstellen nach $\tilde{\omega}$ führt zu:

$$\tilde{\omega}_{1,2} = j\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}}$$

$I(t)$ lässt sich nun also durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$I(t) = Z_1 \cdot e^{j\tilde{\omega}_1 t} + Z_2 \cdot e^{j\tilde{\omega}_2 t}$$

Die Definitionen für μ und ν bieten sich an um die Formel übersichtlicher zu gestalten.

$$\begin{aligned}2\pi\mu &:= \frac{R}{2L} \\ 2\pi\tilde{\nu} &:= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\end{aligned}$$

$I(t)$ lässt sich dann als

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} \cdot (Z_1 e^{j2\pi\tilde{\nu}t} + Z_2 e^{-j2\pi\tilde{\nu}t})$$

schreiben.

Um $I(t)$ weiter zu untersuchen muss nun im folgenden eine Fallunterscheidung gemacht werden. Denn je nach dem ob der Inhalt der Wurzel positiv oder negativ ist, ist die Wurzel entweder reel oder imaginär.

2.3 Fallunterscheidung

2.3.1 1.Fall

Zu erst wird der Fall

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

untersucht.

Hier ist $v \in \mathbb{R}$. Damit die Lösungsfunktion $I(t) \in \mathbb{R}$ ist, muss $Z_1 = \overline{Z_2}$ sein. Dies lässt sich durch den Ansatz

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{2} A_0 e^{j\eta} \\ Z_2 &= \frac{1}{2} A_0 e^{-j\eta} \end{aligned}$$

erreichen.

Die folgende Identität, die die komplexe e-Funktion enthält:

$$\frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} = \cos(\phi)$$

wird nun auf das Problem angewandt.

Es ergibt sich damit:

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cdot \cos(2\pi\nu t + \eta)$$

Aus diesem Term kann nun eine Beziehung für die Periodendauer bestimmt werden:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Mit der Näherung

$$\frac{1}{LC} \gg \frac{R^2}{4L^2}$$

entsteht hier die Thomsonsche Schwingungsformel

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Die Zeit T_{exp} beschreibt den Zeitraum in dem die Amplitude auf den e-ten Teil abfällt.

$$T_{\text{exp}} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}$$

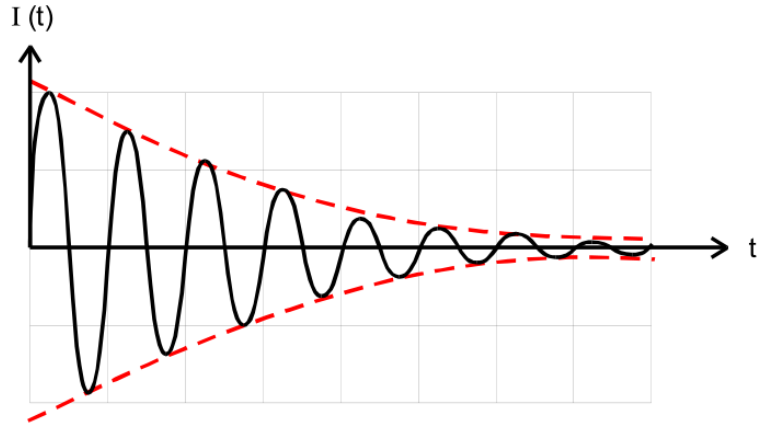


Abbildung 3: Ein Plot in dem eine gedämpfte Schwingung inklusive der einhüllenden Funktion skizziert ist[5].

In diesem exemplarischen Plot einer gedämpften Schwingung wird die rote Einhüllende durch den exponential Term $A_0 e^{-2\pi\mu t}$ und die Schwingung durch den cosinus Term $\cos(2\pi\nu t + \eta)$ beschrieben.

2.3.2 2. Fall

Der zweite Fall beschreibt:

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$$

Hier ist dann $\tilde{v} \in \mathbb{C}$. Für große Zeiten ergibt sich die Proportionalität:

$$I \sim e^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}$$

Ein Spezialfall für diesen Fall ist:

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{\text{ap}}^2}{4L^2}$$

Dadurch ist dann $\nu = 0$ und somit

$$I(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t} = Ae^{-\frac{t}{LC}}$$

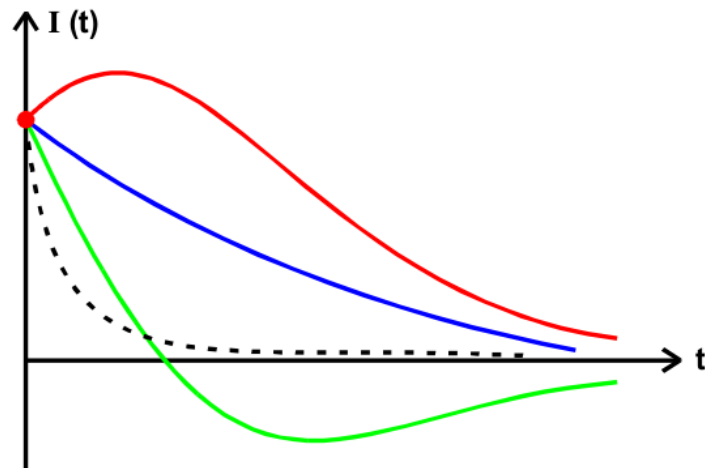


Abbildung 4: Ein Plot mit unterschiedlich abfallenden Funktionen [5].

Den in Abbildung 4 durch die gestrichelte Linie beschriebene Funktion, wird als Aperiodischer Grenzfall bezeichnet. Dies ist der Fall in dem die Amplitude am schnellsten und ohne nachfolgende Schwingungen auf 0 absinkt.

2.4 Erzwungene Schwingungen

In diesem Abschnitt werden LRC-Schwingkreise untersucht die von außen angeregt werden. Dazu wird, wie in Abbildung 5 dargestellt, eine Spannungsquelle, die eine sinusförmige Spannung liefert, an einen Stromkreis angeschlossen.

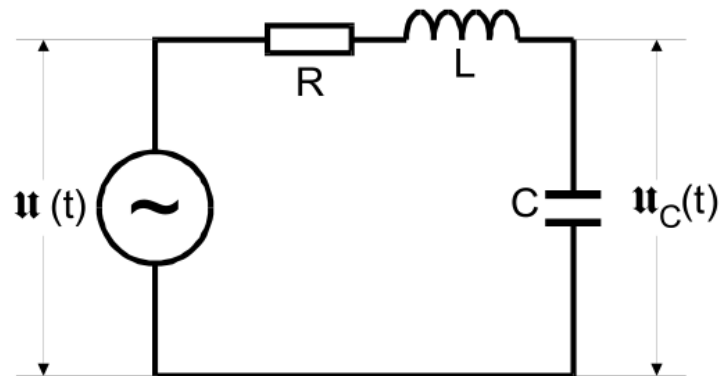


Abbildung 5: Schaltzeichnung einer erzwungenen Schwingung[5].

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t}$$

$u(t)$ ist hierbei die anregende Spannung.

Die Differentialgleichung hat nun also die Form:

$$L\dot{I} + RI + \frac{Q(t)}{C} = U_0 e^{j\omega t}$$

Durch einsetzen des folgenden Terms

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

ergibt sich dann:

$$LC\ddot{V}_C + RC\dot{V}_C + V_C = U_0 e^{j\omega t} \quad (4)$$

mit $A \in \mathbb{C}$ als Amplitude der Kondensatorspannung.

$$u_C(t) = A(\omega) e^{j\omega t} \quad (5)$$

Einsetzen von 5 in 4 liefert:

$$-LC\omega^2 A + j\omega RC A + A = U_0$$

Die Formel nach A umgestellt ergibt dann:

$$A = \frac{U_0}{1 - LC\omega^2 + j\omega RC} = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - j\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2}$$

oder

$$|A| = U_0 \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{((1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2)^2}} \quad (6)$$

Die Phase berechnet sich zu:

$$\tan(\phi(\omega)) = \frac{\text{Im}(A)}{\text{Re}(A)} = \frac{\omega RC}{1 - LC\omega^2}$$

bzw.

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (7)$$

Da der Betrag der gesuchten Lösungsfunktion $u_c(t)$ nach 5 gleich dem Betrag von A ist, entsteht aus 6 das Ergebnis:

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (8)$$

Somit ist die gesuchte Funktion für U_C in Abhängigkeit von ω , der Frequenz der Erregerspannung, gefunden.

Durch weiteres Untersuchen von 8 ergibt sich, dass U_C für $\omega \rightarrow \infty$ gegen 0 und für $\omega \rightarrow 0$ gegen das U_0 der Erregerspannung geht.

Jedoch gibt es auch ein ω bei dem das U_C ein Maximum erreicht, welches die Erregerspannung übertrifft. Dieses Phänomen wird als Resonanz bezeichnet und tritt bei der Resonanzfrequenz ω_{res} ein.

Berechnungen ergeben als Formel für ω_{res} :

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

Für:

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

ergibt sich ein Fall von besonderer Bedeutung. Für diesen Fall nähert sich ω_{res} nämlich an ω_0 , der Frequenz einer ungedämpften Schwingung, an.

In diesem Fall übertrifft U_C die Erregerspannung.

$$U_{C,\text{max}} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0$$

Somit kann $U_{C,\text{max}} \rightarrow \infty$ für $R \rightarrow 0$ gehen. Dies wird als ‚Resonanzkatastrophe‘ bezeichnet. Der Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$ wird auch als Resonanzüberhöhung oder Güte q des Schwingkreises bezeichnet. Die Schärfe der Resonanz der Resonanzkurve wird durch die Schnittpunkte ω_{\pm} , die jeweils den Ort an dem U_C auf einen Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ absinkt, beschrieben. Somit werden ω_+ und ω_- durch

$$\frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{U_0}{C \sqrt{\omega_{\pm}^2 R^2 + \left(\omega_{\pm}^2 L - \frac{1}{C}\right)}}$$

beschrieben.

Für $\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$ folgt für die Breite der Resonanzkurve:

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \quad (9)$$

Somit besteht auch folgende Beziehung zwischen der Güte und der Breite:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}$$

Im Gegensatz dazu ist im Fall der starken Dämpfung:

$$\frac{R^2}{2L^2} \gg \frac{1}{LC}$$

Hier fällt jetzt die Spannung U_C , ausgehend von U_0 , mit steigender Frequenz ω gegen 0. Bei hohen Frequenzen fällt die Spannung proportional zu $\frac{1}{\omega^2}$. Unter diesen Umständen

kann der RLC-Kreis auch als Tiefpass benutzt werden.

Als nächstes wird die Frequenzabhängigkeit der Phase untersucht. Aus 7 ist zu erkennen, dass für kleine ω die Kondensatorspannung und die Erregerspannung fast in Phase sind, jedoch bei hohen Frequenzen U_C eine etwa um π kleinere Phase als U hat. $\phi = \frac{-\pi}{2}$ gilt an der Stelle $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Aus 7 folgt ebenfalls, dass $\omega_{1,2}$, bei denen $\phi = \frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3\pi}{4}$ ist, folgende Beziehung erfüllen:

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

Daraus folgt dann auch:

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L} \quad (10)$$

Somit ist im Vergleich von 9 und 10 zu sehen, dass im Falle schwacher Dämpfung ω_1 und ω_2 mit $\omega_+ - \omega_-$ zusammenfallen.

3 Impedanz des Schwingkreises

3.1 Serienschwingkreis

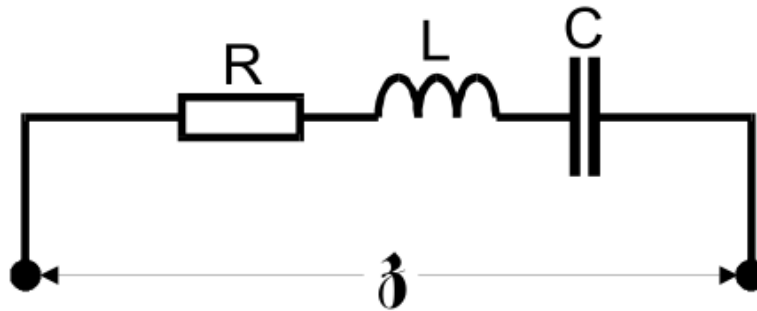


Abbildung 6: Der Serienschwingkreis als Zweipol, hier wird die Impedanz als r definiert[5].

Ein Schwingkreis lässt sich auch, wie in Abbildung 6 zu sehen, als Zweipol beschreiben. An seinen Enden kann nun ein frequenzabhängiger Widerstand r gemessen werden. Dieser wird als Impedanz bezeichnet.

Aufgrund der Phasenverschiebung zwischen der Spannung und dem Strom muss r als komplexe Zahl definiert werden :

$$r = X + jY$$

Hier sind X und Y reelle Widerstände, X ist der Wirkwiderstand und Y ist der Blindwiderstand oder die Reaktanz. Der Betrag

$$|r| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

wird als Scheinwiderstand bezeichnet. In der komplexen Zahlenebene wird der Verlauf der Größe $r(\omega)$ als Ortskurve bezeichnet.

r ist dort nun ein Pfeil vom Ursprung dessen Länge der Scheinwiderstand und der Winkel zur reellen Achse die Phasenverschiebung beschreibt.

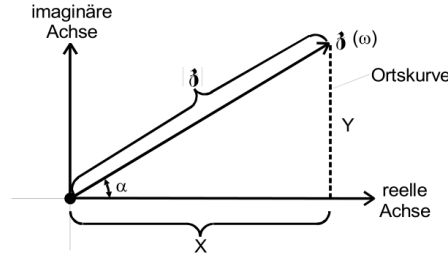


Abbildung 7: Eine Darstellung der Impedanz in der komplexen Zahlenebene[5].

Da die Elemente des Schwingkreises in Reihe geschaltet sind wird dieser als Serienschwingkreis bezeichnet. Die gesamte Impedanz r berechnet sich durch die Impedanzen der einzelnen Bauteile:

$$\begin{aligned} r_C &= -j \frac{1}{\omega C} \\ r_L &= j\omega L \\ r_R &= R_s \end{aligned}$$

Die gesamte Impedanz r_S berechnet sich also zu:

$$r_S = R_S + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Aufteilung in real und imaginär Teil ergibt:

$$\begin{aligned} X_S &= R_S \\ Y_S &= j\omega L - \frac{1}{\omega C} \end{aligned}$$

Damit ist

$$|r_S| = \sqrt{R_S^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

Da X_S nicht von ω abhängig ist schneidet die Ortskurve die x-Achse an der Stelle R_S . Der Scheinwiderstand selber ist bei $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ am geringsten, wächst jedoch bei $\omega \rightarrow 0$ und bei $\omega \rightarrow \infty$ gegen ∞ .

3.2 Parallelschwingkreis

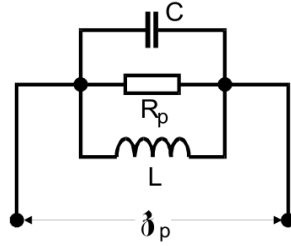


Abbildung 8: Schaltzeichnung eines Parallelschwingkreises, Impedanz wird hier als r_p bezeichnet.

Die Impedanz r_p des Parallelschwingkreises wie in Abbildung 8 berechnet sich zu:

$$r_p = \frac{\frac{1}{R_p} + j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)}{\frac{1}{R_p^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \quad (11)$$

und somit der Scheinwiderstand zu:

$$|r_p| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_p^2} \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}$$

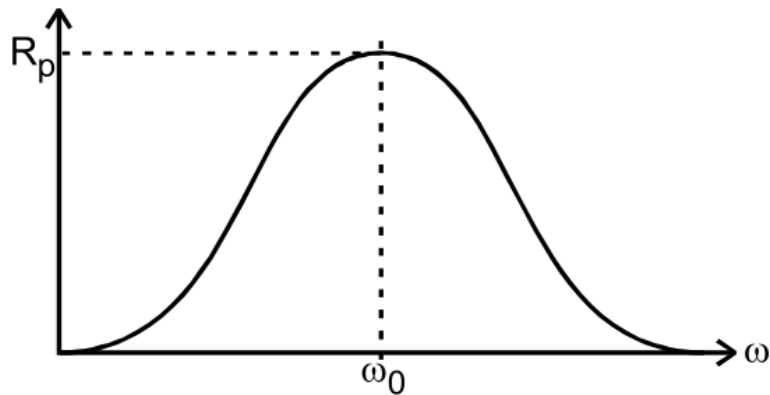


Abbildung 9: Der Scheinwiderstandes in Abhängigkeit von der Frequenz in einem $R - \omega$ - Diagramm aufgezeichnet[5].

Hier ist zu sehen, dass bei der Resonanzfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ der Scheinwiderstand im Gegensatz zum Serienschwingkreis am größten wird, mit dem Widerstand R_p 9.

Er ist jedoch bei $\omega \rightarrow 0$ und bei $\omega \rightarrow \infty$ vernachlässigbar. Gleichung 11 ergibt ebenfalls, dass die Ortskurve des Parallelresonanzkreises die Form eines Kreises mit dem Radius $\frac{R_p}{2}$

und dem Mittelpunkt $(0, \frac{R_P}{2})$ hat.
 Dies wird noch einmal im folgenden dargestellt.

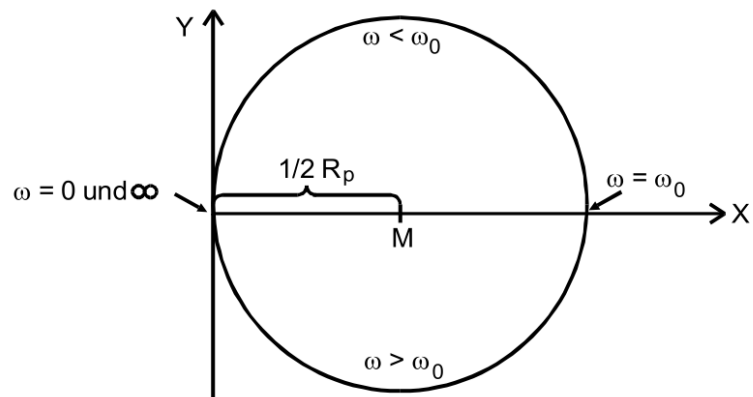


Abbildung 10: Ortskurve eines Parallelresonanzkreises.[5]

4 Durchführung

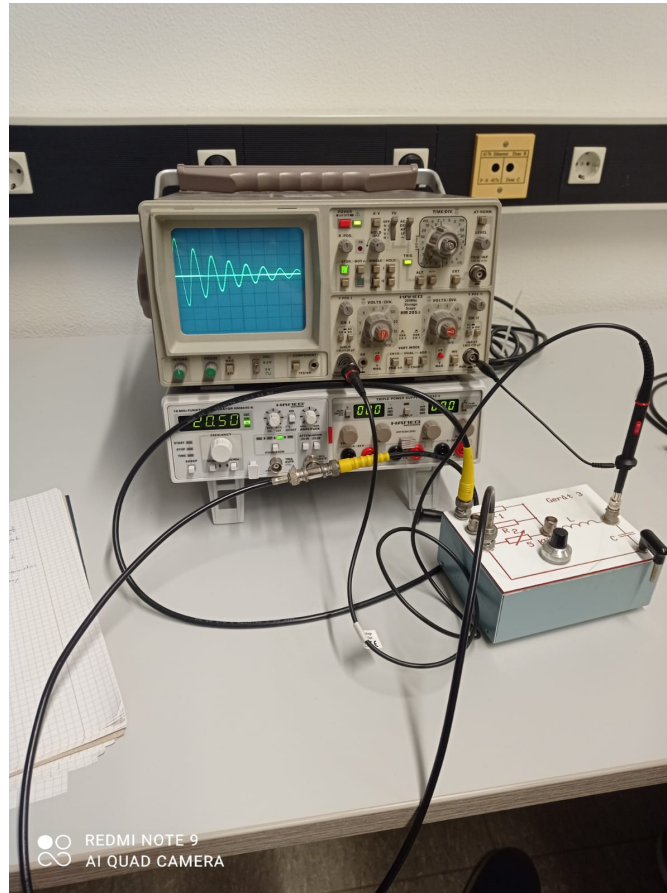


Abbildung 11: Ein Bild des Versuchsaufbau.

Der gesamte Versuch wird mit dem in Bild 11 gezeigten Geräten bearbeitet. Hier sind unten rechts die unterschiedlichen Schaltelemente zu sehen. Daneben ist unten der Spannungsgenerator und darauf das Oszilloskop zum Messen der Schwingungen.

Als erstes soll die Amplitude der Kondensatorspannung gemessen werden, um über dessen zeitlichen Verlauf den effektiven Dämpfungswiderstand zu bestimmen. Dazu wird ein Schaltkreis wie in Abbildung 12 aufgebaut. Der Nadelpulsgenerator und das Oszilloskop werden so eingestellt, dass die Amplitude der Kondensatorspannung um einen Faktor zwischen 3 und 8 abnimmt. Für die Messung wird der kleinere Widerstand genutzt.

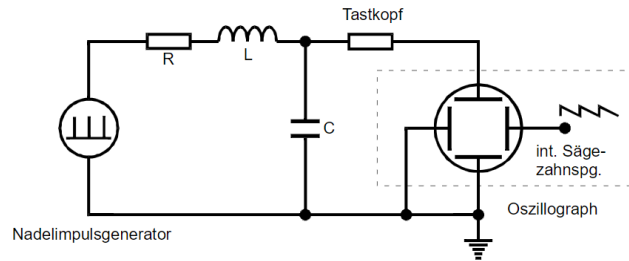


Abbildung 12: Aufbau eines RLC-Schwingkreises zur Bestimmung der Kondensatorspannung[5].

Als nächstes wird der Widerstand bestimmt bei dem der Spannungsabfall die Form des Aperiodischen Grenzfalles annimmt. Dazu wird der Versuchsaufbau wie in Abbildung 13 genutzt. Nun wird der regelbare Widerstand auf sein Maximum gestellt und dann solange reduziert bis das erste Mal ein Schwingfall eintritt. Der Widerstand wird jetzt langsam so weit erhöht bis die Amplitude der Kondensatorspannung gerade nicht mehr unter den Nullpunkt kommt. Dann kann an dem Widerstand R_{AP} abgelesen werden.

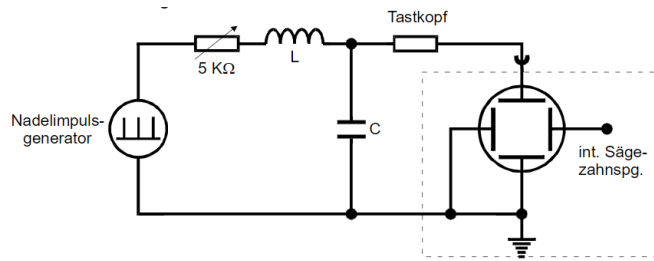


Abbildung 13: Aufbau zur Bestimmung von R_{AP} [5].

Die dritte Messreihe dient zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung, um diese Messung durchzuführen wird der Aufbau so umgebaut, dass sich die Schaltung wie in Abbildung 14 ergibt.

Zunächst wird die Erregerspannung U gemessen. Jetzt kann die Frequenz zwischen 100 und 100 000 variiert werden. In dem Bereich in dem die Kondensatorspannung ihr Maximum annimmt, werden die meisten Messdaten entnommen.

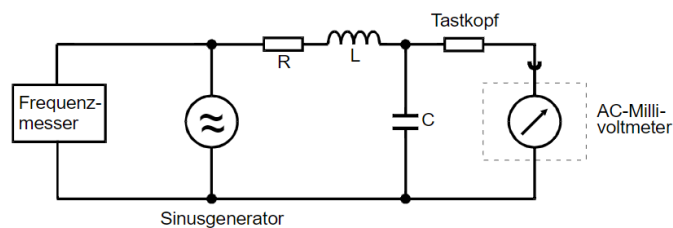


Abbildung 14: Aufbau zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung[5].

Im letzten Teil wird die Phasenverschiebung ϕ zwischen der Kondensatorspannung U_C und der Erregerspannung U in Abhängigkeit von der anregenden Frequenz bestimmt. Dazu wird ein Aufbau wie in Abbildung 16 aufgebaut. Jetzt werden auf dem Oszilloskop die Erregerspannung U und die Kondensatorspannung U_C geplottet.

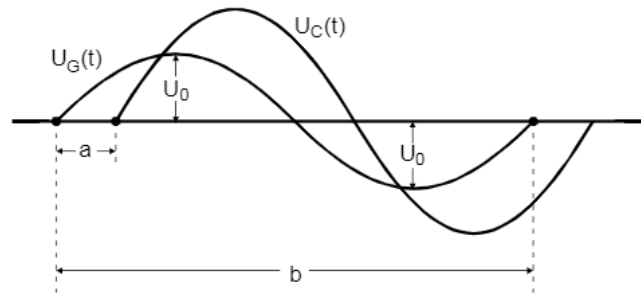


Abbildung 15: Erregerspannung und Kondensatorspannung geplottet[5].

Dies sollte dann wie in Abbildung 15 aussehen, hier wird der Abstand a zwischen den Nullpunkten und die Periodendauer b gemessen. b kann jedoch auch aus der Frequenz berechnet werden.

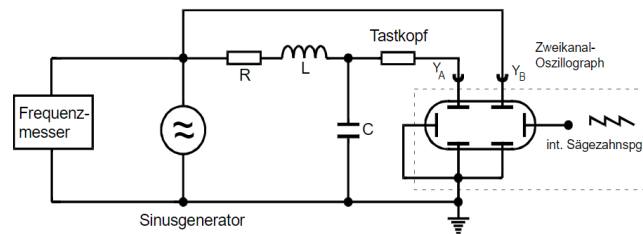


Abbildung 16: Aufbau zur Bestimmung der Phasenverschiebung[5].

5 Auswertung

Die Werte der Bauteile des Schwingkreises sind:

$$L = (16,78 \pm 0,09) \mu\text{H}$$

$$C = (2,066 \pm 0,006) \text{nF}$$

$$R_1 = (67,2 \pm 0,2) \Omega$$

$$R_2 = (682 \pm 1) \Omega$$

5.1 Schwingungskurve

Aus der Schwingungskurve lässt sich mit Hilfe der Messwerte in der Tabelle 1 eine einhüllende Funktion bestimmen. Dafür wird eine Fit-Funktion $U(t)$ bestimmt. Sie hat die Form:

$$U(t) = A_0 e^{-\mu t}$$

Da die Einhüllende an der x-Achse gespiegelt werden kann die Ausgleichsrechnung mit den Beträgen der Werte für U_{Amp} durchgeführt werden. Die Konstanten bestimmen sich damit zu:

$$A_0 = (13,9205 \pm 0,2535) \text{ V} \quad \mu = (1846,244\,730 \pm 58,380\,141) \frac{1}{\text{s}}$$

Die Messwerte und der Fit ist in Abbildung 17 abgebildet.

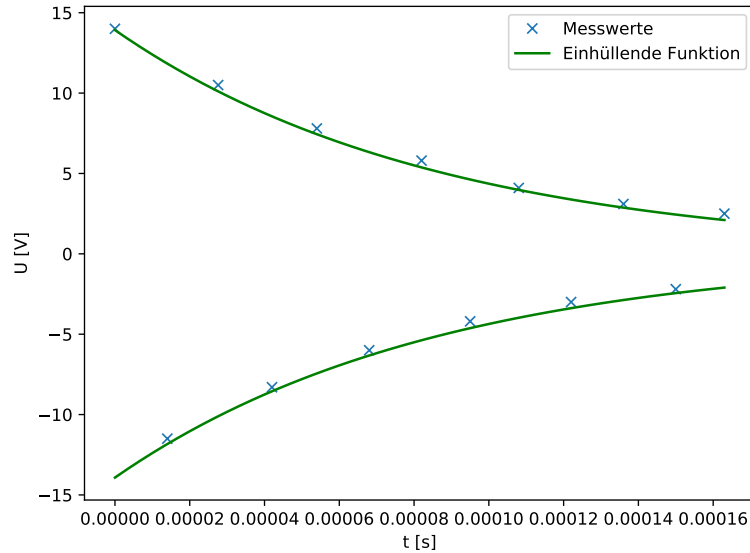


Abbildung 17: Die Messwerte der gedämpften Schwingung mit der einhüllenden Fit-Funktion.

Mit diesen Werten lässt sich dann der der effektive Widerstand und die Abklingzeit des Schwingkreises bestimmen. Dafür werden die folgenden Gleichungen genutzt:

$$R_{\text{eff}} = \mu \cdot 4\pi L$$

$$R_{\text{eff}} = (389,3060 \pm 12,4861) \Omega$$

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu}$$

$$T_{\text{ex}} = (86,204\,683\,861\,7 \pm 2,725\,880\,023\,2) \mu\text{s}$$

Die Abweichung des genutzten Widerstandes von R_{eff} beträgt:

$$R_{\text{eff}} - R_1 = (322,1060 \pm 12,4877) \Omega$$

Eine Abweichung von 50Ω wäre zu erwarten gewesen, da dies der Innenwiderstand des Generators ist. Die tatsächliche Abweichung von $\approx 300 \Omega$ könnte sich über ein Problem mit dem Generator erklären, welches erst bei späteren Messungen aufgefallen ist. Da diese Messung noch mit dem „defekten“ Nadelimpulsgenerator durchgeführt wurde könnte er für die Abweichung verantwortlich sein.

Die nachfolgenden Rechnungen werden deshalb mit einem Widerstand von $R_1 + 50 \Omega$ durchgeführt.

In der folgenden Tabelle sind nochmal die Messwerte aufgetragen.

$U_{\text{Amp}} / \text{V}$	$t_{\text{Amp}} / \mu\text{s}$
14,0	0,0
-11,5	14,0
10,5	27,6
-8,3	42,0
7,8	54,00
-6,0	68,0
5,8	82,0
-4,2	95,0
4,1	108,0
-3,0	122,0
3,1	136,0
-2,2	150,0
2,5	163,0

Tabelle 1: Die Messwerte der Amplitudenspannung mit ihren korrespondierenden Zeiten.

5.2 Aperiodischer Grenzfall

Die Messung zur Bestimmung des Widerstandes, bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt, ergab:

$$R_{\text{ap}} = 1925 \, \Omega$$

Der theoretische Wert und die relative Abweichung von ihm, im Bezug auf den Theoriewert, berechnet sich dann zu:

$$R_{\text{ap theo}} = \sqrt{\frac{4L}{C}} = (5699,8157 \pm 92,3168) \, \Omega$$
$$\frac{R_{\text{ap theo}} - R_{\text{ap}}}{R_{\text{ap theo}}} = (66,22698 \pm 0,54700) \, \%$$

Die Abweichung der Werte lässt sich durch die in der Rechnung nicht beachteten Widerstände der anderen Bauteile erklären. Allerdings kann damit keine Abweichung dieser Größe erklärt werden. Dafür kann also wieder der Generator Verantwortlich gemacht werden.

5.3 Resonanzüberhöhung

Im folgenden wird die Resonanzüberhöhung untersucht. Die Messwerte der mit der angelegten Spannung normierten Kondensatorspannung und ihrer korrespondierenden Frequenzen finden sich in Tabelle 3.

Aus diesen Messwerten lässt sich der theoretische Faktor für die Resonanzüberhöhung q_{theo} bestimmen. Die experimentelle Resonanzüberhöhung lässt sich durch das Ablesen des Maximums aus den Messwerten bestimmen.

Dies entspricht dem Wert $q_{\text{exp}} = 3.8$.

q_{theo} berechnet sich über die folgenden Gleichungen, wobei R dem Gesamtdämpfungswiderstand entspricht.

$$q_{\text{theo}} = \frac{1}{\omega_0 RC} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$
$$\Rightarrow q_{\text{theo}} = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} = 24,3 \pm 0,4$$

Dies führt zu einer relativen Abweichung des experimentellen vom theoretischen Wert von $(84,37 \pm 0,25) \, \%$.

In der folgenden Abbildung sind die Messwerte halblogarithmisch aufgetragen.

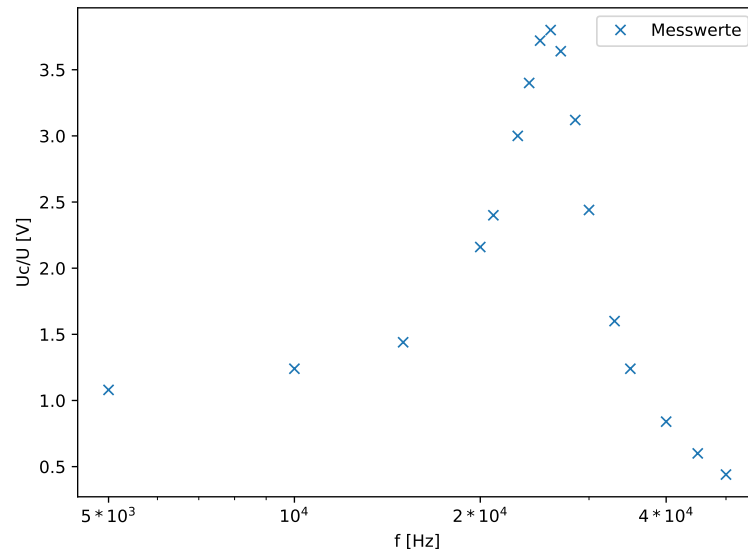


Abbildung 18: Die Messwerte zur Resonanzüberhöhung halblogarithmisch dargestellt.

Für die Bestimmung der experimentellen Halbwertsbreite werden die Messwerte um den Peak mit einer quadratischen Funktion angenähert und die x-Werte bei den Spannungswerten $\frac{\left(\frac{U}{U_0}\right)_{\max}}{\sqrt{2}}$ bestimmt. Dies wird in der Abbildung 19 noch einmal veranschaulicht. Dort sind die Messwerte des relevanten Wertebereiches, inklusive aller zuvor erwähnten Funktionen, linear dargestellt. Außerdem sind die Schnittgerade bei $\frac{\left(\frac{U}{U_0}\right)_{\max}}{\sqrt{2}}$ und die quadratische Fit-Funktion eingezeichnet. Der Fit besitzt dabei die Form:

$$f(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$

mit

Parameter	Bestimmte Werte		
A	$-8,31 \cdot 10^{-8}$	$\pm 0,51 \cdot 10^{-8}$	s ²
B	0,004 32	$\pm 0,000 28$	s
C	-52	± 4	

Tabelle 2: Berechnete Werte für die quadratische Fit-Funktion gerundet auf die fünfte Nachkommastelle.

Die Schnittpunkte mit der Schnittgeraden lassen sich über gleichsetzen und auflösen mit der p,q-Formel bestimmen.

Mit diesen Werten lässt sich dann die experimentelle Halbwertsbreite

$$\omega_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}}$$

$$\omega_1 = 22\,395,6 \text{ Hz} \qquad \omega_2 = 29\,532,0 \text{ Hz}$$

$$(\nu_+ - \nu_-)_{\text{exp}} = \omega_1 - \omega_2 = 7,1364 \text{ kHz}$$

Eingezeichnet sind diese Werte noch einmal in der folgenden Abbildung.

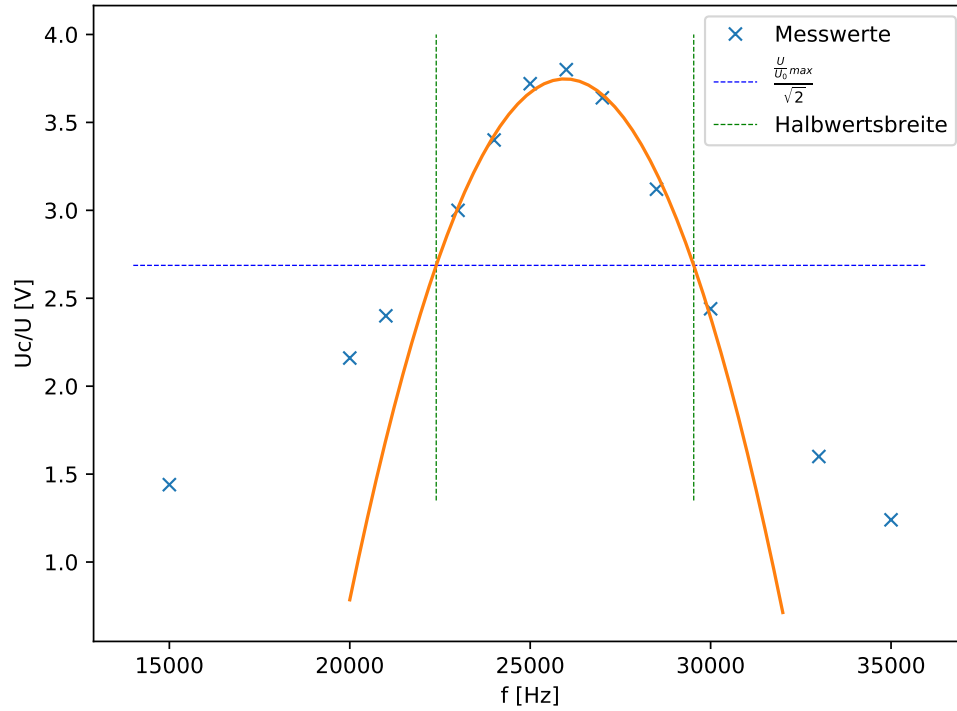


Abbildung 19: Die Messwerte zur Resonanzüberhöhung linear dargestellt. Zusätzlich ist noch die Fit-Funktion, die experimentelle Halbwertsbreite und die Schnittgerade abgebildet.

Die theoretische Halbwertsbreite berechnet sich mit der folgenden Formel:

$$(\nu_+ - \nu_-)_{\text{theo}} \approx \frac{R}{L}$$

$$\Rightarrow (\nu_+ - \nu_-)_{\text{theo}} \approx (6,98 \pm 0,04) \text{ kHz}$$

Dies führt zu einer relativen Abweichung vom Theoriewert von:

$$\frac{(\nu_+ - \nu_-)_{\text{exp}} - (\nu_+ - \nu_-)_{\text{theo}}}{(\nu_+ - \nu_-)_{\text{theo}}} = (2,2 \pm 0,6) \%$$

In der folgenden Tabelle finden sich dann nochmal die Messwerte der normierten Kondensatorspannung und der dazugehörigen Frequenzen.

$\frac{U}{U_0}$	f / kHz
1,08	5
1,24	10
1,44	15
2,16	20
2,40	21
3,00	23
3,40	24
3,72	25
3,80	26
3,64	27
3,12	28
2,44	30
1,60	33
1,24	35
0,84	40
0,60	45
0,44	50

Tabelle 3: Die Messwerte Spannung im Verhältnis zur angelegten Spannung und die dazugehörigen Frequenzen.

5.4 Phasenverschiebung

Die Messwerte zur Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen der Erregerspannung und der Kondensatorspannung sind in Tabelle 4 aufgetragen.

Dabei wurde die Zeit Δt mit der Formel $\Delta\phi = \Delta t \cdot f \cdot 2\pi$ in einen Winkel umgerechnet.

f / kHz	$\Delta t / \mu\text{s}$	ϕ / rad
5,0	0,0	0,000
10,0	1,0	0,063
12,0	1,5	0,113
14,0	1,5	0,132
20,0	0,0	0,000
25,0	0,5	0,079
30,0	1,0	0,188
35,0	1,5	0,330
35,7	3,0	0,674
36,2	4,0	0,911
36,7	6,0	1,385
37,5	8,0	1,885
38,0	10,0	2,388
38,2	11,0	2,644
38,7	11,0	2,678
40,0	11,0	2,765
42,5	11,5	3,071
45,0	11,0	3,110

Tabelle 4: Die Messwerte der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Erreger-spannung bei unterschiedlichen Frequenzen. Δt ist dabei die Zeitdifferenz zwischen zwei Amplituden und ϕ diese umgewandelt in einen Winkel.

Grafisch dargestellt finden sich die Messwerte in der Abbildung 20. Dabei zeigt sich, dass für niedrige Frequenzen, bis auf eine kleine auftretende aber direkt wieder abflachende Phasenverschiebung, keine Verschiebung auftritt.

Erst für Frequenzen ab 20 kHz tritt eine wesentliche Phasenverschiebung zwischen den beiden Spannungen auf.

Diese steigt bis zu einer Frequenz von 40 kHz, wo sie dann konstant bei einem Wert von π bleibt.

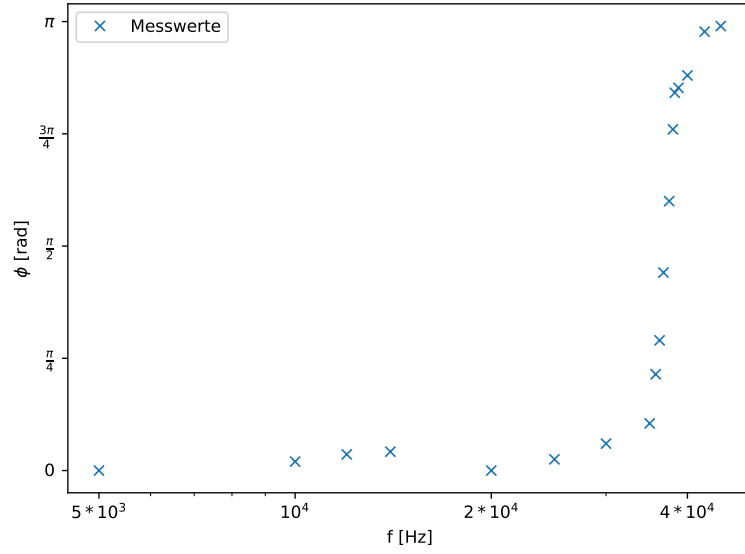


Abbildung 20: Die Messwerte zur Phasenverschiebung halblogarithmisch dargestellt.

Diese Form ließe sich durch eine $\arctan()$ -Funktion beschreiben. Allerdings kann das ganze auch besser mit einer Sigmoids-Funktion bewerkstelligt werde, da diese gar keinen Schnittpunkt mit der x-Achse besitzt und ansonsten eine sehr ähnliche Form hat.

Mathematisch besitzt sie die Form:

$$\phi(t) = \frac{A}{1 + \exp(-(x - B)/D))} + C \quad (12)$$

Wenn nun der Bereich um die starke Steigung linear dargestellt wird, lässt sich auf ihm die Sigmoids-Funktion fitten. Dies führt zu den Funktionswerten:

Parameter	Bestimmte Werte
A	2,941 67 ± 0,086 34 rad
B	36 988,063 55 ± 84,811 32
C	0,088 72 ± 0,055 78 rad
D	838,785 31 ± 67,359 11

Tabelle 5: Berechnete Werte für die Sigmoids-Funktion gerundet auf die fünfte Nachkommastelle.

Eingezeichnet wird dies in der Abbildung 21. Dort sind auch noch die Schnittgeraden der charakteristischen Punkte w_1 , w_2 und w_{res} dargestellt.

An diesen Punkten hat die Sigmoids-Funktion die Werte $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$.

Berechnet werden die Schnittpunkte über das umstellen der Funktion 12 nach x.

$$x = (-D \cdot \ln(A/(\phi - C) - 1) + B$$

Die Ergebnisse dieser Rechnung sind, zusammen mit den später berechneten theoretischen Werten, in 6 aufgetragen.

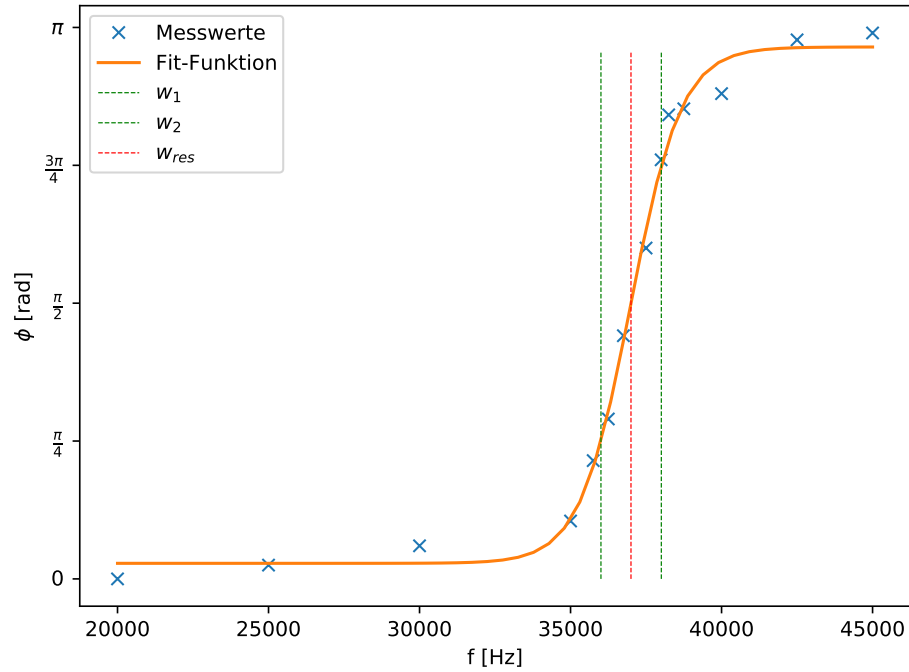


Abbildung 21: Eine lineare Darstellung der Messwerte und die charakteristischen Punkte, wobei die Sigmoids-Funktion und die charakteristischen Punkte auch dargestellt werden.

Die theoretischen Werte für die drei Frequenzen lassen sich mit den folgenden zwei Formeln bestimmen.

Dabei ist R wieder der Gesamtwiderstand.

$$w_{1,2 \text{ theo}} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

$$W_{\text{res theo}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Die Ergebnisse dieser Rechnung finden sich, wie zuvor erwähnt, in der folgenden Tabelle wieder.

Frequenz	Theoretischer Wert kHz			Experimenteller Wert kHz	Abweichung von der Theorie %		
w_{res}	16,98	\pm	0,28	3,70	78,20	\pm	0,35
w_1	17,34	\pm	0,28	3,60	79,23	\pm	0,33
w_2	16,64	\pm	0,27	3,80	77,2	\pm	0,40

Tabelle 6: Vergleich der charakteristischen Frequenzen.

Dabei ist w_{res} die für den Wert $\frac{\pi}{2}$, w_1 für $\frac{\pi}{4}$ und w_2 für $\frac{3\pi}{4}$.

Auch hier weichen die experimentellen Werte wieder sehr stark von den theoretischen ab. Da für diese Messung ein neuer, voll funktionstüchtiger Nadelimpulsgenerator zur Verfügung gestellt wurde kann dieser nicht wieder als Grund für starke Abweichungen genannt werden.

6 Diskussion

Die Abweichung der theoretischen Werte, von den aus den Messwerten errechneten, ist für fast alle Werte recht groß. Für die Berechnung des effektiven Widerstandes und des aperiodischen Grenzfall kann das ganze noch mit dem „defekten“ Nadelimpulsgenerator erklärt werden.

Bei dem effektiven Widerstand wurde, Generatorinnenwiderstand außen vor gelassen, eine Abweichung von $\approx 300\Omega$ errechnet. Der Wert für den Generatorinnenwiderstand ist so viel größer als der zu Erwartende. Zurückführen lässt sich dies auf das schnelle Abklingen der Schwingung. Dies könnte eine Folge des Generators sein.

Der experimentell bestimmte Wert für den Widerstand bei dem der aperiodische Grenzfall auftritt zeigt eine Abweichung von $\approx 66\%$ vom theoretischen Wert.

Da dieser allerdings nur von den Bauteildaten des Schwingkreises abhängt und dieser Widerstand nicht direkt von der Spannung oder Frequenz abhängt ist es eher unwahrscheinlich dass der Generator dafür verantwortlich ist.

Diese Abweichung ließe sich eher durch die nicht beachteten Widerstände der anderen Bauteile oder durch, durch Alterung erzeugte Abweichung von den angegebenen Bauteildaten, erklären.

Bei dem Faktor der Resonanzüberhöhung gab es auch wieder eine hohe Diskrepanz zwischen dem theoretischen und dem experimentell bestimmten Wert. Die Abweichung bewegte sich hier in einer Größenordnung von $\approx 85\%$.

Da die Messreihe, die für diesen Wert benötigt wurde, zur Verfügung gestellt wurde kann hier aus Unkenntnis nicht zu möglichen experimentellen Ursachen gesagt werden. Hier könnte aber auch wieder mit abweichenden Bauteildaten argumentiert werden.

Dagegen spricht allerdings, dass bei der Bestimmung der Halbwertsbreite für diese Mess-

reihe nur eine Abweichung von $\approx 2\%$ aufgetreten ist.

Die Form der Messreihe, wie sie in Abb. 19 sichtbar ist, ist also sehr gut, nur das Maximum der normierten Spannung sollte höher liegen.

Bei der Phasenverschiebung weichen alle experimentell ermittelten Werte in einer Größennordnung von $\approx 78\%$ ab.

Die Form der Messwertverteilung und die Verteilung der charakteristischen Punkte, wie in 21 dargestellt, entspricht dabei der zu erwartenden Form. Die ermittelten Werte sind im Vergleich mit den theoretischen fast um einen Faktor 10 zu klein.

Dies könnte, da die generelle Form stimmt, auf einen Fehler beim Messen oder eine nicht beachtete Dämpfung, wie einen nicht beachteten Widerstand, zurück führbar sein.

Alles in allem sind die Messwerte aber sehr solide, da sie trotz großer Abweichung von den theoretischen Werten, immer sehr gut die untersuchten Phänomene darstellen.

7 Anhang

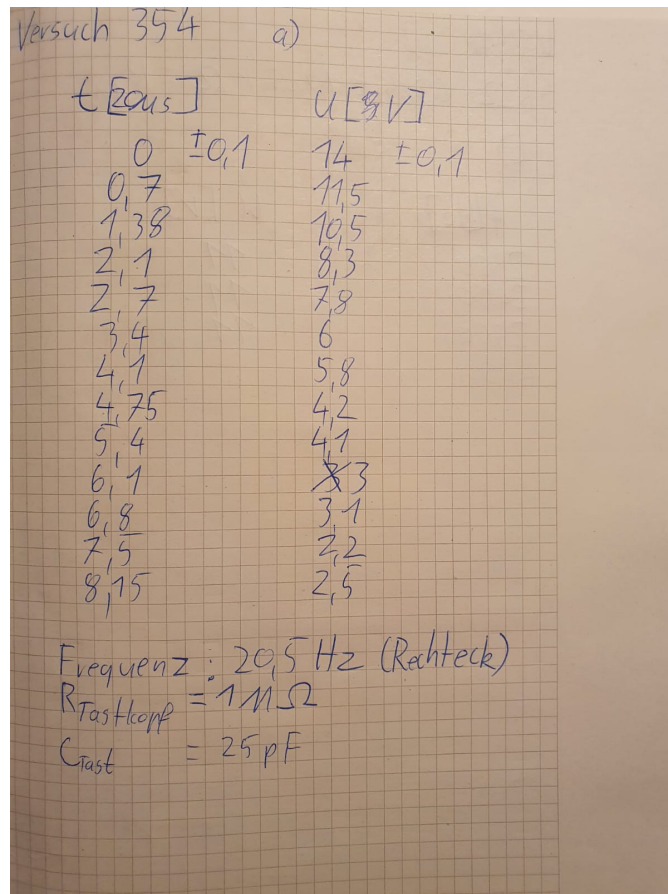


Abbildung 22: Aufzeichnung der Messwerte.

V354 b)

$$5\text{ k}\Omega \cdot 0,385 = 1,925\text{ k}\Omega = R_{Ap}$$

Abbildung 23: Aufzeichnung der Messwerte.

12

4.3 Aufgabenteil c, Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung U_C

Die Amplituden der Spannung U_C werden in Abhängigkeit von der Frequenz f gemessen. Folgende Werte ergeben sich:

Tabelle 2: Amplituden im Verhältnis zur Frequenz.

f / kHz	$\frac{U}{U_0} / V$
5	1,08
10	1,24
15	1,44
20	2,16
21	2,40
23	3,00
24	3,40
25	3,72
26	3,80
27	3,64
28,5	3,12
30	2,44
33	1,60
35	1,24
40	0,84
45	0,60
50	0,44

Nun wird die Amplitude gegen die Frequenz aufgetragen. Zu sehen in Abbildung 19.

REDMI NOTE 9
AI QUAD CAMERA

Abbildung 24: Aufzeichnung der Messwerte.

V35 4
d)

f [Hz]	ϕ
100	0
300	0
500	0
700	0
1000	0
1500	0
2000	0

f [kHz]	Δt
5	0 ns
10	1 ns
12	1.5 ns
14	1.5 ns
20	0 ns
25	0.5 ns
30	1 ns
35	1.5 ns
37.5	8 ns
40	11 ns
42.5	11.5 ns
45	11 ns
36.25	4 ns
38.75	11 ns
38.25	11 ns

36.75	6 ns
35.75	3 ns
38	10 ns

Abbildung 25: Aufzeichnung der Messwerte.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [5] *Versuchsanleitung zu Versuch V354 "Gedämpfte und erzwungene Schwingungen"*. Fakultät Phyik, TU Dortmund. 2020.