

Versuch Nr. 354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

1. Problemstellung

Das hier beschriebene Experiment stellt in gewisser Weise eine Erweiterung des zuvor erwähnten dar: Während der RC-Kreis nur einen Energiespeicher - nämlich die Kapazität C - enthält, wird hier ein System, das aus zwei Energiespeichern besteht, betrachtet. Als zweiter Speicher dient eine Induktivität L , realisiert in einer Spule (siehe Abb.1). Wenn zu einem Zeitpunkt auf irgendeine Weise ein bestimmter Energiebetrag

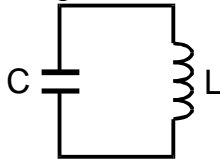


Abb.1: Ungedämpfter Schwingkreis

in den Schaltkreis hineingepumpt wird, besteht jetzt die Möglichkeit, dass die Energie ständig zwischen den beiden Speichern hin und her pendelt. Der Strom $I(t)$ wechselt also periodisch sein Vorzeichen – anders als beim RC-Kreis, wo er nur in einer Richtung fließt und mit der Zeit abklingt. Das System aus Kapazität und Induktivität kann also periodische Schwingungen ausführen. Ist im Schaltkreis kein energieverbrauchendes Element vorhanden, bleibt der Energieaustausch zeitlich unbegrenzt erhalten. Man bezeichnet diesen Vorgang als **ungedämpfte Schwingung**.

Baut man nun in den Schaltkreis einen ohmschen Widerstand R ein (siehe Abb.2), so wird in ihm fortwährend und irreversibel elektrische Energie in Joulesche Wärme umge-

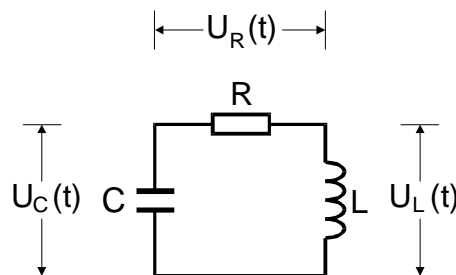


Abb.2: Gedämpfter Schwingkreis

wandelt. Das bedeutet, dass die gesamte elektrische Energie im Schaltkreis mit der Zeit abnimmt, und die Amplitude sowohl des Stromes als auch der Spannung am Kondensator eine monoton fallende Funktion der Zeit werden. Man spricht jetzt von einer **gedämpften Schwingung**.

Im ersten Teil dieses Experimentes sollen gedämpfte elektrische Schwingungen näher untersucht werden. Insbesondere interessiert hier das Zeitgesetz, nach dem die Amplitude der Kondensatorspannung abnimmt. Die Messdaten sollen mit Ergebnissen, die aus der Lösung der zugehörigen Schwingungsdifferentialgleichung folgen, verglichen werden.

Der zweite Teil des Experimentes befasst sich mit Erscheinungen, die auftreten, wenn an einen Schwingkreis von außen eine Spannung mit sinusförmiger Zeitabhängigkeit

angelegt wird. Er wird dann mit der Frequenz an der angelegten Spannung schwingen. Man spricht daher von **erzwungenen Schwingungen**. Hierbei tritt ein spezielles Phänomen auf, nämlich dann, wenn die Energiezufuhr von außen in einem „geeigneten Rhythmus“ erfolgt, der von den Daten des Schwingkreises abhängt. Es gelingt dann, ein Maximum an Energie in das System hineinzupumpen, wodurch die Stromamplitude im Schwingkreis ihren höchsten Wert erreicht. Man spricht dann von der **Resonanz** des Schwingkreises. Diese Erscheinung soll ebenfalls im Experiment ausführlich untersucht und die Ergebnisse mit Berechnungen verglichen werden.

2. Aufstellung und Lösung der Differentialgleichung für eine gedämpfte Schwingung

Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz gilt für die drei Spannungen im Schaltkreis nach Abb.2

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0 \quad .$$

Da nun

$$U_R(t) = R I(t) \quad ,$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (Q(t) = \text{Ladung auf dem Kondensator})$$

und

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} \quad (\text{Induktionsgesetz})$$

ist, folgt weiter

$$(1) \quad L \frac{dI}{dt} + R I + \frac{Q}{C} = 0 \quad .$$

Unter Beachtung von

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

erhält man durch Ableitung von (1) nach der Zeit die gesuchte Differentialgleichung für eine gedämpfte Schwingung in der Form

$$(2) \quad \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0$$

Zur Lösung, dieser linearen, homogenen Differentialgleichung macht man den Ansatz

$$(3) \quad \mathfrak{I}(t) = \mathfrak{A} e^{j\tilde{\omega} t} \quad .$$

($j = \sqrt{-1}$, \mathfrak{A} und $\tilde{\omega}$ komplexe Zahlen)

Setzt man (3) in (2) ein, so erhält man

$$\left(-\tilde{\omega}^2 + j \frac{R}{L} \tilde{\omega} + \frac{1}{LC} \right) \mathfrak{A} e^{j\tilde{\omega} t} = 0 \quad .$$

Durch den Ansatz (3) ist die Differentialgleichung (2) für ein beliebiges \mathfrak{A} und für alle Werte von t identisch erfüllt, wenn $\tilde{\omega}$ der sogenannten **charakteristischen Gleichung**

$$\tilde{\omega}^2 - j \frac{R}{L} \tilde{\omega} - \frac{1}{LC} = 0$$

genügt. Die Konstante $\tilde{\omega}$ muss demnach einen der beiden Werte

$$\tilde{\omega}_{1,2} = j \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

annehmen. Die Gesamtheit der Lösungen der Differentialgleichung (2) lässt sich somit darstellen durch

$$\mathfrak{Z}(t) = \mathfrak{A}_1 e^{j\tilde{\omega}_1 t} + \mathfrak{A}_2 e^{j\tilde{\omega}_2 t} \quad .$$

($\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ sind beliebige komplexe Zahlen)

Es ist zweckmäßig die Abkürzungen

$$2\pi\mu := \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad 2\pi\tilde{\nu} := \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad .$$

einzuführen. $\mathfrak{Z}(t)$ lässt sich dann schreiben als

$$(4) \quad \mathfrak{Z}(t) = e^{-2\pi\mu t} \left(\mathfrak{A}_1 e^{j2\pi\tilde{\nu} t} + \mathfrak{A}_2 e^{-j2\pi\tilde{\nu} t} \right) \quad .$$

Die Gestalt von $\mathfrak{Z}(t)$ hängt nun wesentlich davon ab, ob $1/LC$ größer oder kleiner als $R^2/4L^2$ ist, d.h. ob $\tilde{\nu}$ reell oder imaginär ist. Für die weitere Diskussion wird daher folgende Fallunterscheidung getroffen:

1.Fall: Sei

$$1/LC > R^2/4L^2 \quad , \quad \text{d.h. } \tilde{\nu} \text{ reell} \quad .$$

Damit die Lösungsfunktion $\mathfrak{Z}(t)$ reell wird, muss dann

$$\mathfrak{A}_1 = \overline{\mathfrak{A}_2}$$

sein. Das lässt sich erreichen durch den Ansatz

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2} A_0 e^{j\eta} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2} A_0 e^{-j\eta} \quad .$$

(A_0, η reell)

Für $\mathfrak{Z}(t)$ erhält man dann unter Benutzung der Eulerschen Formel

$$\frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} = \cos \varphi$$

das Ergebnis, dass der Klammerausdruck in (4) eine rein oszillatorische Funktion darstellt, also

$$(5) \quad \mathbf{I}(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta) \quad .$$

Die Gleichung (5) stellt eine "**gedämpfte Schwingung**" dar, d.h. eine harmonische Schwingung mit der Frequenz ν , deren Amplitude mit zunehmender Zeit exponentiell gegen null geht. Die Schwingungsdauer hat den Wert

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}} \quad .$$

Sie nähert sich dem Wert

$$(5a) \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

(Thomsonsche Schwingungsformel)

der ungedämpften Schwingung an, wenn $R^2/4L^2$ klein gegen $1/LC$ wird. Die Abnahme-
geschwindigkeit der Amplitude ist durch die Größe $2\pi\mu = R/2L$ charakterisiert. Nach der
Zeit

$$T_{\text{ex}} := \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}$$

hat die Amplitude auf den e-ten Teil ihres ursprünglichen Wertes abgenommen. T_{ex} be-
zeichnet man auch als Abklingdauer.

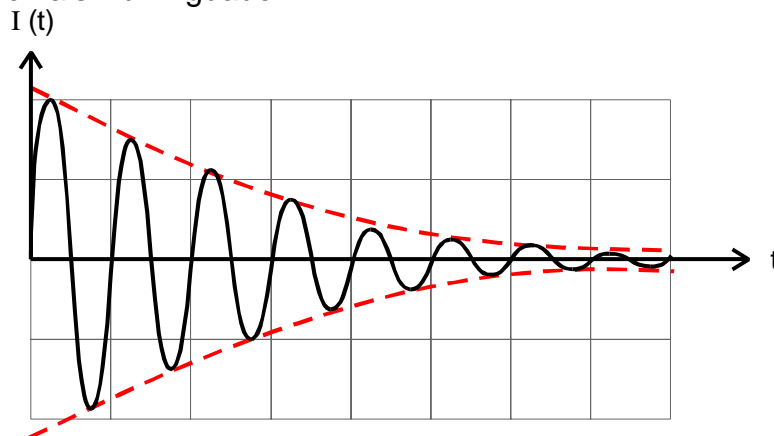


Abb.3: Darstellung einer gedämpften Schwingung (Die Einhüllende dieser Kurve wird durch $\pm e^{-2\pi\mu t}$ beschrieben.)

2.Fall: Sei

$$1/LC < R^2/4L^2 \quad \text{d.h. } \tilde{\nu} \text{ imaginär}$$

In der Gleichung (4) kommen dann nur noch reelle Exponentialfunktionen vor. Die Lösung $I(t)$ enthält keinen oszillatorischen Anteil mehr. Es liegt der Fall der **aperiodischen Dämpfung** vor. Je nach Wahl der Integrationskonstanten A_1 und A_2 kann $I(t)$ zunächst einen Extremwert erreichen oder sofort monoton gegen null gehen (siehe Abb.4, durchgezogene Linien). Nach hinreichend großer Zeit verläuft $I(t)$ etwa proportional zu

$$\exp\left\{-\left(R/2L - \sqrt{R^2/4L^2 - 1/LC}\right)t\right\},$$

das heißt, es liegt ein einfaches Relaxationsverhalten vor, so wie es in V353, Kap.1 beschrieben wurde.

Von Bedeutung ist der Spezialfall:

$$1/LC = R_{\text{ap}}^2/4L^2 \quad \text{d.h. } \nu = 0,$$

dann wird

$$I(t) = A e^{-\frac{R}{2L}t} = A e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}.$$

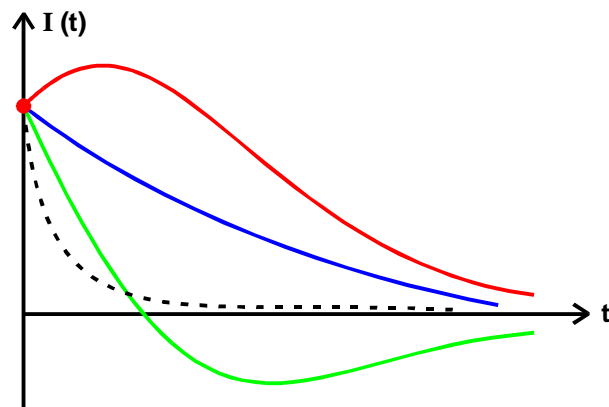


Abb.4: Möglicher Zeitverlauf des Stromes in einem Schwingkreis mit aperiodischer Dämpfung

Man nennt diesen Fall den **aperiodischen Grenzfall**. Hier geht $I(t)$ ohne Überschwingen am schnellsten gegen null (gestrichelte Kurve in Abb.4).

Gleichung (2) ist ein Beispiel für eine lineare Differentialgleichung 2.Ordnung. Diese sind in der Physik sehr verbreitet. Man kann damit Schwingungsvorgänge in den unterschiedlichsten Disziplinen beschreiben. Etwas vereinfacht kann man sagen, dass sie immer dann gültig sind, wenn die Periodendauer unabhängig von der Amplitude ist. Ein Beispiel aus der Mechanik soll im Folgenden noch kurz dargestellt werden. Ein System, das aus einer Masse m besteht, die an zwei ideal elastischen Federn (Federkonstante D) aufgehängt ist und eine perforierte Platte durch eine viskose Flüssigkeit (Reibungskonstante S) bewegt, lässt sich durch die Differentialgleichung

$$(6) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + S \frac{dx}{dt} + D x = 0$$

(x Auslenkung der Masse m aus der Gleichgewichtslage)

beschreiben.

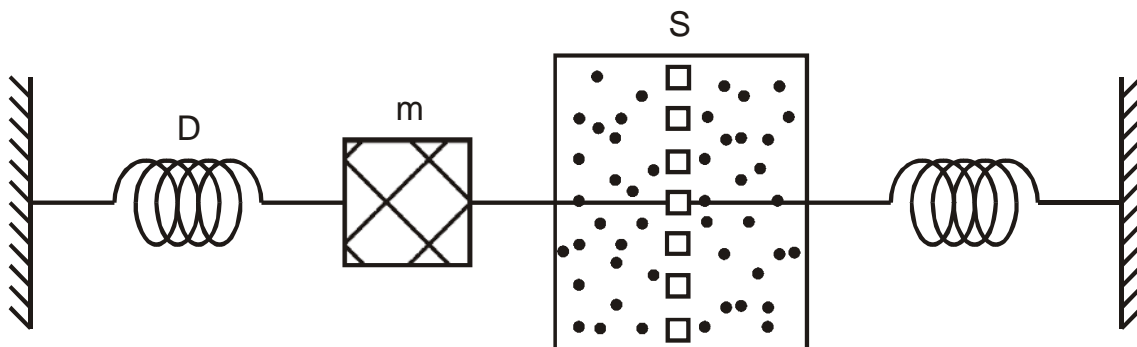


Abb. 5: Schematische Darstellung eines mechanischen Systems, das gedämpfte Schwingungen ausführen kann

Man erkennt die formale Übereinstimmung der beiden Differentialgleichungen (2) und (6). Es entsprechen sich die Größen m und L , S und R sowie D und $1/C$. Das mechanische System führt demnach eine Bewegung aus, die sich ebenfalls durch die Schwingungsgleichung (4) beschreiben lässt.

3. Aufstellung und Lösung einer Differentialgleichung für erzwungene Schwingungen

In diesem Abschnitt werden am Beispiel des elektrischen Schwingungskreises die Eigenschaften eines schwingungsfähigen Systems untersucht, das dem Einfluss einer äußeren periodischen Kraft (Spannung) unterworfen ist. In dem gedämpften Schwingkreis nach Abb. 2 werde nun eine Spannungsquelle eingeschaltet, die eine sinusförmige Wechselspannung $u(t)$ liefert (siehe Abb.6):

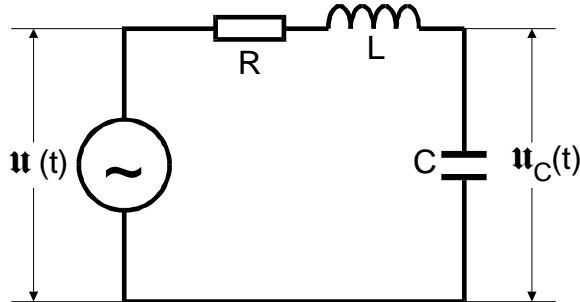


Abb. 6: Erzeugung einer erzwungenen Schwingung in einem elektrischen Schwingkreis

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t}.$$

Die Differentialgleichung (2) nimmt dann die Gestalt an:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_0 e^{j\omega t}$$

oder

$$(7) \quad LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0 e^{j\omega t}.$$

$q(t)$ bedeutet hierin die Ladung auf dem Kondensator, und somit stellt

$$u_C(t) = q(t)/C$$

die Spannung am Kondensator dar.

Im Folgenden soll nun berechnet werden, wie die Amplitude \mathfrak{U} der Kondensatorspannung und ihr Phasenunterschied gegenüber der Erregerspannung $u(t)$ von der Frequenz abhängen. Mit dem Ansatz

$$(8) \quad u_C(\omega, t) = \mathfrak{U}(\omega) e^{j\omega t} \quad (\mathfrak{U} \text{ komplex})$$

versucht man, eine Lösung des Problems zu finden. (8) in (7) eingesetzt ergibt eine Bestimmungsgleichung für die Funktion $\mathfrak{U}(\omega)$

$$-LC\omega^2 \mathfrak{U} + j\omega RC \mathfrak{U} + \mathfrak{U} = U_0.$$

Nach \mathfrak{U} aufgelöst bekommt man

$$(9) \quad \mathfrak{U} = \frac{U_0}{1 - LC\omega^2 + j\omega RC} = \frac{U_0 (1 - LC\omega^2 - j\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}.$$

Nach (9) hat \mathfrak{U} den Betrag

$$(10) \quad |\mathfrak{U}| = \sqrt{\Re^2(\mathfrak{U}) + \Im^2(\mathfrak{U})} = U_0 \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{\left((1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2\right)^2}}$$

und die Phase

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{\Im(\mathfrak{U})}{\Re(\mathfrak{U})} = \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}$$

bzw.

$$(11) \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad .$$

Da der Betrag der gesuchten Lösungsfunktion \mathfrak{U}_C nach (8) gleich dem Betrag von \mathfrak{U} ist, bekommt man aus (10) das Ergebnis

$$(12) \quad U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad .$$

Damit hat man die gesuchte Abhängigkeit der Kondensatorspannung U_C von der Frequenz ω der Erregerspannung gefunden. Sie wird als Resonanzkurve bezeichnet. Bei der Diskussion von (12) stellt man fest, dass U_C für $\omega \rightarrow \infty$ gegen 0 und für $\omega \rightarrow 0$ gegen die Erregeramplitude U_0 strebt. Bei einer endlichen Frequenz erreicht U_C ein Maximum, das größer als U_0 sein kann. Man bezeichnet dieses Phänomen als **Resonanz** und die Frequenz ω_{res} , bei der sie auftritt, als **Resonanzfrequenz**. Eine genaue Rechnung ergibt, dass ω_{res} an der Stelle

$$(13) \quad \omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

liegt. Von besonderer Bedeutung ist hier der Fall schwacher Dämpfung, das heißt, wenn

$$(14) \quad \frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

ist. Dann nähert sich ω_{res} der Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung an, wie man durch Vergleich von (13) mit (5a) erkennt. Unter diesen Bedingungen übertrifft U_C die Erregerspannung U_0 um den Faktor $1/\omega_0 RC$:

$$(15) \quad U_{C,\text{max}} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0 \quad .$$

Für den Fall $R \rightarrow 0$ kann $U_{C,\text{max}} \rightarrow \infty$ gehen („Resonanzkatastrophe“). Man bezeichnet den Faktor $1/\omega_0 RC$ auch als **Resonanzüberhöhung** oder **Güte q** des Schwingkreises. Ein Maß für die Schärfe der Resonanz ist die Breite der durch (12) beschriebenen Resonanzkurve. Man kann sie charakterisieren durch die beiden Frequenzen ω_+ und ω_- , bei denen U_C auf den Bruchteil $1/\sqrt{2}$ seines Maximalwertes (15) abgesunken ist. ω_+ und ω_- sind somit gegeben durch die Gleichung

$$\frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{\omega_0 R C} = \frac{U_0}{C \sqrt{\omega_{\pm}^2 R^2 + (\omega_{\pm}^2 L - 1/C)^2}} .$$

Unter Berücksichtigung, dass $R^2/L^2 \ll \omega_0^2$ ist, folgt daraus für die Breite der Resonanzkurve

$$(16) \quad \omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} .$$

Zwischen Güte (15) und Breite (16) der Resonanzkurve besteht somit die Beziehung

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} .$$

Ganz anders ist das Verhalten des Schwingkreises im Falle der starken Dämpfung, das heißt, wenn

$$\frac{R^2}{2L^2} \gg \frac{1}{LC}$$

ist. Jetzt existiert keine Resonanzüberhöhung mehr, sondern U_C geht vom Niveau U_0 aus mit wachsender Frequenz monoton gegen 0. Für hinreichend hohe Frequenzen fällt U_C proportional zu $1/\omega^2$. Unter diesen Bedingungen wird ein RLC-Kreis gelegentlich als Tiefpass benutzt. Gegenüber dem einfachen RC-Kreis hat er den Vorteil, dass hier die Ausgangsspannung mit wachsender Frequenz schneller gegen null geht.

Als nächstes soll die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung in der Schaltung nach Abb.6 behandelt werden. Aufgrund des Ansatzes (8) wird der Zusammenhang zwischen φ und ω durch Gleichung (11) wiedergegeben. Nach dem Ansatz (8) ist φ durch die Phase von $A(\omega)$, also durch (11), gegeben. (11) sagt aus, dass für hinreichend kleine Frequenzen Kondensator- und Erregerspannung nahezu in Phase sind und dass bei sehr hoher Frequenz U_C etwa um π hinter U zurückbleibt. An der Stelle

$$\omega_0^2 = 1/LC$$

ist $\varphi = -\pi/2$. Weiterhin folgt aus (11) für die Frequenzen ω_1 und ω_2 , bei denen φ gerade $\pi/4$ oder $\frac{3}{4}\pi$ (d.h. $\tan \varphi = \pm 1$) ist, die Beziehung

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{R^2/4L^2 + 1/LC} .$$

Daraus erhält man

$$(17) \quad \omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L} .$$

Durch Vergleich von (17) mit (16) erkennt man, dass im Falle schwacher Dämpfung $\omega_1 - \omega_2$ mit $\omega_+ - \omega_-$ zusammenfällt.

4. Impedanz des Schwingkreises

Einen Schwingkreis kann man auch, wie in Abb.7 angedeutet, als Zweipol auffassen.

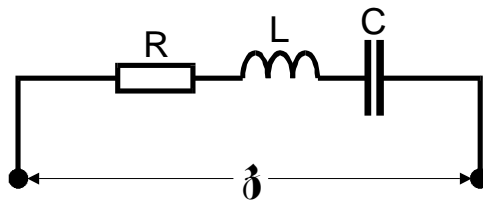


Abb.7: Der Serienschwingkreis als Zweipol

An seinen Enden beobachtet man einen frequenzabhängigen Widerstand \mathfrak{Z} , der in der Literatur als **Impedanz** bezeichnet wird. Wegen der zumeist vorhandenen Phasenverschiebung zwischen der anliegenden Spannung und dem durch den Zweipol fließenden Strom muss \mathfrak{Z} als komplexe Zahl definiert werden:

$$\mathfrak{Z} = X + j Y$$

X und Y sind reelle Widerstände. Sie tragen die Bezeichnung Wirkwiderstand und Blindwiderstand (Reaktanz). Der Betrag der Impedanz

$$|\mathfrak{Z}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

wird als **Scheinwiderstand** bezeichnet. Der Verlauf der Größe $\mathfrak{Z}(\omega)$ in der komplexen Zahlenebene nennt man die **Ortskurve** des Zweipols. \mathfrak{Z} lässt sich dort durch einen vom Ursprung ausgehenden Pfeil darstellen, dessen Länge den Scheinwiderstand darstellt, und dessen Winkel α gegen die reelle Achse die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung angibt (Abb.8).

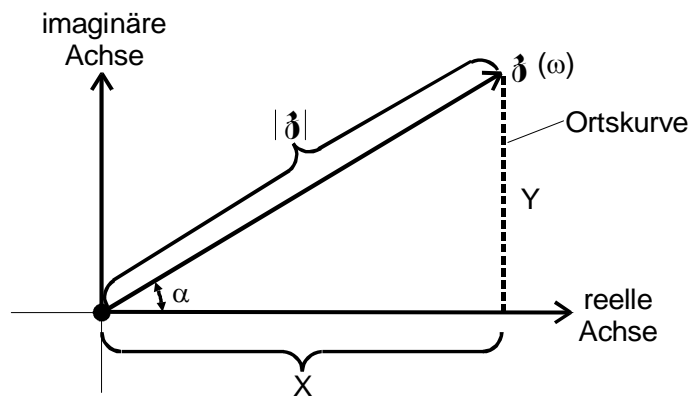


Abb.8: Darstellung der Impedanz eines Zweipols in der komplexen Zahlenebene

Im Experiment ist nun die Ortskurve eines Serienschwingkreises von Interesse. Man bezeichnet die Anordnung der Bauteile gemäß Abb.7 als **Serienschwingkreis**, da die Kapazität und die Induktivität in Bezug auf eine Spannungsquelle, die an dem Enden des Zweipols angeschlossen wird, in Serie geschaltet sind. Die Impedanz \mathfrak{Z} des Serienschwingkreises errechnet sich mit den Widerstandsoperatoren

$$\mathfrak{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C}, \quad \mathfrak{Z}_L = j \omega L \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z}_R = R_s$$

für die Kapazität, die Induktivität und den ohmschen Widerstand (z.B. V 302, Kap.3) zu

$$\mathfrak{Z}_s = R_s + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Damit ist

$$X_S = R_S \quad \text{und} \quad Y_S = j\omega L - \frac{1}{\omega C}$$

sowie

$$(18) \quad |\mathfrak{Z}_S| = \sqrt{R_S^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Da X_S frequenzunabhängig ist, stellt die Ortskurve des Serienresonanzkreises eine Gerade parallel zur imaginären Achse dar, die die reelle Achse an der Stelle R_S schneidet. Der Scheinwiderstand erreicht, wie aus (18) hervorgeht, an der Stelle $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ sein Minimum R_S . Für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ wächst er über alle Grenzen.

Der Vollständigkeit halber soll auch noch kurz der **Parallelschwingkreis** diskutiert werden. Er kann beispielsweise die in Abb.9 wiedergegebene Schaltung haben.

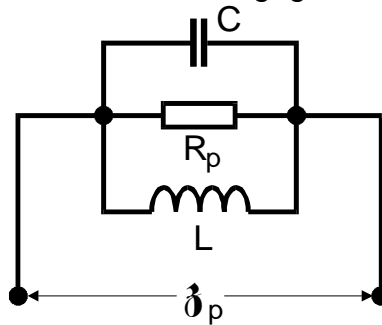


Abb.9: Ein Parallelschwingkreis als Zweipol

Für die Impedanz ergibt sich dann

$$(19) \quad \mathfrak{Z}_P = \frac{\frac{1}{R_p} + j(1/\omega L - \omega C)}{\frac{1}{R_p^2} + (1/\omega L - \omega C)^2}$$

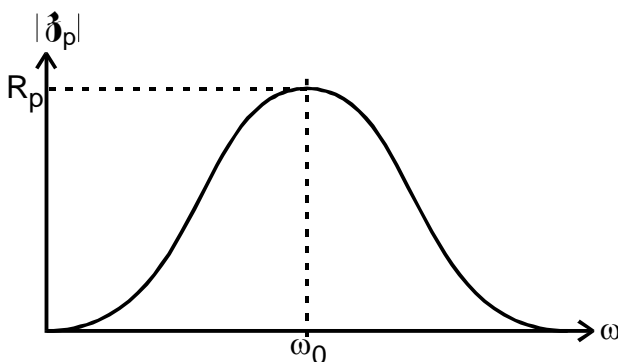


Abb.10: Abhängigkeit des Scheinwiderstandes des Parallelresonanzkreises von der Frequenz

und für den Scheinwiderstand

$$|\mathfrak{Z}_P| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}.$$

$|\mathfrak{Z}_P|$ durchläuft im Gegensatz zu $|\mathfrak{Z}_S|$ an der Stelle

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ein Maximum, welches den Wert R_p hat. Für $\omega \rightarrow 0$ geht $|\mathfrak{Z}_P|$ mit ω gegen 0.

Ebenso verschwindet $|\mathfrak{Z}_P|$ für $\omega \rightarrow \infty$ mit $1/\omega$, sodass die Abhängigkeit des Scheinwiderstandes von der Frequenz durch die Kurve in Abb.10 dargestellt werden kann.

Aus Gleichung (19) folgt weiter, dass die Ortskurve eines Parallelresonanzkreises durch einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}R_p$ wiedergegeben wird. Sein Mittelpunkt liegt an der Stelle $(0, \frac{1}{2}R_p)$ (Siehe Abb.11).

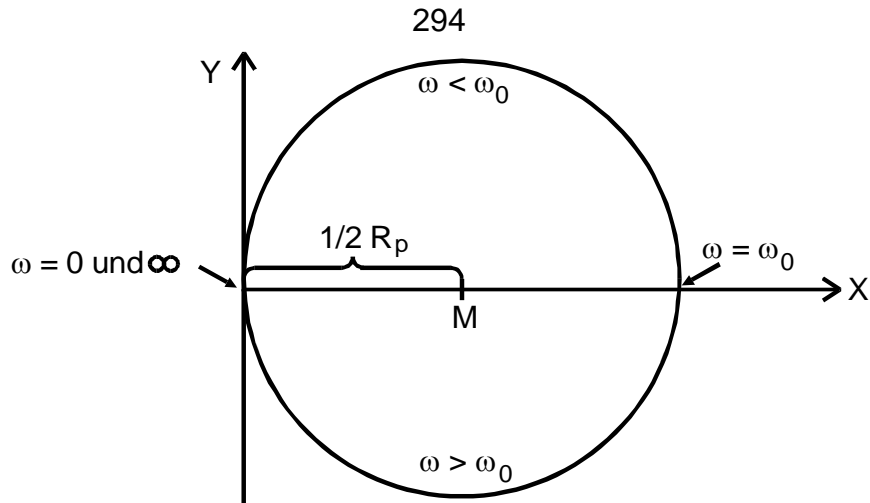


Abb.11: Ortskurve eines Parallelresonanzkreises

5. Experimentelle Aufgaben

- Man untersuche die Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung und bestimme daraus den effektiven Dämpfungswiderstand.
- Man bestimme den Dämpfungswiderstand R_{ap} , bei dem der aperiodische Grenzfall vorliegt.
- Man messe die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung an einem Serienresonanzkreis.
- Man bestimme die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung an einem Serienresonanzkreis.
- Man messe die Frequenzabhängigkeit des Scheinwiderstandes eines Serienresonanzkreises.

6. Beschreibung der notwendigen Messapparaturen

zu 5a: Die Zeitabhängigkeit der Schwingungsamplitude kann mit der in Abb.12 wiedergegebenen Schaltung untersucht werden.

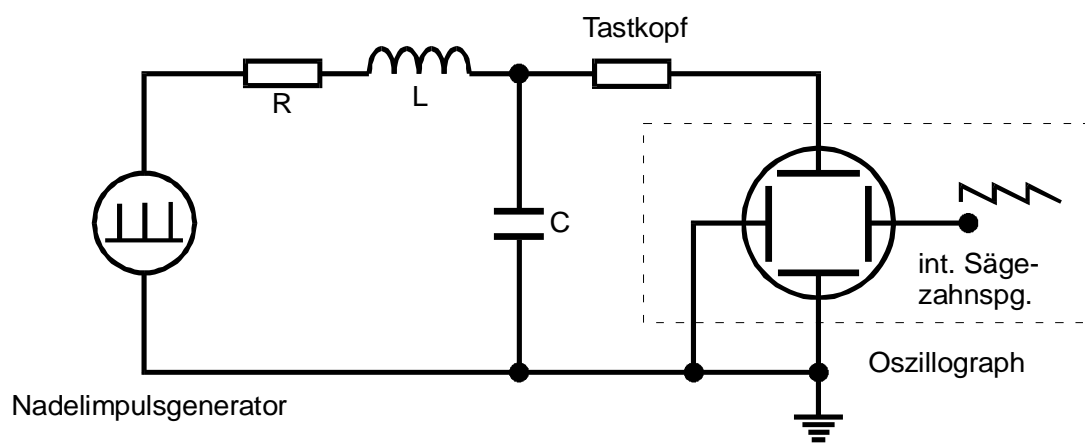


Abb.12: Schaltung zur Untersuchung der Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung

Ein einzelner Puls des Nadelimpulsgenerators erregt den Schwingkreis zu gedämpften Schwingungen. Der zeitliche Abstand zwischen zwei Pulsen sollte so gewählt werden, dass die Amplitude der gedämpften Schwingung etwa um den Faktor 3 bis 8 abgenommen hat, bevor sie von neuem angefacht wird. Die Eichung der Zeitachse kann aus

der Ablenkgeschwindigkeit des Oszillographen entnommen werden¹. Wenn alle Parameter am Oszillographen und am Generator optimal eingestellt sind, kann man den Verlauf der Schwingungskurve auf dem Bildschirm verfolgen. Zur Vermeidung von Parallaxenfehlern beim Ablesen speichere man den Kurvenverlauf mit Hilfe eines Speicheroszillographen ab und fertige anschließend einen Thermodruck an. Der zusätzlich dämpfende Einfluss des Oszillographen-Eingangswiderstandes kann mit Hilfe des hochohmigen Tastkopfes ($R_i = 10\text{M}\Omega$) vernachlässigbar klein gehalten werden. Man verwende für diese Messung den kleineren der beiden in die Schaltung eingebauten Festwiderstände.

zu 5b: Den Widerstand R_{ap} , kann man mit Hilfe einer Schaltung nach Abb.13 bestimmen. Man stellt den regelbaren Widerstand zunächst auf seinen Maximalwert ein, so-

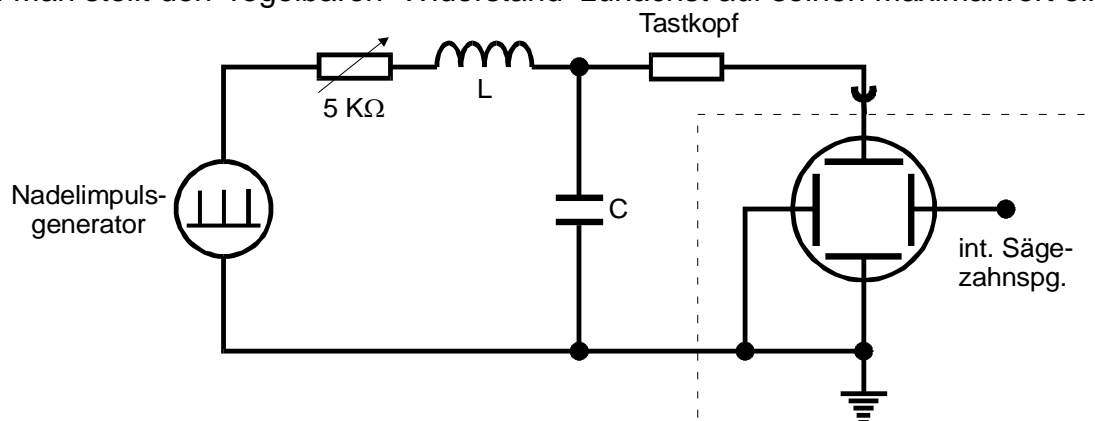


Abb.13: Messschaltung zur Bestimmung des aperiodischen Grenzwiderstandes R_{ap}

dass der Schwingkreis ein reines Relaxationsverhalten (monotone Abnahme der Kondensatorspannung mit der Zeit) zeigt. Nun verringert man R allmählich und beobachtet dabei das Schirmbild auf dem Oszillographen. Sobald sich dort ein „Überschwingen“ zeigt, wenn also ein Kurvenbereich auftritt, in dem $dU_C/dt > 0$ ist, hat man R_{ap} bereits unterschritten. R ist dann wieder ein wenig zu vergrößern, bis das Überschwingen gerade verschwindet.

zu 5c: Die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung kann man mit einer Schaltung nach Abb.14 aufnehmen. Auch hier ist die Vorschaltung eines Tastkopfes

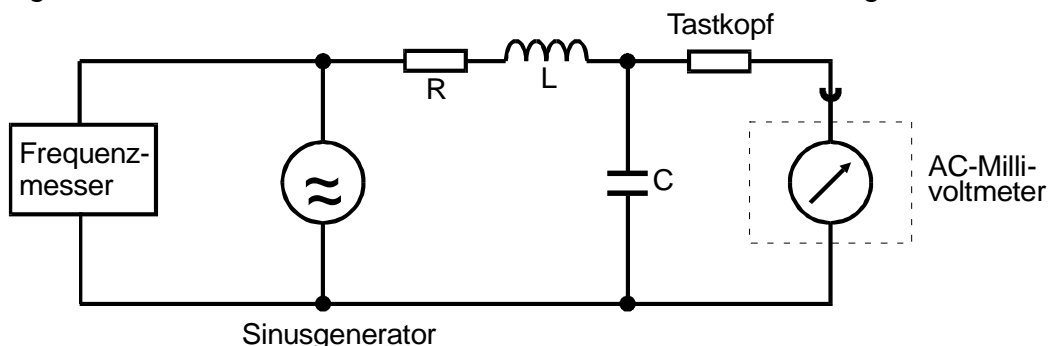


Abb.14: Schaltung zur Aufnahme des Frequenzganges eines RLC-Kreises

¹ Wenn es notwendig erscheint, kann die Eichung auch mit einem Zeitmarkengenerator überprüft werden, der ein quarzgesteuertes Rechtecksignal abgibt.

notwendig, um den störenden Einfluss des Eingangswiderstandes vom Millivoltmeter zu minimieren. Leider besitzt der Tastkopf auch einen Frequenzgang. Seine Ausgangsspannung ist also nicht unabhängig von der Frequenz, wie es im Idealfall sein sollte. Es ist daher notwendig, auch die Erregerspannung U über den Tastkopf in Abhängigkeit von der Frequenz zu messen und daraus der Quotienten U_C/U zu bilden.

Bei dieser Messung verwende man den größeren der beiden eingebauten Festwiderstände. Zum gesamten Dämpfungswiderstand ist auch der Innenwiderstand des Sinusgenerators hinzuzurechnen.

zu 5d: Das Messverfahren zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Phase ist bereits in V353, Kap.5 beschrieben. Es kann hier in entsprechender Weise angewandt werden. Eine brauchbare Schaltung ist in Abb.15 wiedergegeben

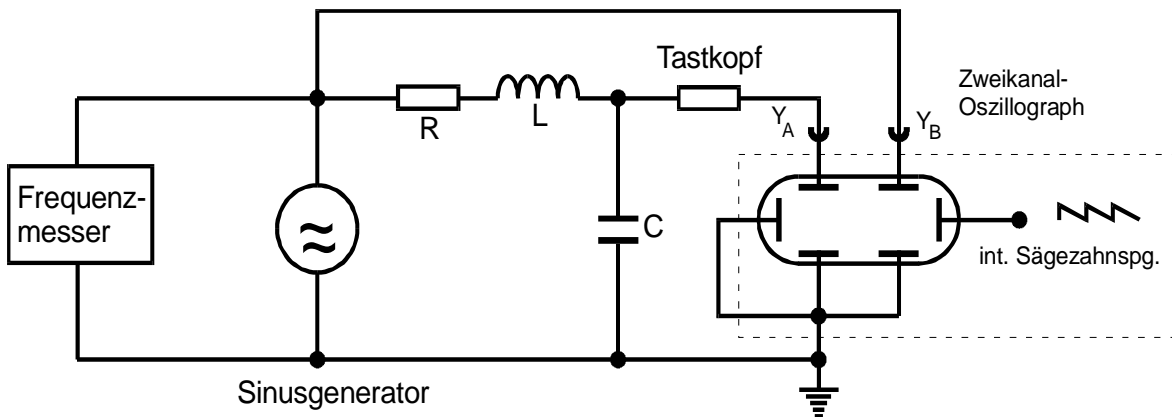


Abb.15: Schaltung zur Messung der Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorsspannung bei einem RLC-Kreis

zu 5e: Der Scheinwiderstand des RLC-Kreises wird aus dem Verhältnis von Generatorspannung U_{eff} zum Strom I_{eff} errechnet.

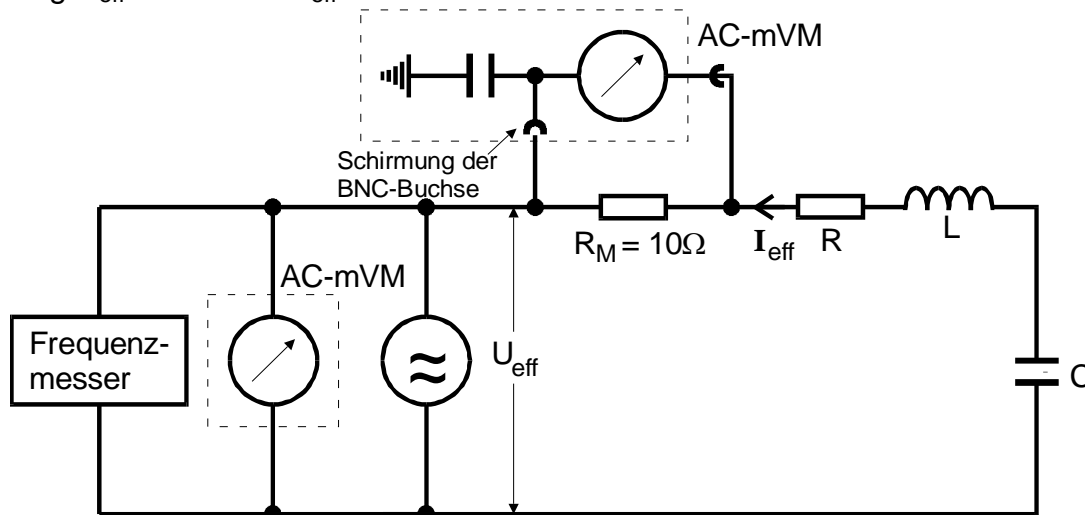


Abb.16: Schaltung zur Messung des Scheinwiderstandes eines RLC-Kreises in Abhängigkeit von der Frequenz

Da kein Amperemeter zur Verfügung steht, welches hochfrequente Ströme messen kann, wird I_{eff} als Spannungsabfall an einem niederohmigen Widerstand $R_M \ll R$ gemessen. Das Millivoltmeter, welches den Spannungsabfall an R_M misst, muss mit seiner Gehäuseerde an den Sinusgenerator gelegt werden, so wie es in Abb.16 dargestellt ist.

Elegantier kann man den Scheinwiderstand mit einem kommerziellen Impedanzmeter messen, welches gleichzeitig auch noch die Phase zwischen U und I anzeigt (Abb.16a).

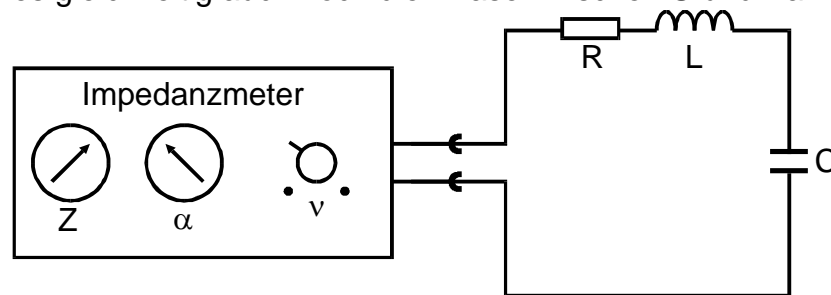


Abb16a: Messung des Scheinwiderstandes Z und der Phase α zwischen Strom und Spannung mit einem Impedanzmeter. **Achtung! Der RLC-Kreis darf bei diesem Messverfahren an keiner Stelle geerdet werden.**

7. Hinweise zur Auswertung

zu 5a: Man zeichne in dem Thermodruck die Einhüllende der aufgezeichneten Schwingungskurve ein. Daraus entnehme man mehrere Wertepaare ($U_C(t_i)$, t_i) und führe mit ihnen eine Ausgleichsrechnung durch. Sie liefert den Exponenten der e-Funktion in (5). Man berechne daraus den effektiven Dämpfungswiderstand R_{eff} sowie die Abklingdauer T_{ex} . Man vergleiche R_{eff} mit dem in die Schaltung eingebauten R . Wie kann man die normalerweise auftretenden Abweichungen erklären?

zu 5b: Man vergleiche den gemessenen R_{ap} -Wert mit dem aus L und C gerechneten Wert. Man versuche eine Erklärung für die normalerweise auftretende Diskrepanz zwischen den beiden Werten zu finden.

zu 5c: Man trage U_C/U gegen ν in einem halblogarithmischen oder auch in einem doppeltlogarithmischen Diagramm auf und entnehme daraus die Resonanzüberhöhung q . Den Bereich um die Resonanzfrequenz stelle man auch linear dar. Aus diesem entnehme man die Breite der Resonanzkurve $\nu_+ - \nu_-$. Die experimentell erhaltenen Werte vergleiche man mit den aus R , L und C gerechneten Daten. Für R ist der Gesamtdämpfungswiderstand einzusetzen.

zu 5d: Man trage φ gegen ν in einem halblogarithmischen Diagramm auf. Den Bereich um $\varphi = 90^\circ$ stelle man auch linear dar und entnehme daraus ν_{res} sowie ν_1 und ν_2 . Die erhaltenen Werte vergleiche man wiederum mit den gerechneten.

zu 5e: Man berechne den Scheinwiderstand des RLC-Kreises mit den bekannten Daten in Abhängigkeit von der Frequenz und stelle das Ergebnis in Form einer durchgezogenen Kurve auf einem halb- oder doppelt-logarithmischen Papier dar. In das Diagramm trage man anschließend die Messpunkte ein. Gibt es eine Erklärung für die Abweichungen zwischen Theorie und Experiment bei hohen Frequenzen? (Da bei einer Messung mit dem Impedanzmeter auch noch die Phase angezeigt wird, kann man hier sogar die Ortskurve des Serienresonanzkreis auf Polarkoordinatenpapier zeichnen.)