Aufgabe 23

Montag, 12. Juli 2021 17:22

$$C(f) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \hat{C}(f_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left[- \sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}(y_i = k) \log\left(\frac{\exp(f_{k,i})}{\sum_j \exp(f_{j,i})} \right) \right]$$

$$\nabla_W \hat{C} = \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \hat{C}}{\partial f_{k,i}} \cdot \frac{\partial f_{k,i}}{\partial W}, \quad \nabla_b \hat{C} = \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \hat{C}}{\partial f_{k,i}} \cdot \frac{\partial f_{k,i}}{\partial b}$$

K Klassen, m Beispiele x_i, x_i mit M Komponenten

a)

x_i ist $M \times 1$

b ist $K \times 1$

f ist $K \times 1$

W ist $K \times M$

C ist $K \times K$

$\nabla_W \hat{C}$ ist $K \times M$

$\nabla_b \hat{C}$ ist $K \times 1$

$\frac{\partial f}{\partial W}$ ist $K \times M$

$\frac{\partial f}{\partial b}$ ist $K \times 1$

$$f(x_i, W, b) = W \cdot x_i + b$$

$$W[K \times M] \cdot x_i[M \times 1] = f$$

b)

$$\nabla_{f_{ai}} \hat{C}(f_i) = - \sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}(y_i = k) \nabla_{f_{ai}} \log\left(\underbrace{\frac{\exp(f_{ki})}{\sum_j \exp(f_{ji})}}_{p} \right) \qquad \mathbb{1}[K \times K]$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial f_i} = \frac{\partial \frac{e^{f_k}}{\sum_j e^{f_j}}}{\partial f_i}$$

Für den Fall $k = i$ folgt:

$$\frac{\partial p_k}{\partial f_i} = \frac{e^{f_k} \sum_j e^{f_j} - e^{f_i} e^{f_k}}{\left(\sum_j e^{f_j}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{f_k} \left(\sum e^{f_j} - e^{f_i}\right)}{}$$

$$= \frac{e^{f_k}\left(\sum e^{f_j} - e^{f_i}\right)}{\left(\sum_j e^{f_j}\right)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{e^{f_k}}{\sum e^{f_j}}}_{p_k} \cdot \underbrace{\frac{\left(\sum_j e^{f_j} - e^{f_i}\right)}{\sum_j e^{f_j}}}_{1-p_i}$$

$$= p_k (1-p_i)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial l}{\partial f_i} = -\sum_k \mathbb{1} \frac{\partial \log(p_k)}{\partial f_i} = -\sum_k \mathbb{1} \frac{1}{p_k} \frac{\partial p_k}{\partial f_i}$$

$$\overset{(i=k)}{=} -\mathbb{1} \frac{1}{p(k)} p(k)(1-p_i)$$

$$= p_i - \mathbb{1}$$

$$= \frac{e^{f_i}}{\sum_j e^{f_j}} - \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \nabla_{f_a} \mathcal{L}(f) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \left[\frac{e^{f_a}}{\sum_j e^{f_j}} - \mathbb{1}(y_i = a)\right]$$

c) 1. Es wird Zeilenweise nach W abgeleitet:

$$\nabla_{W_a} f_{k,i}(W, b) = \nabla_{W_a}(W_k x_i + b_k) = \delta_{ak}\, x_i^T$$

2. Es wird Komponentenweise nach b abgeleitet:

$$\nabla_{b_a} f_{k,i}(W, b) = \nabla_{b,a}(W_k x_i + b_k) = \delta_{ak}$$

$\square$