A digitális számítás elmélete

Célja:
- precíz tervezés

Miért van szükségünk precíz tervezésre?

- algoritmusok megerősítése (a hibák elkerülése) miatt
- A viselkedés megbecsülése bonyolultság szempontjából (gyakorlati felhasználáshoz)
- felismerni a megoldhatatlan problémákat (erőforrások megtakarítása)

Alapfogalmak

halmaz (**A**); üres halmaz ($\emptyset$); részhalmaz (**A**$\subset$B); hatvány halmaz (**P** (A));
valódi részhalmaz (**A**$\subseteq$B); egy elemű halmaz;
elemek (**a, b, …**$\in$ A);
számosság (|L|); azonos számosságú
megszámlálhatóan végtelen
véges; végtelen;
unió(A$\cup$B); metszet (A$\cap$B); különbség (A\B);
diszjunkt (A$\cap$B=$\emptyset$)

kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás

<u>Def.:</u> (**A halmazok osztályozása**)
π egy partíciója A nem üres halmaznak (A$\neq\emptyset$),
ha $\pi\subseteq$ **P** (A), $\emptyset\in\pi$, A=$\cup\pi$
ha C, D $\in\pi$, C$\neq$D akkor C$\cap$D=$\emptyset$

<u>Állitás:</u>
$\emptyset\subseteq\emptyset$ igaz
$\emptyset\in\emptyset$ hamis
$\emptyset\subseteq\{\emptyset\}$ igaz
$\emptyset\in\{\emptyset\}$ igaz

Relációk és függvények

<u>Def.:</u> (**Rendezett pár**)
(a,b)-t rendezett párnak nevezzük, és:
(a,b)$\neq$(b,a) ha a$\neq$b
(a,b)=(c,d) akkor és csak akkor, ha a=c és b=d

<u>Def.:</u> (**Descartes szorzat**)
AxB={a$\in$ A és b$\in$ B}

<u>Def</u>.: (**Relációk**)
n-ed rendű reláció
$\mathbf{R}\subseteq A_1 x A_2 x \ldots x A_n$

n=1 ➔ elsőrendű reláció
n=2 ➔ binér reláció
n=3 ➔ trinér reláció

<u>Def.:</u> (**Függvények**)
f:A→B kölcsönösen egyértelmű, A=ÉT, B=ÉK

<u>Def.:</u> (**Relációk néhány tulajdonsága**)
- **Reflexív** reláció:
  ha (a,a)$\in$ **R** a$\in$ A-ra
- **Szimmetrikus** reláció

$(b,a) \in \mathbf{R}$ akkor és csak akkor, ha $(a,b) \in \mathbf{R}$

- **Antiszimmetrikus** reláció:
  ha $(a,b) \in \mathbf{R}$ és $a \neq b$ akkor $(b,a) \notin R$
- **Tranzitív** reláció:
  ha $(a,b) \in \mathbf{R}$ és $(b,c) \in \mathbf{R}$ akkor $(a,c) \in \mathbf{R}$
- **Ekvivalencia** reláció:
  a reflexív, szimmetrikus, és tranzitív reláció

Def.: (**Parciális rendezés**)
Ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

Def.: (**Természetes számok**)
0,1,2, ...

Def.: (**Lezártság**)
A természetes számok halmaza zárt az összeadásra.
A természetes számok halmaza nem zárt a kivonásra (5-6=(-1) és $(-1) \notin \mathbf{N}$)
(Az egész számok halmaza zárt a kivonásra és az összeadásra is)

Def.: (**Lezárt**)
Legyen D egy halmaz és legyen $\mathbf{R} \subseteq DxD$ egy binér reláció.
Akkor lezártja **R-nek** egy $B \subseteq D$ részhalmaz, ha $b_1 \in B$ és $b_2 \in D$, $(b_1,b_2) \in \mathbf{R}$ akkor $b_2 \in B$.

Def.: (**n+1-ed rendű reláció lezártja**)
Legyen D egy halmaz, $n \geq 0$ és legyen $\mathbf{R} \subseteq D^{n+1}$ egy n+1-ed rendű relációja D-nek.
Akkor lezártja **R-nek** egy $B \subseteq D$ részhalmaz, ha bármely $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$ és $b_{n+1} \in D$, továbbá $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}$ akkor $b_{n+1} \in B$.

Def.:
P (**N**) – a természetes számok hatványhalmaza – nem megszámlálható.

Ábécék és nyelvek

Def.: (**Ábécé**)
Szimbólumok (ami maga is véges halmaz) véges halmaza.
Példa:
$\{0,1\}, \{a,b,c\}, \{a_1,a_2\}$

Def.: (**Sztring**)
(Ábécéből vett) Szimbólumok véges sorozata.
Példa:
1011, abbbac

Def.:
- az egy hosszúságú sztring maga a szimbólum
- szimbólumot nem tartalmazó sztringet üres sztringnek nevezzük és a jele: e

Def.: ($\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}^*$)
Az Ábécéből vett összes sztringek halmaza Σ^*- al jelöljük, (az üres sztring is beletartozik).
/Σ-t ábécének, Σ^*-t Kleen-lezártnak hívjuk /

Def.: (**A string hossza**)
A sztring hossza maga a szekvencia hossza. Jele: |W|.
|e| (azaz az üres sztring hossza) egyenlő 0.
Példa:
|1011|=4

Def.: (**Konkatenáció**, azaz összefűzés)
x és y sztringek konkatenációja: $x \circ y$, vagy egyszerűen xy
$|xy|=|x|+|y|$
$|w \circ e|=|w|$
$(xy)z=x(yz)$ asszociatív

Megjegyzés:
$x<y$, $x>y$;
$x\leq y$, $x\geq y$;
mutató, (mint, felső index)
index (mint, alsó index)

Def.: (**Részsztring**)
v sztring részsztringje w-nek ha létezik úgy x és y, hogy w=xvy

Def.:
w^i (i természetes szám)
$w^0=e$.
$w^{i+1}=w^iw$

Def.: (**w^R**)
Egy w sztirng megfordítását w^R jelöli.
ha $|w|=0$, $w^R = w = e$
ha $|w|=n+1$, akkor $\exists a\in\Sigma$: $w=ua$ és $w^R=au^R$

Def.: (**Nyelvek**)
A nyelv a sztringek halmaza egy ábécéből.
Példa:
$\emptyset$, Σ, Σ^*,
$L(\subseteq\Sigma^*)$ a nyelvek általános megadása

Hogyan lehet egy nyelvet definiálni

- sztringek halmazával (csak akkor, ha a nyelv véges halmaz)
- $L=\{w:w\in\Sigma^*$ és w tartalmazza $\mathbf{P}$ -t$\}$

Példa: (Végtelen nyelvre)
$L=\{w:w\in\Sigma^*$ and $w=w^R\}$

Def.:
Ha $\Sigma\neq\emptyset$ véges, akkor Σ^* végtelen (megszámlálható).
(a lexikógrafikus rendezés miatt)Def.: (**Union of languages**)
$L_1\cup L_2=\{w: w\in L_1$ or $w\in L_2\}$
Def.: (**Concatenation of languages**)
$L_1\circ L_2=\{w_1w_2: w_1\in L_1$ & $w_2\in L_2\}$, can be regarded as the Descarte product of the languages
$|L_1\circ L_2|=|L_1|*|L_2|$ if L_1, L_2 are finite
Def.: (**Closure or Kleen star of language L**)
Concatenating zero or more strings of L.
$L^*=\{w: w\in\Sigma^*$ & $w=w_1w_2....w_n$, $w_i\in L$ $(1\leq i\leq n)\}$
$L^+=LL^*$
Example:
$L=\{ab, ba, acb\}$, $abacbab\in L^*$

Nyelvek véges reprezentációja

Célja:
- sztringek egy ábécét alkotnak
- egyértelmű

Def.:
Ha Σ végtelen, Σ^* megszámlálható számosságú, $\mathbf{P}(\Sigma^*)$ nem megszámlálható számosságú.

Motivációs példa:
$L=\{ w:w\in\{0,1\}^*$, w-ben kétszer vagy háromszor fordul elő az 1-es, és az első és a második tag nem egyezik meg egymással$\}$
Példa:
$L=\{0\}^*\circ\{1\}\circ\{0\}^*\circ\{0\}\circ\{1\}\circ\{0\}^*\circ((\{1\}\circ\{0\}^*)\cup\{0\}^*)$

$\{0\}^* \equiv$ egy vagy több nulla

Speciális szimbólumok:
$\cup$, $^{\Theta}$, $\emptyset$, (,)

Def.:
Reguláris kifejezések a Σ ábécéből vett következő sztringek $\Sigma \cup \{\cup, ^{\Theta}, \emptyset, (,)\}$, ha a következők teljesülnek:

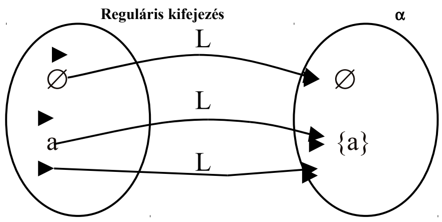
1) $\emptyset$és a Σ legtöbb eleme reguláris kifejezés.
2) ha α és β reguláris kifejezés, akkor $(\alpha\beta)$ is az.
3) ha α és β reguláris kifejezés, akkor $(\alpha\cup\beta)$ is az.
4) ha α a reguláris kifejezés, akkor α^{Θ} is az.
5) csak az 1-4 esetben beszélünk reguláris kifejezésről.

Def.: (**L függvény definíciója**)
1) $L(\emptyset)=\emptyset$ és $L(a)=\{a\}$, $a\in\Sigma$
2) ha α és β reguláris kifejezés, akkor
$L((\alpha\beta))=L(\alpha)L(\beta)$
3) ha α és β reguláris kifejezések, akkor
$L((\alpha\cup\beta))=L(\alpha)L((\alpha\beta))=L(\alpha)\cup L(\beta)$
4) ha α reguláris kifejezés, akkor $L(\alpha^{\Theta})=L(\alpha)^*$

Példa:
$L(((a\cup b)^{\Theta}a))$ =2.= $L((a\cup b)^{\Theta})L(a)$ =4., 1.= $L(a\cup b)^*\{a\}$ =3.= $(L(a)\cup L(b))^*\{a\} = \{a,b\}^*\{a\} = \{w: w\in \{a,b\}^*$ és w a-val végződik$\}$

Def.:
A Σ ábécéből vett reguláris nyelvek halmaza $\mathfrak{R}$, kielégíti a következő tulajdonságokat:
1) $\emptyset\in\mathfrak{R}$ és $\{a\}\in\mathfrak{R}$ ha $a\in\Sigma$.
2) ha $A, B\in\mathfrak{R}$, akkor $A\cup B\in\mathfrak{R}$ és $A\circ B\in\mathfrak{R}$ és $A^*\in\mathfrak{R}$
3) ha S a nyelvek egy halmaza kielégíti 1-t és 2-t,
akkor $\mathfrak{R}\subseteq S$.

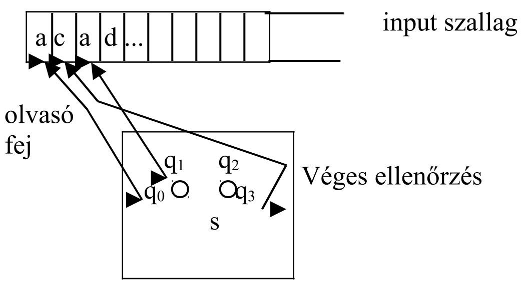
Tétel:
A nyelv akkor és csak akkor reguláris, ha leírható reguláris kifejezésekkel.
Biz.:

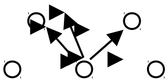


Legyen Q a következő halmaz $Q=\{S: \emptyset\in S$, $\{a\}\in S$ $(a\in\Sigma)$, zárt az unióra, a konkatenációra és a Kleen-lezártra nézve$\}$
1) $\mathfrak{R}=\cap Q$ (3-as állítása az előbbi def.-nek)
2) ha $S\in Q$, akkor $\alpha\subseteq S$ (indirekt bizonyítás)
3) (1) & (2)-ből következik $\alpha\subseteq\mathfrak{R}$
4) $\alpha\in Q$, akkor $\mathfrak{R}\subseteq\alpha$
5) (3) & (4) tartalmazza hogy $\mathfrak{R}=\alpha$

Véges autómaták

I. Determinisztikus véges automaták:



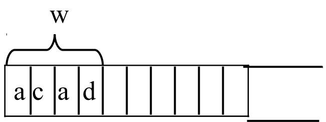


$\delta(q_0,a)=q_3$
$\delta(q_3,c)=q_1$
$\delta(q_1,a)=q_2$

<u>Def.:</u> (**Determinisztikus véges automata: DFA**)
Egy determinisztikus véges automata egy ötös M=(K, Σ, δ, s, F).
ahol, **K** állapotok készlete (véges),
Σ véges halmaz (ábécé)
s kezdő állapot ($s \in K$)
F végállapotok készlete ($F \subseteq K$)
δ átviteli függvény ($K x \Sigma$)

Ha M q állapotban van és $\sigma(\in \Sigma)$szimbólum az olvasófejnél van, akkor M átmegy $\delta(q, \sigma)(\in K)$.
Ez az új állapot meghatározott egyedülálló módon.

<u>Def.:</u> (**Konfiguráció**)
Egy (K,Σ,δ,s,F) determinisztikus véges automata egy konfigurációja $K x \Sigma^*$-nak bármely eleme. (a jelenlegi állapot és a nem olvasott bemenet)
Egy lépéses bináris reláció átvitel teljesül két M két konfiguráció között akkor és csak akkor, ha M közvetlen átmehet az elsőből a második állapotba. Tfh. (q,w) és (q', w') M két konfigurációi. Akkor $(q, w) \vdash_M (q', w')$, akkor és csak akkor, ha van úgy, $\sigma \in \Sigma$, hogy $w=\sigma w'$ és $\delta(q, \sigma)=q'$.



aw'=w (feldolgozza az első szimbólumot)
(s,w) (ez a konfiguráció)
$\delta(s,a)= q'$

<u>Def.:</u>
A reflexív, tranzitív lezártját tartalmazó $\vdash_M$
(yields in one step) reláció a $\vdash_M^*$ (yields).
$w \in \Sigma^*$ sztringet elfogadja a M=(K, Σ, δ, s, F) determinisztikus véges automata, ha $(s,w) \vdash_M^* (q,e)$ és $q \in F$.

A nyelvet elfogadó M=(K, Σ, δ, s, F) automata L(M), ahol M a sztringek halmaza.

$L(M)=\{w:w\in \Sigma^*, (s,w) \vdash_M^* (q,e) \;\&\; q\in F\}$

<u>Például:</u>
M=(K, Σ, δ, s, F)
$K=(q_0,q_1)$ (definiáljunk két állapotot)
$\Sigma=\{a,b\}$
$s=q_0$ (kezdő állapot)
$F=\{q_0\}$ (végállapotok halmaza)

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	a	q_0
q_0	b	q_1
q_1	a	q_1
q_1	b	q_0

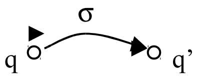
$(q_0, a, b, a, b) \vdash_M (q_0, b, c, b) \vdash_M (q_1, a, b) \vdash_M \vdash_M (q_1, b) \vdash_M (q_0, e)$

$(q_0, a, b, c, b) \vdash_M^* (q_0, e)$, emiatt $a,b,a,b\in L(M)$
$L(M)=\{w:w\in \{a,b\}^*$, és w páros számú b-t tartalmaz$\}$

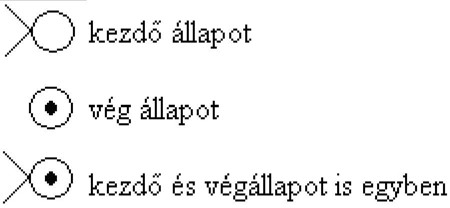
<u>Def.:</u> (**Állapot diagramm**)

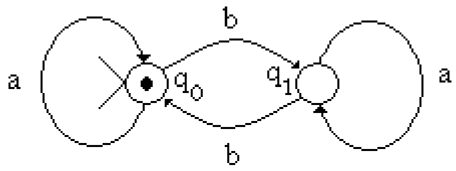
Az állapotok gráf csúcsokkal vannak megadva.

Ha $\delta(q,\sigma)=q'$, akkor a q és q' csúcsot összeköti egy él. Ezt az élet σ val jelöljük



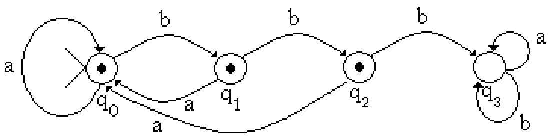
<u>Például:</u>





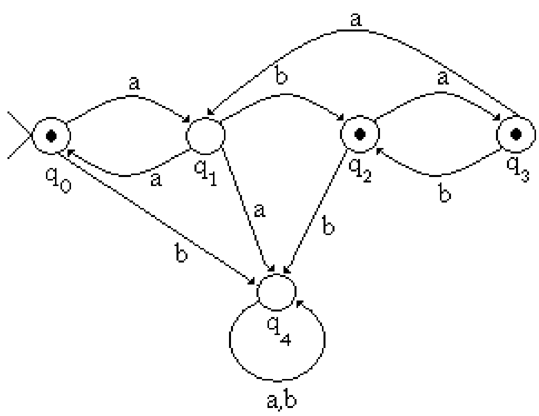
<u>Például:</u>

L(M)={w:w∈ {a,b}* és w nem tartalmaz 3 egymást követő b-t}

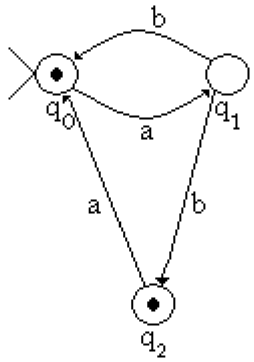


<u>Motivációs példa:</u>

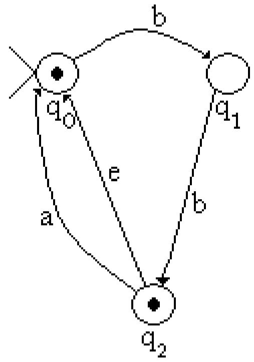
$(ab \cup aba)^*$



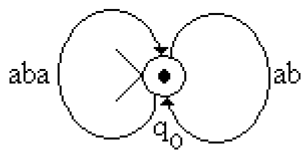
Az előző feladat általánosítása (legyen olyan út)



Ez is az előző egy általánosítása



Ez is egy általánosítása az előbbieknek

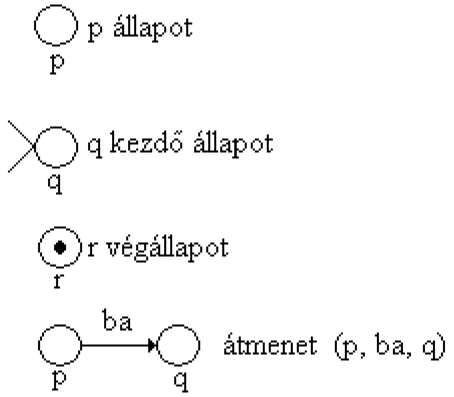


Az előző 3 esetben az automata nem determinisztikus.

II. Nem determinisztikus véges automata:

Def.: (**Nem determinisztikus véges automata)**
Egy nem determinisztikus véges automata egy ötös M=(K, Σ, Δ, s, F).
ahol **K** az állapotok halmaza (véges)
Σ egy ábécé
s a kezdő állapot, $s \in K$,
F a végállapotok halmaza, $F \subseteq K$,
Δ egy átviteli reláció véges részhalmaza $K x \Sigma^{*} x K$.

Def.: (NFA diagram)



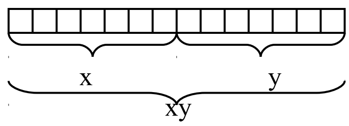
M konfigurációja $K x \Sigma^*$-nek egy eleme.

<u>Def.:</u>
$\vdash_M$ (yields in one step) reláció a konfigurációk között a következőképpen van definiálva
$(q, w) \vdash_M (q', w')$, akkor és csak akkor, ha egy $u \in \Sigma^*$ létezik úgy hogy, $w=uw'$ és $(q,u,q') \in \Delta$

<u>Tétel:</u>
$\vdash_M^*$ a $\vdash_M$ reflexív, tranzitív lezártja.
$w \in \Sigma^*$ elfogadja M, akkor és csak akkor ha, $q \in F$ állapot olyan hogy, $(s,w) \vdash_M^* (q,e)$.

A nyelvet elfogadó M automata L(M), ahol M az összes sztringek halmaza.

Legyen $M=(K, \Sigma, \Delta, s, F)$ egy NFA és legyen $q,r \in K$ és x, $y \in \Sigma^*$. Ha $p \in K$-hoz van, $(q,x) \vdash_M^* (p,e)$ és $(p,y) \vdash_M^* (r,e)$.



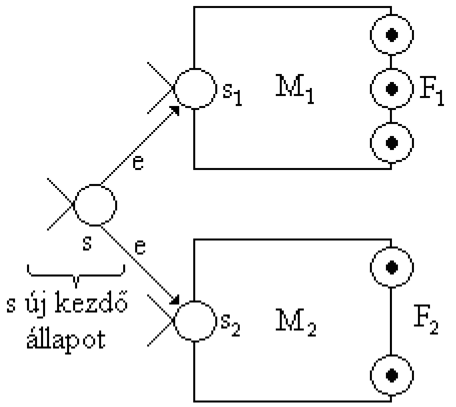
<u>Bizonyítás:</u>
Tegyük fel hogy $(q,x) \vdash_M^* (p,e)$ és $(p,y) \vdash_M^* (r,e)$.
Először bizonyítsuk, hogy $(q,x,y) \vdash_M^* (p,y)$. Mivel $(q,x) \vdash (p,e)$, $\exists$ $n \geq 0$ $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$; $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i \in \Sigma^*$ úgy hogy $(q,x) = (q_0,x_0) \vdash_M (q_1,x_1) \vdash_M \vdash_M (q_2,x_2) \vdash_M \ldots \vdash_M (q_n,x_n) = (p, e)$.

Mivel $(q_i, x_i) \vdash_M (q_{i+1}, x_{i+1})$, $\exists$ $u_i \in \Sigma^*$ sztring úgy hogy, $x_i = u_i \cdot x_{i+1}$ & $(q_i, u_i, q_{i+1}) \in \Delta$.

Hasonlóképpen $x_i y = u_i \cdot x_{i+1} \cdot y$ $(q_i, x_i y) \vdash (q_{i+1}, x_{i+1} y)$.
Emiatt $(q, xy) \vdash_M (q_1, x_1 y) \vdash_M \ldots \vdash_M |(q_n, x_n y)$ azaz $(q, xy) \vdash_M (p, y)$. $(q, xy) \vdash_M^* (p, y)$ és
$(p, y) \vdash_M^* (r, e)$

<u>Def.:</u> (**Két automata ekvivalenciája**)
Akkor és csak akkor ekvivalensek M_1 és M_2 automaták, ha $L(M_1)=L(M_2)$.
Bármely nem determinisztikus véges automatához van vele ekvivalens determinisztikus véges automata.

<u>Tétel:</u>
Véges automaták által elfogadott nyelvek zártak az unióra.
$L(M_1)$, $L(M_2)$ $\quad$ $L(M)=L(M_1) \cup L(M_2)$
<u>Bizonyítása:</u>
Legyen NFA
$M_1=(K, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$ és $M_2=(K, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$-ből konstruálható NFA $M=(K, \Sigma, \Delta, s, F)$ úgy hogy,
$L(M)=L(M_1) \cup L(M_2)$
$K= K_1 \cup K_2 \cup \{s\}$
s egy új állapot ami nincs $K_1 \cup K_2$-ben (K_1 és K_2 diszjunktak)
$F=F_1 \cup F_2$ és $\Delta=\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s,e,s_1), (s,e,s_2)\}$

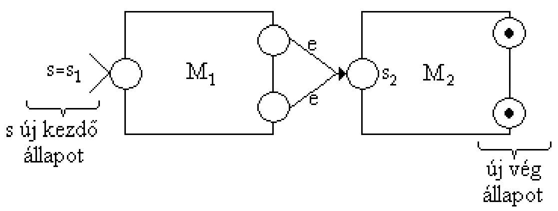


$w \in L(M) \Rightarrow w \in L(M_1)$ vagy $w \in L(M_2)$
$w \in L(M_1) \Rightarrow w \in L(M)$ $(s,w) \vdash_M^* (q,e)$ és $q \in F_1 \Rightarrow (s,w) \vdash_M^* (q,e)$
$(s,e) \vdash_M (s_1,e)$ közvetlenül $(s, w) \vdash_M^* (q,e)$ és
$q \in F$, azaz $w \in L(M)$
$w \in L(M) \Rightarrow (s,w) \vdash_M^* (p,e)$ és $p \in F$.
$p \in F_1$ vagy $p \in F_2$. Tegyük fel hogy $p \in F_1$, $(s,w) \vdash_M^* (p,e)$ megadható, mint $(s,w) \vdash_M^* (p,e)$

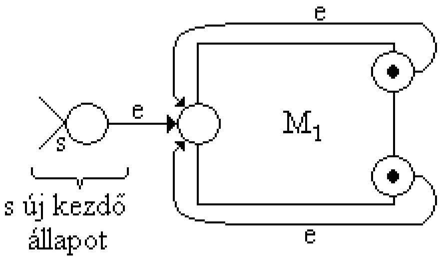
$(s,w) \vdash_M^* (p,e)$
$(s,w) \vdash_M^* (p,e)$, azaz $w \in L(M_1)$

<u>Tétel:</u>
Véges automaták által elfogadott nyelvek zártak a konkatenációra.

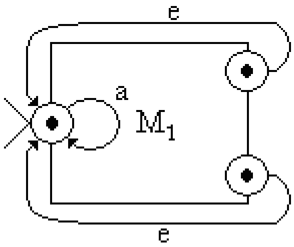
<u>Bizonyítás:</u>
$L(M_1)$, $L(M_2)$, $L(M)=L(M_1) \circ L(M_2)$
Legyen NFA
$M_1=(K, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$ és $M_2=(K, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$
Konstruáljunk egy NFA $M=(K, \Sigma, \Delta, s\ F)$-t, ahol
$K=K_1 \cup K_2$, (K_1 és K_2 diszjunktak)
$s=s_1$, $F=F_2$,
$\Delta=\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup (F_1 x \{e\} x \{s_2\})$



<u>Tétel:</u>
Véges automaták által elfogadott nyelvek zártak a Kleen-lezártra.
<u>Bizonyítás:</u>
$L(M)=L(M_1)^*$
Legyen NFA
$M_1=(K, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$ és $M_2=(K, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$
Konstruáljunk egy NFA $M=(K, \Sigma, \Delta, s\ F)$-t, ahol
$K=K_1 \cup \{s\}$ $s \notin K_1$, s új állapot nincs benne K_1-ben
$F = F_1 \cup \{s\}$
$\Delta=\Delta_1 \cup (F x \{e\} x \{s\}) \cup \{(s, e, s_1)\}$



Ez a második ábra azért nem helyes, mert, ha külön nem emelem ki a kezdőállapotot, akkor az automata rossz szót is elfogadhat a második körben.



<u>Tétel:</u>
Véges automaták által elfogadott nyelvek zártak a komplemens képzésre.
<u>Bizonyítás:</u>
$L(M)=\overline{L(M)}$
(azaz $L(M)=\Sigma^*\setminus L(M_1) \equiv L(M)=L(M_1)$)
Konstruáljunk egy DFA $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$-t, ahol
$K = K_1$, $s = s_1$
$F = K_1-F_1$, $\delta = \delta_1$

<u>Tétel:</u>
Véges automaták által elfogadott nyelvek zártak a metszetre.
<u>Bizonyítás:</u>
$L(M)=L(M_1)\cap L(M_2)$
Konstruáljunk egy DFA $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$-t, ahol
$L(M)=\Sigma^*-((\Sigma^*-L(M_1))\cup(\Sigma^*-L(M_2))$

<u>Megjegyzés:</u>
$L(M_1)\cap L(M_2)=\overline{\overline{L(M_1)}\cup\overline{L(M_2)}}$

<u>Tétel:</u>
A következő kérdés megválaszolásához az algoritmus:
Adott véges M automatára igaz-e, hogy $L(M)=\Sigma^*$
<u>Bizonyítás:</u>
- Az állapotdiagram felrajzolása választ adhat a kérdésre, vajon $L(M')=\varnothing$
- $L(M)=\Sigma^*$ akkor és csak akkor, ha $\overline{L(M)}=\varnothing$
- $L(M')=\overline{L(M)}$

<u>Tétel:</u>
A következő kérdés megválaszolásához az algoritmus:
Adott két véges M_1 és M_2 automatára igaz-e, hogy $L(M_1)\subseteq L(M_2)$?
<u>Bizonyítás:</u>
$L(M_1)\subseteq L(M_2)$ akkor és csak akkor, ha
$(\Sigma^*-L(M_2))\cap L(M_1)=\varnothing$

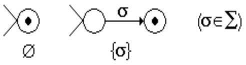
<u>Tétel:</u>
A következő kérdés megválaszolásához az algoritmus:
Adott két véges M_1 és M_2 automatára igaz-e, hogy $L(M_1)=L(M_2)$?
<u>Bizonyítás:</u>
$L(M_1)=L(M_2)$ akkor és csak akkor, ha
$(L(M_1)\subseteq L(M_2)$ és $L(M_2)\subseteq L(M_1))$

Reguláris nyelvek

Reguláris kifejezések ➔ nyelvek elfogadtatása reguláris kifejezésekkel.
<u>Például:</u>
$(ab\cup aba)^*$

<u>Tétel:</u>
Egy nyelv akkor, és csak akkor reguláris, elfogadja egy véges automata.
<u>Bizonyítás:</u>
Emlékeztető: Reguláris nyelvek osztálya a legkisebb halmaza a nyelvnek, tartalmazza $\emptyset$, $\{\sigma\}$ (ahol $\sigma\in\Sigma$) és és zárt az unióra, konkatenációra és a Kleen-lezártra.

(akkor, ha ➔)



Bebizonyítottuk, hogy a véges automaták által elfogadott nyelvek zártak az unióra, konkatenációra és a Kleen-lezártra.

(és csak akkor, ha 🡐)
Nem bizonyítjuk

Reguláris és nem reguláris nyelvek

Σ, Σ^*, **P** (Σ^*)
A legtöbb nyelv nem reguláris
<u>Például:</u>
$\{a^nb^n: n\geq 0\}$ nem reguláris

<u>Tétel:</u> (**Pumpálni**)
Legyen L egy végtelen reguláris nyelv, ekkor vannak x, y, z sztringek, úgy hogy $y\neq e$ és $xy^nz\in L$, minden $n\geq 0$.

<u>Bizonyítás:</u>
Legyen L egy M determinisztikus automata által elfogadott végtelen reguláris nyelv.
$M=(K, \Sigma, \delta, s, F)$, tegyük fel $|K|=m$.
Legyen $w\in L(M)$ ahol $|w|\geq m$. (létezik mivel L véges). $w=\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$, $(q_0=s, \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k) \vdash_M$ $(q_1, \sigma_2\ldots\sigma_k) \vdash_M (q_{k-1}, \sigma_k) \vdash_M (q_k\in F, k)$.
Mivel $k\geq m$, $\exists$ I, j, $i\neq j$ és $q_i=q_j$ $(i<j)$. Ezért,
$\sigma_{i+1}\ \sigma_{i+2}\ \ldots\ \sigma_j$ sztring M-et átviszi q_i állapotból q_j állapotba. Így, $\sigma_{i+1}\ \sigma_{i+2}\ \sigma_j$ elviheti vagy ismételheti w sztringet anélkül, hogy befolyásolná w elfogadását.

$$\underbrace{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_i}_{x}\underbrace{(\sigma_{i+1}\ \sigma_{i+2}\ \ldots\sigma j\ )^n}_{y}\ \underbrace{\sigma_{j+1}\ldots\sigma_k}_{z}\in L(M),\ n\geq 0$$

<u>Állítás:</u>
$\{a^nb^n: n\geq 0\}$ nem reguláris.
<u>Bizonyítás:</u>
Végtelen, ezért a pumpálni tétel felhasználható.
$\exists$ x, y, z where $y\neq e$ $xy^nz\in L$.

(i) $x=a^{n_1}$ $y=a^{n_2}$ $z=b^{n_3}$

$a^{n_1}\cdot a^{n\cdot n_2}\cdot b^{n_3}\in L\ \forall n$

$n_1+n\cdot n_2=n_3$ ellentmondás

(ii) $x=a^{n_1}$ $y=a^{n_2}$, b^{n_3} $z=b^{n_4}$

(iii) $x=a^{n_1}$ $y=b^{n_2}$, $z=b^{n_3}$

Környezetfüggetlen nyelvtan

Példa:
$a(a^* \cup b^*)b$
a kimenet és vagy
egy sem, egy, sok a kimenet vagy
egy sem, egy, sok b kimenet és
b kimenet

Bevezetjük S-et, mint egy nyelv egy sztringje.
→ "lehet"-nek nevezzük.

$$\left.\begin{array}{l} S \rightarrow aMb \\ M \rightarrow A,\ \ M \rightarrow B \\ A \rightarrow e,\ A \rightarrow aA \\ B \rightarrow e,\quad B \rightarrow bB \end{array}\right\} \text{ szabályok}$$

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow & aMb \\ & aAb \\ & aaAb \\ & aaaAb \\ & aaab \end{array}$$

Def.: (Környezetfüggetlen nyelvtan: CFG)
G összefüggésmentes nyelvtan egy négyes (V,Σ,R,S), ahol:
V egy ábécé (véges halmaz)
Σ (terminálok halmaza) V egy részhalmaza
R a szabályok halmaza, $R \subseteq (V \setminus \Sigma) x V^*$
S kezdő szimbólum, $S \in V \setminus \Sigma$

$V \setminus \Sigma$ halmaz nem terminális halmaz.

Def.:
- Ha $A \in V \setminus \Sigma$, $u \in V^*$, $(A,u) \in R$, $A \underset{G}{\rightarrow} u$
- $u \underset{G}{\Rightarrow} V$ akkor és cask akkor, ha $\exists$ x,y,v'$\in V^*$ és $A \in V \setminus \Sigma$ úgy hogy, u=xAy, v=xv'y és A kicserélhető v'-re
- A $\underset{G}{\Rightarrow}$ reflexív, tranzitív relációk lezártja $\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}$

Def.:
G összefüggésmentes nyelvtan létrehozott nyelv
$L(G)=\{w \in \Sigma^*: S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w\}$

Példa:
$V\{S, a, b\}$, $\Sigma=\{a, b\}$, $R=\{S \underset{G}{\rightarrow} aSb, S \underset{G}{\rightarrow} e\}$
$L(G)=\{a^n b^n: n \geq 0\}$

(Mert $S \underset{G}{\Rightarrow} aSb \underset{G}{\Rightarrow} aaSbb \underset{G}{\Rightarrow} aaaSbbb \underset{G}{\Rightarrow} aaabbb$)

Reguláris nyelvek és környezetfüggetlen nyelvtan

Def:
Egy környezetfüggetlen nyelvtan akkor és csak akkor reguláris, ha $R \subseteq (V \setminus \Sigma) x \Sigma^* ((V \setminus \Sigma) \cup \{e\})$
/ez a $R \subseteq (V \setminus \Sigma) x V^*$ leszűkítése/

Például:
$G=(V,\Sigma, R, S)$, $V=\{S,A,B,a,b\}$, $\Sigma=\{a,b\}$
$R=\{S \rightarrow bA, S \rightarrow aB, A \rightarrow aBaS, B \rightarrow babS, S \rightarrow e\}$

ez reguláris nyelv

Tétel:
Egy nyelv akkor és csak akkor reguláris, ha reguláris nyelvtanból alkották.
Bizonyítás:
(akkor $\Rightarrow$)

Tegyük fel, hogy L reguláris és egy $M=(K,\Sigma,\delta,s,F)$ determinisztikus véges automata által elfogadott, ahol $K\cap\Sigma=\emptyset$.

Definiáljunk egy $G=(V,\Sigma, R, S)$ reguláris nyelvtant, mint $V=\Sigma\cup K$, $S=s$, $R=\{q\rightarrow ap:\delta(q,a)=p\}\cup\{q\rightarrow e:q\in F\}$
$\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n \in \Sigma$, $p_0, p_1,\ldots,p_n\in K$.

$(p_0, \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n)\vdash_M(p_1, \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n) \vdash_M\ldots\vdash_M (p, e)$ iff $p_0 \underset{G}{\Rightarrow} \sigma_1, p_1 \underset{G}{\Rightarrow} \sigma_1\sigma_2, p_2 \underset{G}{\Rightarrow} \ldots \underset{G}{\Rightarrow} \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n, p_n$

$\delta(p_0, \sigma_1)=p_0$

$p_0\rightarrow\sigma_1 p_1$

$p_0 \Rightarrow \sigma_1 p_1$

Bizonyítani fogjuk $L(M)\subseteq L(G)$ és $L(G)\subseteq L(M)$

(i) Tegyük fel, hogy $w\in L(M)$ azaz, $(s,w)\vdash_M^*(p,e)$ és $p\in F$. Ennél fogva,
$s \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} wp$, $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$, $w\in L(G)$.

(ii) Tegyük fel, hogy $w\in L(G)$, akkor $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$, azaz, $s \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$.

A származtatás ($\underset{G}{\Rightarrow}$) utolsó lépése $p\rightarrow e$ alakban van, ahol $p\in F$ ami kizárja, hogy csak nem terminális. Következetesen $s \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} wp$, azaz, $(s,w) \vdash_M^*(p,e)$, ahol $p\in F$, $w\in L(M)$.