בנימין
טבקיה
327335238

תרגיל 3

①

שאלה 1:

נגדיר רשת בייסנית עבור גרף המעבר. מ״מ שלנו יהיו $X_0, \dots, X_{n-1}$ כאשר $|V|=n$. (כמספר הקודקודים)

X_0 היא מ״מ שמתאים ל-v_0 וכו׳..

נגדיר את טבלאות ההתפלגות.

עבור X_0 נתון

X_0	
0	0.5
1	0.5

מכיוון שהגרף הוא עץ אז יש סדר מסוים שאפשר לעבור על הגרף ולא נחזור ל-X_0 (אין מעגל.) ונסתכל על כל הבנים של X_0. נסמן $S_{X_0} \subseteq X = \{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ כבנים של X_0. עבור $X_i \in S_{X_0}$ נגדיר טבלת התפלגות:

P_{0i} הסתברות ש-bit ישתנה בין v_0 ל-v_i

	X_i	
X_0	0	1
0	$1-P_{0i}$	P_{0i}
1	P_{0i}	$1-P_{0i}$

ועכשיו רקורסיבית עבור S_{X_i} (בנים של X_i)

יהי $X_j \in S_{X_i}$ (בן של X_i) נגדיר

P_{ij} הסתברות להתהפך bit בין v_i ל-v_j

	X_j	
X_i	0	1
0	$1-P_{ij}$	P_{ij}
1	P_{ij}	$1-P_{ij}$

מכיוון שהגרף הוא עץ והגדרנו ש~~X~~0 היא השורש
לכן ~~ז~~ זה מוגדר היטב ובאמת לא חוזרים על אותו
קודקוד פעמיים, עוברים על כולם, ולכל מ״מ יש הורה
יחיד שהוא תלוי בו.

ההגדרה זו רקורסיבית לכל מ״מ ~~[illegible]~~ ברשת,

סה״כ

$$P(X_0,\ldots,X_{n-1}) = P(X_0)\,P(X_{i_1}|X_0)\cdot P(X_{i_2}|X_0)\cdots P(X_j|X_i)$$

כאשר הסדר יקבע לפי הגרף.

ב. עבור X_0 נתון.

עבור בן ישיר של X_0:

X_i

X_0	0	1
0	$1-P_{0i}$	P_{0i}
1	P_{0i}	$1-P_{0i}$

⇐

$$P(X_i=0) = P(X_0=0)\cdot \cancel{\ } (1-P_{0i}) + P(X_0=1)\cdot P_{0i} =$$

$$= 0.5(1-P_{0i}) + 0.5P_{0i} = 0.5$$ ✓

נניח עבור X_i ~~[illegible]~~ במרחק K מX_0, נוכיח
עבור X_j במרחק $K+1$.

$$P(X_j=0) = P(X_{\pi_j}=0)(-P_{v_{\pi_j}v_j}+1) + P(X_{\pi_j}=1)\cdot P_{v_{\pi_j}v_j}$$

$$\underset{\text{ה}}{=} 0.5(1-P_{v_{\pi_j}v_j}) + 0.5\,P_{v_{\pi_j}v_j} = 0.5$$ ✓

ה
הנחת
אינדוקציה
כי הורה
X_j
במרחק K מX_0

②

ג. שוב אינדוקציה על מרחק מ X_0.

עבור מרחק 0 קל כי זה אומר ש X_0 זה השורש ובהגד׳ר ש ההתפלגות שווה כי כלום לא השתנה.

עבור $k=1$ מרחקנ ניקח X_i מ"מ במרחק $k=1$.

X_i	
0	0.5
1	0.5

כי זה השורש. לכן X_0 גם

X_i	X_0: 0	1
0	$1-P_{0i}$	P_{0i}
1	P_{0i}	$1-P_{0i}$

סימטריה! $P_{0i} = P_{i0}$

כלומר שוב:

X_0	
0	0.5
1	0.5

X_0 . ההתפלגות שווה. לכן כל ההתפלגות המשותפת לא משתנה. נניח נכונות עבור קודקוד מרחק k. נוכיח עבור קודקוד במרחק $k+1$. נניח X_{k+1} הוא השורש (קודקוד במרחק $k+1$ מ X_0). לכן

X_{k+1}	
0	0.5
1	0.5

נסתכל על מסלול מ X_{k+1} … X_0 (יש מסלול כזה כי זה עץ). ניקח את X_k המ"מ אחד לפני X_{k+1}, הוא במרחק k מ X_0.

X_k	X_{k+1}: 0	1
0	$1-P_{k+1,k}$	$P_{k+1,k}$
1	$P_{k+1,k}$	$1-P_{k+1,k}$

כאן שוב

$$P(X_k=0) = P(X_{k+1}=0)(1-P_{k+1,k}) + P(X_{k+1}=1)P_{k+1,k} =$$

$$0.5(1-P_{k+1,k}) + 0.5P_{k+1,k} = 0.5$$

הראנו ש X_k מתפלג אחיד לכן מהנחת האינדוקציה
. נובע ש ההתפלגות המשותפת על כל ה X_i זהה
לצומת כאשר X_0 היא השורש!