Seksjon 1A: Modelering av en rakettmotor og simulering av en rakettoppskytning

Bendik og Ole Kristian
(Dated: September 1, 2020)

Hmmm, føer at denne rapporten er ganske abstrakt egentlig

I. INTRODUCTION

Denne rapporten handler om modelering av en rakettmotor, og hvordan resultatet kan brukes til å modelere en rakettoppskytning. Grunnen til at vi skal gjøre dette er fordi vi vil etterhvert komme oss til en annen planet. Vi skyter opp raketten fra en planet i et tilfeldig generert solsystem til, og skal komme oss til en annen planet i dette solsystemet. Her er noen relevante verdier til det tilfeldig genererte solsystemet:

Table I. Solsystemverdier

Navn	Type	Masse	Radius	Rotasjonshastighet
Solen	Sol	$5.61{\cdot}10^{29}$ kg	280740 km	ukjent
Hjemplanet	Stein	$1.82{\cdot}10^{25}$ kg	9572 km	$6.37{\cdot}10^{-5}$ 1/s
Planet 2	Stein	$6.94{\cdot}10^{24}$ kg	6457 km	$8.51{\cdot}10^{-5}$ 1/s
Planet 3	Gass	$3.31{\cdot}10^{27}$ kg	76942 km	$1.25{\cdot}10^{-4}$ 1/s
Planet 4	Stein	$1.4{\cdot}10^{22}$ kg	826 km	$2.1{\cdot}10^{-6}$ 1/s
Planet 5	Stein	$1.6{\cdot}10^{24}$ kg	3906 km	$2.49{\cdot}10^{-6}$ 1/s
Planet 6	Gass	$3.28{\cdot}10^{25}$ kg	20050 km	$2.54{\cdot}10^{-4}$ 1/s
Planet 7	Stein	$7.64{\cdot}10^{23}$ kg	3169 km	$2.25{\cdot}10^{-6}$ 1/s

I denne simuleringen antar vi ingen luftmotstand, siden det kan være vanskelig å finne denne med god presisjon siden en rakett har en spiss tupp og dermed ikke en flate som er så lett å regne på.

II. THEORY

For å modelere en rakettmottor trenger man først litt kunnskap om statistikk. I en rakettmotor er det mange partikler, som alle har en position og en hastighet. Hastigheten til partiklene i x-, y-, eller z-retning er gitt ved Maxvell-Boltzmann fordelingsfunksjonen, som ser slik ut:

$$P(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{1}{2}\frac{mv_x^2}{kT}}$$

Hvor m er massen til partiklet, T er temperaturen til partiklet og k er Boltzmann konstanten, ca. $1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$.

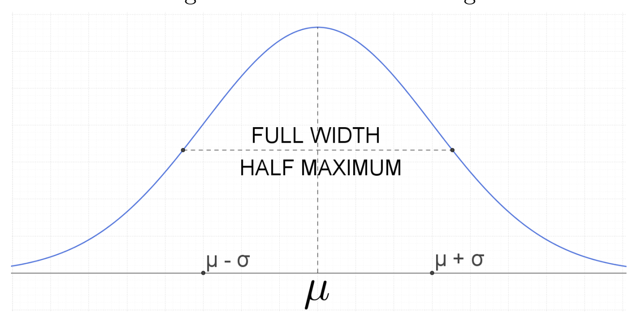
Denne funksjonen beskriver en sannsynlighetstetthet, sjansen for at en hastighet er i intervallet $[v_0,\ v_1]$ er integralet $\int_{v_0}^{v_1} P(v_x)\ dv_x$. Dette vil også si at $\int_{-\infty}^{\infty} P(v_x)\ dv_x = 1$, ettersom sjansen for at en hastighet er i intervallet $[-\infty,\ \infty]$ er 100 %.

Maxvell-Boltzmann fordelingsfunksjonen er en normaldistrobusjon, en funksjon på formen:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

For Maxvell-Boltzmann fordelingsfunksjonen er $\mu = 0$ og $\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m}}$.
En normalfordeling ser slik ut:

Figure 1. En normalfordeling



Hvor μ er x-verdien til toppunktet, og σ sier noe om bredden til kurven. μ kalles middelverdien, og σ kalles standardavviket. For å få en visuell forståelse av standardavviket kan man bruke FWHM, "Full width half maximum": Forholdet mellom FWHM og standardavviket er

$$\sigma = \frac{\text{FWHM}}{2\sqrt{2\ln 2}}$$

Utldeningen av dette forholdet er i A 1. En annen viktig

sannsynlighetsfordeling er Maxvell-Boltzmanns fordelingsfunksjon for absolutthastighet:

$$P(v) = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{kT}} 4\pi v^2$$

Denne likner på Maxvell-Boltzmanns fordelingsfunksjon for hastighetskomponenter, men på grunn av det siste leddet, $4\pi v^2$, er det ikke en normaldistrobusjon. Den er likevel fortsatt en sannsynlighetsfordeling, $\int_0^{\infty} P(v)\ dv = 1$. Fra Maxvell-Boltzmanns fordelingsfunksjon kan man utlede noen viktige formler:

Gjennomsnittshastigheten i en gass:
$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ (A 2)

Den ideelle gassloven:

$P = nkT$ (A 3)

Gjennomsnittsenergien i en gass:
$\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT(sickref)$

Om man skal simulere partikkler i en boks eller en rakettoppskytning trener man en numerisk måte å gjøre om akselerasjon til hastighet og hastighet til position. Vi vet at gjennomsnittshastighet er endring i position over tid. Fra dette kan vi få et uttrykk for endring i position.
$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \implies \Delta x = \bar{v}\Delta t \implies x_1 = x_0 + \bar{v}\Delta t$.
Dette antar at hastigheten er konstant. For partiklene i boksen stemmer det, men for rakketten må vi få med akselerasjon. Kan utlede et liknende uttrykk for akselerasjonen:
$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \implies \Delta v = \bar{a}\Delta t \implies v_1 = v_0 + \bar{a}\Delta t$. Vi får altså to likninger som beskriver bevegelsen til raketten:

$$v_1 = v_0 + \bar{a}\Delta t$$
$$x_1 = x_0 + v_1\Delta t$$

Denne måten å løse bevegelseslikningene kalles Euler-Cromer metoden. Eulers metode er liknende, men der oppdateres $x_1 med v_0$, som er litt mindre nyaktig. Det er fortsatt antatt konstant akselerasjon, som i rakettoppskytningen ikke stemmer, men når tidssteget Δt blir like nok vil akselerasjonen oppføre seg som om den er konstant.

For å forstå hvordan en rakett beveger seg oppover trenger man å vite om newtons lover. Newtons andre lov, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ sier oss at kraften, F, er endringen i bevegelsesmengde, p, over tid. Når en partikkel skytes ut av rakettmotoren minker bevegelsesmengden inne i motoren, som vil si at det virker en kraft nedover på gassmolekylene i motoren. Vi vet at denne kraften må komme fra selve raketten, fordi dette er egentlig bare kraften fra veggene i motoren på gassmolekylene, og denne kraften er netto nedover siden der er like mye vegg loddrett på alle sider, men mer vegg horisontalt i øvre del av motoren enn nedre. Fra newtons 3. lov har vi at alle krefter har en lik og motsatt rettet motkraft, så når gassmolekylene blir påvirket av en kraft nedover fra selve raketten, vil selve raketten bli påvirket av en kraft oppover, og raketten vil lette hvis denne kraften er større enn gravitasjonen.

Når raketten skal ut i bane rundt planeten må vi bruke tyngdekraften gitt ved newtons tyngdekraftslov

$$\vec{F} = \gamma \frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

hvor γ er gravitasjonskonstanten, M er massen til planeten, m er massen til raketten, r er lengden til vektoren fra planeten til raketten, og $\hat{r}$ er retningen til vektoren fra planeten til raketten.

For å finne ut om raketten klarer å lette og videre komme ut i verdensrommet må vi finne ut om den når unnslipningsfarten. Unnslipningsfarten er den farten som gir nok kinetisk energi til at raketten kan komme fullstendig ut av planetens gravitasjonsfelt. Altså den farten raketten må ha for å komme til dit $r \to \infty$. Raketten må altså ha mer kinetisk energi enn gravitasjonell potensiell energi.

Så hvis vi har en rakett med masse m og en planet med masse M er unnslipningsfarten:

$$E_k + E_p = 0$$

der E_p kan utledes fra

$$\vec{F}_G = -\nabla E_p$$

slik at den blir

$$E_p = -\gamma \frac{mM}{r}$$

Da har vi at

$$E_k = E_p$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = \gamma \frac{mM}{r}$$
$$v = \sqrt{2\gamma \frac{M}{r}}$$

der r er planetens radius.

III. METHOD

Først og fremst kan vi se på hvordan vi simulerer bevegelsen til gassmolekylene i motoren. Vi tenker oss at rakketdrivstoffet er ren H2-gass, og at motoren har en temperatur på 3000 Kelvin. For å gjøre simuleringen enklere antar vi at H2-gassen er en ideell gass, altså at H2-molekylene ikke interagerer med hverandre, dette stemmer ikke helt, men det gør at simuleringsalgoritmen er $O(n)$ istedenfor $O(n^2)$. Vi må likevel gjøre at rakettmotoren består av veldig mange veldig små bokser, og simulere atomene i en sånn boks, for å kunne simulere en rimelig molekyltetthet og mange nok tidssteg for å få et godt resultat. Vi teker oss derfor at vi har en terningformet boks med sidelengder $L = 10^{-6}$ m med 100000 atomer.

Vi startet med å gi hvert molekyl en tilfeldig intialposisjon etter lineær distibusjon og en tilfeldig initialhastighet etter gaussisk sannsynlighetsfordeling. Maxwell-Boltzmanns sannsynlighetsfordeling (se teoridel) gir oss inndelingen av initialhastighetene. For en temperatur på 3000 K og H2-molekyler med en masse på $3.35 \cdot 10^{-27}$ kg har hastighetskomponentene et standardavvik på $\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m}} = \sqrt{\frac{1.38 \cdot 10^{-27} \cdot 3000}{3.35 \cdot 10^{-24}}} \approx 3517$

Når man har funnet initialhastigheten og initialposisjonene kan man bruke Eulers metode til å simulere bevegelsen til partiklene numerisk:

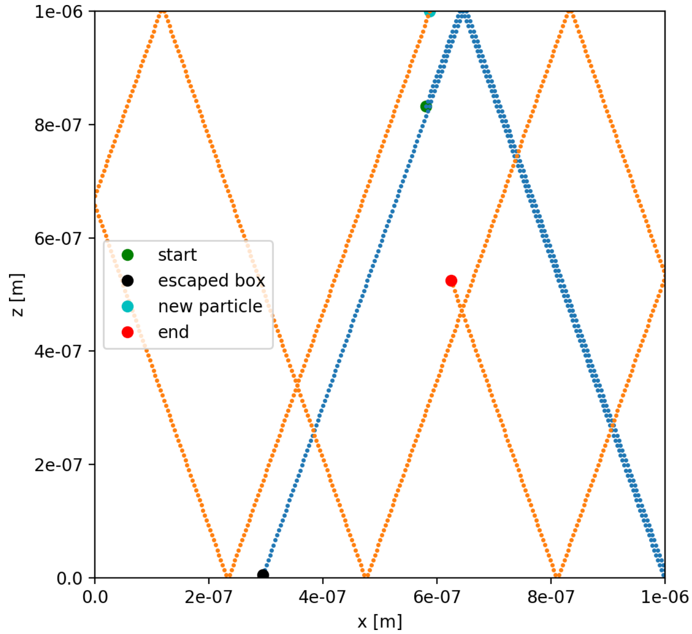
$$\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \vec{v}_i\Delta t$$

Vi antar at det ikke virker noen gravitasjon på hvert enkelt gassmolekyl i boksen, ettersom et hydrogenmolekyl veier så lite at gravitasjonskraften på det er neglisjerbar. Dette, sammen med at molekylene ikke kolliderer, betyr at molekylene har konstant hastighet helt fram til de kolliderer med en av veggene. Vi antar at disse kollisjonene er elastiske, altså vil hastigheten i den retningen som kolliderer med veggen ganges med -1. Siden vi simulerer for et og et tidssteg kan vi sjekke når partiklene havner uten for veggen for hvert tidssteg, og snu hastigheten slik at de går bort fra veggen. Da er det slik at hvis veggen som molekylet kolliderer med ligger i for eksempel yz-planet så blir hastighetskomponenten i x-retning snudd. Her er valget av tidsstegstørrelse viktig, hvis tidsstegene er for store vil molekylene bevege seg langt ut av boksen før hastighetskomponenten blir snudd, som kan føre til unyaktighet og uventet oppførsel. Gitt et standardavvik på 3517 er det svært få moleyler som har hastighetskomponenter større enn 10000 (0.45 % for å være presis). Bruker vi den hastigheten som en øvre grense, kan vi finne tiden det tar for at et rastk moleky beveger seg fra en sigen av boksen til den andre:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{10^{-6}\ \mathrm{m}}{10^{4}\ \mathrm{m/s}} = 10^{-10}\ \mathrm{s}$$

Vi ønsker at et raskt molekyl skal bevege seg fra en side av boksen til en annen på N steg, så tidsstegstørrelsen vi trenger er $\frac{10^{-10}}{N}$ s. Vi valgte $N = 20$, altså $\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-11}$, basert på en balanse mellom presisjon og simuleringshastighet. Når vi plottet bevegelsen til et av molekylene med $N = 20$ så det slik ut:

Figure 2. Bevegen til et hydrogenmolekyl



Vi så at molekylet ikke kom for langt inn i veggen, og bestemte oss for å ikke bruke mer tid på å finpusse tidsstegstørrelsen. Dette plottet viser også at molekylet faller ut av boksen og et nytt molekyl kommer inn, som skal forklares senere.

Videre må vi lage et hull i bunnen av boksen slik at molekylene slipper ut og vi får en kraft som dytter raketten oppover. For å sjekke om et molekyl har kommet ut av boksen, sjekker vi da om koordinatene ligger både innenfor hullet, og under boksen. Man kan prøve seg litt fram med størrelsen på hullet slik at ikke for mye av gassen vi har tilgjengelig slipper ut for fort og slik at vi får en stor nok oppdriftskraft. Når vi finner ut hvor mange partikler som har gått ut av boksen i et tidssteg så kan man finne ut hvilken fart de hadde og dermed endringen i bevegelsesmengde ved dette tidssteget. Over en viss tidsperiode får man da endring i bevegelsesmengde over tid, som gir oss kraften som virker på raketten ved hjelp av Newtons andre lov. Det er også viktig at trykk og temperatur holder seg konstant i boksen slik at vi får en kontinuerlig oppdrift, da må vi etterfylle med molekyler fra drivstofftanken. Siden de molekylene som slipper ut først mest sannsynlig har større hastighet siden de beveger seg mest vil temperaturen i boksen synke hvis vi legger til et molekyl med en tilfeldig generert hastighet (fortsatt ved samme temperatur som i boksen), derfor ga vi de molekylene som kommer inn fra drivstofftanken samme hastighet som det som falt ut, slik at temperaturen holdes konstant. Vi gjorde det slik at de nye molekylene da har initialposisjon ved toppen av motoren siden det er der drivstofftanken er.

Siden det må virke en kraft fra raketten på gassmolekylene for at motoren skal miste bevegelsesmengde må det ifølge Newtons 3. lov som nevnt i teoridelen virke en motkraft som er like stor og motsatt rettet som virker på raketten. Siden vi regner ut endring i bevegelsesmengde per tidssteg for hvert tidssteg kan vi også regne ut denne kraften for hvert tidssteg og fra Newtons andre lov akselerasjonen oppover per tidssteg. Hvis vi også da tar i betraktning gravitasjonen på raketten og drivstoffet og hvor mye massen endres idet mer drivstoff slippes ut kan vi numerisk beregne bevegelsen til raketten. Til dette brukte vi Euler-Cromers metode til å regne ut hastighet og posisjon:

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \vec{a}_i \Delta t$$
$$\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \vec{v}_{i+1} \Delta t$$

Målet er å skyte opp raketten, som vil si å få den til å gå så raskt at den når unnslipningshastigheten, som er forklart i teoridelen. Vi må først finne unnslipningshastigheten for planeten vår:
Vi har fra I at planeten har radiue $r = 9.572 \cdot 10^6$ m og masse $M = 1.82 \cdot 10^{25}$ kg, finner unnslipningshastigheten:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2GM}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2} \cdot 1.82 \cdot 10^{25} \text{ kg}}{9.572 \cdot 10^6 \text{ m}}} \\ &= 15.93 \text{ km/s} \end{aligned}$$

Vi definerer altså å skyte opp raketten som å gi den en hastighet større enn 15.93 km/s. Når vi skal skyte opp raketten må vi ta hensyn til initialhastigheten til romskipet vårt. Ettersom den er på en roterende planet vil den ha en hastighet som avhenger av rotasjonshastigheten til planeten, radiusen til planeten og hvor på planeten raketten er. På ekvator er initialhastigheten størst, og på polene er initialhastigheten minst. Vi skyter derfor raketten opp på et punkt på ekvator, sånn at vi trenger minst mulig ekstra hastighet for å nå unnslipningshastigheten. Med verdiene til planeten vår fra tabell 1 har vi at rotasjonshastigheten er $\omega = 6.38 \cdot 10^{-5}$ s^{-1}. Dette gir en initialhastighet (i rotasjonsretningen) $v = \omega \cdot r = 6.38 \cdot 10^{-5}$ s$^{-1} \cdot 9.572 \cdot 10^6$ m $= 611$ m/s.
Vi definerer startspunktet til romskipet som $(0, 0, r)$ hvor r er radiusen til planeten. Vi har altså definert x-aksen til å gå langs ekvator i rotasjonsretningen, z-aksen til å gå rett oppover i radiell rettning, og z-aksen til å gå normalt på x-aksen og z-aksen. Det vil si at initialhastigheten til rommskipet er i x-retning, og kraften fra motoren er i z-retning. I en ekte rakettoppskytning vil raketten bøye seg i rotasjonsretningen, men vi antar her at raketten er helt parallell med z-aksen hele tiden, og at all akselerasjon foregår i z-retning. Dette er fordi at vi ikke har lært hvordan en ekte rakettoppskytning fungerer.

IV. RESULTS

V. DISCUSSION

VI. CONCLUSION

Appendix A: Utledning

1. Utleding av forholdet mellom FWHM og standardavviket

Skal vise at

$$\sigma = \frac{\text{FWHM}}{2\sqrt{2\ln 2}} \implies \text{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma$$

Toppunktet til en normalkurve er når $x = \mu$. "Half maximum" er derfor $\frac{P(\mu)}{2}$ (hvor P(x) er normalfunksjonen). "Half maximum" er altså:

$$\frac{P(\mu)}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma}$$

Trenger så å finne x-verdien hvor x="Half maximum", løser likningen $P(x) = \frac{P(\mu)}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} &= \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 &= \ln\frac{1}{2} \\ \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 &= 2\ln 2 \\ (x-\mu)^2 &= 2\ln 2\sigma^2 \\ x-\mu &= \pm\sigma\sqrt{2\ln 2} \\ x &= \underline{\mu \pm \sigma\sqrt{2\ln 2}} \end{aligned}$$

"Full width" er max(x) - min(x):

$$\begin{aligned} &\left(\mu + \sigma\sqrt{2\ln 2}\right) - \left(\mu - \sigma\sqrt{2\ln 2}\right) \\ &= \sigma\sqrt{2\ln 2} + \sigma\sqrt{2\ln 2} + \mu - \mu \\ &= \underline{2\sqrt{2\ln 2}\sigma} \end{aligned}$$

"Full width" for "Half maximum" er FWHM, altså er FWHM $= 2\sqrt{2\ln 2}\sigma$ $\square$

2. Utleding av gjennomsnittshastigheten til en gass

Skal vise at

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Har at

$$\langle v\rangle = \int\limits_0^\infty vP(v)\ dv,\ P(v) = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{kT}} 4\pi v^2$$

Løser integralet:

$$\begin{aligned}
\langle v\rangle &= \int_0^\infty v\left(\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{kT}} 4\pi v^2\right) dv \\
&\quad u = v^2 \implies du = 2vdv \implies dv = \frac{du}{2v} \\
&= 4\pi\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\right)^3 \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\frac{mu}{kT}} u\ du \\
&= 4\pi\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\right)^3 \frac{1}{2}\int_0^\infty ue^{-Cu}\ du\ ,\ \ C = \frac{1}{2}\frac{m}{kT} \\
&\quad t = Cu \implies u = \frac{t}{C},\ dt = Cdu,\ du = \frac{dt}{C} \\
&= 4\pi\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\right)^3 \frac{1}{2}\frac{1}{C^2}\int_0^\infty te^{-t}\ dt \\
&= 4\pi\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\right)^3 \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\frac{m}{kT}\right)^2} \cdot 1 \\
&= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\ \ \square
\end{aligned}$$

3. Utledning av trykket til en ideell gass

Skal vise at

$$P = nkT$$

ut i fra integralet

$$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty pvn(p)dp$$

Hvor $n(p) = nP(p)$ er antalltettheten Løser integralet

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{3}\int_0^\infty pvn(p)dp \\
P(v) &= (\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 \\
p &= mv \\
P(p) &= (\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{p^2}{2kTm}} 4\pi \frac{p^2}{m^2} \\
P &= \frac{1}{3}\int_0^\infty pvn(p)dp \\
&= \frac{1}{3}n\int_0^\infty \frac{p^2}{m}(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{p^2}{2kTm}} 4\pi\frac{p^2}{m^2}dp \\
&= \frac{4\pi}{3}n(\frac{m^3}{(2\pi kT)^3 m^6})^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{2kTm}} p^4 dp \\
u &= \frac{p^2}{2kTm} \\
\frac{du}{dp} &= \frac{p}{kTm} \\
dp &= \frac{mkT}{p}du \\
p &= \sqrt{2mkTu}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{3} n\left(\frac{m^3}{(2\pi kT)^3 m^6}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{2kTm}} p^4 dp \\
&= \frac{4\pi}{3} n\left(\frac{m^3}{(2\pi kT)^3 m^6}\right)^{\frac{1}{2}} mkT(2mkT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-u}(u)^{\frac{3}{2}} dp \\
&= \frac{4\pi}{3} n\left(\frac{m^3}{(2\pi kT)^3 m^6}\right)^{\frac{1}{2}} mkT(2mkT)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \\
&= nkT
\end{aligned}
$$