

3^η Άσκηση – Trajectory Generation

Μάθημα: Εισαγωγή στη Ρομποτική

Διδάσκων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Χατζηλυγερούδης

Ονοματεπώνυμο: Κωνσταντίνος Κανελλόπουλος

Αριθμός Μητρώου: 1100881

Έτος: 2025 - 2026



Σημαντικός Σύνδεσμος της εργασίας με κώδικα και Βίντεο:

<https://benizelosoellhn.github.io/Robotic-Arm-Trajectory-Generation-University-of-Patras-Exercise/>

Περιεχόμενα

0. Εισαγωγή

- Σκοπός της Αναφοράς
- Περιγραφή του Σεναρίου

1. Θέσπιση Παγκόσμιου Συστήματος Αναφοράς {s}

1.1 Θέσπιση Παγκόσμιου Συστήματος Αναφοράς {s}

1.2 Προσδιορισμός Body Frames

- Σύστημα μπλε Κύβου {b}
- Σύστημα Κουτιού {c}
- Σύστημα Οπής {h}

Παράγραφοι 1 -
4 είναι σχεδόν
παρόμοιοι με
αναφορά 1 και

2

2. Κινηματική Περιγραφή του {g} (End Effector)

2.1 Ορισμός του Συστήματος Συντεταγμένων {g}

2.2 Επαλήθευση Θέσης εντός Χώρου Εργασίας

2.3 Υπολογισμός του Πίνακα Μετασχηματισμού

3. Ανάλυση Σχετικής Πόζας Κύβου—End Effector για το Pick

3.1 Υπολογισμός του Αντίστροφου Μετασχηματισμού

3.2 Σχετικός Μετασχηματισμός End Effector → Κύβος

4. Κινηματική Ακολουθία της Διαδικασίας Τοποθέτησης

4.1 Κατακόρυφη Ανύψωση του Κύβου

4.2 Περιστροφική Ευθυγράμμιση με την Οπή

4.3 Μεταφορική Κίνηση στην Τελική Θέση Εισαγωγής

4.4 Ανάλυση Inverse and Forward Kinematics

4.5 Προσδιορισμός αξόνων Screw (\mathcal{S}_i)

4.6 Space Jacobian

4.7 Αλγόριθμος Newton-Raphson

4.8 Επαλήθευση Λύσεων με Forward Kinematics

5. Σχεδίαση Τροχιάς

5.1 Στόχος και Μεθοδολογία

5.2 Επιλογή waypoints

5.3 Screw Interpolation στο $SE(3)$

5.4 Αναλυτική Μορφή του Εκθετικού Χάρτη

5.5 Time Scaling

5.6 Υπολογισμός Επιθυμητής Ταχύτητας (Feedforward Twist)

5.7 Προσάρτηση Αντικειμένου μετά τη Σύλληψη (Kinematic Relation)

5.8 Αντιμετώπιση Τοπικών Ελοχίστων

5.9 Λύση IK για Grasp Pose

6. Κινηματικός Προσομοιωτής

Υπολογισμός Λύσης Τοποθέτησης

7. Σύστημα Ελέγχου Task-Space

7.1 Έλεγχος Μεταφορικού Σφάλματος

7.2 Έλεγχος Περιστροφικού Σφάλματος

8. Αποτελέσματα και Γραφήματα

Εισαγωγή:

Σκοπός της Αναφοράς

Σκοπός της παρούσας αναφοράς είναι η μελέτη και υλοποίηση μιας ρομποτικής εργασίας τύπου pick-and-place χρησιμοποιώντας τον ρομποτικό βραχίονα Elephant myArm 300 Pi. Δίνουμε έμφαση αυτή τη φορά όχι μόνο στην κινηματική ανάλυση, αλλά και στον σχεδιασμό συνεχούς τροχιάς στο χώρο SE(3), στον κινηματικό προσομοιωτή και στον έλεγχο ταχύτητας στο χώρο εργασίας.

Περιγραφή του Σεναρίου

Ο βραχίονας καλείται να συλλάβει έναν κύβο {b} και να τον τοποθετήσει μέσα στην οπή {h} ενός κουτιού {c}. Για την υλοποίηση αυτού:

- ορίζονται όλα τα απαραίτητα συστήματα αναφοράς στο περιβάλλον και στο ρομπότ,
- καθορίζονται οι αντίστοιχοι ομογενείς μετασχηματισμοί μεταξύ κόσμου, βάσης, εργαλείου και αντικειμένων,
- σχεδιάζεται μια συνεχής τροχιά στο χώρο SE(3) που επιτρέπει την ομαλή εκτέλεση της εργασίας,
- υλοποιείται ένας κινηματικός προσομοιωτής, όπου η κατάσταση του ρομπότ περιγράφεται αποκλειστικά από τις γωνίες των αρθρώσεων,
- και εφαρμόζεται έλεγχος ταχύτητας στο χώρο εργασίας βασισμένος στον ψευδοαντίστροφο του Jacobian, ώστε το άκρο του ρομπότ να ακολουθεί την επιθυμητή τροχιά.

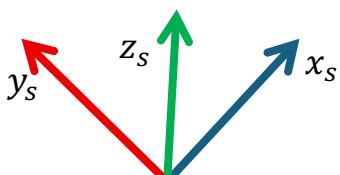
Η σύλληψη και απελευθέρωση του κύβου πραγματοποιούνται υπό συγκεκριμένους γεωμετρικούς περιορισμούς, ενώ η συνολική συμπεριφορά του συστήματος οργανώνεται μέσω state machine, η οποία διασφαλίζει τη σωστή αλληλουχία των φάσεων της εργασίας. Η ορθότητα της προσέγγισης επαληθεύεται μέσω forward kinematics, καταγραφής και ανάλυσης μεγεθών σφάλματος και οπτικής προσομοίωσης στο περιβάλλον ROS 2 / RViz.

1.1 Θέσπιση Παγκόσμιου Συστήματος Αναφοράς {s}

Για τη μοντελοποίηση της εργασίας ορίζουμε ένα σταθερό παγκόσμιο σύστημα αναφοράς {s}, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί ως κοινό σημείο αναφοράς για όλα τα αντικείμενα και για τον ρομποτικό βραχίονα.

Τοποθετούμε την αρχή του στο σημείο (0, 0, 0) του χώρου εργασίας και ορίζουμε τους άξονες ως εξής:

- Ο άξονας z_s έχει θετική κατεύθυνση προς τα πάνω.
- Ο άξονας y_s έχει θετική κατεύθυνση προς τα αριστερά της επιφάνειας εργασίας.
- Ο άξονας x_s έχει θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά της επιφάνειας εργασίας.



Το παγκόσμιο πλαίσιο {s} χρησιμοποιείται και ως πλαίσιο “space frame” της μεθόδου Product of Exponentials.

1.2 Προσδιορισμός Body Frames

Κάθε αντικείμενο στο περιβάλλον λαμβάνει το δικό του τοπικό σύστημα αναφοράς (body frame), εκφρασμένο σε σχέση με το παγκόσμιο $\{s\}$.

Σύστημα μπλε κύβου $\{b\}$

Αναθέτουμε στον μπλε κύβο το πλαίσιο $\{b\}$. Η αρχή του τοποθετείται στο γεωμετρικό κέντρο του κύβου και έχει συντεταγμένες: ${}^s p_b = (17.5, 2.5, 2.5)$.

Ο αρχικός προσανατολισμός του κύβου θεωρείται παράλληλος με το παγκόσμιο σύστημα, άρα: ${}^s R_b = I_3$. Έτσι ο ομογενής μετασχηματισμός του κύβου ως προς το $\{s\}$ είναι:

$$T_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 17.5 \\ 0 & 1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σύστημα Κουτιού $\{c\}$

Το κόκκινο κουτί λαμβάνει πλαίσιο $\{c\}$ με αρχή στο κέντρο του. Η θέση του είναι:

$${}^s p_c = (10, 12.5, 10).$$

Ο προσανατολισμός του παραμένει ευθυγραμμισμένος με το $\{s\}$: ${}^s R_c = I_3$. Άρα:

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 12.5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σύστημα Οπής $\{h\}$

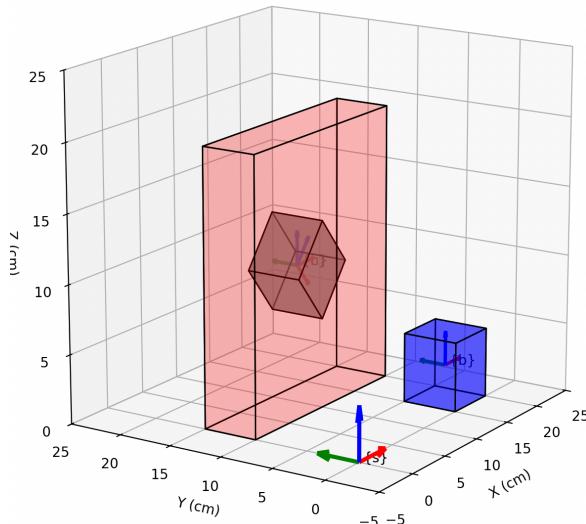
Η οπή του κουτιού βρίσκεται στο κέντρο της μπροστινής του επιφάνειας, άρα τοποθετούμε την αρχή του $\{h\}$ στο ίδιο σημείο με το $\{c\}$: ${}^s p_h = {}^s p_c$.

Ωστόσο, το πλαίσιο $\{h\}$ έχει διαφορετικό προσανατολισμό από το $\{c\}$.

Από τη προηγούμενη αναφορά είχαμε επεξηγήσει ότι το $\{h\}$ είναι περιστραμμένο κατά 45° γύρω από τον τοπικό άξονα y , δηλαδή: ${}^s R_h = R_y(45^\circ)$. Οπότε:

$$T_h = \begin{bmatrix} 0.707 & 0 & 0.707 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 12.5 \\ -0.707 & 0 & 0.707 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας T_h αντιπροσωπεύει την τελική πόζα/στόχο για τον κύβο.



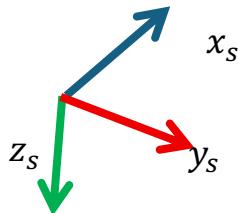
Με αυτόν τον τρόπο παρατηρούμε όλα τα frames στον χώρο μας και ιδίως μάλιστα το περιστραμμένο frame της οπής σε σχέση με αυτό του κόκκινου κύβου.

2. Κινηματική Περιγραφή του {g} (End Effector)

2.1 Ορισμός του Συστήματος Συντεταγμένων {g}

Το σύστημα $\{g\}$ αντιστοιχεί στο end-effector του ρομποτικού βραχίονα. Η μονοδιάστατη προσέγγιση των αξόνων ακολουθεί το φυσικό προσανατολισμό του grab:

- Ο άξονας x_g ταυτίζεται με τον x_s
- Ο άξονας y_g έχει αντίθετη κατεύθυνση από τον y_s
- Ο άξονας z_g έχει αντίθετη κατεύθυνση από τον z_s



Ο προσανατολισμός του end-effector έχει επιλεχθεί έτσι ώστε ο άξονας z_g να δείχνει προς το κύβο

Η θέση της αρχής του end-effector ως προς το $\{s\}$ δίνεται από: ${}^s p_g = (17.5, 2.5, 15)$. Ο πίνακας περιστροφής του $\{g\}$ ως προς το $\{s\}$ είναι:

$${}^s R_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.2 Επαλήθευση Θέσης εντός Χώρου Εργασίας

(Η αναλυτική εξερεύνηση του workspace έχει γίνει σε προηγούμενη αναφορά. Εδώ διατηρούμε μόνο το βασικό συμπέρασμα.)

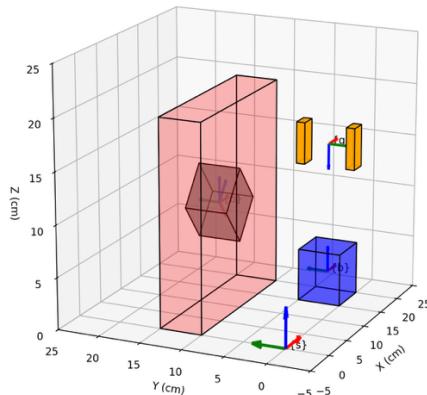
Η προβολή της θέσης του $\{g\}$ στο επίπεδο xy : $d = \sqrt{17.5^2 + 2.5^2} \approx 17.68$ cm
Οπότε, βρίσκεται εντός του μέγιστου οριζόντιου reach των 38 cm του Elephant myArm 300 Pi και η στάση pick είναι εφικτή.

2.3 Υπολογισμός του Πίνακα Μετασχηματισμού T_g

Ο πίνακας μετασχηματισμός του end-effector είναι:

$${}^s T_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 17.5 \\ 0 & -1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Το συγκεκριμένο orientation επιτρέπει απλές εντολές προσέγγισης (π.χ. μετακίνηση κατά $+z_g$) χωρίς να απαιτείται επαναχάραξη των τοπικών αξόνων για τη σύλληψη.



3. Ανάλυση Σχετικής Πόζας Κύβου-End Effector για το Pick

3.1 Υπολογισμός του Αντίστροφου Μετασχηματισμού T_g^{-1}

Για να εκφράσουμε τη θέση του κύβου στο σύστημα του end effector, υπολογίζουμε πρώτα τον αντίστροφο μετασχηματισμό: $T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$

Επειδή ο πίνακας περιστροφής είναι διαγώνιος: $R_g^T = R_g$. Υπολογίζουμε έτσι:

$$-R_g^T p_g = \begin{bmatrix} -17.5 \\ 2.5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

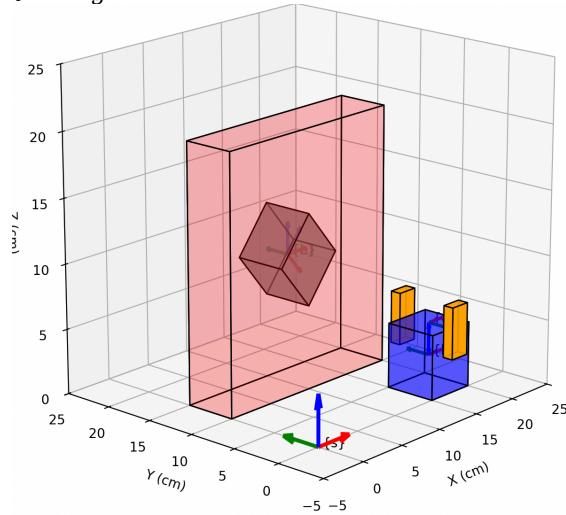
$${}^s T_g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -17.5 \\ 0 & -1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Σχετικός Μετασχηματισμός End Effector → Κύβος

Ο σχετικός μετασχηματισμός που μας δείχνει τη θέση του κύβου στο σύστημα του end effector είναι: ${}^g T_b = {}^s T_g^{-1} {}^s T_b$ προκύπτει λοιπόν:

$${}^g T_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 12.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο κύβος βρίσκεται ακριβώς κάτω από τον end effector, σε κατακόρυφη απόσταση 12.5 μονάδων ως προς τον άξονα z_g .



4. Κινηματική Ακολουθία της Διαδικασίας Τοποθέτησης

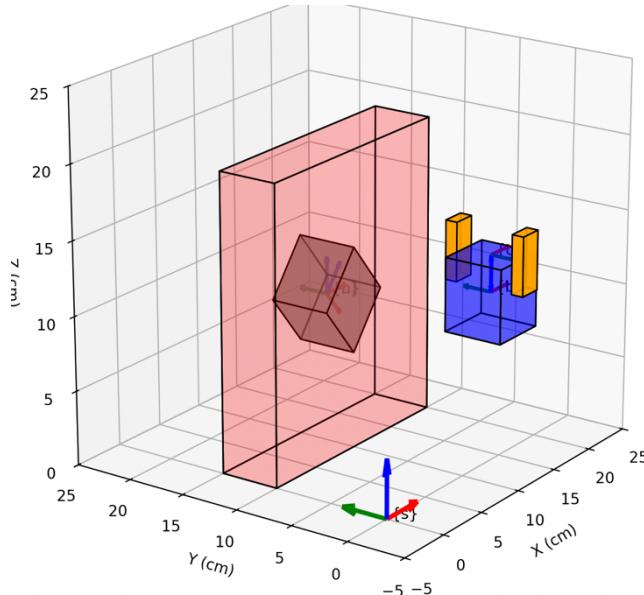
Μετά τη σύλληψη του κύβου, το πλαίσιο $\{b\}$ είναι άκαμπτα συνδεδεμένο με το $\{g\}$. Στη συνέχεια μας ενδιαφέρει να περιγράψουμε τη μετάβαση του κύβου από την αρχική θέση σε δύο βασικές πόζες: τη θέση placing λίγο μπροστά από την οπή και την τελική θέση μέσα στην οπή.

Ο αναλυτικός υπολογισμός των ενδιάμεσων κινήσεων (ανύψωση, περιστροφές κτλ.) έχει εξηγηθεί στην προηγούμενη αναφορά, οπότε εδώ κρατάμε μόνο τα απαραίτητα αποτελέσματα.

4.1 Κατακόρυφη Ανύψωση του Κύβου

Η πρώτη κίνηση είναι μεταφορά κατά +7.5 μονάδες στον άξονα z_s :

$${}^sT_{b,\text{lifted}} = \begin{bmatrix} I_3 & (0, 0, 7.5)^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^sT_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 17.5 \\ 0 & 1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



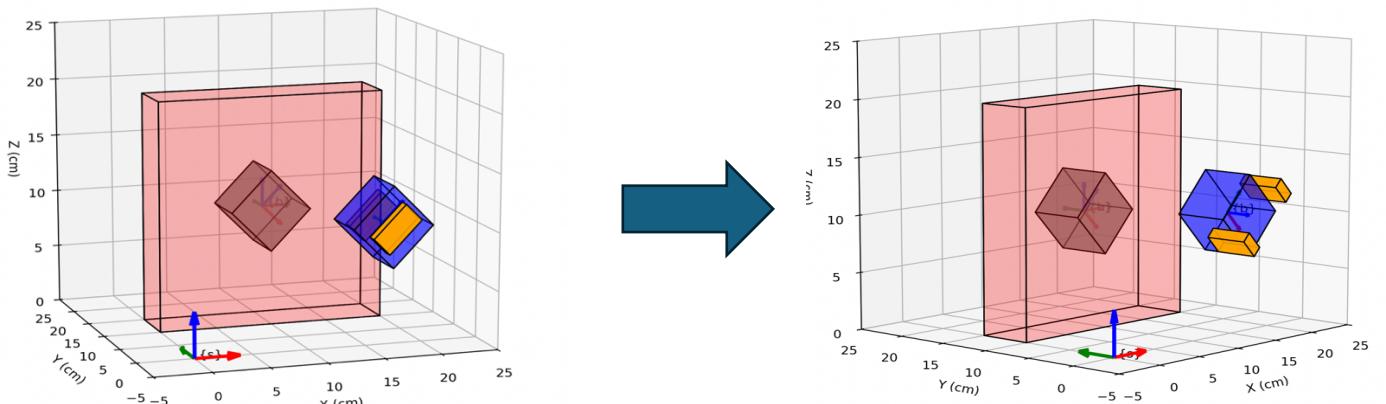
4.2 Περιστροφική Ευθυγράμμιση με την Οπή

Για να ταιριάξει ο κύβος με τον προσανατολισμό της οπής $\{h\}$, εφαρμόζεται:

- περιστροφή 45° γύρω από τον τοπικό y ,
- και επιπλέον περιστροφή 90° γύρω από τον νέο άξονα x , ώστε ο end-effector να μην παρεμποδίζει την είσοδο.

Ο συνολικός πίνακας περιστροφής είναι $R_{target} = R_y(45^\circ) R_x(90^\circ)$. Αυτό οδηγεί τελικά σε:

$${}^sT_{b,\text{rotated}} = \begin{bmatrix} R_{target} & {}^sP_{b,\text{lifted}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 & 17.5 \\ 0 & 0 & -1 & 2.5 \\ -0.707 & 0.707 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4.3 Μεταφορική Κίνηση στην Τελική Θέση Εισαγωγής

Αφού ο κύβος έχει ήδη ανυψωθεί και περιστραφεί, απομένει μόνο μια καθαρά μεταφορική κίνηση ώστε να ευθυγραμμιστεί με το κέντρο της οπής στο (10, 12.5, 10). Η απαιτούμενη μετατόπιση είναι:

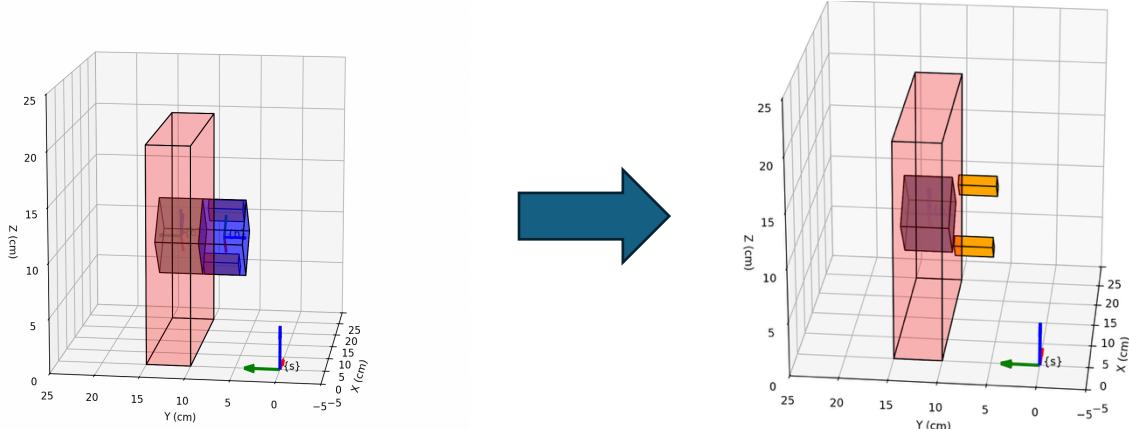
$$\Delta p = \begin{bmatrix} 10 - 17.5 \\ 12.5 - 2.5 \\ 10 - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ο αντίστοιχος μετασχηματισμός μεταφοράς ${}^sT_{\Delta p}$ εφαρμόζεται από αριστερά στο ${}^sT_{b,\text{rotated}}$ και μαζί δίνει την τελική πόζα μέσα στην οπή:

$${}^sT_{b,\text{final}} = {}^sT_{\Delta p} \quad {}^sT_{b,\text{rotated}} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 12.5 \\ -0.707 & 0.707 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Θέλουμε τώρα και μια ενδιάμεση πόζα, όπου ο κύβος είναι λίγο μπροστά από την οπή, σε μικρή απόσταση d κατά μήκος του άξονα εισαγωγής. Αν θεωρήσουμε ότι η εισαγωγή γίνεται κατά τον άξονα y_s , τότε:

$${}^sT_{b,\text{semi_final}} = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 7.5 \\ -0.707 & 0.707 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4.4 Ανάλυση Inverse and Forward Kinematics

Αρχικά, ο πίνακας $M \in R^{4 \times 4}$ περιγράφει τη θέση και τον προσανατολισμό του πλαισίου του end-effector $\{g\}$ ως προς το πλαίσιο βάσης $\{0\}$, όταν όλες οι γωνίες των αρθρώσεων είναι μηδέν $\theta_i = 0$. Στη μηδενική διαμόρφωση, ο βραχίονας είναι πλήρως εκτεταμένος κατακόρυφα.

- Προσανατολισμός (R): Τα πλαίσια αναφοράς ταυτίζονται, επομένως $R = I$.

- Θέση (p): Το άθροισμα των κατακόρυφων συνδέσμων και των μετατοπίσεων.

$$z_{total} = d_1 + d_3 + d_5 + d_7 + z_{off}$$

$$z_{total} = 0.1695 + 0.1155 + 0.12783 + 0.06598 + 0.075 = \mathbf{0.55381 \text{ m}}$$

$$x_{total} = x_{off} = \mathbf{0.008 \text{ m}}$$

Συνεπώς, ο πίνακας M διαμορφώνεται ως εξής:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.008 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.55381 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.5 Προσδιορισμός αξόνων Screw (S_i)

Για τη χρήση του Product of Exponentials κάθε περιστροφική άρθρωση του ρομποτικού βραχίονα περιγράφεται από έναν screw axis της μορφής:

$$S_i = \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_i \end{bmatrix}, v_i = -\omega_i \times q_i$$

Στο MyArm 300 Pi όλες οι αρθρώσεις είναι περιστροφικές και όλοι οι άξονες διέρχονται από το επίπεδο $x = y = 0$. Τα ύψη των αρθρώσεων κατά μήκος του space frame z υπολογίζονται από τη γεωμετρία του ρομπότ:

$$h_2 = d_1 = 0.1695 \text{ m}$$

$$h_4 = d_1 + d_3 = 0.1695 + 0.1155 = 0.2850 \text{ m}$$

$$h_6 = d_1 + d_3 + d_5 = 0.2850 + 0.1278 = 0.4128 \text{ m}$$

Οι άξονες που στρέφονται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z χρησιμοποιούν $\omega = [0, 0, 1]^T$, ενώ οι αρθρώσεις που στρέφονται γύρω από τον εγκάρσιο άξονα y χρησιμοποιούν $\omega = [0, \pm 1, 0]^T$, ανάλογα με τη φορά που υιοθετεί το μοντέλο.

$$S_{list} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1695 & 0 & 0.2850 & 0 & 0.4128 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.6 Space Jacobian:

Ο space Jacobian $J_s(\theta) \in \mathbb{R}^{6 \times 7}$ σχηματίζεται από τους screw axes ως εξής:

$$J_s(\theta) = [S_1, \text{Ad}_{e^{[S_1]\theta_1}} S_2, \text{Ad}_{e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2}} S_3, \dots, \text{Ad}_{e^{[S_1]\theta_1} \dots e^{[S_6]\theta_6}} S_7].$$

Ο Jacobian αποτελεί τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στις ταχύτητες των αρθρώσεων και στο twist του end-effector. Ο στόχος είναι να βρεθεί:

$$\theta = [\theta_1, \dots, \theta_7]^T$$

τέτοιο ώστε:

$$T(\theta) = T_{des}$$

Λόγω της μη γραμμικότητας, για 7-DOF βραχίονα δεν υπάρχει αναλυτική λύση, συνεπώς εφαρμόζεται η αριθμητική μέθοδος Newton-Raphson στο $SE(3)$.

4.7 Αλγόριθμος Newton–Raphson

Σε κάθε επανάληψη k :

1. Υπολογίζεται η τρέχουσα πόζα:

$$T_{\text{curr}} = T(\theta^{(k)}).$$

2. Υπολογίζεται η σχετική πόζα σφάλματος:

$$T_{\text{rel}} = T_{\text{des}} T_{\text{curr}}^{-1}.$$

3. Χαρτογραφείται το σφάλμα με λογαριθμικό χάρτη:

$$V^{(k)} = \log(T_{\text{rel}}) = \begin{bmatrix} \omega^{(k)} \\ v^{(k)} \end{bmatrix}.$$

4. Υπολογίζεται ο Jacobian $J_s(\theta^{(k)})$.

5. Ενημερώνονται οι γωνίες:

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + J_s(\theta^{(k)})^\dagger V^{(k)}$$

Ο pseudo-inverse χρησιμοποιείται λόγω υπεραντιστούχισης (6 εξισώσεις – 7 άγνωστες) και για αποφυγή singularities. Η διαδικασία σταματά όταν:

$$\| \omega^{(k)} \| < 10^{-3}, \| v^{(k)} \| < 10^{-3}.$$

4.8 Επαλήθευση Λύσεων με Forward Kinematics

Η ορθότητα της IK επιβεβαιώνεται υπολογίζοντας:

$$T_{\text{check}} = T(\theta^{(*)}),$$

και ελέγχοντας:

1. Μεταφορικό σφάλμα:

$$\| p_{\text{check}} - p_{\text{des}} \| < 10^{-3} \text{ m}$$

2. Περιστροφικό σφάλμα:

$$\text{angle}(R_{\text{check}} R_{\text{des}}^\top) < 10^{-3} \text{ rad.}$$

Παράδειγμα:

$$FK(T_{\text{place}}) = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0.100 \\ -0 & -0 & 1 & 0.080 \\ 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0.100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

το οποίο συμφωνεί με το ζητούμενο εντός των επιτρεπτών ορίων.

5. Σχεδίαση Τροχιάς στο $SE(3)$

5.1 Στόχος και Μεθοδολογία

Στην παρούσα εργασία, ο σχεδιασμός της τροχιάς δεν πραγματοποιείται στον χώρο των αρθρώσεων (joint-space), αλλά απευθείας στον χώρο εργασίας (task-space). Ο στόχος είναι ο καθορισμός της επιθυμητής κίνησης του end-effector ως μια χρονικά μεταβαλλόμενη ακολουθία πόζων:

$$T_d(t) \in SE(3)$$

Από την τροχιά αυτή παράγεται η επιθυμητή χωρική ταχύτητα (twist) $\mathcal{V}_d(t) \in R^6$. Εν συνεχείᾳ, το σύστημα ελέγχου μετατρέπει την \mathcal{V}_d σε εντολές ταχύτητας αρθρώσεων $\dot{\theta}$ μέσω του Ιακωβιανού πίνακα του ρομπότ.

5.2 Επιλογή Σημείων Διέλευσης (Waypoints)

Η τροχιά ορίζεται τμηματικά μέσω καθορισμένων σημείων διέλευσης (waypoints), τα οποία εξυπηρετούν συγκεκριμένες λειτουργικές απαιτήσεις:

- **Home:** Αρχική διαμόρφωση του ρομπότ, όπου $T_{home} = FK(\theta_{home})$.
- **Hover:** Σημείο ασφαλείας άνωθεν του αντικειμένου για αποφυγή συγκρούσεων κατά την προσέγγιση.
- **Pregrasp / Grasp:** Πόζες ευθυγράμμισης και τελικής σύλληψης.
- **Postgrasp (World-lift):** Κατακόρυφη ανύψωση ως προς το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων (z-world) για την αποφυγή πρόσκρουσης στο τραπέζι εργασίας.
- **Depart:** Ενδιάμεσο σημείο για την αποφυγή των τοιχωμάτων του κουτιού.
- **Place:** Τελική πόζα τοπθέτησης.

Σημαντική Παρατήρηση: Η ανύψωση μετά τη σύλληψη (postgrasp lift) υπολογίζεται προσθέτοντας μετατόπιση στο παγκόσμιο σύστημα και όχι στο τοπικό σύστημα του εργαλείου, καθώς ο άξονας z του εργαλείου είναι προσανατολισμένος προς τα κάτω:

$$p_{post} = p_{grasp} + [0 \ 0 \ h_{lift}]^T$$

5.3 Screw Interpolation στο $SE(3)$

Για τη μετάβαση μεταξύ δύο διαδοχικών πόζων T_a και T_b , χρησιμοποιείται παρεμβολή τύπου Screw Motion. Αρχικά, υπολογίζεται η σχετική μετατόπιση και ο λογάριθμος αυτής στο $SE(3)$:

$$T_{rel} = T_a^{-1}T_b$$

$$[\hat{\mathcal{S}}]\theta = \log(T_{rel})$$

Η παρεμβολή για την παράμετρο $s \in [0,1]$ δίνεται από τη σχέση:

$$T(s) = T_a \exp([\hat{\mathcal{S}}]\theta \cdot s)$$

5.4 Αναλυτική Μορφή του Εκθετικού Χάρτη

Για ένα μοναδιαίο twist $\mathcal{S} = [\omega; v]$ με $|\omega| = 1$, ο εκθετικός χάρτης υπολογίζεται μέσω των τύπων του Rodrigues:

$$\exp([\hat{\mathcal{S}}]\theta) = \begin{bmatrix} e^{[\hat{\omega}]\theta} & G(\theta)v \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Οπου ο πίνακας στροφής είναι:

$$e^{[\hat{\omega}]\theta} = I + \sin \theta [\hat{\omega}] + (1 - \cos \theta) [\hat{\omega}]^2$$

Και ο όρος μετάθεσης $G(\theta)$:

$$G(\theta) = I\theta + (1 - \cos \theta)[\hat{\omega}] + (\theta - \sin \theta)[\hat{\omega}]^2$$

Στην ειδική περίπτωση καθαρής μετάθεσης $\omega = 0$:

$$\exp([\hat{\mathcal{S}}]\theta) = \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

5.5 Χρονική Κλιμάκωση (Time Scaling)

Για την εξασφάλιση ομαλής κίνησης, η παράμετρος διαδρομής $s(t)$ ακολουθεί κυβικό πολυώνυμο (Cubic Time Scaling), ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες μηδενικής ταχύτητας στα άκρα ($s(0) = s(T) = 0$ και $\dot{s}(0) = \dot{s}(T) = 0$):

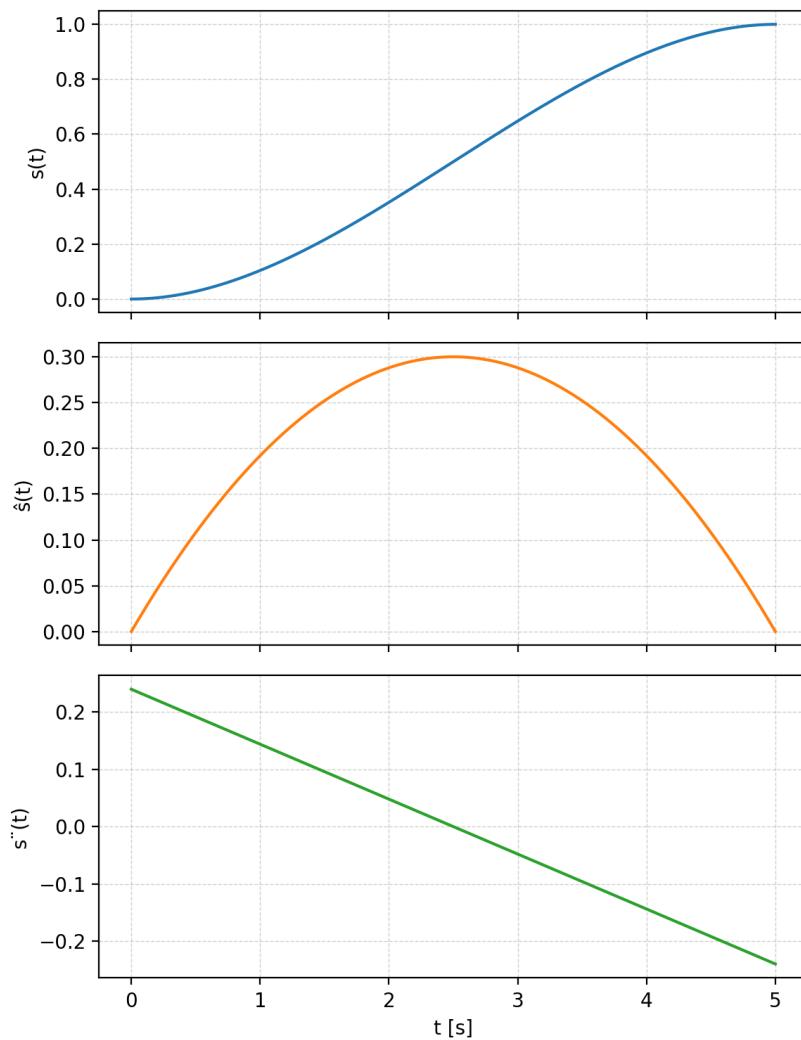
$$s(t) = 3\left(\frac{t}{T}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{T}\right)^3$$

Οι παράγωγοι, οι οποίες καθορίζουν την ταχύτητα και την επιτάχυνση, δίνονται από:

$$\dot{s}(t) = \frac{6}{T}\left(\frac{t}{T} - \left(\frac{t}{T}\right)^2\right), \quad \ddot{s}(t) = \frac{6}{T^2}\left(1 - 2\frac{t}{T}\right)$$

Το διάγραμμα παρακάτω επιβεβαιώνει την ομαλή μορφή S-curve της θέσης και τη γραμμική μεταβολή της επιτάχυνσης.

Cubic Time-Scaling Profiles



5.6 Υπολογισμός Επιθυμητής Ταχύτητας (Feedforward Twist)

Η επιθυμητή ταχύτητα κορμού (Body Twist) ή χώρου (Spatial Twist) υπολογίζεται αριθμητικά. Στην παρούσα υλοποίηση επιλέχθηκε η Left-Invariant διατύπωση (Spatial Twist), η οποία είναι συνεπής με τον ορισμό του σφάλματος στον ελεγκτή:

$$\mathcal{V}_d[k] = \frac{1}{\Delta t} \log(T_d[k+1]T_d[k]^{-1})$$

5.7 Προσάρτηση Αντικειμένου μετά τη Σύλληψη (Kinematic Relation)

Τη χρονική στιγμή σύλληψης $t = t_g$ όταν ο βραχίονας φτάσει στην πόζα T_G^S ο κύβος προσαρτάται άκαμπτα στο ρομπότ. Έστω $T_o^S(t)$ η πόζα του κύβου και T_e^S η πόζα του τελικού επενεργητή. Ορίζουμε τον σταθερό σχετικό μετασχηματισμό:

$$T_o^e = \left(T_e^S(t_g) \right)^{-1} T_o^S(t_g)$$

Τότε, για κάθε χρονική στιγμή $t \geq t_g$ ισχύει:

$$T_o^S(t) = T_e^S(t) T_o^e$$

Αυτή η σχέση υλοποιεί τον κανόνα μόλις συλληφθεί, ο κύβος παραμένει προσαρτημένος που εφαρμόζει ο προσομοιωτής.

6. Κινηματικός Προσομοιωτής (Μαθηματική Περιγραφή)

6.1 Κατάσταση και Είσοδος Προσομοιωτή

Σε διακριτό χρόνο $t_k = k\Delta t$ ορίζονται τα εξής μεγέθη:

- Κατάσταση αρθρώσεων ρομπότ: $\boldsymbol{\theta}_k \in R^7$
- Εντολές ταχύτητας αρθρώσεων: $u_k = \dot{\boldsymbol{\theta}}_k \in R^7$

Ο προσομοιωτής είναι αμιγώς κινηματικός, δηλαδή δεν περιλαμβάνει δυνάμεις.

6.2 Ολοκλήρωση Euler

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Forward Euler, η επόμενη κατάσταση υπολογίζεται ως:

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \dot{\boldsymbol{\theta}}_k \Delta t$$

Μετά την ολοκλήρωση εφαρμόζεται περιορισμός (clamping) στα όρια των αρθρώσεων.

6.3 Ενημέρωση Κινηματικής

Η πόζα του end-effector υπολογίζεται από την Ευθεία Κινηματική (PoE FK):

$$T_{e,k}^S = FK_{PoE}(\boldsymbol{\theta}_k)$$

7. Σύστημα Ελέγχου Task-Space (Task 7)

Επεξήγηση

Ο ελεγκτής δεν υπολογίζει θέσεις αρθρώσεων αλλά απευθείας ταχύτητες αρθρώσεων. Σε κάθε χρονικό βήμα, το σύστημα υπολογίζει την επιθυμητή χωρική ταχύτητα του end effector και μέσω του ψευδοαντιστροφού του Ιακωβιανού πίνακα, τη μετατρέπει σε εντολές ταχύτητας για τις αρθρώσεις. Τέλος, οι ταχύτητες αυτές ολοκληρώνονται αριθμητικά μέσω Euler ολοκλήρωσης, με αποτέλεσμα την εξέλιξη της κατάστασης του ρομπότ στον χρόνο.

7.1 Ορισμός Σφάλματος

Το σφάλμα παρακολούθησης ορίζεται στον Lie Group $SE(3)$ με Left-Invariant τρόπο:

$$T_{err} = T_d T(\theta)^{-1}$$

Το διάνυσμα σφάλματος (Twist error) προκύπτει από τον λογάριθμο του T_{err} :

$$\mathcal{V}_{err} = [\omega_{err}; \nu_{err}] = \log(T_{err})$$

7.2 Νόμος Ελέγχου

Ο νόμος ελέγχου συνδυάζει την προωθητική δράση (feedforward) και την αναδραστική δράση (feedback) μέσω του ψευδοαντιστρόφου του Ιακωβιανού πίνακα:

$$\dot{\theta} = J^\dagger(\theta)(\mathcal{V}_d + K_p \mathcal{V}_{err})$$

7.3 Χειρισμός Ιδιομορφιών (Singularities)

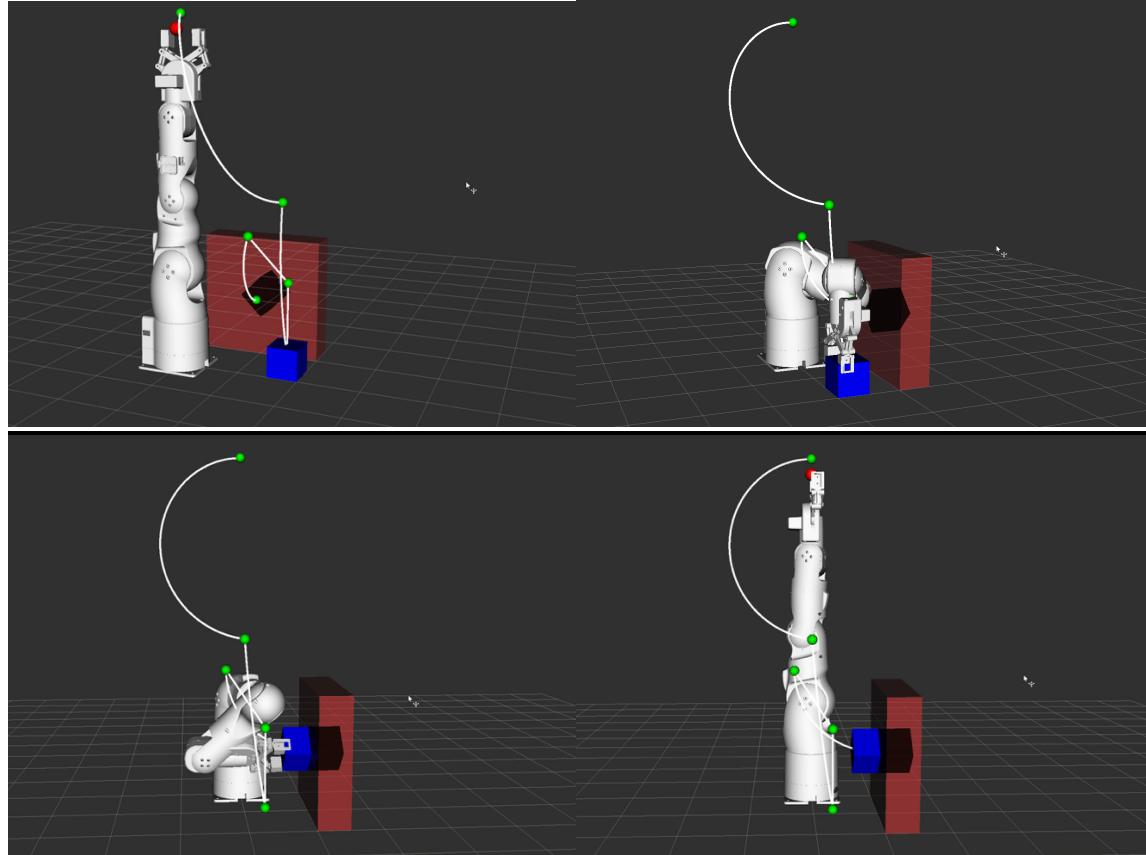
Για την αποφυγή άπειρων ταχυτήτων κοντά σε ιδιομορφίες, χρησιμοποιείται η μέθοδος Damped Least Squares για τον υπολογισμό του αντιστρόφου:

$$J^\dagger = J^T(JJ^T + \lambda^2 I)^{-1}$$

όπου $\lambda = 0.05$ είναι ο παράγοντας απόσβεσης. Επιπλέον, εφαρμόζεται κορεσμός (saturation) στις εντολές ταχύτητας:

$$\dot{\theta}_i = \text{clip}(\dot{\theta}_i, -\dot{\theta}_{max}, \dot{\theta}_{max})$$

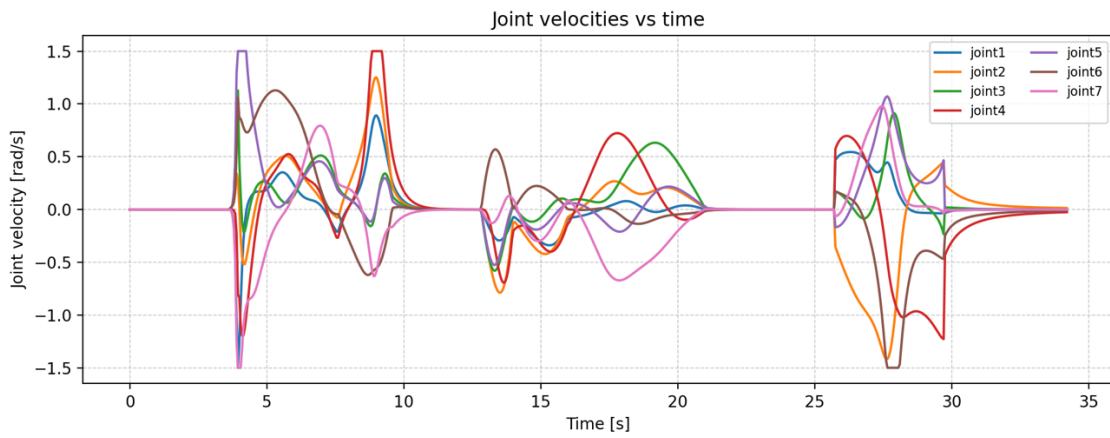
8. Αποτελέσματα και Γραφήματα



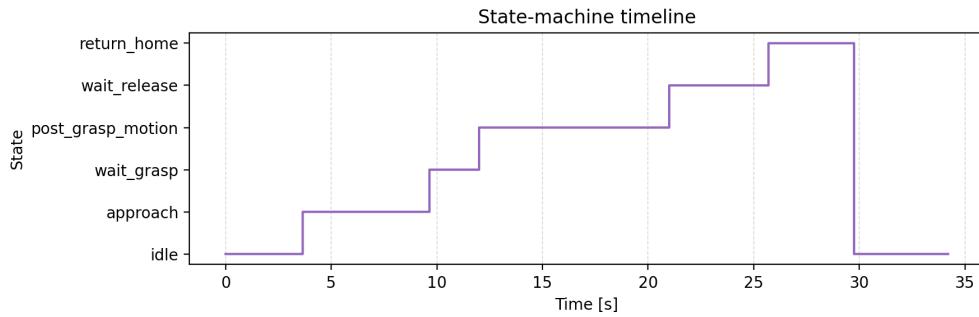
Η ανάλυση της συμπεριφοράς του συστήματος βασίζεται στα καταγεγραμμένα γραφήματα:

- **Joint Velocities:** Απεικονίζει τις εντολές ταχύτητας $\dot{\theta}_i(t)$ που παράγονται από τον task-space ελεγκτή για κάθε μία από τις επτά αρθρώσεις του ρομπότ. Παρατηρείται ότι όλες οι ταχύτητες παραμένουν εντός των προκαθορισμένων ορίων κορεσμού, γεγονός που επιβεβαιώνει τη σωστή ρύθμιση του ελεγκτή και την αποτελεσματικότητα της απόσβεσης στον ψευδοαντίστροφο Ιακωβιανό πίνακα.

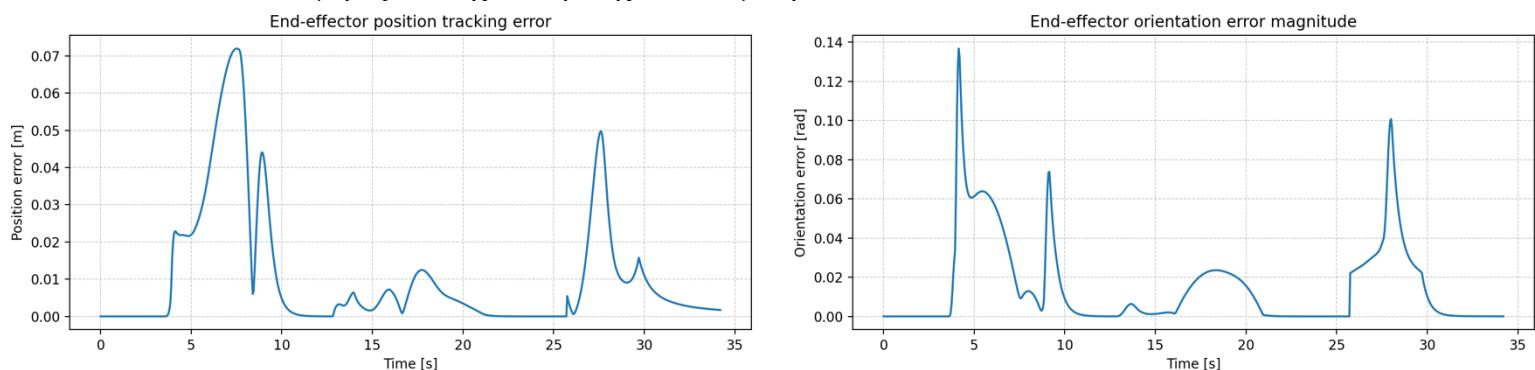
Ορισμένες αρθρώσεις (κυρίως οι μεσαίες) εμφανίζουν μεγαλύτερη δραστηριότητα κατά τις φάσεις post-grasp και placement. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο 7-DOF βραχίονας είναι redundant και ο ελεγκτής εκμεταλλεύεται τη διαθέσιμη ελευθερία για την επίτευξη της επιθυμητής τροχιάς του end-effector, κατανέμοντας την κίνηση σε πολλαπλές αρθρώσεις.



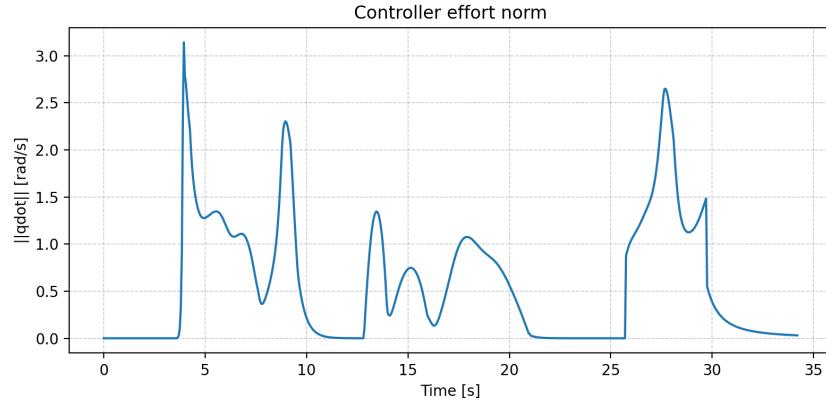
- **State Timeline:** Επιβεβαιώνει τη λογική ακολουθία της μηχανής καταστάσεων (FSM): *Idle* → *Approach* → *Grasp* → *Place* → *Return*.



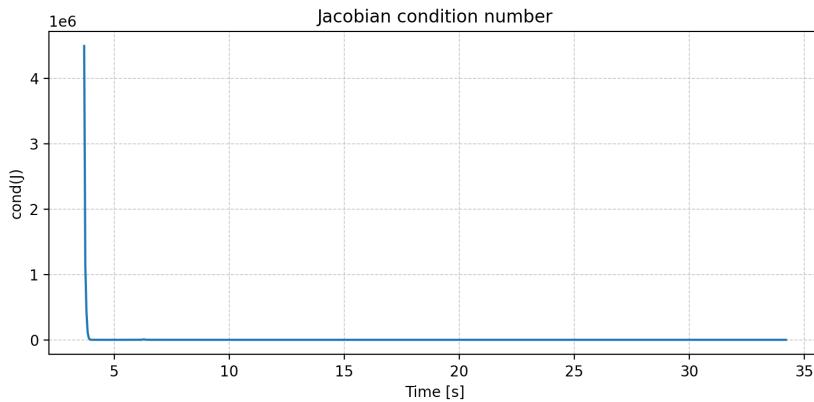
- **Position & Orientation Error:** Το σφάλμα τείνει στο μηδέν κατά τις φάσεις σταθεροποίησης (holds). Οι παροδικές αιχμές (spikes) εμφανίζονται στις χρονικές στιγμές μετάβασης μεταξύ των waypoints, λόγω της ασυνέχειας στην επιτάχυνση της αναφοράς και της απόκρισης του ελεγκτή



- **Controller Effort:** Η νόρμα των ταχυτήτων παρουσιάζει μέγιστα κατά την εκκίνηση των κινήσεων, παραμένοντας ωστόσο εντός των ορίων ασφαλείας.



- **Jacobian Condition Number:** Η αρχική υψηλή τιμή (spike) υποδεικνύει ότι η θέση *Home* βρίσκεται κοντά σε singularity. Η άμεση μείωση της τιμής επιβεβαιώνει ότι ο ελεγκτής απομακρύνει επιτυχώς το ρομπότ από το singularity, δικαιολογώντας τη χρήση της μεθόδου Damped Least Squares.



- **3D Trajectory:** Η πραγματική τροχιά (Actual) προσεγγίζει την επιθυμητή (Desired) με χαρακτηριστική εξομάλυνση στις γωνίες, γεγονός αναμενόμενο για ελεγκτή αναλογικού τύπου (P-controller). Η τροχιά επιβεβαιώνει την επιτυχή αποφυγή των εμποδίων μέσω των σημείων Lift και Depart.

Desired vs actual end-effector trajectory

