

Resumen Control 1

MA5402 Cálculo Estocástico - Primavera 2023

0. Preliminares

■ **Definición: [Limsup y liminf de conjuntos]** Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ colección de conjuntos. Definimos:

- $\limsup_n A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m$ (A_n ocurre infinitas veces)
- $\liminf_n A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m$ (A_n ocurre eventualmente)

⚙ **Lema: [Borel-Cantelli]** Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ colección de eventos del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Entonces

- (convergente)

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right) = 0$$

- (divergente) Si además los $\{A_n\}_n$ son independientes:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right) = 1$$

■ **Definición: [Vector Gaussiano]** Un vector aleatorio X sobre \mathbb{R}^n se dice gaussiano si para todo $u \in \mathbb{R}^n$, $u^T X$ tiene distribución normal.

■ **Definición: [Proceso Gaussiano]** Un proceso $(X_t)_t$ se dice gaussiano si para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, el vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ es un vector gaussiano en \mathbb{R}^n .

💡 **Proposición: [Caracterización de Independencia]** Sean X, Y vectores o bien procesos gaussianos centrados. Entonces, se tiene que $X \perp\!\!\!\perp Y$ si y solo si:

$$\forall u, v: \mathbb{E}[u^T X \cdot v^T Y] = 0$$

En que los u, v se interpretan en \mathbb{R}^n , o de cualquier tamaño finito dependiendo del caso.

📖 **Teorema: [Radon-Nikodym]** Si μ, λ son medidas finitas en (S, Σ) un espacio medible tales que

$$\forall F \in \Sigma: \mu(F) = 0 \implies \lambda(F) = 0$$

(condición que se define como absoluta continuidad: $\lambda \ll \mu$), entonces existe f medible no-negativa tal que $\lambda(A) = \int_A f d\mu$ para todo $A \in \Sigma$. Llamamos a f la derivada de Radon-Nikodym de λ con respecto a μ y denotamos

$$f =: \frac{d\lambda}{d\mu}$$

1. Construcción de Lévy del MB

■ **Definición: [Movimiento Browniano]** Decimos que una función continua aleatoria $B: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es un movimiento browniano estándar si

1. $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
2. $B_{t+h} - B_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_h$ y es independiente de $\sigma(B_s: s \leq t)$
3. $B_0 = 0$

💡 **Proposición: [Propiedades del MB]**

1. (Correlaciones) $\mathbb{E}[B_t B_s] = t \wedge s$
2. (Reescalado) $\forall \alpha \neq 0 \in \mathbb{R}: (B_t)_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\alpha^{-1} B_{\alpha^2 t})_t$
3. (Inversiones temporales)
 - a) $(B_t)_{t \in [0,1]} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_{1-t} - B_1)_{t \in [0,1]}$
 - b) $(B_t)_{t \geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (t B_{1/t} \mathbf{1}_{t \neq 0})_{t \geq 0}$

Nota: Un proceso gaussiano $(W_t)_t$ con $W_0 = 0$ y que cumple 1. es un MB.

■ **Definición: [Conjuntos Diádicos]** Definimos los siguientes subconjuntos de $[0, 1]$

$$D_n := \left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \{0, \dots, 2^n\} \right\}$$
$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

■ **Definición: [Construcción de Lévy]** Dada $(X_t)_{t \in D}$ familia de $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes:

- (Construcción en los diádicos) Construimos $B_0 = 0$, $B_1 = X_1$ y para $n \geq 1$, $d \in D_n \setminus D_{n-1}$

$$B_d = \frac{B_{d+2^{-n}} + B_{d-2^{-n}}}{2} + 2^{-\frac{n+1}{2}} X_d$$

- (Construcción en $[0, 1]$) Definimos $F_0(t) = X_1 \cdot t$

$$F_n(t) = \begin{cases} 2^{-\frac{n+1}{2}} x_t & t \in D_n \setminus D_{n-1} \\ 0 & t \in D_{n-1} \\ \text{lineal entre los valores.} \end{cases}$$

Así, $B_t = \sum_{k \geq 0} F_k(t)$ coincide con la construcción en D y define un MB en $[0, 1]$.

- (Construcción en \mathbb{R}^+) Sea $(B^i)_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de MBs independientes en $[0, 1]$, entonces

$$B_t = B_{t - \lfloor t \rfloor}^1 + \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor - 1} B_1^i$$

Define a un MB en \mathbb{R}^+

2. Propiedades Trayectoriales del MB

■ **Definición: [Módulo de continuidad]** Una función $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ creciente se dice módulo de continuidad de $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{l \in [0, h]} \sup_{t \in [0, 1-h]} \frac{|F(t+l) - F(t)|}{\phi(l)} = 1$$

📖 **Teorema: [Módulo de continuidad del MB]** El módulo de continuidad del MB es casi seguramente

$$\phi(h) = \sqrt{2} \sqrt{h \log(1/h)}$$

💡 **Proposición: [Monotonía y derivabilidad]** c.s. el movimiento browniano no es monótono en ningún intervalo ni derivable en ningún punto

💡 **Proposición: [Ceros del MB]** El conjunto $C = B^{-1}(\{0\})$ de ceros del MB es un conjunto cerrado sin puntos aislados, con medida de Lebesgue nula y que no contiene intervalos.

💡 **Proposición: [Máximos del MB]** Definamos

$$M_{\text{loc}} = \{t \in [0, 1] : t \text{ es máximo local de } B\}$$

Entonces, M_{loc} es un conjunto numerable denso en $[0, 1]$ en que todos los puntos de él tienen *valor* máximo local diferente entre sí.

🔔 **Proposición: [Absoluta continuidad]** Sea \mathbb{P} la ley del movimiento Browniano $(B_t)_{t \in [0,1]}$ y $\mathbb{P}^{(c)}$ la ley del movimiento Browniano con drift $(B_t + ct)_{t \in [0,1]}$. Entonces se tiene la absoluta continuidad entre ellas

$$\mathbb{P}^{(c)} \ll \mathbb{P} \ll \mathbb{P}^{(c)}$$

Con derivada de Radon-Nikodým dada por

$$\frac{d\mathbb{P}^{(c)}}{d\mathbb{P}}((B_t)_{t \in [0,1]}) = \exp\left(cB_1 - \frac{c^2}{2}\right)$$

3. Propiedad de Markov

📖 **Teorema: [Propiedad de Markov Débil]** Sea $(B_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano y $s \in \mathbb{R}^+$. Entonces el proceso $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$ es un MB independiente de $(B_t)_{t \in [0,s]}$.

🔖 **Definición: [Filtración y filtraciones límite]** Una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ es una familia creciente de σ -álgebras. Definimos además las σ -álgebras límite

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\right), \quad \mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$$

🔖 **Definición: [Filtración casi natural del MB]** Se define mediante $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : s \in [0, t])$

📖 **Teorema: [Ley 0-1 de Blumenthal]** La σ -álgebra \mathcal{F}_0^+ , en que $(\mathcal{F}_t)_t$ es la filtración casi natural del MB, es trivial. Es decir $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ para A en esta σ -álgebra.

🔖 **Definición: [Filtración natural del MB]** La filtración natural del movimiento Browniano es la completación con respecto a \mathbb{P} de la filtración casi natural.

🔖 **Definición: [Continuidad a la derecha]** Una filtración $(\mathcal{F}_t)_t$ se dice continua a la derecha cuando para todo t , se tiene $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$.
Nota: La filtración natural del MB es continua a la derecha.

🔖 **Definición: [Adaptabilidad]** Un proceso $(X_t)_t$ se dice adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_t$ cuando $\forall t \geq 0 : X_t$ es \mathcal{F}_t -medible.

🔖 **Definición: [Tiempo de parada]** Un tiempo aleatorio $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ se dice tiempo de parada con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_t$ cuando $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

🔔 **Proposición: [Tiempo de llegada a un conjunto]** Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso en \mathbb{R}^d c.s. continuo y adaptado a $(\mathcal{F}_t)_t$ filtración continua por la derecha. Definimos, para $A \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\tau_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$$

Si A es abierto o cerrado, se tiene entonces que τ_A es tiempo de parada.

🔖 **Definición: $[\mathcal{F}_\tau]$** Para τ un tiempo de parada, definimos

$$\mathcal{F}_\tau = \{\Theta \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, \Theta \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

$$\mathcal{F}_{\tau^+} = \{\Theta \in \mathcal{F}_\infty : \forall t > 0, \Theta \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

📖 **Teorema: [Propiedad de Markov Fuerte]** Para todo τ tiempo de parada c.s. finito, el proceso $(B_{\tau+t} - B_\tau)_{t \geq 0}$ es MB independiente de \mathcal{F}_τ .

📖 **Teorema: [Principio de Reflexión]** Sea $(B_t)_{t \geq 0}$ un MB y τ un tiempo de parada. Entonces, el proceso reflejado en τ $(B_t^*)_{t \geq 0}$ definido por

$$B_t^* = B_t \mathbf{1}_{t \leq \tau} + (2B_\tau - B_t) \mathbf{1}_{t > \tau}$$

Tiene la ley de un MB.

📖 **Teorema: [Transformada de Lévy]** Sea $(B_t)_{t \geq 0}$ un MB. Entonces

$$(|B_t|)_{t \geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left(B_t - \inf_{s \in [0, t]} B_s\right)_{t \geq 0}$$

4. Dimensiones Fractales

🔖 **Definición: [Dimensión de Minkowski]** Para (X, d) un espacio métrico acotado, definimos

$$N(X, \varepsilon) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists (x_i)_{i=1}^n, X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon) \right\}$$

Y con esto se definen la dimensión superior e inferior de Minkowski

$$\overline{\dim}_M(X) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(X, \varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)}$$

$$\underline{\dim}_M(X) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(X, \varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)}$$

Y la dimensión de Minkowski es el valor común cuando ambos coinciden.

🔔 **Proposición: [Caracterización diádica]** Sea $X \subseteq \mathbb{R}^d$ compacto y

$$\square_n = \left\{ q + [0, 2^{-n}]^d : q \in 2^{-n}\mathbb{Z} \right\}$$

Así, si $\tilde{N}(X) := |\{c \in \square_n : c \cap X \neq \emptyset\}|$. Entonces

$$\overline{\dim}_M(X) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\tilde{N}(X))}{\log(2^n)}$$

$$\underline{\dim}_M(X) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\tilde{N}(X))}{\log(2^n)}$$

🔖 **Definición: [Medida de Hausdorff]** La medida α -Hausdorff se define por

$$\mu_H^{\alpha, \varepsilon}(X) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i^\alpha : \exists (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, \rho_i) = X, \rho_i \leq \varepsilon \right\}$$

$$\mu_H^\alpha(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_H^{\alpha, \varepsilon}(X)$$

Se tiene además que si $\mu_H^\alpha < \infty$ entonces, para todo $\beta > \alpha$, se tiene $\mu_H^\beta(X) = 0$ y si $\mu_H^\alpha > 0$, entonces para todo $\beta < \alpha$ se tiene $\mu_H^\beta(X) = \infty$.

🔖 **Definición: [Dimensión de Hausdorff]**

$$\dim_H(X) = \inf\{\alpha \geq 0 : \mu_H^\alpha(X) = 0\} = \sup\{\alpha \geq 0 : \mu_H^\alpha(X) = \infty\}$$

Se tiene que $\dim_H(X) \leq \underline{\dim}_M(X)$.

🔔 **Proposición: [Cotas para grafo e imagen]** Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función α -Hölder. Entonces

$$1. \text{ Si } A \subset [0, 1], \dim_{M/H}(f(A)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{M/H}(A)$$

$$2. \dim_{M/H}(G(f)) \leq \frac{1}{\alpha} \wedge (1 + d - d\alpha)$$

🔔 **Proposición: [Ceros]** Para el MB lineal, c.s. $\dim_{M/H}(B^{-1}(\{0\})) = \frac{1}{2}$.

⚙️ **Lema: [Método de la energía]** Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto. Supongamos que existe una medida ν tal que

$$\iint_{E \times E} \frac{\nu(dx)\nu(dy)}{\|x - y\|^\alpha} < \infty$$

y $\nu(E) > 0$. Entonces $\dim_H(E) \geq \alpha$.

🔔 **Proposición: [Grafo e imagen]** Casi seguramente:

$$\dim_{M/H}(G(B)) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } d = 1 \\ 2 & \text{si } d \geq 2 \end{cases}$$

$$\dim_{M/H}(B([0, 1])) = 2 \wedge d$$