# Resumen Control 1

*MA5402 Cálculo Estocástico - Primavera 2023*

## 0. Preliminares

**Definición: [Limsup y liminf de conjuntos]** Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ colección de conjuntos. Definimos:

- $\limsup_n A_n = \bigcap_{n\in N}\bigcup_{m\geq n} A_n$ ($A_n$ *ocurre infinitas veces*)
- $\liminf_n A_n = \bigcup_{n\in N}\bigcap_{m\geq n} A_n$ ($A_n$ *ocurre eventualmente*)

**Lema: [Borel-Cantelli]** Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ colección de eventos del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Entonces

- **(convergente)**

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$$

- **(divergente)** Si además los $\{A_n\}_n$ son independientes:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$$

**Definición: [Vector Gaussiano]** Un vector aleatorio $X$ sobre $\mathbb{R}^n$ se dice gaussiano si para todo $u \in \mathbb{R}^n$, $u^t X$ tiene distribución normal.

**Definición: [Proceso Gaussiano]** Un proceso $(X_t)_t$ se dice gaussiano si para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, el vector $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ es un vector gaussiano en $\mathbb{R}^n$.

**Proposición: [Caracterización de Independencia]** Sean $X, Y$ vectores o bien procesos gaussianos centrados. Entonces, se tiene que $X \perp\!\!\!\perp Y$ si y solo si:

$$\forall u, v : \mathbb{E}[u^t X \cdot v^t Y] = 0$$

En que los $u, v$ se interpretan en $\mathbb{R}^n$, o de cualquier tamaño finito dependiendo del caso.

**Teorema: [Radon-Nikodym]** Si $\mu, \lambda$ son medidas finitas en $(S, \Sigma)$ un espacio medible tales que

$$\forall F \in \Sigma : \mu(F) = 0 \implies \lambda(F) = 0$$

(condición que se define como absoluta continuidad: $\lambda \ll \mu$), entonces existe $f$ medible no-negativa tal que $\lambda(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ para todo $A \in \Sigma$. Llamamos a $f$ la derivada de Radon-Nikodym de $\lambda$ con respecto a $\mu$ y denotamos

$$f =: \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}$$

## 1. Construcción de Lévy del MB

**Definición: [Movimiento Browniano]** Decimos que una función continua aleatoria $B : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es un movimiento browniano estándar si

1. $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
2. $B_{t+h} - B_t \overset{\mathscr{L}}{=} B_h$ y es independiente de $\sigma(B_s : s \leq t)$
3. $B_0 = 0$

**Proposición: [Propiedades del MB]**

1. **(Correlaciones)** $\mathbb{E}[B_t B_s] = t \wedge s$
2. **(Reescalado)** $\forall \alpha \neq 0 \in \mathbb{R} : (B_t)_t \overset{\mathscr{L}}{=} (a^{-1} B_{a^2 t})$
3. **(Inversiones temporales)**
   a) $(B_t)_{t\in[0,1]} \overset{\mathscr{L}}{=} (B_{1-t} - B_1)_{t\in[0,1]}$
   b) $(B_t)_{t\geq 0} \overset{\mathscr{L}}{=} (t B_{1/t} \mathbf{1}_{t\neq 0})_{t\geq 0}$

**Nota:** Un proceso gaussiano $(W_t)_t$ con $W_0 = 0$ y que cumple 1. es un MB.

**Definición: [Conjuntos Diádicos]** Definimos los siguientes subconjuntos de $[0, 1]$

$$D_n := \left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \{0, \ldots, 2^n\} \right\}$$

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$$

**Definición: [Construcción de Lévy]** Dada $(X_t)_{t\in D}$ familia de $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes:

- **(Construcción en los diádicos)** Construímos $B_0 = 0$, $B_1 = X_1$ y para $n \geq 1, d \in D_n \setminus D_{n-1}$

$$B_d = \frac{B_{d+2^{-n}} + B_{d-2^{-n}}}{2} + 2^{-\frac{n+1}{2}} X_d$$

- **(Construcción en** $[0, 1]$**)** Definimos $F_0(t) = X_1 \cdot t$ y

$$F_n(t) = \begin{cases} 2^{-\frac{n+1}{2}} x_t, & t \in D_n \setminus D_{n-1} \\ 0, & t \in D_{n-1} \\ \text{lineal entre los valores.} & \end{cases}$$

  Así, $B_t = \sum_{k\geq 0} F_k(t)$ coincide con la construcción en $D$ y define un MB en $[0, 1]$.

- **(Construcción en** $\mathbb{R}^+$**)** Sea $(B^i)_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de MBs independientes en $[0, 1]$, entonces

$$B_t = B^{\lfloor t \rfloor}_{t-\lfloor t \rfloor} + \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor - 1} B^i_1$$

  Define a un MB en $\mathbb{R}^+$

## 2. Propiedades Trayectoriales del MB

**Definición: [Módulo de continuidad]** Una función $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ creciente se dice módulo de continuidad de $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ si

$$\lim_{h\to 0} \sup_{l\in[0,h]} \sup_{t\in[0,1-h]} \frac{|F(t + l) - F(t)|}{\phi(l)} = 1$$

**Teorema: [Módulo de continuidad del MB]** El módulo de continuidad del MB es casi seguramemnte

$$\phi(h) = \sqrt{2}\sqrt{h\log(1/h)}$$

**Proposición: [Monotonía y derivabilidad]** c.s. el movimiento browniano no es monótono en ningún intervalo ni derivable en ningún punto

**Proposición: [Ceros del MB]** lal

**Proposición: [Máximos del MB]** lal

**Proposición: [Absoluta continuidad]** Sea $\mathbb{P}$ la ley del movimiento Browniano $(B_t)_{t\in[0,1]}$ y $\mathbb{P}^{(c)}$ la ley del movimiento Browniano con drift $(B_t + ct)_{t\in[0,1]}$. Entonces se tiene la absoluta continuidad entre ellas

$$\mathbb{P}^{(c)} \ll \mathbb{P} \ll \mathbb{P}^{(c)}$$

Con derivada de Radon-Nikodým dada por

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(c)}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\big((B_t)_{t\in[0,1]}\big) = \exp\left(cB_1 - \frac{c^2}{2}\right)$$

# 3. Propiedad de Markov

**Teorema: [Propiedad de Markov Débil]** Sea

**Definición: [Filtración y filtraciones límite]** Una filtración $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ es una familia creciente de $\sigma$-álgebras. Definimos además las $\sigma$-álgebras límite

$$\mathscr{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0}\mathscr{F}_t\right), \qquad \mathscr{F}_t^+ = \bigcap_{\varepsilon>0} F_{t+\varepsilon}$$

**Definición: [Filtración casi natural del MB]** Se define mediante $\mathscr{F}_t = \sigma(B_s : s\in[0,t])$

**Teorema: [Ley 0-1 de Blumenthal]** La $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}_0^+$, en que $(\mathscr{F}_t)_t$ es la filtración casi natural del MB, es trivial. Es decir $\mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$ para $A$ en esta $\sigma$-álgebra.

**Definición: [Filtración natural del MB]** La filtración natural del movimiento Browniano es la completación con respecto a $\mathbb{P}$ de la filtración casi natural.

**Definición: [Continuidad a la derecha]** Una filtración $(\mathscr{F}_t)_t$ se dice continua a la derecha cuando para todo $t$, se tiene $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t^+$.

**Nota:** La filtración natural del MB es continua a la derecha.

**Definición: [Adaptabilidad]** Un proceso $(X_t)_t$ se dice adaptado a la filtración $(\mathscr{F}_t)_t$ cuando $\forall t\geq 0 : X_t$ es $\mathscr{F}_t$-medible.

**Definición: [Tiempo de parada]** Un tiempo aleatorio $\tau : \Omega\to\mathbb{R}^+$ se dice tiempo de parada con respecto a la filtración $(\mathscr{F}_t)_t$ cuando $\{\tau\leq t\}\in\mathscr{F}_t$.

**Proposición: [Tiempo de llegada a un conjunto]** Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso en $\mathbb{R}^d$ c.s. continuo y adaptado a $(\mathscr{F}_t)_t$ filtración continua por la derecha. Definimos, para $A\subseteq\mathbb{R}^d$,

$$\tau_A = \text{ínf}\{t\geq 0 : X_t\in A\}$$

Si $A$ es abierto o cerrado, se tiene entonces que $\tau_A$ es tiempo de parada.

**Definición: [$\mathscr{F}_\tau$]** Para $\tau$ un tiempo de parada, definimos

$$\mathscr{F}_\tau = \{\Theta\in\mathscr{F}_\infty : \forall t\geq 0, \Theta\cap\{\tau\leq t\}\in\mathscr{F}_t\}$$
$$\mathscr{F}_{\tau^+} = \{\Theta\in\mathscr{F}_\infty : \forall t> 0, \Theta\cap\{\tau< t\}\in\mathscr{F}_t\}$$

**Teorema: [Propiedad de Markov Fuerte]** lal

**Teorema: [Principio de Reflexión]** lal

**Teorema: [Transformada de Lévy]** lal

# 4. Dimensiones Fractales