

# Resumen Control 1

MA5402 Cálculo Estocástico - Primavera 2023

## 0. Preliminares

**Definición: [Limsup y liminf de conjuntos]** Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  colección de conjuntos. Definimos:

- $\limsup_n A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m$  ( $A_n$  ocurre infinitas veces)
- $\liminf_n A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m$  ( $A_n$  ocurre eventualmente)

**Lema: [Borel-Cantelli]** Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  colección de eventos del espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Entonces

- (convergente)

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right) = 0$$

- (divergente) Si además los  $\{A_n\}_n$  son independientes:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right) = 1$$

**Definición: [Vector Gaussiano]** Un vector aleatorio  $X$  sobre  $\mathbb{R}^n$  se dice gaussiano si para todo  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $u^t X$  tiene distribución normal.

**Definición: [Proceso Gaussiano]** Un proceso  $(X_t)_t$  se dice gaussiano si para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , el vector  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  es un vector gaussiano en  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición: [Caracterización de Independencia]** Sean  $X, Y$  vectores o bien procesos gaussianos centrados. Entonces, se tiene que  $X \perp\!\!\!\perp Y$  si y solo si:

$$\forall u, v : \mathbb{E}[u^t X \cdot v^t Y] = 0$$

En que los  $u, v$  se interpretan en  $\mathbb{R}^n$ , o de cualquier tamaño finito dependiendo del caso.

**Teorema: [Radon-Nikodym]** Si  $\mu, \lambda$  son medidas finitas en  $(S, \Sigma)$  un espacio medible tales que

$$\forall F \in \Sigma : \mu(F) = 0 \implies \lambda(F) = 0$$

(condición que se define como absoluta continuidad:  $\lambda \ll \mu$ ), entonces existe  $f$  medible no-negativa tal que  $\lambda(A) = \int_A f d\mu$  para todo  $A \in \Sigma$ . Llamamos a  $f$  la derivada de Radon-Nikodym de  $\lambda$  con respecto a  $\mu$  y denotamos

$$f := \frac{d\lambda}{d\mu}$$

## 1. Construcción de Lévy del MB

**Definición: [Movimiento Browniano]** Decimos que una función continua aleatoria  $B : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es un movimiento browniano estándar si

1.  $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
2.  $B_{t+h} - B_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_h$  y es independiente de  $\sigma(B_s : s \leq t)$
3.  $B_0 = 0$

**Proposición: [Propiedades del MB]**

1. (Correlaciones)  $\mathbb{E}[B_t B_s] = t \wedge s$
2. (Reescalado)  $\forall \alpha \neq 0 \in \mathbb{R} : (B_t)_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\alpha^{-1} B_{\alpha^2 t})$
3. (Inversiones temporales)
  - a)  $(B_t)_{t \in [0,1]} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_{1-t} - B_1)_{t \in [0,1]}$
  - b)  $(B_t)_{t \geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (t B_{1/t} \mathbf{1}_{t \neq 0})_{t \geq 0}$

**Nota:** Un proceso gaussiano  $(W_t)_t$  con  $W_0 = 0$  y que cumple 1. es un MB.

**Definición: [Conjuntos Diádicos]** Definimos los siguientes subconjuntos de  $[0, 1]$

$$D_n := \left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \{0, \dots, 2^n\} \right\}$$

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

**Definición: [Construcción de Lévy]** Dada  $(X_t)_{t \in D}$  familia de  $\mathcal{N}(0, 1)$  independientes:

- (**Construcción en los diádicos**) Construimos  $B_0 = 0$ ,  $B_1 = X_1$  y para  $n \geq 1, d \in D_n \setminus D_{n-1}$

$$B_d = \frac{B_{d+2^{-n}} + B_{d-2^{-n}}}{2} + 2^{-\frac{n+1}{2}} X_d$$

- (**Construcción en  $[0, 1]$** ) Definimos  $F_0(t) = X_1 \cdot t$  y

$$F_n(t) = \begin{cases} 2^{-\frac{n+1}{2}} x_t & t \in D_n \setminus D_{n-1} \\ 0 & t \in D_{n-1} \end{cases}$$

lineal entre los valores.

Así,  $B_t = \sum_{k \geq 0} F_k(t)$  coincide con la construcción en  $D$  y define un MB en  $[0, 1]$ .

- (**Construcción en  $\mathbb{R}^+$** ) Sea  $(B^i)_{i \in \mathbb{N}}$  una familia de MBs independientes en  $[0, 1]$ , entonces

$$B_t = B_{t-\lfloor t \rfloor}^{\lfloor t \rfloor} + \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor - 1} B_1^i$$

Define a un MB en  $\mathbb{R}^+$

## 2. Propiedades Trayectoriales del MB

**Definición: [Módulo de continuidad]** Una función  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  creciente se dice módulo de continuidad de  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{l \in [0, h]} \sup_{t \in [0, 1-h]} \frac{|F(t+l) - F(t)|}{\phi(l)} = 1$$

**Teorema: [Módulo de continuidad del MB]** El módulo de continuidad del MB es casi seguramente

$$\phi(h) = \sqrt{2} \sqrt{h \log(1/h)}$$

**Proposición: [Monotonía y derivabilidad]** c.s. el movimiento browniano no es monótono en ningún intervalo ni derivable en ningún punto

**Proposición: [Ceros del MB]** El conjunto  $C = B^{-1}(\{0\})$  de ceros del MB es un conjunto cerrado sin puntos aislados, con medida de Lebesgue nula y que no contiene intervalos.

**Proposición: [Máximos del MB]** Definamos

$$M_{\text{loc}} = \{t \in [0, 1] : t \text{ es máximo local de } B\}$$

Entonces,  $M_{\text{loc}}$  es un conjunto numerable denso en  $[0, 1]$  en que todos los puntos de él tienen *valor* máximo local diferente entre sí.

?

**Proposición: [Absoluta continuidad]** Sea  $\mathbb{P}$  la ley del movimiento Browniano  $(B_t)_{t \in [0,1]}$  y  $\mathbb{P}^{(c)}$  la ley del movimiento Browniano con drift  $(B_t + ct)_{t \in [0,1]}$ . Entonces se tiene la absoluta continuidad entre ellas

$$\mathbb{P}^{(c)} \ll \mathbb{P} \ll \mathbb{P}^{(c)}$$

Con derivada de Radon-Nikodým dada por

$$\frac{d\mathbb{P}^{(c)}}{d\mathbb{P}}((B_t)_{t \in [0,1]}) = \exp\left(cB_1 - \frac{c^2}{2}\right)$$

### 3. Propiedad de Markov

?

**Teorema: [Propiedad de Markov Débil]** Sea  $(B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento Browniano y  $s \in \mathbb{R}^+$ . Entonces el proceso  $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$  es un MB independiente de  $(B_t)_{t \in [0,s]}$ .

■ **Definición: [Filtración y filtraciones límite]** Una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es una familia creciente de  $\sigma$ -álgebras. Definimos además las  $\sigma$ -álgebras límite

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\right), \quad \mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$$

■ **Definición: [Filtración casi natural del MB]** Se define mediante  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : s \in [0, t])$

?

**Teorema: [Ley 0-1 de Blumenthal]** La  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_0^+$ , en que  $(\mathcal{F}_t)_t$  es la filtración casi natural del MB, es trivial. Es decir  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$  para  $A$  en esta  $\sigma$ -álgebra.

■ **Definición: [Filtración natural del MB]** La filtración natural del movimiento Browniano es la completación con respecto a  $\mathbb{P}$  de la filtración casi natural.

■ **Definición: [Continuidad a la derecha]** Una filtración  $(\mathcal{F}_t)_t$  se dice continua a la derecha cuando para todo  $t$ , se tiene  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$ .  
**Nota:** La filtración natural del MB es continua a la derecha.

■ **Definición: [Adaptabilidad]** Un proceso  $(X_t)_t$  se dice adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_t$  cuando  $\forall t \geq 0 : X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.

■ **Definición: [Tiempo de parada]** Un tiempo aleatorio  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  se dice tiempo de parada con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_t$  cuando  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

?

**Proposición: [Tiempo de llegada a un conjunto]** Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  un proceso en  $\mathbb{R}^d$  c.s. continuo y adaptado a  $(\mathcal{F}_t)_t$  filtración continua por la derecha. Definimos, para  $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ,

$$\tau_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$$

Si  $A$  es abierto o cerrado, se tiene entonces que  $\tau_A$  es tiempo de parada.

■ **Definición: [ $\mathcal{F}_\tau$ ]** Para  $\tau$  un tiempo de parada, definimos

$$\mathcal{F}_\tau = \{\Theta \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, \Theta \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

$$\mathcal{F}_{\tau^+} = \{\Theta \in \mathcal{F}_\infty : \forall t > 0, \Theta \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

?

**Teorema: [Propiedad de Markov Fuerte]** Para todo  $\tau$  tiempo de parada c.s. finito, el proceso  $(B_{\tau+t} - B_\tau)_{t \geq 0}$  es MB independiente de  $\mathcal{F}_\tau$ .

?

**Teorema: [Principio de Reflexión]** Sea  $(B_t)_{t \geq 0}$  un MB y  $\tau$  un tiempo de parada. Entonces, el proceso reflejado en  $\tau$   $(B_t^*)_{t \geq 0}$  definido por

$$B_t^* = B_t \mathbf{1}_{t \leq \tau} + (2B_\tau - B_t) \mathbf{1}_{t > \tau}$$

Tiene la ley de un MB.

?

**Teorema: [Transformada de Lévy]** Sea  $(B_t)_{t \geq 0}$  un MB. Entonces

$$(|B_t|)_{t \geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left( B_t - \inf_{s \in [0, t]} B_s \right)_{t \geq 0}$$

### 4. Dimensiones Fractales

■ **Definición: [Dimensión de Minkowski]** Para  $(X, d)$  un espacio métrico acotado, definimos

$$N(X, \varepsilon) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists (x_i)_{i=1}^n, X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon) \right\}$$

Y con esto se definen la dimensión superior e inferior de Minkowski

$$\overline{\dim}_M(X) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(X, \varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)}$$

$$\underline{\dim}_M(X) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(X, \varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)}$$

Y la dimensión de Minkowski es el valor común cuando ambos coinciden.

?

**Proposición: [Caracterización diádica]** Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  compacto y

$$\square_n = \left\{ q + [0, 2^{-n}]^d : q \in 2^{-n} \mathbb{Z}^d \right\}$$

Así, si  $\tilde{N}(X) := |\{c \in \square_n : c \cap X \neq \emptyset\}|$ . Entonces

$$\overline{\dim}_M(X) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\tilde{N}(X))}{\log(2^n)}$$

$$\underline{\dim}_M(X) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\tilde{N}(X))}{\log(2^n)}$$

■ **Definición: [Medida de Hausdorff]** La medida  $\alpha$ -Hausdorff se define por

$$\mu_H^{\alpha, \varepsilon}(X) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho_i^\alpha : \exists (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, \rho_i) = X, \rho_i \leq \varepsilon \right\}$$

$$\mu_H^\alpha(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_H^{\alpha, \varepsilon}(X)$$

Se tiene además que si  $\mu_H^\alpha < \infty$  entonces, para todo  $\beta > \alpha$ , se tiene  $\mu_H^\beta(X) = 0$  y si  $\mu_H^\alpha > 0$ , entonces para todo  $\beta < \alpha$  se tiene  $\mu_H^\beta(X) = \infty$ .

■ **Definición: [Dimensión de Hausdorff]**

$$\dim_H(X) = \inf \{\alpha \geq 0 : \mu_H^\alpha(X) = 0\} = \sup \{\alpha \geq 0 : \mu_H^\alpha(X) = \infty\}$$

Se tiene que  $\dim_H(X) \leq \underline{\dim}_M(X)$ .

?

**Proposición: [Cotas para grafo e imagen]** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función  $\alpha$ -Hölder. Entonces

1. Si  $A \subset [0, 1]$ ,  $\dim_{M/H}(f(A)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{M/H}(A)$
2.  $\dim_{M/H}(G(f)) \leq \frac{1}{\alpha} \wedge (1 + d - d\alpha)$

?

**Proposición: [Ceros]** Para el MB lineal, c.s.  $\dim_{M/H}(B^{-1}(\{0\})) = \frac{1}{2}$ .

?

**Lema: [Método de la energía]** Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  un conjunto. Supongamos que existe una medida  $\nu$  tal que

$$\iint_{E \times E} \frac{\nu(dx)\nu(dy)}{\|x - y\|^\alpha} < \infty$$

y  $\nu(E) > 0$ . Entonces  $\dim_H(E) \geq \alpha$ .

?

**Proposición: [Grafo e imagen]** Casi seguramente:

$$\dim_{M/H}(G(B)) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } d = 1 \\ 2 & \text{si } d \geq 2 \end{cases}$$

$$\dim_{M/H}(B([0, 1])) = 2 \wedge d$$