Resumen Control 1

MA5402 Cálculo Estocástico - Primavera 2023

0. Preliminares

Definición: [Limsup y liminf de conjuntos] Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ colección de conjuntos. Definimos:

- $\limsup_n A_n = \bigcap_{n\in N}\bigcup_{m\geq n} A_n$ (A_n *ocurre infinitas veces*)
- $\liminf_n A_n = \bigcup_{n\in N}\bigcap_{m\geq n} A_n$ (A_n *ocurre eventualmente*)

Lema: [Borel-Cantelli] Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ colección de eventos del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Entonces

- **(convergente)**

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$$

- **(divergente)** Si además los $\{A_n\}_n$ son independientes:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$$

Definición: [Vector Gaussiano] Un vector aleatorio X sobre $\mathbb{R}^n$ se dice gaussiano si para todo $u \in \mathbb{R}^n$, $u^t X$ tiene distribución normal.

Definición: [Proceso Gaussiano] Un proceso $(X_t)_t$ se dice gaussiano si para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, el vector $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ es un vector gaussiano en $\mathbb{R}^n$.

Proposición: [Caracterización de Independencia] Sean X, Y vectores o bien procesos gaussianos centrados. Entonces, se tiene que $X \perp\!\!\!\perp Y$ si y solo si:

$$\forall u, v : \mathbb{E}[u^t X \cdot v^t Y] = 0$$

En que los u, v se interpretan en $\mathbb{R}^n$, o de cualquier tamaño finito dependiendo del caso.

Teorema: [Radon-Nikodym] Si μ, λ son medidas finitas en (S, Σ) un espacio medible tales que

$$\forall F \in \Sigma : \mu(F) = 0 \implies \lambda(F) = 0$$

(condición que se define como absoluta continuidad: $\lambda \ll \mu$), entonces existe f medible no-negativa tal que $\lambda(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ para todo $A \in \Sigma$. Llamamos a f la derivada de Radon-Nikodym de λ con respecto a μ y denotamos

$$f =: \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}$$

1. Construcción de Lévy del MB

Definición: [Movimiento Browniano] Decimos que una función continua aleatoria $B : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es un movimiento browniano estándar si

1. $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
2. $B_{t+h} - B_t \overset{\mathscr{L}}{=} B_h$ y es independiente de $\sigma(B_s : s \leq t)$
3. $B_0 = 0$

Proposición: [Propiedades del MB]

1. **(Correlaciones)** $\mathbb{E}[B_t B_s] = t \wedge s$
2. **(Reescalado)** $\forall \alpha \neq 0 \in \mathbb{R} : (B_t)_t \overset{\mathscr{L}}{=} (a^{-1} B_{a^2 t})$
3. **(Inversiones temporales)**
   a) $(B_t)_{t\in[0,1]} \overset{\mathscr{L}}{=} (B_{1-t} - B_1)_{t\in[0,1]}$
   b) $(B_t)_{t\geq 0} \overset{\mathscr{L}}{=} (t B_{1/t} \mathbf{1}_{t\neq 0})_{t\geq 0}$

Nota: Un proceso gaussiano $(W_t)_t$ con $W_0 = 0$ y que cumple 1. es un MB.

Definición: [Conjuntos Diádicos] Definimos los siguientes subconjuntos de $[0, 1]$

$$D_n := \left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \{0, \ldots, 2^n\} \right\}$$

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$$

Definición: [Construcción de Lévy] Dada $(X_t)_{t\in D}$ familia de $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes:

- **(Construcción en los diádicos)** Construímos $B_0 = 0$, $B_1 = X_1$ y para $n \geq 1, d \in D_n \setminus D_{n-1}$

$$B_d = \frac{B_{d+2^{-n}} + B_{d-2^{-n}}}{2} + 2^{-\frac{n+1}{2}} X_d$$

- **(Construcción en $[0, 1]$)** Definimos $F_0(t) = X_1 \cdot t$ y

$$F_n(t) = \begin{cases} 2^{-\frac{n+1}{2}} x_t, & t \in D_n \setminus D_{n-1} \\ 0, & t \in D_{n-1} \\ \text{lineal entre los valores.} \end{cases}$$

  Así, $B_t = \sum_{k\geq 0} F_k(t)$ coincide con la construcción en D y define un MB en $[0, 1]$.

- **(Construcción en $\mathbb{R}^+$)** Sea $(B^i)_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de MBs independientes en $[0, 1]$, entonces

$$B_t = B^{\lfloor t\rfloor}_{t-\lfloor t\rfloor} + \sum_{i=1}^{\lfloor t\rfloor - 1} B^i_1$$

  Define a un MB en $\mathbb{R}^+$

2. Propiedades Trayectoriales del MB

Definición: [Módulo de continuidad] Una función $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ creciente se dice módulo de continuidad de $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ si

$$\lim_{h\to 0} \sup_{l\in[0,h]} \sup_{t\in[0,1-h]} \frac{|F(t+l)-F(t)|}{\phi(l)} = 1$$

Teorema: [Módulo de continuidad del MB] El módulo de continuidad del MB es casi seguramemnte

$$\phi(h) = \sqrt{2}\sqrt{h\log(1/h)}$$

Proposición: [Monotonía y derivabilidad] c.s. el movimiento browniano no es monótono en ningún intervalo ni derivable en ningún punto

Proposición: [Ceros del MB] lal

Proposición: [Máximos del MB] lal

Proposición: [Absoluta continuidad] lal

3. Propiedad de Markov

Teorema: [Propiedad de Markov Débil] Sea

Definición: [Filtración] lal

Definición: [Filtración casi natural del MB] lal

Teorema: [Ley 0-1 de Blumenthal] lal

Definición: [Filtración natural del MB] lal

Definición: [Continuidad a la derecha]

Nota: La filtración natural del MB es continua a la derecha.

Definición: [Adaptabilidad] lal

Definición: [Tiempo de parada] lal

Proposición: [Tiempo de llegada a un conjunto] lal

Definición: [$\mathscr{F}_\tau$] lal

Teorema: [Propiedad de Markov Fuerte] lal

Teorema: [Principio de Reflexión] lal

Teorema: [Transformada de Lévy] lal

4. Dimensiones Fractales