

# Resumen Control 2

MA5402 Cálculo Estocástico - Primavera 2023

## 0. Preliminares

■ **Definición: [Nociones de convergencia]** Sea  $(X_t)_t \in [0, \infty]$  una secuencia de variables aleatorias con dominio en el mismo espacio de probabilidad. Decimos que

1.  $X_t \rightarrow X_\infty$  c.s cuando  $\mathbb{P}[X_t(\omega) \rightarrow X_\infty(\omega)] = 1$
2.  $X_t \rightarrow X_\infty$  en  $L^p$  cuando  $\mathbb{E}[|X_t - X_\infty|^p] \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$
3.  $X_t \rightarrow X_\infty$  en  $\mathbb{P}$  cuando  $\forall \varepsilon > 0: \mathbb{P}[|X_t - X_\infty| \geq \varepsilon] \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$

Sabemos que 1. y 2. implican 3. También, convergencia en  $L^p$  implica convergencia en  $L^s$  si  $s \in [1, p]$ . Además, 3. implica que existe subsucesión que converge c.s. Además, tanto 1. como 3. en conjunto con la existencia de  $Y \in L^p$  con  $|X_t| \leq Y$  implican 2. Finalmente, tanto 2. como 3. son convergencias metrizable.

■ **Definición: [Esperanza Condicional]** Para  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  espacio de probabilidad,  $X$  variable aleatoria en  $L^1$  y  $\mathcal{G}$  sub  $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ , la esperanza condicional  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  se define como aquella variable integrable  $\mathcal{G}$ -medible tal que  $\forall G \in \mathcal{G}: \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_G] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_G]$ . La esperanza condicional posee, entre otras, las siguientes propiedades:

1. **(Esperanza anidada)**  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$
2. **(Jensen)** Si  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexa con  $c(X)$  integrable, entonces  $\mathbb{E}[c(X)|\mathcal{G}] \geq c(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$
3. **(medibilidad)** Si  $Z$  es  $\mathcal{G}$ -medible, entonces  $\mathbb{E}[ZX|\mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$
4. **(independencia)** Si  $X$  es independiente de  $\mathcal{G}$ , entonces  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$

## 1. Martingalas continuas

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$  un e.d.p filtrado.

■ **Definición: [(sub/super) Martingala]** Un proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  adaptado tal que  $X_t \in L^1$  para todo  $t \geq 0$  se dice

1. **Martingala** si  $\forall 0 \leq s \leq t: \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$
2. **Supermartingala** si  $\forall 0 \leq s \leq t: \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$
3. **Submartingala** si  $\forall s \leq t: \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$

💡 **Proposición: [Ejemplos de martingalas]** Sea  $(B_t)_t$  un movimiento browniano, son ejemplos de martingalas los siguientes procesos:

- $B_t$
- $B_t^2 - t$
- $\exp\left(\theta B_t - \frac{\theta^2}{2} t\right), \quad \theta > 0$

💡 **Proposición: [Funciones convexas]** Sea  $(X_t)_t$  adaptado y  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexa tal que  $\mathbb{E}[|f(X_t)|] < \infty$  para todo  $t$ . Entonces

- Si  $(X_t)_t$  es martingala, entonces  $(f(X_t))_t$  es submartingala.
- Si  $(X_t)_t$  es submartingala y  $f$  es no decreciente, entonces  $(f(X_t))_t$  es submartingala.

💡 **Proposición: [supremo]** Si  $(X_t)_t$  es (sub/super) martingala, entonces para todo  $t \geq 0, \sup_{s \in [0, t]} \mathbb{E}[|X_s|] < \infty$

■ **Teorema: [Desigualdades clásicas]**

1. **(Desigualdad maximal)** Sea  $(X_t)_t$  supermartingala continua por la derecha. Entonces para  $t, \lambda > 0$

$$\lambda \mathbb{P}\left[\sup_{s \in [0, t]} |X_s| > \lambda\right] \leq \mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|]$$

2. **(Desigualdad de Doob en  $L^p$ )** Sea  $(X_t)_t$  martingala continua por la derecha. Entonces, para  $t > 0, p > 1$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \in [0, t]} |X_s|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_t|^p]$$

⚙ **Lema: [Subidas y bajadas]** El número  $\gamma_{a,b}(t)$  de subidas y bajadas de  $[a, b]$  hecho por  $t \mapsto X_t(\omega)$  hasta el tiempo  $t$  se define como el mayor  $k \in \mathbb{N}$  tal que existen

$$0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < s_k < t_k \leq t$$

con  $X_{s_i}(\omega) < a$  y  $X_{t_i}(\omega) > b$ . Con esto, tenemos que

$$\mathbb{E}[\gamma_{a,b}(t)] \leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E}[(X_t - a)^-]$$

■ **Definición: [Uniforme integrabilidad]** Decimos que  $(X_t)_t$  es uniformemente integrable (UI) si cuando  $a \rightarrow \infty$ ,

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t| \mathbf{1}_{|x_t| \geq a}] \rightarrow 0$$

💡 **Proposición: [Condiciones para ser UI]**  $(X_t)_t$  es UI si se tiene alguna de estas condiciones

- $(|X_t|)_t$  está acotado por una v.a en  $L^1$  o por un proceso UI.
- Existe  $\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  convexa tal que

$$\frac{\phi(x)}{x} \rightarrow \infty, \quad \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[\phi(|x_t|)] < \infty$$

📖 **Teorema: [De convergencia no UI]** Sea  $X$  supermartingala continua por la derecha tal que  $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|x_t|] < \infty$ . Entonces, existe  $X_\infty \in L^1$  tal que  $X_t \rightarrow X_\infty$  c.s cuando  $t \rightarrow \infty$ .

■ **Definición: [Cerradura]** Decimos que  $(X_t)_t$  es martingala cerrada si existe  $Z \in L^1$  tal que para todo  $t \geq 0, X_t = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t]$

📖 **Teorema: [De convergencia UI]** Sea  $(X_t)_t$  martingala continua por la derecha. LSSE:

1.  $X$  cerrada.
2.  $X$  UI.
3.  $X$  converge casi seguramente y en  $L^1$  a una  $X_\infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En cualquiera de estos casos tenemos que para todo  $t \geq 0, X_t = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t]$ .

📖 **Teorema: [De parada opcional de Doob no acotado]** Sea  $(X_t)_t$  martingala UI continua a la derecha. Si  $S, T$  son dos t.d.p con  $S \leq T$ , entonces  $X_S, X_T \in L^1$  y  $X_S = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]$ . En particular, para  $S$  t.d.p, tenemos  $X_S = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_S]$  y tomando esperanza se concluye  $\mathbb{E}[X_S] = \mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0]$

📖 **Teorema: [De parada opcional de Doob acotado]** Sea  $(X_t)_t$  martingala continua por la derecha y  $S \leq T$  t.d.p acotados. Entonces  $X_S, X_T \in L^1$  y  $X_S = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]$ . Tomando esperanza y  $S = 0$ , se obtiene  $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$

💡 **Proposición: [Martingala detenida]** Sea  $(X_t)_t$  (super)martingala continua a la derecha y  $T$  t.d.p. Definimos  $(X_t^T)_t$  como el proceso detenido  $X_t^T = X_{t \wedge T}$ . Entonces:

- $X^T$  es (super)martingala.
- Si  $X$  es martingala UI, entonces  $X^T$  también lo es y tenemos  $X_t^T = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_t]$ .

Lo siguiente solo aplica para el caso discreto

■ **Definición: [Martingala reversa]** Un proceso indexado por los enteros negativos  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se dice martingala reversa si  $X_0 \in L^1$  y para todo  $m < n$  se cumple

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m$$

Aquí  $(\mathcal{F}_n)_n$  es una filtración reversa, en el sentido de que es decreciente hacia los negativos.

📖 **Teorema: [Convergencia de martingalas reversas]** Sea  $X$  una martingala reversa. Entonces existe  $X_\infty$  tal que  $X_n \rightarrow X_\infty$  c.s y en  $L^1$ . Si definimos  $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ , entonces

$$X_\infty = \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_\infty]$$

## 2. Variaciones y Martingalas Locales

**Definición: [Variación]** Para  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos

$$V_T(f) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \right\}$$

En que el supremo se toma sobre todas las particiones finitas del intervalo  $[0, T]$ . Si  $V_T(f) < \infty$  para todo  $T \geq 0$ , decimos que  $f$  es de variación acotada.

**Proposición: [Descomposición]**  $A$  es función de variación acotada si se puede descomponer como suma de una función creciente y otra decreciente.

A partir de una función de variación acotada, se puede definir una medida con signo finita  $\mu$  sobre intervalos acotados. Con lo cual se define

$$\int_0^T f(s) dA(s) = \int_{[0, T]} f(s) d\mu(s)$$

**Proposición: [Continuidad de la variación]** Si  $f$  es una función continua,  $t \mapsto V_t(f)$  es una función continua.

**Lema: [De aproximación]** Sea  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $A: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  continua de variación acotada. Si  $(t_i^n)_{i=0}^n$  es una secuencia de particiones de  $[0, T]$  con  $t_0^n = 0$  y  $t_n^n = T$  y tales que  $\Delta t_i^n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces

$$\int_0^T f(s) dA(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i^n) (A(t_{i+1}^n) - A(t_i^n))$$

**Teorema: [Martingalas de variación acotada]** Si  $M$  es martingala de variación acotada con  $M_0 = 0$  c.s, entonces  $M \equiv 0$ .

**Definición: [Martingala local]** Decimos que  $(M_t)_t$  es martingala local continua que parte de 0 si

1.  $M_0 = 0$
2. Existe  $(\tau_n)_n \nearrow \infty$  con  $M^{\tau_n}$  martingala continua UI (decimos en este caso que la sucesión  $(\tau_n)_n$  localiza a  $M$ )

Más generalmente, decimos que  $(M_t)_t$  es martingala local continua si  $(M_t - M_0)_t$  es una martingala local que parte de 0 con  $M_0 \mathcal{F}_0$ -medible.

**Proposición: [Sobre tiempos de localización]** Si  $(M_t)_t$  es martingala local continua y

$$\tau_n = \inf \{t \geq 0 : M_t \notin (-n, n)\}$$

Entonces  $(\tau_n)_n$  localiza a  $M$ .

**Proposición: [Condiciones para que una martingala local sea martingala]** Sea  $(M_t)_t$  martingala local continua con  $M_0$  integrable.

- Si  $M$  es no-negativa, entonces es supermartingala.
- Si existe  $Y \in L^1$  tal que  $\sup_{t \geq 0} |M_t| \leq Y$ , entonces  $M$  es martingala UI.
- Si  $\tau$  es t.d.p, entonces  $M^\tau$  es una martingala local.

**Teorema: [Martingalas locales de variación acotada]** Si  $M$  es martingala local que parte en 0 de variación acotada, entonces  $M \equiv 0$ .

**Definición: [Variación cuadrática]** Sea  $(M_t)_{t \geq 0}$  una martingala local continua, entonces existe un único proceso  $\langle M \rangle_t$  tal que

1.  $\langle M \rangle_0 = 0$
2.  $\langle M \rangle_t$  es creciente
3.  $M_t^2 - \langle M \rangle_t$  es una martingala local continua

Más aún, si fijamos  $T > 0$ ,  $((t_i^n)_{i=1}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  una secuencia (determinista) de particiones con  $t_0^n = 0$ ,  $t_n^n = T$  y  $\Delta t_i^n \rightarrow 0$ .

$$\langle M \rangle_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (M(t_{i+1}^n) - M(t_i^n))^2$$

en probabilidades. Al proceso  $(\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$  lo llamamos variación cuadrática de  $M$ .

Si  $M$  es además una martingala acotada (c.s. por una constante determinista), entonces  $M_t^2 - \langle M \rangle_t$  es una martingala.

**Proposición: [Variación cuadrática de una martingala detenida]** Si  $(M_t)_t$  es una martingala local y  $\tau$  es un tiempo de parada, entonces  $\langle M^\tau \rangle_t = \langle M \rangle_{t \wedge \tau}$

**Proposición: [Caracterización de  $\langle M \rangle_\infty$  integrable]** Sea  $(M_t)_{t \geq 0}$  una martingala local con  $M_0 \in L^2$ . LSSE:

- $\mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty] < \infty$
- $M$  es una martingala continua acotada en  $L^2$  (o sea  $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[M_t^2] < \infty$ ).

En cualquier caso  $M_t^2 - \langle M \rangle_t$  es una martingala UI.

**Proposición: [Caracterización de  $\langle M \rangle_t$  integrable]** Sea  $(M_t)_{t \geq 0}$  una martingala local con  $M_0 \in L^2$ . LSSE:

- $\mathbb{E}[\langle M \rangle_t] < \infty$  para todo  $t > 0$
- $M$  es una martingala continua con  $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$  para todo  $t > 0$ .

En cualquier caso  $M_t^2 - \langle M \rangle_t$  es una martingala.

**Definición: [Covariación cuadrática]** Sean  $M, N$  martingalas locales. Se define la covariación cuadrática como

$$\langle M, N \rangle = \frac{1}{2} (-\langle M \rangle - \langle N \rangle + \langle M + N \rangle)$$

En que  $\langle M, M \rangle = \langle M \rangle$ .

**Proposición: [Caracterización de la covariación cuadrática]**  $\langle M, N \rangle$  es el único proceso tal que

1.  $\langle M, N \rangle_0 = 0$
2.  $\langle M, N \rangle$  es de variación acotada.
3.  $MN - \langle M, N \rangle$  es una martingala local.

**Proposición: [De aproximación]** Para todo  $t \geq 0$  y toda secuencia de particiones  $(t_i^n)_{i=1}^n$  c.s.

$$\langle M, N \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})(N_{t_{i+1}^n} - N_{t_i^n})$$

**Proposición: [Misceláneo sobre covariación y tdp]**

- Si  $\tau$  es un tdp, entonces

$$\langle M^\tau, N^\tau \rangle_t = \langle M, N \rangle_{\tau \wedge t} = \langle M^\tau, N \rangle_t = \langle M, N^\tau \rangle_t$$

- $N^\tau (M - M^\tau)$  es martingala local.
- Si  $M, N$  son martingalas acotadas en  $L^2$  entonces  $MN - \langle M, N \rangle$  es una martingala UI.

**Teorema: [Desigualdad de Kunita-Watabane]** Sean  $(H_u)_{u \geq 0}, (K_u)_{u \geq 0}$  dos procesos medibles y  $(M_u)_{u \geq 0}, (N_u)_{u \geq 0}$  dos martingalas locales. Entonces c.s. para todo  $T \geq 0$ :

$$\int_0^T |H_u| |M_u| d\langle M, N \rangle_u \leq \left( \int_0^T |H_u|^2 d\langle M \rangle_u \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T |K_u|^2 d\langle N \rangle_u \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Definición: [Semimartingala]** Decimos que  $(X_t)_{t \geq 0}$  es una semimartingala si existen  $M$  una martingala local y  $A$  un proceso adaptado, continuo y de variación acotada tales que  $X_t = M_t + A_t$  para todo  $t$ .

**Definición: [Covariación de semimartingalas]** Sean  $X, Y$  semimartingalas. Tenemos que  $\langle X, Y \rangle := \langle M^X, M^Y \rangle$ , con  $M^X, M^Y$  las martingalas asociadas a  $X$  y a  $Y$  respectivamente.

**Proposición: [De aproximación]** Para todo  $t > 0$  determinista y toda secuencia de particiones  $(t_i)_{i=1}^n$  se tiene

$$\sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \langle X, Y \rangle$$