Resumen Control 2

MA5402 Cálculo Estocástico - Primavera 2023

0. Preliminares

Definición: [Nociones de convergencia] LAL

Definición: [Funciones de variación acotada] LEL

Definición: [Esperanza Condicional] Para $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, X variable aleatoria en L^1 y $\mathscr{G}$ sub σ-álgebra de $\mathscr{F}$, la esperanza condicional $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ se define como aquella variable integrable $\mathscr{G}$-medible tal que

$$\forall G \in \mathscr{G} : \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_G] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_G]$$

La esperanza condicional posee, entre otras, las siguientes propiedades:

1. **(Esperanza anidada)** $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]] = \mathbb{E}[X]$
2. **(Jensen)** Si $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa con $c(X)$ integrable, entonces
$$\mathbb{E}[c(X)|\mathscr{G}] \geq c(E[X|\mathscr{G}])$$
3. **(medibilidad)** Si Z es $\mathscr{G}$-medible, entonces
$$\mathbb{E}[ZX|\mathscr{G}] = Z\mathbb{E}[X|G]$$
4. **(independencia)**

1. Martingalas continuas

Sea $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_t, \mathbb{P})$ un e.d.p filtrado.

Definición: [(sub/super) Martingala] Un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ adaptado tal que $X_t \in L^1$ para todo $t \geq 0$ se dice

1. **Martingala** si $\forall 0 \leq s \leq t : \mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] = X_s$
2. **Supermartingala** si $\forall 0 \leq s \leq t : \mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] \leq X_s$
3. **Submartingala** si $\forall s \leq s \leq t : \mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] \geq X_s$

Proposición: [Ejemplos de martingalas] Sea $(B_t)_t$ un movimiento browniano, son ejemplos de martingalas los siguientes procesos:

- B_t
- $B_t^2 - t$
- $\exp\left(\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t\right), \qquad \theta > 0$

Proposición: [Funciones convexas] Sea $(X_t)_t$ adaptado y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa tal que $\mathbb{E}[|f(X_t)|] < \infty$ para todo t. Entonces

- Si $(X_t)_t$ es martingala, entonces $(f(X_t))_t$ es submartingala.
- Si $(X_t)_t$ es submartingala y f es no decreciente, entonces $(f(X_t))_t$ es submartingala.

Proposición: [supremo] Si $(X_t)_t$ es (sub/super) martingala, entonces para todo $t \geq 0$

$$\sup_{s\in[0,t]} \mathbb{E}[|X_s|] < \infty$$

Teorema: [Desigualdades clásicas]

1. **(Desigualdad maximal)** Sea $(X_t)_t$ supermartingala continua por la derecha. Entonces para $t, \lambda > 0$
$$\lambda \mathbb{P}\left[\sup_{s\in[0,t]} |X_s| > \lambda\right] \leq \mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|]$$
2. **(Desigualdad de Doob en L^p)** Sea $(X_t)_t$ martingala continua por la derecha. Entonces, para $t > 0$, $p > 1$
$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} |X_s|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big]$$

Proposición: [Subidas y bajadas] LIL

Teorema: [De convergencia no UI] Sea X sobremartingala continua por la derecha tal que $\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}[|x_t|] < \infty$. Entonces, existe $X_\infty \in L^1$ tal que

$$X_t \to X_\infty$$

Cuando $t \to \infty$ en el sentido casi seguro.

Definición: [Cerradura] Decimos que $(X_t)_t$ es martingala cerrada si existe $Z \in L^1$ tal que para todo $t \geq 0$

$$X_t = \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_t]$$

Teorema: [De convergencia UI] Sea $(X_t)_t$ martingala continua por la derecha. LSSE:

1. X cerrada.
2. X UI.
3. X converge casi seguramente y en L^1 a una X_∞ cuando $t \to \infty$. En cualquiera de estos casos tenemos que para todo $t \geq 0$
$$X_t = \mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_t]$$

Teorema: [De parada opcional de Doob no acotado] Sea $(X_t)_t$ martingala UI continua a la derecha. Si S, T son dos t.d.p con $S \leq T$, entonces $X_S, X_T \in L^1$ y

$$X_S = \mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S]$$

En particular, para S t.d.p, tenemos $X_S = \mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_S]$ y tomando esperanza se concluye $\mathbb{E}[X_S] = \mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0]$

Teorema: [De parada opcional de Doob acotado] Sea $(X_t)_t$ martingala continua por la derecha y $S \leq T$ t.d.p acotados. Entonces $X_S, X_T \in L^1$ y

$$X_S = \mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S]$$

Proposición: [Martingala detenida] Sea $(X_t)_t$ martingala continua a la derecha y T t.d.p. Definimos $(X_t^T)_t$ como el proceso detenido $X_t^T = X_{t\wedge t}$. Entonces:

- X^T es martingala.
- Si X es martingala UI, entonces X^T también lo es y tenemos
$$X_t^T = \mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_t]$$

Definición: [Martingala reversa] LAL

Teorema: [Convergencia de martingalas reversas] LEL

2. Variaciones y Martingalas Locales