Resumen Control 1

MA5402 Cálculo Estocástico - Primavera 2023

0. Preliminares

Proposición: [Cota para la distribución normal] Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $t \geq 1$, entonces

$$\mathbb{P}(X > t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,t} e^{-t^2/2}$$

Proposición: [Máximo de normales] Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión iid $\mathcal{N}(0,1)$, entonces c.s. para todo $c > \sqrt{2}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a partir de n_0:

$$\max_{k\in[1..n]} X_k \leq c\sqrt{\log(n)}$$

Definición: [Limsup y liminf de conjuntos] Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ colección de conjuntos. Definimos:

- $\limsup_n A_n = \bigcap_{n\in N}\bigcup_{m\geq n} A_n$ (A_n *ocurre infinitas veces*)
- $\liminf_n A_n = \bigcup_{n\in N}\bigcap_{m\geq n} A_n$ (A_n *ocurre eventualmente*)

Lema: [Borel-Cantelli] Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ colección de eventos del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Entonces

- **(convergente)**

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right) = 0$$

- **(divergente)** Si además los $\{A_n\}_n$ son independientes:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right) = 1$$

Definición: [Vector Gaussiano] Un vector aleatorio X sobre $\mathbb{R}^n$ se dice gaussiano si para todo $u \in \mathbb{R}^n$, $u^t X$ tiene distribución normal.

Definición: [Proceso Gaussiano] Un proceso $(X_t)_t$ se dice gaussiano si para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, el vector $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ es un vector gaussiano en $\mathbb{R}^n$.

Proposición: [Caracterización de Independencia] Sean X, Y vectores o bien procesos gaussianos centrados. Entonces, se tiene que $X \perp\!\!\!\perp Y$ si y solo si:

$$\forall u, v : \mathbb{E}[u^t X \cdot v^t Y] = 0$$

En que los u, v se interpretan en $\mathbb{R}^n$, o de cualquier tamaño finito dependiendo del caso.

Teorema: [Radon-Nikodym] Si μ, λ son medidas finitas en (S, Σ) un espacio medible tales que

$$\forall F \in \Sigma : \mu(F) = 0 \implies \lambda(F) = 0$$

(condición que se define como absoluta continuidad: $\lambda \ll \mu$), entonces existe f medible no-negativa tal que $\lambda(A) = \int_A f\, \mathrm{d}\mu$ para todo $A \in \Sigma$. Llamamos a f la derivada de Radon-Nikodym de λ con respecto a μ y denotamos

$$f =: \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}$$

1. Construcción de Lévy del MB

Definición: [Movimiento Browniano] Decimos que una función continua aleatoria $B : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es un movimiento browniano estándar si

1. $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
2. $B_{t+h} - B_t \overset{\mathscr{L}}{=} B_h$ y es independiente de $\sigma(B_s : s \leq t)$
3. $B_0 = 0$

Proposición: [Propiedades del MB]

1. **(Correlaciones)** $\mathbb{E}[B_t B_s] = t \wedge s$
2. **(Reescalado)** $\forall \alpha \neq 0 \in \mathbb{R} : (B_t)_t \overset{\mathscr{L}}{=} (a^{-1} B_{a^2 t})$
3. **(Inversiones temporales)**
   a) $(B_t)_{t\in[0,1]} \overset{\mathscr{L}}{=} (B_{1-t} - B_1)_{t\in[0,1]}$
   b) $(B_t)_{t\geq 0} \overset{\mathscr{L}}{=} (t B_{1/t} \mathbf{1}_{t\neq 0})_{t\geq 0}$

Nota: Un proceso gaussiano $(W_t)_t$ con $W_0 = 0$ y que cumple 1. es un MB.

Definición: [Conjuntos Diádicos] Definimos los siguientes subconjuntos de $[0,1]$

$$D_n := \left\{\frac{k}{2^n} : k \in \{0, \ldots, 2^n\}\right\}$$
$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$$

Definición: [Construcción de Lévy] Dada $(X_t)_{t\in D}$ familia de $\mathcal{N}(0,1)$ independientes:

- **(Construcción en los diádicos)** Construímos $B_0 = 0$, $B_1 = X_1$ y para $n \geq 1, d \in D_n \setminus D_{n-1}$

$$B_d = \frac{B_{d+2^{-n}} + B_{d-2^{-n}}}{2} + 2^{-\frac{n+1}{2}} X_d$$

- **(Construcción en** $[0,1]$**)** Definimos $F_0(t) = X_1 \cdot t$ y

$$F_n(t) = \begin{cases} 2^{-\frac{n+1}{2}} x_t & t \in D_n \setminus D_{n-1} \\ 0 & t \in D_{n-1} \\ \text{lineal entre los valores.} \end{cases}$$

  Así, $B_t = \sum_{k\geq 0} F_k(t)$ coincide con la construcción en D y define un MB en $[0,1]$.

- **(Construcción en** $\mathbb{R}^+$**)** Sea $(B^i)_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de MBs independientes en $[0,1]$, entonces

$$B_t = B^{\lfloor t\rfloor}_{t-\lfloor t\rfloor} + \sum_{i=1}^{\lfloor t\rfloor - 1} B^i_1$$

  Define a un MB en $\mathbb{R}^+$

2. Propiedades Trayectoriales del MB

Definición: [Módulo de continuidad] Una función $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ creciente se dice módulo de continuidad de $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ si

$$\lim_{h\to 0} \sup_{l\in[0,h]} \sup_{t\in[0,1-h]} \frac{|F(t+l) - F(t)|}{\phi(l)} = 1$$

Teorema: [Módulo de continuidad del MB] El módulo de continuidad del MB es casi seguramemnte

$$\phi(h) = \sqrt{2}\sqrt{h \log(1/h)}$$

Proposición: [Monotonía y derivabilidad] c.s. el movimiento browniano no es monótono en ningún intervalo ni derivable en ningún punto

Proposición: [Ceros del MB] El conjunto $C = B^{-1}(\{0\})$ de ceros del MB es un conjunto cerrado sin puntos aislados, con medida de Lebesgue nula y que no contiene intervalos.

Proposición: [Máximos del MB] Definamos

$$M_{\text{loc}} = \{t \in [0,1] : t \text{ es máximo local de } B\}$$

Entonces, M_{loc} es un conjunto numerable denso en $[0,1]$ en que todos los puntos de él tienen *valor* máximo local diferente entre sí.

Proposición: [Absoluta continuidad] Sea $\mathbb{P}$ la ley del movimiento Browniano $(B_t)_{t\in[0,1]}$ y $\mathbb{P}^{(c)}$ la ley del movimiento Browniano con drift $(B_t + ct)_{t\in[0,1]}$. Entonces se tiene la absoluta continuidad entre ellas

$$\mathbb{P}^{(c)} \ll \mathbb{P} \ll \mathbb{P}^{(c)}$$

Con derivada de Radon-Nikodým dada por

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(c)}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\big((B_t)_{t\in[0,1]}\big) = \exp\left(cB_1 - \frac{c^2}{2}\right)$$

3. Propiedad de Markov

Teorema: [Propiedad de Markov Débil] Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano y $s \in \mathbb{R}^+$. Entonces el proceso $(B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$ es un MB indepenediente de $(B_t)_{t\in[0,s]}$.

Definición: [Filtración y filtraciones límite] Una filtración $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ es una familia creciente de σ-álgebras. Definimos además las σ-álgebras límite

$$\mathscr{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathscr{F}_t\right), \qquad \mathscr{F}_t^+ = \bigcap_{\varepsilon>0} F_{t+\varepsilon}$$

Definición: [Filtración casi natural del MB] Se define mediante $\mathscr{F}_t = \sigma(B_s : s \in [0,t])$

Teorema: [Ley 0-1 de Blumenthal] La σ-álgebra $\mathscr{F}_0^+$, en que $(\mathscr{F}_t)_t$ es la filtración casi natural del MB, es trivial. Es decir $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ para A en esta σ-álgebra.

Definición: [Filtración natural del MB] La filtración natural del movimiento Browniano es la completación con respecto a $\mathbb{P}$ de la filtración casi natural.

Definición: [Continuidad a la derecha] Una filtración $(\mathscr{F}_t)_t$ se dice continua a la derecha cuando para todo t, se tiene $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t^+$. **Nota:** La filtración natural del MB es continua a la derecha.

Definición: [Adaptabilidad] Un proceso $(X_t)_t$ se dice adaptado a la filtración $(\mathscr{F}_t)_t$ cuando $\forall t \geq 0 : X_t$ es $\mathscr{F}_t$-medible.

Definición: [Tiempo de parada] Un tiempo aleatorio $\tau : \Omega \to \mathbb{R}^+$ se dice tiempo de parada con respecto a la filtración $(\mathscr{F}_t)_t$ cuando $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$.

Proposición: [Tiempo de llegada a un conjunto] Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso en $\mathbb{R}^d$ c.s. continuo y adaptado a $(\mathscr{F}_t)_t$ filtración continua por la derecha. Definimos, para $A \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\tau_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$$

Si A es abierto o cerrado, τ_A es tiempo de parada.

Definición: [$\mathscr{F}_\tau$] Para τ un tiempo de parada, definimos

$$\mathscr{F}_\tau = \{\Theta \in \mathscr{F}_\infty : \forall t \geq 0, \Theta \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t\}$$
$$\mathscr{F}_{\tau^+} = \{\Theta \in \mathscr{F}_\infty : \forall t > 0, \Theta \cap \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t\}$$

Teorema: [Propiedad de Markov Fuerte] Para todo τ tiempo de parada c.s. finito, el proceso $(B_{\tau+t} - B_\tau)_{t\geq 0}$ es MB independiente de $\mathscr{F}_\tau$.

Teorema: [Principio de Reflexión] Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un MB y τ un tiempo de parada. Entonces, el proceso reflejado en τ $(B_t^*)_{t\geq 0}$ definido por

$$B_t^* = B_t \mathbf{1}_{t\leq\tau} + (2B_\tau - B_t)\mathbf{1}_{t>\tau}$$

Tiene la ley de un MB.

Teorema: [Transformada de Lévy] Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un MB. Entonces

$$(|B_t|)_{t\geq 0} \overset{\mathscr{L}}{=} \left(B_t - \inf_{s\in[0,t]} B_s\right)_{t\geq 0}$$

4. Dimensiones Fractales

Definición: [Dimensión de Minkowski] Para (X,d) un espacio métrico acotado, definimos

$$N(X,\varepsilon) = \inf\left\{n \in \mathbb{N} : \exists (x_i)_{i=1}^n, X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)\right\}$$

Y con esto se definen la dimensión superior e inferior de Minkowski

$$\overline{\dim}_M(X) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(N(X,\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)}$$
$$\underline{\dim}_M(X) = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(N(X,\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)}$$

Y la dimensión de Minkowski es el valor común cuando ambos coinciden.

Proposición: [Caracterización diádica] Sea $X \subseteq \mathbb{R}^d$ compacto y

$$\square_n = \left\{q + [0, 2^{-n}]^d : q \in 2^{-n}\mathbb{Z}\right\}$$

Así, si $\tilde{N}(X) := |\{c \in \square_n : c \cap X \neq \emptyset\}|$. Entonces

$$\overline{\dim}_M(X) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\big(\tilde{N}(X)\big)}{\log(2^n)}$$
$$\underline{\dim}_M(X) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log\big(\tilde{N}(X)\big)}{\log(2^n)}$$

Definición: [Medida de Hausdorff] La medida α-Hausdorff se define por

$$\mu_H^{\alpha,\varepsilon}(X) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_i^\alpha : \exists (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i,\rho_i) = X, \rho_i \leq \varepsilon\right\}$$
$$\mu_H^\alpha(X) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_H^{\alpha,\varepsilon}(X)$$

Se tiene además que si $\mu_H^\alpha < \infty$ entonces, para todo $\beta > \alpha$, se tiene $\mu_H^\beta(X) = 0$ y si $\mu_H^\alpha > 0$, entonces para todo $\beta < \alpha$ se tiene $\mu_H^\beta(X) = \infty$.

Definición: [Dimensión de Hausdorff]

$$\dim_H(X) = \inf\left\{\alpha \geq 0 : \mu_H^\alpha(X) = 0\right\} = \sup\left\{\alpha \geq 0 : \mu_H^\alpha(X) = \infty\right\}$$

Se tiene que $\dim_H(X) \leq \underline{\dim}_M(X)$.

Proposición: [Cotas para grafo e imagen] Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ una función α-Hölder. Entonces

1. Si $A \subset [0,1]$, $\dim_{M/H}(f(A)) \leq \frac{1}{\alpha}\dim_{M/H}(A)$
2. $\dim_{M/H}(G(f)) \leq \frac{1}{\alpha} \wedge (1 + d - d\alpha)$

Proposición: [Ceros] Para el MB lineal, c.s. $\dim_{M/H}(B^{-1}(\{0\})) = \frac{1}{2}$.

Lema: [Método de la energía] Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto. Supongamos que existe una medida ν tal que

$$\iint_{E\times E} \frac{\nu(dx)\nu(dy)}{\|x-y\|^\alpha} < \infty$$

y $\nu(E) > 0$. Entonces $\dim_H(E) \geq \alpha$.

Proposición: [Grafo e imagen] Casi seguramente:

$$\dim_{M/H}(G(B)) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } d = 1 \\ 2 & \text{si } d \geq 2 \end{cases}$$

$$\dim_{M/H}(B([0,1])) = 2 \wedge d$$