

Resumen Control 2

MA5402 Cálculo Estocástico - Primavera 2023

0. Preliminares

■ **Definición: [Nociones de convergencia]** Sea $(X_t)_t \in [0, \infty]$ una secuencia de variables aleatorias con dominio en el mismo espacio de probabilidad. Decimos que

1. $X_t \rightarrow X_\infty$ c.s cuando $\mathbb{P}[X_t(\omega) \rightarrow X_\infty(\omega)] = 1$
2. $X_t \rightarrow X_\infty$ en L^p cuando $\mathbb{E}[|X_t - X_\infty|^p] \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$
3. $X_t \rightarrow X_\infty$ en \mathbb{P} cuando $\forall \varepsilon > 0: \mathbb{P}[|X_t - X_\infty| \geq \varepsilon] \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$

Sabemos que 1. y 2. implican 3. También, convergencia en L^p implica convergencia en L^s si $s \in [1, p]$. Además, 3. implica que existe subsucesión que converge c.s. Además, tanto 1. como 3. en conjunto con la existencia de $Y \in L^p$ con $|X_t| \leq Y$ implican 2. Finalmente, tanto 2. como 3. son convergencias metrizable.

■ **Definición: [Esperanza Condicional]** Para $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, X variable aleatoria en L^1 y \mathcal{G} sub σ -álgebra de \mathcal{F} , la esperanza condicional $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ se define como aquella variable integrable \mathcal{G} -medible tal que $\forall G \in \mathcal{G}: \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_G] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_G]$. La esperanza condicional posee, entre otras, las siguientes propiedades:

1. **(Esperanza anidada)** $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$
2. **(Jensen)** Si $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa con $c(X)$ integrable, entonces $\mathbb{E}[c(X)|\mathcal{G}] \geq c(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$
3. **(medibilidad)** Si Z es \mathcal{G} -medible, entonces $\mathbb{E}[ZX|\mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$
4. **(independencia)** Si X es independiente de \mathcal{G} , entonces $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$

1. Martingalas continuas

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ un e.d.p filtrado.

■ **Definición: [(sub/super) Martingala]** Un proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ adaptado tal que $X_t \in L^1$ para todo $t \geq 0$ se dice

1. **Martingala** si $\forall 0 \leq s \leq t: \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$
2. **Supermartingala** si $\forall 0 \leq s \leq t: \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$
3. **Submartingala** si $\forall s \leq t: \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$

💡 **Proposición: [Ejemplos de martingalas]** Sea $(B_t)_t$ un movimiento browniano, son ejemplos de martingalas los siguientes procesos:

- B_t
- $B_t^2 - t$
- $\exp\left(\theta B_t - \frac{\theta^2}{2} t\right), \quad \theta > 0$

💡 **Proposición: [Funciones convexas]** Sea $(X_t)_t$ adaptado y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa tal que $\mathbb{E}[|f(X_t)|] < \infty$ para todo t . Entonces

- Si $(X_t)_t$ es martingala, entonces $(f(X_t))_t$ es submartingala.
- Si $(X_t)_t$ es submartingala y f es no decreciente, entonces $(f(X_t))_t$ es submartingala.

💡 **Proposición: [supremo]** Si $(X_t)_t$ es (sub/super) martingala, entonces para todo $t \geq 0, \sup_{s \in [0, t]} \mathbb{E}[|X_s|] < \infty$

■ **Teorema: [Desigualdades clásicas]**

1. **(Desigualdad maximal)** Sea $(X_t)_t$ supermartingala continua por la derecha. Entonces para $t, \lambda > 0$

$$\lambda \mathbb{P}\left[\sup_{s \in [0, t]} |X_s| > \lambda\right] \leq \mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|]$$

2. **(Desigualdad de Doob en L^p)** Sea $(X_t)_t$ martingala continua por la derecha. Entonces, para $t > 0, p > 1$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \in [0, t]} |X_s|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_t|^p]$$

⚙ **Lema: [Subidas y bajadas]** El número $\gamma_{a,b}(t)$ de subidas y bajadas de $[a, b]$ hecho por $t \mapsto X_t(\omega)$ hasta el tiempo t se define como el mayor $k \in \mathbb{N}$ tal que existen

$$0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < s_k < t_k \leq t$$

con $X_{s_i}(\omega) < a$ y $X_{t_i}(\omega) > b$. Con esto, tenemos que

$$\mathbb{E}[\gamma_{a,b}(t)] \leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E}[(X_t - a)^-]$$

■ **Definición: [Uniforme integrabilidad]** Decimos que $(X_t)_t$ es uniformemente integrable (UI) si cuando $a \rightarrow \infty$,

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t| \mathbf{1}_{|X_t| \geq a}] \rightarrow 0$$

💡 **Proposición: [Condiciones para ser UI]** $(X_t)_t$ es UI si se tiene alguna de estas condiciones

- $(|X_t|)_t$ está acotado por una v.a en L^1 o por un proceso UI.
- Existe $\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ convexa tal que

$$\frac{\phi(x)}{x} \rightarrow \infty, \quad \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[\phi(|X_t|)] < \infty$$

📖 **Teorema: [De convergencia no UI]** Sea X supermartingala continua por la derecha tal que $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$. Entonces, existe $X_\infty \in L^1$ tal que $X_t \rightarrow X_\infty$ c.s cuando $t \rightarrow \infty$.

■ **Definición: [Cerradura]** Decimos que $(X_t)_t$ es martingala cerrada si existe $Z \in L^1$ tal que para todo $t \geq 0, X_t = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t]$

📖 **Teorema: [De convergencia UI]** Sea $(X_t)_t$ martingala continua por la derecha. LSSE:

1. X cerrada.
2. X UI.
3. X converge casi seguramente y en L^1 a una X_∞ cuando $t \rightarrow \infty$. En cualquiera de estos casos tenemos que para todo $t \geq 0, X_t = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t]$.

📖 **Teorema: [De parada opcional de Doob no acotado]** Sea $(X_t)_t$ martingala UI continua a la derecha. Si S, T son dos t.d.p con $S \leq T$, entonces $X_S, X_T \in L^1$ y $X_S = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]$. En particular, para S t.d.p, tenemos $X_S = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_S]$ y tomando esperanza se concluye $\mathbb{E}[X_S] = \mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0]$

📖 **Teorema: [De parada opcional de Doob acotado]** Sea $(X_t)_t$ martingala continua por la derecha y $S \leq T$ t.d.p acotados. Entonces $X_S, X_T \in L^1$ y $X_S = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]$. Tomando esperanza y $S = 0$, se obtiene $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$

💡 **Proposición: [Martingala detenida]** Sea $(X_t)_t$ (super)martingala continua a la derecha y T t.d.p. Definimos $(X_t^T)_t$ como el proceso detenido $X_t^T = X_{t \wedge T}$. Entonces:

- X^T es (super)martingala.
- Si X es martingala UI, entonces X^T también lo es y tenemos $X_t^T = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_t]$.

Lo siguiente solo aplica para el caso discreto

■ **Definición: [Martingala reversa]** Un proceso indexado por los enteros negativos $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice martingala reversa si $X_0 \in L^1$ y para todo $m < n$ se cumple

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m$$

Aquí $(\mathcal{F}_n)_n$ es una filtración reversa, en el sentido de que es decreciente hacia los negativos.

📖 **Teorema: [Convergencia de martingalas reversas]** Sea X una martingala reversa. Entonces existe X_∞ tal que $X_n \rightarrow X_\infty$ c.s y en L^1 . Si definimos $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$, entonces

$$X_\infty = \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_\infty]$$

2. Variaciones y Martingalas Locales

Definición: [Variación] Para $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, definimos

$$V_T(f) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \right\}$$

En que el supremo se toma sobre todas las particiones finitas del intervalo $[0, T]$. Si $V_T(f) < \infty$ para todo $T \geq 0$, decimos que f es de variación acotada.

Proposición: [Descomposición] A es función de variación acotada si se puede descomponer como suma de una función creciente y otra decreciente.

A partir de una función de variación acotada, se puede definir una medida con signo finita μ sobre intervalos acotados. Con lo cual se define

$$\int_0^T f(s) dA(s) = \int_{[0, T]} f(s) d\mu(s)$$

Proposición: [Continuidad de la variación] Si f es una función continua, $t \mapsto V_t(f)$ es una función continua.

Lema: [De aproximación] Sea $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $A: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ continua de variación acotada. Si $(t_i^n)_{i=0}^n$ es una secuencia de particiones de $[0, T]$ con $t_0^n = 0$ y $t_n^n = T$ y tales que $\Delta t_i^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$\int_0^T f(s) dA(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i^n) (A(t_{i+1}^n) - A(t_i^n))$$

Teorema: [Martingalas de variación acotada] Si M es martingala de variación acotada con $M_0 = 0$ c.s, entonces $M \equiv 0$.

Definición: [Martingala local] Decimos que $(M_t)_t$ es martingala local continua que parte de 0 si

1. $M_0 = 0$
2. Existe $(\tau_n)_n \nearrow \infty$ con M^{τ_n} martingala continua UI (decimos en este caso que la sucesión $(\tau_n)_n$ localiza a M)

Más generalmente, decimos que $(M_t)_t$ es martingala local continua si $(M_t - M_0)_t$ es una martingala local que parte de 0 con $M_0 \mathcal{F}_0$ -medible.

Proposición: [Sobre tiempos de localización] Si $(M_t)_t$ es martingala local continua y

$$\tau_n = \inf \{t \geq 0 : M_t \notin (-n, n)\}$$

Entonces $(\tau_n)_n$ localiza a M .

Proposición: [Condiciones para que una martingala local sea martingala] Sea $(M_t)_t$ martingala local continua con M_0 integrable.

- Si M es no-negativa, entonces es supermartingala.
- Si existe $Y \in L^1$ tal que $\sup_{t \geq 0} |M_t| \leq Y$, entonces M es martingala UI.
- Si τ es t.d.p, entonces M^τ es una martingala local.

Teorema: [Martingalas locales de variación acotada] Si M es martingala local que parte en 0 de variación acotada, entonces $M \equiv 0$.

Definición: [Variación cuadrática] Sea $(M_t)_{t \geq 0}$ una martingala local continua, entonces existe un único proceso $\langle M \rangle_t$ tal que

1. $\langle M \rangle_0 = 0$
2. $\langle M \rangle_t$ es creciente
3. $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ es una martingala local continua

Más aún, si fijamos $T > 0$, $((t_i^n)_{i=1}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia (determinista) de particiones con $t_0^n = 0$, $t_n^n = T$ y $\Delta t_i^n \rightarrow 0$.

$$\langle M \rangle_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (M(t_{i+1}^n) - M(t_i^n))^2$$

en probabilidades. Al proceso $(\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ lo llamamos variación cuadrática de M .

Si M es además una martingala acotada (c.s. por una constante determinista), entonces $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ es una martingala.

Proposición: [Variación cuadrática de una martingala detenida] Si $(M_t)_t$ es una martingala local y τ es un tiempo de parada, entonces $\langle M^\tau \rangle_t = \langle M \rangle_{t \wedge \tau}$

Proposición: [Caracterización de $\langle M \rangle_\infty$ integrable] Sea $(M_t)_{t \geq 0}$ una martingala local con $M_0 \in L^2$. LSSE:

- $\mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty] < \infty$
- M es una martingala continua acotada en L^2 (o sea $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[M_t^2] < \infty$).

En cualquier caso $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ es una martingala UI.

Proposición: [Caracterización de $\langle M \rangle_t$ integrable] Sea $(M_t)_{t \geq 0}$ una martingala local con $M_0 \in L^2$. LSSE:

- $\mathbb{E}[\langle M \rangle_t] < \infty$ para todo $t > 0$
- M es una martingala continua con $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$ para todo $t > 0$.

En cualquier caso $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ es una martingala.

Definición: [Covariación cuadrática] Sean M, N martingalas locales. Se define la covariación cuadrática como

$$\langle M, N \rangle = \frac{1}{2} (-\langle M \rangle - \langle N \rangle + \langle M + N \rangle)$$

En que $\langle M, M \rangle = \langle M \rangle$.

Proposición: [Caracterización de la covariación cuadrática] $\langle M, N \rangle$ es el único proceso tal que

1. $\langle M, N \rangle_0 = 0$
2. $\langle M, N \rangle$ es de variación acotada.
3. $MN - \langle M, N \rangle$ es una martingala local.

Proposición: [De aproximación] Para todo $t \geq 0$ y toda secuencia de particiones $(t_i^n)_{i=1}^n$ c.s.

$$\langle M, N \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})(N_{t_{i+1}^n} - N_{t_i^n})$$

Proposición: [Misceláneo sobre covariación y tdp]

- Si τ es un tdp, entonces

$$\langle M^\tau, N^\tau \rangle_t = \langle M, N \rangle_{\tau \wedge t} = \langle M^\tau, N \rangle_t = \langle M, N^\tau \rangle_t$$

- $N^\tau (M - M^\tau)$ es martingala local.
- Si M, N son martingalas acotadas en L^2 entonces $MN - \langle M, N \rangle$ es una martingala UI.

Teorema: [Desigualdad de Kunita-Watabane] Sean $(H_u)_{u \geq 0}, (K_u)_{u \geq 0}$ dos procesos medibles y $(M_u)_{u \geq 0}, (N_u)_{u \geq 0}$ dos martingalas locales. Entonces c.s. para todo $T \geq 0$:

$$\int_0^T |H_u| |M_u| d\langle M, N \rangle_u \leq \left(\int_0^T |H_u|^2 d\langle M \rangle_u \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |K_u|^2 d\langle N \rangle_u \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definición: [Semimartingala] Decimos que $(X_t)_{t \geq 0}$ es una semimartingala si existen M una martingala local y A un proceso adaptado, continuo y de variación acotada tales que $X_t = M_t + A_t$ para todo t .

Definición: [Covariación de semimartingalas] Sean X, Y semimartingalas. Tenemos que $\langle X, Y \rangle := \langle M^X, M^Y \rangle$, con M^X, M^Y las martingalas asociadas a X y a Y respectivamente.

Proposición: [De aproximación] Para todo $t > 0$ determinista y toda secuencia de particiones $(t_i^n)_{i=1}^n$ se tiene

$$\langle X, Y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n})$$