Resumen Control 2

MA5402 Cálculo Estocástico - Primavera 2023

0. Preliminares

Definición: [Nociones de convergencia] Sea $(X_t)_t \in [0,\infty]$ una secuencia de variables aleatorias con dominio en el mismo espacio de probabilidad. Decimos que

1. $X_t \to X_\infty$ c.s cuando $\mathbb{P}[\omega : X_n(\omega) \to X_\infty(\omega)] = 1$
2. $X_t \to X_\infty$ en L^p cuando $\mathbb{E}[|X_t - X_\infty|^p] \to 0$ si $t \to \infty$
3. $X_t \to X_\infty$ en $\mathbb{P}$ cuando $\forall \varepsilon > 0 : \mathbb{P}[|X_t - X_\infty| \geq \varepsilon] \to 0$ si $t \to \infty$

Sabemos que 1. y 2. implican 3. También, convergencia en L^p implica convergencia en L^s si $s \in [1,p]$. Además, 3. implica que existe subsucesión que converge c.s. Además, tanto 1. como 3. en conjunto con la existencia de $Y \in L^p$ con $|X_t| \leq Y$ implican 2. Finalmente, tanto 2. como 3. son convergencias metrizables.

Definición: [Esperanza Condicional] Para $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, X variable aleatoria en L^1 y $\mathscr{G}$ sub σ-álgebra de $\mathscr{F}$, la esperanza condicional $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ se define como aquella variable integrable $\mathscr{G}$-medible tal que

$$\forall G \in \mathscr{G} : \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_G] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_G]$$

La esperanza condicional posee, entre otras, las siguientes propiedades:

1. **(Esperanza anidada)** $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]] = \mathbb{E}[X]$
2. **(Jensen)** Si $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa con $c(X)$ integrable, entonces
$$\mathbb{E}[c(X)|\mathscr{G}] \geq c(E[X|\mathscr{G}])$$
3. **(medibilidad)** Si Z es $\mathscr{G}$-medible, entonces
$$\mathbb{E}[ZX|\mathscr{G}] = Z\mathbb{E}[X|G]$$
4. **(independencia)** Si X es independiente de $\mathscr{G}$, entonces
$$\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[X]$$

1. Martingalas continuas

Sea $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_t, \mathbb{P})$ un e.d.p filtrado.

Definición: [(sub/super) Martingala] Un proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ adaptado tal que $X_t \in L^1$ para todo $t \geq 0$ se dice

1. **Martingala** si $\forall 0 \leq s \leq t : \mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] = X_s$
2. **Supermartingala** si $\forall 0 \leq s \leq t : \mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] \leq X_s$
3. **Submartingala** si $\forall s \leq s \leq t : \mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] \geq X_s$

Proposición: [Ejemplos de martingalas] Sea $(B_t)_t$ un movimiento browniano, son ejemplos de martingalas los siguientes procesos:

- B_t
- $B_t^2 - t$
- $\exp\left(\theta B_t - \frac{\theta^2}{2} t\right), \qquad \theta > 0$

Proposición: [Funciones convexas] Sea $(X_t)_t$ adaptado y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa tal que $\mathbb{E}[|f(X(t)|] < \infty$ para todo t. Entonces

- Si $(X_t)_t$ es martingala, entonces $(f(X_t))_t$ es submartingala.
- Si $(X_t)_t$ es submartingala y f es no decreciente, entonces $(f(X_t))_t$ es submartingala.

Proposición: [supremo] Si $(X_t)_t$ es (sub/super) martingala, entonces para todo $t \geq 0$

$$\sup_{s \in [0,t]} \mathbb{E}[|X_s|] < \infty$$

Teorema: [Desigualdades clásicas]

1. **(Desigualdad maximal)** Sea $(X_t)_t$ supermartingala continua por la derecha. Entonces para $t, \lambda > 0$
$$\lambda \mathbb{P}\left[\sup_{s \in [0,t]} |X_s| > \lambda\right] \leq \mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|]$$
2. **(Desigualdad de Doob en L^p)** Sea $(X_t)_t$ martingala continua por la derecha. Entonces, para $t > 0$, $p > 1$
$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \in [0,t]} |X_s|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\big[|X_t|^p\big]$$

Lema: [Subidas y bajadas] El número $\gamma_{a,b}(t)$ de subidas y bajadas de $[a,b]$ hecho por $t \mapsto X_t(\omega)$ hasta el tiempo t se define como el mayor $k \in \mathbb{N}$ tal que existen

$$0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \ldots < s_k < t_k \leq t$$

con $X_{s_i}(\omega) < a$ y $X_{t_i}(\omega) > b$. Con esto, tenemos que

$$\mathbb{E}[\gamma_{a,b}(t)] \leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E}[(X_t - a)^-]$$

Definición: [Uniforme integrabilidad] Decimos que $(X_t)_t$ es uniformemente integrable (UI) si cuando $a \to \infty$,

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t| \mathbf{1}_{|X_t| \geq a}] \to 0$$

Proposición: [Condiciones para ser UI] $(X_t)_t$ es UI si se tiene alguna de estas condiciones

- $(|X_t|)_t$ está acotado por una v.a en L^1 o por un proceso UI.
- Existe $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ convexa tal que
$$\frac{\phi(x)}{x} \to \infty, \qquad \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[\phi(|x_t|)] < \infty$$

Teorema: [De convergencia no UI] Sea X supermartingala continua por la derecha tal que $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|x_t|] < \infty$. Entonces, existe $X_\infty \in L^1$ tal que

$$X_t \to X_\infty$$

Cuando $t \to \infty$ en el sentido casi seguro.

Definición: [Cerradura] Decimos que $(X_t)_t$ es martingala cerrada si existe $Z \in L^1$ tal que para todo $t \geq 0$

$$X_t = \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_t]$$

Teorema: [De convergencia UI] Sea $(X_t)_t$ martingala continua por la derecha. LSSE:

1. X cerrada.
2. X UI.
3. X converge casi seguramente y en L^1 a una X_∞ cuando $t \to \infty$. En cualquiera de estos casos tenemos que para todo $t \geq 0$
$$X_t = \mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_t]$$

Teorema: [De parada opcional de Doob no acotado] Sea $(X_t)_t$ martingala UI continua a la derecha. Si S, T son dos t.d.p con $S \leq T$, entonces $X_S, X_T \in L^1$ y

$$X_S = \mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S]$$

En particular, para S t.d.p, tenemos $X_S = \mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_S]$ y tomando esperanza se concluye $\mathbb{E}[X_S] = \mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0]$

Teorema: [De parada opcional de Doob acotado] Sea $(X_t)_t$ martingala continua por la derecha y $S \leq T$ t.d.p acotados. Entonces $X_S, X_T \in L^1$ y

$$X_S = \mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_S]$$

Tomando esperanza y $S = 0$, se obtiene $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$

Proposición: [Martingala detenida] Sea $(X_t)_t$ (super)martingala continua a la derecha y T t.d.p. Definimos $(X_t^T)_t$ como el proceso detenido $X_t^T = X_{t\wedge t}$. Entonces:

- X^T es (super)martingala.
- Si X es martingala UI, entonces X^T también lo es y tenemos

$$X_t^T = \mathbb{E}[X_T|\mathscr{F}_t]$$

Lo siguiente solo aplica para el caso discreto

Definición: [Martingala reversa] Un proceso indexado por los enteros negativos $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ se dice martingala reversa si $X_0 \in L^1$ y para todo $m < n$ se cumple

$$\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_m] = X_m$$

Aquí $(\mathscr{F}_n)_n$ es un filtración reversa, en el sentido de que es decreciente hacia los negativos.

Teorema: [Convergencia de martingalas reversas] Sea X una martingala reversa. Entonces existe $X_{-\infty}$ tal que $X_n \to X_{-\infty}$ c.s y en L^1. Si definimos $\mathscr{F}_{-\infty} = \bigcap_{n\in-\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$, entonces

$$X_{-\infty} = \mathbb{E}[X_0|\mathscr{F}_{-\infty}]$$

2. Variaciones y Martingalas Locales

Definición: [Variación] Para $f : [0, T] \to \mathbb{R}$, definimos

$$V_T(f) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{N-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|\right\}$$

En que el supremo se toma sobre todas las particiones finitas del intervalo $[0, T]$. Si $V_T(f) < \infty$ para todo $T \geq 0$, decimos que f es de variación acotada.

Proposición: [Descomposición] A es función de variación acotada ssi se puede descomponer como suma de una función creciente y otra decreciente.

A partir de una función de variación acotada, se puede definir una medida con signo finita μ sobre intervalos acotados. Con lo cual se define

$$\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}A(s) = \int_{[0,T]} f(s)\,\mathrm{d}\mu(s)$$

Proposición: [Continuidad de la variación] Si f es una función continua, $t \mapsto V_t(f)$ es una función continua.

Lema: [De aproximación] Sea $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ continua y $A : [0, T] \to \mathbb{R}$ continua de variación acotada. Si $(t_i^n)_{i=0}^n$ es una secuencia de particiones de $[0, T]$ con $t_0^n = 0$ y $t_n^n = T$ y tales que $\Delta t_i^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}A(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(A(t_{i+1}^n) - A(t_i^n))$$

Teorema: [Martingalas de variación acotada] Si M es martingala de variación acotada con $M_0 = 0$ c.s, entonces $M \equiv 0$.

Definición: [Martingala local] Decimos que $(M_t)_t$ es martingala local continua que parte de 0 si

1. $M_0 = 0$
2. Existe $(\tau_n)_n \nearrow \infty$ con M^{τ_n} martingala continua UI (decimos en este caso que la sucesión $(\tau_n)_n$ *localiza* a M)

Más generalmente, decimos que $(M_t)_t$ es martingala local continua si $(M_t - M_0)_t$ es una martingala local que parte de 0 con M_0 $\mathscr{F}_0$-medible.

Proposición: [Sobre tiempos de localización] Si $(M_t)_t$ es martingala local continua y

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : M_t \notin (-n, n)\}$$

Entonces $(\tau_n)_n$ localiza a M.

Proposición: [Condiciones para que una martingala local sea martingala] Sea $(M_t)_t$ martingala local continua con M_0 integrable.

- Si M es no-negativa, entonces es supermartingala.
- Si existe $Y \in L^1$ tal que $\sup_{t\geq 0} |M_t| \leq Y$, entonces M es martingala UI.
- Si τ es t.d.p, entonces M^τ es una martingala local.

Teorema: [Martingalas locales de variación acotada] Si M es martingala local que parte en 0 de variación acotada, entonces $M \equiv 0$.

Definición: [Variación cuadrática para martingalas locales] Sea $(M_t)_{t\geq 0}$ una martingala local continua, entonces existe un único proceso $\langle M\rangle_t$ tal que

1. $\langle M\rangle_0 = 0$
2. $\langle M\rangle_t$ es creciente
3. $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ es una martingala local continua

Más aún, si fijamos $T > 0$, $((t_i^n)_{i=1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia (determinista) de particiones con $t_0^n = 0$, $t_n^n = T$ y $\Delta t_i^n \to 0$.

$$\langle M\rangle_T = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (M(t_{i+1}^n) - M(t_i))^2$$

en probabilidades. Al proceso $(\langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ lo llamamos variación cuadrática de M.

Si M es además una martingala acotada (c.s. por una constante determinista), entonces $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ es una martingala.