

MA3701 Optimización

Profesor: Alejandro Jofré

Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Guía de Ejercicios 1

2 de septiembre de 2025

1. Preliminares

P1. (Desigualdad de Cauchy Schwarz) Dados $a, u \in \mathbb{R}^n$,

- a) Escriba la función $q(t) = \|a + tu\|^2$ como un polinomio cuadrático en t .
 b) Sabiendo que esta función es no negativa, utilice el discriminante cuadrático para probar que

$$|a^\top u| \leq \|a\| \|u\|. \quad (1)$$

- c) Concluya además que (1) se tiene con igualdad si y solo si a, u son linealmente dependientes.
 d) Sea $B(x_0, r) = \{x_0 + u : \|u\| \leq r\}$ la bola en \mathbb{R}^n en x_0 de radio r . Utilice lo probado anteriormente para mostrar que el problema

$$\max_{x \in B(x_0, r)} a^\top x$$

tiene el maximizador $x^* = x_0 + \frac{a}{\|a\|} r$. Obtenga el valor óptimo.

2. Modelamiento

P1. (problema de la dieta) Suponga que de cada nutriente i ($i = 1, \dots, m$) se desea obtener una cantidad de al menos b_i . Para esto, se dispone de diferentes alimentos j ($j = 1, \dots, n$) cada uno con un costo c_j . Si se sabe que el alimento j proporciona una cantidad a_{ij} del nutriente i , escriba el problema de optimización en que se busca satisfacer los requerimientos nutricionales deseados a costo mínimo.

Indicación: Suponga que es posible costear una cantidad no entera x_j de cada alimento.

P2. (centro de Chebyshev de un poliedro) Un *poliedro* en \mathbb{R}^n es un conjunto que se puede escribir en la forma $P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$. Es decir, como el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales $Ax \leq b$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. El *centro de Chebyshev* de un poliedro P corresponde al punto $x_c \in P$ que se ubica más lejos de su frontera. Es decir, el centro de la bola $B(x_c, r) = \{x_c + u : \|u\| \leq r\}$ de mayor radio tal que $B(x_c, r) \subseteq P$.

- a) Suponga primero que $P = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \leq b\}$. Es decir, que P es dado por una sola desigualdad. Modele la restricción $B(x_c, r) \subseteq P$ como una restricción lineal en x_c, r .

Indicación: Utilice lo probado en el problema relativo a la desigualdad de Cauchy Schwarz.

- b) Usando lo anterior, formule el problema de encontrar el centro de Chebyshev de un poliedro P arbitrario.

P3. (planificación dinámica de actividades) Se modela una fábrica capaz de producir m productos ($i = 1, \dots, m$) y comprendida por n sectores ($j = 1, \dots, n$) cuya actividad se desea planificar de manera óptima a través de N periodos de tiempo $t = 1, \dots, N$. Sea $x_j(t) \geq 0$ el nivel de actividad asignado al sector j en el periodo t y denotemos por:

- a_{ij} la cantidad del producto i producido por nivel de actividad en el sector j .

- b_{ij} la cantidad del producto i consumido por nivel de actividad en el sector j .
- $g_0 \in \mathbb{R}^m$ la dotación inicial de cada bien i para el tiempo 0.

Suponga que en cada periodo de tiempo i no se puede consumir más que los productos que se disponen del periodo anterior. Si $c_i(t)$ corresponde al valor del producto i en el tiempo t , formule el problema de maximizar el valor de los bienes en exceso no consumidos por las actividades agregado sobre todos los periodos de tiempo.

Indicación: Defina

$$\begin{aligned} s(0) &= g_0 - Bx(1), \\ s(t) &= Ax(t) - Bx(t+1), \quad t = 1, \dots, N-1, \\ s(N) &= Ax(N). \end{aligned}$$

Interprete estas variables. Note además –a modo de comentario– que esta formulación permite que el valor $c_i(t)$ sea negativo si el producto i corresponde, por ejemplo, a un contaminante.

3. Condiciones de primer orden

P1. Dado el problema

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ & x_1 + 2x_2 = 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

verifique que $(x_1, x_2) = (\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ es mínimo global.

P2. Encuentre el punto más cercano al origen de coordenadas dentro del conjunto

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 4, 2x_1 + x_2 \geq 5\}.$$

P3. Para $n \geq 2$, considere el problema

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x_1 \\ & \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n(n-1)} \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1. \end{aligned}$$

Pruebe que el punto $\left(0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}\right)$ es óptimo.