MA3701 Optimización
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Guía de Ejercicios 2

5 de noviembre de 2025

P1. (La función de Rosenbrock) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

a) Calcule $\nabla f(x)$ y $\nabla^2 f(x)$.

b) Verifique que $x^* = (1, 1)$ es el único punto crítico de esta función.

c) Evalúe $\nabla^2 f(x^*)$ y vea que es definido positivo.

d) A partir de $x_0 = (0, 0)$, efectúe una iteración del método de Newton y entregue el punto x_1 correspondiente ¿Se encuentra cercano al mínimo?

P2. Pruebe que la función $f(x) = 8x_1 + 12x_2 + x_1^2 - 2x_2^2$ solo tiene un punto estacionario, el cual es un punto silla.

P3. Considere la función $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2)^2$. Situados en el punto $x = (1, 0)$, consideramos la dirección de búsqueda $p = (-1, 1)$.

a) Pruebe que p es dirección de descenso.

b) Encuentre todos los minimizadores del problema $\min_{\alpha \geq 0} \{f(x + p\alpha)\}$.

P4. (Búsqueda de línea exacta sobre funciones cuadráticas) Sea $Q \in \mathcal{S}^n_{++}, b \in \mathbb{R}^n$. Consideramos el problema de minimizar la función cuadrática

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx - b^\top x$$

En que x^* solución de $Qx^* = b$ es el único mínimo global de f. Consideremos el método del máximo descenso

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \boldsymbol{\nabla} f(x_k)$$

en que α_k se escoge para minimizar la función escalar $\alpha \mapsto f(x_k - \alpha \boldsymbol{\nabla} f(x_k))$.

a) Obtenga una fórmula explícita para α_k y en consecuencia para la iteración del máximo descenso.

b) Sea $E(x) = \frac{1}{2}(x - x^*)^\top Q(x - x^*) = \frac{1}{2}\|x - x^*\|_Q^2$. Pruebe que $E(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^{*\top}Qx^*$, de modo que basta establecer propiedades de convergencia sobre el método de descenso de gradiente sobre E.

c) Pruebe que se satisface

$$E(x_{k+1}) = \left[1 - \frac{\left(\boldsymbol{\nabla} f(x_k)^\top \boldsymbol{\nabla} f(x_k)\right)^2}{(\boldsymbol{\nabla} f(x_k)^\top Q \boldsymbol{\nabla} f(x_k))(\boldsymbol{\nabla} f(x_k)^\top Q^{-1} \boldsymbol{\nabla} f(x_k))}\right] E(x_k)$$

d) Considere la desigualdad de Kantorovich: Sea $Q \in \mathcal{S}^n_{++}$ y asuma que sus valores propios son $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Entonces, para $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que:

$$\frac{(x^\top Qx)(x^\top Q^{-1}x)}{(x^\top x)^2} \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$$

Utilice esta desigualdad para describir cualitativamente la convergencia del método del máximo descenso con paso exacto.

P5. Considere el siguiente problema de minimización:

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \; & x_1 + x_2 \\ & x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

a) Para $\mu > 0$ parámetro de penalización, escriba la función objetivo del problema irrestricto asociado y describa sus puntos críticos.

b) Encuentre una condición sobre μ para que exista un único punto crítico.

P6. Considere el problema siguiente:

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \; & -5x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1 = 1. \end{aligned}$$

a) Encuentre el único minimizador de este problema.

b) Pruebe que para todo $\mu < 10$, el problema correspondiente a la penalización cuadrática es no acotado.