MA3701 Optimización
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Guía de Ejercicios 1

5 de septiembre de 2025

1. Preliminares

P1. **(Desigualdad de Cauchy Schwarz)** Dados $a, u \in \mathbb{R}^n$,

a) Escriba la función $q(t) = \|a + tu\|^2$ como un polinomio cuadrático en t.

b) Sabiendo que esta función es no negativa, utilice el discriminante cuadrático para probar que

$$|a^\top u| \leq \|a\|\|u\|. \tag{1}$$

c) Concluya además que (1) se tiene con igualdad si y solo si a, u son linealmente dependientes.

d) Sea $B(x_0, r) = \{x_0 + u : \|u\| \leq r\}$ la bola en $\mathbb{R}^n$ en x_0 de radio r. Utilice lo probado anteriormente para mostrar que el problema

$$\max_{x \in B(x_0, r)} a^\top x$$

tiene el maximizador $x^* = x_0 + \frac{a}{\|a\|} r$. Obtenga el valor óptimo.

2. Modelamiento

P2. **(problema de la dieta)** Suponga que de cada nutriente i $(i = 1, \ldots, m)$ se desea obtener una cantidad de al menos b_i. Para esto, se dispone de diferentes alimentos j $(j = 1, \ldots, n)$ cada uno con un costo c_j. Si se sabe que el alimento j proporciona una cantidad a_{ij} del nutriente i, escriba el problema de optimización en que se busca satisfacer los requerimientos nutricionales deseados a costo mínimo.

Indicación: Suponga que es posible costear una cantidad no entera x_j de cada alimento.

P3. **(centro de Chebyshev de un poliedro)** Un *poliedro* en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto que se puede escribir en la forma $P = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x \leq b_i, i = 1, \ldots, m\right\}$. Es decir, como el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales $Ax \leq b$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. El *centro de Chebyshev* de un poliedro P corresponde al punto $x_c \in P$ que se ubica más lejos de su frontera. Es decir, el centro de la bola $B(x_c, r) = \{x_c + u : \|u\| \leq r\}$ de mayor radio tal que $B(x_c, r) \subseteq P$.

a) Suponga primero que $P = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \leq b\right\}$. Es decir, que P es dado por una sola desigualdad. Modele la restricción $B(x_c, r) \subseteq P$ como una restricción lineal en x_c, r.

Indicación: Utilice lo probado en el problema relativo a la desigualdad de Cauchy Schwarz.

b) Usando lo anterior, formule el problema de encontrar el centro de Chebyshev de un poliedro P arbitrario.

P4. **(planificación dinámica de actividades)** Se modela una fábrica capaz de producir m productos $(i = 1, \ldots, m)$ y comprendida por n sectores $(j = 1, \ldots, n)$ cuya actividad se desea planificar de manera óptima a través de N periodos de tiempo $t = 1, \ldots, N$. Sea $x_j(t) \geq 0$ el nivel de actividad asignado al sector j en el periodo t y denotemos por:

- a_{ij} la cantidad del producto i producido por nivel de actividad en el sector j.

- b_{ij} la cantidad del producto i consumido por nivel de actividad en el sector j.
- $g_0 \in \mathbb{R}^m$ la dotación inicial de cada bien i para el tiempo 0.

Suponga que en cada periodo de tiempo i no se puede consumir más que los productos que se disponen del periodo anterior. Si $c_i(t)$ corresponde al valor del producto i en el tiempo t, formule el problema de maximizar el valor de los bienes en exceso no consumidos por las actividades agregado sobre todos los periodos de tiempo.

Indicación: Defina

$$\begin{aligned} s(0) &= g_0 - Bx(1), \\ s(t) &= Ax(t) - Bx(t+1), \quad t = 1, \dots, N-1, \\ s(N) &= Ax(N). \end{aligned}$$

Interprete estas variables. Note además –a modo de comentario– que esta formulación permite que el valor $c_i(t)$ sea negativo si el producto i corresponde, por ejemplo, a un contaminante.

3. Condiciones de primer orden

P5. Dado el problema

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2}\ & x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ & x_1 + 2x_2 = 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

verifique que $(x_1, x_2) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ es mínimo global.

P6. Encuentre el punto más cercano al origen de coordenadas dentro del conjunto

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 4, 2x_1 + x_2 \geq 5\right\}.$$

P7. Para $n \geq 2$, considere el problema

$$\begin{aligned} \min_{x}\ & x_1 \\ & \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n(n-1)} \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \end{aligned}$$

Pruebe que el punto $\left(0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}\right)$ es óptimo.

P8. Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min\ & 3x + 2y \\ & x^2 \leq y \\ & x + y \leq 6. \end{aligned}$$

a) Demuestre que el problema es convexo y que todos los puntos factibles satisfacen alguna condición de calificación.

b) Encuentre los candidatos a solución que satisfacen las condiciones de optimalidad de KKT.

c) Demuestre que el problema tiene solución y determínela.

P9. Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín } & x^2 - 6x \\ & (2-x)^3 \geq y \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

a) Grafique el conjunto factible y determine los puntos factibles en los cuales el cono tangente es igual al cono linealizante.

b) Demuestre que dentro de los puntos pertenecientes al conjunto anterior, no existen candidatos que satisfagan las condiciones de optimalidad de KKT.

c) Demuestre que el problema posee solución, encuéntrela y explique por qué esta no satisface las condiciones de optimalidad de KKT.

4. Segundo orden y sensibilidad

P10. Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{máx } & -x + 3y - 3z^2 \\ & x - y - z = \frac{9}{10} \\ & -x + 2y + z^2 = \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

a) Demuestre que todo punto factible satisface la condición de independencia lineal.

b) Determine los puntos críticos del problema usando las condiciones de optimalidad de KKT.

c) Use el criterio de segundo orden para determinar si los puntos encontrados en la parte anterior son máximos locales del problema.

d) Demuestre que la función objetivo es coerciva en el conjunto factible y concluya que el problema tiene solución, diga cuál es.

e) Considere la siguiente familia de problemas perturbados:

$$\begin{aligned} \text{máx } & (t-1)x + (3-t)y + (2t-3)z^2 \\ & x - y(t+1) - z = \frac{9}{10} - t^2 \\ & (t-1)x + 2y + z^2 = \frac{1}{100} - t. \end{aligned} \qquad (P_t)$$

Demuestre que existen funciones diferenciables $x(t), y(t), z(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)$ definidas en una vecindad de $t = 0$ tales que $(x(t), y(t), z(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t))$ es la única solución del sistema de condiciones de optimalidad de KKT asociadas al problema (P_t) y $x(t), y(t), z(t)$ es un mínimo local estricto de (P_t).