MA3701 Optimización
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Control 1

Tiempo: 3:00
8 de septiembre de 2025

P1. Suponga que se dispone de n fábricas donde se produce cereal, así como m tiendas que lo comercializan. Cada fábrica i puede producir como máximo s_i kilogramos de cereal, con un costo de b_i por kilogramo, mientras que cada tienda j tiene una demanda fija de d_j kilogramos que debe satisfacerse. El costo de transportar un kilogramo de cereal desde la fábrica i hasta la tienda j es c_{ij}. Suponga durante este problema que la demanda agregada de todas las tiendas $\sum_{j=1}^m d_j$ es menor o igual que la capacidad de producción agregada $\sum_{i=1}^n s_i$. Formule un modelo de optimización que permita decidir simultáneamente cuántos kilogramos producir en cada fábrica y cuántos enviar desde cada fábrica i hacia cada tienda j, de manera de minimizar el costo total de producción y transporte. En su formulación, defina claramente las variables de decisión, y explique el significado de cada restricción y de la función objetivo.

Solución: Consideremos las siguientes variables de decisión:

- y_i : kilogramos producidos en la fábrica i.
- x_{ij} : kilogramos a enviar desde la fábrica i a la tienda j.

(1.0) nombrar variables.

De este modo, el costo total de producción y transporte viene dado por

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^n b_i y_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}.$$

(1.0) función objetivo.

Las restricciones propias de este problema quedan entonces dadas por:

- **Positividad**

$$\forall i = 1,\dots,n : y_i \geq 0,$$
$$\forall i = 1,\dots,n, j = 1,\dots,m : x_{ij} \geq 0.$$

(0.5) variables deben ser positivas.

- **Demanda**

$$\forall j = 1,\dots,m : \sum_{i=1}^n x_{ij} \geq d_j.$$

(1.0) restricción de demanda (NOTA: también es válido que la restricción sea de igualdad).

- **Capacidad**

$$\forall i = 1,\dots,n : y_i \leq s_i.$$

(1.0) restricción de producción máxima.

- **Envío de producción**

$$\forall i = 1, \ldots, n : y_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}.$$

(1.0) relación entre las dos variables (NOTA: la restricción también puede ser en el sentido $\geq$).

En conclusión, el problema de optimización queda como sigue:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} &\left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \right\} \\ &\forall j : \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq d_j \\ &\forall i : y_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \\ &\forall i, j : x_{ij} \geq 0 \\ &\forall i : 0 \leq y_i \leq s_i. \end{aligned}$$

(0.5) concluir.

Solución alternativa: Notar que la ecuación $y_i = \sum_j x_{ij}$ permite eliminar la variable y_i. Es posible plantear el problema solo en términos de los x_{ij}.

P2. Considere el siguiente problema de minimización:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \, & x^2 + y^2 \\ & \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \end{aligned}$$

a) (1 pt) Obtenga las condiciones de KKT para este problema, utilícelas para obtener todos los puntos críticos con sus multiplicadores asociados.

b) (2 pt) Para los puntos (x_0, y_0) obtenidos en a), obtenga el cono de direcciones críticas $K(x_0, y_0)$.

c) (1 pt) Obtenga la matriz Hessiana del Lagrangeano $\nabla^2_{x,y} L(x_0, y_0, \mu_0)$ en los puntos obtenidos.

d) (2 pt) Utilizando la información anterior, decida cuáles de estos puntos son mínimos locales del problema. Concluya entregando un candidato a mínimo global del problema.

Solución:

a) Las condiciones de KKT quedan

$$\begin{aligned} 2x + \mu \cdot \frac{x}{2} &= 0, \\ 2y + \mu \cdot 2y &= 0, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

(0.5) obtener condiciones.

Las cuales factorizando se pueden escribir como:

$$x\left(2 + \frac{\mu}{2}\right) = 0, \tag{1}$$

$$y(2 + 2\mu) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \tag{3}$$

Ahora, para resolver, consideramos casos:

- Si $x = 0$, por (3), $y = \pm 1$. En (2), $\mu = -1$, obteniendo
$$(x, y, \mu) = (0, \pm 1, -1).$$
- Si $x \neq 0$, por (1), $\mu = -4$. En (2), $y = 0$. En (3), $x = \pm 2$, obteniendo
$$(x, y, \mu) = (\pm 2, 0, -4).$$

(0.5) resolver.

b) Recordemos que
$$K(x_0) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla h(x_0)^\top d = 0, \nabla f(x_0)^\top d \leq 0\}.$$
En este caso,
$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ 2y \end{pmatrix}, \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ xy \end{pmatrix}.$$

(1.0) definición y gradientes involucrados.

Ahora, evaluamos en los pares de puntos obtenidos:

I) En $(0, \pm 1)$, nos quedan las condiciones
$$\begin{aligned} 0 \cdot d_1 \pm 2 \cdot d_2 = 0 &\implies d_2 = 0, \\ 0 \cdot d_1 \pm 2 \cdot d_2 \leq 0 &\implies \pm d_2 \leq 0. \end{aligned}$$
La segunda condición es consecuencia de la primera, de modo que se obtiene
$$K(0, \pm 1) = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} : d_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(0.5) primer grupo.

II) En $(\pm 2, 0)$, nos quedan las condiciones
$$\begin{aligned} \pm d_1 + 0 \cdot d_2 = 0 &\implies d_1 = 0, \\ \pm 4 d_1 + 0 \cdot d_2 \leq 0 &\implies \pm d_1 \leq 0. \end{aligned}$$
Nuevamente, la segunda condición es consecuencia de la primera, de modo que se obtiene
$$K(\pm 2, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \end{pmatrix} : d_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(0.5) segundo grupo.

c) El Lagrangeano es dado por
$$\mathcal{L}(x, y\mu) = x^2 + y^2 + \mu \left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \right).$$
De modo que sus derivadas las obtenemos como sigue:
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 2x + \frac{\mu x}{2}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 2y + 2\mu y, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} &= 2 + \frac{\mu}{2}, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} &= 2 + 2\mu, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned}$$

(0.5) cálculo de las derivadas.

Así, la matriz Hessiana queda

$$\nabla^2_{xy}\mathcal{L}(x,y,\mu) = \begin{pmatrix} 2+\frac{\mu}{2} & 0 \\ 0 & 2+2\mu \end{pmatrix}.$$

En particular,

$$\nabla^2_{xy}\mathcal{L}(0,\pm 1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2_{xy}\mathcal{L}(\pm 2,0,-4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

(0.5) conclusión.

d) Se puede ver que los puntos $(\pm 2, 0)$ no son mínimos locales ya que el cono crítico es no trivial y $\nabla^2 L$ es semidefinido negativo. Por otro lado, para los puntos $(0,\pm 1)$, sea $d_1 \in \mathbb{R}$ y vemos que

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} d_1^2 > 0$$

siempre que $d_1 \neq 0$. Con ello, se concluye que $(0,\pm 1)$ son mínimos locales. Nota: No basta decir que la matriz es semidefinida positiva, la desigualdad debe ser estricta.

(1.0) clasificar los puntos críticos.

Ya que a condición de calificación de independencia lineal se cumple en todo punto del conjunto factible y estos puntos $(0,\pm 1)$ tienen igual valor 1, corresponden a los mínimos globales. Nota: No se puede utilizar la condición de calificación de Slater, el problema no es convexo.

(1.0) discutir calificación y concluir.

P3. *a*) (3pt) Obtenga el minimizador $x^*(u)$ y la función valor $v(u)$ asociada al problema

$$\min_{x\in\mathbb{R}} x^2 + 1$$
$$(x-2)(x-4) \leq u,$$

para cada $u \in \mathbb{R}$ tal que el problema sea factible.

b) (2pt) Para $u \leq 8$, utilice las condiciones de KKT para obtener el multiplicador $\lambda^*(u)$ asociado a la solución $x^*(u)$.

c) (1pt) Verifique que se cumple la igualdad $v'(u) = -\lambda^*(u)$

Solución:

a) Notemos que, dado $u \in \mathbb{R}$, el conjunto factible viene dado por la solución de una inecuación cuadrática cuyo vértice es 3. Más precisamente, el conjunto factible, cuando es no vacío, viene dado por

$$x \in \left[3-\sqrt{1+u}, 3+\sqrt{1+u}\right].$$

También note que el mínimo global de la función objetivo es $x=0$. De modo que hay dos casos dependiendo de u:

- O $x^* = 0$ es factible, de modo que es el minimizador,
- o el conjunto factible es subconjunto de $\mathbb{R}_+$ donde la función objetivo es creciente, por lo que el mínimo se alcanzará en el extremo izquierdo del intervalo.

La condición para que 0 sea factible viene dada por

$$\begin{aligned} & 3-\sqrt{1+u}\leq 0 \\ \implies & \sqrt{1+u}\geq 3 \\ \implies & 1+u\geq 9 \\ \implies & u\geq 8. \end{aligned}$$

Así, el minimizador viene dado por

$$x^*(u)=\begin{cases} 0 & u>8, \\ 3-\sqrt{1+u} & u\leq 8. \end{cases}$$

En consecuencia, la función valor tiene la forma