MA3701 Optimización
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Auxiliar 5

Método de máximo descenso
24 de septiembre de 2025

P1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que ∇f es L-Lipschitz. En esta pregunta obtendremos garantías teóricas sobre el ritmo de convergencia del método iterativo del máximo descenso con paso fijo dado por

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k).$$

en que $\alpha > 0$ se debe elegir de manera óptima. Para esto, proceda como sigue:

a) Pruebe que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x) + \frac{L}{2}\|y - x\|^2.$$

Concluya que para $d \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$f(x + \alpha d) \leq f(x) + \alpha \nabla f(x)^\top d + \alpha^2 \frac{L}{2}\|d\|^2.$$

b) Tomando $d = -\nabla f(x)$, obtenga $\overline{\alpha}$ que minimiza el lado derecho de la desigualdad. Deduzca con ello una cota para $f(x_{k+1})$ en que $x_{k+1} = x_k - \overline{\alpha}\nabla f(x)$.

c) A partir de la cota obtenida anteriormente y suponiendo que f es acotada inferiormente por $\overline{f}$, deduzca una fórmula que permita obtener el número de iteraciones requeridas para obtener x_k con $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$.

P2. Considere ahora la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x_1^2 + x_2^2$.

a) Obtenga la constante de Lipschitz de ∇f y deduzca el paso $\overline{\alpha}$ asociado.

b) Encuentre M tal que $x_{k+1} = M x_k$. Obtenga con ello una fórmula explícita para x_k si las iteraciones se inician desde $x_0 = (1, 1)$.

c) Calcule la norma del gradiente en cada iteración x_k y compare con la cota obtenida en la pregunta anterior.