MA3701 Optimización
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Auxiliar 2

Optimización sin restricciones
13 de agosto de 2025

P1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pruebe que $A^\top A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es semidefinida positiva. Entregue condiciones para que sea definida positiva.

P2. **(Regresión de mínimos cuadrados lineal)** Suponga que se cuenta con N datos $(x_i, y_i)_{i=1}^N$ en que $x_i \in \mathbb{R}^d$ representa *características* o *atributos* de un objeto que se piensa que predicen la *respuesta* y_i. A modo de ejemplo, se puede pensar que x_i representa diferentes datos asociados a un terreno i –tales como tamaño, distancia a la estación de metro más cercana, etc– que se buscan relacionar con el precio y_i del mismo. Se busca entonces modelar esta relación como una función lineal afín de tipo

$$y = a^\top x + b$$

con $a \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R}$ escogidos adecuadamente. Estudiaremos el problema de encontrar a, b bajo el criterio de minimizar el *error cuadrático medio* tomado sobre los datos x_i, y_i que se tiene. Es decir, se busca encontrar a, b que minimicen la función

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^N (y_i - (a^\top x + b))^2.$$

A modo de simplificación, dado $x_i \in \mathbb{R}^d$, se puede añadir una coordenada adicional definida como $x_{i,d+1} = 1$ y definir también $\theta = (a, b)$ de modo que tenemos

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^N (y_i - \theta^\top x_i)^2.$$

a) Pruebe que la función $f(\theta)$ es convexa.

b) Asumiendo que la matriz $X = (x_{i,j})_{i=1,j=1}^{N,d+1}$ tiene columnas linealmente independientes, encuentre el único minimizador θ^* para el problema de mínimos cuadrados.

c) Deduzca la fórmula explícita para (a, b) en el caso particular $d = 1$.