MA3701 Optimización
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Control 1

Tiempo: 3:00
8 de septiembre de 2025

P1. Suponga que se dispone de n fábricas donde se produce cereal, así como m tiendas que lo comercializan. Cada fábrica i puede producir como máximo s_i kilogramos de cereal, con un costo de b_i por kilogramo, mientras que cada tienda j tiene una demanda fija de d_j kilogramos que debe satisfacerse. El costo de transportar un kilogramo de cereal desde la fábrica i hasta la tienda j es c_{ij}. Suponga durante este problema que la demanda agregada de todas las tiendas $\sum_{j=1}^{m} d_j$ es menor o igual que la capacidad de producción agregada $\sum_{i=1}^{n} s_i$.

a) Formule un modelo de optimización que permita decidir simultáneamente cuántos kilogramos producir en cada fábrica y cuántos enviar desde cada fábrica i hacia cada tienda j, de manera de minimizar el costo total de producción y transporte. En su formulación, defina claramente las variables de decisión, y explique el significado de cada restricción y de la función objetivo.

b) Calcule las condiciones de KKT para la formulación obtenida en a).

P2. Considere el siguiente problema de minimización:

$$\min_{x,y} x^2 + y^2$$
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

a) Obtenga las condiciones de KKT para este problema, utilícelas para obtener todos los puntos críticos con sus multiplicadores asociados.

b) Para los puntos (x_0, y_0) obtenidos en a), obtenga el cono de direcciones críticas $K(x_0, y_0)$.

c) Obtenga la matriz Hessiana del Lagrangeano $\nabla^2_{x,y} L(x_0, y_0, \mu_0)$ en los puntos obtenidos.

d) Utilizando la información anterior, decida cuáles de estos puntos son mínimos locales del problema. Concluya entregando un candidato a mínimo global del problema.

P3. *a)* Obtenga el minimizador $x^*(u)$ y la función valor $v(u)$ asociada al problema

$$\min_{x\in\mathbb{R}} x^2 + 1$$
$$(x-2)(x-4) \leq u,$$

para cada $u \in \mathbb{R}$ tal que el problema sea factible.

b) Para $u \leq 8$, utilice las condiciones de KKT para obtener el multiplicador $\lambda^*(u)$ asociado a la solución $x^*(u)$.

c) Verifique que se cumple la igualdad $v'(u) = -\lambda^*(u)$