

MA5701 Optimización no Lineal**Profesor:** Alejandro Jofré**Auxiliar:** Benjamín Vera Vera

Auxiliar 1

Condiciones de optimalidad

20 de marzo de 2025

Consideremos el siguiente problema parametrizado por $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^m} f(x, y) \\ g(x, y) \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{F})$$

Con $g = (g_i)_{i=1}^p$ en que $f(x, \cdot), g_i(x, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones convexas y \mathcal{C}^1 para $i = 1, \dots, p$ y $x \in \mathcal{X}$ fijo. Digamos que el problema **F** tiene conjunto solución $\Psi(x) \subseteq \mathbb{R}^m$. Dada $F(x, y)$ continua en ambas variables, consideramos la formulación optimista del problema binivel

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathbb{R}^m} F(x, y) \\ y \in \Psi(x) \end{aligned} \quad (\text{BP})$$

En esta clase, vamos a estudiar la *transformación de KKT* que reduce el problema **BP** a uno con restricciones de complementariedad utilizando las condiciones de primer orden sobre **F**. Esto nos entrega el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{x, y, u} F(x, y) \\ x \in \mathcal{X} \\ \nabla_y L(x, y, u) = 0 \\ (g(x, y) \leq 0) \perp (u \geq 0) \end{aligned} \quad (\text{MPEC})$$

en que $L(x, y, u) := f(x, y) + u^\top g(x, y)$ define al lagrangeano del problema.

P1. (Propuesto) Pruebe que si (\bar{x}, \bar{y}) es solución del problema **BP** y la condición de Slater para **F** se cumple en \bar{x} , entonces para todo $\bar{u} \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y})$ dado por

$$\Lambda(\bar{x}, \bar{y}) := \{u \geq 0 : \nabla_y L(\bar{x}, \bar{y}, u) = 0, u^\top g(\bar{x}, \bar{y}) = 0\},$$

el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ es solución de **MPEC**.

P2. a) Considere el siguiente problema parametrizado por $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \min_{y_1, y_2} y_1 \\ y_1^2 - y_2 \leq x \\ y_1^2 + y_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Obtenga la solución de este problema y sus multiplicadores $u_1, u_2 \geq 0$ (en caso de que existan) para $x \geq 0$.

Indicación: Analice por separado $x = 0$ y $x > 0$.

b) Ahora, considerando el problema binivel

$$\begin{aligned} \min_{x \geq 0} \quad & x \\ & y \in \Psi(x), \end{aligned}$$

explique por qué la hipótesis de Slater en la pregunta anterior es necesaria.

P3. Ahora, asuma que la condición de Slater se cumple para **F** para **todo** punto $x \in \mathcal{X}$ y sea $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ solución de **MPEC**. Pruebe que entonces (\bar{x}, \bar{y}) es solución de **BP**.