MA5701 Optimización no Lineal
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Auxiliar 9

Preparación C2
13 de junio de 2025

P1. Sea f convexa y considere el siguiente esquema partiendo de $x_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 = x_0$:

$$\begin{cases} x_k = y_{k-1} - s\nabla f(y_{k-1}) \\ y_k = x_k + \dfrac{k-3}{k}(x_k - x_{k-1}). \end{cases} \tag{1}$$

Deduzca a partir de una aproximación de Taylor la siguiente ecuación diferencial para una trayectoria que sigue $\{x_k\}$:

$$\ddot{X} + \frac{3}{t}\dot{X} + \nabla f(X) = 0 \tag{2}$$
$$X(0) = x_0 \tag{3}$$
$$\dot{X}(0) = 0 \tag{4}$$

P2. Se puede probar que 2 admite una única solución global para $t \geq 0$ y que el esquema 1 converge a ella en el siguiente sentido:

$$\lim_{s\to 0} \max_{0\leq k\leq T/\sqrt{s}} \left\| x_k - X(\sqrt{s}k) \right\| = 0, \qquad \forall T \geq 0$$

a) Suponga además que $\ddot{X}(0) := \lim_{t\to 0} \ddot{X}(t)$ existe. Pruebe la siguiente expansión asintótica para t cercano a 0:

$$X(t) = -\frac{\nabla f(x_0)}{8}t^2 + x_0 + o(t^2)$$

Indicación: Utilice el teorema del valor medio.

b) Sea f convexa con ∇f lipschitz y sea $X(t)$ la única solución del problema 2. Pruebe que para $t > 0$:

$$f(X(t)) - f^* \leq \frac{2\|x_0 - x^*\|^2}{t^2}$$