MA5701 Optimización no Lineal
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Auxiliar 2

Ejemplos de regresiones
28 de marzo de 2025

P1. **(Predicción de tiempos de viaje para buses)** Discuta el problema de predecir el tiempo que un bus en una ruta predefinida tarda en viajar entre una parada y la siguiente. Proponga y justifique un buen modelo para el predictor así como posibles variables a medir para ajustar este modelo.

P2. **(Estimación recursiva de mínimos cuadrados)** Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un vector que se desea estimar a partir de mediciones $y \in \mathbb{R}^k$ obtenidas realizando una trasnformación linear ruidosa de x:

$$y = Hx + v, \qquad (H \in \mathbb{R}^{k\times n}, v \in \mathbb{R}^k)$$

en que v_i se interpreta como el *ruido* asociado a la medición i-ésima. Asumieremos que estos ruidos son independientes entre si y de media cero.

a) **(Mínimos cuadrados clásico)** Dado $i \in \mathbb{R}^k, H \in \mathbb{R}^{k\times n}$ en que $k \leq n$ y H tiene rango completo, obtenga el estimador $\hat{x}$ que minimiza el error cuadrático

$$J(\hat{x}) = \|\varepsilon\|_2^2$$

en que $\varepsilon := y - H\hat{x}$

b) **(Mínimos cuadrados con pesos)** Supongamos ahora que los v_j tienen diferentes varianzas conocidas que queremos considerar. Digamos $\mathbb{E}[v_j^2] = \sigma_j^2$ $j = 1, \ldots, k$. Ya que son independientes, obtenemos la matriz diagonal de covarianza:

$$R = \mathbb{E}[vv^\top] = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2).$$

Encuentre el $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ que minimiza el funcional de error cuadrático ponderado

$$J(\hat{x}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon_j^2}{\sigma_j^2}$$

en que $\varepsilon_j = y_j - \sum_{i=1}^n H_{ji}\hat{x}_i$.

c) **(Mínimos cuadrados recursivos)** Si tenemos muchos experimentos, el cálculo del estimador $\hat{x}$ puede ser complejo de rehacer desde cero ante la llegada de un nuevo dato $y_k \in \mathbb{R}$. Buscamos un modelo de tipo

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k(y_k - H_k\hat{x}_{k-1})$$

en que $y_k = H_k x + v_k$ y K_k (matriz de ganancia) se debe determinar para minimizar el error cuadrático medio

$$J_k(K_k) = \mathbb{E}[\varepsilon_k^\top \varepsilon_k]$$

en que $\varepsilon_k = x - \hat{x}_k$. Obtenga un procedimiento recursivo que permita actualizar $\hat{x}_k$ dinámicamente.