MA5701 Optimización no Lineal
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Auxiliar 6

Preparación Control 1
9 de mayo de 2025

P1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa y L-suave con minimizador x^* y sea $f^* = f(x^*)$.

a) Pruebe que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) - f^* \geq \frac{1}{2L} \|\boldsymbol{\nabla} f(x)\|^2$$

Indicación: Minimice con respecto a y en la desigualdad conocida siguiente:

$$f(y) \leq f(x) + \boldsymbol{\nabla} f(x)^\top (y - x) + \frac{L}{2} \|x - y\|^2$$

Luego, escriba $y - x = tv$ con $t \geq 0$ y $\|v\| = 1$ para concluír.

b) Pruebe la siguiente propiedad de *cocoercividad*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : (\boldsymbol{\nabla} f(x) - \boldsymbol{\nabla} f(y))^\top (x - y) \geq \frac{1}{L} \|\boldsymbol{\nabla} f(x) - \boldsymbol{\nabla} f y\|^2$$

Indicación: Aplique la parte (a) sobre las funciones

$$h_x(z) := f(z) - \boldsymbol{\nabla} f(x)^\top z, \qquad h_y(z) := f(z) - \boldsymbol{\nabla} f(y)^\top z$$

P2. Sea ahora $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ m-fuertemente convexa, L-suave y con (único) minimizador x^*

a) Probar que $q(x) := f(x) - \frac{m}{2} \|x\|^2$ es convexa y $(L - m)$-suave.

b) Aplicando la propiedad de cocoercividad de la pregunta anterior sobre la función q, pruebe que se cumple

$$[\boldsymbol{\nabla} f(x) - \boldsymbol{\nabla} f(y)]^\top (x - y) \geq \frac{mL}{m + L} \|x - y\|^2 + \frac{1}{m + L} \|\boldsymbol{\nabla} f(x) - \boldsymbol{\nabla} f(y)\|^2$$