MA5701 Optimización no Lineal
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Auxiliar 1

Condiciones de optimalidad 20 de marzo de 2025

Consideremos el siguiente problema parametrizado por $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^m} & f(x,y) \\ & g(x,y) \leq 0 \end{aligned} \tag{F}$$

Con $g = (g_i)_{i=1}^p$ en que $f(x,\cdot), g_i(x,\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ son funciones convexas y $\mathcal{C}^1$ para $i = 1, \dots, p$ y $x \in \mathcal{X}$ fijo. Digamos que el problema F tiene conjunto solución $\Psi(x) \subseteq \mathbb{R}^m$. Dada $F(x,y)$ continua en ambas variables, consideramos la formulación optimista del problema binivel

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathbb{R}^m} & F(x,y) \\ & y \in \Psi(x) \end{aligned} \tag{BP}$$

En esta clase, vamos a estudiar la *transformación de KKT* que reduce el problema BP a uno con restricciones de complementariedad utilizando las condiciones de primer orden sobre F. Esto nos entrega el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{x,y,u} \ & F(x,y) \\ & x \in \mathcal{X} \\ & \nabla_y L(x,y,u) = 0 \\ & (g(x,y) \leq 0) \perp (u \geq 0) \end{aligned} \tag{MPEC}$$

en que $L(x,y,u) := f(x,y) + u^\top g(x,y)$ define al lagrangeano del problema.

P1. **(Propuesto)** Pruebe que si $(\overline{x}, \overline{y})$ es solución del problema BP y la condición de Slater para F se cumple en $\overline{x}$, entonces para todo $\overline{u} \in \Lambda(\overline{x}, \overline{y})$ dado por

$$\Lambda(\overline{x}, \overline{y}) := \left\{ u \geq 0 : \nabla_y L(\overline{x}, \overline{y}, u) = 0, u^\top g(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \right\},$$

el punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{u})$ es solución de MPEC.

P2. *a)* Considere el siguiente problema parametrizado por $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \min_{y_1, y_2} \ & y_1 \\ & y_1^2 - y_2 \leq x \\ & y_1^2 + y_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Obtenga la solución de este problema y sus multiplicadores $u_1, u_2 \geq 0$ (en caso de que existan) para $x \geq 0$. *Indicación:* Analice por separado $x = 0$ y $x > 0$.

b) Ahora, considerando el problema binivel

$$\begin{aligned} \min_{x \geq 0} \ & x \\ & y \in \Psi(x), \end{aligned}$$

explique por qué la hipótesis de Slater en la pregunta anterior es necesaria.

P3. Ahora, asuma que la condición de Slater se cumple para F para **todo** punto $x \in \mathcal{X}$ y sea $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{u})$ solución de MPEC. Pruebe que entonces $(\overline{x}, \overline{y})$ es solución de BP.