MA5701 Optimización no Lineal
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Tarea Control

Método de Penalización Externa
24 de junio de 2025

En esta tarea estudiaremos una forma de resolver problemas convexos con restricciones lineales:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} & f(x) \\ & Ax \le b \\ & Ex = e \end{aligned}$$

en que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, E \in \mathbb{R}^{p\times n}, e \in \mathbb{R}^p$. La idea del método de penalización externa es cambiar a un problema irrestricto, cambiando la función objetivo y penalizando no estar en el conjunto factible del problema original, para esto se da la siguiente definición

Definición 1 (Función de penalización)**.** *Una función continua $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice función de penalización si está dada por*

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(A_{i\bullet}x - b_i) + \sum_{j=1}^{p} \psi(E_{j\bullet} - e_j)$$

con φ, ψ continuas en $\mathbb{R}$ que cumplen:

(i) $y \le 0 \implies \varphi(y) = 0, y > 0 \implies \varphi(y) > 0$

(ii) $z = 0 \implies \psi(z) = 0, z \neq 0 \implies \psi(z) > 0$

Considere para esta tarea las siguientes funciones de penalización comunmente utilizadas:

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \max(0, y)^2 \\ \psi(z) &= z^2 \end{aligned}$$

El *algoritmo de penalización externa* viene entonces dado por

(0) Sean $k = 0, x_0 \in \mathbb{R}^n, \mu_0 > 0, \varepsilon > 0, \beta > 1$.

(1) Resolver el problema

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \{f(x) + \mu_k\alpha(x)\} \tag{P_k}$$

sea x_{k+1} la solución de P_k.

(2)
- Si $\mu_k\alpha(x_{k+1}) < \varepsilon$, parar.
- Si $\mu_k\alpha(x_{k+1}) \ge \varepsilon$, hacer $\mu_{k+1} = \beta\mu_k, k \leftarrow k + 1$ y volver a (1)

P1. Implemente los métodos de Nesterov y Gradiente Estocástico con paso constante a correr durante $N = 100$ iteraciones. La llamada del método debe ser del tipo

- `nesterov(f, gradf, x0, alpha, beta, N=100)`
- `sgd(f, gradf, x0, alpha, N=100)`

P2. Considere los siguientes problemas

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \; & x^2 + y^2 \\ & x + y + 100 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \; & (1-x)^{3/2} + 100(y - x^2)^2 \\ & x + y \leq 5 \\ & x - 5y = 2 \end{aligned}$$

Aplique el método de penalización para ambos con $\mu_0 = 1, \beta = 2, \varepsilon = 10^{-3}, (x_0, y_0) = (0,0)$ utilizando el método de Nesterov para el paso (1). Evalúe en cuántas iteraciones para el método de penalización.

P3. Para $n = 1000$, sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(50(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2 \right)$$

y considere el problema de minimizar $f(x)$ sujeto a $\sum_{i=1}^{n} x_i = n + 1$. Aplique el algoritmo de penalización utilizando `sgd` para el paso (1). Evalúe cuántas iteraciones toma el método en parar.