MA5701 Optimización no Lineal
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Control 2

Tiempo: 3:00
14 de junio de 2025

P1. Considere los polinomios de Chebyshev definidos recursivamente por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(x) &= 1 \\ \mathcal{T}_1(x) &= x \\ \mathcal{T}_k(x) &= 2x\mathcal{T}_{k-1}(x) - \mathcal{T}_{k-2}(x), \qquad \forall k \geq 2. \end{aligned}$$

Se puede obtener (no lo haga) la siguiente expresión explícita para $\mathcal{T}_k(x)$:

$$\mathcal{T}_k(x) = \begin{cases} \cos(k \arccos(x)), & x \in [-1,1] \\ \cosh(k \operatorname{arccosh}(x)), & x > 1 \\ (-1)^k \cosh(k \operatorname{arccosh}(-x)), & x < -1. \end{cases}$$

Además, se tiene que $\mathcal{T}_k$ es de grado k y que el coeficiente de mayor grado en T_k es 2^{k-1}

a) El objetivo de esta parte es probar que

$$\frac{1}{2^{k-1}}\mathcal{T}_k = \underset{\substack{\deg(P)=k \\ P \text{ mónico}}}{\operatorname{argmin}} \max_{x\in[-1,1]} |P(x)|.$$

Para ello, proceda como sigue:

I) (1 pt.) Obtenga y clasifique los valores extremos de $\mathcal{T}_k$ en $[-1,1]$.

II) (1 pt.) Hacia contradicción, sea ahora $w_k(x)$ polinomio mónico de grado k tal que su mayor valor absoluto en $[-1,1]$ es estríctamente menor que $\frac{1}{2^{k-1}}$. Defina

$$f_k(x) = \frac{1}{2^{k-1}}\mathcal{T}_k(x) - w_k(x)$$

y estudie el signo de f_k en los puntos extremos obtenidos anteriormente.

III) (1 pt.) Concluya.

b) (3 pt.) Considere la traslación lineal de $[\mu, L]$ a $[-1,1]$ dada por

$$t^{[\mu,L]}(x) = \frac{2x - (L+\mu)}{L-\mu}$$

y defina los polinomios desplazados de Chebyshev:

$$C_k^{[\mu,L]}(x) = \frac{\mathcal{T}_k(t^{[\mu,L]}(x))}{\mathcal{T}_k(t^{[\mu,L]}(0))}$$

los cuales han sido reescalados para que $C_k^{[\mu,L]}(0) = 1$. Se puede probar a partir de a) (no lo haga) que

$$C_k^{[\mu,L]} = \underset{\substack{\deg(P)=k \\ P(0)=1}}{\operatorname{argmin}} \max_{\lambda\in[\mu,L]} |P(\lambda)|.$$

Obtenga la siguiente fórmula recursiva para $C_k^{[\mu,L]}$:

$$\begin{aligned}
C_0^{[\mu,L]}(x) &= 1\\
C_1^{[\mu,L]}(x) &= 1 - \frac{2}{L+\mu}x\\
C_k^{[\mu,L]}(x) &= \frac{2\delta_k}{L-\mu}(L+\mu-2x)C_{k-1}^{[\mu,L]}(x) + \left(1 - \frac{2\delta_k(L+\mu)}{L-\mu}\right)C_{k-2}^{[\mu,L]}(x), \qquad (k \geq 2)
\end{aligned}$$

en que $\{\delta_k\}$ viene dado por

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{L-\mu}{L+\mu}\\
\delta_k &= -\frac{\mathcal{T}_{k-1}(t^{[\mu,L]}(0))}{\mathcal{T}_k(t^{[\mu,L]}(0))} = \frac{1}{2\frac{L+\mu}{L-\mu} - \delta_{k-1}}, \qquad (k \geq 2).
\end{aligned}$$

P2. Sea f una función cuadrática de tipo

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Hx - b^\top x \tag{1}$$

con H simétrica definida positiva de valores propios $0 < \mu = \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n = L$.

a) (2 pt.) Pruebe que, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, una secuencia $\{x_k\}_{k\geq 0}$ cumple

$$x_{k+1} \in x_0 + \langle \nabla f(x_0), \ldots, \nabla f(x_k)\rangle, \qquad \forall k \geq 0 \tag{2}$$

si y solo si los errores $\{x_k - x^*\}_{k\geq 0}$ pueden ser escritos como

$$x_k - x^* = P_k(H)(x_0 - x^*)$$

en que $P_k(\cdot)$ es una secuencia de polinomios tal que P_k es de grado k y $P(0) = 1$.
Indicación: Utilice el principio de inducción fuerte.

b) (2 pt.) El *método semi-iterativo de Chebyshev* define sus iteraciones $\{x_k\}$ de modo que

$$x_k - x^* = C_k^{[\mu,L]}(H)(x_0 - x^*).$$

Utilizando la recursión de P1.b, obtenga la siguiente fórmula explícita para el método:

$$x_k = \frac{2\delta_k}{L-\mu}((L+\mu)x_{k-1} - 2\nabla f(x_{k-1})) + \left(1 - 2\delta_k\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)x_{k-2}$$

c) (2 pt.) Concluya, de todo lo visto anteriormente, una propiedad de optimalidad del método semi iterativo de Chebyshev –con respecto a los métodos en la forma 2– sobre la clase $\mathcal{M}$ de funciones cuadráticas del tipo 1 con H de valores propios entre $0 < \mu$ y L.