MA5801 Análisis Convexo y Dualidad
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Benjamín Vera Vera

Examen Recuperativo

16 de diciembre de 2024

P1. Consideremos un *juego* entre N jugadores $i \in [N]$ los cuales eligen acciones $x_i \in X_i$ siendo X_i subconjunto compacto convexo de un evt. Denotaremos por x_{-i} a la combinación de acciones de todos los jugadores *salvo* la del jugador i. Sea $X = \prod_{i=1}^{N} X_i$ y para cada combinación (x_i, x_{-i}), supongamos que cada jugador tiene una utilidad $u_i(x_i, x_{-i}) \in \mathbb{R}$ la cual busca maximizar. Supondremos que las funciones $u_i(\cdot)$ son medibles acotadas y cuasicóncavas (ver auxiliar 4) pero no necesariamente continuas en ninguna de las variables. Diremos que un *equilibrio de Nash* asociado al juego $G = (X_i, u_i)_{i=1}^{N}$ es una tupla $x^* \in X$ tal que para todo $i \in [N]$, se cumple

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) = \max_{x_i' \in X_i} \left\{ u_i(x_i', x_{-i}^*) \right\}$$

En este problema estudiaremos la existencia de equilibrios de Nash en juegos con funciones de pago potencialmente discontinuas.

a) (1 pt) Para cada jugador i, considere la función de utilidad modificada siguiente

$$\underline{u}_i(x_i, x_{-i}) = \sup_{U} \inf_{x'_{-i} \in U} u_i(x_i, x'_{-i})$$

En que el supremo se toma sobre todas las vecindades abiertas de x_{-i} con respecto a la topología producto. Pruebe que dado $x_i \in X_i$ fijo, las funciones $\underline{u}_i(x_i, \cdot)$ son finitas y sci en X_{-i}.

b) (1 pt) Decimos que un jugador $i \in [N]$ *puede asegurar una utilidad* $\alpha \in \mathbb{R}$ en x^* si existe $\overline{x}_i \in X_i$ y una vecindad U de x_{-i}^* tal que para todo $x'_{-i} \in U$ se cumple

$$u_i(\overline{x}_i, x'_{-i}) > \alpha$$

Pruebe que el jugador $i \in [N]$ puede asegurar una utilidad estríctamente mayor a $\alpha \in \mathbb{R}$ en $x^* \in X$ ssi

$$\sup_{x_i \in X_i} \left\{ \underline{u}_i(x_i, x_{-i}^*) \right\} > \alpha$$

c) (1 pt) Consideremos $u : X \to \mathbb{R}^N$ la función vectorial que agrupa los costos u_i de los jugadores. Sea Γ la clausura del grafo de esta función en el espacio producto $X \times \mathbb{R}^N$, diremos que el juego $G = (X_i, u_i)_{i=1}^{N}$ es *better-reply secure* (en adelante BRS) si para $(x^*, u^*) \in \Gamma$ con x^* no equilibrio de Nash, exite un jugador $i \in [N]$ que puede asegurar una utilidad estrictamente mayor a u_i^* en x^*. Pruebe que si suponemos u_i continuas, el juego es BRS (en adelante no suponemos continuidad).

d) (1 pt) Suponga que el juego es BRS. Pruebe que si $(x^*, u^*) \in \Gamma$ y para todo $i \in [N]$ se tiene

$$\sup_{x_i in X_i} \left\{ \underline{u}_i(x_i, x_{-i}^*) \right\} \leq u_i^*$$

entonces x^* es equilibrio de Nash.

e) (1 pt) Dados $x, y \in X$, denotamos $\underline{u}(x, y) = (\underline{u}_1(x_1, y_{-1}), \ldots, \underline{u}_N(x_N, y_{-N}))$. Para $x \in X$ definamos

$$E(x) = \{(y, u) \in \Gamma : \underline{u}(x, y) \leq u\}$$

(en que $\leq$ denota orden usual por coordenadas en $\mathbb{R}^N$). Si $E = \bigcap_{x \in X} E(x)$, pruebe que si $E \neq \varnothing$, entonces un equilibrio de Nash x^* existe.

f) (1 pt) Demuestre que los $E(x)$ son compactos. Concluya que para concluir la existencia de un equilibrio, basta probar que para todo $F \subset X$ finito, existe $(\overline{x}, \overline{u}) \in \Gamma$ tal que

$$\forall x \in F : \underline{u}(x, \overline{x}) \leq \overline{u}$$

P2. (Minimización lineal por trozos) Sea el problema de minimizar la siguiente función lineal a trozos:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \max_{i=1,\ldots,m} (a_i^T x + b_i) \right\} \tag{P_1}$$

a) (1.5 pt) Encuentre el dual de este problema reformulándolo al siguiente problema equivalente

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m} \left\{ \max_{i=1,\ldots,m} y_i \right\}$$
$$a_i^T x + b_i = y_i, \forall i = 1, \ldots, m$$

b) (1.5 pt) Formule el problema de minimización lineal a trozos como un problema lineal y encuentre el dual de este LP. Relacione este dual con el obtenido en a)

c) (1.5 pt) Suponga que aproximamos la función objetivo en P_1 por la siguiente función suave

$$f_0(x) = \log\left(\sum_{i=1}^{m} \exp\big(a_i^T x + b_i\big) \right)$$

Y resolvemos el problema irrestricto siguiente

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \log\left(\sum_{i=1}^{m} \exp\big(a_i^T x + b_i\big) \right) \tag{P_2}$$

Sean p^*_{pwl} y p^*_{gp} los valores óptimos de P_1 y P_2 respectivamente. Pruebe que

$$0 \leq p^*_{\text{gp}} - p^*_{\text{pwl}} \leq \log(m)$$

d) (1.5 pt) Encuentre cotas similares para la diferencia entre p^*_{pwl} y el valor óptimo del problema siguiente

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\gamma} \log\left(\sum_{i=1}^{m} \exp\big(\gamma(a_i^T x + b_i)\big) \right)$$

Con $\gamma > 0$ parámetro. ¿Qué ocurre si hacemos crecer γ?