



Fase 1: Conceptualización

Integrantes:

Benjamín Cuello

Benjamín Salas

Fecha: 11/09/2025

Índice

Índice.....	1
Introducción.....	2
Maquina de Turing.....	3
7-tupla.....	3
La cinta.....	5
El Cabezal.....	6
Estados.....	7
Propuesta de máquina de Turing.....	8
Propuesta 7-tupla.....	9
Propuesta Estados.....	11
Diseño con Medidas aproximadas.....	14
Bibliografía.....	16

Introducción

La máquina de Turing es un modelo de cómputo que permite estudiar cómo, a partir de pasos simples, se pueden ejecutar procedimientos complejos. Su importancia radica en que demuestra que con un conjunto limitado de reglas y símbolos es posible representar algoritmos capaces de resolver problemas de distinta naturaleza. Esto la convierte en una de las herramientas más influyentes en la teoría de la computación y en la comprensión de los límites de lo que puede ser calculado.

En este taller se trabaja con la formalización de dos operaciones aritméticas: la suma y la resta. Para ello se emplea una codificación unaria basada en el alfabeto $\{1, \sqcup\}$. La elección del lenguaje unario responde a la necesidad de mantener una representación simple y directa, en la que cada marca simboliza una unidad y los espacios en blanco actúan como separadores. Con esto, el análisis de los cambios en la cinta se vuelve más claro y comprensible, sin necesidad de agregar complejidad extra.

El objetivo principal es diseñar un conjunto completo de reglas de transición que permitan transformar entradas expresadas en $\{1, \sqcup\}$, de modo que la máquina a desarrollar sea capaz de realizar sumas y restas mediante la lectura y escritura del cabezal. Para la resta se establece que, en los casos en que el sustraendo (B) sea mayor que el minuendo (A), el resultado se considere como 0, lo cual se representa con una cinta vacía. Además, se delimita el alcance de las operaciones al rango máximo de $9 + 9$ para la suma y $9 - 9$ para la resta.

Maquina de Turing

Una máquina de Turing es un modelo teórico que inventó Alan Turing para entender qué significa “calcular” o “hacer un algoritmo”.

Esta está compuesta por:

- Una **cinta** que almacena símbolos.
- Un **cabezal**
- Un **conjunto finito de estados**

El comportamiento de la máquina, se determina mediante una función de transición parcial que, para cada estado y símbolo leído, se indica: el símbolo a escribir, la dirección de movimiento del cabezal (izquierda o derecha y en algunos casos también se permite permanecer quieto) y el nuevo estado. Además la máquina se detiene cuando no existe una transición aplicable, es decir, si al detenerse está en un estado de aceptación, acepta la entrada y en caso contrario, rechaza.

7-tupla

Una máquina de Turing con una sola cinta puede definirse como una 7-tupla, es decir que este modelo matemático se describe usando 7 elementos. Su notación estándar es:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, s, b, F, \delta)$$

Cada elemento significa:

- 1) **Q**: Conjunto finito y no vacío de estados de la máquina. También incluye:
 - un estado inicial $s \in Q$.
 - un conjunto de estados de aceptación $F \subseteq Q$
- 2) **Σ** : Es el alfabeto de entrada, es decir, el conjunto de símbolos que forman las palabras que se entregan como entrada a la máquina. En donde no se incluye el blanco.
- 3) **Γ** : Es el alfabeto de la cinta, que contiene todos los símbolos que la máquina puede usar durante la ejecución. En donde:
 - Debe cumplirse: $\Sigma \subseteq \Gamma$.
 - Contiene además el símbolo blanco b .
- 4) **s**: Es el estado inicial de la máquina, con $s \in Q$.
- 5) **b**: Es el símbolo blanco, representa la celda vacía y rellena las posiciones infinitas de la cinta que no forman parte de la entrada. Este pertenece a Γ pero no a Σ : $b \in \Gamma \setminus \Sigma$
- 6) **F**: Es el conjunto de estados de aceptación, puesto que si la máquina entra en alguno de estos estados y se detiene, se dice que la palabra es aceptada. Es subconjunto de Q : $F \subseteq Q$.

7) δ : Es la función de transición, que define un conjunto de instrucciones:

$$Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$$

Cada instrucción parte de dos datos:

- el estado actual de la máquina (q),
- y el símbolo que está leyendo el cabezal en la celda actual (X).

Con esos dos elementos, la máquina decide tres cosas:

- A qué nuevo estado pasar (p),
- Qué símbolo escribir en la celda (Y),
- Hacia dónde mover el cabezal: una posición a la izquierda (L) o una a la derecha (R).

La cinta

La cinta es el componente que funciona como memoria de la máquina de Turing. Se representa como una secuencia infinita de celdas, cada una de las cuales puede contener un único símbolo del alfabeto de la cinta (Γ). La cinta es infinita, debido a que fue pensada para que nunca se quedará sin espacio para continuar el cálculo, sin importar el tamaño de la entrada o los pasos necesarios para resolver el problema.

En el modelo estándar, la cinta está dividida en casillas idénticas y alineadas, de manera que el cabezal pueda situarse en una sola posición a la vez. Inicialmente, todas las celdas contienen el símbolo blanco (b), excepto un número finito de celdas consecutivas donde se escribe la entrada. A partir de ese punto, la máquina puede sobrescribir símbolos, borrar información escribiendo blancos y desplazarse en ambas direcciones sin límite.

Características:

- Cada celda de la cinta contiene exactamente un símbolo de Γ .
- La entrada siempre se coloca en un segmento finito de la cinta, mientras que el resto queda rellenado con el blanco.
- Al actuar como una memoria lineal ilimitada, la cinta cumple un papel similar al de la memoria RAM en un computador moderno, aunque con una estructura mucho más simple.

La cinta puede construirse con cartón, papel, plástico u otros materiales. Dependiendo de su composición, se utilizan distintos medios de escritura, como tinta, lápiz o marcador, para colocar y modificar los símbolos en cada celda. En las primeras versiones de la máquina de Turing se empleaba una cinta de papel, sin embargo lo importante no es el material en sí, sino sus propiedades fundamentales: debe considerarse infinita, estar dividida en celdas visibles y permitir que el cabezal pueda leer y escribir símbolos de manera ordenada.

El Cabezal

El cabezal es el componente que interactúa directamente con la cinta. Su función principal es leer el símbolo que se encuentra en la celda actual, escribir un nuevo símbolo (reemplazando el anterior) y luego moverse una posición hacia la izquierda o hacia la derecha, de acuerdo con lo indicado por la función de transición de la máquina.

Características:

- El cabezal solo puede estar en una celda a la vez, nunca en dos al mismo tiempo.
- Es capaz de leer el contenido de la celda actual y usar esa información, junto con el estado en el que se encuentra la máquina, para decidir la siguiente acción.
- Puede sobrescribir lo que hay en la celda, ya sea dejando el mismo símbolo o reemplazándolo por otro del alfabeto de la cinta (Γ).
- Luego de escribir, se mueve exactamente una casilla hacia la izquierda (L) o hacia la derecha (R). Y en algunas variantes, también puede permanecer en la misma celda.

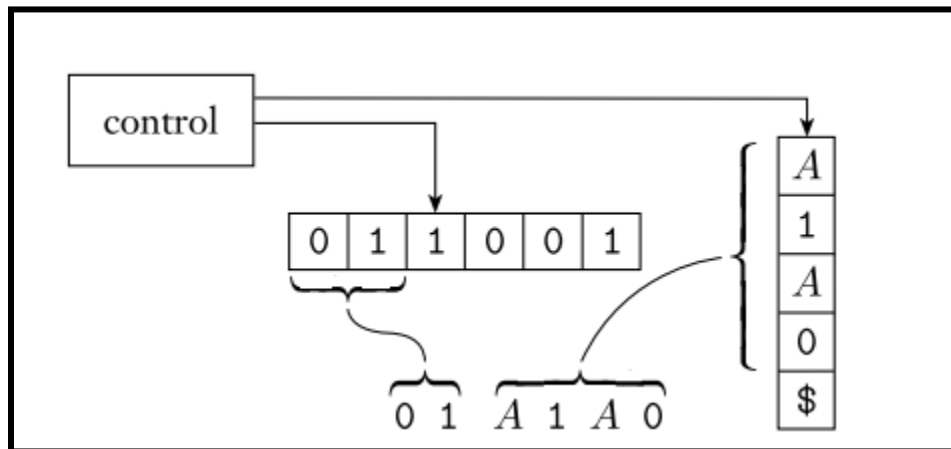
En las primeras versiones de la máquina de Turing, se pensaba en el cabezal como un dispositivo mecánico de escritura, parecido a la punta de una máquina de escribir, que podía usar tinta, lápiz o marcador para modificar la cinta. Sin embargo en la actualidad se pueden usar sensores o incluso señales electrónicas, dependiendo del material elegido para la cinta.

Estados

Los estados representan la “condición interna” de la máquina de Turing en un momento dado. Funcionan como una memoria de control que indica qué debe hacer la máquina cuando lee un símbolo en la cinta.

Características

- El conjunto de estados se denota por Q , y siempre es finito.
- Existe un estado inicial, que es donde comienza la computación.
- Puede haber uno o varios estados de aceptación (conjunto F), que indican que la máquina debe detenerse aceptando la entrada.
- Cada estado, combinado con el símbolo que lee el cabezal, determina mediante la función de transición qué acción realizar: qué escribir, hacia dónde moverse y a qué nuevo estado cambiar.



Propuesta de máquina de Turing

La idea es construir la representación física de la máquina de Turing utilizando componentes electrónicos. El sistema tendrá como controlador principal un Arduino Uno, cuya función es implementar la lógica de transición definida en la tabla de estados de la máquina.

Representación de la cinta

La cinta estará formada por una hilera de LEDs. Cada LED representa una celda de la cinta:

- LED encendido = símbolo "1"
- LED apagado = símbolo en blanco (□)

El número de LEDs permitirá trabajar con entradas suficientemente largas para realizar pruebas de suma y resta en unario, tomando en cuenta que la mayor suma a realizar es $9 + 9$. Además, se incorporarán resistencias de 220–330 Ω para proteger los LEDs.

Cabezal de lectura y escritura

El cabezal se implementará como un carro móvil que se desplaza sobre un riel lineal (se tiene pensado un Linear rail MGN12 o construir alguna estructura). Este carro incluirá:

- Un sensor LDR con resistencia de 10 k Ω , que detectará si el LED de la celda actual está encendido o apagado.
- La conexión directa con el Arduino, que escribirá encendiendo o apagando el LED correspondiente.
- Un motor paso a paso 28BYJ-48, controlado mediante el driver ULN2003, encargado de mover el cabezal una posición a la izquierda o derecha en cada paso lógico.

Se tiene pensado utilizar la impresora 3D para crear dos interruptores que marcan los extremos de la cinta.

Representación de los estados

El conjunto de estados de la máquina será indicado mediante un grupo de LEDs adicionales que se encenderán de acuerdo con el estado activo en cada momento. Además, se incluirán botones o switches que permitan avanzar un paso, reiniciar y/o seleccionar la operación.

Alimentación y montaje

Todos los componentes estarán conectados a través de una protoboard y se alimentarán con una fuente externa de 5 V, tanto para el motor como para los LEDs. El armado se realizará sobre una base de madera, que servirá como soporte para la placa, los LEDs, el riel y los controles.

Propuesta 7-tupla

- Suma en unario

Condiciones adoptadas: movimientos {L, R, S} (S = quieto).

Separador: \sqcup

Blanco real de la cinta: B

Definición:

- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_f\}$
- $\Sigma = \{1, \sqcup\}$
- $\Gamma = \{1, \sqcup, B\}$ (con $B \notin \Sigma$)
- $q_0 = q_0$
- $B = B$
- $F = \{q_f\}$

Estrategia

Sea A el primer número en unario (bloque inicial de 1) y B el segundo, separados por \sqcup . La máquina traslada uno por uno los 1 de B al final de A: Avanza sobre A hasta el separador, dentro de B, borra un 1, retrocede hasta el separador y lo convierte en 1 para pegar ese símbolo al final de A, repite. Si al entrar en B ya no hay 1, la suma terminó y se acepta.

Transiciones δ

1. Buscar el separador y entrar a B

$\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, R)$

$\delta(q_0, \sqcup) = (q_1, \sqcup, R)$

2. En B: si hay 1, tomarlo; si no hay, aceptar

$\delta(q_1, 1) = (q_2, \sqcup, L)$

$\delta(q_1, \sqcup) = (q_f, \sqcup, S)$

3. Volver al separador y pegar el 1 al final de A

$\delta(q_2, 1) = (q_2, 1, L)$

$\delta(q_2, \sqcup) = (q_0, 1, R)$

- **Resta en unario**

Condiciones adoptadas: {L, R, S} (S = quieto).

Separador: \sqcup

Blanco real de la cinta: B

Definición:

- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$
- $\Sigma = \{1, \sqcup\}$
- $\Gamma = \{1, \sqcup, B\}$ (con $B \notin \Sigma$)
- $q_0 = q_0$ (estado inicial)
- $B=B$
- $F = \{q_6, q_8\}$

Estrategia

Sea A el primer número en unario (bloque inicial de 1) y B el segundo número en unario, separados entre sí por un símbolo en blanco \sqcup .

La máquina sigue este procedimiento: primero se desplaza hacia la derecha hasta encontrar el separador \sqcup . Una vez dentro de la parte que corresponde a B, borra un 1. Luego regresa a la zona de A y borra también un 1. Este ciclo se repite, emparejando y eliminando unos de ambos lados, hasta que B queda vacío; en ese momento la máquina se detiene y acepta, dejando en la cinta los 1 que corresponden al resultado de $A - B$.

Si durante este proceso, al intentar borrar en A ya no hay más 1 disponibles pero todavía quedan en B, significa que B era mayor que A. En ese caso, la máquina borra todo el contenido y deja la cinta en blanco, lo que representa el resultado 0.

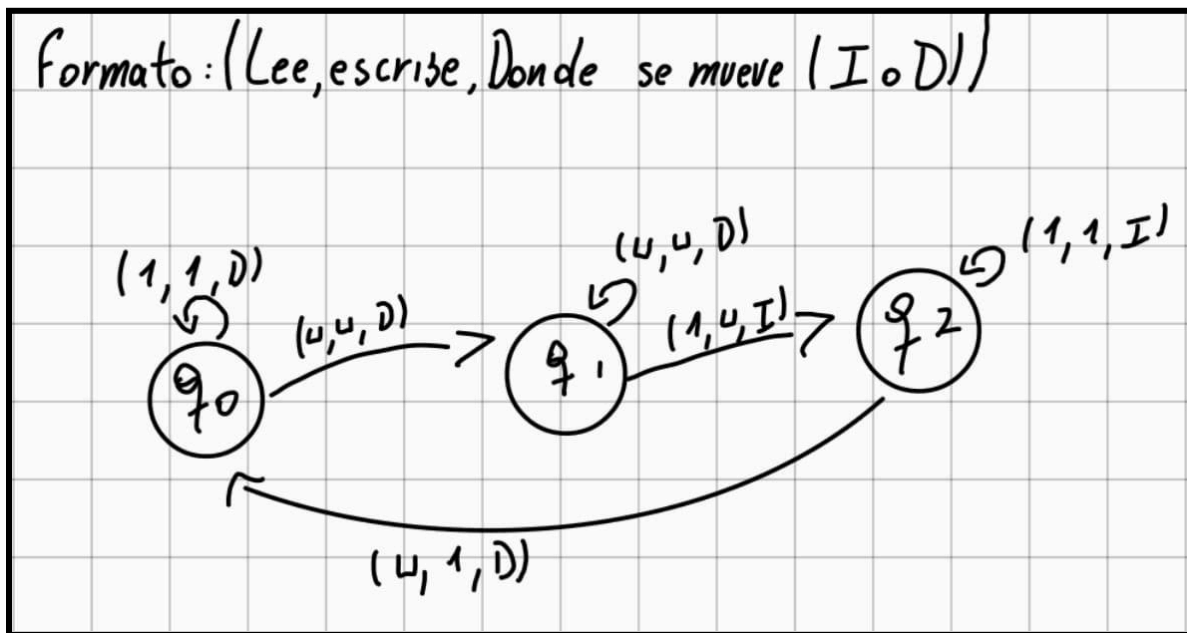
Transiciones δ

<p>1) Buscar el separador y entrar a B $\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, R)$ $\delta(q_0, _) = (q_1, _, S)$ $\delta(q_1, _) = (q_2, _, R)$</p> <p>2) En B: si hay 1, borrarlo; si no hay, aceptar $\delta(q_2, 1) = (q_3, _, L)$ $\delta(q_2, _) = (q_6, _, S)$</p> <p>3) Volver desde B hasta el separador para cruzar a A $\delta(q_3, 1) = (q_3, 1, L)$ $\delta(q_3, _) = (q_4, _, L)$</p>	<p>4) En A: intentar borrar un 1 de A $\delta(q_4, 1) = (q_5, _, R)$ $\delta(q_4, _) = (q_7, _, R)$</p> <p>5) Volver hacia B para repetir ciclo $\delta(q_5, 1) = (q_5, 1, R)$ $\delta(q_5, _) = (q_2, _, R)$</p> <p>6) Barrido a cero (resultado 0) $\delta(q_7, 1) = (q_7, _, R)$ $\delta(q_7, _) = (q_7, _, R)$ $\delta(q_7, B) = (q_8, B, S)$</p>
---	---

Propuesta Estados

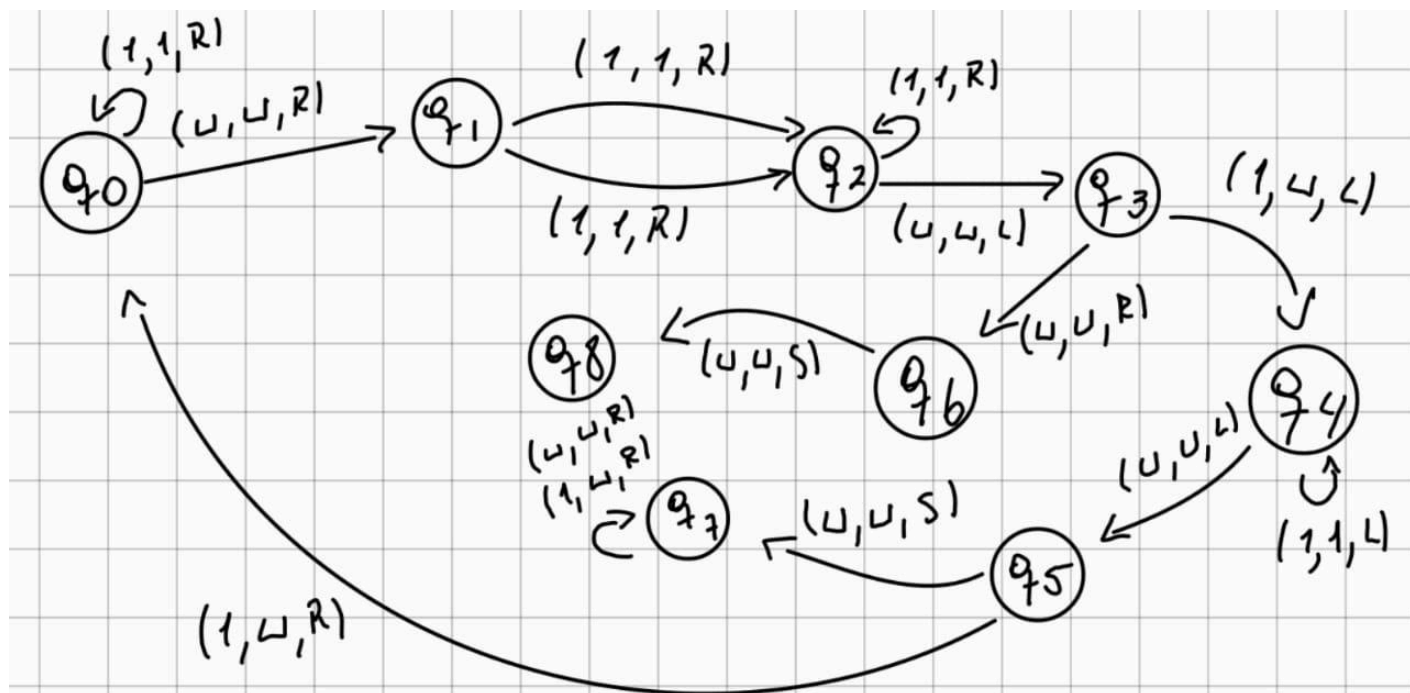
Para la suma:

Estado	Lee	Escribe	Mueve	Nuevo estado
q0	1	1	R	q0
q0	_	_	R	q1
q1	1	_	L	q2
q1	_	_	R	q1
q2	1	1	L	q2
q2	_	1	R	q0



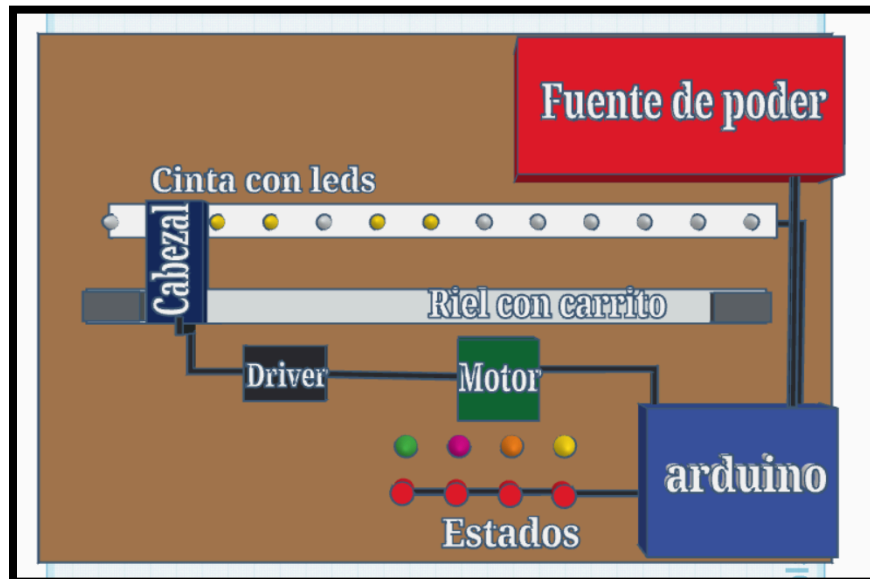
Para la resta:

Estados	Lee	Escribe	Mueve	Nuevo estado
q0	1	1	R	q0
q0	␣	␣	R	q1
q1	1	1	R	q2
q1	␣	␣	R	q2
q2	1	1	R	q2
q2	␣	␣	L	q3
q3	1	␣	L	q4
q3	␣	␣	R	q6
q4	1	1	L	q4
q4	␣	␣	L	q5
q5	1	␣	R	q0
q5	␣	␣	S	q7
q6	␣	␣	S	q8
q7	␣	␣	R	q7
q7	1	␣	R	q7



Diseño con Medidas aproximadas

Diseño simple realizado en tinkercad:

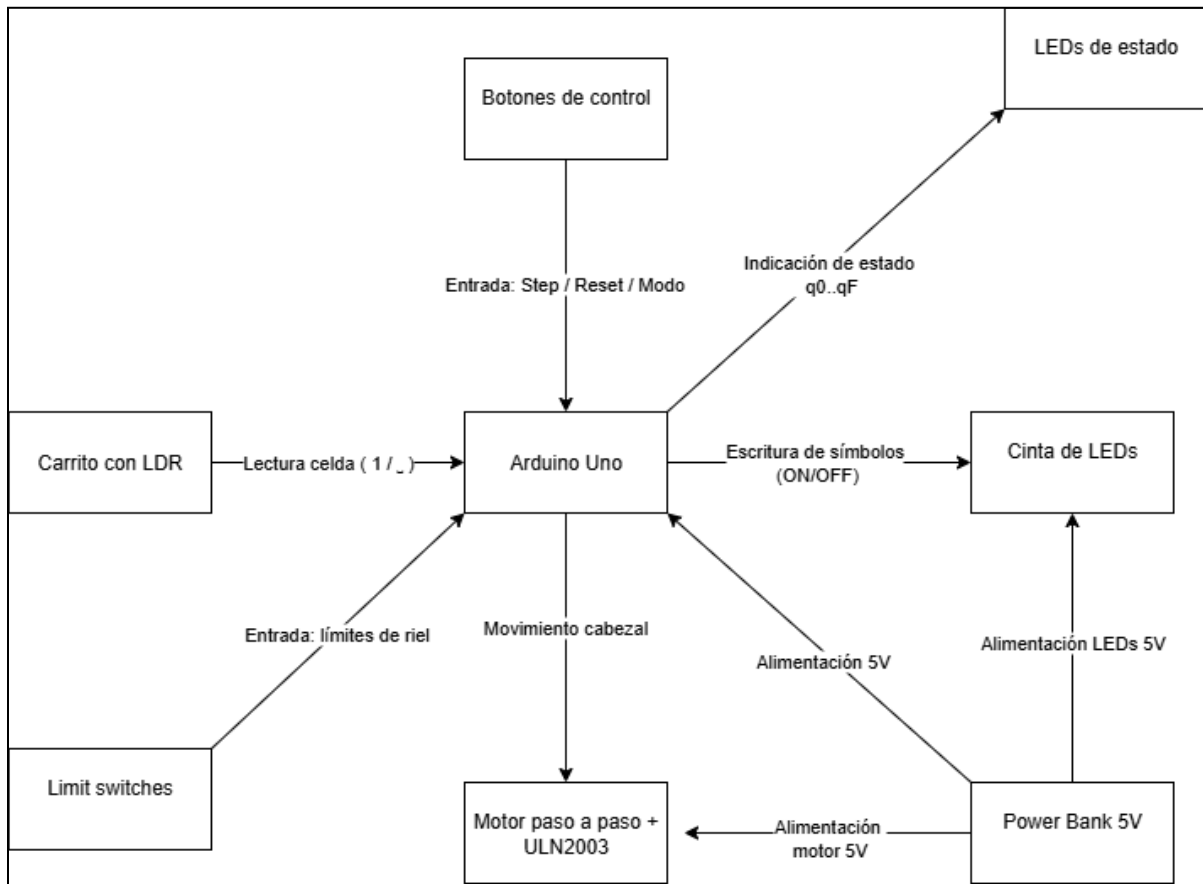


[Link a Tinkercad](#)

1. **Base de montaje (madera):** 300 mm × 200 mm × 5 mm
2. **Riel lineal MGN12:** 250 mm × 12 mm × 8 mm
3. **Carrito (slider):** 20 mm × 20 mm × 8 mm
4. **Motor paso a paso 28BYJ-48:** 28 mm × 28 mm × 20 mm
5. **Driver ULN2003 (placa):** 30 mm × 20 mm × 5 mm
6. **Arduino UNO:** 68 mm × 53 mm × 15 mm
7. **Limit switches (fin de carrera):** 20 mm × 10 mm × 5 mm

Diagrama de bloques

Este diagrama, muestra el prototipo de como se espera que funcione nuestra propuesta de máquina de Turing.



Bibliografía

- Sipser, M. (2013). *Introduction to the theory of computation* (3rd ed., pp. 136–138). Cengage Learning.
- Rosen, K. H. (2012). *Discrete mathematics and its applications* (7th ed., pp. 888–890). McGraw-Hill.
- Vilca Gutiérrez, C. F. (2016). *Máquinas de Turing y sus aplicaciones*. Revista Boliviana de Informática, 9(1), 27–39.
- Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE). (s.f.). *Capítulo 8. Introducción a las Máquinas de Turing*. Curso Propedéutico de Ciencias Computacionales.
- Psicología y Mente. (s.f.). *La máquina de Turing: qué es y cómo funciona*. Psicología y Mente.
- Salavatipour, M. R., & Friggstad, Z. (2019). *Complexity theory lecture notes: Lecture 1 — Introduction and Turing machines* (pp. 1-2). Department of Computing Science, University of Alberta.