La recherche du meilleur itinéraire que ce soit en distance, en temps ou en coût d'un point à un autre peut être modélisée par la recherche du plus court chemin dans un graphe.

Par exemple dans un réseau, après le protocole de routage OSPF, la recherche d'un chemin d'un routeur A à un routeur B, en empruntant le chemin dont la somme des coûts sera la plus petite possible, relève de l'algorithme de Dijkstra.

Dans ce TD, on s'intéresse à la recherche d'un plus court chemin dans un graphe entre deux sommets donnés.

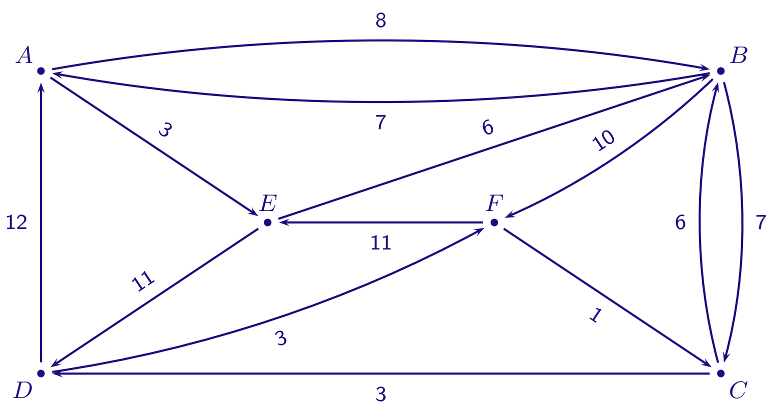
1 Graphe pondéré

1.1 Définition

Définition :
On appelle *graphe pondéré*, un graphe (orienté ou non) dont chaque arête a est affectée d'un nombre appelé poids P_a.

En terminale, on n'étudie que le cas particulier où **les poids de tous les arcs sont des réels positifs**.

Exemple : Le graphe suivant représente un réseau routier (avec des sens interdits) ; les poids indiqués représentent les distances.



1.2 Longueur d'un chemin

Définition :
Soit $C(x, y)$ un chemin dans un graphe pondéré G du sommet x vers le sommet y. Le poids de ce chemin est égale à la somme des poids de chacun arcs (ou de chacune des arêtes) qui le constituent.

Remarque :
- On parle de poids d'un chemin pour qu'il n'y ait pas de confusion avec la longueur du chemin.
- Cette définition généralise la définition de la longueur d'un chemin dans un graphe non pondéré, il suffit d'attribuer un poids égal à 1 à chaque arête du graphe.

Exemple : reprenons le graphe précédent, et cherchons l'itinéraire le plus court de A à F.

2 Algorithme de Dijkstra

E. W. Dijkstra (1930-2002) a proposé en 1959 un algorithme qui permet de calculer le plus court chemin entre un sommet particulier et tous les autres dans un graphe pondéré dont tous les poids sont positifs.

Propriété :
Soit G un graphe *connexe, pondéré* dont les arêtes sont pondérées par des nombres *positifs*.
On nomme $\{S_1, ...S_n\}$ la liste de ses sommets.
On recherche le chemin de poids minimal reliant S_1 à S_n.
Initialisation :

- On affecte S_1 du poids 0 et tous les autres sommets d'un poids ∞
- Les sommets adjacents à S_1 sont affectés du poids de l'arête les reliant à S_1, ainsi que de l'étiquette S_1.
- S_1 est maintenant traité.
- Soit S le sommet affecté du poids de chemin minimal parmi les sommets adjacents à S_1.

Traitement : Tant que tous les sommets n'ont pas été traités.

- On affecte tous les sommets S_k non traités adjacents à S du poids suivant

$$P_k = \text{ poids de l'arête reliant } S_k \text{ à } S \; + \text{ poids affecté à } S$$

Si et seulement si P_k est inférieur au poids précédent affecté à S_k

- Dans ce cas, on adjoint au sommet S_k l'étiquette S, S est maintenant traité.
- Le sommet affecté du poids de chemin minimal est alors le nouveau sommet S

Sortie

- L'algorithme de Dijkstra fournit les longueurs des plus courts chemins du sommet origine aux différents sommets.
- Pour déterminer le plus court chemin du sommet origine à un sommet S_1, il suffit de remonter la liste des prédécesseurs en partant de S_n.

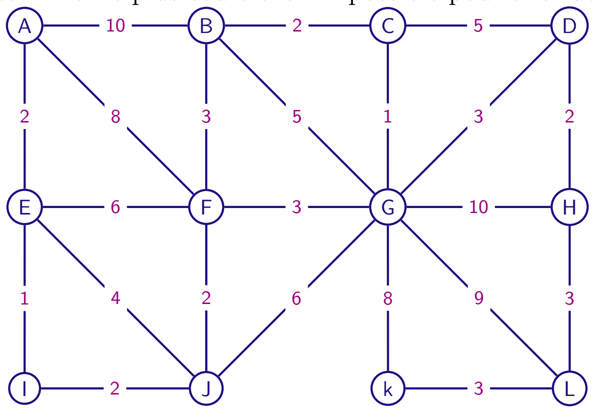
Exemple : reprenons le graphe précédent, et cherchons l'itinéraire le plus court de A à F.
Pour appliquer simplement l'algorithme de Dijkstra, on va remplir le tableau suivant : la première ligne contient les noms des différents sommets (le sommet de départ est le plus à gauche et celui d'arrivée est le plus à droite)

A	B	C	D	E	F	Sommets traités

3 Exercices

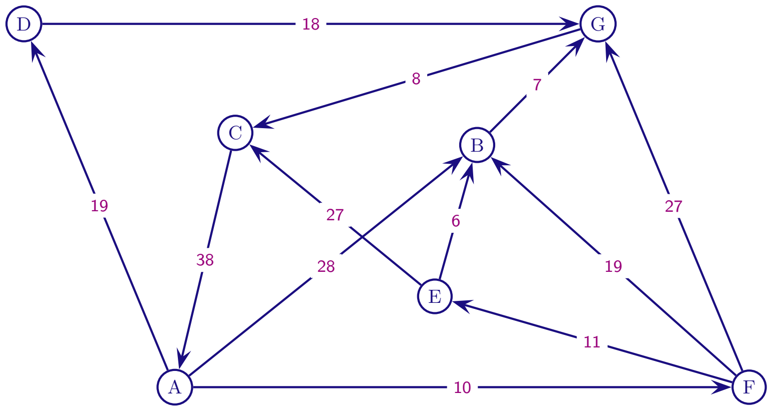
Exercice n° 1.

Le graphe ci-dessous indique les différentes liaisons entre plusieurs lieux. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres séparant les différents lieux.
En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin possible pour aller de A à L.



Exercice n° 2.

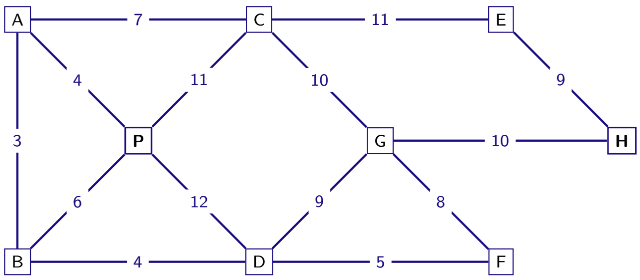
Le graphe pondéré ci-dessous, donne en minutes, les durées moyennes des parcours entre A et C en tenant compte des sens uniques.



Un automobiliste doit se rendre de A à C, déterminer le trajet le plus rapide.
Le retour sera-t-il plus rapide que l'aller ?

Exercice n° 3.

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'un quartier. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.



Un candidat aux élections municipales se trouve dans sa permanence située en zone P quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone H.

1. Quel est le nombre minimal de voies d'accès principales que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous ?
2. Le poids des arêtes du graphe précédent donne, en minutes, les durées moyennes des trajets existants entre les différents lieux :
   En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.
   Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?