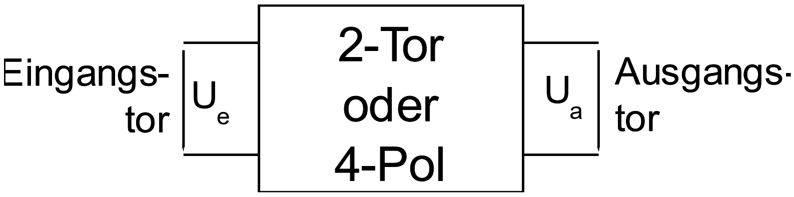
SYT: passive Filter

1 Einführung

Der Frequenzgang von Filtern wird typischerweise mit Bodediagrammen dargestellt. Diese haben eine logarithmische Frequenzachse, über die der Amplitudengang in dB und der Phasengang aufgetragen wird.

Grundsätzlich wird bei der Berechnung der Filter immer davon ausgegangen, dass es sich bei der Quelle am Eingang um eine ideale Spannungsquelle (R_i=0Ω) handelt und dem Ausgang kein Strom entnommen wird (hochohmige Last $R_a \rightarrow \infty$)

1.1 Übertragungsfunktion



Die Spannungsverstärkung ist bei einem Filter eine frequenzabhängige Funktion, die sich **Übertragungsfunktion** nennt.

$$H(j\omega) = \frac{\underline{U_a}}{\underline{U_e}}$$

Die komplexe Funktion kann in Real- und Imaginärteil oder in Betrag und Winkel aufgeteilt und grafisch veranschaulicht werden.

$$H(j\omega) = Re\{H(j\omega)\} + j \cdot Im\{H(j\omega)\} = |H(j\omega)| < arg\{H(j\omega)\}$$

1.2 Filterarten

Passive Filter: bestehen aus R, C, L

Aktive Filter: mit OPV, Integrierer, Differenzierer, PID-Regler

Digitale Filter: analog-digital Konverter (ADC), Rechenalgorithmen, digital-analog-Konverter (DAC)

Die Ordnung des Filters gibt an, aus wie vielen Energiespeichern (Blindwiderständen) ein Filter besteht. Filter 1. Ordnung haben entweder nur eine Kapazität oder eine Induktivität.

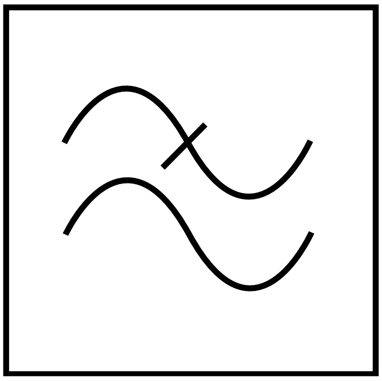
2 RC-Filter

Im Folgenden werden RC-Filter 1. Ordnung betrachtet. Also Kombinationen aus einem Kondensator und ein oder mehrere Widerstände.

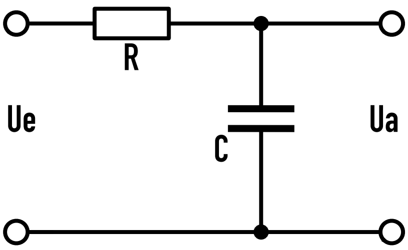
2.1 Tiefpass

Engl: low pass filter

Symbol:



Schaltung:



Die Schaltung kann durch das Verhalten bei **extremen Frequenzen** überprüft werden:

$$\underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\omega \to 0: X_C \to \infty \Rightarrow LL \Rightarrow U_a = U_e \Rightarrow |H(j\omega)| = 1 = 0dB$$

$$\omega \to \infty: X_C \to 0 \Rightarrow KS \Rightarrow U_a = 0 \Rightarrow |H(j\omega)| = 0 = -\infty dB$$

Die **Übertragungsfunktion** ist ein Spannungsteiler, der hier durch das Erweitern mit dem gemeinsamen Nenner vereinfacht wurde:

$$\boldsymbol{H(j\omega)} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} = \boldsymbol{\frac{1}{1 + j\omega RC}}$$

Bei der **Grenzfrequenz** ist der Realteil der Übertragungsfunktion gleich dem Betrag des Imaginärteils:

$$Re\{H(j\omega_g)\} = |Im\{H(j\omega_g)\}|$$

Somit muss für den **Winkel** gelten:

$$arg\{H(j\omega_g)\} = \pm 45°$$

$$\underline{B} = \frac{\underline{Z}}{\underline{N}} = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{N}|} \angle arg(\underline{Z}) - arg(\underline{N})$$

$$arg\{H(j\omega_g)\} = \pm 45° = 0° - \mp 45°$$

Auch der Nenner muss einen Winkel von ±45° haben und somit muss dessen Re=|Im| sein:

$$1 = \omega_g RC$$

$$\boldsymbol{\omega_g = \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{RC}$$

Auch das **konjugiert-komplex Erweitern** und das Trennen in Re- und Im-Teil führt zum selben Ergebnis:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1 - j\omega RC}{1 - j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j\frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$Re\{H(j\omega_g)\} = |Im\{H(j\omega_g)\}|$$

$$\frac{1}{1 + \omega_g^2 R^2 C^2} = \frac{\omega_g RC}{1 + \omega_g^2 R^2 C^2} \quad | \cdot (1 + \omega_g^2 R^2 C^2)$$

$$1 = \omega_g RC$$

$$\boldsymbol{\omega_g = \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{RC}$$

Der Zusammenhang zwischen ω_g und τ gilt für alle Filter 1. Ordnung also auch RL-Filter.

Die **normierte Form** bezieht sich nur noch auf die Grenzfrequenz (enthält kein R, C, L mehr) indem $RC = \frac{1}{\omega_g}$ in $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC}$ eingesetzt wird:

$$\boldsymbol{H(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} = \frac{1}{1 + j\frac{2\pi f}{2\pi f_g}} = \boldsymbol{\frac{1}{1 + j\frac{f}{f_g}}}$$

Der Grenzwert bei **sehr tiefen Frequenzen** f → 0 ($f < f_g/100$):

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{0}{f_g}} = \frac{1}{1+j0} = \frac{1}{1} = 1\measuredangle 0° \Rightarrow 0\text{dB}\measuredangle 0°$$

Der Grenzwert bei **sehr hohen Frequenzen** f → ∞ ($f > f_g*100$):

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{f}{f_g}} \cdot \frac{\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}} = \frac{\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}+j\frac{1}{f_g}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+j\frac{1}{f_g}} = \frac{0}{0+j\frac{1}{f_g}} = \frac{0}{j\frac{1}{f_g}} = 0\measuredangle -90° \Rightarrow -\infty\text{dB}\measuredangle -90°$$

Der **Betrag** kann mit dem Satz von Pythagoras errechnet werden

$$|H(j\omega)| = \left|\frac{1}{1 + j\frac{f}{f_g}}\right| = \frac{|1|}{\left|1 + j\frac{f}{f_g}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^2}}$$

und als Spannungsverhältnis auch in dB ausgedrückt werden.

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot lg\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^2}}\right) dB$$

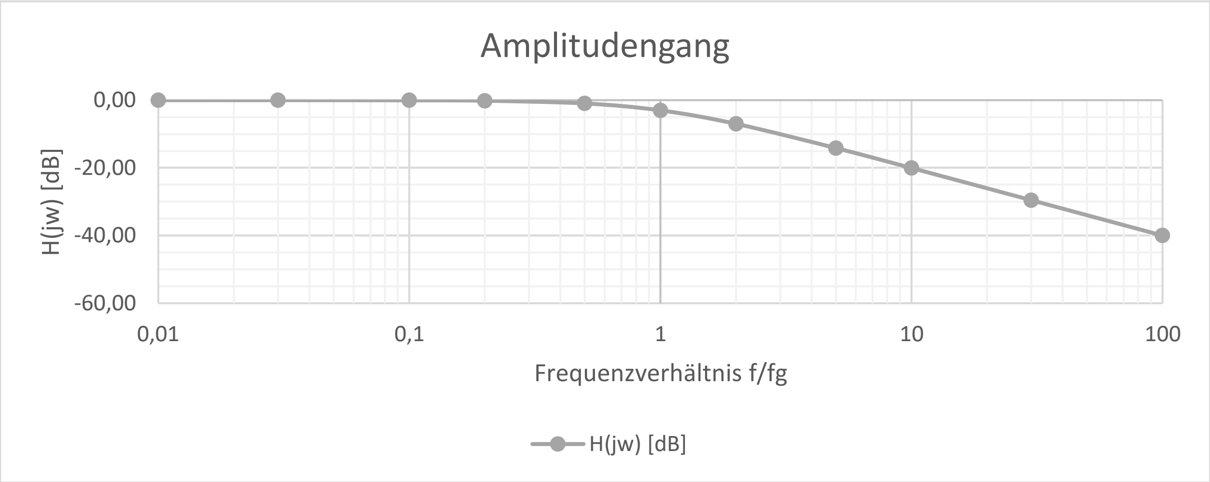
Der **Winkel** kann über die beiden Katheten Im und Re berechnet werden:

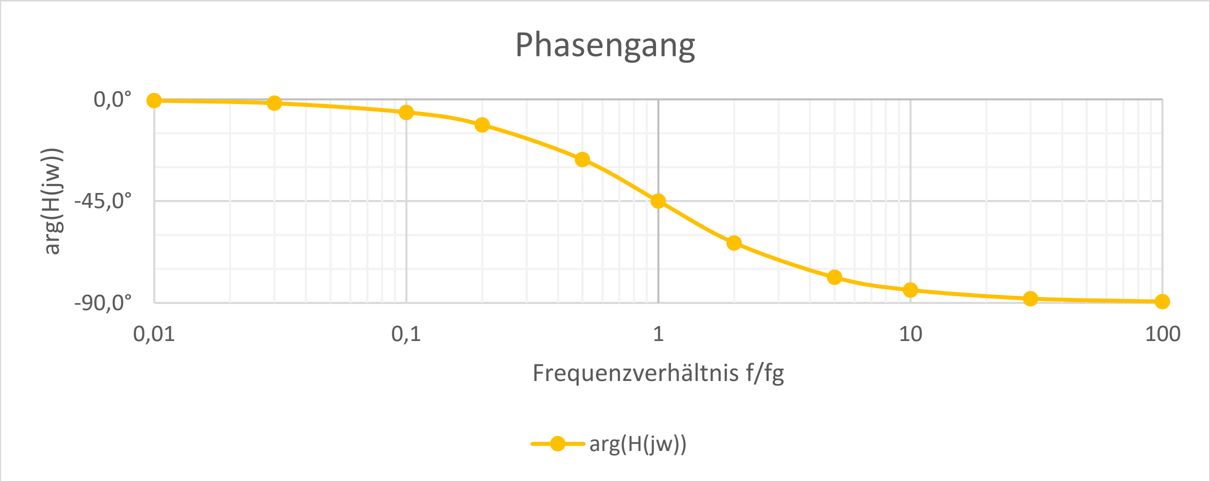
$$arg\{H(j\omega)\} = arg(1) - arg\left(1 + j\frac{f}{f_g}\right) = 0° - arctan\left(\frac{f}{f_g}\right) = -arctan\left(\frac{f}{f_g}\right)$$

In der **Wertetabelle** für das Bodediagramm wurde bewusst 2 (1, 3, 10) bzw. 3 (1, 2, 5, 10) logarithmisch gleichverteilte Werte pro Dekade eingefügt.

Das **Bodediagramm** besteht immer aus dem Amplitudengang und dem Phasengang, die typischerweise unmittelbar übereinander dargestellt werden.

	Tiefpass		
f/fg	H(jw)	H(jw) [dB]	arg(H(jw))
0,01	1,000	0,00	-0,6°
0,03	1,000	0,00	-1,7°
0,1	0,995	-0,04	-5,7°
0,2	0,981	-0,17	-11,3°
0,5	0,894	-0,97	-26,6°
1	0,707	-3,01	-45,0°
2	0,447	-6,99	-63,4°
5	0,196	-14,15	-78,7°
10	0,100	-20,04	-84,3°
30	0,033	-29,55	-88,1°
100	0,010	-40,00	-89,4°





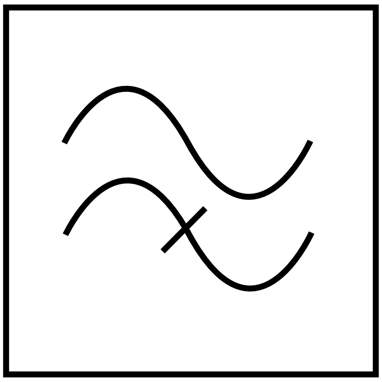
Folgende Bereiche werden unterschieden:

- Durchlassbereich: 0dB; ca. 0°
- Grenzfrequenz: -3dB=>v_U=1/Wurzel(2); -45°; R=|X_C|
- Sperrbereich: -20dB/Dekade=-6dB/Oktave
  => Spannungsverhältnis 1/10 / 10-fachen Frequenz; ½ / Oktave
  ca. -90°

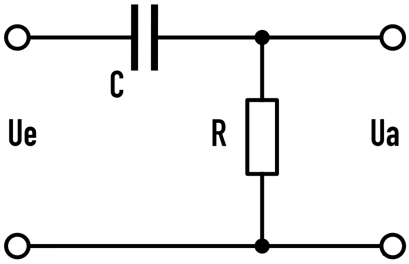
2.2 Hochpass

Engl: high-pass filter

Symbol:



Schaltung:



Die **Übertragungsfunktion** ist ein Spannungsteiler, der hier durch das Erweitern mit dem gemeinsamen Nenner vereinfacht wurde:

$$\boldsymbol{H(j\omega)} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} = \frac{\boldsymbol{j\omega RC}}{\boldsymbol{1 + j\omega RC}}$$

Bei der **Grenzfrequenz** ist der Realteil der Übertragungsfunktion gleich dem Betrag des Imaginärteils:

$H(j\omega)$Somit muss für den **Winkel** gelten:

$$arg\{H(j\omega_g)\} = \pm 45°$$

$$\underline{B} = \frac{\underline{Z}}{\underline{N}} = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{N}|} \angle arg(\underline{Z}) - arg(\underline{N})$$

$$arg\{H(j\omega_g)\} = \pm 45° = 90° - \pm 45°$$

Auch der Nenner muss einen Winkel von ±45° haben und somit muss dessen Re=|Im| sein:

$$1 = \omega_g RC$$

$$\boldsymbol{\omega_g} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{RC}$$

Auch das **konjugiert-komplex Erweitern** und das Trennen in Re und Im-Teil führt zum selben Ergebnis:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1 - j\omega RC}{1 - j\omega RC} = \frac{j\omega RC + \omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j\frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$Re\{H(j\omega_g)\} = |Im\{H(j\omega_g)\}|$$

$$\frac{{\omega_g}^2R^2C^2}{1+\omega^2R^2C^2}=\frac{\omega_g RC}{1+\omega^2R^2C^2} \quad |*(1+\omega^2R^2C^2)$$

$${\omega_g}^2R^2C^2=\omega_g RC \quad | : (\omega_g RC)$$

$$1=\omega_g RC$$

$$\boldsymbol{\omega_g=\frac{1}{\tau}}=\frac{1}{RC}$$

Der Zusammenhang zwischen ω_g und τ gilt für alle Filter 1. Ordnung also auch RL-Filter.

Die **normierte Form** bezieht sich nur noch auf die Grenzfrequenz (enthält kein R, C, L mehr) indem $RC=\frac{1}{\omega_g}$ in $H(j\omega)=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$ eingesetzt wird:

$$\boldsymbol{H(j\omega)}=\frac{j\frac{\omega}{\omega_g}}{1+j\frac{\omega}{\omega_g}}=\frac{j\frac{2\pi f}{2\pi f_g}}{1+j\frac{2\pi f}{2\pi f_g}}=\boldsymbol{\frac{j\frac{f}{f_g}}{1+j\frac{f}{f_g}}}$$

Der Grenzwert bei **sehr tiefen Frequenzen** f → 0 ($f < f_g/100$):

$$H(j\omega)=\frac{j\frac{0}{f_g}}{1+j\frac{0}{f_g}}=\frac{j0}{1+(j0)}=j\frac{0}{1}=0\measuredangle 90° \Rightarrow -\infty dB$$

Der Grenzwert bei **sehr hohen Frequenzen** f → ∞ ($f > f_g*100$):

$$H(j\omega)=\frac{j\frac{f}{f_g}}{1+j\frac{f}{f_g}}\cdot\frac{\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}}=\frac{j\frac{1}{f_g}}{\frac{1}{f}+j\frac{1}{f_g}}=\frac{j\frac{1}{f_g}}{\frac{1}{\infty}+j\frac{1}{f_g}}=\frac{j\frac{1}{f_g}}{0+j\frac{1}{f_g}}=\frac{j\frac{1}{f_g}}{j\frac{1}{f_g}}=1\measuredangle 0° \Rightarrow 0dB$$

Der **Betrag** kann mit dem Satz von Pythagoras errechnet werden

$$|H(j\omega)|=\left|\frac{j\frac{f}{f_g}}{1+j\frac{f}{f_g}}\right|=\frac{\left|j\frac{f}{f_g}\right|}{\left|1+j\frac{f}{f_g}\right|}=\frac{\frac{f}{f_g}}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^2}}$$

und als Spannungsverhältnis auch in dB ausgedrückt werden.

$$|H(j\omega)|_{dB}=20\cdot lg\left(\frac{\frac{f}{f_g}}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_g}\right)^2}}\right)dB$$

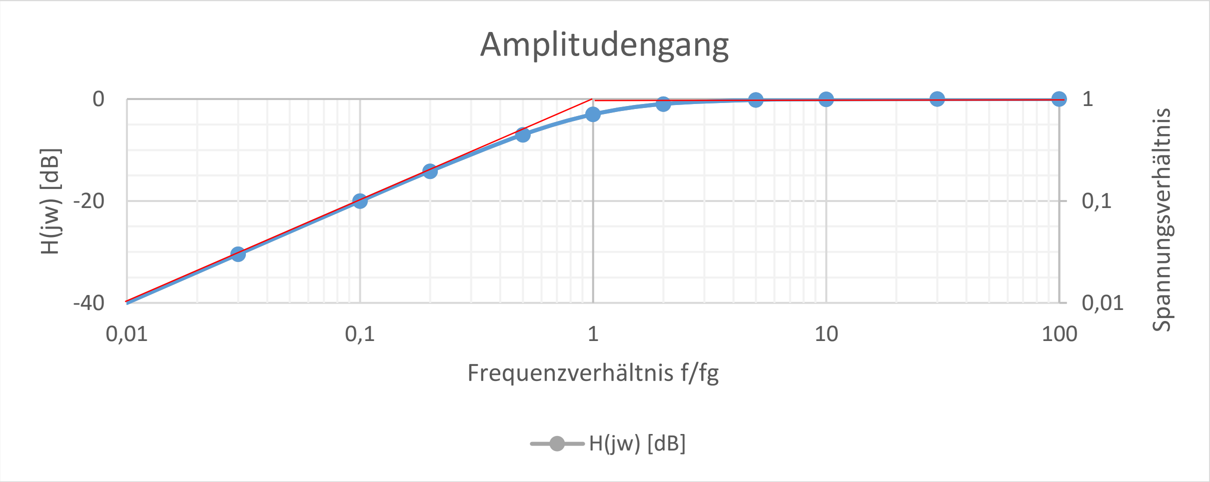
Der **Winkel** kann über die beiden Katheten Im und Re berechnet werden:

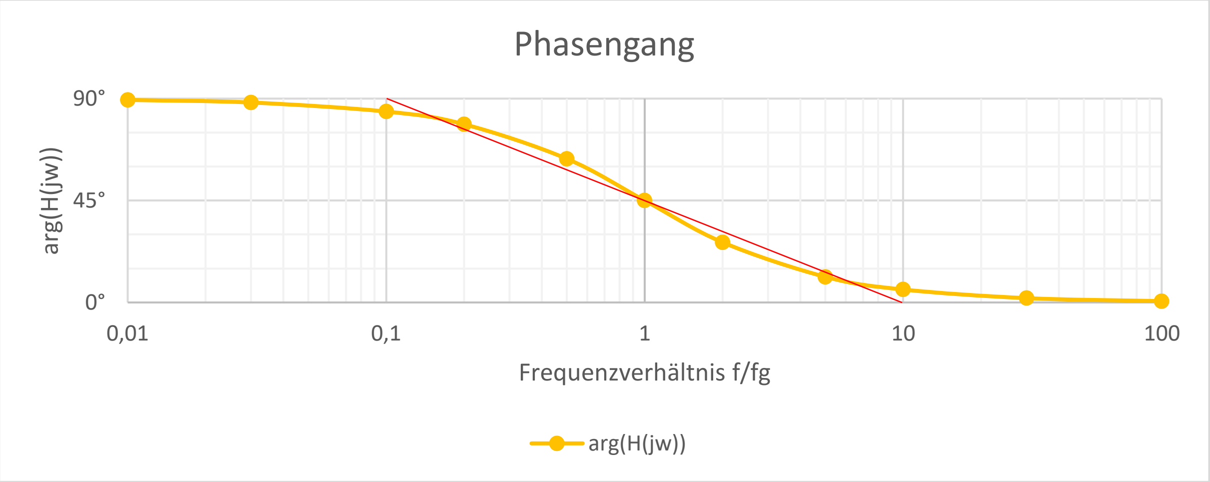
$$arg\{H(j\omega)\}=arg\left(j\frac{f}{f_g}\right)-arg\left(1+j\frac{f}{f_g}\right)=90°-arctan\left(\frac{f}{f_g}\right)$$

In der **Wertetabelle** für das Bodediagramm wurde bewusst 2 bzw. 3 logarithmisch gleichverteilte Werte pro Dekade eingefügt.

Das **Bodediagramm** besteht immer aus dem Amplitudengang und dem Phasengang, die typischerweise unmittelbar übereinander dargestellt werden.

	Hochpass		
f/fg	H(jw)	H(jw) [dB]	arg(H(jw))
0,01	0,010	-40,00	89,4°
0,03	0,030	-30,46	88,3°
0,1	0,100	-20,04	84,3°
0,2	0,196	-14,15	78,7°
0,5	0,447	-6,99	63,4°
1	0,707	-3,01	45,0°
2	0,894	-0,97	26,6°
5	0,981	-0,17	11,3°
10	0,995	-0,04	5,7°
30	0,999	0,00	1,9°
100	1,000	0,00	0,6°





Folgende Bereiche werden unterschieden:

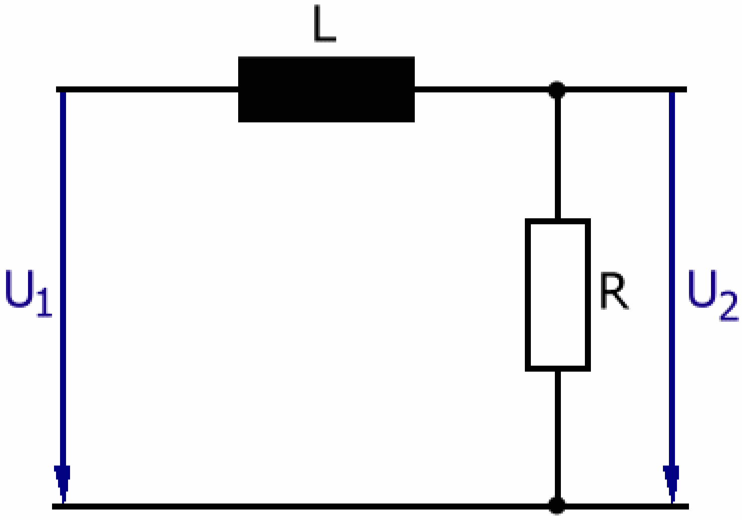
- Durchlassbereich: hohe Frequenzen; 0dB; ca. 0°
- Grenzfrequenz: -3dB=>v_U=1/Wurzel(2)=0,707; 45°; R=|X_C|
- Sperrbereich: tiefe Frequenzen; 20dB/Dekade=6dB/Oktave
=> Spannungsverhältnis 10 / 10-fachen Frequenz; 2 / Oktave
ca. 90°

Bei der Näherung durch einen Polygonzug (Geradenstücke) treten folgende Fehler auf:

- 3dB Fehler bei der Grenzfrequenz
- <6° Fehler bei 10-facher bzw. 1/10 der Grenzfrequenz

3 RL-Filter

3.1 Tiefpass



Die **Übertragungsfunktion** ist ein Spannungsteiler, der hier durch das Erweitern mit dem gemeinsamen Nenner vereinfacht wurde:

$$\boldsymbol{H(j\omega)} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{j\omega L + R}}$$

Bei der **Grenzfrequenz** ist der Realteil der Übertragungsfunktion gleich dem Betrtag des Imaginärteils:

$$Re\{H(j\omega_g)\} = |Im\{H(j\omega_g)\}|$$

Somit muss für den **Winkel** gelten:

$$arg\{H(j\omega_g)\} = \pm 45°$$

$$\underline{B} = \frac{\underline{Z}}{\underline{N}} = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{N}|} \angle arg(\underline{Z}) - arg(\underline{N})$$

$$arg\{H(j\omega_g)\} = \pm 45° = 0° - \mp 45°$$

Auch der Nenner muss einen Winkel von ±45° haben und somit muss dessen Re=|Im| sein:

$$\omega_g L = R$$

$$\boldsymbol{\omega_g} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\tau}} = \frac{R}{L}$$

Auch das **konjugiert-komplex Erweitern** und das Trennen in Re- und Im-Teil führt zum selben Ergebnis:

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} \cdot \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} = \frac{R^2 - j\omega RL}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} - j\frac{\omega RL}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$Re\{H(j\omega_g)\} = |Im\{H(j\omega_g)\}|$$

$$R^2 = \omega_g RL \quad |:R$$

$$\boldsymbol{\omega_g} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\tau}} = \frac{R}{L}$$

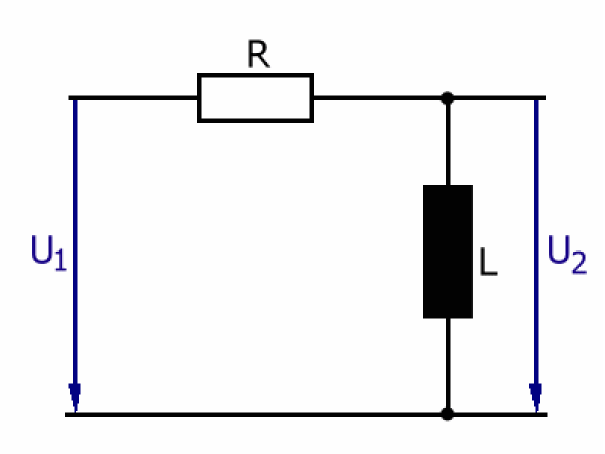
Der Zusammenhang zwischen ω_g und τ gilt für alle Filter 1. Ordnung also auch RL-Filter.

Die **normierte Form** bezieht sich nur noch auf die Grenzfrequenz (enthält kein R, C, L mehr) indem $L = \frac{R}{\omega_g}$ in $H(j\omega) = \frac{R}{R+j\omega L}$ eingesetzt wird:

$$\boldsymbol{H(j\omega)} = \frac{R}{R + jR\frac{\omega}{\omega_g}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} = \frac{1}{1 + j\frac{2\pi f}{2\pi f_g}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1 + j\frac{f}{f_g}}}$$

Durch die normierte Form sind die weiteren Berechnungen, Werte und Diagramme exakt gleich dem RC-Tiefpass.

3.2 Hochpass



Die **Übertragungsfunktion** ist ein Spannungsteiler, der hier durch das Erweitern mit dem gemeinsamen Nenner vereinfacht wurde:

$$\boldsymbol{H(j\omega)} = \frac{\underline{U_2}}{\underline{U_1}} = \frac{\boldsymbol{j\omega L}}{\boldsymbol{R + j\omega L}}$$

Bei der **Grenzfrequenz** ist der Realteil der Übertragungsfunktion gleich dem Betrtag des Imaginärteils:

$$Re\{H(j\omega_g)\} = |Im\{H(j\omega_g)\}|$$

Somit muss für den **Winkel** gelten:

$$arg\{H(j\omega_g)\} = \pm 45°$$

$$\underline{B} = \frac{\underline{Z}}{\underline{N}} = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{N}|} \angle arg(\underline{Z}) - arg(\underline{N})$$

$$arg\{H(j\omega_g)\} = \pm 45° = 90° - \pm 45°$$

Auch der Nenner muss einen Winkel von ±45° haben und somit muss dessen Re=|Im| sein:

$$R = \omega_g L$$

$$\boldsymbol{\omega_g} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\tau}} = \frac{R}{L}$$

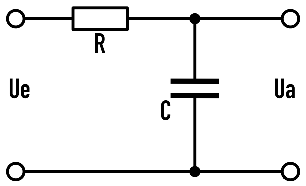
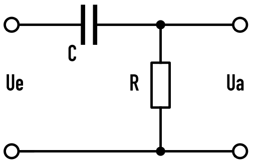
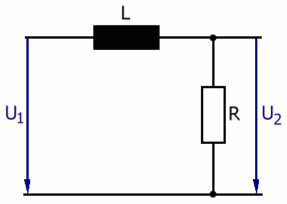
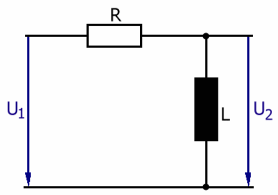
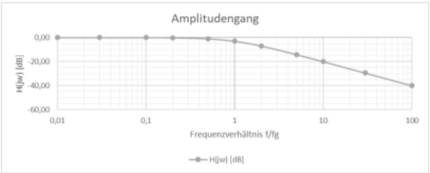
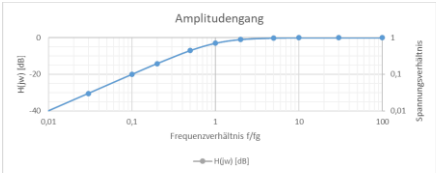
Der Zusammenhang zwischen ω_g und τ gilt für alle Filter 1. Ordnung also auch RL-Filter.

Die **normierte Form** bezieht sich nur noch auf die Grenzfrequenz (enthält kein R, C, L mehr) indem $L = \frac{R}{\omega_g}$ in $H(j\omega) = \frac{j\omega L}{R+j\omega L}$ eingesetzt wird:

$$\boldsymbol{H(j\omega)} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_g}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} = \frac{j\frac{2\pi f}{2\pi f_g}}{1 + j\frac{2\pi f}{2\pi f_g}} = \frac{\boldsymbol{j\frac{f}{f_g}}}{\boldsymbol{1 + j\frac{f}{f_g}}}$$

Durch die normierte Form sind die weiteren Berechnungen, Werte und Diagramme exakt gleich dem RC-Tiefpass.

4 RC/RL-Vergleich

	Tiefpass	Hochpass	
RC			$\boldsymbol{\tau = RC}$ $\omega_g = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$
RL			$\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R}}$ $\omega_g = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}$
Bode			$\boldsymbol{\omega_g = \frac{1}{\tau}}$

5 Anwendungen

Das menschliche Ohr kann diese Frequenzen von 20Hz bis 20kHz wahrnehmen.

Um diesen Frequenzbereich in 2 logarithmisch gleich große Teile zu teilen, kann aus den Dekaden das notwendige Frequenzverhältnis abgeschätzt werden:

$$\frac{3\ Dekanden}{2} = 1{,}5\ Dekaden => 10 \cdot 3 = 30\ fache\ Frequenz$$

$$\boldsymbol{f_m} = 30 \cdot 20Hz = 600Hz$$

Die exakte Berechnung der Mittenfrequenz f_m wäre der geometrische Mittelwert der beiden Frequenzen:

5.1 Tieftöner

Ein Tieftonlautsprecher mit einer Impedanz von 4Ω (8Ω) soll durch einen vorgeschalteten Bildwiderstand zu einem Tiefpass mit einer Grenzfrequenz f_g=600Hz werden. Wählen Sie die korrekte Schaltung und berechnen Sie alle Bauteile.

5.2 Hochtöner

Ein Hochtonlautsprecher mit einer Impedanz von 4Ω (8Ω) soll durch einen vorgeschalteten Bildwiderstand zu einem Tiefpass mit einer Grenzfrequenz f_g=600Hz werden. Wählen Sie die korrekte Schaltung und berechnen Sie alle Bauteile.