Un nouveau moyen d'approcher la conjecture d'Erdos Straus

Benjamin Elie Dahan

Université Paris Dauphine-PSL, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, Paris 75016, France

benjamin.dahan@dauphine.eu

Abstract

The Erdős-Straus conjecture states that for every integer $n \geq 2$, the equation $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ admits positive integer solutions. While historical approaches, notably by Mordell, have relied on quadratic residues and polynomial identities, this paper proposes a novel and independent method based on a complete congruence network.

We analyze the equation, specifically for $n \equiv 1 \pmod 4$, by classifying primes through congruences modulo 3 and 7. We establish a series of theorems that provide explicit algorithms to construct solutions for these specific classes. Furthermore, we demonstrate that for any prime n, the conjecture is equivalent to the existence of an integer $c \equiv 3 \pmod 4$ such that c divides the sum of two divisors of $K = \frac{n+c}{4}$. This result offers a new arithmetic reduction of the problem.

Finally, to validate these theoretical findings, we developed a high-performance computational verification algorithm in C, optimizing the solution search up to $n = 10^{10}$.

Keywords: Erdős-Straus conjecture, Egyptian fractions, Diophantine equations, Modular arithmetic, Number theory, Computational Verification.

1 Introduction

La conjecture d'Erdős-Straus, formulée par Paul Erdős et Ernst G. Straus en 1948, propose que pour tout entier $n \geq 2$, il existe des entiers positifs x, y et z tels que :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Cette conjecture est étroitement liée à d'autres problèmes en théorie des nombres, notamment ceux impliquant les fractions égyptiennes, comme la conjecture de Sierpiński. Dès 1950, le mathématicien Richard Obláth reprend les calculs de Straus et d'Harold N. Shapiro et vérifie que la conjecture est vraie pour $n \leq 10^5$. Par la suite, d'autres mathématiciens ont travaillé sur le problème, comme Luigi Rosati (1954), Ernest Kiss (1959), Léon Bernstein (1962), Koichi Yamamoto (1965), Ralph Jollensten (1976) et Swett en 1999, qui montre que la conjecture est vraie pour $n \leq 10^{14}$. Mais le travail le plus important du 20e siècle sur cette conjecture reste sûrement celui de Louis Mordell, qui prouve en 1967 que la conjecture est vraie pour $n \not\equiv 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2 \pmod{840}$.

En 2009, Michel Mizony prouve que la conjecture est vraie d'un point de vue algorithmique. En 2011, Terence Tao et Christian Elsholtz publient une idée nouvelle, celle de classer les solutions en deux types (type 1 et type 2). Ces travaux inspireront par la suite Miguel Angel Lopez, qui publie en 2022 les derniers travaux sur la conjecture. Il y développe l'idée d'un réseau de congruence complet qui est associé aux solutions qu'il distingue en deux types (type A et type B).

Depuis les travaux de Mordell, l'utilisation des résidus quadratiques et des polynomes est devenue la méthode privilégiée pour aborder ce problème. J'ai décidé de partir sur une démarche différente, plus accessible. Cette démarche n'ayant rien à voir avec les précédentes avancées, nous redémontrerons tout depuis le départ et ce de manière indépendante. L'idée qui se cache derrière ce travail est de réussir à trouver une solution à l'équation posée pour $n \equiv 1 \pmod 4$ en passant par la congruence $\pmod 7$.

Théorème 1 *: Pour tout entier naturel pair non nul n, on a :*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}}$$

Démonstration : *Soit n un entier naturel pair non nul, il existe $h \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2h$*

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2h} + \frac{1}{2h} + \frac{1}{h} = \frac{4}{2h} = \frac{4}{n}$$

Théorème 2 *: Pour tout entier naturel impair non nul n, il existe un $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que :*

$$\frac{1}{k} < \frac{4}{n} < \frac{1}{k-1}$$

Démonstration : Soit n un entier naturel impair non nul, d'après la propriété d'Archimède il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que $4(k-1) < n < 4k$ Par stricte décroissance de $4k \mapsto \frac{1}{4k}$ sur $\mathbb{R}^*$:

$$\frac{1}{4(k-1)} > \frac{1}{n} > \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{k-1} > \frac{4}{n} > \frac{1}{k}$$

Lemme 1 *: D'après la démonstration précédente on a $n < 4k$, il existe donc nécessairement un entier j tel que $n + j = 4k$*

Théorème 3 *: Pour tout $n \equiv 3 \pmod 4$ on a :*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2kn} + \frac{1}{2kn}$$

Démonstration : Soit $n \equiv 3 \pmod 4$:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{2kn} + \frac{1}{2kn} = \frac{1}{k} + \frac{1}{kn} = \frac{n+1}{kn}$$

Or $n + j = 4k \Leftrightarrow k = \frac{n+j}{4}$

Ainsi
$$\frac{n+1}{kn} = \frac{n+1}{\frac{n(n+j)}{4}} = \frac{4(n+1)}{n(n+j)}$$

Or $n \equiv 3 \pmod 4$ donc $j = 1$

Ainsi
$$\frac{4(n+1)}{n(n+j)} = \frac{4}{n}$$

2 $\underline{n \equiv 1 \pmod 4}$

Théorème 4 *: Pour tout* $n \equiv 1 \pmod 4$ *:*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{kn} + \frac{2}{kn} + \frac{1}{k}$$

Démonstration : Soit $n \equiv 1 \pmod 4$

$$\frac{1}{kn} + \frac{2}{kn} + \frac{1}{k} = \frac{3}{kn} + \frac{1}{k} = \frac{3+n}{kn} = \frac{3+n}{\frac{n(n+j)}{4}} = \frac{4(3+n)}{n(n+j)}$$

Or $n \equiv 1 \pmod 4$ donc $j = 3$ Ainsi

$$\frac{4(3+n)}{n(n+j)} = \frac{4}{n}$$

Cette formule ne peut pas être utilisée à proprement parler dans la résolution de cette conjecture car la présence du 2 au numérateur sur la somme : $\frac{1}{kn} + \frac{2}{kn} + \frac{1}{k}$ est problématique. On peut cependant l'utiliser pour résoudre des cas plus complexes.

Corollaire 1 *: Pour tout* $n \equiv 1 \pmod 4$ *et* $kn \equiv 0 \pmod 2$ *:*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{kn} + \frac{1}{\frac{kn}{2}} + \frac{1}{k}$$

Corollaire 2 *: Pour tout* $n \equiv 1 \pmod 4$ *et* $kn \equiv 0 \pmod 3$ *:*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{2kn}{3}} + \frac{1}{\frac{2kn}{3}} + \frac{1}{k}$$

Démonstration :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{kn} + \frac{2}{kn} + \frac{1}{k} = \frac{2}{2kn} + \frac{4}{2kn} + \frac{1}{k} = \frac{3}{2kn} + \frac{3}{2kn} + \frac{1}{k}$$

Ainsi

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{2kn}{3}} + \frac{1}{\frac{2kn}{3}} + \frac{1}{k}$$

Corollaire 3 *: Pour tout* $n \equiv 1 \pmod 4$ *et* $kn \equiv 0 \pmod 5$ *:*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{2kn}{5}} + \frac{1}{2kn} + \frac{1}{k}$$

Démonstration :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{kn} + \frac{2}{kn} + \frac{1}{k} = \frac{2}{2kn} + \frac{4}{2kn} + \frac{1}{k} = \frac{5}{2kn} + \frac{1}{2kn} + \frac{1}{k}$$

Ainsi

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{2kn}{5}} + \frac{1}{2kn} + \frac{1}{k}$$

Le problème posé par cette conjecture repose essentiellement sur le fait que $kn \equiv 0 \pmod p$ où p est un nombre premier différent de $2, 3$ et 5. Nous chercherons par la suite à trouver une solution à ce problème en classant les nombres premiers par un réseau de congruence.

Théorème 5 *: Pour tout* $n \equiv 1 \pmod 4$ *et* ($k \equiv 2 \pmod 3$ *ou* $n \equiv 2$

(mod 3)), *il existe un entier naturel non nul o tel que :*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{on} + \frac{1}{okn} + \frac{1}{k}$$

Démonstration : Soit $n \equiv 1 \pmod 4$, tel que ($k \equiv 2 \pmod 3$ ou $n \equiv 2 \pmod 3$), posons $o = \frac{k+1}{3}$. D'après le *Théorème 4* :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{kn} + \frac{2}{kn} + \frac{1}{k} = \frac{o}{okn} + \frac{2o}{okn} + \frac{1}{k} = \frac{3o}{okn} + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{okn} + \frac{1}{k} = \frac{k}{okn} + \frac{1}{okn} + \frac{1}{k}$$

Cette démonstration aurait aussi pu être menée si $n \equiv 2 \pmod 3$, en posant $o = \frac{n+1}{3}$.

Théorème 6 *: Pour tout $n \equiv 1 \pmod 4$, si $n + k \equiv 0 \pmod 3$ alors il existe un entier naturel non nul o' tel que :*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{o'k} + \frac{1}{o'n} + \frac{1}{k}$$

Démonstration : Soit $n \equiv 1 \pmod 4$, tel que $n + k \equiv 0 \pmod 3$. Posons $o' = \frac{k+n}{3}$, d'après le *Théorème 4* :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{kn} + \frac{2}{kn} + \frac{1}{k} = \frac{o'}{o'kn} + \frac{2o'}{o'kn} + \frac{1}{k} = \frac{3o'}{o'kn} + \frac{1}{k} = \frac{n+k}{o'kn} + \frac{1}{k} = \frac{n}{o'kn} + \frac{k}{o'kn} + \frac{1}{k} = \frac{1}{o'k} + \frac{1}{o'n} + \frac{1}{k}$$

Ce théorème n'est en réalité qu'un autre moyen d'exprimer le Théorème 5.

Nous allons maintenant procéder à un exemple où $kn \equiv 0 \pmod p$, et où il nous est impossible d'utiliser un des théorèmes précédents. Cela nous permettra de comprendre de manière intuitive les concepts à venir.

Exemple 1 : Posons $n = 73$
On a $72 < 73 < 76 \Leftrightarrow \frac{1}{72} > \frac{1}{73} > \frac{1}{76} \Leftrightarrow \frac{1}{18} > \frac{4}{73} > \frac{1}{19}$ $73 \equiv 1 \pmod 4$, donc d'après le *Théorème 4* :

$$\frac{4}{73} = \frac{1}{19} + \frac{2}{1387} + \frac{1}{1387}$$

$73 \not\equiv 2 \pmod 3$ et $19 \not\equiv 2 \pmod 3$, il est impossible d'utiliser le *Théorème 5.*

$n + k = 73 + 19 = 92$ or $92 \not\equiv 0 \pmod 3$, il est impossible d'utiliser le *Théorème 6.*

Essayons de modifier notre formule avec $k+1$ à la place de k, c'est-à-dire 20 à la place de 19 dans notre exemple. On remarque alors que :

$$\frac{4}{73} = \frac{1}{20}+\frac{1}{73\times 6}+\frac{1}{73\times 6}+\frac{1}{73\times 10\times 6} = \frac{1}{20}+\frac{1}{73\times 6}+\frac{1}{73\times 6}+\frac{5}{73\times 10\times 6}-\frac{4}{73\times 10\times 6}$$

$$= \frac{1}{20}+\left(\frac{1}{73\times 6}+\frac{5}{73\times 10\times 6}\right)+\left(\frac{1}{73\times 6}-\frac{4}{73\times 10\times 6}\right) = \frac{1}{20}+\frac{1}{292}+\frac{1}{730}$$

Nous déduisons de cet exemple la méthode à suivre quand nous ne pouvons pas utiliser les théorèmes *5 et 6.* L'idée sous-jacente est qu'il faut changer de k et utiliser $k+1$, si cela ne marche toujours pas nous prendrons $k+2$ et ainsi de suite.

3 $n \equiv 1 \pmod 4$, $n \equiv u \pmod 7$, $kn \equiv 0 \pmod p$

L'objectif à présent est de traiter par disjonctions de cas, l'ensemble des u appartenant à $\mathbb{N}$ tels que $u \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ et où $n \equiv 1 \pmod 4$, $n \equiv 1 \pmod 3$, $n \equiv u \pmod 7$, $k \equiv 1 \pmod 3$ et $kn \equiv 0 \pmod p$ où p est un nombre premier différent de $2, 3$ et 5 (car ces cas ont déjà été traités).

Théorème 7 : *Pour tout* $n \equiv 1 \pmod 3$, $n \equiv 1 \pmod 4$, $n \equiv 3 \pmod 7$ *et* $k \equiv 1 \pmod 3$ *et* $kn \equiv 0 \pmod p$, *il existe* $\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, *tel que :*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n\varepsilon}{2}} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{\frac{(k+1)\varepsilon n}{2}}$$

Démonstration : Soient $n \equiv 1 \pmod 3$, $n \equiv 1 \pmod 4$, $n \equiv 3 \pmod 7$ et $k \equiv 1 \pmod 3$ et $kn \equiv 0 \pmod p$.

Posons $\varepsilon = \frac{n+11}{14}$, vérifions que $\varepsilon \in \mathbb{N}^*$.

n est impair donc $n+11$ est divisible par 2, $11 \equiv 4 \pmod 7$ et $n \equiv 3 \pmod 7$ donc $n + 11 \equiv 0 \pmod 7$. Ainsi $\varepsilon \in \mathbb{N}^*$.

$$\varepsilon = \frac{n+11}{14} \iff \varepsilon = \frac{-n-11}{-14} \iff -7 = \frac{-n-11}{2\varepsilon} \iff -7 = \frac{-n-7}{2\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon}$$

$$\iff -7 + n = \frac{-n-7}{2\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon} + n \iff n = \frac{-n-7}{2\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon} + n + 7$$

Or $\frac{n+3}{4} = k$ donc $\frac{n+7}{4} = k + 1$

Ainsi

$$n = -\frac{2(k+1)}{\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon} + 4(k+1) \iff n + \frac{2(k+1)}{\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon} = 4(k+1) \iff n\varepsilon + 2(k+1) + 2 = 4(k+1)\varepsilon$$

Or

$$\frac{n\varepsilon + 2(k+1) + 2}{n\varepsilon(k+1)} = \frac{1}{\frac{n\varepsilon}{2}} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{\frac{(k+1)\varepsilon n}{2}}$$

Donc

$$\frac{4(k+1)\varepsilon}{n\varepsilon(k+1)} = \frac{1}{\frac{n\varepsilon}{2}} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{\frac{(k+1)\varepsilon n}{2}}$$

Ainsi

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n\varepsilon}{2}} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{\frac{(k+1)\varepsilon n}{2}}$$

On peut s'assurer que $\frac{(k+1)\varepsilon n}{2} \in \mathbb{N}^*$ car $kn \equiv 1 \pmod 2$ donc $k \equiv 1 \pmod 2$ donc $k + 1 \equiv 0 \pmod 2$.

On peut s'assurer que $\frac{n\varepsilon}{2} \in \mathbb{N}^*$, car $\varepsilon = \frac{n+11}{14}$ et que $n \equiv 1 \pmod 4$ et $11 \equiv 3 \pmod 4$, ainsi $\frac{n+11}{2} \equiv 0 \pmod 2$, et comme $\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n+11}{14} \equiv 0$

(mod 2)

Exemple 2 : *Posons* $n = 241$

$$240 < 241 < 244 \Leftrightarrow \frac{1}{240} > \frac{1}{241} > \frac{1}{244} \Leftrightarrow \frac{1}{60} > \frac{4}{241} > \frac{1}{61}$$

$\varepsilon = \frac{241+11}{14} = 18$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{n\epsilon} + \frac{1}{\frac{(k+1)n\epsilon}{4}}$$

On a $(k+1) = 62$

Ainsi

$$\frac{4}{241} = \frac{1}{194} + \frac{1}{21532} + \frac{1}{2088604}$$

Théorème 8 : *Pour tout* $n \equiv 1 \pmod 3$, $n \equiv 1 \pmod 4$ *et* $n \equiv 5 \pmod 7$ *et* $k \equiv 1 \pmod 3$ *et* $kn \equiv 0 \pmod p$, *il existe* $\lambda \in \mathbb{N}^*$, *tel que :*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{\frac{(k+1)n\lambda}{4}}$$

Démonstration : Soient $n \equiv 1 \pmod 3$, $n \equiv 1 \pmod 4$ et $n \equiv 5 \pmod 7$ et $k \equiv 1 \pmod 3$ et $kn \equiv 0 \pmod p$.

Posons $\lambda = \frac{n+23}{28}$, vérifions que $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

On a : $n \equiv 1 \pmod 4$ et $n \equiv 5 \pmod 7$.

En appliquant le théorème des restes chinois : $M = 4 \times 7 = 28$ $M_1 = 7$ et $M_2 = 4$ $y_1 = 3$ car $7 \times 3 \equiv 1 \pmod 4$ et $y_2 = 2$ car $4 \times 2 \equiv 1 \pmod 7$

$$n \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 \pmod M$$

$$n \equiv 1 \times 7 \times 3 + 5 \times 4 \times 2 \pmod{28}$$

Donc $n \equiv 61 \pmod{28}$ donc $n \equiv 5 \pmod{28}$ Ainsi $n + 23 \equiv 0 \pmod{28}$,

$\lambda \in \mathbb{N}^*$.

$$\lambda = \frac{n+23}{28} \iff 7 = \frac{n+23}{4\lambda} \iff n = 7+n-(\frac{n+23}{4\lambda}) \iff n = 7+n-(\frac{n+7}{4\lambda}+\frac{4}{\lambda})$$

$$\iff n = 4(k+1) - \frac{k+1}{\lambda} - \frac{4}{\lambda} \iff n = \frac{4(k+1)\lambda - (k+1) - 4}{\lambda}$$

$$\iff n\lambda = 4(k+1)\lambda - (k+1) - 4 \iff n\lambda + (k+1) + 4 = 4(k+1)\lambda$$

Or

$$\frac{n\lambda + (k+1) + 4}{n\lambda(k+1)} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{\frac{(k+1)n\lambda}{4}}$$

Donc

$$\frac{4(k+1)\lambda}{n\lambda(k+1)} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{\frac{(k+1)n\lambda}{4}}$$

Ainsi

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{\frac{(k+1)n\lambda}{4}}$$

On peut s'assurer que $\frac{(k+1)n\lambda}{4}$ appartient à $\mathbb{N}^*$, $k+1 \equiv 0 \mod (2)$, donc

$$\frac{(k+1)n\lambda}{4} \in \mathbb{N}^* \iff \frac{n\lambda}{2} \in \mathbb{N}^* \text{ or } kn \equiv 1 \mod (2) \text{ donc } n \equiv 1 \mod (2)$$

Ainsi

$$\frac{n\lambda}{2} \in \mathbb{N}^* \iff \frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N}^*$$

Montrons que $n \equiv 1 \mod (8)$.

Supposons que $n \equiv 5 \mod (8)$, $n+3 \equiv 0 \mod (8)$ donc $n+3 = 8w$ (avec $w \in \mathbb{N}^*$)

Or

$$\frac{n+3}{4} = k \text{ donc } k = 2w, \text{ or } kn \equiv 1 \mod (2), \text{ impossible. Ainsi } n \equiv 1 \mod (8).$$

$$23 \equiv 7 \mod (8) \text{ donc } 23 + n \equiv 0 \mod (8)$$

Donc

$$\frac{23+n}{28} \equiv 0 \mod (2).$$

Ainsi

$$\frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N}^*.$$

Théorème 9 : *Pour tout* $n \equiv 1 \pmod 3$, $n \equiv 1 \pmod 4$ *et* $n \equiv 6 \pmod 7$, k *est premier, il existe* $(k+1)$ *et* ϕ *appartenant à* $\mathbb{N}^*$, *tel que :*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n\phi} + \frac{1}{\frac{(k+1)n\phi}{4}}$$

Nous ne démontrerons pas volontairement ce théorème car la preuve est similaire à la précédente, ce qui n'ajoute pas d'intérêt majeur. Utilisons un exemple pour illustrer cette formule à la place.

$$\phi = \frac{15+n}{28}$$

Exemple 3 : *Posons* $n = 769$

$$768 < 769 < 772 \Leftrightarrow \frac{1}{192} > \frac{4}{n} > \frac{1}{193}$$

$$(k+1) = k+1 = 194$$

$$\phi = \frac{769+15}{28} = 28$$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n\phi} + \frac{1}{\frac{(k+1)n\phi}{4}}$$

$$\text{Ainsi} \quad \frac{4}{769} = \frac{1}{194} + \frac{1}{21532} + \frac{1}{2088604}.$$

Lemme 2 : *Pour tout k appartenant à $\mathbb{N}^*$, on pose K et α appartenant à $\mathbb{N}^*$ tel que $K = k + \alpha$.*

Pour tout K appartenant à $\mathbb{N}^*$, il existe c appartenant à $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$K = \frac{n+c}{4}.$$

Démonstration : Soient K, k et α appartenant $\mathbb{N}^*$. Posons $c = j + 4\alpha$

$$K = k + \alpha = \frac{n+j}{4} + \alpha = \frac{n+j+4\alpha}{4} = \frac{n+c}{4}$$

C'est vers la fin de ce travail de recherche que je commence à m'intéresser aux travaux des autres mathématiciens sur le sujet, en lisant le début du travail : *Sur la conjecture d'Erdös et Straus* de Michel Mizony (2009) que je me rends compte avoir manqué un lemme extrêmement important et très simple :

Lemme 3 : *Si n vérifie la conjecture alors $v \times n$ également, car si :*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ alors : } \frac{4}{v \times n} = \frac{1}{v \times x} + \frac{1}{v \times y} + \frac{1}{v \times z}$$

Ainsi tout multiple d'un nombre premier n vérifiant la conjecture la vérifie aussi.

Nous prendrons alors désormais n premier.

Théorème 10 : *Pour tout* $n \equiv 1 \pmod 3$*,* $n \equiv 1 \pmod 4$ *et* $n \equiv 2 \pmod 7$*,* $kn \equiv 0 \pmod p$*,* $k \equiv 1 \pmod 3$*, il existe* K *et* σ *appartenant à* $\mathbb{N}^*$*, tel que :*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{\sigma n} + \frac{1}{\frac{n\sigma K}{c\sigma - K}}$$

Ce théorème concerne également $n \equiv 4 \pmod 7$ *et* $n \equiv 1 \pmod 7$*, et l'idée derrière la démonstration est la même donc ces cas ne seront pas étudiés.*

Approche de démonstration : Soient $n \equiv 1 \pmod 3$, $n \equiv 1 \pmod 4$ et $n \equiv 2 \pmod 7$, $k \equiv 1 \pmod 3$, $kn \equiv 0 \pmod p$, K et σ appartenant à $\mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{K} + \frac{1}{\sigma n} + \frac{1}{\frac{n\sigma K}{c\sigma - K}} = \frac{1}{K} + \frac{1}{\sigma n} + \frac{c\sigma - K}{n\sigma K} = \frac{\sigma n + K + c\sigma - K}{n\sigma K} = \frac{n + c}{nK}$$

$$\text{Or } n + c = 4K, \text{ ainsi } \frac{n + c}{nK} = \frac{4}{n}$$

Donc $\frac{4}{n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{\sigma n} + \frac{1}{\frac{n\sigma K}{c\sigma - K}}$ est vrai pour tout K et σ appartenant à $\mathbb{N}^*$ vérifiant $\frac{n\sigma K}{c\sigma - K} \in \mathbb{N}^*$

On peut s'arrêter un instant sur cette équation :

$$\frac{n + c}{nK} = \frac{4}{n}$$

Cela signifie que

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{K} + \frac{c}{nK} \iff \frac{4}{n} = \frac{1}{K} + \frac{4c}{n(n + c)}$$

Il faudrait donc prouver que $\frac{4c}{n(n+c)}$ est décomposable en somme de deux fractions unitaires.

Fixons n premier, supposons que $c\sigma - K \mid n\sigma K$, n étant premier on a alors $c\sigma - K \mid \sigma K$, il existe donc un entier naturel t non nul, tel que :

$$tc\sigma - tK = \sigma K \iff tc\sigma = K(t+\sigma) \iff \frac{tc\sigma}{K} = t+\sigma \iff \frac{tc\sigma}{K} - t = \sigma \iff 1 = \frac{tc}{K} - \frac{t}{\sigma}$$

$$\iff \frac{tc}{K} - 1 = \frac{t}{\sigma} \iff \sigma = \frac{t}{\frac{tc}{K} - 1} \iff \sigma = \frac{tK}{tc - K} \iff \sigma = \frac{K}{c - \frac{K}{t}}$$

Par définition $t = \frac{K\sigma}{c\sigma - K}$ donc t n'est pas premier avec K (autrement dit t possède un diviseur commun supérieur à 1 avec K) à moins que $c\sigma - K = K$, auquel cas $\sigma = \frac{2K}{c}$.

D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, $K = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_m$.

Ainsi $t = a \times p_i$ où p_i est un diviseur de K (pouvant être un facteur premier ou un produit de facteurs premiers) et a un entier naturel non nul qui ne divise pas K (car sinon a serait compris dans p_i) ou alors il est en surplus par rapport à p_i.

Donc $\frac{K}{t}$ n'est plus qu'un produit de facteurs premiers de K divisé par a. On pose alors $\frac{K}{t} = \frac{\Pi}{a}$.

$$\sigma = \frac{K}{c - \frac{K}{t}} \iff \sigma = \frac{K}{c - \frac{\Pi}{a}} \iff \sigma = \frac{Ka}{ca - \Pi}$$

Supposons par l'absurde que $ca - \Pi \mid a$, avec $ca - \Pi$ different de 1, alors il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$a = l(ca - \Pi) \iff a = lca - l\Pi \iff a(lc - 1) = l\Pi \iff \frac{l\Pi}{a} = lc - 1$$

Or $a = l(ca - \Pi) \iff \frac{l}{a} = \frac{1}{ca - \Pi}$ donc a ne divise pas l.

Et $\frac{l\Pi}{a} = lc - 1$, donc $a \mid \Pi$, d'après le lemme de Gauss, or par définition a ne divise pas Π, donc impossible.

Ainsi, si $\frac{Ka}{ca-\Pi} \in \mathbb{N}$, c'est que $ca - \Pi \mid K$.

Donc $ca - \Pi$ est un diviseur de K et l'on pose $s = ca - \Pi$.

$$s+\Pi = ca \iff a = \frac{s+\Pi}{c} \iff Ka = \frac{K(s+\Pi)}{c} \iff \frac{Ka}{s} = \frac{K}{s}\left(\frac{s+\Pi}{c}\right) \iff \sigma = \frac{K}{s}\left(\frac{s+\Pi}{c}\right)$$

Montrons que s est différent de Π : Supposons que $s = \Pi \iff ca - \Pi = \Pi \iff ca = 2\Pi \iff a = \frac{2\Pi}{c}$.

c est premier avec 2 donc d'après le lemme de Gauss, $c \mid \Pi$ donc $\frac{n+c}{4c} \in \mathbb{N}^*$.

Donc $\frac{1}{4}\left(\frac{n}{c} + 1\right) \in \mathbb{N}^*$ ce qui est absurde puisque n est premier. On en conclut alors que si K est premier, il est impossible que $c\sigma - K \mid \sigma K$.

Le cœur du problème de la conjecture d'Erdos-Straus peut alors se résumer à la proposition suivante : il existe $\sigma \in \mathbb{N}^*$ si et seulement s'il existe deux diviseurs de K, Π et s, dont la somme est un multiple de c.

Exemple 4 :

$n = 20353$, 20353 est premier, $20353 \equiv 1 \pmod 4$,

$20353 \equiv 1 \pmod 3$, $20353 \equiv 4 \pmod 7$.

Posons $c = 23$, $K = \frac{20353+23}{4} = 5094$.

$5094 = 2 \times 3 \times 283$

2 est un diviseur de 5094 et $849 = 3 \times 283$ est aussi un diviseur de 5094.

$849 + 2 = 851$

et $851 = 23 \times 37$

c divise la somme de deux diviseurs de K.

$$\sigma = \frac{K}{t} \times \frac{t+\Pi}{c} \quad \text{donc} \quad \sigma = \frac{5094}{849} \times \frac{849+2}{23} = 222$$

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{\sigma n} + \frac{1}{\frac{n\sigma K}{c\sigma - K}}$$

Donc

$$\frac{4}{20353} = \frac{1}{5094} + \frac{1}{222 \times 20353} + \frac{1}{\frac{222\times 20353\times 5094}{23\times 222-5094}}$$

Une autre piste serait de poser $\sigma = \frac{n+4c-bc-r}{4c}$, où r est le reste de la division euclidienne de n par c, tel que $0 \leq r < c$ et $b = 0$ si $r \equiv 1 \mod 4$, $b = 1$ si $r \equiv 2 \mod 4$, et $b = 2$ si $r \equiv 3 \mod 4$. Si $r \equiv 0 \mod 4$, on admettra qu'il n'existe pas de σ pour un tel c et on essaiera avec le suivant.

$n = qc + r$ donc $n - r = qc$, ainsi $\sigma = \frac{q-b+4}{4}$ et donc $q \equiv b \mod 4$.

Montrer que $c\sigma - K \mid \sigma K$ revient alors à montrer que :

$$c\left(\frac{n+4c-bc-r}{4c}\right) - \frac{n+c}{4} \mid \left(\frac{4-b+q}{4}\right)\frac{n+c}{4} \iff 3c - bc - r \mid (4-b+q)\,\frac{n+c}{4}.$$

En supposant cela vrai, on a alors l'égalité :

$$\frac{4-b+q}{4} = \frac{Ka}{ca-\Pi} \iff 4-b+q = \frac{(n+c)a}{ca-\Pi} \iff \frac{n+c}{4-b+q} = \frac{ca-\Pi}{a}$$

Or par définition $\dfrac{\Pi}{a} = \dfrac{K}{t}$ donc $\dfrac{n+c}{4-b+q} = c - \dfrac{K}{t} \iff \dfrac{n+c}{4t} = c - \dfrac{n+c}{4-b+q}$

$$\iff \frac{4t}{n+c} = \frac{c\,(4-b+q) - (n+c)}{(n+c)\,(4-b+q)}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{4t} = \frac{c\,(4-b+q) - (n+c)}{(n+c)\,(4-b+q)} \iff \frac{1}{4t} = \frac{c}{n+c} - \frac{1}{4-b+q} \iff \frac{1}{4t} + \frac{1}{4-b+q} = \frac{c}{n+c}.$$

Puisque $4 - b + q$ est toujours divisible par 4, nous venons de donner une décomposition de $\frac{4c}{n+c}$ en deux fractions unitaires, on a alors :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{K} + \frac{c}{nK} \iff \frac{4}{n} = \frac{1}{K} + \frac{4c}{n(n+c)} \iff \frac{4}{n} = \frac{1}{K} + \frac{1}{nt} + \frac{1}{n\sigma}$$

où t est un entier naturel non nul. Mais ce résultat était attendu car $t = \frac{\sigma K}{c\sigma - K}$.

4 Une erreur dans la conjecture !?

J'ai créé un programme qui m'a permis de vérifier que $c\sigma - K$ divise σK et donc que la conjecture est vraie pour tous les n testés allant jusqu'à 10^{10}. J'ai considéré $\sigma = \frac{q-b+4}{4}$ pour le réaliser. À l'exception près de $n = 3361$, pour lequel il n'y a aucune valeur de c pour laquelle $c\sigma - K$ divise K. Mais cela ne signifie pas que la conjecture d'Erdős-Straus est fausse. En effet, il existe plusieurs solutions possibles pour ce nombre, et nous allons en voir une :

En prenant $c = 3$, on étudie $n \equiv 1 \pmod 3$. Donc on sait que $r = 1$ ainsi $b = 0$ et on a $k = \frac{3361+3}{4} = 841$.

$$\sigma = \frac{3361 + 4 \times 841 - 1}{4 \times 3} = 281$$

On a $c\sigma - k = \frac{3\times 281 - 841}{4} = 2$, mais $c\sigma - k$ ne peut pas diviser $k\sigma$ car ici $k\sigma \equiv 1 \pmod 2$. On pourrait passer au c suivant, mais le problème resterait le même (le prochain c admettant une solution vaut 39 pour celui qui voudrait essayer).

Cependant, si l'on avait pris $\sigma = 290$, on aurait alors $c\sigma - k = 29$. Il est alors évident que $c\sigma - k$ divise σk.

Le problème vient directement de la formule $\sigma = \frac{n+4c-bc-r}{4c}$. En réalité, dans certains cas, b peut aussi prendre des valeurs négatives à condition qu'il garde la même congruence $\pmod 4$. Dans notre cas, on aurait alors pu prendre $b = -36$, ce qui donne

$$\sigma = \frac{3361 + 40 \times 3 - 1}{4 \times 3} = 290.$$

Mais les valeurs de b sont très difficiles à prévoir, c'est pourquoi je m'étais restreint uniquement aux valeurs de b : $\{0, 1, 2\}$.

Un autre moyen de résoudre le problème aurait été d'utiliser le *Théorème 4:*

$$\frac{4}{3361} = \frac{1}{841} + \frac{2}{841 \times 3361} + \frac{1}{841 \times 3361} \iff \frac{4}{3361} = \frac{1}{841} + \frac{3}{841 \times 3361}.$$

En remarquant que $841 = 29^2$, on aurait alors pu songer à faire :

$$\frac{4}{3361} = \frac{1}{841} + \frac{3 \times 10}{841 \times 3361 \times 10} \iff \frac{1}{841} + \frac{1}{29 \times 3361 \times 10} + \frac{1}{841 \times 3361 \times 10}.$$

Ce résultat etait attendu, puisque 1 et 29 sont des diviseurs de k, 30 = 29 + 1 et 30 est multiple de c = 3 donc on avait forcement $c\sigma - k$ qui divise σk.

5 Conclusion

Nous venons de présenter une démarche nouvelle qui, je l'espère, a pu simplifier le problème posé par la conjecture et apporter des contributions. La conjecture initialement posée par Erdős et Straus peut alors se résumer grâce à ce travail à : Pour tout n premier, $n \equiv 1 \pmod 4$, $n \equiv 1 \pmod 3$ et $n \equiv 1$ ou 2 ou 4 $\pmod 7$, il existe $c \equiv 3 \pmod 4$ tel que c divise la somme de deux diviseurs de $\frac{n+c}{4}$. Il est également interessant de noter que cette nouvelle formule pour σ semble pouvoir offrir de nouveaux champs de recherches. Je n'ai pas pris le temps de développer ici les congruences de $n \pmod 5$ et $n \pmod 8$, mais celles-ci se font de manière déductive et on peut alors s'assurer que l'on retrouve les congruences (mod 840) de Louis Mordell présentées dans l'introduction. Cela ne garantit rien mais conforte l'idée que nous sommes restés proches du problème.

J'exprime toute ma gratitude à ma professeure de mathématiques à qui je dois ce travail. C'est elle qui m'a présenté le problème, qui m'a accompagné dans mes recherches, notamment par la relecture et correction de la première version, et c'est à elle que je dois l'idée d'une seconde version beaucoup plus formelle. Je remercie aussi mes amis, qui se reconnaîtront, et qui m'ont

soutenu dans ce travail, entre autres par la relecture de cette seconde version mais aussi par leur support dans les échecs de mes recherches comme dans les avancées.