Devoir maison pour le 29 novembre 2018

Benjamin Loison (MPSI 1)

26 novembre 2018

1 Exercices

1. Soient E, F et G trois ensembles. On considère $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $h \in E^G$ et on suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.
$g \circ f$ est bijective donc la fonction g est surjective.
$h \circ g$ est bijective donc la fonction g est injective.
Donc la fonction g est bijective. Donc la fonction réciproque de g existe et g^{-1} est donc bijective.
On en déduit que $g^{-1} \circ g \circ f = f$, donc f est bijective.
De même, $h \circ g \circ g^{-1} = h$, donc h est bijective.

2. Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$.
On considère A une partie de E et B une partie de F.
On démontre l'égalité par double inclusion
- Soit $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$, tel que il existe x $\in A \cap f^{-1}(B)$, tel que: $y = f(x)$.
On a $x \in A$ donc $f(x) \in f(A)$.
On a $x \in f^{-1}(B)$ alors $f(x) \in B$.
Donc $f(x) \in f(A) \cap B$.
Donc $f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$.
- Soit $y \in f(A) \cap B$
On a $y \in f(A)$ donc il existe $x \in A$, tel que: $f(x) = y$.
On a $y \in B$ donc il existe $x \in f^{-1}(B)$, tel que: $f(y) = x$.
Donc $x \in (A \cap f^{-1}(B))$.
Donc $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$.
Donc $f(A) \cap B \subset f(A \cap f^{-1}(B))$.
- Donc $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On démontre le prédicat suivant sur $\mathbb{N}$: $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$
L'initialisation est claire pour les rangs 0, 1 et 2.
On suppose le prédicat vrai aux rangs n, $n+1$ et $n+2$, on a alors:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_n & = & n(n-1) \\ u_{n+1} & = & (n+1)n \\ u_{n+2} & = & (n+2)(n+1) \end{array}\right.$$

Le prédicat est vérifié au rang $n+3$ si et seulement si: $u_{n+3} = (n+3)(n+2) = n^2 + 5n + 6$

On a: $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$
D'où: $u_{n+3} = 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + n(n-1)$
Donc: $u_{n+3} = n^2 + 5n + 6$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $u_n = n(n-1)$

4. On définit sur $\mathbb{N}$ une relation binaire R par la relation: $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, xRy \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n$.

- Soit $x \in \mathbb{N}$. On a $xRx \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, x = x^n$, cette dernière proposition est claire pour $n = 1$, d'où xRx. Donc la relation R est réflexive.

Soient $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$. On a xRy et $yRz \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} xRy & = & \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n \\ yRz & = & \exists n \in \mathbb{N}, z = y^n \end{array}\right. \Rightarrow \exists (n, n') \in \mathbb{N}^2, z = (x^n)^{n'} = x^{n*n'}$, or $n * n' \in \mathbb{N}$.
Donc xRy et yRz implique que: $\exists n \in \mathbb{N}, z = x^n$.
Donc xRy et yRz implique que xRz. Donc la relation R est transitive.

Soient $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. xRy et yRz si et seulement si: $\left\{ \begin{array}{lll} xRy & = & \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n \\ yRx & = & \exists n \in \mathbb{N}, x = y^n \end{array} \right. \Rightarrow x = y$
Donc xRy et $yRz \Rightarrow x = y$. Donc la relation R est anti-symétrique.

Donc la relation R est une relation d'ordre.

- Soient $(x,y) \in \mathbb{N}^2, xRy$ ou yRx ssi $(\exists n \in \mathbb{N}, y = x^n)$ ou $(\exists n \in \mathbb{N}, x = y^n)$. Cette dernière proposition est clairement fausse pour $x = 5$ et $y = 3$, aucune puissance entière de 5 est égale à 3. Donc la relation R n'est pas une relation totale.

5. On considère un ensemble E et A, B deux parties de E.
On définit: $f = \begin{pmatrix} P(E) \to P(A) \text{ x } P(B) \\ X \mapsto (A \cap X, B \cap X) \end{pmatrix}$

a) $f(E) = (A \cap E, B \cap E) = (A, B)$
b) - $f(A \cup B) = (A \cap (A \cup B), B \cap (A \cup B))$
D'où: $f(A \cup B) = ((A \cap A) \cup (A \cap B), (B \cap A) \cup (B \cap B))$
D'où: $f(A \cup B) = (A \cup (A \cap B), (B \cap A) \cup B)$
Donc: $f(A \cup B) = (A, B)$
- On remarque que $f(A \cup B) = f(E)$ et par injectivité cela implique que $A \cup B = E$.
c) $\star$ Soient $(X, Y) \in P(E)^2$, tel que: $f(X) = f(Y)$.
- Soit $x \in X$. Donc $x \in A$ ou $x \in B$.
Si $x \in A$, alors on a $x \in A \cap X = A \cap Y$, donc $x \in Y$.
Sinon, si $x \in B$, alors on a $x \in B \cap X = B \cap Y$, donc $x \in Y$.
Donc $X \subset Y$.
- De la même manière on démontre l'autre sens de l'égalité:
Soit $y \in Y$. Donc $y \in A$ ou $y \in B$.
Si $y \in A$, alors on a $y \in A \cap Y = A \cap X$, donc $y \in X$.
Sinon, si $y \in B$, alors on a $y \in B \cap Y = B \cap X$, donc $y \in X$.
Donc $Y \subset X$.
- Donc finalement $X = Y$. D'où l'injectivité.
$\star$ - Si la fonction f est surjective, l'image (A, B) admet un antécédant noté X, tel que: $A \subset X$ et $X \cap B = \emptyset$. Ces propositions impliquent que $A \cap B = \emptyset$.
- On vérifie cette condition:
Si $A \cap B = \emptyset$, alors $(X, Y) \in P(A)$ x $P(B)$, tel que: $X \cup Y$ est un antécédant de (X, Y).
- Donc la condition nécessaire et suffisante recherchée est bien $A \cap B = \emptyset$ pour que f soit surjective.
d) On a finalement: $f^{-1} = \begin{pmatrix} P(A) \text{ x } P(B) \to P(E) \\ (X, Y) \mapsto (X \cup Y) \end{pmatrix}$

2 Algèbre de Boole

2.1 Propriétés élémentaires

On considère E un ensemble et A une partie de E. On considère A une algèbre de Boole.

1. D'après la propriété d'appartenance de l'élement nul dans l'algèbre de Boole, on a: $\emptyset \in A$.
D'après la propriété de complémentarité de l'algèbre de Boole, on a alors: $\emptyset_E^C \in A$ donc $E \in A$.

2. Soient $(X, Y) \in A^2$.
- $(X \cap Y)^C = X^C \cup Y^C$. Par la propriété de complémentarité de l'algèbre de Boole, on a alors $X^C \in A$ et $Y^C \in A$. Donc d'après la propriété de l'union de l'algèbre de Boole, on a $(X^C \cup Y^C) \in A$. Donc $(X \cap Y)^C \in A$ et par complémentarité de l'algèbre de Boole, on a finalement: $(X \cap Y) \in A$.

- Soit x un objet mathématique.
$x \in (X \backslash Y)$ ssi $(x \in X)$ et $(x \in Y)$
D'où: $x \in (X \backslash Y)^C$ ssi $(x \notin X)$ ou $(x \notin Y)$ ssi $(x \in X^C)$ ou $(x \in Y^C)$, on conclue alors comme précédemment.

2.2 Endomorphisme d'algèbre de Boole

On considère A une algèbre de Boole sur E et f une application de A dans A.
Soit f un endomorphisme de A

1. - Premièrement on a: $f(E) = f(E) \cup f(\emptyset) = f(E) \cup f(E^C) = f(E) \cup f(E)^C = E$
Donc $f(E) = E$
- Deuxièmement on a $f(E^C) = f(E)^C$ d'après la propriété de complémentarité d'un endormorphisme d'algèbre de Boole.
Donc d'après ce qui précède: $f(E)^C = E^C = \emptyset$.
Donc $f(\emptyset) = \emptyset$

2. Soient $(X, Y) \in A^2$.
- On a: $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
D'où: $(f(X \cup Y))^C = (f(X) \cup f(Y))^C$
Donc: $f(X^C \cap Y^C) = f(X)^C \cap f(Y)^C$
Donc: $f(X^C \cap Y^C) = f(X^C) \cap f(Y^C)$
On pose alors $(X', Y') \in A^2$.
On remarque que l'on a alors: $f(X' \cap Y') = f(X') \cap f(Y')$. D'où l'égalité. - D'une part: $f(X \backslash Y) = f(X \cap Y^C)$
D'autre part: $f(X) \backslash f(Y) = f(X) \cap f(Y^C)$
L'égalité est alors claire d'après l'égalité précédemment démontrée.

3. Soient $(X, Y) \in A^2$.
On suppose $X \subset Y$. On a alors $X \cup Y = Y$, donc $f(X \cup Y) = f(Y) = f(X) \cup f(Y)$ et donc $f(X) \subset f(Y)$.
Donc f est croissante.

4. - Si f est injective. D'après le 1., on a: $f(\emptyset) = \emptyset$. Donc $Ker(f) = \{X \in A | f(X) = \emptyset = f(\emptyset)\}$. Donc par injectivité de f, on a: On a $Ker(f) = \{X \in A | X = \emptyset\} = \emptyset$.
- Si $Ker(f) = \emptyset$, on considère $(X, Y) \in A^2$. On suppose que $f(X) = f(Y)$. D'après le 2., on a alors: $f(X \backslash Y) = f(X) \backslash f(Y) = \emptyset$ donc d'après la relation $f(\emptyset) = \emptyset$, on en déduit que: $X \backslash Y = \emptyset$ et donc $X \subset Y$. De la même manière on prouve que $Y \subset X$. Donc $X = Y$. - On en conclut que f est injective ssi $Ker(f) = \emptyset$.