1 Documents externes

Formulaire de Nizon (trigonométrie...).

2 Bases de la logique

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } P \text{ ou } Q)$

Lorsque $P \Rightarrow Q$, on dit que P est une condition suffisante à Q, et que Q est une condition nécessaire à P.

3 Calculs algébriques

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
Si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$

4 Calculs algébriques

Système homogène associé et ensemble des solutions du système initiale (une particulière + celles du système homogène associé).
Méthode du pivot de Gauss.

5 Ensembles, applications, relations

$A = \{2,3,4,5\}$ est défini en extension, et $B = \{n \in N; 2 \leq n < 6\}$ est défini en compréhension.
produit cartésien
graphe de l'application $f : E \to F$ la partie Γ de $E * F$ définie par $\Gamma = \{(x, f(x)); x \in E\}$.
application injective si, $\forall y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution $x \in E$.

Relation binaire anti-symétrique si, $\forall (x,y) \in E^2$, si xRy et yRx, alors $x = y$.
Une relation d'équivalence est une relation réflexive, symétrique, transitive.
Si R est une relation d'équivalence et x est un élément de E, on appelle classe d'équivalence de x l'ensemble des éléments y de E tels que xRy.
Une relation d'ordre est une relation réflexive, anti-symétrique, transitive.

Si R est une relation d'ordre sur E, alors
- on dit que l'ordre est total si on peut toujours comparer deux éléments de E: $\forall (x,y) \in E^2$, on a xRy ou yRx. Dans le cas contraire, on dit que l'ordre est partiel.
- si A est une partie de E et M est un élément de E, on dit que M est un majorant de A si, $\forall x \in A$, on a xRM.

6 Nombres complexes et trigonométrie

$|z|^2 = z\overline{z}$
Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire: Si $w \neq 0$ et $z \neq 0$, on a égalité si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que $z = cw$.
$\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Formule d'Euler: $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 * z_2 = \frac{c}{a}$
$z = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \forall k \in [\![0; n-1]\!]$

Si A, B et C sont trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b, c alors $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \bmod 2\pi$
Soit A un point du plan et soient k, θ deux réels avec $k > 0$. On appelle similitude directe d'angle θ et de rapport k l'application du plan dans lui-même qui à tout point M distinct de A associe le point M' défini par $AM' = kAM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \theta \bmod 2\pi$
La similitude directe de centre A, d'angle θ et de rapport $k > 0$ est la composée, dans n'importe quel ordre, de l'homothétie de

centre A et de rapport k et de la rotation de centre A et d'angle θ.

Soient a, b deux nombres complexes, $a \neq 0$. L'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = az + b$ est
- une translation si $a = 1$, l'affixe du vecteur de translation est alors égal à b
- une similitude directe si $a \neq 1$; son rapport est $|a|$, son angle est un argument de a, et son centre A admet pour affixe l'unique solution de l'équations aux points fixes $z = az + b$.

Pour mettre sous forme trigonométrique la somme de deux nombres complexes de même module, on factorise par l'angle moitié:
$re^{i\alpha} + re^{i\beta} = 2r\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$
Attention ! $\frac{\alpha-\beta}{2}$ n'est pas nécessairement positif, on n'a pas toujours automatiquement la forme trigonométrique. Dans le cas où ce réel est négatif, il faut faire un décalage d'angle de π.

7 Etudes des fonctions usuelles

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $f(a-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormé est alors symétrique par rapport à la droite $x = a/2$.

Si pour tout $x \in I$, on a $f'(x) > 0$ sauf éventuellement pour un nombre fini de réels x, alors f est strictement croissante.

$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

Exponentielles de base a: pour $a > 0$, $a^x = e^{xln\ a}$.
pour $\alpha \in \mathbb{R}, x^\alpha = e^{\alpha ln\ x}$

Dérivées de arcsin, arccos et arctan.
$\forall x \in [-1, 1]$, arccos x + arcsin $x = \frac{\pi}{2}$
$\forall x \geq 0$, arctan x + arctan $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ (et opposé sur $\mathbb{R}^-$)
Définitions de sh, ch et th.

8 Formulaire

$argsh(x) = ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$argch(x) = ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$argth(x) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
$argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Fonction	Primitive	Intervalle pour x (défaut: $\mathbb{R}$)
$a^x (a > 0$ et a $\neq 1)$	$\frac{a^x}{ln\ a}$	
$ln\ x$	$xln\ x - x$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{a^2+x^2} (a \neq 0)$	$\frac{1}{2a} ln \left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert = \frac{1}{a} argth\left(\frac{x}{a}\right)$	
$\frac{1}{sin\ xcos\ x}$	$ln\ \lvert tan\ x\rvert$	
$tan^2(x)$	$tan\ x - x$	

$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ et $2nI_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n$
$J_n = \int \frac{dx}{(1-x^2)^n}$ et $2nJ_{n+1} = \frac{x}{(1-x^2)^n} + (2n-1)J_n$