Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Probabilités 1

2023-2024

Exercice 1

Dans un jeu de 32 cartes, un tricheur a remplacé une autre carte que l'as de pique par un second as de pique. Une personne prend au hasard et simultanément trois cartes du jeu. Quelle est la probabilité pour qu'elle s'aperçoive de la tricherie ?

Exercice 2

On considère 100 dés dont 25 sont pipés. Pour ces derniers, la probabilité d'obtenir 6 est 1/2.

1. On prend un dé au hasard, on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On prend un dé au hasard, on le lance, on obtient 6. Quelle est la probabilité de que le dé soit pipé ?

Exercice 3 (2017)

Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé une étude sur le mode de paiement en caisse. On note M la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et C la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon. L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'estimer les probabilités suivantes :

$$\begin{aligned} P((M,C) = (0,0)) = 0,4 \\ P((M,C) = (0,1)) = 0,3 \\ P((M,C) = (1,0)) = 0,2 \\ P((M,C) = (1,1)) = 0,1 \end{aligned}$$

On estime que le temps d'attente à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Partie 1. Mode de paiement de la clientèle.

1. Déterminer les lois de M et C et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p = 3/5$.
2. Calculer l'espérance des variables C et M.
3. Calculer la covariance du couple (M, C). Les variables M et C sont-elles indépendantes ?

4. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?
5. On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus. Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n > 10$).
   a. On note C_n le nombre de clients qui paient par carte bancaire. Reconnaître la loi de C_n et en déduire le nombre moyen de clients qui payent par carte bancaire.
   b. On considère la variable aléatoire L_1 égale au rang du 1^{er} client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement s'il y en a au moins un, et à zéro sinon. Déterminer la probabilité que le premier client utilisant la carte bancaire soit le 5ème de la journée de la caissière.

Partie 2. Étude du temps moyen de passage en caisse.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Quel est le temps moyen d'attente à une caisse ?
3. Montrer que la fonction de répartition de T est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1-(x+1)e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   Calculer la probabilité que le temps d'attente à une caisse soit inférieur à deux unités (de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité.

Exercice 4 (Calculatrice)

Partie 1. Loi Binomiale.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi Binomiale $B(10, 0.25)$.

1. Calculer $P(X = 1)$.
2. Calculer $P(X \leq 3)$.
3. Calculer $P(X > 6)$.
4. Calculer $P(X \geq 5)$.

Partie 2. Loi Poisson.

Une entreprise de transport utilise 100 camions. On suppose que la variable aléatoire X, égale au nombre de camions en panne un jour donné, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.

1. Calculer la probabilité d'avoir 95 camions en service ce jour.
2. Calculer la probabilité d'avoir 6 camions ou moins en panne ce jour.
3. Calculer la probabilité d'avoir 90 ou moins camions en service ce jour.