

Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Analyse 2

2021-2022

Exercice 1

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - 1 + 2e^{-u_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[\ln 2, 2]$.
2. Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2

Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique, $p > 0$ un réel tels que :

$$a_0 = 1, \quad a_n = pa_{n-1}, \forall n \geq 1.$$

Quelle est l'expression de a_n en fonction de n ? Est-ce que la série de terme général a_n est convergente ?

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes :

1.

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

2.

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$$

3.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n + \ln n}{n^2}$$

4.

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{2n^2}{n^2 + n + 1} \right)^n$$

5.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$