Durée de préparation : 1 heure 30

Question

Le tableau ci-dessous résume les surfaces, en millier de m^2, utilisées pour l'installation de panneaux solaires destinée à la production électrique en France, entre 2008 et 2017.

Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Surface	527	583	744	917	1139	1302	1447	1595	1762	1916

1. Calculer le taux d'évolution de la surface dédiée à l'énergie solaire entre 2008 et 2017.
2. Déterminer le taux d'évolution annuel moyen entre 2008 et 2017.
3. En supposant que le taux d'évolution annuel moyen se stabilise à 15% après 2017, estimer à partir de quelle année la surface dédiée à l'énergie solaire dépassera 7 millions de m^2.

Exercice 1

La direction d'un hypermarché a effectué une étude sur les modes de paiement en caisse de ses clients. Pour cela, elle a effectué une enquête pendant une heure de pointe sur 10 de ses caisses dont les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Caisse n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre total de clients	36	45	34	41	38	46	30	47	37	41
Nombre de paiements par CB	9	13	13	12	14	16	11	12	16	15

Partie 1 : estimation des paramètres du modèle

On suppose que le nombre de personnes s'étant présentées à chacune des caisses est, pour chaque caisse, une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de même paramètre λ, et que ces variables aléatoires sont indépendantes.

1. A partir des données du tableau, expliquer pourquoi une estimation du paramètre λ peut être donnée par : $\lambda \approx 39,5$.
2. A l'aide de cette estimation, déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients se présentent à une caisse donnée.

On suppose qu'à chaque caisse, la probabilité qu'un client paye par carte bancaire (CB) est p, et que les modes de paiements des clients successifs sont indépendants.

3. A partir des résultats de l'enquête, montrer qu'une estimation de p peut être donnée par $p \approx 0,33$.
4. Donner un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance 95%.
5. Sachant que 30 clients s'y sont présentés, quelle est la probabilité qu'au plus 4 clients aient payé par carte bancaire à une caisse donnée ?

Partie 2 : étude d'indépendance

Nous étudions dans cette partie l'indépendance entre le nombre de clients d'une caisse donnée payant par carte bancaire, et le nombre de clients utilisant un autre mode de paiement à la même caisse pendant une heure de pointe.

Pour cela, on considère les variables aléatoires suivantes :

$Z =$ « nombre total de clients payant à cette caisse pendant une heure de pointe »,

$X =$ « nombre de clients payant à cette caisse par carte bancaire pendant cette même heure de pointe »,

$Y =$ « nombre de clients utilisant à cette caisse un autre mode de paiement pendant la même heure de pointe ».

On a donc : $Z = X + Y$.

On suppose que :

- Z suit une loi de Poisson de paramètre λ.
- la probabilité qu'un client paye par carte bancaire à une heure de pointe est constante et égale à p.

1. Pour tout entier naturel n et tout entier k positif inférieur ou égal à n, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{\{Z=n\}}(X = k)$, que k clients payent par carte bancaire à une caisse donnée sachant que n clients sont passés à cette caisse.
2. (a) Déterminer a tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^n}{n!}\lambda^n = e^a$.

   (b) Pour k entier naturel, exprimer $P(X = k)$ en fonction des probabilités $P_{\{Z=n\}}(X = k)$ et $P(Z = n)$ où $n \in \mathbb{N}$.

   (c) En déduire que la variable aléatoire X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
3. On admet que Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1 - p)$.

   Montrer que le nombre de personnes payant par carte bancaire est indépendant du nombre de personnes utilisant un autre mode de paiement.

Exercice 2

En 1928, C. Cobb et P. Douglas ont modélisé la croissance américaine entre 1899 et 1922 par la relation :

$$Q(L, K) = 1.01\, L^{0.25} K^{0.75}$$

où Q, K, L désignent respectivement la production totale, le capital investi et la quantité de travail.

1. Calculer $Q(147, 208)$ et $Q(147, 210)$ et évaluer en pourcentage, les variations relatives $\frac{\Delta Q}{Q}$ et $\frac{\Delta K}{K}$ quand K passe de la valeur 208 à 210, L restant égal à 147.
2. Calculer $Q(aL, aK)$, a réel positif, en fonction de $Q(L, K)$ et de a. Interpréter votre résultat.
3. Elasticité

   (a) Calculer l'élasticité partielle de Q par rapport à K au point $(147, 208)$. Interpréter le résultat.

   (b) Vérifier la cohérence avec le résultat de la question 1).
4. On désigne respectivement par p_L et p_K les coûts unitaires du travail et du capital.

   (a) Expliciter l'expression de la fonction de coût C en fonction de L et de K.

(b) On suppose que $p_L = 2$ et $p_K = 5$ et que la production est fixée à $Q = 300$. Le but des questions qui suivent est de minimiser le coût.

   i. Le niveau de production étant de 300, donner l'expression de K en fonction de L et construire dans un repère la courbe de niveau $Q = 300$, K étant portée en ordonnée et L en abscisse.

   ii. Tracer dans le même repère la courbe de niveau $C(L, K) = 1000$.

   iii. Montrer que minimiser le coût se ramène à minimiser une fonction d'une variable que l'on explicitera.

   iv. Déterminer les valeurs de L et de K qui minimisent le coût et calculer le coût minimum sous la contrainte $Q = 300$.
   Donner l'interprétation graphique.