Durée de préparation : 1 heure 30

Question

Vous placez 10000 € à un taux de rémunération t. On note $C(t)$ le capital après 20 années.

1. Exprimer $C(t)$ en fonction de t.

   Corrigé:
   $$C(t) = 10000(1+t)^{20}$$
   où, par exemple, $t = 0.03$ correspond à un taux de rémunération de 3%.

2. Calculer l'élasticité de C par rapport à t.

   Corrigé:
   $$e_{C/t} = t\frac{C'(t)}{C(t)} = t\frac{10000 \cdot 20 \cdot (1+t)^{19}}{10000(1+t)^{20}} = \frac{20t}{1+t}$$

3. En déduire l'influence d'une baisse de 10% du taux sur le capital.

   Corrigé: L'élasticité est le rapport entre le pourcentage de variation de deux variables. Sachant le pourcentage de variation d'une on peut calculer l'autre. Une baisse de 10% du taux de rémunération produit une baisse du capital après 20 années de $10 \times e_{C/t}\,\% = 10\frac{20t}{1+t}\,\%$. Par exemple, si initialement le taux de rémunération était de 3% ($t = 0.03$), une baisse de 10% du taux produit une baisse du capital après 20 années de $10\frac{20 \cdot 0.03}{1.03}\% \approx 5.8\%$, c'est-à-dire une baisse de capital de environ 6%.

Exercice 1

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2(1,03)^x - (1,05)^x$.

A. Étude de la fonction f

1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   Corrigé: f est continue sûr tout $\mathbb{R}$ et s'annule seulement si
   $$2 \cdot 1.03^x = 1.05^x$$
   ou
   $$\left(\frac{1.05}{1.03}\right)^x = 2$$
   Si on applique le logarithme aux deux côtés, on obtient
   $$\ln\left(\frac{1.05}{1.03}\right)^x = x\ln\left(\frac{1.05}{1.03}\right) = \ln 2$$

d'où la racine de f est

$$x = \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1.05}{1.03}\right)} \approx 36.04$$

Pour connaître le signe de f ça suffit d'évaluer

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(50) \approx -2.7$$

Finalement, f est positive pour $x < 36.04$ et négative pour $x > 36.04$.

Pour étudier les variations de f, on peut calculer sa dérivée. Pour cela, on peut écrire f de la façon suivante :

$$f(x) = 2e^{x \ln 1.03} - e^{x \ln 1.05}$$

Maintenant,

$$f'(x) = 2e^{x \ln 1.03} \ln 1.03 - e^{x \ln 1.05} \ln 1.05$$

Comme avant, $f'(x) = 0$ seulement si

$$2e^{x \ln 1.03} \ln 1.03 = e^{x \ln 1.05} \ln 1.05$$

ou

$$2 \cdot 1.03^x \ln 1.03 = 1.05^x \ln 1.05$$

et

$$\left(\frac{1.05}{1.03}\right)^x = 2\frac{\ln 1.03}{\ln 1.05}$$

Comme avant, le logarithme nous donne

$$x \ln\left(\frac{1.05}{1.03}\right) = \ln\left(2\frac{\ln 1.03}{\ln 1.05}\right)$$

et la racine de f' est donc

$$x = \frac{\ln\left(2\frac{\ln 1.03}{\ln 1.05}\right)}{\ln\left(\frac{1.05}{1.03}\right)} \approx 9.98$$

En évaluant $f'(0) \approx 0.01$ et $f'(20) \approx -0.023$ on peut conclure que f' est positive pour $x < 9.98$ et négative pour $x > 9.98$. Cela suggère que $x \approx 9.98$ est un maximum de f, chose qu'on peut vérifier avec la dérivée seconde :

$$f''(x) = 2e^{x \ln 1.03}(\ln 1.03)^2 - e^{x \ln 1.05}(\ln 1.05)^2$$

et $f''(9.98) \approx -0.0015 < 0$, qui confirme que c'est bien un maximum local de f.

On peut conclure que f est croissante jusqu'à $x = 9.98$ où elle atteint son maximum et après est décroissante.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Corrigé: D'une part,

$$\lim_{x\to-\infty} 1.03^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} 1.05^x = 0$$

alors

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2\cdot 1.03^x - 1.05^x = 0$$

D'autre part, la limite en $+\infty$ est indéterminé car c'est la soustraction de

$$\lim_{x\to+\infty} 1.03^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} 1.05^x = +\infty$$

Mais, comme $0 < \frac{1.03}{1.05} < 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot 1.03^x}{1.05^x} = \lim_{x\to+\infty} 2\left(\frac{1.03}{1.05}\right)^x = 0$$

Cela montre que $2\cdot 1.03^x$ est négligeable devant 1.05^x quand $x \to +\infty$ et le deuxième terme est donc dominant. Finalement,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\cdot 1.03^x - 1.05^x = -\infty$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé:

x		9.98		36.04	
f	$+$	$+$	$+$	0	$-$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

B. Projet d'entreprise

Une PME dispose d'un capital initial de 600K euros. Elle décide de placer ce capital au 1er janvier 2015 au taux annuel de 3%. Les intérêts s'ajouteront au capital au 31 décembre de chaque année. Par ailleurs cette entreprise pense louer, à partir du 1er janvier 2016, des locaux supplémentaires pour étendre ses activités. Pour pouvoir faire face à d'éventuels problèmes de trésorerie, l'entreprise négocie un prix de location inférieur au marché mais réactualisé chaque année de 5%. Le montant annuel de la location, payable d'avance, au 31 décembre de l'année précédente est fixé initialement à 12K euros. Le loyer est prélevé directement sur le capital.

On note C_n le capital en K euros disponible au 1er janvier de l'année 2015+n et L_n le montant en K euros du loyer annuel pour l'année 2015+n. Ainsi, on a $C_0 = 600$ et $L_1 = 12$. C_{n+1} désigne alors le capital disponible après capitalisation des intérêts de l'année 2015 + n et versement du loyer pour l'année 2015 + $(n + 1)$.

1. Déterminer le capital C_1 qui sera disponible au 1er janvier 2016.

Corrigé:

$$C_1 = 600 \cdot 1.03 - 12$$

2. Déterminer L_n en fonction de n.

   Corrigé:
   $$L_n = 12 \cdot 1.05^{n-1}$$

3. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n et L_{n+1}.

   Corrigé:
   $$C_{n+1} = 1.03C_n - L_{n+1}$$

4. Exprimer C_{n+2} en fonction de C_{n+1} et de L_{n+1}.

   Corrigé:
   $$C_{n+2} = 1.03C_{n+1} - L_{n+2} = 1.03C_{n+1} - 1.05L_{n+1}$$

5. En déduire que $C_{n+2} = 2,08C_{n+1} - 1,0815C_n$.

   Corrigé: De l'équation obtenue dans la question (3) on peut déduire que
   $$L_{n+1} = 1.03C_n - C_{n+1}$$
   que si on la remplace dans l'équation de la question (4) on obtient
   $$C_{n+2} = 1.03C_{n+1} - 1.05(1.03C_n - C_{n+1}) = 2.08C_{n+1} - 1.0815C_n$$
   comme demandé.

6. Vérifier que $C_1 = 600f(1)$ et que $C_2 = 600f(2)$.

   Corrigé:
   $$C_1 = 1.03 \cdot 600 - 12$$
   $$600f(1) = 600(2 \cdot 1.03 - 1.05) = 1.03 \cdot 600 + 600(1.03 - 1.05) = 1.03 \cdot 600 - 12$$
   On obtient bien $C_1 = 600f(1)$. Aussi,
   $$C_2 = 1.03(1.03 \cdot 600 - 12) - 12 \cdot 1.05$$
   et un petit calcule nous amène à
   $$C_2 = 600(1.03^2 - 0.0416)$$
   $$600f(2) = 600(2 \cdot 1.03^2 - 1.05^2) = 600(1.03^2 - 0.0416)$$
   On a donc bien vérifié ce qui était demandé.

7. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $C_n = 600f(n)$.

   Corrigé: On va raisonner par récurrence. On connaît déjà l'initialisation, obtenue dans la question précédente. Maintenant, si l'on suppose que l'expression est vrai pour n et $n+1$, on va montrer qu'elle est vrai aussi pour $n+2$. D'après la question (5),

$$C_{n+2} = 2.08C_{n+1} - 1.0815C_n$$

   Si on remplace les expressions de C_{n+1} et C_n on obtient

$$\begin{aligned}
C_{n+2} &= 2.08 \cdot 600 \cdot f(n+1) - 1.0815 \cdot 600 \cdot f(n) && (1)\\
&= 600\Big(2.08(2 \cdot 1.03^{n+1} - 1.05^{n+1}) - 1.0815(2 \cdot 1.03^n - 1.05^n)\Big) && (2)\\
&= 600\Big((2.08 \cdot 1.03 - 1.0815)2 \cdot 1.03^n - (2.08 \cdot 1.05 - 1.0815)1.05^n\Big) && (3)\\
&= 600\Big(1.0609 \cdot 2 \cdot 1.03^n - 1.1025 \cdot 1.05^n\Big) && (4)\\
&= 600\Big(1.03^2 \cdot 2 \cdot 1.03^n - 1.05^2 \cdot 1.05^n\Big) && (5)\\
&= 600(2 \cdot 1.03^{n+2} - 1.05^{n+2}) && (6)\\
&= 600f(n+2) && (7)
\end{aligned}$$

   Par récurrence, $C_n = 600f(n)$ pour tout $n \geq 1$.

8. A l'aide des résultats concernant la fonction f justifier que ce projet ne peut pas durer indéfiniment et indiquer à quel moment l'entreprise devra changer de projet pour optimiser les gains de son placement.

   Corrigé: Comme

$$\lim_{n \to +\infty} C_n = \lim_{n \to +\infty} 600f(n) = -\infty$$

   on sait que l'entreprise perdra tout son capital si elle continue ce projet trop longtemps. Le moment idéal pour changer de projet est quand le capital est au maximum. D'après la partie A le maximum de f est en $x \approx 9.98$. Le maximum de C_n s'obtient donc avec n proche de 9.98 aussi, ce qui correspond à l'année $2015 + 9.98 \approx 2025$.

9. En supposant que l'entreprise ne peut interrompre ses engagements qu'au 31 décembre d'une année entamée (avant le versement du loyer de l'année suivante), à quelle date le projet sera t'il arrêté ? Quel sera le capital à cette date ?

   Corrigé: L'entreprise doit interrompre ses engagements le 31 décembre 2024. À ce moment le capital sera $1.03C_9$ car les intérêts du capital disponible au 1er janvier 2024 (C_9) seront ajoutés :

$$1.03C_9 = 1.03 \cdot 600 \cdot f(9) = 1.03 \cdot 600(2 \cdot 1.03^9 - 1.05^9) \approx 653.98$$

   Ce capital est supérieur à $C_{10} \approx 635.36$ car le loyer de l'année 2025 ne sera pas payé.

Exercice 2

Dans un grand magasin, on observe le nombre de clients x se présentant aux caisses pendant des intervalles de temps d'une minute. Après trois heures d'observation, on dispose de 180 données selon le tableau suivant.

Nombre de clients x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 et plus
Nombre d'intervalles de 1 minute n_i	5	5	18	32	35	30	24	15	10	3	2	0	1	0

A. Étude de la série

On pourra donner sans justification les résultats fournis par la calculatrice.

1. Calculer la moyenne $\overline{x}$ de cette série statistique.

   Corrigé:

$$\overline{x} = \frac{1}{180}\sum_{i=0}^{13} n_i x_i \approx 4,527.$$

2. Calculer la variance et l'écart-type σ_x de cette série statistique.

   Corrigé:

$$\mathrm{Var}(x) = \frac{1}{180}\sum_{i=0}^{13} n_i x_i^2 - \overline{x}^2 \approx 25,0055 - (4,527)^2 \approx 4,505.$$

$$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{Var}(x)} \approx 2,122.$$

B. Test d'adéquation à une loi de Poisson

On va tester l'hypothèse suivant laquelle la variable aléatoire X : « nombre de clients se présentant aux caisses pendant des intervalles de temps d'une minute » suit une loi de Poisson.

1. Justifier que l'on peut prendre comme paramètre λ de la loi de Poisson : $\lambda = 4,5$.

   Corrigé: La moyenne empirique $\overline{x}$ est un estimateur sans biais et convergent de $E(X)$. Alors, si on modélise X comme une loi Poisson de paramètre λ, $E(X) = \lambda$. En conséquence, c'est logique de prendre $\lambda = 4,5$. En plus, la variance d'une loi Poisson de paramètre λ est aussi égal à λ. Comme la variance empirique est un estimateur asymptotiquement sans biais de la variance, les calculs de la partie 2 justifient aussi la choix de cette valeur pour λ.

2. Préciser le type de test utilisé et formuler les hypothèses H_0 et H_1 du test.

   Corrigé: On utilise un test du khi-deux d'adéquation à une loi. Les hypothèses du test sont :
   H_0) X suit une loi Poisson de paramètre $\lambda = 4,5$ (c'est à dire $P(X = k) = \frac{4,5^k}{k!}e^{-4,5}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$),

H_1) X ne suit pas une loi Poisson de paramètre $\lambda = 4,5$.

Remarque: pour ce type de tests il faut bien préciser le paramètre λ. Ce n'est pas un test d'adéquation à une famille de lois Poisson mais un test d'adéquation à une loi de Poisson particulière, celle avec $\lambda = 4,5$.

3. Le tableau des effectifs observés et des effectifs théoriques est le suivant :

x_i	Effectifs observés O_i	Effectifs théoriques np_i
0 et 1	10	11
2	18	20,25
3	32	30,37
4	35	34,17
5	30	30,75
6	24	23,06
7	15	14,83
8	10	8,34
9 et plus	6	7,23

a) Expliquer pourquoi on a regroupé les deux premières valeurs et les dernières valeurs.

Corrigé: On regroupe les effectifs supérieurs ou égaux à 9 ainsi que les deux premières valeurs dans une même classe, car les effectifs théoriques associés a ces classes sont trop petits (inférieures à 5).

b) Comment s'obtiennent les valeurs de la colonne « Effectifs théoriques » ? Donner un exemple.

Corrigé: Les effectifs théoriques s'obtiennent en multipliant la probabilité (ou fréquence) théorique de chaque classe par l'effectif total.

Pour la première classe : $11 = 180\left(\frac{4,5^0}{0!}e^{-4.5} + \frac{4,5^1}{1!}e^{-4.5}\right)$,

Pour les classes $2, \ldots 8$: $\text{Effectif théorique}_i = 180\left(\frac{4,5^i}{i!}e^{-4.5}\right)$,

Pour la dernière classe il suffit de soustraire à 180 les effectifs théoriques des classes précédentes.

4. a) Préciser la statistique du test et donner sa loi.

Corrigé: La statistique du test est $D = \sum_{i=1}^{9} \frac{(O_i - np_i)^2}{np_i}$.

Si on considère que le paramètre λ est donnée (et pas estimé à partir des données), D suit une loi khi-deux à $(9-1) = 8$ degrés de liberté.

Si on considère que le paramètre λ a été estimé à partir des données, on perd un degré de liberté supplémentaire. Alors dans ce cas D suit une loi khi-deux à $(9-2) = 7$ degrés de liberté.

b) La valeur de la statistique du test est 1,05. Comment obtient-on cette valeur ? Quelle est la conclusion du test avec un risque de première espèce de $\alpha = 5\%$.

Corrigé:

$$1,05 = \frac{(10-11)^2}{11} + \frac{(18-20,25)^2}{20,25} + \cdots + \frac{(6-7.23)^2}{7.23}.$$

Comme $k_{7;0,05} = 14,067$ et $k_{8;0,05} = 15,507$ sont plus grands que la valeur de la statistique, indépendamment des considérations mentionnées dans la partie précedante, on ne rejette pas H_0.

5. Un logiciel précise que la p-valeur de ce test est 0,994. En utilisant cette p-valeur, donner la conclusion de ce test avec un risque de $\alpha = 1\%$. Interpréter le résultat.

   Corrigé: Comme la p-valeur est plus grande que α, on ne rejette pas H_0. En effet, une p-valeur si grande indique une preuve faible contre l'hypothèse nulle.