

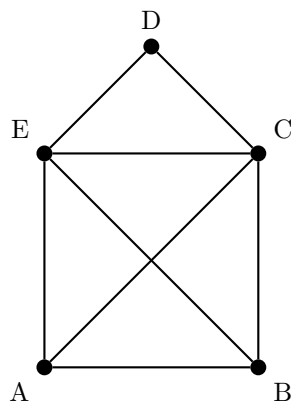
Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Graphes et graphes probabilistes

2022-2023

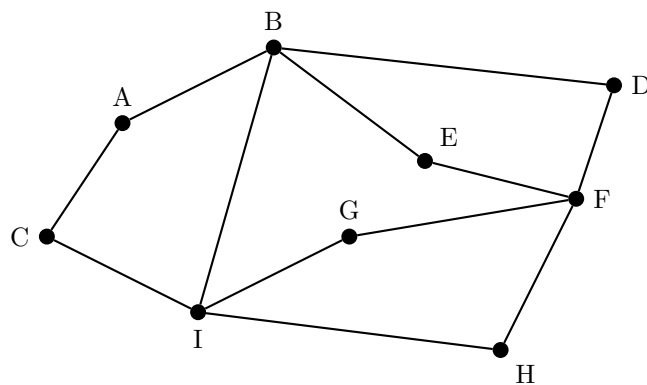
Exercice 1

Montrer que le graphe suivant admet une chaîne eulérienne :



Exercice 2 (2016)

Les rues empruntées par un livreur sont schématisées par le graphe non orienté ci-contre.



1. Quel est l'ordre de ce graphe ?
2. Quel est le degré du sommet B ?
3. Ce graphe est-il complet ?
4. Ecrire la matrice d'adjacence associée à ce graphe non orienté.
5. Quel est le nombre de chaînes de longueur 3 reliant le sommet A au sommet G ?

Exercice 3 (2015)

On considère une grande population d'acheteurs de yaourts. On suppose que l'effectif de cette population est stable. Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y. 30% des acheteurs de yaourts achètent la marque Y. L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes. Au bout d'une semaine, une enquête indique que :

- 20% des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent des yaourts Y.
- 10% des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.

L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.

1. Donner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2. Soit $X_0 = (0.3 \quad 0.7)$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.
 - (a) Donner la matrice de transition (notée A) associée au graphe précédent.
 - (b) Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.
3. Diagonaliser la matrice A . On déterminera les matrices P inversible et D diagonale telles que $A = P \times D \times P^{-1}$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.
5. L'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70% ? Justifier.
6. Au bout de combien de temps atteindra-t-elle une part de marché supérieure ou égale à 66% ?

Exercice 4 (2014)

Afin d'inciter ses clients potentiels à acheter des paquets de céréales, un fabricant de produits alimentaires insère dans ceux-ci une figurine. Il y a trois sortes de figurines distinctes et le fabricant a indiqué sur les paquets que : « Les figurines sont également réparties dans les paquets. »

Un inspecteur des fraudes, ayant observé ce qui se passait pour 1000 personnes achetant chaque semaine un paquet de céréales et voyant qu'au bout de 12 semaines, 15 personnes n'avaient que 2 figurines sur trois, a déclaré mensongère l'inscription sur la répartition uniforme des figurines dans les paquets. Que penser de ce qu'il affirme ?

On suppose donc dans cet exercice que le tirage des figurines est équiprobable.

1. Déterminer la probabilité p_1 d'avoir une figurine au bout d'une semaine.
2. Déterminer la probabilité p_2 (respectivement q_2) d'avoir une figurine (respectivement 2 figurines distinctes) au bout de deux semaines.
3. Déterminer la probabilité p_3 (respectivement q_3, r_3) d'avoir une figurine (respectivement 2, 3 figurines distinctes) au bout de trois semaines.
4. Calculer la probabilité p_n (respectivement q_n, r_n) d'avoir une figurine (respectivement 2, 3 figurines distinctes) au bout de n semaines en fonction de p_{n-1} , q_{n-1} et r_{n-1} .
5. On appelle U_n le vecteur colonne $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.

Ecrire les résultats de la question précédente avec une relation matricielle entre U_n et U_{n-1} .

6. En utilisant la question précédente et la calculatrice, calculer p_{12} , q_{12} et r_{12} . Que pensez-vous de la déclaration de l'inspecteur ?