Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Compléments sur les fonctions de plusieurs variables

2020-2021

1 Coordonnées cartésiennes

Un système de coordonnées cartésiennes permet de déterminer la position d'un point dans un espace affine muni d'un repère cartésien.

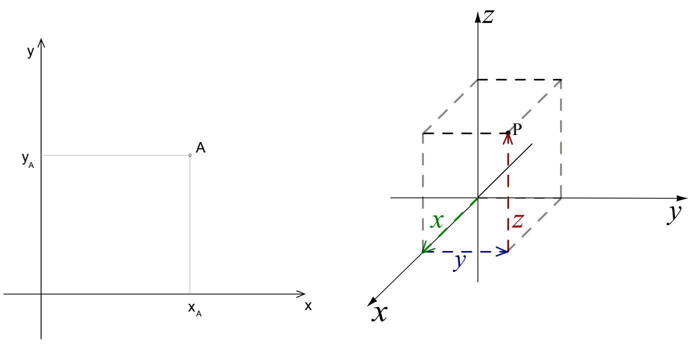


Figure 1: Coordonnées cartésiennes planaires et tridimensionnelles.

2 Produit scalaire

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on définie le produit scalaire de x et y comme

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

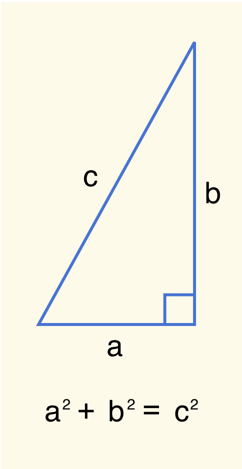
On appelle norme de x,

$$||x|| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

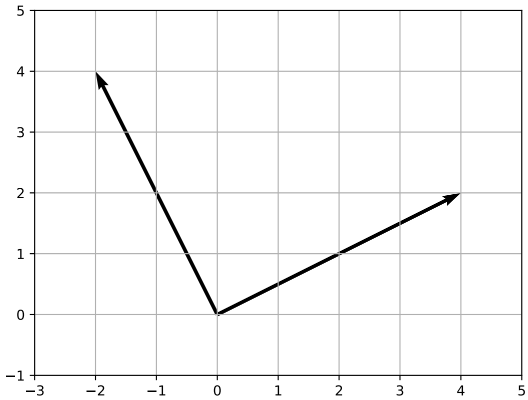
On dit que x et y sont orthogonaux si

$$x \cdot y = 0.$$

Ces notions correspondent aux notions usuelles dans la géométrie Euclidienne.

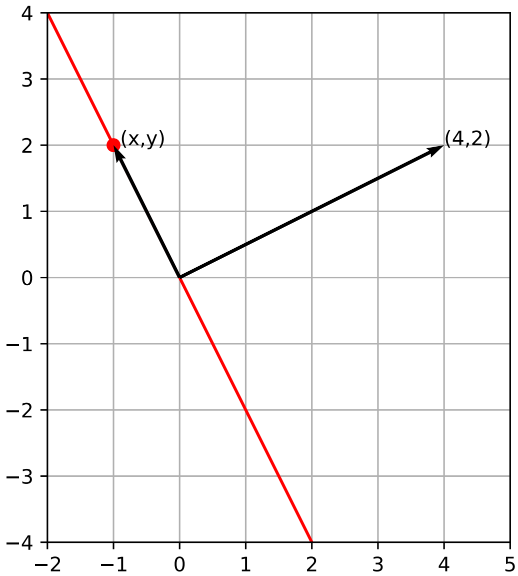


Exemple : la norme du vecteur (a, b) dans le plan est $\sqrt{a^2 + b^2}$.



Exemple : Les vecteurs $x = (4, 2)$ et $y = (-2, 4)$ sont orthogonaux car $x \cdot y = 4 \times -2 + 2 \times 4 = 0$.

3 Équation d'une droite en $\mathbb{R}^2$ et d'un plan en $\mathbb{R}^3$

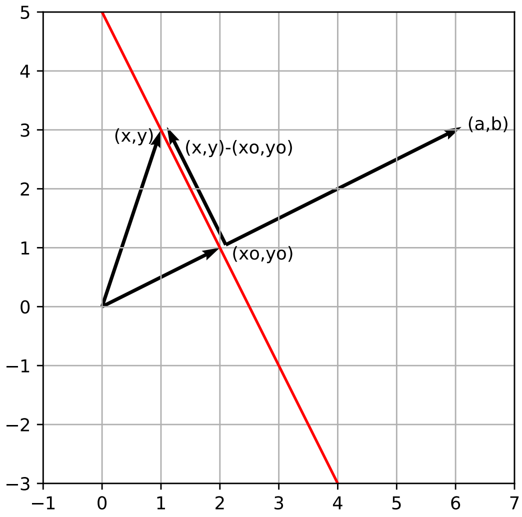


Les points de la droite rouge sont orthogonaux au vecteur $(4, 2)$. Si le point (x, y) appartient à la droite il satisfait

$$(x, y) \cdot (4, 2) = 0.$$

D'où, l'équation de la droite est

$$4x + 2y = 0.$$



Pour les points (x, y) de la droite rouge, les vecteurs $(x, y) - (x_0, y_0)$ sont orthogonaux au vecteur (a, b). Donc,

$$\Big((x, y) - (x_0, y_0)\Big) \cdot (a, b) = 0$$

d'où

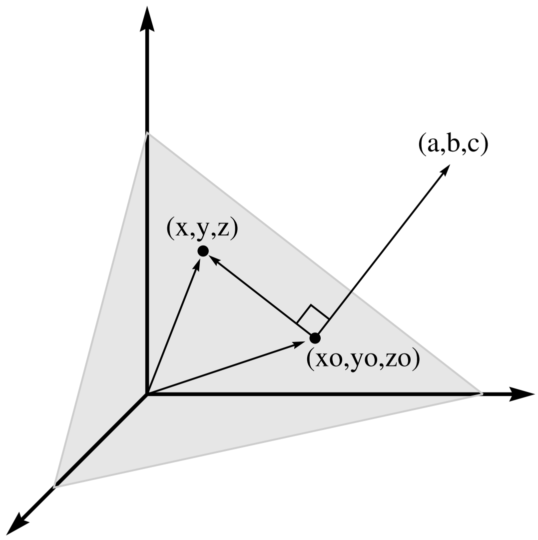
$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0$$

et

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b = ax + by - ax_0 - by_0 = 0$$

Si on appelle $c = -ax_0 - by_0$ on arrive à la forme générale d'une droite dans le plan:

$$ax + by + c = 0$$



Une procédure semblable nous permet d'obtenir l'équation d'un plan dans l'espace. Le plan est déterminé par un point du plan (x_0, y_0) et un vecteur normal au plan (a, b, c). Maintenant, pour tout point du plan (x, y, z), le vecteur $(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal au vecteur (a, b, c). Alors,

$$\Big((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\Big) \cdot (a, b, c) = 0$$

d'où

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$

et

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$$

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

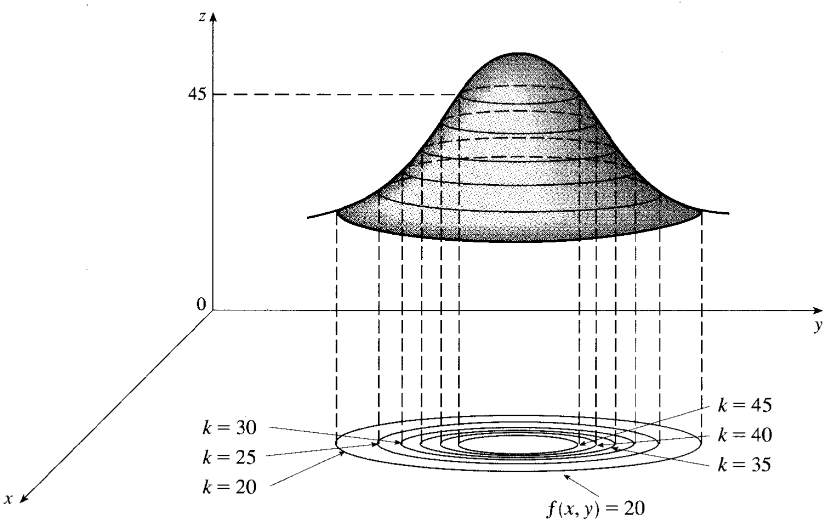
Si on appelle $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ on arrive à la forme générale d'un plan dans l'espace:

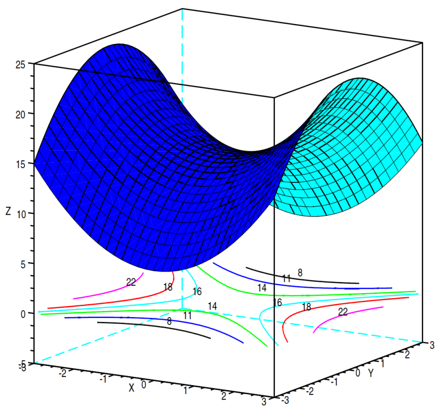
$$ax + by + cz + d = 0$$

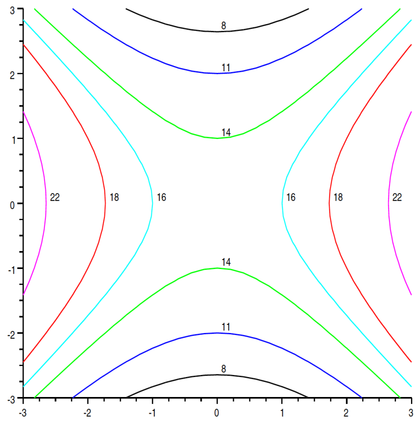
4 Représentation graphique par des courbes de niveau

Les courbes de niveau sont en cartographie les courbes reliant les points de la carte ayant la même altitude : un chemin qui suit les courbes de niveau ne monte ni ne descend; s'il traverse les courbes de niveau, il monte ou il descend, passant d'un niveau à un autre niveau.

Mathématiquement, la courbe de niveau k d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ qui vérifient l'équation $f(x) = k$.







5 Fonctions homogènes

Définition 1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est* homogène *de degré r si et seulement si*

$$\forall x \in A, \qquad \forall \lambda > 0, \qquad f(\lambda x) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x)$$

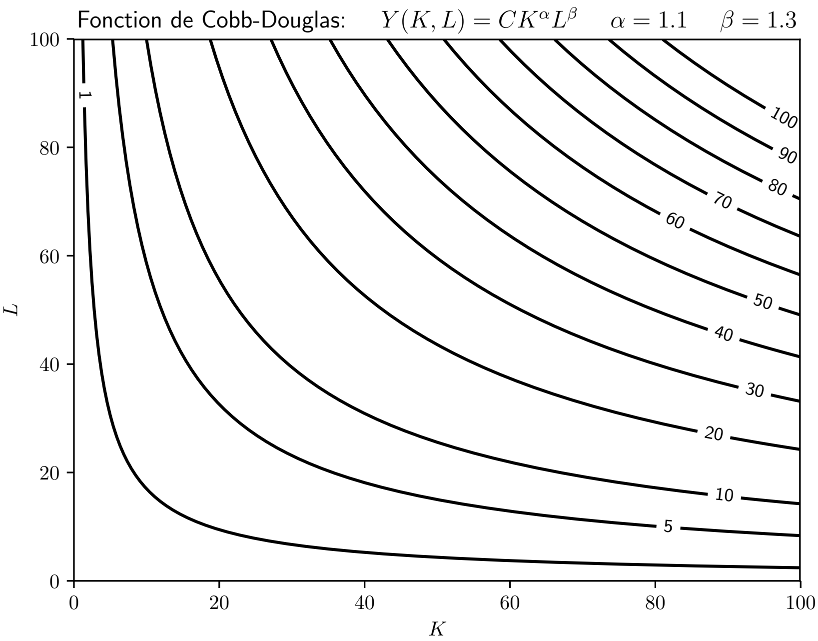
Fonction de Cobb-Douglas On appelle fonction de Cobb-Douglas à deux variables à

$$Y(K, L) = c\, K^{\alpha}\, L^{\beta}$$

On peut voir que

$$Y(\lambda K, \lambda L) = c\, (\lambda K)^{\alpha}\, (\lambda L)^{\beta} = c\, \lambda^{\alpha}\, K^{\alpha}\, \lambda^{\beta}\, L^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}\, c\, K^{\alpha}\, L^{\beta}$$

On peut conclure que la fonction de Cobb-Douglas est homogène de degré $\alpha + \beta$.



Rendements d'échelle Si une fonction f homogène de degré r réprésente le niveau de production d'une entreprise, la valeur de r nous indique la variation de production si on augmente les variables de production par un facteur $\lambda > 1$:

Si $r < 1$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r f(x,y) < \lambda f(x,y)$$

car $\lambda^r < \lambda$. On dit que f est à rendements d'échelle décroissants.

Si $r > 1$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r f(x,y) > \lambda f(x,y)$$

car $\lambda^r > \lambda$. On dit que f est à rendements d'échelle croissants.

Si $r = 1$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r f(x,y) = \lambda f(x,y)$$

On dit que f est à rendements d'échelle contants.