Durée de préparation : 1 heure 30.

Question de cours :

Rappelez la démarche d'un test d'hypothèse, quel est le risque qu'on contrôle ?

Exercice 1

On considère un pays décomposé en trois régions : la capitale, sa périphérie et la province. On suppose qu'à l'année 0 de l'analyse, la population de ce pays est répartie de la manière suivante : 24% de la population habite dans la capitale, 6% réside dans la périphérie et le reste de la population vit en province.

Pour modéliser l'exode rural, on considère que les mouvements de la population sont décrits par les mécanismes suivants. D'une année sur l'autre :

- parmi les habitants de province, 1 sur 10 déménage vers la capitale et 2 sur 10 vers la périphérie ;
- parmi les habitants de la périphérie, 1 sur 10 se déplace vers la capitale et 1 sur 10 décide de s'installer en province ;
- parmi les habitants de la capitale, 1 sur 10 décide d'aller habiter en périphérie.

On suppose en outre que la population totale est constante. On note a_n, b_n et c_n les parts de la population vivant au bout de n années respectivement dans la capitale, dans la périphérie ou en province.

1. Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même avec b_{n+1} et c_{n+1}. Quel lien y a-t-il entre a_n, b_n et c_n ?

2. Pour tout entier naturel n, on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ -0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.

3. Déterminer une matrice C telle que $C = AC + B$.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n = X_n - C$. Montrer que, pour tout entier n, $Y_n = A^n Y_0$.

5. Quelles sont les valeurs propres de A ? Déterminer une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

6. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ \frac{0,6^n - 0,8^n}{2} & 0,6^n \end{pmatrix}, \text{ puis que } X_n = \begin{pmatrix} 0,5 - 0,26 \times 0,8^n \\ 0,375 - 0,445 \times 0,6^n + 0,13 \times 0,8^n \end{pmatrix}.$$

7. En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n. Quelle sera la répartition de la population de ce pays à long terme ?

Exercice 2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-après :

X \ Y	1	2	3	4
1	0,08	0,04	0,16	0,12
2	0,04	0,02	0,08	0,06
3	0,08	0,04	0,16	0,12

1. Déterminer les lois marginales de X et Y et indiquer si ces variables aléatoires sont indépendantes.
2. Déterminer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
3. Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.
4. On pose $T = \inf(X, Y)$ et $U = \sup(X, Y)$. Déterminer la loi du couple (T, U).