Durée de préparation : 1 heure 30.

Question de cours :

Qu'est-ce qu'un estimateur, un estimateur sans biais et le risque quadratique d'un estimateur ?

Exercice 1

On s'intéresse à l'évolution, sur une suite de périodes, de la population d'un pays, divisée en enfants et en adultes.

Partie A

On estime que, d'une période à la suivante :
Le taux de mortalité des enfants est de 20%, et les survivants deviennent des adultes.
Le taux de mortalité des adultes est de 100%.
Le nombre moyen d'enfants auxquels chaque adulte donne naissance est de $1,2$.

On appelle e_n et a_n respectivement le nombre d'enfants et d'adultes à la période n. On pose de plus, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} e_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n : $X_{n+1} = AX_n$.

   $\forall n \in \mathbb{N}$,

   $$\begin{cases} e_{n+1} &= 1,2a_n \\ a_{n+1} &= 0,8e_n \end{cases}$$

   Nous pouvons déduire A de ces deux relations :

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1,2 \\ 0,8 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On suppose que les adultes comme les enfants étaient au nombre de 10 millions à la période 0. En utilisant la matrice A^2, déterminer le nombre d'enfants et d'adultes à la période 2, puis à la période 10.

   $$A^2 = \begin{pmatrix} 0,96 & 0 \\ 0 & 0,96 \end{pmatrix}$$

   $$A^{10} = \left(A^2\right)^5 = \begin{pmatrix} 0,96^5 & 0 \\ 0 & 0,96^5 \end{pmatrix}$$

   De ces deux nouvelles matrices, nous trouvons finalement que $\forall n \in \mathbb{N}$,

   $$\begin{cases} e_2 &= 0,96e_0 = 9\ 600\ 000 \\ a_2 &= 0,96a_0 = 9\ 600\ 000 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} e_{10} &= 0,96^5e_0 = 8\ 153\ 727 \\ a_{10} &= 0,96^5a_0 = 8\ 153\ 727 \end{cases}$$

3. Sous les hypothèses du problème, comment la population de ce pays évolue-t-elle à long terme ?

   $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^{2n} &= \begin{pmatrix} 0,96^n & 0 \\ 0 & 0,96^n \end{pmatrix} \\ A^{2n+1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1,2 \cdot 0,96^n \\ 0,8 \cdot 0,96^n & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Comme $0,96^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, A^n tend vers la matrice nulle lorsque n tend vers l'infini. Sous les hypothèses du problème, la population de ce pays va disparaître à long terme.

Partie B

On suppose ici que le taux de mortalité infantile est toujours de 20%, et que chaque adulte donne en moyenne naissance à $1,25$ enfants d'une période à la suivante. Etudier les deux suites (e_n) et (a_n) définies précédemment.

En augmentant le nombre moyen de naissances par adulte à 1,25 enfants, nous obtenons maintenant :

$$\begin{cases} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1,25 \\ 0,8 & 0 \end{pmatrix} \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} e_{2n} &= e_0 = 10\ 000\ 000 \\ a_{2n} &= a_0 = 10\ 000\ 000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_{2n+1} &= 1,2a_0 = 12\ 000\ 000 \\ a_{2n+1} &= 0,8e_0 = 8\ 000\ 000 \end{cases}$$

Partie C

On appelle désormais, d'une période à la suivante : t le taux de mortalité infantile, et m le nombre moyen d'enfants auxquels un adulte donne naissance (le taux de mortalité des adultes étant toujours de 100%).

1. Déterminer une relation fonctionnelle du type $m = f(t)$ assurant la stabilité de la population (en volume et en répartition) entre deux périodes n et $n+2$.

   $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} e_{n+2} &= ma_{n+1} &= m(1-t)e_n \\ a_{n+2} &= (1-t)e_{n+1} &= m(1-t)a_n \end{cases}$$

   Il est donc nécessaire pour assurer la stabilité de la population d'avoir

$$m = \frac{1}{1-t}$$

2. Etudier la fonction f sur l'intervalle $[0;1[$. Interpréter dans le problème donné le sens de variation de f, la quantité $f(0)$, et la limite de la fonction f au point 1.

   f est continue et dérivable sur l'intervalle $[0,1[$.

$$f'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

t	0		1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

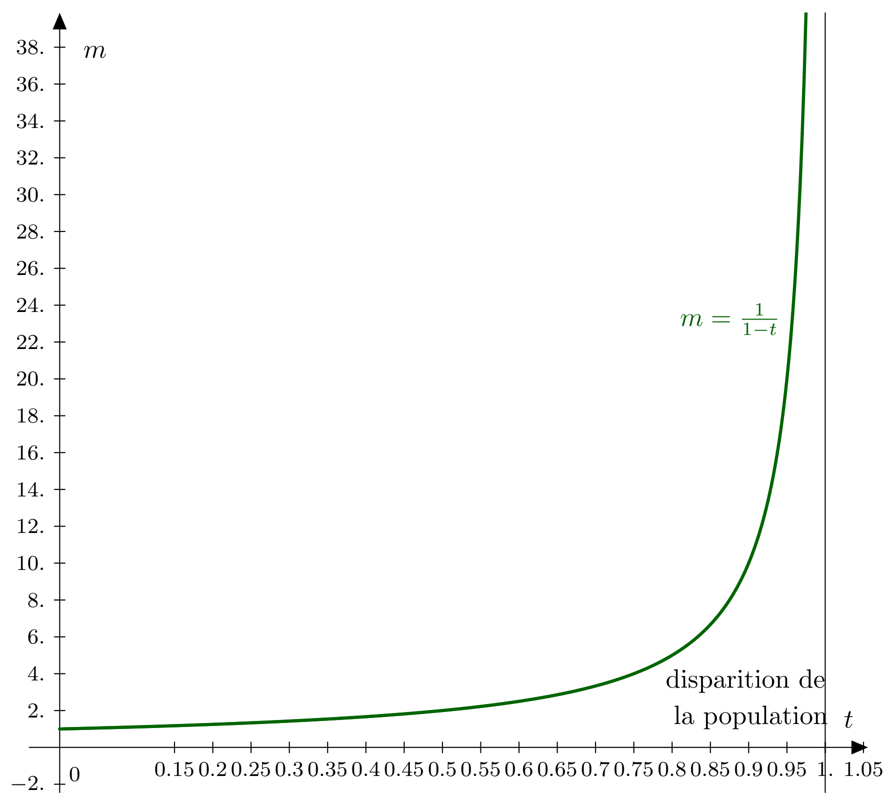
Quand le taux de mortalité est nulle, chaque adulte n'a besoin d'avoir qu'un enfant pour que la population reste stable. En revanche, lorsque le taux de mortalité tend vers 1, $t = 1$ correspondant au cas où tous les enfants meurent, chaque adulte devrait avoir une quantité presque infinie d'enfants pour assurer la stabilité de la population ce qui est bien sûr impossible.

3. On estime pouvoir encadrer le taux de mortalité infantile entre 5 et 10%. En déduire l'encadrement correspondant pour m (toujours sous l'hypothèse de stabilité ci-dessus).

   Si t est encadré entre 5% et 10%, m peut être encadré (sous l'hypothèse de stabilité) par :

$$1,05 \simeq \frac{1}{1-0,05} \leq m \leq \frac{1}{1-0,10} \simeq 1,11$$

4. Esquisser la représentation graphique sur $[0;1[$ de la fonction $t \mapsto f(t)$. Mettre en évidence sur le graphique précédent les couples $(m;t)$ pour lesquels la tendance à long terme de la population étudiée est à la disparition.



Les couples (m, t) sous la courbe correspondent aux couples pour lesquels la tendance à long terme de la population étudiée est à la disparition.

Exercice 2

D'un naturel confiant, vous décidez d'acheter des objets d'art dans une brocante que vous venez de découvrir. Mais 80% des marchands installés sur cette brocante sont indélicats, pour seulement 20% de marchands sérieux… Un marchand indélicat procure à ses clients de la marchandise sans valeur la moitié du temps, alors qu'un marchand sérieux vend un article de qualité neuf fois sur dix.

Après avoir acheté un objet à votre goût, vous consultez un ami connaisseur qui vous apprend que, par chance, vous avez acquis un objet de qualité. Quelle est la probabilité que vous ayez acheté cet objet chez un marchand sérieux ?

Notons Q l'événement "le produit acheté est de qualité" et S l'événement "le produit a été acheté chez un marchand sérieux". En utilisant la formule de Bayes,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S|Q) &= \frac{\mathbf{P}(S \cap Q)}{\mathbf{P}(Q)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(S \cap Q)}{\mathbf{P}(Q \cap S) + \mathbf{P}(Q \cap S^{\complement})} \\
&= \frac{\mathbf{P}(Q|S)\mathbf{P}(S)}{\mathbf{P}(Q|S)\mathbf{P}(S) + \mathbf{P}(Q|S^{\complement})\mathbf{P}(S^{\complement})} \\
&= \frac{\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{9}{29}.
\end{aligned}$$

Résolument optimiste, et malgré la mise en garde, vous vous rendez de nouveau, et à cinq reprises, sur cette brocante au cours de l'année, et y faites à chaque fois l'acquisition d'un nouvel objet d'art sans précaution particulière.

Quelle est la probabilité qu'au moins l'un des cinq objets soit de qualité ?

On indicera par $i \in \{1, \dots, 5\}$ les événements Q et S correspondant à la $i^{\text{ième}}$ visite sur la brocante. On cherche donc $\mathbf{P}(Q_1 \cup \dots \cup Q_5)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Q_1 \cup \dots \cup Q_5) &= 1 - \mathbf{P}(Q_1^{\complement} \cap \dots \cap Q_5^{\complement}) \\
&= 1 - \mathbf{P}(Q_1^{\complement}) \times \dots \times \mathbf{P}(Q_5^{\complement}), \text{ par indépendance.}
\end{aligned}$$

En reprenant les calculs de la question précédente, on a

$$\mathbf{P}(Q) = \mathbf{P}(Q|S)\mathbf{P}(S) + \mathbf{P}(Q|S^{\complement})\mathbf{P}(S^{\complement}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{29}{50} = 0,58,$$

d'où $\mathbf{P}(Q^{\complement}) = 0,42$ et $\mathbf{P}(Q_1 \cup \dots \cup Q_5) = 1 - 0,42^5 \approx 0,99$ à 10^{-2} près.

Quelle est la probabilité que les cinq objets soient de qualité ?

On cherche maintenant $\mathbf{P}(Q_1 \cap \dots \cap Q_5) = \mathbf{P}(Q)^5$ par indépendance, et $0,58^5 \approx 0,07$ à 10^{-2} près.

Quelle est l'espérance du nombre d'objets de qualité parmi vos cinq achats ?

Le nombre d'objets de qualité est une variable aléatoire de loi binômiale de paramètres 5 et $0,58$, donc son espérance est $5 \times 0,58 = 2,9$.