Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Probabilités 2

2023-2024

Exercice 1 (2015)

Un voyageur doit effectuer un trajet en train avec une correspondance. Pour la première partie de son trajet, il a le choix entre le train 1 et le train 2, il prend le premier des deux trains qui arrive en gare. Puis, il effectue la seconde partie avec le train 3. On suppose que :

- Pour chacun des trois trains, le temps d'attente du voyageur (à partir du moment où il arrive sur le quai) est mesuré en dizaines de minutes et on peut le modéliser par une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
- Les variables aléatoires modélisant les temps d'attente sont indépendantes, notées X, Y et Z (pour les trains 1, 2 et 3 respectivement).
- Chacun des trajets dure une heure et le temps de changement est de 5 minutes.

On note $U = \min(X, Y)$

1. Rappeler la fonction de répartition, une densité, l'espérance et la variance de la loi uniforme sur $[0, 1]$.
2. Que représente la variable aléatoire U pour la situation décrite ?
3. Soit x un réel, exprimer l'événement $(U > x)$ à l'aide d'événements liés à X et à Y. En déduire la probabilité de $(U > x)$ puis la fonction de répartition de U.
4. En déduire que U est une variable aléatoire à densité, dont la densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Déterminer l'espérance et la variance de U.
6. Quelle est, en moyenne, la durée totale du trajet du voyageur ?

Exercice 2 (2008)

Une société de marketing a observé que 30% des internautes a passé au moins une commande au cours de l'année 2006. On considère un échantillon de 100 internautes tirés au hasard avec remise et on note X le nombre d'internautes ayant passé au moins une commande dans l'année 2006.

1. Montrer que X peut s'écrire $X = \sum_1^n Z_i$ où l'on définira les variables $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$. En déduire la loi de X et préciser la valeur de $E(X)$ et $V(X)$.
2. Par quelle loi peut-on approximer la loi de X.
3. Calculer les valeurs approchées suivantes : $P(X > 30)$, $P(|X - E(X)| \leq 2)$, $P(X = 80)$.

Exercice 3 (Calculatrice)

On suppose que la masse (en kg) X d'un bébé à la naissance suit la loi normale de paramètres $\mu = 3,35$ et $\sigma^2 = 0,1089$.

1. Déterminer la probabilité qu'un bébé pèse à la naissance entre 3 kg et 4 kg.
2. Déterminer la probabilité qu'un bébé pèse à la naissance moins de 3 kg.
3. Déterminer la probabilité qu'un bébé pèse à la naissance plus de 4 kg.
4. Déterminer la masse m_1 tel que la probabilité qu'un bébé à la naissance pèse moins de m_1 est de 0,95.