Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Algèbre linéaire 2

2021-2022

Exercice 1 (2014)

Une société possède trois entreprises P, Q, R. On désigne par p_n, q_n et r_n les gains respectifs, en milliers d'euros, des entreprises P, Q, R l'année $2013 + n$. On suppose, compte tenu de l'observation des années précédentes, que, si l'on note $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$, alors $X_0 = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \geq 0$, $X_{n+1} = AX_n + C$, où $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

1. (a) Vérifier que pour $X = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$, on a $AX + C = X$.

   (b) On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n = X_n - X$. Montrer que $Y_{n+1} = AY_n$. En déduire que $X_n = A^n(X_0 - X) + X$.

2. Calcul de A^n.

   On considère la matrice $B = 4A - 2I$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

   (a) Montrer que $B^2 = 2I + B$.

   (b) Démontrer qu'il existe deux suites (α_n) et (β_n) de nombres réels telles que pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = \alpha_n I + \beta_n B$ avec $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n)$ et $\beta_{n+1} = \frac{1}{4}(\alpha_n + 3\beta_n)$.

3. Soit $U_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que, pour tout n, $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$.

   En déduire U_n en fonction de M et de U_0.

   (b) Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer MV et MW.

   (c) Montrer que M est diagonalisable avec $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale et P une matrice carrée que l'on précisera. Exprimer M^n en fonction de P et de D.

   (d) En déduire que

   $$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2 \times 0.25^n & 2 - 2 \times 0.25^n \\ 1 - 0.25^n & 2 + 0.25^n \end{pmatrix},$$

   puis les limites des suites (α_n) et (β_n).

4. De la question 2.b), déduire la limite de la suite (A^n). En déduire la limite de la suite (X_n) puis les limites de p_n, q_n et r_n. Interpréter les résultats vis-à-vis des trois entreprises.