Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Analyse 1

2022-2023

Exercice 1

Calculer les dérivées suivantes, et préciser le domaine de définition sur laquel la dérivée est définie:

$$(a) \quad f(x) = e^{x^2} \qquad\qquad (b) \quad g(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$(c) \quad h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \qquad\qquad (d) \quad l(x) = x\ln(x)$$

Exercice 2

Rappeler quel est le lien entre la primitive d'une fonction et l'intégrale d'une fonction sur l'intervalle $[a, b]$. Calculer les intégrales suivantes:

$$(a) \quad \int_0^1 t^2 dt \qquad\qquad (b) \quad \int_0^1 (x-1)(x-2)dx$$

$$(c) \quad \int_1^2 e^{-t} dt \qquad\qquad (d) \quad \int_0^1 t\, e^{-t} dt$$

$$(e) \quad \int_1^2 x\, \ln(x) dx \qquad\qquad (f) \quad \int_a^b \ln(x) dx \quad 0 < a < b$$

$$(g) \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \qquad\qquad (h) \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

Exercice 3 (2009)

Sur le marché d'un produit, dont le prix est noté x ($x \geq 0$), la fonction de demande est donnée par :

$$q = f(x) = 20(x+1)e^{-(x+1)}$$

1. étudier les variations de f et tracer son tableau de variations.
2. étudier la convexité de f et préciser les éventuels points d'inflexion.
3. Tracer la courbe représentative de f sur $[0; 8]$ dans un repère orthonormé.
4. On suppose que le prix de départ est p_1 et qu'il subit une augmentation de taux t pour passer à la valeur p_2 ($p_2 > p_1$).
   (a) Calculer en fonction de p_1 et de t l'élasticité arc de la demande par rapport au prix, quand le prix passe de p_1 à p_2.
   (b) Application numérique : $p_1 = 2$ et $t = 4\%$. Donner l'interprétation du résultat.
5. On définit le taux instantané de croissance de f par : $T(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ pour x.

(a) Calculer $T(x)$. Calculer $T(2)$ et en déduire l'élasticité, notée $E_{q/x}(2)$, de la demande par rapport au prix pour $x = 2$. Interpréter cette élasticité.

(b) Confronter le résultat de la question précédente avec celui de la question (4)(b).

6. On appelle taux moyen de croissance $\bar{T}$ de la fonction f sur l'intervalle $[x_1; x_2]$ (où $0 \leq x_1 \leq x_2$) la valeur moyenne de T sur $[x_1; x_2]$.

   (a) Donner l'expression de $\bar{T}$ en fonction de f, x_1 et x_2.

   (b) Calculer le taux moyen de croissance sur $[2; 4]$.

   (c) Montrer que : $f(x_2) = f(x_1)e^{\bar{T}(x_2 - x_1)}$.

Exercice 4

Donner l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -3u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 (Calculatrice)

1. Tracer le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + 5$ entre $x = -5$ et $x = 5$.
2. Tracer le graphe de la fonction $f(x) = \frac{x^3+12x^2+3}{x^2+1}$ entre $x = -10$ et $x = 5$.
3. Tracer le graphe de la fonction $f(t) = 8\frac{e\ \ln(t)}{t} + 4$ entre $t = 1$ et $t = 6$ (où $e = \exp(1)$).