Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Algèbre linéaire 1

2022-2023

Exercice 1

Calculer manuellement les suivants opérations matricielles :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

1. Trouver et effectuer tous les produits réalisables de deux matrices prises parmi A, B, C, D, E :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Calculer les matrices transposées ${}^tA$, ${}^tB$, ${}^tC$, ${}^tD$ et ${}^tE$.

Exercice 3

Déterminer lesquels des matrices suivantes sont inversibles et calculer leur matrice inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour D, E et F, utiliser la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 4

Résoudre le système linéaire suivant en utilisant des matrices :

$$\left\{\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x - y &= 5 \end{aligned}\right.$$

Exercice 5 (Calculatrice)

1. Calculer la multiplication de matrices suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 (2013)

Dans tout l'exercice, les calculs peuvent être effectués à la calculatrice. Les deux parties sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie 1. La méthode dite de partie double

En comptabilité, on a souvent recours à une méthode dite «en partie double». Cette méthode consiste à enregistrer deux fois chaque opération : une première fois au crédit d'un compte; une deuxième fois au débit d'un compte. En vérifiant la somme des débits et la somme des crédits, on évite ainsi les éventuelles erreurs. On considère la matrice carrée $(a_{i,j})$ d'ordre $n = 3$ dont les indices des lignes indiquent les numéros des comptes crédités et l'indice des colonnes le numéro des comptes à débiter. Le nombre réel $a_{i,j}$ indique quant à lui le montant. On note :

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} 2000 & 500 & 700 \\ 1000 & 650 & 750 \\ 2500 & 740 & 850 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Combien de comptes ont été crédités ? Débités ?

2. Que signifie le nombre 500 ?

3. Calculer la matrice $C = AU$. Que représente ce résultat ?

4. On note ${}^tU$ la matrice transposée de U. Calculer $D = {}^tUA$. Que représente D ?

5. Calculer DU. Que représente ce résultat ?

6. Calculer ${}^tUC$. Que représente ce résultat ?

7. Que dire des résultats des deux questions précédentes ? Expliquer pourquoi.

Partie 2. Matrice de Léontief

On considère un pays fictif, sans échange avec l'extérieur, dont l'économie très simplifiée se décompose en trois branches : l'agriculture (A), l'industrie (I) et les transports (T). Ces branches interagissent entre elles. Par exemple, lorsqu'un consommateur demande une production à l'agriculture (consommation finale), celle-ci peut également consommer auprès de l'agriculture, de l'industrie et des transports (consommations intermédiaires) pour produire. Ainsi, une partie de la production de chaque branche ne sert pas directement à la consommation finale. On suppose que :

- La production de 1 euro dans la branche A consomme 0,20 euros dans le secteur A, 0,15 euros dans le secteur I, 0,10 euros dans le secteur T.
- La production de 1 euro dans la branche I consomme 0,25 euros dans le secteur A, 0,30 euros dans le secteur I et 0,14 euros dans le secteur T.
- La production de 1 euro dans la branche T consomme 0,05 euros dans le secteur A, 0,27 euros dans le secteur I et 0,14 euros dans le secteur T.

1. On suppose dans cette question que la production totale de la branche agriculture est de 2000 euros, celle de la branche industrie est de 3000 euros et celle de la branche des transports est de 1500 euros.
   (a) Déterminer les consommations intermédiaires de chaque branche.
   (b) Quelles sont les consommations finales de chacune des trois branches ?
2. On note A la matrice appelée matrice des coefficients techniques; P la matrice de production totale où p_A, p_I et p_T désignent les productions respectivement dans les branches de l'agriculture, de l'industrie et du transport; et D la matrice de demande (consommation finale), où d_A, d_I et d_T désignent les demandes dans chaque branche :

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 & 0,05 \\ 0,15 & 0,3 & 0,27 \\ 0,1 & 0,14 & 0,14 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_A \\ p_I \\ p_T \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} d_A \\ d_I \\ d_T \end{pmatrix}.$$

   On désigne enfin par I_3 la matrice identité :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Justifier que $P = AP + D$.
   (b) En déduire que $P = (I_3 - A)^{-1}D$.
3. On suppose que la demande des consommations finales, en euros, est :

$$D = \begin{pmatrix} 2475 \\ 1170 \\ 575 \end{pmatrix}.$$

   Quelle doit être la production de chaque branche pour satisfaire la demande des consommations finales ?