Durée de préparation : 1 heure 30.

Question de cours :

Quelle est la définition d'une suite géométrique ? Quand est-ce qu'une suite géométrique converge ? Quand est-ce que la série d'une suite géométrique converge ?

## Exercice 1

Dans un modèle économique, on considère un indice $u_n$ dépendant de l'année $n$ en fonction des années antérieures, selon la relation de récurrence suivante :

$$u_n = 0,5\ u_{n-2} + 0,25\ (u_{n-1} + u_{n-3})$$

et des premiers termes $u_0 = u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.

1. Démontrer que pour tout entier $n > 2$, on a $1 < u_n < 2$.

   - On calcule que $u_3 = \frac{5}{4}$, $u_4 = \frac{25}{16}$ et $u_5 = \frac{97}{64}$. Donc $1 < u_k < 2$ pour $2 < k \leq 5$.
   - Supposons qu'il existe $n > 2$ tel que $1 < u_k < 2$ pour tout $2 < k \leq n$. Alors $u_{n+1} = 0,5\ u_{n-1} + 0,25\ (u_{n-2} + u_n)$, d'où

   $$0,5 + 0,25 \times 2 = 1 < u_{n+1} < (0,5 + 0,25 \times 2) \times 2 = 2.$$

   - Donc, par récurrence, on a $1 < u_n < 2$ pour tout $n > 2$.

2. On admet que la suite de terme $u_n$ admet une limite $l$. Montrer qu'il existe un réel $k$ ne dépendant pas de $n$ tel que pour tout entier $n$, $u_n + 0,75\ u_{n-1} + 0,25\ u_{n-2} = k$. En déduire alors que la valeur de la limite $l$ de la suite de terme $u_n$ est égale à $1,5$.

   Posons, pour tout $n \geq 2$, $v_n = u_n + 0,75\ u_{n-1} + 0,25\ u_{n-2}$. Soit $n \geq 2$, alors

   $$v_{n+1} = u_{n+1} + 0,75\ u_n + 0,25\ u_{n-1}$$

   et

   $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - 0,25\ u_n - 0,5\ u_{n-1} - 0,25\ u_{n-2} \\ &= u_{n+1} - (0,5\ u_{n-1} + 0,25(u_n + u_{n-2})) \\ &= u_{n+1} - u_{n+1} = 0, \end{aligned}$$

   selon la relation de récurrence. Donc la suite de terme général $v_n$ est constante, égale à son premier terme $v_2 = u_2 + 0,75\ u_1 + 0,25\ u_0 = 3$. Or $v_n$ tend vers $2l$, d'où $l = 3/2$.

3. On pose le vecteur $U_n$ à trois composantes $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $A$ qui permet d'exprimer $U_n$ en fonction de $U_{n-1}$.

   On trouve

   $$A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Dans cette question, on ne cherchera pas à diagonaliser la matrice $A$. On cherche en revanche à connaître la limite de $A^n$ lorsque $n$ tend vers l'infini. Cette matrice, que l'on notera $M$, est appelée la matrice d'échange. Expliquer pourquoi le vecteur $U_n$ admet une limite lorsque $n$ tend vers l'infini. Quel est le vecteur limite ?

   La suite $(u_n)$ a pour limite $1,5$, donc le vecteur $U_n$ a pour limite ${}^t(3/2, 3/2, 3/2)$.

5. Montrer que $U_n = A^{n-2}U_2$. En déduire $U_{n+1}$ en fonction de $A$ et de $U_3$, et $U_{n+2}$ en fonction de $A$ et de $U_4$.

   $U_2 = A^0 U_2$ et si $U_n = A^{n-2}U_2$, alors

   $$U_{n+1} = AU_n = A\,A^{n-2}U_2 = A^{(n+1)-2}U_2.$$

   Par récurrence, $U_n = A^{n-2}U_2$ pour tout $n \geq 2$. Aussi,

   $$U_{n+1} = A^{n+1-2}U_2 = A^{n-2}\,AU_2 = A^{n-2}U_3,$$

   et

   $$U_{n+2} = A^{n+2-2}U_2 = A^{n-2}\,A\,AU_2 = A^{n-2}U_4.$$

On note

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

la limite de $A^n$ lorsque $n$ tend vers l'infini, c'est-à-dire la matrice d'échange. En utilisant la question 5, déterminer les éléments de la matrice $M$. La calculatrice est particulièrement conseillée ici pour résoudre les systèmes.

En passant à la limite dans les égalités obtenues en (5) et en notant $L = {}^t(3/2\ 3/2\ 3/2)$ le vecteur limite de $U_n$, on obtient que $L = MU_2 = MU_3 = MU_4$. En considérant que $U_2 = {}^t(2\ 1\ 1)$, $U_3 = {}^t(1,25\ 2\ 1)$ et $U_4 = {}^t(25/16\ 1,25\ 2)$, la première coordonné de ces égalités nous donne le système d'équations

$$\begin{cases} 2a + b + c = 1,5 \\ 1,25a + 2b + c = 1,5 \\ 25/16a + 1,25b + 2c = 1,5 \end{cases}$$

La solution de ce système est : $a = 0,5$, $b = 0,375$ et $c = 0,125$. La deuxième coordonné des égalités nous donne le même système d'équations pour $a'$, $b'$ et $c'$, et le même système d'équations pour $a''$, $b''$ et $c''$ aussi. D'où,

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,375 & 0,125 \\ 0,5 & 0,375 & 0,125 \\ 0,5 & 0,375 & 0,125 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 2

**Partie A**

$f$ est la fonction définie sur $]0,1]$ par
$$f(x) = -\frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

Si $A$ est un événement de probabilité $\mathbf{P}(A)$ non-nulle, on note $i(A) = f\big(\mathbf{P}(A)\big)$ l'incertitude de l'événement $A$.

1. (a) $A$ est un événement tel que $\mathbf{P}(A) = 1$. Calculer $i(A)$ et commenter le résultat.

$$i(A) = -\frac{\ln(1)}{\ln(2)} = 0$$

Cela correspond bien au nom donné à $i$, lorsqu'un événement arrive presque surement, il n'y a aucune incertitude.

   (b) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et interpréter ce résultat en terme d'incertitude.
   Lorsque $x$ tend vers 0, $\ln(x)$ tend vers $-\infty$ et $f(x)$ tend vers $+\infty$. Plus la probabilité d'un événement est faible, plus l'incertitude est grande. Si cet événement n'arrive presque jamais, l'incertitude est infinie.

2. (a) $A$ et $B$ sont deux événements de probabilités non-nulles tel que $A \subset B$. Comparer $i(A)$ et $i(B)$.

$$\begin{array}{rcl} A & \subset & B \\ \mathbf{P}(A) & \leq & \mathbf{P}(B) \\ \ln(\mathbf{P}(A)) & \leq & \ln(\mathbf{P}(B)) \\ i(A) & \geq & i(B) \end{array}$$

   (b) On prélève une main de 4 cartes dans un jeu de 32 cartes bien mélangé. $A$ est l'événement "la main contient les quatre as", et B l'événement "la main ne contient pas de figures". Calculer $i(A)$ et $i(B)$ puis comparer ces deux nombres.
   On rappelle qu'il y a quatre as et 12 figures dans un jeu de 32 cartes. Nous sommes ici dans le cas $A \subset B$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}(A) & = & \frac{4}{32}\cdot\frac{3}{31}\cdot\frac{2}{30}\cdot\frac{1}{29} \\ & = & \frac{24}{863040} \\ i(A) & = & 15,13 \\ \mathbf{P}(B) & = & \frac{20}{32}\cdot\frac{19}{31}\cdot\frac{18}{30}\cdot\frac{17}{29} \\ & = & \frac{116280}{863040} \\ i(B) & = & 2,89 \end{array}$$

$i(A) > i(B)$ ce qui vérifie bien le résultat obtenu à la question précédente.

3. $A$ et $B$ sont deux événements tels que $\mathbf{P}(A\cap B)\neq 0$. Montrer que $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si $i(A\cap B)=i(A)+i(B)$.

   $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A\cap B) &=& \quad \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\\
\Longleftrightarrow\quad & i(A\cap B) &=& -\frac{\ln[\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)]}{\ln(2)}\\
\Longleftrightarrow\quad & i(A\cap B) &=& -\frac{\ln[\mathbf{P}(A)]+\ln[\mathbf{P}(B)]}{\ln(2)}\\
\Longleftrightarrow\quad & i(A\cap B) &=& -\frac{\ln(\mathbf{P}(A))}{\ln(2)}-\frac{\ln(\mathbf{P}(B))}{\ln(2)}\\
\Longleftrightarrow\quad & i(A\cap B) &=& \quad i(A)+i(B)
\end{aligned}$$

**Partie B**

$h$ est la fonction définie sur $[0,1]$ par $h(0)=0$ et pour tout $x$ de $]0,1]$ par $h(x)=x\ f(x)$. Si $X$ est une variable aléatoire discrète d'univers-image $\{0,1,\ldots,n\}$ et de loi de probabilité $p_i=\mathbf{P}(X=i)$ pour $0\leq i\leq n$, l'incertitude moyenne de $X$, notée $H(X)$, s'appelle entropie de $X$ et est définie par $H(X)=\sum_{i=0}^{n}h(p_i)$.

1. Montrer que pour tout $x$ de $[0,1]$, $h(x)\geq 0$. Que peut-on en déduire pour $H(X)$ ?

   Pour tout $x$ de $]0,1]$, $\ln(x)\leq 0$, donc $f(x)\geq 0$. De plus $h(0)=0$. Par conséquent pour tout $x$ de $[0,1]$, $h(x)\geq 0$ et pour tout $X$ variable aléatoire discrète d'univers-image $\{0,1,\ldots,n\}$ et de loi de probabilité $p_i=P(X=i)$, $H(X)=\sum_{i=0}^{n}h(p_i)\geq 0$.

   De plus comme $\sum_{i=0}^{n}p_i=1$, il existe $i$ tel que $p_i>0$. Donc $H(X)$ ne s'annule que s'il existe $i$ tel que $p_i=1$.

2. Montrer que l'on a l'équivalence suivante :

$$X_c \text{ est une variable aléatoire certaine } \Leftrightarrow H(X_c)=0.$$

$$\begin{aligned}
X_c \text{ variable alatoire certaine} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{P}(X_c=x_c)=p_c=1\\
&\Leftrightarrow \quad H(X_c)=h(p_c)=h(1)\\
&\Leftrightarrow \quad H(X_c)=f(1)\\
&\Leftrightarrow \quad H(X_c)=0
\end{aligned}$$

3. Calculer l'entropie d'une variable aléatoire $X_u$ qui suit la loi uniforme sur $\{0,1,\ldots,n\}$.

Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $p_i = 1/(n+1)$.

$$
\begin{aligned}
H(X_u) &= \sum_{i=0}^{n} h(p_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} p_i f(p_i) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{\ln(n+1)}{\ln(2)} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{\ln(2)}
\end{aligned}
$$

4. (a) Montrer que pour tout $x$ de $]0, +\infty[$, $\ln(x) \leq x - 1$ avec égalité lorsque $x = 1$.

$x \mapsto x - 1 - \ln(x)$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto 1 - 1/x$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1 - 1/x$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x - 1 - \ln(x)$ | $\Vert$ $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Par conséquent pour tout $x$ de $]0, +\infty[$, $\ln(x) \leq x - 1$ avec égalité lorsque $x = 1$.

(b) En déduire que si $(p_0, \ldots, p_n)$ et $(q_0, \ldots, q_n)$ sont deux lois de probabilité sur $\{0, 1, \ldots, n\}$ et si $p_i, q_i \neq 0$ pour tout $i$, alors

$$\sum_{i=0}^{n} p_i \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \leq 0$$

avec égalité lorsque pour tout $i$ on a $p_i = q_i$. (Cette inégalité s'appelle l'inégalité de Gibbs.)

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} p_i \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) &\leq \sum_{i=0}^{n} p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1\right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} (q_i - p_i) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} q_i - \sum_{i=0}^{n} p_i \\
&\leq 1 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Il n'y a égalité à la question 4.(a) que lorsque $x = 1$. Par conséquent il est évident qu'il n'y a égalité pour l'inégalité de Gibbs que si pour tout $i$, $q_i/p_i = 1$, c'est-à-dire pour tout $i$, $p_i = q_i$.

(c) En utilisant l'inégalité de Gibbs, montrer que si la loi de $X$ est $(p_0, \ldots, p_n)$, alors

$$H(X) \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln(2)}.$$

Supposons que pour tout $i$, $p_i \neq 0$ (si ce n'est pas le cas, on supprime ce $p_i$, ce qui ne change rien au résultat) et posons pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $q_i = 1/(n+1)$.

$$\begin{aligned} H(X) - \frac{\ln(n+1)}{\ln(2)} &= -\sum_{i=0}^{n} p_i \frac{\ln(p_i)}{\ln(2)} - \frac{\ln(n+1)}{\ln(2)} \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \left[ -\sum_{i=0}^{n} p_i \ln(p_i) + \ln(q_i) \right] \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \left[ \sum_{i=0}^{n} p_i \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \right] \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

5. Déduire des questions précédentes que pour toute variable aléatoire $X$ discrète d'ensemble-image $\{0, 1, \ldots, n\}$, on a $H(X) \leq H(X_u)$ où $X_u$ suit la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n\}$. Commenter ce résultat.

   Ce résultat est immédiat : $H(X_u) = \ln(n+1)/\ln(2)$ et pour toute variable aléatoire $X$ discrète d'ensemble-image $\{0, 1, \ldots, n\}$, $H(X) \leq \ln(n+1)/\ln(2) = H(X_u)$.

   L'incertitude moyenne de $X$ est maximale lorsque tous les états de $X$ sont équiprobables et cette incertitude augmente avec le nombre d'états possibles ce qui est finalement assez intuitif.