

# Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Mathématiques - DM2 (optionnel)

2023-2024

## Exercice 8 (2013)

### Partie 1 : Étude d'une densité

Soient  $t_0$  un réel strictement positif,  $a$  un nombre réel tel que  $a > 1$  et  $k$  un réel strictement positif. On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{k}{(t+t_0)^a} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

1. Étudier les variations de la fonction  $f$  et donner son tableau de variation.
2. Calculer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé.
4. Déterminer en fonction de  $a$  et de  $t_0$  le réel  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie 2 : Durée de vie

Des composants électroniques sont fabriqués en chaîne. Ils disposent d'une certaine durée de vie aléatoire. On appelle  $X$  la variable aléatoire donnant la durée de vie d'un composant choisi au hasard. On suppose dans cette partie que  $a = 2t_0$  est une durée souhaitée par le fabricant.

1. On admet que  $X$  est une variable aléatoire de densité  $f$ . Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'un composant n'excède pas  $\frac{t_0}{2}$  ?
2. Déterminer en fonction de  $t_0$  la médiane de  $X$  c'est-à-dire  $m$  tel que  $P(x \leq m) = \frac{1}{2}$ . Quelle interprétation peut-on en faire ?
3. Déterminer en fonction de  $t_0$  la durée à partir de laquelle 25% des composants fonctionnent encore. Comment appelle-t-on ce nombre ?
4. L'espérance mathématique de  $X$  est-elle définie ?