

Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Analyse 4 : correction

2023-2024

Exercice 1 (2014)

1. La fonction f représente la marge réalisée par l'entreprise grâce à la vente de x tonnes de billes de type A et y tonnes de billes de type B.
2. On cherche $\max_{x+y=200} f(x, y)$. On introduit le Lagrangien $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(x + y - 200)$ pour $x, y \geq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les dérivées partielles existent et pour x, y, λ adéquats, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 1056 - 18x + 6y - \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 448 - 10y + 6x - \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -x - y + 200 \end{cases}$$

Or la méthode du Lagrangien consiste à trouver les (x, y, λ) qui annulent les trois dérivées partielles. La troisième dérivée partielle est exactement la contrainte.

$$\begin{cases} 1056 - 18x + 6y - \lambda = 0 \\ 448 - 10y + 6x - \lambda = 0 \\ -x - y + 200 = 0 \end{cases}$$

Ce système correspond à :

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & 1 \\ -6 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1056 \\ 448 \\ 200 \end{pmatrix}$$

et la solution est

$$x = 95,2 \quad y = 104,8 \quad \lambda = -28,8$$

Alternativement, de la première et deuxième équations on a $608 - 24x + 16y = 0$ et en remplaçant $x = 200 - y$, on obtient la solution précédente.

Le point $(95,2, 104,8)$ est donc le seul candidat pour être un maximum de f sous notre contrainte à l'intérieur du domaine de définition $(x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$. Au bord on a deux candidats supplémentaires : $(200, 0)$ et $(0, 200)$.

$$f(95,2, 104,8) = 45860,8 \quad f(200, 0) = -173800 \quad f(0, 200) = -135400$$

Donc on peut déjà éliminer les deux candidats du bord. Pour prouver que c'est effectivement un maximum, il suffit de prouver qu'il existe un maximum, qui sera celui qu'on a trouvé. Or l'ensemble des $\{(x, y) | x + y = 200, x \geq 0, y \geq 0\}$ est donné par des conditions fermées, et on voit facilement que f est bornée dans cet ensemble, donc cette fonction admet un maximum. D'où le maximum de f sous la contrainte $x + y = 200$ est 45860,8 pour $x = 95,2$ et $y = 104,8$.

3. Le multiplicateur de Lagrange λ est égal à $-28,8$. Il représente la sensibilité du profit maximal par rapport à la contrainte $x + y$ donc à la production totale.

En effet, si l'on note $g(x, y) = x + y - 200$, comme le point de maximum est solution de la méthode du Lagrangien, on sait que

$$\nabla L(x, y, \lambda) = 0$$

et cela veut dire aussi que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

$\nabla g(x, y)$ nous indique la direction de croissance maximale de g , tandis que $\nabla f(x, y)$ indique la direction de croissance maximale de f . Puisque λ est négatif, réduire g nous amène à augmenter f . Réduire g correspond à réduire $x + y$, c'est à dire la production totale. Il est donc plus profitable de réduire la production totale pour augmenter le profit maximal.

4. (a) Le nouveau problème est de trouver $\arg \max_{x+y \leq 200} f(x, y)$. Autrement dit, on cherche le maximum de f dans le domaine $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 200\}$.
 (b) On résout alors

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1056 - 18x + 6y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 448 - 10y + 6x = 0 \end{cases}$$

La première équation impose $y = 3x - 176$ et en remplaçant dans la deuxième on obtient $24x - 2208 = 0$. On trouve une seule solution : $x = 92$ et $y = 100$.

Les candidats pour maximum global sur l'ensemble $x + y \leq 200$, sont les points de bord, et celui qu'on a trouvé à l'intérieur.

Au bord $\{(0, y) \mid 0 \leq y \leq 200\}$,

$$f(0, y) = 448y - 5y^2 - 25000 = -5(y - 224/5)^2 + \frac{224^2}{5} - 25000 = -5(y - 44.8)^2 - 14964.8 < 0.$$

Au bord $\{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 200\}$,

$$f(x, 0) = 1056x - 9x^2 - 25000 = -9(x - 528/9)^2 + \frac{528^2}{9} - 25000 = -9(x - 58.7)^2 + 5976 \leq 5976.$$

Au bord $\{(x, y) \mid x + y = 200\}$ nous avons déjà calculé

$$f(x, y) \leq 45860.8.$$

Et au point $(92, 100)$ on a $f(92, 100) = 45976$. Donc le maximum est atteint en ce point.

Une autre façon de conclure que $(92, 100)$ est un point maximal :

On remarque que la matrice hessienne de f est en **tout** point $H = \begin{pmatrix} -18 & 6 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$, avec

$$\begin{cases} \det(H) = 144 > 0, \\ \text{trace}(H) = -28 < 0, \end{cases}$$

d'où f est concave sur tout l'ensemble de définition. Aussi, le domaine de définition de f est un ensemble convexe. Donc le seul point critique est un maximum local, et c'est aussi le maximum global.

- (c) Oui.

Exercice 2 (2009)

1. Quels que soient x, y réels positifs et quel que soit λ réel, on a

$$U(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^{0.8} (\lambda y)^{0.2} = \lambda x^{0.8} y^{0.2}.$$

U est donc homogène de degré 1. L'utilité est donc proportionnelle aux sommes dépensées.

2. A priori nous ne savons pas si l'utilité maximale est atteinte lorsqu'on dépense la totalité de la somme dont on dispose. Ici c'est le cas car la fonction $U(x, \cdot)$ pour n'importe quelle valeur de x est croissante. Cela montre qu'en gardant la même quantité du bien B_1 , plus on achète de B_2 plus l'utilité est grande. Donc l'utilité maximale, si elle existe, doit être atteinte lorsque la totalité de la somme S_0 est dépensée.

Ainsi le problème est de maximiser $U(x, y)$ sous la contrainte d'égalité

$$xp_1 + yp_2 = S_0,$$

ce qui revient à maximiser la fonction f définie sur $[0, S_0/p_1]$ par $f(x) = U\left(x, \frac{S_0 - xp_1}{p_2}\right)$. Or f est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout x dans $[0, S_0/p_1]$,

$$f'(x) = 0,8x^{-0,2}\left(\frac{S_0 - xp_1}{p_2}\right)^{0,2} - 0,2\frac{p_1}{p_2}x^{0,8}\left(\frac{S_0 - xp_1}{p_2}\right)^{-0,8} = \frac{0,8S_0 - p_1x}{p_2x^{0,2}\left(\frac{S_0 - xp_1}{p_2}\right)^{0,8}}$$

d'où

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,8\frac{S_0}{p_1}.$$

Ce point est donc potentiellement un extremum, et l'énoncé demande d'admettre qu'il s'agit d'un maximum. U sous la contrainte de cette question est donc maximisée en $x = 0,8\frac{S_0}{p_1}$, $y = 0,2\frac{S_0}{p_2}$ par $(0,8S_0/p_1)^{0,8}(0,2S_0/p_2)^{0,2}$, soit

$$S_0 \frac{0,8^{0,8}0,2^{0,2}}{p_1^{0,8}p_2^{0,2}}.$$

On peut aussi utiliser la méthode de Lagrange. On pose le Lagrangien :

$$L(x, y, \lambda) = U(x, y) - \lambda(xp_1 + yp_2 - S_0).$$

Les extrema sous contrainte sont parmi les points (x, y) où il existe λ qui annule les trois dérivées partielles de L .

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0,8x^{-0,2}y^{0,2} - \lambda p_1 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0,2x^{0,8}y^{-0,8} - \lambda p_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = xp_1 + yp_2 - S_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,8(xy^{-1})^{-0,2} = \lambda p_1 & \text{(eq.1)} \\ 0,2(xy^{-1})^{0,8} = \lambda p_2 & \text{(eq.2)} \\ xp_1 + yp_2 = S_0 & \text{(eq.3)} \end{cases}$$

$$\text{diviser eq.2 par eq.1} \Rightarrow xy^{-1} = \frac{4p_2}{p_1}$$

$$\text{mettre } x = \frac{4p_2}{p_1}y \text{ dans eq.3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{0,8S_0}{p_1} \\ y = \frac{0,2S_0}{p_2} \end{cases}$$

Application numérique : Le maximum est atteint en 10,07 à 10^{-2} près.

3. Si les prix sont maintenant p'_1 et p'_2 , le consommateur, pour une somme investie S_1 , a pour utilité maximale

$$\left(0,8\frac{S_1}{p'_1}\right)^{0,8}\left(0,2\frac{S_1}{p'_2}\right)^{0,2}.$$

Pour avoir égalité des deux utilités avant et après l'augmentation des prix, il faut donc que

$$S_1 0,8^{0,8}0,2^{0,2} \frac{1}{p_1^{0,8}p_2^{0,2}} = S_0 0,8^{0,8}0,2^{0,2} \frac{1}{p_1^{0,8}p_2^{0,2}}$$

$$S_1 = S_0 \left(\frac{p'_1}{p_1}\right)^{0,8} \left(\frac{p'_2}{p_2}\right)^{0,2}.$$

4. (a) On a donc

$$V_{1/0} = 100 \times \left(\frac{p'_1}{p_1}\right)^{0,8} \left(\frac{p'_2}{p_2}\right)^{0,2}.$$

(b) On peut réécrire cette formule comme

$$V_{1/0} = \left(100 \frac{p'_1}{p_1}\right)^{0,8} \left(100 \frac{p'_2}{p_2}\right)^{0,2},$$

qui est une moyenne géométrique des indices des prix avec les coefficients 0,8 et 0,2.

5. L'indice de Laspeyres est défini par

$$L_{1/0} = 100 \frac{x_0 p'_1 + y_0 p'_2}{x_0 p_1 + y_0 p_2},$$

où $x_0 = 0,8 S_0/p_1$ et $y_0 = 0,2 S_0/p_2$ sont les quantités des biens B_1 et B_2 maximisant l'utilité au temps $t = 0$.

6. En remplaçant dans l'expression de l'indice de Laspeyres, on trouve

$$L_{1/0} = 0,8 \left(100 \frac{p'_1}{p_1}\right) + 0,2 \left(100 \frac{p'_1}{p_1}\right),$$

et donc l'indice de Laspeyres est une moyenne arithmétique des indices des prix, avec les poids 0,8 et 0,2.

7. (a) Étant donné l'inégalité rappelée dans l'énoncé, l'indice de Laspeyres est plus grand que l'indice vrai du coût de la vie.

(b) Application numérique : $V_{1/0} = 138,64$ et $L_{1/0} = 138,67$ à 10^{-2} près.