Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Algèbre linéaire 1 : correction

2023-2024

Exercice 1

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 28 & 7 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 13 & -3 & 25 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. Il faut que le nombre de colonnes de la matrice de gauche soit égal au nombre de lignes de celle de droite, ainsi 11 produits sont possibles : AB, AC, AD, B^2, BC, BD, CA, DE, EB, EC et ED.

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix} \qquad AC = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad AD = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -10 & 2 & 18 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad BC = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad BD = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 19 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad DE = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad EB = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$EC = \begin{pmatrix} -5 & -1 \end{pmatrix} \qquad ED = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que $CA \neq AC$ et que $ED \neq DE$.

2. Les matrices transposées sont :

$$^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad ^tB = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad ^tC = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$^tD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad ^tE = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

A

Le déterminant est $\det(A) = 1 \times 1 - 2 \times 0 = 1 \neq 0$. La matrice est donc inversible. Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B

Le déterminant est $\det(B) = 1 \times 6 - 2 = 0$. La matrice n'est pas inversible.

C

Le déterminant est $\det(C) = 1 \times 4 - 2 = -2 \neq 0$. La matrice est donc inversible et

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

D

On utilisera la méthode du pivot Gauss pour inverser la matrice suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour cela, on commence par disposer la matrice D et la matrice identité dans un même tableau :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Il faut maintenant appliquer les opérations élémentaires afin d'obtenir la matrice identité à gauche. On peut commencer par effectuer l'opération $L_2 \leftrightarrow L_3$, qui donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Puis, l'opération $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{2}L_3$ donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{array}\right)$$

Cela nous permet de voir que le rang de D est 3 et la matrice est donc inversible. L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{array}\right)$$

Finalement, par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$, on aboutit à :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{array}\right)$$

On a donc

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

E

On utilisera la méthode du pivot Gauss pour inverser la matrice suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour cela, on commence par disposer la matrice E et la matrice identité dans un même tableau :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Il faut maintenant appliquer les opérations élémentaires afin d'obtenir la matrice identité à gauche. On peut commencer par effectuer l'opération $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 - L_1$, qui donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Maintenant, l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 - 2L_2$ donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice E est de rang 2 et elle n'est donc pas inversible.

F

On utilisera la méthode du pivot Gauss pour inverser la matrice suivante :

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour cela, on commence par disposer la matrice F et la matrice identité dans un même tableau :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Il faut maintenant appliquer les opérations élémentaires afin d'obtenir la matrice identité à gauche. On peut commencer par effectuer l'opération $L_1 \leftarrow -L_1$, qui donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Maintenant, l'opération $L_2 \leftrightarrow L_3$ donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Puis, l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 + L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

L'opération $L_3 \leftarrow \frac{1}{20}$ donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \end{array}\right)$$

Le rang de E est donc 3 et la matrice est inversible. L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3$ donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \end{array}\right)$$

Finalement, l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{21}{20} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \end{array}\right)$$

On a donc

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.25 & 0.05 & 1.05 \\ 0.25 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

On défini les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Le système à résoudre est équivalent à :

$$AX = B$$

Le déterminant de A est $\det(A) = 2 \times (-1) - 1 \times 1 = -3 \neq 0$. La matrice est donc inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$X = A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

La solution du système est donc $x = \frac{7}{3}$ et $y = -\frac{8}{3}$.

Exercice 5 (Calculatrice)

1.
$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & -1 & 18 \\ -1 & -15 & -5 & 0 \\ 0 & 12 & -3 & 9 \\ 5 & 35 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 0.1875 & 0.0625 & 0.0625 & 0.125 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.3125 & 0.5625 & -0.4375 & -1.875 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 (2013)

Partie 1. La méthode dite de partie double

1. Le nombre de comptes crédités est égal au nombre de lignes, et celui de comptes débités est le nombre de colonne. Donc 3 comptes ont été crédités (notons-les 1, 2, 3 respectivement) et 3 ont été débités (notés a, b, c).

2. Le nombre 500 est en première ligne et deuxième colonne, donc correspond le montant que le compte b donne au compte 1.

3. Par les règles de multiplication des matrices on a
$$C = AU = \begin{pmatrix} 3200 \\ 2400 \\ 4090 \end{pmatrix},$$
qui indique le montant total crédité dans les trois comptes.

4. De même on calcule
$$D = {}^tUA = \begin{pmatrix} 5500 & 1890 & 2300 \end{pmatrix}$$
indique le montant total débité dans les trois comptes.

5. On obtient que
$$DU = (9690)$$
qui est le montant total débité dans l'ensemble des trois comptes a, b, c.

6. Le montant total crédité dans l'ensembles des trois comptes 1, 2, 3 vaut
$${}^tUC = (9690).$$

7. Les deux montants indiquent la totalité des transactions, donc sont égaux sans surprise. Ceci est aussi montré par les calculs matriciels formels (pas numérique), $DU = ({}^tUA)U = {}^tU(AU) = {}^tUC$.

Partie 2. Matrice de Léontief

1. (a) La consommation intermédiaire de A est

$$\begin{aligned} & 0.2 \times (\text{production de A}) + 0.25 \times (\text{production de B}) + 0.05 \times (\text{production de C}) \\ = \; & 0.2 \times 2000 + 0.25 \times 3000 + 0.05 \times 1500 \\ = \; & 1225 \end{aligned}$$

De même, celle de I vaut

$$0.15 \times 2000 + 0.3 \times 3000 + 0.27 \times 1500 = 1605.$$

Celle de T vaut

$$0.1 \times 2000 + 0.14 \times 3000 + 0.14 \times 1500 = 830.$$

(b) La consommation finale est égale à la production moins la consommation intermédiaire. Donc la consommation finale vaut respectivement :

$$A : 2000 - 1225 = 775 \quad I : 3000 - 1605 = 1395 \quad T : 1500 - 830 = 670.$$

2. (a) A multiplié par P représente exactement les consommations intermédiaires. Donc le coté droit de l'égalité est la consommation totale, qui vaut idéalement la production.

(b) D'après la question précédente :

$$(I_3 - A)P = D,$$

donc si $I_3 - A$ est inversible, on a $P = (I_3 - A)^{-1}D$.

3. En appliquant les formules de 2(b) on obtient :

$$P = \begin{pmatrix} 4206 \\ 3221 \\ 1682 \end{pmatrix}.$$

Donc il faut que la production totale soit respectivement 4206 euros dans le secteur agricole, 3221 euros dans le secteur industriel et 1682 euros dans le secteur de transport.