Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Probabilités 2

2022-2023

Exercice 1 (2017)

Partie 1

1. **Loi de M :**
   $P(M=0) = P((M,C)=(0,0)) + P((M,C)=(0,1)) = 0,7$,
   $P(M=1) = P((M,C)=(1,0)) + P((M,C)=(1,1)) = 0,3$.
   Loi de C :
   $P(C=0) = P((M,C)=(0,0)) + P((M,C)=(1,0)) = 0,6$,
   $P(C=1) = P((M,C)=(0,1)) + P((M,C)=(1,1)) = 0,4$.
   La probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $P(C=0) = 0,6 = 3/5$.
2. $E(C) = 0 \times P(C=0) + 1 \times P(C=1) = 0,4$.
   $E(M) = 0 \times P(M=0) + 1 \times P(M=1) = 0,3$.
3. $COV(M,C) = E(M \times C) - E(M) \times E(C)$.

$$M \times C = \begin{cases} 1 & \text{si } (M,C) = (1,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$M \times C = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } 0,1 \\ 0 & \text{avec probabilité } 0,9 \end{cases}$$

   $E(M \times C) = 0 \times 0,9 + 1 \times 0,1 = 0,1$.
   $COV(M,C) = 0,1 - 0,4 \times 0,3 = 0,1 - 0,12 = -0,02$.
   Les variables M et C ne sont pas indépendantes.
4. $P(M=1|C=1) = \frac{P(\{M=1\}\cap\{C=1\})}{P(C=1)} = \frac{P((M,C)=(1,1))}{P(C=1)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$.
5. a. Pour chaque client $i = 1, \dots, n$, on peut définir la variable aléatoire c_i prenant la valeur 1 si le client paye par carte bancaire et 0 sinon. On a que $c_i \sim Ber(0,6)$ pour $i = 1, \dots, n$.
   C_n peut s'écrire comme $C_n = \sum_{i=1}^n c_i$, donc $C_n \sim Bin(n; 0,6)$. Le nombre moyen de clients qui payent par carte bancaire est $E(C_n) = 0,6 \times n$.
   b. $P(L_1 = 5) = P(c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0, c_5 = 1) = (0,4)^4 \times 0,6 \simeq 0,015$.

Partie 2

1. i. f est continue sur $\mathbb{R}$.
   ii. $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   iii. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = [-te^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-te^{-t}]_0^{+\infty} + [-e^{-t}]_0^{+\infty} = -(-e^0) = 1$.
2. $E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt = \left[-t^2e^{-t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 2$
3. Il faut montrer que $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.
   si $x \leq 0$: $\int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0 = F(x)$.
   si $x > 0$: $\int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x te^{-t}dt = [-te^{-t}]_0^x + [-e^t]_0^x = 1 - e^{-x}(1+x) = F(x)$.

La probabilité que le temps d'attente à une caisse soit inférieur à deux unités (de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité est égal à $P(T < 2|T > 1)$. Alors,

$$P(T < 2|T > 1) = \frac{P(1 < T < 2)}{P(T > 1)} = \frac{F(2) - F(1)}{1 - F(1)} = -\frac{3}{2}e^{-1} + 1 \simeq 0,45.$$

Exercice 2 (2015)

1. Soit $X \sim U[0,1]$,
   — Fonction de densité :
   $$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   — Fonction de répartition :
   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
   — $E(X) = 1/2$
   — $V(X) = 1/12$
2. La variable aléatoire U représente le temps d'attente du voyager avant de faire le premier trajet.
3. L'événement $(U > x)$ peut s'écrire comme :
   $$\begin{aligned}(U > x) &= (\min\{X, Y\} > x) \\ &= (X > x) \cap (Y > x).\end{aligned}$$
   Sa probabilité est :
   — Si $x < 0$, $P(U > x) = 1$
   — Si $0 \leq x \leq 1$,
   $$\begin{aligned}P(U > x) &= P\left((X > x) \cap (Y > x)\right) \\ &= P(X > x)P(Y > x) \\ &= \left(1 - P(X \leq x)\right)\left(1 - P(Y \leq x)\right) \\ &= (1 - x)^2 \\ &= 1 - 2x + x^2.\end{aligned}$$
   — Si $x > 1, P(U > x) = 0$
   La fonction de répartition peut s'écrire comme $F(x) = P(U \leq x) = 1 - P(U > x)$. Donc,
   $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
4. Il faut montrer que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ où
   $$f(t) = \begin{cases} 2 - 2t & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   — Si $x < 0$,
   $$\begin{aligned}\int_{\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{\infty}^{x} 0dt \\ &= 0 \\ &= F(x)\end{aligned}$$

— Si $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned}\int_{\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{0}^{x} (2-2t)dt \\ &= 2x - x^2 \\ &= F(x)\end{aligned}$$

— Si $x > 1$,

$$\begin{aligned}\int_{\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{0}^{1} (2-2t)dt \\ &= 1 \\ &= F(x)\end{aligned}$$

5. L'espérance et la variance de U sont :

$$\begin{aligned}E(U) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx \\ &= \int_0^1 x(2-2x)dx \\ &= 1/3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(U) &= E(U^2) - E(U)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - 1/9 \\ &= \int_0^1 x^2(2-2x)dx - 1/9 \\ &= 1/6 - 1/9 \\ &= 1/18.\end{aligned}$$

6. On peut écrire la durée totale (en minutes) comme :

$$\begin{aligned}DT &= 10 \times U + T_1 + C + 10 \times Z + T_2 \\ &= 125 + 10 \times U + 10 \times Z,\end{aligned}$$

où :
— U représente le temps d'attente avant le premier trajet (en dizaines de minutes),
— T_1 représente la durée du premier trajet qui est égale à 60 minutes,
— C représente le temps de changement qui est égale à 5 minutes,
— Z représente le temps d'attente avant le deuxième trajet (en dizaines de minutes),
— T_2 représente la durée du deuxième trajet qui est égale à 60 minutes.
Donc,

$$\begin{aligned}E(DT) &= E(125 + 10 \times U + 10 \times Z) \\ &= 125 + 10 \times E(U) + 10 \times E(Z) \\ &= 125 + 3,3 + 5 \\ &= 133,3.\end{aligned}$$

Exercice 3 (2008)

1. On peut définir pour $i = 1, \ldots, 100$ les variables

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'internaute } i\text{-ème a passé au moins une commande dans l'année 2006} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Chaque Z_i suit une loi Bernoulli avec paramètre $p = 0,3$.
Donc on peut écrire

$$X = \sum_{i=1}^{100} Z_i$$

où les variables $Z_1, \ldots, Z_{100}$ suivent une loi $Ber(0,3)$ et peuvent être considérés indépendants [1]. On a alors :

$$X \sim Bin(100; 0,3),$$
$$E(X) = 0,3 \times 100 = 30,$$
$$V(X) = 100 \times 0,3 \times (1 - 0,3) = 21.$$

2. Par une loi normale $N(30, \sqrt{21})$.
3. Soit $Z \sim N(0,1)$,

$$\begin{aligned}
P(X > 30) &= P(X - 30 > 0) \\
&= P\left(\frac{X-30}{\sqrt{21}} > 0\right) \\
&\approx P(Z > 0) \\
&= 1/2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(|X - E(X)| \leq 2) &= P(-2 \leq X - 30 \leq 2) \\
&= P\left(\frac{-2}{\sqrt{21}} \leq \frac{X-30}{\sqrt{21}} \leq \frac{2}{\sqrt{21}}\right) \\
&\approx P\left(\frac{-2}{\sqrt{21}} \leq Z \leq \frac{2}{\sqrt{21}}\right) \\
&= \Phi(0.44) - \Phi(-0.44) \\
&= \Phi(0.44) - [1 - \Phi(0.44)] \\
&= 2 \times \Phi(0.44) - 1 \\
&\approx 2 \times 0,67 - 1 \\
&\approx 0,34
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X = 80) &= P\left(\frac{X-30}{\sqrt{21}} = \frac{50}{\sqrt{21}}\right) \\
&\approx P(Z = 10.9) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exercice 4 (Calculatrice)

1. La probabilité qu'un bébé pèse à la naissance entre 3 kg et 4 kg est de 0,831.
2. La probabilité qu'un bébé pèse à la naissance moins de 3 kg est 0,144.
3. La probabilité qu'un bébé pèse à la naissance plus de 4 kg est 0,024.
4. Il y a une probabilité de 0,95 qu'un bébé pèse moins de 3,893 kg à la naissance.

Note : pour obtenir les valeurs de $P(X < 3)$ et $P(X > 4)$, on a calcule $P(-10^{99} < X < 3)$ et $P(4 < X < 10^{99})$, l'erreur commise est négligeable.

1. Comme le tirage est fait avec remise, rien empêche la possibilité de qu'on prend deux fois le même internaute, donc les variables $Z_1, \ldots Z_{100}$ ne sont pas forcement indépendants. Mais, comme le nombre d'internautes est beaucoup plus grand que 100, la probabilité de choisir deux fois le même internaute est très très faible et on peut considérer $Z_1, \ldots, Z_{100}$ comme variables indépendants.