Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Analyse 5 : correction

2023-2024

Exercice 1

(a)

Au voisinage de $u = 0$, $\lim_{u\to 0} \frac{1}{u+1} = 1$, donc $\frac{1}{u+1} \sim 1$.
Au voisinage de $u = +\infty$, $u + 1 \sim u$, donc $\frac{1}{u+1} \sim \frac{1}{u}$.

(b)

Au voisinage de $x = 0$, $x^2 - \frac{x}{2} \sim -\frac{x}{2}$ donc

$$\frac{1}{x^2 - \frac{x}{2}} \sim \frac{1}{-\frac{x}{2}} = \frac{-2}{x}.$$

Au voisinage de $x = +\infty$, $x^2 - \frac{x}{2} \sim x^2$ donc

$$\frac{1}{x^2 - \frac{x}{2}} \sim \frac{1}{x^2}.$$

(c)

Le développement limité de e^t au voisinage de $t = 0$ à l'ordre 1 est

$$e^t = 1 + t + o(t).$$

Donc

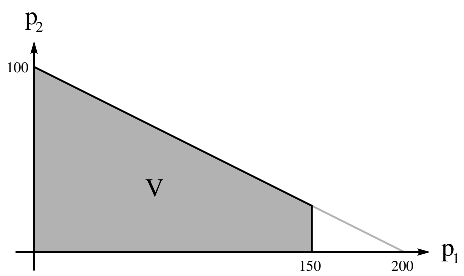
$$\frac{e^t - 1}{t} = \frac{t + o(t)}{t} \sim 1.$$

(d)

Le développement limité de $\sqrt{1+y}$ au voisinage de $y = 0$ est $1 + \frac{1}{2}y + o(y)$. Donc $\sqrt{1+y} - 1 \sim \frac{1}{2}y$.

Exercice 2 (2019)

1. Le modèle suppose que $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$, d'où $(p_1, p_2) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Le modèle suppose aussi que $D_A(p_1) > 0$ et $D_B(p_1, p_2) > 0$. La condition en D_A impose $\left(\frac{p_1}{50}\right)^2 < 9$, d'où $p_1 < 150$. La condition en D_B impose $\frac{200-p_1-2p_2}{100} > 0$, d'où $p_1 + 2p_2 < 200$.



2. (a) On s'intéresse à la fonction $P_A(p_1) = p_1\left(9 - \left(\frac{p_1}{50}\right)^2\right)$ définie sur $]0, 150[$. Sa dérivée est

$$P'_A(p_1) = 9 - \frac{3}{2500}p_1^2$$

définie et continue sur $]0, 150[$. Les points critiques sont les solutions de $P'_A(p_1) = 0$, qui nous amène à $p_1^2 = 3 \times 2500$. Parmi les solutions de ce polynôme ($\pm 50\sqrt{3}$), seulement $50\sqrt{3}$ est dans le domaine de définition de $P_A(p_1)$. La dérivée seconde est

$$P''_A(p_1) = -\frac{3}{1250}p_1$$

et $P''_A(p_1) < 0$ pour $p_1 \in]0, 150[$. La fonction $P_A(p_1)$ est donc concave, elle a un maximum local en $50\sqrt{3}$, qui est aussi un maximum global à cause de sa concavité. Le prix des imprimantes qui maximise le chiffre d'affaires est donc $p_1^* = 50\sqrt{3} \approx 86,60$.

(b) $P_B(p_2) = p_2 \frac{200 - 50\sqrt{3} - 2p_2}{100}$ et sa dérivée est

$$P'_B(p_2) = \frac{4 - \sqrt{3}}{2} - \frac{p_2}{25}$$

d'où le seul point critique est $p_2 = 25\frac{4-\sqrt{3}}{2}$. Comme $P''_B(p_2) = -\frac{1}{25} < 0$, P_B est concave, son point critique est un maximum local et un maximum global. On obtient $p_2^* = 25\frac{4-\sqrt{3}}{2} \approx 28,35$.

(c) Le chiffre d'affaires total s'obtient par évaluation directe :

$$P_A(p_1^*) + P_B(p_2^*) = \frac{475}{8} + 275\sqrt{3} \approx 535,69$$

3. (a)

$$P(p_1, p_2) = p_1\left(9 - \left(\frac{p_1}{50}\right)^2\right) + p_2\frac{200 - p_1 - 2p_2}{100}$$

et les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial P}{\partial p_1}(p_1, p_2) = 9 - 3\left(\frac{p_1}{50}\right)^2 - \frac{p_2}{100}$$

$$\frac{\partial P}{\partial p_2}(p_1, p_2) = 2 - \frac{p_1}{100} - \frac{p_2}{25}$$

Les points critiques sont les solutions conjointes des équations $\frac{\partial P}{\partial p_1}(p_1, p_2) = 9 - 3\left(\frac{p_1}{50}\right)^2 - \frac{p_2}{100} = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial p_2}(p_1, p_2) = 2 - \frac{p_1}{100} - \frac{p_2}{25} = 0$. De la deuxième équation on peut écrire p_1 en fonction de p_2 :

$$p_1 = 200 - 4p_2$$

et le remplacer dans la première équation. Un peu de calcul nous amène à la condition suivante :

$$-\frac{12}{625}p_2^2 + \frac{191}{100}p_2 - 39 = 0$$

ce qui équivaut à

$$-0,0192\, p_2^2 + 1,91\, p_2 - 39 = 0$$

Le discriminant est $1,91^2 - 4 \times 0,0192 \times 39 = 0,6529$ qui est positive. Les deux valeurs de p_2 qui annulent ce polynôme sont

$$\frac{-1,91 + \sqrt{0,629}}{-2 \times 0,0192} \approx 28,70 \qquad et \qquad \frac{-1,91 - \sqrt{0,629}}{-2 \times 0,0192} \approx 70,78$$

En utilisant l'équation obtenue précédemment, on obtient les deux valeurs correspondantes suivantes pour p_1 :

$$200 - 4 \times 28,70 \approx 85,21 \qquad et \qquad 200 - 4 \times 70,78 \approx -83,12$$

Mais la deuxième valeur n'appartient pas à V. Le seul point critique de P en V est donc $p_1 \approx 85,21$ et $p_2 \approx 28,70$.

(b) On sait que P présente un point critique en V, mais il reste à vérifier s'il s'agit d'un maximum local. Les dérivées partielles secondes de P sont

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_1^2}(p_1, p_2) = -\frac{3}{1250} p_1 \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial p_1 \partial p_2}(p_1, p_2) = -\frac{1}{100} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial p_2^2}(p_1, p_2) = -\frac{1}{25}$$

Il suffit maintenant d'évaluer ces équations au point $(85,21; 28,70)$ et d'utiliser les conditions du deuxième ordre d'existence d'un maximum local : le déterminant de la matrice hessienne doit être positive et la dérivée seconde par rapport à p_1 doit être négative. En effet,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_1^2}(85,21,\ 28,70) \times \frac{\partial^2 P}{\partial p_2^2}(85,21,\ 28,70) - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial p_1 \partial p_2}(85,21,\ 28,70)\right)^2 = \frac{p_1}{62500} - \frac{1}{10000} \approx 0,008 > 0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_1^2}(85,21,\ 28,70) \approx -0,20 < 0$$

et les conditions du deuxième ordre nous indiquent donc que $(85,21,\ 28,70) \in V$ est un maximum local de P. Un simple calcul nous montre que $P(85,21,\ 28,70) \approx 535,89$.

4. Après la fusion des entreprises A et B, une maximisation du chiffre d'affaires total est possible. Le nouveau maximum ne peut pas être inférieur à la somme des maximums précédents car fixer les prix aux valeurs précédentes est toujours possible. Mais, comme on vient de voir, diminuer légèrement le prix des imprimantes et augmenter un peu le prix des cartouches d'encre amène à une augmentation du chiffre d'affaires total.

5. (a) Le consommateur ne peut pas dépenser plus de 120 euros, alors

$$p_1 x + p_2 y \leq 120 \qquad \text{ce qui équivaut à} \qquad 85,21x + 28,70y \leq 120$$

(b) Les dérivées partielles de la fonction d'utilité $u(x, y)$ sont

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{3x} \qquad et \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{3y}$$

qui sont positives pour $x > 0$ et $y > 0$. Cela montre que $u(x, y)$ est une fonction croissante en x pour y fixé, et que $u(x, y)$ est aussi une fonction croissante en y pour x fixé. Cela implique que le consommateur maximise son utilité en utilisant tout son budget. En effet, si la totalité du budget n'est pas dépensé, on peut toujours augmenter l'utilité en augmentant x ou en augmentant y. L'utilité maximale doit s'atteindre lorsque la totalité des 120 euros sont dépensés. Le problème est donc de trouver le maximum de $u(x, y)$ lié à la contrainte $85,21x + 28,70y = 120$.

La contrainte peut s'exprimer comme $g(x, y) = 85,21x + 28,70y - 120 = 0$. L'énoncé suggère d'utiliser la méthode de Lagrange. On pose le Lagrangien :

$$L(x, y, \lambda) = u(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Les extrema sous contrainte sont parmi les points (x, y) où il existe λ qui annule les trois dérivées partielles de L.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{3x} - 85,21\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{2}{3y} - 28,70\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 85,21x + 28,70y - 120 = 0 \end{cases}$$

De la première équation, $\lambda = \frac{1}{3\times 85{,}21x}$. En remplaçant dans la deuxième équation on obtient l'équation $\frac{2}{3y} - \frac{28{,}70}{3\times 85{,}21x} = 0$, d'où $85,21x = 14,35y$. En remplaçant dans l'équation de $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$, on obtient $14,35y + 28,70y - 120 = 0$ avec solution $y = \frac{120}{43{,}05} \approx 2,79$. Finalement, $x = \frac{14{,}35}{85{,}21}y \approx 0,47$.

Il nous reste à vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum. Pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-1}{3x^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-2}{3y^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

d'où le déterminant de la matrice hessienne est positif et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$. Cela montre que $u(x, y)$ est concave. La restriction de la fonction $u(x, y)$ au domaine convexe imposé par la contrainte $g(x, y) = 0$ reste concave. L'extremum est bien un maximum local et un maximum global.

On peut conclure que l'utilité maximale s'obtient en consommant 0,47 imprimantes et 2,79 cartouches d'encre par année.

(c) De l'équation précédente, $\lambda = \frac{1}{3\times 85{,}21x} = \frac{1}{120}$. Comme le point de maximum est solution de la méthode du Lagrangien, on sait que

$$\nabla L(x, y, \lambda) = 0$$

et cela veut dire aussi que

$$\nabla u(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

$\nabla g(x, y)$ nous indique la direction de croissance maximale de g, tandis que $\nabla u(x, y)$ indique la direction de croissance maximale de u. Puisque λ est positif, augmenter g nous amène à augmenter l'utilité u. La seule façon d'augmenter g est de dépenser plus; en d'autre termes, augmenter le budget permet d'améliorer l'utilité du consommateur.