Durée de préparation : 1 heure 30

Question

Vous placez 10000 € à un taux de rémunération t. On note $C(t)$ le capital après 20 années.

1. Exprimer $C(t)$ en fonction de t.
2. Calculer l'élasticité de C par rapport à t.
3. En déduire l'influence d'une baisse de 10% du taux sur le capital.

Exercice 1

On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2(1,03)^x - (1,05)^x$.

A. Étude de la fonction f

1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

B. Projet d'entreprise

Une PME dispose d'un capital initial de 600K euros. Elle décide de placer ce capital au 1er janvier 2015 au taux annuel de 3%. Les intérêts s'ajouteront au capital au 31 décembre de chaque année. Par ailleurs cette entreprise pense louer, à partir du 1er janvier 2016, des locaux supplémentaires pour étendre ses activités. Pour pouvoir faire face à d'éventuels problèmes de trésorerie, l'entreprise négocie un prix de location inférieur au marché mais réactualisé chaque année de 5%. Le montant annuel de la location, payable d'avance, au 31 décembre de l'année précédente est fixé initialement à 12K euros. Le loyer est prélevé directement sur le capital.

On note C_n le capital en K euros disponible au 1er janvier de l'année 2015+n et L_n le montant en K euros du loyer annuel pour l'année 2015+n. Ainsi, on a $C_0 = 600$ et $L_1 = 12$. C_{n+1} désigne alors le capital disponible après capitalisation des intérêts de l'année $2015 + n$ et versement du loyer pour l'année $2015 + (n + 1)$.

1. Déterminer le capital C_1 qui sera disponible au 1er janvier 2016.
2. Déterminer L_n en fonction de n.
3. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n et L_{n+1}.
4. Exprimer C_{n+2} en fonction de C_{n+1} et de L_{n+1}.
5. En déduire que $C_{n+2} = 2,08C_{n+1} - 1,0815C_n$.
6. Vérifier que $C_1 = 600f(1)$ et que $C_2 = 600f(2)$.
7. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $C_n = 600f(n)$.
8. A l'aide des résultats concernant la fonction f justifier que ce projet ne peut pas durer indéfiniment et indiquer à quel moment l'entreprise devra changer de projet pour optimiser les gains de son placement.

9. En supposant que l'entreprise ne peut interrompre ses engagements qu'au 31 décembre d'une année entamée (avant le versement du loyer de l'année suivante), à quelle date le projet sera t'il arrêté ? Quel sera le capital à cette date ?

Exercice 2

Dans un grand magasin, on observe le nombre de clients x se présentant aux caisses pendant des intervalles de temps d'une minute. Après trois heures d'observation, on dispose de 180 données selon le tableau suivant.

Nombre de clients x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 et plus
Nombre d'intervalles de 1 minute n_i	5	5	18	32	35	30	24	15	10	3	2	0	1	0

A. Étude de la série

On pourra donner sans justification les résultats fournis par la calculatrice.

1. Calculer la moyenne $\overline{x}$ de cette série statistique.
2. Calculer la variance et l'écart-type σ_x de cette série statistique.

B. Test d'adéquation à une loi de Poisson

On va tester l'hypothèse suivant laquelle la variable aléatoire X : « nombre de clients se présentant aux caisses pendant des intervalles de temps d'une minute » suit une loi de Poisson.

1. Justifier que l'on peut prendre comme paramètre λ de la loi de Poisson : $\lambda = 4,5$.
2. Préciser le type de test utilisé et formuler les hypothèses H_0 et H_1 du test.
3. Le tableau des effectifs observés et des effectifs théoriques est le suivant :

x_i	Effectifs observés O_i	Effectifs théoriques np_i
0 et 1	10	11
2	18	20,25
3	32	30,37
4	35	34,17
5	30	30,75
6	24	23,06
7	15	14,83
8	10	8,34
9 et plus	6	7,23

   a) Expliquer pourquoi on a regroupé les deux premières valeurs et les dernières valeurs.
   b) Comment s'obtiennent les valeurs de la colonne « Effectifs théoriques » ? Donner un exemple.
4. a) Préciser la statistique du test et donner sa loi.
   b) La valeur de la statistique du test est 1,05. Comment obtient-on cette valeur ? Quelle est la conclusion du test avec un risque de première espèce de $\alpha = 5\%$.
5. Un logiciel précise que la p-valeur de ce test est 0,994. En utilisant cette p-valeur, donner la conclusion de ce test avec un risque de $\alpha = 1\%$. Interpréter le résultat.