Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Probabilités 1

2023-2024

Exercice 1

$P(\text{obtenir deux as de pique}) = \frac{30}{\binom{32}{3}} = \frac{30}{4960} \simeq 0,006$.

Exercice 2

On considère les evenements :

$$D = \text{le dé est pipé},$$

$$S = \text{obtenir un 6}.$$

1. $P(S) = P(S|D) \times P(D) + P(S|D^C) \times P(D^C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.
2. $P(D|S) = \frac{P(S|D) \times P(D)}{P(S)} = \frac{1/2 \times 1/4}{1/4} = \frac{1}{2}$.

Exercice 3

1. **Loi de M :**
   $P(M = 0) = P((M, C) = (0, 0)) + P((M, C) = (0, 1)) = 0,7$,
   $P(M = 1) = P((M, C) = (1, 0)) + P((M, C) = (1, 1)) = 0,3$.
   Loi de C :
   $P(C = 0) = P((M, C) = (0, 0)) + P((M, C) = (1, 0)) = 0,6$,
   $P(C = 1) = P((M, C) = (0, 1)) + P((M, C) = (1, 1)) = 0,4$.
   La probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $P(C = 0) = 0,6 = 3/5$.
2. $E(C) = 0 \times P(C = 0) + 1 \times P(C = 1) = 0,4$.
   $E(M) = 0 \times P(M = 0) + 1 \times P(M = 1) = 0,3$.
3. $COV(M, C) = E(M \times C) - E(M) \times E(C)$.

$$M \times C = \begin{cases} 1 & \text{si } (M, C) = (1, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$M \times C = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } 0,1 \\ 0 & \text{avec probabilité } 0,9 \end{cases}$$

   $E(M \times C) = 0 \times 0,9 + 1 \times 0,1 = 0,1$.
   $COV(M, C) = 0,1 - 0,4 \times 0,3 = 0,1 - 0,12 = -0,02$**.**
   Les variables M et C ne sont pas indépendantes.
4. $P(M = 1|C = 1) = \frac{P(\{M=1\} \cap \{C=1\})}{P(C=1)} = \frac{P((M,C)=(1,1))}{P(C=1)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$.
5. a. Pour chaque client $i = 1, \dots, n$, on peut définir la variabe aléatoire c_i prenant la valeur 1 si le cient paye par carte bancaire et 0 sinon. On a que $c_i \sim Ber(0,6)$ pour $i = 1, \dots, n$.
   C_n peut s'écrire comme $C_n = \sum_{i=1}^{n} c_i$, donc $C_n \sim Bin(n; 0,6)$. Le nombre moyen de clients qui payent par carte bancaire est $E(C_n) = 0,6 \times n$.
   b. $P(L_1 = 5) = P(c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0, c_5 = 1) = (0,4)^4 \times 0,6 \simeq 0,015$.

Exercice 4 (Calculatrice)

Partie 1. Loi Binomiale.

1. Il faut utiliser la fonction `binomial pdf`. La solution est égale à 0,056.
2. Il faut utiliser la fonction `binomial cdf`. La solution est égale à 0,776.
3. Il faut noter que $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6)$ et utiliser la fonction `binomial cdf` pour calculer $P(X \leq 6)$. Finalement, on retrouvera $P(X > 6) = 0,0035$.
4. Il faut noter que $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$ et utiliser la fonction `binomial cdf` pour calculer $P(X \leq 4)$. Finalement, on retrouvera $P(X \geq 5) = 0,078$.

Partie 2. Loi Poisson.

Une entreprise de transport utilise 100 camions. On suppose que la variable aléatoire X égale au nombre de camions en panne un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.

1. S'il y a 95 camions en service, il doit avoir 5 en panne. Il faut résoudre $P(X = 5)$. Pour cela, il faut utiliser la fonction `poisson pdf`. La solution est 0,1008.
2. Cela revient à calculer $P(X \leq 6)$. Il faut utiliser la fonction `poisson cdf`. La solution est 0,9665.
3. S'il y a 90 ou moins camions en service, il y a 10 camions ou plus en panne. Cela revient à résoudre $P(X \geq 10)$. Tout comme pour la loi binomiale, $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9)$. Finalement, $P(X \geq 10) = 0,0011$.