Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Probabilités 2

2022-2023

Exercice 1 (2017)

Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé une étude sur le mode de paiement en caisse. On note M la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et C la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon. L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'estimer les probabilités suivantes :

$$\begin{gathered} P((M,C)=(0,0))=0,4 \\ P((M,C)=(0,1))=0,3 \\ P((M,C)=(1,0))=0,2 \\ P((M,C)=(1,1))=0,1 \end{gathered}$$

On estime que le temps d'attente à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$$

Partie 1. Mode de paiement de la clientèle.

1. Déterminer les lois de M et C et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p=3/5$.
2. Calculer l'espérance des variables C et M.
3. Calculer la covariance du couple (M,C). Les variables M et C sont-elles indépendantes ?
4. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?
5. On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus. Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n>10$).
   a. On note C_n le nombre de clients qui paient par carte bancaire. Reconnaître la loi de C_n et en déduire le nombre moyen de clients qui payent par carte bancaire.
   b. On considère la variable aléatoire L_1 égale au rang du 1^{er} client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement s'il y en a au moins un, et à zéro sinon. Déterminer la probabilité que le premier client utilisant la carte bancaire soit le 5ème de la journée de la caissière.

Partie 2. Étude du temps moyen de passage en caisse.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Quel est le temps moyen d'attente à une caisse ?

3. Montrer que la fonction de répartition de T est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1-(x+1)e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   Calculer la probabilité que le temps d'attente à une caisse soit inférieur à deux unités (de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité.

Exercice 2 (2015)

Un voyageur doit effectuer un trajet en train avec une correspondance. Pour la première partie de son trajet, il a le choix entre le train 1 et le train 2, il prend le premier des deux trains qui arrive en gare. Puis, il effectue la seconde partie avec le train 3. On suppose que :

- Pour chacun des trois trains, le temps d'attente du voyageur (à partir du moment où il arrive sur le quai) est mesuré en dizaines de minutes et on peut le modéliser par une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
- Les variables aléatoires modélisant les temps d'attente sont indépendantes, notées X, Y et Z (pour les trains 1, 2 et 3 respectivement).
- Chacun des trajets dure une heure et le temps de changement est de 5 minutes.

On note $U = \min(X, Y)$

1. Rappeler la fonction de répartition, une densité, l'espérance et la variance de la loi uniforme sur $[0,1]$.
2. Que représente la variable aléatoire U pour la situation décrite ?
3. Soit x un réel, exprimer l'événement $(U > x)$ à l'aide d'événements liés à X et à Y. En déduire la probabilité de $(U > x)$ puis la fonction de répartition de U.
4. En déduire que U est une variable aléatoire à densité, dont la densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Déterminer l'espérance et la variance de U.
6. Quelle est, en moyenne, la durée totale du trajet du voyageur ?

Exercice 3 (2008)

Une société de marketing a observé que 30% des internautes a passé au moins une commande au cours de l'année 2006. On considère un échantillon de 100 internautes tirés au hasard avec remise et on note X le nombre d'internautes ayant passé au moins une commande dans l'année 2006.

1. Montrer que X peut s'écrire $X = \sum_1^n Z_i$ où l'on définira les variables $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$. En déduire la loi de X et préciser la valeur de $E(X)$ et $V(X)$.
2. Par quelle loi peut-on approximer la loi de X.
3. Calculer les valeurs approchées suivantes : $P(X > 30)$, $P(|X - E(X)| \leq 2)$, $P(X = 80)$.

Exercice 4 (Calculatrice)

On suppose que la masse (en kg) X d'un bébé à la naissance suit la loi normale de paramètres $\mu = 3,35$ et $\sigma^2 = 0,1089$.

1. Déterminer la probabilité qu'un bébé pèse à la naissance entre 3 kg et 4 kg.
2. Déterminer la probabilité qu'un bébé pèse à la naissance moins de 3 kg.
3. Déterminer la probabilité qu'un bébé pèse à la naissance plus de 4 kg.
4. Déterminer la masse m_1 tel que la probabilité qu'un bébé à la naissance pèse moins de m_1 est de 0,95.