Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Mathématiques - DM1

2023-2024

Exercice 1 (2017)

Une association doit choisir entre deux modèles pour organiser les adhésions. Dans le premier modèle, l'adhésion est renouvelable chaque année alors que dans le second, l'adhésion (renouvelable) vaut pour deux ans.

La population susceptible d'adhérer à cette association est constituée de N individus, où N est un entier naturel non nul. L'objet de cet exercice est l'étude de l'évolution dans le temps du nombre d'adhérents pour chacun de ces modèles. Dans les parties I et II on étudie chacun de ces modèles indépendamment l'un de l'autre, puis dans la partie III on les compare.

I - Premier modèle : adhésion d'un an

L'association propose à la population de N individus une adhésion, d'une durée de 1 an, renouvelable à la fin de chaque année. On note a_1 le nombre d'adhérents la première année, a_2 le nombre d'adhérents la deuxième année, etc. On pose $a_0 = 0$.

On suppose que, chaque année, 7 adhérents sur 10 renouvellent leur adhésion pour l'année suivante et que, parmi les non adhérents d'une année, 9 sur 10 adhèrent l'année suivante.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -\frac{1}{5}a_n + \frac{9N}{10}$.
2. Exprimer alors, pour tout entier naturel n, le nombre a_n d'adhérents la $n^{\text{ième}}$ année en fonction de n et de N.
3. Quelle est la limite de la suite (a_n) ?

II - Second modèle : adhésion pour deux ans

L'association propose à la population de N individus une adhésion, d'une durée de 2 ans, renouvelable.

Chaque année, les adhérents sont donc de deux sortes :

- ceux qui en sont à la première année de l'adhésion en cours et on note u_n leur nombre la $n^{\text{ième}}$ année ;
- ceux qui en sont à la seconde année de l'adhésion en cours et on note v_n leur nombre la $n^{\text{ième}}$ année.

On note w_n le nombre de personnes qui ne sont pas adhérentes la $n^{\text{ième}}$ année. On pose $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ et $w_0 = N$.

On suppose que 8 adhérents sur 10 en fin de contrat renouvellent leur adhésion pour l'année suivante, que 8 non adhérents sur 10 d'une année adhérent l'année suivante et qu'aucune personne ne résilie son adhésion en cours.

1. Soit n un entier naturel. Exprimer u_{n+1}, v_{n+1} puis w_{n+1} en fonction de u_n, v_n et w_n. On note X_n la matrice-colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, déterminer une matrice A telle que : $X_{n+1} = AX_n$.

2. Exprimer alors, pour n entier naturel, X_n en fonction de n, A et N.

3. (a) Calculer $A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Donner les coefficients de la matrice D, puis ceux de D^n.

   (c) En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n pour n entier naturel non nul.

   (d) Que vaut la somme $u_n + v_n + w_n$? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

   (e) Déterminer les limites de chacune des trois suites (u_n), (u_n) et (w_n).

III - Comparaison des deux modèles

Quel modèle d'adhésion conseilleriez-vous à cette association ? Ce choix dépend-il de la taille de la population concernée ?

Exercice 2 (2011)

Tous les jours une entreprise doit envoyer un colis, pour cela elle utilise une des deux agences : l'agence A ou l'agence B. La probabilité pour que l'agence A livre le colis avec du retard est de 0,1 et la probabilité pour que l'agence B livre avec du retard est de 0,2. Les différentes livraisons sont indépendantes. Dans cet exercice nous étudions diverses situations liées à ces données. Les hypothèses données pour une situation ne sont valables que pour cette situation.

Situation 1 : L'entreprise décide d'utiliser l'agence A pendant n jours consécutifs (n étant un entier non nul). On note X la variable aléatoire représentant le nombre de jours où le colis arrive en retard parmi les n jours.

1. Déterminer la loi de X et rappeler la valeur de son espérance.

2. L'agence A fait payer à l'entreprise un prix de 8€ par colis si le colis arrive dans le temps voulu et la livraison est gratuite si le colis arrive en retard. On note C le prix payé par l'entreprise après les n jours.

   (a) Exprimer C en fonction de X.

   (b) En déduire le prix moyen payé par l'entreprise pendant une durée de n jours.

Situation 2 : L'entreprise tente l'expérience suivante : à partir d'un jour donné que l'on notera le jour 1, elle décide d'utiliser l'agence A jusqu'à ce qu'un colis arrive en retard, le jour suivant elle utilisera alors l'agence B. On note Y la variable aléatoire représentant le numéro du jour où pour la première fois l'entreprise utilise l'agence B.

1. Justifier que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^* - \{1\}$.

2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ on a : $P(Y = k) = (0,9)^{k-2} \times 0,1$.

3. **(Optionnelle)** Vérifier par le calcul que $\sum_{k=2}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.

Situation 3: L'entreprise fonctionne ici de la façon suivante :

- Le premier jour elle utilise l'entreprise A,
- Si un jour donné le colis a du retard alors l'entreprise change d'agence de transport sinon elle conserve la même agence de transport.

Pour $n \geq 0$ on note p_n la probabilité pour que l'entreprise utilise l'agence A le n-ième jour.

1. Donner la valeur de p_1.

2. Calculer p_2.
3. Montrer que $\forall n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2$.
4. Déterminer p_n en fonction de n puis la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite (p_n) Interpréter ce résultat.