Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Graphes et graphes probabilistes : correction

2022-2023

Exercice 1

Les degrés des sommets sont :

$$d(A) = 3, \qquad d(B) = 3, \qquad d(C) = 4, \qquad d(D) = 2, \qquad d(E) = 4.$$

Seulement les sommets A et B ont un degré impair. Le théorème d'Euler, nous dit que ce graphe admet une chaine eulérienne entre A et B. Deux possibilités sont A-B-C-D-E-A-C-E-B et A-E-B-A-C-E-D-C-B. En revanche, ce graphe n'admet pas de cycle eulérien.

Exercice 2 (2016)

1. Le graphe possède 9 sommets. Son ordre est donc 9.
2. Il y a 4 arêtes partant du sommet B. Son degré est donc 4.
3. Le graphe n'est pas complet car, par exemple, les sommets A et G ne sont pas adjacents.
4. La matrice d'adjacence est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. En utilisant un logiciel (par exemple Python) on obtient :

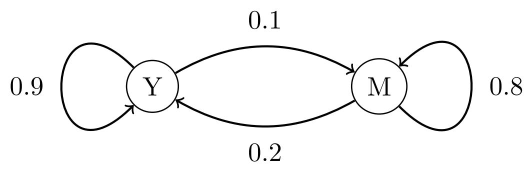
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 6 & 6 & 2 & 2 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 6 & 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

   L'élément d'indice $1, 7$ nous indique qu'il y a deux chaînes de longueur 3 reliant le sommet A au sommet G.

On peut obtenir la même chose par inspection du graphe. En effet, comme A est adjacent seulement aux sommets B et C, les chaînes de longueur 2 nous amènent aux sommets adjacents à B et à C, c'est-a-dire aux sommets D, E, I et A. Parmi eux, seul I est adjacent à G. Mais il y a deux chaînes de longueur 2 entre A et I : A-B-I et A-C-I. Finalement, il y a deux chaînes de longueur 3 entre A et G: A-B-I-G et A-C-I-G.

Exercice 3 (2015)

1. Le graphe probabiliste correspondant à cette situation est le suivante :



où le sommet Y correspond à l'état d'être acheteur des yaourts marque Y et le sommet M correspond à l'état d'être acheteur des yaourts des autres marques.

2. (a) La matrice de transition est
$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

   (b) Si on note X_1 l'état après une semaine de publicité et X_2 l'état après deux semaines de publicité, alors
$$X_1 = X_0 \times A$$
$$X_2 = X_1 \times A = X_0 \times A \times A$$
$$X_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$
   La multiplication matricielle nous donne $X_2 = \begin{pmatrix} 0.487 & 0.513 \end{pmatrix}$ d'où la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y est 0.487.

3. Comme les lignes de A somment 1, on sait que $\lambda_1 = 1$ est un valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

   La trace de A est
$$\mathrm{Tr}(A) = 0.9 + 0.8 = 1.7$$
   Mais on sait que la trace est égale aussi à la somme des valeurs propres. Donc, $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, d'où
$$\lambda_2 = \mathrm{Tr}(A) - \lambda_1 = 1.7 - 1 = 0.7$$
   Alternativement, on peut calculer le polynôme caractéristique de A et calculer ses solutions :
$$|A - \lambda I| = 0$$
$$\left| \begin{pmatrix} 0.9 - \lambda & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 - \lambda \end{pmatrix} \right| = (0.9 - \lambda)(0.8 - \lambda) - 0.02 = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7 = 0$$
   Comme avant, les deux solutions sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0.7$.

   Comme la matrice A de taille 2×2 admet 2 valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable. On peut écrire $A = P \times D \times P^{-1}$ où
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir P il nous reste à obtenir un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 0.7$. Pour ce faire, on peut résoudre le système suivante :

$$\begin{pmatrix} 0.9-\lambda_2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

où on peut remplacer $\lambda_2 = 0.7$ et obtenir

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

qui nous amène à l'équation $0.2x + 0.1y = 0$, d'où $y = -2x$. Si, par exemple on fixe $x = 1$, on a que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à λ_2.

On peut maintenant écrire la matrice P composée par les vecteur propres en colonnes et dans le même ordre que les valeur propres en D :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La formule d'inversion nous donne :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalement, on peut vérifier par la multiplication de matrice que

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P \times D \times P^{-1}$$

4. On vient de voir que $A = PDP^{-1}$. Un simple calcule montre que

   $$A^2 = A \times A = PDP^{-1} \times PDP^{-1} = P \times D \times (P^{-1} \times P) \times D \times P^{-1} = P \times D \times D \times P^{-1} = PD^2P^{-1}$$

   car par définition $P^{-1} \times P = I$. En général, si $A^n = PD^nP^{-1}$ alors

   $$A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} = P \times D \times (P^{-1} \times P) \times D^n \times P^{-1} = P \times D \times D^n \times P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

   Par récurrence on peut conclure que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n.

5. L'état de la population après n semaines de publicité est

   $$X_n = X_0A^n = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}^n \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   $$X_n = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Un peu de calcule nous amène à

   $$X_n = \begin{pmatrix} \frac{2-1.1(0.7)^n}{3} & \frac{1+1.1(0.7)^n}{3} \end{pmatrix}$$

   d'où

   $$\lim_{n\to\infty} X_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.666 & 0.333 \end{pmatrix}$$

   L'entreprise peut atteindre une part du marché 66.66% mais ne peut pas arriver à une part de 70% du marché.

6. Il faut trouver l'entier n le plus petit tel que
$$\frac{2-1.1(0.7)^n}{3} \geq 0.66$$
ce qui nous amène à
$$0.7^n \leq 0.01818$$
On peut appliquer le logarithme de deux côtés pour obtenir
$$\ln(0.7^n) = n\ln(0.7) \leq \ln(0.01818)$$
d'où $-0.357n \leq -4.007$ et
$$n \geq \frac{\ln(0.01818)}{\ln(0.7)} \approx 11.24$$
L'entreprise atteindra une part du marché supérieur ou égale à 66% à partir de la 12ème semaine.

On aurais pu obtenir le même résultat par calcule numérique :
$$X_0 = \begin{pmatrix}0.3 & 0.7\end{pmatrix}$$
$$X_1 \approx \begin{pmatrix}0.41 & 0.59\end{pmatrix}$$
$$X_2 \approx \begin{pmatrix}0.487 & 0.513\end{pmatrix}$$
$$X_3 \approx \begin{pmatrix}0.541 & 0.459\end{pmatrix}$$
$$X_4 \approx \begin{pmatrix}0.579 & 0.421\end{pmatrix}$$
$$X_5 \approx \begin{pmatrix}0.605 & 0.395\end{pmatrix}$$
$$X_6 \approx \begin{pmatrix}0.624 & 0.377\end{pmatrix}$$
$$X_7 \approx \begin{pmatrix}0.636 & 0.364\end{pmatrix}$$
$$X_8 \approx \begin{pmatrix}0.646 & 0.354\end{pmatrix}$$
$$X_9 \approx \begin{pmatrix}0.652 & 0.348\end{pmatrix}$$
$$X_{10} \approx \begin{pmatrix}0.656 & 0.344\end{pmatrix}$$
$$X_{11} \approx \begin{pmatrix}0.659 & 0.341\end{pmatrix}$$
$$X_{12} \approx \begin{pmatrix}0.662 & 0.338\end{pmatrix}$$

Exercice 4 (2014)

1. Comme les clients n'achètent qu'un paquet par semaine et chaque paquet ne contient qu'une figurine, $p_1 = 1$.

2. Les figurines se trouvant dans les deux paquets qu'achète un client sont indépendantes.

   La probabilité d'avoir deux tirages identiques au bout de deux semaines est la probabilité d'avoir la même figurine dans le deuxième paquet que le premier, et le tirage est équiprobable, on a alors
$$p_2 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$
   La probabilité d'avoir deux tirages différentes au bout de deux semaines est la probabilité d'avoir une figurine différente dans le deuxième paquet que le premier, et le tirage est équiprobable, on a alors
$$q_2 = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$
   On pourrait aussi avoir fait $q_2 = 1 - p_2$.

3. La probabilité d'avoir trois tirages identiques au bout de trois semaines est la probabilité d'avoir la même figurine dans le premier, le deuxième, et le troisième paquet, on a alors

$$p_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Pour avoir les trois distincts on a 3 choix pour le premier, 2 pour le second, et un seul choix pour le troisième, on a alors

$$r_3 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Finalement,

$$q_3 = 1 - p_3 - r_3 = \frac{9}{9} - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

4. Avoir les n tirages identiques nécessite d'avoir d'abord $n-1$ identiques, puis le n-ième soit la même qu'avant, donc de probabilité

$$p_n = \frac{1}{3} p_{n-1}.$$

Si on voit deux figurines parmi des n tirages, ceci peut être :

- les $n-1$ premiers sont identiques, et le n-ième est parmi les deux qui restent,
- les $n-1$ premiers ont 2 figurines distinctes, et le n-ieme est parmi ces deux figurines.

D'où

$$q_n = \frac{2}{3} p_{n-1} + \frac{2}{3} q_{n-1}.$$

Pour avoir 3 figurines, les possibilités sont :

- avoir déjà les trois pendant $n-1$ tirages,
- avoir deux figurines pendant $n-1$ tirages, puis la troisième apparaît au n-ième tirage.

$$r_n = r_{n-1} + \frac{1}{3} q_{n-1}.$$

5. On appelle U_n le vecteur colonne $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.

Les relations de la question précédente se transcrit par :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \\ r_{n-1} \end{pmatrix}.$$

6. Notons $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

On peut calculer p_{12}, q_{12} et r_{12} en utilisant la relation matricielle trouvé dans la question précédente : $U_{12} = A^{11} U_1$, où $U_1 = (p_1, r_1, q_1) = (1, 0, 0)$.

On a alors

$$\begin{pmatrix} p_{12} \\ q_{12} \\ r_{12} \end{pmatrix} = A^{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.6 \times 10^{-6} \\ 0.023 \\ 0.977 \end{pmatrix}.$$

La probabilité d'avoir deux figurines au bout de 12 semaines (r_{12}) est 2.3%, donc avoir 15 personnes n'ayant que deux figurines parmi les 1000 clients est tout à fait normal.