Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Analyse 2

2022-2023

Exercice 1

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - 1 + 2e^{-u_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[\ln 2, 2]$.
2. Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique, $p > 0$ un réel tels que :

$$a_0 = 1, \quad a_n = pa_{n-1}, \forall n \geq 1.$$

Quelle est l'expression de a_n en fonction de n ? Est-ce que la série de terme général a_n est convergente ?

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
2. $$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$$
3. $$\sum_{n\geq 1} \frac{n + \ln n}{n^2}$$
4. $$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2n^2}{n^2+n+1}\right)^n$$
5. $$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Exercice 4 (2020, une partie)

Nous étudions dans cette partie l'indépendance entre le nombre de clients d'une caisse donnée payant par carte bancaire, et le nombre de clients utilisant un autre mode de paiement à la même caisse pendant une heure de pointe.

Pour cela, on considère les variables aléatoires suivantes :

$Z =$ "nombre total de clients payant à cette caisse pendant une heure de pointe",

$X =$ "nombre de clients payant à cette caisse par carte bancaire pendant cette même heure de pointe",

$Y =$ "nombre de clients utilisant à cette caisse un autre mode de paiement pendant la même heure de pointe".

On a donc : $Z = X + Y$.

On suppose que :

- Z suit une loi de Poisson de paramètre λ.
- la probabilité qu'un client paye par carte bancaire à une heure de pointe est constante et égale à p.

1. Pour tout entier naturel n et tout entier k positif inférieur ou égal à n, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{\{Z=n\}}(X = k)$, que k clients payent par carte bancaire à une caisse donnée sachant que n clients sont passés à cette caisse.
2. (a) Déterminer a tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^n}{n!}\lambda^n = e^a$.

   (b) Pour k entier naturel, exprimer $P(X = k)$ en fonction des probabilités $P_{\{Z=n\}}(X = k)$ et $P(Z = n)$ où $n \in \mathbb{N}$.

   (c) En déduire que la variable aléatoire X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
3. On admet que Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1 - p)$.

   Montrer que le nombre de personnes payant par carte bancaire est indépendant du nombre de personnes utilisant un autre mode de paiement.