PGE-PGO

Préparation au concours EDHEC AST1

RAPPELS

Les quelques pages qui suivent présentent des rappels du cours de mathématiques de lycée et de début de premier cycle universitaire. Elles doivent être lues avec attention et parfaitement maîtrisées pour pouvoir aborder les trois polycopiés du cours principal. Les exercices proposés, dont la correction est donnée à la fin de ces rappels, sont en nombre très limité et ne constituent évidemment pas à eux seuls une base de travail suffisante ; ils vous permettront toutefois d'évaluer votre propre compréhension du cours. En cas de difficulté dans la résolution d'un exercice, manifestez-vous sans attendre auprès de votre professeur pour obtenir de l'aide ainsi que d'autres exercices d'application. Il est indispensable d'avoir assimilé la totalité de ces rappels avant le début du cours magistral !

Pour toute question ou remarque sur ce cours, vous pouvez contacter les auteurs aux adresses suivantes :

pierre.montagnon@prepagrandesecoles.fr
simon@scoste.fr

Table des matières

1 Quelques concepts et notations utiles en théorie des ensembles.

On supposera connues certaines bases de théorie des ensembles, notamment les notions d'ensemble, de partie d'un ensemble, d'union et d'intersection de deux parties et de complémentaire d'une partie ainsi les exemples classiques d'ensembles présentés en classe de seconde (en particulier $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, les intervalles et les ensembles finis).

Dans toute cette section, on se donne $n \in \mathbb{N}^*$.

DÉFINITION 1.1 (Produit cartésien d'ensembles)**. —** *Si* E *et* F *sont deux ensembles, on note* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ *et on appelle* produit cartésien *de* E *et* F *l'ensemble des couples formés par un élément de* E *suivi d'un élément de* F.
De même, si $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ *sont* n *ensembles, le produit cartésien* $\mathrm{E}_1 \times \dots \times \mathrm{E}_n$ *est l'ensemble des* n*-uplets* $(x_1, \dots, x_n)$ *tels que* $x_i \in \mathrm{E}_i$ *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$.

EXEMPLE 1.2. Par exemple, $\{1,2\} \times \{1,3\} = \{(1,1),(2,1),(1,3),(2,3)\}$.

DÉFINITION 1.3 (Union et intersection)**. —** *Soient* E *un ensemble et* $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ *des sous-ensembles de* E. *On appelle* union des ensembles $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ *et on note*

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i$$

l'ensemble des éléments de E *qui appartiennent à au moins l'un des* A_i. *On appelle* intersection des ensembles $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ *et on note*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i$$

l'ensemble des éléments de E *présents dans tous les* A_i.

On trouve des notations similaires dans le cas d'une famille infinie de sous-ensembles.

Exercice 1.4. Si E est un ensemble et si $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n, \mathrm{B}, \mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_m$ sont des parties de E, montrer les relations suivantes (les deux premières sont parfois appelées « relations de De Morgan ») :
- $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{A}_i}$
- $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{A}_i}$
- $\mathrm{A} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathrm{A} \cap \mathrm{A}_i)$
- $\mathrm{A} \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathrm{A} \cup \mathrm{A}_i)$

Rappelons que les ensembles $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots$ sont dits deux à deux disjoints lorsque $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing$ dès lors que $i \neq j$, et qu'ils forment une *partition* de E lorsqu'ils sont disjoints, non vides et vérifient $\mathrm{E} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathrm{A}_i$ (que l'on note parfois $\mathrm{E} = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} \mathrm{A}_i$ pour souligner le fait que les A_i sont disjoints).

EXEMPLE 1.5. $\{1,3\}$ et $\{2,4\}$ forment une partition de $\{1,2,3,4\}$, mais $\{1,2,3\}$ et $\{2,4\}$ ne forment pas une partition de $\{1,2,3,4\}$.

Définition 1.6 (Fonction indicatrice)**.** — *Si* E *est un ensemble et si* A *est une partie de* E*, on appelle* fonction indicatrice de A *la fonction* $\mathbf{1}_{\mathrm{A}} : \mathrm{E} \to \{0,1\}$ *définie par*

$$\mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 1 \textit{ lorsque } x \in \mathrm{A} \\ 0 \textit{ sinon.} \end{cases}$$

En un sens, les fonctions indicatrices sont « les plus simples des fonctions » : la fonction $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ prend la valeur 1 au point x si x est dans A, et 0 si x n'est pas dans A. Elle « indique » si x est dans A ou pas.

Exemple 1.7. La fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ est la fonction constante égale à 1. La fonction $\mathbf{1}_{\varnothing}$ est la fonction constante égale à 0. La fonction $\mathbf{1}_{2\mathbb{Z}}$ est la fonction qui prend la valeur 1 sur les entiers pairs et 0 ailleurs.

Exemple 1.8. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathbf{1}_{[-3,-2]}(x) + \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [-3,-2] \\ x^2 \text{ si } x \in \mathbb{R}_+ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Remarque 1.9. Comme le montre l'exemple ci-dessus, on peut utiliser les fonctions indicatrices pour rendre la définition d'une fonction définie par morceaux plus compacte. Bien qu'elles puissent presque toujours être remplacées par une disjonction de cas, elles sont très pratiques pour réaliser des calculs et gagner du temps dans la rédaction sans pour autant perdre en rigueur. On en rencontrera abondamment dans le cours de probabilités.

La proposition ci-après n'est pas difficile ; sa démonstration est un exercice conseillé.

Proposition 1.10. — *Si* E *est un ensemble et si* A *et* B *sont deux parties de* E*, alors on a les propriétés suivantes :*

1. $\mathbf{1}_{\varnothing} = 0$
2. $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}} = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}\mathbf{1}_{\mathrm{B}}$
3. $\mathbf{1}_{\overline{\mathrm{A}}} = 1 - \mathbf{1}_{\mathrm{A}}$
4. $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}} = \mathbf{1}_{\mathrm{A}} + \mathbf{1}_{\mathrm{B}} - \mathbf{1}_{\mathrm{A}}\mathbf{1}_{\mathrm{B}}$

2 Quantificateurs, raisonnements mathématiques.

2.1 Les symboles logiques et leur utilisation.

Les symboles $\exists, \forall$ sont appelés des *quantificateurs*. Le quantificateur *universel* est $\forall$: il signifie « pour tout ». Le quantificateur *existentiel* est $\exists$: il signifie « il existe ».

EXEMPLE 2.1. La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}$, x est positif » est fausse. La proposition « $\exists x \in \mathbb{R} \mid x$ est positif » est vraie.

Noter que dans cet exemple, le signe « | » se lit « tel que » (on rencontre aussi les notations « , » ou « : »).

On rencontre fréquemment des propositions mathématiques utilisant à plusieurs reprises les quantificateurs, comme dans l'exemple suivant :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in]a, +\infty[, \exists q \in \mathbb{Q} \mid a \leqslant q \leqslant b$$

L'ordre dans lequel on rencontre ces quantificateurs est important : si l'on change cet ordre, on change le sens de la phrase. Voici deux règles :

- On peut généralement inverser deux quantificateurs de même nature. Par exemple, « $\exists a \in \mathbb{R} \mid \exists b \in \mathbb{Z}$ » veut dire la même chose que « $\exists b \in \mathbb{Z} \mid \exists a \in \mathbb{R}$ ». On prendra garde à ce que la proposition introduite par le deuxième quantificateur ne dépende pas de la variable introduite par le premier : par exemple, dans la phrase « $\exists x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in]x, x+1[$ », il est absurde d'inverser les quantificateurs.
- On ne peut pas inverser deux quantificateurs distincts. Par exemple, les propositions « $\forall \mathrm{A} > 0, \exists x \in \mathbb{R} \mid \exp(x) > \mathrm{A}$ » et « $\exists x \in \mathbb{R} \mid \forall \mathrm{A} > 0, \exp(x) > \mathrm{A}$ » n'ont pas du tout le même sens. D'ailleurs, une seule des deux est vraie. Laquelle ?

Exercice 2.2. Soient a un réel et E une partie de $\mathbb{R}$. Pour chacune des propositions suivantes, écrire l'assertion sous forme verbale puis en écrire la négation (sous les deux formes) :

- $\exists x \in \mathrm{E} \mid a + x \notin \mathrm{E}$
- $(a, b \in \mathrm{E}, a < b) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z} \mid a < c < b$
- $\forall x \in \mathrm{E}, \exists y \in \mathrm{E} \mid xy \neq 0$

REMARQUE 2.3 (sur la rédaction)**.** L'utilisation irraisonnée des quantificateurs est l'une des causes principales de perte de points dans la rédaction. Il est important de garder à l'esprit qu'un quantificateur ne peut *en aucun cas* être utilisé comme une abréviation au sein d'une phrase verbale ; de manière générale, il convient de séparer par un signe (par exemple « : ») le langage formel utilisant des quantificateurs et le langage verbal lorsque tous deux sont employés au sein d'une même phrase. Par exemple, on écrira « On veut montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid y > 2x$ », ou tout simplement « On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $y > 2x$ ».

Insistons à nouveau sur le fait que le non-respect de cette règle est *toujours* sanctionné, et qu'une stratégie prudente, vivement recommandée, consiste à ne jamais utiliser de quantificateurs et à leur préférer systématiquement leurs équivalents verbaux...

On proscrira par ailleurs l'usage des symboles d'implication et d'équivalence $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$, d'expérience bien trop dangereux pour les maigres services qu'ils peuvent rendre dans le cadre du concours EDHEC AST1, et on utilisera plutôt les indémodables locutions verbales « implique que » et « équivaut à ». On n'utilisera *en aucun cas* ces symboles à la place de connecteurs logiques tels que « donc », « or » ou « et » !

Profitons-en pour signaler à toutes fins utiles qu'un raisonnement mathématique doit présenter une structure logique (et donc grammaticale) claire et qu'il doit être rédigé sans abréviations d'aucune sorte, à de très rares exceptions près (seules sont tolérées dans le cadre du concours les abréviations *ev* et *sev*, respectivement pour *espace vectoriel* et *sous-espace vectoriel*). Les correcteurs sont impitoyables en ce qui concerne la qualité de la rédaction et il est plus que regrettable de voir des étudiants au niveau mathématique tout à fait correct écoper de notes médiocres à cause de démonstrations bâclées ou trop peu rédigées le jour du concours.

2.2 Les types de raisonnements mathématiques.

Présentons pour clore cette section quelques types courants de raisonnements mathématiques qu'il est important de maîtriser :

- Le **raisonnement par l'absurde** consiste à montrer qu'une proposition est vraie en la supposant fausse et en aboutissant à une contradiction. Ce type de raisonnement présente entre autres le grand avantage de permettre de travailler sur certains objets mathématiques... dont on cherche à montrer qu'ils n'existent pas ! Par exemple, on pourra montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

— Le **raisonnement par contraposition** consiste à montrer l'implication $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ en montrant sa contraposée (non $\mathrm{B} \Rightarrow$ non A). On montrera par exemple par contraposée que si D, D' et D'' sont trois droites du plan et si D est parallèle à D', alors (D coupe D'') $\Rightarrow$ (D'' coupe D').

- Le **raisonnement par récurrence** vise à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ une proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Il peut se présenter sous plusieurs formes dont les plus classiques sont les suivantes :
  - la récurrence simple (on montre que $\mathscr{P}(0)$ est vraie puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est, ce qui permet d'établir que $\mathscr{P}(n)$ est vraie à tous les rangs),
  - la récurrence double (on montre que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies alors $\mathscr{P}(n+2)$ l'est, ce qui permet là aussi de conclure),
  - et enfin la récurrence forte (on montre que $\mathscr{P}(0)$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si *toutes les propositions jusqu'au rang n* sont vraies [1], alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, ce qui permet une fois encore de conclure).

  Ce type de raisonnement, connu généralement depuis la fin du lycée, doit être parfaitement maîtrisé et sa rédaction doit être impeccable. Le fait de raisonner par récurrence à partir d'un rang autre que 0 ne doit pas non plus poser le moindre problème à l'étudiant bien préparé.

Exercice 2.4. En apportant le plus grand soin à la rédaction du raisonnement, montrer par une récurrence simple que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \geqslant 1$, puis

1. C'est-à-dire si $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1), \ldots, \mathscr{P}(n)$ sont toutes vraies.

montrer par une récurrence forte que tout nombre entier supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

3 Les suites et les limites des suites.

DÉFINITION 3.1 (Suite réelle)**. —** *La* suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite des nombres réels* $u_0, u_1, \ldots$ *. Si* $n \in \mathbb{N}$*, le réel* u_n *(lire « u indice n ») est appelé le* $(n+1)$-ème terme *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

REMARQUE 3.2. Il existe la même différence entre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui est une suite) et u_n (qui est le $(n+1)$-ème terme de la suite, c'est-à-dire un réel) qu'entre une fonction f et sa valeur $f(x)$ en un point. Lorsque l'on souhaite parler de la valeur générique u_n, on parle de *terme général de la suite* : par exemple, dire « la suite de terme général $n^2 - 3\sqrt{n}$ » revient à parler de la suite $\left(n^2 - 3\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

REMARQUE 3.3. Il arrive qu'une suite soit indexée non plus par $\mathbb{N}$, mais par $\mathbb{N}^*$: dans ce cas, elle commence par le terme u_1 (et non plus par u_0 comme dans la définition).

EXEMPLE 3.4. La suite définie par $u_n = 1$ pour tout n est la suite constante égale à 1. On dit aussi qu'elle est *stationnaire*.

Pour définir une suite, il faut définir tous ses termes. Parfois, on les définit de manière explicite, comme dans l'exemple précédent. Parfois, cela se fait *par récurrence*, c'est-à-dire que l'on définit le premier terme u_0, puis on définit chaque terme en fonction du (ou des) précédent. Enfin, il arrive que l'on soit amené à définir des suites de manière implicite, comme nous le verrons dans le polycopié de cours principal. Voici deux exemples très importants de suites définies par récurrence sur lesquels nous reviendrons plus longuement dans le cours.

EXEMPLE 3.5. Soient a et s deux nombres réels. La suite définie par

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + s$$

est appelée *suite arithmétique de premier terme a et de raison s*. C'est la suite qui « commence » à a, et qui est telle qu'à chaque n, on additionne s au terme précédent.

EXEMPLE 3.6. Soient a et r deux nombres réels. La suite définie par

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n \times r$$

est appelée *suite géométrique de premier terme a et de raison r*. C'est la suite qui « commence » à a, et qui est telle qu'à chaque n, on multiplie le terme précédent par r.

Exercice 3.7. On définit par récurrence une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :

$$u_0 = 1, u_1 = 3, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 0, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n^2 + 1$$

Trouver les cinq premiers termes de cette suite.

Il est possible de représenter les suites réelles sur un graphique : il suffit de représenter les points de coordonnées (n, u_n). Attention, il est absurde de tracer un graphe reliant tous ces points : une suite n'est définie que pour les entiers $0, 1, 2, \ldots$ et pas pour les nombres réels comme 1.5 ou 3.1.

FIGURE 1 – Représentation de la suite réelle de terme général $u_n = \frac{1}{n+1}$.

3.1 Bornes, sens de variation et périodicité.

DÉFINITION 3.8 (Suite réelle minorée, majorée, bornée)**. —** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit qu'elle est* minorée *s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$m \leqslant u_n$$

On dit qu'elle est majorée *s'il existe un réel* M *tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathrm{M} \geqslant u_n$$

Si la suite est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est bornée.

PROPOSITION 3.9. — *Une suite (u_n) est bornée si et seulement s'il existe une constante réelle* C *telle que pour tout n,*

$$|u_n| \leqslant \mathrm{C}$$

DÉFINITION 3.10 (Suite réelle croissante, décroissante, monotone)**. —** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit qu'elle est* croissante *lorsque pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$. On dit qu'elle est* décroissante *lorsque pour tout n, $u_n \geqslant u_{n+1}$. Une suite* monotone *est une suite qui est soit croissante, soit décroissante. Si les inégalités ci-dessus sont strictes pour tout n, on parle de suite* strictement *croissante ou décroissante, et plus généralement de suite* strictement monotone.

Pour étudier le sens de variation d'une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie de manière explicite, on calcule pour tout $n \geqslant 0$ la différence $u_{n+1} - u_n$. Si celle-ci est positive (resp. négative) quel que soit n, alors la suite est croissante (resp. décroissante). Dans le cas d'une suite à termes strictement positifs, il est parfois plus intéressant d'étudier le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et de remarquer que la suite est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (resp. $\leqslant 1$) pour tout $n \geqslant 0$. Les deux méthodes s'appliquent à des suites strictement monotones en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Exercice 3.11. Quel est le sens de variation de la suite de terme général $u_n = n^2 + 2n$? Même question avec $v_n = n^2 - 8n$.

DÉFINITION 3.12 (Suite réelle périodique)**. —** *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* périodique *s'il existe* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout entier naturel n,*

$$u_{n+\mathrm{N}} = u_n$$

Dans ce cas, le plus petit entier positif non nul N *vérifiant cette propriété est appelé* période de la suite (u_n).

Les suites périodiques sont donc les suites qui « se répètent infiniment », comme par exemple la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. Elles prennent un nombre fini de valeurs et sont donc bornées.

Exercice 3.13. La suite de terme général $u_n = \cos(n\frac{\pi}{4})$ est-elle périodique ? (on se reportera au besoin à la section 7 pour une rapide présentation de la fonction cos)

3.2 Limites, convergence, divergence.

La *limite* d'une suite réelle est *le nombre réel l vers lequel elle tend* (s'il existe) lorsque n tend vers l'infini. On dit alors qu'elle *converge* vers cette limite l et on note

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l$$

EXEMPLE 3.14. Voici trois exemples simples de suites qui admettent une limite.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0 : en effet, lorsque n est très grand, $1/n$ est très petit (par exemple, $u_{100} = 0.01$ et $u_{1000} = 0.001$).
2. La suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ a pour limite 1.
3. La suite constante égale à a a pour limite... a.

EXEMPLE 3.15. Toutes les suites n'ont pas de limite ! Par exemple, la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1 : ses premiers termes sont $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ donc elle n'a pas de limite.

REMARQUE 3.16. La définition [2] que nous venons de donner de la limite d'une suite est pour le moins vague. Les mathématiciens se sont pourtant contentés de celle-ci pendant quelques siècles ! Il fallut attendre le XIXème siècle, et en particulier les travaux de Karl Weierstrass (1815 - 1897), pour qu'une définition réellement rigoureuse [3] soit adoptée par la communauté mathématique.

DÉFINITION 3.17 (Suite divergente)**. —** *On dit qu'une suite qui ne converge pas* diverge. *Lorsque la suite devient aussi grande que l'on veut, on dit qu'elle* diverge vers $+\infty$. *Lorsqu'elle devient aussi petite que l'on veut, on dit qu'elle* diverge vers $-\infty$. *Dans ces deux derniers cas, on note parfois*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$$

PROPOSITION 3.18. — *Si une suite réelle possède une limite, alors cette limite est unique.*

PROPOSITION 3.19. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

- *Si pour tout n, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.*
- *Si pour tout n, $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim u_n = -\infty$, alors $\lim v_n = -\infty$.*

PROPOSITION 3.20. — *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle à valeurs dans un intervalle* fermé I *qui admet une limite réelle l, alors $l \in$* I.

2. Ou plutôt la non-définition !
3. Nous la présenterons dans le cours d'analyse.

REMARQUE 3.21. Ce n'est pas vrai si I n'est pas fermé : par exemple, $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle à valeurs dans $]0,1[$ dont la limite est $0 \notin]0,1[$. Par contre, les suites réelles convergentes à valeurs dans $]0,1[$ sont à valeurs dans $[0,1]$ et leur limite est donc nécessairement dans $[0,1]$.

PROPOSITION 3.22. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si pour tout n, $u_n \leqslant v_n$ et si les deux suites convergent respectivement vers l_1 et l_2, alors $l_1 \leqslant l_2$.*

REMARQUE 3.23. On prendra garde au fait suivant : il peut arriver que pour tout n, $u_n < v_n$, mais que les deux suites convergent vers la même limite. Autrement dit, on n'a pas forcément $l_1 < l_2$ lorsque $u_n < v_n$. Seules les inégalités *larges* sont conservées, pas forcément les inégalités *strictes*. C'est le « principe de conservation des inégalités larges ».

EXEMPLE 3.24. Les suites de termes généraux respectifs $u_n = \frac{n+1}{n}$ et $v_n = \frac{n+3}{n}$ vérifient $u_n < v_n$ pour tout n, mais elles convergent toutes les deux vers la même limite $l = 1$.

THÉORÈME 3.25 (Théorème des gendarmes)**. —** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles. On suppose que pour tout n,*

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Alors, si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l.

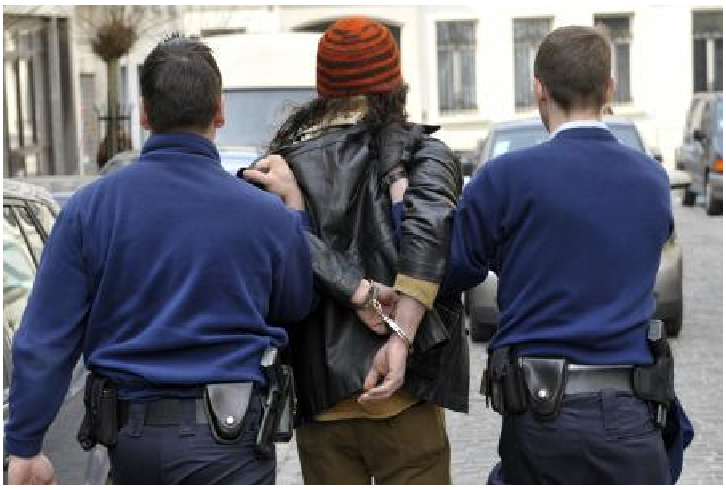


FIGURE 2 – Une illustration frappante du théorème des gendarmes.

THÉORÈME 3.26. — *Toute suite réelle croissante et majorée converge. Toute suite réelle décroissante et minorée converge.*

REMARQUE 3.27. Le théorème précédent est très puissant, car il permet de démontrer qu'une suite converge en n'étudiant que des propriétés simples comme son sens de variation ou son caractère borné. Cependant, il ne donne pas la limite de cette suite.

EXEMPLE 3.28. Attention, une suite minorée ne converge pas forcément. Par exemple, la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est minorée par -1, mais elle ne converge pas.

Exercice 3.29. Pour chacune des suites dont le terme général est donné ci-dessous, dire si elle converge, et préciser sa limite le cas échéant (attention, cet exercice utilise certains rappels présents plus bas dans ce cours).

- $u_n = 1 + \cos(n)/n$
- $u_n = \ln(n) - n$
- $u_n = \tan(1/n + 1)$
- $u_n = e^{2n+1/n}$
- $u_n = a^n$ où a est un réel quelconque (distinguer plusieurs cas)

Exercice 3.30. On veut étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{2n+1}{n+2}$$

1. Cette suite est-elle majorée par 2 ? Minorée par 2 ?
2. Montrer qu'elle est minorée à partir du rang 1 par la suite de terme général

$$v_n = 2 - \frac{2}{n}$$

3. Trouver sa limite.

On dispose de résultats commodes pour trouver la limite d'une suite qui s'exprime comme une combinaison d'autres suites admettant une limite :

THÉORÈME 3.31. — *Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites réelles admettant pour limites respectives $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :*

- *$(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\geqslant 0}$ admet pour limite $\lambda a + \mu b$,*
- *$(u_n v_n)_{n\geqslant 0}$ admet pour limite ab,*
- *si $(v_n)_{n\geqslant 0}$ ne s'annule pas et $b \neq 0$ alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant 0}$ admet pour limite $\frac{a}{b}$.*

EXEMPLE 3.32. La suite de terme général $u_n = 3\frac{1}{3+n^2} - 5\frac{\sin(n)}{1+\sqrt{n}}$ converge vers 0.

4 Les fonctions : monotonie, limites, continuité.

4.1 Description des fonctions.

4.1.1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

DÉFINITION 4.1 (Fonction)**. —** *Une fonction f est la donnée de trois objets :*

- *Un ensemble de départ,* A.
- *Un ensemble d'arrivée,* B.
- *Pour chaque élément x de l'ensemble de départ* A*, la donnée d'une image $f(x)$ dans l'ensemble d'arrivée* B.

La donnée des ensembles de départ et d'arrivée fait partie de la définition de la fonction. Souvent, on synthétise ces informations en notant

$$f : \begin{cases} \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

ou plus simplement $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ si l'on veut juste insister sur les ensembles de départ et d'arrivée.

EXEMPLE 4.2. La notation

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n^2 \end{cases}$$

désigne la fonction dont l'espace de départ est $\mathbb{N}$, dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{N}$, et qui envoie chaque entier naturel vers le carré de cet entier.

EXEMPLE 4.3. La notation

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_2, x_1 + x_2) \end{cases}$$

désigne la fonction dont l'espace de départ est $\mathbb{R}^2$, dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}^3$, et qui envoie chaque couple de réels sur le triplet obtenu en concaténant ce couple avec la somme de ses éléments.

EXEMPLE 4.4 (Partie entière)**.** La fonction « partie entière » est définie par :

$$\mathsf{E} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$$

Elle associe à chaque nombre réel x sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor 1,2 \rfloor = 1$ et $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

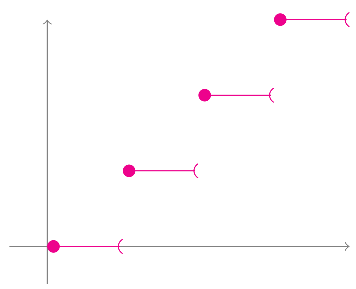


FIGURE 3 – La fonction partie entière.

EXEMPLE 4.5 (Valeur absolue)**.** La fonction « valeur absolue » est définie par :

$$\mathsf{abs}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x & \text{si } x \geqslant 0 \\ x \longmapsto -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On note généralement $|x| = \mathsf{abs}(x)$ la valeur absolue du réel x. Cette fonction possède les remarquables propriétés suivantes (la première est appelée « inégalité triangulaire ») :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \qquad |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \qquad |x-y| \leqslant \big||x| - |y|\big|$$

REMARQUE 4.6. L'ensemble d'arrivée d'une fonction n'est pas l'ensemble des valeurs que prend la fonction. Par exemple, la fonction

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

a pour ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, mais l'ensemble des valeurs qu'elle prend est $\mathbb{R}_+$.

DÉFINITION 4.7 (Restriction d'une fonction)**. —** *Si* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *est une fonction et si* $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$*, on appelle* restriction de f à A' *la fonction notée* $f_{|\mathrm{A}'}$ *définie par :*

$$f_{|\mathrm{A}'}\colon \begin{cases} \mathrm{A}' \to \mathrm{B} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

DÉFINITION 4.8 (Graphe)**. —** *Soit* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *une fonction. Le* graphe *de la fonction* f*, noté* Γ_f*, est la partie de* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *constituée des couples de la forme* $\big(x, f(x)\big)$*. Autrement dit,*

$$\Gamma_f = \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in \mathrm{A}\big\}$$

DÉFINITION 4.9 (Fonction composée)**. —** *Soient* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ *quatre ensembles, tels que* $\mathrm{B} \subset \mathrm{C}$*. Soient* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *et* $g : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ *deux fonctions. La* fonction composée de f par g*, notée* $g \circ f$ *(«* g *rond* f *») est la fonction de* A *dans* D *définie par* $g \circ f : x \mapsto g\big(f(x)\big)$.

REMARQUE 4.10. Les conditions sur les ensembles servent simplement à vérifier qu'écrire $g\big(f(x)\big)$ a bien un sens. Heuristiquement, la *composée* des deux fonctions f et g envoie d'abord x sur $f(x)$, puis envoie $f(x)$ sur $g\big(f(x)\big)$.

EXEMPLE 4.11. Soit $f : x \mapsto x^2$ et soit $g : x \mapsto x+1$. Ces fonctions sont toutes les deux définies sur tout $\mathbb{R}$, donc il est possible de les composer dans un sens ou dans l'autre. Par exemple,

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(x^2\big) = x^2 + 1.$$

Cependant,

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(x+1\big) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

On prendra donc garde à ce qu'en général, $f \circ g$ n'est pas la même fonction que $g \circ f$: le sens dans lequel on compose les fonctions importe. Il est même possible que $f \circ g$ existe et pas $g \circ f$!

Exercice 4.12. Soit
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$$
et soit
$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$
Est-il possible de former la fonction composée $g \circ f$? Et la fonction composée $f \circ g$?

Exercice 4.13. Soient f_1, f_2, f_3 les trois fonctions définies par :
$$f_1(x) = \frac{1+x}{e^x - 4}$$
$$f_2(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$
$$f_3(x) = \frac{x+1}{x-1}$$
Donner l'ensemble définition de chacune de ces fonctions. Quels sont les $i \in [\![1, 3]\!]$ tels que $\ln \circ f_i$ existe ? Expliciter la composée $f_2 \circ f_2$.

4.1.2 Bornes, sens de variation et périodicité.

Dans toute la suite, A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et f est une fonction de A dans B.

DÉFINITION 4.14 (Fonction croissante, décroissante, monotone)**. —** *On dit que* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *est :*

1. *Croissante, si :* $\forall x \in \mathrm{A}, \forall y \in \mathrm{A}, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
2. *Décroissante, si :* $\forall x \in \mathrm{A}, \forall y \in \mathrm{A}, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
3. *Strictement croissante, si :* $\forall x \in \mathrm{A}, \forall y \in \mathrm{A}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
4. *Strictement décroissante, si :* $\forall x \in \mathrm{A}, \forall y \in \mathrm{A}, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

On dit que f est monotone *si elle croissante ou décroissante, et* strictement monotone *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

La notion de croissance d'une fonction n'a de sens que si l'on peut *ordonner* les éléments des ensembles de départ et d'arrivée. C'est le cas dans tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$, à l'aide de la relation d'ordre usuelle $\leqslant$; ce n'est pas le cas dans tous les ensembles. Par exemple, dire qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est monotone n'a aucun sens *a priori* puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre canonique dans $\mathbb{R}^2$!

REMARQUE 4.15. Nous ne rappelons pas les résultats de stabilité du type « la somme de deux fonctions croissantes est croissante » connus depuis le lycée pour la bonne et simple raison que ces résultats sont faciles à retrouver de tête rapidement lorsque cela est nécessaire et que le fait de les apprendre par cœur et de les utiliser sans réfléchir peut conduire à des erreurs regrettables. L'exercice suivant illustre l'une des confusions les plus courantes.

Exercice 4.16. Soient f et g deux fonctions décroissantes. Leur produit fg est-il décroissant ?

DÉFINITION 4.17 (Fonction minorée, majorée, bornée)**. —** *Soit* A *un ensemble et* B *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$*. Soit* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *une fonction. On dit que*

- f *est minorée s'il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\forall x \in \mathrm{A}, f(x) \geqslant c$*.*
- f *est majorée s'il existe* $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\forall x \in \mathrm{A}, f(x) \leqslant \mathrm{C}$*.*
- f *est bornée si elle est minorée et majorée.*

Lorsque f est minorée, tout réel a tel que pour tout $x \in \mathrm{A}$ on ait $f(x) \geqslant a$ est appelé un *minorant* de f. De même, lorsque f est majotée, tout réel A tel que pour tout $x \in \mathrm{A}$ on ait $f(x) \leqslant \mathrm{A}$ est appelé un *majorant* de f.

Exercice 4.18. Montrer qu'une fonction $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est bornée si et seulement s'il existe une constante K telle que $\forall x \in \mathrm{A}, |f(x)| \leqslant \mathrm{K}$.

DÉFINITION 4.19 (Fonction périodique)**. —** *Soit* $\mathrm{T} > 0$ *et soit* E *un ensemble. On dit qu'une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ *est* T*-périodique, ou périodique de période* T*, lorsque* $\forall x \in \mathbb{R}$*,* $f(x+\mathrm{T}) = f(x)$*.*

REMARQUE 4.20. On peut facilement étendre cette définition aux fonctions qui ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, pourvu que l'ensemble de départ soit stable [4] par la translation $x \mapsto x + \mathrm{T}$. Cela permet par exemple de définir des fonctions 3-périodiques de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (que l'on appelle alors des *suites* 3*-périodiques*).

4.1.3 Extrema.

DÉFINITION 4.21 (Extrema d'une fonction)**. —** *Soit* E *un ensemble et soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$*. Si* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{A}$ *est une application, on dit que* f *admet un* minimum *(resp. un* maximum*) en un point* $a \in \mathrm{E}$ *si pour tout* $x \in \mathrm{E}$*,* $f(a) \leqslant f(x)$ *(resp.* $f(a) \geqslant f(x)$*). La valeur* $f(a)$ *est alors appelée* minimum *(resp.* maximum*) de* f *sur* E*. Un minimum ou un maximum est appelé un* extremum *(c'est-à-dire une valeur extrême).*

REMARQUE 4.22. Attention à bien faire la distinction (notamment dans votre rédaction) entre l'extremum et le point auquel l'extremum est atteint ! Par exemple, la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^2 + 1$ admet 1 pour minimum, mais le point auquel son minimum est atteint est 0.

Injections, surjections, bijections.

DÉFINITION 4.23 (Injection, surjection, bijection)**. —** *Soient* A *et* B *deux ensembles et* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *une fonction. On dit que*

- f *est une* injection *lorsque :* $\forall x \in \mathrm{A}, \forall y \in \mathrm{A}, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$*.*
- f *est une* surjection *lorsque* $\forall y \in \mathrm{B}, \exists x \in \mathrm{A} : f(x) = y$*.*
- f *est une* bijection *lorsque* f *est à la fois une injection et une surjection.*

4. Un ensemble A est stable par une fonction g lorsque g est définie sur A et que son ensemble d'arrivée est inclus dans A. Par exemple, $\mathbb{R}_+$ est stable par la fonction $x \mapsto x^2$, mais pas par la fonction $x \mapsto x - 3$.

En d'autres termes, une fonction est injective lorsque deux éléments distincts de son ensemble de départ ont des images distinctes [5]. Une fonction est surjective si tous les éléments de l'ensemble d'arrivée ont un antécédent [6]. Une fonction est bijective lorsque chaque élément de l'ensemble d'arrivée possède *un et un seul* antécédent dans l'espace de départ.

On donne, pour clarifier les idées, quelques exemples graphiques de fonctions réelles non injectives, non surjectives, ou bijectives.

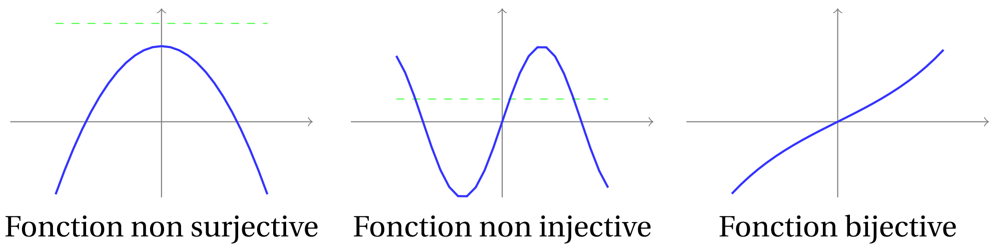
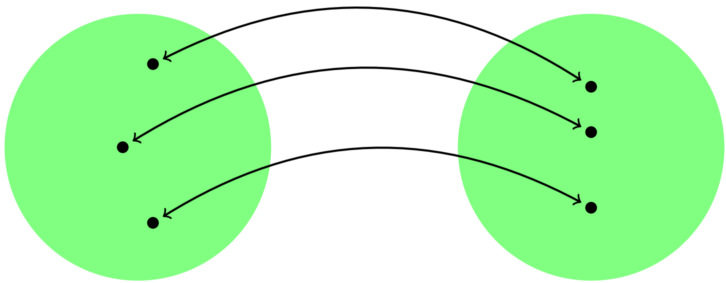


FIGURE 4 – Injectivité et surjectivité.

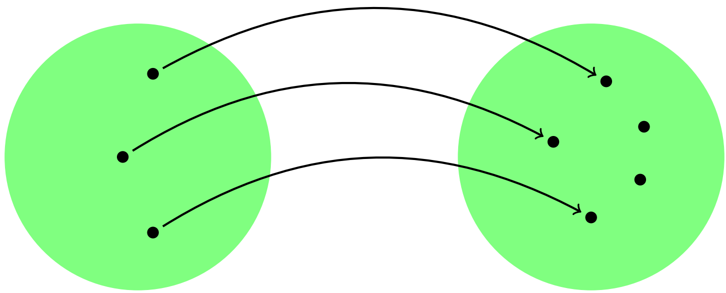
Un moyen commode de représenter toutes les propriétés de bijectivité se fait à l'aide de graphiques *patatoïdes*. Il vaut mieux avoir ces dessins en tête si l'on ne veut pas faire d'erreurs ! Ils sont aussi une source efficace pour construire des contre-exemples.

5. La définition que nous avons donnée d'une injection est en effet équivalente par contraposée à : $\forall x \in A, \forall y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Noter qu'en anglais, une fonction injective se traduit par « a one-to-one mapping ».

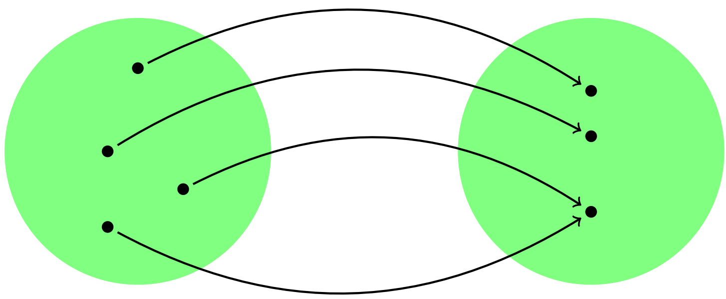
6. C'est-à-dire que f « visite tout B ».



Une application bijective.



Une application injective (non surjective).



Une application surjective (non injective)

FIGURE 5 – Applications injectives, bijectives et surjectives.

On dispose d'un théorème élémentaire mais très utile pour relier les cardinaux [7] d'ensembles finis entre lesquels il existe une injection et/ou une surjection :

THÉORÈME 4.24. — *Soient* E *et* F *deux ensembles finis. Il existe une injection de* E *dans* F *si et seulement si* $\operatorname{card}(E) \leqslant \operatorname{card}(F)$ *et une surjection de* E *dans* F *si et seulement si* $\operatorname{card}(E) \geqslant \operatorname{card}(F)$*. Il existe une bijection entre* E *et* F *si et seulement si* $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$*.*

EXEMPLE 4.25. Si 5 enfants ont entre 8 et 11 ans, deux enfants parmi eux ont nécessairement le même âge. En effet, si l'on numérote les enfants de 1 à 5, la fonction qui associe à chaque numéro l'âge de l'enfant correspondant a pour ensemble de départ l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$ à 5 éléments, et pour ensemble d'arrivée l'ensemble $\{8,9,10,11\}$ à 4 éléments : elle ne peut donc être injective.

7. Le cardinal card(A) d'un ensemble fini est tout simplement son nombre d'éléments.

PROPOSITION 4.26. — *Soient* A, B *deux ensembles et* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *une bijection. Pour tout* $y \in \mathrm{B}$, *il existe un unique élément* x *dans* A *tel que* $y = f(x)$. *On note* $f^{-1}(y) = x$. *La fonction*

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathrm{B} \to \mathrm{A} \\ y \mapsto x \end{cases}$$

est une bijection, appelée bijection réciproque de f.

Il est clair que si f est une bijection, alors f^{-1} est également une bijection, et alors $(f^{-1})^{-1} = f$.

EXEMPLE 4.27. La fonction $f : x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et sa bijection réciproque est la fonction « racine cubique » $g : x \mapsto \sqrt[3]{x}$. On trouve à la figure 4.27 le graphe de ces deux fonctions.

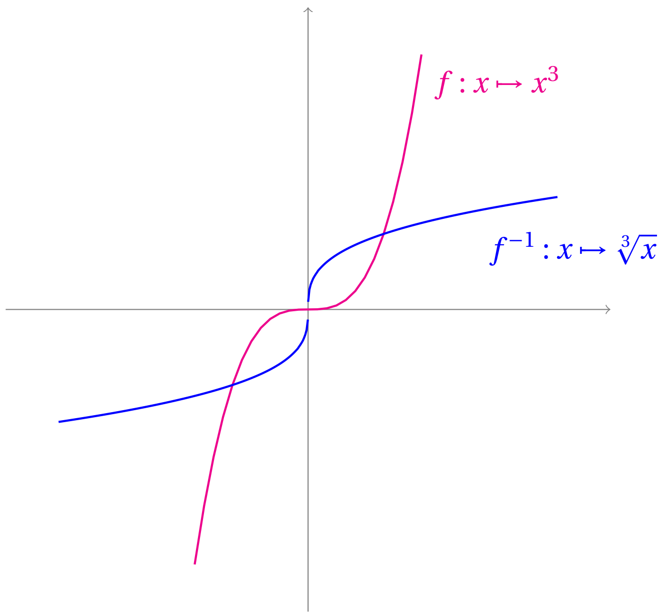


FIGURE 6 – La fonction cube et sa réciproque.

Dans la figure, on notera la symétrie entre les deux graphes par rapport à la droite d'équation $y = x$: en termes simples, le graphe de la fonction réciproque est juste le graphe de f « vu dans l'autre sens ».

4.2 Les limites d'une fonction.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I. On dit que f possède une *limite* $l \in \mathbb{R}$ en a si $f(x)$ tend[8] vers l lorsque x se rapproche de a. On écrit alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

EXEMPLE 4.28. La limite de la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 1$ en 2 est 13.

8. Voir la remarque 3.16 dans la section sur les limites des suites.

EXEMPLE 4.29. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite réelle en 0.

Les définitions des limites en un point s'adaptent aussi à droite et à gauche d'un point : on dit par exemple que la limite de f à droite d'un point a est l lorsque $f(x)$ *tend vers l quand x se rapproche de a* par la droite. Il peut arriver que la limite à droite d'un point ne soit pas la même que la limite à gauche d'un point!

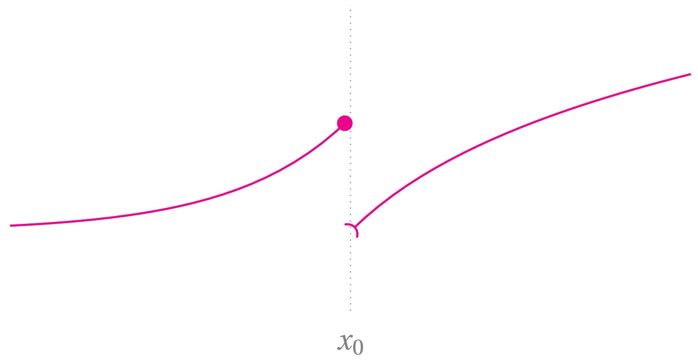


FIGURE 7 – La fonction f n'a pas la même limite à droite et à gauche du point x_0.

On dit également que la limite de f en un point a est $+\infty$ si $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut lorsque x se rapproche de a, et de même la limite de f en a est $-\infty$ si $f(x)$ devient aussi petit que l'on veut lorsque x se rapproche de a. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a $+\infty$ pour limite à droite de 0, et $-\infty$ pour limite à gauche de zéro.

Il peut même arriver qu'une fonction n'admette pas de limite à droite ou à gauche en un point! En revanche on a le théorème suivant.

THÉORÈME 4.30. — *Si une fonction est bornée et monotone sur un intervalle, alors elle admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point de cet intervalle.*

4.3 Continuité.

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, éventuellement non borné.

DÉFINITION 4.31 (Continuité)**.** — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que f est* continue au point x_0 *lorsque $f(x)$ tend*[9] *vers $f(x_0)$ quand x tend vers x_0. Une fonction continue en tout point de* I *est dite* continue sur I.

REMARQUE 4.32. De la même façon, on peut définir la notion de continuité sur une partie de $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme une réunion d'intervalles de longueur non nulle : si $\mathrm{A} = \bigcup_{i \in \mathrm{E}} \mathrm{I}_i$, où $(\mathrm{I}_i)_{i \in \mathrm{E}}$ est une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle, on dit qu'une fonction $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ est continue sur A si et seulement si elle est continue sur I_i pour tout $i \in \mathrm{E}$.

9. Si I est un intervalle de la forme $[a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b > a$ éventuellement infini, on dit simplement que « $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a » pour exprimer le fait que $f(x)$ admet $f(a)$ pour limite *à droite* en a. f n'étant pas définie à gauche de a, il n'y a pas de risque de confusion!

PROPOSITION 4.33. — *Soient u et v deux fonctions définies sur un même intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que u et v sont continues sur I et on se donne $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $u+v$, λu et uv sont continues. De plus, si v ne s'annule pas sur I alors u/v est continue sur I.*

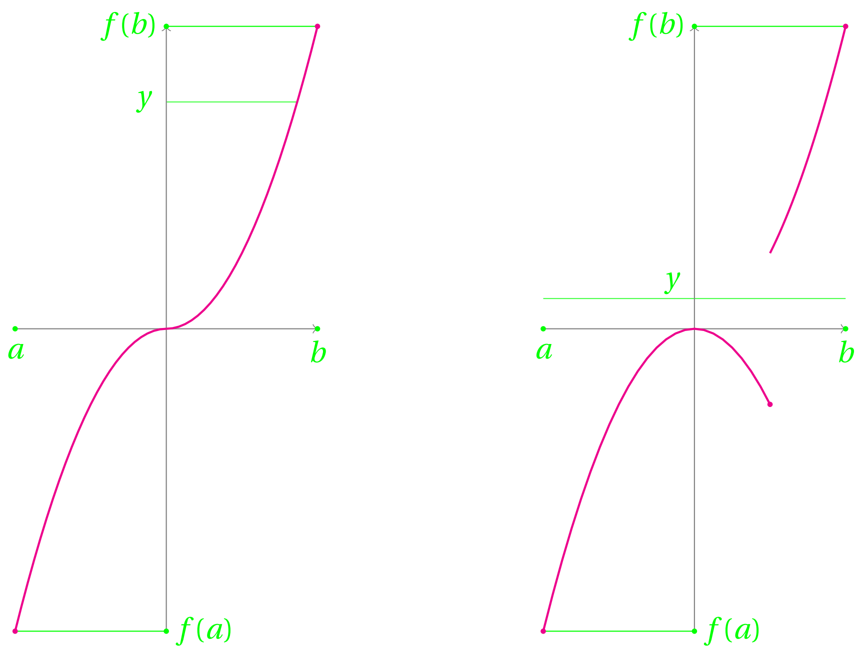
Un candidat bien préparé doit savoir utiliser la proposition ci-dessus pour justifier de manière précise la continuité d'une fonction ; un modèle de rédaction est donné par la remarque 5.15.

THÉORÈME 4.34 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, et soient s et s deux points de I avec $s < t$. Alors, pour tout y compris entre $f(s)$ et $f(t)$, il existe $u \in [s,t]$ tel que $y = f(u)$.*

Exercice 4.35. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - x + x^2 - 2x^3$ s'annule en un réel positif.

Exercice 4.36. Montrer par l'absurde que la fonction partie entière n'est pas continue.

REMARQUE 4.37. Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'existence : sous certaines conditions, il nous assure qu'un certain point existe. Mais il ne donne *a priori* pas de moyen de déterminer ce point.



La fonction f prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$

La fonction f n'est pas continue. La valeur y n'est pas prise.

FIGURE 8 – Le théorème des valeurs intermédiaires.

THÉORÈME 4.38 (de la bijection)**.** — *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f est strictement monotone, alors c'est une bijection de I dans $f(\mathrm{I})$ (qui est un intervalle) et sa bijection réciproque f^{-1} est continue.*

Exercice 4.39. Trouver un contre-exemple au théorème de la bijection dans le cas :

- d'une fonction continue non monotone
- d'une fonction continue et monotone mais non strictement monotone

On peut reformuler le théorème de la bijection sous la forme suivante : si f est continue et strictement monotone sur I, alors pour tout $y \in f(\mathrm{I})$, l'équation

$$f(x) = y$$

possède une et une seule solution dans I. Cependant, là encore, le théorème ne donne pas de moyen de connaître explicitement une solution de cette équation, même s'il permet de savoir que la solution x est une fonction continue de y.

THÉORÈME 4.40. — *Une fonction continue sur un intervalle fermé et borné* I *est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe* $m, \mathrm{M} \in \mathbb{R}$ *tels que pour tout* $x \in \mathrm{I}$, $m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$, *et de plus il existe* $x_0^-, x_0^+ \in \mathrm{I}$ *tels que* $f(x_0^-) = m$ *et* $f(x_0^+) = \mathrm{M}$.

REMARQUE 4.41. Ce théorème, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, se reformule sous la forme plus compacte « l'image continue d'un segment est un segment ». Il sert à démontrer qu'une fonction admet un maximum. Il est essentiel dans les exercices, où souvent on demande simplement de trouver le maximum : avant, il faut s'assurer qu'il existe !

THÉORÈME 4.42. — *Si* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *est une fonction, alors* f *est continue en* $a \in \mathrm{I}$ *si et seulement si pour toute suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *d'éléments de* I *admettant* a *pour limite, la suite* $\big(f(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ *admet* $f(a)$ *pour limite.*

REMARQUE 4.43. Les deux implications qui constituent ce théorème sont intéressantes, mais on retiendra surtout, dans le cadre du concours EDHEC AST1, le fait qu'il est possible de « passer une limite de suite dans une fonction continue » : par exemple, la suite de terme général $u_n = -\frac{n}{n^2+1}$ tend vers 0 et la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{3+x^2}$ est continue en 0 donc la suite de terme général

$$f(u_n) = \frac{e^{-\frac{n}{n^2+1}}}{3 + \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^2}$$

tend vers $f(0) = \frac{1}{3}$. Attention, ce raisonnement n'est valable que lorsque l'on a affaire à une fonction *continue*, comme le montre l'exemple de la fonction partie entière, qui n'est pas continue en 0 et ne permet pas de passer à la limite dans l'expression $\lfloor -\frac{n}{n^2+1} \rfloor$ (qui admet -1 pour valeur limite et non $\lfloor 0 \rfloor = 0$).

PROPOSITION 4.44. — *Si* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue, si* J *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *contenant* $f(\mathrm{I})$ *et si* $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ *est continue, alors* $g \circ f$ *est continue.*

On retiendra tout simplement que « la composée de deux fonctions continues est continue » !

THÉORÈME 4.45. — *Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si la suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ à valeurs dans I vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$ et admet une limite $l \in \mathrm{I}$, alors $f(l) = l$.*

REMARQUE 4.46. Ce théorème extrêmement utile permet de restreindre la recherche de la limite d'une suite définie par une relation de récurrence à la recherche des points fixes d'une fonction continue. Par exemple, la suite de premier terme $u_0 = 1$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1-u_n^2}{1+u_n}$ pour tout $n \geqslant 0$ est positive (on le montre facilement par récurrence) et la fonction $f : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. L'éventuelle limite $l \in [0, +\infty[$ de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ doit donc vérifier $\frac{1-l^2}{1+l} = l$, c'est-à-dire $1 - l^2 = l + l^2$ soit $2l^2 + l - 1 = 0$, ce qui permet de déterminer l'unique valeur possible de cette éventuelle limite (exercice : faites-le !). Notez que notre étude n'est pas finie pour autant et qu'il faudra encore déterminer si $(u_n)_{n \geqslant 0}$ admet effectivement l pour limite, par exemple en étudiant son sens de variation.

5 Les fonctions : dérivabilité.

5.1 Dérivabilité.

On suppose dans cette section que I est un intervalle *ouvert* de $\mathbb{R}$.

Définition 5.1 (Taux d'accroissement)**.** — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Le* taux d'accroissement de f en x_0 *est la fonction $\Delta_{x_0} : \mathrm{I} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\Delta_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Le taux d'accroissement de f en x_0 est la pente de la corde reliant les points $(x, f(x))$ et $(x_0, f(x_0))$, comme sur le graphe suivant.

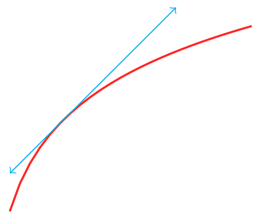


FIGURE 9 – « La dérivée est la pente de la tangente. »

Définition 5.2 (Nombre dérivé)**.** — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que f est* dérivable en x_0 *lorsque son taux d'accroissement en x_0 admet une limite finie quand x tend vers x_0, c'est-à-dire lorsqu'il existe un nombre réel a tel que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

Dans ce cas, le nombre a est appelé nombre dérivé de f en x_0*, et on le note $f'(x_0)$.*

Une définition strictement équivalente et souvent utilisée est la suivante : la fonction f est dérivable au point x_0 lorsque $h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ possède une limite réelle l quand h tend vers 0. Dans ce cas, l est le nombre dérivée de f en x_0 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Lorsqu'une fonction f est dérivable en un point x_0, son graphe admet une *tangente* en ce point, et la pente de cette tangente est le nombre dérivé $f'(x_0)$. Une équation de cette tangente est donnée par $y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$.

Définition 5.3 (Dérivée)**.** — *Une fonction f dérivable en tout point de* I *est dite* dérivable sur I*, et la fonction*

$$f' : \begin{cases} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

est appelée la fonction dérivée *(ou simplement la* dérivée*) de f.*

Exercice 5.4. Calculer la dérivée de la fonction polynomiale $x \mapsto x^2$ et l'équation de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 1.

Il peut arriver que le taux d'accroissement de f en x_0 tende vers $+\infty$ ou vers $-\infty$: dans ce cas, la fonction n'est pas dérivable, mais sa courbe représentative admet tout de même une tangente (verticale).

EXEMPLE 5.5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$ (c'est la fonction racine cubique, réciproque de la fonction cube, qui est tracée à la figure 4.27). Alors, avec des notations qui seront rigoureusement introduites à la section 8.4 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x^{-\frac{2}{3}} = +\infty$$

donc f n'est pas dérivable en 0 et sa courbe représentative admet une tangente verticale en ce point (voir à nouveau la figure 4.27 !).

Il peut enfin arriver que le taux d'accroissement n'admette aucune limite en un point, ou qu'il admette deux limites différentes à gauche et à droite. Dans ces cas, la fonction n'est pas dérivable en ce point. C'est le cas de la fonction « valeur absolue » : le taux d'accroissement possède à gauche la limite -1, à droite la limite 1. Il n'a donc pas *une* limite, mais *deux limites distinctes*, ce qui contredit la définition de la dérivabilité.

Exercice 5.6. Étudier la dérivabilité de la fonction réelle définie par $f(x) = x + |x - 1|$.

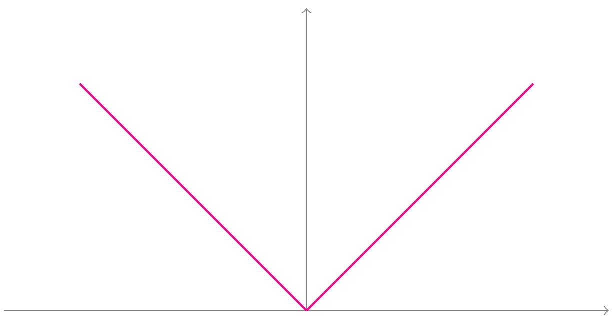


FIGURE 10 – La fonction « valeur absolue » n'est pas dérivable en 0 .

PROPOSITION 5.7. — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et soit x_0 un point de* I. *Si la fonction f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0.*

La dérivabilité est donc une notion plus forte que la continuité : une fonction qui est dérivable est continue, et même « un peu plus que continue ». Mais il existe beaucoup de fonctions qui sont continues en un point, et qui ne sont pas dérivables : il y a par exemple les fonctions qui ont une « aspérité » en un point, comme la fonction valeur absolue.

DÉFINITION 5.8 (Dérivées à gauche et à droite)**.** — *Si $x_0 \in \mathbb{R}$, si $\varepsilon > 0$ et si $f :]x_0 - \varepsilon, x_0] \to \mathbb{R}$ est une fonction, on dit que f* est dérivable à gauche en x_0 *si et seulement si son taux* *d'accroissement en x_0 admet une limite finie à gauche en x_0, c'est-à-dire s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

On appelle alors l le nombre dérivé à gauche de f en x_0.
Si $x_0 \in \mathbb{R}$, si $\varepsilon > 0$ et si $f : [x_0, x_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ est une fonction, on dit que f est dérivable à droite en x_0 *si et seulement si son taux d'accroissement en x_0 admet une limite finie à droite en x_0, c'est-à-dire s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 < x}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

On appelle alors l le nombre dérivé à droite de f en x_0.

EXEMPLE 5.9. La fonction valeur absolue est dérivable à gauche et à droite en 0; son nombre dérivé à gauche en 0 est -1, son nombre dérivé à droite en 0 est 1.

PROPOSITION 5.10. — *Si $x \in \mathrm{I}$, une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dérivable en x si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en I et si ses nombres dérivées à gauche et à droite en x_0 coïncident.*

REMARQUE 5.11. Comme la continuité, la dérivabilité s'étend au cas des intervalles réels fermés de la manière suivante : si $\mathrm{J} = [a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle, on dit qu'une fonction $f : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ est *dérivable sur* J si et seulement si f est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a (on notera alors $f'(a)$ son nombre dérivé à droite en a) et dérivable à gauche en b (on notera alors $f'(b)$ son nombre dérivé à gauche en b). La généralisation à des intervalles semi-ouverts du type $[a, b[$ ou $]a, b]$ est facile et laissée au lecteur.

REMARQUE 5.12. De la même façon, on peut définir la notion de dérivabilité sur une partie de $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme une réunion d'intervalles de longueur non nulle : si $\mathrm{A} = \bigcup_{i \in \mathrm{E}} \mathrm{I}_i$, où $(\mathrm{I}_i)_{i \in \mathrm{E}}$ est une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle, on dit qu'une fonction $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur A si et seulement si elle est dérivable sur I_i pour tout $i \in \mathrm{E}$.

EXEMPLE 5.13. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ y est dérivable.

THÉORÈME 5.14. — *Soient u et v deux fonctions définies sur un même intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que u et v sont dérivables sur I. On a les propriétés suivantes :*

1. *La fonction $u + v$ est dérivable, et $(u + v)' = u' + v'$.*
2. *La fonction uv est dérivable, et $(uv)' = u'v + uv'$.*
3. *Si la fonction v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

REMARQUE 5.15. Pour justifier sur une copie de la continuité ou de la dérivabilité d'une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ s'écrivant comme somme, produit, quotient de fonctions usuelles continues ou dérivables, ou comme n'importe quelle combinaison de ces opérations, il suffit d'utiliser la phrase

« f est continue (respectivement dérivable) sur I comme combinaison de fonctions continues (respectivement dérivables) »

Il faut éventuellement préciser pourquoi les fonctions élémentaires qui constituent f sont continues ou dérivables. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \frac{xe^x}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison de fonctions dérivables car les fonctions polynomiales et la fonction exponentielle sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Attention cependant à ne pas utiliser cet argument passe-partout dans le cas où la dérivabilité des fonctions qui constituent f n'est pas évidente, ni dans le cas où le dénominateur s'annule sur I ! Par exemple, pour montrer que la fonction définie pour $x \neq 0$ par $g(x) = \frac{\cos(x)-1}{x}$ et par $g(0) = 0$ est dérivable en 0, il faut revenir à la définition de la dérivabilité par le taux d'accroissement. En l'occurrence, on utilise la relation admise (et à connaître)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

SYNTHÈSE 5.16. Le tableau suivant donne les dérivées de certaines fonctions usuelles (qui seront pour la plupart introduites dans la suite du cours).

Expression de la fonction	Expression de sa dérivée
constante	0
x^a (avec $a \neq 0$)	ax^{a-1}
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$1/x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

On termine par un théorème important, qui est souvent utilisé dans les exercices.

THÉORÈME 5.17 (de composition)**. —** *Soit* J *un autre intervalle de* $\mathbb{R}$*. Soit* $u : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable à valeurs dans* J*, et soit* $v : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Alors, la fonction composée* $v \circ u$ *est dérivable sur* I*, et* $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$*.*

EXEMPLE 5.18. La fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x^2} \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 2xe^{x^2}$.

Exercice 5.19. Pour les trois fonctions de l'exercice 4.13, dire si elles sont dérivables et calculer leur dérivée.

5.2 Le lien entre la dérivée d'une fonction et sa monotonie.

Les théorèmes suivants sont fondamentaux et sont d'un usage constant dans toutes les branches des mathématiques. Il faut savoir les appliquer et en connaître parfaitement les hypothèses.

Théorème 5.20. — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle* I. *Si pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f'(t) \geqslant 0$, alors f est croissante sur* I.

Dans le théorème précédent, I n'est plus supposé ouvert ; s'il ne l'est pas, la dérivabilité de f sur I est alors à comprendre au sens de la remarque 5.11.

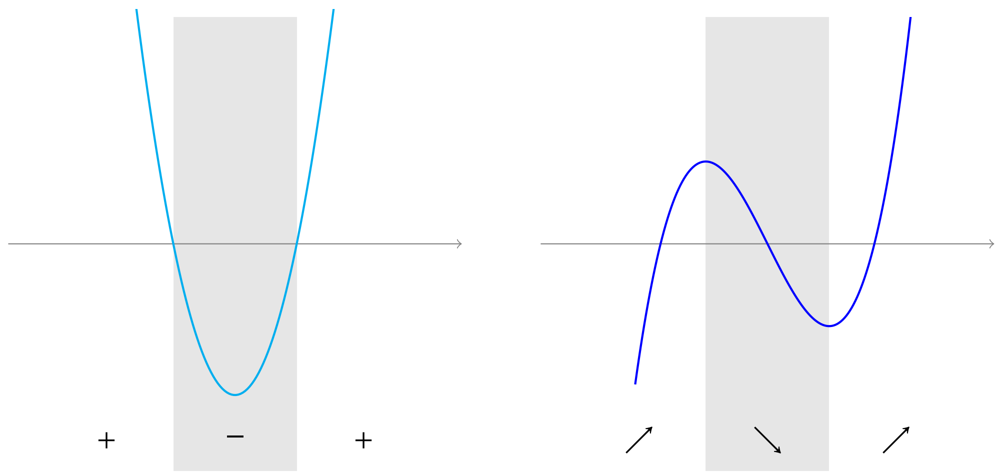
Théorème 5.21. — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle* I. *Si f' est nulle sur* I, *alors f est constante sur* I.

Remarque 5.22. Attention, ce résultat est trompeur : l'hypothèse que I est un intervalle est nécessaire. Prenons par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$ (cette fonction n'est donc pas définie en 0). Il est clair qu'elle est dérivable et que sa dérivée est partout nulle. Pourtant, f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$!

Corollaire 5.23. — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur* I. *Si : $\forall t \in \mathrm{I}, f'(t) \geqslant 0$, et si f' ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenant* I, *alors f est strictement croissante.*

Remarque 5.24. Attention, il peut arriver qu'une fonction dérivable et strictement croissante ait une dérivée qui s'annule ponctuellement (mais pas sur un intervalle) : c'est le cas de la fonction cube $f : x \mapsto x^3$.

Exemple 5.25 (Étude de cas)**.** La dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x$ est $f' : x \mapsto 2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1)$. Lorsque $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$, alors $x^2 - 1 \geqslant 0$ et donc $f'(x) \geqslant 0$. Ainsi, la fonction f est croissante sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Lorsque $x \in]-1, 1[$ on a $x^2 - 1 < 1$, donc la fonction f est décroissante sur $]-1, 1[$. La figure 11 illustre cet exemple.



Graphe et signe
de $f' : x \mapsto 3x^2 - 2$

Graphe et sens de variation
$f : x \mapsto x^3 - 2x$

FIGURE 11 – Lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction.

Il arrive souvent que la dérivée d'une fonction soit elle-même dérivable. Cela nous mène à la notion de *dérivées successives.*

DÉFINITION 5.26 (Dérivées successives)**. —** *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. On dit qu'une fonction* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *est* deux fois dérivable *lorsque* f *est dérivable et* f' *est dérivable. La dérivée de* f' *est appelée* dérivée seconde de f *et on la note* f''*.*

On peut également définir (par récurrence) les dérivées successives *d'une fonction réelle : si* f *est* n *fois dérivable (avec* $n \in \mathbb{N}^*$*) et si sa dérivée* n*-ème est dérivable, alors* f *est dite* $n+1$ fois *dérivable et la dérivée de sa dérivée* n*-ème est appelée* sa dérivée $(n+1)$-ème *et notée* $f^{(n+1)}$*.*

NOTATION 5.27. Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit parfois que f est 0 fois dérivable [10] et on note alors $f^{(0)}$ la fonction f.

Exercice 5.28. Calculer les dérivées successives de la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^5 - 3x^2 + 1$.

DÉFINITION 5.29 (Classe $\mathscr{C}^n$)**. —** *Si* $n \in \mathbb{N}$*, on dit qu'une fonction est* de classe $\mathscr{C}^n$ *lorsqu'elle est n fois dérivable, et que* $f^{(n)}$ *est continue. On dit qu'une fonction est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *ou qu'elle est* infiniment dérivable *(on trouve aussi le terme «* lisse *») lorsqu'elle est* n *fois dérivable pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.* [11]

On notera que $\mathscr{C}^0$ désigne l'ensemble des fonctions 0 fois dérivables et continues, c'est-à-dire simplement continues. On notera également une ambiguïté latente dans ces définitions : une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ peut très bien être aussi de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Dire qu'une fonction est « n fois continûment dérivable » n'exclut pas que la fonction soit $n+1$ fois dérivable ou même infiniment dérivable.

EXEMPLE 5.30. Les fonctions polynomiales, les fonctions trigonométriques, la fonction exponentielle, la fonction logarithme sont toutes de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.

PROPOSITION 5.31. — *Soient* f *et* g *deux fonctions de classe* $\mathscr{C}^n$ *pour un entier* n *(ou éventuellement* ∞*). Alors pour tous réels* a *et* b*, la fonction* $af + bg$ *est encore de classe* $\mathscr{C}^n$ *et on a alors* $(af+bg)^{(n)} = af^{(n)} + bg^{(n)}$*. De même la fonction* fg *et la fonction* $g \circ f$ *(si elle existe) sont encore de classe* $\mathscr{C}^n$*.*

On termine par la formule de Leibniz, qui généralise la formule de dérivation du produit de deux fonctions. Elle utilise notamment les coefficients binomiaux, qui n'ont pas encore été définis, mais qui le seront dans la dernière partie.

PROPOSITION 5.32 (Formule de Leibniz)**. —** *Soient* f *et* g *deux fonctions de classe* $\mathscr{C}^n$*. Alors, le produit* fg *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *et*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

10. Ce qui ne veut pas dire qu'elle n'est pas dérivable, de la même façon qu'une fonction deux fois dérivable peut l'être trois fois ou davantage !

11. Dans ce cas, toutes ses dérivées sont automatiquement continues puisqu'elles sont elles-mêmes dérivables.

5.3 Dérivabilité et bijections.

Théorème 5.33. — *Soit* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Si* f' *est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans* I, *alors* f *est strictement croissante et réalise une bijection de* I *dans* $f(\mathrm{I})$. *De plus, sa bijection réciproque* $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$ *est strictement croissante et continue.*

Remarque 5.34. Dans le cadre du théorème précédent, il peut arriver que la bijection réciproque ne soit pas dérivable.

Exercice 5.35. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$ définie sur $\mathbb{R}$ réalise une bijection sur son image.

Théorème 5.36. — *Soit* $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ *une bijection entre deux intervalles. Soit* $y \in \mathrm{J}$ *et* $x = f^{-1}(y)$ *son antécédent par* f. *Alors, la fonction* f^{-1} *est dérivable en* y *si et seulement si la fonction* f *est dérivable en* x *et vérifie* $f'(x) \neq 0$. *Dans ce cas,*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Le résultat précédent est clair sur un graphe (au moins de manière intuitive). Le cas où $f'(x) = 0$ correspond au cas où la limite du taux d'accroissement de f^{-1} en y tend vers $\pm\infty$.

Remarque 5.37. Le théorème précédent reste vrai pour les fonctions $\mathscr{C}^k$: si une bijection est de classe $\mathscr{C}^k$ et si sa dérivée ne s'annule pas, alors sa bijection réciproque est également de classe $\mathscr{C}^k$.

Exemple 5.38. La figure suivante donne un exemple avec la fonction $f : x \mapsto \mathrm{sgn}(x)x^2$ (où sgn, le « signe de x », vaut 1 si $x > 0$, 0 si $x = 0$ et -1 si $x < 0$). Elle est dérivable sur son ensemble de définition, mais sa dérivée en 0 est nulle : sa bijection réciproque, la fonction $f^{-1} : x \mapsto 2\mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|}$, n'est donc pas dérivable en 0 et sa courbe représentative (tracée en rose ci-dessous) possède une tangente verticale en ce point.

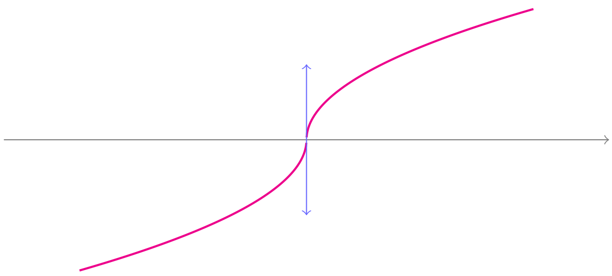


Figure 12 – La fonction f^{-1} possède une tangente verticale à l'origine.

5.4 Méthode d'étude d'une fonction.

« Étudier une fonction » consiste à déterminer son ensemble de définition, sa régularité (continuité, dérivabilité jusqu'à un certain ordre), sa monotonie, et à donner son allure (par exemple au moyen d'un graphe). On donne ci-dessous une méthode pour mener à bien cette étude : ce n'est qu'indicatif et d'autres voies peuvent être suivies.

1 - Déterminer l'ensemble de définition de la fonction. C'est ici qu'il faut prendre garde aux fonctions qui ne sont pas définies partout ! Parmi celles-ci, il faut mentionner le logarithme (qui n'est pas défini sur $]-\infty,0]$) et les puissances non entières (qui sont définies à partir du logarithme). Prenez également garde au fait que si une fonction u apparaît au dénominateur d'une fraction, elle ne doit pas s'annuler ! Par exemple, la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos(x)}$$

n'est pas définie lorsque $1+\cos(x) = 0$, c'est-à-dire lorsque $\cos(x) = -1$, ce qui n'arrive que lorsque $x \in \pi \pm 2\pi n$ (avec $n \in \mathbb{Z}$)). La fonction f est donc définie sur

$$\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

2 - Étudier sa régularité : la fonction est-elle continue ? Est-elle dérivable ? En général, cette étape se fait en invoquant les théorèmes classiques : on reconnaît facilement une combinaison de fonctions élémentaires (sommes, produits, quotients).

Cependant, il arrive fréquemment que ces théorèmes donnent la dérivabilité de la fonction sur un sous-ensemble de l'ensemble de définition, et qu'il reste à déterminer la dérivabilité en un ou deux points. Ce dernier cas se résout « à la main », en appliquant la définition de la dérivabilité aux points qui posent problème.

Par exemple, soit la fonction f définie pour tout x par :

$$f(x) = \ln(1+|x|)$$

Cette fonction est clairement dérivable en tout $x \neq 0$ par le théorème de dérivabilité des fonctions composées. Mais il y a un problème en 0 : la fonction $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable ! On étudie donc les taux d'accroissement à droite et à gauche.

Formons le taux d'accroissement à droite :

$$\forall h > 0, \quad \tau_d(h) = \frac{\ln(1+|h|) - \ln(1)}{h}$$

Comme on raisonne lorsque $h > 0$ (répétons qu'il s'agit du taux d'accroissement à droite), on a $|h| = h$. Ainsi,

$$\forall h > 0, \quad \tau_d(h) = \frac{\ln(1+h)}{h}$$

On reconnaît la dérivée en 1 du logarithme. La fonction f admet donc une dérivée à droite de 0 qui vaut $\ln'(1) = 1$. Faisons la même étude pour le taux d'accroissement à gauche, τ_g : comme ici $h < 0$, on a

$$\tau_g(h) = \frac{\ln(1-h)}{h} = -\frac{\ln(1+(-h))}{-h}$$

et cette fois, ce taux tend vers $-\ln'(1)$, c'est-à-dire -1 ! La fonction f admet donc une dérivée à gauche et une dérivée à droite en 1, mais elle n'est pas dérivable en 1.

Lors d'un examen ou d'un concours, il est *indispensable* de mentionner le fait que « la fonction est dérivable sur son intervalle de définition » (éventuellement en repérant une combinaison de fonctions évidemment dérivables) : oublier de le vérifier peut vous coûter cher, et l'énoncer clairement en le justifiant fait au contraire bonne impression.

3 - Calculer la dérivée de la fonction et déterminer son signe, puis en déduire le sens de variation de la fonction f. Attention aux erreurs de calcul ! Parfois, trouver le signe de la dérivée n'est pas évident... et il arrive qu'il faille calculer les variations de la dérivée pour connaître son signe ! Dans ces cas-là, on réalise une deuxième étude de fonction à l'intérieur la première. Une telle mise en abîme ne devrait pas vous effrayer : en général, si le problème vous mène à le faire, c'est surtout pour tester votre autonomie. L'étude des variations de la dérivée ne sera donc sans doute pas très difficile...

4 - Calculer les « valeurs remarquables » de la fonction : valeurs aux bornes, aux minimums et aux maximums, limites aux bornes. On s'aide ici des limites classiques des fonctions — et aussi de la notion d'équivalence de fonctions qui sera abordée dans le cours d'analyse. À l'issue de cette étape, on peut tracer un tableau de variations complet qui donne déjà la majorité des informations intéressantes sur la fonction.

5 - Donner l'allure du graphe de la fonction : on utilise pour cela son tableau de variations et on détermine les éventuelles tangentes en certains points (dont on connaît le coefficient directeur grâce au calcul de la dérivée).

En général, on demande simplement de déterminer le tableau de variations de la fonction et il est plutôt rare que l'on demande de la tracer. Mais souvent, tracer un graphique sur la copie peut vous aider à comprendre et montre au correcteur que vous avez fait des efforts ! En outre, cela peut contribuer à l'aspect esthétique de votre copie, un point qui est loin d'être négligeable dans son appréciation.

On retrouvera de nombreux exemples d'études de fonctions dans les problèmes présents dans le polycopié de cours principal.

6 Primitives et intégrales.

Dans cette section, on s'intéresse à l'opération « inverse » de la dérivation : connaissant une fonction f, on cherche une autre fonction dont la dérivée est f. Cela nous mènera à l'étude des intégrales, un outil remarquable et omniprésent en analyse.

6.1 Primitives.

DÉFINITION 6.1 (Primitive)**. —** *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction. Une* primitive *de* f *est une fonction* $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *dérivable et telle que* $\mathrm{F}' = f$*.*

EXEMPLE 6.2. La fonction $f : x \mapsto x^3$ admet pour primitive la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \frac{1}{4}x^4$. Plus généralement, une primitive de la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est $\mathrm{F}_n : x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ dès lors que $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

REMARQUE 6.3. On peut généraliser cette définition à des ensembles de départ plus sophistiqués qu'un intervalle : si $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ s'écrit comme une réunion d'intervalles de longueur non nulle, on dit qu'une fonction $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ admet $\mathrm{F} : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ pour primitive si et seulement si F est dérivable sur A et si $\mathrm{F}' = f$.

Une fonction n'admet pas une unique primitive : par exemple, exp et exp + 1 sont toutes deux primitives de exp. En revanche, la proposition suivante montre comment trouver toutes les primitives à partir d'une seule. On parle parfois « d'unicité de la primitive à une constante près ».

THÉORÈME 6.4. — *Si* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et si* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *est une fonction admettant une primitive* F*, toutes les primitives de* f *se déduisent de* F *par ajout d'une constante. En d'autres termes, toute primitive* G *de* f *est alors de la forme* $\mathrm{F} + c$*, où* $c \in \mathbb{R}$*.*

THÉORÈME 6.5. — *Soit* I *un intervalle et* x_0 *un point de* I*. Soit* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction. Si* f *est continue, il existe une unique primitive de* f *qui prend une valeur donnée en* x_0*.*

REMARQUE 6.6. Ce théorème permet en particulier d'affirmer que toute fonction continue admet une primitive !

EXEMPLE 6.7. L'unique primitive de la fonction $x \mapsto x^3$ qui prend la valeur 3 en 0 est la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^4}{4} + 3$$

EXEMPLE 6.8 (à retenir)**.** L'unique primitive de la fonction ln qui s'annule en 0 est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\ln(x) - x$.

On donne maintenant un tableau de quelques primitives usuelles. Certaines d'entre elles seront définies plus loin dans ce cours. Il va sans dire que ces primitives doivent être connues sur le bout des doigts. Attention, elles ne sont pas définies partout !

SYNTHÈSE 6.9. Les primitives usuelles sont données dans le tableau suivant.

Expression de la fonction	Expression de sa primitive
$x^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$1/x$	$\ln \lvert x \rvert$
$x^a, a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$	$\tan(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x) \rvert)$

Exercice 6.10. Trouver une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 + 3x + \frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 6.11. Trouver une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{3x^2} + 2$.

REMARQUE 6.12. Notez que si la dérivation ne demande que d'appliquer des formules de calcul, la primitivation est une opération bien plus subtile puisqu'elle demande de reconnaître une fonction dérivée connue dans une expression, ce qui est parfois loin d'être évident. C'est même parfois tout simplement impossible : par exemple, la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ n'admet aucune primitive pouvant s'écrire à l'aide de fonctions usuelles [12], mais elle admet des primitives puisqu'elle est continue. Heureusement, les primitives que vous serez amenés à calculer dans le cadre du concours EDHEC AST1 seront relativement simples (comme celles ci-dessus) ou seront données par l'énoncé (sous la forme « vérifiez que telle fonction est une primitive de f »).

6.2 Intégrales.

DÉFINITION 6.13 (Intégrale)**. —** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note* F *une de ses primitives. L'intégrale de f entre a et b est* [13] *la quantité* $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$*. On la note*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

ce qui se lit « intégrale de a à b de la fonction f » .

L'expression $\mathrm{d}t$ est là pour dire par rapport à quelle variable on intègre (ici, t). Cette variable d'intégration est une variable muette, on peut la remplacer par n'importe quelle lettre si elle est disponible : $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_1^1 f(u)\mathrm{d}u$. La fonction que l'on intègre (ici, la fonction f) se nomme *l'intégrande* [14] . Souvent, on note $[\mathrm{F}(t)]_a^b$ la quan-

12. Ce fait est très difficile à établir !

13. On vérifie qu'elle est indépendante du choix de F parmi les primitives de f, puisque celles-ci ne diffèrent que d'une constante additive.

14. De la forme latine *integrandus*, adjectif verbal en *-ndus* signifiant la nécessité : « ce qu'il faut intégrer ». Notez qu'il s'agit d'un mot masculin !

tité $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$. Par exemple,

$$\int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

THÉORÈME 6.14. — *Soit* I *un intervalle,* $a \in \mathrm{I}$*, et soit* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On pose*

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Alors, la fonction ϕ *est dérivable sur* I *et vérifie* $\phi' = f$*. C'est l'unique primitive de* f *qui s'annule en* a*.*

THÉORÈME 6.15. — *Soient* a, b, c *trois réels et* f *une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle contenant* a*,* b *et* c*. Soit également* κ *une constante. Alors,*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b \kappa f(t)\mathrm{d}t = \kappa \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Le théorème suivant donne la méthode la plus importante pour calculer des intégrales : l'intégration par parties [15]. C'est une conséquence très simple de la formule

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Il faut impérativement savoir l'appliquer dans de très nombreux cas. Le jour du concours, il est important d'indiquer clairement sur votre copie quelles sont les fonctions utilisées pour réaliser l'intégration par parties, et éventuellement de justifier de leur dérivabilité ou de leur continuité.

THÉORÈME 6.16 (Intégration par parties)**. —** *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$*, et soient* $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ *et* $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$*. Alors on a :*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

REMARQUE 6.17. Lorsque l'on cherche à faire une intégration par parties, il faut bien sûr choisir habilement u et v : en général, on cherchera à prendre pour v des fonctions

15. « IPP » pour les intimes, mais ne vous avisez pas d'utiliser cette abréviation dans une copie sous prétexte que tout le monde la comprend !

faciles à dériver comme des fonctions polynomiales, circulaires, exp ou ln (avec une préférence pour les fonctions polynomiales puisque l'on réduit leur degré à chaque itération du procédé) et pour u' des fonctions faciles à primitiver, c'est-à-dire qui sont les dérivées de fonctions classiques (par exemples les fonctions circulaires ou exponentielles, mais pas la fonction ln).

Exercice 6.18. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la quantité

$$\mathrm{I} = \int_1^e (2x+1)\ln(x)\mathrm{d}x$$

6.3 Application des intégrales : calcul de l'aire sous une courbe.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. L'intégrale de f entre a et b est la mesure de l'aire algébrique[16] de la zone située entre l'axe des abscisses et le graphe de f entre a et b, comme illustré à la figure suivante.

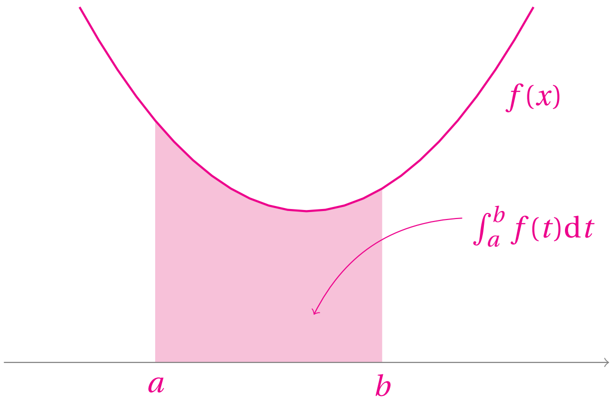


FIGURE 13 – L'aire sous une courbe.

EXEMPLE 6.19. L'aire de la zone délimitée par la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ et l'axe des abscisses entre les abscisses 0 et 1 est égale à $\frac{1}{3}$.

On comprend alors intuitivement le théorème suivant :

THÉORÈME 6.20. — *Soit f une fonction continue. Alors, lorsque $f \geqslant 0$, on a :*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Et si $a < b$ et que l'intégrale est nulle, alors f est nulle sur $[a, b]$.

De même, si $a < b$ et s'il existe m et M tels que $m \leqslant f \leqslant \mathrm{M}$, alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

16. Au sens où l'aire des portions de la zone situées en-dessous de l'axe des abscisses sera comptabilisée négativement.

Ces inégalités sont au fondement du principe de comparaison somme/intégrale que nous présenterons dans le cours d'analyse principal.

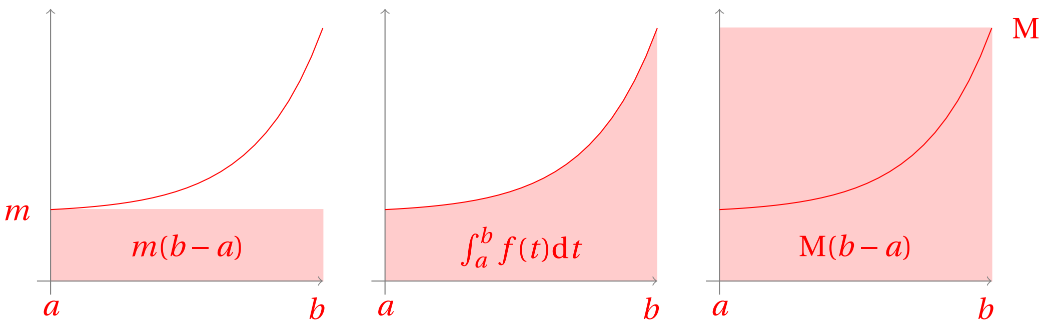


FIGURE 14 – Comparaison d'aires lorsque $m \leqslant f \leqslant \mathrm{M}$.

Enfin, on appelle *valeur moyenne* de f entre a et b la quantité $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

7 Fonctions circulaires.

On appelle « fonctions circulaires » des fonctions élémentaires qui ont un rapport avec le cercle : les fonctions $\cos, \sin, \tan$ et leurs produits dérivés : $\arcsin, \arccos$, etc. Les deux fonctions de base, *sinus* et *cosinus*, sont définies via la trigonométrie dans ce rappel de cours. Ces définitions sont convenables à notre niveau, mais en réalité elles soulèvent de nombreuses difficultés [17]. Pour l'instant, nous nous contenterons de situer les sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique.

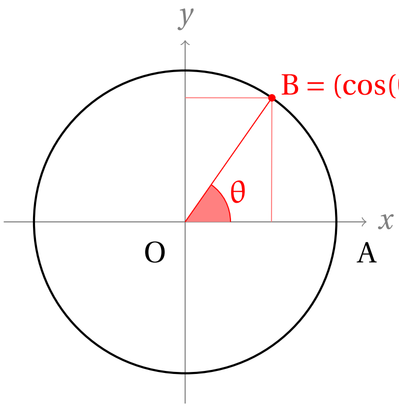


FIGURE 15 – Sinus et cosinus d'un angle sur le cercle trigonométrique.

DÉFINITION 7.1 (Cosinus et sinus). — *Soit* $\mathscr{C}$ *le cercle trigonométrique de centre* $O = (0,0)$ *et de rayon* 1, *orienté dans le sens des aiguilles d'une montre. Soit* $A = (1,0)$. *Soit* θ *un angle (en radians) et soit* B *le point de* $\mathscr{C}$ *tel que l'angle orienté* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *ait pour mesure* θ *(c'est-à-dire que la distance entre* A *et* B *en suivant le cercle dans le sens positif est* θ*). On appelle l'abscisse du point* B *le* cosinus de θ, *que l'on note* $\cos(\theta)$, *et on appelle l'ordonnée du point* B le sinus de θ, *que l'on note* $\sin(\theta)$.

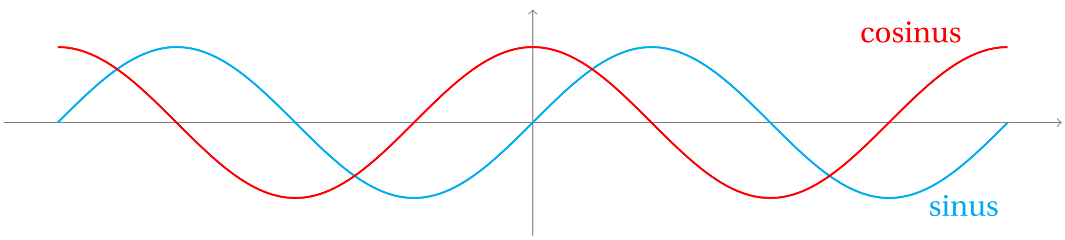


FIGURE 16 – Fonctions sinus et cosinus

PROPOSITION 7.2. — *Pour tout réel* θ, *on a* $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

REMARQUE 7.3. C'est une simple application du théorème de Pythagore !

17. En particulier, comment définir un angle ?

Théorème 7.4 (formules trigonométriques)**. —** *Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors on a les formules suivantes :*

$$\cos(-a) = \cos(a)$$

$$\sin(-a) = -\sin(a)$$

$$\cos(\pi + a) = \cos(\pi - a) = -\cos(a)$$

$$\sin(\pi + a) = -\sin(\pi - a) = -\sin(a)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a)$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(a)$$

Les formules trigonométriques ne doivent pas être apprises par coeur, mais il faut absolument savoir les retrouver ! La figure suivante montre comment les reconstruire à partir d'un cercle trigonométrique.

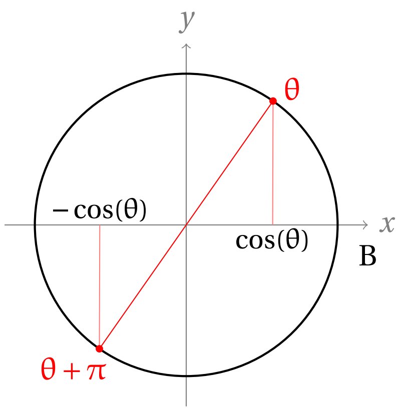


Figure 17 – Illustration de la formule $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$.

THÉORÈME 7.5 (Valeurs remarquables)**.** — *Le cercle trigonométrique suivant donne quelques valeurs remarquables des fonctions* sin *et* cos*.*

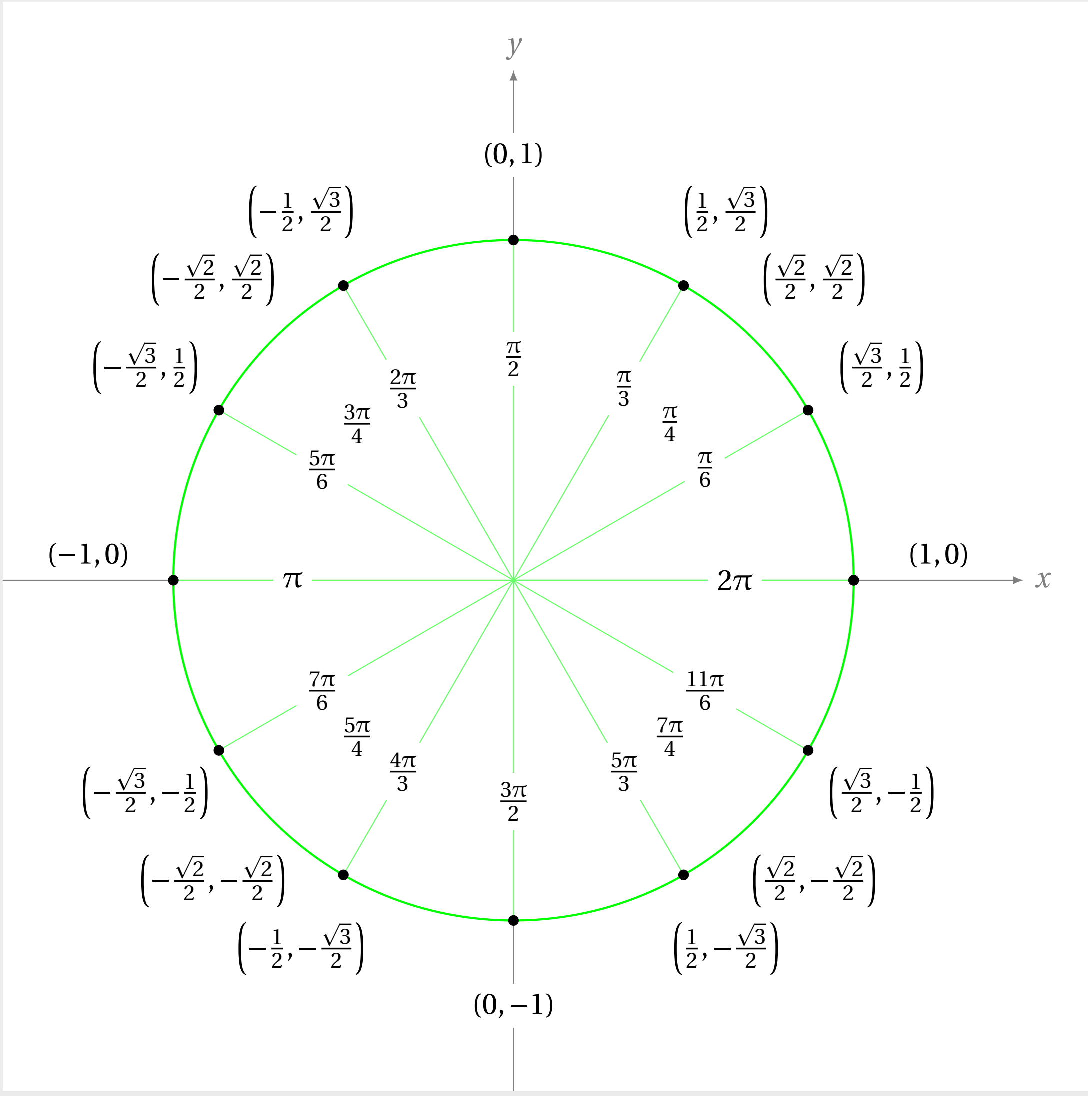


FIGURE 18 – Les valeurs remarquables du cercle trigonométrique.

PROPOSITION 7.6. — *Les fonctions* sin *et* cos *sont continues sur* $\mathbb{R}$ *et* 2π*-périodiques. De plus,*

$$\sin(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \cos(0) = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$$

Plus précisément, on a la formule déjà vue

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

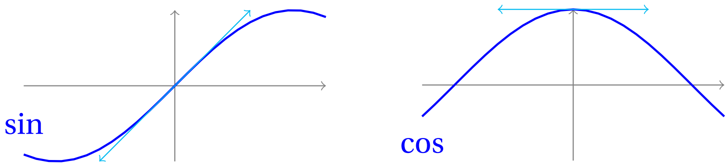


FIGURE 19 – Allure des fonctions sin et cos au voisinage de 0.

PROPOSITION 7.7. — *Les fonctions* sin *et* cos *sont infiniment dérivables sur* $\mathbb{R}$*, et*

$$(\cos)' = -\sin \qquad \textit{et} \qquad (\sin)' = \cos$$

DÉFINITION 7.8 (Tangente)**. —** *La fonction tangente, notée* tan*, est définie sur* $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ *(c'est-à-dire* $\mathbb{R}$ *privé de l'ensemble des nombres de la forme* $\frac{\pi}{2} + n\pi$ *avec* $n \in \mathbb{Z}$*) par*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

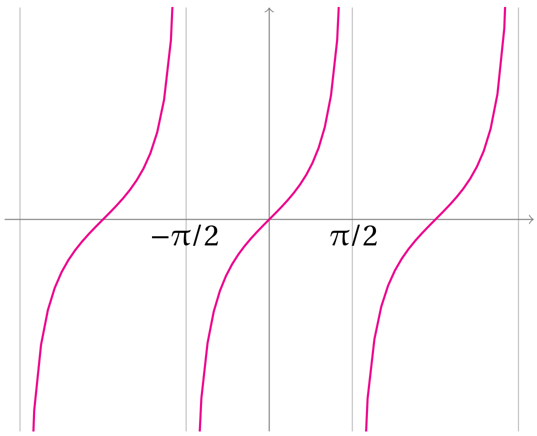


FIGURE 20 – La fonction tangente.

PROPOSITION 7.9. — *La fonction* tan *est* π*-périodique. De plus, pour chaque intervalle* I_k *de la forme*

$$\mathrm{I}_k = \left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$$

la fonction $\tan_{|\mathrm{I}_k}$ *réalise une bijection de* I_k *dans* $\mathbb{R}$*.*

PROPOSITION 7.10. — *La fonction* tan *est infiniment dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$*, et :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Les fonctions trigonométriques réciproques ne font pas partie du programme du concours EDHEC AST1, et c'est pour cela que nous n'avons pas parlé des réciproques du sinus et du cosinus. Cependant, la réciproque de tan est très utile, en particulier dans la recherche de primitives : nous nous en servirons à de nombreuses reprises dans le cours et dans les exercices. Il vous est donc conseillé de la connaître ; nous en présentons quelques propriétés ci-dessous.

DÉFINITION 7.11 (Arctangente)**. —** *La fonction* arctangente*, notée* arctan*, est la bijection réciproque de la fonction* tan *restreinte à* $]-\pi/2, \pi/2[$.

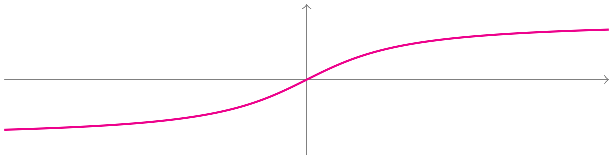


FIGURE 21 – Graphe de la fonction arctan.

PROPOSITION 7.12. — *La fonction* arctan *admet* $-\frac{\pi}{2}$ *pour limite en* $-\infty$ *et* $\frac{\pi}{2}$ *pour limite en* $+\infty$*. Elle est de plus est infiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

8 Fonctions usuelles.

Les fonctions présentées dans cette section doivent être connues, ainsi que toutes leurs propriétés. Elles apparaissent constamment dans les problèmes du concours.

8.1 Puissances entières et polynômes.

8.1.1 Puissances, fonctions polynomiales.

Définition 8.1 (Puissances entières)**.** — *Soit n un entier naturel non nul. La fonction* puissance n-ème *est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f_n(x) = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$$

On note x^n la puissance n-ème du réel x.

Si $x \neq 0$, on définit[18] la puissance 0-ème de x comme $x^0 = 1$.

On peut étendre la notion de « puissance n-ème » d'un nombre x aux valeurs négatives de n : lorsque n est un entier négatif, on définit la puissance n-ème comme étant la fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^{-n}}$$

Par exemple, $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$.

Remarque 8.2. Une forme plus courante de la définition des puissances entières négatives est la suivante : si $x \in \mathbb{R}^*$ et si $n \in \mathbb{N}$, x^{-n} désigne le nombre $\frac{1}{x^n}$.

Proposition 8.3. — *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.*

Attention : lorsque n est négatif, on rappelle que l'ensemble de définition de $x \mapsto x^n$ est $\mathbb{R}^*$: cette fonction n'est pas définie en 0 !

Théorème 8.4. — *Soient n, m deux entiers relatifs et x un réel non nul. Alors $x^n x^m = x^{n+m}$ et $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$.*

Définition 8.5 (Fonction polynomiale)**.** — *On dit qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est* polynomiale[19] *si elle s'écrit sous la forme*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ où les a_i (pour $i \in [\![0, n]\!]$) sont des nombres réels. On appelle alors degré *de f le plus grand $i \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_i \neq 0$ si un tel i existe ; si tous les a_i sont nuls, $f = 0$ et on dit que le* degré *de f est égal à $-\infty$.*

18. La définition de 0^0 varie selon les branches des mathématiques. En dénombrement et en probabilités, on considèrera toujours que $0^0 = 1$. Si cela n'est pas précisé, on considère que la fonction « puissance 0-ème » n'est pas définie en 0.

19. Même si *polynôme* prend un accent, l'adjectif *polynomial* n'en prend pas !

8.1.2 Résolution des équations polynomiales de degré 2.

Soit f une fonction polynomiale de degré au plus 2, disons $f(x) = ax^2 + bx + c$. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire trouver tous les x tels que

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Si $a = 0$, cette équation est très simple à résoudre :
- Soit $b = 0$, auquel cas l'équation se réduit à $c = 0$. Elle n'a aucune solution si $c \neq 0$ et si $c = 0$, tous les réels sont solutions.
- Soit $b \neq 0$, auquel cas l'unique solution est $x = -\frac{c}{b}$.

Supposons donc que $a \neq 0$. Nous allons effectuer la *factorisation canonique* de f :

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\big) \\
&= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)
\end{aligned}$$

On a donc la formule suivante, qu'il faut savoir retrouver rapidement :

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Il s'agit du *discriminant* de f. Pour résoudre l'équation, il faudra étudier son signe. Plusieurs cas peuvent se présenter.

1. Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. L'équation $f(x) = 0$ admet alors ce que l'on appelle une « racine double » donnée par

$$x = \frac{-b}{2a}$$

2. Si $\Delta < 0$, alors on observe que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ si $a > 0$, et $f(x) < 0$ si $a < 0$. Dans ce cas, il ne peut donc pas y avoir de racine réelle. Toutefois, il existe deux racines *complexes*, données par

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

3. Si $\Delta > 0$, alors Δ possède une racine carrée, c'est-à-dire que $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$. On peut factoriser f sous la forme

$$f(x) = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions distinctes :

$$x_1 = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Nous avons donc complètement résolu **toutes** les équations polynomiales de degré 2, et nous voyons que les solutions, lorsqu'elles existent, s'expriment sous la forme de certaines opérations (additions, multiplications, racines carrées) qui ne mettent en jeu que les coefficients de la fonction polynomiale. Peut-on faire de même avec *toutes* les équations polynomiales ?

La réponse est : oui, pour les équations de degré 3 et 4 (auquel cas on dispose de formules comme celles énoncées pour le degré 2, mais beaucoup plus compliquées), et non pour les équations de degré supérieur [20]. Cependant, il est parfois possible de se ramener au cas des équations de degré 2 avec un peu d'ingéniosité, par exemple en changeant l'inconnue. L'exemple qui suit illustre cette technique.

EXEMPLE 8.6. Supposons que l'on désire résoudre l'équation polynomiale de degré 6 suivante :

$$x^6 - 3x^3 + 1 = 0$$

On peut poser $y = x^3$ pour se ramener à un polynôme de degré 2. L'équation se ramène alors à $y^2 - 3y + 1 = 0$: cette équation se résout à l'aide des techniques présentées plus haut. Ses solutions sont

$$y_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Les solutions de l'équation initiale seront donc tous les x tels que $x^3 = y_1$ ou $x_3 = y_2$. Comme la fonction $x \mapsto x^3$ et une bijection, il y a donc exactement deux solutions distinctes, qui sont [21] :

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \quad \text{et} \quad x_2 = \sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

8.2 Logarithme.

DÉFINITION 8.7 (Logarithme naturel)**. —** *Le* logarithme naturel*, ou* logarithme népérien [22]*, ou encore simplement* logarithme

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

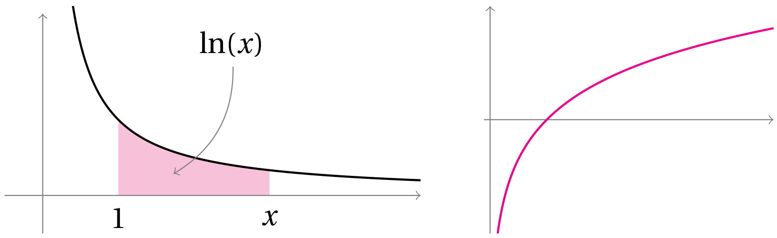
est l'unique primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ (définie sur $\mathbb{R}_+^*$) et qui s'annule en 1.

Pour tout $x > 0$, on a donc $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

THÉORÈME 8.8. — *Le logarithme est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = x^{-1}$. De plus, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, on a :*

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
3. $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$
4. $\ln(1/x) = -\ln(x)$

20. C'est l'objet d'une branche difficile des mathématiques, appelée Théorie de Galois.
21. La notation « racine cubique » utilisée dans ces formules sera rigoureusement définie quelques pages plus loin.
22. ...du nom du mathématicien écossais John Napier (1550-1917).



$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ $\qquad\qquad$ $y = \ln(x)$

FIGURE 22 – La fonction logarithme.

PROPOSITION 8.9. — *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$*. De plus :*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

8.3 Exponentielle.

Il existe plusieurs définitions de la fonction exponentielle. Celle donnée ci-dessous est inhabituelle, car elle se fonde sur le logarithme : les définitions plus standard permettent de définir d'abord l'exponentielle[23], puis toutes les fonctions spéciales du cours (logarithme et fonctions trigonométriques).

THÉORÈME 8.10. — *La fonction* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *réalise une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}$*. Elle possède donc une fonction réciproque.*

DÉFINITION 8.11 (Exponentielle)**.** — *La fonction réciproque de* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *est appelée* fonction exponentielle *et on la note* $\exp$*.*

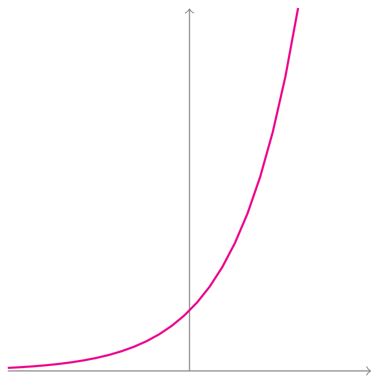


FIGURE 23 – La fonction exponentielle.

PROPOSITION 8.12. — *Pour tout réel* x*, on a* $\ln(\exp(x)) = x$ *et pour tout réel* $x > 0$*, on a* $\exp(\ln(x)) = x$*.*

23. ... à l'aide d'une série, comme on le verra dans le cours d'analyse.

THÉORÈME 8.13. — *L'exponentielle est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*, et* $\exp' = \exp$.

La fonction exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y' = y \end{cases}$$

Parfois, c'est ainsi que l'on *définit* l'exponentielle.

THÉORÈME 8.14. — *Pour tout* x *et pour tout* y *dans* $\mathbb{R}$*, on a* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$*,* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ *et* $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Le nombre $e = 2.7182...$, défini par $\exp(1)$, est l'une des constantes les plus importantes des mathématiques. On note souvent e^x le réel $\exp(x)$, ce qui permet de définir des puissances non entières (et même non nécessairement rationnelles) du nombre e qui vérifient les règles de calcul usuelles.

8.4 Fonctions puissances.

DÉFINITION 8.15 (Fonction puissance)**. —** *Soit* a *un nombre réel (et plus nécessairement un nombre entier). La fonction puissance d'exposant* a *est la fonction* $f_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \exp\big(a \ln(x)\big)$$

On notera plus simplement $f_a(x) = x^a$.

On notera que les fonctions puissances non entières ne sont pas définies lorsque x est négatif : cela provient du fait que le logarithme n'est défini que pour les nombres strictement positifs.

PROPOSITION 8.16. — *Soit* $a \in \mathbb{R}$*. La fonction* f_a *est infiniment dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$*, et pour tout* $x > 0$*,* $f_a'(x) = ax^{a-1}$.

PROPOSITION 8.17. — *Soit* $a > 0$*. Alors :*

$$\lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x^a = 0$$

Lorsqu'on étudie une fonction ou une suite dans laquelle apparaissent des exposants, il arrive que l'on rencontre un certain type de forme indéterminée : la forme 1^∞. Une manipulation souvent très efficace dans ce cas est la « mise sous forme exponentielle ». Nous illustrons cette méthode par un exemple célèbre et essentiel, qu'il faut connaître.

EXEMPLE 8.18. On veut calculer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

L'étudiant attentif repère aussitôt la difficulté : il s'agit d'une forme indéterminée de type « 1^∞ ». Pour l'étudier, il va falloir être subtil ! On passe donc à la forme exponentielle en utilisant la formule $u_n = \exp\big(\ln(u_n)\big)$, qui est valable puisque u_n est clairement positif :

$$u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \tag{1}$$

Lorsque $n \to \infty$, la quantité $\frac{1}{n}$ tend vers 0. L'expression $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ fait donc penser à $\ln(1+h)$, comme dans la définition de la dérivabilité en 1. Or, il est bien connu que $\ln(1) = 0$, donc notre intuition se confirme : on peut se ramener au taux d'accroissement du logarithme en 1, puisque $\ln(1+1/n) = \ln(1+1/n) - \ln(1)$, ce qui fait penser au numérateur du taux d'accroissement. Ce taux d'accroissement vaut

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(1)}{\frac{1}{n}} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

c'est-à-dire

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

soit exactement l'expression à l'intérieur de l'exponentielle dans l'équation (1) ! On sait que le logarithme est dérivable en 1 et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto x^{-1}$. Autrement dit,

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Ainsi, nous obtenons le résultat suivant

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{2}$$

Exercice 8.19. Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de la suite de terme général

$$u_n = \left(3+\frac{n}{n^2+2n+1}\right)^{2n}$$

Croissances comparées.

Les théorèmes suivants permettent d'étudier facilement des produits de fonctions puissances, exponentielles et logarithmes. Il faut retenir que l'exponentielle a la croissance la plus forte, tandis que le logarithme a la croissance la moins forte. Entre les deux se situent toutes les puissances.

THÉORÈME 8.20. — *Soit α un nombre réel. Si $\beta > 0$, alors :*

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{\beta x} = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$$

On dit que *l'exponentielle l'emporte sur les puissances en l'infini.*

THÉORÈME 8.21. — *Soit* α *et* β *dans* $\mathbb{R}$. *Alors, si* $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha}\big(\ln(x)\big)^{\beta} = +\infty$$

et si $\alpha < 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha}\big(\ln(x)\big)^{\beta} = 0$$

On dit que *le logarithme croît moins vite que toutes les puissances en l'infini.*

REMARQUE 8.22. Attention à ne pas vous précipiter et invoquer le théorème de croissance comparée dans des cas où une simple étude de limites suffirait à conclure ! C'est une erreur répandue et du plus mauvais effet. Par exemple, la limite lorsque x tend vers 0 de l'expression $\frac{\ln(x)}{x}$ est $-\infty$ et s'obtient simplement en considérant les limites des différents termes du quotient. Rappelons à toutes fins utiles que les formes indéterminées sont $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \times \infty$, $\infty - \infty$ et 1^{∞}... et qu'elles se lèvent généralement en utilisant les quelques limites remarquables du cours ou les résultats de croissance comparée ci-dessus.

Exercice 8.23. Donner la limite quand $x > 0$ tend vers 0 de l'expression $\frac{x\ln(x)}{1-e^{-x\ln(x)}}$.

9 Sommes et produits, dénombrement.

9.1 Les symboles $\sum$ et $\prod$.

Sommes : $\sum$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Lorsqu'on veut additionner tous les nombres de cette suite dont l'indice se situe entre 5 et 10 par exemple, on peut utiliser la notation[24] $\sum$ pour alléger l'écriture (ici, on évite par exemple d'écrire les six termes de l'addition). Cette notation se présente comme suit :

$$\sum_{k=5}^{10} u_k$$

La quantité dont nous venons d'écrire l'expression est rigoureusement identique à la quantité $u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}$. Elle se lit « somme des u_k pour k allant de 5 à 10 ».

Plus généralement, si p et q sont deux entiers avec $p \leqslant q$, alors $\sum_{k=p}^{q} u_k$ désigne la somme des u_k pour k allant de p à q, c'est-à-dire $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{q-1} + u_q$. Dans cette somme, il y a $p - q + 1$ termes.

L'indice k est alors appelé *indice de sommation*. Pour noter l'indice de sommation, on utilise généralement les lettres i, j, k, l, m, n ou p.

Exercice 9.1. Calculer $\displaystyle\sum_{i=5}^{547} 1$.

Exercice 9.2. Soit (u_n) une suite réelle. À quoi est égale la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n$?

EXEMPLE 9.3. La somme de tous les nombres entiers de 1 à 100 s'écrit

$$\sum_{k=1}^{100} k$$

Pouvez-vous calculer cette somme[25] ?

THÉORÈME 9.4. — *Soit n un entier naturel. Alors,*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

24. Il s'agit en fait d'un σ (sigma) majuscule.
25. On raconte que Gauss, à l'âge de 7 ans, le pouvait.

Exercice 9.5. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ la somme suivante :

$$S = 2+4+6+8+\ldots+98+100$$

et la calculer.

MÉTHODE 9.6 (Changement d'indice)**.** Il est parfois possible d'étudier une somme en modifiant l'indice de sommation. Par exemple, la somme

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}$$

est identique à la somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_i$$

Nous avons effectué le changement d'indice $i = k-1$. L'indice k varie entre 1 et n, donc l'indice i varie entre 0 et $n-1$.

Exercice 9.7. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^3$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

PROPOSITION 9.8 (linéarité)**. —** *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels,* α, β *deux nombres réels et* $n \in \mathbb{N}$*. Alors,*

$$\alpha\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + \beta\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha u_k + \beta v_k)$$

Produits : $\prod$.

La symbole $\prod$ est l'analogue du symbole $\sum$ pour le produit de nombres réels. Par exemple, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels et si $p \leqslant q$ sont deux entiers positifs, alors

$$\prod_{k=p}^{q} u_k = u_p \times u_{p+1} \times \ldots \times u_{q-1} \times u_q$$

PROPOSITION 9.9. — *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels,* α, β *deux nombres réels, et* $p \leqslant q$ *deux entiers naturels. Alors,*

$$\left(\prod_{k=p}^{q} u_k\right)^{\alpha} \times \left(\prod_{k=p}^{q} v_k\right)^{\beta} = \prod_{k=p}^{q} u_k^{\alpha} v_k^{\beta}$$

DÉFINITION 9.10. — *Soit* n *un entier naturel. La factorielle de* n*, notée* $n!$*, est le produit de tous les entiers non nuls inférieurs à* n*. Autrement dit,*

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

On convient par ailleurs que $0! = 1$.

Exercice 9.11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\frac{(n+2)!}{n!}\frac{(n+1)!}{(n+3)!}$?

9.2 Sommes particulières.

Pour étudier certains phénomènes s'exprimant à l'aide de sommes (comme par exemple l'évolution d'une population ou le calcul des revenus liés à un taux d'intérêt), il faut impérativement maîtriser quelques sommes élémentaires, et savoir s'y ramener par des manipulations simples.

Sommes téléscopiques.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. S'il existe une autre suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = v_{n+1} - v_n$ pour tout indice n, alors les sommes de la forme $\sum_{k=p}^{q} u_k$ se simplifient très facilement : par exemple, pour la somme des termes de 1 à 3, on a

$$u_1 + u_2 + u_3 = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + (v_4 - v_3)$$

et en réorganisant les termes, on obtient $u_1 + u_2 + u_3 = v_4 - v_1$. De telles sommes sont appelées *téléscopiques*, parce que chaque terme s'emboîte dans le suivant. De manière générale, pour une telle suite, on obtient à l'aide d'un changement d'indices la formule suivante :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = v_{q+1} - v_p$$

REMARQUE 9.12. N'apprenez pas cette formule par coeur mais assurez-vous plutôt que vous êtes capable de la retrouver! On a tôt fait de faire des erreurs d'indice sous la pression...

EXEMPLE 9.13. Que vaut la somme $\sum_{k=1}^{300} \frac{1}{k(k+1)}$? Une première idée[26] consiste à décomposer le terme $\frac{1}{k(k+1)}$ en la différence de deux termes plus simples : en effet, on observe que pour tout $k > 0$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{300} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{300} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{300} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{300} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{301} \frac{1}{k} \\
&= 1 - \frac{1}{301} \\
&= \frac{300}{301}
\end{aligned}$$

Suites et sommes arithmétiques et géométriques.

Nous revenons maintenant sur deux suites très importantes, déjà rencontrées plus tôt.

26. Cette idée peut paraître sortie de nulle part pour l'instant, mais elle deviendra naturelle par la suite.

DÉFINITION 9.14 (Suite arithmétique)**. —** *Soient* a *et* b *deux nombres réels. La* suite arithmétique de premier terme a et de raison r *est la suite définie par*

$$u_0 = a, \qquad \forall n \geqslant 1, \quad u_n = a + rn$$

REMARQUE 9.15. C'est la seule suite de premier terme a qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

EXEMPLE 9.16. Hugobert vient de naître. Ses parents, qui se défient du système bancaire, déposent 100 euros sous un matelas en décidant de les lui donner à sa majorité et augmentent cette somme de 500 euros par an. La somme présente sous le matelas n années après la naissance de Hugobert est le terme général d'une suite arithmétique de premier terme 100 et de raison 500. Le jour de ses 18 ans, Hugobert recevra donc $u_{18} = 100 + 18 \times 500 = 9100$ euros.

DÉFINITION 9.17 (Suite géométrique)**. —** *Soient* a *et* r *deux nombres réels. La* suite géométrique de premier terme a et de raison r *est la suite définie par*

$$u_0 = a, \qquad \forall n \geqslant 1, \quad u_n = ar^n$$

REMARQUE 9.18. C'est la seule suite de premier terme a qui vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = r u_n$$

EXEMPLE 9.19. Ursuline possède un Livret A (dont le taux annuel est de $0,75\%$) depuis 2015, sur lequel elle a déposé 1000. Sa fortune est une suite géométrique de terme initial 1000 et de raison $0,75$. Elle aura donc une fortune totale de $u_{10} = 1000 \times (0,75)^{10} = 1077,58$ euros dans 10 ans.

EXEMPLE 9.20 (Malthus)**.** Dans son *Essai sur le principe de la population* (1798), Thomas R. Malthus étudie le phénomène de surpopulation et les catastrophes démographiques. Il établit un schéma simple mais intéressant de croissance économique et démographique.

Pour Malthus, la population humaine croît de manière *géométrique* : chaque année, la population est multipliée par un certain facteur r (disons qu'elle double tous les ans, c'est-à-dire $r = 2$). Par contre, la production des ressources nécessaires à la survie des hommes croît de manière *arithmétique*, c'est-à-dire qu'elle augmente tous les ans d'une même quantité a : disons que chaque année, la production (en mégatonnes) de céréales augmente de 100.

Sous ces hypothèses, la population humaine croît beaucoup plus vite que les ressources nécessaires, d'où l'inéluctabilité des catastrophes démographiques. Pour éviter cela, Malthus préconise de freiner au maximum la croissance de la population : arrêt des aides aux pauvres, politique de l'enfant unique ou du couple sans enfant, pénalités aux familles trop fertiles...

Exercice 9.21. On se place dans le modèle malthusien qui vient d'être présenté. Supposons que la population initiale u_0 est égale à 100 individus, et que le stock initial de céréales c_0 est égal à 1000 tonnes. On suppose aussi qu'il est impossible de conserver des céréales d'une année sur l'autre.

On considère que l'évolution de la population au fil des années est modélisable par une suite géométrique de raison 2, et que l'évolution du stock de céréales est modélisable par une suite arithmétique de raison 400. Supposons que les besoins en céréales d'un être humain sont de une tonne par an. Tous les hommes peuvent-ils manger au bout de 5 ans ?

REMARQUE 9.22. On calcule facilement la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique en écrivant la somme grâce au symbole Σ en utilisant les propriétés de linéarité étudiées plus haut. Calculez à titre d'exercice la somme des 10 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 5 et de raison -4.

Exercice 9.23. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et si $p, q \in \mathbb{N}$ sont tels que $p < q$ alors :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = \frac{u_p + u_q}{2} \times (q - p + 1) = (\text{moyenne des termes extrêmes}) \times (\text{nombre de termes})$$

THÉORÈME 9.24. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $r \in \mathbb{R}$. Notons*

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

la somme des n premiers termes de cette suite. Alors, S_n est donné par la formule

$$\mathrm{S}_n = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Autrement dit, $\mathrm{S}_n = \text{terme initial} \times \frac{1-r^{\text{nombre de termes}}}{1-r}$. Cette formule est souvent appelée *formule de la somme géométrique*. De manière plus générale, si $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$ alors on a :

$\sum_{k=m}^{n} u_k$
$= u_m \times \frac{1-r^{n-m+1}}{1-r}$
$= \text{premier terme dans la somme} \times \frac{1-r^{\text{nombre de termes}}}{1-r}$
$= u_0 \times \frac{r^m - r^{n+1}}{1-r}$
$= \text{premier terme de la suite} \times \frac{\text{premier terme dans la somme} - \text{premier terme hors de la somme}}{1-r}$

9.3 Quelques résultats de dénombrement.

THÉORÈME 9.25. — *Soient a et b deux nombres réels, et soit n un entier naturel. Alors,*

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$$

La proposition précédente peut sembler compliquée au premier abord, mais elle est en réalité très facile à retenir : le terme $a^n - b^n$ est égal à $(a - b)$ fois la somme de tous les termes de la forme

$$a^i b^j$$

où la somme de i et de j est égale à $n-1$. On retiendra que le premier terme est a^{n-1}, puis que pour trouver le terme suivant, on abaisse d'un cran la puissance de a et on augmente d'un cran celle de b : le deuxième terme est $a^{n-2}b$, le troisième $a^{n-3}b^2$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de puissance de a à abaisser, le dernier terme de la somme étant b^{n-1}. Par exemple,

$$a^3 - b^3 = (a-b) \times \left(a^2 + ab + b^2\right)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right)$$

et ainsi de suite.

DÉFINITION 9.26 (Coefficients binomiaux)**. —** *Soit n un entier naturel positif, et soit k un entier naturel positif plus petit que n. Le coefficient binomial « k parmi n », que l'on[27] notera $\binom{n}{k}$, est défini par*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Il est important de *comprendre* les théorèmes suivants : il faut savoir retrouver le raisonnement qui y aboutit pour pouvoir les appliquer convenablement.

THÉORÈME 9.27. — *Soit n un entier naturel et soit une classe de n étudiants. Il y a $n!$ manières de classer ces n étudiants de 1 à n (sans ex aequo).*

En effet, il faut d'abord choisir qui sera le premier, et pour cela on a le choix entre n étudiants. Puis une fois choisi le premier, il faut choisir le deuxième : il y a $n-1$ choix (tous les étudiants, sauf celui qui a été choisi pour être premier). Pour choisir le troisième, il y a $n-2$ choix, et ainsi de suite. On obtient donc $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ classements possibles.

THÉORÈME 9.28. — *Soit n et k deux entiers naturels positifs avec $k \leqslant n$. On recrute n sportifs pour courir un marathon et on considère qu'un podium est constitué de k marathoniens classés sans ex aequo. Il y a $\frac{n!}{(n-k)!}$ podiums possibles. C'est aussi le nombre de k-listes (c'est-à-dire de listes ordonnées à k éléments; on dit aussi de k-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments.*

Le raisonnement est le même que tout à l'heure, sauf que l'on s'arrête une fois que l'on a choisi les k premiers éléments de la liste : il y a n choix pour le premier, $n-1$ pour le deuxième, $n-2$ pour le troisième… et $n-k+1$ pour le k-ème.

THÉORÈME 9.29. — *Soit n, k deux entiers naturels positifs avec $k \leqslant n$. Dans une urne, on place n boules toutes distinctes. Le nombre de combinaisons de k boules que l'on peut faire avec ces n boules est $\binom{n}{k}$. C'est aussi le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.*

27. On trouve aussi dans certains cours et sujets l'ancienne notation française introduite par Blaise Pascal $C_n^k = \binom{n}{k}$: attention à l'ordre des lettres ! La lettre C signifie dans ce cas « choix » ou « combinaison » ; nous verrons pourquoi dans quelques lignes.

REMARQUE 9.30. La différence entre les deux théorèmes est que dans le second cas, on s'intéresse aux combinaisons : l'ordre dans lequel les boules ont été tirées n'importe pas. Dans le premier cas, l'ordre importait : si Frénégonde est première et Charles-Mathurin est deuxième, le podium n'est pas le même que si Charles-Mathurin est premier et Frénégonde est deuxième.

Le raisonnement est encore le même que précédemment, sauf que cette fois-ci l'ordre n'importe plus : une fois que l'on a choisi les k premiers, il faut encore *diviser* ce nombre par $k!$, qui correspond au nombre de manières d'ordonner k personnes choisies sur le podium.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & & & & \dots & & & & & 1
\end{array}$$

FIGURE 24 – Représentation des coefficients binômiaux.

PROPOSITION 9.31 (Relation de Pascal)**.** — *Pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a la relation suivante :*

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k+1} = \binom{n}{k+1}$$

REMARQUE 9.32. La relation de Pascal se représente très facilement à l'aide du *triangle de Pascal*[28] : le coefficient situé au croisement de la n-ème ligne et de la k-ème diagonale (en partant de la gauche) est égal à la somme des deux termes « au-dessus de lui ».

$$\begin{tikzcd}
\binom{n-1}{k} \arrow[dr] & & \binom{n-1}{k+1} \arrow[dl] \\
 & \binom{n}{k+1} &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 25 – La relation de Pascal.

Exercice 9.33. Donner une démonstration combinatoire (c'est-à-dire utilisant un raisonnement informel fondé sur l'interprétation des coefficients binomiaux en termes de combinaisons) de la relation de Pascal.

THÉORÈME 9.34 (Formule du binôme)**.** — *Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel. Alors,*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

où l'on utilise, si a et b est nul, la convention $0^0 = 1$.

28. Cette représentation était connue depuis longtemps par les mathématiciens orientaux ou européens, mais c'est Blaise Pascal qui a rigoureusement démontré toutes ses propriétés à l'aide des coefficients binômiaux, en 1654.

On notera la similarité avec la formule de Leibniz exposée dans le chapitre sur la dérivabilité.

EXEMPLE 9.35. Les cas $n = 2, 3$ et 4 donnent :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Exercice 9.36. Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ puis $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$.

THÉORÈME 9.37 (Deux relations très utiles)**. —** *Si n est un entier naturel et si $k \in [\![0, n]\!]$ alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$.*

Exercice 9.38. Calculer $\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ impair) et $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

9.4 Sommes doubles.

Dans la section précédente, nous avons additionné certains éléments d'une suite de nombres. Il peut arriver que l'on veuille additionner des éléments d'un tableau de nombres. Supposons que l'on dispose d'un tableau de nombres $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$. Si Δ est une partie finie de $\mathbb{N}^2$, alors on note :

$$\sum_{(i,j)\in\Delta} a_{i,j}$$

la somme de tous les éléments du tableau tels que le couple (i, j) est dans Δ. Par exemple, supposons que Δ est l'ensemble des couples (i, j) où $i \leqslant 3$ et $j \leqslant 2$: dans ce cas, on a

$$\sum_{(i,j)\in\Delta} a_{i,j} = a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,1} + a_{2,2} + a_{3,1} + a_{3,2}$$

Parfois, lorsque Δ a une forme un peu particulière, on adopte d'autres notations plus explicites. Deux cas sont fréquemment rencontrés :

EXEMPLE 9.39. $\Delta = \{(i, j) : i, j \leqslant n, i \neq j\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (on additionne tous les éléments d'indice (i, j) tels que i et j sont inférieurs à n, sauf ceux de la diagonale[29]). On note alors

$$\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} a_{i,j}$$

ou même $\sum_{i\neq j} a_{i,j}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

29. Lorsque l'on parle de « diagonale » d'un tableau ou d'une matrice sans préciser laquelle, on fait toujours référence à la diagonale dite *principale* qui contient les termes dont les indices de ligne et de colonne sont égaux, c'est-à-dire la diagonale qui s'étend du coin supérieur gauche du tableau à son coin inférieur droit.

EXEMPLE 9.40. $\Delta = \{(i,j) : i,j \leqslant n, i < j\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (on additionne alors tous les éléments d'indice (i,j), tels que i et j sont inférieurs à n et tels que i est strictement plus petit que j ; cela revient à additionner tous les éléments du tableau « strictement en dessous de la diagonale »). On notera alors

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j}$$

ou plus simplement $\sum_{i<j} a_{i,j}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

On peut rencontrer des sommes similaires portant sur des termes « en-dessous de la diagonale » et plus « seulement strictement en-dessous », et bien entendu des sommes portant sur les termes « au-dessus de la diagonale », strictement ou non.

Il est également possible de « changer l'ordre de sommation », en particulier lorsque Δ prend certaines formes particulières. Donnons quelques exemples.

EXEMPLE 9.41. Supposons que $\Delta = \{(i,j) : i \leqslant n, j \leqslant m\}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Alors, dans la somme

$$\mathrm{S} = \sum_{(i,j) \in \Delta} a_{i,j}$$

on peut effectuer les calculs en ligne ou en colonne. Autrement dit,

$$\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$$

EXEMPLE 9.42. Supposons que $\Delta = \{(i,j) : i,j \leqslant n, i < j\}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Il est alors possible de « sommer en lignes » :

$$\sum_{(i,j) \in \Delta} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$$

La première somme s'arrête à l'avant-dernière ligne car il n'y a aucun élément à sommer sur la dernière.

Donnons pour finir un exemple concret de calcul réalisé à l'aide de transformations du type de celles présentées ci-dessus :

EXEMPLE 9.43. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} j \binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} n \binom{n-1}{j-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n 2^{n-1}$$

où la dernière égalité procède de la formule du binôme (appliquée avec $a = b = 1$).

On termine cette section par des formules souvent oubliées par les étudiants, et pourtant bien utiles ! Donnons-nous $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_m$ des nombres réels. Alors,

$$(a_1 + \ldots + a_n) \times (b_1 + \ldots + b_m) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} a_i b_j$$

On en déduit des identités remarquables qui généralisent l'identité bien connue $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Il peut être bon de retenir la suivante :

$$(a_1 + \ldots + a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$$

10 Probabilités élémentaires

Dans toute la suite, on adopte un formalisme volontairement flou — qui cache comme on s'en doute un certain nombre de difficultés — mais tout à fait standard au lycée et dans le premier cycle universitaire, et à ce titre parfaitement acceptable dans le cadre du concours EDHEC AST1.

10.1 Modélisation.

DÉFINITION 10.1 (Cadre formel des probabilités). — *Pour modéliser une expérience aléatoire, on se donne un* ensemble des possibles Ω *contenant tous les résultats possibles de cette expérience.*

- *Les éléments de* Ω *sont appelés* événements élémentaires.
- *Si* Ω *est fini ou dénombrable*[30]*, les parties de* Ω *sont appelées* événements.

Un événement est donc un sous-ensemble de l'ensemble des possibles.

Deux événements disjoints seront aussi dits *incompatibles*, et le complémentaire d'un événement dans Ω sera appelé son *événement contraire*. Ω est aussi appelé l'*événement certain*, et son complémentaire $\varnothing$ l'*événement impossible*.

Si A et B sont deux événements, on trouvera parfois la notation (A et B) pour l'événement $A \cap B$ et la notation (A ou B) pour l'événement $A \cup B$.

EXEMPLE 10.2. Lorsque l'on cherche à modéliser le lancer d'un dé équilibré à six faces, on prend d'ordinaire $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Les événements élémentaires sont les différents résultats que l'on peut obtenir, et tout événement associé à cette expérience peut s'exprimer en termes de résultat obtenu (par exemple, l'événement « résultat pair » s'écrit $\{2,4,6\}$).

Lorsque l'on cherche à modéliser le tirage successif de deux cartes à partir d'un jeu de 32 cartes, Ω prend la forme plus complexe $\Omega = \{(i,j) \in S \mid i \neq j\}$, où S est l'ensemble des cartes possibles. Un événement élémentaire est de la forme {roi de coeur, 9 de trèfle} et un exemple d'événement est « obtenir deux cartes rouges », qui est l'ensemble contenant tous les couples de Ω constitués de deux cartes rouges.

DÉFINITION 10.3 (Fonction de probabilité). — *Quelle que soit l'expérience aléatoire considérée et la modélisation choisie*[31]*, on considèrera une fonction* $\mathbb{P}$*, nommée* fonction de probabilité*, associant à chaque événement (c'est-à-dire à chaque partie de* Ω*) un nombre de* $[0,1]$*, vérifiant les propriétés suivantes :*

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

30. On rappelle qu'un ensemble Ω est dénombrable si et seulement s'il existe une injection de Ω dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire que Ω contient « au plus autant » d'éléments que $\mathbb{N}$). Il y a derrière cette condition de dénombrabilité une subtilité technique qui ne doit pas vous inquiéter outre mesure puisque tous les cas que nous rencontrerons en probabilités discrètes la vérifient.

31. Il peut en effet y avoir plusieurs modélisations acceptables (et efficaces) pour une seule et même expérience ! Par exemple, lorsque l'on calcule la probabilité d'obtenir un carré en tirant 5 cartes parmi 42, on peut modéliser les différentes mains en utilisant des combinaisons ou des 5-listes de cartes, ce qui ne change pas le résultat final mais correspond pas aux mêmes ensembles Ω.

- *pour toute suite d'événements* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *deux à deux disjoints*[32] *:*

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

La première condition signifie que l'événement certain arrive avec probabilité 1. La deuxième implique entre autres que si des événements A et B sont disjoints, la probabilité que l'un des deux arrive est la somme des probabilités que A arrive, ou B arrive : autrement dit,

$$\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

C'est généralement sous cette forme que vous utiliserez la deuxième propriété des fonctions de probabilité.

REMARQUE 10.4. L'existence d'une fonction $\mathbb{P}$ vérifiant la propriété fondamentale ci-dessus est admise, de même que le fait que cette fonction soit bien adaptée pour modéliser ce que le langage courant nomme « probabilité » ! Il est indispensable de connaître cette propriété et de savoir l'utiliser à bon escient car elle intervient dans presque chaque exercice de probabilités.

Sa forme littéraire est « la probabilité qu'un événement soit réalisé est égale à la somme des probabilités de chacun des événements » ; attention, il est bien entendu nécessaire que les événements soient *disjoints* pour que cette propriété soit vraie !

EXEMPLE 10.5. La probabilité d'obtenir 1 ou un nombre pair en lançant un dé équilibré à six faces est égal à $\mathbb{P}(\{2,4,6\} \sqcup \{1\}) = \mathbb{P}(\{2,4,6\}) + \mathbb{P}(\{1\}) = 1/2 + 1/6 = 2/3$.

PROPOSITION 10.6. — *Soient* A *et* B *deux événements quelconques (pas nécessairement incompatibles). Alors :*

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Enfin, si $A \subset B$*, alors*

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$$

10.2 Équiprobabilité.

DÉFINITION 10.7 (Situation d'équiprobabilité)**. —** *On appellera* situation d'équiprobabilité *une expérience aléatoire associée à un ensemble des possibles* Ω *fini et dont tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'occurrence, c'est-à-dire telle que :*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega)}$$

Par exemple, l'expérience aléatoire constituée par le lancer d'un dé équilibré à six faces peut se modéliser par une situation d'équiprobabilité.

32. La proposition qui suit ne peut être bien comprise sans avoir suivi un cours sur les séries (qui se trouve par exemple dans le polycopié principal). On la donne malgré tout sous cette forme par exigence de rigueur. Notez qu'en l'écrivant, on affirme aussi que la série dont la somme est écrite dans le terme de droite converge !

THÉORÈME 10.8. — *En situation d'équiprobabilité, pour tout événement* A *on a*

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{card}(\mathrm{A})}{\mathrm{card}(\Omega)}$$

REMARQUE 10.9. Cette relation n'est bien entendu valable que dans un cadre d'équiprobabilité, et il n'est admissible de modéliser une expérience aléatoire par l'équiprobabilité que lorsque l'on a de bonnes raisons de penser que les différentes issues de cette expérience sont également vraisemblables. Il faut donc savoir résister à la tentation d'utiliser ce résultat d'équiprobabilité lorsque l'énoncé n'inclut pas des précisions telles que « au hasard, à l'aveugle, parmi des éléments indiscernables au toucher »... sous peine de passer complètement à côté de l'intérêt de l'exercice, et accessoirement de tous les points qui lui sont alloués.

EXEMPLE 10.10. On tire au hasard une main de 5 cartes parmi un jeu de 42 cartes. La probabilité d'obtenir un carré d'as se calcule en considérant l'ensemble Ω constitué des combinaisons de 5 cartes parmi 42 (de cardinal $\binom{42}{5}$) et l'événement constitué des combinaisons contenant un carré d'as (de cardinal 38 puisque deux telles combinaisons ne diffèrent que par leur carte qui n'est pas un as) : elle vaut donc

$$\frac{38}{\binom{42}{5}}$$

Le lecteur pourra simplifier cette fraction et la calculer à titre d'exercice. Noter qu'il aurait été possible de raisonner à partir de 5-listes et que le résultat aurait bien sûr été le même.

Cet exemple illustre la nécessité de maîtriser les résultats de dénombrement présentés dans la section précédente. Il est en outre important de savoir reproduire la rédaction proposée : elle est ici minimale pour éviter d'avoir à nommer les différents ensembles, mais elle comporte tous les éléments nécessaires et suffisants pour que le raisonnement soit correct. Il est parfois nécessaire que la rédaction soit plus lourde (voir le corrigé de l'exercice ci-dessous) : n'essayez pas dans ce cas de faire l'économie de certains arguments, vous perdriez des points à coup sûr !

Exercice 10.11. On tire un nombre au hasard dans $[\![1, 100]\!]$. Quelle est la probabilité pour que la somme des chiffres de ce nombre ne soit pas égale à 10 ? Quelle est la probabilité pour qu'elle ne soit pas égale à 10, ou alors que le nombre soit pair ? Quelle est la probabilité pour que la somme des chiffres de ce nombre ne soit pas égale à 10 et que ce nombre ne soit pas 40 ?

11 Corrigés succincts des exercices.

Solution de l'exercice 1.4. Une méthode classique pour démontrer l'égalité entre deux ensembles consiste à raisonner par double inclusion : on montre que chaque ensemble est inclus dans l'autre. On peut aussi raisonner directement à partir des ensembles en les écrivant sous une forme plus explicite. Explicitons ces deux méthodes dans le cas de la première égalité (les autres se démontrent de manière similaire) :

- si $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i}$ alors $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i$, ce qui signifie que x n'appartient à aucun des A_i, donc que $x \in \overline{\mathrm{A}_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et donc que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{A}_i}$. Réciproquement, si $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{A}_i}$, x appartient à tous les $\overline{\mathrm{A}_i}$ donc n'appartient à aucun A_i, donc $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i$ et $x \in \mathrm{E}$, c'est-à-dire $x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i}$. Cette méthode est la moins risquée et se transpose à de nombreux cas dans lesquels la deuxième échoue (notamment lorsque l'on utilise des théorèmes non triviaux pour démontrer une inclusion, comme par exemple en algèbre linéaire).
- on écrit directement $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i} = \{x \in \mathrm{E} \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x \notin \mathrm{A}_i\} = \{x \in \mathrm{E} \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x \in \overline{\mathrm{A}_i}\} = \{x \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{A}_i}\}$. Cette méthode impose de bien choisir les formes successives sous lesquelles on écrit l'ensemble pour montrer que l'on a compris le sens de l'exercice, et de faire apparaître l'ensemble E : on ne peut pas se contenter d'écrire $\{x \mid \forall i \in [\![1, n]\!] x \notin \mathrm{A}_i\}$, ce qui n'a aucun sens !

Solution de l'exercice 2.2.

- Forme verbale : il existe un élément x de E tel que $a + x$ soit élément de E. Négation verbale : quel que soit l'élément x considéré dans E, $a + x$ n'est pas élément de E. Négation formelle : $\forall x \in \mathrm{E}, a + x \notin \mathrm{E}$.
- Forme verbale : si a et b sont deux éléments de E vérifiant $a < b$, alors il existe un c entier tel que $a < c < b$. Négation verbale : il existe deux éléments a et b de E vérifiant $a < b$ et tels qu'il n'existe pas de c entier tel que $a < c < b$ (c'est-à-dire tel que pour tout c entier on ait $c \leqslant a$ ou $b \leqslant c$). Négation formelle : $\exists a, b \in \mathrm{E} \mid (a < b \text{ et } \forall c \in \mathbb{Z}, c \leqslant a \text{ ou } b \leqslant c)$.
- Forme verbale : pour tout élément x de E il existe un élément y de E tel que xy soit non nul. Négation verbale : il existe un élément x de E tel que pour tout élément y de E on ait $xy = 0$. Négation formelle : $\exists x \in \mathrm{E} \mid \forall y \in \mathrm{E}, xy = 0$.

Solution de l'exercice 2.4. La rédaction correcte d'une récurrence simple dans une copie de concours EDHEC AST1 doit laisser apparente la structure suivante, et ce **quelle que soit votre aisance en mathématiques** :

- un rappel de l'hypothèse à démontrer : *Montrons par récurrence que la proposition* P_n *:*« $1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ » *est vraie pour tout* $n \geq 1$.
- une étape d'initialisation : *La propriété* P_1 *est vraie car* $1^2 = 1 = \frac{1\times2\times3}{6}$.
- la démonstration de l'hérédité de la propriété : *Soit* $n \geq 1$ *; supposons* P_n *vraie. Alors* P_{n+1} *est vraie aussi puisqu'on a* $1^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$.
- la conclusion : *La propriété* P_n *est donc vraie pour tout* $n \geq 1$.

L'omission de l'une ou l'autre de ces étapes sera systématiquement sanctionnée, de même que l'utilisation de la formule "Par une récurrence évidente on montre que..." (qui pourra toutefois vous rapporter environ la moitié des points alloués à la question *pour peu que vous ayez parfaitement rédigé au moins deux raisonnements par récurrence plus tôt dans la copie*).

Enfin, il est assez naturel de vouloir gagner du temps dans les calculs qui permettent d'établir l'hérédité d'une proposition en écrivant un raisonnement menant rapidement à P_{n+1} en utilisant le fait que P_{n+1} *doit* être vraie (puisque l'énoncé le dit!) : par exemple, la dernière égalité présentée ci-dessus n'a pas été vérifiée par le calcul au moment de sa rédaction. Cependant, il est absolument nécessaire de mener le calcul à son terme si vous avez le moindre doute quant à son exactitude.

La récurrence forte se rédige à peu près de la même façon. Voici le raisonnement attendu : *Montrons par récurrence forte la propriété* P_n *: « n possède un diviseur premier » pour tout* $n \geq 2$. P_2 *est vraie puisque* 2 *est premier et diviseur de* 2. *Soit à présent* $n \geq 2$ *; on suppose la propriété vraie* jusqu'au *rang* n[33]. Montrons alors que P_{n+1} est vraie. Si $n+1$ est premier, il se divise lui-même donc P_{n+1} est vraie. Sinon, $n+1$ est composé donc il existe a et b entiers positifs inférieurs ou égaux à n tels que $n+1 = ab$. Mais l'hypothèse de récurrence au rang a implique que a admet un diviseur premier, qui divise alors nécessairement $n+1$. P_{n+1} est donc vraie. On conclut par le principe de récurrence forte que P_n est vraie pour tout $n \geq 2$.

Solution de l'exercice 3.7. Les premiers termes sont $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 2\times 3 - 1^2 + 1 = 6$, $u_3 = 2\times 6 - 3^2 + 1 = 4$ et $u_4 = 2\times 4 - 6^2 + 1 = -27$.

Solution de l'exercice 3.11. Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = 2n+3 \geq 0$ donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante, et $v_{n+1} - v_n = 2n - 7$ donc $(v_n)_{n\geq 0}$ n'est ni croissante ni décroissante (mais on peut tout de même dire qu'elle décroît jusqu'au rang 3 et croît à partir du rang 4).

Solution de l'exercice 3.13. On sait que $\cos(x + 2n\pi) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $u_{n+8} = \cos(n\frac{\pi}{4} + 2\pi n) = \cos(n\frac{\pi}{4}) = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien périodique.

Solution de l'exercice 3.29. Le théorème des gendarmes permet de montrer que le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 tend lui-même vers 0. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par une constante $M \geq 0$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 pour limite, alors l'encadrement $-M|v_n| \leqslant u_n v_n \leqslant M|v_n|$ permet de conclure. On en déduit aisément que la première suite proposée converge vers 1.

Pour étudier la deuxième, on utilise un résultat de croissance comparée (présent plus loin dans les rappels) en écrivant $\ln(n) - n = n(\frac{\ln(n)}{n} - 1)$ et le fait que $\frac{\ln(n)}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$: la suite admet donc $-\infty$ pour limite.

La troisième suite admet $\tan(1)$ pour limite par continuité de la fonction tan sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

La quatrième admet $+\infty$ pour limite puisque $e^{2n+1/n} = e^{2n}e^{1/n}$ qui est le produit d'une suite tendant vers $+\infty$ par une suite tendant vers 1 (on utilise ici la continuité de la fonction exponentielle).

Quel que soit a, la suite est bien définie puisque les n considérés sont entiers et positifs. Si a est strictement positif, on peut écrire $a^n = e^{n\ln(a)}$ et conclure en considérant le signe de $\ln(a)$ que la suite tend vers $+\infty$ si $a > 1$, vers 0 si $0 < a < 1$ et est constante et égale à 1 si $a = 1$. Si $a = 0$, la suite est nulle à partir du deuxième terme. Si $a < 0$, en écrivant $a^n = (-a)^n \times (-1)^n$ on peut utiliser les résultats que l'on vient d'établir pour

33. et non plus seulement vraie au rang n, c'est d'ailleurs ce qui fait la différence entre la récurrence simple et la récurrence forte!

montrer que si $-1 < a < 0$ la suite tend vers 0, si $a = -1$ la suite oscille entre les valeurs -1 et 1 et n'admet pas de limite, et si $a < -1$ la suite prend des valeurs de plus en plus grandes en valeur absolue mais change de signe à chaque rang et diverge. En résumé, la suite tend vers 0 si et seulement si $|a| < 1$ et diverge sinon (de plusieurs façons différentes).

Solution de l'exercice 3.30.

1. On cherche à déterminer si pour tout $n \geq 2$ on a $u_n \geq 2$, c'est-à-dire $\frac{2n+1}{n+2} \leqslant 2$, soit $2n+1 \leqslant 2n+4$, ce qui est vrai. La suite est donc majorée par 2. Un raisonnement similaire montre qu'elle n'est par contre pas minorée par 2.
2. Pour tout $n \geq 1$, $u_n - v_n = \frac{2n+1}{n+2} - 2 + \frac{3}{n} = \frac{(2n+1)n-2n(n+2)+3(n+2)}{n(n+2)} = \frac{6}{n(n+2)} \geq 0$ donc $u_n \geq v_n$, ce qu'il fallait démontrer.
3. On utilise le théorème des gendarmes à partir de l'inégalité $v_n \leqslant u_n \leqslant 2$ valable pour tout $n \geq 1$ et le fait que $(v_n)_{n\geq 1}$ tend vers 2. On aurait aussi pu déterminer la limite directement en factorisant par n le numérateur et le dénominateur formant u_n et en simplifiant la fraction, puis en utilisant le théorème qui suit l'exercice.

Solution de l'exercice 4.12. Il est possible de former la composée $f \circ g$ puisque $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, mais pas la composée $g \circ f$ puisque f prend des valeurs négatives sur lesquelles g n'est pas définie.

Solution de l'exercice 4.13. L'ensemble de définition de f_1 est $\{x \in \mathbb{R} \mid e^x - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x \neq 4\} = \mathbb{R} \setminus \{\ln(4)\} = \mathbb{R} \setminus \{2\ln(2)\}$. f_1 prend des valeurs négatives (par exemple en 0) donc $\ln \circ f_1$ n'existe pas.

L'ensemble de définition de f_2 est $\mathbb{R}^*$. f_2 ne prend que des valeurs strictement positives donc $\ln \circ f_2$ est définie. De plus, comme f_2 ne s'annule pas, $f_2 \circ f_2$ est définie : c'est la fonction $x \mapsto \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}$.

L'ensemble de définition de f_3 est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et f_3 prend des valeurs négatives (par exemple en 0) donc $\ln \circ f_3$ n'existe pas.

Solution de l'exercice 4.16. On peut se trouver dans tous les cas de figure : si $f : x \mapsto x$ est la fonction identité et si $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est la fonction inverse de la racine carrée (définie sur $\mathbb{R}_+^*$), $-f$ et g sont (strictement) décroissantes et leur produit $x \mapsto -\sqrt{x}$ l'est aussi. Par contre, $-f$ est décroissante mais $(-f) \times (-f)$ est la fonction carré qui n'est pas décroissante (elle est même croissante sur $\mathbb{R}_+$).

Solution de l'exercice 4.18. Si la condition de l'énoncé est vérifiée, on a pour tout $x \in \mathrm{A}$ la relation $-\mathrm{K} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{K}$, donc f est bien bornée.

Si f est bornée, si c et C sont comme dans la définition et si l'on note K le plus grand réel parmi $|c|$ et $|\mathrm{C}|$, alors on a $-\mathrm{K} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{K}$ (faites un dessin si ce n'est pas clair !), c'est-à-dire $|f(x)| \leqslant \mathrm{K}$, pour tout $x \in \mathrm{A}$.

Solution de l'exercice 4.35. f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et vaut 1 en 0 et -1 en 1. Il suffit donc d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour obtenir l'existence d'un point d'annulation de f entre 0 et 1.

Solution de l'exercice 4.36. Si la fonction partie entière E était continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires impliquerait qu'elle prenne toutes les valeurs entre $0 = E(0)$ et $1 = E(1)$. Or elle ne prend que des valeurs entières, donc elle n'est pas continue.

Solution de l'exercice 4.39. Noter que l'hypothèse de continuité ne sert qu'à assurer le fait que $f(I)$ est un intervalle et la continuité de f^{-1}.

On peut penser pour le premier contre-exemple à la fonction carré, ou de manière générale à n'importe quelle fonction non injective. Pour le deuxième, on choisira tout simplement la fonction nulle ou, pour obtenir un dessin plus intéressant, une fonction croissante constante sur un intervalle de longueur non nulle.

Solution de l'exercice 5.4. La quantité $\frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = h+2$ tend vers 2 lorsque h tend vers 0, donc la dérivée recherchée est 2. L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est $y = 2(x-1)+1^2$, c'est-à-dire $y = 2x-1$.

Solution de l'exercice 5.6. La fonction identité $g : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc f est dérivable aux mêmes points que $f - g : x \mapsto |x-1|$. En traçant cette fonction, on s'aperçoit du fait qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable partout sauf en 1, où sa courbe représentative admet deux demi-tangentes correspondant aux deux limites à gauche (-1) et à droite (1) du taux d'accroissement considéré (vérifiez que vous savez calculer ce taux d'accroissement et montrer que les deux limites ne coïncident pas !).

Solution de l'exercice 5.19. Les trois fonctions considérées sont dérivables sur leur ensemble de définition comme combinaison de fonctions dérivables, et on a pour tout x tel que cela ait un sens :

$$f_1'(x) = \frac{e^x - 4 - (1+x)e^x}{(e^x-4)^2} = \frac{-4 - xe^x}{(e^x-4)^2}$$

$$f_2'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$$

$$f_3'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Solution de l'exercice 5.28. f est indéfiniment dérivable comme fonction polynomiale, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 5x^4 + 6x$, $f''(x) = 20x^3 + 6$, $f^{(3)}(x) = 60x^2$, $f^{(4)}(x) = 120x$, $f^{(5)}(x) = 120$ et pour tout $n \geq 6$, $f^{(n)}(x) = 0$.

Solution de l'exercice 5.35. On calcule la dérivée de f (qui est bien dérivable comme fonction polynomiale) : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$. Cependant, il y a ici un petit piège : en appliquant le théorème qui précède l'exercice sur $]-\infty; 1[$ et $]1, +\infty[$, on voit que les restrictions de f à ces deux intervalles réalisent des bijections sur leurs images respectives, mais on ne peut pas directement conclure de façon similaire pour f (dont la dérivée s'annule en 1). Il faut en fait utiliser le fait que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (puisque sa dérivée y est strictement positive sauf en un unique point), puis le théorème de la bijection.

On aurait aussi pu formuler une version plus générale du théorème précédent, qui est toujours valable en permettant à la dérivée de f de s'annuler en un nombre fini de points de I.

Solution de l'exercice 6.10. On primitive terme à terme et on obtient la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2\ln(|x|)$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Attention à ne pas oublier la valeur absolue dans le logarithme en primitivant la fonction inverse !

Solution de l'exercice 6.11. Comme la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{3x^2}$ est $x \mapsto 6xe^{3x^2}$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{3x^2}}{6} + 2x$ convient.

Solution de l'exercice 6.18. On choisit ici de dériver le logarithme et de primitiver la fonction polynomiale, ce qui donne, en posant $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \ln(x)$ pour tout $x \in [1, e]$ (u et v sont alors bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, e]$),

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_1^e u'(x)v(x)dx \\ &= \left[(x^2+x)\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)dx \\ &= e^2 + e - \int_1^e (x+1)dx \\ &= e^2 + e - \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8.19. Le terme dans la parenthèse tend vers 3 et la puissance vers $+\infty$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$... attention à ne pas vous ruer sur les formes exponentielles lorsque vous n'êtes pas en présence d'une forme indéterminée !

Solution de l'exercice 8.23. Lorsque x tend vers 0, $x\ln(x) = \frac{-\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = y^{-1} \times (-\ln(y))$ tend vers 0 (on a posé $y = \frac{1}{x}$ et utilisé le résultat de croissance comparé présenté dans le cours avec $\alpha = -1$ et $\beta = 1$, mais vous pouvez aussi retenir cette limite très utile). En posant $z = x\ln(x)$, on voit que lorsque x tend vers 0 (donc z aussi), l'expression donnée, qui s'écrit $\frac{z}{1-e^{-z}}$, tend vers 1... puisqu'il s'agit tout simplement de l'inverse de $-\frac{e^{-z}-1}{z}$ qui est le taux d'accroissement en 0 de la fonction $z \mapsto e^{-z}$, de dérivée $-(-e^0) = 1$ en 0.

Solution de l'exercice 9.1. On somme $547-5+1$ fois un terme égal à 1, donc la somme vaut $547-5+1 = 543$.

Solution de l'exercice 9.2. L'indice de sommation est k, pas n ! On somme donc n termes identiques valant tous u_n : la somme vaut alors nu_n.

Solution de l'exercice 9.5. $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{50} 2k = 2\sum_{k=1}^{50} k = 50 \times 51 = 2550$. On a utilisé un résultat de linéarité présenté un petit peu plus loin dans le cours.

Solution de l'exercice 9.7. En posant $i = n-k$ (i varie alors de n à 1 en décroissant), on obtient $\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Solution de l'exercice 9.11. En écrivant $(n+2)! = (n+2)\times(n+1)\times n \times \ldots \times 1 = (n+2)(n+1)n!$ et en ayant recours à des stratagèmes similaires pour $(n+1)$ et $(n+3)$, on obtient après simplification par $n!$ l'expression $\frac{(n+2)(n+1)}{(n+3)(n+2)} = \frac{n+1}{n+3}$.

Solution de l'exercice 9.21. Au bout de 5 ans, la population a été multipliée par $2^5 = 32$ et est donc de 3200 individus. Le stock de céréales est passé de 1000 à $1000 + 5 \times 400 = 3000$. Tous les individus ne peuvent donc pas se nourrir.

Solution de l'exercice 9.23. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite arithmétique de raison $a \in \mathbb{R}$. Alors $u_n = u_0 + an$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si p et q sont comme dans l'énoncé on a :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = \sum_{k=p}^{q} (u_0 + ak) = (q-p+1)u_0 + a\sum_{k=p}^{q} k$$

mais on peut écrire

$$\sum_{k=p}^{q} k = \sum_{k=0}^{q} k - \sum_{k=0}^{p-1} k = \frac{q(q+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2}$$

et il suffit de vérifier que l'on a bien

$$(q-p+1)u_0 + a\left(\frac{q(q+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2}\right) = \frac{u_0 + ap + u_0 + aq}{2}(q-p+1)$$

pour obtenir l'égalité attendue, ce qui est immédiat si l'on remarque que

$$q(q+1) - (p-1)p = (p+q)(q-p+1)$$

Solution de l'exercice 9.33. Le terme $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments que l'on peut réaliser à partir d'un ensemble à n éléments. Si l'on distingue un élément dans l'ensemble et que l'on considère le nombre de collections que l'on peut réaliser en incluant cet élément ($\binom{n-1}{k-1}$ puisqu'il s'agit alors de choisir les $k-1$ autres éléments parmi les $n-1$ éléments restants) et celles que l'on peut réaliser en l'excluant ($\binom{n-1}{k}$ par la même logique), on obtient bien toutes les combinaisons possibles. Ces deux types de combinaisons constituant des cas disjoints, on obtient bien la relation de Pascal.

Solution de l'exercice 9.36. Il suffit de faire apparaître dans la première somme des $1^k 1^{n-k}$: on obtient $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$. On procède de même avec la deuxième somme en remarquant qu'elle vaut $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = 0$ si $n > 0$, 1 sinon (en effet, on adopte dans les problèmes de dénombrement la convention $0^0 = 1$).

Solution de l'exercice 9.38. La première somme porte sur la première moitié des coefficients binomiaux associés à une valeur de n donnée. Or on sait que ceux-ci sont symétriques (c'est le sens de la première proposition du théorème qui précède l'exercice) donc on peut écrire :

$$2\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k} + \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

où la deuxième égalité est obtenue en effectuant dans la deuxième somme le changement de variable $k' = n-k$, d'où $\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

La deuxième somme se traite en utilisant la deuxième proposition du théorème qui précède l'exercice : $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}$. Remarquez l'abandon de l'indice $k = 0$ correspondant à un terme nul pour pouvoir appliquer la formule du théorème !

Solution de l'exercice 10.11. Lister tous les nombres de $[\![1, 100]\!]$ dont la somme des chiffres n'est pas égale à 10 est un peu fastidieux; il est plus commode d'envisager l'événement contraire et d'en évaluer la probabilité. La rédaction correcte pour cela est la suivante : *On choisit* $\Omega = [\![1, 100]\!]$ *pour modéliser l'ensemble des possibles, et on note* A *l'événement « la somme des chiffres du nombre tiré n'est pas égale à 10 ». On a* $\overline{A} = \{19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91\}$*, donc* $\text{card}(\overline{A}) = 9$*, et on est en situation d'équiprobabilité car le tirage s'effectue au hasard, d'où* $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{9}{100}$ *puis* $\mathbb{P}(A) = \frac{91}{100}$.

Pour calculer la deuxième probabilité, on peut utiliser la formule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ ou passer une fois encore à l'événement contraire, ce qui est plus judicieux dans la mesure où le calcul direct de $\mathbb{P}(A \cap B)$ imposerait de lister les nombres impairs de A. On écrit donc : *Notons* B *l'événement « le nombre tiré est pair ». On a alors* $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(\{19, 37, 55, 73, 91\}) = 1 - \frac{5}{100} = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$ *par équiprobabilité.*

Pour calculer la troisième probabilité, on remarque que l'événement élémentaire $\{40\}$ est inclus dans A et on écrit $\mathbb{P}(A \setminus \{40\}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\{40\}) = \frac{91}{100} - \frac{1}{100} = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$.

Notez que vous pouvez indifféremment écrire les résultats sous formes de fractions ou de pourcentages, mais qu'il est conseillé de ne pas vous lancer dans des calculs hasardeux pour vous débarrasser d'une fraction : $\frac{3}{22}$ est un résultat tout à fait acceptable ! Pensez toutefois à exprimer vos fractions sous forme irréductible : voir un raisonnement bien mené aboutir à $\frac{2}{8}$ fait toujours sourire...