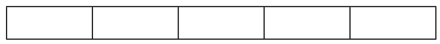
Durée de préparation : 1 heure 30.

Question de cours :

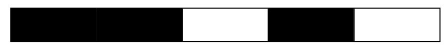
Donner la définition de l'indépendance de deux événements, de deux variables aléatoires réelles discrètes.

Exercice 1

1. On considère la configuration ci-dessous, composée de cinq cases juxtaposées.



On peut colorier en noir les cases de la configuration, sans jamais, toutefois, colorier deux cases voisines :

autorisé :  interdit : 

Quel est le nombre u_5 de motifs différents que l'on peut construire selon ce procédé ? (le motif "tout blanc" étant comptabilisé)

Distinguons suivant le nombre de cases coloriées.

- Si on ne colorie aucune case, il n'y a qu'une configuration possible.
- Si on colorie une seule case, il y a 5 configurations possibles.
- Si on colorie exactement deux cases, il y a $\binom{5}{2}$ configurations possibles, dont il faut retrancher les 4 qui sont interdites. Cela donne donc 6 configurations possibles.
- Si on colorie trois cases, il n'y a qu'une seule configuration possible.
- On ne peut pas colorier plus de trois cases.

Finalement, $u_5 = 13$.

2. Calculer, selon le même principe qu'à la question 1, le nombre u_3 de motifs possibles avec une configuration formée de trois cases, puis le nombre u_4 de motifs possibles avec une configuration de quatre cases. Vérifier l'égalité $u_3 + u_4 = u_5$.

De même, $u_3 = 1 + 3 + 1 = 5$ et $u_4 = 1 + 4 + (6 - 3) = 8$. On a bien $u_3 + u_4 = u_5$.

3. Pour une configuration formée de n cases juxtaposées (avec $n \geq 1$), on appelle u_n le nombre de motifs différents possibles (toujours en considérant le cas "tout blanc" comme un motif). Démontrer, pour tout entier naturel $n \geq 3$, la relation $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$.

Supposons que l'on dispose de $n \geq 3$ cases. Si on choisit de colorier la première, alors on ne peut pas colorier la deuxième, et le reste doit être une configuration autorisée de $n-2$ cases. Il y a u_{n-2} telles configurations. Si on choisit de ne pas colorier la première, il n'y a pas de contrainte sur la deuxième, on a donc u_{n-1} configurations possibles. D'où $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$, pour tout $n \geq 3$.

4. On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a : $A^n = A^{n-1} + A^{n-2}$.

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

donc $A^2 = A + I$. D'où, en multipliant de chaque côté par A^{n-2}, $A^n = A^{n-1} + A^{n-2}$ pour tout $n \geq 3$.

5. Démontrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n-2} & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_n \end{pmatrix}.$$

- Comme $u_1 = 2$ et $u_2 = 3$, le résultat est vrai pour $n = 3$:

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix}.$$

- Supposons que pour un certain $n \geq 3$, on a

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n-2} & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_n \end{pmatrix}.$$

  Alors, c'est vrai pour $n+1$ aussi :

$$A^{n+2} = A\,A^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_{n-2} + u_{n-1} & u_{n-1} + u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

- Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \geq 3$.

Exercice 2

La répartition des salaires mensuels en euros d'une entreprise est donnée par le tableau suivant :

Salaire	Nombre de salariés
[1200; 1500[	50
[1500; 2000[	120
[2000; 2500[	30
[2500; 3000[	10
[3000; 5000[	4

1. Calculer le salaire moyen ainsi que l'écart-type de cette distribution.

   Le salaire moyen est de 1815.42 euros à 10^{-2} près. L'écart-type est de 457.7 euros.

2. Calculer les fréquences et les fréquences cumulées de la distribution de la masse salariale (masse salariale détenue par chaque catégorie d'individus, c'est-à-dire total des salaires pour chaque classe).

   Le nombre total de salariés est 214 et le salaire total 388500. La fréquence de la masse est la proportion de la masse salariale détenue par la classe, *i.e.*,

$$\frac{\text{salaire détenu par la classe}}{\text{salaire total}}.$$

   Complétons le tableau:

Salaire	[1200; 1500[	[1500; 2000[	[2000; 2500[	[2500; 3000[	[3000; 5000[
Nombre de salariés	50	120	30	10	4
Fréquences de la masse	0.174	0.541	0.174	0.071	0.041
Fréquences cumulées de la masse Y_i	0.174	0.714	0.888	0.959	1
Fréquence de la population	0.234	0.561	0.140	0.047	0.018
Fréquences cumulées de la population X_i	0.234	0.795	0.935	0.982	1

3. À partir du tableau précédent, calculer la médiale. Calculer également la médiane. Que vous indique la comparaison entre la médiane et la médiale ?

   La médiale est la valeur de salaire x au dessous duquel est répartie la moitié de la masse salariale. 0.174 de masse est au dessous de 1500 euros et 0.714 au dessous de 2000 euros. On interpole linéairement entre $(1500, 0.174)$ et $(2000, 0.714)$. On trouve

$$x = \frac{0.5 - 0.174}{0.714 - 0.174} \times (2000 - 1500) + 1500 = 1801.85.$$

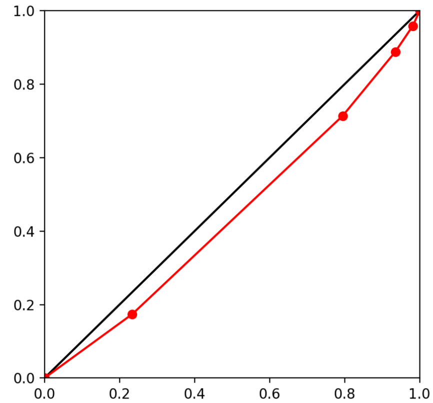
   La médiane est le salaire de "107.5-eme" personne. Elle se trouve aussi parmi la classe [1500; 2000[. On interpole entre $(1500, 50)$ et $(2000, 170)$. Ce qui donne

$$\frac{107.5 - 50}{170 - 50} \times (2000 - 1500) + 1500 = 1739.58$$

   La médiane est toujours au dessous de la médiale sauf à l'égalité totale.

4. Tracer la courbe de Lorenz.

   La courbe de Lorenz (tracée en rouge dans la figure suivante) est donnée par les fréquences cumulées de la masse Y_i en fonction des fréquences cumulées de la population X_i :



5. Après avoir rappelé ce que mesure l'indice de Gini et comment il se calcule, calculer et interpréter l'indice de Gini.

   L'indice de concentration de Gini est

   $$2 \times \text{ (surface entre courbe de Lorentz et la bissectrice } x \mapsto x).$$

   On applique la formule de Brown qui n'est pas plus que le calcul de l'aire d'un trapèze :

   $$G = 1 - \sum_{i=1}^{5} (Y_i + Y_{i-1})(X_i - X_{i-1}) = 0.114.$$