

Durée de préparation : 1 heure 30**Question**

Sur une portion de 6 km du périphérique parisien, le trafic peut être perturbé le matin en semaine de 7h à 12h. Au début de cette portion, un panneau indique, à chaque instant, le temps de parcours d'un véhicule sur ces 6 km.

On modélise l'impact du trafic par la fonction f définie sur $[1; 6]$ par :

$$f(t) = 8 \frac{e \times \ln(t)}{t} + 4$$

où $f(t)$ est le temps de parcours indiqué sur le panneau exprimé en minutes, à l'instant t (où t est exprimé en heures) et $e = \exp(1)$.

Il est 7h du matin à l'instant $t = 1$.

1. Déterminer le temps de parcours moyen sur la totalité de la période $[1; 6]$.

Exercice 1

Un consommateur consacre un certain budget annuel à l'achat de deux produits de nouvelles technologies A et B . La fonction d'utilité de ce consommateur pour le produit A est donnée par :

$$f_A(x) = 0.7 \times \ln(x)$$

pour une quantité x de produit achetée.

1. Déterminer l'utilité marginale en fonction de x . Quelles sont ses variations en fonction de x ? Interpréter.

La fonction d'utilité pour une quantité y du produit B achetée est donnée par :

$$f_B(y) = 0.3 \times \ln(y).$$

On suppose que la fonction d'utilité globale du consommateur est alors :

$$u(x, y) = f_A(x) + f_B(y).$$

2. Quel est, en fonction de x et y , le taux marginal de substitution de A en B ? Donner une interprétation lorsque $x = 2y$.

On considère la fonction φ définie par : $\varphi(x, y) = x^{0.7}y^{0.3}$.

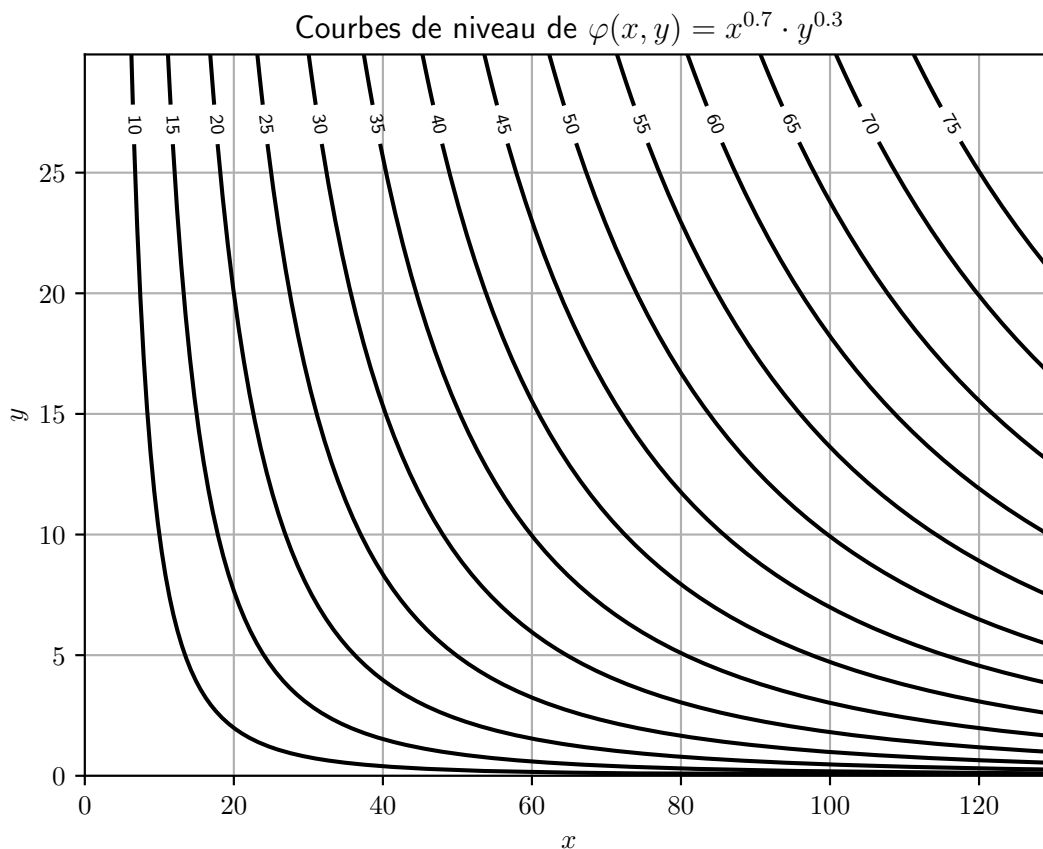
3. Pourquoi la fonction φ peut-elle être considérée comme une fonction d'utilité équivalente à la fonction u ?

4. Déterminer les élasticités partielles de φ par rapport à x et à y .

Du fait des prix des produits A et B , la contrainte budgétaire de notre consommateur se ramène à :

$$3x + 5y \leq 96.$$

5. Les lignes de niveaux $\varphi(x, y) = k$ de la fonction φ sont représentées ci-dessous pour k variant de 5 en 5 de 10 à 75.



- (a) Déterminer graphiquement une valeur approchée du panier optimal du consommateur sous la contrainte $3x + 5y \leq 96$.
- (b) Déterminer ce panier optimal à l'aide de la méthode du lagrangien.
- (c) Déterminer, avec la méthode de votre choix, la plus petite valeur de m telle que la contrainte budgétaire $3x + 5y \leq m$ permette d'atteindre une utilité de 30.

Exercice 2

Une laiterie souhaite effectuer des contrôles sur la qualité de ses crèmes afin de respecter les normes sanitaires qui imposent moins de 16000 bactéries par *ml*.

On a prélevé 50 pots dans la production et relevé le nombre de bactéries par *ml*. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Nombre de bactéries	[10; 12[[12; 13[[13; 14[[14; 15[[15; 16[[16; 18[
Nombre de pots	8	6	11	9	7	9

1. Représenter l'histogramme d'aire égale à 1 de la distribution observée du nombre de bactéries par *ml*.
2. Si x_i représente le nombre de bactéries par *ml* présentes dans le pot d'indice i , on donne :

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 701.5 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 9988.35.$$

Calculer le nombre moyen de bactéries observé pour cet échantillon de 50 prélèvements, ainsi que l'écart-type observé.

3. Déterminer une valeur approchée de la médiane du nombre de bactéries par *ml*.
4. On considère que le nombre de bactéries X (en milliers par *ml*) est une variable aléatoire continue. On choisit de modéliser la loi de X par une loi normale $N(\mu; \sigma)$ avec $\mu = 14$ et $\sigma = 1.7$. Justifier ce choix puis déterminer alors $p = P(X \geq 16)$.
5. On s'intéresse à la population de pots dont le nombre de bactéries est supérieur ou égal à 16000 bactéries par *ml* dans la production de cette laiterie.
 - (a) Quelle est la loi de probabilité du nombre de pots qui contiennent plus de 16000 bactéries par *ml* pour un échantillon de 50 pots ? Justifier la réponse.
 - (b) Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique (bilatéral) au seuil de 95% de la proportion de pots dont le nombre de bactéries est supérieur ou égal à 16000 par *ml* pour un échantillon de taille 50.
 - (c) Quelle serait la prise de décision associée à cet intervalle de fluctuation ?
6. Trois mois plus tard, un contrôle des services sanitaires fournit, pour 50 pots analysés, la valeur de 20% de pots dépassant 16000 bactéries par *ml* et déclare que cette valeur n'a rien d'anormal.
 - (a) Justifier cette affirmation.
 - (b) Combien de pots au minimum faudrait-il prélever pour que le contrôle détecte une anomalie dans la production ?