Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Exercices extra 1

2023-2024

Exercice 1 (2008)

On considère un pays décomposé en trois régions : la capitale, sa périphérie et la province. On suppose qu'à l'année 0 de l'analyse, la population de ce pays est répartie de la manière suivante : 24% de la population habite dans la capitale, 6% réside dans la périphérie et le reste de la population vit en province.
Pour modéliser l'exode rural, on considère que les mouvements de la population sont décrits par les mécanismes suivants. D'une année sur l'autre :

— parmi les habitants de province, 1 sur 10 déménage vers la capitale et 2 sur 10 vers la périphérie ;

— parmi les habitants de la périphérie, 1 sur 10 se déplace vers la capitale et 1 sur 10 décide de s'installer en province ;

— parmi les habitants de la capitale, 1 sur 10 décide d'aller habiter en périphérie.

On suppose en outre que la population totale est constante. On note a_n, b_n et c_n les parts de la population vivant au bout de n années respectivement dans la capitale, dans la périphérie ou en province.

1. Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même avec b_{n+1} et c_{n+1}. Quel lien y a-t-il entre a_n, b_n et c_n ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose
$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ -0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$
Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.
3. Déterminer une matrice C telle que $C = AC + B$.
4. On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n = X_n - C$. Montrer que, pour tout entier n, $Y_n = A^n Y_0$.
5. Quelles sont les valeurs propres de A ? Déterminer une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.
6. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a
$$A^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ \frac{0,6^n - 0,8^n}{2} & 0,6^n \end{pmatrix}, \text{ puis que } X_n = \begin{pmatrix} 0,5 - 0,26 \times 0,8^n \\ 0,375 - 0,445 \times 0,6^n + 0,13 \times 0,8^n \end{pmatrix}.$$
7. En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n. Quelle sera la répartition de la population de ce pays à long terme ?

Exercice 2 (2008)

On s'intéresse à l'évolution, sur une suite de périodes, de la population d'un pays, divisée en enfants et en adultes.

Partie A

On estime que, d'une période à la suivante :
Le taux de mortalité des enfants est de 20%, et les survivants deviennent des adultes.
Le taux de mortalité des adultes est de 100%.
Le nombre moyen d'enfants auxquels chaque adulte donne naissance est de $1,2$.

On appelle e_n et a_n respectivement le nombre d'enfants et d'adultes à la période n. On pose de plus, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} e_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n : $X_{n+1} = AX_n$.
2. On suppose que les adultes comme les enfants étaient au nombre de 10 millions à la période 0. En utilisant la matrice A^2, déterminer le nombre d'enfants et d'adultes à la période 2, puis à la période 10.
3. Sous les hypothèses du problème, comment la population de ce pays évolue-t-elle à long terme ?

Partie B

On suppose ici que le taux de mortalité infantile est toujours de 20%, et que chaque adulte donne en moyenne naissance à $1,25$ enfants d'une période à la suivante. Etudier les deux suites (e_n) et (a_n) définies précédemment.

Partie C

On appelle désormais, d'une période à la suivante : t le taux de mortalité infantile, et m le nombre moyen d'enfants auxquels un adulte donne naissance (le taux de mortalité des adultes étant toujours de 100%).

1. Déterminer une relation fonctionnelle du type $m = f(t)$ assurant la stabilité de la population (en volume et en répartition) entre deux périodes n et $n + 2$.
2. Etudier la fonction f sur l'intervalle $[0; 1[$. Interpréter dans le problème donné le sens de variation de f, la quantité $f(0)$, et la limite de la fonction f au point 1.
3. On estime pouvoir encadrer le taux de mortalité infantile entre 5 et 10%. En déduire l'encadrement correspondant pour m (toujours sous l'hypothèse de stabilité ci-dessus).
4. Esquisser la représentation graphique sur $[0; 1[$ de la fonction $t \mapsto f(t)$. Mettre en évidence sur le graphique précédent les couples $(m; t)$ pour lesquels la tendance à long terme de la population étudiée est à la disparition.

Exercice 3 (2009)

On considère deux pièces A et B, dans lesquelles arrivent des appels téléphoniques. On désigne par X le nombre d'appels qu'il y a eu dans la pièce A au cours d'une journée. On suppose que X suit une loi Poisson de paramètre 1. De la même manière Y désigne le nombre d'appels qu'il u a eu dans la pièce B au cours d'une journée. On suppose que Y suit une loi Poisson de paramètre 2. On suppose que le nombre d'appels dans la pièce A au cours d'une journée est indépendant de celui de la pièce B.

1. Déterminer la loi du nombre total d'appels dans les deux pièces.
2. Calculer le nombre moyen d'appels dans la pièce A au cours d'une journée.
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu 10 appels au total dans la journée sachant qu'il y a eu 5 appels dans a pièce A ?
4. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas eu d'appel dans la pièce A sachant qu'il y a eu 6 appels en tout dans les deux pièces ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la loi du nombre d'appels dans la pièce A sachant qu'il y a eu n appels au total dans les deux pièces.

Exercice 4 (2008)

D'un naturel confiant, vous décidez d'acheter des objets d'art dans une brocante que vous venez de découvrir. Mais 80% des marchands installés sur cette brocante sont indélicats, pour seulement 20% de marchands sérieux… Un marchand indélicat procure à ses clients de la marchandise sans valeur la moitié du temps, alors qu'un marchand sérieux vend un article de qualité neuf fois sur dix. Après avoir acheté un objet à votre goût, vous consultez un ami connaisseur qui vous apprend que, par chance, vous avez acquis un objet de qualité.

1. Quelle est la probabilité que vous ayez acheté cet objet chez un marchand sérieux ?

Résolument optimiste, et malgré la mise en garde, vous vous rendez de nouveau, et à cinq reprises, sur cette brocante au cours de l'année, et y faites à chaque fois l'acquisition d'un nouvel objet d'art sans précaution particulière.

2. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un des cinq objets soit de qualité ?
3. Quelle est la probabilité que les cinq objets soient de qualité ?
4. Quelle est l'espérance du nombre d'objets de qualité parmi vos cinq achats ?

Exercice 5 (2010)

La durée d'une communication téléphonique à grande distance est assimilée à une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est définie par les formules :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{2}{3}x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la densité de la loi de X.
2. Calculer la durée moyenne d'une communication.
3. Calculer les probabilités $P(3 \leq X \leq 9)$ et $P_{(x \geq 3)}(X \leq 9)$.

Une entreprise décide d'étudier, parmi 5000 appels, le nombre de ses communications à grande distance dont la durée est comprise entre 3 et 9 unités. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de communications dont la durée n'est pas comprise entre 3 et 9 unités.

4. Quelle est la loi suivie par Y ?
5. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
6. À l'aide d'une approximation convenable que l'on justifiera, calculer la probabilité pour que Y soit inférieure à 4300.

Exercice 6 (2013)

La répartition des salaires mensuels en euros d'une entreprise est donnée par le tableau suivant :

Salaire x	[1200 ;1500[	[1500 ;2000[	[2000 ;2500[	[2500 ;3000[	[3000 ;5000[
Nombre de salariés	50	120	30	10	4

1. Calculer le salaire moyen ainsi que l'écart-type de cette distribution
2. Calculer les fréquences et les fréquences cumulées de la distribution de la masse salariale (masse salariale détenue par chaque catégorie d'individus, c'est-à-dire total des salaires pour chaque classe).
3. À partir du tableau précédent, calculer la médiale. Calculer également la médiane. Que vous indique la comparaison entre la médiane et la médiale ?

4. Tracez la courbe de Lorenz de cette distribution.
5. Après avoir rappelé ce que mesure l'indice de Gini et comment il se calcule, calculer et interpréter l'indice de Gini.

Exercice 7 (2011)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-après :

X \Y	1	2	3	4
1	0,08	0,04	0,16	0,12
2	0,04	0,02	0,08	0,06
3	0,08	0,04	0,16	0,12

1. Déterminer les lois marginales de X et Y et indiquer si ces variables aléatoires sont indépendantes.
2. Déterminer $COV(X, Y)$.
3. Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.
4. On pose $T = \inf(X, Y)$ et $U = \sup(X, Y)$. Déterminer la loi du couple (T, U).