Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

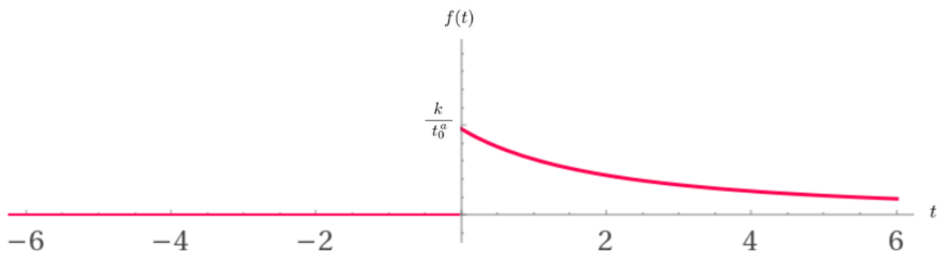
Mathématiques - DM2 (optionnel) - corrigé

2022-2023

Exercice 8 (2013)

Partie 1 : Étude d'une densité

1. Si $t < 0$, $t \mapsto f(t)$ est constante et égal a 0.
   Si $t \geq 0$,
   $$f'(t) = \frac{-ak}{(t+t_0)^{a+1}}.$$
   Alors, f est décroissante sur $[0, +\infty[$.
2. Comme $a > 0$, $\lim_{t\to\infty}(t+t_0)^a = +\infty$. Par ailleurs, $k > 0$. Alors,
   $$\lim_{t\to\infty} \frac{k}{(t+t_0)^a} = 0.$$



3.

4. Pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, il faut que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.
   Comme $f(t) = 0$ pour $t < 0$, il faut que
   $$\int_0^{+\infty} \frac{k}{(t+t_0)^a} dt = 1.$$
   Alors,
   $$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{k}{(t+t_0)^a} dt &= k\int_0^{+\infty} (t+t_0)^{-a} dt \\ &= k \lim_{h\to\infty} \left[\frac{(t+t_0)^{-a+1}}{-a+1}\right]_0^h \\ &= k\left(-\frac{t_0^{-a+1}}{-a+1}\right) \\ &= k\left(\frac{t_0^{-a+1}}{a-1}\right)\end{aligned}$$
   Donc, $k = (a-1)t_0^{a-1}$.

Partie 2 : Durée de vie

1.

$$\begin{aligned}
P(X \leq t_0/2) &= \int_0^{t_0/2} \frac{(a-1)t_0^{a-1}}{(t+t_0)^a} dt \\
&= (a-1)t_0^{a-1} \int_0^{t_0/2} (t+t_0)^{-a} dt \\
&= (a-1)t_0^{a-1} \left[\frac{(t+t_0)^{-a+1}}{-a+1} \right]_0^{t_0/2} \\
&= \frac{(a-1)t_0^{a-1}}{1-a} \left(\left(\frac{3}{2} t_0 \right)^{-a+1} - t_0^{-a+1} \right) \\
&= -t_0^{a-1} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{-a+1} t_0^{-a+1} - t_0^{-a+1} \right) \\
&= - \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{-a+1} - 1 \right) \\
&= 1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{-a+1}
\end{aligned}$$

En substituant a par $2t_0$, on obtient :

$$P(X \leq t_0/2) = 1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{1-2t_0}$$

2.

$$\begin{aligned}
P(X \leq m) &= \int_0^{m} \frac{(a-1)t_0^{a-1}}{(t+t_0)^a} dt \\
&= (a-1)t_0^{a-1} \int_0^{m} (t+t_0)^{-a} dt \\
&= (a-1)t_0^{a-1} \left[\frac{(t+t_0)^{-a+1}}{-a+1} \right]_0^{m} \\
&= \frac{(a-1)t_0^{a-1}}{1-a} \left((m+t_0)^{-a+1} - t_0^{-a+1} \right) \\
&= - \left(\frac{(m+t_0)^{-a+1}}{t_0^{-a+1}} - 1 \right) \\
&= 1 - \left(\frac{m+t_0}{t_0} \right)^{-a+1}
\end{aligned}$$

Alors,

$$P(X \leq m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = t_0 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{1-a}} - 1 \right)$$

En substituant a par $2t_0$, on obtient :

$$m = t_0 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{1-2t_0}} - 1 \right)$$

Quelle interprétation peut-on en faire ?

Pour $t_0 > 1/2$, $t_0 \mapsto t_0 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{1-2t_0}} - 1 \right)$ est croissante. Alors, plus le paramètre t_0 est grand, plus la médiane m est grande.

3. On cherche q tel que $P(X \geq q) = 0.25$, ce qui est équivalent à $P(X \leq q) = 0.75$. En reprenant les calculs de la partie précédente,

$$P(X \leq q) = 1 - \left(\frac{q + t_0}{t_0}\right)^{-a+1}.$$

Alors,

$$P(X \leq q) = 0.75 \Leftrightarrow q = t_0 \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{1-a}} - 1\right).$$

En substituant a par $2t_0$, on obtient :

$$q = t_0 \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{1-2to}} - 1\right).$$

On appelle q le troisième quartile.

4. Pour que l'espérance mathématique de X soit défini, il faut que $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ soit convergente. Alors,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} \frac{kt}{(t+t_0)^a} dt \\ &= k \int_{t_0}^{+\infty} \frac{u - t_0}{u^a} du \\ &= k \left(\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{u^{a-1}} du - t_0 \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{u^a} du\right) \end{aligned}$$

Pour que ces deux intégrales convergent, il faut $a-1 > 1$ et $a > 1$. Donc, l'espérance mathématique de X est défini si et seulement si $a > 2$.