

# Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Analyse 2 : correction

2023-2024

## Exercice 1

1. Nous allons montrer que l'image par  $f : x \rightarrow x - 1 + 2e^{-x}$  de l'intervalle  $I$  défini par  $I = [\ln 2, 2]$  est un intervalle inclus dans  $I$ .  $f$  est définie et dérivable sur  $I$  :

$$f'(x) = 1 - 2e^{-x}.$$

$f'(x)$  est nulle pour  $x = \ln 2$  et strictement positive pour  $\ln 2 < x \leq 2$ , donc  $f$  est une bijection strictement croissante de  $I$  sur :  $[f(\ln 2), f(2)] = [\ln 2, 1 + \frac{2}{e^2}] \subset I$ .

On a montré que si  $u_n \in I$  alors  $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ . Comme  $u_0 \in I$ , par récurrence  $u_n \in I$  pour tout  $n$ .

2. L'examen des premières valeurs de la suite nous incite à penser que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 1 + \frac{2}{e^2} \approx 1.27, \quad u_2 \approx 0.83.$$

Comme  $f$  est strictement croissante dans l'intervalle  $I$ , si  $u_{n+1} \leq u_n$  alors

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq f(u_n) = u_{n+1}.$$

Comme  $u_1 \leq u_0$ , par récurrence  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante pour tout  $n$ .

3. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par  $\ln 2$ , elle converge donc vers un nombre  $l$  qui est solution de l'équation

$$l = f(l)$$

car  $f$  est continue sur  $I$ .

$$l = f(l) \Leftrightarrow l = l - 1 + 2e^{-l} \Leftrightarrow e^{-l} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^l = 2 \Leftrightarrow l = \ln 2.$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc vers le nombre  $l = \ln 2$ .

## Exercice 2

$(a_n)_{n \geq 0}$  est une suite numérique définie par la relation de récurrence :

$$a_0 = 1, \quad a_n = pa_{n-1}, \forall n \geq 1.$$

On a alors que

$$a_n = a_0 p^n = p^n.$$

On définit la série  $(S_k)_{k \geq 0}$  de terme général  $(a_n)_{n \geq 0}$  :

$$S_k = \sum_{i=0}^k a_i = \sum_{i=0}^k p^i.$$

Rappelons que la somme partielle d'une suite géométrique de raison  $p$  vaut :

$$\sum_{i=0}^k p^i = \frac{1-p^{k+1}}{1-p}.$$

On a alors si  $0 < p < 1$ ,

$$S_k = \sum_{i=0}^k p^i = \frac{1-p^{k+1}}{1-p} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p}.$$

Et si  $p \geq 1$ ,  $(S_k)$  diverge.

### Exercice 3

1. Notons  $u_n$  le terme général.

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

donc

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

et

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1.$$

La série converge.

2. La série est la somme de deux séries convergentes.

$$\sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

La série est donc convergente.

3. Le terme général  $\frac{n+\ln n}{n^2}$  est équivalent à  $\frac{1}{n}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . La série diverge car la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

4. Notons  $u_n$  le terme général.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n^2 + n + 1} = 2$$

D'après la règle de Cauchy, la série diverge.

5. La série est alternée et le terme  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  tend vers 0 et est décroissant. Le critère des séries alternées nous dit que la série est convergente.

### Exercice 4 (2020, une partie)

1. Conditionnellement au fait que  $n$  clients se soient présentés à la caisse,  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n, p$ , donc  $\mathbf{P}(X = k | Z = n) = 0$  si  $k > n$ , et si  $k \in \{0, \dots, n\}$  c'est  $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ .
2. (a) On reconnaît la série qui définit l'exponentielle:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n}{n!} \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^n}{n!} = e^{(1-p)\lambda}.$$

(b) La formule des probabilités totales et la réponse de la question 1 donnent :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = k|Z = n)\mathbf{P}(Z = n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} p^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-p)^{n-k} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-k} \lambda^k}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda^k p^k \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^{n-k}}{(n-k)!}.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables  $i = n - k$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = k) &= e^{-\lambda} \lambda^k p^k \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-p)^i \lambda^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{(1-p)\lambda} \\
&= e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

(c)  $X$  suit donc une loi de Poisson de paramètre  $\lambda p$ , et le même raisonnement montre que  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda(1-p)$ .

3. Pour montrer que  $X, Y$  sont indépendantes, il faut montrer que  $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = j)$ . Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = i, Y = j) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = i, Y = j|Z = n) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{n \geq i, n \geq j} \binom{n}{i} p^i (1-p)^j \mathbf{1}_{i+j=n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}
\end{aligned}$$

en effet, si  $Z = n$  et  $X = i$  on a nécessairement  $Y = n - i$ . Finalement, la somme ci-dessus n'a qu'un seul terme, qui correspond à  $n = i + j$ , et donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = i, Y = j) &= \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \\
&= \frac{p^i (1-p)^{n-i}}{i! (n-i)!} e^{-\lambda} \lambda^n \\
&= \frac{p^i (1-p)^j}{i! j!} e^{-\lambda p - \lambda(1-p)} \lambda^i \lambda^j \\
&= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \\
&= \mathbf{P}(X = i) \mathbf{P}(Y = j)
\end{aligned}$$

d'où l'indépendance de  $X$  et  $Y$ .