ENS Paris-Saclay
Préparation à l'agrégation de sciences sociales

Analyse élémentaire

Pierre Montagnon, Simon Coste et Rafael Grompone von Gioi

L'objectif de ce cours d'analyse est triple :

- Premièrement, il fournit des compléments théoriques et pratiques sur les suites réelles et les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ainsi que sur le calcul intégral élémentaire. Ce faisant, il donne un cadre rigoureux au calcul infinitésimal et précise la notion de limite, ce qui permet d'étudier rigoureusement les notions de continuité et de dérivabilité des fonctions réelles. Les objets mathématiques dont traite la première partie du cours sont donc familiers à tout étudiant ayant suivi avec un minimum de sérieux un cours de mathématiques de lycée.
- La deuxième partie du cours porte sur les intégrales généralisées et les séries : les premières généralisent à des intervalles d'intégration infinis et à des fonctions de limite infinie en une borne la notion d'intégrale connue depuis la petite enfance, tandis que les secondes fournissent le cadre théorique nécessaire pour parler de sommes infinies de nombres réels. Ces deux objets de nature très proche donnent lieu à des problèmes de convergence dont on traitera quelques exemples incontournables.
- On présente enfin les rudiments de la théorie des fonctions à plusieurs variables, omniprésentes en économie et en finance. On se limite ici à des éléments très basiques d'optimisation sans contrainte pour des fonctions à deux variables, en guise d'introduction à un cours spécifique sur le calcul différentiel et l'optimisation sous contrainte qui interviendra plus tard dans l'année.

Pour toute question ou remarque sur ce cours, vous pouvez contacter les auteurs aux adresses suivantes :

pierre.montagnon@ens-cachan.fr
simon@scoste.fr
grompone@gmail.com

Table des matières

1 Compléments sur les suites et les fonctions.

Dans cette section, nous approfondissons les chapitres 3,4 et 5 du cours de rappels. Nous commençons par donner une définition rigoureuse de la notion de limite, omniprésente en analyse. Cette définition est rarement utilisée dans tout son formalisme lors des oraux de l'agrégation, mais bien la connaître est nécessaire pour éviter un certain nombre d'erreurs grossières.

1.1 La notion de limite

Au lycée, on ne définit pas à proprement parler la notion de limite : on suggère que la suite qui admet une limite l « tend vers l », c'est-à-dire s'en approche de plus en plus. La définition suivante est la traduction mathématique précise de ce fait.

Définition 1.1 (Limite réelle d'une suite réelle). — *Soit $l \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* admet l pour limite lorsque n tend vers $+\infty$ *ou que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* tend *ou* converge *vers l, si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas, on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \quad \textit{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

ou parfois, plus simplement, $\lim u_n = l$,

C'est à Karl Weierstrass (1815 - 1897) que l'on doit ce formalisme [1]. Il a permis d'enfin obtenir des formulations parfaitement claires et des démonstrations univoques de certains résultats importants, comme le théorème des valeurs intermédiaires.

De façon moins formelle, la définition précédente signifie que quelle que soit la distance $\varepsilon > 0$ que l'on se donne, *tous* les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à partir d'un certain rang* seront à une distance de l inférieure à ε. Pour n assez grand, les termes de la suite sont donc « piégés » entre les valeurs $l+\varepsilon$ et $l-\varepsilon$, comme dans la figure suivante :

FIGURE 1 – Weierstrass.

1. Parfois affectueusement appelé « formalisme des (ε, δ) ».

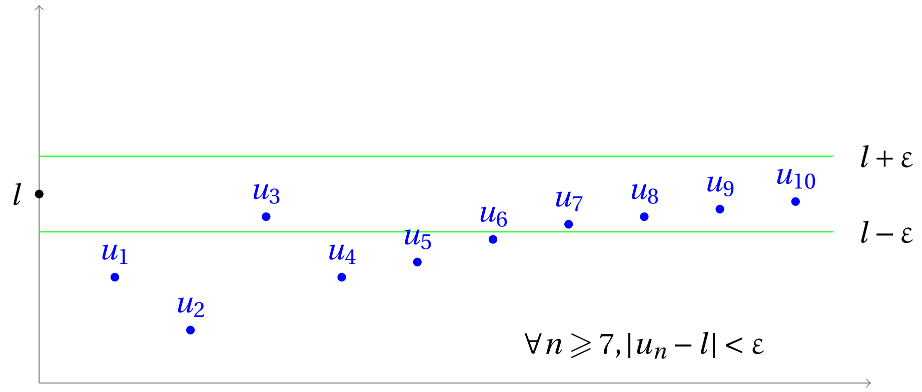


FIGURE 2 – Illustration de la convergence des suites.

EXEMPLE 1.2. La suite $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 1. En effet, si $\varepsilon > 0$ on a

$$\left|1+\frac{1}{n^2}-1\right| = \frac{1}{n^2}$$

qui est strictement inférieur à ε dès que n est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Il suffit donc de prendre un entier N supérieur à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ pour que la condition donnée dans la définition de la limite soit vérifiée.

EXEMPLE 1.3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est le carré d'un entier naturel} \\ \frac{1}{2^n} \text{ sinon} \end{cases}$$

ne converge pas vers 0 puisqu'elle prend une infinité de fois la valeur 1 (il suffit alors de prendre $\varepsilon = 1$ pour voir que la propriété de la définition n'est pas vérifiée avec $l = 0$).

L'exemple précédent montre pourquoi il est important de connaître la définition rigoureuse que l'on donne à la notion de limite : en effet, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérée « tend » à certains égards vers 0 dans la mesure où les valeurs qu'elle prend se rapprochent « pour la plupart » de 0 et où les rangs auxquels elle vaut 1 se raréfient, mais sa limite au sens mathématique n'est pas 0.

DÉFINITION 1.4 (Limite infinie d'une suite réelle)**. —** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* tend vers $+\infty$ *(resp. $-\infty$) si et seulement si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geq N, \quad u_n \geq A \quad (\textit{resp. } u_n \leq A)$$

On note alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \ (\textit{resp.} \ -\infty) \quad \textit{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \ (\textit{resp.} \ -\infty)$$

ou parfois simplement $\lim u_n = +\infty$ *(resp. $-\infty$).*

En d'autres termes, une suite réelle qui tend vers $+\infty$ est une suite telle que pour tout $A \in \mathbb{R}$ ses termes dépassent *tous* A à partir d'un certain rang.

EXEMPLE 1.5. La suite $(n^4-5)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$: en effet, pour tout $A \in \mathbb{R}$ on a $n^4-5 \geq A$ dès lors que $n \geq \sqrt[4]{|A|+5}$.

On calque la définition de la limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$ sur celles que nous venons de donner :

DÉFINITION 1.6 (Limite d'une fonction en $\pm\infty$). — *Soit $l \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle de type $[a,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit que f admet l pour limite lorsque x tend vers $+\infty$ (ou tend vers l en $+\infty$) si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists X \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \quad \forall x \geq X, \quad |f(x)-l| \leq \varepsilon$$

On note alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \textit{ou} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

2. *On dit que f admet $+\infty$ pour limite lorsque x tend vers $+\infty$ (ou tend vers $+\infty$ en $+\infty$) si et seulement si :*

$$\forall A > 0, \quad \exists X \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \quad \forall x \geq X, \quad f(x) \geqslant A$$

On note alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \textit{ou} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On définit la limite $-\infty$ en $+\infty$, et les limites en $-\infty$, en adaptant les définitions précédentes. Il est vivement conseillé de le faire en exercice !

EXEMPLE 1.7. La fonction $x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$: en effet, pour tout $A \in \mathbb{R}$ on a $x^3 \leq A$ dès lors que $x \leq \sqrt[3]{A}$.

DÉFINITION 1.8 (Limite d'une fonction en un point). — *Soient a, l deux réels, et soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant a.*

On dit que f admet l pour limite en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in I, \quad \Big(|x-a| \leqslant \delta\Big) \Rightarrow \Big(|f(x)-l| \leqslant \varepsilon\Big)$$

Dans ce cas, on note

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \textit{ou} \quad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$$

On dit que f admet $+\infty$ pour limite en a si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in I, \quad \Big(|x-a| \leqslant \delta\Big) \Rightarrow f(x) \geq A$$

Dans ce cas, on note

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \textit{ou} \quad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$$

La définition d'une limite égale à $-\infty$ en a est en tout point similaire, sauf que les A sont négatifs. Ces définitions fonctionnent exactement de la même manière que pour les suites : pour les comprendre, l'idéal est certainement de faire un dessin ! La figure suivante illustre la continuité d'une fonction f en un point x_0 : pour tout ε très petit, on peut trouver un δ tel que si x est « suffisamment proche de x_0 » (ce qui veut dire : à une distance inférieure à δ), alors $f(x)$ est « suffisamment proche de $f(x_0)$ » (ce qui veut dire : à une distance de $f(x_0)$ inférieure à ε).

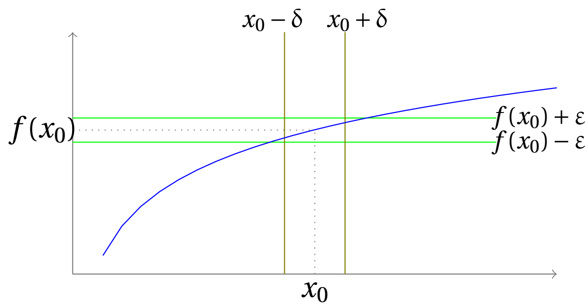


FIGURE 3 – Illustration de la définition de la continuité d'une fonction en un point.

REMARQUE 1.9. Un excellent exercice consiste à écrire la *négation* de toutes les définitions ci-dessus, ce qui invite à manipuler les quantificateurs. Par exemple, pour trouver la définition (ε, δ) de « f n'est pas continue au point a », il faut prendre la négation de définition de la continuité au point a. On rappelle que cette définition est :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad \Big(|x-a| \leqslant \delta\Big) \Rightarrow \Big(|f(x)-l| \leqslant \varepsilon\Big)$$

La négation de cette phrase se trouve en prenant la négation de chaque terme. On rappelle à cette occasion que la négation de ∀ est ∃ (et vice-versa), et que la négation de « A ⇒ B » est « A et non B ». On trouve[2] :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \text{tel que} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in \mathrm{I}, \quad \Big(|x-a| \leqslant \delta\Big) \text{ et } \Big(|f(x)-l| > \varepsilon\Big)$$

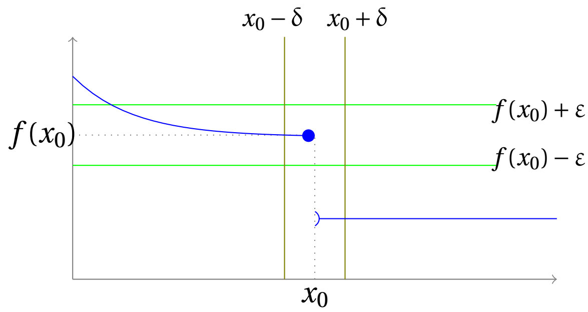


FIGURE 4 – Une fonction non continue en un point : pour le ε représenté dans la figure, il n'existe aucun δ tel que $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$, puisque pour tout $x \in]x_0, x_0+\delta[$, on a $f(x) < f(x_0)-\varepsilon$.

Les limites à droite et à gauche s'écrivent en fait de la même manière, à la seule différence que x doit être « d'un seul côté de a » :

2. Faites-le par vous mêmes!

DÉFINITION 1.10 (Limite à gauche ou à droite d'une fonction en un point). — *Soient $a, l \in \mathbb{R}$, $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f* admet l pour limite à gauche en a *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad \Big(a - \delta \leqslant x \leqslant a\Big) \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l \quad \textit{ou} \quad f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} l$$

Si $g :]a, a + \eta[\to \mathbb{R}$, on dit que g admet l pour limite à droite en a *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad \Big(a \leqslant x \leqslant a + \delta\Big) \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = l \quad \textit{ou} \quad g(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} l$$

On définit de manière analogue les notions de limites infinies à droite et à gauche d'un point.

La fonction représentée à la figure 4 est continue à gauche du point x_0, mais pas à droite de ce point. De manière générale, pour qu'une fonction soit continue en un point, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit continue à droite de ce point et à gauche de ce point.

Pour vous entraîner à manipuler ces définitions [3], pouvez essayer de démontrer à titre d'exercice les (nombreuses) propriétés des limites de suites et de fonctions données dans le polycopié de rappels.

1.2 Les relations de comparaison.

Note importante : cette section ne traite pas des développements limités et des formules de Taylor, qui feront l'objet d'un support de cours spécifique.

1.2.1 Équivalents.

Dans le cours de rappels, nous avons vu la définition de la limite d'une suite ou d'une fonction. Il existe pourtant des manières un peu plus raffinées d'étudier les suites et de comparer entre elles leurs limites : les relations d'équivalence, de négligeabilité et de domination. Elles rendent de grands services, car elles permettent généralement d'étudier une suite en se ramenant à une autre suite plus simples. Nous nous en servirons abondamment lors de l'étude des intégrales généralisées et des séries.

DÉFINITION 1.11 (Suites équivalentes). — *Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont équivalentes lorsque $n \to +\infty$, et on note $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ ou $u \sim v$, lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n \to 0$ et $u_n = (1 + \varepsilon_n) v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

3. Qui ne sont pas faciles à assimiler au début.

PROPOSITION 1.12. — *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n \neq 0$. Alors u et v sont équivalentes si et seulement si :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Exercice 1.13. La suite de terme général $u_n = n^2 + 2$ est-elle équivalente à la suite de terme général $v_n = n + 1$?

Exercice 1.14. Que dire d'une suite équivalente à la suite nulle ?

DÉFINITION 1.15 (Fonctions équivalentes en un point)**.** — *Soit x_0 un réel et soient f, g deux fonctions réelles définies sur un intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}$ contenant x_0. On dit que f et g sont équivalentes en x_0 lorsqu'il existe une fonction $\varepsilon :]a, b[\to \mathbb{R}$ de limite nulle en x_0 telle que $f = (1+\varepsilon)g$.*

DÉFINITION 1.16 (Fonctions équivalentes en $\pm\infty$)**.** — *Soient f, g deux fonctions réelles définies sur un intervalle $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a[$) avec $a \in \mathbb{R}$. On dit que f et g sont équivalentes en $+\infty$ (resp. $-\infty$) et on note $f \sim_{+\infty} g$ (resp. $f \sim_{-\infty} g$) lorsqu'il existe une fonction $\varepsilon :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ de limite nulle en $+\infty$ (resp. une fonction $\varepsilon :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$ de limite nulle en $-\infty$) telle que $f = (1+\varepsilon)g$.*

THÉORÈME 1.17. — *Dans le cadre des deux définitions précédentes, si g ne s'annule pas alors f et g sont équivalentes si et seulement si la limite de $\frac{f}{g}$ au point considéré (x_0 ou $+\infty$) est égale à 1.*

REMARQUE 1.18. Le terme « équivalent » provient tout simplement du fait que si deux fonctions sont équivalentes en un point, elles ont la même allure en ce point.

PROPOSITION 1.19. — *La relation d'équivalence de suites ou de fonctions en un point fini ou infini, que nous noterons simplement $\sim$ dans cette proposition, est symétrique (au sens où $x \sim y$ si et seulement si $y \sim x$), réflexive (au sens où l'on a toujours $x \sim x$) et transitive (au sens où si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $x \sim z$).*

PROPOSITION 1.20. — *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v' = (v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites réelles telles que $u \sim v$ et $u' \sim v'$. Alors $uu' \sim vv'$.*

Soient f_0, f_1, g_0 et g_1 quatre fonctions à valeurs réelles vérifiant $f_0 \sim_{x_0} g_0$ et $f_1 \sim_{x_0} g_1$ pour un certain $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors $f_0 f_1 \sim_{x_0} g_0 g_1$ (resp. $f_0 f_1 \sim_{+\infty} g_0 g_1$).

REMARQUE 1.21. De manière générale, on peut multiplier des équivalents de suites ou de fonctions comme le montre la proposition précédente, mais on ne peut pas les additionner. Pour s'en souvenir, on retiendra l'exemple simple suivant : comme $\frac{n}{n+1} \to 1$, on a $n \sim n+1$ et évidemment $-n \sim -n$. Pourtant, $n - n = 0$ n'est certainement pas équivalent à $n + 1 - n = 1$. Cet exemple montre par ailleurs que le fait que $u \sim v$ n'implique pas nécessairement que $u - v$ tende vers 0 !

PROPOSITION 1.22. — *Si deux suites sont équivalentes et si l'une d'elle possède une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors l'autre possède la même limite. Si deux deux fonctions sont équivalentes en un point $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et si l'une d'elles possède une limite en ce point, alors l'autre possède la même limite en x.*

Le théorème suivant permet de trouver facilement beaucoup d'équivalents, en particulier ceux qui mettent en jeu des fonctions usuelles.

THÉORÈME 1.23 (Équivalents des fonctions dérivables)**. —** *Soit f une fonction dérivable en un point a. Si $f'(a) \neq 0$, alors lorsque $x \to a$ on a l'équivalent suivant :*

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a)$$

On énonce ensuite plusieurs équivalents usuels dont la plupart découlent du théorème précédent. Il faut impérativement les connaître sur le bout des doigts et savoir les manipuler.

THÉORÈME 1.24. — *Lorsque $u \to 0$, on a les équivalents suivants :*
- $e^u - 1 \sim u$
- $\ln(1+u) \sim u$
- *si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *alors* $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Exercice 1.25. Démontrer le troisième point du théorème précédent.

1.2.2 Négligeabilité et domination.

DÉFINITION 1.26 (Négligeabilité d'une suite devant une autre)**. —** *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que u_n est* négligeable devant v_n lorsque $n \to +\infty$ *si et seulement s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

PROPOSITION 1.27. — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, où $v_n \neq 0$ pour tout n. Alors u_n est négligeable devant v_n lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

EXEMPLE 1.28. $5n^8 - 3n^2 + (-1)^n$ est négligeable devant n^9 lorsque n tend vers $+\infty$.

DÉFINITION 1.29 (Négligeabilité des fonctions)**. —** *Soient f, g deux fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle $]a,b[$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$). On dit que f est négligeable devant g en un point $x_0 \in [a,b]$ si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon :]a,b[\to \mathbb{R}$ de limite nulle en x_0 telle que : $f = \varepsilon g$.*

De même, si f et g sont définies sur un intervalle de la forme $]a,+\infty[$ (resp. $]-\infty,a[$) avec $a \in \mathbb{R}$, on dit que f est négligeable devant g en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ de limite nulle en $+\infty$ (resp. $\varepsilon :]-\infty,a[\to \mathbb{R}$ de limite nulle en $-\infty$) telle que $f = \varepsilon g$.

PROPOSITION 1.30. — *Soient f, g deux fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle $]a,b[$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$) et telles que g ne s'annule pas sur $]a,b[$. Alors f est négligeable devant g en un point $x_0 \in [a,b]$ si et seulement si :*

$$\lim_{t\to x_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$$

De même, si f et g sont définies sur un intervalle de la forme $]a,+\infty[$, (resp. $]-\infty,a[$) avec $a \in \mathbb{R}$, alors f est négligeable devant g en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=0 \quad \textit{(resp. } \lim_{t\to-\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=0\textit{)}$$

DÉFINITION 1.31 (Domination des suites)**. —** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que u_n est* dominé par *v_n lorsque $n \to +\infty$ (ou simplement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) lorsqu'il existe une constante $\mathrm{C} \geqslant 0$ telle que pour tout n suffisamment grand, $|u_n| \leqslant \mathrm{C}|v_n|$.*

EXEMPLE 1.32. La suite $(3n^2+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque si $n \geq 4$ on a :

$$|3n^2+1| \leq |4n^2| \leq 4|n^2|$$

La constante C de la définition est ici égale à 4.

Exercice 1.33. Montrer que deux suites réelles équivalentes se dominent mutuellement, puis montrer que la réciproque est fausse.

DÉFINITION 1.34 (Domination des fonctions)**. —** *Soient f,g deux fonctions définies sur un intervalle $]a,b[$. On dit que f est dominée par g en un point $x_0 \in]a,b[$ s'il existe une constante $\mathrm{C} \geqslant 0$ telle que pour tout x suffisamment proche de x_0, on ait $|f(x)| \leqslant \mathrm{C}|g(x)|$.*

De même, si f et g sont définies sur un intervalle de la forme $]a,+\infty[$ (resp. $]-\infty,a[$) avec $a \in \mathbb{R}$, on dit que f est dominée par g en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si pour tout x suffisamment grand (resp. suffisamment petit), $|f(x)| \leqslant \mathrm{C}|g(x)|$.

NOTATION 1.35 (Notations de Landau)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. Si u_n est négligeable devant v_n lorsque n tend vers $+\infty$, on note :

   $$u_n = \mathrm{o}(v_n)$$

   On dit que « u_n est un petit o de v_n ».
2. Si u_n est dominé par v_n lorsque n tend vers $+\infty$, on note :

   $$u_n = \mathrm{O}(v_n)$$

   On dit que « u_n est un grand O de v_n ».
3. Dans le cas de la négligeabilité et de la domination de fonctions à valeurs réelles en un point de $\mathbb{R}$ ou en $\pm\infty$, on adopte de la même façon les notations $f = \mathrm{o}_{x_0}(g)$ et $f = \mathrm{O}_{x_0}(g)$.

REMARQUE 1.36. Les notations de Landau sont trompeuses. Par exemple, la notation $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ peut laisser croire qu'il existe une fonction o telle que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, ce qui n'est pas le cas. Pire encore, on voit en écrivant $n = \mathrm{o}(n^2)$ et $\sqrt{n} = \mathrm{o}(n^2)$ que la relation d'« égalité » que nous écrivons n'est pas transitive puisque l'on ne peut pas écrire $n = \sqrt{n}$ en général! En réalité, il serait plus rigoureux de dire que la notation $o(v_n)$ (resp. $\mathrm{O}(v_n)$) désigne un *ensemble de suites* — l'ensemble de toutes les suites à valeurs réelles qui sont négligeables devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. dominées par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) — et d'écrire non plus $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ ou $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ mais plutôt :

$$u_n \in \mathrm{o}(v_n) \qquad u_n \in \mathrm{O}(v_n)$$

et de même pour les fonctions :

$$f \in \mathrm{o}_{x_0}(g)$$

Néanmoins, ces notations, bien qu'indiscutablement plus rigoureuses, sont loin d'être standard; aussi trouve-t-on dans la quasi-totalité des manuels et des cours les notations $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $f = \mathrm{o}_{x_0}(g)$.

Exemple 1.37 (Résultats classiques de croissance comparée)**.** Si f est une fonction polynomiale ou une fonction puissance (non nécessairement entière), alors $f = \mathrm{o}_\infty(\exp)$. Si f est une fonction polynomiale non constante, alors $\ln = \mathrm{o}_\infty(f)$.

La proposition suivante, d'usage très fréquent, est une conséquence du théorème des gendarmes. Un résultat analogue existe bien entendu pour les fonctions : sa formulation précise est laissée au lecteur.

Proposition 1.38. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

1. *Si $u_n = o(v_n)$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite réelle, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*
2. *Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*
3. *Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et si $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Exemple 1.39. On sait que $\frac{1}{n}(-1)^n$ est dominé par $\frac{1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$ (puisque $|(-1)^n| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où l'on déduit que :

$$\frac{1}{n}(-1)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On donne enfin le lien entre les différentes relations de comparaison définies dans cette section; une fois encore, un résultat similaire est valable pour les fonctions à valeurs réelles (écrivez-le!).

Proposition 1.40. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

1. *Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.*
2. *$u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$, ce qui équivaut à $u_n - v_n = o(u_n)$.*

1.3 Les grands théorèmes de l'analyse réelle.

Nous allons énoncer les théorèmes les plus importants du cours d'analyse des fonctions réelles : le théorème des valeurs intermédiaires (déjà vu dans le cours de rappels), le théorème sur l'image continue d'un segment (idem), le théorème de Rolle, l'égalité des accroissements finis et l'inégalité des accroissements finis.

On considère dans toute cette section un intervalle $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1.3.1 Fonctions continues.

PROPOSITION 1.41. — *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et soit $c \in [a,b]$. Alors, f est continue en c si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $[a,b]$ convergeant vers c la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(c)$.*

THÉORÈME 1.42 (Théorème des valeurs intermédiaires)**. —** *L'image d'un intervalle (non nécessairement borné) par une fonction continue est un intervalle.*

COROLLAIRE 1. — *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Alors, pour tout $y \in \big[f(a), f(b)\big]$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.*

Exercice 1.43. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)$$

Illustrer ce résultat par un dessin.

THÉORÈME 1.44 (Image continue d'un segment)**. —** *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors, f possède un maximum et un minimum sur $[a,b]$ et elle atteint ses bornes. Autrement dit, il existe x_1 et x_2 dans $[a,b]$ tels que*

$$f(x_1) = \min_{t\in[a,b]} f(t) \qquad et \qquad f(x_2) = \max_{t\in[a,b]} f(t)$$

Exercice 1.45. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, telle que $[a,b] \subset f([a,b])$. Montrez qu'il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $f(t_0) = t_0$.

On termine cette section en présentant un concept fort utile en calcul différentiel : les fonctions lipschitziennes.

DÉFINITION 1.46. — *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $k \geqslant 0$ un réel. On dit que f est k-lipschitzienne si pour tout $x, y \in [a,b]$, on a*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y| \tag{1}$$

La plus petite constante k telle que (1) *est vérifiée est appelée* constante de Lipschitz *de f sur $[a,b]$. f est dite* lipschitzienne *s'il existe $k \geq 0$ tel que f soit k-lipschitzienne.*

REMARQUE 1.47. Attention, une fonction k-lipschitzienne est aussi k'-lipschitzienne pour tout $k' \geqslant k$. On peut tout de même prouver que la constante de Lipschitz est unique.

EXEMPLE 1.48. Les fonctions à valeurs réelles constantes sur un intervalle y sont 0-lipschitziennes. La fonction $x \mapsto 2x$ est 2-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^2$ est 2-lipschitzienne sur $[0,1]$, puisque $|x^2 - y^2| = |x-y|\cdot|x+y| \leqslant 2|x-y|$ si x et y sont dans $[0,1]$; toutefois, elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}$ (exercice : démontrez-le !).

On remarquera également que la constante k ou la constante de Lipschitz est relative à un domaine de définition : par exemple, la fonction x^2 étudiée dans l'exemple précédent est 2-lipschitzienne sur $[0,1]$, mais elle est au mieux 8-lipschitzienne sur $[0,4]$.

PROPOSITION 1.49. — *Les fonctions lipschitziennes sur un intervalle y sont continues.*

1.3.2 Fonctions dérivables.

THÉORÈME 1.50 (Rolle)**.** — *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Tout ceci est très intuitif : si $f(a) = f(b)$, il est clair graphiquement qu'il existe bien un point de $]a, b[$ en lequel la tangente à la courbe représentative de f est horizontale.

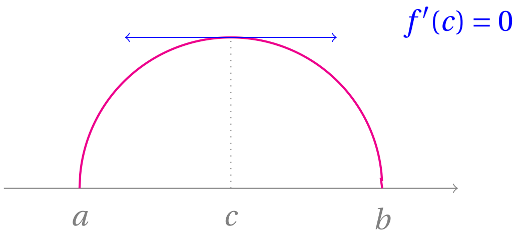


FIGURE 5 – Le théorème de Rolle.

REMARQUE 1.51. Pour bien retenir les hypothèses du théorème de Rolle, on peut mémoriser la figure 5, qui représente une fonction continue sur $[a, b]$ mais dérivable seulement sur $]a, b[$: la tangente en a et en b est verticale !

Exercice 1.52. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c > a$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 1.53. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue n fois dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f'(a) = f^{(2)}(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 1.54. Soient $n > 0$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et n fois dérivable sur $]a, b[$. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des nombres réels tels que :

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

On suppose que $f(a_0) = f(a_1) = \ldots = f(a_n)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

THÉORÈME 1.55 (Théorème des accroissements finis)**.** — *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

La figure suivante illustre ce résultat.

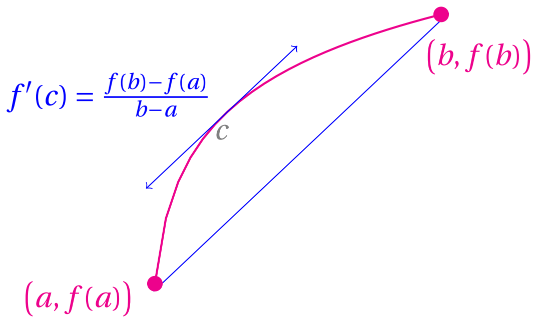


FIGURE 6 – L'égalité des accroissements finis : la pente de la tangente en c est égale à la pente de la corde qui relie les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

THÉORÈME 1.56 (Inégalité des accroissements finis)**.** — *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose que la fonction dérivée f' est minorée par un réel m et majorée par un réel M sur $]a, b[$. Alors,*

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

Exercice 1.57. Montrer l'inégalité suivante et l'illustrer :

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq \ln(1+x) \leq x$$

Exercice 1.58. En utilisant le théorème des accroissements finis et la fonction ln, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Le théorème suivant est d'utilisation fréquente. C'est une utilisation intéressante de l'inégalité des accroissements finis.

THÉORÈME 1.59. — *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe M tel que pour tout $t \in]a, b[$, $|f'(t)| \leqslant \mathrm{M}$. Alors, f est M-lipschitzienne.*

COROLLAIRE 2. — *Toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle fermé borné est lipschitzienne.*

1.4 Suites récurrentes.

Une suite récurrente est une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. L'étude de telles suites est un domaine très riche de l'analyse [4], et c'est une source inépuisable de problèmes de concours. En général, de telles suites s'étudient grâce aux propriétés de la fonction f, et tout y passe : continuité, monotonie, dérivabilité...

4. C'est même un domaine encore très actif de la recherche mathématique : les *systèmes dynamiques*. Le Brésilien et Français Arthur Avila a reçu en 2014 la médaille Fields pour ses contributions au domaine. Les curieux peuvent lire l'article `http://images.math.cnrs.fr/Artur-Avila-medaille-Fields-2014`, qui présente de façon très accessible ses travaux.

DÉFINITION 1.60 (Suite récurrente). — *Soit f une fonction réelle. Une suite récurrente est une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence de type $u_{n+1} = f(u_n)$.*

REMARQUE 1.61. Cette définition suppose que la suite est bien définie, c'est-à-dire que pour tout n, le réel u_n appartient bien au domaine de définition de f. Ce n'est en général pas une évidence, et dans les exercices il faut souvent montrer qu'une telle suite est bien définie !

EXEMPLE 1.62. On considère le cas où $u_0 = a$ (avec $a \in]0,1[$) et $f = \ln$. On ne peut pas définir de suite récurrente par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$: en effet, si une telle suite existait, on devrait avoir $u_1 = \ln(u_0)$. Comme $u_0 \in]0,1[$, on aurait $u_1 < 0$ et on ne pourrait donc pas définir u_2 par la relation $u_2 = \ln(u_1)$, puisque le logarithme n'est pas défini sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 1.63. Existe-t-il des choix de u_0 tels que la suite étudiée dans l'exemple précédent est bien définie ?

En général, on réussit facilement à montrer que la suite récurrente est bien définie en vérifiant que $f(\mathrm{D}) \subset \mathrm{D}$, où D est le domaine de définition de f. Par exemple, si $\mathrm{D} = \mathbb{R}$, ou encore si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est la fonction racine carrée, la suite est automatiquement bien définie.

MÉTHODE 1.64. Pour représenter une suite récurrente, il faut représenter le graphe de la fonction f et l'axe $y = x$. Ensuite, il faut suivre les étapes suivantes :

- On place sur le graphe le point de coordonnés $(u_0, 0)$.
- On regarde l'image de u_0 par f : cette image se lit sur l'axe des ordonnées. Il s'agit de $u_1 = f(u_0)$.
- Pour reporter u_1 sur l'axe des abscisses, on se sert de l'axe $y = x$ comme indiqué sur la figure.
- On recommence avec u_1 : on lit u_2 sur l'axe des ordonnées, puis on le reporte sur l'axe des abscisses.

Cette méthode permet de visualiser facilement les points fixes de f : il s'agit des points d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe $x = y$.

Voici l'illustration de cette méthode dans le cas où $f(x) = \sqrt{2+x}$. Nous vous invitons à vérifier que la suite récurrente définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est bien définie.

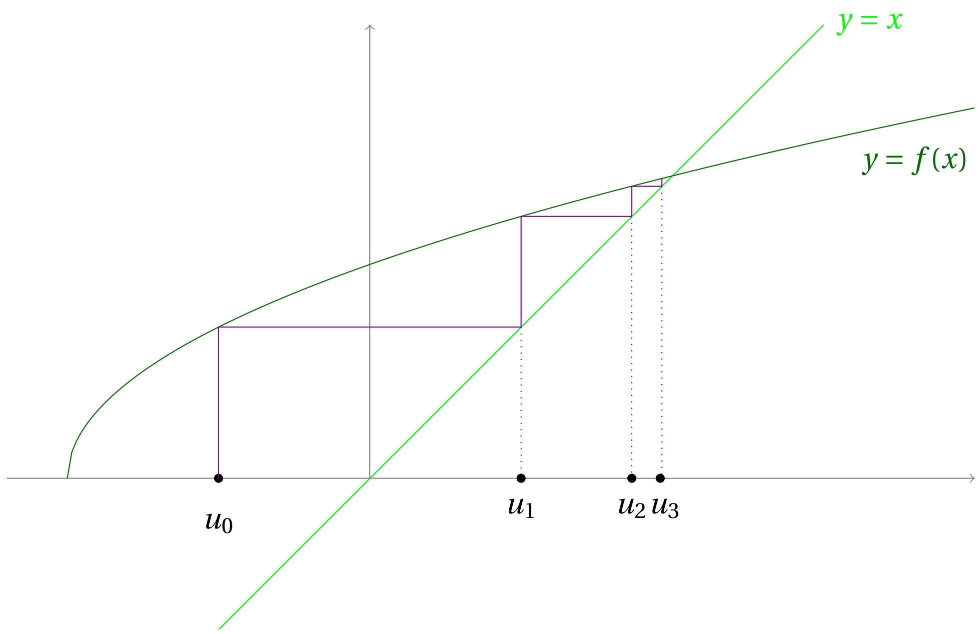


FIGURE 7 – Représentation d'une suite récurrente.

Dans toute la suite, on suppose que le domaine de définition de f est l'intervalle fermé $[a, b]$ stable par f et contenant u_0, ce qui implique notamment que la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

THÉORÈME 1.65. — *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite $l \in [a, b]$ et si f est continue en l, alors l est nécessairement un point fixe de f, c'est-à-dire que $f(l) = l$.*

On insiste *très lourdement* sur l'hypothèse « f est continue en l ». Sans cette hypothèse, la proposition précédente devient fausse.

Exercice 1.66. Montrer qu'une suite réelle vérifiant $u_{n+1} = u_n^2 + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est nécessairement divergente.

EXEMPLE 1.67. La fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

n'est pas continue en 0, et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = (u_0)^{2^n}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc 0 pour limite, mais 0 n'est pas un point fixe de f !

Le théorème suivant, qui découle directement de l'inégalité des accroissements finis (exercice : démontrez-le !) est très pratique pour montrer qu'une suite récurrente converge sans même étudier son sens de variation et fournit de plus une estimation de sa vitesse de convergence :

THÉORÈME 1.68. — *Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et s'il existe $\mathrm{K} \in \mathbb{R}+$ tel que $|f'(x)| \leqslant \mathrm{K} \leqslant 1$ pour tout $x \in]a,b[$, alors si f admet un point fixe l dans $[a,b]$ ce point fixe est unique et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$|u_n - l| \leq \mathrm{K}^n |u_0 - l|$$

En particulier :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

EXEMPLE 1.69. Si $g : x \mapsto 1 - \frac{x^3}{4}$, $[a,b] = [0,1]$ alors il existe un unique point fixe l de g dans $[0,1]$ et

$$|u_n - l| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

De même, si $h : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ et $u_0 \in [1,2]$ alors il existe un unique point fixe l de g dans $[0,1]$ et

$$|u_n - l| \leqslant e^{-\frac{n}{2}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

THÉORÈME 1.70. — *Si f est croissante, alors la suite (u_n) est monotone.*

Dans le cadre du théorème précédent, il suffit donc de montrer que la suite est bornée pour montrer qu'elle converge.

EXEMPLE 1.71. La suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ est bien une suite réelle récurrente — ici $f(x) = \sqrt{1+x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on vérifie d'ailleurs que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans l'ensemble de définition $[-1,+\infty[$ de f. La fonction f est croissante, donc la suite est monotone. On remarque que $u_0 = 0 > u_1$, donc la suite est croissante. Si cette suite converge, cela ne peut être que vers un point fixe de f, c'est-à-dire un réel x tel que $x = \sqrt{1+x}$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u_1 = 0$, pour tout $n \geq 1$ on a $u_n \geq 0$, donc x doit être positif : la seule solution possible est $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant x$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée : elle est convergente, et elle converge vers x.

THÉORÈME 1.72. — *Si f est décroissante, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, et leur sens de variation est opposé.*

EXEMPLE 1.73. La suite récurrente définie par $u_0 \in [0,2]$ et $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (dont on vérifie qu'elle est bien définie) rentre dans le cadre du théorème précédent. On vérifie par récurrence que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées ; étant de plus monotones, elles convergent.

Ce sont des suites récurrentes associées à la fonction continue $f \circ f$ (en effet, on a par exemple $u_{2(n+1)} = f(f(u_{2n})) = f \circ f(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), donc elles convergent vers un point fixe de $f \circ f$.

REMARQUE 1.74. Les deux cas de figure peuvent se produire, c'est-à-dire que si f est décroissante, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ peut être croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante ou l'inverse. On tranche entre ces différents cas en comparant u_0 et u_2 ou en comparant u_1 et u_3.

1.5 Suites arithmético-géométriques

Les suites arithmétiques et géométriques sont des exemples basiques de suites récurrentes (la fonction f étant respectivement une fonction affine de coefficient dominant 1 ou une fonction linéaire réelle). Dans le cas général d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, on obtient une *suite arithmético-géométrique*.

DÉFINITION 1.75 (Suite arithmético-géométrique)**. —** *Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique (de raison géométrique a et de raison arithmétique b) si et seulement si elle vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

REMARQUE 1.76. Dans le cadre de la définition précédente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement si $a = 1$ et géométrique si et seulement si $b = 0$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $a \neq 1$ et $b \neq 0$. Il existe alors un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que $ac + b = c$ (exercice : démontrez-le!), et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - c = au_n - b - (ac - b) = a(u_n - c)$$

La suite $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison a et de premier terme $u_0 - c$, ce qui permet de trouver l'expression explicite de $u_n - c$ et donc celle de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On aboutit au résultat suivant :

PROPOSITION 1.77. — *Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$ et si $c \in \mathbb{R}$ est l'unique solution de l'équation $ac + b = c$, alors on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = c + a^n(u_0 - c)$$

Exercice 1.78. Donner l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -3u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.6 Suites récurrentes linéaires doubles

Le programme de l'agrégation stipule qu'aucune connaissance théorique sur les suites linéaires doubles n'est attendue, mais qu'il est possible que certains exercices fassent intervenir de telles suites. Pour ne pas être surpris le jour de l'oral, on pourra considérer avec profit, mais sans s'y attarder outre mesure, les résultats de cette section.

DÉFINITION 1.79 (Suites récurrentes linéaires doubles)**. —** *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente linéaire double s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta \neq 0$ tels que l'on ait :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n \tag{2}$$

DÉFINITION 1.80 (Équation caractéristique d'une suite récurrente linéaire double)**. —** *On appelle équation caractéristique d'une suite récurrente linéaire double définie par la relation (2) l'équation*

$$x^2 = \alpha x + \beta \tag{3}$$

c'est-à-dire $x^2 - \alpha x - \beta = 0$.

Le théorème suivant est d'usage très fréquent dans les problèmes de probabilités :

THÉORÈME 1.81. — *Soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Pour tout couple* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *il existe une unique suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant les équations* $u_0 = a$ *et* $u_1 = b$ *ainsi que la relation (2).*

L'ensemble des suites récurrentes linéaires doubles vérifiant la relation de récurrence (2) est un sous-espace vectoriel de dimension 2 *de l'espace vectoriel des suites réelles.*

Une base de ce sous-espace vectoriel est donnée :
- *si l'équation caractéristique (3) admet deux solutions réelles distinctes* x_1 *et* x_2*, par la famille des deux suites géométriques* $\left(x_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(x_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
- *si l'équation caractéristique (3) n'admet qu'une solution réelle* x_1*, par la famille des deux suites* $\left(x_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(nx_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

REMARQUE 1.82. Le cas où l'équation caractéristique n'admet pas de solution réelle n'est pas traité ici. Dans l'éventualité — improbable — où un sujet d'oral viendrait à traiter de ce point précis, il proposerait très certainement deux suites explicites dont il demanderait de vérifier qu'elles forment bien une base de l'espace vectoriel des suites récurrentes linéaires doubles, ce qui est toujours très facile puisqu'il suffirait alors de vérifier que les deux suites sont solution de l'équation (2) et ne sont pas colinéaires puis de conclure par un argument de dimension.

En pratique, l'étude d'une suite récurrente double se fait de la manière suivante :
- On écrit l'équation caractéristique (3) dont on cherche les solutions réelles.
- On explicite deux vecteurs de la base de l'espace des suites récurrentes doubles vérifiant (2) grâce au théorème 1.81.
- On écrit la suite étudiée comme une combinaison linéaire de ces deux vecteurs (qui sont, rappelons-le, deux suites !).
- On détermine les deux coefficients de ladite combinaison linéaire à l'aide des conditions initiales données par l'énoncé ; généralement, il s'agit des deux premiers termes de la suite.

L'exemple suivant est sans doute l'illustration la plus connue de la notion de suite récurrente double.

EXEMPLE 1.83. La suite de Fibonacci est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

L'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ admet pour solutions $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in R$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ permettent alors d'écrire le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & 0 \\ \lambda\frac{1-\sqrt{5}}{2} & + & \mu\frac{1+\sqrt{5}}{2} & = & 1 \end{array}\right.$$

d'où on déduit $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On en tire une expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

2 Intégrale d'une fonction sur un segment.

On approfondit ici les résultats sur les intégrales donnés dans les rappels de cours. Avant de vous lancer dans la lecture de ce chapitre, il vous est conseillé de bien vérifier que vous connaissez toutes les définitions et les propositions de base (linéarité de l'intégrale, relation de Chasles, intégration par parties, etc.), même si nous en reverrons certaines.

2.1 Retour sur la définition de l'intégrale sur un segment.

Il existe des théories très générales de l'intégration, permettant de définir l'intégrale de nombreuses classes de fonctions. Cependant, les intégrales que nous étudions dans ce cours ne sont définies que pour certaines fonctions très régulières ; le cadre le plus général à notre portée est celui des fonctions continues par morceaux.

Dans toute cette section, on se donne un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ (avec $a<b$).

2.1.1 Fonctions continues par morceaux.

DÉFINITION 2.1 (Fonction continue par morceaux)**. —** *Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est dite* continue par morceaux *sur $[a,b]$ si et seulement s'il existe un nombre fini d'éléments $x_0,\dots,x_n$ de $[a,b]$, avec $x_0=a$ et $x_n=b$, tels que pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, la restriction de f à $]x_{i-1},x_i[$ est continue et admette des limites finies en x_{i-1} et x_i. Une telle famille $\{x_1,\dots,x_n\}$ est alors appelée* subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.

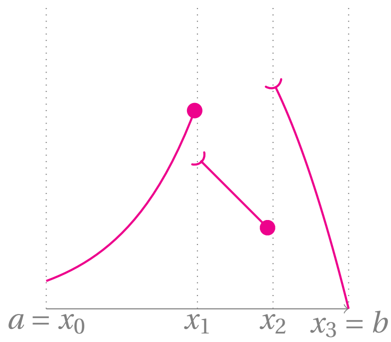


FIGURE 8 – Une fonction continue par morceaux et la subdivision associée.

EXEMPLE 2.2. La restriction à $[0,5]$ de la fonction partie entière est continue par morceaux.

REMARQUE 2.3. Il est important de noter que la définition d'une fonction continue par morceaux impose à la fonction d'admettre une limite finie à gauche et à droite de chaque point de la subdivision ! La fonction f définie par :

$$f:\begin{cases}[-1,1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\begin{cases}x \text{ si } x\leq 0\\ \frac{1}{x} \text{ si } x>0\end{cases}\end{cases}$$

n'est donc pas continue par morceaux puisqu'elle n'admet pas de limite finie à droite en 0.

Proposition 2.4. — *Une fonction continue par morceaux sur un intervalle borné est bornée.*

On rappelle que l'intégrale d'une fonction continue est définie à l'aide de ses primitives (voir le cours de rappels). Pour définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on utilise la relation de Chasles pour se ramener à plusieurs intégrales de fonctions continues.

Définition 2.5 (Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux)**.** — *Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ et si $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, alors*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t$$

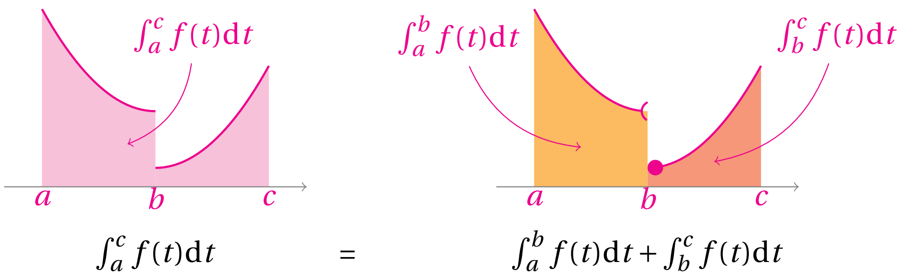


FIGURE 9 – Intégrale des fonctions continues par morceaux.

Dans les exercices, si l'on vous demande de vérifier qu'une fonction définie sur un segment $[a,b]$ admet une intégrale, la justification « elle y est continue par morceaux » est généralement suffisante.

Pour calculer l'intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment, il suffit par définition de considérer une subdivision adaptée à f pour se ramener à des intégrales de fonctions continues. Illustrons ce principe sur deux exemples.

Exemple 2.6.

$$\int_0^2 \left(x^2\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + 2x^3\mathbf{1}_{[1,2]}(x)\right)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 2x^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{2}\right]_1^2 = \frac{47}{6}$$

Exercice 2.7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Calculer $\int_1^{11,5} \lfloor x \rfloor \mathrm{d}x$.

2.1.2 Propriétés liées à la croissance de l'intégrale.

Théorème 2.8 (Croissance de l'intégrale)**.** — *Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles continues par morceaux sur $[a,b]$. Si $f \leqslant g$, alors*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction positive est toujours positive.

PROPOSITION 2.9. — *Si une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et positive est strictement positive en un point, alors son intégrale sur $[a,b]$ est strictement positive.*

COROLLAIRE 3. — *Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Alors, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ si et seulement si f est nulle.*

THÉORÈME 2.10 (Inégalité triangulaire). — *Soit f une fonction à valeurs réelles continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors, la fonction $|f|$ est encore continue par morceaux et*

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$

THÉORÈME 2.11. — *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a,b]$. Alors,*

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\right) \times \int_a^b |g(t)|\mathrm{d}t$$

Exercice 2.12. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a) \times \left(\sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\right)$$

2.2 Méthodes de calcul des intégrales.

2.2.1 L'intégration par parties.

Le théorème suivant donne l'une des méthodes les plus importantes pour calculer des intégrales : l'intégration par parties (IPP). C'est une conséquence très simple de la formule

$$(uv)' = u'v + uv'$$

THÉORÈME 2.13 (Intégration par parties). — *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors on a :*

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

EXEMPLE 2.14. On cherche à calculer $\mathrm{I} = \int_0^1 te^t\mathrm{d}t$. Posons $u(t) = t$ et $v(t) = e^t$. On a donc $\mathrm{I} = \int_0^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t$. Grâce à la formule d'intégration par parties, on trouve alors :

$$\mathrm{I} = \Big[t \times e^t\Big]_0^1 + \int_0^1 1\cdot e^t\mathrm{d}t = e^1 + e^1 - e^0 = 2e - 2$$

REMARQUE 2.15. Lorsque l'on souhaite faire une intégration par parties, il faut bien sûr choisir habilement u et v : en général, on cherchera à prendre pour v une fonction à dériver comme une fonctions polynomiale, ou encore exp ou ln (avec une préférence marquée pour les fonctions polynomiales puisque l'on réduit leur degré à chaque itération du procédé) et pour u' une fonction facile à primitiver, c'est-à-dire qui sont les dérivées de fonctions classiques (par exemples les fonctions polynomiales ou exponentielles, mais pas la fonction ln).

Exercice 2.16. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la quantité

$$\mathrm{I} = \int_1^e (2x+1)\ln(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 2.17. Trouver une primitive de la fonction ln.

Exercice 2.18. Calculer $\int_0^1 x^2 e^{-x}\mathrm{d}x$.

2.2.2 Le changement de variable.

Le changement de variable est l'une des techniques les plus riches de l'analyse réelle. Il est rare que l'on ne puisse pas calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variable… la véritable difficulté étant de trouver lequel !

THÉORÈME 2.19 (Changement de variable)**. —** *Soient* I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$*. Soit* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Soit* $\phi : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$*. Si* a *et* b *sont deux éléments de* I*, alors*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f\big(\phi(u)\big)\phi'(u)\mathrm{d}u$$

REMARQUE 2.20. On prendra le temps de déterminer soigneusement les bornes de l'intervalle d'intégration !

MÉTHODE 2.21. Il y a deux sens dans lesquels effectuer le changement de variable. Dans une intégrale de la forme $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\mathrm{d}t$, on peut poser $t = \phi(u)$, et dans ce cas on obtient la formule de changement de variable donnée par le théorème, c'est-à-dire :

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f\big(\phi(u)\big)\phi'(u)\mathrm{d}u$$

Voici un moyen mnémotechnique pour assimiler cette formule : la dérivée de ϕ au point u est $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \phi'(u)$. Même si cela n'a pas de sens [5], on écrit symboliquement $\mathrm{d}t = \phi'(u)\mathrm{d}u$ et tout se passe comme si on remplaçait le symbole $\mathrm{d}t$ par $\phi'(u)\mathrm{d}u$.

Cependant, il arrive fréquemment que l'on rencontre $\int_a^b f\big(\phi(t)\big)\mathrm{d}t$; dans ce cas, on peut avoir envie de poser $u = \phi(t)$ pour obtenir un intégrande qui contient des termes de la forme $f(u)$ et non plus de la forme $f\big(\phi(t)\big)$. Toutefois, ce changement de variable n'est possible que si ϕ admet une réciproque, ce qui est par exemple le cas si ϕ est strictement monotone sur $[a,b]$. Supposons que ce soit le cas, et notons ϕ^{-1} la réciproque de ϕ. Supposons de plus que ϕ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. La formule de

5. Il faut comprendre que lorsqu'on écrit $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \phi'(u)$, il s'agit d'une simple notation pour la dérivée, et qu'en aucun cas on ne peut considérer $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$ comme une véritable fraction.

changement de variables s'applique alors sur $[\phi(a),\phi(b)]$ (si ϕ est croissante sur $[a,b]$) ou sur $[\phi(b),\phi(a)]$ (si ϕ est décroissante sur $[a,b]$) à $f\circ\phi$ (dans le rôle anciennement joué par f) et à ϕ^{-1} (dans le rôle anciennement joué par ϕ), et en écrivant $t=\phi^{-1}(u)$ puis

$$\mathrm{d}t=\left(\phi^{-1}\right)'(u)\mathrm{d}u$$

on obtient

$$\int_a^b f\big(\phi(t)\big)\mathrm{d}t=\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\big(\phi^{-1}\big)'(u)\mathrm{d}u$$

Insistons une fois encore sur le fait qu'il ne suffit pas de remplacer $f\big(\phi(t)\big)$ par $f(u)$ et $\mathrm{d}t$ par $\big(\phi^{-1}\big)'(u)\mathrm{d}u$ dans l'intégrale mais qu'il faut aussi en changer les bornes ! Pour cela, il suffit de se rappeler de la relation qui lie u et t et de calculer les valeurs de u quand t vaut respectivement a et b.

EXEMPLE 2.22. Soient a et b deux réels avec $a<b$. On veut calculer $\mathrm{I}=\int_a^b \frac{1}{\kappa^2+t^2}\mathrm{d}t$, où $\kappa\in\mathbb{R}$ à l'aide d'une fonction (hors-programme) nommée arctan, qui est la primitive de $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$ valant 1/2 en 0. En factorisant par κ^2, on obtient pour tout $t\in[a,b]$:

$$\frac{1}{\kappa^2+t^2}=\frac{1}{\kappa^2}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\kappa}\right)^2}$$

On pose donc $u=\frac{t}{\kappa}$, soit $t=\kappa u$ (notre fonction ϕ est ici $t\mapsto\frac{t}{\kappa}$, qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$), et on écrit alors de manière informelle $\mathrm{d}t=\kappa\mathrm{d}u$. On change ensuite les bornes d'intégration : lorsque $t=a$, $u=a/\kappa$ et lorsque $t=b$, $u=b/\kappa$. Ainsi,

$$\mathrm{I}=\frac{1}{\kappa^2}\int_{\frac{b}{\kappa}}^{\frac{a}{\kappa}}\frac{1}{1+u^2}\kappa\mathrm{d}u$$

On trouve donc, après intégration à l'aide de la fonction arctan :

$$\mathrm{I}=\frac{1}{\kappa}\left(\arctan\left(\frac{b}{\kappa}\right)-\arctan\left(\frac{a}{\kappa}\right)\right)$$

3 Intégrales généralisées.

Dans le chapitre précédent, nous avons intégré des fonctions sur un intervalle fermé borné, par exemple $[0,1]$. Que se passe-t-il si l'on veut intégrer une fonction continue sur un intervalle de type $[0,\infty[$, ou si l'on veut intégrer sur l'intervalle $]0,1[$ une fonction qui admet une limite infinie en 0 ? Ce chapitre s'intéresse à ce nouveau type d'intégrales, nommées « intégrales généralisées » ou « intégrales impropres ».

À l'oral de l'agrégation, on se contente souvent de calculer des intégrales sur $]-\infty,+\infty[$ ou sur $[0,+\infty[$ sans vraiment se préoccuper de démontrer leur convergence *a priori*. On pourra donc se contenter de survoler le point de cours qui suit pour savoir comment réagir dans le cas – improbable – où une question portant spécifiquement sur la convergence d'une intégrale donnée (ou, ce qui revient au même, l'existence de l'espérance d'une certaine variable aléatoire à densité) devrait être posée.

3.0.1 La convergence des intégrales.

Dans toute la suite, on voudra intégrer une fonction sur un intervalle de la forme $[a,b[$, où a est un réel et soit $b=+\infty$, soit b est fini mais f n'est pas définie en b. Les cas du type $]a,b]$, qui ne seront jamais détaillés, se traiteront de la même manière.

DÉFINITION 3.1 (Intégrale généralisée). — *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$. Si la limite lorsque $x<b$ tend vers b de l'intégrale*

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

existe, on dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente. *On appellera alors* intégrale généralisée [6] de f sur $[a,b[$ *cette limite, et on la notera*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$, que l'on note encore $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ bien qu'elle ne corresponde cette fois à aucune valeur réelle, est divergente. *La convergence ou la divergence d'une intégrale généralisée est appelée sa* nature.

THÉORÈME 3.2 (Intégrales de Riemann). — *Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. L'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

est convergente si et seulement si $\alpha<1$, et l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

est convergente si et seulement si $\alpha>1$. Ces deux types d'intégrales sont appelés intégrales de Riemann.

6. On trouve parfois le terme « intégrale impropre » dans les sujets de concours.

Exercice 3.3. Démontrer l'exemple précédent et calculer les valeurs des intégrales dans les cas de convergence.

Intuitivement, une condition pour que l'intégrale d'une fonction $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ entre 1 et $+\infty$ converge est que f décroisse assez vite pour que son intégrale sur l'intervalle de longueur infinie $[1,+\infty[$ soit malgré tout finie. C'est la raison pour laquelle une condition pour que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge est que α soit assez grand.

MÉTHODE 3.4. Lorsqu'il est demandé d'étudier une intégrale, votre premier réflexe doit être de vérifier quelles sont les bornes l'intervalle d'intégration en lesquelles il y a un « problème » (c'est-à-dire que la borne est finie ou que l'intégrande n'y est pas défini).

Pour déterminer la convergence d'une intégrale donnée, il est possible de remplacer une borne qui « ne pose pas problème » par une autre au sens suivant :

PROPOSITION 3.5. — *Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement s'il existe $a' \in [a,b[$ tel que $\int_{a'}^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.*

Attention, il peut y avoir un problème en deux bornes, comme par exemple dans le cas des intégrales sur $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$. Dans ce cas, il faut signaler les deux difficultés et séparer leur étude :

DÉFINITION 3.6. — *Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue à valeurs réelles, on dit que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$* converge *si et seulement si $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent pour tout $c \in]a,b[$.*

On montre facilement en utilisant la relation de Chasles pour les intégrales de fonctions continues par morceaux sur un segment (faites-le !) qu'il suffit en fait que $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent pour une seule valeur de $x \in]a,b[$.

EXEMPLE 3.7. On se demande si l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente. Il y a deux problèmes : en 0 (l'intégrande n'y est pas défini) et en $+\infty$ (parce qu'il s'agit d'une borne infinie). On va donc séparer cette intégrale en deux grâce à la relation de Chasles. Il faut d'abord choisir un point de $]0,+\infty[$, par exemple 1. On dit alors que J converge si et seulement si $\int_0^1 \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ convergent. Nous nous sommes donc ramenés à deux intégrales généralisées qu'il faut étudier séparément. La deuxième intégrale est convergente en vertu du théorème précédent. En revanche, la première ne l'est pas, d'après le même théorème. J n'est donc pas convergente.

Notons enfin qu'il peut arriver qu'une intégrale soit « faussement impropre » et que la fonction que l'on intègre puisse être naturellement définie au point qui pose problème. C'est notamment le cas lorsque la fonction peut être « prolongée par continuité » en ce point.

Plus généralement, on a le résultat suivant, qui permet de traiter la majorité des cas où l'intégrale est faussement impropre :

PROPOSITION 3.8. — *Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue et bornée sur $]a,b[$. Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.*

REMARQUE 3.9. L'exemple de la fonction constante égale à 1 montre que la proposition 3.9 n'est plus vraie si $b = +\infty$.

3.0.2 Propriétés élémentaires des intégrales convergentes.

Il peut arriver que l'intégrale $\int_0^1 \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge sans que les intégrales $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ convergent. Voici un exemple un peu bête à garder en tête pour ne pas faire d'erreur : $\int_0^1 0\ \mathrm{d}t$ converge et $\int_0^1 0\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$... pourtant, il est évidemment interdit d'écrire :

$$\int_0^1 0\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

puisque $\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ ne désigne pas une quantité! Cette petite subtilité est à l'origine de nombreux pièges dans les exercices. La règle, très simple, est toujours la même :

Avant d'écrire des quantités mathématiques, vérifiez toujours qu'elles existent!

Dans le cas agréable où les intégrales convergent, on a une propriété de linéarité :

Proposition 3.10 (Linéarité de l'intégrale généralisée)**.** — *Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles continues par morceaux sur $[a,b[$. Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont toutes deux convergentes, alors pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ l'intégrale $\int_a^b(\alpha f+\beta g)(t)\mathrm{d}t$ est convergente, et*

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)(t)\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 3.11 (Relation de Chasles généralisée)**.** — *Si $f : [a,b[\to\mathbb{R}$ est continue par morceaux et si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors pour tout $c\in[a,b[$ les intégrales $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent et on a :*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 3.12. — *Soit f une fonction à valeurs réelles continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et telle que $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Si f possède une limite en $+\infty$, cette limite est nulle.*

Remarque 3.13. Attention : dans le théorème précédent, il est explicitement mentionné « si f possède une limite ». Cette condition n'est pas toujours vérifiée, et il existe des fonctions continues dont l'intégrale sur $[0,+\infty[$ converge qui n'ont pas de limite en $+\infty$. Par exemple, on définit une fonction $f : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1-2^k|k-x| \text{ s'il existe } k\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } x\in\left[k-\frac{1}{2^k}, k+\frac{1}{2^k}\right] \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

Le début du graphe de f est tracé à la figure 10. Cette fonction est bien définie et continue, et on vérifiera qu'elle admet une intégrale convergente sur $[0,+\infty[$. Pourtant, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on a $f(k)=1$, donc elle ne peut pas converger vers 0!

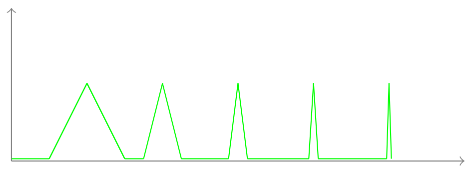


FIGURE 10 – La fonction f est continue et ne tend pas vers 0. Pourtant, son intégrale converge !

3.0.3 Théorèmes de comparaison.

On utilise dans cette section les concepts introduits en 1.2 pour faciliter l'étude de la convergence des intégrales.

THÉORÈME 3.14. — *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$, telles que $0 \leqslant f \leqslant g$. Si l'intégrale $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ est convergente, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est aussi convergente et on a $0 \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.*

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est divergente, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ est aussi divergente.

THÉORÈME 3.15. — *Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions* positives *et continues par morceaux telles que $f = \mathrm{o}_b(g)$. Si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ est convergente alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.*

On dit aussi que les deux intégrales « sont de même nature », c'est-à-dire simultanément convergentes ou divergentes.

THÉORÈME 3.16. — *Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions* positives *et continues par morceaux telles que $f(t) \sim_b g(t)$. Alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ est convergente.*

REMARQUE 3.17. Comme tous les critères de convergence (des intégrales ou des séries) présentés dans ce cours, la proposition précédente ne peut pas servir à calculer l'intégrale mais juste à prouver qu'elle converge.

REMARQUE 3.18. Les critères ci-dessus ne sont en général pas valables si les fonctions comparées ne sont pas toutes deux positives (ou au moins de signe constant à partir d'un certain rang).

Exercice 3.19. Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f : t \mapsto \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2+1}$. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

3.0.4 Intégrales absolument convergentes.

Le théorème suivant permet d'utiliser les résultats de comparaison ci-dessus, valables uniquement dans le cas des fonctions positives, pour étudier des intégrales de fonctions de signe non constant.

DÉFINITION 3.20 (Intégrale absolument convergente). — *Soit* $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale de* f *est* absolument convergente *lorsque l'intégrale* $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ *est convergente.*

THÉORÈME 3.21 (de convergence absolue). — *Soit* $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux. Si* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est absolument convergente, alors elle est convergente.*

4 Séries.

Une *somme* (finie) est l'addition d'un nombre fini de réels. La notion de *série* a pour but de donner un sens à la notion de somme d'une infinité de réels.

4.1 Convergence des séries.

Dans toute cette section, on considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DÉFINITION 4.1 (Série)**. —** *On appelle* série de terme général u_n *et on note* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *(ou même parfois* $\sum u_n$*) la suite* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 \ldots + u_n$$

Si $n \in \mathbb{N}$*, le terme* s_n *s'appelle* somme partielle d'ordre *n de la série.*

Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est donc la suite de ses sommes partielles. Étant une suite, elle peut converger ou diverger : la convergence ou divergence de $\sum u_n$ est appelée sa *nature*. Sa limite éventuelle est intuitivement la quantité que l'on obtient en « additionnant tous les u_n », ce qui motive la définition suivante :

DÉFINITION 4.2 (Somme d'une série)**. —** *Si la série* $\sum u_n$ *converge, sa limite*

$$s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est appelée somme *de la série et est notée* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

EXEMPLE 4.3. La série de terme général 0 converge et la somme de cette série est 0.

REMARQUE 4.4. Insistons : la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une suite et la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la limite de cette suite *si celle-ci existe* — sinon elle n'a pas de sens. En particulier, on prendra garder à ne *jamais* écrire l'expression $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sans avoir au préalable démontré que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge !

EXEMPLE 4.5 (Série géométrique)**.** Soit r un nombre réel et $u_n = r^n$. La série de terme général u_n, appelée *série géométrique de raison* r, converge lorsque $r \in]-1,1[$ et diverge sinon. En effet, nous avons déjà vu la formule de la somme géométrique, qui permet d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \neq 1$:

$$s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Lorsque $|r| < 1$, on a $\lim r^n = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

Lorsque $|r| > 1$, on a $\lim |r|^n = +\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} |s_n| \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{|r|^{n+1}-1}{1+|r|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et la série diverge.

Enfin, si $r = \pm 1$, on constate que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $s_n = n$ (si $r = 1$) ou $s_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ (si $r = -1$), donc la série diverge.

En conclusion, la série de terme général r^n converge si et seulement si $|r| < 1$, et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Exercice 4.6. Soit $a \in \mathbb{R}$. La série de terme général a converge-t-elle ?

DÉFINITION 4.7 (Reste d'une série convergente). — *Si la série de terme général u_n converge et si s est sa somme, on appelle* reste d'ordre $n \in \mathbb{N}$ *la somme des termes u_k à partir du $n+1$-è rang, c'est-à-dire la différence entre la somme de la série et la somme partielle d'ordre n :*

$$r_n = s - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Le fait que la série $\sum u_n$ converge ne dépend pas du rang auquel commence u_n : par exemple, si l'on supprime les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour former la suite $(u_n)_{n\geq 2}$, la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ et la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ seront de même nature (c'est-à-dire convergeront ou divergeront simultanément). En revanche, la somme de la série dépend de chaque terme : si l'on modifie un terme, la somme change !

PROPOSITION 4.8. — *$\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*

THÉORÈME 4.9. — *Soit (u_n) une suite. Si la série de terme général u_n converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*

REMARQUE 4.10 (importante). Attention, la réciproque est notoirement fausse ! Le théorème dit que si une série converge, alors son terme général tend vers 0. Le théorème ne dit pas que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, la série de terme général u_n converge !

Cette confusion fait incontestablement partie du podium des erreurs mathématiques grossières les plus souvent commises par les étudiants de premier cycle universitaire, toutes filières confondues... raison de plus pour l'éviter lors de l'oral de l'agrégation.

Voici un contre-exemple classique qu'il faut garder à l'esprit pour éviter de commettre cette erreur.

EXEMPLE 4.11 (Série harmonique). On attire fortement l'attention des lecteurs sur l'exemple suivant, qu'il faut impérativement connaître. On pose $u_n = 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La série de terme général u_n s'appelle *série harmonique*. Sa somme partielle d'ordre n est

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

La série harmonique diverge : on peut le prouver « à la main » (en minorant certaines sommes partielles et en utilisant le théorème des gendarmes), grâce à l'inégalité des accroissements finis (c'était l'objet de l'exercice 1.58) ou bien grâce à des critères de comparaison avec les intégrales (énoncés plus loin dans le cours). Pourtant, son terme général $1/n$ converge bien vers 0. La série harmonique est l'exemple canonique d'une série dont le terme général tend vers 0, mais qui ne diverge pas.

En revanche, il faut bien comprendre la contraposée du théorème, que nous exprimons sous la forme d'une nouvelle proposition :

PROPOSITION 4.12. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si cette suite diverge ou ne converge pas vers 0, la série de terme général u_n diverge.*

On dit dans ce dernier cas que la série *diverge grossièrement*.

PROPOSITION 4.13 (Opérations). — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et soient α, β deux nombres réels. On suppose que les deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent. Alors, la série de terme général $\alpha u_n + \beta v_n$ converge, et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha u_n + \beta v_n\right) = \alpha\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) + \beta\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Lorsque l'on manipule des sommes de séries et que l'on souhaite utiliser cette propriété de linéarité, il est nécessaire de prendre les mêmes précautions que dans le cas des intégrales généralisées : le théorème ci-dessus est vrai *sous réserve de convergence*!

EXEMPLE 4.14. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 1$ et $v_n = -1$, alors la série $\sum_{n\geq 0}\left(u_n + v_n\right)$ converge (il s'agit de la série nulle), mais on ne peut en aucun cas écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(u_n + v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

puisque le terme de droite n'a pas de sens.

4.2 Comparaison avec les intégrales.

Le lecteur éclairé aura peut-être déjà noté beaucoup de ressemblances entre les concepts et les résultats relatifs aux intégrales généralisées et ceux relatifs aux séries. Ces ressemblances ne sont pas du tout fortuites : les intégrales généralisées sont *exactement* l'analogue continu des séries, en un sens qui malheureusement est hors de la portée de ce cours. Cette analogie se retrouve également dans les critères de convergence, et les résultats de cette section sont très utiles : ils consistent à étudier la convergence d'une intégrale généralisée en regardant la convergence d'une certaine série, et vice-versa.

THÉORÈME 4.15 (de comparaison série/intégrale). — *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, positive et décroissante, telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On pose $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, la série de terme général u_n converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.*

REMARQUE 4.16. Ce critère est très utile pour dire si une série converge, mais il peut aussi parfois être utile pour dire si l'intégrale correspondante converge! En revanche, il ne permet pas de calculer la somme de la série : dans le cas convergent, on a généralement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \neq \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

Voici l'intuition graphique de ce résultat : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire l'intégrale $\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ comme la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$. Mais pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et tout $t \in [k, k+1]$, on a $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ d'où, en intégrant cette inégalité sur $[k, k+1]$:

$$u_{k+1} = f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k) = u_k$$

puis, en sommant cette dernière inégalité pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} \leq \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

Le théorème résulte alors du fait que les trois termes ci-dessus croissent avec n et admettent donc une limite finie ou égale à $+\infty$; il suffit alors de considérer les différents cas pour obtenir l'équivalence annoncée.

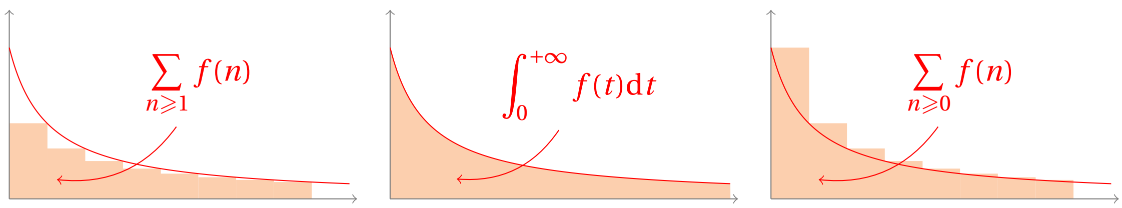


FIGURE 11 – Lorsque f est positive, décroissante, et tend vers 0, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ et la série $\sum f(n)$ ont la même convergence. Cela peut se montrer grâce à l'encadrement illustré dans la figure.

Il est important de savoir reproduire le raisonnement ci-dessus dans des cas particuliers, et éventuellement de pouvoir l'accompagner d'un dessin explicatif.

L'exemple suivant est certainement le plus utilisé dans les exercices.

EXEMPLE 4.17 (Séries de Riemann)**.** Soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$.

EXEMPLE 4.18 (Séries de Bertrand)**.** Soient $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$. On pose pour tout $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

Alors, la série de terme général u_n (appelée *série de Bertrand associée aux coefficients* α *et* β) converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou bien $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

En effet, la fonction

$$f : \begin{cases} [2, +\infty[\to \mathbb{R} \\ \frac{1}{x^\alpha \ln(x)^\beta} \end{cases}$$

est positive, continue et décroissante. De plus :

- Si $\alpha < 1$, on démontre par croissance comparée que $\frac{1}{x} = \mathrm{o}_{+\infty}\big(f(x)\big)$, donc $\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.
- Si $\alpha > 1$, on démontre par croissance comparée que $f(x) = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right)$, donc $\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.
- Si $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1}(x)}$ définie sur $[2,+\infty[$ est une primitive de f et un simple calcul d'intégrale (faites-le!) montre alors que $\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\beta > 1$.
- Si $\alpha = \beta = 1$, une primitive de f sur $[2,+\infty[$ est $t \mapsto \ln\big(\ln(t)\big)$ et un nouveau calcul d'intégrale (faites-le aussi!) montre que $\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

On en déduit le comportement de la série de Bertrand dans chacun de ces trois cas grâce au théorème 4.15.

Exercice 4.19. Quelle est la nature de la série de terme général e^{-2n} ?

Exercice 4.20. Soit P un polynôme. Quelle est la nature de la série de terme général $\mathrm{P}(n)e^{-n}$?

Exercice 4.21. Soit P un polynôme non nul sans racine dans $\mathbb{R}_+$. Trouver une condition sur P pour que la série de terme général $\frac{1}{\mathrm{P}(n)}$ soit convergente.

4.3 Critères de convergence des séries à termes positifs.

L'objectif de cette section est de disposer d'outils pratiques pour dire si une série à termes positifs converge.

On rappelle qu'une suite croissante et majorée est toujours convergente. Ce fait est l'ingrédient essentiel des résultats qui suivent.

THÉORÈME 4.22. — *Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs. Alors, la série de terme général u_n converge ou diverge vers $+\infty$.*

Le théorème suivant est particulièrement efficace pour comparer des séries positives avec des séries de références.

THÉORÈME 4.23. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $0 \leq u_n \leqslant v_n$. Alors, si la série de terme général v_n converge, celle de terme général u_n aussi et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Si la série de terme général u_n diverge, alors celle de terme général v_n aussi.

Exercice 4.24. La série de terme général $e^{-n} + \frac{1}{n^{1/3}}$ est-elle convergente?

Les propositions suivantes donnent quelques tests utiles pour déterminer si une série converge ou diverge. On prendra garde au fait qu'ils s'appliquent aux séries à termes positifs[7] !

7. Exercice : en vous inspirant du contre-exemple au résultat analogue pour les intégrales généralisées et après avoir lu le cours sur les séries à termes alternés, trouvez un contre-exemple!

THÉORÈME 4.25. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs. On suppose que $u_n \in \mathrm{O}(v_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Alors, si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n aussi.*

THÉORÈME 4.26. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs. On suppose que $u_n \sim v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$. Alors, la série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général v_n converge.*

La proposition ci-dessus est bien entendu vraie pour des suites de réels négatifs ou simplement de même signe constant à partir d'un certain rang. Deux suites équivalentes ayant automatiquement le même signe à partir d'un certain rang (exercice : prouvez-le !), il suffit de vérifier, par exemple, que $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang pour pouvoir appliquer le résultat.

Encore une fois, dans la proposition précédente, il n'est en aucun cas vrai que $\sum u_n = \sum v_n$ dans le cas convergent.

PROPOSITION 4.27 (Comparaison logarithmique). — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi, et si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge aussi.

THÉORÈME 4.28 (Règle de Cauchy). — *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs. On suppose que la suite $\sqrt[n]{u_n}$ possède une limite $l \in [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$.*

- *Si $l > 1$, la série de terme général u_n diverge.*
- *Si $l < 1$, la série de terme général u_n converge.*
- *Si $l = 1$, on ne peut rien dire : la série peut diverger ou converger.*

EXEMPLE 4.29. On considère la suite de terme général $u_n = \frac{2^n}{n^3}$. Alors, $\sqrt[n]{u_n} = 2n^{-\frac{3}{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En passant à l'exponentielle, on a donc

$$\sqrt[n]{u_n} = 2e^{-3\frac{\ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

D'après la règle de Cauchy, la série de terme général u_n diverge.

THÉORÈME 4.30 (Règle de d'Alembert). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels* strictement *positifs. On suppose que la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ possède une limite l.*

- *Si $l > 1$, la série de terme général u_n diverge.*
- *Si $l < 1$, la série de terme général u_n converge.*
- *Si $l = 1$, on ne peut rien dire : la série peut diverger ou converger.*

EXEMPLE 4.31. On considère la suite de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$ (pour $n \geq 1$). On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Vous devez savoir étudier ce genre de limites ! C'est classique : il suffit de passer à l'exponentielle. On trouve

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left[\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{-1}{n}}\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

Donc, la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite strictement inférieure à 1 : par la règle de D'Alembert, on en déduit que la série de terme général u_n converge.

REMARQUE 4.32. On veillera à utiliser ces critères avec discernement et parcimonie... Par exemple, on ne tentera pas d'invoquer de tels critères pour étudier la convergence des séries géométriques de terme général $\frac{1}{2^n}$ ou e^{-n}.

Exercice 4.33. La série de terme général $\frac{n^{10}}{2^n}$ est-elle convergente ?

Exercice 4.34. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{n^n}{(\ln(n))^{n^2}}$?

4.4 Critères de convergence pour les séries à termes quelconques.

On retrouve parmi les résultats classiques sur les séries la notion de convergence absolue, déjà rencontrée dans le chapitre sur les intégrales généralisées. Le théorème de convergence absolue est exactement le même ; il permet ici encore de se ramener à l'étude d'une série à termes positifs, ce qui est généralement aisé au vu des nombreux critères que nous avons énoncés plus haut.

DÉFINITION 4.35 (Série absolument convergente)**. —** *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombre réels. On dit que la série de terme général u_n est* absolument convergente *si la série de terme général $|u_n|$ et convergente.*

THÉORÈME 4.36 (de convergence absolue)**. —** *Soit (u_n) une suite réelle. Si la série de terme général $|u_n|$ converge, alors la série de terme général u_n converge.*

REMARQUE 4.37. Comme dans le cas des intégrales généralisées, la réciproque du résultat précédent est notoirement fausse. Par exemple, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge (on va le voir grâce aux critères des séries alternées), mais la série de terme général $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ diverge — puisqu'il s'agit bien sûr de la série harmonique. Retenez cet exemple : il vous servira de guide dans les moments de doute et d'incertitude.

MÉTHODE 4.38. Voici une méthode générale d'étude des séries réelles.

- On commence par regarder si la série considérée est une série de référence ou si on peut facilement la comparer à des séries de références comme les séries de Riemann ou les séries géométriques.
- Si cette méthode ne permet pas de trancher, on s'intéresse à la convergence absolue de la série. Cela permet de se ramener aux séries à termes positifs, pour lesquelles on dispose de nombreux critères : résultats de comparaison, règles Cauchy ou de D'Alembert, comparaisons séries/intégrales.

- Si l'étude de la convergence absolue ne permet toujours pas de trancher, il faut ruser. On dispose de quelques critères propres aux séries à termes quelconques, énoncés ci-après. Dans tous les autres cas, la méthode sera développée dans le problème.

THÉORÈME 4.39 (Critère des séries alternées)**. —** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs tendant vers* 0 *en décroissant. Alors, la série de terme général* $(-1)^n u_n$ *converge.*

Toute série dont le terme général peut s'écrire $(-1)^n u_n$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs tendant vers 0 en décroissant est appelée *série alternée*.

EXEMPLE 4.40 (d'une certaine importance)**.** La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge.

EXEMPLE 4.41. La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)+n}$ est alternée et vérifie l'hypothèse du théorème précédent, donc elle est convergente.

L'intérêt principal des séries alternées est de s'appliquer même à des séries qui ne sont pas absolument convergentes.

Exercice 4.42. La série alternée de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ est-elle convergente ?

Exercice 4.43. Trouver les réels α pour lesquels la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

EXEMPLE 4.44 (piège)**.** On considère la série de terme général défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$$

L'envie est forte d'utiliser le théorème des séries alternées... mais il faudrait pour cela que la suite $(|u_n|)$ est bien décroissante ! Calculons donc $|u_{n+1}|-|u_n|$ pour $n \in \mathbb{N}^*$: après calculs et simplifications, on obtient

$$|u_{n+1}|-|u_n| = \frac{2(-1)^{n-1}-1}{(n+1+(-1)^n)(n+(-1)^{n-1})}$$

Cette quantité n'est pas toujours négative et change souvent de signe : la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est donc pas décroissante et on ne peut pas utiliser le théorème des séries alternées ! Il faudra donc utiliser une autre méthode.

Exercice 4.45. Montrer que la série de terme général u_n définie à l'exemple précédent est convergente.

REMARQUE 4.46. Il est possible de construire une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ positive, tendant vers 0, mais non décroissante, telle que la série de terme général $(-1)^n u_n$ soit divergente. Vous pouvez le faire à titre d'exercice [8].

8. Indication : construisez une suite dont le premier terme est compensé par le deuxième, les deux suivants par les deux d'après, les trois suivants par les trois d'après, etc.

4.5 Le Panthéon des séries.

Cette section — qui reprend par moments les exemples cités plus haut dans le cours — rassemble toutes les séries de référence qu'il faut connaître.

Théorème 4.47 (Série géométrique). — *La série de terme général x^n est convergente si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas, sa somme est $\frac{1}{1-x}$. Autrement dit :*

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Théorème 4.48 (Série géométrique dérivée). — *La série de terme général $u_n = nx^{n-1}$ (défini pour $n \geqslant 1$= est convergente si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas, sa somme est $\frac{1}{(1-x)^2}$. Autrement dit :*

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

Théorème 4.49 (Série géométrique dérivée deux fois). — *La série de terme général $u_n = n(n-1)x^{n-2}$ (défini pour $n \geqslant 2$) est convergente si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas, sa somme est $\frac{2}{(1-x)^3}$. Autrement dit :*

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

Remarque 4.50 (Avertissement). Que l'on ne se méprenne pas sur le nom des deux théorèmes précédents : en toute généralité, on ne peut pas se contenter de dériver sous le signe de somme infinie. Cela veut dire, par exemple, que si f_n est une suite de fonctions dérivables sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ et si $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathrm{I}$, on ne peut pas toujours dire que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$$

Cela n'a en général aucun sens : d'abord, nous ne savons pas si la fonction $x \mapsto \sum f_n(x)$ est dérivable. Ensuite, même si elle l'est, on ne sait pas si $\sum f_n(x)$ est convergente. Enfin, même si c'est le cas, nous ne savons pas s'il y a égalité.

Il se trouve que, dans ce cas précis (ainsi que dans la plupart des cas « raisonnables »), ces égalités sont vérifiées, mais ce n'est pas du tout une généralité. Il n'en reste pas moins que les deux derniers théorèmes ci-dessus se retiennent très facilement en « dérivant » (de manière purement informelle et mnémotechnique!) l'égalité donnée dans le théorème 4.51.

Théorème 4.51 (séries de Riemann). — *Soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \geq 1$. Alors la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

FIGURE 12 – Bernhard Riemann (1826 - 1866), mathématicien allemand.

REMARQUE 4.52 (La fonction ζ de Riemann)**.** Le calcul des intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est immédiat, puisqu'on connaît une primitive de l'intégrande. Ce n'est plus du tout le cas des séries de Riemann ! On retiendra impérativement la formule suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{4}$$

Cette formule est déjà difficile à démontrer (cela fait l'objet d'un problème corrigé), mais les autres valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ sont également très difficiles à calculer... et de la plus haute importance pour les mathématiciens !

À titre culturel, la fonction $\alpha \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ porte le nom de « fonction ζ de Riemann [9] ». Son étude fait toujours l'objet de recherches actives afin de résoudre une hypothèse portant sur la localisation des points où elle s'annule : la très célèbre *conjecture de Riemann*, énoncée en 1859 et encore jamais résolue [10].

Passons maintenant à la série exponentielle. Il s'agit sans hésitation *la plus importante fonction des mathématiques*; elle est souvent définie grâce à la formule ci-dessous. Pour nous, il ne s'agit pas d'une définition mais d'un théorème puisque nous avons défini la fonction exponentielle comme la réciproque du logarithme naturel (voir les rappels de cours) !

THÉORÈME 4.53 (Série de l'exponentielle)**. —** *Soit x un nombre réel. La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ est convergente. La somme de cette série est le nombre e^x. Autrement dit,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{5}$$

L'exemple suivant généralise le critère des séries de Riemann. Il est un peu plus anecdotique, mais il est bon de le connaître.

9. ζ est la lettre grecque « zeta ».

10. En cas d'échec à l'agrégation de sciences sociales, sachez que la résolution de cette conjecture vous rapportera un million d'euros grâce au Prix du millénaire de l'Institut Clay.

THÉORÈME 4.54 (Séries de Bertrand)**.** — *Soient* $\alpha > 0$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$. *Pour tout* $n \geq 2$*, on pose*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

Alors, la série de terme général u_n *(appelée* série de Bertrand associée aux coefficients α et β*) converge si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou bien* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$.

En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on retrouve le fait que la série harmonique diverge.

THÉORÈME 4.55 (Série harmonique)**.** — *La série de terme général* $\frac{1}{n}$ *(dite « série harmonique ») est divergente. La série de terme général* $\frac{(-1)^n}{n}$ *est convergente, mais n'est pas absolument convergente.*

5 Fonctions de plusieurs variables.

Les fonctions de plusieurs variables sont omniprésentes en économie (fonction d'utilité, fonction de coût, fonction de production...). Leur étude nécessite notamment la notion de convergence des suites dans $\mathbb{R}^n$ (c'est l'objet de la topologie), qui se formalise à l'aide de la norme euclidienne. Nous présentons ensuite une généralisation de certains concepts déjà connus (comme la continuité et la dérivabilité), et introduisons quelques notions et propriétés élémentaires relatives à l'optimisation à plusieurs variables. Ce chapitre constitue une version introductive et simplifiée d'un propos plus général sur le calcul différentiel et l'optimisation (avec ou sans contrainte) qui fera l'objet d'un autre support de cours.

Dans toute la suite, nous identifierons $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que nous noterons indifféremment les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sous forme de n-uplet ou de vecteurs colonnes.

5.1 Topologie de $\mathbb{R}^n$ et continuité.

Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel non nul.

L'objectif de cette section est de donner une définition rigoureuse de la convergence des suites de points de $\mathbb{R}^n$ et de définir ce qu'est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$: même s'il est certain qu'aucun exercice ne portera sur ces points, il est important de bien comprendre ce qui signifie l'hypothèse « U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ » que nous formulerons lorsque nous traiterons, par exemple, d'optimisation.

5.1.1 Norme euclidienne, parties ouvertes, convergence.

La *norme euclidienne* est la manière la plus naturelle de mesurer les distances entre les points de $\mathbb{R}^n$. Elle correspond parfaitement à la notion intuitive de distance dans le plan ou dans l'espace.

DÉFINITION 5.1 (Norme euclidienne)**. —** *Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Sa norme euclidienne $||x||$ est le nombre réel positif défini par $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.*

REMARQUE 5.2. Si $n = 1$, la norme euclidienne de $x \in \mathrm{R}$ est simplement la valeur absolue de x, c'est-à-dire la distance entre 0 et x. Si $n = 2$, le théorème de Pythagore permet à nouveau de voir la norme euclidienne d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ comme la distance (au sens intuitif du terme) entre 0 et x. Cette interprétation est aussi valable si $n = 3$, toujours grâce au théorème de Pythagore ! On comprend donc aisément pourquoi on a souhaité généraliser la notion de norme euclidienne aux dimensions supérieures.

On ne va pas trop s'étendre sur la notion de norme euclidienne, qui sera abordée de façon plus poussée dans le cours sur les espaces euclidiens. Vous pouvez malgré tout retenir les propriétés suivantes [11] :

PROPOSITION 5.3. — *La fonction $x \mapsto ||x||$ vérifie les propriétés suivantes :*
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| = 0$ si et seulement si $x = 0$.*
- *Pour tout réel λ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.*

11. Ceux d'entre vous qui ont déjà eu des cours de topologie auront compris que la proposition suivante dit que la norme euclidienne est bien une *norme d'espaces vectoriels.*

- *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ (inégalité triangulaire).*

DÉFINITION 5.4. — *Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et soit $r > 0$. La* boule ouverte de centre x_0 et de rayon r *est l'ensemble* $\mathrm{B}(x_0, r)$ *défini par*

$$\mathrm{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| < r\}$$

Autrement dit, il s'agit de tous les éléments de $\mathbb{R}^n$ dont la distance à x_0 est strictement inférieure à r.

En dimension 1, la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r n'est autre que le segment $]x_0 - r, x_0 + r[$. En dimension 1 il s'agit du disque de centre x_0 et de rayon r. En dimension 3, c'est à proprement parler une boule, d'où le nom générique que l'on lui donne.

On passe maintenant à la définition essentielle de ce paragraphe : la notion d'ouvert de $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 5.5 (Ouvert de $\mathbb{R}^n$)**. —** *On dit qu'une partie* O *de $\mathbb{R}^n$ est* ouverte *(ou que c'est un* ouvert *de $\mathbb{R}^n$) si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{O}$, il existe $r_x > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r_x) \subset \mathrm{O}$. On dit qu'une partie est* fermée *(ou un* fermé *de $\mathbb{R}^n$) si et seulement si son complémentaire est ouvert.*

Intuitivement, une partie O est *ouverte* si tous ses points sont « strictement à l'intérieur » de O et non « sur la frontière de O » . Cela veut dire qu'autour de chaque point, il existe une boule ouverte de centre x qui est entièrement incluse dans O.

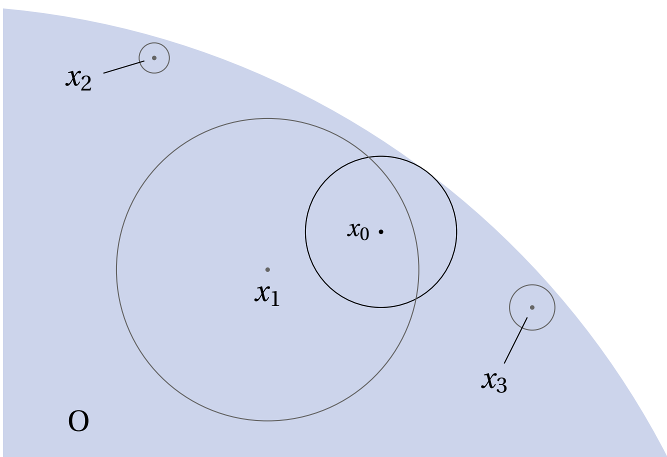


FIGURE 13 – Pour tout $x \in \mathrm{O}$, il existe une boule ouverte centrée en x qui est entièrement incluse dans O, donc O est ouvert.

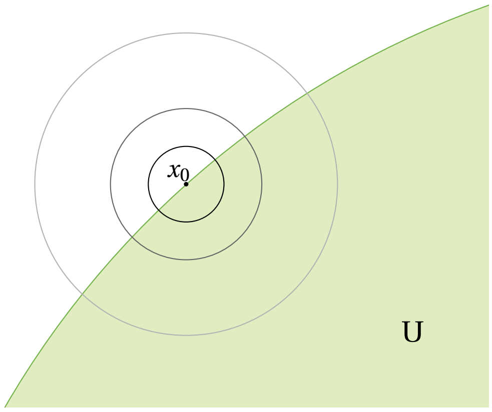


FIGURE 14 – Aucune boule centrée en x_0 n'est entièrement incluse dans U, donc U n'est pas ouvert. Cela provient du fait que « x_0 est à la frontière de U ».

EXEMPLE 5.6. Donnons un exemple en dimension 1 : l'usage veut que les parties de la forme $[a,b]$ s'appellent *intervalles fermés*, tandis que les parties de la forme $]a,b[$ s'appellent *intervalles ouverts*. Montrons que ces intervalles sont bien respectivement ouverts et fermés au sens de la définition précédente.

L'intervalle $]a,b[$ est ouvert. En effet, soit $x \in]a,b[$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \min(b-x, x-a)$. Alors, le segment $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ (la boule de centre x et de rayon ϵ) est inclus dans $]a,b[$ (faites un dessin!) : $]a,b[$ est donc bien un intervalle ouvert. En revanche, l'intervalle $[a,b]$ a pour complémentaire $]-\infty, a[\cup]b,+\infty[$, qui est une réunion d'intervalles ouverts, donc [12] est ouvert; $[a,b]$ est donc fermé.

En analyse des fonctions de plusieurs variables, il est fréquent que les ensembles de définition des fonctions soient des parties ouvertes. Lorsqu'on étudie des propriétés locales, comme la dérivabilité en un point a, cela permet de s'assurer que la fonction est définie « autour du point a ».

DÉFINITION 5.7 (Convergence dans $\mathbb{R}^n$)**. —** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in \mathbb{R}^n$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge vers *a (et on utilise la notation habituelle) si et seulement si $\|x_n - a\|$ converge vers 0.*

La définition précédente nous dit donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a si et seulement si les points x_n deviennent arbitrairement proches de a au sens de la norme euclidienne à partir d'un certain rang. Ils entrent donc dans des boules de rayon de plus en plus petit centrées en x. Le corollaire suivant généralise cette idée.

COROLLAIRE 4. — *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^n$ converge vers un point $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout ouvert U contenant a, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$ on ait $x_n \in \mathrm{U}$.*

12. On peut en effet démontrer facilement qu'une réunion quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Faites-le!

Le théorème suivant donne une interprétation un peu plus simple à manipuler de la convergence des suites de points dans $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME 5.8. — *Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in \mathbb{R}^n$. Alors, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point a si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la i-ème coordonnée de x_n, notée $x_n(i)$, converge vers la i-ème coordonnée de a, notée a_i, .*

EXEMPLE 5.9. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 1 + e^{-n^2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

5.1.2 Continuité.

DÉFINITION 5.10 (Fonction continue en un point de $\mathbb{R}^n$). — *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}^n$ *et soit* $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ *une fonction réelle. On dit que* f *est* continue en un point $x \in \mathrm{A}$ *si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* A *tendant vers* x*, la suite* $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers le réel* $f(x)$*. On dit que* f *est* continue sur A *(ou plus simplement* continue*) si et seulement si* f *est continue en tout point de* A.

REMARQUE 5.11. Attention : dans le cadre de la définition ci-dessus, ce n'est pas parce que les applications coordonnées [13] en un point sont continues que la fonction est continue en ce point [14] ! Par exemple, il peut arriver qu'une fonction de deux variables soit continue par rapport à sa première variable et par rapport à se deuxième variable, mais pas continue au sens de la définition donnée plus haut. Le contre-exemple classique est le suivant : on pose $f(0,0) = 0$ et pour tout $(x, y) \neq (0,0)$, on pose

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

La fonction $x \mapsto f(x,0) = 0$ est continue en 0, et la fonction $y \mapsto f(0, y) = 0$ l'est aussi. Cependant, la fonction f *n'est pas continue en* 0 : en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$, donc on ne peut pas avoir $f(x, y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.

PROPOSITION 5.12. — *Si* A *est une partie de* $\mathbb{R}^n$*, l'ensemble des fonctions continues de* A *dans* $\mathbb{R}$*, noté* $\mathscr{C}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$*, est un espace vectoriel. De plus, soient* f *et* g *deux fonctions continues.*

- *Le produit fg est encore une fonction continue.*
- *Si g se n'annule pas, le quotient $\frac{f}{g}$ est également une fonction continue.*

13. Il s'agit des applications obtenues en « fixant toutes les coordonnées sauf une ». Par exemple, dans le cas des fonctions à deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, la première application coordonnée associée à $y \in \mathbb{R}$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_y : x \mapsto f(x, y)$, et la deuxième application coordonnée associée à $x \in \mathbb{R}$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_x : y \mapsto f(x, y)$.

14. Par contre, la réciproque est vraie. Démontrez-le !

5.1.3 Dérivées partielles.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*) \in U$. Si $i \in [\![1, n]\!]$, on note I_i un intervalle ouvert contenant x_i^* et tel que $(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x, x_{i+1}^* \dots, , x_n^*) \in U$ pour tout $x \in I_i$.

DÉFINITION 5.13 (Dérivées partielles)**. —** *Si $i \in [\![1, n]\!]$ et si l'application partielle $\tilde{f}_i : I_i \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall t \in I_i, \quad \tilde{f}_i(t) = f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, t, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$$

est dérivable en x_i, on appelle dérivée partielle de f par rapport à sa i-ème variable au point x^* *ou* i-ème dérivée partielle de f au point x^* *et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)$ la quantité $\tilde{f}_i'(x_i^*)$.*

Cette définition quelque peu compliquée ne doit pas faire perdre de vue l'intuition très simple qui se cache derrière la notion de dérivée partielle : la quantité $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)$ désigne ni plus ni moins que la « dérivée » de la fonction f au point x^* par rapport à la variable x_i en tenant toutes les autres variables pour constantes, c'est-à-dire en ne considérant momentanément f que comme une fonction de la variable x_i.

EXEMPLE 5.14. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x, y) \mapsto x^2 y + e^y$ admet des dérivées partielles par rapport à x et à y en tout point de $\mathbb{R}^2$ et vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + e^y$$

Si f admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables en tout point de U, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ainsi définies sont, comme f, des fonctions de U dans $\mathbb{R}$ qui peuvent à leur tour admettre des dérivées partielles. Cela mène à la définition suivante :

DÉFINITION 5.15 (Dérivées partielles secondes.)**. —** *Supposons que f admette des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables en tout point d'une boule ouverte centrée sur x^* et incluse dans U. Si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa j-ème variable au point x^*, on appelle* dérivée partielle seconde par rapport à i puis par rapport à j *et on note*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^*)$$

la j-ème dérivée partielle de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ au point x^*. Autrement dit,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^*) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(x^*)$$

Il est évidemment possible de généraliser la définition précédente à des ordres supérieurs.

NOTATION 5.16. Si $i \in [\![1, n]\!]$ et si f admet une dérivée partielle par rapport à x_i puis par rapport à x_i au point x^*, on note généralement :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^*) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x^*)$$

EXEMPLE 5.17. La fonction f de l'exemple 5.14 admet des dérivées partielles par rapport à chaque couple de variables successives, et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^y$$

DÉFINITION 5.18 (Hessienne)**. —** *Si f admet des dérivées partielles secondes par rapport à tous les couples de variables successives, on appelle* matrice hessienne *(ou simplement* hessienne*) de f en x^* la matrice de taille $n \times n$ définie pour par :*

$$\mathrm{Hess}_f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x^*) \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 5.19. La matrice hessienne de la fonction f de l'exemple 5.14 en un point (x, y) est :

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & e^y \end{pmatrix}$$

DÉFINITION 5.20 (Fonction de classe $\mathscr{C}^2$)**. —** *On dit que f est* de classe $\mathscr{C}^2$ *lorsqu'elle admet des dérivées partielles secondes par rapport à tous les couples de variables successives en tout point de* U*, et que ces dérivées sont continues. On note* $\mathscr{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions de* U *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^2$.

Si $i, j \in [\![1, n]\!]$ sont tels que $i \neq j$, il faut faire attention à ne pas se tromper en écrivant l'expression de la dérivée seconde (dite « croisée ») de f par rapport à x_i puis à x_j ! Il s'agit de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ et non de l'inverse, ce dont on se souvient aisément lorsque l'on fait apparaître l'ordre de dérivation en écrivant :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Toutefois, le théorème suivant dit que (si f est $\mathscr{C}^2$) cette erreur est sans conséquence mathématique et que l'ordre dans lequel on dérive deux fois une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ par rapport à un couple de ses variables n'importe pas : quels que soient i et j dans $[\![1, n]\!]$, on peut dériver d'abord par rapport à x_i puis par rapport à x_j ou d'abord par rapport x_j puis par rapport à x_i pour obtenir le même résultat.

THÉORÈME 5.21 (Schwarz)**. —** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Alors, pour tous indices $i, j \in [\![1, n]\!]$ on a :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

COROLLAIRE 5. — *Si* $f \in \mathscr{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})$*, la matrice* $\mathrm{Hess}_f(x)$ *est symétrique.*

5.2 Les rudiments de l'optimisation.

L'optimisation est la branche de l'analyse qui a pour objectif de donner l'existence et l'unicité éventuelle du maximum ou du minimum d'une fonction puis de le localiser ou l'approcher. C'est une branche aux innombrables applications en économie et en finance, mais aussi en physique, chimie, industrie, construction, logistique... Il existe de très nombreux ouvrages de mathématiques pour économistes traitant de l'optimisation avec ou sans contrainte, le deuxième cas étant bien sûr le plus utile en microéconomie du consommateur. On étudie ici le cas de l'optimisation sans contrainte d'une fonction sur un ouvert.

On considère à nouveau dans tout cette section un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ ainsi qu'une fonction $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$.

DÉFINITION 5.22. — *On dit que* f *admet un* maximum local *en un point* $a \in \mathrm{U}$ *s'il existe une boule ouverte* B *centrée sur* a *telles que :*

$$\forall x \in \mathrm{U} \cap \mathrm{B}, \qquad f(x) \leqslant f(a)$$

De même, on dit que f *admet un* minimum local *en un point* $a \in \mathrm{O}$ *s'il existe une boule ouverte centrée sur* a *telles que :*

$$\forall x \in \mathrm{U} \cap \mathrm{B}, \qquad f(x) \geqslant f(a)$$

On dit que f *admet un* extremum local en a *si elle admet soit un maximum local, soit un minimum local.*

DÉFINITION 5.23. — *On dit que* f *admet un maximum global en* $a \in \mathrm{U}$ *si pour tout* $x \in \mathrm{U}$ *on a* $f(x) \leqslant f(a)$*. On définit de même un minimum global et un extremum global.*

Exercice 5.24. Montrer que tout maximum global est local. L'inverse est-il vrai ?

Exercice 5.25. On pose $f(x, y) = x^2 + y^2$. Prouver que 0 est un minimum global de f. La fonction f admet-elle des maxima locaux globaux ?

DÉFINITION 5.26 (Point critique). — *On dit qu'un point* $x^* \in \mathrm{U}$ *en lequel* f *admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables est un* point critique *de* f *si et seulement si* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0$ *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$.

THÉORÈME 5.27 (Conditions de premier ordre). — *Si* f *admet un extremum local en un point* $x^* \in \mathrm{U}$ *en lequel elle admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables, alors* x^* *est un point critique de* f*, c'est-à-dire :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \tag{6}$$

C'est une généralisation du célèbre critère que vous utilisiez déjà en analyse réelle undimensionnelle au lycée : si x est un point d'un intervalle ouvert I en lequel une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dérivable admet un extremum local, alors $f'(x) = 0$.

REMARQUE 5.28 (importante)**.** La condition (6) est nécessaire, mais pas suffisante : si tout extremum local est bien atteint en un point critique, f n'atteint pas pour autant un extremum en tout point critique! Le contre-exemple classique est la fonction polynomiale $x \mapsto x^3$, qui possède un point critique en 0 sans pour autant y atteindre un extremum local. Les conditions de premier ordre permettent donc uniquement d'effectuer un tri parmi les points de U pour obtenir des « points candidats » au titre de lieu d'un extremum local de f.

Exercice 5.29. Trouver tous les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 y - 3x + y^2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5.30. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - yx^2 + y^2 x$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ admet-elle un extremum local?

Nous terminons ce cours par une condition *suffisante* d'existence d'un extremum local dans le cas $n = 2$.

THÉORÈME 5.31 (Conditions du deuxième ordre en deux variables)**. —** *Soit* $x^* \in \mathrm{U}$. *On suppose que* f *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^2$ *et on note*

$$\mathrm{Hess}_f(x^*) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

On suppose que x^* ***est un point critique de*** f***.*** *Alors :*

1. *Si* $r > 0$ *et* $rt - s^2 > 0$ *alors* x^* *est un point de minimum local.*
2. *Si* $r < 0$ *et* $rt - s^2 > 0$ *alors* x^* *est un point de maximum local.*
3. *Si* $rt - s^2 < 0$ *alors le point* x^* *n'est pas un point d'extremum local.*

Dans le premier cas, le minimum local est même strict, au sens où il existe une boule ouverte B centrée sur x^* telle que pour tout $x \in \mathrm{U} \cap \mathrm{B}$ tel que $x \neq x^*$ on ait $f(x) > f(x*)$. Dans le deuxième cas, le maximum est strict au même sens.

DÉFINITION 5.32 (Point selle)**. —** *Dans le dernier cas du théorème précédent, on dit que* x^* *est un* point selle *ou un* point col.

Cette terminologie vient d'une part de la forme d'une selle de cheval[15] et d'autre part de la topographie d'un col de montagne, qui peut constituer le point culminant (par exemple pour un cycliste) ou le point le plus bas (par exemple pour un randonneur qui suit des crêtes de montagnes) d'une trajectoire selon le chemin emprunté.

REMARQUE 5.33. Notez que le théorème 5.32 ne permet pas de statuer dans le cas où $rt - s^2 = 0$: dans ce cas, d'éventuelles conditions nécessaires peuvent être obtenues en considérant des dérivées partielles d'ordre supérieur.

Exercice 5.34. La fonction $f : (x, y) \mapsto 3x^2 - 10xy + 9y^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ admet-elle un extremum local?

15. On laisse le lecteur juger de la pertinence d'une telle analogie.

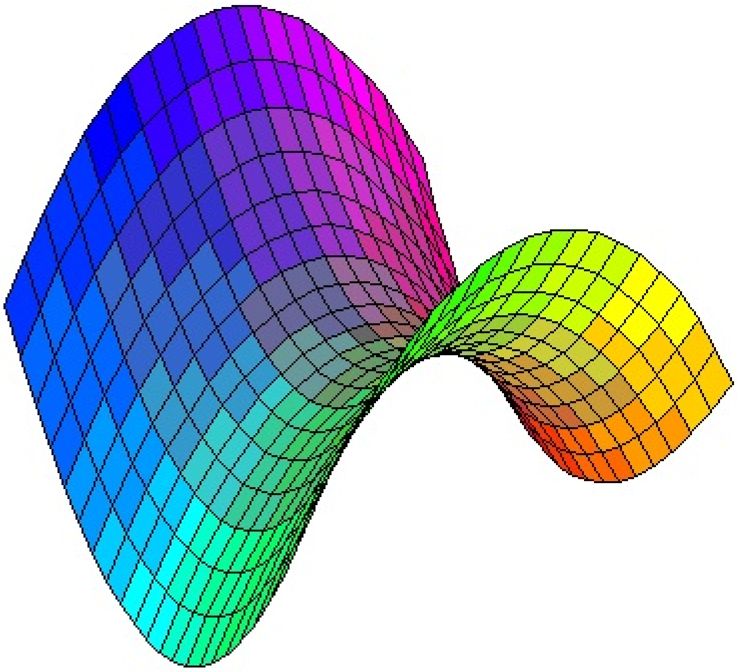


FIGURE 15 – Allure de la nappe représentative de f au voisinage d'un point col

REMARQUE 5.35. Le théorème 5.32 est à mettre en regard du résultat qui affirme que si I est un intervalle réel ouvert et si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ en $x^* \in \mathrm{I}$ et vérifie $f'(x^*) = 0$, alors :

1. Si $f''(x^*) > 0$, alors x^* est un point de minimum local de f.
2. Si $f''(x^*) < 0$, alors x^* est un point de maximum local de f.
3. Si $f''(x^*) = 0$, on ne peut rien dire : x^* peut être ou non un extremum local de f.

On pourra d'ailleurs démontrer ce résultat à titre d'exercice.

6 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1.13. Si $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \neq 0$. On peut donc écrire que les deux suites sont équivalentes si et seulement si la quantité $\frac{n^2+2}{n+1}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Mais en factorisant par les termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur (une méthode classique et toujours payante dans l'étude des limites de fractions rationnelles!) on obtient :

$$\frac{n^2+2}{n+1} = \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = n\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc les deux suites ne sont pas équivalentes.

Solution de l'exercice 1.14. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite nulle, il existe une suite réelle $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = (1+\varepsilon_n)\times 0 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

Solution de l'exercice 1.25. On écrit $(1+x)^\alpha$ sous forme exponentielle :

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$$

d'où l'on déduit :

$$(1+x)^\alpha - 1 = e^{\alpha\ln(1+x)} - 1$$

Mais $\alpha\ln(1+x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et on sait que $e^u - 1 \sim_0 u$. On peut donc écrire :

$$e^{\alpha\ln(1+x)} - 1 \sim_0 \alpha\ln(1+x) \sim_0 \alpha x$$

ce qui donne l'équivalent recherché par transitivité.

Solution de l'exercice 1.33. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, il existe une suite réelle $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il existe alors un $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq \mathrm{N}$ on ait $|\varepsilon_n| \leq 1$, et donc $|u_n| \leq 2|v_n|$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; mais par symétrie de la relation d'équivalence on a aussi $v_n \sim u_n$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc dominée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après ce que l'on vient de démontrer. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dominent donc mutuellement.

Un contre-exemple à la réciproque de cette proposition est donné par les suites $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(2n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui se dominent mutuellement (prendre alternativement $\mathrm{C} = 2$ et $\mathrm{C} = 1/2$ dans la définition) mais ne sont pas équivalentes puisque leur quotient est constant et égal à 2.

Solution de l'exercice 1.43. Il suffit d'après le théorème des valeurs intermédiaires de montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$ on a $\alpha f(a) + (1-\alpha) f(b) \in \left[f(a), f(b)\right]$. Mais c'est évidemment le cas puisque :

$$\left[f(a), f(b)\right] = \left\{\alpha f(a) + (1-\alpha) f(b) \mid \alpha \in [0,1]\right\}$$

Le graphe de la fonction définie sur $[0,1]$ par $\alpha \mapsto \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)$ est le segment reliant les points de coordonnées $\left(a, f(a)\right)$ et $\left(b, f(b)\right)$: on a donc montré que tout point de ce segment est situé à la même ordonnée qu'un point du graphe de f entre a et b.

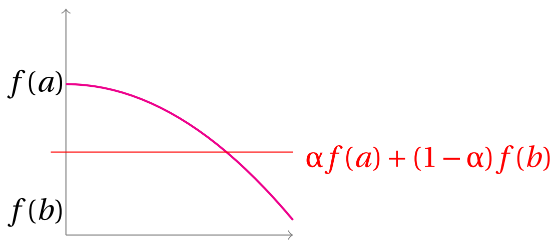


FIGURE 16 – Illustration de la solution à l'exercice 1.43.

Solution de l'exercice 1.45. $f([a,b])$ est un segment que l'on peut écrire sous la forme $[c,d]$ avec $c \leq d$; on a alors $[a,b] \subset [c,d]$ par hypothèse. Comme f prend sur $[a,b]$ toutes les valeurs de $[c,d]$, elle prend notamment les valeurs a et b :

$$\exists \alpha, \beta \in [a,b] \mid f(\alpha) = a \text{ et } f(\beta) = b$$

Comme $\alpha, \beta \in [a,b]$, on a $f(\alpha) - \alpha = a - \alpha \leq 0$ et $f(\beta) - \beta = b - \beta \geq 0$. Or la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[a,b]$ et on peut donc lui appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre α et β (c'est-à-dire sur $[\alpha,\beta]$ ou $[\beta,\alpha]$ selon la position relative de α par rapport à β) pour obtenir qu'elle s'annule sur $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) - c = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Solution de l'exercice 1.52. Si f est constante, sa dérivée est évidemment nulle. Supposons donc que f n'est pas constante. Il existe alors $c \in]a,+\infty[$ tel que $f(c) \neq f(a)$. Supposons par exemple que $f(c) > f(a)$ — la démonstration est bien entendu la même dans le cas où $f(c) < f(a)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(c)$ sur l'intervalle $[a,c]$: il existe par exemple $x_1 \in]a,c[$ tel que $f(x_1) = \frac{f(a)+f(c)}{2}$. Mais f admet $f(a)$ pour limite en $+\infty$, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq A$ on ait :

$$f(x) \leq \frac{f(c)+f(a)}{2}$$

Quitte à prendre A plus grand, on peut de plus supposer que $A > c$. On a notamment $f(A) \leq \frac{f(c)+f(a)}{2}$, et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à f entre c et A on obtient un réel $x_2 \in]c,A]$ tel que $f(x_2) = \frac{f(a)+f(c)}{2}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Rolle à f entre x_1 et x_2 après avoir vérifié que l'on a bien $a < x_1 < c < x_2$ pour conclure que la dérivée de f s'annule bien sur $]a,+\infty[$.

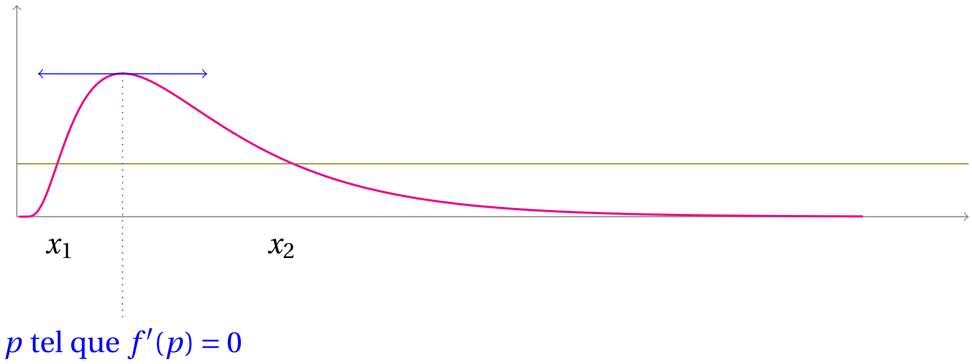


FIGURE 17 – Illustration de la solution à l'exercice 1.52.

Solution de l'exercice 1.53. En appliquant le théorème de Rolle à f entre a et b on obtient un point $c_1 \in]a, b[$ tel que $f'(c_1) = 0$. En appliquant à nouveau le théorème de Rolle, cette fois à f' et entre a et c_1 (qui sont bien distincts et en lesquels f' prend la même valeur), on obtient un point $c_2 \in]a, c_2[\subset]a, b[$ tel que $f''(c_2) = 0$. Par une récurrence facile (écrivez-la!) on construit des points $c_1, \dots, c_n \in]a, b[$ tels que $f^{(i)}(c_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En particulier, $f^{(n)}$ s'annule bien sur $]a, b[$.

Solution de l'exercice 1.54. En appliquant successivement le théorème de Rolle entre a_i et a_{i+1} pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on obtient $n-1$ points $c_{1,i} \in]a, b[$ (avec $c_{1,i} \in]a_i, a_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$) en lesquels f' s'annule. En remarquant que les points $c_{1,i}$ sont nécessairement distincts, on réitère l'opération : on applique le théorème de Rolle à f' entre les points $c^{1,i}$ et on obtient ainsi $n-2$ points distincts $c_{2,1}, \dots, c_{2,n-2} \in]a, b[$ en lesquels f'' s'annule. Une récurrence facile (écrivez-la!) permet ici encore de construire un point $c_{n,1}$ de $]a, b[$ en lequel $f^{(n)}$ s'annule, ce qui permet de conclure.

Vous trouverez à la figure 18 une illustration de cette démonstration dans le cas particulier où $n = 2$.

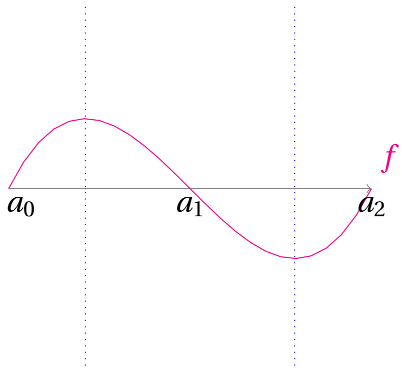
Solution de l'exercice 1.57. La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$, et pour tout $x \geq 0$ on a $\left|f'(x)\right| = \left|\frac{1}{1+x}\right| \leq 1$. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à f entre 0 et x permet donc d'écrire :

$$0 \leq \ln(1+x) = \left|f(x) - f(0)\right| \leq |x| = x$$

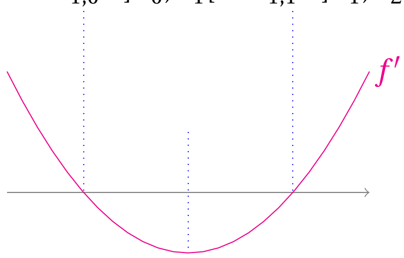
d'où l'inégalité attendue puisque celle-ci est aussi vraie si $x = 0$.

Solution de l'exercice 1.58. On nous demande de montrer grâce à l'inégalité des accroissements finis qu'une certaine quantité u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$; cette indication suggère l'utilisation du théorème des gendarmes et invite à minorer u_n en l'écrivant comme le terme de droite de l'inégalité des accroissements finis, ou au moins comme une somme de tels termes. Si $k \in \mathbb{N}^*$, en appliquant le théorème des accroissements finis entre k et $k+1$ à la fonction ln qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

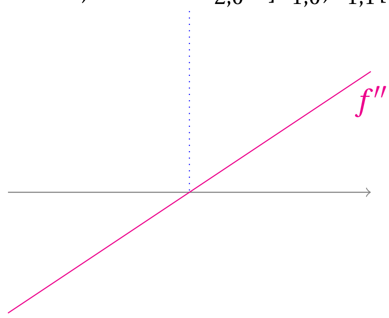
$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \underbrace{\left(\sup_{x \in]k, k+1[} \frac{1}{x}\right)}_{=\frac{1}{k}} (k+1-k) = \frac{1}{k}$$



f s'annule en trois points : a_0, a_1, a_2.
Par le théorème de Rolle, il existe $c_{1,0} \in]a_0, a_1[$ et $c_{1,1} \in]a_1, a_2[$ tels que $f'(c_{1,0}) = f'(c_{1,1}) = 0$.



f' s'annule en deux points : $c_{1,0}$ et $c_{1,1}$.
Par le théorème de Rolle, il existe $c_{2,0} \in]c_{1,0}, c_{1,1}[$ tel que $f''(c_{2,0}) = 0$.



f'' s'annule en un point $c_{2,0}$.

FIGURE 18 – Illustration de la solution à l'exercice 1.54, dans le cas où $n = 2$.

On a alors pour tout $n \in \mathrm{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$$

d'où la limite attendue puisque $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Solution de l'exercice 1.63. Supposons qu'il existe un choix de $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie. On a nécessairement $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car sinon u_{n+1} n'est pas définie ou bien $u_{n+1} < 0$ et u_{n+2} n'est pas définie. En utilisant l'inégalité $\ln(x) \leq x - 1$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on démontre pourtant par une récurrence facile (écrivez-la!) que $u_n \leq u_0 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit le fait que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il n'existe donc pas de choix de $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit bien définie.

Solution de l'exercice 1.66. La fonction $x \mapsto x^2+2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'éventuelle limite $l \in \mathbb{R}$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ devrait vérifier $l = l^2+2$. Une rapide étude de polynôme montre cependant qu'il n'existe pas de tel réel, et donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Solution de l'exercice 1.78. L'unique solution de l'équation $c = -3c+1$ est $1/4$. La suite $(u_n - 1/4)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -3 et de premier terme $1 - 1/4 = 3/4$, donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(-3)^n$$

et enfin :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(-3)^n$$

Solution de l'exercice 2.7. Pour tout $x \in [1;11,5]$ on a :

$$\lfloor x \rfloor = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [1,2[\\ 2 \text{ si } x \in [2,3[\\ \dots \\ 10 \text{ si } x \in [10,11[\\ 11 \text{ si } x \in [11,11.5] \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\int_1^{11,5} \lfloor x \rfloor = \sum_{k=1}^{1} 0 \int_k^{k+1} k\mathrm{d}x + \int_{11}^{11,5} 11\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{1} 0k + \frac{11}{2} = \frac{10 \times 11}{2} + \frac{11}{2} = 60,5$$

Solution de l'exercice 2.12. Il suffit d'appliquer la formule précédente avec $g = 1$.

Solution de l'exercice 2.16. En considérant les fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,e]$ définies pour tout $x \in [1,e]$ par $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \ln(x)$, on obtient grâce à la formule d'intégration par parties :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_1^e u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\
&= \left[(x^2+x)\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2+x}{x}\mathrm{d}x \\
&= e^2+e-\int_1^e (x+1)\mathrm{d}x \\
&= e^2+e-\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^e \\
&= \frac{e^2}{2}-\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Solution de l'exercice 2.17. Par définition de l'intégrale, une primitive de ln est donnée par la fonction [16] :

$$\mathrm{F}: x \mapsto \int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$. En considérant les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ $u = \ln$ et $v : x \to x$, on peut écrire ln sous la forme uv' et donc utiliser la formule d'intégration par parties pour calculer F :

$$
\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathrm{F}(x) = \int_1^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t &= \left[u(t)v(t)\right]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[t\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x 1\mathrm{d}t = x\ln(x)-x
\end{aligned}
$$

Solution de l'exercice 2.18. On considère les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ définies par $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto -e^{-x}$, et on calcule notre intégrale grâce à la formule d'intégration par parties :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 t^2e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t &= \left[u(t)v(t)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[-t^2e^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-2te^{-t}\right)\mathrm{d}t = -e^{-1}+2\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

On calcule alors $\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t$ grâce à une seconde intégration par parties, en considérant la fonction w de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur $[0,1]$ par $w : x \mapsto t$ et en remarquant que :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^1 w(t)v'(t)\mathrm{d}t &= \left[w(t)v(t)\right]_0^1 - \int_0^1 w'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[-te^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-t}\right)\mathrm{d}t = -e^{-1}+\int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t = 1-2e^{-1}
\end{aligned}
$$

On a donc :

$$\int_0^1 t^2e^{-t}\mathrm{d}t = 2-5e^{-1}$$

16. Notez que l'on aurait pu choisir n'importe quel réel strictement positif à la place de 1 ; toutefois, on pressent — à juste titre — que le fait que $\ln(1) = 0$ permettra d'obtenir une primitive facile à calculer.

Solution de l'exercice 3.3. Si $x \in]0,1]$, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-x^{1-\alpha}\right)$$

qui admet une limite finie lorsque x tend vers 0 si et seulement si $1-\alpha > 0$, c'est-à-dire $\alpha < 1$. On a dans ce cas :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$$

De la même façon, Si $x \in [1,+\infty[$, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha}-1\right)$$

qui admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $1-\alpha < 0$, c'est-à-dire $\alpha > 1$. On a dans ce cas :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}$$

Il reste enfin à traiter le cas $\alpha = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(x)$$

qui n'admet de limite finie ni en 0 ni en $+\infty$, d'où la divergence des intégrales $\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

Solution de l'exercice 3.21. Pour tout $t \in [1,+\infty[$ on a $0 \le e^{\frac{1}{t}} \le e$ et $0 \le \frac{1}{1+t^2} \le \frac{1}{t^2}$, donc $0 \le f(t) \le \frac{1}{t^2}$. La convergence attendue découle donc directement de celle de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ par comparaison.

Solution de l'exercice ??. Soit $\mathrm{A} \in]0,1]$. En écrivant ln comme le produit des fonctions $u = \ln$ et $v' = 1$ (dérivée de la fonction $v : x \mapsto x$ définie sur $]0,1]$), on peut effectuer une intégration par parties pour obtenir :

$$\int_{\mathrm{A}}^1 \ln(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{A}}^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{\mathrm{A}}^1 - \int_{\mathrm{A}}^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t = -\mathrm{A}\ln(\mathrm{A}) - \int_{\mathrm{A}}^1 \mathrm{d}t = -\mathrm{A}\ln(\mathrm{A}) - (1-\mathrm{A})$$

On en déduit que la quantité $\int_{\mathrm{A}}^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ admet une limite égale à -1 lorsque $\mathrm{A} \to 0$ (puisque $\mathrm{A}\ln(\mathrm{A}) \underset{\mathrm{A}\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée), d'où la convergence et la valeur de :

$$\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = 1$$

Solution de l'exercice 4.6. On peut calculer explicitement les sommes partielles successives de la série : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $s_n = an$ et donc $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $a = 0$.

Solution de l'exercice 4.19. Il suffirait de remarquer que $e^{-2n} = \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $0 \le \frac{1}{e^2} < 1$ pour obtenir la convergence de la série considérée, mais on peut aussi utiliser le théorème de comparaison série/intégrale appliqué à la fonction $t \mapsto e^{-2t}$ dont on vérifie aisément que son intégrale entre 0 et $+\infty$ converge (et vaut $\frac{1}{2}$).

Solution de l'exercice 4.20. Par linéarité de la somme des séries convergentes, il suffit de montrer que $\sum_{n\geq 0} n^k e^{-n}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction $x \mapsto x^k e^{-x}$ est positive et décroissante à partir d'un certain point [17], il suffit alors de montrer que $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} \mathrm{d}x$ converge, ce que l'on démontre par récurrence sur k en utilisant une intégration par parties.

Solution de l'exercice 4.21. Les résultats de comparaison introduits plus loin dans le cours permettront de répondre à cette question sans utiliser de comparaison série/intégrale. Pour l'heure, remarquons que toute fonction polynomiale dont le coefficient dominant est strictement positif est, à partir d'un certain point, croissante et strictement positive. Quitte [18] à considérer $-\mathrm{P}$ on peut supposer que le coefficient dominant a de P est strictement positif, ce qui implique que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{P}(x)}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est décroissante à partir d'un certain point. La convergence de la série de terme général $\frac{1}{\mathrm{P}(n)}$ équivaut donc à celle de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$. Comme $f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{at^{\deg(\mathrm{P})}}$ et comme $t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{t^{\deg(\mathrm{P})}}$ est une fonction continue et positive dont l'intégrale entre 1 et $+\infty$ converge si et seulement si $\deg(\mathrm{P}) \geq 2$, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{\mathrm{P}(n)}$ converge si et seulement si $\deg(\mathrm{P}) \geq 2$.

Solution de l'exercice 4.24. En notant u_n le terme général de la série proposée, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$; comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum u_n$ converge aussi.

Solution de l'exercice 4.25. En notant u_n le terme général de la série proposée, on a $0 \leq \frac{1}{n^{1/3}} \leq u_n$. Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/3}}$ diverge, $\sum u_n$ diverge aussi.

Solution de l'exercice 4.28. En notant u_n le terme général de la série proposée, $u_n \sim \frac{1}{n} \geq 0$ donc $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang et on déduit de la divergence de la série harmonique que $\sum u_n$ diverge.

Solution de l'exercice 4.37. On peut remarquer que $n^1 0$ est négligeable devant, disons, $\sqrt{2}^n$ lorsque n tend vers $+\infty$ et écrire que le terme général u_n de la série considérée est donc négligeable devant $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, ce qui, puisque $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$, implique la convergence de la série $\sum u_n$, ou simplement appliquer le critère de D'Alembert puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^1 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$.

Solution de l'exercice 4.38. On peut cette fois utiliser la règle de Cauchy : si l'on note u_n le terme général de la série considérée, alors $u_n > 0$ dès lors que $n > 3$, et on a alors $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{\ln(n)^n} \leq \frac{n}{\ln(3)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. La série est donc convergente.

Solution de l'exercice ??. La série est absolument convergente donc convergente ; nul besoin d'utiliser le théorème des séries alternées ici.

17. Cela signifie qu'il existe un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ sur lequel la fonction est décroissante. Le lecteur est invité à démontrer que le fait que la décroissance de f ne soit vérifiée qu'à partir d'un certain point n'a aucune conséquence sur la validité du théorème.

18. Cette formulation très courante en mathématiques signifie que si P n'est pas de coefficient dominant strictement positif alors $-\mathrm{P}$ l'est et que la condition de convergence sur $-\mathrm{P}$ que nous donnerait alors le raisonnement qui suit s'écrit de manière parfaitement symétrique comme une condition sur P (en l'occurence, on a effectivement $\deg(-\mathrm{P}) \geq 2$ si et seulement si $\deg(-\mathrm{P}) \geq 2$).

Solution de l'exercice 4.47. D'après le théorème des séries alternées, la série converge évidemment si $\alpha > 0$. Si $\alpha \leq 0$ le terme général de la série ne tend pas vers 0 donc la série diverge.

Solution de l'exercice 4.49. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ la n-ème somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$. On va montrer que les suites $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, ce qui permettra d'en déduire la convergence [19] de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui n'est autre que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

On remarque pour commencer que la suite $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est en fait la série $\sum_{n\geq 1}(u_{2n-1} + u_{2n}) = \sum_{n\geq 1}\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{n\geq 1} -\frac{1}{2n(2n+1)}$ qui est convergente puisque son terme général est équivalent à $-\frac{1}{4n^2}$ qui est le terme général de signe constant d'une série convergente. De même, la suite $(s_{2n+1} - u_1)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait la série $\sum_{n\geq 1}(u_{2n} + u_{2n+1}) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{3}{(2n-1)(2n+2)}$ qui est convergente puisque son terme général est équivalent à $\frac{3}{4n^2}$ qui est le terme général de signe constant d'une série convergente. On en déduit la convergence de $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Il suffit pour conclure de remarquer que $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite puisque $s_{2n} - s_{2n+1} = -u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Solution de l'exercice 5.25. Il suffit de considérer les définitions pour voir qu'un maximum global est notamment local (en effet, une relation vraie sur tout U l'est nécessairement sur U ∩ B si B est une boule ouverte. En revanche, un maximum local n'est pas forcément global comme en témoigne l'exemple de la fonction partie entière (définie sur l'ouvert $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$), qui admet un maximum local en tout point non entier mais aucun maximum global. On peut aussi considérer une fonction dont le graphe « a plusieurs bosses de hauteur différente ».

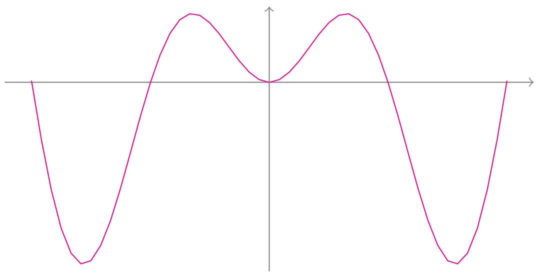


FIGURE 19 – La fonction représentée admet en 0 un minimum local, mais ce n'est pas un minimum global !

Solution de l'exercice 5.26. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0)$ donc $(0,0)$ est bien un minimum global de f. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $f(a, a) = 2a^2$ qui tend vers $+\infty$ lorsque a tend vers $+\infty$, donc f n'est pas majorée et n'admet *a fortiori* pas de maximum global.

Solution de l'exercice 5.30. f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les points critiques de f sont exactement les points de $\mathbb{R}^2$ auxquels ces deux dérivées par-

19. Exercice : pourquoi ? Indication : revenez à la définition de la convergence donnée en 1.1.

tielles s'annulent simultanément, c'est-à-dire les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient :

$$\begin{cases} 2xy - 3 = 0 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -x^3 - 3 = 0 \\ y = -\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

c'est-à-dire $(x, y) = \left(\sqrt[3]{-3}, -\frac{\sqrt[3]{-3}^2}{2}\right)$.

Solution de l'exercice 5.31. f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les points critiques de f, seuls candidats au statut de lieu où f atteint un minimum local, sont exactement les points de $\mathbb{R}^2$ auxquels ces deux dérivées partielles s'annulent simultanément, c'est-à-dire les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient :

$$\begin{cases} x^2 - 2yx + y^2 = 0 \\ -x^2 + 2yx = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (x - y)^2 = 0 \\ 2yx = x^2 \end{cases}$$

c'est-à-dire $(x, y) = (0, 0)$. Il existe donc un unique point critique de f dans $\mathbb{R}^2$, en lequel f n'admet pas d'extremum local puisque $f(0,0) = 0 > \frac{x^3}{3} = f(x,0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$ et $f(0,0) = 0 < \frac{x^3}{3} = f(x,0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. f n'admet donc pas d'extremum sur $\mathbb{R}^2$.

Solution de l'exercice 5.35. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$; son unique point critique est $(0,0)$ et sa hessienne en ce point est

$$\mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Comme $3 > 0$ et $3 \times 9 - (-5)^2 = 2 > 0$, f admet un minimum local en $(0,0)$.

Félicitations !

Vous êtes à la fin du cours d’analyse.