Durée de préparation : 1 heure 30.

Question de cours :

Qu'est-ce qu'un estimateur, un estimateur sans biais et le risque quadratique d'un estimateur ?

Exercice 1

On s'intéresse à l'évolution, sur une suite de périodes, de la population d'un pays, divisée en enfants et en adultes.

Partie A

On estime que, d'une période à la suivante :
Le taux de mortalité des enfants est de 20%, et les survivants deviennent des adultes.
Le taux de mortalité des adultes est de 100%.
Le nombre moyen d'enfants auxquels chaque adulte donne naissance est de $1,2$.

On appelle e_n et a_n respectivement le nombre d'enfants et d'adultes à la période n. On pose de plus, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} e_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n : $X_{n+1} = AX_n$.
2. On suppose que les adultes comme les enfants étaient au nombre de 10 millions à la période 0. En utilisant la matrice A^2, déterminer le nombre d'enfants et d'adultes à la période 2, puis à la période 10.
3. Sous les hypothèses du problème, comment la population de ce pays évolue-t-elle à long terme ?

Partie B

On suppose ici que le taux de mortalité infantile est toujours de 20%, et que chaque adulte donne en moyenne naissance à $1,25$ enfants d'une période à la suivante. Etudier les deux suites (e_n) et (a_n) définies précédemment.

Partie C

On appelle désormais, d'une période à la suivante : t le taux de mortalité infantile, et m le nombre moyen d'enfants auxquels un adulte donne naissance (le taux de mortalité des adultes étant toujours de 100%).

1. Déterminer une relation fonctionnelle du type $m = f(t)$ assurant la stabilité de la population (en volume et en répartition) entre deux périodes n et $n+2$.
2. Etudier la fonction f sur l'intervalle $[0; 1[$. Interpréter dans le problème donné le sens de variation de f, la quantité $f(0)$, et la limite de la fonction f au point 1.
3. On estime pouvoir encadrer le taux de mortalité infantile entre 5 et 10%. En déduire l'encadrement correspondant pour m (toujours sous l'hypothèse de stabilité ci-dessus).
4. Esquisser la représentation graphique sur $[0; 1[$ de la fonction $t \mapsto f(t)$. Mettre en évidence sur le graphique précédent les couples $(m; t)$ pour lesquels la tendance à long terme de la population étudiée est à la disparition.

Exercice 2

D'un naturel confiant, vous décidez d'acheter des objets d'art dans une brocante que vous venez de découvrir. Mais 80% des marchands installés sur cette brocante sont indélicats, pour seulement 20% de marchands sérieux… Un marchand indélicat procure à ses clients de la marchandise sans valeur la moitié du temps, alors qu'un marchand sérieux vend un article de qualité neuf fois sur dix.

Après avoir acheté un objet à votre goût, vous consultez un ami connaisseur qui vous apprend que, par chance, vous avez acquis un objet de qualité. Quelle est la probabilité que vous ayez acheté cet objet chez un marchand sérieux ?

Résolument optimiste, et malgré la mise en garde, vous vous rendez de nouveau, et à cinq reprises, sur cette brocante au cours de l'année, et y faites à chaque fois l'acquisition d'un nouvel objet d'art sans précaution particulière.

Quelle est la probabilité qu'au moins l'un des cinq objets soit de qualité ?

Quelle est la probabilité que les cinq objets soient de qualité ?

Quelle est l'espérance du nombre d'objets de qualité parmi vos cinq achats ?