Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Algèbre linéaire 2 : correction

2023-2024

Exercice 1

A

On peut commencer par calculer le polynôme caractéristique de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)$$

Ce polynôme a deux racines, 2 et 1, qui sont les valeurs propres de A. Pour trouver des vecteurs propres associés, on doit résoudre $(A - \lambda I)v = 0$ où

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est le vecteur qu'on cherche. Pour $\lambda_1 = 2$ l'équation matricielle à résoudre est équivalente au système suivant

$$\begin{cases} (2-2)x - y = 0 \\ \quad (1-2)y = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation nous dit que $y = 0$. On peut choisir une valeur non nul pour x. Pour $x = 1$ on obtient un vecteur propre associé à $\lambda_1 = 2$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La même procédure avec $\lambda_2 = 1$ nous amène au système :

$$\begin{cases} (2-1)x - y = 0 \\ \quad (1-1)y = 0 \end{cases}$$

où la première équation nous dit que $x = y$. Avec le choix $x = 1$, un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$ est :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice A est d'ordre 2 et on a trouvé deux valeurs propres distinctes, on sait que la matrice est diagonalisable. On pose alors

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

où D est la matrice diagonale avec les valeurs propres de A dans la diagonale,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et les colonnes de P sont des vecteurs propres de A dans le même ordre que les valeurs propres correspondant en D,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut calculer facilement P^{-1},

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, la puissance n-ième de A est donné par $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$. Plus explicitement,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 1-2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B

On peut commencer par calculer le polynôme caractéristique de la matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

qui est :

$$P(\lambda) = \det(B - \lambda I) = (-3-\lambda)(8-\lambda) + 30 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Ce polynôme a deux racines, 2 et 3, qui sont les valeurs propres de B. Pour trouver des vecteurs propres associés, on doit résoudre $(B - \lambda I)v = 0$ où

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est le vecteur qu'on cherche. Pour $\lambda_1 = 2$ l'équation matricielle à résoudre est équivalente au système suivante

$$\begin{cases} (-3-2)x + 15y = 0 \\ -2x + (8-2)y = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation nous dit que $x = 3y$. On peut choisir une valeur non nul pour y. Pour $y = 1$ on obtiens un vecteur propre associé à $\lambda_1 = 2$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La même procédure avec $\lambda_2 = 3$ nous amène au système :

$$\begin{cases} (-3-3)x + 15y = 0 \\ -2x + (8-3)y = 0 \end{cases}$$

où la deuxième équation nous dit que $x = \frac{5}{2}y$. Avec le choix $y = 2$, un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 3$ est :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice B est d'ordre 2 et on a trouvé deux valeurs propres distinctes, on sait que la matrice est diagonalisable. On pose alors

$$B = P\,D\,P^{-1}$$

où D est la matrice diagonale avec les valeurs propres de B dans la diagonale,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et les colonnes de P sont des vecteurs propres de A dans le même ordre que les valeurs propres correspondant en D,

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut calculer facilement P^{-1},

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalement, la puissance n-ième de B est donné par $B^n = P\,D^n\,P^{-1}$. Plus explicitement,

$$B^n = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2^{n+1} - 5 \times 3^n & 5 \times 3^{n+1} - 15 \times 2^n \\ 2^{n+1} - 2 \times 3^n & 2 \times 3^{n+1} - 5 \times 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2

A

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses termes diagonaux :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Les trois valeurs propres sont donc -1, 2 et 5.

Pour calculer des vecteurs propres, on doit résoudre le système $(A - \lambda I)v = 0$ pour les trois valeurs de λ. Si on pose

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

le système revient, pour $\lambda_1 = -1$ à :

$$\begin{cases} (-1+1)x + y + z = 0 \\ (2+1)y + 3z = 0 \\ (5+1)z = 0 \end{cases}$$

d'où $z = 0$ et $y = 0$. On peut choisir la valeur de x, par exemple $x = 1$, qui nous donne un vecteur propre associé à $\lambda_1 = -1$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = 2$ le système est :

$$\begin{cases} (-1-2)x + y + z = 0 \\ (2-2)y + 3z = 0 \\ (5-2)z = 0 \end{cases}$$

La dernière équation nous dit que $z = 0$. La première équation nous dit que $y = 3x$. Avec $x = 1$, un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$ est :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, pour $\lambda_3 = 5$ le système est :

$$\begin{cases} (-1-5)x + y + z = 0 \\ (2-5)y + 3z = 0 \\ (5-5)z = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation nous dit que $z = y$. Et les deux premières équations nous dissent que $y = 3x$. Avec $x = 1$, un vecteur propre associé à $\lambda_3 = 5$ est :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

B

Quand un coefficient dans la diagonale est le seul non nul d'une colonne d'une matrice, le coefficient est un valeur propre de la matrice et on connaît aussi les vecteurs propres associés : des vecteurs nuls sauf dans la composante associé à la colonne de la matrice en question. (Cela peut se vérifier facilement en faisant la multiplication.)

Dans notre cas, on peut utiliser cette observation pour obtenir deux valeurs propres de B :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

En effet, $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$ sont des valeurs propres de B et les suivants sont des vecteurs propres associés :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, on peut observer que la somme des coefficients de chaque ligne de B vaut 4; cela signifie que B admet $\lambda_3 = 4$ pour valeur propre et qu'un vecteur propre associé est

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme on peut vérifier facilement en faisant la multiplication. (On peut déduire $\lambda_3 = 4$ aussi du fait que le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses valeurs propres; dans ce cas, $\det(B) = 24$ donc $\lambda_3 = \frac{\det(B)}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{24}{2\times 3} = 4$.)

C

Une matrice carrée et sa transposée ont les mêmes valeurs propres. Comme C,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

est la transposée de la matrice B de la partie précédente, on connaît ses valeurs propres. Par contre, les vecteurs propres associés ne sont pas en général les mêmes; il faut les calculer.

On peut calculer aussi les valeur propres directement par inspection de la matrice C. On peut voir, par la même procédure d'avant, que $\lambda_1 = 4$ est une valeur propre, car c'est un coefficient dans la diagonale et le seul coefficient non nul de la deuxième colonne; une vecteur propre associé est :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer aussi que le 3 est dans la diagonale et est le seul coefficient non nul de la première ligne; cela signifie que 3 est un valeur propre de la matrice transposée et donc de cette matrice aussi. Il nous faut trouver des vecteurs propres associés. Comme avant, on peut résoudre le système $(C - \lambda I)v = 0$ pour $\lambda_2 = 3$, qui revient à :

$$\begin{cases} (3-3)x = 0 \\ x + (4-3)y + 2z = 0 \\ +(2-3)z = 0 \end{cases}$$

La dernière équation nous dit que $z = 0$ et la deuxième équation nous dit que $y = -x$. Avec $x = 1$, un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 3$ est :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la même manière, 2 est dans la diagonale et le seul coefficient non nul de la troisième ligne et donc valeur propre de C. Pour trouver des vecteurs propres associés, on pose le système $(C-\lambda I)v=0$ avec $\lambda_3=2$:

$$\begin{cases} (3-2)x = 0 \\ x+(4-2)y+2z = 0 \\ (2-2)z = 0 \end{cases}$$

La première équation nous dit que $x=0$ et la deuxième nous dit que $z=-y$. Avec $y=1$, un vecteur propre associé à $\lambda_3=2$ est :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Calculatrice)

$$A^3 = \begin{pmatrix} 30 & -5 & 7 & 2 \\ -26 & 27 & -6 & 10 \\ -54 & 18 & 27 & 22 \\ -21 & 9 & -13 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} -234 & 127 & -31 & 42 \\ 511 & -54 & -110 & -71 \\ -99 & 87 & -513 & -229 \\ 369 & -135 & 94 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\det A \approx -15.999$$

Comme $\det(A) \neq 0$, A est inversible.

$$B^3 = \begin{pmatrix} 65 & -68 & 121 & 31 & 82 \\ -20 & 31 & -92 & -26 & -62 \\ 104 & -76 & 20 & -16 & -38 \\ -30 & 30 & -50 & -14 & -38 \\ 52 & -38 & 10 & -8 & -19 \end{pmatrix}$$

$$B^5 = \begin{pmatrix} 2519 & -2509 & 4041 & 891 & 2291 \\ -1024 & 1223 & -2734 & -766 & -1951 \\ 3260 & -2498 & 1236 & -312 & -744 \\ -1126 & 1110 & -1742 & -374 & -964 \\ 1630 & -1249 & 618 & -156 & -372 \end{pmatrix}$$

$$\det B = 0$$

Comme $\det(B)=0$, B n'est pas inversible.

Exercice 4 (2014)

1. (a) Cela se vérifie par calcul direct.

   (b) On sait que $X_{n+1} = AX_n + C$ et dans la question précédente on a montré que $X = AX + C$. La soustraction de ces deux égalités nous donne $X_{n+1} - X = A(X_n - X)$. Finalement en remplaçant $X_n - X$ par Y_n, on obtient $Y_{n+1} = AY_n$.

   Par récurrence on peut montrer que $Y_n = A^n Y_0$, ce qui donne $X_n = Y_n + X = A^n(X_0 - X) + X$.

2. (a) Un calcul rapide montre que $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On voit bien que $B^2 = 2I + B$.

(b) Pour $n = 0$, $A^0 = I$ donc $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0$. Pour $n = 1$, d'après la définition de B, $A^1 = A = \frac{1}{2}I + \frac{1}{4}B$, et les suites vérifient bien $\alpha_1 = \frac{1}{2} = \frac{\alpha_0+\beta_0}{2}$ et $\beta_1 = \frac{1}{4} = \frac{\alpha_0+3\beta_0}{4}$.
Supposons que pour n nous avons $A^n = \alpha_n I + \beta_n B$. Alors

$$A^{n+1} = A^n A = (\alpha_n I + \beta_n B)A.$$

Si on remplace A à droite grâce à la relation $A = \frac{1}{4}(2I + B)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= (\alpha_n I + \beta_n B)A \\
&= (\alpha_n I + \beta_n B)\frac{1}{4}(2I + B) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n I + \left(\frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{4}\alpha_n\right) B + \frac{1}{4}\beta_n B^2 \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n I + \left(\frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{4}\alpha_n\right) B + \frac{1}{4}\beta_n (2I + B) \\
&= \left(\frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\beta_n\right) I + \left(\frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{4}\alpha_n + \frac{1}{4}\beta_n\right) B \\
&= \alpha_{n+1} I + \beta_{n+1} B
\end{aligned}$$

Par récurrence, la formule est valable pour $n \geq 0$.

3. Soit $U_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a)

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n) \\ \frac{1}{4}(\alpha_n + 3\beta_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = MU_n.$$

Par récurrence, $U_n = M^n U_0$.

(b) Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$MV = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V$ et $MW = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} = 0.25W$.
V est donc un vecteur propre de M de valeur propre 1 et W est un vecteur propre de valeur propre 0.25.

(c) Comme on a trouvé deux vecteurs V et W et qu'ils forment une famille libre, et M est une matrice 2×2, alors $\{V, W\}$ est une base qui diagonalise M. Posons alors

$$P = \begin{pmatrix} V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

où les vecteurs propres V et W sont les colonnes de P, et les valeurs propres associées sont disposées dans l'ordre sur la diagonale de D. On a alors $M = PDP^{-1}$. En consequence, $M^n = PD^nP^{-1}$.

(d) Comme D est diagonale, D^n est facile à calculer. On remplace chaque nombre sur la diagonale par sa puissance n-ième. Donc

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.25^n \end{pmatrix}.$$

On peut calculer P^{-1} de la manière suivante. On pose $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Puis, on impose

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} a + b & -2a + b \\ c + d & -2c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -2a+b=0 \\ c+d=0 \\ -2c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=-\frac{1}{3} \\ d=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis le calcul matriciel donne

$$M^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\times 0.25^n & 2-2\times 0.25^n \\ 1-0.25^n & 2+0.25^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}=U_n=M^n\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\times 0.25^n \\ 1-0.25^n \end{pmatrix}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Donc α_n et β_n convergent tous les deux vers $\frac{1}{3}$ quand $n\to+\infty$.

4. Dans la question $(2b)$, on a $A^n=\alpha_n I+\beta_n B$. Alors,

$$A^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{3}(I+B)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $X_n=A^n(X_0-X)+X$, et $X_0-X=\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}=X_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{3}(I+B)\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16-\frac{10}{3} \\ 20-\frac{10}{3} \\ 12-\frac{10}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

On a bien $F\subset\mathbb{R}^3$ et $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in F$. Si $x_1,x_2,z_1,z_2,\lambda\in\mathbb{R}$ alors :

$$(x_1,\,0,\,z_1)+(x_2,\,0,\,z_2)=(x_1+x_2,\,0,\,z_1+z_2)\in F$$

et

$$\lambda\,(x_1,0,z_1)=(\lambda x_1,\,0,\lambda z_1)\in F$$

F est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

On vérifie que

$$(0,2,4)=(1,2,3)+(-1,0,1)$$

c'est-à-dire que

$$(1,2,3)+(-1,0,1)-(0,2,4)=0$$

donc la familles est bien liée.

Exercice 7

Notons respectivement e_1, e_2 et e_3 les trois vecteurs qui composent la famille dans leur ordre d'apparition dans l'énoncé. La famille est génératrice car tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit sous la forme

$$(x - y)e_1 + (y - z)e_2 + ze_3.$$

Il reste à montrer qu'elle est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. Cette relation se réécrit :

$$(\alpha + \beta + \gamma,\ \beta + \gamma,\ \gamma) = (0, 0, 0)$$

d'où $\gamma = 0$. Mais aussi $\beta + \gamma = \beta = 0$. Finalement, $\alpha + \beta + \gamma = \alpha = 0$. Donc, $\beta = \gamma = \beta = 0$ ce qui permet de conclure que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est bien libre et est donc une base de $\mathbb{R}^3$.