Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Mathématiques - DM1 - corrigé

2023-2024

Exercice 1 (2017)

I - Premier modèle : adhésion d'un an

1. Les adhérents sont a_n et les non adhérents sont $N - a_n$. Alors,
$$a_{n+1} = \frac{7}{10}a_n + \frac{9}{10}(N - a_n)$$
d'où
$$a_{n+1} = -\frac{2}{10}a_n + \frac{9}{10}N$$
et
$$a_{n+1} = -\frac{1}{5}a_n + \frac{9N}{10}.$$
2. (a_n) est une suite arithmético-géométrique. Alors,
$$a_n = C + \left(-\frac{1}{5}\right)^n (a_0 - C),$$
où C est l'unique solution de l'équation $C = -\frac{C}{5} + \frac{9N}{10}$. Un simple calcul montre que $C = \frac{3}{4}N$. Finalement, comme $a_0 = 0$,
$$a_n = \frac{3}{4}N\left(1 - (-1/5)^n\right).$$
3. $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4}N\left(1 - (-1/5)^n\right) = \frac{3}{4}N.$$

II - Second modèle : adhésion pour deux ans

1. $$u_{n+1} = \frac{8}{10}v_n + \frac{8}{10}w_n$$
$$v_{n+1} = u_n$$
$$w_{n+1} = \frac{2}{10}v_n + \frac{2}{10}w_n$$
En notation matricielle,
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix},$$
qui peut s'écrire $X_{n+1} = A\,X_n$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

2. Pour $n = 0$,
$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{pmatrix},$$
qui est égale à $I\,X_0 = A^0\,X_0$. Pour $n = 1$, $X_1 = A\,X_0$. Pour $n = 2$, $X_2 = A\,X_1 = A\,A\,X_0 = A^2\,X_0$. En général, si $X_n = A^n\,X_0$ pour $n \le n_0$, alors $X_{n+1} = A\,X_n = A\,A^n\,X_0 = A^{n+1}X_0$. Comme on a vu que l'égalité est vraie pour $n \le 2$, par récurrence on obtient que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \ge 0$. Alors,
$$X_n = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{pmatrix}.$$

3. (a) Le calcul peut être fait manuellement ou à l'aide d'une calculatrice :
$$A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
donc 0 est valeur propre de A.
$$A\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/5 \\ 4 \\ -4/5 \end{pmatrix} = -\frac{4}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$
donc $-4/5$ est valeur propre de A.
$$A\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
donc 1 est valeur propre de A.

(b) La matrice A de taille 3×3 admet 3 valeurs propres distinctes, 0, -4/5 et 1. La matrice A est donc diagonalisable et il existe des matrices D et P telles que D est diagonale et $A = P\,D\,P^{-1}$. La matrice P se compose des vecteurs propres de A et les coefficients diagonaux de la matrice diagonale D sont, dans l'ordre, les valeurs propres correspondantes aux différents vecteurs propres qui constituent P :
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
La matrice inverse de P peut être calculée par la méthode du pivot de Gauss ou à l'aide d'une calculatrice :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 1 \\ 5/36 & -1/9 & -1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$
La puissance n-ème de la matrice D est
$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-4/5)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) De $X_n = A^n X_0 = P\,D^n\,P^{-1}\,X_0$ on déduit
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-4/5)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 1 \\ 5/36 & -1/9 & -1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{pmatrix}.$$

Un petit calcul montre que

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}N\ (1-(-4/5)^n) \\ \frac{5}{9}N\,(-4/5)^n + \frac{4}{9}N \\ \frac{N}{9}\ (1-(-4/5)^n) \end{pmatrix}$$

d'où

$$u_n = \frac{4}{9}N\ (1-(-4/5)^n)\,,$$
$$v_n = \frac{5}{9}N\,(-4/5)^n + \frac{4}{9}N,$$
$$w_n = \frac{N}{9}\ (1-(-4/5)^n)\,.$$

(d) La somme vaut

$$u_n + v_n + w_n = \frac{N}{9}\Big(4 - 4(-4/5)^n + 4 + 5(-4/5)^n + 1 - (-4/5)^n\Big) = \frac{N}{9}9 = N.$$

Ce résultat est attendu. En effet, la somme $u_n + v_n + w_n$ correspond à la totalité de la population, et devrait donc toujours être égale à N.

(e)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{9}N$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{4}{9}N$$
$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{N}{9}$$

III - Comparaison des deux modèles

Dans le premier modèle le nombre d'adhérents converge vers $\frac{3}{4}N$ tandis que dans le deuxième modèle le nombre d'adhérents converge vers $u_n + v_n = \frac{4}{9}N + \frac{4}{9}N = \frac{8}{9}N$. À long terme, le deuxième modèle est donc plus avantageux car $\frac{3}{4}N < \frac{8}{9}N$. Le choix ne dépend pas de la taille de la population.

Exercice 2 (2011)

Situation 1 :

1. On peut définir les variables aléatoires auxiliaires $X_1, \ldots, X_n$ par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le colis arrive en retard le jour } i \\ 0 & \text{si le colis arrive en temps le jour } i \end{cases}, \text{ pour } i = 1, \ldots, n.$$

On peut écrire $X = \sum_{i=1}^n X_i$ où :
— Pour tout $i = 1, \ldots, n$, X_i suit une loi Bernoulli de paramètre $p = 0,1$,
— Les variables X_i sont **indépendants**.
Alors, on peut concluire que $X \sim Bin(n; 0,1)$ et $E(X) = 0,1 \times n$.

2. (a) Parmi les n jours, le colis arrivera en retard X jours tandis que le colis arrivera en temps $(n - X)$ jours. Alors, on peut écrire C comme :

$$C = 8 \times (n - X) + 0 \times X = 8 \times (n - X).$$

(b) En utilisant la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(C) &= E(8 \times (n - X)) \\ &= 8 \times (n - E(X)) \\ &= 8 \times 0,9 \times n \\ &= 7,2 \times n \end{aligned}$$

Situation 2 :

1. Un colis peut arriver en rétard par premier fois le 1^{er}, 2^{e}, $3^{\text{e}}\dots$ jour, sans limite supérieure théorique. Comme l'entreprise utilise l'agence B **le jour suivant** au premier rétard,

$$Y(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

2. Si on appelle R la variable aléatoire représentant le numéro du jour ou pour la première fois un colis arrive en rétard, on a que $R \sim Geo(0,1)$ et $Y = R + 1$. Soit $k \in Y(\Omega)$,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(R + 1 = k) \\ &= P(R = k - 1) \\ &= (0,9)^{(k-1-1)} \times 0,1 \\ &= 0,9^{k-2} \times 0,1. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} P(Y = k) &= \sum_{k=2}^{+\infty} 0,9^{k-2} \times 0,1 \\ &= 0,1 \times \sum_{i=0}^{+\infty} 0,9^i \\ &= 0,1 \times \frac{1}{1 - 0,9} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Situation 3 :

On définit les événements suivants :

A_n : l'entreprise utilise l'agence A le jour n,
B_n : l'entreprise utilise l'agence B le jour n,
T_n : le colis envoyé le jour n arrive en temps,
R_n : le colis envoyé le jour n arrive en rétard.

Avec cet notation, $p_n = P(A_n)$.

1. Le jour 1 l'entreprise utilise l'agence A, donc on a $p_1 = 1$.
2. La probabilité de que l'entreprise utilise toujours l'agence A le jour 2 est égal a la probabilité de que le colis n'a pas eu du rétard le jour 1. Alors, $p_2 = 0,9$.
3. Pour que l'entreprise utilise l'agence A le n-ième jour il y a que deux possibilités mutuellement exclusifs :
   (1) soit elle a utilisé l'agence A le jour precedant et le colis est arrivé en temps (événement $A_n \cap T_n$),
   (2) soit elle a utilisé l'agence B le jour precedant et le colis a eu du rétard (événement $B_n \cap R_n$).
   Donc on peut écrire
   $$p_{n+1} = P(A_n \cap T_n) + P(B_n \cap R_n).$$
   On peut calculer $P(A_n \cap T_n)$ et $P(B_n \cap R_n)$ à l'aide des probabilités conditionnelles :
   $$\begin{aligned} P(A_n \cap T_n) &= P(T_n \mid A_n) \times P(A_n) = 0,9p_n, \\ P(B_n \cap R_n) &= P(R_n \mid B_n) \times P(B_n) = 0,2(1 - p_n). \end{aligned}$$
   Alors,
   $$p_{n+1} = 0,9p_n + 0,2(1 - p_n) = 0,7p_n + 0,2.$$
4. (p_n) est une suite arithmético-géométrique. Alors, commençant la récurrence par l'élément p_1,
   $$p_n = C + 0,7^{n-1}(p_1 - C),$$

où C est l'unique solution de l'équation $C = 0,7C + 0,2$. Un simple calcul montre que $C = \frac{2}{3}$. Finalement, comme $p_1 = 1$,

$$p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} 0,7^{n-1}.$$

Comme $0 < 0,7 < 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3} \times 0,7^{n-1} = 0,$$

et alors :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{3}.$$

Donc, à long terme (n assez grand) la probabilité de que l'entreprise utilise l'agence A est $\frac{2}{3}$.