Durée de préparation : 1 heure 30

Question

Sur une portion de 6 km du périphérique parisien, le trafic peut être perturbé le matin en semaine de 7h à 12h. Au début de cette portion, un panneau indique, à chaque instant, le temps de parcours d'un véhicule sur ces 6 km.

On modélise l'impact du trafic par la fonction f définie sur $[1;6]$ par :

$$f(t) = 8\frac{e \times \ln(t)}{t} + 4$$

où $f(t)$ est le temps de parcours indiqué sur le panneau exprimé en minutes, à l'instant t (où t est exprimé en heures) et $e = \exp(1)$.

Il est 7h du matin à l'instant $t = 1$.

1. Déterminer le temps de parcours moyen sur la totalité de la période $[1;6]$.

   Corrigé: Le temps de parcours moyen T est :

   $$T = \frac{1}{6-1}\int_1^6 f(t)dt = \frac{1}{5}\int_1^6 8\frac{e \cdot \ln(t)}{t} + 4dt = \frac{1}{5}\int_1^6 8e\frac{\ln(t)}{t}dt + \frac{1}{5}5 \times 4.$$

   On peut vérifier facilement par dérivation que $\ln^2(t)$ est une primitive de $2\frac{\ln(t)}{t}$, ce qui nous permet de calculer

   $$\int_1^6 2\frac{\ln(t)}{t}dt = \left[\ln^2(t)\right]_1^6 = \ln^2(6) - \ln^2(1) = \ln^2(6)$$

   où on a utilisé que $\ln(1) = 0$. Finalement,

   $$T = \frac{1}{5}4e\int_1^6 2\frac{\ln(t)}{t}dt + 4 = \frac{4e}{5}\ln^2(6) + 4.$$

Exercice 1

Un consommateur consacre un certain budget annuel à l'achat de deux produits de nouvelles technologies A et B. La fonction d'utilité de ce consommateur pour le produit A est donnée par :

$$f_A(x) = 0.7 \times \ln(x)$$

pour une quantité x de produit achetée.

1. Déterminer l'utilité marginale en fonction de x. Quelles sont ses variations en fonction de x ? Interpréter.

   Corrigé: L'utilité marginale est la variation de l'utilité pour une variation infiniment petite et est donné par la dérivée de la fonction d'utilité :

$$f_A'(x) = \frac{0.7}{x}.$$

   Les fonctions f_A et f_A' sont définies pour $x > 0$ et f_A' est positive pour tout $x > 0$. Cela montre que f_A est une fonction strictement croissante dans tout son intervalle de définition. Augmenter la quantité achetée de A augmente toujours l'utilité du consommateur; l'augmentation de l'utilité est, par contre, de plus en plus petite.

La fonction d'utilité pour une quantité y du produit B achetée est donnée par :

$$f_B(y) = 0.3 \times \ln(y).$$

On suppose que la fonction d'utilité globale du consommateur est alors :

$$u(x, y) = f_A(x) + f_B(y).$$

2. Quel est, en fonction de x et y, le taux marginal de substitution de A en B ? Donner une interprétation lorsque $x = 2y$.

   Corrigé: Une courbe d'indifférence représente l'ensemble des combinaisons de A et B qui procurent un niveau d'utilité identique. Autrement dit, une courbe d'indifférence est une courbe de niveau de la fonction $u(x, y)$.

   Dans notre cas, la courbe de niveau correspondent à un niveau d'utilité u_0 est donné par :

$$u(x, y) = 0.7\ln(x) + 0.3\ln(y) = u_0$$

   qu'on peut écrire aussi

$$u(x, y) = \ln(x^{0.7}) + \ln(y^{0.3}) = \ln(x^{0.7}y^{0.3}) = u_0.$$

   On peut exprimer la courbe de niveau comme une expression qui donne y en fonction de x. En effet, (x, y) appartient à la courbe de niveau u_0 si et seulement si :

$$x^{0.7}y^{0.3} = e^{u_0}$$

   d'où

$$y^{0.3} = \frac{e^{u_0}}{x^{0.7}}$$

   et

$$y = \left(\frac{e^{u_0}}{x^{0.7}}\right)^{1/0.3}.$$

   Si on définie la fonction

$$g(x) = \frac{e^{\frac{u_0}{0.3}}}{x^{\frac{0.7}{0.3}}},$$

alors la courbe de niveau u_0 est donné par $y = g(x)$.

Le taux marginal de substitution entre A et B mesure la variation de la quantité de A qui est nécessaire, le long d'une courbe d'indifférence, pour compenser une variation infiniment petite de la quantité consommée de B. Cela est donné par la dérivée de fonction qui détermine la courbe de niveau. Par convention, comme souvent cette dérivée est négative, on définie de taux marginal de substitution comme $-g'(x)$.

Dans notre cas,

$$g(x) = \frac{e^{\frac{u_0}{0.3}}}{x^{\frac{0.7}{0.3}}}$$

et

$$g'(x) = -\frac{0.7}{0.3}\frac{e^{\frac{u_0}{0.3}}}{x^{\frac{1}{0.3}}}.$$

Le taux marginal de substitution entre A et B est donc

$$\mathrm{TMS}_{B,A} = \frac{0.7}{0.3}\frac{e^{\frac{u_0}{0.3}}}{x^{\frac{1}{0.3}}}.$$

Pour l'exprimer comme fonction de x et y, on peut remplacer u_0 par sa valeur $\ln\left(x^{0.7}y^{0.3}\right)$, ce qui donne :

$$\mathrm{TMS}_{B,A}(x,y) = \frac{0.7}{0.3}\frac{e^{\frac{\ln(x^{0.7}y^{0.3})}{0.3}}}{x^{\frac{1}{0.3}}} = \frac{0.7}{0.3}\frac{e^{\ln\left((x^{0.7}y^{0.3})^{\frac{1}{0.3}}\right)}}{x^{\frac{1}{0.3}}} = \frac{0.7}{0.3}\frac{x^{\frac{0.7}{0.3}}y}{x^{\frac{1}{0.3}}} = \frac{0.7}{0.3}\frac{y}{x}$$

Une autre façon équivalente d'obtenir le même résultat est observer que le gradient de une fonction est un vecteur orthogonal à la courbe de niveau au même point. Alors, pour conserver un même niveau d'utilité après une variation Δx dans la quantité de A, il faut faire un variation Δy dans la quantité de B de tel manière que le vecteur $(\Delta x, \Delta y)$ suit la courbe de niveau de u. Cela implique donc que

$$(\Delta x, \Delta y) \cdot \nabla u = 0,$$

où $\cdot$ indique le produit scalaire. En développent cette expression,

$$(\Delta x, \Delta y) \cdot \nabla u = (\Delta x, \Delta y) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

Finalement,

$$\mathrm{TMS}_{B,A} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

Dans notre cas,

$$\mathrm{TMS}_{B,A}(x,y) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial\left(0.7\ln(x)+0.3\ln(y)\right)}{\partial x}}{\frac{\partial\left(0.7\ln(x)+0.3\ln(y)\right)}{\partial y}} = \frac{\frac{0.7}{x}}{\frac{0.3}{y}} = \frac{0.7}{0.3}\frac{y}{x},$$

qui donne le même résultat qu'avant, bien sûr.

Lorsque $x = 2y$, le taux marginal de substitution est $\frac{0.7}{0.6} \approx 1.17$. Cela veut dire que pour conserver le niveau d'utilité, il faut compenser une variation en A par une variation opposé en B et 17% plus grande.

On considère la fonction φ définie par : $\varphi(x,y) = x^{0.7}y^{0.3}$.

3. Pourquoi la fonction φ peut-elle être considérée comme une fonction d'utilité équivalente à la fonction u ?

Corrigé: Deux fonctions d'utilité U_1 et U_2 sont équivalentes si elles représentent les mêmes préférences. C'est-à-dire, si deux paniers sont indifférents selon U_1, il faut qu'ils le soient aussi par rapport à U_2 et si un panier est préféré par rapport à un autre selon U_1, il faut qu'il soit aussi préféré selon U_2.

On peut écrire $u(x,y)$ de la façon suivante :

$$u(x,y) = \ln(x^{0.7}y^{0.3}) = \ln\big(\varphi(x,y)\big).$$

Comme ln est une fonction strictement croissante,

$$u(x_1,y_1) = u(x_2,y_2) \qquad \text{si et seulement si} \qquad \varphi(x_1,y_1) = \varphi(x_2,y_2)$$

et

$$u(x_1,y_1) < u(x_2,y_2) \qquad \text{si et seulement si} \qquad \varphi(x_1,y_1) < \varphi(x_2,y_2).$$

En conséquence, u et φ représentent les mêmes préférences et sont fonctions d'utilité équivalentes.

En particulier, si un point est un maximum de u, l'est aussi de φ. Les minimums sont aussi les mêmes, et u et φ ont les mêmes courbes de niveau. Pour résoudre des problèmes d'optimisation, c'est la même chose le faire sur u ou sur φ.

4. Déterminer les élasticités partielles de φ par rapport à x et à y.

Corrigé: Les élasticités partielles sont donnés par :

$$e_{\varphi/x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{x}{\varphi(x,y)} = 0.7\left(\frac{y}{x}\right)^{0.3}\frac{x}{x^{0.7}y^{0.3}} = 0.7$$

et

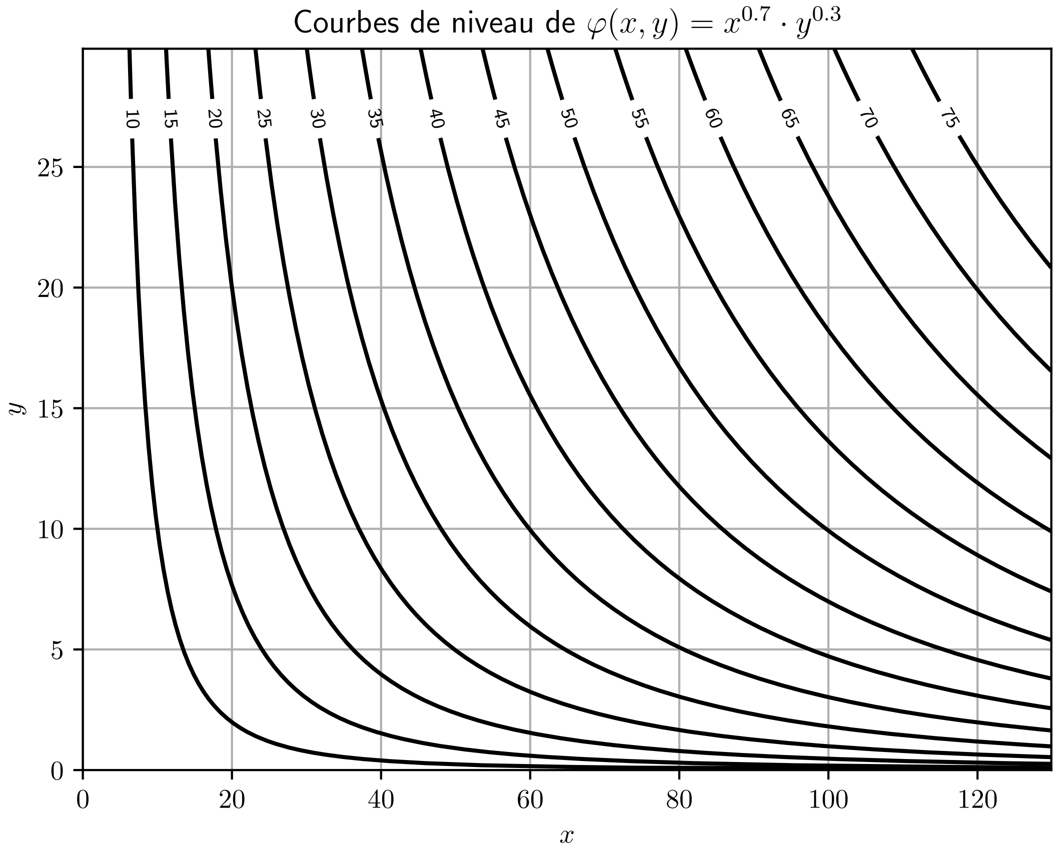
$$e_{\varphi/y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{y}{\varphi(x,y)} = 0.3\left(\frac{x}{y}\right)^{0.7}\frac{y}{x^{0.7}y^{0.3}} = 0.3.$$

Ces élasticités partielles ne dépendent pas de la valeur de x ou de y.

Du fait des prix des produits A et B, la contrainte budgétaire de notre consommateur se ramène à :

$$3x + 5y \leq 96.$$

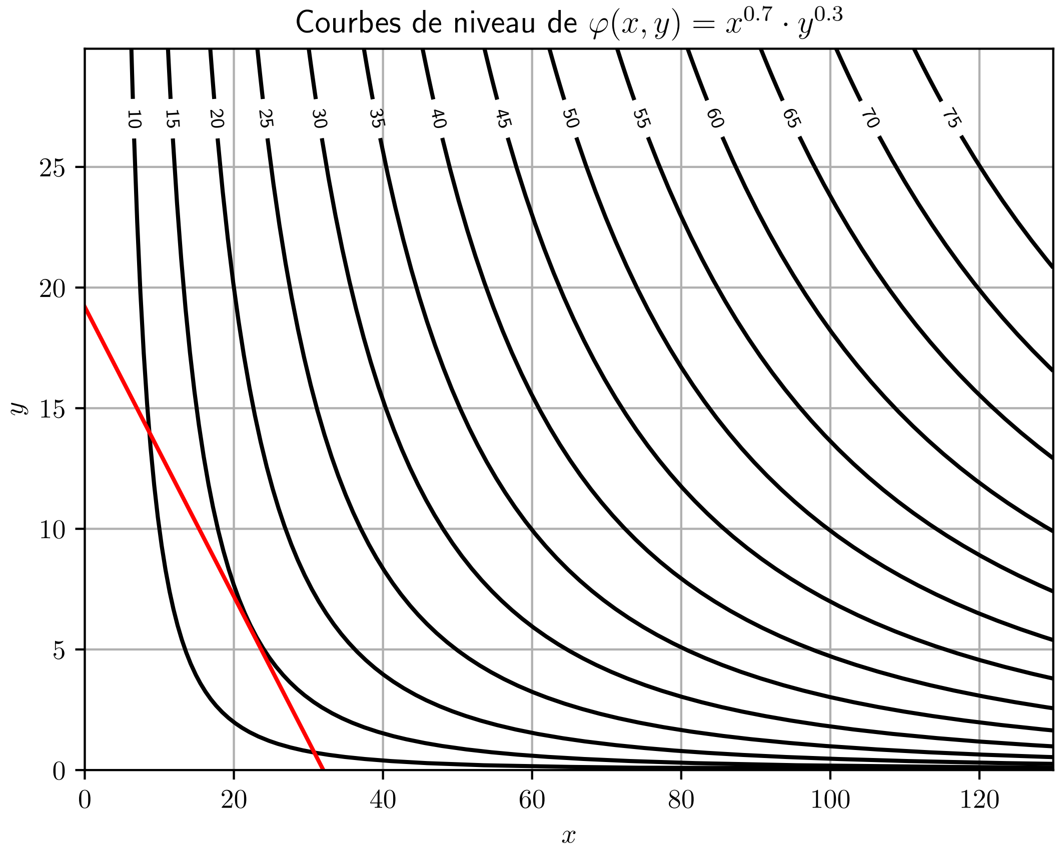
5. Les lignes de niveaux $\varphi(x,y) = k$ de la fonction φ sont représentées ci-dessous pour k variant de 5 en 5 de 10 à 75.



(a) Déterminer graphiquement une valeur approchée du panier optimal du consommateur sous la contrainte $3x + 5y \leq 96$.

Corrigé: On cherche le maximum de la fonction $\varphi(x, y)$ lié à la contrainte $3x + 5y \leq 96$. Comme les deux élasticités partielles de φ par rapport à x et à y sont positives, on sait que dans le maximum tout le budget sera utilisé. En effet, le maximum ne peut pas être sur un point (x, y) avec $3x + 5y < 96$ car les élasticités nous dissent qu'augmenter x en gardent fixée la valeur de y (chose qu'est possible si le budget n'est pas tout utilisé) forcement augmente l'utilité; la même chose si on augmente y en gardent fixée la valeur de x.

La ligne rouge ci-dessous représente la droite $3x + 5y = 96$ où tout le budget est utilisé; cette droite coupe l'axe X quand $y = 0$ et donc $x = \frac{96}{3} = 32$; la droite coupe l'axe Y quand $x = 0$ et $y = \frac{96}{5} \approx 19.2$.



Pour le panier optimal, la droite en rouge doit être tangente à une courbe de niveau de la fonction φ. Graphiquement on peut voir que la courbe de niveau $\varphi = 15$ semble tangent à la droite rouge autour du point $(22, 6)$. Le panier optimal doit être proche de $x = 22$ et $y = 6$.

(b) Déterminer ce panier optimal à l'aide de la méthode du lagrangien.

Corrigé: On cherche le maximum de la fonction $\varphi(x,y)$ lié à la contrainte $g(x,y) = 3x + 5y - 96 = 0$ (où tout le budget est utilisée, comme on a vu dans la question précédente). On écris notre Lagrangien comme

$$L(x,y,\lambda) = \varphi(x,y) - \lambda g(x,y) = x^{0.7}y^{0.3} - \lambda(3x + 5y - 96)$$

et on cherche le maximums parmi les solutions de

$$\nabla L(x,y,\lambda) = 0.$$

Cette condition nous amène au système suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0.7\left(\frac{y}{x}\right)^{0.3} - 3\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0.3\left(\frac{x}{y}\right)^{0.7} - 5\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -3x - 5y + 96 = 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations nous dissent que :

$$\frac{0.7\left(\frac{y}{x}\right)^{0.3}}{3} = \frac{0.3\left(\frac{x}{y}\right)^{0.7}}{5}$$

ou $y = \frac{3}{5}\frac{0.3}{0.7}x$. En remplaçant dans la troisième équations cela nous donne

$$3x + 3\frac{0.3}{0.7}x = 96$$

qui a pour solution $x = 0.7 \times 32 \approx 22.4$. On en déduit $y = 0.3\frac{96}{5} \approx 5.76$.
Si on considère l'ensemble fermé et borné D,

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + 5y = 96\Big\},$$

comme la fonction $\varphi(x, y)$ est continue, alors il existe un point $(x, y) \in D$ qui maximise φ. Par la méthode du Lagrangien on sait que le seul candidat pour ce point à l'intérieur de D est $(22.4, 5.76)$. Mais il faut vérifier la frontière de D, c'est-à-dire les points $(0, 19.2)$ et $(32, 0)$. Par évaluation de la fonction φ dans ce trois points,

$$\varphi(22.4, 5.76) \approx 14.9 \qquad \varphi(0, 19.2) = 0 \qquad \varphi(32, 0) = 0$$

on peut confirmer que $(22.4, 5.76)$ est bien le panier optimal. On peut vérifier aussi que ce point présente une utilité supérieur que le point approximative obtenue par la méthode graphique :

$$\varphi(22, 6) \approx 14.89.$$

(c) Déterminer, avec la méthode de votre choix, la plus petite valeur de m telle que la contrainte budgétaire $3x + 5y \leq m$ permette d'atteindre une utilité de 30.

Corrigé: Dans un première temps, on cherche quel est le valeur du maximum de φ lié à la contrainte $3x + 5y = m$. Comme avant, on sait que le maximum s'obtient en utilisant tout le budget. Cela peut se faire par la méthode du lagrangien, comme dans la partie précédente; il faut simplement remplacer 96 par m. Le calcule est le même jusqu'au moment de remplacer dans la troisième équation. Cela nous donne

$$3x + 3\frac{0.3}{0.7}x = m$$

qui a pour solution $x = 0.7\frac{m}{3}$. Comme avant, la valeur de y se déduit de l'expression $y = \frac{3}{5}\frac{0.3}{0.7}x$, ce qui nous donne $y = 0.3\frac{m}{5}$. De la même façon qu'avant, on peut vérifier que c'est bien le maximum. L'utilité obtenue est

$$\varphi\left(0.7\frac{m}{3}, 0.3\frac{m}{5}\right) = \left(0.7\frac{m}{3}\right)^{0.7}\left(0.3\frac{m}{5}\right)^{0.3} = \left(\frac{0.7}{3}\right)^{0.7}\left(\frac{0.3}{5}\right)^{0.3} m \approx 0.155m.$$

La plus petite valeur de m qui permette d'atteindre une utilité de 30 est :

$$\frac{30}{\left(\frac{0.7}{3}\right)^{0.7}\left(\frac{0.3}{5}\right)^{0.3}} \approx \frac{30}{0.155} \approx 193.24.$$

Exercice 2

Une laiterie souhaite effectuer des contrôles sur la qualité de ses crèmes afin de respecter les normes sanitaires qui imposent moins de 16000 bactéries par ml.

On a prélevé 50 pots dans la production et relevé le nombre de bactéries par ml. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

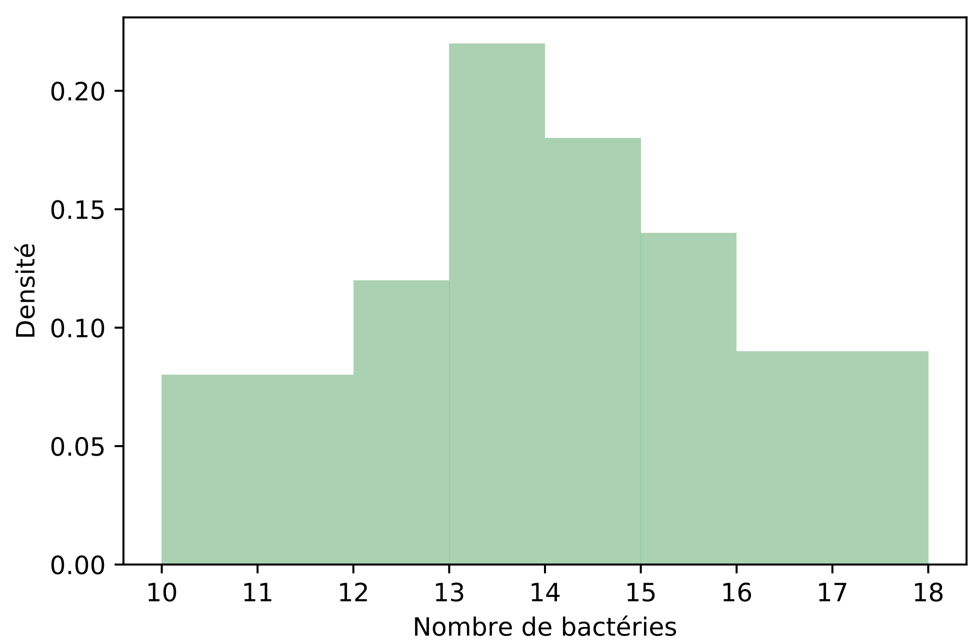
Nombre de bactéries	$[10;12[$	$[12;13[$	$[13;14[$	$[14;15[$	$[15;16[$	$[16;18[$
Nombre de pots	8	6	11	9	7	9

1. Représenter l'histogramme d'aire égale à 1 de la distribution observée du nombre de bactéries par ml.

Corrigé: On commence par calculer la fréquence (f_i) de chaque classe et la densité ($d_i = f_i/a_i$).

Nombre de bactéries	$[10;12[$	$[12;13[$	$[13;14[$	$[14;15[$	$[15;16[$	$[16;18[$
Nombre de pots	8	6	11	9	7	9
f_i	0.16	0.12	0.22	0.18	0.14	0.18
$d_i = f_i/a_i$	0.08	0.12	0.22	0.18	0.14	0.09

Pour tracer l'histogramme, les classes sont représentées par leurs extrémités qui déterminent la largeur des bandes et la hauteur des bandes est la densité d_i des classes. On peut vérifier facilement que l'aire de l'histogramme ainsi construit est égale à 1.



2. Si x_i représente le nombre de bactéries par ml présentes dans le pot d'indice i, on donne :

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 701.5 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 9988.35.$$

Calculer le nombre moyen de bactéries observé pour cet échantillon de 50 prélèvements, ainsi que l'écart-type observé.

Corrigé: La moyenne de bactéries par mL est:

$$\overline{X} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} X_i = \frac{701.5}{50} = 14.03,$$

et l'écart-type

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} X_i^2 - 14.03^2} = \sqrt{\frac{9988.35}{50} - 14.03^2} = 1.71.$$

3. Déterminer une valeur approchée de la médiane du nombre de bactéries par ml.

Corrigé: Une valeur approchée de la médiane est 14 car il y a autant d'échantillons dans $[10, 14[$ que dans $[14, 18[$.

Cependant, si l'on définit la médiante comme la plus petite valeur telle que 50% des échantillons présentent une modalité inférieure à cette valeur, c'est possible que la médiane soit inférieure à 14 : on ne connais pas la distribution des échantillons à l'intérieure de chaque classe.

4. On considère que le nombre de bactéries X (en milliers par ml) est une variable aléatoire continue. On choisit de modéliser la loi de X par une loi normale $N(\mu; \sigma)$ avec $\mu = 14$ et $\sigma = 1.7$. Justifier ce choix puis déterminer alors $p = P(X \geq 16)$.

Corrigé: La moyenne empirique $(\overline{X})$ est un estimateur non-biaisé de μ et l'écart-type empirique est un estimateur asymptotiquement non-biaisé de σ. Donc, le choix de $\mu = 14$ et $\sigma = 1.7$ fais sens par rapport aux calculs du point 2.

En modélisant X par une loi normale $N(14; 1.7)$, on a que

$$\begin{aligned}
p &= P(X \geq 16) \\
&= P(X - 14 \geq 2) \\
&= P\left(\frac{X-14}{1.7} \geq \frac{2}{1.7}\right) \\
&= P(Z \geq 1.18) \qquad [\text{ où } Z \sim N(0,1)] \\
&= 1 - P(Z \leq 1.18) \\
&= 1 - 0.8810 \\
&= 0.119.
\end{aligned}$$

La valeur de $P(Z \leq 1.18)$ peut être calculé avec une calculatrice ou s'obtenir dans une table avec la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

5. On s'intéresse à la population de pots dont le nombre de bactéries est supérieur ou égal à 16000 bactéries par ml dans la production de cette laiterie.

   (a) Quelle est la loi de probabilité du nombre de pots qui contiennent plus de 16000 bactéries par ml pour un échantillon de 50 pots ? Justifier la réponse.

   Corrigé: Pour chaque pot, on peut définir

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si le pot contient plus de 16000 bactéries par ml,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   On a que $Y_i \sim Ber(p = 0.119)$, pour chaque $i = 1, \dots, 50$. Le nombre de pots qui contiennent plus de 16000 bactéries par ml peut s'écrire comme $Y = \sum_{i=1}^{50} Y_i$ où on assume que les variables Y_i sont indépendants. En conséquence, Y suis une loi binomiale $Bin(50, 0.119)$.

   (b) Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique (bilatéral) au seuil de 95% de la proportion de pots dont le nombre de bactéries est supérieur ou égal à 16000 par ml pour un échantillon de taille 50.

   Corrigé: On peut rapprocher $Y \sim Bin(50, 0.119)$ par $Y' \sim N(\mu, \sigma)$ avec $\mu = 50 \times 0.119 = 5.95$ et $\sigma = \sqrt{50 \times 0.119 \times (1 - 0.119)} = 2.29$.
   On cherche a et b tels que :

$$P\left(a \leq \frac{Y'}{50} \leq b\right) = 0.95,$$

   ou équivalentement,

$$P\left(50 \times a \leq Y' \leq 50 \times b\right) = 0.95,$$

   ou équivalentement,

$$P\left(\frac{50 \times a - 5.95}{2.29} \leq \frac{Y' - 5.95}{2.29} \leq \frac{50 \times b - 5.95}{2.29}\right) = 0.95.$$

   Comme $\frac{Y'-5.95}{2.29}$ suis une loi $N(0, 1)$, il suffit de prendre a et b tels que :

$$\begin{cases} \frac{50\times a - 5.95}{2.29} & = -z_{0.05/2}, \\ \frac{50\times b - 5.95}{2.29} & = z_{0.05/2} \end{cases}$$

   où $z_{0.05/2} = 1.96$.
   On obtient que $I_{50} = [0.03, 0.21]$ est un intervalle de fluctuation asymptotique (bilatéral) au seuil de 95% de la proportion de pots dont le nombre de bactéries est supérieur ou égal à 16000 par ml pour un échantillon de taille 50.

   (c) Quelle serait la prise de décision associée à cet intervalle de fluctuation ?

   Corrigé: Si la proportion observée de pots dont le nombre de bactéries est supérieur ou égal à 16000 ml pour un échantillon de 50 pots se situe dans l'intervalle, on accepte $p = 0.119$. Sinon, on rejette $p = 0.119$.

6. Trois mois plus tard, un contrôle des services sanitaires fournit, pour 50 pots analysés, la valeur de 20% de pots dépassant 16000 bactéries par ml et déclare que cette valeur n'a rien d'anormal.

   (a) Justifier cette affirmation.

   Corrigé: La proportion observée étant dans l'intervalle de fluctuation I_{50}, on ne détecte rien d'anormal.

   (b) Combien de pots au minimum faudrait-il prélever pour que le contrôle détecte une anomalie dans la production ?

   Corrigé: Il faudrait prélever un nombre de pots M tel que $M/50$ soit supérieur à 0.21. Il faudrait donc prélever au minimum 11 pots.