Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Exercices extra 1 : correction

2022-2023

Exercice 1

1. En traduisant l'énoncé, on obtient pour tout $n \geq 0$
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,9\ a_n + 0,1\ b_n + 0,1\ c_n \\ b_{n+1} = 0,1\ a_n + 0,8\ b_n + 0,2\ c_n \\ c_{n+1} = 0,1\ b_n + 0,7\ c_n \end{cases}$$
De plus, comme a_n, b_n et c_n représentent des proportions de la population, on a $a_n + b_n + c_n = 1$.
2. Pour tout $n \geq 0$, $c_n = 1 - a_n - b_n$. En injectant cette dernière égalité dans les équations de récurrence trouvées auparavant, on obtient
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,1 + 0,8\ a_n \\ b_{n+1} = 0,2 - 0,1\ a_n + 0,6\ b_n \end{cases}$$
ce qui se traduit matriciellement par l'égalité demandée.
3. Posons $C = \ {}^t(c_1\ c_2)$. On obtient alors le système
$$\begin{cases} c_1 = 0,8\ c_1 + 0,1 \\ c_2 = -0,1\ c_1 + 0,6\ c_2 + 0,2 \end{cases}$$
dont la solution est $c_1 = 0,5$ et $c_2 = 0,375$.
4. En soustrayant l'égalité obtenue à la question 3 à celle obtenue à la question 2, on obtient que pour tout entier naturel n,
$$X_{n+1} - C = A\big(X_n - C\big).$$
D'où, par récurrence, pour tout entier naturel n, $Y_n = A^n Y_0$.
5. Pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont celles qui se trouvent sur la diagonale. Donc les valeurs propres sont $0,8$ et $0,6$. De plus, en résolvant des systèmes d'équations, on trouve que ${}^t(-2\ 1)$ est vecteur propre pour la valeur propre $0,8$ et ${}^t(0\ 1)$ pour la valeur propre $0,6$. D'où
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}$$
avec
$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
6. Si n est un entier naturel,
$$\begin{aligned} A^n &= A \times \ldots \times A \\ &= P \times P^{-1}AP \times \ldots \times P^{-1}AP \times P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ 0 & 0,6^n \end{pmatrix} P^{-1}, \end{aligned}$$

puis, en développant le produit, on obtient

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ \frac{0,6^n - 0,8^n}{2} & 0,6^n \end{pmatrix}.$$

D'où

$$X_n = Y_n + C = A^n Y_0 + C.$$

Or $Y_0 = {}^t(0,24\ 0,06) - C = {}^t(-0,26\ \ -3,15)$, donc

$$X_n = \begin{pmatrix} 0,5 - 0,26 \times 0,8^n \\ 0,375 - 0,445 \times 0,6^n + 0,13 \times 0,8^n \end{pmatrix}.$$

7. Directement d'après la question précédente, on obtient, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_n = 0,5 - 0,26 \times 0,8^n, \\ b_n = 0,375 - 0,445 \times 0,6^n + 0,13 \times 0,8^n, \\ c_n = 0,125 + 0,445 \times 0,6^n + 0,13 \times 0,8^n. \end{cases}$$

On a donc $a_n \to 0,5$, $b_n \to 0,375$ et $c_n \to 0,125$ quand $n \to \infty$.

Exercice 2

Partie A

1. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} e_{n+1} &= 1,2a_n \\ a_{n+1} &= 0,8e_n \end{cases}$$

Nous pouvons déduire A de ces deux relations :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1,2 \\ 0,8 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,96 & 0 \\ 0 & 0,96 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \left(A^2\right)^5 = \begin{pmatrix} 0,96^5 & 0 \\ 0 & 0,96^5 \end{pmatrix}$$

De ces deux nouvelles matrices, nous trouvons finalement que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} e_2 &= 0,96e_0 = 9\ 600\ 000 \\ a_2 &= 0,96a_0 = 9\ 600\ 000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_{10} &= 0,96^5 e_0 = 8\ 153\ 727 \\ a_{10} &= 0,96^5 a_0 = 8\ 153\ 727 \end{cases}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} 0,96^n & 0 \\ 0 & 0,96^n \end{pmatrix}$$

$$A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1,2 \cdot 0,96^n \\ 0,8 \cdot 0,96^n & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $0,96^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, A^n tend vers la matrice nulle lorsque n tend vers l'infini. Sous les hypothèses du problème, la population de ce pays va disparaître à long terme.

Partie B

En augmentant le nombre moyen de naissances par adulte à 1,25 enfants, nous obtenons maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A & = & \begin{pmatrix} 0 & 1,25 \\ 0,8 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ A^2 & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_{2n} & = & e_0 = 10\ 000\ 000 \\ a_{2n} & = & a_0 = 10\ 000\ 000 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_{2n+1} & = & 1,2a_0 = 12\ 000\ 000 \\ a_{2n+1} & = & 0,8e_0 = 8\ 000\ 000 \end{array} \right.$$

Partie C

1. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} e_{n+2} & = & ma_{n+1} & = & m(1-t)e_n \\ a_{n+2} & = & (1-t)e_{n+1} & = & m(1-t)a_n \end{array} \right.$$

   Il est donc nécessaire pour assurer la stabilité de la population d'avoir

$$m = \frac{1}{1-t}$$

2. f est continue et dérivable sur l'intervalle $[0, 1[$.

$$f'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

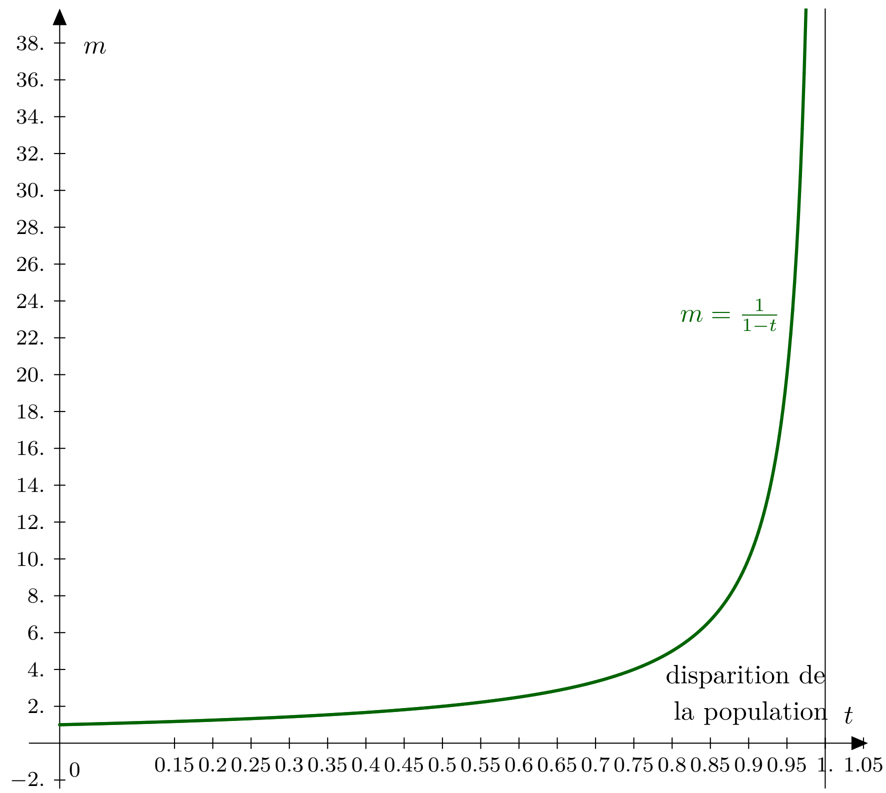
t	0		1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   Quand le taux de mortalité est nulle, chaque adulte n'a besoin d'avoir qu'un enfant pour que la population reste stable. En revanche, lorsque le taux de mortalité tend vers 1, $t = 1$ correspondant au cas où tous les enfants meurent, chaque adulte devrait avoir une quantité presque infinie d'enfants pour assurer la stabilité de la population ce qui est bien sûr impossible.

3. Si t est encadré entre 5% et 10%, m peut être encadré (sous l'hypothèse de stabilité) par :

$$1,05 \simeq \frac{1}{1-0,05} \leq m \leq \frac{1}{1-0,10} \simeq 1,11$$

4.



Les couples (m, t) sous la courbe correspondent aux couples pour lesquels la tendance à long terme de la population étudiée est à la disparition.

Exercice 3 (2009)

1. $X + Y \sim$ Poisson(3).
2. $E(X) = 1$.
3. $$\begin{aligned} P(X+Y=10 \mid X=5) &= \frac{P(\{X+Y=10\} \cap \{X=5\})}{P(X=5)} \\ &= \frac{P(\{Y=5\} \cap \{X=5\})}{P(X=5)} \\ &= \frac{P(Y=5)P(X=5)}{P(X=5)} \\ &= P(Y=5) \\ &= \frac{e^{-2}2^5}{5!} \\ &\simeq 0,036 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} P(X=0 \mid X+Y=6) &= \frac{P\left(\{X=0\} \cap \{X+Y=6\}\right)}{P(X+Y=6)} \\ &= \frac{P\left(\{X=0\} \cap \{Y=6\}\right)}{P(X+Y=6)} \\ &= \frac{P(Y=6)P(X=0)}{P(X+Y=6)} \\ &= \frac{\frac{2^6e^{-2}}{6!} \times \frac{1^0e^{-1}}{0!}}{\frac{3^6e^{-3}}{6!}} \\ &\simeq \frac{0,012 \times e^{-1}}{0,05} \\ &\simeq 0,088 \end{aligned}$$

5. Soit Z_n le nombre d'appels dans la pièce A sachant qu'il y a eu n appels au total dans les deux pièces. On a que $Z_n(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$.
   Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$, $$\begin{aligned} P(Z_n = k) &= P(X = k \mid X+Y=n) \\ &= \frac{P(\{X=k\} \cap \{X+Y=n\}}{P(X+Y=n)} \\ &= \frac{P(\{X=k\} \cap \{Y=n-k\}}{P(X+Y=n)} \\ &= \frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \\ &= \frac{\frac{1^ke^{-1}}{k!} \times \frac{2^{n-k}e^{-2}}{(n-k)!}}{\frac{3^ne^{-3}}{n!}} \\ &= \frac{n!\,2^{n-k}}{k!\,(n-k)!\,3^n} \\ &= \frac{2^{n-k}}{\binom{n}{k}3^n} \end{aligned}$$

Exercice 4 (2008)

1. On définit les événements suivants :
   - I : le marchand est indélicat
   - SV : la marchandise est sans valeur

   Avec cette notation, la probabilité que vous ayez acheté cet objet de qualité chez un marchand sérieux peut être écrit comme $P(I^c|SC^c)$. Alors, pour calculer cette probabilité on va utiliser la formule de Bayes :

   $$P(I^c|SC^c) = \frac{P(SV^c|I^c)P(I^c)}{P(SV^c)}.$$

   Par ailleurs, $P(SV^c)$ peut être écrit comme

   $$P(SV^C) = P(SV^c \cap I^c) + P(SV^c \cap I) = P(SV^c|I^c)P(I^c) + P(SV^c|I)P(I).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
P(I^c|SC^c) &= \frac{P(SV^c|I^c)P(I^c)}{P(SV^c)} \\
&= \frac{P(SV^c|I^c)P(I^c)}{P(SV^c|I^c)P(I^c)+P(SV^c|I)P(I)} \\
&= \frac{0,9\times 0,2}{0,9\times 0,2+0,8\times 0,5} \\
&= \frac{0,18}{0,58} \\
&\simeq 0,31
\end{aligned}$$

2. Soit X la quantité d'objets de qualité parmi les 5 achats. La variable aléatoire X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = P(SV^c) = 0,58$.
   Avec cette notation, la probabilité qu'au moins l'un des cinq objets soit de qualité est égal à $P(X \geq 1)$. Alors,

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\
&= 1 - (0,42)^5 \\
&\simeq 0,9869
\end{aligned}$$

3. La probabilité que les cinq objets soient de qualité est $P(X = 5) = 0,58^5 = 0.0656$.
4. $E(X) = np = 5 \times 0,58 = 2,9$.

Exercice 5 (2010)

1. $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
2. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{2}{3}$. Alors, $E(X) = \frac{3}{2}$ et $V(X) = \frac{9}{4}$.
3. $$\begin{aligned}
P(3 \leq X \leq 9) &= F(9) - F(3) \\
&= 1 - e^{-\frac{2}{3}9} - [1 - e^{-\frac{2}{3}3}] \\
&= \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^6} \\
&\simeq 0,133
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{(X\geq 3)}(X \leq 9) &= P((X \leq 9)|(X \geq 3)) \\
&= \frac{P((X \geq 3)\cap(X \leq 9))}{P(X \geq 3)} \\
&= \frac{P(3 \leq X \leq 9)}{P(X \geq 3)} \\
&= \frac{0,133}{\frac{1}{e^2}} \\
&\simeq 0,98
\end{aligned}$$

4. Soient $W_1, \ldots, W_{5000}$ variables aléatoires qui prennent la valeur 1 si $X \notin (3,9)$ et 0 si $X \in (3,9)$. Pour chaque $i = 1, \ldots, 5000$, W_i suit une distribution Bernoulli de paramètre $p = 1 - P(3 \leq X \leq 9) = 1 - 0,133 = 0,867$. En plus, les variables $W_1, \ldots, W_{5000}$ sont indépendants.
   Alors, $Y = \sum_{i=1}^{5000} W_i$ suit une loi $Bin(5000; 0,867)$.

5. $E(Y) = np = 5000 \times 0,87 = 4335$ et $V(Y) = np(1-p) = 576,555$.
6. Y peut être approximée par une loi normale $N(4335; \sqrt{576,555})$. Alors,

$$\begin{aligned}
P(Y \leq 4300) &= P\left(\frac{Y - 4335}{\sqrt{576,555}} \leq \frac{4300 - 4335}{\sqrt{576,555}}\right) \\
&\simeq P(Z \leq -1,46) \\
&= \Phi(-1,46) \\
&= 1 - \Phi(1,46) \\
&= 1 - 0,9279 \\
&= 0,0721
\end{aligned}$$

Exercice 6 (2013)

1. Pour calculer la moyenne on utilise la formule :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i,$$

où c_i est le centre de la classe. Alors,

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{214}[50 \times 1350 + 120 \times 1750 + 30 \times 2250 + 10 \times 2750 + 4 \times 4000] \\
&\approx 1815,42
\end{aligned}$$

Pour calculer l'écart type on utilise la formule :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2\right) - \bar{x}^2},$$

où c_i est le centre de la classe. Alors,

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sqrt{\frac{1}{214}[50 \times 1350^2 + 120 \times 1750^2 + 30 \times 2250^2 + 10 \times 2750^2 + 4 \times 4000^2] - 1815,42^2} \\
&\approx 457,72
\end{aligned}$$

2. La masse salariale totale est $m_{\text{totale}} = 388500$.

Salaire (x_i)	[1200 ;1500[	[1500 ;2000[	[2000 ;2500[	[2500 ;3000[	[3000 ;5000[
Nombre de salariés (n_i)	50	120	30	10	4
Masse de la classe ($n_i c_i$)	67500	210000	67500	27500	16000
Fréq. de masses ($n_i c_i / m_{\text{totale}}$)	0.174	0.541	0.174	0.071	0.041
Fréq. cumulées des masses (Q_i)	0.174	0.714	0.888	0.959	1

3. La médiale corresponds au salaire Ml tel que $Q(Ml) = 0.5$. Pour trouver la médiale il faut noter qu'elle se trouve dans la classe $[1500; 2000[$. On calcule la médiale par interpolation linéaire a l'intérieure de la classe :

$$\frac{Ml - 1500}{2000 - 1500} = \frac{0.5 - 0.174}{0.714 - 0.174} \Rightarrow Ml \approx 1801,85.$$

Pour calculer la médiane on va tout d'abord calculer les fréquences (f_i) et les fréquences cumulées (F_i) des effectifs.

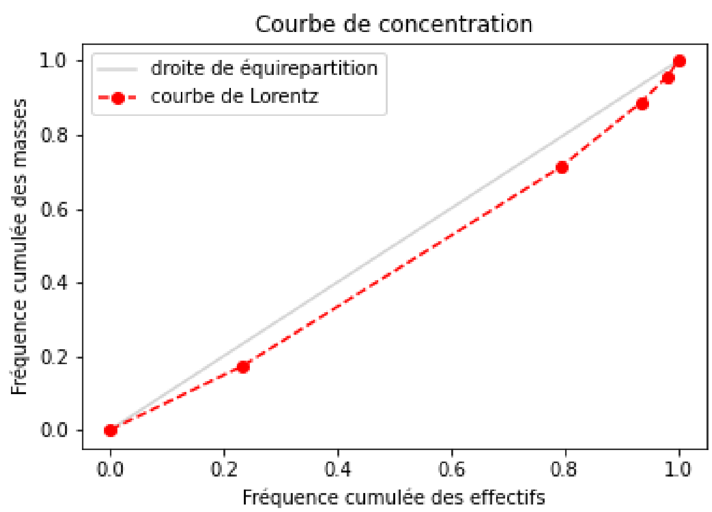
Salaire (x_i)	[1200 ;1500[	[1500 ;2000[	[2000 ;2500[	[2500 ;3000[	[3000 ;5000[
Nombre de salariés (n_i)	50	120	30	10	4
Fréq. des effectifs ($f_i = n_i/N$)	0.234	0.561	0.140	0.047	0.018
Fréq. cumulées des effectifs (F_i)	0.234	0.795	0.935	0.982	1

La médiane corresponds au salaire Me tel que $F(Me) = 0.5$. Pour trouver la médiane il faut noter qu'elle se trouve dans la classe $[1500; 2000[$. On calcule la médiane par interpolation linéaire a l'intérieure de la classe :

$$\frac{Me - 1500}{2000 - 1500} = \frac{0.5 - 0.234}{0.795 - 0.234} \Rightarrow Ml \approx 1737,1.$$

La médiane est toujours au dessous de la médiale sauf à l'égalité totale.

4. La courbe de concentration ou courbe de Lorentz est :



5. Le coefficient ou indice de Gini mesure le rapport entre l'aire sous la courbe de Lorentz et l'aire sous la droite de équirepartition. Il est défini par :

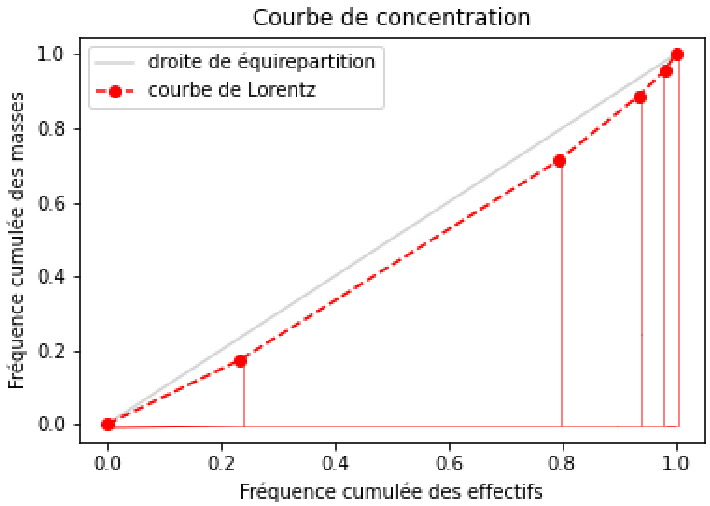
$$G = \frac{\text{Aire sous la courbe de Lorentz}}{\text{Aire sous la droite d'équirepartition}} = \frac{\int_0^1 l(t)dt}{1/2},$$

où l désigne la courbe de Lorentz. Le plus l'indice est faible, plus la répartition est inégalitaire, et plus l'indice est proche de 1, plus la répartition est égalitaire.

On va calculer l'indice de concentration de Gini comme :

Pour calculer l'intégral $\int_0^1 l(t)dt$ on va décomposer l'aire au dessous de la courbe comme une addition d'aires de trapèzes (voir figure) :

$$\int_0^1 l(t)dt = A(T_1) + A(T_2) + A(T_3) + A(T_4) + A(T_5).$$



On calcule l'aire de chacun de ces trapèzes :

$$
\begin{aligned}
A(T_1) &= (0.234 - 0)\frac{(0.174 + 0)}{2} \approx 0.020358,\\
A(T_2) &= (0.795 - 0.234)\frac{(0.174 + 0.714)}{2} \approx 0.249084,\\
A(T_3) &= (0.935 - 0.795)\frac{(0.714 + 0.888)}{2} \approx 0.11214,\\
A(T_4) &= (0.982 - 0.935)\frac{(0.888 + 0.959)}{2} \approx 0.0.0434,\\
A(T_5) &= (1 - 0.982)\frac{(0.959 + 1)}{2} \approx 0.0434,
\end{aligned}
$$

En additionnant l'aire de tous les trapèzes, on obtient $\int_0^1 l(t)dt \approx 0.44258$, donc $G \approx 0.88516$.

Exercice 7

1. Quand on considère un couple de variables aléatoires, on appelle lois marginales les lois des composantes seules.
   Pour les trouver, on peut ajouter une dernière ligne avec le total par colonne et une dernière colonne avec le total par ligne :

X \Y	1	2	3	4	**Total**
1	0,08	0,04	0,16	0,12	0.4
2	0,04	0,02	0,08	0,06	0.2
3	0,08	0,04	0,16	0,12	0.4
Total	0.2	0.1	0.4	0.3	1

   Alors, la loi marginale de X est :

$$
\begin{aligned}
P(X = 1) = 0.4\\
P(X = 2) = 0.2\\
P(X = 3) = 0.4
\end{aligned}
$$

Et la loi marginale de Y est :

$$P(Y=1)=0.2$$
$$P(Y=2)=0.1$$
$$P(Y=3)=0.4$$
$$P(Y=4)=0.3$$

Pour établir que X et Y sont indépendantes, il faut vérifier :

$$P((X,Y)=(i,j))=P(X=i)P(Y=j), \text{ pour } i=1,2,3 \text{ et } j=1,2,3,4.$$

Ici, on vérifie facilement que ces relations sont vraies et donc X et Y sont indépendantes.

2. Comme X et Y sont indépendantes, on sait que $COV(X,Y)=0$.
3. Soit $Z=X+Y$. Aors, $\Omega(Z)=\{2,3,4,5,6,7\}$. Donc, pour déterminer la loi de Z, il suffit de donner $P(Z=2),\ldots,P(Z=7)$:

$$P(Z=2)=P((X,Y)=(1,1))=0.08$$
$$P(Z=3)=P((X,Y)=(1,2))+P((X,Y)=(2,1))=0.08$$
$$P(Z=4)=P((X,Y)=(1,3))+P((X,Y)=(3,1))+P((X,Y)=(2,2))=0.26$$
$$P(Y=5)=P((X,Y)=(1,4))+P((X,Y)=(2,3))+P((X,Y)=(3,2))=0.24$$
$$P(Y=6)=P((X,Y)=(2,4))+P((X,Y)=(3,3))=0.22$$
$$P(Y=7)=P((X,Y)=(3,4))=0.12$$

4. Soit $T=\inf(X,Y)$ et $U=\sup(X,Y)$. Alors $\Omega(T)=\{1,2,3\}$ et $\Omega(U)=\{1,2,3,4\}$. Pour donner la loi de la couple (T,U), il suffit de donner $P((T,U)=(i,j))$ pour tout couple (i,j) tel que $i=1,2,3$, $j=1,2,3,4$ et $i\leq j$.

$$P((T,U)=(1,2))=P((X,Y)=(1,2))+P((X,Y)=(2,1))=0,08,$$
$$P((T,U)=(1,3))=P((X,Y)=(1,3))+P((X,Y)=(3,1))=0,24,$$
$$P((T,U)=(1,4))=P((X,Y)=(1,4))=0,12,$$
$$P((T,U)=(2,2))=P((X,Y)=(2,2))=0,02,$$
$$P((T,U)=(2,3))=P((X,Y)=(2,3))+P((X,Y)=(3,2))=0,12,$$
$$P((T,U)=(2,4))=P((X,Y)=(2,4))=0,06,$$
$$P((T,U)=(3,3))=P((X,Y)=(3,3))=0,16\ ,$$
$$P((T,U)=(3,4))=P((X,Y)=(3,4))=0,12.$$