Durée de préparation : 1 heure 30.

Question de cours :

Rappelez la démarche d'un test d'hypothèse, quel est le risque qu'on contrôle ?

Exercice 1

On considère un pays décomposé en trois régions : la capitale, sa périphérie et la province. On suppose qu'à l'année 0 de l'analyse, la population de ce pays est répartie de la manière suivante : 24% de la population habite dans la capitale, 6% réside dans la périphérie et le reste de la population vit en province.

Pour modéliser l'exode rural, on considère que les mouvements de la population sont décrits par les mécanismes suivants. D'une année sur l'autre :

- parmi les habitants de province, 1 sur 10 déménage vers la capitale et 2 sur 10 vers la périphérie ;
- parmi les habitants de la périphérie, 1 sur 10 se déplace vers la capitale et 1 sur 10 décide de s'installer en province ;
- parmi les habitants de la capitale, 1 sur 10 décide d'aller habiter en périphérie.

On suppose en outre que la population totale est constante. On note a_n, b_n et c_n les parts de la population vivant au bout de n années respectivement dans la capitale, dans la périphérie ou en province.

1. Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même avec b_{n+1} et c_{n+1}. Quel lien y a-t-il entre a_n, b_n et c_n ?

   En traduisant l'énoncé, on obtient pour tout $n \geq 0$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,9\ a_n + 0,1\ b_n + 0,1\ c_n \\ b_{n+1} = 0,1\ a_n + 0,8\ b_n + 0,2\ c_n \\ c_{n+1} = 0,1\ b_n + 0,7\ c_n \end{cases}$$

   De plus, comme a_n, b_n et c_n représentent des proportions de la population, on a $a_n + b_n + c_n = 1$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ -0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.

   Pour tout $n \geq 0$, $c_n = 1 - a_n - b_n$. En injectant cette dernière égalité dans les équations de récurrence trouvées auparavant, on obtient

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,1 + 0,8\ a_n \\ b_{n+1} = 0,2 - 0,1\ a_n + 0,6\ b_n \end{cases}$$

   ce qui se traduit matriciellement par l'égalité demandée.

3. Déterminer une matrice C telle que $C = AC + B$.

   Posons $C = {}^t(c_1\ c_2)$. On obtient alors le système

$$\begin{cases} c_1 = 0,8\ c_1 + 0,1 \\ c_2 = -0,1\ c_1 + 0,6\ c_2 + 0,2 \end{cases}$$

   dont la solution est $c_1 = 0,5$ et $c_2 = 0,375$.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n = X_n - C$. Montrer que, pour tout entier n, $Y_n = A^n Y_0$.

   En soustrayant l'égalité obtenue à la question 3 à celle obtenue à la question 2, on obtient que pour tout entier naturel n,
   $$X_{n+1} - C = A\big(X_n - C\big).$$
   D'où, par récurrence, pour tout entier naturel n, $Y_n = A^n Y_0$.

5. Quelles sont les valeurs propres de A ? Déterminer une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

   Pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont celles qui se trouvent sur la diagonale. Donc les valeurs propres sont $0,8$ et $0,6$. De plus, en résolvant des systèmes d'équations, on trouve que ${}^t(-2\ 1)$ est vecteur propre pour la valeur propre $0,8$ et ${}^t(0\ 1)$ pour la valeur propre $0,6$. D'où
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}$$
   avec
   $$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a
   $$A^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ \frac{0,6^n - 0,8^n}{2} & 0,6^n \end{pmatrix}, \text{ puis que } X_n = \begin{pmatrix} 0,5 - 0,26 \times 0,8^n \\ 0,375 - 0,445 \times 0,6^n + 0,13 \times 0,8^n \end{pmatrix}.$$

   Si n est un entier naturel,
   $$\begin{aligned} A^n &= A \times \ldots \times A \\ &= P \times P^{-1}AP \times \ldots \times P^{-1}AP \times P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ 0 & 0,6^n \end{pmatrix} P^{-1}, \end{aligned}$$
   puis, en développant le produit, on obtient
   $$A^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ \frac{0,6^n - 0,8^n}{2} & 0,6^n \end{pmatrix}.$$
   D'où
   $$X_n = Y_n + C = A^n Y_0 + C.$$
   Or $Y_0 = {}^t(0,24\ 0,06) - C = {}^t(-0,26\ \ -3,15)$, donc
   $$X_n = \begin{pmatrix} 0,5 - 0,26 \times 0,8^n \\ 0,375 - 0,445 \times 0,6^n + 0,13 \times 0,8^n \end{pmatrix}.$$

7. En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n. Quelle sera la répartition de la population de ce pays à long terme ?

   Directement d'après la question précédente, on obtient, pour tout entier naturel n,
   $$\begin{cases} a_n = 0,5 - 0,26 \times 0,8^n, \\ b_n = 0,375 - 0,445 \times 0,6^n + 0,13 \times 0,8^n, \\ c_n = 0,125 + 0,445 \times 0,6^n + 0,13 \times 0,8^n. \end{cases}$$
   On a donc $a_n \to 0,5$, $b_n \to 0,375$ et $c_n \to 0,125$ quand $n \to \infty$.

Exercice 2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-après :

X \ Y	1	2	3	4
1	0,08	0,04	0,16	0,12
2	0,04	0,02	0,08	0,06
3	0,08	0,04	0,16	0,12

1. Déterminer les lois marginales de X et Y et indiquer si ces variables aléatoires sont indépendantes.

   Quand on considère un couple de variables aléatoires, on appelle lois marginales les lois des composantes seules. Ainsi, la loi marginale de X est la donnée de $\mathbf{P}(X=1)$, $\mathbf{P}(X=2)$ et $\mathbf{P}(X=3)$. Déterminons par exemple $\mathbf{P}(X=1)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=1) &= \mathbf{P}(X=1, Y=1) + \mathbf{P}(X=1, Y=2) + \mathbf{P}(X=1, Y=3) + \mathbf{P}(X=1, Y=4)\\ &= 0,08 + 0,04 + 0,16 + 0,12\\ &= 0,4.\end{aligned}$$

   De même,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=2) &= 0,2\ ,\\ \mathbf{P}(X=3) &= 0,4\ ,\\ \mathbf{P}(Y=1) &= 0,2\ ,\\ \mathbf{P}(Y=2) &= 0,1\ ,\\ \mathbf{P}(Y=3) &= 0,4\ ,\\ \mathbf{P}(Y=4) &= 0,3\ .\end{aligned}$$

   On vérifie que $\mathbf{P}(X=1) + \mathbf{P}(X=2) + \mathbf{P}(X=3) = 1$ et de même pour Y. Enfin, pour établir que X et Y sont indépendantes, il suffit d'établir la relation

$$\mathbf{P}(X=i, Y=j) = \mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}(Y=j), \text{ pour } i = 1,2,3 \text{ et } j = 1,2,3,4.$$

   Ici, on vérifie facilement que ces relations sont vraies.

2. Déterminer $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

   Par définition, $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$. (On remarque que $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{Var}(X)$.) Cependant, ici, on n'a pas besoin de faire le calcul, car, comme X et Y sont indépendantes, on sait que $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$. En effet, $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ quand X et Y sont indépendantes.

3. Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.

   Comme $1 \leq X \leq 3$ et $1 \leq Y \leq 4$, on a $2 \leq X + Y \leq 7$. Donc, pour déterminer la loi de $X + Y$, il suffit de donner $\mathbf{P}(X+Y=2), \ldots, \mathbf{P}(X+Y=7)$. Déterminons par exemple $\mathbf{P}(X+Y=2)$. On a que $X + Y = 2 \Leftrightarrow X = Y = 1$, donc

$$\mathbf{P}(X+Y=2) = \mathbf{P}(X=1, Y=1) = 0,08\ .$$

   De même,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X+Y=3) &= \mathbf{P}(X=1, Y=2) + \mathbf{P}(X=2, Y=1)\\ &= 0,08\ .\end{aligned}$$

On obtient ensuite

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y=4) &= 0,26 \ , \\
\mathbf{P}(X+Y=5) &= 0,24 \ , \\
\mathbf{P}(X+Y=6) &= 0,22 \ , \\
\mathbf{P}(X+Y=7) &= 0,12 \ .
\end{aligned}$$

4. On pose $T = \inf(X, Y)$ et $U = \sup(X, Y)$. Déterminer la loi du couple (T, U).

   Il suffit de déterminer $p_{i,j} \triangleq \mathbf{P}\Big((T, U) = (i, j)\Big)$ pour tout couple (i, j) tel que $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 4$ et $i \leq j$. Par exemple, $p_{1,1} = \mathbf{P}(X = Y = 1) = 0,08$, et

$$\begin{aligned}
p_{1,2} &= \mathbf{P}(X=1, Y=2) + \mathbf{P}(X=2, Y=1) \\
&= 0,08 \ .
\end{aligned}$$

   De même, on obtient

$$\begin{aligned}
p_{1,3} &= 0,24 \ , \\
p_{1,4} &= 0,12 \ , \\
p_{2,2} &= 0,02 \ , \\
p_{2,3} &= 0,12 \ , \\
p_{2,4} &= 0,06 \ , \\
p_{3,3} &= 0,16 \ , \\
p_{3,4} &= 0,12 \ .
\end{aligned}$$