Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Analyse 4 : correction

2021-2022

Exercice 1 (2014)

1. La fonction f représente la marge réalisée par l'entreprise grâce à la vente de x tonnes de billes de type A et y tonnes de billes de type B.

2. On cherche $\max_{x+y=200} f(x,y)$. On introduit le Lagrangien $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(x+y-200)$ pour $x, y \geq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les dérivées partielles existent et pour x, y, λ adéquats, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 1056 - 18x + 6y - \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 448 - 10y + 6x - \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -x - y + 200 \end{cases}$$

Or la méthode du Lagrangien consiste à trouver les (x, y, λ) qui annulent les trois dérivées partielles. La troisième dérivée partielle est exactement la contrainte.

$$\begin{cases} 1056 - 18x + 6y - \lambda = 0 \\ 448 - 10y + 6x - \lambda = 0 \\ -x - y + 200 = 0 \end{cases}$$

Ce système correspond à :

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & 1 \\ -6 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1056 \\ 448 \\ 200 \end{pmatrix}$$

et la solution est

$$x = 95,2 \qquad y = 104,8 \qquad \lambda = -28,8$$

Alternativement, de la première et deuxième équations on a $608 - 24x + 16y = 0$ et en remplaçant $x = 200 - y$, on obtient la solution précédente.

Le point $(95,2, 104,8)$ est donc le seul candidat pour être un maximum de f sous notre contrainte à l'intérieur du domaine de définition $(x,y) \in {\mathbb{R}^+}^2$. Au bord on a deux candidats supplémentaires : $(200,0)$ et $(0,200)$.

$$f(95,2,\ 104,8) = 45860,8 \qquad f(200,\ 0) = -173800 \qquad f(0,\ 200) = -135400$$

Donc on peut déjà éliminer les deux candidats du bord. Pour prouver que c'est effectivement un maximum, il suffit de prouver qu'il existe un maximum, qui sera celui qu'on a trouvé. Or l'ensemble des $\{(x,y) | x+y = 200, x \geq 0, y \geq 0\}$ est donné par des conditions fermées, et on voit facilement que f est bornée dans cet ensemble, donc cette fonction admet un maximum. D'où le maximum de f sous la contrainte $x + y = 200$ est $45860,8$ pour $x = 95,2$ et $y = 104,8$.

3. Le multiplicateur de Lagrange λ est égal à $-28,8$. Il représente la sensibilité du profit maximal par rapport à la contrainte $x + y$ donc à la production totale.

En effet, si l'on note $g(x,y) = x + y - 200$, comme le point de maximum est solution de la méthode du Lagrangien, on sait que

$$\nabla L(x, y, \lambda) = 0$$

et cela veut dire aussi que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

$\nabla g(x,y)$ nous indique la direction de croissance maximale de g, tandis que $\nabla f(x,y)$ indique la direction de croissance maximale de f. Puisque λ est négatif, réduire g nous amène à augmenter f. Réduire g correspond à réduire $x + y$, c'est à dire la production totale. Il est donc plus profitable de réduire la production totale pour augmenter le profit maximal.

4. (a) Le nouveau problème est de trouver $\arg\max_{x+y\leq 200} f(x,y)$. Autrement dit, on cherche le maximum de f dans le domaine $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 200\}$.

   (b) On résout alors

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1056 - 18x + 6y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 448 - 10y + 6x = 0 \end{cases}$$

   La première équation impose $y = 3x - 176$ et en remplaçant dans la deuxième on obtient $24x - 2208 = 0$. On trouve une seule solution : $x = 92$ et $y = 100$.

   Les candidats pour maximum global sur l'ensemble $x + y \leq 200$, sont les points de bord, et celui qu'on a trouvé à l'intérieur.

   Au bord $\{(0,y) \,|\, 0 \leq y \leq 200\}$,

$$f(0,y) = 448y - 5y^2 - 25000 = -5(y - 224/5)^2 + \frac{224^2}{5} - 25000 = -5(y - 44.8)^2 - 14964.8 < 0.$$

   Au bord $\{(x,0) \,|\, 0 \leq x \leq 200\}$,

$$f(x,0) = 1056x - 9x^2 - 25000 = -9(x - 528/9)^2 + \frac{528^2}{9} - 25000 = -9(x - 58.7)^2 + 5976 \leq 5976.$$

   Au bord $\{(x,y) \,|\, x + y = 200\}$ nous avons déjà calculé

$$f(x,y) \leq 45860.8.$$

   Et au point $(92, 100)$ on a $f(92, 100) = 45976$. Donc le maximum est atteint en ce point.

   Une autre façon de conclure que $(92, 100)$ est un point maximal :

   On remarque que la matrice hessienne de f est en **tout** point $H = \begin{pmatrix} -18 & 6 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$, avec

$$\begin{cases} \det(H) = 144 > 0, \\ \mathrm{trace}(H) = -28 < 0, \end{cases}$$

   d'où f est concave sur tout l'ensemble de définition. Aussi, le domaine de définition de f est un ensemble convexe. Donc le seul point critique est un maximum local, et c'est aussi le maximum global.

   (c) Oui.

Exercice 2 (2009)

1. Quels que soient x, y réels positifs et quel que soit λ réel, on a

$$U(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^{0,8} (\lambda y)^{0,2} = \lambda x^{0,8} y^{0,2}.$$

   U est donc homogène de degré 1. L'utilité est donc proportionnelle aux sommes dépensées.

2. A priori nous ne savons pas si l'utilité maximale est atteinte lorsqu'on dépense la totalité de la somme dont on dispose. Ici c'est le cas car la fonction $U(x,\cdot)$ pour n'importe quelle valeur de x est croissante. Cela montre qu'en gardant la même quantité du bien B_1, plus on achète de B_2 plus l'utilité est grande. Donc l'utilité maximale, si elle existe, doit être atteinte lorsque la totalité de la somme S_0 est dépensée.

   Ainsi le problème est de maximiser $U(x,y)$ sous la contrainte d'égalité

   $$xp_1 + yp_2 = S_0,$$

   ce qui revient à maximiser la fonction f définie sur $[0, S_0/p_1]$ par $f(x) = U\Big(x, \frac{S_0 - xp_1}{p_2}\Big)$. Or f est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout x dans $[0, S_0/p_1]$,

   $$f'(x) = 0,8x^{-0,2}\Big(\frac{S_0 - xp_1}{p_2}\Big)^{0,2} - 0,2\frac{p_1}{p_2}x^{0,8}\Big(\frac{S_0 - xp_1}{p_2}\Big)^{-0,8} = \frac{0,8S_0 - p_1 x}{p_2 x^{0,2}\Big(\frac{S_0 - xp_1}{p_2}\Big)^{0,8}}$$

   d'où

   $$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,8\frac{S_0}{p_1}.$$

   Ce point est donc potentiellement un extremum, et l'énoncé demande d'admettre qu'il s'agit d'un maximum. U sous la contrainte de cette question est donc maximisée en $x = 0,8\frac{S_0}{p_1}$, $y = 0,2\frac{S_0}{p_2}$ par $(0,8S_0/p_1)^{0,8}(0,2S_0/p_2)^{0,2}$, soit

   $$S_0\frac{0.8^{0.8}0.2^{0.2}}{p_1^{0.8}p_2^{0.2}}.$$

   On peut aussi utiliser la méthode de Lagrange. On pose le Lagrangien :

   $$L(x,y,\lambda) = U(x,y) - \lambda(xp_1 + yp_2 - S_0).$$

   Les extrema sous contrainte sont parmi les points (x,y) où il existe λ qui annule les trois dérivées partielles de L.

   $$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} & = 0.8x^{-0.2}y^{0.2} - \lambda p_1 \\ \frac{\partial L}{\partial y} & = 0.2x^{0.8}y^{-0.8} - \lambda p_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} & = xp_1 + yp_2 - S_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.8(xy^{-1})^{-0.2} & = \lambda p_1 & \text{(eq.1)} \\ 0.2(xy^{-1})^{0.8} & = \lambda p_2 & \text{(eq.2)} \\ xp_1 + yp_2 & = S_0 & \text{(eq.3)} \end{cases}$$

   $$\text{diviser eq.2 par eq.1} \ \Rightarrow xy^{-1} = \frac{4p_2}{p_1}$$

   $$\text{mettre } x = \frac{4p_2}{p_1}y \text{ dans eq.3} \ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{0.8S_0}{p_1} \\ y = \frac{0.2S_0}{p_2} \end{cases}$$

   Application numérique : Le maximum est atteint en $10,07$ à 10^{-2} près.

3. Si les prix sont maintenant p'_1 et p'_2, le consommateur, pour une somme investie S_1, a pour utilité maximale

   $$\Big(0,8\frac{S_1}{p'_1}\Big)^{0,8}\Big(0,2\frac{S_1}{p'_2}\Big)^{0,2}.$$

   Pour avoir égalité des deux utilités avant et après l'augmentation des prix, il faut donc que

   $$S_1 0.8^{0.8}0.2^{0.2}\frac{1}{p_1'^{0.8}p_2'^{0.2}} = S_0 0.8^{0.8}0.2^{0.2}\frac{1}{p_1^{0.8}p_2^{0.2}}$$

   $$S_1 = S_0\Big(\frac{p'_1}{p_1}\Big)^{0,8}\Big(\frac{p'_2}{p_2}\Big)^{0,2}.$$

4. (a) On a donc

   $$V_{1/0} = 100 \times \Big(\frac{p'_1}{p_1}\Big)^{0,8}\Big(\frac{p'_2}{p_2}\Big)^{0,2}.$$

(b) On peut réécrire cette formule comme

$$V_{1/0} = \left(100\frac{p_1'}{p_1}\right)^{0,8}\left(100\frac{p_2'}{p_2}\right)^{0,2},$$

qui est une moyenne géométrique des indices des prix avec les coefficients $0,8$ et $0,2$.

5. L'indice de Laspeyres est défini par

$$L_{1/0} = 100\ \frac{x_0p_1' + y_0p_2'}{x_0p_1 + y_0p_2},$$

où $x_0 = 0,8S_0/p_1$ et $y_0 = 0,2S_0/p_2$ sont les quantités des biens B_1 et B_2 maximisant l'utilité au temps $t = 0$.

6. En remplaçant dans l'expression de l'indice de Laspeyres, on trouve

$$L_{1/0} = 0,8\Big(100\frac{p_1'}{p_1}\Big) + 0,2\Big(100\frac{p_1'}{p_1}\Big),$$

et donc l'indice de Laspeyres est une moyenne arithmétique des indices des prix, avec les poids $0,8$ et $0,2$.

7. (a) Étant donné l'inégalité rappelée dans l'énoncé, l'indice de Laspeyres est plus grand que l'indice vrai du coût de la vie.

   (b) Application numérique : $V_{1/0} = 138,64$ et $L_{1/0} = 138,67$ à 10^{-2} près.