Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Analyse 2 : correction

2022-2023

Exercice 1

1. Nous allons montrer que l'image par $f : x \to x - 1 + 2e^{-x}$ de l'intervalle I défini par $I = [\ln 2, 2]$ est un intervalle inclus dans I. f est définie et dérivable sur I :
$$f'(x) = 1 - 2e^{-x}.$$
$f'(x)$ est nulle pour $x = \ln 2$ et strictement positive pour $\ln 2 < x \leq 2$, donc f est une bijection strictement croissante de I sur : $[f(\ln 2), f(2)] = \left[\ln 2, 1 + \frac{2}{e^2}\right] \subset I$.
On a montré que si $u_n \in I$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in I$. Comme $u_0 \in I$, par récurrence $u_n \in I$ pour tout n.
2. L'examen des premières valeurs de la suite nous incite à penser que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :
$$u_0 = 2, \qquad u_1 = 1 + \frac{2}{e^2} \approx 1.27, \qquad u_2 \approx 0.83.$$
Comme f est strictement croissante dans l'intervalle I, si $u_{n+1} \leq u_n$ alors
$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq f(u_n) = u_{n+1}.$$
Comme $u_1 \leq u_0$, par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour tout n.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\ln 2$, elle converge donc vers un nombre l qui est solution de l'équation
$$l = f(l)$$
car f est continue sur I.
$$l = f(l) \quad \Leftrightarrow \quad l = l - 1 + 2e^{-l} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-l} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{l} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad l = \ln 2.$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers le nombre $l = \ln 2$.

Exercice 2

$(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite numérique définie par la relation de récurrence :
$$a_0 = 1, \quad a_n = pa_{n-1}, \forall n \geq 1.$$
On a alors que
$$a_n = a_0 p^n = p^n.$$
On définit la série $(S_k)_{k\geq 0}$ de terme général $(a_n)_{n\geq 0}$:
$$S_k = \sum_{i=0}^{k} a_i = \sum_{i=0}^{k} p^i.$$

Rappelons que la somme partielle d'une suite géométrique de raison p vaut :

$$\sum_{i=0}^{k} p^i = \frac{1-p^{k+1}}{1-p}.$$

On a alors si $0 < p < 1$,

$$S_k = \sum_{i=0}^{k} p^i = \frac{1-p^{k+1}}{1-p} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{1-p}.$$

Et si $p \geq 1$, (S_k) diverge.

Exercice 3

1. Notons u_n le terme général.

   $$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

   donc

   $$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

   et

   $$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1.$$

   La série converge.

2. La série est la somme de deux séries convergentes.

   $$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n} + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

   La série est donc convergente.

3. Le terme général $\frac{n+\ln n}{n^2}$ est équivalent à $\frac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$. La série diverge car la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

4. Notons u_n le terme général.

   $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2+n+1} = 2$$

   D'après la règle de Cauchy, la série diverge.

5. La série est alternée et le terme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 et est décroissant. Le critère des séries alternées nous dit que la série est convergente.

Exercice 4 (2020, une partie)

1. Conditionnellement au fait que n clients se soient présentés à la caisse, X suit une loi binomiale de paramètres n, p, donc $\mathbf{P}(X = k|Z = n) = 0$ si $k > n$, et si $k \in \{0, \ldots, n\}$ c'est $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

2. (a) On reconnaît la série qui définit l'exponentielle:

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n}{n!}\lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^n}{n!} = e^{(1-p)\lambda}.$$

(b) La formule des probabilités totales et la réponse de la question 1 donnent :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X=k|Z=n)\mathbf{P}(Z=n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} p^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-p)^{n-k} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-k}\lambda^k}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda^k p^k \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k}\lambda^{n-k}}{(n-k)!}.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $i = n-k$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=k) &= e^{-\lambda} \lambda^k p^k \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-p)^i \lambda^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{(1-p)\lambda} \\
&= e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

(c) X suit donc une loi de Poisson de paramètre λp, et le même raisonnement montre que Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

3. Pour montrer que X, Y sont indépendantes, il faut montrer que $\mathbf{P}(X=i, Y=j) = \mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}(Y=j)$. Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=i, Y=j) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X=i, Y=j|Z=n) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{n \geqslant i, n \geqslant j} \binom{n}{i} p^i (1-p)^j \mathbf{1}_{i+j=n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}
\end{aligned}$$

en effet, si $Z=n$ et $X=i$ on a nécessairement $Y=n-j$. Finalement, la somme ci-dessus n'a qu'un seul terme, qui correspond à $n=i+j$, et donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=i, Y=j) &= \binom{n}{i} p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{p^i}{i!} \frac{(1-p)^{n-i}}{(n-i)!} e^{-\lambda} \lambda^n \\
&= \frac{p^i}{i!} \frac{(1-p)^j}{j!} e^{-\lambda p - \lambda(1-p)} \lambda^i \lambda^j \\
&= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \\
&= \mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}(Y=j)
\end{aligned}$$

d'où l'indépendance de X et Y.