Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Algèbre linéaire 2 : correction

2021-2022

Exercice 1 (2014)

1. (a) Cela se vérifie par calcul direct.

   (b) On sait que $X_{n+1} = AX_n + C$ et dans la question précédente on a montré que $X = AX + C$. La soustraction de ces deux égalités nous donne $X_{n+1} - X = A(X_n - X)$. Finalement en remplaçant $X_n - X$ par Y_n, on obtient $Y_{n+1} = AY_n$.
   Par récurrence on peut montrer que $Y_n = A^n Y_0$, ce qui donne $X_n = Y_n + X = A^n(X_0 - X) + X$.

2. (a) Un calcul rapide montre que $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On voit bien que $B^2 = 2I + B$.

   (b) Pour $n = 0$, $A^0 = I$ donc $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0$. Pour $n = 1$, d'après la définition de B, $A^1 = A = \frac{1}{2}I + \frac{1}{4}B$, et les suites vérifient bien $\alpha_1 = \frac{1}{2} = \frac{\alpha_0+\beta_0}{2}$ et $\beta_1 = \frac{1}{4} = \frac{\alpha_0+3\beta_0}{4}$.
   Supposons que pour n nous avons $A^n = \alpha_n I + \beta_n B$. Alors

$$A^{n+1} = A^n A = (\alpha_n I + \beta_n B)A.$$

   Si on remplace A à droite grâce à la relation $A = \frac{1}{4}(2I + B)$, on obtient :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= (\alpha_n I + \beta_n B)A \\ &= (\alpha_n I + \beta_n B)\frac{1}{4}(2I + B) \\ &= \frac{1}{2}\alpha_n I + \left(\frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{4}\alpha_n\right) B + \frac{1}{4}\beta_n B^2 \\ &= \frac{1}{2}\alpha_n I + \left(\frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{4}\alpha_n\right) B + \frac{1}{4}\beta_n(2I + B) \\ &= \left(\frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\beta_n\right) I + \left(\frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{4}\alpha_n + \frac{1}{4}\beta_n\right) B \\ &= \alpha_{n+1} I + \beta_{n+1} B \end{aligned}$$

   Par récurrence, la formule est valable pour $n \geq 0$.

3. Soit $U_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a)

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n) \\ \frac{1}{4}(\alpha_n + 3\beta_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = MU_n.$$

   Par récurrence, $U_n = M^n U_0$.

(b) Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$MV = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V$ et $MW = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} = 0.25W$.

V est donc un vecteur propre de M de valeur propre 1 et W est un vecteur propre de valeur propre 0.25.

(c) Comme on a trouvé deux vecteurs V et W et qu'ils forment une famille libre, et M est une matrice 2×2, alors $\{V, W\}$ est une base qui diagonalise M. Posons alors

$$P = \begin{pmatrix} V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

où les vecteurs propres V et W sont les colonnes de P, et les valeurs propres associées sont disposées dans l'ordre sur la diagonale de D. On a alors $M = PDP^{-1}$. En consequence, $M^n = PD^nP^{-1}$.

(d) Comme D est diagonale, D^n est facile à calculer. On remplace chaque nombre sur la diagonale par sa puissance n-ième. Donc

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.25^n \end{pmatrix}.$$

On peut calculer P^{-1} de la manière suivante. On pose $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Puis, on impose

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} a+b & -2a+b \\ c+d & -2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -2a+b=0 \\ c+d=0 \\ -2c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=-\frac{1}{3} \\ d=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis le calcul matriciel donne

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\times 0.25^n & 2-2\times 0.25^n \\ 1-0.25^n & 2+0.25^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = U_n = M^n \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\times 0.25^n \\ 1-0.25^n \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Donc α_n et β_n convergent tous les deux vers $\frac{1}{3}$ quand $n \to +\infty$.

4. Dans la question $(2b)$, on a $A^n = \alpha_n I + \beta_n B$. Alors,

$$A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}(I+B) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $X_n = A^n(X_0 - X) + X$, et $X_0 - X = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}(I+B)\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-\frac{10}{3} \\ 20-\frac{10}{3} \\ 12-\frac{10}{3} \end{pmatrix}.$$