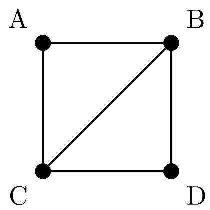
Préparation à l’agrégation externe de Sciences Sociales

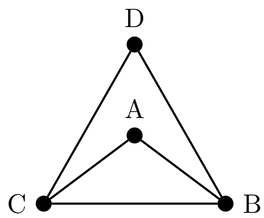
Graphes

2021-2022

Définition 1. *On appelle* graphe non orienté *un ensemble fini d’éléments appelés* sommets*, et un ensemble de couples de sommets appelés* arêtes*.*

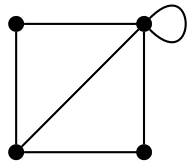


Ce graphe possède 4 sommets et 5 arêtes.



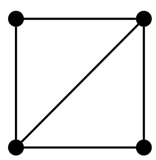
Une autre représentation du graphe de gauche.

Définition 2. *Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même.*

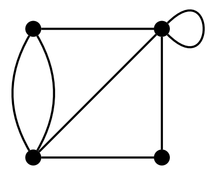


Exemple : Ce graphe possède une boucle.

Définition 3. *Un graphe est dit simple lorsqu’il ne présente aucune boucle et si deux arêtes ne relient jamais une même paire de sommets.*



Ce graphe est simple.



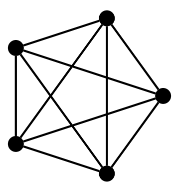
Ce graphe n’est pas simple.

Définition 4. *L’ordre d’un graphe est son nombre total de sommets.*

Définition 5. *Le degré d’un sommet est le nombre d’arêtes partant de ce sommet.*

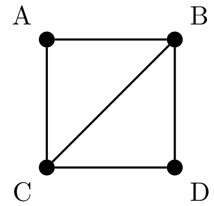
Définition 6. *Deux sommets reliés par une arête sont adjacents.*

Définition 7. *Un graphe est dit complet lorsque tous ses sommets sont adjacents deux à deux.*



Exemple : Graphe complet.

Théorème 1. *La somme des degrés des sommets d'un graphe non orienté est égale au double du nombre total d'arêtes de ce graphe.*



Exemple : Le sommet A est de degré 2, le sommet B de degré 3, le sommet C de degré 3 et le sommet D de degré 2. La somme des degrés est donc $2+3+3+2=10$. Le graphe possède un total de 5 arêtes.

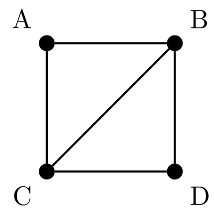
Définition 8. *Une chaîne, dans un graphe non orienté, est une suite d'arêtes mises bout à bout reliant deux sommets du graphe. La longueur de la chaîne est le nombre d'arêtes qui la compose.*

Définition 9. *Une chaîne est dite fermée lorsque le sommet de départ et le sommet d'arrivé sont confondus.*

Définition 10. *Un cycle est une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.*

Définition 11. *La distance entre deux sommets d'un graphe est la longueur de la plus courte chaîne reliant ces deux sommets.*

Définition 12. *Le diamètre d'un graphe est la plus longue distance entre deux sommets quelconques.*

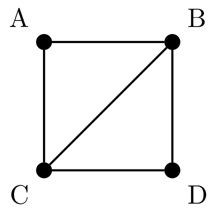


Exemple : A-B-C est une chaîne de longueur 2. A-B-C-D-B-A est une chaîne fermée de longueur 5. Ce n'est pas un cycle car on parcourt deux fois l'arête A-B. A-B-C-A est un cycle de longueur 3. La distance de A à D est 2. Le diamètre de ce graphe est 2.

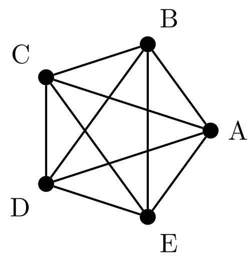
Définition 13. *Un graphe est connexe lorsque, pour chaque paire de sommets, il existe au moins une chaîne reliant les deux sommets.*

Définition 14. *Une chaîne eulérienne est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe, prises une seule fois.*

Définition 15. *Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident.*



B-A-C-D-B-C est une chaine eulérienne.
Ce graphe n'a pas de cycle eulérien.

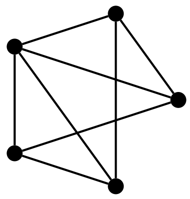


Ce graphe a plusieurs chaînes eulériennes et plusieurs cycles eulériens.
Par exemple : A-B-C-D-E-A-C-E-B-D-A.

Théorème 2. *Théorème d'Euler*

(a) Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne entre les sommets A et B (A≠B) si et seulement si A et B sont les seuls sommets de degré impair.

(b) Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.



Exemple : Ce graphe n'a pas de chaîne eulérienne ni de cycle eulérien car le nombre de ses sommets de degré impair est 4.

Les sept ponts de Königsberg Le problème des sept ponts de Königsberg est connu pour être à l'origine de la théorie des graphes. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ. Le problème a été résolu par Leonhard Euler en 1735.

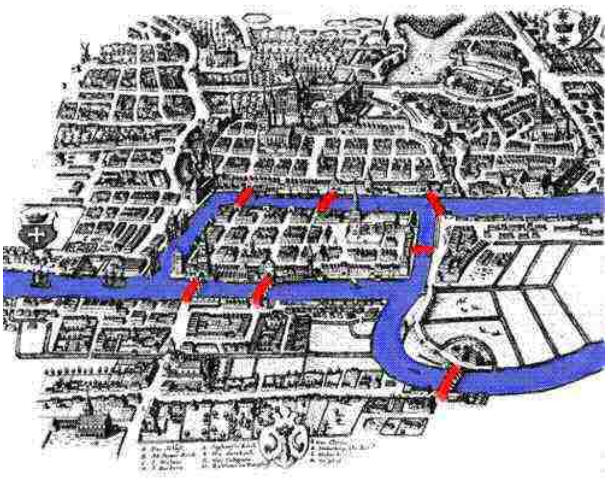
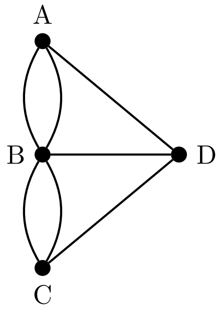


Figure 1: Les sept ponts de Königsberg

Le problème corresponds à trouver un cycle eulérien dans le graphe suivante :

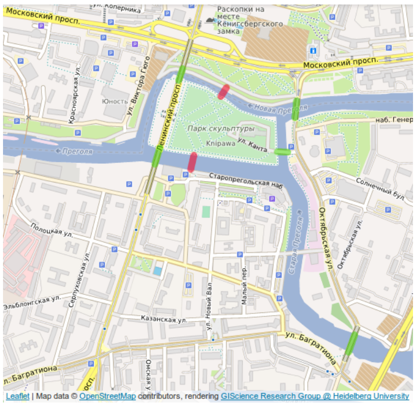


Les degrés des sommets sont

$$d(A) = 3 \qquad d(B) = 5 \qquad d(C) = 3 \qquad d(D) = 3$$

Par le Théorème d'Euler on sait qu'il n'y a pas de cycle eulérien et donc une telle promenade n'existe pas.

Les ponts de Kaliningrad L'ancienne ville de Königsberg est maintenant la ville Kaliningrad en Russie. Deux des ponts ont été détruits et deux autres ont été remplacés par une autoroute qui passe au dessus de l'ile, voir la figure. Est-ce qu'il existe des cycles ou des chaînes eulériennes ?



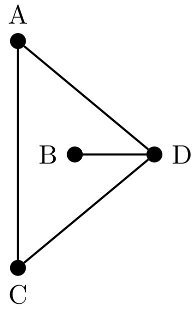
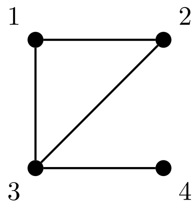


Figure 2: Ville de Kaliningrad, anciennement Königsberg.

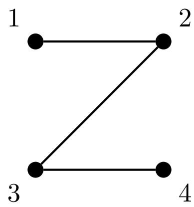
Définition 16. *La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté d'ordre n est la matrice carrée A de taille $n \times n$, dont l'élément $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes allant du sommet i vers le sommet j.*



Exemple : La matrice d'adjacence associée au graphe ci-dessus est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 3. *Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe et soit $p \geq 1$. Alors, l'élément d'indice i, j de la matrice A^p est égal au nombre de chaînes de longueur p reliant le sommet i au sommet j.*

Exemple



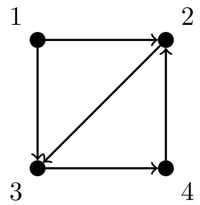
La matrice d'adjacence associée au graphe ci-dessus et ses puissances sont:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Par exemple, il y a en effet 2 chaînes de longueur 2 reliant le sommet 2 au sommet 2: 2-1-2 et 2-3-2, comme l'indique le coefficient $A^2_{2,2}$. Il y a 2 chaînes de longueur 3 reliant le sommet 1 et le sommet 2 comme l'indique l'élément $A^3_{1,2}$: 1-2-3-2 et 1-2-1-2. Aussi, il y a 3 chaînes de longueur 3 reliant le sommet 2 au sommet 3 comme l'indique l'élément $A^3_{2,3}$: 2-3-4-3, 2-1-2-3 et 2-3-2-3.

Définition 17. *Un graphe est dit orienté lorsque ses arêtes ont un sens de parcours. Chaque arête a alors un point d'origine et une extrémité et est représentée par une flèche.*

Définition 18. *La matrice d'adjacence d'un graphe orienté d'ordre n est la matrice carrée A de taille $n \times n$, dont l'élément $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes allant du sommet i vers le sommet j.*

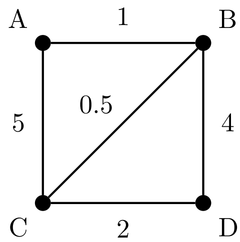


Exemple : Graphe orienté de matrice d'adjacence associée : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Définition 19. *Graphe pondéré*

Un graphe (orienté ou non) est dit pondéré lorsque ses arêtes sont affectées de nombres positifs.
Le poids d'une arête est le nombre positif qui lui est affecté.
Le coût (ou poids) d'une chaîne est la somme des poids des arêtes qui la compose.

Définition 20. *Une chaîne entre deux sommets donnés d'un graphe pondéré est dite de poids minimal (ou plus court chemin) lorsque toute autre chaîne reliant les deux sommets a un poids supérieur ou égal.*



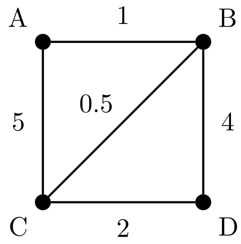
Exemple : Le plus court chemin entre A et D est A-B-C-D avec un poids de 3.5.

Algorithme de Dijkstra L'algorithme de Dijkstra sert à calculer les plus courts chemins à partir d'une source vers tous les autres sommets dans un graphe pondéré par des réels positifs.

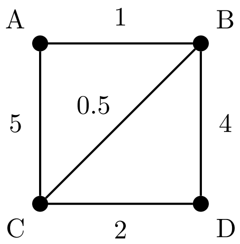
Soit un ensemble de sommets S, une liste de poids positives $P(x, y)$ pour chaque pair de sommets adjacents $x \in S$ et $y \in S$, et soit un sommet source $a \in S$. L'algorithme calcule pour tout $x \in S$, le coût $\mathscr{C}(x)$ du plus court chemin entre le sommet source a et le sommet x.

1. Initialiser les coûts comme infinie:
$$\mathscr{C}(x) = \infty \qquad \forall\, x \in S$$
2. Attribuer au sommet source a un coût zéro:
$$\mathscr{C}(a) = 0$$
3. Choisir le sommet $x \in S$ avec le plus petit coût $\mathscr{C}(x)$:
$$x \in S, \quad \text{tel que} \quad \mathscr{C}(x) = \min\{\mathscr{C}(i),\, i \in S\}$$
4. Enlever x de S
5. Pour chaque sommet $y \in S$ adjacent à x, mettre à jour son coût de sorte que le nouveau coût $\mathscr{C}(y)$ est le minimum entre le coût existant $\mathscr{C}(y)$ et $\mathscr{C}(x) + P(x, y)$:
$$\mathscr{C}(y) = \min\{\mathscr{C}(y),\, \mathscr{C}(x) + P(x, y)\}$$
6. Si S n'est pas vide, revenir à l'étape 3.

Exemple Calculer les plus court chemins à partir du sommet A dans le graphe suivant:

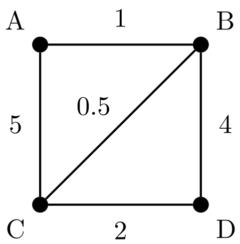


Itération 0



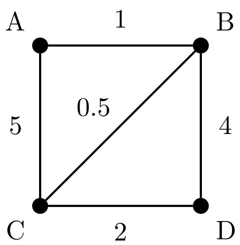
$$S = \{A, B, C, D\}$$
$$\mathscr{C}(A) = 0 \qquad \mathscr{C}(B) = \infty$$
$$\mathscr{C}(C) = \infty \qquad \mathscr{C}(D) = \infty$$

Itération 1



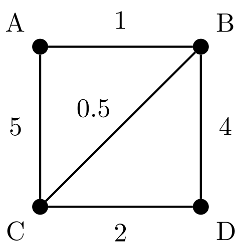
$$S = \{B, C, D\}$$
$$\mathscr{C}(A) = 0 \qquad \mathscr{C}(B) = 1$$
$$\mathscr{C}(C) = 5 \qquad \mathscr{C}(D) = \infty$$

Itération 2



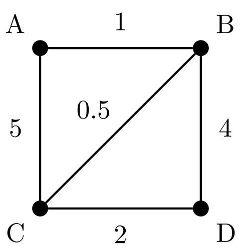
$$S = \{C, D\}$$
$$\mathscr{C}(A) = 0 \qquad \mathscr{C}(B) = 1$$
$$\mathscr{C}(C) = 1.5 \qquad \mathscr{C}(D) = 5$$

Itération 3



$$S = \{D\}$$
$$\mathscr{C}(A) = 0 \qquad \mathscr{C}(B) = 1$$
$$\mathscr{C}(C) = 1.5 \qquad \mathscr{C}(D) = 3.5$$

Itération 4



$$S = \varnothing$$
$$\mathscr{C}(A) = 0 \qquad \mathscr{C}(B) = 1$$
$$\mathscr{C}(C) = 1.5 \qquad \mathscr{C}(D) = 3.5$$