Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Analyse 1 : correction

2023-2024

Exercice 1

(a) $f(x) = e^{x^2}$

La dérivée de $u(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est $u'(x) = e^x$ et la dérivée de $v(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est $v'(x) = 2x$. La dérivée de $f = u \circ v$ est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = u'(v(x))v'(x) = 2xe^{x^2}.$$

(b) $g(x) = \ln(\frac{x^2}{2})$

Rappelons que la dérivée de $u(x) = \ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$ est $u'(x) = \frac{1}{x}$ et que la dérivée de $v(x) = \frac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$ est $v'(x) = x$. Donc les intervalles où l'on peut appliquer la dérivation de $g = u \circ v$ est $]0, +\infty[$ et $] - \infty, 0[$.

$$g'(x) = u'(v(x))v'(x) = \frac{1}{x^2/2}x = \frac{2}{x}.$$

(c) $h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

La dérivée de $u(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est $u'(x) = e^x$ et la dérivée de $v(x) = \sqrt{x}$ définie sur $]0, +\infty[$ est $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc les intervalles où l'on peut appliquer la dérivation de $h = \frac{u}{v}$ est $]0, +\infty[$.

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x\sqrt{x} - e^x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{x^3}}e^x.$$

(d) $l(x) = x\ln(x)$

La dérivée de $u(x) = x$ définie sur $\mathbb{R}$ est $u'(x) = 1$ et la dérivée de $v(x) = \ln x$ définie sur $]0, +\infty[$ est $v'(x) = \frac{1}{x}$. Donc les intervalles où l'on peut appliquer la dérivation de $l = uv$ est $]0, +\infty[$.

$$l'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \ln(x) + 1.$$

Exercice 2

(a) $\int_0^1 t^2 dt$

Une primitive de $t \to t^2$ est $F(t) = \frac{1}{3}t^3$. Donc

$$\int_0^1 t^2 dt = F(1) - F(0) = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}.$$

(b) $\int_0^1 (x-1)(x-2)dx$

L'intégral est égale à $\int_0^1 x^2 - 3x + 2dx$, dont une primitive est $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x$. Donc

$$\int_0^1 (x-1)(x-2)dx = F(1) - F(0) = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{6}.$$

(c) $\int_1^2 e^{-t}dt$

Une primitive de $t \to e^{-t}$ est $F(t) = -e^{-t}$. Donc

$$\int_1^2 e^{-t}dt = F(2) - F(1) = -e^{-2} + e^{-1}.$$

(d) $\int_0^1 t\, e^{-t}dt$

La formule d'intégration par paries nous dit que

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Dans notre cas, on peut poser $f(t) = t$ et $g(t) = -e^{-t}$, d'où $f'(t) = 1$ et $g'(t) = e^{-t}$. Remplacent f et g dans la formule avec $a = 0$ et $b = 1$ nous donne l'intégral à calculer :

$$\int_0^1 t\, e^{-t}dt = \left[-t\, e^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-t}dt = -e^{-1} - 0 - \left[e^{-t}\right]_0^1 = -e^{-1} - (e^{-1} - 1) = 1 - 2e^{-1}$$

(e) $\int_1^2 x\, \ln(x)dx$

La formule d'intégration par paries nous dit que

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Dans notre cas, on peut poser $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \frac{x^2}{2}$, d'où $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g'(x) = x$. Remplacent f et g dans la formule avec $a = 1$ et $b = 2$ nous donne l'intégral à calculer :

$$\int_1^2 x\, \ln(x)dx = \left[\ln(x)\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = 2\ln(2) - 0 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$$

(f) $\int_a^b \ln(t)dt \quad 0 < a < b$**.**

Une primitive de $t \to \ln(t)$ est $F(t) = t\ln(t) - t$. Donc

$$\int_a^b \ln(t)dt = b\ln(b) - b - (a\ln(a) - a).$$

On peut la calculer aussi par la formule d'intégration par paries avec $f(t) = \ln(t)$ et $g(t) = t$, d'où $f'(t) = \frac{1}{t}$ et $g'(t) = 1$. Ce qui nous amène à :

$$\int_a^b \ln(t)dt = [\ln(t)\, t]_a^b - \int_a^b \frac{1}{t}\, tdt = b\ln(b) - a\ln(a) - [t]_a^b = b\ln(b) - a\ln(a) - b + a$$

qui est égale aux résultat obtenu avant.

(g) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

On peut calculer cette intégral par changement de variable $t = \phi(x)$:

$$\int_a^b f(\phi(x))\,\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt$$

si ϕ est une fonction avec dérivée continue sur $[a, b]$.

Dans notre cas on peut poser le changement de variable $t = \phi(x) = \sqrt{x+1}$. La dérivée est $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. On en déduit que $\phi^2(x) - 1 = x$ et

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_0^1 2x \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx = \int_0^1 2(\phi^2(x) - 1)\phi'(x)dx$$

La formule du changement du variable nous dit que l'intégrale est égale à:

$$\int_{\phi(0)}^{\phi(1)} 2(t^2-1)dt = \int_1^{\sqrt{2}} 2t^2 - 2\,dt = \left[2\frac{t^3}{3} - 2t\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}$$

(h) $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$

Une primitive de $t \to \frac{1}{t^2}$ est $F(t) = -\frac{1}{t}$. Donc

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} + 1 = 1$$

Exercice 3 (2009)

1. On dérive la fonction $f(x) = 20(x+1)e^{-(x+1)}$.

$$f'(x) = 20e^{-(x+1)} - 20(x+1)e^{-(x+1)} = -20xe^{-(x+1)}.$$

   La fonction exponentielle est toujours positive, donc f' est positive lorsque $x < 0$ et négative lorsque $x > 0$. L'ensemble de définition de f est $[0, \infty[$, f y est décroissante. Et f atteint son maximum en $x = 0$, $f(0) = 20/e = 7.38$ à 10^{-2} près.

2. On dérive encore une fois f'.

$$f''(x) = -20e^{-(x+1)} + 20xe^{-(x+1)} = 20(x-1)e^{-(x+1)}.$$

   Les points d'inflexion sont les points x tels que f change de convexe à concave, ou vice versa. Ce sont les points tels que $f''(x) = 0$, et f'' change de signe. Dans notre cas $x = 1$ est un point d'inflexion car $f''(1) = 0$ et $f''(x) < 0$ si $x < 1$ et $f''(x) > 0$ si $x > 1$. La fonction f est concave sur $[0, 1]$ et convexe sur $[1, \infty[$.

3. Voir Figure 1.

4. (a) L'élasticité arc de la demande par rapport au prix quand le prix passe de p_1 à p_2 est le rapport entre les taux d'accroissement de la demande et du prix. Le taux d'accroissement est calculé comme la différence divisée par la moyenne.

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{f(p_2)-f(p_1)}{(f(p_1)+f(p_2))/2}}{\frac{p_2-p_1}{(p_1+p_2)/2}} = \frac{\frac{f(p_1(1+t))-f(p_1)}{f(p_1)+f(p_1(1+t))}}{\frac{p_1(1+t)-p_1}{p_1+p_1(1+t)}}$$
$$= \frac{\frac{f(p_1(1+t))-f(p_1)}{f(p_1)+f(p_1(1+t))}}{\frac{t}{2+t}}.$$

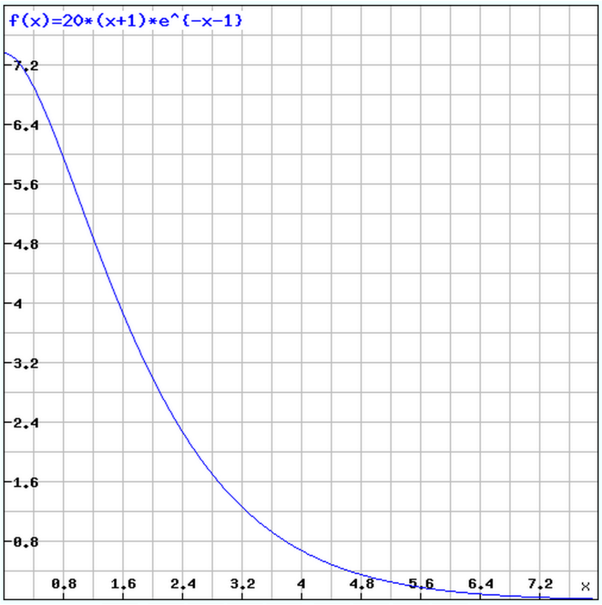


Figure 1: Graphe de f sur $[0;8]$.

(b) Application numérique: $\varepsilon = -1.37$. Cela veut dire que lorsque le prix est 2 et augmente de 4%, la demande décroit d'un taux de 1.37 fois le taux d'accroissement du prix.

5. (a) Par définition,

$$T(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-20xe^{-(x+1)}}{20(x+1)e^{-(x+1)}} = -\frac{x}{x+1}.$$

$T(2) = -\frac{2}{3} = -0.67$. L'élasticité

$$E_{q/x}(2) = f'(x)\frac{x}{f(x)}\bigg|_{x=2} = x\,T(x)|_{x=2} = \frac{T(2)}{\frac{1}{2}} = 2T(2) = -1,33.$$

Cette valeur correspond à l'élasticité infinitésimale au voisinage de $x = 2$. C'est à dire, elle est limite lorsque x tends vers 2 de l'élasticité arc de 2 à x.

(b) Cette valeur est proche de la valeur trouvée dans la question 4.(b), car $t = 4\%$ est faible, est c'est une approximation de l'élasticité point.

6. (a) On exprime $\overline{T}$ en fonction de f, x_1, x_2.

$$\begin{aligned}
\overline{T} &= \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} T(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} (\ln(|f(x)|)'\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{x_2 - x_1}[\ln f(x)]_{x_1}^{x_2} \\
&= \frac{1}{x_2 - x_1}\ln\left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right).
\end{aligned}$$

Ou bien, on peut calculer $\overline{T}$ directement par l'expression de T:

$$\begin{aligned}
\overline{T} &= \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} T(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} -\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} -1 + \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{x_2 - x_1}(-(x_2 - x_1) + [\ln(|x+1|)]_{x_1}^{x_2}) \\
&= -1 + \frac{1}{x_2 - x_1}[\ln(|x_2 + 1|) - \ln(|x_1 + 1|)] \\
&= -1 + \frac{1}{x_2 - x_1} \ln\left(\left|\frac{x_2 + 1}{x_1 + 1}\right|\right)
\end{aligned}$$

(b) Application numérique $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. $\overline{T} = -1 + \frac{1}{2}\ln(\frac{5}{3}) = -0.74$.

(c) De l'égalité obtenue en 6(a),

$$\overline{T} = \frac{1}{x_2 - x_1} \ln\left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right),$$

on obtient:

$$(x_2 - x_1)\overline{T} = \ln\left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right).$$

En prenant exponentielle aux deux côtés de l'égalité, on obtient

$$e^{(x_2 - x_1)\overline{T}} = \frac{f(x_2)}{f(x_1)}$$

et finalement:

$$f(x_2) = f(x_1)e^{(x_2 - x_1)\overline{T}}.$$

Exercice 4

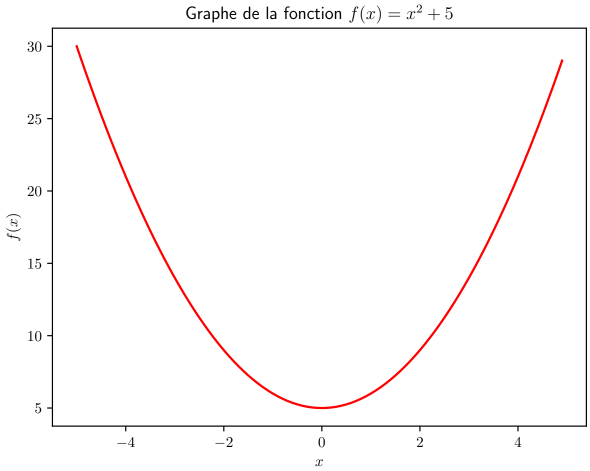
L'unique solution de l'équation $c = -3 + 1$ est $1/4$. La suite $(u_n - 1/4)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -3 et de premier terme $1 - 1/4 = 3/4$, donc on a :

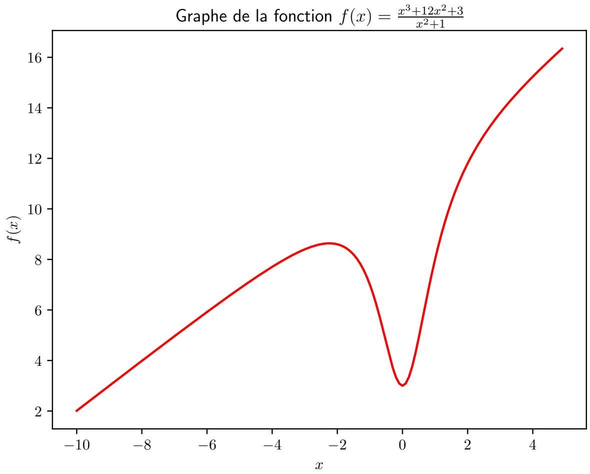
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(-3)^n$$

et enfin :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(-3)^n$$

Exercice 5 (Calculatrice)

1. 

2. 

3.