**Durée de préparation : 1 heure 30**

**Question**

Pour une journée donnée, on observe les prix des billets de train en 1ère classe Paris-Clermont Ferrand :

- lorsque le prix est à 59 euros, 166 billets sont vendus;
- lorsque le prix passe à 77 euros, 120 billets sont vendus.

Pour les billets de 2nde classe Paris-Clermont Ferrand :

- lorsque le prix est à 40 euros, 412 billets sont vendus;
- lorsque le prix passe à 56 euros, 210 billets sont vendus.

1. Calculer l'élasticité de la demande par rapport aux prix, pour les billets de 1ère classe, puis pour les billets de 2nde classe Paris-Clermont Ferrand.

   **Corrigé:** L'élasticité arc de la variable $y$ par rapport à la variable $x$ se définie comme

   $$e_{y/x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

   Dans notre cas,

   $$e_{\text{1ère class}} = \frac{\frac{120-166}{166}}{\frac{77-59}{59}} \approx -0,91$$

   et

   $$e_{\text{2nde class}} = \frac{\frac{210-412}{412}}{\frac{56-40}{40}} \approx -1,23$$

2. Interpréter et comparer ces résultats.

   **Corrigé:** Pour les billets de 1ère classe, une augmentation de prix de 1% produit une augmentation de la demande de -0,91%, c'est à dire, une diminution de la demande de 0,91%.

   Pour les billets de 2nde classe, une augmentation de prix de 1% produit une augmentation de la demande de -1,23%, c'est à dire, une diminution de la demande de 1,23%.

   Pour les billets de 1ère classe la quantité demandée varie relativement moins vite que le prix, tant dis que pour les billets de 2nde classe la quantité demandée varie relativement plus vite que le prix du bien.

   Les usagers de la 2nde classe semblent plus sensibles à des variations de prix que les usagers de la 1ère classe.

3. Sur une autre ligne et pour un prix du billet à 70 euros, il est vendu 97 billets. En admettant que l'élasticité est égale à -0,5%, estimer le nombre de billets vendus suite à une augmentation du prix de 1,5%.

   **Corrigé:** Le nombre de billets vendus sera augmenté de $-0,5\% \times 1,5\% = -0,75\%$. Le nombre de billets vendus peut être estimé par :

   $$97 \times (1 - 0,0075) \approx 96,27$$

**Exercice 1**

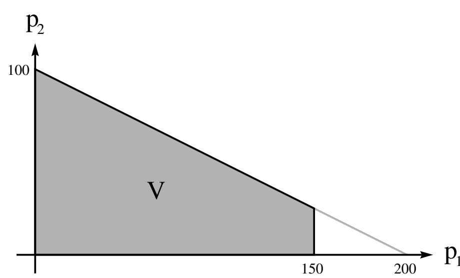
L'entreprise $A$ fabrique des imprimantes, qu'elle vend au prix unitaire de $p_1$ euros. De son côté, l'entreprise $B$ fabrique des cartouches d'encre qu'elle vend au prix unitaire de $p_2$ euros. On suppose que la demande pour les imprimantes est $D_A(p_1) = 9 - \left(\frac{p_1}{50}\right)^2$, alors que la demande des cartouches d'encre est $D_B(p_1, p_2) = \frac{200-p_1-2p_2}{100}$. Les fonctions de demande sont exprimées en milliers d'unités. On suppose que les demandes et les prix sont strictement positifs et on néglige les coûts de fabrication.

1. Justifier que le domaine de validité du modèle est :

$$V = \{\, (p_1, p_2) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ p_1 < 150,\ p_1 + 2p_2 < 200 \,\}$$

Représenter le domaine $V$ dans un repère du plan avec $p_1$ en abscisse et $p_2$ en ordonnée.

**Corrigé:** Le modèle suppose que $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$, d'où $(p_1, p_2) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Le modèle suppose aussi que $D_A(p_1) > 0$ et $D_B(p_1, p_2) > 0$. La condition en $D_A$ impose $\left(\frac{p_1}{50}\right)^2 < 9$, d'où $p_1 < 150$. La condition en $D_B$ impose $\frac{200-p_1-2p_2}{100} > 0$, d'où $p_1 + 2p_2 < 200$.




2. (a) Déterminer le prix des imprimantes $p_1^*$ qui maximise le chiffre d'affaires de l'entreprise $A$ donné par $P_A(p_1) = p_1\, D_A(p_1)$.

**Corrigé:** On s'intéresse à la fonction $P_A(p_1) = p_1\left(9 - \left(\frac{p_1}{50}\right)^2\right)$ définie sur $]0, 150[$. Sa dérivée est

$$P_A'(p_1) = 9 - \frac{3}{2500}p_1^2$$

définie et continue sur $]0, 150[$. Les points critiques sont les solutions de $P_A'(p_1) = 0$, qui nous amène à $p_1^2 = 3 \times 2500$. Parmi les solutions de ce polynôme $(\pm 50\sqrt{3})$, seulement $50\sqrt{3}$ est dans le domaine de définition de $P_A(p_1)$. La dérivée seconde est

$$P_A''(p_1) = -\frac{3}{1250}p_1$$

et $P_A''(p_1) < 0$ pour $p_1 \in ]0, 150[$. La fonction $P_A(p_1)$ est donc concave, elle a un maximum local en $50\sqrt{3}$, qui est aussi un maximum global à cause de sa concavité. Le prix des imprimantes qui maximise le chiffre d'affaires est donc $p_1^* = 50\sqrt{3} \approx 86,60$.

(b) En admettant que l'entreprise $A$ fixe le prix de vente d'une imprimante à $p_1^*$, trouver le prix $p_2^*$ d'une cartouche d'encre qui maximise le chiffre d'affaires de l'entreprise $B$ donné par $P_B(p_2) = p_2\, D_B(p_1^*, p_2)$.

**Corrigé:** $P_B(p_2) = p_2 \frac{200-50\sqrt{3}-2p_2}{100}$ et sa dérivée est

$$P_B'(p_2) = \frac{4-\sqrt{3}}{2} - \frac{p_2}{25}$$

d'où le seul point critique est $p_2 = 25\frac{4-\sqrt{3}}{2}$. Comme $P''_B(p_2) = -\frac{1}{25} < 0$, $P_B$ est concave, son point critique est un maximum local et un maximum global. On obtient $p_2^* = 25\frac{4-\sqrt{3}}{2} \approx 28,35$.

(c) Déterminer alors le chiffre d'affaires total $P_A(p_1^*) + P_B(p_2^*)$.

**Corrigé:** Le chiffre d'affaires total s'obtient par évaluation directe :

$$P_A(p_1^*) + P_B(p_2^*) = \frac{475}{8} + 275\sqrt{3} \approx 535,69$$

3. On suppose maintenant que les entreprises $A$ et $B$ fusionnent. Le chiffre d'affaires du groupe ainsi constitué est donc la somme des chiffres d'affaires des deux entreprises :

$$P(p_1, p_2) = p_1\, D_A(p_1) + p_2\, D_B(p_1, p_2)$$

(a) Démontrer que $P$ a un unique point critique sur $V$.

**Corrigé:**

$$P(p_1, p_2) = p_1\left(9 - \left(\frac{p_1}{50}\right)^2\right) + p_2\frac{200 - p_1 - 2p_2}{100}$$

et les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial P}{\partial p_1}(p_1, p_2) = 9 - 3\left(\frac{p_1}{50}\right)^2 - \frac{p_2}{100}$$

$$\frac{\partial P}{\partial p_2}(p_1, p_2) = 2 - \frac{p_1}{100} - \frac{p_2}{25}$$

Les points critiques sont les solutions conjointes des équations $\frac{\partial P}{\partial p_1}(p_1, p_2) = 9 - 3\left(\frac{p_1}{50}\right)^2 - \frac{p_2}{100} = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial p_2}(p_1, p_2) = 2 - \frac{p_1}{100} - \frac{p_2}{25} = 0$. De la deuxième équation on peut écrire $p_1$ en fonction de $p_2$ :

$$p_1 = 200 - 4p_2$$

et le remplacer dans la première équation. Un peu de calcul nous amène à la condition suivante :

$$-\frac{12}{625}\,p_2^2 + \frac{191}{100}\,p_2 - 39 = 0$$

ce qui équivaut à

$$-0,0192\,p_2^2 + 1,91\,p_2 - 39 = 0$$

Le discriminant est $1,91^2 - 4 \times 0,0192 \times 39 = 0,6529$ qui est positive. Les deux valeurs de $p_2$ qui annulent ce polynôme sont

$$\frac{-1,91 + \sqrt{0,629}}{-2 \times 0,0192} \approx 28,70 \qquad et \qquad \frac{-1,91 - \sqrt{0,629}}{-2 \times 0,0192} \approx 70,78$$

En utilisant l'équation obtenue précédemment, on obtient les deux valeurs correspondantes suivantes pour $p_1$ :

$$200 - 4 \times 28,70 \approx 85,21 \qquad et \qquad 200 - 4 \times 70,78 \approx -83,12$$

Mais la deuxième valeur n'appartient pas à $V$. Le seul point critique de $P$ en $V$ est donc $p_1 \approx 85,21$ et $p_2 \approx 28,70$.

(b) Démontrer que $P$ a un maximum local sur $V$ et calculer la valeur de ce maximum.

**Corrigé:** On sait que $P$ présente un point critique en $V$, mais il reste à vérifier s'il s'agit d'un maximum local. Les dérivées partielles secondes de $P$ sont

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_1^2}(p_1,p_2) = -\frac{3}{1250}p_1 \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial p_1 \partial p_2}(p_1,p_2) = -\frac{1}{100} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial p_2^2}(p_1,p_2) = -\frac{1}{25}$$

Il suffit maintenant d'évaluer ces équations au point $(85,21; 28,70)$ et d'utiliser les conditions du deuxième ordre d'existence d'un maximum local : le déterminant de la matrice hessienne doit être positive et la dérivée seconde par rapport à $p_1$ doit être négative. En effet,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_1^2}(85,21,\ 28,70)\times\frac{\partial^2 P}{\partial p_2^2}(85,21,\ 28,70)-\left(\frac{\partial^2 P}{\partial p_1 \partial p_2}(85,21,\ 28,70)\right)^2 = \frac{p_1}{62500}-\frac{1}{10000} \approx 0,008 > 0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_1^2}(85,21,\ 28,70) \approx -0,20 < 0$$

et les conditions du deuxième ordre nous indiquent donc que $(85,21,\ 28,70) \in V$ est un maximum local de $P$. Un simple calcul nous montre que $P(85,21,\ 28,70) \approx 535,89$.

4. Commenter la différence entre les résultats de la question 2 et ceux de la question 3.

**Corrigé:** Après la fusion des entreprises $A$ et $B$, une maximisation du chiffre d'affaires total est possible. Le nouveau maximum ne peut pas être inférieur à la somme des maximums précédents car fixer les prix aux valeurs précédentes est toujours possible. Mais, comme on vient de voir, diminuer légèrement le prix des imprimantes et augmenter un peu le prix des cartouches d'encre amène à une augmentation du chiffre d'affaires total.

5. On suppose désormais que les entreprises $A$ et $B$ ont fusionné et que le groupe ainsi formé a fixé le prix d'une imprimante à 85,21 euros et le prix d'une cartouche d'encre à 28,70 euros. Un consommateur ayant un budget annuel de 120 euros pour les coûts d'impression (imprimantes et encre à l'exclusion des autres coûts) a une utilité modélisée par la fonction $u(x,y) = \frac{1}{3}\ln(x)+\frac{2}{3}\ln(y)$ où $x$ est le nombre d'imprimantes et $y$ le nombre de cartouches consommées en une année.

(a) Écrire la contrainte de budget du consommateur.

**Corrigé:** Le consommateur ne peut pas dépenser plus de 120 euros, alors

$$p_1x + p_2y \leq 120 \qquad \text{ce qui équivaut à} \qquad 85,21x + 28,70y \leq 120$$

(b) Déterminer les quantités d'imprimantes et de cartouches qui permettront au consommateur d'optimiser son utilité.

**Corrigé:** Les dérivées partielles de la fonction d'utilité $u(x,y)$ sont

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3x} \qquad et \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{3y}$$

qui sont positives pour $x > 0$ et $y > 0$. Cela montre que $u(x,y)$ est une fonction croissante en $x$ pour $y$ fixé, et que $u(x,y)$ est aussi une fonction croissante en $y$ pour $x$ fixé. Cela implique que le consommateur maximise son utilité en utilisant tout son budget. En effet, si la totalité du budget n'est pas dépensé, on peut toujours augmenter l'utilité en augmentant $x$ ou en augmentant $y$. L'utilité maximale doit s'atteindre lorsque la totalité des 120 euros sont dépensés. Le problème est donc de trouver le maximum de $u(x,y)$ lié à la contrainte $85,21x + 28,70y = 120$.

La contrainte peut s'exprimer comme $g(x,y) = 85,21x + 28,70y - 120 = 0$. L'énoncé suggère d'utiliser la méthode de Lagrange. On pose le Lagrangien :

$$L(x,y,\lambda) = u(x,y) - \lambda g(x,y)$$

Les extrema sous contrainte sont parmi les points $(x,y)$ où il existe $\lambda$ qui annule les trois dérivées partielles de $L$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{3x} - 85,21\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{2}{3y} - 28,70\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 85,21x + 28,70y - 120 = 0 \end{cases}$$

De la première équation, $\lambda = \frac{1}{3\times 85{,}21x}$. En remplaçant dans la deuxième équation on obtient l'équation $\frac{2}{3y} - \frac{28{,}70}{3\times 85{,}21x} = 0$, d'où $85,21x = 14,35y$. En remplaçant dans l'équation de $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$, on obtient $14,35y + 28,70y - 120 = 0$ avec solution $y = \frac{120}{43{,}05} \approx 2,79$. Finalement, $x = \frac{14{,}35}{85{,}21}y \approx 0,47$.

Il nous reste à vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum. Pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-1}{3x^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-2}{3y^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

d'où le déterminant de la matrice hessienne est positif et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$. Cela montre que $u(x,y)$ est concave. La restriction de la fonction $u(x,y)$ au domaine convexe imposé par la contrainte $g(x,y) = 0$ reste concave. L'extremum est bien un maximum local et un maximum global.

On peut conclure que l'utilité maximale s'obtient en consommant 0,47 imprimantes et 2,79 cartouches d'encre par année.

(c) Donner la valeur du multiplicateur de Lagrange et interpréter ce résultat.

**Corrigé:** De l'équation précédente, $\lambda = \frac{1}{3\times 85{,}21x} = \frac{1}{120}$. Comme le point de maximum est solution de la méthode du Lagrangien, on sait que

$$\nabla L(x,y,\lambda) = 0$$

et cela veut dire aussi que

$$\nabla u(x,y) = \lambda \nabla g(x,y).$$

$\nabla g(x,y)$ nous indique la direction de croissance maximale de $g$, tandis que $\nabla u(x,y)$ indique la direction de croissance maximale de $u$. Puisque $\lambda$ est positif, augmenter $g$ nous amène à augmenter l'utilité $u$. La seule façon d'augmenter $g$ est de dépenser plus; en d'autre termes, augmenter le budget permet d'améliorer l'utilité du consommateur.

## Exercice 2

Une école souhaite faire une étude portant sur les notes de ses étudiants selon leur filière de provenance. On obtient les données suivantes :

| | [0; 6[ | [6; 10[ | [10; 14[ | [14; 20[ | Total | | moyenne | variance |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Filière A | 15 | 15 | 15 | 15 | 60 | | 10,00 | 26,50 |
| Filière B | 22 | 42 | 38 | 18 | 120 | | 9,70 | 18,91 |

1. Décrire la situation statistique.

   **Corrigé:** On s'intéresse à savoir si la filière de provenance des étudiants a un effet sur les notes obtenues. Du point de vue statistique, *note* est une variable à expliquer et *filière* est une variable explicative. On souhaite appliquer un test statistique à l'échantillon pour évaluer s'il existe une dépendance significative entre ces variables.

2. Calculer les distributions conditionnelles en fréquences de la variable *note*. Les variables *note* et *filière* semblent-elles indépendantes ?

   **Corrigé:** Les fréquences observées de la variable *note* conditionné par la variable *filière* sont :

| | $[0;6[$ | $[6;10[$ | $[10;14[$ | $[14;20[$ |
|---|---|---|---|---|
| Filière A | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 |
| Filière B | 0,18 | 0,35 | 0,32 | 0,15 |

   Si deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors

$$\mathbb{P}(X|Y) = \frac{\mathbb{P}(X,Y)}{\mathbb{P}(Y)} = \frac{\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)}{\mathbb{P}(Y)} = \mathbb{P}(X)$$

   Si les variables *note* et *filière* étaient indépendantes, on s'attendrait à observer des distribution conditionnelles en fréquences semblables. Ces variables ne semblent pas être indépendantes. Cependant, on ne peut pas conclure car ce tableau ne montre pas les probabilités mais les fréquences observées dans un échantillon.

3. Déterminer les médianes conditionnelles de la variable *note*. Interpréter.

   **Corrigé:** La médiane de la variable *note* correspond à la note qui sépare les individus triés par ordre croissant en deux groupes de même taille. La médiane pour la filière A est 10. Pour la filière B, la médiane se trouve entre 6 et 9. Cela nous indique que dans la filière A, exactement la moitié des étudiants ont obtenu des notes inférieures à 10, tandis que dans la filière B c'est le cas pour plus de la moitié des étudiants.

4. Calculer la moyenne globale à l'aide des moyennes conditionnelles.

   **Corrigé:** La moyenne globale empirique peut être calculée à partir des moyennes conditionnelles empiriques pour les filières A et B comme la moyenne des moyennes conditionnelles empiriques, pondérée par le nombre d'étudiants en chaque filière :

$$\hat{m} = \frac{n_A \hat{m}_A + n_B \hat{m}_B}{n_A + n_B} = \frac{60 \times 10,00 + 120 \times 9,70}{60 + 120} = 9,80$$

5. Calculer la variance globale.

   **Corrigé:** La variance empirique de la variable *note* $N$ s'obtient par :

$$\hat{V} = \frac{\sum_i n_i (N_i - \hat{m})^2}{\sum_i n_i}$$

   En utilisant la moyenne empirique calculée avant,

$$\begin{aligned}\hat{V} =& \frac{15(3-9,8)^2 + 15(8-9,8)^2 + 15(12-9,8)^2 + 15(17-9,8)^2}{60+120} + \\ & \frac{22(3-9,8)^2 + 42(8-9,8)^2 + 38(12-9,8)^2 + 18(17-9,8)^2}{60+120} \\ =& 21,46\end{aligned}$$

6. Calculer la variance des moyennes conditionnelles (aussi appelée variance inter) et interpréter.

   **Corrigé:**

   $$V_{inter} = \frac{\sum_i n_i(\hat{m}_i - \hat{m})^2}{\sum_i n_i} = \frac{60(10-9,80)^2 + 120(9,70-9,80)^2}{60+120} = 0,02$$

   $V_{inter}$ mesure la variabilité entre les deux filières.

7. Calculer la moyenne des variances conditionnelles (aussi appelée variance intra) et interpréter.

   **Corrigé:**

   $$V_{intra} = \frac{\sum_i n_i \hat{V}_i}{\sum_i n_i} = \frac{60 \times 26,50 + 120 \times 18,91}{60+120} = 21,44$$

   $V_{intra}$ mesure la variabilité à l'intérieur des filières.

   On sait que

   $$\hat{V} = V_{intra} + V_{inter}$$

   et les valeurs calculées le confirment : $21,46 = 21,44 + 0,02$. La proportion $\frac{V_{intra}}{\hat{V}}$ est la part de la variance totale expliquée para la variabilité à l'intérieur des filières. La proportion $\frac{V_{inter}}{\hat{V}}$ est la part de la variance totale expliquée par la variabilité entre les deux filières.

8. Le but de cette partie est de tester l'indépendance des variables *note* et *filière* en mettant en œuvre un test d'égalité des moyennes par l'analyse de la variance.

   (a) Formuler l'hypothèse nulle du test $(H)$.

   **Corrigé:** L'hypothèse $H$ est que les moyennes conditionnelles de la variable *note* relative à la variable *filière* sont identiques.

   (b) On considère la valeur $T = (n-k) \times \frac{\text{variance inter}}{\text{variance intra}}$ où $n$ est la taille de l'échantillon et $k$ le nombre de sous-populations. On admet que, sous cette hypothèse $(H)$, les valeurs de $T$ varient approximativement comme la distribution du $\chi^2$ à $k-1$ degrés de liberté.

   Pour ce test, on considère un seuil de risque de $\alpha = 5\%$.

   - Déterminer le seuil critique $s$ en utilisant la table statistique appropriée.
   - En déduire la zone de rejet de $(H)$.
   - Déterminer la valeur $t$ prise par $T$ sur l'échantillon étudié et conclure.

   **Corrigé:** Le seuil critique $s$ se trouve dans la table de distribution de la loi $\chi^2$. Dans notre cas, $k = 2$ car il y a deux sous-populations. Il faut chercher dans la table la valeur correspondante à $k-1 = 1$ degré de liberté et $\alpha = 0,05$. Le seuil critique est $s = 3,84$.

   L'hypothèse $H$ est à rejeter si $T > 3,84$.

   Pour l'échantillon étudié, $t = (180-2)\frac{0,02}{21,44} \approx 0,166$. Ces observations ne permettent pas de rejeter $H$.

   Rejeter $H$ aurait permit de rejeter l'indépendance des variables *note* et *filière* et conclure que ce sont des variables dépendantes. Cet échantillon ne nous permet pas de conclure qu'il existe une dépendance significative entre la note obtenue et la filière de provenance.