

Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Analyse 5

2022-2023

Exercice 1

Trouver un équivalent simple pour les fonctions suivantes:

- (a) $\frac{1}{u+1}$ au voisinage de $u = 0$ et $u = +\infty$.
- (b) $\frac{1}{x^2 - \frac{x}{2}}$ au voisinage de $x = 0$ et $x = +\infty$.
- (c) $\frac{e^t - 1}{t}$ au voisinage de $t = 0$.
- (d) $\sqrt{1+y} - 1$ au voisinage de $y = 0$.

Exercice 2

L'entreprise A fabrique des imprimantes, qu'elle vend au prix unitaire de p_1 euros. De son côté, l'entreprise B fabrique des cartouches d'encre qu'elle vend au prix unitaire de p_2 euros. On suppose que la demande pour les imprimantes est $D_A(p_1) = 9 - \left(\frac{p_1}{50}\right)^2$, alors que la demande des cartouches d'encre est $D_B(p_1, p_2) = \frac{200 - p_1 - 2p_2}{100}$. Les fonctions de demande sont exprimées en milliers d'unités. On suppose que les demandes et les prix sont strictement positifs et on néglige les coûts de fabrication.

1. Justifier que le domaine de validité du modèle est :

$$V = \{ (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2, p_1 < 150, p_1 + 2p_2 < 200 \}$$

Représenter le domaine V dans un repère du plan avec p_1 en abscisse et p_2 en ordonnée.

2. (a) Déterminer le prix des imprimantes p_1^* qui maximise le chiffre d'affaires de l'entreprise A donné par $P_A(p_1) = p_1 D_A(p_1)$.
(b) En admettant que l'entreprise A fixe le prix de vente d'une imprimante à p_1^* , trouver le prix p_2^* d'une cartouche d'encre qui maximise le chiffre d'affaires de l'entreprise B donné par $P_B(p_2) = p_2 D_B(p_1^*, p_2)$.
(c) Déterminer alors le chiffre d'affaires total $P_A(p_1^*) + P_B(p_2^*)$.
3. On suppose maintenant que les entreprises A et B fusionnent. Le chiffre d'affaires du groupe ainsi constitué est donc la somme des chiffres d'affaires des deux entreprises :

$$P(p_1, p_2) = p_1 D_A(p_1) + p_2 D_B(p_1, p_2)$$

- (a) Démontrer que P a un unique point critique sur V .
(b) Démontrer que P a un maximum local sur V et calculer la valeur de ce maximum.
4. Commenter la différence entre les résultats de la question 2 et ceux de la question 3.

5. On suppose désormais que les entreprises A et B ont fusionné et que le groupe ainsi formé a fixé le prix d'une imprimante à 85,21 euros et le prix d'une cartouche d'encre à 28,70 euros. Un consommateur ayant un budget annuel de 120 euros pour les coûts d'impression (imprimantes et encre à l'exclusion des autres coûts) a une utilité modélisée par la fonction $u(x, y) = \frac{1}{3} \ln(x) + \frac{2}{3} \ln(y)$ où x est le nombre d'imprimantes et y le nombre de cartouches consommées en une année.
- (a) Écrire la contrainte de budget du consommateur.
 - (b) Déterminer les quantités d'imprimantes et de cartouches qui permettront au consommateur d'optimiser son utilité.
 - (c) Donner la valeur du multiplicateur de Lagrange et interpréter ce résultat.