Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Analyse 3 : correction

2023-2024

Exercice 1

1. (a) L'équation d'une droite en $\mathbb{R}^2$ est de la forme

$$ax + by + c = 0.$$

Le point $(0, 0)$ appartient à la droite, donc $c = 0$. Le point $(0, 1)$ appartient aussi à la droite, donc $b = 0$. L'équation est de la forme $ax = 0$. On peut choisir une valeur arbitraire pour $a \neq 0$. Pour $a = 1$,

$$\text{la droite passant par } A \text{ et } B \text{ satisfait l'équation} \qquad x = 0.$$

De la même façon :

$$\text{la droite passant par } A \text{ et } C \text{ satisfait l'équation} \qquad y = 0,$$

$$\text{la droite passant par } B \text{ et } C \text{ satisfait l'équation} \qquad x + y - 1 = 0.$$

(b) La droite qui passe par A et B est de la forme

$$ax + by + c = 0.$$

Le point $A = (0, 3)$ impose $3b + c = 0$, d'où $c = -3b$. Le point $B = (-2, 0)$ impose $-2a + c = 0$, d'où $a = \frac{c}{2} = -\frac{3}{2}b$. On peut choisir une valeur arbitraire pour $b \neq 0$. Pour $b = -2$,

$$\text{la droite passant par } A \text{ et } B \text{ satisfait l'équation} \qquad 3x - 2y + 6 = 0,$$

Comme avant,

$$\text{la droite passant par } A \text{ et } C \text{ satisfait l'équation} \qquad x + y - 3 = 0,$$

$$\text{la droite passant par } B \text{ et } C \text{ satisfait l'équation} \qquad 2x - 3y + 4 = 0.$$

2. (a) L'équation d'un plan en $\mathbb{R}^3$ est de la forme

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Si $A = (-4, 0, 0)$ appartient au plan, $-4a + d = 0$. Si $B = (0, -2, 0)$ appartient aussi au plan, $-2b + d = 0$. Finalement, si $C = (-1, 0, -1)$ appartient aussi au plan, $-a - c + d = 0$. Cela nous amène à $ax + 2ay + 3az + 4a = 0$, où l'on peut choisir $a \neq 0$ arbitrairement. Par exemple, pour $a = 1$, une équation du plan est

$$x + 2y + 3z + 4 = 0.$$

(b) L'équation d'un plan en $\mathbb{R}^3$ est de la forme

$$ax + by + cz + d = 0.$$

L'appartenance des points A, B et C au plan nous amène aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + d = 0 \\ a + 3b + 2c + d = 0 \\ 3a + b + 2c + d = 0 \end{cases}.$$

Si on soustrait la première équation à la deuxième on obtient $b - c = 0$, d'où $c = b$. Si on soustrait la deuxième équation à la troisième on obtient $2a - 2b = 0$, d'où $a = b$. En remplaçant dans la première équation, $b + 2b + 3b + d = 0$, d'où $d = -6b$. On peut choisir $b \neq 0$ arbitrairement. Par exemple, pour $b = 1$, une équation du plan est

$$x + y + z - 6 = 0.$$

Exercice 2

1. f, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, est homogène de degré r si et seulement si pour tout réel k strictement positive, il existe un nombre r vérifiant : $f(kx, ky) = k^r f(x, y)$. Ici, clairement :

$$f(kx, ky) = e^{\frac{kx}{ky}} = e^{\frac{x}{y}} = f(x, y) = k^0 f(x, y),$$

donc f est une fonction homogène de degré 0.

2. Les dérivées partielles de f sont :

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \qquad \text{et} \qquad f'_y(x, y) = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}.$$

L'élasticité partielle de f par rapport à x, quand y reste constante, est donnée par la relation :

$$e_{f/x}(x, y) = x \frac{f'_x(x, y)}{f(x, y)} = \frac{x}{y}.$$

De même, l'élasticité partielle de f par rapport à y, quand x reste constante, est :

$$e_{f/y}(x, y) = y \frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)} = -\frac{x}{y}.$$

Exercice 3

(a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y - x$$

Elles sont continues et définies sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles secondes sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

Le seul point qui satisfait le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$$

est $(0,0)$, qui est le seul point critique de f. La matrice hessienne est :

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $2 \times (-2) - (-1)^2 = -5 < 0$, alors f ne présente pas un extremun local en $(0,0)$.

(b) La fonction f est définie sur le demi-plan $x + 5y + 2 \geq 0$ et ses dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+5y+2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{5}{2\sqrt{x+5y+2}}$$

Elles sont définies et continues sur le demi-plan $x + 5y + 2 > 0$. Les dérivées partielles secondes sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{4(\sqrt{x+5y+2})^3} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-5}{4(\sqrt{x+5y+2})^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-5}{4(\sqrt{x+5y+2})^3} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-25}{4(\sqrt{x+5y+2})^3}$$

définies également sur le demi-plan $x + 5y + 2 > 0$. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne s'annulent pas, alors f n'a pas de points critiques et n'admet pas d'extremum local.

(c) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{4-x^2-y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{4-x^2-y^2}$$

Elles sont continues et définies sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles secondes sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x^2-2)e^{4-x^2-y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xye^{4-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xye^{4-x^2-y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (4y^2-2)e^{4-x^2-y^2}$$

La fonction exponentielle est toujours positive, et le seul point critique est $(0,0)$. La matrice hessienne est :

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} (4x^2-2)e^{4-x^2-y^2} & 4xye^{4-x^2-y^2} \\ 4xye^{4-x^2-y^2} & (4y^2-2)e^{4-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2e^4 & 0 \\ 0 & -2e^4 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $(-2e^4) \times (-2e^4) = 4e^8 > 0$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2e^4 < 0$, alors f présente un maximum local en $(0,0)$.

(d) La fonction f est définie quand $4 - x^2 - y^2 > 0$, et cela correspond au disque de rayon 2 centré en $(0,0)$. Les dérivées partielles de f sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{4-x^2-y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{4-x^2-y^2}$$

Elles sont définies et continues sur le même domaine. Les dérivées partielles secondes sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-8-2x^2+2y^2}{(4-x^2-y^2)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(4-x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-4xy}{(4-x^2-y^2)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-8+2x^2-2y^2}{(4-x^2-y^2)^2}$$

Le seul point critique est $(0,0)$ et la matrice hessienne est :

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-8-2x^2+2y^2}{(4-x^2-y^2)^2} & \frac{-4xy}{(4-x^2-y^2)^2} \\ \frac{-4xy}{(4-x^2-y^2)^2} & \frac{-8+2x^2-2y^2}{(4-x^2-y^2)^2} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $(-1/2) \times (-1/2) = 1/4 > 0$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1/2 < 0$, alors f présente un maximum local en $(0,0)$.