Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Analyse 4

2021-2022

Exercice 1 (2014)

Une entreprise fabrique deux types de billes d'argile. La tonne de bille de type A est vendue 1 056 euros, tandis que la tonne de billes de type B est vendue 448 euros. La capacité de production de l'entreprise est de 200 tonnes par mois. Le coût total de fabrication en euros est donné par la fonction C définie par

$$C(x, y) = 9x^2 + 5y^2 - 6xy + 25000,$$

où x et y sont respectivement le nombre de tonnes de billes de type A et de type B produit et vendu mensuellement.

1. Soit f la fonction définie sur ${\mathbb{R}^+}^2$ par $f(x, y) = 1056x + 448y - C(x, y)$. Que représente la fonction f pour l'entreprise ?
2. Maximiser la fonction f, sous la contrainte $x + y = 200$, par la méthode du Lagrangien. Interpréter le résultat dans le contexte de l'entreprise.
3. Déterminer le multiplicateur de Lagrange du problème précédent. Interpréter dans le cadre de l'entreprise.
4. Le patron de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité.
   (a) Quel problème de maximisation doit-il résoudre ?
   (b) Résoudre ce problème.
   (c) Est-ce réalisable pour l'entreprise ?

Exercice 2 (2009)

Soit la fonction d'utilité U définie pour x et y réels positifs ou nuls par

$$U(x, y) = x^{0,8}y^{0,2}$$

x et y désignant les quantités de deux biens, B_1 et B_2, acquises par un consommateur.

1. Étudier l'homogénéité de U et interpréter le résultat.
2. A la date $t = 0$, le consommateur dispose de la somme S_0. Maximiser U sous la contrainte de budget, p_1 et p_2 désignant respectivement les prix des biens B_1 et B_2 à la date 0. On déterminera les quantités assurant l'existence d'un extremum et on admettra qu'il s'agit d'un maximum. Application numérique : $S_0 = 75$, $p_1 = 5$ et $p_2 = 3$.
3. Les prix des biens ont augmenté et sont respectivement, à la date 1, $p'_1 > p_1$ et $p'_2 > p_2$. Calculer la somme S_1 que doit consacrer le consommateur s'il désire garder le même niveau d'utilité. On exprimera S_1 en fonction de S_0, p_1, p_2, p'_1 et p'_2.

4. On appelle indice vrai du coût de la vie, de la date 1, base 100 l'année 0, le réel V défini par

$$V_{1/0} = \frac{S_1}{S_0} \times 100.$$

   (a) Calculer $V_{1/0}$.

   (b) Montrer que cet indice peut être considéré comme une moyenne géométrique des indices élémentaires de prix.

5. Calculer l'indice de Laspeyres des prix pour un consommateur qui maximise son utilité.

6. Rappeler le lien existant entre cet indice et les indices élémentaires des prix.

7. On admettra le résultat suivant, concernant des réels positifs :

$$H \leq G \leq \bar{x},$$

   H, G et $\bar{x}$ désignant respectivement les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique.

   (a) Comparer l'indice de Laspeyres et l'indice vrai du coût de la vie.

   (b) Application numérique : $S_0 = 75$, $p_1 = 5$, $p_2 = 3$, $p'_1 = 7$ et $p'_2 = 4$.