

**Durée de préparation : 1 heure 30****Question**

Pour une journée donnée, on observe les prix des billets de train en 1ère classe Paris-Clermont Ferrand :

- lorsque le prix est à 59 euros, 166 billets sont vendus;
- lorsque le prix passe à 77 euros, 120 billets sont vendus.

Pour les billets de 2nde classe Paris-Clermont Ferrand :

- lorsque le prix est à 40 euros, 412 billets sont vendus;
- lorsque le prix passe à 56 euros, 210 billets sont vendus.

1. Calculer l'élasticité de la demande par rapport aux prix, pour les billets de 1ère classe, puis pour les billets de 2nde classe Paris-Clermont Ferrand.
2. Interpréter et comparer ces résultats.
3. Sur une autre ligne et pour un prix du billet à 70 euros, il est vendu 97 billets. En admettant que l'élasticité est égale à -0,5%, estimer le nombre de billets vendus suite à une augmentation du prix de 1,5%.

**Exercice 1**

L'entreprise  $A$  fabrique des imprimantes, qu'elle vend au prix unitaire de  $p_1$  euros. De son côté, l'entreprise  $B$  fabrique des cartouches d'encre qu'elle vend au prix unitaire de  $p_2$  euros. On suppose que la demande pour les imprimantes est  $D_A(p_1) = 9 - \left(\frac{p_1}{50}\right)^2$ , alors que la demande des cartouches d'encre est  $D_B(p_1, p_2) = \frac{200 - p_1 - 2p_2}{100}$ . Les fonctions de demande sont exprimées en milliers d'unités. On suppose que les demandes et les prix sont strictement positifs et on néglige les coûts de fabrication.

1. Justifier que le domaine de validité du modèle est :

$$V = \{ (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^{*2}, p_1 < 150, p_1 + 2p_2 < 200 \}$$

Représenter le domaine  $V$  dans un repère du plan avec  $p_1$  en abscisse et  $p_2$  en ordonnée.

2. (a) Déterminer le prix des imprimantes  $p_1^*$  qui maximise le chiffre d'affaires de l'entreprise  $A$  donné par  $P_A(p_1) = p_1 D_A(p_1)$ .  
(b) En admettant que l'entreprise  $A$  fixe le prix de vente d'une imprimante à  $p_1^*$ , trouver le prix  $p_2^*$  d'une cartouche d'encre qui maximise le chiffre d'affaires de l'entreprise  $B$  donné par  $P_B(p_2) = p_2 D_B(p_1^*, p_2)$ .  
(c) Déterminer alors le chiffre d'affaires total  $P_A(p_1^*) + P_B(p_2^*)$ .
3. On suppose maintenant que les entreprises  $A$  et  $B$  fusionnent. Le chiffre d'affaires du groupe ainsi constitué est donc la somme des chiffres d'affaires des deux entreprises :

$$P(p_1, p_2) = p_1 D_A(p_1) + p_2 D_B(p_1, p_2)$$

- (a) Démontrer que  $P$  a un unique point critique sur  $V$ .
- (b) Démontrer que  $P$  a un maximum local sur  $V$  et calculer la valeur de ce maximum.
4. Commenter la différence entre les résultats de la question 2 et ceux de la question 3.
5. On suppose désormais que les entreprises  $A$  et  $B$  ont fusionné et que le groupe ainsi formé a fixé le prix d'une imprimante à 85,21 euros et le prix d'une cartouche d'encre à 28,70 euros. Un consommateur ayant un budget annuel de 120 euros pour les coûts d'impression (imprimantes et encre à l'exclusion des autres coûts) a une utilité modélisée par la fonction  $u(x, y) = \frac{1}{3} \ln(x) + \frac{2}{3} \ln(y)$  où  $x$  est le nombre d'imprimantes et  $y$  le nombre de cartouches consommées en une année.
- (a) Écrire la contrainte de budget du consommateur.
- (b) Déterminer les quantités d'imprimantes et de cartouches qui permettront au consommateur d'optimiser son utilité.
- (c) Donner la valeur du multiplicateur de Lagrange et interpréter ce résultat.

### Exercice 2

Une école souhaite faire une étude portant sur les notes de ses étudiants selon leur filière de provenance. On obtient les données suivantes :

	[0; 6[	[6; 10[	[10; 14[	[14; 20[	Total		moyenne	variance
Filière A	15	15	15	15	60		10,00	26,50
Filière B	22	42	38	18	120		9,70	18,91

- Décrire la situation statistique.
- Calculer les distributions conditionnelles en fréquences de la variable *note*. Les variables *note* et *filière* semblent-elles indépendantes ?
- Déterminer les médianes conditionnelles de la variable *note*. Interpréter.
- Calculer la moyenne globale à l'aide des moyennes conditionnelles.
- Calculer la variance globale.
- Calculer la variance des moyennes conditionnelles (aussi appelée variance inter) et interpréter.
- Calculer la moyenne des variances conditionnelles (aussi appelée variance intra) et interpréter.
- Le but de cette partie est de tester l'indépendance des variables *note* et *filière* en mettant en œuvre un test d'égalité des moyennes par l'analyse de la variance.
  - Formuler l'hypothèse nulle du test ( $H$ ).
  - On considère la valeur  $T = (n - k) \times \frac{\text{variance inter}}{\text{variance intra}}$  où  $n$  est la taille de l'échantillon et  $k$  le nombre de sous-populations. On admet que, sous cette hypothèse ( $H$ ), les valeurs de  $T$  varient approximativement comme la distribution du  $\chi^2$  à  $k - 1$  degrés de liberté. Pour ce test, on considère un seuil de risque de  $\alpha = 5\%$ .
    - Déterminer le seuil critique  $s$  en utilisant la table statistique appropriée.
    - En déduire la zone de rejet de ( $H$ ).
    - Déterminer la valeur  $t$  prise par  $T$  sur l'échantillon étudié et conclure.