

Préparation à l'agrégation externe de Sciences Sociales

Mathématiques - DM2 (optionnel)

2022-2023

Exercice 8 (2013)

Partie 1 : Étude d'une densité

Soient t_0 un réel strictement positif, a un nombre réel tel que $a > 1$ et k un réel strictement positif. On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{k}{(t+t_0)^a} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

1. Étudier les variations de la fonction f et donner son tableau de variation.
2. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
4. Déterminer en fonction de a et de t_0 le réel k pour que f soit une densité de probabilité sur \mathbb{R} .

Partie 2 : Durée de vie

Des composants électroniques sont fabriqués en chaîne. Ils disposent d'une certaine durée de vie aléatoire. On appelle X la variable aléatoire donnant la durée de vie d'un composant choisi au hasard. On suppose dans cette partie que $a = 2t_0$ est une durée souhaitée par le fabricant.

1. On admet que X est une variable aléatoire de densité f . Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'un composant n'excède pas $\frac{t_0}{2}$?
2. Déterminer en fonction de t_0 la médiane de X c'est-à-dire m tel que $P(x \leq m) = \frac{1}{2}$. Quelle interprétation peut-on en faire ?
3. Déterminer en fonction de t_0 la durée à partir de laquelle 25% des composants fonctionnent encore. Comment appelle-t-on ce nombre ?
4. L'espérance mathématique de X est-elle définie ?