Deuxième partie :

- Espaces vectoriels. Bases. Dimensions
- Espace dual. Transposée d’une application linéaire
- Exercices
- Progression arithmétique
- Progression géométrique
- Logarithmes décimaux

Chap. 4. Algèbre linéaire

§1. Espaces vectoriels. Bases. Dimensions

1.1. Espaces vectoriels

Soit $K \equiv (K, +, \cdot)$ un champ

a. Définition

Un ensemble E a une structure d'espace vectoriel $(e.v.)$ sur K si et seulement si dans E est définie

i) Une loi de composition interne notée $+$ telle que
$(E, +)$ soit un groupe commutatif

ii) Une loi de composition externe $\cdot$

$$\cdot : K \times E \longrightarrow E$$
$$(\alpha, \vec{x}) \longmapsto \alpha.\vec{x}$$ de sorte que soient vérifiés les axiomes suivants :

1. $\forall \alpha \in K, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E\,;\, \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$
2. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{x} \in E\,;\, (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
3. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{x} \in E\,;\, \alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$
4. $\forall \vec{x} \in E, 1.\vec{x} = \vec{x}$

b. Terminologie

Si E est $e.v.$ sur K, alors

Les éléments de E sont appelés $vecteurs$ (et souvent surmontés par une flèche)

Les éléments de K sont appelés $scalaires$ ou $opérateurs$ et
K est appelé $domaine\ d'opérateurs$

c. Conséquences immédiates des axiomes

Proposition

Si E est un $e.v.$ sur K, alors on a les propriétés :
$\forall \alpha \in K, \forall \vec{x} \in E$:

c.1. $\alpha\vec{0} = \vec{0}$ et $0\vec{x} = \vec{0}$

c.2. $\alpha\vec{x} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}$

c.3. $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$

Démonstration

c.1. $\alpha\vec{0} = \alpha(\vec{0} + \vec{0}) = \alpha\vec{0} + \alpha\vec{0} \Longrightarrow$ (dans E) $\alpha\vec{0} = \vec{0}$

De même $0\vec{x} = (0 + 0)\vec{x} = 0\vec{x} + 0\vec{x} \Longrightarrow 0\vec{x} = \vec{0}$

c.2. Montrons que $\alpha\vec{x} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}$

Si $\alpha = 0$, c'est démontré

Supposons $\alpha \neq 0$, on a :

$$\vec{x} = 1.\vec{x} = \left(\alpha.\frac{1}{\alpha}\right)\vec{x} = \frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{x});\ \frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{x}) = \frac{1}{\alpha}\vec{0} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

On a :

$$\vec{0} = 0\vec{x} = (1 - 1)\vec{x} = 1.\vec{x} + (-1)\vec{x} = \vec{x} + (-1)\vec{x}\,;$$

$\vec{x} + (-1)\vec{x} = \vec{0}$. D'où $(-1)\vec{x}$ est l'opposé de $\vec{x}$ c'est – à – dire $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$

Exemples d'$e.v.$

(1) $\mathbb{R}$ est un $e.v.$ sur $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ est un $e.v.$ sur $\mathbb{R}$ (T.P.)

… … … …

$\mathbb{R}^n$ est un $e.v.$ sur $\mathbb{R}$

(2) Soit I un ensemble, alors $E = \mathfrak{I}(I, \mathbb{R})$: ensemble des fonctions définies de I dans $\mathbb{R}$ est un $e.v.$ sur $\mathbb{R}$

s

1.2. Sous – espaces vectoriels

a. Définition

Soit E $e.v.$ sur K

Une partie F, non vide de E, est un sous – espace vectoriel ($s.e.v.$) si, pour les restrictions à F de la loi interne $+$ et de la loi externe (dans le domaine d'opérateurs soit K), F est un $e.v.$ sur K

Exemples

(1) Soit $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $e.v.$ sur $\mathbb{R}$

Alors $F = \mathbb{R} \times \{0\}$ est un $s.e.v.$ de E

(2) Soit $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ et soit $F = \mathbb{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des contenues de I dans $\mathbb{R}$ alors F est un $s.e.v.$ de $E = \mathfrak{I}(I, \mathbb{R})$

b. Proposition caractérisant les $s.e.v.$

Soit E $e.v.$ sur K

Une partie non vide $F \subseteq E$ est un $s.e.v.$ si et seulement si

i) $\forall x, y \in F; x + y \in F$

ii) $\forall \alpha \in K, \forall x \in F ; \alpha x \in F$

ou

$\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in K;\ \alpha x + \beta y \in F$

Démonstration

- La condition est évidemment nécessaire $\Longrightarrow$
- Montrons que la condition est suffisante $\Longleftarrow$

Soit F une partie non vide de E

α) les axiomes concernant la loi de composition externe sont vérifiés

axiome 1 : $\forall \alpha \in K$ et $x, y \in F$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

En effet, soit $\alpha \in K$ et $x, y \in F$

Alors d'après $i)$ $x + y \in F$ et d'après $ii)$ $\alpha(x + y) \in F$

D'autre part, d'après $ii)$ αx et $\alpha y \in F$ et d'après $i)$ $\alpha x + \alpha y \in F$

Enfin, l'égalité $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ est vérifiée dans F

Car elle l'est dans E

axiome 2 : $\forall \alpha, \beta \in K$ et $x \in F$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

En effet, soit $\alpha, \beta \in K, x \in F$

Alors d'après $ii)$ et $i)$ $\alpha x, \beta x, \alpha x + \beta x$ et $(\alpha + \beta)x \in F$

et donc, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ dans E, et donc dans F

axiome 3 : $\forall \alpha, \beta \in K$ et $\forall x \in F$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

De même pour $\alpha, \beta \in K$ et $x \in F$

D'après $ii)$ $\alpha(\beta x) \in F, (\alpha\beta)x \in F$ et $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ dans E
axiome 4 : Dans E, et donc dans F, $\forall x, 1.x = x$
$\beta)$ les axiomes concernant la loi $+$ sont vérifiés
Par exemple :
Associativité : $\forall x, y, z \in F, (x + y) + z = x + (y + z)$
axiome 2 : existence de l'élément neutre et, axiome 3 : commutativité sont évidemment vérifiés.
axiome 3 : Tout élément x admet un opposé x'
L'opposé x' de x étant $(-1)x$
En effet, $\forall x \in F, x' = (-1)x \in F$ d'après $ii)$
Donc la conjonction des conditions $a)$ et $b)$ suffisent pour que F non vide soit un $s.e.v.$ de E

c. Intersection de sous – espaces vectoriels

c.1. Théorème

Soit $\{F_i\}_{i\in J}$ une famille de $s.e.v.$ d'un $e.v.$ E sur K alors $\bigcap_{i\in F} F_i$ est un $s.e.v.$ de E

Démonstration

Soit $F = \bigcap_{i\in J} F_i$
- $F \neq \emptyset$ car $0 \in F$. En effet, $0 \in F_i, \forall i \in J \Longrightarrow 0 \in F$
- $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in F, \alpha x + \beta y \in F$

En effet, $\forall x, y \in F \Longrightarrow x, y \in F_i, \forall i \in J$
On a : $x + y \in F_i, \forall i \in J$ (car F_i $s.e.v.$ de E)
$\alpha x + \beta y \in F_i, \forall i \in J$ (car F_i $s.e.v.$ de E)
$\Longrightarrow \alpha x + \beta y \in F$

c.2. Sous – espace engendré

Soient E $e.v.$ sur K et $S \subseteq E$
$\{F_i\}_{i\in J}$ famille de tous les $s.e.v.$ de E contenant l'ensemble S
D'après le théorème ci – dessus $\bigcap_{i\in J} F_i$ est un $s.e.v.$
En plus, puisque $S \subset F_i$ $\forall i \in J, S \subseteq \bigcap F_i$
D'autre part si F' est un $s.e.v.$ de E contenant S
Alors F' est égal à l'un des F_i de la famille de $s.e.v.$ considérés
Donc $\bigcap F_i \subseteq F'$ d'où la proposition

Proposition

L'intersection de tous les $s.e.v.$ contenant une partie S de E est le plus petit $s.e.v.$ contenant S. Ce $s.e.v.$ est noté $Eng\ S$ ou encore $V(S)$ et appelé *sous – espace vectoriel engendré* par S

d. Somme de sous – espaces

Soit $F_1, F_2, \dots, F_q$ des $s.e.v.$ de E

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_q = \{x = x_1 + x_2 + \cdots + x_q / x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \dots, x_q \in F_q\}$$

d.1. Proposition

$F_1 + F_2 + \cdots + F_q$ est un $s.e.v.$ de E et égal à $V(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_q)$

Démonstration

Soit $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_q$

- $F \neq \emptyset$ car $0 = 0 + 0 + \cdots + 0 \in F$
- $\forall \alpha, \beta \in K$ et $\forall x, y \in F, \alpha x + \beta y \in F$

  En effet,

  $\forall x \in F, x = x_1 + x_2 + \cdots + x_q$ avec $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \dots, x_q \in F_q$

  $\forall y \in F, y = y_1 + y_2 + \cdots + y_q$ avec $y_1 \in F_1, y_2 \in F_2, \dots, y_q \in F_q$

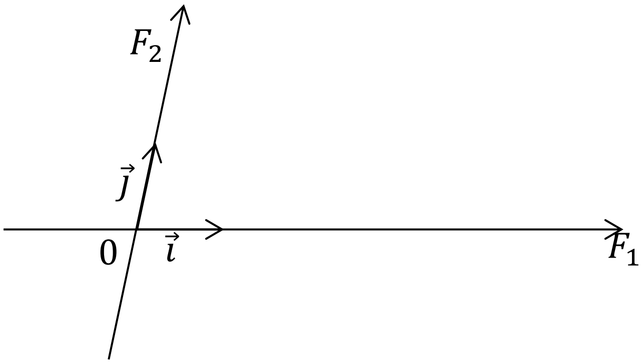
  On a : $\alpha x + \beta y = \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \cdots + \alpha x_q + \beta y_q \in F$,

  $\alpha x_i + \beta y_i \in F_i \quad \forall i = 1,2, \dots, q$

  Donc F est un $s.e.v.$ de E

d.2. En général, l'union de $s.e.v.$ de E n'est pas un $s.e.v.$ de E

Considérons $E = \mathbb{R}^2$



Soient $F_1 = \{\vec{x} = (x_1, x_2)/x_2 = 0\}$ l'axe des abscisses

$F_2 = \{\vec{x} = (x_1, x_2)/x_1 = 0\}$ l'axe des ordonnés

On a F_1 et F_2 $s.e.v.$ de E

Mais $F_1 \cup F_2$ n'est pas un $s.e.v.$ de E

On a par exemple

$\vec{x} = (1,0) \quad \vec{y} = (0,1)$

$(1,0) \in F_1$; $(0,1) \in F_2$; $(1,0) \in F_1 \cup F_2$; $(0,1) \in F_1 \cup F_2$

Mais $(1,0) + (0,1) \notin F_1 \cup F_2$

d.3. Lorsque les $s.e.v.$ $F_1, F_2, \dots, F_q$ sont tels que $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour $i \neq j$, leur somme interne $F_1 + F_2 + \cdots + F_q$ est appelée *somme directe interne* et est notée $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_q$

- Deux $s.e.v.$ F_1 et F_2 de E sont dits complémentaires si $\begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0\} \\ F_1 \oplus F_2 = E \end{cases}$

d.4. Proposition

Dans une somme directe $F_1 \oplus F_2$ de $s.e.v.$, la décomposition d'un vecteur $x = x_1 + x_2$, par des $x_i \in F_i$ est unique. Vice – versa, si tout vecteur $x \in F_1 + F_2$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ alors $F_1 \cap F_2 = \{0\}$

Démonstration

Soient $x = x_1 + x_2$ et $x' = x_1' + x_2'$ deux décompositions de $x \in F_1 + F_2$; $x_1, x_1' \in F_1$ et $x_2, x_2' \in F_2$

Alors $x_1 + x_2 = x_1' + x_2' \Longrightarrow x_1 - x_1' = x_2' - x_2$

Or $x_1 - x_1' \in F_1$ et F_2 ; $x_2' - x_2 \in F_1$ et F_2

Donc $x_1 - x'_1 \in F_1 \cap F_2 = \{0\}$. D'où $x_1 - x'_1 = 0$ ou $x_1 = x'_1$
De même $x'_2 - x_2 = 0$ ou $x_2 = x'_2$
Vice – versa, soit $z \in F_1 \cap F_2$, alors $z + (-z)$ et $0 + 0$ sont deux décompositions du vecteur 0 dans $F_1 + F_2$ donc $z = 0$ ceci montre que

$$F_1 \cap F_2 = \{0\}$$

e. Produit d'espaces vectoriels
Soient $E_1, E_2, \dots, E_q$ des $e.v.$ sur un champ K, et $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q$ le produit cartésien
Posons

$$(x_1, x_2, \dots, x_q) + (y_1, y_2, \dots, y_q) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_q + y_q)$$
$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_q) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_q)$$

Alors E muni de ces opérations est un $e.v.$ sur K appelé espace vectoriel produit (T.P.)

f. Espace vectoriel quotient
Soit F $s.e.v.$ de E sur K
f.1. Considérons la relation d'équivalence $\equiv$ modulo le sous – groupe F

$x, y \in E, x \equiv y \ (\text{mod } F) \Leftrightarrow x - y \in F$

$cl(a) = a + F$

E/F : le quotient de E par la relation d'équivalence mod F

$(E, +)$ étant par définition un groupe abélien, F est un sous – groupe distingué. On peut définir sur E/F deux lois :

- La loi interne par $cl(x) + cl(y) = cl(x + y)$
- La loi externe de K sur E/F par : $\alpha\, cl(x) = cl(\alpha x)$. La loi externe est bien définie

En effet, si $x' \in cl(x)$ c'est – à – dire $x' \equiv x \ (\text{mod } F) \Longrightarrow x' - x \in F$
On a : $\alpha(x - x') = \alpha x' - \alpha x \in F$ (car F $s.e.v.$)
D'où $\alpha x' \equiv \alpha x \ (\text{mod } F) \Longrightarrow cl(\alpha x') = cl(\alpha x)$

f.2. Proposition
L'ensemble quotient E/F muni de deux opérations définies ci – dessus est un $e.v.$ sur K appelé *espace vectoriel quotient* (T.P.)

1.3. Structure d'algèbre sur un corps K

a. Définition
Soit A un ensemble et K un champ.
Un système $(A, +, \times, \cdot)$, formé d'un ensemble A, de deux lois internes $+$ et $\times$ sur A, et d'une loi externe $\cdot$ de K sur A, a une structure d'algèbre sur K si et seulement si
i) $(A, +, \times)$ est un anneau
ii) $(A, +, \cdot)$ est un $e.v.$ sur K

iii) $\forall x, y \in A$ et $\forall \lambda \in K, \lambda(x \times y) = (\lambda x) \times y = x \times (\lambda y)$

Exemples

(1) Tout corps commutatif K (p.c.$\mathbb{R}$) est une algèbre sur lui – même

(2) Le corps des complexes $\mathbb{C}$, $e.v.$ sur $\mathbb{R}$, est une algèbre sur $\mathbb{R}$

(3) K^n muni des opérations

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$
$$xy = (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n)$$
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$ avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ est une algèbre sur K

(4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le système $(\mathfrak{M}_n(K), +, \times, \cdot)$ est une algèbre appelée l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K

(5) Pour tout champ K, le système $(K[x], +, \times, \cdot)$ est une algèbre. C'est l'algèbre des polynômes à une indéterminée x et à coefficients dans K

b. Sous – algèbre

Définition

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ une algèbre sur K. Un sous – ensemble $F \subseteq A$ est appelé sous – algèbre de l'algèbre $(A, +, \times, \cdot)$ lorsque les trois lois de A restreintes aux éléments de F conférant à F la structure d'algèbre sur K

Autrement dit

F est sous – algèbre de l'algèbre $(A, +, \times, \cdot)$ sur K si et seulement si

i) F est un sous – anneau de $(A, +, \times)$

ii) F est un $s.e.v.$ de $(A, +, \cdot)$

Exemple

(1) Soit A un corps, F un sous – corps de A, K un sous – corps de F c'est – à – dire $K \subseteq F \subseteq A$; alors F est sous – algèbre de l'algèbre A

(2) Soit K un champ, alors $F = \{(\alpha, 0, \dots, 0)/\alpha \in K\}$ ... est sous – algèbre de l'algèbre A^n sur K

1.4. Relations linéaires – Bases – Dimensions

a. Combinaisons linéaires

Soit E un $e.v.$ sur K et $S \subseteq E$ une partie de E

a.1. Définition

On appelle combinaison linéaire ($C.L.$) d'éléments de S, tout vecteur $x \in E$ de la forme

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r \text{ où } x_1, x_2, \dots, x_r \in S$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in K$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sont les coefficients de la $C.L.$

a.2. Proposition

L'ensemble de toutes les $C.L.$ $K(S)$ d'une partie $S \subseteq E$ est un $s.e.v.$ de E. Ce $s.e.v.$ est en fait égal au $s.e.v.$ engendré par S c'est – à – dire $V(S)$

Démonstration

Soit $K(S)$ l''ensemble de toutes les $C.L.$ d'éléments de S

- $K(S) \neq \emptyset$ car $0 = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 + \cdots + \alpha_r 0 \in K(S)$
- $\forall x, y \in K(S), \forall m, n \in K; mx + ny \in K$

On a : $x, y \in K(S)$; $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r$
$$y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_r y_r$$
$$mx + ny = (m\alpha_1)x_1 + (m\alpha_2)x_2 + \cdots + (m\alpha_r)x_r + (n\beta_1)y_1 + (n\beta_2)y_2 + \cdots + (n\beta_r)y_r \in K$$

- Montrons en plus que $K(S) = V(S)$
$$\forall z \in S, z = 1.z \Longrightarrow S \subseteq K(S)$$
Comme $K(S)$ est le plus petit $s.e.v.$ contenant S, alors $V(S) \subseteq K(S)$
D'autre part, $\forall x \in K(S), x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r$
Mais $x_1, x_2, \ldots, x_r \in S$. Donc $\in V(S)$, on a :
$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r \in V(S)$ (car $V(S)$ $s.e.v.$)
Donc $K(S) \subseteq V(S)$ et $K(S) = V(S)$

Exemple

Soit l'$e.v.$ $\mathbb{R}^3$ et le sous – ensemble $S = \left\{\left(-1,0,\frac{1}{2}\right), (0,2,1)\right\}$ Une $C.L.$ d'éléments de S est un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ de la forme
$$x = \alpha_1\left(-1,0,\frac{1}{2}\right) + \alpha_2(0,2,1) = \left(-\alpha_1, 2\alpha_2, \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2\right)$$

b. Partie génératrice

Définition

Une partie S d'un $e.v.$ E est dite **génératrice** de E lorsque $K(S) = E$ c'est – à – dire lorsque tout élément de E est $C.L.$ d'éléments de S. On dit que S engendre E

Exemple

Soit $S = \{1, i\}$ sous –ensemble de l'$e.v.$ $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$
On a : $K(S) = V(S) = \{x + yi / x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$
D'où $S = \{1, i\}$ est une partie de $\mathbb{C}$ génératrice de $\mathbb{C}$

c. Indépendance linéaire

c.1. Définitions

Un sous – ensemble S d'un $e.v.$ E est dit linéairement indépendant (ou libre) si et seulement si
$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_r \in S, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = \vec{0} \Longrightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_r = 0$$
Un sous – ensemble S d'un $e.v.$ E est dit linéairement dépendant (ou lié) si et seulement s'il n'est pas libre c'est – à – dire

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = \vec{0}$ et l'un au moins des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ est non nul

Exemples

Si $\vec{x} \neq \vec{0}$ alors $\{\vec{x}\}$ est libre car $\alpha\vec{x} = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$
$\{\vec{0}\}$ est une partie liée car $1\vec{0} = \vec{0}$ avec $1 \neq 0$
Dans $\mathbb{R}^3 = \{\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)\}$ est libre
Car $\forall \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \in \mathbb{R}^3, \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3} = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

c.2. Toute relation de la forme

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = 0$ est appelée **relation linéaire** entre les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_r$
La relation $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_r$ est appelée relation **linéaire triviale**

c.3. Proposition

Soient S et S' deux sous – ensembles d'un $e.v.$ tel que $S \subseteq S'$

Si S est lié alors S' est aussi lié. Inversement si S' est libre alors S est aussi libre (Expliquez)

c.4. Théorème

Si un système de vecteurs est lié, alors l'un au moins des vecteurs du système est une $C.L.$ des autres

Démonstration

Soit $S = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ une partie libre alors $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ non tous nuls/$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = 0$

Supposons $\alpha_3 \neq 0$, alors α_3 est inversible dans K

On a : $\alpha_3 x_3 = -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \cdots - \alpha_r x_r$

$$\Longrightarrow x_3 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} x_2 - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_3} x_r$$

Le vecteur x_3 est donc une $C.L.$ des autres vecteurs

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, le sous – ensemble $S = \{x_1, x_2\}$ avec $x_1 = (2, -1, 0)$ et

$x_2 = \left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$ est lié par la relation $x_1 + 2x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = -2x_2$

d. Base

d.1. Définition

On appelle base d'un $e.v.\ E$, toute partie de E à la fois libre et génératrice.

Exemples

$B = \{2\}$ est une base de $\mathbb{R}$

$B = \{(1,0), (0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$

d.2. Définitions et propositions

Définition 1 (Partie génératrice minimale)

Soit S une partie génératrice de E telle que $S \setminus \{x_2\}$ est non génératrice de E $(x \in S)$. Alors on dit que S est une partie génératrice minimale

Proposition 1

Si $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est une partie génératrice et

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\ (Q)$

$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 \quad (R)$

Alors $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} = I, S - \{x_i\}$ est non génératrice (S)

(c'est – à – dire S est une partie génératrice minimale)

Démonstration

$[(P \wedge Q) \Longrightarrow R] \Longrightarrow S$

Montrons que $\neg S \Longrightarrow \neg[(P \wedge Q) \Longrightarrow R]$

$\neg S$ signifie $S - \{x_i\}$ est une partie génératrice de E

On en déduit que

$\forall i \in I, x_i$ est une $C.L.$ des éléments de $S - \{x_i\}$

On a :

$$x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{i-1} x_{i-1} + \alpha_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \alpha_n x_n$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{i-1} x_{i-1} + \alpha_{i+1} x_{i+1} + (-1) x_i + \cdots + \alpha_n x_n = \vec{0}$$

$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = -1 = 0 = \cdots = \alpha_n$

D'où $\neg S \Longrightarrow \neg[(P \wedge Q) \Longrightarrow R]$

Proposition 2

Si $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est une partie génératrice de E $\qquad : (P)$

et $\forall i \in I, S - \{x_i\}$ est non génératrice : (Q)

Alors $\quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \vec{0}$: (R)

$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$: (S)

Démonstration

$(P \wedge Q) \Longrightarrow (R \Longrightarrow S)$

Montrons que $\neg(R \Longrightarrow S) \Longrightarrow \neg(P \wedge Q)$

(C'est – à – dire si S est une partie liée alors S n'est pas une partie génératrice minimale)

$\neg(R \Longrightarrow S)$ signifie qu'il existe une $C.L.$ nulle à coefficients non tous nuls

Soit α_k, ce coefficient

On a :$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k + \cdots + \alpha_n x_n = \vec{0} \quad (\alpha_k \neq 0)$

$$\Longrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_k} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_k} x_2 + \cdots + 1.x_k + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_k} x_n = \vec{0}$$

$$x_k = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_k} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_k} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_k} x_n\right)$$

$$= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

Ainsi x_k s'écrit comme une $C.L.$ de $S - \{x_k\}$

Ce qui contredit Q donc $P \wedge Q$ faux

Définition 2 (partie génératrice libre)

Si $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est une partie génératrice libre, donc minimale, alors $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x\}$ est une partie liée. S est donc une partie libre telle que si on lui ajoute un élément quelconque x, elle cesse de l'être. On dit que S est une **famille libre maximale**. Réciproquement,

Soit $L_M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une partie libre maximale c'est – à – dire telle que $L_M \cup \{x\}$ soit liée, alors tout x de E est une $C.L.$ de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Donc $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est une partie génératrice, par ailleurs libre, de E

Conclusion

S partie génératrice minimale

$\Updownarrow$

S partie génératrice libre

$\Updownarrow$

S partie libre maximale

$\Updownarrow$

$S = B$ base

d.3. Existence de base

Théorème

Soit E un $e.v.$ sur un champ K. Soient G une partie génératrice de E et L une partie libre contenue dans G : $L \subseteq G$. Alors il existe une base B de E telle que $L \subseteq B \subseteq G$

Corollaire 1

Tout $e.v.$ admet une base

En effet, soit E un $e.v.$

Si $E = \{0\}$, alors $E = \emptyset$ est une base de E

Supposons $E \neq \{0\}$, soit $x \in E$ et $x \neq 0$

Alors $L = \{x\}$ est libre, car $\alpha x = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$
D'où, en appliquant le théorème précédent avec $L = \{x\}$ et $G = E$ on a le résultat
Corollaire 2
Soit F un $s.e.v.$ d'un $e.v.$ E
Si B_o est une base de F alors il existe une base B de E contenant B_o c'est – à – dire il existe une base $B \setminus B_o \subset B$
En effet, comme B_o est une partie libre, il suffit d'appliquer le même théorème précédent avec $L \subset B_o$ et $G = E$
d.4. Expression d'un vecteur à l'aide d'une base
Théorème
Tout vecteur d'un $e.v.$ E s'exprime, de façon unique, comme $C.L.$ des vecteurs d'une base de E
Démonstration
Soit $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base dont les éléments sont considérés suivants un certain ordre

$$\forall x \in E, x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \text{ où } \alpha_i \in K$$

Supposons que x s'exprime de deux façons comme $C.L.$ des éléments de B, on a :

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \alpha'_1 e_1 + \alpha'_2 e_2 + \cdots + \alpha'_n e_n$$
$$\Longrightarrow (\alpha_1 - \alpha'_1)e_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2)e_2 + \cdots + (\alpha_n - \alpha'_n)e_n = \vec{0}$$

D'où, B étant une partie libre,

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha'_1 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha'_2 = 0 \\ \quad \dots \\ \alpha_n - \alpha'_n = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \alpha_1 = \alpha'_1 \\ \alpha_2 = \alpha'_2 \\ \quad \dots \\ \alpha_n = \alpha'_n \end{cases}$$

Notation
Soit $I = \{1,2, \dots, n\}, x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \sum \alpha_i e_i$ qu'on note souvent $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ou $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$
Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont appelés coordonnées de x par rapport à la base $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

e. Dimension d'un espace vectoriel
e.1. Définition
Un $e.v.$ est dit de dimension finie lorsqu'il admet une partie génératrice à un nombre fini d'éléments
e.2. Théorème
Dans un $e.v.$ E de dimension finie sur le corps K, toutes les bases ont le même nombre d'éléments
Démonstration
On sait que tout $e.v.$ E de dimension finie admet au moins une base B (d'après quel théorème ?)
Soit n, le nombre de ses éléments
Soit B', une autre base ayant n' éléments
B' étant une partie libre et ses éléments étant des $C.L.$ des éléments de B

On a : $n' \leq n$. De même $n \leq n'$. D'où $n = n'$

e.3. Définition

La dimension d'un $e.v.\ E$ est le nombre d'éléments d'une base quelconque de E

e.4. Théorème

Tout $e.v.\ E$ de dimension n sur K est isomorphe à K^n, $e.v.$ sur K

Démonstration

Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ une base de E

$\forall x \in E, x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$

On considère l'application $f : E \longrightarrow K^n$

$$x \longmapsto f(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

f est une bijection (vérifier)

D'autre part, si

$$y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$$
$$f(y) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

On a : $f(x+y) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n) = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Corollaire

Deux $e.v.$ de dimension finie sur le même corps K sont isomorphes si et seulement si ils ont une même dimension par rapport à K

Exemples

(1) Tout corps K est un $e.v.$ de dimension 1 sur lui – même

(2) $\mathbb{C}$ est un $e.v.$ sur $\mathbb{R}$

Alors $B = \{1 = (1,0), i = (0,1)\}$ est une base de $\mathbb{C}$ ou tout couple de nombres complexes formant une partie libre dans $\mathbb{C}$, $e.v.$ sur $\mathbb{R}$ c'est – à – dire tel que $\frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$ alors $\forall z \in \mathbb{C}, z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$

Donc $Dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$; $Dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$

f. Dimension d'un sous – espace vectoriel

f.1. Théorème : si F est un $s.e.v.$ de l'$e.v.\ E$ de dim n sur K alors F est dimension finie sur K et $\dim_K F \leq \dim\ _K E$. Réciproquement toute partie à p éléments de E engendre un $s.e.v.$ de E, de dim p. Enfin, $\dim_K F = \dim_K E \Longrightarrow F = E$

Démonstration

Soit E un $e.v.$ de dimension $n > 0$ sur K (donc $E \neq \{0\}$) et F $s.e.v.$ de E, $E \neq \{0\}$.
On sait que toute partie libre L de F est une partie libre de E et a donc au plus n éléments.

L a au moins un élément non nul car $F \neq \{0\}$

Il y a donc dans F des parties libres.

Soit p le nombre d'éléments d'une partie libre maximale de F

Donc c'est une base de F et $1 \leq p \leq n$

Si $p = n$, c'est une base de E et $E = F$

Si $F = \{0\}$, dim $_K F = 0$

Enfin si $E = \{0\}$, on a également $F = \{0\}$

f.2. Un $s.e.v.\ F$ de dim 1 s'appelle une droite passant par $0 \in E$

$F = \{\alpha a / \alpha \in K\}, a \neq 0$ et $B = \{a\}$

Un $s.e.v.\ F$ de dim 2 s'appelle un plan passant par $0 \in E$

$F = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 / \alpha_1, \alpha_2 \in K\}$ avec $B = \{a_1, a_2\}$

Un $s.e.v.$ de dim $p > 2$ de base $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ est décrit par

$x/x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i, \quad \alpha_i \in K$

Si $p = n - 1$, on dit que F est un **hyperplan** passant par $0 \in E$

g. Changement de bases – Matrices de passage

Soient $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et $B' = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ deux bases ordonnées d'un $e.v.$ E

$\forall x \in E, x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$ dans la base B (1)

$x = x_1' b_1 + x_2' b_2 + \cdots + x_n' b_n$ dans la base B' (2)

Etablissons la relation qui existe entre les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ de x dans la base B et ses coordonnées $x_1', x_2', \dots, x_n'$ dans la base B'

En effet, les vecteurs $b_1, b_2, \dots, b_n$ de la base B', dans B s'écrivent

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \cdots + \alpha_{n1} a_n \\ b_2 &= \alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \cdots + \alpha_{n2} a_n \qquad (3) \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ b_n &= \alpha_{1n} a_1 + \alpha_{2n} a_2 + \cdots + \alpha_{nn} a_n \end{aligned}$$

(3) dans (2) donne

$$\begin{aligned} x &= x_1'(\alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \cdots + \alpha_{n1} a_n) + x_2'(\alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \cdots + \alpha_{n2} a_n) + \cdots + \\ &\quad x_n'(\alpha_{1n} a_1 + \alpha_{2n} a_2 + \cdots + \alpha_{nn} a_n) \\ &= (x_1'\alpha_{11} a_1 + x_2'\alpha_{12} a_1 + \cdots + x_n'\alpha_{1n} a_1) + (x_1'\alpha_{21} a_2 + x_2'\alpha_{22} a_2 + \\ &\quad \cdots + x_n'\alpha_{2n} a_2) + \cdots + (x_1'\alpha_{n1} a_n + x_2'\alpha_{n2} a_n + \cdots + x_n'\alpha_{nn} a_n) \\ &= (x_1'\alpha_{11} + x_2'\alpha_{12} + \cdots + x_n'\alpha_{1n}) a_1 + (x_1'\alpha_{21} + x_2'\alpha_{22} + \cdots + x_n'\alpha_{2n}) a_2 + \cdots + \\ &\quad (x_1'\alpha_{n1} + x_2'\alpha_{n2} + \cdots + x_n'\alpha_{nn}) a_n \end{aligned}$$

D'où, par unicité des coordonnées par rapport à B dans (1)

On a :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1'\alpha_{11} + x_2'\alpha_{12} + \cdots + x_n'\alpha_{1n} \\ x_2 &= x_1'\alpha_{21} + x_2'\alpha_{22} + \cdots + x_n'\alpha_{2n} \qquad (4) \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n &= x_1'\alpha_{n1} + x_2'\alpha_{n2} + \cdots + x_n'\alpha_{nn} \end{aligned}$$

Si on pose

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad P = (\alpha_{ij})$$

Matrices colonnes de ces coordonnées alors le système (4) est équivalent à l'égalité de la matrice X avec le produit matriciel PX'. On a :

$$(4) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

ou

$$(4) \Leftrightarrow X = PX' \qquad (5)$$

La matrice $P = (\alpha_{ij})$ s'appelle **matrice de passage** de la B à la base B' ou matrice de changement des coordonnées de la base B à la base B'.

Si P^{-1} est la matrice inverse de la matrice de passage en multipliant la relation (5) à gauche par P^{-1}, on obtient :

$$X' = P^{-1}X$$

Expression de nouvelles coordonnées $x_1', x_2', \dots, x_n'$ en fonction des anciennes

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

Exemple

Etablir la relation qui existe entre les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ et ses coordonnées $x_1', x_2', \dots, x_n'$ dans la base $B' = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

En effet, la matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La relation cherchée est donnée par les formules de changement de bases

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \qquad \text{D'où} \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 + x'_3 \\ x_2 = x'_1 + x'_2 \\ x_3 = x'_3 \end{cases}$$

h. Base canonique de K^n

On sait que pour tout champ K, K^n est un $e.v.$ sur K.

Considérons les vecteurs suivants de K^n

$e_1 = (1,0, \dots, 0)$

$e_2 = (0,1, \dots, 0)$

$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

$e_n = (0,0, \dots, 1)$

$\forall x \in (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n, x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$

De plus, si $\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \cdots + \alpha_ne_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

Donc les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ constituent une base appelée **base canonique** de K^n.

Ainsi $\dim K^n = n$

Exemple

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ $e.v.$ sur $\mathbb{R}$

1.5. Applications linéaires. Matrices

a. Applications linéaires

a.1. Définition

Soient E et E' deux $e.v.$ sur un champ K.

On appelle application linéaire ou homomorphisme de l'$e.v.$ E dans E', toute application

$f : E \longrightarrow E'$ telle que $i) \forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$

$ii) \forall \alpha \in K, \forall x \in E, f(\alpha x) = \alpha f(x)$

ou

$$\forall \alpha, \beta \in K \text{ et } \forall x, y \in E, \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

a.2. Définition

On appelle **isomorphisme** de E sur E' tout homomorphisme bijectif de E dans E'

a.3. Définition
On dit que E et E' sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de E sur E'
a.4. Définition
- On appelle endomorphisme de E (ou opérateur linéaire dans E), tout homomorphisme de E dans E
a.5. Définition
- On appelle automorphisme de E tout isomorphisme de E sur lui – même
Exemples
(1) Pour tout $e.v.$ E sur K, l'identité sur E est une application linéaire
En effet,

$$\begin{aligned}\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in K, f(\alpha x + \beta y) &= \alpha x + \beta y \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y)\end{aligned}$$

(2) L'application définie dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x + y, x - y)$ est linéaire. En effet,

$$\begin{aligned}\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, f[(x, y) + (x', y')] &= f(x + x', y + y') \\ &= [(x + x') + (y + y'), (x + x') - (y + y')] \\ &= (x + x' + y + y', x + x' - y - y') \\ &= (x + y + x' + y', x - y + x' - y') \\ &= [(x + y) + (x' + y'), (x - y) + (x' - y')] \\ &= (x + y, x - y) + (x' + y', x' - y') \\ &= f(x, y) + f(x', y')\end{aligned}$$

En plus,

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in K, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f[\alpha(x, y)] &= f(\alpha x, \alpha y) \\ &= (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y) \\ &= [\alpha(x + y), \alpha(x - y)] \\ &= [\alpha(x + y, x - y)] \\ &= \alpha f(x, y)\end{aligned}$$

b. Noyau – Image

b.1. Définitions
Le noyau d'une application linéaire $f : E \longrightarrow E'$ noté

$$\ker f = \{x / x \in E \text{ et } f(x) = 0\}$$

L'image d'une application linéaire $f : E \longrightarrow E'$ notée

$$f(E) \text{ ou } Im\, f = \{f(x) / x \in E\}$$

b.2. Propositions
i) $\ker f$ est un $s.e.v.$ de E
ii) $\ker f = \{0\} \Leftrightarrow f$ est injectif
iii) $Im\, f$ est un $s.e.v.$ de E'

Démonstration
i) $\ker f \neq \emptyset$ car $f(0) = 0 \in \ker f$
$\forall x, y \in \ker f, \forall \alpha, \beta \in K, \alpha x + \beta y \in \ker f$
Car $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha.0 + \beta.0 = 0$
ii) Supposons $\ker f = \{0\}$ et montrons que f est injectif c'est – à – dire
$\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$
En effet, si $f(x) = f(y)$

Alors $f(x) - f(y) = f(x - y) = 0 \Longrightarrow x - y \in \ker f$ or $\ker f = \{0\}$
donc $x - y = 0$ ou $x = y$
Supposons f injectif et montrons que $\ker f = \{0\}$
Si $x \in \ker f$ alors $f(x) = 0 = f(0) \Longrightarrow x = 0$. D'où $\ker f = \{0\}$

iii) $Im\, f \neq \emptyset$ car $f(0) = 0 \in Im\, f$
$\forall x', y' \in Imf$ et $\forall \alpha, \beta \in K, \alpha x' + \beta y' \in Imf$
On a :
$x' \in Imf \Longrightarrow \exists x \in E / x' = f(x)$
$y' \in Imf \Longrightarrow \exists y \in E / y' = f(y)$
D'où $\alpha x' + \beta y' = \alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x) + f(\beta y) = f(\alpha x + \beta y)$
$\Longrightarrow \alpha x' + \beta y' \in Im\, f$

c. Rang d'une application linéaire

c.1. Définition

On appelle rang d'une application linéaire $f : E \longrightarrow E'$ la dimension de $Im\, f$

c.2. Théorème

Soient E $e.v.$ de dimension finie et $f : E \longrightarrow E'$ application linéaire alors
$$\dim E = \dim \ker f + rang\ f$$

Corollaire

Soient E et E' des $e.v.$ de même dimension n sur un champ K. Pour une application linéaire $f : E \longrightarrow E'$, les affirmations suivantes sont équivalentes

i) Rang de $f = n$
ii) f est injective
iii) f est surjective
iv) f est bijective

Démonstration

Il est évident que $iv) \Longrightarrow ii)$
Comme $\dim E = \dim \ker f + rang\ f = n$
On a : $rang\ f = n \Leftrightarrow \ker f = \{0\} \Leftrightarrow f$ est injectif. D'où $i) \Leftrightarrow ii)$
Par définition du rang, $iii) \Leftrightarrow i)$
Enfin, puisque $ii) \Leftrightarrow i) \Leftrightarrow iii)$ on a $iii) \Longrightarrow iv)$

c.3. Proposition

Soient E et E' deux $e.v.$ sur K et $f : E \longrightarrow E'$ application linéaire. Si f est bijective alors $f^{-1} : E' \longrightarrow E$ est linéaire

Démonstration

Montrons que $\forall x', y' \in E', \forall \alpha, \beta \in K$;
$$f^{-1}(\alpha x' + \beta y') = \alpha f^{-1}(x') + \beta f^{-1}(y')$$
Soient $x = f^{-1}(x')$ et $y = f^{-1}(y') / f(x) = x'$ et $f(y) = y'$
On a :
$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha x' + \beta y') &= f^{-1}[\alpha f(x) + \beta f(y)] \\ &= f^{-1}[f(\alpha x + \beta y)] \\ &= (f^{-1} \circ f)(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha x + \beta y = \alpha f^{-1}(x') + \beta f^{-1}(y') \end{aligned}$$

c.4. Théorème de factorisation d'applications linéaires

Soient E et E' des $e.v.$ sur K

Toute application linéaire $f : E \longrightarrow E'$ se factorise en une surjection linéaire, un isomorphisme et une injection canonique. En d'autres mots : il existe un isomorphisme

$f' : {}^{E}/_{\ker f} \longrightarrow f(E)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "cl"'] & & E \\
E/\ker f \arrow[rr, "f'"'] & & f(E) \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

Soit commutatif c'est – a – dire $f = j \circ f' \circ cl$ où j: injection canonique
cl: surjection canonique

Démonstration

- f' est bien définie par $f'[cl(x)] = f(x)$
  Car $x' \in cl(x) \Leftrightarrow x' \equiv x(\text{mod } \ker f) \Leftrightarrow x' - x \in \ker f \Leftrightarrow$
  $$f(x' - x) = f(x') - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x') = f(x)$$
- $(j \circ f' \circ cl)(x) = (j \circ f')cl(x) = j\big[f'\big(cl(x)\big)\big] = j\big(f(x)\big) = f(x)$
- f' est linéaire car $f'[\alpha\, cl(x) + \beta\, cl(y)] = f'[cl(\alpha x + \beta y)]$
  $$= f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$
  $$= \alpha f'\big(cl(x)\big) + \beta f'\big(cl(y)\big)$$
- Montrons que f' est bijectif

1.6. Opérations d'applications linéaires

a. <u>Addition et multiplication par un scalaire</u>

Posons : E et E' deux $e.v.$ sur un champ K
$\mathcal{L}_K(E, E')$ ou simplement $\mathcal{L}(E, E')$ ensemble de toutes les applications linéaires de E vers E'

<u>a.1. Addition d'applications linéaires</u>

Si $f, g \in \mathcal{L}(E, E')$
$$f + g : E \longrightarrow E'$$
$$x \longmapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- $f + g \in \mathcal{L}(E, E')$
  En effet, $\forall x, y \in E$ et $\forall \alpha, \beta \in K$:
  $$\begin{aligned}(f + g)(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y)\\ &= f(\alpha x) + f(\beta y) + g(\alpha x) + g(\beta y)\\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) + \alpha g(x) + \beta g(y)\\ &= \alpha\big(f(x) + g(x)\big) + \beta\big(f(y) + g(y)\big)\\ &= \alpha(f + g)(x) + \beta(f + g)(y)\end{aligned}$$
- Cette addition définit donc une L.C.I. sur l'ensemble $\mathcal{L}(E, E')$
  $$+ : \mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{L}(E, E') \longrightarrow \mathcal{L}(E, E')$$
  $$(f, g) \longmapsto f + g$$

a.2. Multiplication par un scalaire

$\forall \lambda \in K$ et $\forall f \in \mathcal{L}(E, E')$, $\lambda f \in \mathcal{L}(E, E')$

$$\lambda f : E \longrightarrow E'$$
$$x \longmapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

- $\lambda f \in \mathcal{L}(E, E')$

Car $(\lambda f)(\alpha x + \beta y) = \lambda f(\alpha x + \beta y) = \lambda\big(f(\alpha x) + f(\beta y)\big)$
$$= \lambda\big(\alpha f(x) + \beta f(y)\big) = (\lambda\alpha) f(x) + (\lambda\beta) f(y)$$
$$= (\alpha\lambda) f(x) + (\beta\lambda) f(y) = \alpha\big(\lambda f(x)\big) + \beta\big(\lambda f(y)\big)$$
$$= \alpha(\lambda f)(x) + \beta(\lambda f)(y)$$

Cette opération définit une loi de composition externe de K sur $\mathcal{L}(E, E')$
$$K \times \mathcal{L}(E, E') \longrightarrow \mathcal{L}(E, E')$$
$$(\lambda, f) \longmapsto \lambda f$$

a.3. Théorème

$\mathcal{L}_K(E, E')$ muni de deux opérations ci – dessus est un $e.v.$ sur K (T.P.)

b. Composition d'applications linéaires

Considérons E, E' et E'' des $e.v.$ sur K

b.1. Proposition

La composée de deux applications linéaires est linéaire c'est – à – dire
Si $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $g \in \mathcal{L}(E', E'')$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, E'')$

$$g \circ f : E \longrightarrow E''$$
$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

- $g \circ f \in \mathcal{L}(E, E'')$

En effet, $\forall x, y \in E$ et $\forall \alpha, \beta \in K$:
$$(g \circ f)(\alpha x + \beta y) = g\big(f(\alpha x + \beta y)\big) = g\big(f(\alpha x) + f(\beta y)\big)$$
$$= g\big(\alpha f(x) + \beta f(y)\big) = \alpha g\big(f(x)\big) + \beta g\big(f(y)\big)$$
$$= \alpha(g \circ f)(x) + \beta(g \circ f)(y)$$

- La composition définit une application
$$\circ : \mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{L}(E', E'') \longrightarrow \mathcal{L}(E, E'')$$

b.2. Proposition

i) $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, E')$, $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$ et $g \in \mathcal{L}(E', E'')$

ii) $\forall f \in \mathcal{L}(E, E')$, $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(E', E'')$

iii) $\forall f \in \mathcal{L}(E, E')$, $\forall g \in \mathcal{L}(E', E'')$ et $\lambda \in K$
$\lambda(g \circ f) = (\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f)$
(On dit que $\circ$ est compatible avec la multiplication par les scalaires)

Démonstration

i) $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, E')$ et $\forall g \in \mathcal{L}(E', E'')$,
$$g \circ (f_1 + f_2)(x) = g\big((f_1 + f_2)(x)\big) = g\big(f_1(x) + f_2(x)\big)$$
$$= g\big(f_1(x)\big) + g\big(f_2(x)\big) = (g \circ f_1)(x) + (g \circ f_2)(x)$$

ii) Comme en i)

iii) Laissé pour le lecteur (la démonstration)

c. Algèbre des endomorphismes

Soient E $e.v.$ sur un champ K

$End(E) = \mathcal{L}(E, E)$ ensemble des endomorphismes de E ou opérateurs linéaires sur K

c.1. $(End(E), +, \cdot)$ est un $e.v.$ sur K

où $+$ est l'addition interne des endomorphismes

$\cdot$ est la multiplication externe des endomorphismes par les scalaires

c.2. $(End(E), +, \circ)$ est un anneau

avec $+$: l'addition interne des endomorphismes

$\circ$: la composition des endomorphismes. $\circ$ est une L.C.I.

c.3. La structure d'$e.v.$ et celle d'anneau sont liées par la relation

$\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g), \ \ \forall f, g \in End(E)$ et $\lambda \in K$

Le système $(End(E), +, \circ, \cdot)$ vérifiant c.1, c.2 et c.3 est une algèbre sur K appelée algèbre des endomorphismes de l'$e.v.\ E$

d. Groupe linéaire sur un espace vectoriel

Soit $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E

Proposition et définition

$(GL(E), \circ)$ est un groupe appelé groupe linéaire de l'$e.v.\ E$

Démonstration

On sait que un automorphisme de E est une permutation de l'ensemble sous – jacent E

On a :

$GL(E) : \mathcal{S}(E)$

$GL(E) \neq \emptyset$ car l'identité sur E est un automorphisme

D'autre part,

$\forall f, g \in GL(E); f \circ g \in GL(E)$

Donc $GL(E)$ est un sous – groupe du groupe $(\mathcal{S}(E), \circ)$

1.7. Applications linéaires et matrices

a. Extension linéaire d'une fonction donnée sur une base

a.1. Proposition

Soient E et E' des $e.v.$ sur K et $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E

Alors, étant donné n vecteurs quelconque $u_1, u_2, \dots, u_n \in E'$, il existe un et un seul homomorphisme $f : E \longrightarrow E'$ tel que

$f(e_i) = u_i \ \forall i = 1,2, \dots, n \quad (C.S)$

Démonstration

$\forall x \in E, x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ son expression par rapport à la base B.

Etant donné que f doit être linéaire et en même temps satisfaire aux conditions $(C.S)$, on aura l'égalité

$f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \cdots + x_nf(e_n) = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$

On définit f par la relation

$f(x) = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$ avec $x_1, x_2, \dots, x_n$ coordonnées de x par rapport à B

- f est linéaire

En effet, $\forall x, y \in E, x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$

$$y = x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + \cdots + x'_n e_n$$

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= f[(\alpha x_1 + \beta x'_1)e_1 + (\alpha x_2 + \beta x'_2)e_2 + \cdots + (\alpha x_n + \beta x'_n)e_n] \\ &= (\alpha x_1 + \beta x'_1)u_1 + (\alpha x_2 + \beta x'_2)u_2 + \cdots + (\alpha x_n + \beta x'_n)u_n \\ &= \alpha(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n) + \beta(x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + \cdots + x'_n u_n) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

- Supposons qu'il existe un autre homomorphisme g tel que

  $g(e_i) = u_i$. On a :

  $$\begin{aligned} g(x) &= x_1 g(e_1) + x_2 g(e_2) + \cdots + x_n g(e_n) \\ &= x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n \\ &= f(x) \end{aligned}$$

<u>a.2.</u> Une application linéaire est donc entièrement déterminée lors qu'on connait les images des éléments d'une base

En effet,

Soient E et E' deux $e.v.$ sur K et $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base de E ayant n éléments.

La donnée de n vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ de E' est équivalente à la donnée d'une application linéaire

$$\ell : B \longrightarrow E' / \ell(e_i) = u_i ; \forall i = 1,2, \dots, n$$

Si on note $j : B \longrightarrow E$ l'injection canonique de la base, les conditions $(C.S)$ deviennent $f \circ j = \ell$ et la proposition 1) ci – dessus s'énonce alors :

Etant donné une fonction $\ell : B \longrightarrow E'$, il existe une et une seule application linéaire $f : E \longrightarrow E' / f \circ j = \ell$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "j"'] & E' \\ E \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

f est appelée extension linéaire de ℓ

En associant à ℓ son extension linéaire f, on définit une bijection de $\mathfrak{I}(B, E')$ sur $\mathcal{L}(E, E')$

<u>Corollaire</u>

Deux $e.v.$ de même dimension sont isomorphes

b. <u>Matrice d'une application linéaire</u>

Soient E et E' deux $e.v.$ de dimension respectivement n et m sur K

$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base ordonnée de E

$B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ base ordonnée de E'

<u>b.1.</u> Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$, on sait que f est entièrement déterminée par les images $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ des éléments de la base B

Comme $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \in E'$, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11} e'_1 + a_{21} e'_2 + \cdots + a_{m1} e'_m \\ f(e_2) &= a_{12} e'_1 + a_{22} e'_2 + \cdots + a_{m2} e'_m \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ f(e_n) &= a_{1n} e'_1 + a_{2n} e'_2 + \cdots + a_{mn} e'_m \end{aligned}$$

Les coordonnées de $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ par rapport à B' constituent les colonnes de la matrice suivante

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ M(f) = & \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

appelée matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases B et B'

b.2. L'unicité de l'écriture de $f(e_i)$ dans la base B' nous rassure l'unicité du tableau précédent, à condition de fixer les bases B et B'. Réciproquement, tout tableau du type précédent définit une unique application linéaire f d'un $e.v.$ de $\dim = n$ dans un autre $e.v.$ de $\dim = m$

b.3. Le nombre d'éléments de chaque colonne est la dim de E'
Le nombre d'éléments de chaque ligne est la dim de E
Notre tableau comprend $m \times n$ éléments

b.4. Considérons $x \in E$ de coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ par rapport à B
Soient $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ les coordonnées de $f(x)$ dans la base B', établissons la relation entre les scalaires
$x_1, x_2, \dots, x_n$ et les scalaires $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n) \\ &= x_1(a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \cdots + a_{m1}e'_m) + x_2(a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \cdots + a_{m2}e'_m) + \cdots + x_n(a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \cdots + a_{mn}e'_m) \\ &= (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n})e'_1 + (x_1a_{21} + x_2a_{22} + \dots + x_na_{2n})e'_2 + \cdots + (x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \cdots + x_na_{mn})e'_m \end{aligned}$$

Par unicité de coordonnées de $f(x)$ suivant la base B', on a :

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x'_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

Ces formules sont équivalentes à l'égalité

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Donc, la colonne des $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ s'obtient en multipliant la colonne des $x_1, x_2, \dots, x_n$ par la matrice f relativement aux bases B et B'

Exemples de matrices d'une application linéaire

(1) Matrice de l'application nulle θ sur $\mathbb{R}^2$

$$0(e_1) = 0 = 0e_1 + 0e_2 \qquad 0(e_2) = 0 = 0e_1 + 0e_2 \qquad M(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Matrice de l'identité 1_E sur $E = \mathbb{R}^2$

$$1_E(e_1) = e_1 = 1e_1 + 0e_2 \qquad 1_E(e_2) = e_2 = 0e_1 + 1e_2 \qquad M(1_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = \left(\frac{x_1}{2} - x_2 + 5x_3, x_2 - 2x_3\right)$

a) Vérifier que f est linéaire

b) Trouver la matrice $M(f)$ de l'application linéaire f par rapport aux bases canoniques

<u>Solution b)</u>

On a :

$f(e_1) = f(1,0,0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}e_1' + 0e_2'$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,1) = -e_1' + e_2'$ $\quad M(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (5,-2) = 5e_1' - 2e_2'$

c. <u>Isomorphisme entre espaces d'applications linéaires et espaces de matrices</u>

C'est – à – dire entre $\mathcal{L}_K(E, E')$ et $\mathfrak{M}_{m,n}(K)$

<u>c.1. Théorème</u>

Soient E et E' $e.v.$ sur K où $\dim E = n$ et $\dim E' = m$

B une base de E,

B' une base de E'

Alors l'application $M : \mathcal{L}_K(E, E') \longrightarrow \mathfrak{M}_{m,n}(K)$ est un isomorphisme d'$e.v.$

<u>Démonstration</u>

D'après a. et b., M est bijective

Montrons que M est linéaire c'est – à – dire

$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}_K(E, E')$ et $\forall \alpha, \beta \in K$; $M(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha M(f_1) + \beta M(f_2)$

En effet,

Soient a_{ij} les coefficients de la matrice $M(f_1)$ où $1 \leq i \leq m$

b_{ij} les coefficients de la matrice $M(f_2)$ $\quad 1 \leq j \leq n$

$\forall k \in \{1,2, \dots, n\}$, la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $M(\alpha f_1 + \beta f_2)$ est constituée par les coordonnées de $(\alpha f_1 + \beta f_2)(e_k)$ suivant $e_1', e_2', \dots, e_m'$ or

$(\alpha f_1 + \beta f_2)(e_k) = \alpha f_1(e_k) + \beta f_2(e_k)$

$= (\alpha a_{1k} + \beta b_{1k})e_1' + (\alpha a_{2k} + \beta b_{2k})e_2' + \cdots + (\alpha a_{mk} + \beta b_{mk})e_m'$

$= (\alpha a_{1k})e_1' + (\beta b_{1k})e_1' + (\alpha a_{2k})e_2' + (\beta b_{2k})e_2' + \cdots + +(\alpha a_{mk})e_m' + (\beta b_{mk})e_m'$

$= \alpha(a_{1k}e_1' + a_{2k}e_2' + \cdots + a_{mk}e_m') + \beta(b_{1k}e_1' + b_{2k}e_2' + \cdots + + b_{mk}e_m')$

$= \alpha f_1(e_k) + \beta f_2(e_k)$

C'est donc la combinaison linéaire des $k^{\text{ème}}$ colonnes de (a_{ij}) et de (b_{ij}) avec les coefficients α et β respectivement. Donc M est linéaire

<u>c.2. Théorème</u>

Si $f : E \longrightarrow E'$ et $g : E' \longrightarrow E''$ sont des applications linéaires composables, alors pour tout choix de bases dans les $e.v.$ E, E' et E'' , on a :

$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$

<u>Démonstration</u>

Soient $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E

$B' = \{e_1', e_2', \dots, e_m'\}$ une base de E'

$B'' = \{e''_1, e''_2, \dots, e''_q\}$ une base de E''

La $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $M(g \circ f)$ par rapport aux bases B et B', est constituée des coordonnées de $(g \circ f)(e_j)$ suivant $e''_1, e''_2, \dots, e''_q$

Soient a_{ij} les coefficients de la matrice $M(f)$ où $1 \leq i \leq n$

b_{ij} les coefficients de la matrice $M(g)$ $\quad 1 \leq j \leq n$

Alors $\forall j \in \{1,2, \dots, n\}$, on a :

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(e_j) &= g\left(f(e_j)\right) \\
&= g\left(a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \cdots + a_{mj}e'_m\right) \\
&= a_{1j}g(e'_1) + a_{2j}g(e'_2) + \cdots + a_{mj}g(e'_m) \\
&= a_{1j}\left(b_{11}e''_1 + b_{21}e''_2 + \cdots + b_{q1}e''_q\right) + a_{2j}\left(b_{12}e''_1 + \right. \\
&\quad \left. + b_{22}e''_2 + \cdots + b_{q2}e''_q\right) + \cdots + a_{mj}\left(b_{1m}e''_1 + b_{2m}e''_2 + \right. \\
&\quad \left. + \cdots + b_{qm}e''_q\right) \\
&= \left(b_{11}a_{1j} + b_{12}a_{2j} + \cdots + b_{1m}a_{mj}\right)e''_1 + \left(b_{21}a_{1j} + \right. \\
&\quad \left. + b_{22}a_{2j} + \cdots + b_{2m}a_{mj}\right)e''_2 + \cdots + \left(b_{q1}a_{1j} + b_{q2}a_{2j} + \right. \\
&\quad \left. + \cdots + b_{qm}a_{mj}\right)e''_q \\
&= \sum_{i=1}^{q}\left(b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{im}a_{mj}\right) e''_i
\end{aligned}$$

On voit que les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $M(g \circ f)$ est égale à la somme des produits des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de $M(g)$ par les coefficients correspondants de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $M(f)$.

D'où $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$

<u>c.3.</u> En vertu des deux théorèmes c.1) et c.2) précédents, on peut établir certaines propriétés sur l'opération des matrices à partir des propriétés correspondantes des applications linéaires

- Démontrons par exemple l'associativité de produit des matrices

Supposons a, b, c des matrices à coefficients dans K telles que les produits $(cb)a$ et $c(ba)$ soient définis

Soient $f : E \longrightarrow E'$

$g : E' \longrightarrow E''$ des applications linéaires telles que $M(f) = a$, $M(g) = b$, $M(h) = c$

$h : E' \longrightarrow E''$

On a :
$$\begin{aligned}
(cb)a &= M(h \circ g) \cdot M(f) \\
&= M\left((h \circ g) \circ f\right) \\
&= M\left(h \circ (g \circ f)\right) \\
&= M(h) \cdot M(g \circ f) = c.(b.a)
\end{aligned}$$

- De même, démontrer la distributivité du produit par rapport à l'addition des matrices

<u>c.4. Proposition</u>

Soit a une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un champ K. Les propriétés suivantes sont équivalentes

i) a est inversible à gauche c'est – à – dire $\exists b \in \mathfrak{M}_n(K) / b.a = 1$

ii) a est inversible à droite c'est – à – dire $\exists b \in \mathfrak{M}_n(K) / a.b = 1$

iii) a est inversible c'est – à – dire $\exists a' \in \mathfrak{M}_n(K)/a'.a = a.a' = 1$
(1 : matrice unité)

Démonstration

Il suffit de montrer que $i) \Longrightarrow iii)$ car $iii) \Longrightarrow i)$ et $ii)$
Supposons a inversible à gauche et soit $b \in \mathfrak{M}_n(K)/b.a = 1$
Considérons les applications linéaires
$f : K^n \longrightarrow K^n$ et $g : K^n \longrightarrow K^n$ avec $a = M(f)$ et $b = M(g)$ matrices par rapport à la base canonique
D'après c.2, on a :
$$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f) = a.b = 1 = M(1_E) \text{ où } E = K^n \Longrightarrow g \circ f = 1_E$$
f est injective car si $f(x) = 0$
$$\text{Alors } 0 = g(0) = g\big(f(x)\big) = 1_E(x) = x. \text{ Donc } x = 0$$
D'après c.2 corollaire, f est alors un isomorphisme donc inversible.
Si f' est la réciproque de f on a nécessairement $f' = g$
On a alors simultanément
$$ab = M(f \circ f') = M(1_E) = 1$$
$$ba = M(f' \circ f) = M(1_E) = 1$$
C'est – à – dire a est inversible et $a^{-1} = b$

d. Isomorphisme d'algèbres

d.1. Définition

Soit $A \equiv (A, +, \times, \ \cdot)$ et $A' \equiv (A', +, \times, \ \cdot)$ deux algèbres sur un champ K.
Une application f d'une algèbre A dans une algèbre A', toutes les deux sur le même champ K, telle que
i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$; $\forall x, y \in A$ et $\forall \alpha \in K$
ii) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$
iii) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$
sera appelé un homomorphisme d'algèbres

d.2. Définition

- Un homomorphisme bijectif entre algèbres est appelé isomorphisme d'algèbres. Dans ce cas, ces algèbres sont dites isomorphes.

d.3. On définira de même un endomorphisme ou un automorphisme d'une algèbre

Exemple

Soit E un $e.v.$ sur K
$\forall \alpha \in K, h_\alpha : E \longrightarrow E/h_\alpha(x) = \alpha x$ est un endomorphisme
Alors l'application $f : K \longrightarrow End(E)$
$\alpha \longmapsto f(\alpha) = h_\alpha$ est un homomorphisme d'algèbres. (Vérifier)

d.4. Proposition

Pour tout $e.v.$ E de dimension n sur K
L'application $M : End(E) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(K)$
$f \longmapsto M(f)$ est un isomorphisme d'algèbres

Démonstration

En vertu de 2.3 c.1) et 2)

d.5. Proposition

Soit f un endomorphisme d'un $e.v.$ E et $a = M(f)$ par rapport à une base de E

Alors f est inversible si et seulement si a est une matrice inversible

Démonstration

$\Longrightarrow$

Si f est inversible alors a est une matrice inversible

En effet,

Considérons f inversible avec f' son inverse

Alors $f \circ f' = f' \circ f = 1_E$ (1)

Si $a = M(f')$ par rapport à la base considérée les égalités (1) donnent $aa' = a'a = 1$ et $a' = a^{-1}$

$\Longleftarrow$

Si a est inversible alors f est inversible

En effet,

Considérons a inversible avec a' son inverse et f' l'application linéaire telle que $a' = M(f')$

Comme $a'a = aa' = 1$, on a, par isomorphisme

$$f \circ f' = f' \circ f = 1_E \text{ c'est – à – dire } f' = f^{-1}$$

e. Matrices d'une application linéaire dans un changement de bases

La notation $M_{B,C}(f)$ signifiera par la suite matrice d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ par rapport aux bases B et C de E et F respectivement.

e.1. Introduction

Considérons deux bases ordonnées

$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ d'un même $e.v.\ E$

On sait que la matrice de passage p de la base B à la base B' est (a_{ij}), $1 \leq i, j \leq n$ définie par les relations

$$\begin{aligned}
e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\
e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n \\
\dots &\quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\
e'_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n
\end{aligned}$$

e.2. Théorème

Soient E et F deux $e.v.$ sur un champ K

B et B' deux bases ordonnées de E

C et C' deux bases ordonnées de F

Si p est la matrice de passage de B à B'

et q est la matrice de passage de C à C'

Alors pour toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$

Les matrices $a = M_{B,C}(f)$ et $a' = M_{B',C'}(f)$ sont liées par la relation

$$a' = q^{-1}ap$$

Démonstration

Considérons le diagramme suivant où f est vue comme composée $1_F \circ f \circ 1_E$

$$E_{B'} \xrightarrow{1_E} E_B \xrightarrow{f} F_C \xrightarrow{1_F} F_{C'}$$

Les espaces vectoriels étant rapportés respectivement aux bases B', B, C et C'.

D'après le théorème c.2

$$a' = M_{B',C'}(1_F \circ f \circ 1_E) = M_{C,C'}(1_F) \cdot M_{B,C}(f) \cdot M_{B',B}(1_E)$$
$$= q^{-1} \cdot a \cdot p$$

<u>e.3. Corollaire</u>

Soient E $e.v.$

B et B' bases ordonnées de E

p matrice de passage de B à B'

Alors pour tout endomorphisme f de E avec $a = M_{B,C}(f)$ par rapport à B et $a' = M_{B',C'}(f)$ par rapport à B' ;

On a

$$a' = q^{-1} \cdot a \cdot p$$

<u>Démonstration</u>

On applique le théorème précédent. Dans ce cas $B = C$ et $B' = C'$

<u>e.4. Définition</u>

- Deux matrices a et $a' \in \mathfrak{M}_{m,n}(K)$ sont dites **équivalentes** lorsqu'il existe des matrices inversibles $p \in \mathfrak{M}_n(K)$ et $q \in \mathfrak{M}_m(K)$ telles que
$$a' = q^{-1} \cdot a \cdot p$$

<u>e.5. Définition</u>

- Deux matrices a et $a' \in \mathfrak{M}_n(K)$ sont dites **conjuguées** lorsqu'il existe une matrice $p \in \mathfrak{M}_n(K)$ telle que
$$a' = p^{-1} \cdot a \cdot p$$
Ainsi, quand deux matrices sont conjuguées, elles sont nécessairement équivalentes. Les matrices conjuguées sont aussi appelées **matrices semblables**

<u>e.6. Proposition</u>

- La relation $\mathcal{R}$ définie par
$\forall a, a' \in \mathfrak{M}_n(K), a \,\mathcal{R}\, a' \Leftrightarrow \exists p \in \mathfrak{M}_n(K)$ inversible/ $a' = p^{-1} \cdot a \cdot p$ est une relation d'équivalence (Vérifier)

<u>e.7. Théorème</u>

Soient E et F $e.v.$ de dimensions respectives n et m sur un champ K.

Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire de rang r

Alors il existe une base $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ de E et $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ de F

Telles que $f(b_i) = c_i$ si $1 \leq i \leq r$

$f(b_i) = 0$ si $r \leq i \leq n$

C'est – à – dire $M_{B,C}(f)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Démonstration</u>

Soit $C' = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ une base du $s.e.v.$ $f(E)$

C' a r éléments car $rang\ f = \dim f(E) = r$

On sait que C' peut être complété pour en faire une base de F et avoir

$C = \{c_1, c_2, \dots, c_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \dots, c_m\}$

Comme $C' \subseteq f(E)$, il existe des éléments $b_1, b_2, \dots, b_r \in E$ tels que
$f(b_1) = c_1, f(b_2) = c_2, \dots, f(b_r) = c_r$
Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ une base de $\ker f$; $k = n - r$
Montrons que
$B = \{b_1, b_2, \dots, b_r, b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_n\}$ où $b_{r+1} = e_i$ (1) est une base de E. Comme $\# B = n = \dim E$, il suffit de montrer par exemple que B est une partie génératrice de E
En effet, $\forall x \in E$, on a $f(x) \in f(E)$ et $f(x) = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_r c_r$
Posons $v = x - (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_r b_r)$, (2) On a

$$\begin{aligned} f(v) &= f(x) - f(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_r b_r) \\ &= f(x) - [\alpha_1 f(b_1) + \alpha_2 f(b_2) + \cdots + \alpha_r f(b_r)] \\ &= f(x) - (\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_r c_r) = 0 \end{aligned}$$

Donc $v \in \ker f$ et s'écrit sous la forme

$$v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_k e_k$$

En substituant v par sa valeur dans (2) tout en tenant compte de (1), on tire

$$x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_r b_r + \beta_1 b_{r+1} + \beta_2 r_{r+2} + \cdots + \beta_k b_n$$

D'où $\forall x \in E, x$ est une $C.L.$ d'éléments de B.

§2. Espace dual. Transposée d'une application linéaire

2.1. Formes linéaires – Dual d'un $e.v.$

On sait que tout champ $(K, +, \cdot)$ peut être considéré comme $e.v.$ de dimension 1 sur lui – même

a. <u>Définition</u>

Soit E $e.v.$ sur un champ K
Alors toute application linéaire $f : E \longrightarrow K$ est appelée **forme linéaire** définie sur E ou **fonctionnelle** définie sur E

<u>Exemples</u>

(1) Soit $E = \mathfrak{M}_n(K)$ $e.v.$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K
$a = (a_{ij}) \in E$, on appelle trace de a et on note $tr(a)$ la somme de ses coefficients diagonaux.

$$Tr(a) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Alors l'application $Tr : E \longrightarrow K$
$a \longmapsto Tr(a) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ est une forme linéaire

(2) Si $E = \mathfrak{I}([0,1], \mathbb{R})$ $e.v.$ des fonctions numériques et contenues sur $\mathbb{R}$
Alors l'application $f : \mathfrak{I}([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$f \longmapsto \bar{f}(f) = \int_0^1 f(x)dx$ est une forme linéaire définie sur E

b. <u>Espace dual</u>

L'ensemble $\mathcal{L}(E, K)$ des formes linéaires définies sur E, $e.v.$ sur K, est appelé **espace dual** de E ou simplement **dual** de E et est noté E^*

Le dual de E^*est appelé le **bidual** de E et est noté E^{**}
En d'autres mots :

$E^* = \mathcal{L}(E,K)$

$f \in \mathcal{L}(E,K), \begin{matrix} f(x+y) = f(x) + f(y) \ \ ,\forall x,y \in E \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad ;\ \forall \alpha \in\ K \end{matrix}$

et tous les résultats établis pour les applications linéaires s'appliquent en particulier aux formes linéaires

c. Proposition

Soit E $e.v.$ de dim n sur un champ K

Toute forme linéaire non nulle sur E est surjective. Par conséquent, le noyau d'une forme linéaire non nulle sur un $e.v.$ E de dimension n est un $s.e.v.$ de dim $n-1$

Démonstration

Si $\quad f : E \longrightarrow K$ est une forme linéaire non nulle
Alors $\quad \exists v \in E / f(v) \neq 0$
Soit $\quad \alpha = f(v)$

$\forall \lambda \in K$, en posant $x = \frac{1}{\alpha} v$, on a

$f(x) = \frac{\lambda}{\alpha} f(v) = \frac{\lambda}{\alpha} \alpha = \lambda$

Donc $\quad f$ est surjectif, et $rang\ f = \dim Im\ f = \dim K = 1$
D'où $\quad \dim \ker f = \dim E - rang\ f = n - 1$

2.2. Bases duales

Soit E $e.v.$ de dim n sur un champ K
A toute base B de E correspond une base de E^* de la manière suivante :
Soit $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$\forall i, 1 < i < n$, on considère la forme linéaire

$e_i^* : E \longrightarrow K$ telle que $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Si $x \in E$ avec $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$,

On a $e_i^*(x) = x_1 e_i^*(e_1) + x_2 e_i^*(e_2) + \cdots + x_n e_i^*(e_n)$
$= x_i$

Propositions

i) $\quad B^* = \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ est une base de E^* appelée base duale de B
ii) $\quad \dim E = \dim E^*$

2.3. Bidual d'un $e.v.$

Soit E $e.v.$ sur K
$f \in E^*, f : E \longrightarrow K : x \longmapsto f(x)$

Alors $(E^*)^* = E^{**} = \alpha(E^*, K)$ est appelé le bidual de E

A chaque élément $x \in E$ correspond un élément $\hat{x} \in E^{**}$

$$\begin{aligned} \hat{x} : E^* &\longrightarrow K \\ f &\longmapsto \hat{x}(f) = f(x) \end{aligned}$$

$\hat{x}$ est bien linéaire (à vérifier)

On définit une application

$$\begin{aligned} \hat{} : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \hat{x} \end{aligned}$$

Cette application est aussi linéaire appelée l'application canonique de E dans son bidual

En effet,

Si $x, y \in E, \alpha, \beta \in K$; alors on a $\forall f \in E^*$

$$(\widehat{\alpha x + \beta y})(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha \hat{x}(f) + \beta \hat{y}(f)$$
$$= (\alpha \hat{x} + \beta \hat{y})(f)$$

2.4. Transposée d'une application linéaire

a. <u>Définition</u>

Soit E_1 et E_2 des $e.v.$ sur K

A toute application linéaire $f : E_1 \longrightarrow E_2$ correspond l'application bien définie

$$\begin{aligned} f^* : E_2^* &\longrightarrow E_1^* \\ g &\longmapsto f^*(g) = g \circ f \end{aligned}$$

entre les espaces

f^* est linéaire et s'appelle la **transposée** de f

b. <u>Proposition</u>

L'application $\;^* : \mathcal{L}(E_1, E_2) \longrightarrow \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$

$$f \longmapsto f^*$$

est linéaire (montrez – le)

c. <u>Théorème</u>

Soient $1_E : E \longrightarrow E$; $E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{f'} E_3$; f et f' linéaires

Alors

i) $(1_E)^* = {1_E}^*$

ii) $(f' \circ f)^* = f^* \circ f'^*$

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "f^*(g)"'] & E_2 \arrow[r, "f'"] & E_3 \arrow[d, "g"] \\ & & {} \end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u>

i) $(1_E)^* = {1_E}^*$ en effet $(1_E)^* : E^* \longrightarrow E^*$

$$g \longmapsto (1_E)^*(g) = g \circ 1_E = g$$

D'où $(1_E)^* = {1_E}^*$

ii) Soit $g \in E^*$, on a : $(f' \circ f)^*(g) = g \circ (f' \circ f)$

$$= (g \circ f') \circ f = f^*(g \circ f') = f^* \circ f'(g)$$

Remarquez que l'opération " transposée " renverse le sens des applications dans leurs compositions. Elle s'appellera espso facto foncteur contravariant

2.5. Transposée d'une matrice

a. Définition

Soit

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ matrice à coefficients dans } K$$

On appelle transposée de a, la matrice suivante notée ${}^t a$

$${}^t a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple :

Si $K = \mathbb{R}$ et $a = \begin{pmatrix} \pi & 1/4 & -2 \\ 0 & 10 & 3{,}4 \end{pmatrix}$ alors ${}^t a = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 1/4 & 10 \\ -2 & 3{,}4 \end{pmatrix}$

b. Proposition

i) ${}^t(a+b) = {}^t a + {}^t b$

ii) ${}^t(\alpha a) = \alpha\, {}^t a$

iii) ${}^{tt}a = a$

§3. Exercices

3.1. Exercices corrigés

3.1.1 Soit E l'ensemble de tous les couples de nombres réels. $E = \{(x,y)/a,b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E n'est pas un *e.v.* sur $\mathbb{R}$ à l'aide des lois suivantes : addition dans E et multiplication scalaire sur E

$$(x,y) + (z,t) = (x+z, y+t) \text{ et } k(x,y) = (kx, y)$$

3.1.2 Soit $E = \mathbb{R}^3$. Montrer que S n'est pas un *s.e.v.* de E, où $S = \{(x,y,z)/x \geq 0\}$; c.à.d. S contient ceux des vecteurs dont la première composante est positive ou nulle.

3.1.3 Soit E l'espace vectoriel de toutes les fonctions du corps réel $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que S est un *s.e.v* de E

3.1.4 Pour quelle valeur de k le vecteur $u = (1,-2,k)$ de $\mathbb{R}^3$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $v = (3,0,2)$ et $w = (2,-1,-5)$?

3.1.5 Montrer que les vecteurs $u = (1,2,3)$, $v = (0,1,2)$ et $w = (0,0,1)$ engendrent $\mathbb{R}^3$

3.1.6 Soit F_1 et F_2 deux *s.e.v* de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F_1 = \{(x,y,z)/x = y = z\} \text{ et } F_2 = \{(0,y,z)\}$$

(Remarquez que F_2 est le plan YOZ). Montrer que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$

3.1.7 Soit F_1 et F_2 des *s.e.v* de l'*e.v* E. Montrer que
F_1 et F_2 sont contenus dans $F_1 + F_2$

3.1.8 Déterminer si les vecteurs u et v sont ou non linéairement dépendant avec :
i) $u = (3,4), v = (1,-3)$ ii) $u = (2,-3), v = (6,-9)$
3.1.9 Déterminer si oui ou non les vecteurs suivants forment une base de l'*e.v.* de $\mathbb{R}^3$:
i) $(1,1,1)$ et $(1,-1,5)$ ii) $(1,2,3), (1,0,-1), (3,-1,0)$ et $(2,1,-2)$

3.1.10 Montrer que l'application f suivante est linéaire :
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y,x)$

3.1.11 Montrer que l'application f ci-après n'est pas linéaire :
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy$

3.1.12 Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$
Trouver une base et la dimension de
1) image U de f, 2) noyau W de f

3.1.13 Trouver la représentation matricielle de chacun des opérateurs f de $\mathbb{R}^2$ relativement à la base usuelle $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$
i) $f(x,y) = (2y, 3x-y)$ ii) $f(x,y) = (3x-4y, x+5y)$

3.1.14 Considérons les bases suivantes de $\mathbb{R}^2$: $\mathrm{B} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ et $\mathrm{B}' = \{f_1 = (1,3), f_2 = (2,5)\}$
1) Trouver la matrice de passage P de la base B à la base B'.
2) Trouver la matrice de passage Q de B' à B.
3) Vérifier que $\mathrm{Q} = \mathrm{P}^{-1}$

Solution ou indications de solution

3.1.1 Dans ce cas nous montrerons qu'un des axiomes de l'*e.v.* n'est pas vérifié
Soit $\alpha = 1, \beta = 2, v = (3,4)$. Alors $(\alpha+\beta)v = 3(3,4) = (9,4)$;
$$\alpha v + \beta v = 1(3,4) + 2(3,4) = (3,4) + (6,4) = (9,8)$$
Puisque $(\alpha+\beta)v \neq \alpha v + \beta v$ l'axiome 2 n'est pas vérifié

3.1.2 Montrons qu'une des propriétés de la proposition §1.1.2.b n'est pas vérifiée.
$v = (1,2,3) \in S$ et $\alpha = -5 \in \mathbb{R}$. Mais $\alpha v = -5(1,2,3) = (-5,-10,-15) \notin S$ car -5 est négatif. D'où S n'est pas un *s.e.v.* de E

3.1.3 Nous notons ici θ la fonction nulle $\theta(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}, \theta \in S$ puisque $\theta(3) = 0$. Supposons $f, g \in S$ c.à.d. tels que $f(3) = 0$ et $g(3) = 0$. D'où $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)(3) = \alpha f(3) + \beta g(3) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$
Donc $\alpha f + \beta g \in S$ et S est un *s.e.v.* de E

3.1.4 Soit $u = xv + yw$

$$(1, -2, k) = x(3,0,-2) + y(2,-1,-5) = (3x + 2y, -y, -2x - 5y)$$

formons le système d'équations équivalent

$$3x + 2y = 1, \quad -y = -2, \quad -2x - 5y = k$$

D'où $x = -1, y = 2$. En substituant dans la dernière équation, on obtient $k = -8$

3.1.5 Il est nécessaire de montrer qu'un vecteur arbitraire $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire de u, v et w
En effet,
soit $(a, b, c) = xu + yv + zw$

$$(a, b, c) = x(1,2,3) + y(0,1,2) + z(0,0,1) = (x, 2x + y, 3x + 2y + z)$$

D'où ce système d'équations $\begin{cases} z + 2y + 3x = c \\ y + 2z = b \\ x = a \end{cases}$
dont la solution est : $x = a, y = b - 2a$ et $z = c - 2b + a$
Donc u, v et w engendrent $\mathbb{R}^3$
3.1.6 Remarquons d'abord que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$,
pour $v = (x, y, z) \in F_1 \cap F_2 \Longrightarrow x = y = z$ et $x = 0$
Donc $v = (0,0,0)$ $\qquad\qquad \Longrightarrow x = 0, y = 0, z = 0$
Nous pouvons donc affirmer que $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2$
Si $v = (x, y, z) \in F_1$ et $(0, y - x, z - x) \in F_2$. Les deux conditions $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2 \Longrightarrow \mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$

3.1.7 Soit $x \in F_1$. Par hypothèse F_2 est un *s.e.v.* de E et ainsi $0 \in F_2$.
Donc $x = x + 0 \in F_1 + F_2$
Donc $F_1 \subseteq F_1 + F_2$. De façon analogue $F_2 \subseteq F_1 + F_2$

3.1.8 Deux vecteurs u et v sont dépendants ssi l'un des vecteurs est un multiple de l'autre.
i) non $\qquad$ ii) oui : car $v = 3u$

3.1.9 i) et ii) non ; car une base de $\mathbb{R}^3$ doit contenir exactement 3 éléments, puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3.

3.1.10 Soit $u = (a, b)$ et $v = (a', b')$; donc
$u + v = (a + a', b + b')$ et $ku = (ka, kb), k \in \mathbb{R}$
On a : $f(u) = (a + b, a)$ et $f(v) = (a' + b', a')$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a + a', b + b') = (a + a' + b + b', a + a') \\ &= (a + b, a) + (a' + b', a') = f(u) + f(v) \end{aligned}$$

et $f(ku) = f(ka, kb) = (ka + kb, ka) = k(a + b, a) = kf(u)$
Puisque u, v et k étant arbitraires, f est linéaire.

3.1.11 Soit $u = (1{,}2)$ et $v = (3{,}4)$; alors $u + v = (4{,}6)$
On a $f(u) = 1 \cdot 2 = 2$ et $f(v) = 3 \cdot 4 = 12$. Donc

$$f(u + v) = f(4{,}6) = 4 \cdot 6 = 24 \neq f(u) + f(v)$$

En conséquence, f n'est pas linéaire

3.1.12 1) Les images des générateurs de $\mathbb{R}^3$ engendrent l'image U de f

$$f(1{,}0{,}0) = (1{,}0{,}1), f(0{,}1{,}0) = (2{,}1{,}1), f(0{,}0{,}1) = (-1{,}1,-2)$$

Formons la matrice dont les lignes sont les générateurs de U et réduisons-la par des opérateurs élémentaires sur les lignes à sa forme échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\{(1{,}0{,}1), (0{,}1,-1)\}$ est une base de U et donc $\dim \mathrm{U} = 2$

2) Cherchons l'ensemble des (x, y, z) tels que $f(x, y, z) = (0{,}0{,}0)$ c.à.d. $f(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z) = (0{,}0{,}0)$
D'où le système homogène ci-après dont l'espace solution est le noyau de W de f

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

La seule inconnue libre est z ; donc $\dim \mathrm{W} = 1$
Soit $z = 1$; alors $y = -1$ et $x = 3$. Donc $\{(3,-1{,}1)\}$ est une base de W
(Remarquons que $\dim \mathrm{U} + \dim \mathrm{W} = 2 + 1 = 3$, qui est la dimension du domaine $\mathbb{R}^3$ de f

3.1.13 Remarquons d'abord que si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $(a, b) = ae_1 + be_2$

i) $f(e_1) = f(1{,}0) = (0{,}3) = 0e_1 + 3e_2$

$f(e_2) = f(0{,}1) = (2,-1) = 2e_1 - e_2$ et $\mathrm{M}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

De même avec

ii)

3.1.14 1) $f_1 = (1{,}3) = e_1 + 3e_2$

$f_2 = (2{,}5) = 2e_1 + 5e_2$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

2) on sait que $(a, b) = (2b - 5a)f_1 + (3a - b)f_2$. Ainsi

$e_1 = (1{,}0) = -5f_1 + 3f_2$

$e_2 = (0{,}1) = 2f_1 - f_2$ et $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

3) $\mathrm{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$

3.2. Exercices proposés

3.2.1 Soit E $= \{(x,y)/x,y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E n'est pas un *e.v.* sur $\mathbb{R}$ à l'aide des lois suivantes : addition dans E et multiplication scalaire sur E
$(x,y)+(z,t)=(x+z,y+t)$ et $k(x,y)=(k^2x,k^2y)$

3.2.2 Soit E $= \mathbb{R}^3$. Montrer que F n'est pas un *s.e.v.* de E
F $= \{(x,y,z)/x,y,z \in \mathbb{Q}\}$

3.2.3 Soit E l'espace vectoriel de toutes les fonctions du corps réel $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est un *s.e.v.* de E
F $= \{f/f(7)=f(1)\}$

3.2.4 Ecrire le polynôme $u=t^2+4t-3$ de $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire des polynômes
$e_1=t^2-2t+5, e_2=2t^2-3t$ et $e_3=t+3$

3.2.5 Trouver à quelles conditions sur a,b et c le vecteur $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ appartient à l'espace engendré par
$u=(2,1,0), v=(1,-1,2)$ et $w=(0,3,-4)$

3.2.6 Soit E l'*e.v.*, des matrices 2×2 sur $\mathbb{R}$. Déterminer si les matrices $A,B,C\in$ F sont dépendantes où
$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \text{ et } C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

3.2.7 Soit F le *s.e.v.* de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,-2,5,-3)$, $(2,3,1,-4)$ et $(3,8,-3,-5)$
Trouver une base et la dimension de F

3.2.8 Montrer que les applications suivantes f ne sont pas linéaires :
i) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y)=(x+1,2y,x+y)$
ii) $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z)=(|x|,0)$

3.2.9 Soit $f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par
$$f(x,y,z,t)=(x-y+z+t,x+2z-t,x+y+3z-3t)$$
Trouver une base et la dimension de
1) Image U de f 2) $\ker f$

3.2.10 Trouver la représentation matricielle de chacun des opérateurs f dans le précédent problème 3.1.13 relativement à la base $\{f_1=(1,3), f_2=(2,5)\}$

3.2.11 Soit $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z)=(2x+y-z,3x-2y+4z)$
Trouver la matrice de f dans les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$:
B $=\{f_1=(1,1,1), f_2=(1,1,0), f_3=(1,0,0)\}$ et B$'=\{g_1=(1,3), g_2=(1,4)\}$

Appendice. Progressions et Logarithmes

§1. Progression arithmétique (P.A.)

a. Définition

Une progression arithmétique est une suite de nombres appelés **termes** tels que chacun d'eux égal au précédent plus un nombre constant différent de zéro, appelé **raison** (r) de la progression

b. Conséquences de la définition

Soient $t_1, t_2, \dots, t_n$ les n termes d'une P.A. de raison r. De la définition, il découle que :

a. $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = \cdots = t_n - t_{n-1} = r$

b. $2t_2 = t_1 + t_3 \quad \Rightarrow t_2 = \frac{t_1+t_3}{2}$

$2t_3 = t_2 + t_4 \quad \Rightarrow t_3 = \frac{t_2+t_4}{2}$

... ...

$2t_{n-1} = t_{n-2} + t_n \quad \Rightarrow t_{n-1} = \frac{t_{n-2}+t_n}{2}$

Tout terme est la moyenne arithmétique des termes qui le comprennent

c. $t_n = t_1 + (n-1)r$: la formule d'un terme quelconque t_n d'une P.A. en fonction de t_1, r et n

d. t_1, t_2 et t_3 forment une P.A. si $2t_2 = t_1 + t_3$ ou ...

e. $r = \frac{b-a}{n+1}$: c'est l'expression de la raison r d'une P.A. qu'on peut former en insérant n moyens arithmétiques entre deux nombres donnés a et b

f. $S_n = \frac{t_1+t_n}{2}n$: formule de la somme S_n de n termes $t_1, t_2, \dots, t_n$ d'une P.A.

En effet, on écrit

$S_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} + t_n$

$S_n = t_n + t_{n-1} + \cdots + t_2 + t_1$

En additionnant membre à membre, on a

$$2S_n = (t_1 + t_n)n \Rightarrow S_n = \frac{(t_1+t_n)n}{2}$$

§2. Progression géométrique (P.G)

2.1. Définition

Une progression géométrique est une suite de nombres appelés termes tels que chacun d'eux est égal au précédent multiplié par un nombre constant différent de ± 1 appelé raison (q) de la progression

2.2. Conséquences de la définition

Soient $t_1, t_2, \dots, t_n$ les n termes d'une P.G. et q sa raison. De la définition, il découle que :

Tout terme est la moyenne géométrique des termes qui le comprennent

a. $\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{t_3}{t_2} = \dfrac{t_4}{t_3} = \cdots = \dfrac{t_n}{t_{n-1}} = q$

b. $t_2^2 = t_1 . t_3 \quad \Rightarrow t_2 = (t_1 . t_3)^{\frac{1}{2}}$

$t_3^2 = t_2 . t_4 \quad \Rightarrow t_3 = (t_2 . t_4)^{\frac{1}{2}}$

$\dots \quad \dots \quad \dots \qquad \dots \quad \dots \quad \dots$

$t_{n-1}^2 = t_{n-2} . t_n \quad \Rightarrow t_{n-1} = (t_{n-2} . t_n)^{\frac{1}{2}}$

c. $t_n = t_1 . q^{n-1}$: formule qui permet de calculer le terme quelconque t_n d'une P.G. à partir de t_1, q et n

d. t_1, t_2 et t_3 forment une P.G. si $t_2^2 = t_1 . t_3$ ou …

e. $q = \sqrt[n+1]{\dfrac{b}{a}}$: expression de la raison q d'une P.G. qu'on peut construire en insérant n moyens géométriques entre deux nombres donnés a et b
Même procédure de démonstration que le point e. du §1. 1.2.

f. $S_n = t_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$ est la formule de la somme S_n de n termes $t_1, t_2, \dots, t_n$ d'une P.G. de raison q. En effet, sachant que
$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_3$
$\quad = t_1 + t_1 q + t_1 q^2 + \cdots + t_1 q^{n-1}$
$\quad = t_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$. On a, en vertu des quotients remarquables, la formule de S_n

g. $\mathrm{P_n} = \sqrt{(t_1 . t_n)^n}$: formule du produit de n termes $t_1, t_2, \dots, t_n$ d'une P.G.
On écrit $\qquad \mathrm{P_n} = t_1 . t_2 . \dots . t_{n-1} . t_n$
et on multiplie membre à membre $\mathrm{P_n} = t_n . t_{n-1} . \dots . t_2 . t_1$

$$\Rightarrow \mathrm{P}_n^2 = (t_1 . t_n)^n$$

$$\text{D'où} \quad \mathrm{P}_n = \left(\sqrt{t_1 . t_n}\right)^n$$

§3. Logarithmes décimaux

3.1. Définition

$$x = \log N \Leftrightarrow 10^x = N$$

3.2. Conséquences de la définition

a. $\log 10 = 1$ car …
b. $\log 1 = 0$ car …
c. Pour tout x, $10^x > 0$ et donc seuls les nombres N positifs ont un logarithme

3.3. Propriétés des logarithmes

Soient les nombres positifs X, Y, Z

<u>a.</u> $\log X.Y.Z = \log X + \log Y + \log Z$

<u>b.</u> $\log \frac{X}{Y} = \log X - \log Y$

Si on pose $-\log Y = co\log Y$

Alors $\log \frac{X}{Y} = \log X + co\log Y$

<u>c.</u> $\log X^n = n \log X$

<u>d.</u> $\log \sqrt[n]{X} = \frac{1}{n} \log X$

<u>e.</u> $\log \sqrt[n]{X^m} = \frac{m}{n} \log X$

3.4. Logarithme décimal d'un nombre positif

a. Si $N = 10, x \in \mathbb{Z}$, alors $\log N = x$

b. Si N n'est pas une puissance entière de 10, alors on utilise les Tables de logarithmes ou la machine à calculer.