AVANT PROPOS

Le cours d'analyse complexe ou variable complexe comporte l'étude d'une variable complexe en présentant le domaine, la limite, la dérivée, l'intégrale, les séries, la série de Laurent, l'intégrale de Cauchy, les résidus, les transformées de Laplace et quelques applications.

Voici quelques objectifs.

Au terme de ce cours l'étudiant sera capable

1) *De trouver le rayon de convergence*
2) *D'intégrer en utilisant la méthode de Cauchy*
3) *De développer en série de Laurent*
4) *De calculer les résidus*
5) *D'appliquer les résidus pour calculer les intégrales*
6) *D'appliquer les transformées de Laplace pour résoudre les équations différentielles*
7) *De comprendre que la série de Laurent sans la partie principale est la série de Taylor.*

CHAPITRE PREMIER : GENERALITES

I.1. Définitions des concepts clés

I.1.1. Les séries numériques

a. Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes. On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$ la suite des sommes partielles, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ par :

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

b. Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série formée par le développement décimal d'un réel x strictement compris entre 0 et 1. C'est la série de terme général $u_n = \frac{a_n}{10^n}$ et qui a la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_i + \cdots + u_n = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \; avec \; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

des entiers et n $\in \mathbb{N}$.

La somme partielle S_n est l'approximation décimale du réel $x \in]0,1[$ par défaut à 10^{-n} prés. Prenons $X = \sqrt{\frac{1}{2}}$ et voici son écriture décimale à 10^{-50} prés.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0.70710678118654752440084436210484903928483593768847 \ldots$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{7}{10} + \frac{0}{10^2} \frac{7}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{0}{10^5} + \frac{6}{10^6} + \frac{7}{10^7} + \frac{8}{10^8} + \frac{1}{10^9} + \cdots$$

Les nombres décimaux $s_1 = 0.7$, $s_2 = 0{,}70$, $s_3 = 0.707$, $s_6 = 0.707106, \ldots$ sont des sommes partielles de la série. (LUC ROZOY & BERNARD YCART, 2014 : 1).

I.1.2. Séries entières d'une variable complexe

a. Définition

On appelle série entière dans un domaine complexe, toute série de la forme : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$

Où a_n, avec $n = 0, 1, 2, \ldots$, sont des constantes complexes appelées coefficients de la série, z_0 est le nombre complexe appelé centre de la série et z la variable complexe. Cette série converge de façon évidente pour $z = z_0$ et converge également pour d'autres points. Pour cela, on peut montrer qu'il existe un réel positif R tel que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$converge
pour $|z-z_0| < R$ *et diverge pour* $|z-z_0| > R$. Cependant pour $|z-z_0| = R$, elle peut converger ou non. Géométriquement si (C) est le cercle entré en $z = z_0$ de rayon R, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge en tous les points intérieurs au cercle. Elle peut converger ou non sur le cercle (C).

Si R = 0 alors la série converge seulement en $z = z_0$. Si R ⟶ ∞ alors la série converge pour toute valeur finie de z.

Le rayon R est souvent appelé rayon de convergence de la série et le cercle (C) est le cercle de convergence de la série. (MURRAY, 1987 : 140).

I.2. Rappel sur les nombres complexes

Dans le corps ℝ des réels toute équation du second degré n'a pas toujours une solution. La plus simple de cette équation est $x^2 + 1 = 0$; il s'agit de l'équation du second degré dont le discriminant est strictement inférieur à 0. Pour résoudre ce genre d'équations il fallait trouver la racine carrée d'un réel strictement négatif. Ce problème est source de la construction d'un ensemble plus vaste et plus riche que ℝ appelé l'ensemble des nombres complexes noté ℂ.

Dans ce chapitre, nous garderons l'ensemble ℂ sous ses différentes facettes. Nous commencerons par ses structures algébrique-géométriques en montrant qu'il est un sur-corps du corps des réels avant d'examiner la forme géométrique de ses éléments. Nous considérons ensuite sa structure topologique : $\mathbb{C}$ est un espace métrique définie par la distance entre deux nombres complexes $z \, et \, z'$ notée $\mathrm{d}(z, z')$. Cette structure nous permet d'identifier stéographiquement la sphère $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^3$ au plan complexe $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

I.2.1. Définitions

Un nombre complexe est un couple des réels $(a, b) \in \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R}$ vérifiant les opérations suivantes :

1) L'égalité $(a, b) = (c, d) \; ssi \; a = c \; et \; b = d$
2) La somme $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
3) Le produit défini par :
   a) $(a, b) \text{ x } (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
   b) $m(a, b) = (ma, mb)$ (MURRAY, 1987 : 3)

N.B : $(a, b) = a(1,0) + b\,(0,1)$

Exemple : $(0,1)(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0)$

$$= (0 - 1, 0 + 0)$$

$$= (-1, 0)$$

On pose $(1,0) = 1$ et $(0,1) = i$ avec $i^2 = (-1, 0)$

$$= -1$$

L'écriture $(a, b) = a + bi$ est la forme algébrique du nombre complexe z = a+bi et $\bar{z} = \text{a} + \text{bi}$ est le conjugué de z.

I.2.2. Puissances de i

$i^2 = (0,1) \text{ x } (0,1)$	$i^3 = i^2 . i$	$i^4 = i^2 . i^2$	$i^5 = i^4 . i$
$= (0 - 1, 0 + 0)$	$= -1. i$	$= -1. -1$	$= 1. i$
$= (-1, 0)$	$= -i$	$= (-1)^2$	$= i$
$= -1$		$= 1$	
$i^6 = i^3 . i^3$	$i^7 = i^6 . i$	$i^8 = i^7 . i$	$i^9 = i^8 . i$
$= -i. -i$	$= -1. i$	$= -i. i$	$= -1. i$
$= (-i)^2$	$= -i$	$= -\, i^2$	$= i$
$= -1$		$= 1$	

Si nous appelons I l'ensemble des puissances de i, nous constatons que cet ensemble est constitué de 4 éléments :

$$I = \{-1, 1, i, -i\}$$

Ainsi, la règle permet de trouver aisément une puissance n^e de i.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{n} = 4k \\ i & si\ n = 4k+1 \\ -1 & si\ n = 4k+2 \\ -i & si\ n = 4k+3 \end{cases} \quad (avec\ k \in \mathbb{N})$$

D'où : $i^n = i^{4k+r}$(r est le reste de la division de $n\ par$ 4) (BATODISA, 2010 : 22-24)

I.2.3. Opérations fondamentales sur les nombres complexes

a. **Addition**

$$(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di$$
$$= (a + c) + (b + d)i$$

b. **Soustraction**

$$(a + bi) - (c + di) = a + bi + c + di$$
$$= (a - c) + (b - d)i$$

c. **Multiplication**

$(a + bi)$ x $(c + di) = (a - bc) + (ad + bc)i$

d. **Opposé du nombre complexe z = a+bi**

$-z = -a - bi$

e. **Inverse du nombre complexe non nul z = a+bi**

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\ i$ (BATODISA, 2010 : 23)

I.2.4. Calcul du module d'un nombre complexe z = a+bi

Le module ou la valeur absolue d'un nombre complexe a+bi est définie par

$|Z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

a. **Exemple**

$$|-4 + 2i| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{16 + 4}$$
$$= 2\sqrt{5}$$

b. Propriétés

Si $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont des nombres complexes, on a les propriétés suivantes :

1) $|Z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2) $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$
3) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ou $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$
5) $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
6) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$

La distance entre les deux points $z_1 = x_1 + y_1$ et $z_2 = x_2 + y_2$ du plan complexe est donnée par :

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (MPAKASA, 2016 : 50)

I.2.5. Représentation géométrique des nombres complexes

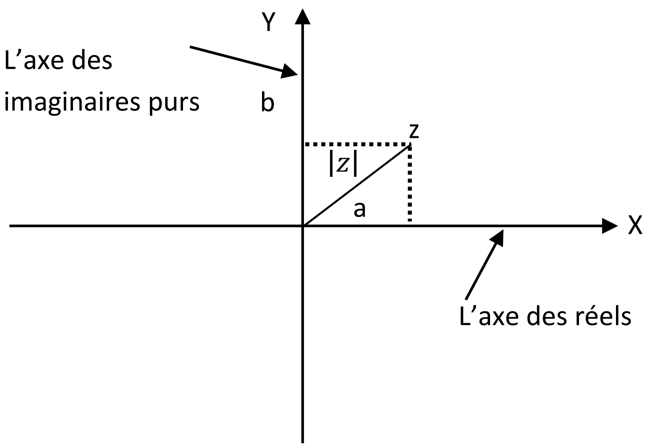

Figure 1. Représentation géométrique du nombre complexe z=a+bi

(MPAKASA, 2016 : 99)

I.2.6. Arguèrent d'un nombre complexe non nul

a. Notion

soit $z = a + bi$ un nombre complexe non nul d'image P. Alors l'angle orienté α est appelé l'argument de z. On sait qu'il y a une infinité d'angles orientés ayant pour origine l'axe $0X$ et pour l'extrémité la droite comprenant le segment $[OZ]$.

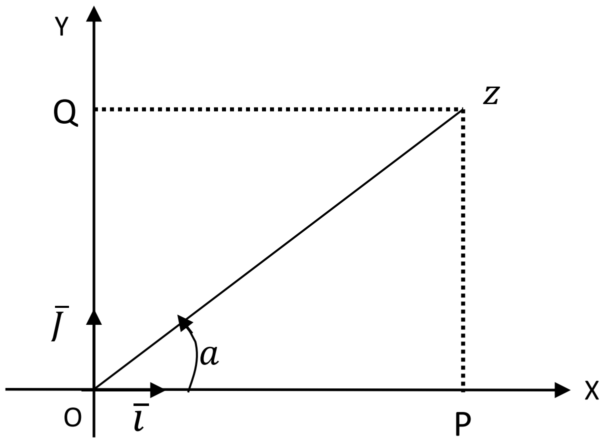

Figure 2. Argument de z déterminé par $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OZ}$

Tous les angles $\alpha + 2k\pi$ sont appelés des arguments du nombre complexe z. le plus petit d'entre eux, compris entre 0 et 2π radians (0° et 360°) est la détermination principale de l'argument de z.

Dans la suite, nous noterons l'argument de z par $Argz$.

Par conséquent,

- Si $\alpha = Argz$ et β est un angle donné, alors β est un argument de z ssi $|\beta - \alpha| = 2k\pi \; ou \; |\beta - \alpha| = k.360°$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Tous les nombres complexes dont les points images se trouvent sur la demi-droite $[OP$ possédant un même argument 0 ou π
- Un nombre complexe Z est :
  - Un réel ssi $Argz = \begin{cases} 0 & avec\ z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \\ \pi & avec\ z \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\} \end{cases}$
  - Un imaginaire pur ssi $Argz = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & avec\ I(z) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \\ \frac{3\pi}{2} & avec\ I(z) \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\} \end{cases}$

NB : L'argument d'un nombre complexe nul est indéterminé.

b. Calcul de l'argument d'un nombre complexe non nul

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe non nul dont l'image est M dans le plan de Gauss. Le triangle OPA, rectangle en A, permet d'écrire :

$\overline{OA} = \overline{OP}\, cos\, \alpha$; $\overline{AP} = \overline{OP} \sin \alpha$ $\; et \; \overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}$

D'où $a = |z| \cos\ \alpha$,

$b = |z| \sin \alpha$ et $\tan \alpha = \frac{b}{a}$

(avec $\overline{OP} = |z|$)

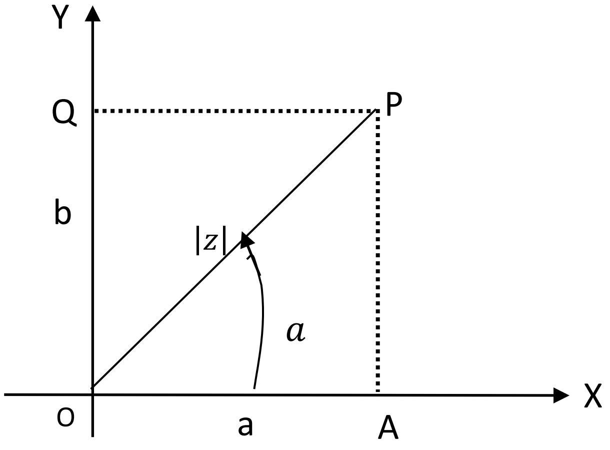

Figure 3 : l'argument d'un complexe non nul.

Ces différentes égalités permettent de trouver la valeur de l'argument α. Il est à noter que si on cherche α à partir de la relation $\tan \alpha = \frac{b}{a}$, on doit faire attention au quadrant dans lequel se situe le point image de z.

(BATODISA, 2010 : 37-28)

I.2.7. Forme trigonométrique et exponentielle du nombre complexe non nul

a. Notion

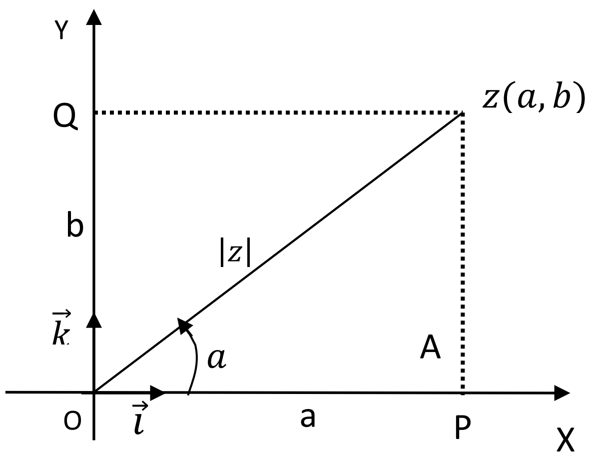

Figure 4 : la représentation géométrique du triangle OPZ pour déterminer la forme trigonométrique et exponentielle du nombre complexe non nul.

Du nombre complexe z = a+bi, le triangle OPZ est rectangle en P.

Par le théorème de Pythagore on a : $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec $|z| = r$ est le module de z.

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{r} \\ \sin\alpha = \frac{b}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = r\cos\alpha \\ b = r\sin\alpha \end{cases} \text{ avec } \mathrm{z = a + bi} \text{ et } \alpha \text{ est l'argument de } z$$

On obtient $z = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ appelé la forme trigonométrique du nombre complexe Z et Z = $re^{i\alpha}$ est la forme exponentielle du nombre complexe Z

b. Produit de deux nombres complexes non nuls

1°) Sous la forme algébrique

$z_1 = (a + bi) et\ z_2 = (c + di)$

$z_1 \mathrm{x}\, z_2 = (ac - bi) + (ad + cd)i$

2°) Sous la forme trigonométrique

$z_1 . z_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + isin\ \varphi_1)]\ [r_2(\cos\varphi_2 + isin\ \varphi_2)]$

$= r_1 \mathrm{x}\, r_2[\cos\ (\varphi_1 + \varphi_2) + isin\ (\varphi_1 + \varphi_2)]$

c. Quotient de deux nombres complexes non nuls

1°) Sous la forme algébrique

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{cd-ad}{c^2+d^2}\right)$$

2°) Sous la forme trigonométrique

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\ \varphi_1 + \mathrm{isin}\ \varphi_1)}{r_2(\cos\ \varphi_2 + \mathrm{isin}\ \varphi_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,[\cos\ (\varphi_1 - \varphi_2) + isin\ (\varphi_1 - \varphi_2)]$$

d. Puissance d'un nombre complexe et formule de Moivre

Soit un nombre complexe donné sous la forme trigonométrique :

$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ (1)

Calculons z^n avec $n \in \mathbb{N}^*$. On a deux possibilités :

a) Comme $|Z^n| = |z|^n et\ Arg\ z^n = nArg\ z = n.\alpha$, on a :

$Z^n = |z|^n(cosn\ \alpha + i\sin n\alpha)$ (2)

b) En élevant chaque membre de (1) à la puissance n^e, on obtient :

$Z^n = |z|^n(cosn\ \alpha + i\sin n\alpha)$ (3)

Les égalités (2) et (3) impliquent : $(cosn\ \alpha + i\sin a\ )^n = \cos na + i\sin n\alpha$. C'est la formule de Moivre. Elle permet de cacluler la n^e puissance d'un nombre non nul.

Application

$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$z^3 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3$ (Développement du binôme de Newton)

$= cos^3\varphi + 3icos^2\varphi\sin\varphi + 3i^2\cos\varphi\, sin^2\varphi + i^3\, sin^3\varphi$

$= cos^3\varphi + 3icos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\, sin^2\varphi - sin^3\varphi$

$= cos^3\varphi - 3\cos\varphi\, sin^2\varphi + i(3cos^2\varphi sin\varphi - sin^3\varphi)$

$= cos^3\varphi - 3\cos\varphi\,(1 - cos^2\varphi) + i[3(1 - sin^2\varphi)\sin\varphi - sin^3\varphi]$

$= cos^3\varphi - 3\cos\varphi + 3cos^3\varphi + i(3\, sin\varphi - 3sin^3\varphi - sin^3\varphi)$

$= (4\, cos^3\varphi - 3cos\varphi) + i(3sin\varphi - 4sin^3\varphi)$

De même z^3 =$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3$

= $\cos3\varphi + isin3\varphi$

En comparant les deux résultats, on a :

$$\begin{cases}\cos 3\varphi = 4cos^3\varphi - 3\cos\varphi \\ \sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\, sin^3\varphi\end{cases}$$

e. Extraction de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

1°) Racine carrée des nombres complexes

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe sous la forme algébrique. Extraire les racines carrées de z revient à trouver le couple des réels (x, y) tel que $(x + yi)^2 = a + bi$

On peut écrire $\sqrt{a+bi} = x + yi$ et en élevant deux membres au carré, on a :

$$\left(\sqrt{a+bi}\right)^2 = (x+yi)^2 \Leftrightarrow a + bi = (x+yi)(x+yi)$$

$$\Leftrightarrow a + bi = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$R(z) = x^2 - y^2$ et $I(z) = 2xy$

Et les deux racines carrées de z sont données par :

$$z_1 = \sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + \varepsilon i \sqrt{\frac{|z|-a}{2}}$$

$z_1 = -\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + \varepsilon i \sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$ où ε désigne le signe de b.

En d'autres termes, les égalités $a + bi = x^2 - y^2 + 2xyi$ et $|(x+yi)^2| = |a+bi|$, ce qui nous ramène à résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

Si b est positif alors x et y sont de même signe et si b est négatif alors x et y sont de signes contraires.

Exemple

Calculer les racines carrées de $z = 8 - 6i$

Solution

1ère méthode

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 & (1) \\ 2xy = 6 & (2) \end{cases}$$

De l'équation (2), on a :

$2xy = -6 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{2y}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-3}{y}$

Comme $x^2 - y^2 = 8 \iff \left(\frac{-3}{y}\right)^2 - y^2 = 8$

$\iff \dfrac{9}{y^2} - y^2 = 8$

$\iff 9 - y^4 = 8y^2$

$\iff -y^4 - 8y^2 + 9 = 0$

$\iff y^4 + 8y^2 - 9 = 0$ (Equation bicarrée)

Posons que $y^2 = t$, alors l'équation devient :

$t^2 + 8t - 9 = 0$ (Equation résolvante)

$\Delta = 64 + 36$

= 100

$t_1 = \dfrac{-8+10}{2} = 1$

$t_2 = \frac{-8-10}{2} = -9$ (à rejeter)

Si $t_1 = 1$ alors $y^2 = 1 \iff y = \pm 1$, par conséquent :

Si $y = 1$ alors $x = -3$

Si $y = -1$ alors $x = 3$

Ces racines sont :

$z_1 = -3 + i$ et $z_2 = 3 - i$ ou bien :

$Z_1 = \sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + \varepsilon i \sqrt{\frac{|z|+a}{2}}$ avec $|z| = \sqrt{8^2 + (-6)^2}$

$= 10$

Alors, on obtient :

$$z_1 = \sqrt{\frac{10+8}{2}} - i\sqrt{\frac{10-8}{2}} = 3 - i \text{ ; } z_2 = -(3 - i)$$

$$= -3 + i$$

Deuxième méthode

On résout le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \quad (1) \\ 2\,xy = \ -6 \qquad (2) \\ x^2 - y^2 = 10 \; (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) donnent $2x^2 = 18 \iff x^2 = 9$

$\iff x = \ -3 \; et \; x = 3$

En portant $x^2 = 9$ dans (3), on obtient $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = -1 \; et \; y = 1$. Comme b = -6 est négatif, x et y sont de signes contraires. Ainsi les racines carrées de z=8-6i sont les nombres complexes 3 – i et – 3 + i dont la somme est nulle.

2°) Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

Pour extraire les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul, il est intéressant de l'écrire sous la forme trigonométrique $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$.

Ainsi, les racines $n^{\text{ième}}$ de $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ sont données par :

$$\boxed{\sqrt[n]{r(cos\varphi + isin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\varphi + 2\,k\pi}{n}\right)\right]}$$

Avec $k = 0,1,2, \dots, n-1$

Géométriquement les n racines $n^{\text{ième}}$ de z sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Exemple

Déterminer les racines cubiques de z = 1

Solution

Pour écrire z=1 sous la forme trigonométrique, il faut calculer son module r et son argument φ.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 0^2} \\ &= 1 \qquad\qquad ; \cos\varphi = \tfrac{1}{1} = 1 \qquad\qquad \sin\varphi = \tfrac{0}{1} \; 0 \end{aligned}$$

D'où, $\varphi = \ 0^{\circ}\ et\ z = 1 = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0$

$$\sqrt[3]{1(cos0 + isin0)} = \ \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{0 + 2\ kr}{3}\right) + \left(\frac{0 + 2\ kr}{3}\right)\right]\ avec\ k \in \ \{0,1,2\}$$

$$si\ k = 0, alors\ Z_1 = 1\ (cos0 + isin0) = 1\ (racine\ réelle)$$

$$si\ k = 1, alors\ Z_2 = 1\ \left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$si\ k = 2, alors\ Z_3 = 1\ \left(cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Les 3 racines cubiques de z=1 sont-elles que leur somme :

$$Z_1 + \ Z_2 + \ Z_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ i = 0$$

Les images de Z_1, Z_2, Z_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 1.

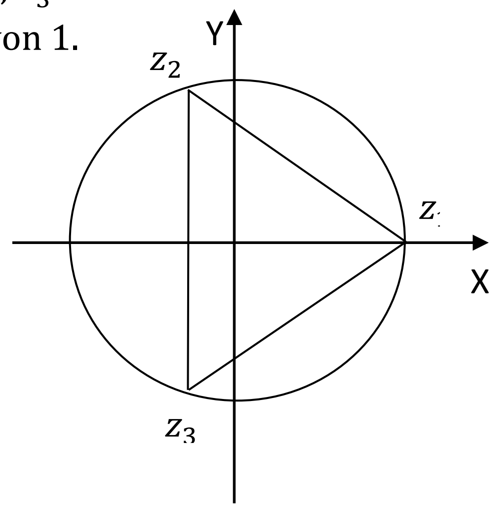

Figure 5 : la représentation géométrique de la racine cubique de1

$$k = 2: Z_3 = \ \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{0+2.2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{0+2.2\pi}{3}\right)\right]$$

Remarques

Pour les nombres complexes réels A, on a l'écriture trigonométrique :

- Si A $>$ 0: $A = \ |A|(\cos 0 + i\sin 0)$
- Si A $>$ 0: $A = \ |A|(\cos \pi + i\sin \pi)$

f. Equations binômes

On appelle équation binôme toute équation de la forme $x^n = A$. Si A est un nombre complexe, on applique la formule de la racine $n^{\text{ième}}$.

Si A $>$ 0 alors on a : $\sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$

Si A $>$ 0 alors on a : $\sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)$ (BATODISA, 2010 : 38-51)

g. Forme exponentielle du nombre complexe

Soit le nombre complexe $z = r(cos\varphi + i\ sin\varphi)$. Sachant que

$e^{i\varphi} = \cos\varphi$ (formule d'Euler). On appelle la forme exponentielle de z l'écriture $z = r.e^{i\varphi}$

1°) Propriétés

Si Z_1 et Z_2 sont deux nombres complexes alors :

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}$
2. $e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$
3. $(e^z)^m = e^{mz}$

La fonction exponentielle f(z) = e^z dans $\mathbb{C}$ est une fonction périodique de période $2\pi i$.

En effet : soit T la période

$f(z+T) = f(z)$

$f(z+2\pi i)$= $e^{z+2\pi i}$
$f(z+2\pi i)$= $e^z.e^{2\pi i}$
$= e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$
$= e^z$
$= f(z)$

2°) Opérations sous la forme exponentielle

$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$

$z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$

Produit

$z_1.z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Quotient

$\frac{z_1}{z_1} = \frac{r_1}{z_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\varphi}}$

$= \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$

Conjugué

$\bar{z} = \overline{re^{\imath\varphi}}$

$= re^{-i\varphi}$

Racine carrée

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}$

Partant des égalités :

$e^{iy} = \cos y + \sin y$ et

$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ on obtient :

$\cos y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2}$

$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$

Dérivée

$\left[w = e^{(a+i\beta)}\right]'$

$\Leftrightarrow w' = (a + i\beta)' e^{(a+i\beta)}$

Ainsi, $(e^{\mathrm{kx}})' = \mathrm{K}e^{\mathrm{kx}}$

$(e^{\mathrm{kx}})'' = \mathrm{K}^2 \mathrm{e}^{\mathrm{kx}}$

En général, $(e^{\mathrm{kx}})^{(n)} = \mathrm{K}^{\mathrm{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{kx}}$

(MPAKASA, 2016 : 104-106)

I.2.8. Topologie dans le plan complexe

a. Définition

On définit une distance dans le plan complexe par :

$\forall (Z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ \mathrm{d}(Z_1, z_2) = |Z_1 - Z_2|$

Définition : on appelle disque ouvert de centre z_0 et de rayon $r > 0$ l'ensemble : : $D\ (z_0, r)\ = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < r\}$

On appelle voisinage d'un point z_0 un disque ouvert quelconque de centre z_0.

Un sous-ensemble U est un ouvert de $\mathbb{C}$ si chaque z de U possède un voisinage entièrement inclus dans U.

Le complémentaire par rapport à $\mathbb{C}$ d'un sous-ensemble ouvert est dit fermé.

On définit le disque fermé de centre z_0 et de rayon r, $\overline{D}\,(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}/|z - z_0| \leq r\}$

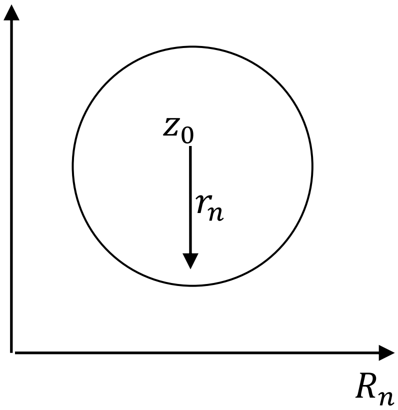

Figure 6 : le disque ouvert de centre z_0

b. **Sous ensemble connexe**

Un sous-ensemble U de $\mathbb{C}$ est connexe si deux points quelconques de U peuvent être rejoints par une ligne polygonale incluse dans U. si de plus U est ouvert alors il est appelé domaine.

U est simplement Connexe	U est doublement Connexe (U a un trou)	U n'est pas connexe

(RAPHAEL, 2013 : 5-6)

Figure 7 : Le sous-ensemble connexe U de $\mathbb{C}$

I.3. Fonctions d'une variable complexe

I.3.1. Fonction uniforme et fonction multiforme

a. Définition

Soit A une partie de $\mathbb{C}$. On appelle fonction complexe d'une variable complexe, une application de A dans $\mathbb{C}$ définie par : $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ avec

$f(z) = f(x + iy) = w = u(x, y) + iv(x, y), pour\ tout\ z =$ $x + iy,$ où $u\ et\ v\ sont$ deux fonctions réelles de deux variables réelles x et y, u est la fonction partie réelle de f et on écrit Réf.(z) = u(x,y) et v est la fonction partie imaginaire de f et on écrit $I_m f(z) = v(x, y)$.

A est le domaine de définition de f et f(A) $\subset$ $\mathbb{C}$ est l'ensemble des valeurs de f. ainsi à un point P(x, y) dans le plan de la variable correspond au moins un point $P'(u, v)$ du plan de la variable w.

b. Fonction uniforme et fonction multiforme

Une fonction complexe est uniforme si et seulement si pour tout $Z_0 \in A$, il existe un et un seul élément t=f(Z_0) $\in$ $\mathbb{C}$.

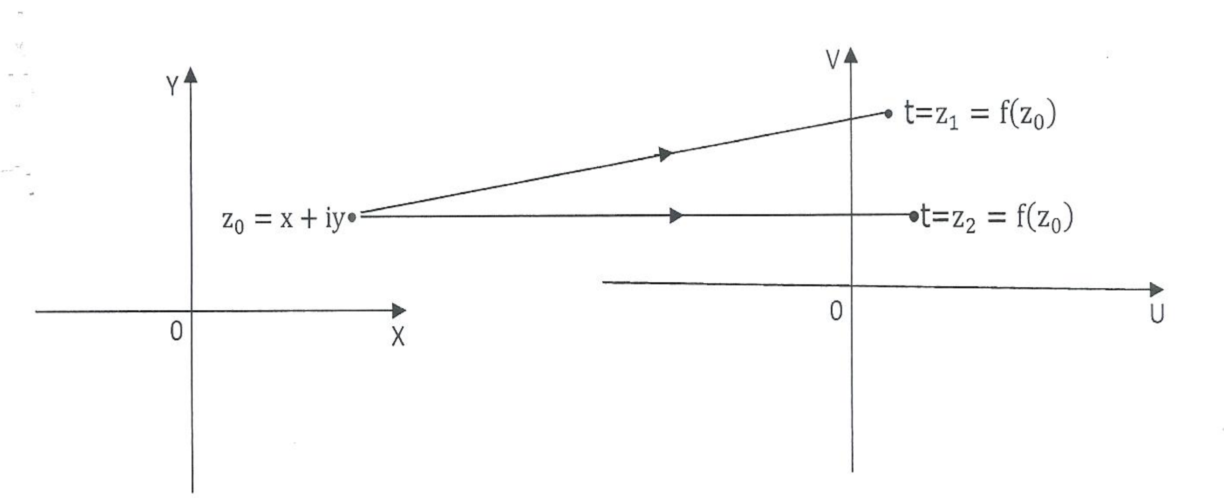

Figure 8 : L'image d'un point $Z_0 = f(Z_0)$ de $\mathbb{C}$ (MPAKASA, 2016, 1-5)

Une fonction complexe est multiforme si et seulement si il existe Z_0 dans le domaine de définition de f ayant plusieurs images.

Exemples

1. La fonction f(z) = $\frac{Z+1}{Z-3i}$ est définie dans A = $\{Z \in \mathbb{C} : Z \neq 3i\}$ et est uniforme sur A.
2. Soit n ∈ $\mathbb{N}^*où\ n \geq 2$. La fonction racine n^{ième} définie par f : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ où $f(z) = \sqrt[n]{z}$ est une fonction multiforme sur $\mathbb{C}$ car si $z = r(\cos\theta + i\ sin\ \theta)$ alors :

$$f(z) = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

Où k = 0, 1, 2, …, n-1

I.3.2. Quelques fonctions élémentaires

a. fonction exponentielle

La fonction exponentielle est définie par :

F : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ où f(z) = $e^z = f(x+iy) = e^{x+iy}$

$$= e^x . e^{iy}$$

$$= e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$= e^x \cos y + ie^x \sin y$$

Avec e≅ 2,719828 …, la base des logarithmes népériens. En écrivant f(z) = u(x,y) + iv(x,y), on voit que

$u(x,y) = e^x \cos y\ \ et\ \ v(x,y) = e^x \sin y.$

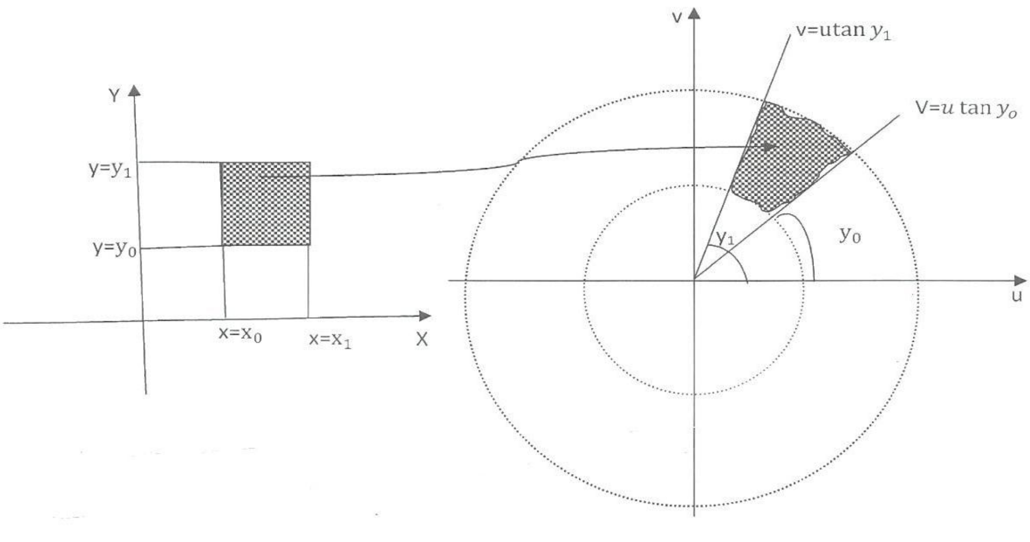

Figure 9 : l'image par fonction exponentielle d'une droite verticale et une droite horizontale.

Nous examinons l'image d'une droite verticale $x = x_0 : De\ u = e^{x_0}\ cos\ y$ et v=e^{x_0} sin y, on tire en équations :

$u^2 + v^2 = (e^{x_0})^2$ qui représente un cercle de centre (0,0) et de rayon e^{x_0}dans le plan des images.

Donc, l'image par la fonction exponentielle d'une droite verticale est un cercle.

Passons maintenant à l'image d'une droite horizontale $y = y_o$: des équations $u = e^x \cos y_o$et v = $e^x \sin y_o$, on tire $\frac{v}{u}$ = tan $y_o\ ou\ v = utan\ y_o$ qui représente une droite passant par l'origine (0,0) et de coefficient angulaire égale à $\tan y_0$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les égalités $e^{z+2k\pi} = e^z . e^{2k\pi} = e^z$ montre que la fonction exponentielle $f(z) = e^z$ est une fonction périodique de période $2\pi i$.

b. Fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques : $f : Z \to \sin z, f : z \to \cos z\ etc.$ sont définies à l'aide des fonctions exponentielles de la manière suivante.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \operatorname{cosec} z = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} = \frac{1}{\sin z}$$

$$\cos\ z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{sinz}{\cos z}$$

$$\sec z = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{\cos z} \qquad \tan z = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} = \frac{\cos z}{\sin z}$$

b. Fonctions hyperboliques

Elles sont définies comme suit :

$$\sin z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \coth z = \frac{ch\ z}{sh\ z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

$$\operatorname{ch}\ z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{sech}\ z = \frac{1}{sh\ z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{sh\ z}{ch\ z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{sh\ z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}$$

Les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes

$$\sin iz = i\, sh\, z \qquad ch\, iz = \cos z$$
$$sh\, iz = i \sin z \qquad th\, iz = i tan\, z$$
$$\cos iz = ch\, z \qquad \tan iz = i\, th\, z$$

c. Fonction racine carrée $f(z) = \sqrt{z}$

$w = \sqrt{z} \Leftrightarrow \; z = w^2$

Où $w = u + iv$. $Si\; z = |z|e^{i\theta}$, les deux racines carrées de z sont $|z|^{\frac{1}{2}}\, e^{i\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)}$ où k=0,1.

Si $k = 0 \Rightarrow w_0 = |z|^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{i\theta}{2}}\; et\; si\; k = 1 \; \Rightarrow \; w_1 = \; |w|^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)}$

Etudions maintenant l'image du cercle $z = re^{i\theta}$ où r est un réel positif et $0 \leq \theta \leq 2\pi$ par la fonction racine carrée $f(z) = \sqrt{z}$.

Pour $z = re^{i\theta}$
$w = f(z) = f\left(re^{i\theta}\right) = |z|^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{i\theta}{2}}$ $\;(0 \leq 0 \leq 2\pi\;)$ décrit un demi-cercle de centre 0 et de rayon $|z|^{\frac{1}{2}} = \; r^{\frac{1}{2}}$.

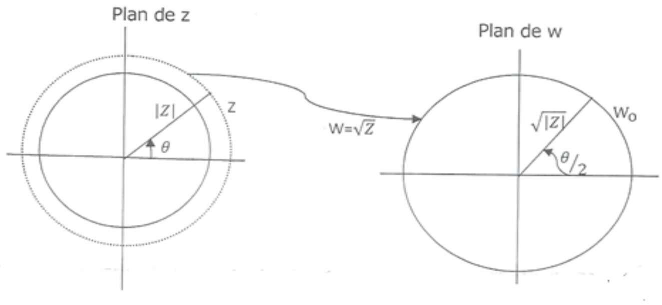

Figure 10 : la représentation du plan z et la racine carrée $\sqrt{z} = w$

Pour chaque $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) = \sqrt{z}$ admet deux racines carrées. Donc $f(z) = \sqrt{z}$ est une fonction multiforme. (MPAKASA, 2016 : 5-7).

Logarithme dans $\mathbb{C}$

$z = re^{i\theta}$

$lnz \; = \; ln(re^{i\theta}) \; = \; lnr \; + \; lne^{i\theta} = lnr + i\theta$

I.3.3. Fonctions d'une variable complexe

a. Premières définitions

Définition

Soit U une partie de $\mathbb{C}$. On appelle fonction d'une variable complexe une application : $U \to \mathbb{C}$. On a alors $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, où u et v sont deux fonctions réelles de deux variables réelles.

W : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \to w\,(z) = f(z) + ig(z)\ avec\ z = x + iy\ et\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to f(x,y)$

$g\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to g(x,y)$

Ainsi w: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \to w(z) = f(x,y) + ig(x,y)$ (RAPHAEL, 2013 : 6)

Exemples

1) h : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \to z^2$
$x + iy \to x^2 - y^2 + 2ixy\ avec\ f(x,y) = x^2 - y^2 et\ g(x,y) = 2xy$
2) k : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \to \bar{z}$ c'est-à-dire $x + iy \to$ avec $f(x,y) = x\ et\ g(x,y) = -y$
3) l : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \to e^z$ (Exponentielle complexe) c'est-à-dire :
$x + iy \to e^x \cos y + ie^x \sin y\ avec\ f(x,y) = e^x \cos y\ et\ g(x,y) = e^x \sin y$
4) $m :\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \to m(z) = z^3 - 4z$
On pose $z = x + iy$
$m(z) = (x+iy)^3 - 4(x+iy)$
$= x^3 + 3x^2iy + 3xy^2i^2 + i^3y^3 - 4x - 4iy$
$= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 - 4x - 4iy$
$= x^3 + 3xy^2 - 4x + i(3x^2y - y^3 - 4y)$
$f(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 4x\ \ et\ \ g(x,y) = 3x^2y - y^3 - 4y$

b. Limites et continuité

1°) Limites

Définition

On dit que f admet une limite l quand z tend vers + ∞ si :

$\forall\varepsilon > 0, \exists$ A $(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tel que $|z| >$ A $\Rightarrow$ $|f(z) - l| < \varepsilon$.

Dans la suite du paragraphe, on va considérer les fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ où U est une partie de $\mathbb{C}$.

Soit $z_0 \in$ U. On dit que la fonction f a pour limite l lorsque z → z_0 si :

$\forall\varepsilon > 0, \exists\, \mu\,(\varepsilon)$ tel que $|z - z_0| < \mu \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$.

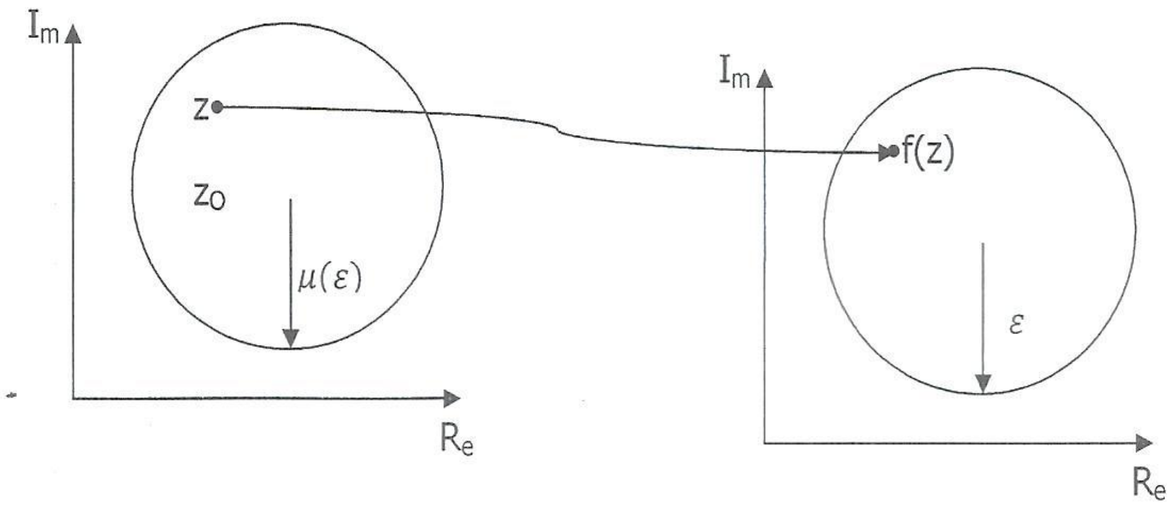

Figure 11 : Les deux plans de z et f(z)

Remarque

D’après la définition, f a une limite si elle tend vers la même valeur suivant toutes les directions du plan. Pour prouver que f n’admet pas de limite en un point il suffit de trouver deux directions d’approche de ce point telles que la fonction ne tende pas vers la même valeur suivant l’une ou l’autre.

Exemples

Calculer les limites :

1) $\lim_{z \longrightarrow i} \bar{z}$
2) $\lim_{z \longrightarrow i} \frac{\bar{z}}{z}$

Solution

1) $\lim_{z \longrightarrow i} \bar{z}$

$i = (0,1)$

$z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy$

$$\lim_{z \longrightarrow i} \bar{z} = \lim_{(x,y) \to (0,1)} (x - iy)$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,1)} x - \lim_{(x,y) \to (0,1)} iy$$
$$= 0 - i$$
$$= -i$$
ou simplement

$$\lim_{z \longrightarrow i} \bar{z} = \bar{\imath} = -i$$

2)$\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \frac{0}{0}$ (forme indéterminée)

Suivant l'axe des x, on a : $z = x + iy \cong x$

$$\bar{z} = x - iy \cong x$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x}{x} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} 1 = 1$$

Suivant l'axe des y, on a :

Les abscisses x = 0 et les ordonnées :

$$z = x + iy \cong iy$$
$$\bar{z} = x - iy \cong -iy$$
$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{-iy}{y} = -1$$

Donc, $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ n'existe pas car suivant les deux directions on trouve deux limites différentes.

2°) Continuité

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f *une fonction* définie sur un voisinage de z_0. On dit que la fonction f est continue en z_0 si :

- $z_0 \in D_f$
- $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Proposition

f est continue si et seulement si les fonctions $u(x, y)$ *et* $v(x, y)$ définies précédemment sont continues.

Exemples

1) Montrer que f(z) = z^2 est continue en z = $z_0 \in \mathbb{C}$
2) La fonction f(z) = $\frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$ est-elle continue en z=i

Solution

1) $f(z) = z^2$
   $Domf = \mathbb{C}$
   $z_0 \in Domf$
   $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$
   D'où f est continue en z_0
2) $D_f = \mathbb{C} \setminus \{i\}$
   $i \notin D_f$
   D'où, f n'est pas continue en z= i (RAPHAEL, 2013 : 6-7)

c) Dérivée d'une fonction d'une variable complexe

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, et soit f définie et continue sur un voisinage de z_0. On dit que f est dérivable en z_0 si l'expression :

$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ ou bien $\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ admet une limite quand z tend vers z_0.

On note alors cette limite $f'(z_0)$.

Exemple

Considérons la fonction f définie et continue sur $\mathbb{C}$, telle que

$f(z) = \ |z|^2$. f est-elle dérivable ?

Solution

En effet,

On sait que $|z|^2 = z.\bar{z}$

$$f\ '\ (z_0) = \ \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \ \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z}$$

$$= \frac{(z_0 + \Delta z)\overline{(z_0 + \Delta z)} - \ z_0.\overline{z_0}}{\Delta z}$$

$$= \frac{(z_0 + \Delta z)(\overline{z_0} + \overline{\Delta z}) - \ z_0.\overline{z_0}}{\Delta z}$$

$$= \frac{z_0.\overline{z_0} + z_0.\overline{\Delta z} + \Delta z\ \overline{z_0} + \Delta z\ \overline{\Delta z} - z_0.\overline{z_0}}{\Delta z}$$

$$= \ z_0\ \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \ \overline{z_0} - \ \overline{\Delta z}$$

Si $z_0 = 0$, alors f ’$(z_0) = 0$ car Δz tend vers 0
Donc f est dérivable en 0.

Proposition

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f, g : \mathbb{C} \ \rightarrow \ \mathbb{C}$ dérivables . On a :

$(\lambda f)' = \lambda f'$
$(f + g)' = \ f' + g'$
$(fg)' = \ f'g + fg'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' \ = \frac{f'g - fg'}{g^2}, avec\ g(z) \neq 0$

$(fog)' = g'(f'og)$ (RAPHAEL, 2013 :8)

d) Conditions de Cauchy -+ Riemann

Proposition 1

Soit $f = u + iv$ une fonction définie et continue sur un voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$, alors u et v admettent en (x_0, y_0) des dérivées partielles premières rapport à chacune de leur variables, et on a :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; et \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Remarque :

Cette proposition n'admet pas de réciproque si on ne suppose rien d'autre sur les fonctions coordonnées $u \; et \; v \; de \; f$, car on ne considère que deux directions d'approche particulières de z_0.

Proposition 2

Si les fonctions $u \; et \; v$ admettent des dérivées partielles continues sur un voisinage de z_0 et si ces dérivées satisfont aux relations de Cauchy-Riemann en $z = z_0$, alors f est dérivable en z_0.

Proposition 3

En pratique, pour calculer l'expression de $f'(z)$ quand f est donnée à partir $de \; u \; et \; v$, on utilise l'une des formules déduites de la démonstration des relations de Cauchy-Riemann.

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}$ (MURRAY, 1987 : 63)

e) Fonctions analytiques (ou holomorphes)

1°) Les équations de Cauchy-Riemann

$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$

$$\boxed{\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \; et \; \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}$$

f est analytique ou holomorphe si les dérivées partielles sont continues et vérifient les équations de Cauchy-Riemann (MURRAY, 2013 : 63-64).

2°) Exemples

Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont analytiques :

1) $f(z) = z.\bar{z}$
2) $f(z) = z^2$

Solution

1) En effet,

$f(z) = z.\bar{z}$

$z = x + iy \; et \; \bar{z} = x - iy$

$f(z) = (x + iy)(x - iy)$

$= x^2 + y^2 + 0i$

$P(x,y) = x^2 + y^2$

$Q(x,y) = 0$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} = 0$$

D'où, les dérivées partielles existent et sont continues.

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$$

D'où f n'est pas analytique car les conditions des équations de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées.

2) En effet,

$$f(z) = z^2$$

$$= (x+iy)^2$$

$$= x^2 + 2ixy - y^2$$

$$= x^2 - y^2 + 2ixy$$

$P(x,y) = x^2 - y^2, Q(x,y) = 2xy$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} et \ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Les dérivées partielles existent et sont continues et vérifient les équations de Cauchy-Riemann.

D'où, f est analytique

f) Fonctions entières

1°) Définition

On appelle fonction entière une fonction analytique sur tout $\mathbb{C}$.

2°) Exemple

$f(z)\ expz\ et\ f(z) = z^2$ sont des fonctions entières. (RAPHAEL, 2013 :10)

g) Fonctions harmoniques

f est harmonique si et seulement si $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$ (Equation de Laplace)

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (Le Laplacien)

$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (RAPHAEL, 2013 :9)

Exemple

1) La fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \to f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -2$$

Alors 2-2 = 0

Donc, f est harmonique

2) $f(z) = z^3 + z$

$= (x + iy)^3 + (x + iy)$

$= x^3 + 3ix^2y + 3xi^2y^2 + i^3y^3 + x + iy$

$= x^3 + 3ix^2y + 3xi^2 - iy^3 + x + iy$

$= x^3 - 3xy^2 + x + i(3x^2y - y^3 + y)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 1 + 6ixy$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6\,x + 6iy$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6\,x + 6iy$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -6xy + 3ix^2 - 3iy^2 + i$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -6\,x - 6iy$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow 6x + 6iy - 6x - 6iy = 0$$

D'où, $f(z)$ est harmonique. (MPAKASA, 2016 : 9-10)

I.3.4. Intégration dans le plan complexe

a. introduction

Soit $\gamma : j = [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{C}$, avec $[t_a, t_b] \sqsubset \mathbb{R}$, tel que :

- ❖ γ peut être décrite par $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ où $x\ et\ y$ sont continues sur J et x' et y' continues par morceaux sur J.
- ❖ γ est injectif, sauf peut-être aux extrémités (pas de points multiples, sauf éventuellement a=b).

Alors γ est appelé chemin.

Si de plus a=b, γ est appelé contour.

(N.B : Cette définition assez restrictive d'un chemin ne correspond pas à la définition plus générale que l'on trouve dans les ouvrages de références).

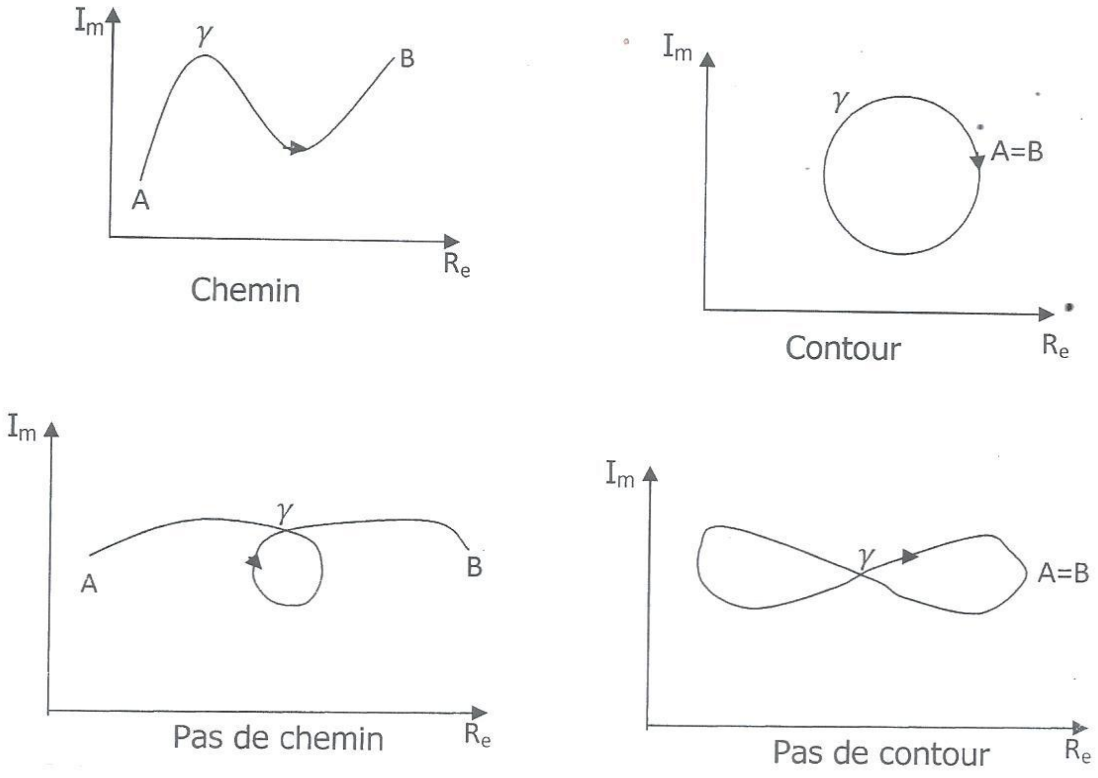

Figure 12 : Chemin et contour (RAPAHEL, 2013 : 11)

b. Intégration de long d'un chemin

1°) Définition

Par définition la fonction $w(x) = f(x) + ig(x)$ est dite intégrable sur $[a, b]$si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont intégrables sur $[a, b]$.

Alors $\int_a^b [w(x) + u(x)]dx = \int_a^b w(x)dx + i\int_a^b u(x)dx$

2°) Propriétés

1) $\int_a^b [w(x) + u(x)]dx = \int_a^b w(x)dx + \int_a^b u(x)dx$
2) $\int_a^b \gamma w(x)dx = \gamma \int_a^b w(x)dx$

3) $\int_a^b \overline{w(x)dx} = \int_a^b \overline{w(x)}dx$

4) $\left|\int_a^b w(x)dx\right| \leq \int_a^b |w(x)|dx$ (MURRAY, 1987 : 92-93)

3°) Exemple

Calculer

Solution

$$\int_a^b \frac{dx}{ix+1} = \int_a^b \frac{(1-ix)dx}{(ix+1)(1-ix)}$$

$$= \int_a^b \frac{(1-ix)dx}{ix+x^2+1-ix}$$

$$= \int_a^b \frac{(1-ix)dx}{x^2+1}$$

$$= \int_a^b \frac{dx}{x^2+1} - i\int_a^b \frac{xdx}{x^2+1}$$

$$= [arc\tan x]_a^b - i\int_a^b \frac{xdx}{x^2+1}$$

Posons $1+x^2 = t \Rightarrow dt = 2xdx$

$$\Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$$

$$[arc\tan x]_a^b - i\int_a^b \frac{xdx}{x^2+1} = (arc\tan b - arc\tan a) - i\int_a^b \frac{\frac{dt}{2}}{t}$$

$$= (arc\tan b - arc\tan a) - i\int_a^b \frac{dt}{t}$$

$$= (arc\tan b - arc\tan a) - \frac{i}{2}[ln\, t]_a^b$$

$$= (arc\tan b - arc\tan a) - \frac{i}{2}[ln(1+x^2)]_a^b$$

$$= (arc\tan b - arc\tan a) - \frac{i}{2}[ln(1+b^2) - ln(1+a^2)]$$

$$= arc\tan b - arc\tan a - \frac{i}{2} ln\frac{1+b^2}{1+a^2}$$

4°) Définition

Si f est continue sur γ, alors son intégrale le long de γ existe

On a :

$$\boxed{I = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (vdx - udy)}$$

(RAPHAEL, 2013 :11)

Exemple

Evaluer $\int_c \bar{z}dz \;\; de \;\; z = 0$ à $z = 4 + 2i$ le long de la courbe C :

a) définie par $z = t^2 + it$
b) formé des segments joignant 0 à $2i \; et \; 2i$ à $4 + 2i$

Solution

Pour $z = 0$: $t^2 + it = 0 \Leftrightarrow \mathrm{t(t+i) = 0}$

$\Leftrightarrow \mathrm{t = 0 \text{ ou } t = -i \Rightarrow t = 0}$ car la borne est un réel.

Pour $z = 4 + 2i \Leftrightarrow t^2 + it = 4 + 2i$

$\Leftrightarrow t = 2$

$dz = (2t + i)dt$

L'intégrale s'écrit :

$$\int_0^2 (t^2 - it)(2t + i)dt = \int_0^2 (2t^3 + it^2 - 2it^2 + t)dt$$

$$= \int_0^2 (2t^3 + it^2 + t)dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{i}{3}\, t^3 + \frac{t^2}{2}\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}.1 - \frac{i}{3}.8 + \frac{4}{2}\right)$$
$$= 10 - i\frac{8}{3}$$

b) $z \ = \ x \ + \ iy$
$\bar{z} = x - iy$
$dz = dx + idy$

On sait que 0=(0,0), $2i = (0{,}2)$, alors la droite passant par ces deux points est donnée par :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ (x - x_1) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{2 - 0}{0 - 0}\ (x - 0)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{0}\ x$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ \Rightarrow dx = 0$$
$$\int_0^2 (x - iy)(dx + idy) = \int_0^2 (0 - iy)(0 + idy)$$
$$= \int_0^2 ydy$$
$$= \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2$$
$$= 2$$

On sait que $2i = (0{,}2), 4 + 2i =$ alors la droite passant par ces deux points est donnée par :

$$y - 2 = \frac{2 - 2}{4 - 0}\ (x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow dy = 0$$
$$\int_0^4 (x - iy)(dx + idy) = \int_0^4 (0 - 2i)(dx + i.0)$$
$$= \int_0^4 (x - 2i)dx$$
$$= \left[\frac{2^2}{2} - 2ix\right]_0^4$$

$= \frac{16}{2} - 2i.4$

$= 8 - 8i$

Donc, on a : 2+i = 10 – 8i

c. inégalité de Darboux

Proposition

Soit f intégrale sur un chemin de longueur curviligne L.

Soit $M = sup_{\gamma}(|f|)$ (on suppose que M est fini).

Alors on a : $|\mathrm{I}| \leq ML$ (RAPHAEL, 2013, 12).

I.3.5. Intégration de fonctions analytiques

a. Théorème de Gauchy et conséquences

1°) Théorème de Cauchy

Soit un domaine Ω simplement connexe, soit f analytique sur Ω ,et soit γ un contour quelconque contenu dans Ω , Alors $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$

Proposition1

Soit f une fonction analytique sur un domaine simplement connexe, soit A et B deux points de ce domaine et soit γ_1 et γ_2 et deux chemins contenus dans Ω et pour extrémités A et B, alors on a :

$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{2} f(z)dz$

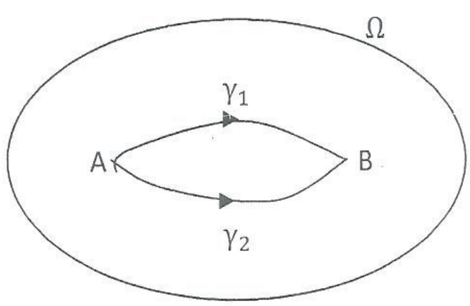

Figure 13 : le domaine … simplement connexe

Remarque

Si le domaine n'est pas simplement connexe, le théorème ne s'applique pas :

$\int_{\gamma_1} f(z)dz = 0$ mais en général $\int_{\gamma_2} f(z)dz \neq 0$.

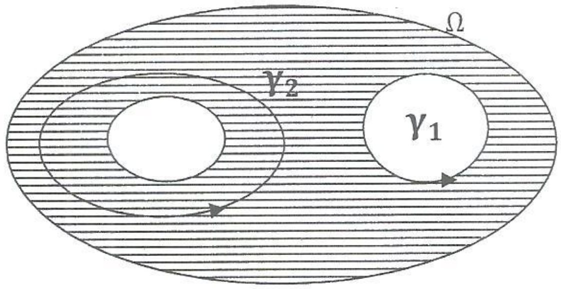

Figure 14 : le domaine … n'est pas simplement connexe.

2°) Définition

- ❖ Soit γ_1 et γ_2 deux contours d'un domaine Ω. On dit que ces deux contours sont homotopes si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue en restant dans Ω.

γ_1 et γ_2 homotope

γ_2 et γ_3 non homotopes

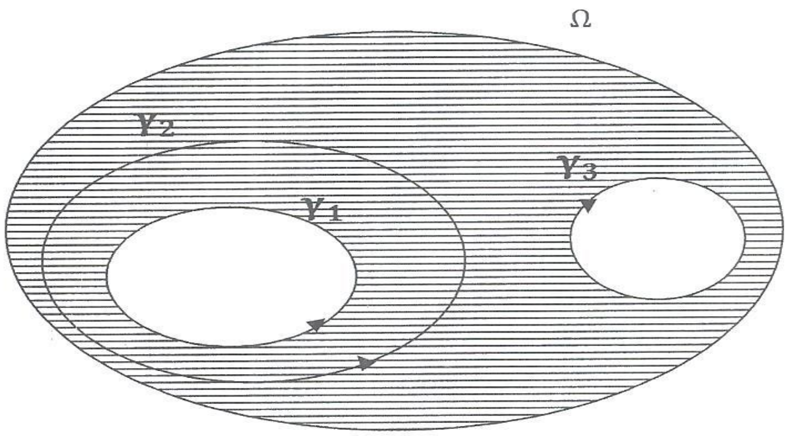

Figure 15 : contours homotopes d'un domaine …

- Un contour est dit homotope à un contour ponctuel dans Ω S'il est homotope à un contour réduit à un point appartenant à Ω

Un domaine est simplement connexe si tout contour de de Ω est homotope à un contour ponctuel.

- Un domaine Ω multiplement connexe est un domaine simplement connexe dont on a retiré ou plusieurs domaines implémenta connexes.

Proposition 2

Soient f une fonction analytique dans un domaine Ω pouvant être non simplement connexe et deux contours $\gamma_1$et γ_2 de Ω homotopes dans Ω, alors on a, en prenant la même orientation pour les deux contours.

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

Proposition 3

Soit f analytique sur un domaine simplement connexe Ω, alors f admet une primitive sur Ω   (RAPAHEL, 2013 :12-13).

b. formule intégrale de Cauchy

Proposition

Soit f analytique sur un domaine simplement connexe, et $z_0 \in \Omega$ alors on a, pour tout contour z:

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ (MURRAY, 1987 : 118).

c. Dérivabilité n[ième] des fonctions analytiques

Proposition

Soit f analytique sur un domaine Ω, alors f est de classe $C^{\infty} sur$ Ω

Si de plus Ω est simplement connexe, pour tout contour γ entourant z on a :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad \text{(MURRAY, 1987 : 118)}$$

d. Théorème du maximum

1°) Définition

Soit g une fonction de la variable complexe. On dit que $|g|$ admet un maximum local relatif en $z = z_0$ s'il existe un voisinage U de z_0 tel que :

$\forall z \in \cup, |g(z)| \leq |g(z_0)|$

Si l'inégalité est stricte, i.e :

$\forall z \in U \setminus \{z_0\}, |g(z)| < |g(z_0)|$, alors le maximum local est dit strict

(MURRAY, 1987 : 119)

2°) Exemples

1. Calculer l'intégral

$$\int_\tau \frac{dz}{z(z-1)} = \int_\tau \frac{dz}{(z-0)(z-1)} \quad où\ \tau = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 2\}$$

Solution

$z = x + iy$

Le domaine $\tau = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 2\}$ est un cercle $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ centré à l'origine et de rayon 2.

Pour $z_0 = 0$, on a : $\int_\tau \frac{\left(\frac{1}{z-1}\right)dz}{z-0}$ avec $f(z) = \frac{1}{z-1}$

$$f(z_0) = f(0) = \frac{1}{0-1} = -1$$

$$-1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{z(z-1)}}$$

$$\oint_r \frac{dZ}{z(z-1)} = -2\pi i$$

Pour $z_0 = 1$, on a $\oint_r \frac{\frac{1}{z}dz}{z-1}$

$$f(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow f(1) = 1$$

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_r \frac{dz}{z(z-1)} \Leftrightarrow \oint_r \frac{dZ}{z(z-1)} = 2\pi i$$

2) Calculer $I = \int_c \frac{zdz}{2z-5}$ $où\ c$ est le cercle $|Z| = 3$

Solution

C'est un cercle centré à l'origine de rayon 3

$$I=\oint_c \frac{zdz}{2\left(2-\frac{5}{2}\right)}$$

$$=\oint_c \frac{\frac{z}{2}dz}{z-\frac{5}{2}}$$

$$f(z) = \frac{z}{2} \Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{zdz}{2z-5}$$

$$\Leftrightarrow \oint_c \frac{zdz}{2z-5} = \frac{10\pi i}{4} = \frac{5\pi i}{2}$$

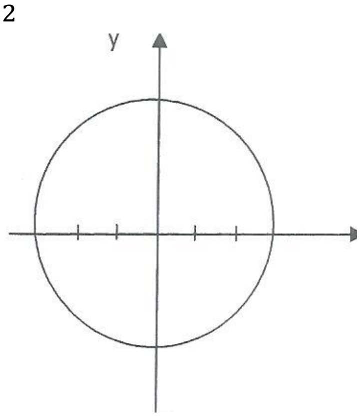

Figure 16 : un cercle centré à l'origine de rayon 3

3) Calculer $I = \oint_r \frac{z^2}{z(z-1)} dz$ où τ est un carré ayant ses sommets aux points $-1 - i, -1 + i, -3 + i$ et $-3 - i$.

Solution

$z_0 = -2$ et $z_0 = 1$, alors on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\tau \frac{\frac{z^2}{z-1} dz}{z+2}$$

$$f(z) = \frac{z^2}{z-1} \Rightarrow f(-2) = \frac{-4}{3}$$

$$\frac{-4}{3} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\tau \frac{z^2}{(z-1)(z+2)} dz$$

$$\Leftrightarrow \oint_\tau \frac{z^2}{(z-1)(z+2)} dz = \frac{-8\pi i}{3}$$

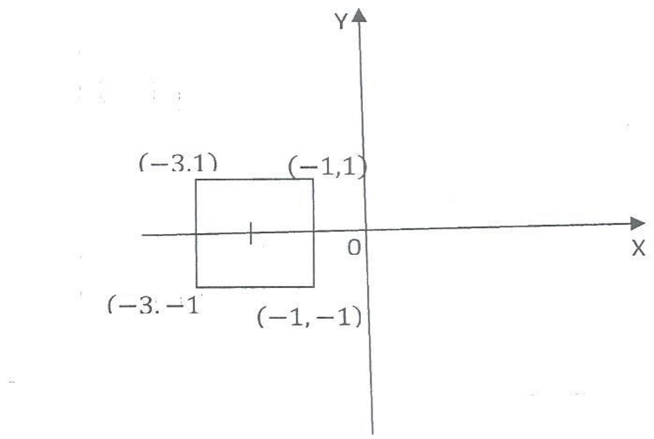

Figure 17 : le carré ayant ses sommets aux points

$$-1 - i, -1 + i, -3 + i \; et \; -3 - i$$

Proposition

Soit f analytique sur un domaine Ω si en un point $z_0 \in \Omega, |f|$ présente un maximum local relatif, alors f est constante sur Ω

e. Théorème de Morera

Soit f une fonction continue dans un domaine simplement connexe. Si pour tout contour $\gamma \in \mathbb{C}$, on a :

$\int_\gamma f(z)dz = 0$ Alors f est analytique sur Ω

f. Théorème de Liouville

1°) Théorème (Liouville)

Si f est bornée (i.e. $\exists\, M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq M$), alors f est une constante.

2°) Remarques

- Attention à bien vérifier que le module de f est borné : ce n'est pas le cas de $z \rightarrow sin$z par exemple.
- Le théorème de Liouville permet de démontrer facilement le théorème de D'Alembert-Gauss. (MURRAY, 1987 : 118-119).

I.3.6. Séries de fonctions d'un véritable complexe

a. Définition

Soit une suite de fonctions$(g_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$. On appelle série de terme général $g_n(z)$ la suite :

$$S_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$$

b. Convergence simple

On dit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans un sous-ensemble U de $\mathbb{C}$ et que sa somme est S(z) si et seulement si :

$\forall z \in U,\ \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(z,\varepsilon), n > N \Longrightarrow |s(z) - s_n(z)| < \varepsilon$

c. Convergence uniforme

On dit que la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S si et seulement si, les deux propositions étant équivalentes :

- $\forall \varepsilon\ > 0, \exists N = N(\varepsilon), n > N \Longrightarrow |s(z) - s_n(z)| < \varepsilon, \forall z\ \in U$
- $\forall \varepsilon\ > 0, \exists N = N(\varepsilon), n > N \Longrightarrow \sup_{z\,\in\,U} |s(z) - s_n(z)| <\ \varepsilon$

Attention

La convergence uniforme demande des hypothèses beaucoup plus fortes que la convergence simple, les z n'étant pas choisis au début de la définition. La convergence uniforme implique de manière évidente la convergence simple.

d. Propriétés des séries uniformément convergentes

1. Si (s_n) converge uniformément dans U $\subset \mathbb{C}$ et si $\forall n \in \mathbb{N}, g_n$ est continue en un point $z_0 \in$ U $\in$ alors la somme de la série de g_n st continue en z_0 .

2. Si (s_n) converge uniformément le long d'un chemin γ et si $\forall n \in \mathbb{N}, g_n$ est continue, alors $\int_\gamma\ (\sum_{n\,=\,0}^{\infty} g_n(z))\ dz = (\sum_{n\,=\,0}^{\infty} \left(\int_\gamma\ g_n(z)dz\right)$

3. Si quel que soit $n\ \in \mathbb{N}, g_n(z)$ est analytique dans un domaine Ωet i (s_n) converge uniformément dans tout disque fermé contenu dan Ω, alors la somme S est analytique dans Ω et

$S'(z) = (\sum_{n\,=\,0}^{\infty} g'_n\,(z))$ (RAPHAEL, 2013 :16-18)

I.4. Séries infinies

I.4.1. Séries à termes complexes

Soit une suite dans $\mathbb{C}$:

$(z_1, z_2, \dots, z_n)$ $S_1 = z_1$ $S_2 = z_1 + z_2$	$S_n(Z) = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ On écrit $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$

Si $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = s$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ est dite convergente et s est sa somme.

Dans le cas contraire la série est divergente.

On trouve cette limite par :

$$\sum_{k=1}^{\infty} Z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

Cette série diverge si l'un au moins de deux séries diverge.

(MURRAY, 1987 :139)

I.4.2. Critères spéciaux de convergence

a. Critères de comparaison

a) $Si\ \sum |v_n|$ converge et si $|u_n| < |v_n|$ alors $\sum u_n$ converge absolument

b) $Si\ \sum |v_n|$ converge et si $|u_n| \geq |v_n|$ alors $\sum u_n$ diverge mais $|u_n|$ diverge, on peut rien dire de $|v_n|$. Cela n'influence pas $\sum v_n$

b. Critère de l'Alembert

$Si \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L$ alors $\sum u_n$ converge absolument si L< 1 et diverge si L> 1, si L=1, on ne peut rien conclure.

c. Critère de Cauchy

$Si \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$ converge (absolument) si L< 1 et diverge L> 1.

Si L=1, on peut rien conclure

d. Critère de l'intégrale

Si $f(x) \geq 0$ pour $x \geq a$ alors $\sum f(x)$ converge ou diverge selon que $\lim_{M\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ converge ou diverge.

e. Critère de Weierstrass

Soit : $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série à termes positifs convergentes pour tout n et pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a : $|f_n(z)| \leq u_n$, la série des fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ est absolument et uniformément convergente. Lorsqu'il existe une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ à termes positifs convergente tel que pour tout entier n et pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $|f_n(z)| \leq u_n$. On dit que la série de la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ est normalement convergente.

f. Critère d'Abel

Soit une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, v_n$ où les a_n sont des nombres réels et les v_n des réels complexes tels que :

- L'ensemble des sommes $|v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n|$ est un ensemble borné
- La suite $\{a_n\}$ a pour limite 0
- La série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ est convergente alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, v_n$ est convergente. (MURRAY, 1987 : 141-142).

Exemple

Montre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ converge absolument pour $|z| \leq 1$.

Solution

On sait que $\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(n+1)} \Leftrightarrow \left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ une série convergente.

Donc, par le critère de comparaison la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ est absolument convergente.

I.4.3. Rayon de convergence

Par définition R $= Sup \, \{|z - z_0| z_0 \in \Omega_0 \ \} \, avec \, \Omega_0$ le domaine de convergence

a. Détermination de R

1°) Premier cas

La suite $\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}$ est bornée alors elle a une limite soit $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Donc, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| . |z - z_0| = \lambda \, |z - z_0|$

a) Supposons que $\lambda = 0$ alors pour toute valeur de z on a $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z - z_0| = 0$ et d'après la règle d'Alembert la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n|z - z_0|^n$ est absolument convergente, donc convergente.
b) Supposons que $\lambda \neq 0$

Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|z - z_0| = \lambda\,|z - z_0| < 1$ c'est-à-dire $|z - z_0| < \frac{1}{\lambda}$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.|z - z_0|$ est convergente.

c) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|z - z_0| = \lambda\,|z - z_0| > 1$ c'est-à-dire $|z - z_0| < \frac{1}{\lambda}$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.|z - z_0|$ est divergente.
d) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|z - z_0| = \lambda\,|z - z_0| = 1$. on ne peut rien conclure. La série est soit convergente soit divergente.

Dans le cas où $\lambda \neq 0$, posons que R=$\frac{1}{\lambda}$ et on l'appelle rayon de convergence de la série.

- Pour tout z tel que $|z - z_0| < R$ alors la série convergente.
- Pour tout z tel que $|z - z_0| > R$ alors la série divergente.
- Si $|z - z_0| = R$ la série peut être convergente ou divergente.

N.B : Dans le plan de la variable complexe le centre z_0 et de rayon R est appelé cercle de convergence.

Le disque fermé (z_0, R) est l'ensemble des points M du plan tel que $|z_M - z_0| \leq R$.

2°) Deuxième cas

La série $\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}$ n'est pas bornée, elle n'admet pas la limite 0, donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n|z - z_0|^n$ n'est pas convergente pour $z \neq z_0$.

Pour cela il y a convergence seulement pour $z \neq z_0$.

b. Théorème

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n|z - z_0|^n$ une série entière, trois cas sont possibles :

1) La série est absolument et uniformément convergente sur tout disque fermé de centre z_0.
2) Où il existe un nombre $R = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ tel que la série est soit absolument convergente $(|z - z_0| < R)$.
3) Ou elle est convergente seulement pour le nombre $z = z_0$

$$R = \begin{cases} 0 \; si \quad \lambda = \infty \\ \frac{1}{\lambda} \; si \quad 0 < \lambda < +\infty \\ +\infty \;\; si \; \lambda = 0 \end{cases}$$

Avec $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$ (MPAKASA, 2016 :67-70)

c. Exemples

Trouver les rayons de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$$

Solution

1) $u_{n+1} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$

   $u_n = \frac{z^n}{n!}$, alors on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right|$$

$$= \left|\frac{n!\, z^{n+1}}{(n+1)!.\, z^n}\right|$$

$$= \left|\frac{n!\, z^n.\, z}{(n+1)n!.\, z^n}\right|$$

$$= \left|\frac{z}{n+1}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z}{n+1}\right| = \frac{z}{\infty} = 0$$

Donc, la série est absolument convergente

$\lambda = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{\lambda} = +\infty$

2) $u_{n+1} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}$, on obtient :

$$=\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{z^n}{n^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{n^2.z^n.z}{(n+1)^2.z^n}\right|$$

$$= \left|\frac{n^2.z}{(n+1)^2}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2.z}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2.z}{n^2+2n+1}\right|$$

$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{n^2+2n+1}\right|$

$\lambda = 1 \; et \;\; R = \frac{1}{\lambda} = 1$

3) Déterminons le domaine de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3.4^n}$$

Solution

Si $u_n = \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3.4^n}$, alors $u_{n+1} = \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3.4^{n+1}}$

D'où en excluant la valeur z=-2 pour laquelle la série converge, nous avons

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+2)}{4}.\frac{(n+1)^3}{(n+2)^3}\right|$

$$= \frac{|z+2|}{4}$$

La série converge donc (absolument) pour $\frac{|z+2|}{4} < 1$.

CHAPITRE TROISIEME : GENERALITES SUR LES RESIDUS

III.1. Séries de Laurent

III.1.1. Définition

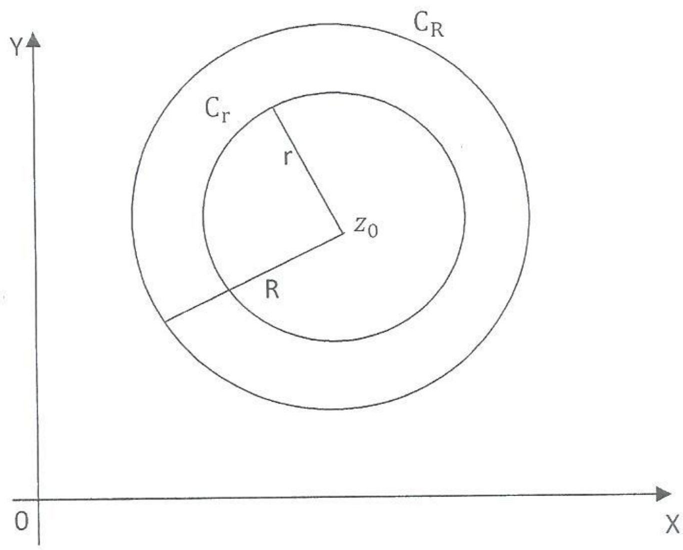

Figure 18 : les cercles C_R et C_r domaines d'étude d'une série de Laurent

Soit C_r deux cercles concentriques au point z_0 et de rayons respectifs r et R tel que $r < R$. On définit par rapport à ce deux cercles une série dont le domaine de convergence est $|z - z_0| > r$ relativement au cercle $C_r$et $|z - z_0| < R$ relativement au cercle C_R. Une telle série est appelée série de Laurent. Son domaine de convergence est l'intersection des domaines définies par les inégalités $|z - z_0| > r$ et $|z - z_0| < R$ c'est-à-dire $|z - z_0| < R$ qui est la couronne déterminée par les deux cercles. Ainsi, la série présente l'avantage d'étudier une fonction dans un domaine circulaire où celle-ci n'est pas partout définie

III.1.2. Forme d'une série de Laurent

La série de Laurent est une généralisation de la série de Taylor au cas où U, le domaine ou f(z) est holomorphe, ne contient pas z_0. Une série de Laurent est une série entière de la forme :

$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ où z, $z_0 \in \mathbb{C}$. On peut encore noter :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n + \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n\,(z-z_0)^n$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}\,(z-z_0)^{-n}$$

$$= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ \ldots$$

Notons

$f_1(z) = \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ et $f_2(z) = \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^{-n}$.

Alors $f_1(z)$ est analytique à l'extérieur du cercle C_r et on note Ext (C_r) et f_2(z) est analytique à l'intérieur du cercle $C_R$et on note $Int\ (C_R)$ donc sur C, avec $C = \{z \in C \colon r < |z-z_0| < R\ \}$ qui est la couronne déterminée par les deux cercles.

La partie f_2(z) est appelée la partie principale tandis que f_1(z) est appelée la partie régulière de la série de Laurent ou série de Taylor. La série de Laurent est analytique sur Ext(C_r)et sur Int(C_R) (MPAKASA, 2016 : 22-23).

III.1.3. Théorème de Laurent

Soit C_1 et C_2 deux cercles concentriques, de centre a et de rayons respectifs R_1 et R_2 (Fig. 20). On suppose que f(z) est uniforme et analytique sur $C_1\ et\ C_2$ et également dans la couronne $\mathcal{R}$ limitée par $C_1\ et\ C_2$ et ombrée dans la figure 20. soit $a+h$ un pont quelconque de $\mathcal{R}$, on a alors $f(z) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{h} + \frac{a_{-2}}{h^3} + \frac{a_{-3}}{h^3} + \cdots$ (1)

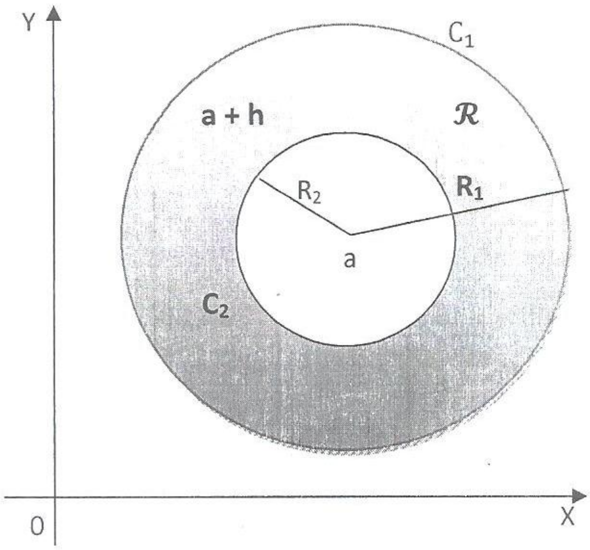

Figure 19 : la couronne $\mathcal{R}$ limitée par les deux cercles C_1 et C_2.

Où $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad n = 0,1,2\ ....$

$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} (z-a)^{n-1} f(z) dz \quad n = 0,1,3, \dots$ avec $b_n = a_{-n} (2)$

C_1 et C_2 étant décrits dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs. Nous pouvons dans les intégrations ci-dessous remplacer C_1 et C_2 par tout cercle concentrique C situé entre C_1 et C_2. les coefficients a_n et b_n de (2) peuvent alors être écrits au moyen de la formule unique $a_n = \frac{n}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$ avec $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots (3)$

Avec un changement convenable de notation on peut alors écrire :

$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots (4)$

Ceci est appelé le théorème de Laurent avec les coefficients (2) et la série (4) est appelé la série de Laurent ou un développement de Laurent.

Comme signalé dans la définition ci-dessus, la partie $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$ est appelée la partie analytique ou régulière de la série de Laurent et la partie $\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} +$ ... formée des puissances négatives de z-a est appelée la partie principale. Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor. (MURRAY, 1987, 143).

III.1.4. Quelques développements usuels des séries particulières

1) $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

5) $\log(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} . \frac{z^n}{n}$

2) $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . z^n$

6) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

3) $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

7) $\sinh z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

4) $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . \frac{z^{2n}}{2n!}$

8) $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} . \frac{z^{2n}}{2n!}$ (MURRAY, 1987 :143)

Exemples

1) Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}$ au voisinage de z=0 :

Solution

$f(0)$ n'est pas définie en 0 mais on peut chercher la limite qui existe en 0. Alors z=0 est une singularité apparente. On a :

$$\frac{z - \sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3} (z - \sin z)$$

$$= \frac{1}{z^3}\left[z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{z^3}\left(\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \cdots$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{z^2}{120} + \frac{z^4}{5040} + \cdots$$

D'où, $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}$

$$= \frac{1}{6} - \frac{z^2}{120} + \frac{z^4}{5040} + \cdots$$

2) Développer $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ en série de Laurent valable dans le domaine $1 < |z| < 3$.

Solution

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \cdots$$

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+1}$$

$$= \frac{A(z+3) + B(z+1)}{(z+1)(z+3)}$$

$$= \frac{(A+B)\,z + 3A + B}{(z+1)(z+3)}$$

Par identification :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B(1) \\ 3A + B = 1(2) \end{cases}$$

(1) Dans (2) donne : $3A + B = 1 \Leftrightarrow -3B + B = 1$

$\Leftrightarrow B = \frac{-1}{2}\ et\ A = \frac{1}{2}$

D'où, $\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+3}\right)$

$$= \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{2z}\left[1 - \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^4 - \cdots\right] - \frac{1}{6}\left[1 - \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 - \left(\frac{z}{3}\right)^3 + \left(\frac{z}{3}\right)^4 - \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \cdots\right) \frac{1}{6}\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \frac{z^3}{27} + \frac{z^4}{81} - \cdots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{2z^5} - \cdots\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} - \frac{z^3}{162} - \frac{z^4}{486} + \cdots\right)$$

$$= \cdots + \frac{1}{2z^5} - \frac{1}{2z^4} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \frac{z^3}{162} - \frac{z^4}{486} + \cdots$$

III.1.5. Développement par artifices de calcul

Exemples :

1) Développer en série de Laurent la fonction $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ au voisinage de singularité z=1.

Solution

Posons $z - 1 = u \Leftrightarrow z = 1 + u$

$$\Leftrightarrow 2z = 2 + 2u$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Leftrightarrow e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

La fonction s'écrit :

$\frac{e^{2+2u}}{u^3} = \frac{e^2.e^{2u}}{u^3}$

$$= \frac{e^2}{u^3}.e^{2u}$$

$$= \frac{e^2}{u^3}\left(1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{e^2}{u^3}\left(1 + 2u + \frac{4u^2}{2} + \frac{8u^3}{6} + \frac{16u^4}{24} + \cdots\right)$$

$$= \frac{e^2}{u^3} + \frac{2e^2}{u^2} + \frac{2e^2}{u^3} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2u}{3} +$$

D'où, $f(z) = \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{(z-1)} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2(z-1)}{3} + \cdots$

2) Développer en série de Laurent la fonction $f(z) = \frac{z^4}{(z-2)^2}$.

Solution

$f(z)$ est analytique dans $\mathbb{C} \setminus \{2\}$

Posons $z - 2 = z' \Rightarrow z = z' + 2, f(z)$ s'écrit par suite :

$f(z) = \frac{(z'+2)^4}{z'^2}$

$$= \frac{z'^4 + 8z'^3 + 24z'^2 + 32z' + 16}{z'^2}$$

$$= \frac{16}{z'^2} + \frac{32}{z'} + 24 + 8z' + z'^2$$

En substituant z'par $z - 2$ on trouve :

$f(z) = 16(z-2)^{-2} + 32(z-2)^{-1} + 24 + 8(z-2) + (z-2)^{-2}$

(MURRAY, 1987 : 157-158)

III.2. Série de Taylor

III.2.1 Séries de Taylor d'une fonction analytique

Soit f analytique sur le disque ouvert D (z_0, r), avec r > 0.

$\forall z \in D(z_0, r)$ On a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Avec $c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

Et avec γ un contour dans D (z_0, r) orienté positivement entourant z_0.

Ce développement (qui est unique) est appelé développement de Taylor de f autour de z_0.

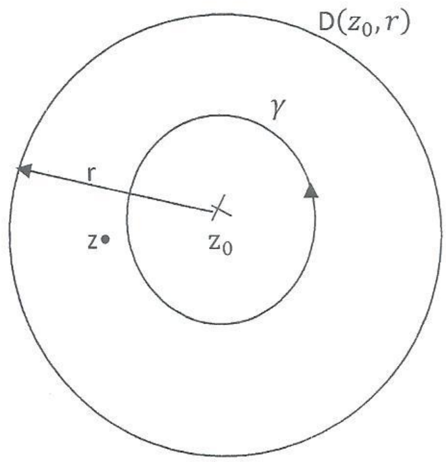

Figure 20 : le disque ouvert D (z_0, r) avec $r > 0$ et le contour γ

NB : γ n'a pas besoin d'entourer z.

Remarque

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Exemple

La fonction e^z est analytique dans tout le plan complexe (c'est une fonction entière). Elle a donc une représentation en série de Taylor autour de z $= 0$ valable pour tout z. Ici $f^{(n)}(z) = e^z$. Comme $f^{(n)}(0) = 1$, on a :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, |z| < \infty$$

Proposition 1

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine Ω et soit $z_0 \in \Omega$. Pour tout z appartenant au plus grand disque ouvert de centre z_0 contenu dans Ω, la série de Taylor $S(z) = \sum c_n$ est convergente et a pour somme $f(z)$.

Proposition 2

Si f est entière, alors la série de Taylor de f de centre $z_0 \in \mathbb{C}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\ (z - z_0)^n$ est convergente et a pour somme $f(z)$ pour tout z de $\mathbb{C}$.

(RAPHAEL, 2013 :18-18)

III.2.2. Zéro d'une fonction analytique

a. Définition

Soit f une fonction analytique dans un domaine Ω et non identiquement nulle sur Ω.

S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0)$=0, alors z_0 est un zéro de f. De plus, on dit que z_0 est un zéro d'ordre m $\in \mathbb{N}^*$ $si :\ \forall i \leq m-1, f^{(i)}(z_0) \neq 0$

b. Remarque

Si z_0 est un zéro d'ordre m, alors on peut mettre f sous la forme $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$, avec :

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \frac{f^{(m+k)}(z_0)}{(m+k)!}$$

La fonction h ainsi définie est analytique dans Ω et dérivable donc continue en z_0 et ne s'annule pas sur un voisinage de z_0.

c. Points isolés

Soit z et z' deux éléments de $\mathbb{C}$. On dit que ces deux points sont isolés s'il existe V et V' respectivement voisinage de z et z', tels que V∩V'=∅.

d. Théorème (théorème des zéros isolés)

Les zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle sont isolés.

e. Conséquence : prolongement analytique

Soit $f_1$et f_2 deux fonctions analytiques sur Ω et soit U un ouvert non vide de Ω. si ∀z ∈ U, $f_1(z) = f_2(z)$ alors $f_1 = f_2$ pour tout z ∈ Ω.

Cas particulier : si une fonction f analytique est nulle sur U alors elle st nulle sur Ω.

Remarque

Cette proposition reste vraie si U st un arc de courbe non réduit à un point. (RAPHAEL, 2013 :20).

III.3. Points singuliers

III.3.1. Définition

- Soit z_0 un point au voisinage du quel f n'est pas analytique, alors on dit que z_0 est un point singulier de f.
- z_0 un point singulier de f s'il existe un disque ouvert pointé (i.e privé de z_0) de centre z_0 et de rayon r > 0 dans lequel f est analytique, alors on dit que z_0 est un point singulier isolé.

a. Exemple et contre-exemple

1) $f: z \to \frac{1}{z-2}$, le point $z_0 = 2$ est un point singulier isolé
2) $f: z \to \frac{1}{sin\frac{1}{z}}$, le point $z_0 = 0$ est un point singulier non isolé

N.B : Dans tout ce qui suit, on va considérer les points singuliers isolés. Dans le cadre de cette hypothèse, si on prend f admettant un point singulier z_0, et que l'on considère sa série de Laurent associée autour de z_0, on a, en notant $b_n = c_{-n}$ et $a_n = c_n$;

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}}_{\text{Partie singulière}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

b. Définition

(1) Si tous les b_n sont nuls, la fonction est analytique dans D (z_0, r) et on dit que z_0 est une singularité apparente.

(2) Si les b_n sont tous nuls, i.e. s'il existe un b_m non nul tel que $b_n = 0$ pour tout $n > m$, alors z_0 est un pôle d'ordre m et : $\forall z \in$ D (z_0, r),

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots$$

Si m=1, on dit qu'on a un pôle simple.

(3) S'il existe une infinité de b_n non nuls, la singularité est dite essentielle (RAPHAEL, 2013 :22-23).

III.3.2. Classification des singularités

a. Pôles

$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ Avec z_0 un pôle d'ordre n.

Exemples

1) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3}$ est du pôle 1 d'ordre 3
2) $f(z) = \frac{1}{z^2+25}$

$$= \frac{1}{(z-5i)(z+5i)}$$

$5i$ *et* $-5i$ sont des pôles simples.

b. Singularité apparentes

$f(z_0)$ n'est pas définie en z_0 mais on peut chercher la limite qui existe en z_0.

Exemples

1) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ est une singularité apparente

2) $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$

$\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{z}=\frac{0}{0}$ (Forme indéterminée)

D'où, $\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}}{1}=1$ est une singularité apparente.

c. Singularités essentielles

Si une fonction $f(z)$ est analytique alors toute singularité qui n'est ni pôle, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle. Alors $\lim_{z\to z_0} f(z)$ n'existe pas.

Exemples

1) $f(z)=\frac{1}{e^{z^2}}$

Z = 0 est un point singulier essentiel car $\lim_{z\to 0}\frac{1}{e^{z^2}}=e^{+\infty}$

$=+\infty$ (la limite n'existe pas)

d. Meromorphe

Une fonction meromorphe est une fonction ne possédant pas d'autres singularités que des pôles. (MURRAY, 1987 :144-145).

III.4. Résidu en un point singulier isolé

III.4.1. Définition

Soit z_0 un point singulier isolé de f. Soit $\mathrm{D}(Z_0,r)$ un disque pointé ne contenant pas de point singulier de f.

$$\forall z\in \mathrm{D}(Z_0,r), f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

Le coefficient b_1 est appelé résidu de f en z_0 et est noté $Res(f,z_0)$. Alors, on a : $Res\,(f,z_0)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} f(z)dz$ où γ est un contour orienté positivement inclus dans $\mathrm{D}(z_0,r)$ et entourant z_0.

Remarque

Si $z_0$est une singularité apparente de f alors $Res(f, z_0) = 0$. (RAPHAEL, 2013 :24)

III.4.2. Partie principale d'une fonction

a. Définition

La partie de la série de Laurent qui contient des puissances négatives de z-a est appelé la partie principale de f en a.

Si tous les coefficients b_n de la partie principale de f en un point singulier isolé a sont nuls, le point a est appelé un point singulier éliminable de f. dan ce cas, la série de Laurent se réduit a une série entière. Le résidu en un point singulier éliminable est donc toujours nul. Si on définit f(z=a) comme égale au coefficient a_{-1}, la fonction devient analytique en a.

Si la partie principale de f en a contient au moins un terme non nul, mais que le nombre de termes qu'elle contient est fini, il existe un entier positif m tel que $b_m \neq 0$ et $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$. Autrement dit, le développement de Laurent prend la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-a)^m}, 0 < |z-a| < R_1 (5)$$

Dans ce cas, le point singulier isolé est appelé pôle d'ordre m. un pôle d'ordre 1 est appelé un pôle simple.

Lorsque z tend vers un pôle, $f(z)$ tend toujours vers l'infini.

b. Exemples

1) Soit la fonction $f(z) = \frac{e^{z-1}}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots, 0 < |z| < \infty$

Le point z=0 est un point singulier éliminable. Si l'on pose $f(0) = 1$, la fonction f devient entière.

2) La fonction $(z) = \frac{z^2-2z+3}{z-2} = z + \frac{3}{z-2}, 0 < |z-2| < \infty$, a un pôle simple en z=2. Le résidu en ce pôle est 3.
3) La fonction $\frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}z + \cdots, 0 < |z| < \infty$

$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6}\frac{1}{z} + \frac{1}{120}z + \cdots, 0 < |z| < \infty$

a un pôle d'ordre 3 à l'origine, avec le résidu $\frac{1}{6}$.

N.B : La méthode de base pour trouver le résidu d'une fonction en un point singulier isolé consiste à écrire la série de Laurent appropriée et à regarder quel est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$. (POTTIER, 2006 :64).

III.4.3. Calcul pratique de résidus

1. Si z_0 est un pôle simple $f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + g(z)$ où $g(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$ est une fonction analytique au voisinage de z_0 et nulle en z_0. On a donc :

$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = b_1$

D'où, $Res\ (f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

Exemples

Calculer les résidus des fonctions suivantes :

1) $f(z) = \frac{z}{z^2-4}$ en leurs pôles
2) $f(z) = \frac{2z+3}{z^2-1}$ en leurs pôles

Solution

On a : $z_0 = \pm 2$

$$\lim_{z\to 2}\frac{z}{z^2-4} = \frac{2}{0}$$

$$= \infty$$

$$\lim_{z\to-2}\frac{z}{z^2-4}=\frac{-2}{0}$$

$$=\infty$$

Pour $z_0=2$:

$$Res\ (f,z_0)=\lim_{z\to2}(z-2)\frac{z}{z^2-4}$$

$$=\lim_{z\to2}\frac{z^2-2z}{z^2-4}$$

$=\frac{0}{0}$ (Forme indéterminée)

$$\lim_{z\to2}\frac{z^2-2z}{z^2-4}=\lim_{z\to2}\frac{z(z-2)}{(z-2)(z+2)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

D'où, $Res\ (f,2)=\frac{1}{2}$

Pour $z_0=-2$

$$Res\ (f,-2)=\lim_{z\to2}(z+2).\frac{z}{z^2-4}$$

$$=\lim_{z\to2}\frac{z^2+2z}{z^2-4}$$

$=\frac{0}{0}$ (Forme indéterminée)

$$Res\ (f,-2)=\lim_{z\to-2}\frac{z^2+2z}{z^2-4}$$

$$=\frac{z(z+2)}{(z-2)(z+2)}$$

$$=\frac{-2}{-4}$$

$$=\frac{1}{2}$$

2) $f(z)=\frac{2z+3}{z^2-1}$

On a : $z_0=\pm 1$

Pour $z_0=1$, on a :

$$\lim_{z\to 1}\frac{2z+3}{z^2-1}=\frac{5}{0}$$

$=\infty$

$Res\ (f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{(2z+3)}{(z^2-1)}=\frac{0}{0}$ (Forme indéterminée)

$$Res\ (f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{(2z+3)}{z^2-1}$$

$$Res\ (f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{(2z+3)}{(z-1)(z+1)}$$

$$=\frac{5}{2}$$

Pour $z_0=1$, on a :

$$\lim_{z\to 1}\frac{2z+3}{z^2-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$Res\ (f,-1)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{(2z+3)}{(z-1)(z+1)}$$

$$=\lim_{z\to -1}\frac{-2+3}{-1-1}$$

$$=\frac{-1}{2}$$

2. Si $z_0$est un pôle d'ordre k :

$$\boxed{Res\ (f,z_0)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\ [(z-z_0)^k f(z)]}$$

En pratique il vaut mieux calculer directement le développement pour des pôles d'ordres élevés.

Exemples

Calculer les résidus des fonctions suivantes :

1) $f(z) = \frac{z}{(z-2)^2(z+1)}$ au point 2
2) $f(z) = \frac{e^{tz}}{(z-4)^2}$ au point 4

Solution

1) K=2, $z_0 = 2$

$$Res\ (f,2) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\ (z-2)^2 \frac{z}{(z-2)^2(z+1)}$$

$= \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz} \frac{z}{z+1}$

$= \lim_{z\to 2} \frac{1.(z+1)-1.z}{(z+1)^2} \frac{z}{z+1}$

$$= \lim_{z\to 2} \frac{z-z+1}{(z+1)^2}$$

$$= \frac{1}{9}$$

2) $Res\ (f,4) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 4} \frac{d}{dz}\ (z-4)^2 \frac{e^{tz}}{(z-4)^2}$

$$= \lim_{z\to 4} \frac{d}{dz}\ e^{tz}$$

$$= \lim_{z\to 4} te^{tz}$$

$= te^{4t}$

3) $z_0$est un point isolé essentiel :

$Res(f, z_0)$ est le coefficient du premier terme de la deuxième partie du développement en série de Laurent a_{-1}.   (MURRAY, 1987 :172-173)

Exemples

Calculer les résidus des fonctions en ses points singuliers :

1) $f(z) = (z-2)e^{\frac{1}{z-2}}$ 2) $f(z) = \ e^{\frac{-1}{e^2}}$

Solution

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$

$z_0 = 2$

$$e^{\frac{1}{z-2}} = 1 + \frac{1}{z-2} + \frac{\left(\frac{1}{z-2}\right)^2}{2} + \cdots + \frac{\left(\frac{1}{z-2}\right)^n}{n!}$$

$$(z-2)e^{\frac{-1}{z-2}} = (z-2) + \frac{z-2}{z-2} + (z-2).\frac{1}{(z-2)^2}.\frac{1}{2} + (z-2).\frac{1}{(z-2)^3}.\frac{1}{6} + \cdots$$

$$= (z-2) + 1 + \frac{1}{2}\ \frac{1}{(z-2)} + \frac{1}{6}\ \frac{1}{(z-2)^2} + \ldots$$

Nous constatons que le coefficient de $\frac{1}{(z-2)}$ est $\frac{1}{2}$

Donc, $Res(f, 2) = \frac{1}{2}$

2) $f(z) = e^{\frac{-1}{z^2}}$

$$= 1 + \left(\frac{-1}{z^2}\right) + \frac{\left(\frac{-1}{z^2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{-1}{z^2}\right)^3}{3!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} - \frac{1}{6z^6} + \cdots$$

Le coefficient du premier terme de la deuxième partie du développement en série de Laurent n'existe pas.

D'où, $Res(f, 0) = 0$

Proposition 1

Soit $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ avec g une fonction analytique au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$.

On a : $Res(f, z_0) = g(z_0)$

Proposition 2

Soit $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ avec g et h deux fonctions analytiques au voisinage de z_0 et telles que $g(z_0) \neq 0$ *et* z_0 est un pôle simple de f. on a alors :

$Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

Exemple

Calculer les résidus des fonctions suivantes :

1) $f(z) = \frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}$ 2) $f(z) = \frac{z}{z^2-4}$

Solution

1) *si* $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ avec g une fonction analytique au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$.

On a : $Res\,(f, z_0) = g(z_0)$

Donc, $Res\,\left(f, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1}$

$= 1$

2) *si* $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ avec g et h deux fonctions analytiques au voisinage de z_0 et telles que $g(z_0)$ et z_0 est un zéro simple de h. On a alors :

$Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

Alors, $f(z) = \frac{z}{z^{2-4}}$

$= \dfrac{z}{(z-2)(z+2)}$

Pour $z_0 = 2,$ on a :

$[(z-2)(z+2)]' = 2z$
D'où, $Res(f, 2) = \frac{2}{2{,}2}$

$= \frac{1}{2}$

Pour $z_0 = -2,$ on a :

$[(z-2)(z+2)]' = 2z$

D'où, $Res(f, -2) = \frac{2}{2(-2)}$

$= \frac{1}{2}$

III.4.4. Théorème des résidus

Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit $(z_1, \dots, z_n)$un nombre fini de point de Ω isolés et distincts.

Soit de plus f *une fonction* analytique dans $\Omega \backslash (z_1, \dots, z_n)$. Si on prend γ un contour contenu dans Ω et entourant les z_i, i ∈ $[1,\ n]$, sans rencontrer ces points, et orienté positivement, alors :

$\int_\gamma f(z) = 2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} Res\,(f, z_k)$ (RAPHAEL, 2013 :24)

III.5. Calculs de certaines intégrales

III.5.1. Calculs des intégrales du type $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(z)dx}$

Soit $f(z)$, une fonction analytique (rationnelle) située dans le demi-plan supérieur, y compris l'axe réel sauf en un nombre fini des points singuliers $z_i(i = 1, \dots, k)$

Soit R un réel tel que ce demi-cercle $z = Re^{iz}$, $0 \leq t \leq \pi$ contiennent tous les $z_i(i = 1, \dots, k)$ et m, un réel tel que $\|f(z)\| < \frac{M}{\|z\|^m}$ pour $\|z\| > R$.

Alors, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} Res(f, z_i)$

III.5.2. Calcul des intégrales du type $\int_0^{2\pi} f(cos\theta, sin\theta)d\theta$

Soit à intégrer la fonction $f(cos\theta, sin\theta)$ où f est une fonction rationnelle le long du cercle unité $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$ (centré à l'origine où $\Gamma = \{z: [z] = 1\}$ où la courbe est traversée dans le sens positif et a pour équation $z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

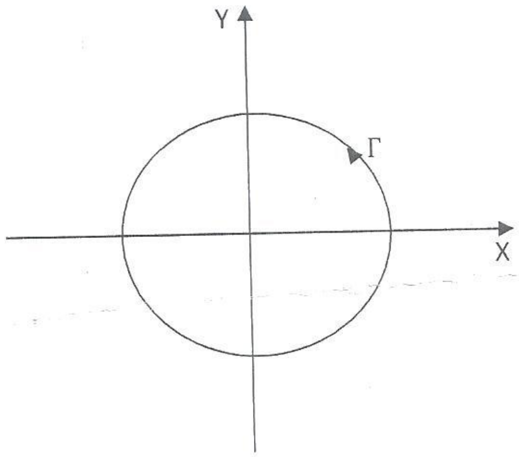

Figure 21 : Le cercle unité $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$ (centré à l'origine où $\Gamma = \{z: |z| = 1\}$

L'intégrale $\int_0^{2\pi} f(cos\,\theta, \sin\theta)\, d\theta$ prend la forme $\int_\Gamma f(z)dz$. On détermine les résidus de f en ses points singuliers isolés z_i puis on obtient :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f(cos\,\theta, \sin\theta)\, d\theta = \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res\,(f, z_j)}$$

Exemple

Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-3\cos\theta}$

Solution

Nous savons que $x^2 + y^2 = 1$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Si on pose $z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta \Leftrightarrow d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}}$$

$$= \frac{dz}{iz}$$

On sait que $cos\ \theta = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$I = \int_\Gamma \frac{dz}{iz\left[5 - \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]}$$

$$= \int_\Gamma \frac{dz}{i\left(\frac{-3}{2}z^2 + 5z - \frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{dz}{\frac{-3}{2}z^2 + 5z - \frac{3}{2}}$$

On a :

$$\frac{-3}{2}z^2 + 5z - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -3z^2 + 10z - 3 = 0$$
$$\Delta = 10^2 - 4(-3)(-3)$$
$$= 100 - 36$$
$$= 64$$
$$z_2 = \frac{-10 + 8}{-6}$$

$= \frac{1}{3}$

$$z_2 = \frac{-10-8}{-6}$$

$= 3$ (à rejeter) car $|z| = 1{,}3$ est en dehors du cercle Γ

Pôle z $= \frac{1}{3}$, k=1

$$= \frac{1}{i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{\frac{-3}{2}\left(z - \frac{1}{3}\right)(z-3)}$$

$$Res\left(f, \frac{1}{3}\right) = \lim_{z \to \frac{1}{3}} \left(z - \frac{1}{3}\right) \frac{-2}{3\left(z - \frac{1}{3}\right)(z-3)}$$

$$= \frac{-2}{3\left(\frac{1}{3} - 3\right)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Or $I = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f, z)$

$= 2\pi i\ \frac{1}{i} . \frac{1}{4}$

$= \frac{\pi}{2}$

1. Lemme

Soit $\gamma = \{z = x + iy : |z| = r, r > 0\}$ et soit f une fonction rationnelle continue sur γ. Si $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ avec k > 1 et M > 0 qui sont des constantes, alors $\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma} e^{imz} f(z) dz = 0$ pour une constante m et la courbe γ est traversé e dans le sens positif.

2. Théorème

Soit $D = \{z = x + iy : y > 0\}$ le demi-plan supérieur et supposons que $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ est une fonction analytique dans D à l'exception des pôles dans D où $p(x) et\ q(x)$ sont des polynômes.

Si le degré de q est supérieur à p alors :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{imz}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\, h(z)$ (MURRAY, 1987 :173-184)
Où $h(z) = f(z)e^{imz}, m > 0$

Exemples

1) Calculer $\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{e^{2iz}}{z^2+9} dz$

$f(z) = \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{e^{2iz}}{z^2+9}\, dz$ la fonction $f(x)$ a deux pôles simples aux points $z = 3i$ et $z = -3i$. Seul $z = 3i$ est à l'intérieur dans le demi-plan supérieur car $3 > 0$.

$$Res\,(f, 3i) = \frac{p(3i)}{q'(3i)}$$
$$= \frac{e^{2i.3i}}{2.3i}$$
$$= \frac{e^{-6}}{6i}$$

D'où $\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{e^{2iz}}{z^2+9} dz = 2\pi i\, \frac{e^{-6}}{6i}$
$= \frac{\pi e^{-6}}{3}$

Remarques

De l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+9}\, dx$, on peut déduire les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+9}\, dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+9} dx$ car $\frac{e^{2ix}}{x^2+9} = \frac{\cos 2x + i \sin 2x}{x^2+9}$

2. Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5} dx$

Solution

La fonction $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+5}$ satisfait les conditions de théorème précédent.

$h(z) = f(z)e^{i\pi z}$

$\frac{z}{z^2+2z+5} e^{i\pi z}$

$z^2 + 2z + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 4.1.5$
$= -16$
$z_1 = \dfrac{-2+4i}{2}$
$= -1 + 2i$
$z_2 = \dfrac{-2-4i}{2}$
$= -1 - 2i$

Seul $z = -1 + 2i$ est dans le demi-plan supérieur $D = \{z = x + iy : y > 0\}$ car $2 > 0$. Ensuite si on choisit $R = |z|$ suffisament grand (exemple $|z| = 3$). On aura : $z = -1 + 2i \in Im\,(V)$ où $V = a + i\beta$

$$Res(f, -1+2i) = \frac{p(-1+2i)}{q(-1+2i)}$$

$$= \frac{(-1+2i)e^{i\pi(-1+2i)}}{2(-1+2i)+2}$$

$$= \frac{(-1+2i)e^{-i\pi-2\pi}}{4i}$$

$Res(f, -1+2i) = (-1+2i)\frac{e^{-i\pi-2\pi}}{4i}$ or $e^{-i\pi} = \cos\pi - i\sin\pi$

$$= -1 - 0$$

$$= -1$$

$$Res(f, -1+2i) = (-1+2i)\left(-\frac{e^{-2\pi}}{4i}\right)$$

$$= \frac{e^{-2\pi}}{4i} - \frac{e^{-2\pi}}{2}$$

D'où, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin \pi x}{x^2+2x+5} e^{i\pi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos \pi x + ix\sin \pi x}{x^2+2x+5} dx$

$$= 2\pi\left(\frac{e^{-2\pi}}{4i} - \frac{e^{-2\pi}}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi e^{-2\pi}}{2} - i\pi e^{-2\pi}$$

Donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,cos\pi x}{x^2+2x+5} dx + i\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xsin\ \pi x}{x^2+2x+5}\ dx = \frac{\pi e^{-2\pi}}{2} - i\pi e^{-2\pi}$

On déduit : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5} dx = -\pi e^{-2\pi}$

CHAPITRE IV : TRANSFORMATION DE LAPLACE

IV.1. Intégrales impropres

IV.1.1. Définition

On appelle intégrale impropre, toute intégrale à bornes infinies.

IV.1.2. Calcul des intégrales impropres

1. $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_0^k f(x)dx$

2. $\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \lim_{k\to-\infty} \int_k^0 f(x)dx$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{-\infty} f(x)dx$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)dx$$

Il est à noter que lorsqu'une intégrale impropre donne une valeur m finie alors on dit qu'elle converge vers m. dans le cas contraire, on dit qu'elle diverge.

Exemples :

Soit à étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

1) $I = \int_{-\infty}^{3} \frac{dx}{x^2}$

2) $J = \int_{-\infty}^{3} \frac{dx}{x+3}$

Résolution

1) $I = \int_{-\infty}^{3} \frac{dx}{x^2} = \lim_{k \to -\infty} \int_{k}^{3} x^2\, dx$

$$= \lim_{k \to -\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{k}^{3}$$
$$= \lim_{k \to -\infty} \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{k}\right]$$
$$= -\frac{1}{3}$$

Donc I converge vers $-\frac{1}{3}$

2) $J = \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x+3} = \lim_{a \to +\infty} \int_{2}^{a} \frac{dx}{x+3}$

$$= \lim_{a \to +\infty} [ln\,(x+3)]_{2}^{a}$$
$$= \lim_{a \to +\infty} [ln\,|a+3| - ln\,5]$$
$$= +\infty$$

Donc J diverge

IV.2. transformation de Laplace

Dans ce paragraphe, on considère la fonction f(t) d'une variable réelle t, définie sur $[0, +\infty[$. On admettra parfois que f(t) = 0

$sur\ ]-\infty, 0[$

IV.2.1. Définition

On appelle transformée de Laplace de la fonction *f(t),* la fonction *F(p)* définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\ dt$$

- La fonction $F(p)$ s'appelle transformée de Laplace ou L-transformée ou encore image de la fonction $f(t)$
- La fonction $f(t)$ s'appelle original de la fonction $F(p)$.

Il est à noter que la transformation de Laplace est une opération linéaire, c'est-à-dire.

$\forall\, \alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R}, \forall\, f, g$ des fonctions admettant des transformées de Laplace F et G, on aura :

$$\int_0^{+\infty} [\alpha\, f(t) +\ \beta\ g\ (t)]\quad e^{-\,pt}\, dt = \int_0^{+\infty} \alpha\, f(t)e^{-pt}\, dt + \int_0^{+\infty} \beta\ g\ (t)e^{-\,pt}\, dt$$

$$= \alpha \int_0^{+\infty} f(x)e^{-\,p\,t} dt +\ \beta \int_0^{+\infty} g(t)e^{-\,p\,t} dt$$

$$= \alpha. F\ (p) +\ \beta\ G\ (p)$$

IV.2.2. Notations

Si F est la transformée de Laplace de f, alors on note : $F(p) = \mathcal{L}[\ f\ (t)]$

La transformée inverse de Laplace de $F(p)$ est définie par la formule :

$\mathcal{L}^{-1}[F\ (p)] = f(t)$ avec $\mathcal{L}^{-1}[F\ (p)] = F\ (p)$

IV.3. Transformations des quelques fonctions

IV.3.1. Fonction échelon unité de Heaviside

Cette fonction est définie par : $H\ (t) = \begin{cases} 1\ si\ t\ \geq 0 \\ 0\ si\ t\ < 0 \end{cases}$

Sa transformée de Laplace est :

$$\int_0^{+\infty} H\,(t)e^{-p\,t}\,dt = \int_0^{+\infty} 1.\,e^{-pt}\,dt$$
$$= \left[-\frac{1}{p}\,e^{-pt}\right]_0^{+\infty}$$
$$= -\frac{1}{p}\left[\frac{1}{e^{+\infty}} - 1\right]$$
$$= \frac{1}{p}$$

IV.3.2. Fonction exponentielle e^{at}

L'image de cette fonction est :

$$\int_0^{+\infty} e^{-p\,t}.\,e^{at}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-p\,t}.\,e^{at}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}\,dt$$
$$= \left[-\frac{1}{p-a}\,e^{-(p-a)t})\right]_0^{+\infty}$$
$$= -\frac{1}{p-a}\,(0-1)$$
$$= \frac{1}{p-a}$$ D'où $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}$

IV.3.3. Fonction identité t

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^{+\infty} te^{-pt}\,dt$$

Après intégration par parties, on a :

$$\int_0^{+\infty} te^{-pt}\,dt = \left[\frac{e^{-pt}}{p^2}\,(-p\,t-1)\right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{p^2}$$

D'où $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{p^2}$

En général, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$

IV.3.4. Fonction sinus : *$sinat$*

On sait que $sinat = \frac{e^{ait} - e^{-ait}}{2i}$ (d'après Euler)

D'où la transformée de Laplace de sinat est :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\ sinat\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\frac{e^{ait} - \ e^{-ait}}{2i}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{(ia-p)t}\, dt - \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{-(\,ia+p)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{ai-p} e^{(ai-p)\,t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{ai+p} e^{-(ai+p)t}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{ai-p}\right)(0-1) + \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{ai+p}\right)(0-1)$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{-1}{ai-p} - \frac{1}{ai+p}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{2\,ai}{p^2 + \ a^2}$$

$$= \frac{a}{p^2 + \ a^2}$$

D'où $\mathcal{L}[sinat] = \frac{a}{p^2 + a^2}$

Si $a = 1$; $\mathcal{L}[sint] = \frac{1}{p^2+1}$

IV.3.5. fonction cosinus : *$cosat$*

On sait que $cosat = \frac{e^{ait} + e^{-ait}}{2}$(d'après Euler)

D'où la transformée de Laplace de $cosat$ est :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, cosat\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\frac{e^{ait} \ + \ e^{-ait}}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(p-ai)\,t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(p+ai)\,t}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{p-ai}\ e^{-(p-ai)t}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+ai}\ e^{-(p+ai)t}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p-ai}\right)(0-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+ai}\right)(0-1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-ai} + \frac{1}{p+ai}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\,p}{p^2+a^2}\right]$$

$$= \frac{p}{p^2+a^2}$$

D'où $\mathcal{L}[cosat] = \frac{p}{p^2+a^2}$

Si $a = 1$; $\mathcal{L}[cost] = \frac{p}{p^2+1}$

IV.3.6. Fonction sinus hyperbolique : Shat

Par définition, on a : $Shat\ :\ \frac{e^{at}-e^{\ -at}}{2}$, on aura

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,shat\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{at}\,e^{-pt}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}dt - \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}dt\right]$$

$$= -\frac{1}{2(p-a)}\left[e^{-(p-a)t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2(p+a)}\left[e^{-(p+a)t}\right]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{2(p-a)}(0-1) + \frac{1}{2\,(p+a)}\,(0-1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{p^2-a^2}\right)$$

$$= \frac{a}{p^2 - a^2}$$

D'où $\mathcal{L}[shat] = \frac{a}{p^2-a^2}$

Si $a = 1, \mathcal{L}[shat] = \frac{1}{p^2-1}$

IV.3.7. Fonction cosinus hyperbolique : Chat

Par définition, on a :

$\text{Chat} = \dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}$, on aura

$$\mathcal{L}[Chat] = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{at}dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty} \bar{e}^{(p-a)t}dt + \int_0^{+\infty} \bar{e}^{(p+a)t}dt\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\ \frac{1}{p-a}\ \left[\bar{e}^{(p-a)t}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{p+a}\left[\bar{e}^{(p-a)t}\right]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{2(p-a)}\ (0-1) - \frac{1}{2(p+a)}\ (0-1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a}\right]$$

$$= \frac{p}{p^2 - a^2}$$

d'où $\mathcal{L}[(chat)] = \dfrac{p}{p^2 - a^2}$

$Si \quad a = 1, \mathcal{L}[\text{Cht}] = \dfrac{p}{p^2 - 1}$

IV.4. Quelques propriétés

IV.4.1. Théorème de l'homothétie.

Soit f une fonction admettant F(p) comme transformée de Laplace et α un réel non nul. On a :

$$\mathcal{L}[f(\alpha t)] = \frac{F\left(\frac{p}{\alpha}\right)}{\alpha}$$

IV.4.2. Théorème du retard

Soit f une fonction admettant F(p) comme transformée de Laplace et a_0 un réel non nul. On a :

$$\mathcal{L}[f(t - a_0)] = e^{-a_0 p}\, F(p)$$

IV.4.3. Translation de l'image

Soit f une fonction admettant $F(p)$ comme transformée de Laplace et a un réel non nul. On a :

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(p - a)$$

IV.5. Quelques résultats importants

IV.5.1. Dérivée de l'image

Soit une fonction $f(t)$ telle que $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$,

$On\ a :\ \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n}} F(p)}{\mathrm{dp}^{\mathrm{n}}} = (-1)\, \mathcal{L}[t^n\, f(t)]$

La relation ci-dessus nous permet de trouver l'image de $t^n f(t)$ d'où, on a aussi :

$\mathcal{L}[t^n\, f(t)] = (-1)^n\, \frac{d^n\, F(p)}{dp^n}$

Exemple

Soit à déterminer l'image de la fonction tcosat.

Résolution

$$\mathcal{L}[\text{tcosat}] = (-1)^1 \frac{d\,F(p)}{dp}$$

$$= -\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)'$$

$$= -\frac{p^2+a^2-2p^2}{(p^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$$

Donc $\mathcal{L}[tcosat] = \dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$

IV.5.2. L'image des dérivées

Soit une fonction $f(t)$ elle $\mathcal{L}[f(t)] = \text{F(p)}$,

On a :

$\mathcal{L}[f'(t)] = \text{p F}(p) - f(0)$, Image de la dérivée première

Par analogie on peut trouver l'image de $f''(t)$ comme ceci :

$\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$

$\mathcal{L}[f'(t)] = p\ \text{F}(p) - f(0)$

$\mathcal{L}[f''(t)] = p[pF(p) - f(0)] - f'(0)$

$\quad = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$

L'image de la dérivée troisième sera :

$\mathcal{L}[f'''(t)] = p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0)$

En général, l'image de la dérivée d'ordre n est déterminée par la relation ci-après :

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f^1(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

IV.5.3. L'image des dérivées partielles

Théorème

Soit la fonction $u(x,y) definie\ pour\ \ a \leq y \leq b, x > 0$

Alors on a :

$(i)\quad \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = pU(x,y) - U(x,o)$

$(ii)\quad \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{du}{dy}$

Démonstration

(i) En intégrant par parties, il vient

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{\partial u}{\partial x}\ dt$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\int_0^{k} e^{-pt}\frac{\partial u}{\partial x}\ dt$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\left\{e^{-pt}u(x,y)\Big|_0^{p} + p\int_0^{p} e^{-pt}\ u(x,y)\ dt\right\}$$

$$= p\int_0^{+\infty} e^{-pt}\ u(x,y)\ dt - U(x,o)$$

$$= p\ u(x,p) - U(x,o)$$

$$= p\ U(x,y) - U(x,o)$$

Où $u(x,p) = \mathcal{L}[U\ (x,y)]$

(ii) En appliquant la règle de Leibnitz, de dérivation sous le signe intégral, on obtient :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{\partial u}{\partial y}\ dt$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\ udt = \frac{du}{dx}$$

D'après le théorème du point (I.5.3), On a :

$(i)\ \ \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = \ p^2u(x,p) - pU(x,o) - U_x(x,o)$

$(ii)\ \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = \frac{d^2u}{dy^2}$

IV.6. Intégration de l'original

L'intégration de l'original se ramène à une division de l'image par p. c'est-à-dire, si $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$

On a : $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}$ $\qquad (*)$

Démonstration

Posons $\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt$

Il est immédiat de vérifier que si $f(t)$ est un original, il en est de même de $\varphi(t)$ et de plus $\varphi(0) = 0$. Soit

$\mathcal{L}[\varphi(t)] = \Phi(p)$. En vertu de (I.5.2.)

$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\varphi'(t)] = p\Phi(p) - \varphi(0) = p\phi(p)$

De sorte que $\mathcal{L}[f(t)] = p\Phi(p)$. D'autre part,

$\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, d'où $\mathrm{F}(p) = p\Phi(p)$. C'est – à – dire

$\Phi(p) = \frac{\mathrm{F}(p)}{p}$. Ce qui équivaut à la relation $(*)$

Exemple

Soit à déterminer l'image de la fonction

$$\Psi(t) = \int_o^t sint\ dt$$

Solution

$On\ a\ f(t) = sint, donc\ \ F(p) = \frac{1}{p^2+1}$, et par suite

$$\mathcal{L}\left[\int_o^t sint\ dt\right] = \frac{1}{p^3+p}$$

IV.7. Intégration de l'image

Si l'intégrale $\int_p^{\infty} F(p)dp$ Converge, elle est l'image de la fonction

$\frac{f(t)}{t}$. C'est – à – dire

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{\infty} F(p)dp$$

En effet, $\int_p^{\infty} F(p)\ dp = \int_p^{\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right)$ dp

Si l'on admet que le contour d'intégration (p,∞) est situé dans le demi-plan $\mathrm{Re}(p) \geq a > S_0$, on peut intervertir l'ordre d'intégration.

$(t > 0)$:

$$\begin{aligned}\int_p^{\infty} F(p)dp &= \int_p^{\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}dt\right)dp\\ &= \int_0^{+\infty} f(t)\left(\int_p^{\infty} e^{-pt}dt\right)dp\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dp\end{aligned}$$

La dernière égalité exprime que $\int_p^{\infty} F(p)dp$ est l'image de $\frac{f(t)}{t}$

Exemple :

Soit à déterminer l'image de la fonction $\frac{\sin t}{t}$

Son sait que $\mathcal{L}[sint] = \frac{1}{p^2+1}$

Donc $\mathcal{L}\left[\frac{sint}{t}\right] = \int_p^\infty \frac{dp}{p^2+1} = [arctgp]_p^\infty$

$$= \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\, p$$

$$= arc\ Cotg\ p.$$

IV.8. Fonctions spéciales

IV.8.1. Fonction Gamma

Si $n > 0$, nous définissons la fonction Gamma ou fonction eulérienne de deuxième espèce par la formule.

$$\Gamma(\mathrm{n}) = \int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}du$$

Cette fonction possède les importantes propriétés suivantes :

(i) $\Gamma(\mathrm{n}+1) = \mathrm{n}\ \Gamma(\mathrm{n}), \mathrm{n} > 0$

Ainsi puisque $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2! = 2, \Gamma(4) = 3!$ et, en général, $\Gamma(\mathrm{n}+1) = \mathrm{n}!$, si n est un entier positif. C'est la raison pour laquelle cette fonction est quelquefois appelée fonction factorielle.

(ii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$(3i)$ $\Gamma(p).\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{sin\ p\ \pi}, 0 < p < 1.$

$(4i)$ Pour $\mathrm{n} < 0$, on a $\Gamma(\mathrm{n}) = \frac{\Gamma(\mathrm{n}+1)}{\mathrm{n}}$

$(5i)$ $\mathcal{L}[t^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}, \mathrm{n} \in \mathbb{R}, \mathrm{n} > 1$

IV.8.2. Fonction Bêta

Si $m > 0, n > 0$, nous définissons la fonction Bêta ou fonction eulérienne de première espèce comme

$$\beta(m,n) = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\, d\mathrm{u}$$

Nous pouvons établir les propriétés suivantes :

$(i)\ \ \beta(m,n) = \dfrac{\Gamma(\mathrm{m}).\Gamma(\mathrm{n})}{\Gamma(\mathrm{m}+\mathrm{n})}$

$(ii)\ \ \displaystyle\int_0^{\pi/2} sin^{2m-1}\theta Cos^{2n-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\beta(\mathrm{m},\mathrm{n}) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(\mathrm{m}+\mathrm{n})}$

IV.8.3. Fonction de Bessel.

On appelle fonction de Bessel d'ordre n, la fonction $\mathrm{J_n}(t)$ définie par la relation.

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\}$$

dont voici quelques propriétés importantes.

$(i)\ \ \mathrm{J_{-n}}(t) = (-1)^n J_n(t)\ si\ n$ est un entier positif

$(ii)\ J_{n+1}(t) = \dfrac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t)$

$(3i)\ \ \dfrac{d}{dt}\left(t^n J_n(t)\right) = t^n\, J_{n-1}(t).\ \ si\ n = 0,$ nous avons

$J_0'(t) = -J_1(t)$

$(4i)\ \ e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u-1}{u}\right)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)u^n$ qu$i$ est appelée fonction génératrice

des fonction de Bessel

$(5i)\ \ J_n(t)$ satisfait l'équation différentieelle de Bessel,

$t^2\, y''(t) + ty'(t) + (t^2 - n^2)y(t) = 0$

IV.8.4. Fonction erreur

La fonction erreur est définie par

$$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2}\, du$$

IV.8.5. Fonction Sinus et Cosinus intégraux

Les fonctions sinus et cosinus intégraux sont définis par

$$Si(t) = \int_0^t \frac{sinu}{u}\, du$$

$$Ci(t) = \int_t^\infty \frac{cosu}{u}\, du$$

IV.8.6. Fonction exponentielle intégrale

$$E\ i(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

IV.9. Transformées de Laplace de fonctions spéciales

Dans la table suivante, nous avons dressé une liste de transformées de Laplace de diverses fonctions spéciales remarquables.

N°	Fonctions	Images
1	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$
2	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}$
3	$J_n(at)$	$\frac{\left(\sqrt{p^2+a^2}-p\right)^n}{a^n\sqrt{p^2+a^2}}$
4	$Sin\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}\ e^{-1/4p}$
5	$\frac{Cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}\ \ e^{-1/4p}$
6	$erf(t)$	$\frac{e^{p2/4}}{8}\ \mathrm{erf}\,c\ (p/2)$

7	$\operatorname{erf}(\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{p\sqrt{p+1}}$
8	$Si(t)$	$\dfrac{1}{p}\ cotg\ \dfrac{1}{p}$
9	Ci (t)	$\dfrac{ln(p^2+1)}{2p}$
10	$Ei(t)$	$\dfrac{ln(p+1)}{p}$

IV.10. Table de transformées de Laplace de quelques fonctions élémentaires

N°	Fonctions	Images
1	1	$\dfrac{1}{p}$
2	t	$\dfrac{1}{p^2}$
3	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
4	e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$
5	$Sinat$	$\dfrac{a}{p^2+p^2}$
6	$Cosat$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$
7	$Shat$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
8	$Chat$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$
9	$\dfrac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$	$\dfrac{1}{(p-a)^n}$
10	$Cosat-\dfrac{1}{2}\ at\ sinat$	$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$
11	$tcosat$	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
12	$tsinat$	$\dfrac{2p}{(p^2+a^2)^2}$
13	$\dfrac{e^{bt}\sin at}{a}$	$\dfrac{1}{(p-b)^2+a^2}$

14	$e^{bt}\ cosat$	$\frac{p-b}{(p-b)^2+a^2}$
15	$\frac{Shat}{a}$	$\frac{1}{p^2-a^2}$

IV.11. APPLICATION DES TRANSFORMEES DE LAPLACE A LA RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

IV.11.1. Equations différentielles ordinaires à coefficients

La transformation de Laplace est utile pour résolution des équations différentielles ordinaire à coefficients constants. Supposons, par exemple, que nous désirions résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre,

$$y'' + \alpha y' + \beta y = f(t) \qquad (i)$$

Où $\alpha\ et\ \beta$ sont des constantes données. En prenant la transformée de Laplace des deux membres de (i) et en appliquant (ii), nous obtenons une équation algébrique qui détermine $\mathcal{L}[y(t)] = y(p)$. La solution cherchée est alors obtenue en prenant la transformée de Laplace inverse de y(p). La méthode peut être aisément étendue à des équations différentielles d'ordre plus élevé.

IV.11.2. Equation différentielles ordinaires à coefficients variables.

La méthode de la transformée de Laplace peut également être utilise pour résoudre certaines équation différentielles ordinaires dont les coefficients sont variables. Cette méthode est particulièrement puissante dans le cas d'équations différentielles que type.

$$t^m y^{(n)}(t)$$

dont la transformée de Laplace et

$$(-1)^m \frac{d^m}{dp^m} \mathcal{L}\left[y^{(n)}(t)\right]$$

IV.11.3. Equations aux drivées partielles

La transformation de Laplace est un outil commode pour la résolution de diverses équations aux drivées partielles soumise à des conditions aux limites. De tels problèmes sont souvent désignes sous le nom de problèmes de valeurs aux limites.

IV.12. Exemples

IV.12.1. Equations différentielles ordinaires à coefficients constants

Soit à intégrer les équations suivantes

1) $y'' + y = t, \quad y(\mathrm{o}) = 1, \quad y'(\mathrm{o}) = -2$
2) $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t, \quad y(o) = 1, y'(o) = 0, \quad y''(o) = -2$

Résolution

1) En prenant les transformées de Laplace des deux membres de l'équation différentielle et en tenant compte des conditions données, il vient

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[t]$$

$$p^2\mathcal{L}[y] - py(o) - y'(o) + \mathcal{L}[y] = \frac{1}{p^2}$$

$$p^2\mathcal{L}[y] - p + 2 + \mathcal{L}[y] = \frac{1}{p^2}$$

$$\mathcal{L}[y](p^2 + 1) - p + 2 = \frac{1}{p^2}$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{p^2(p^2+1)} + \frac{p-2}{p^2+1}$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{2}{p^2+1}$$

$$= \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1}$$

et la solution cherchée est

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1}\right\} = t + Cost - 3Sint$$

2) Nous avons $\mathcal{L}[y'''] - 3\mathcal{L}[y''] + 3\mathcal{L}[y'] - \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[t^2e^t]$

$$p^3\mathcal{L}[y] - p^2y(o) - py'(o) - y''(o) - 3\big(p^2\mathcal{L}[y] - py(o) - y'(o)\big) +$$

$$3(p\mathcal{L}[y] - y(o)) - \mathcal{L}[y] = \frac{2}{(p-1)^3}$$

Et alors $\quad (p^3 - 3p^2 + 3p - 1)\mathcal{L}[y] - p^2 + 3\text{p} - 1 = \dfrac{2}{(p-1)^3}$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{p^2 - 3p + 1}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p-1)^6}$$

$$= \frac{p^2 - 2p + 1 - p}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p-1)^6}$$

$$= \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p-1)^6}$$

et $y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{(p-1)^2} - \dfrac{1}{(p-1)^3} + \dfrac{2}{(p-1)^6}\right\}$

$$= e^t - te^t - \frac{t^2e^t}{2} + \frac{t^5e^t}{60}$$

IV.12.2. Equations différentielles ordinaires à coefficients variables

Soit à résoudre les équations suivantes

1) $\text{t}y'' + y' + 4\text{t}y = 0, \qquad y(o) = 3,\ y'(o) = 0$
2) $y'' - \text{t}y' + y = 1, \quad y(o) = 1, \qquad y'(o) = 2$

Résolution

1) Nous avons

$$\mathcal{L}[ty''] + \mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[4ty] = 0$$

Ou $-\dfrac{d}{dp}\big(p^2y - py(o) - y'(o) + py - y\,(o)\big) - 4\dfrac{dy}{dp} = 0$

C’est –à-dire

$(p2+4)\dfrac{dy}{dp}+py=0$

D'où $\dfrac{dy}{y}+\dfrac{pdp}{p^2+4}=0$

et en intégrant on a :

$ln\ y=\dfrac{1}{2}\ln(p^2+4)=\text{c ou y}=\dfrac{c}{\sqrt{p^2+4}}$

En inversant, il vient $\text{y}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{c}{\sqrt{p^2+4}}\right\}$

$$=\ CJ_o(2t)$$

Pour déterminer c remarquons que $y(o)=cJ_o=c=3$

D'où la solution cherchée est $Y=3J_o(2t)$

2) On a : $\mathcal{L}[y'']-\mathcal{L}[ty']+\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[1]=\frac{1}{p}$

C'est – à – dire, $p^2\text{y}-\text{py(o)}-\text{y}'\text{(o)}+\dfrac{d}{dp}\big(py-y(o)\big)+\text{y}=\dfrac{1}{p}$

soit $p^2\text{y}-\text{p}-2+\text{py}'+2\text{y}=\dfrac{1}{p}$

$D'o$ù $py'+(p^2+2)\text{y}=\text{p}+2+\dfrac{1}{p}$

Ou $\dfrac{dy}{dp}+\left(p+\dfrac{2}{p}\right)\text{y}=1+\dfrac{2}{p}+\dfrac{1}{p^2}$ (Equation linéaire)

$e^{\int\left(p+\frac{2}{p}\right)dp}=e^{1/2p^2+lnp^2}=p^2e^{1/2p^2}$ est un facteur

Intégrant

$D'o$ù $\dfrac{d}{dp}\left(p^2e^{1/2p^2}y\right)=\left(1+\dfrac{2}{p}+\dfrac{1}{p^2}\right)p^2e^{1/2p^2}$

Ou, en intégrant, on a :

$$y = \frac{1}{p^2} e^{-1/2p^2} \int \left(1 + \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}\right) p^2 e^{1/2p^2} dp$$

$$= \frac{1}{p^2} e^{-1/2p^2} \int (p^2 + 2p + 1)\, e^{1/2p^2} dp$$

$$= \frac{1}{p^2} e^{-1/2p^2} \left[p e^{1/2\,p^2} + 2e^{1/2p^2} + C\right]$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{c}{p^2} e^{-1/2} p^2$$

Pour déterminer c, par développement en série,

$$y = \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{c}{p^2}\left(1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{8}p^4 - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{c+2}{p^2} - c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}p^2 + \cdots\right)$$

et puisque $\mathcal{L}^{-1}[p^k] = 0,\ k = 0,1,2, \ldots$. Nous obtenons en inversant, $y = 1 + (c+2)t$

Mais $y'(o) = 2,\ \ et\ \ c = 0$ et nous avons la solution cherchée $y = 1 + 2t$.

IV.12.3. Equations aux dérivées partielles

Soit à intégrer les équations suivantes :

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2\dfrac{\partial f}{\partial t} = f, \qquad f(x,o) = 6e^{-3x}$

Limitée pour $x > 0, t > 0$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u,(x,o) = 3sin2\pi x, \qquad u(o,t) = 0, u(1,t) = 0$

Où $0 < x < 1,\ t > 0$

Résolution

1) En prenant la transformée par rapport à t, et d'après le point (II. 5.3.) on, a :

$$\frac{df}{dx} = 2[pf - f(x,o)] + f$$

Soit $\dfrac{df}{dx} - (2p+1)f = -12e^{-3x} \qquad (*)$

La transformation de Laplace a transformé l'équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire $(*)$

Résolution $(*)$

Facteur intégrant de $(*)$ est :

$$e^{\int -(2p+1)dx} = e^{-(2p+1)x}$$

$(*)$ devient $\frac{d}{dx}\left[fe^{-(2p+1)x}\right] = -12e^{-(2p+4)x}$

Par intégration, il vient

$fe^{-(2p+1)x} = \frac{6}{p+2}e^{-(2p+4)x} + c$

$Soit\ f = \frac{6}{p+2}e^{-3x} + c\ e^{(2x+1)x}$

Puisque $f(x,t)$ doit être limitée quand x → ∞, il faut que $f(x,p)$ soit aussi limitée quand x → ∞ et nous devons choisir c=o.

D'où $f = \frac{6}{p+2}e^{3\mathrm{x}}$ et en inversant, la solution de l'équation donnée $est : f(x,t) = 6e^{-2t-3x}$

2) En prenant la transformée de l'équation considérée et en s'appuyant sur le point I.5.3. nous trouvons

$pu - u(x,o) = \frac{d^2u}{dx^2}$ or $\frac{d^2u}{dx^2} - pu = -3sin2\pi x.$ (1)

Où $\mathrm{u} = \mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{p}) = \mathcal{L}[u(x,t)]$. la solution générale de (1) est $u = C_1e^{\sqrt{p}\ x} + C_2e^{-\sqrt{p}\ x} + \frac{3}{p+4\pi^2}Sin2\pi x.$ (2)

En prenant la transformée des conditions aux limites fonctions de t, on a :

$\mathcal{L}[u(o,t)] = \mathrm{u}(\mathrm{o},\mathrm{p}) = 0$ et $\mathcal{L}[u(1,t)] = \mathrm{u}(1,\mathrm{p}) = 0$ (3)

En portant la première condition $[u\ (o,p) = 0]$ de (3) dans (2) , on obtient $C_1 + C_2 = 0$ (4)

Puisque la deuxième condition $[u(1,p) = 0]$ de (3) dans (2), donne $C_1e^{\sqrt{p}} + C_2e^{-\sqrt{p}} = 0$ (5)

De (4) et (5) on tire $C_1 = C_2 = 0$ et (2) devient

$u = \frac{3}{p+4\pi^2}\ Sin2\pi x$ (6)

D'où d'après inversion, la solution cherchée est $u(x,t) = 3e^{-4\pi^2 t}\ sin2\pi x$.

TABLE DES MATIERES