Project Optimalisatietechnieken 2024 - 2025: Integer Programming model

30 oktober 2024

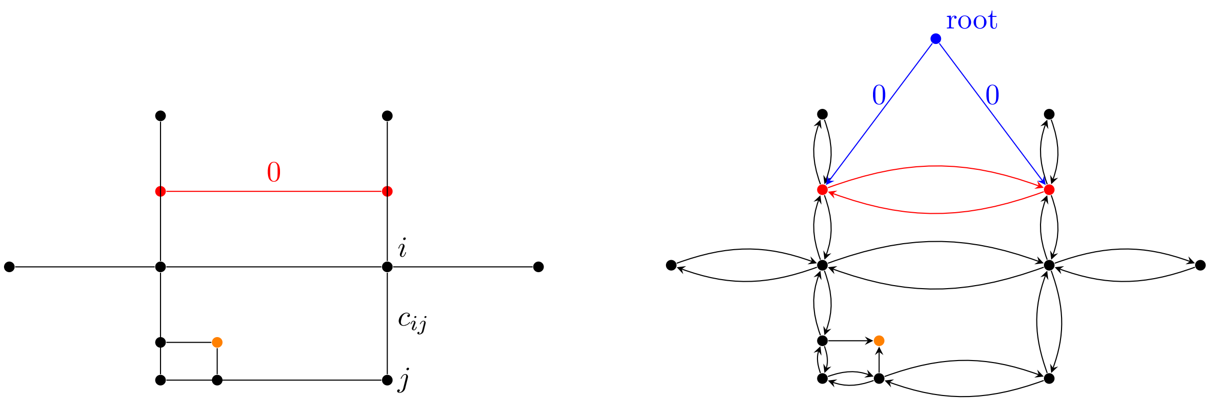
Transformaties

Om het probleem te beschrijven in een wiskundig model voeren we eerst twee transformaties uit op de gegeven graaf.

De eerste transformatie zet de ongerichte graaf om naar een gerichte graaf. Dit doen we door elke ongerichte boog tussen knopen i en j te vervangen door één voorwaartse boog (i, j) en één achterwaartse boog (j, i). Merk op dat bogen die prospectknopen verbinden met andere knopen vervangen worden door slechts één boog naar de prospectknoop toe. De kost van de gerichte bogen is dezelfde als die van de ongerichte bogen.

Om het bestaande DHC netwerk eenvoudiger voor te stellen voeren we nog een tweede transformatie uit: we voegen een virtuele root knoop r toe. Deze nieuwe knoop heeft alleen uitgaande bogen naar knopen in het bestaande netwerk. De kost van deze nieuwe bogen is 0. Door deze transformatie verandert de beperking dat alle prospects verbonden moeten zijn met het bestaande netwerk, naar een beperking dat er een pad moet zijn van de virtuele root knoop naar elke prospect.

Figuur 1 toont een voorbeeld van deze transformaties. De linkse figuur toont de originele graaf, terwijl de rechtse figuur de gerichte graaf met virtuele root knoop toont.



(a) Originele graaf

(b) Graaf na transformaties

Figuur 1: Transformaties van de gegeven graaf. De oranje knoop stelt een prospect voor. Rode bogen stellen het bestaande netwerk voor. De blauwe knoop en bogen zijn nieuw toegevoegd.

Integer programming model

Tabel 1 geeft een overzicht van de symbolen die gebruikt worden in het integer programming model.

Symbool	Beschrijving
V	Verzameling van alle knopen
$V^P \subset V$	Deelverzameling van knopen die prospects voorstellen
r	Virtuele root knoop
E	Verzameling van alle bogen
$E_i^+ \subset E$	Deelverzameling van inkomende bogen van knoop i
$E_i^- \subset E$	Deelverzameling van uitgaande bogen van knoop i
$E_k^O \subset E$	Deelverzameling van off-street bogen verboden met prospect k
c_{ij}	Kost voor het gebruik van boog (i,j)

Tabel 1: Overzicht van gebruikte symbolen.

Beslissingsvariabelen

Het model gebruikt twee verzamelingen van beslissingsvariabelen: de y_{ij}^k variabelen houden bij welke bogen gebruikt worden om de root knoop te verbinden met prospect k, terwijl de x_{ij} variabelen bijhouden welke bogen gebruikt worden in minstens één pad naar een prospect.

Deze beslissingsvariabelen worden als volgt gedefinieerd:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als boog } (i,j) \text{ gebruikt wordt in minstens één pad,} \\ 0 & \text{als dat niet zo is.} \end{cases}$$

$$y_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{als boog } (i,j) \text{ gebruikt wordt om prospect } k \text{ te verbinden met de root knoop,} \\ 0 & \text{als dat niet zo is.} \end{cases}$$

Doelfunctie

Doelfunctie (1) minimaliseert de totale kost van de gekozen bogen.

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

Beperkingen

Beperkingen (2), (3) en (4) zorgen dat voor elke prospect bogen gekozen worden die een aaneensluitend pad vormen van de root knoop naar de prospectknoop.

Beperking (2) zorgt ervoor dat voor elke prospect exact één off-street boog gekozen wordt. Hierdoor verbiedt deze beperking dat prospects als *relay* optreden om andere prospects te verbinden met het bestaande netwerk.

$$\sum_{(i,j)\in E_k^O} y_{ij}^k = 1 \qquad \forall k \in V^P \tag{2}$$

Beperking (3) garandeert dat er voor elke prospect een pad vertrekt vanuit de root knoop r.

$$\sum_{(i,j)\in E_r^-} y_{ij}^k = 1 \qquad \forall k \in V^P \tag{3}$$

Beperking (4) zorgt ervoor dat de gekozen bogen een aaneensluitend pad vormen.

$$\sum_{(i,j)\in E_i^+} y_{ij}^k - \sum_{(i,j)\in E_i^-} y_{ij}^k = 0 \qquad \forall i \in V \setminus \{r, V^P\}, k \in V^P \tag{4}$$

Beperkingen (5) en (6) zorgen ervoor dat de beslissingsvariabelen x_{ij} and y_{ij}^k aan elkaar gekoppeld zijn.

$$y_{ij}^k \leq x_{ij} \qquad \forall (i,j) \in E, k \in V^P \tag{5}$$

$$x_{ij} \leq \sum_{k\in V^P} y_{ij}^k \qquad \forall (i,j) \in E \tag{6}$$

Beperkingen (7) en (8) stellen grenzen op de beslissingsvariabelen.

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in E \tag{7}$$

$$y_{ij}^k \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in E, k \in V^P \tag{8}$$