

# UMONS



Faculté  
des Sciences

## Automates

**Étudiant :** Benjamin André  
**Directrice :** Véronique Bruyère  
28 août 2020

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Reformulation du but général . . . . .	4
1.2	Utilité des sections . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Langage</b>	<b>5</b>
2.1	Définitions . . . . .	5
2.2	Opérations sur les langages . . . . .	5
2.3	Expressions régulières . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Automate Fini</b>	<b>6</b>
3.1	Définitions . . . . .	7
3.2	Représentation graphique . . . . .	8
3.3	ECLOSE . . . . .	9
3.4	Langage . . . . .	10
3.5	Équivalence entre expression régulière et automate . . . . .	12
3.6	Équivalence entre un automate déterministe fini et un automate non-déterministe fini . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Table Filling Algorithm</b>	<b>21</b>
4.1	Relation $R_E$ . . . . .	21
4.2	Table Filling Algorithm . . . . .	22
4.3	Minimisation . . . . .	25
4.4	Appartenance et équivalence . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Algorithme d'Angluin</b>	<b>28</b>
5.1	La relation $R_L$ . . . . .	28
5.2	Théorème de Myhill-Nerode . . . . .	29
5.3	La table d'observation . . . . .	31
5.4	Fermeture et cohérence . . . . .	31
5.5	L'algorithme . . . . .	31
5.5.1	Première itération . . . . .	32
5.5.2	Seconde itération . . . . .	32
5.5.3	Troisième itération . . . . .	33

## Environnements théoriques

Proposition 2.1	$\epsilon$ et la concaténation	5
Théorème 3.1	ADF et expression régulière	12
Théorème 3.2	ADF $\implies$ expression régulière	13
Preuve 3.2.1		13
Théorème 3.3	Expression régulière $\implies$ ADF	15
Preuve 3.3.1		15
Théorème 3.4	ANF $\Leftrightarrow$ ADF	19
Preuve 3.4.1		19
Proposition 4.1	$R_E$	21
Preuve 4.1.1	$R_E$ est une relation d'équivalence	21
Proposition 4.2	Congruence de $R_E$	22
Preuve 4.2.1	Congruence de $R_E$	22
Théorème 4.3	Table d'équivalence	23
Preuve 4.3.1		23
Théorème 4.4	Minimalité de l'automate réduit	26
Preuve 4.4.1		26
Preuve 4.4.2		26
Lemme 5.1		28
Preuve 5.1.1	Equivalence et Congruence à droite	29
Lemme 5.2		29
Preuve 5.2.1		29
Théorème 5.3		30
Preuve 5.3.1		30

## Exemples

Exemple 1	Définition d'un langage	5
Exemple 2	Expression régulière	6
Exemple 3	Automate déterministe fini	7
Exemple 4	Automate non-déterministe fini avec transitions sur $\epsilon$	8
Exemple 5	Graphe d'automate	9
Exemple 6	ECLOSE	9
Exemple 7	Chemin	10
Exemple 8		11
Exemple 9		11
Exemple 10	Construction d'une expression régulière	14
Exemple 11	Transformation ANF vers ADF	19
Exemple 12	Table d'équivalence	23
Exemple 13		25

## Environnements algorithmiques

Algorithme 3.1	Appartenance d'un mot à un langage défini par un automate . . . . .	11
Complexité 3.1.1	Lecture d'un mot par un automate . . . . .	12
Complexité 3.2.1	. . . . .	14
Complexité 3.3.1	. . . . .	18
Complexité 3.4.1	Conversion ANF vers ADF . . . . .	20
Complexité 3.4.2	Conversion ADF vers ANF . . . . .	21
Complexité 4.1.1	. . . . .	24
Complexité 4.2.1	. . . . .	28

# 1 Introduction

Cinquième version du document. *TODO : Construire une introduction*

## Contenu du mail introductif

**Objectif** Le but ultime du mémoire serait de comprendre l'approche de l'article "Actively learning to verify safety for FIFO automata" [3] et de reproduire une partie des expérimentations.

Les différentes étapes seraient

- te rappeler la notion d'automate fini (voir cours de compilation et de calculabilité et complexité)
- comprendre la notion d'automate fini minimal
- comprendre l'algorithme  $L^*$  d'Angluin pour l'apprentissage d'un automate
- implémenter l'algorithme de Vardhan pour tester les résultats

**Contexte** Un professeur connaît un automate  $A$ . Un élève veut l'apprendre en posant deux types de questions, celles de *membership* et d'*equivalence*. Si on a un automate équivalent, on peut utiliser un algorithme pour obtenir l'automate minimal qui calcule le même langage que  $A$ .

Cet algorithme  $A^*$  (ou variantes) a plein d'applications, notamment décrites dans l'article [3]. On y considère des automates FIFO, plus généraux. (*de ce que j'ai compris, ils sont équivalents à des automates avec un nombre d'état infini*). Pour ceux-ci, on voudrait savoir si les configurations calculées à partir de l'état initial évitent certaines mauvaises configurations.

Vu la puissance des automates FIFO, il est algorithmiquement impossible de calculer toutes les configurations atteignables à partir de l'état initial. (*ce qui serait cohérent avec ma compréhension*)

L'idée est alors de calculer (par apprentissage) un automate fini qui est une sur-approximation de cet ensemble de configurations et ensuite de tester si oui ou non on peut éviter les mauvaises configurations.

## 1.1 Reformulation du but général

Il existe les automates FIFO, qui ont des canaux pouvant contenir une infinité de symboles. Ceux-ci sont équivalents à des automates sans canaux mais avec un nombre infini d'états. Ceux-ci peuvent être utilisés pour faire du model checking, c'est-à-dire s'assurer de ne pas atteindre certains états peu importe la suite d'instructions.

## 1.2 Utilité des sections

Dans la section 2, les notions de langage sont posées. Elles sont ensuite utilisées dans la section 3 sur les automates. L'algorithme "Table Filling" de la section 4 se base sur ces automates et permet de minimiser et répondre à la requête d'équivalence. Cette requête d'équivalence est une des deux requêtes nécessaire au fonctionnement de l'algorithme d'angluin de la section 5.

## 2 Langage

Cette section pose les différents concepts et notations pour arriver à la notion de langage. Celles-ci reprennent les notations proposées par Hopcroft et al. [1]. Un sous-ensemble de ces langages correspond à des automates, sujet central de ce document.

### 2.1 Définitions

Un *alphabet*  $\Sigma$  est un ensemble fini et non vide de *symboles*. Un *mot* sur cet alphabet  $\Sigma$  est une suite finie de  $k$  éléments de  $\Sigma$  notée  $w = a_1 a_2 \dots a_k$  où  $k$  est un nombre naturel.  $k$  est la *longueur* de ce mot aussi notée  $|w| = k$ . Le *mot vide* est un mot de taille  $k = 0$  noté  $w = \epsilon$ .

La *concaténation* de deux mots  $w = a_1 a_2 \dots a_k$  et  $x = b_1 b_2 \dots b_j$  est l'opération consistant à créer un nouveau mot  $wx = a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_j$  de longueur  $i = k + j$ .

**Proposition 2.1 ( $\epsilon$  et la concaténation)**  $\epsilon$  est l'identité pour la concaténation, à savoir pour tout mot  $w$ ,  $w\epsilon = \epsilon w = w$ .

Cette proposition est triviale par la définition de la concaténation.

L'*exponentiation* d'un symbole  $a$  à la puissance  $k$ , notée  $a^k$ , retourne un mot de longueur  $k$  obtenu par la concaténation de  $k$  copies du symbole  $a$ . Noter que  $a^0 = \epsilon$ .  $\Sigma^k$  est l'ensemble des mots sur  $\Sigma$  de longueur  $k$ . L'ensemble de tous les mots possibles sur  $\Sigma$  est noté  $\Sigma^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$ .

Un ensemble quelconque de mots sur  $\Sigma$  est un *langage*, noté  $L \subseteq \Sigma^*$ . Étant donné que  $\Sigma^*$  est infini,  $L$  peut l'être également.

#### Exemple 1 (Définition d'un langage)

Voici des exemples utilisant plusieurs modes de définition.  $\Sigma$  y est implicite mais peut être donné explicitement.

- $L = \{12, 35, 42, 7, 0\}$ , un langage défini explicitement
- $L = \{0^k 1^j \mid k + j = 7\}$ , les mots de 7 symboles sur  $\Sigma = \{0, 1\}$  commençant par zéro, un ou plusieurs 0 et finissant par zéro, un ou plusieurs 1. Ici,  $L$  est donné par notation ensembliste
- $L$  contient tous les noms de villes belges. Ici  $L$  est défini en langage courant.
- $\emptyset$  est un langage pour tout alphabet.
- $L = \{\epsilon\}$  ne contient que le mot vide, et est un langage sur tout alphabet.

### 2.2 Opérations sur les langages

Soient  $L$  et  $M$  deux langages. Le langage  $L \cup M = \{w \mid w \in L \vee w \in M\}$  est l'*union* de ces deux langages. Il est composé des mots venant d'un des deux langages.

Le langage composé de tous les mots produits par la concaténation d'un mot de  $L$  avec un mot de  $M$  est une *concaténation* de ces deux langages et s'écrit  $LM = \{vw \mid v \in L \wedge w \in M\}$ .

La *fermeture* de  $L$  est un langage constitué de tous les mots qui peuvent être construits par un concaténation d'un nombre arbitraire de mots de  $L$ , noté  $L^* = \{w_1 w_2 \dots w_n \mid n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, w_i \in L\}$ .

## 2.3 Expressions régulières

Certains langages peuvent être exprimés par une *expression régulière*.

Les expressions régulières suivent un algèbre avec ses opérations et leur priorités. Le langage décrit par une expression est construit de façon inductive par ces différentes opérations. Pour une expression régulière  $E$ , le langage décrit est noté  $L(E)$ . Un langage qui peut être décrit par une expression régulière est dit *langage régulier*.

**Cas de base** Certains langages peuvent être construits directement sans passer par l'induction :

- $\epsilon$  est une expression régulière. Elle décrit le langage  $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$
- $\emptyset$  est une expression régulière décrivant  $L(\emptyset) = \emptyset$
- Si  $a$  est un symbole, alors  $a$  est une expression régulière décrivant le langage  $L(a) = \{a\}$ .

**Induction** Les autres langages réguliers sont construits suivant différentes règles d'induction présentées par ordre décroissant de priorité :

- Si  $E$  est une expression régulière,  $(E)$  est une expression régulière et  $L((E)) = L(E)$ .
- Si  $E$  est une expression régulière,  $E^*$  est une expression régulière représentant la fermeture de  $L(E)$ , à savoir  $L(E^*) = L(E)^*$ .
- Si  $E$  et  $F$  sont des expressions régulières,  $EF$  est une expression régulière décrivant la concaténation des deux langages représentés, à savoir  $L(EF) = L(E)L(F)$ . La concaténation étant associative, l'ordre de groupement n'est pas important, mais par convention, la priorité est à gauche.
- Si  $E$  et  $F$  sont des expressions régulières,  $E + F$  est une expression régulière donnant l'union des deux langages représentés, à savoir  $L(E + F) = L(E) \cup L(F)$ . Ici encore, l'opération est associative et la priorité est à gauche.

### Exemple 2 (Expression régulière)

Soit l'expression  $E = (b + ab)b^*a(a + b)^*$  qui représente le langage  $L = L(E)$ .

- Le mot  $ba$  fait partie de  $L$ . En effet,  $ba = b\epsilon a\epsilon = (b)b^0a(a + b)^0$ , ce qui respecte bien la définition de  $E$ .
- Le mot  $ababbab$  fait partie de  $L$ . A nouveau,  $ababbab = ab\epsilon a(a + b)(a + b)(a + b)(a + b) = (ab)b^0a(a + b)^4$ .
- Le mot  $aa$  ne fait **pas** partie de  $L$ . Supposons par l'absurde que  $aa \in L$ . Alors il existerait une façon de décomposer  $E$  en  $aa$ . Or, les premiers symboles doivent être soit  $b$ , soit  $ab$ . Il y a contradiction. Donc,  $aa \notin L$ .

Un autre exemple d'expression régulière est  $01^*0$  qui décrit le langage constitué de tous les mots commençant et finissant par 0 avec uniquement des 1 entre les deux.

## 3 Automate Fini

Cette section décrit les automates finis, fait le lien avec la notion de langage régulier et propose une représentation visuelle de ces automates.

**TODO : sources**

### 3.1 Définitions

Un *automate fini*  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  est défini comme suit :

- $Q$  est un ensemble fini d'états
- $\Sigma$  est un alphabet
- $q_0 \in Q$  est l'état initial
- $\delta$  est la fonction de transition
- $F \subseteq Q$  est un ensemble d'états acceptants.

La fonction de transition  $\delta$  est définie différemment en fonction du type d'automate souhaité :

- **Automate Déterministe Fini (ADF)**  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ . Soit un état  $q$  et un symbole  $a$ . Alors la transition  $\delta(q, a)$  retourne un état  $p$ .  $\delta(q, a)$  doit être définie pour tout état et tout symbole.
- **Automate Non-déterministe Fini (ANF)**  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ . Soit un état  $q$  et un symbole  $a$ . Alors la transition  $\delta(q, a)$  retourne un ensemble d'états  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq Q$ .
- **Automate Non-déterministe Fini avec des transitions sur  $\epsilon$  ( $\epsilon$ -ANF)**  $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \rightarrow 2^Q$ . Pareil que précédemment mais une transition peut exister sans symbole : elle se fait alors sur  $\epsilon$ .

Lorsqu'un automate est mentionné dans ce document, il s'agit implicitement d'un  $\epsilon$ -ANF, sauf mention contraire. En effet, c'est la forme la plus générale. Cependant, ces trois types d'automates ont la même puissance expressive, ce qui est prouvé dans la section 3.6.

Soit la transition  $\delta(q, a) = p$  (dans un ADF). Pour  $q$ , c'est une *transition sortante sur  $a$* . Pour  $p$ , c'est une *transition entrante sur  $a$* . Si  $\delta(q, a) = P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  dans un ANF, alors les états  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  auront une transition entrante sur  $a$ .

Dans le cas de ANF et  $\epsilon$ -ANF, il peut être pratique d'utiliser  $\delta$  sur un ensemble d'états  $S$ . A ce moment,  $\delta(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$  avec  $a \in \Sigma$ .

#### Exemple 3 (Automate déterministe fini)

On considère l'automate  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  défini comme suit :

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $q_0$  est l'état du même nom
- La fonction de transition  $\delta$  est décrite par la table 1. L'intersection d'une ligne reprenant un élément  $q \in Q$  et d'une colonne  $a \in \Sigma$  donne l'état  $\delta(q, a)$ .
- $F = \{q_3\}$



	a	b
$\rightarrow q_0$	$q_2$	$q_1$
$q_1$	$q_3$	$q_5$
$q_2$	$q_4$	$q_5$
$q_3^*$	$q_3$	$q_3$
$q_4$	$q_4$	$q_4$
$q_5$	$q_3$	$q_1$
$q_6$	$q_4$	$q_5$

TABLE 1: La table de transitions  $\delta$  d'un ANF

Via la notation de la table 1,  $Q$  et  $\Sigma$  sont explicites. En dénotant l'état initial par  $\rightarrow$  et les états acceptants par  $*$  en exposant, on obtient une définition complète d'un automate :  $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ .

**Exemple 4 (Automate non-déterministe fini avec transitions sur  $\epsilon$ )**

De la même façon que pour l'exemple précédent, considérons un automate  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  défini comme suit :

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $q_0$  est l'état du même nom
- $\delta$  est donnée par la table 2.
- $F = \{q_2\}$

$A$  est un  $\epsilon$ -ANF; une colonne supplémentaire sert à représenter la transition sur  $\epsilon$ .

	$\epsilon$	a	b	c
$\rightarrow q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$q_1$	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$
$q_2^*$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

TABLE 2: La table de transitions  $\delta$  d'un  $\Sigma$ -ANF

Un exemple d'ANF sans transition sur  $\epsilon$  serait juste  $A$  sans ces dites transitions.

### 3.2 Représentation graphique

Le *graphe d'un automate fini*  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  est un graphe dirigé construit comme suit :

- Chaque état de  $Q$  est représenté par un nœud.
- Chaque transition  $\delta(q, a)$  est représenté par un arc étiqueté  $a$ . Dans le cas d'un automate non-déterministe, un arc existe pour chacun des états obtenus en suivant la transition. Si il y a plusieurs transitions sortant d'un même état et entrant dans un même autre état, les arcs peuvent être fusionnés en listant les étiquettes.
- L'état initial est mis en évidence par une flèche entrante.
- Les états acceptants sont représentés par un double cercle, en opposition au simple cercle des autres nœuds.

**Exemple 5 (Graphe d'automate)**

Voici les graphes représentant les automates définis dans les tables 1 et 2 :

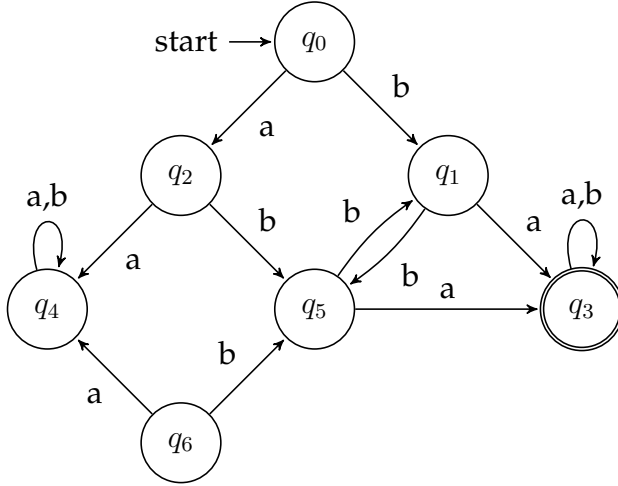


FIGURE 1: Graphe de l'ADF de la table 1

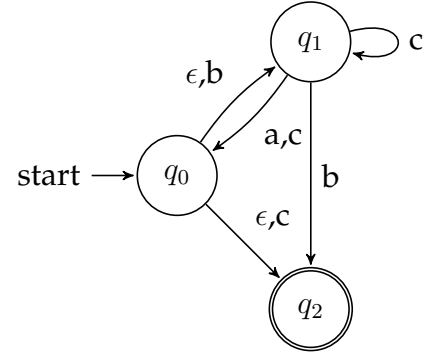


FIGURE 2: Graphe du  $\Sigma$ -ANF de la table 2

Cette représentation d'un automate peut sembler plus naturelle pour un humain alors que la table de transitions est plus proche d'un langage informatique.

**3.3 ECLOSE**

Cette sous-section introduit l'algorithme ECLOSE. Cet algorithme permet, à partir d'un état spécifique, de calculer l'ensemble des états atteignables uniquement par des transitions sur  $\epsilon$ . Ce calcul sert notamment au test d'appartenance d'un mot à un  $\Sigma$ -ANF ainsi qu'à tous les algorithmes qui en dépendent.

Soit un  $\epsilon$ -ANF  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ . Il est possible de construire une fonction retournant l'ensemble des états atteints uniquement en suivant des transitions sur  $\epsilon$  pour un état  $q$  donné. Cette fonction est la *fermeture sur epsilon*  $ECLOSE : Q \rightarrow 2^Q$ . Sa définition est inductive.

Soit  $q$  un état dans  $Q$ .

**Cas de base**  $q$  est dans  $ECLOSE(q)$

**Pas de récurrence** Si  $p$  est dans  $ECLOSE(q)$  et qu'il existe un état  $r$  tel quel  $r \in \delta(p, \epsilon)$ , alors  $r$  est dans  $ECLOSE(q)$

$ECLOSE$  peut être utilisé indifféremment sur un ensemble d'états  $S$  ( $ECLOSE : 2^Q \rightarrow 2^Q$ ). Alors,  $ECLOSE(S) = \bigcup_{q \in S} ECLOSE(q)$

**Exemple 6 (ECLOSE)**

Considérons l'automate  $A$  de l'exemple 4. Les différentes fermetures peuvent être calculées :

- $ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$ . En effet,  $q_0$  appartient à sa fermeture, selon le cas de base. Aussi,  $q_1, q_2 \in \delta(q_0, \epsilon)$

- $ECLOSE(q_1) = \{q_1\}$  par le cas de base.
- $ECLOSE(q_2) = \{q_2\}$  par le cas de base.

### 3.4 Langage

Un automate représente un langage. Nous expliqueront ici comment il le fait pour les 3 catégories d'automates.

#### Fonction de transition étendue

La *fonction de transition étendue*  $\hat{\delta}$  est une extension de la fonction de transition, acceptant plusieurs symboles de façon consécutive. Intuitivement, il s'agit de suivre plusieurs arcs sur le graphe.

Comme  $\delta$  est différente en fonction du type d'automate considéré,  $\hat{\delta}$  l'est aussi.

- **ADF** :  $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ .  $\hat{\delta}$  prend en entrée un état de  $Q$  et un mot  $w$  sur  $\Sigma$  et retourne un état de  $Q$ .
- **ANF et  $\epsilon$ -ANF** :  $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ .  $\hat{\delta}$  prend en entrée un état de  $Q$  et un mot  $w$  sur  $\Sigma$  et retourne un ensemble d'états de  $Q$ .

Soit un état  $q \in Q$  et un mot  $w \in \Sigma^*$ . Alors  $\hat{\delta}$  est définie par :

**Cas de base**  $w$  est un mot vide :

- Pour un ADF ou ANF :  $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$ .
- Pour un  $\epsilon$ -ANF :  $\hat{\delta}(q, \epsilon) = ECLOSE(q)$ .

**Pas de récurrence** Si  $|w| \geq 1$ , alors  $w = xa$  avec  $x$  un mot sur  $\Sigma$  et  $a$  un symbole de  $\Sigma$ .

- Pour un ADF ou ANF :  $\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$
- Pour un  $\epsilon$ -ANF :  $\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(q, xa) = ECLOSE(\delta(\hat{\delta}(q, x), a))$ .

Dans le cas particulier où  $|w| = 1$ ,  $w = xa = \epsilon a$ , ce qui mène au cas de base.

Il se peut que la fonction de transition  $\delta$  ne soit pas définie pour une paire d'arguments. Auquel cas,  $\hat{\delta}$  ne l'est pas non plus.

#### Chemin

Un *chemin* est une suite d'états d'un automate. Chaque état de cette suite doit être atteignable par une transition depuis l'état précédent.

##### Exemple 7 (Chemin)

Considérons l'automate  $A$  de la figure 1. Il existe un chemin de  $q_0$  à  $q_5$  :  $(q_0, q_2, q_5)$ . En effet, les transitions sont définies :  $\delta(q_0, a) = q_2$ ,  $\delta(q_2, b) = q_5$ . Un mot représenté par ce chemin est  $ab$ .

Dans le cas où plusieurs transitions mènent d'un état à un autre, plusieurs mots peuvent être représentés par un même chemin. Chaque état d'un chemin entre deux états  $p$  et  $q$  et distinct de ceux-ci est dit *état intermédiaire*.

## Langage

Le langage représenté par un automate  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  peut alors se définir comme les mots qui, par l'application de  $\hat{\delta}$  sur l'état initial, donnent un état acceptant. Voici les définitions ensemblistes, respectivement pour un ADF et pour un  $(\epsilon)$ -ANF

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} \quad L(A) = \{w \in \Sigma^* | \exists q \in \hat{\delta}(q_0, w), q \in F\}$$

Ainsi, un mot  $w$  appartient à un langage  $L$  défini par l'automate  $A$  si  $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$ .

### Exemple 8

Soit  $A$  l'ADF de la figure 1. Alors  $abaa$  est un exemple de mot appartenant à  $L(A)$ . En effet :

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_0, abaa) &= \\ \delta(\hat{\delta}(q_0, aba), a) &= \\ \delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, ab), a), a) &= \\ \delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, a), b), a), a) &= \\ \delta(\delta(\delta(\delta(q_0, a), b), a), a) &= \\ \delta(\delta(\delta(q_2, b), a), a) &= \\ \delta(\delta(q_5, a), a) &= \\ \delta(q_3, a) &= \\ q_3 &\in F \end{aligned}$$

### Exemple 9

Soit  $A$  le  $\Sigma$ -ANF de la figure 2. Alors  $cb$  est un exemple de mot appartenant à  $L(A)$ . En effet :

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_0, cb) &= \\ ECLOSE(\delta(\hat{\delta}(q_0, c), b)) &= \\ ECLOSE(\delta(ECLOSE(\delta(\hat{\delta}(q_0, \epsilon), c)), b)) &= \\ ECLOSE(\delta(ECLOSE(\delta(ECLOSE(q_0, c)), b)) &= \\ ECLOSE(\delta(ECLOSE(\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, c)), b)) &= \\ ECLOSE(\delta(ECLOSE(\{q_0, q_1, q_2\}), b)) &= \\ ECLOSE(\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, b)) &= \\ ECLOSE(\{q_1, q_2\}) &= \\ \{q_1, q_2\} \end{aligned}$$

Avec  $q_2 \in F$ .

L'algorithme 3.1 représente cette appartenance pour un mot.

### Algorithme 3.1 (Appartenance d'un mot à un langage défini par un automate)

**Requis:** un mot  $w$ , un automate  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  représentant  $L$

**Promet:** si  $w$  appartient à  $L$

- 1:  $C \leftarrow \{q_0\}$   $\{C$  est l'ensemble des états courants}
- 2: **si**  $A$  est un  $\Sigma$ -ANF **alors**
- 3:    $C \leftarrow ECLOSE(C)$
- 4: **fin si**
- 5: **tant que**  $|w| > 0$  **faire**
- 6:   décomposer  $w$  en  $ax$  avec  $a \in \Sigma$  et  $x$  le reste du mot
- 7:    $C \leftarrow \delta(C, a)$   $\{\text{passage à l'ensemble des états suivants}\}$
- 8:    $\{\text{Si l'automate est un ADF, } C \text{ ne contient toujours qu'un seul état}\}$
- 9:    $w \leftarrow x$
- 10:   **si**  $A$  est un  $\Sigma$ -ANF **alors**
- 11:      $C \leftarrow ECLOSE(C)$
- 12:   **fin si**
- 13: **fin tant que**
- 14: **retourner** s'il existe un état  $q \in C$  appartenant à  $F$

### Complexité 3.1.1 (Lecture d'un mot par un automate)

Si  $|w| = n$ , l'algorithme 3.1 est en  $\mathcal{O}(n)$ .

L'opération 1 est en temps constant. Les opérations 2 à 4 ont la complexité d' $ECLOSE$ . Pour un ADF ou ANF, cette opération est triviale ( $\mathcal{O}(1)$ ). Pour un  $\Sigma$ -ANF, cette opération est en  $\mathcal{O}(n^2)$ .

Les opération 6 et 9 sont en temps constant. L'opération 7 à la complexité de  $\delta$ . Cette fonction est triviale pour un ADF. Si celui-ci est stocké dans un tableau, l'opération est en temps constant. Pour un ANF ou  $\Sigma$ -ANF, comme  $\delta$  porte sur un sous-ensemble de  $Q$ , l'opération est en  $\mathcal{O}(n)$ . Le pire des cas étant  $C = Q$  avant ou après l'application de  $\delta$ . Les opérations 10 à 12 sont à nouveau une application de  $ECLOSE$ .

Des lors, le pire des cas du corps de la boucle de l'opération 5 est le maximum entre le pire des cas de  $ECLOSE$  et  $\delta$ . Cette boucle s'effectue au plus  $n$  fois. Une lettre est enlevée à chaque itération.

L'opération 14 se fait en  $\mathcal{O}(\log_2(n))$  pour un ADF et  $\mathcal{O}(n \log_2(n))$  pour un ANF ou  $\Sigma$ -ANF. Cette valeur suppose une recherche efficace dans  $F$ .

En conclusion :

ADF	ANF	$\Sigma$ -ANF
$\mathcal{O}(1) + n(\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)) + \mathcal{O}(\log_2(n))$	$\mathcal{O}(1) + n(\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(n)) + \mathcal{O}(n \log_2(n))$	$\mathcal{O}(n) + n(\mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n)) + \mathcal{O}(n \log_2(n))$
$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$

## 3.5 Équivalence entre expression régulière et automate

Certains problèmes peuvent être exprimés sous forme d'appartenance à un langage régulier, et par extension à une expression régulière. Pouvoir convertir une expression régulière en automate permet d'exécuter cet automate sur une machine pour tester l'appartenance. Ainsi, grâce à cette méthode, une grande classe de problèmes peut être résolue.

**Théorème 3.1 (ADF et expression régulière)** *Un langage peut être exprimé par un automate déterministe fini si et seulement si il peut être décrit par une expression régulière.*

Ce théorème étant une double implication, il est vrai si les deux implications le sont. Étudions celles-ci séparément.

**Théorème 3.2 (ADF  $\implies$  expression régulière)** *Soit un langage  $L$ . Il existe un automate déterministe  $A$  tel que  $L(A) = L \implies$  il existe une expression régulière  $E$  telle que  $L(E) = L$ .*

**Preuve 3.2.1**

Supposons qu'il existe un ADF  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  tel que  $L(A) = L$ .  $Q$  étant un ensemble fini, on peut définir sa cardinalité :  $|Q| = n$ . Supposons que ses états soient nommés  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Il est possible de construire des expressions régulières par induction sur le nombre d'états considérés.

Posons  $E_{ij}^k$  l'expression régulière décrivant un langage constitué des mots  $w$  tels que  $\delta(i, w) = j$  et qu'aucun état intermédiaire n'ait un nombre supérieur à  $k$ . Il n'y a pas de contrainte sur  $i$  et  $j$ .

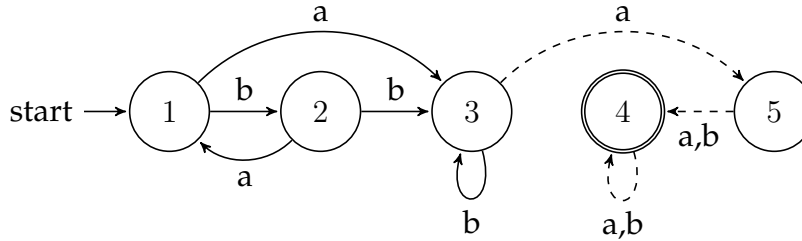


FIGURE 3: Exemple : automate mettant  $E_{1,3}^3$  en évidence

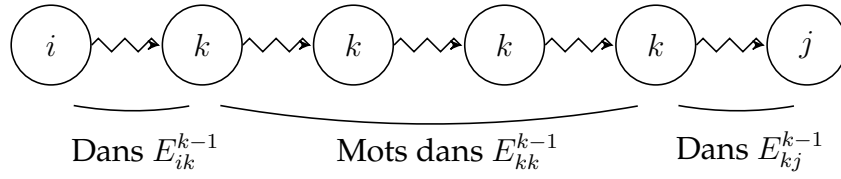
L'exemple ci-dessus illustre ce fait qu'aucun état supérieur à  $k$  ne peut faire partie des intermédiaires. Dans cet exemple,  $E_{5,4}^3$  tolère la transition de 5 à 4 bien que supérieure à  $k$  : ce ne sont pas des intermédiaires. Construisons le langage par induction sur les états autorisés.

**Cas de base**  $k = 0$ . Comme tout état est numéroté 1 ou plus, aucun intermédiaire n'est accepté. La première possibilité est  $i = j$  et indique un chemin de longueur 0. Auquel cas l'expression régulière représentant un chemin sans symbole est  $\epsilon$ . Ce chemin doit être ajouté aux possibilités si  $i = j$ . La deuxième possibilité est  $i \neq j$ . Alors les chemins possibles ne se composent que d'un arc allant directement de  $i$  à  $j$ . Pour les construire :

Pour chaque paire  $i, j$  :

- Il n'existe pas de symbole  $a$  tel que  $\delta(i, a) = j$ . Alors,  $R_{ij}^0 = \emptyset(+\epsilon)$
- Il existe un unique symbole  $a$  tel que  $\delta(i, a) = j$ . Alors,  $R_{ij}^0 = a(+\epsilon)$
- Il existe des symboles  $a_1, a_2, \dots, a_k$  tels que  $\forall l \in \{1, \dots, k\}, \delta(i, a_l) = j$ . Alors,  $R_{ij}^0 = a_1 + a_2 + \dots + a_k(+\epsilon)$

**Pas de récurrence** Supposons qu'il existe un chemin allant de  $i$  à  $j$  ne passant par aucun état ayant un numéro supérieur à  $k$ . La première possibilité est que le-dit chemin ne passe pas par  $k$ . Alors, le mot représenté par ce chemin fait partie du langage de  $E_{ij}^{k-1}$ . Seconde possibilité, le chemin passe par  $k$  une ou plusieurs fois comme représenté à la figure 4.

FIGURE 4: Un chemin de  $i$  à  $j$  peut être découpé en différent segment en fonction de  $k$ 

Auquel cas, ces chemins sont composés d'une sous-chemin donnant un mot dans  $E_{ik}^{k-1}$ , suivi d'un sous-chemin donnant un ou plusieurs mots dans  $E_{kk}^{k-1}$  et finalement un mot dans  $E_{kj}^{k-1}$ .

En combinant les expressions des deux types, on obtient :

$$E_{ij}^k = E_{ij}^{k-1} + E_{ik}^{k-1}(E_{kk}^{k-1})^*E_{kj}^{k-1}$$

En commençant cette construction sur  $E_{ij}^n$ , comme l'appel se fait toujours à des chaînes plus courtes, éventuellement on retombe sur le cas de base. Si l'état initial est numéroté 1, alors l'expression régulière  $E$  exprimant  $L$  est l'union (+) des  $E_{1j}^n$  tel que  $j$  est un état acceptant.  $\square$

### Complexité 3.2.1

Soit un ADF  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  comportant  $n$  états. La complexité peut se décomposer en deux facteurs : la longueur d'une expression régulière et le nombre de celles-ci.

A chacune des  $n$  itérations (ajoutant progressivement des nouveaux états admis pour état intermédiaire), la longueur de l'expression peut quadrupler : elle est exprimée par 4 facteurs. Ainsi, après  $n$  étapes, cette expression peut être de taille  $\mathcal{O}(4^n)$ .

Le nombre d'expressions à construire, lui, est décomposable en deux facteurs également : le nombre d'itérations et celui de paires  $i, j$  possibles. Le premier facteur est  $n$ , quand aux paires, leur nombre s'exprime par  $n^2$ .  $n^3$  expressions sont construites.

En regroupant ces deux facteurs, on obtient  $n^3\mathcal{O}(4^n) = \mathcal{O}(n^34^n)$ . Comme  $n$  correspond au nombre d'états, si la transformation se fait depuis un ANF, via un ADF, vers une expression régulière, la complexité devient doublement exponentielle, la première transformation étant elle-même exponentielle en le nombre d'états de l'ANF.

### Exemple 10 (Construction d'une expression régulière)

Construction d'une expression régulière à partir de l'automate de la figure suivante :

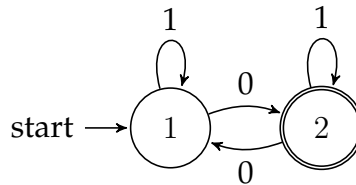


FIGURE 5: Un automate acceptant tout mot ayant un nombre impair de 0

La construction par récurrence commençant avec  $k = 0$  le processus peut être représenté par des tableaux correspondant à différents  $k$  de façon croissante.

**Première itération** Dans la première itération, chaque expression se résume à un des trois cas de base, avec éventuellement  $\epsilon$  si  $i = j$  pour l'expression analysée.

	Cas de base
$E_{11}^0$	$1 + \epsilon$
$E_{12}^0$	$0$
$E_{21}^0$	$0$
$E_{22}^0$	$1 + \epsilon$

**Seconde itération** Ensuite, l'état 1 est autorisé comme état intermédiaire :  $k = 1$ . Ayant potentiellement un état intermédiaire, la formule de récurrence est utilisée.

	Formule de récurrence	Détail	Simplification
$E_{11}^1$	$E_{11}^0 + E_{11}^0 (E_{11}^0)^* E_{11}^0$	$(1 + \epsilon) + (1 + \epsilon)(1 + \epsilon)^*(1 + \epsilon)$	$1^*$
$E_{12}^1$	$E_{12}^0 + E_{11}^0 (E_{11}^0)^* E_{12}^0$	$0 + (1 + \epsilon)(1 + \epsilon)^* 0$	$1^* 0$
$E_{21}^1$	$E_{21}^0 + E_{21}^0 (E_{11}^0)^* E_{11}^0$	$0 + 0(1 + \epsilon)^*(1 + \epsilon)$	$01^*$
$E_{22}^1$	$E_{22}^0 + E_{21}^0 (E_{11}^0)^* E_{12}^0$	$(1 + \epsilon) + 0(1 + \epsilon)^* 0$	$\epsilon + 1 + 01^* 0$

**Troisième itération** A la troisième itération, l'état 2 est autorisé comme état intermédiaire.

	Formule de récurrence	Résultat
$E_{11}^2$	$E_{11}^1 + E_{12}^1 (E_{22}^1)^* E_{21}^1$	$1^* + 1^* 0(1 + 01^* 0)^* 01^*$
$E_{12}^2$	$E_{12}^1 + E_{12}^1 (E_{22}^1)^* E_{22}^1$	$1^* 0(1 + 01^* 0)^*$
$E_{21}^2$	$E_{21}^1 + E_{22}^1 (E_{22}^1)^* E_{21}^1$	$(1 + 01^* 0)^* 01^*$
$E_{22}^2$	$E_{22}^1 + E_{22}^1 (E_{22}^1)^* E_{22}^1$	$(1 + 01^* 0)^*$

Pour obtenir une expression régulière correspondant à l'automate, on s'intéresse à celle qui décrit un chemin entre l'état initial (1) et les états acceptants (uniquement 2 ici). Dès lors,  $E_{12}^2 = 1^* 0(1 + 01^* 0)^* = L$ .

Cette expression régulière  $1^* 0(1 + 01^* 0)^*$  décrit bien un nombre impair de 0. Il en faut absolument un, et tout ajout supplémentaire se fait par paire. Cela correspond bien à un nombre impair de 0.

**Théorème 3.3 (Expression régulière  $\implies$  ADF) ( $\Leftarrow$ )** Soit un langage  $L$ . Il existe une expression régulière  $E$  telle que  $L(E) = L \implies$  il existe un automate déterministe  $A$  tel que  $L(A) = L$ .

### Preuve 3.3.1

Comme tout  $\epsilon$ -ANF a un ADF équivalent (théorème 3.4), montrer qu'une expression régulière  $E$  a un ANF équivalent est suffisant pour obtenir cet ADF.

Soit  $L$ . Soit  $E$  une expression régulière telle que  $L(E) = L$ . On peut construire l'automate récursivement sur la définition des expressions régulières à la section 2.3. Cette preuve par récurrence repose sur trois invariants portant sur chaque ANF construit :

1. Il y a un unique état acceptant



2. Aucune transition ne mène à l'état initial
3. Aucune transition ne part de l'état acceptant

Intuitivement, ces invariants servent à assurer que l'automate ainsi créé sera lu de gauche à droite tel une expression régulière.

**Cas de base** Les ANF de la figure 6 représentent les automates correspondant aux trois cas de base.

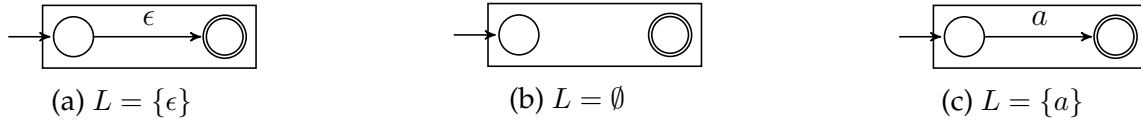


FIGURE 6: Blocs de base pour la construction d'un automate à partir d'une expression régulière

En effet, l'automate (a) représente le langage  $\{\epsilon\}$  égal à  $L(E)$  : le seul arc de l'état initial à un état final est  $\epsilon$ . L'automate (b) ne propose pas d'arc atteignant l'état final. Aucun mot n'appartient au langage représenté par cet automate qui vaut donc  $\emptyset = L(\emptyset)$ . Finalement, (c) propose un arc pour  $a$ . Dès lors, il existe un unique chemin de longueur 1 correspondant au mot  $a$ . Ainsi, le langage exprimé par cet automate  $\{a\}$  est bien égal à  $L(E) = L(a)$ . De plus, ces automates respectent bien l'invariant de récurrence proposé.

**Pas de récurrence** Les ANF *abstraits* de la figure 7 représentent la façon dont un automate peut être construit récursivement en fonction des règles de récurrence des expressions régulières. Ces ANF sont abstraits car le contenu d'un bloc  $E$  ou  $F$  n'est pas représenté explicitement. Cependant, celui-ci respecte les invariants de récurrence.

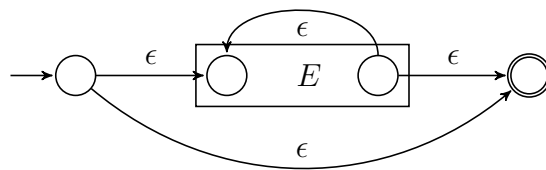
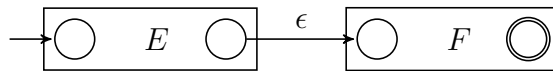
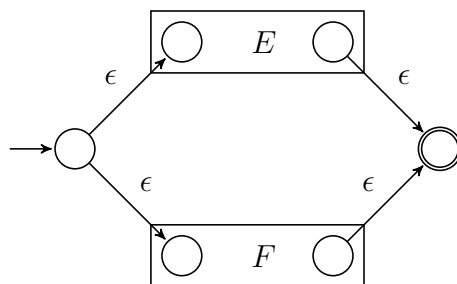
(a)  $L = L(E)^*$ (b)  $L = L(E)L(F)$ (c)  $L = L(E) + L(F)$ 

FIGURE 7: Enchaînement de blocs pour une construction récursive

Les quatre règles de récurrence sur une expression régulière permettent de construire les automates :

- Pour une expression régulière de forme  $(E)$ , le langage  $L(E)$  étant équivalent à  $L((E))$ , l'automate construit pour  $E$  reste valable.
- L'expression régulière est de forme  $E^*$ . Par induction, il existe un automate exprimant le même langage que celui exprimé par  $E$ . L'automate pour  $E^*$  est construit comme en (a). Cet automate comprend un arc  $\epsilon$  de l'état initial à l'état acceptant pour représenté le cas  $E^0$ . Ensuite, un arc  $\epsilon$  permet de concaténer plusieurs chemins dans  $E$ , donnant des mots représentés par  $E^1, E^2, E^3, \dots$ . Le tout complétant l'ensemble des mots possibles des  $L(E)^*$ . On a bien  $L(E^*) = L(E)^*$ .
- L'expression régulière est de forme  $EF$ . Par induction, il existe des automates représentant les mêmes langages que  $E$  et  $F$  et respectant notre invariant. L'automate abstrait (b) représente cette concaténation. En effet, un mot de cet automate doit se composer d'un mot  $v \in L(E)$  et d'un mot  $w \in L(F)$ . Les mots possibles sont alors de la forme  $vew$ . Donc (b) représente bien, selon la définition d'une expression régulière  $L(EF) = L(E)L(F)$ .
- L'expression régulière est de forme  $E + F$ . Alors, comme mis en évidence par l'automate abstrait (c), il existe des automates correspondants aux expression  $E$  et  $F$ . Par cette construction, en particulier les transitions sur  $\epsilon$ , permettent à (c) de représenter tout mot de  $L(E)$  ou  $L(F)$ . Le langage est alors, en concordance avec la définition d'une expres-

sion régulière  $L(E + F) = L(E) \cup L(F)$ .

Les automates (a), (b) et (c) respectent bien l'invariant de récurrence : pas de transition vers l'état initial, un seul état acceptant n'ayant pas de transition sortante. Chaque automate abstrait pour  $E$  ou  $F$  peut lui même être construit récursivement jusqu'au cas de base. □

### Complexité 3.3.1

Soit une expression régulière  $E$  contenant  $n$  symboles (alphabet et opérations comprises) représentant un langage  $L$ . Si un *arbre syntaxique* est créé pour  $E$ , il est possible de construire un ANF pour  $L$  en  $\mathcal{O}(n)$ . En effet :

- Cas de base :  $n$  ANFs sont créés. Cependant, chacun est constitué de 2 états et au plus 1 transition. Ceux-ci correspondent à des feuilles de l'arbre syntaxique. Ces nombres sont des constantes. Ce cas de base est effectué en  $\mathcal{O}(n * 3) = \mathcal{O}(n)$
- Récurrence : L'arbre syntaxique requiert au plus  $n$  lectures d'opération de récurrence pour fusionner les  $n$  ANF en un seul. En effet, chaque lecture consomme au moins deux expressions que ça soit par concaténation, fermeture ou union. Cependant, chacune des opérations implique au plus la création de 2 états et 4 arcs au plus. Ces nombres sont des constantes. La récurrence s'effectue en  $\mathcal{O}(n * 6) = \mathcal{O}(n)$

La complexité totale de cette conversion est en  $\mathcal{O}(n)$  vers un ANF. La conversion vers un ADF, comme mentionné dans la section ci-après peut quand à elle être exponentielle.

## 3.6 Équivalence entre un automate déterministe fini et un automate non-déterministe fini

Cette section présente une méthode permettant de créer un ADF à partir d'un ANF. Ici, ANF est considéré au sens-large et peut tout aussi bien être un ANF normal qu'un  $\Sigma$ -ANF.

Soit un ANF  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ . Alors l'ADF équivalent

$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$$

est défini par :

- $Q_D = \{S \mid S \subseteq Q \text{ et } S \text{ est fermé sur } \epsilon\}$ . Concrètement,  $Q_D$  est l'ensemble des parties des  $Q$  fermées sur  $\epsilon$ . Cette fermeture s'écrit  $S = \text{ECLOSE}(S)$ , ce qui signifie que chaque transition sur  $\epsilon$  depuis un état de  $S$  mène à un état également dans  $S$ . L'ensemble  $\emptyset$  est fermé sur  $\epsilon$ .
- $q_D = \text{ECLOSE}(q_0)$ . L'état initial de  $D$  est l'ensemble des états dans la fermeture sur  $\epsilon$  des états de  $A$ .
- $F_D = \{S \mid S \in Q_D \text{ et } S \cap F \neq \emptyset\}$  contient les ensembles dont au moins un état est acceptant pour  $A$ .
- $\delta_D(S, a)$  est construit,  $\forall a \in \Sigma, \forall S \in Q_D$  par :
  1. Soit  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ .
  2. Calculer  $\bigcup_{i=1}^k \delta(p_i, a)$ . Renommer cet ensemble en  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ .
  3. Alors  $\delta_D(S, a) = \bigcup_{j=1}^m \text{ECLOSE}(r_j)$ .

**Exemple 11 (Transformation ANF vers ADF)**

Considérons l'automate  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  de l'exemple 4 et les fermetures calculées dans l'exemple 6.

Alors, l'automate  $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$  est donné par :

- $Q_D = \{\emptyset, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$ . Les ensembles  $\{q_0, q_1\}$  et  $\{q_0, q_2\}$  sont des sous-ensembles de  $Q$  mais ne sont pas fermés sur  $\epsilon$ .
- $q_D = \{q_0, q_1, q_2\} = \text{ECLOSE}(q_0)$ .
- $F_D = \{\{q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$ , les ensembles contenant  $q_2$ , étant acceptant de  $A$ .
- $\delta_D$  est exprimé sur le graphe de la figure 8.

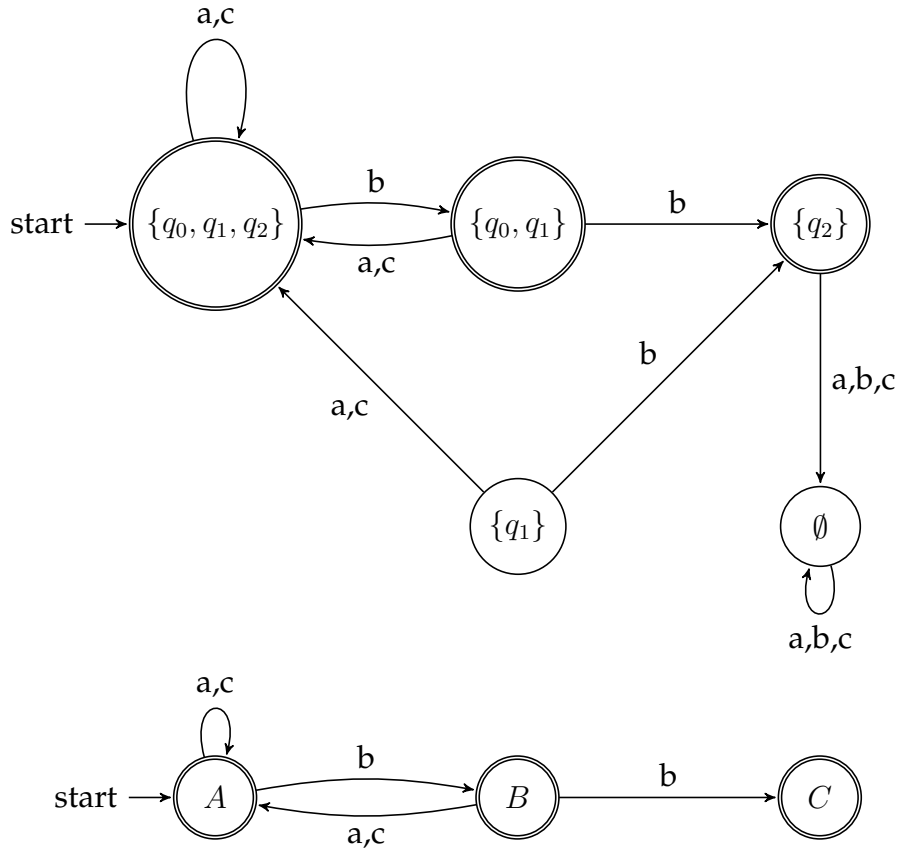


FIGURE 8: Automate  $D$ . De par la construction de  $Q$ , le nombre d'états de  $D$  est exponentiel. Les états inatteignables et  $\emptyset$  sont souvent omis pour clarifier la représentation.

**Théorème 3.4 (ANF  $\Leftrightarrow$  ADF)** Un langage  $L$  peut être représenté par un ANF si et seulement si il peut l'être par un ADF.

**Preuve 3.4.1**

Soit  $L$  un langage. Cette preuve étant une double implication, chacune peut être prouvée séparément.

( $\Leftarrow$ )  $L$  peut être représenté par un ADF  $\Rightarrow L$  peut être représenté par un ANF. Supposons qu'un automate  $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$  représente  $L : L(D) = L$ . L'ANF  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  correspondant est construit comme suit :

- $Q = \{\{q\} | q \in Q_D\} \cup \emptyset$
- $\delta$  contient les transitions de  $D$  modifiées. Les objets retournés deviennent des ensembles d'états. C'est-à-dire, si  $\delta_D(q, a) = p$  alors  $\delta(\{q\}, a) = \{p\}$ . De plus, pour chaque état  $q \in Q_D$ ,  $\delta(\{q\}, \epsilon) = \emptyset$ .
- $q_0 = \{q_D\}$
- $F = \{\{q\} | q \in F_D\}$

Dès lors, les transitions sont les mêmes entre  $D$  et  $A$ , mais  $A$  précise explicitement qu'il n'y a pas de transition sur  $\epsilon$ . Comme  $A$  représente le même langage, il existe donc bien un ANF qui représente  $L$ .

( $\Rightarrow$ )  $L$  peut être représenté par un ANF  $\implies L$  peut être représenté par un ADF. Soit l'automate  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ . Supposons qu'il représente  $L$  ( $L = L(A)$ ). Considérons l'automate obtenu par la transformation détaillée à la section précédente (page 19) :

$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$$

Montrons que  $L(D) = L(A)$ . Pour ce faire, montrons que les fonctions de transition étendues sont équivalentes. Auquel cas, les chemins sont équivalents et donc les langages sont égaux. Montrons que  $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_D, w)$  pour tout mot  $w$ , par récurrence sur  $w$ .

**Cas de base** Si  $|w| = 0$ , alors  $w = \epsilon$ .  $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \text{ECLOSE}(q_0)$ , par définition de la fonction de transition étendue.  $q_D = \text{ECLOSE}(q_0)$  par la construction de  $q_D$ . Finalement, pour un ADF (ici,  $D$ ),  $\hat{\delta}_D(p, \epsilon) = p$ , pour tout état  $p$ . Par conséquent,  $\hat{\delta}_D(q_D, \epsilon) = q_D = \text{ECLOSE}(q_0) = \hat{\delta}(q_0, \epsilon)$ .

**Pas de récurrence** Supposons  $w = xa$  avec  $a$  le dernier symbole de  $w$ . Notre hypothèse de récurrence est que  $\hat{\delta}_D(q_D, x) = \hat{\delta}(q_0, x)$ . Ce sont bien les mêmes objets car  $\hat{\delta}_D$  retourne un état de  $D$  qui correspond à un ensemble d'états de  $A$ . Notons celui-ci  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ . Par définition de  $\hat{\delta}$  pour un ANF,  $\hat{\delta}(q_0, w)$  est obtenu en :

1. Soit  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  donné par  $\bigcup_{i=1}^k \delta(p_i, a)$ , les états obtenus par la lecture du symbole  $a$  à partir de  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ .
2. Alors  $\hat{\delta}(q_0, w) = \bigcup_{j=1}^m \text{ECLOSE}(r_j)$ . Un état atteint par la lecture de  $a$  l'est aussi par  $a\epsilon$ .

$D$  a été construit avec ces deux mêmes étapes pour  $\delta_D(\{p_1, p_2, \dots, p_k\}, a)$ . Dès lors,  $\hat{\delta}_D(q_D, w) = \delta_D(\{p_1, p_2, \dots, p_k\}, a) = \bigcup_{j=1}^k \text{ECLOSE}(p_j) = \hat{\delta}(q_0, w)$ .

On a bien  $\hat{\delta}_D(q_D, w) = \hat{\delta}(q_0, w)$ .

Les langages sont donc bien égaux.

□

### Complexité 3.4.1 (Conversion ANF vers ADF)

La complexité d'une conversion ANF vers ADF peut être exprimée en fonction de  $n$  le nombre d'états de l'ANF. La taille de l'alphabet  $\Sigma$  est ici comptée comme une constante, elle est ignorée dans l'analyse grand-O. L'algorithme de conversion se fait en deux étapes. Le calcul de ECLOSE et la construction à proprement parler.

- ECLOSE : Pour chacun des  $n$  états, il y a au plus  $n^2$  transitions à suivre sur  $\epsilon$  pour construire la fermeture. Ceci représente le cas où tous les états sont reliés avec tous les autres par des transitions sur  $\epsilon$ . Le coût de cet algorithme est dès lors de  $n * \mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^3)$ .
- Construction : Posons  $s$  le nombre d'états dans l'ADF (qui, dans le pire des cas vaut  $s = 2^n$  par la construction des sous-ensembles). La création d'un état est en temps  $\mathcal{O}(n)$ , correspondant au plus à  $n$  états de l'ANF. Pour ce qui est des transitions, pour chacun des  $s$  nouveaux états, ECLOSE contient au plus  $n$  éléments. Chacune des  $n^2$  transitions de l'ADF sont alors suivies pour chaque symbole  $a \in \Sigma$ . Le coût de construction d'une transition est alors de  $n * \mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^3)$  auquel vient s'ajouter  $\mathcal{O}(n^2)$ , négligeable, pour l'union de l'ensemble obtenu.

La complexité totale est  $\mathcal{O}(n^3) + s * \mathcal{O}(n^3) = \mathcal{O}(s * n^3) = \mathcal{O}(2^n * n^3)$ . Le détail est donné sur  $s$  car, comme mentionné par Hopcroft et Al. [1], en pratique le nombre de l'état dans l'ADF obtenu est rarement de l'ordre de  $2^n$ , typiquement de l'ordre de  $n$ .

### Complexité 3.4.2 (Conversion ADF vers ANF)

La conversion d'un ADF  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  vers un ANF consiste au remplacement d'états par des ensembles d'états. Si l'ADF contient  $n$  états, cette étape est en  $\mathcal{O}(n)$ . De plus, une colonne pour  $\epsilon$  doit être ajoutée à la table de transition (pour la fonction  $\delta$ ), et ce pour chacun des états. Cette étape se fait également en  $\mathcal{O}(n)$ .

La complexité totale d'une conversion d'un ADF vers un ANF est en  $\mathcal{O}(n)$ .

## 4 Table Filling Algorithm

### 4.1 Relation $R_E$

Soit un automate  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ . Définissons la relation  $R_E$  entre deux états :

$$xR_Ey \iff (\forall w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(y, w) \in F)$$

Intuitivement, ces deux états sont en relation si tout mot lu à partir de celui-ci mène à des états étant simultanément acceptants ou non.

**Proposition 4.1 ( $R_E$ )**  $R_E$  est une relation d'équivalence.

**Preuve 4.1.1 ( $R_E$  est une relation d'équivalence)**

Montrer que  $R_E$  est une relation d'équivalence revient à montrer qu'elle est réflexive, transitive et symétrique.

- **Réflexive** : Soient un état  $x \in Q_M$  et  $w \in \Sigma^*$ . Alors,  $\hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(x, w) \in F$  et par définition,  $xR_Ex$ .
- **Transitive** : Soient les états  $x, y, z \in Q_M$  tels que  $xR_Ey$  et  $yR_Ez$  ainsi que  $w \in \Sigma^*$ . Par hypothèse,  $\hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(y, w) \in F$  et  $\hat{\delta}(y, w) \in F \iff \hat{\delta}(z, w) \in F$ . Par transitivité de l'implication, on obtient  $\hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(z, w) \in F$ . On a donc  $xR_Ez$ .

- **Symétrique** : Soient les états  $x, y \in Q_M$  tels que  $xR_E y$  et un mot  $w \in \Sigma^*$ . Par hypothèse,  $\hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(y, w) \in F$ . En lisant la double implication depuis la droite, on a bien  $\hat{\delta}(y, w) \in F \iff \hat{\delta}(x, w) \in F$  et donc  $yR_E x$ . □

### Corollaire 4.1.1

$R_E$  sépare les états de  $Q$  en classes d'équivalence.

La classe d'équivalence de tous les états en relation  $R_E$  avec  $q$  (qui sert alors de *représentant*) se note  $[[q]]$  ou par une lettre majuscule, typiquement  $S$  ou  $T$ .

La *congruence à droite* d'une relation  $R$  entre des mots sur un alphabet  $\Sigma$  est définie comme :

$$\forall x, y \in \Sigma^*, xRy \Rightarrow \forall a \in \Sigma, xaRya$$

**Proposition 4.2 (Congruence de  $R_E$ )**  $R_E$  est congruente à droite.

#### Preuve 4.2.1 (Congruence de $R_E$ )

Si la relation est vraie pour deux états, elle reste valable pour les états atteints par la lecture d'un symbole quelconque. Soient les états  $x, y \in Q_M$  tels que  $xR_E y$ . Soit un symbole  $a \in \Sigma$ . Par hypothèse,

$$\forall w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(y, w) \in F$$

C'est donc vrai en particulier pour  $w = au, u \in \Sigma^*$ . Dès lors,

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(x, au) \in F &\iff \hat{\delta}(y, au) \in F \\ \hat{\delta}(\delta(x, a), u) \in F &\iff \hat{\delta}(\delta(y, a), u) \in F \\ \hat{\delta}(p, u) \in F &\iff \hat{\delta}(q, u) \in F \end{aligned}$$

□

### Corollaire 4.2.1

Pour chaque symbole, toutes les transitions sortant d'une classe d'équivalence mènent à une même classe d'équivalence :  $\forall a \in \Sigma, \exists T, \forall q \in S, \delta(q, a) \in T$  avec  $T$  une classe d'équivalence.

## 4.2 Table Filling Algorithm

Certains états d'un automate peuvent être *équivalents* selon la relation  $R_E$ . Celui-ci peut alors être simplifié. Une façon de détecter ces équivalences est de construire un tableau via l'*algorithme de remplissage de tableau*.

Celui-ci détecte les paires *différenciables*, récursivement sur un automate  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ . Une paire  $\{p, q\}$  est différenciable s'il existe un mot  $w$  tel qu'un chemin  $\hat{\delta}(p, w)$  mène à un état acceptant et  $\hat{\delta}(q, w)$  mène à un état non-acceptant ou vice-versa.  $w$  sert alors de *mot témoin*.

**Cas de base** : Si  $p$  est un état acceptant et que  $q$  ne l'est pas, alors la paire  $\{p, q\}$  est différenciable. Le mot témoin est  $\epsilon$ .

**Pas de récurrence** : Soient  $p, q$  des états de  $Q$  et un symbole  $a \in \Sigma$  tel que  $\delta(p, a) = r$  et  $\delta(q, a) = s$ . Si  $r$  et  $s$  sont différenciables, alors  $p$  et  $q$  le sont aussi. En effet, il existe un mot *témoin*  $w$  qui permet de différencier  $r$  et  $s$ . Alors le mot  $aw$  est le mot témoin qui permet de différencier  $p$  et  $q$ .

**Théorème 4.3 (Table d'équivalence)** *Si deux états ne sont pas distingués par l'algorithme de remplissage de tableau, les états sont équivalents (ils respectent la relation  $R_E$ ).*

**Preuve 4.3.1**

Considérons un automate déterministe fini quelconque  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ . Supposons par l'absurde qu'il existe une paire d'états  $\{p, q\}$  tels que :

1.  $p$  et  $q$  ne sont pas distingués par l'algorithme de remplissage de table.
2. Les états ne sont pas équivalents,  $\not\equiv R_E q$ . Par extension, il existe un mot témoin  $w$  différenciant  $p$  et  $q$ .

Une telle paire est une *mauvaise paire*. Si il y a des mauvaises paires, chacune distinguée par un mot témoin, il doit exister un paire distinguée par le mot témoin le plus court. Posons  $\{p, q\}$  comme étant cette paire et  $w = a_1 a_2 \dots a_n$  le mot témoin le plus court qui les distingue. Dès lors, soit  $\hat{\delta}(p, w)$  est acceptant, soit  $\hat{\delta}(q, w)$  l'est, mais pas les deux.

Ce mot  $w$  ne peut pas être  $\epsilon$ . Auquel cas, la table aurait été remplie dès l'étape d'induction de l'algorithme. La paire  $\{p, q\}$  ne serait pas une mauvaise paire, ne respectant pas l'hypothèse 1.

$w$  n'étant pas  $\epsilon$ ,  $|w| \geq 1$ . Considérons les états  $r = \delta(p, a_1)$  et  $s = \delta(q, a_1)$ . Ces états sont différenciés par  $a_2 a_3 \dots a_n$  car  $\hat{\delta}(p, w) = \hat{\delta}(r, a_2 a_3 \dots a_n)$  et  $\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(s, a_2 a_3 \dots a_n)$  et  $p$  et  $q$  sont différenciables.

Cela signifie qu'il existe un mot plus petit que  $w$  qui différencie deux états : le mot  $a_2 a_3 \dots a_n$ . Comme on a supposé que  $w$  est le mot le plus petit qui différencie une mauvaise paire,  $r$  et  $s$  ne peuvent pas être une mauvaise paire. Donc, l'algorithme a du découvrir qu'ils sont différenciables.

Cependant, le pas de récurrence impose que  $\delta(p, a_1)$  et  $\delta(q, a_1)$  mènent à deux états différenciables implique que  $p$  et  $q$  le sont aussi. On a une contradiction de notre hypothèse :  $\{p, q\}$  n'est pas une mauvaise paire.

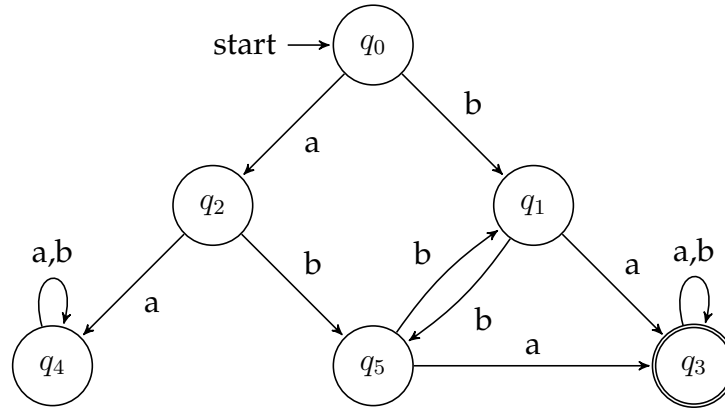
Ainsi, s'il n'existe pas de mauvaise paire, c'est que chaque paire différenciable est reconnue par l'algorithme.

□

**Exemple 12 (Table d'équivalence)**

Voici une application de cet algorithme sur l'automate  $A_2$ , version réduite de l'automate  $A_1$  de la figure 1.



FIGURE 9: Automate  $A_2$ 

La première étape est de remplir la table avec l'algorithme précédant. Tout état est distinguable de  $q_3$  : il est le seul état acceptant. 5 cases peuvent déjà être cochées. Le reste de la table est remplie par induction.

$q_1$	x				
$q_2$	x	x			
$q_3$	x	x	x		
$q_4$	x	x	x	x	
$q_5$	x		x	x	x
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$

FIGURE 10: Table filling pour  $A_2$ , décelant des équivalences d'états

#### Complexité 4.1.1

Considérons  $n$  le nombre d'états d'un automate, et  $k$  la taille de l'alphabet  $\Sigma$  supporté.

Si il y a  $n$  états, il y a  $\binom{n}{2}$  soit  $\frac{n(n-1)}{2}$  paires d'états. A chaque itération (sur l'ensemble de la table), il faut considérer chaque paire, et vérifier si un de leur successeurs est différentiable. Cette étape prend au plus  $\mathcal{O}(k)$  pour tester chaque successeurs potentiel (en fonction du symbole lu). Ainsi, une itération sur la table se fait en  $\mathcal{O}(kn^2)$ . Si une itération ne découvre pas de nouveaux état différentiable s'arrête. Comme la table a une taille en  $\mathcal{O}(n^2)$  et qu'à chaque étape un élément au minimum doit y être coché, la complexité totale de l'algorithme est en  $\mathcal{O}(kn^4)$ .

Cependant, il existe des pistes d'amélioration. La première est d'avoir, pour chaque paire  $\{r, s\}$  une liste des paire  $\{p, q\}$  qui, pour un même symbole, mènent à  $\{r, s\}$ . On dit de ces paires qu'elles sont dépendantes. Si la paire  $\{r, s\}$  est marquée comme différenciable, leurs paires dépendantes seront de facto différenciables.

Cette liste peut être construite en considérant chaque symbole  $a \in \Sigma$  et ajoutant les paires  $\{p, q\}$  à chacune de leur dépendance  $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$ . Cette étape prend au plus  $k \cdot \mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(kn^2)$ . (Le nombre de symboles multiplié par le nombre de paires à considérer).

Ensuite, il suffit de partir des cas initiaux (se reposant sur le cas de base de l'algorithme), et de marquer tous leurs états dépendants comme différenciables, tout en ajoutant leur propre

liste à chaque fois. La complexité de cette exploration est bornée par le nombre d'éléments dans une liste et le nombre de listes. Respectivement,  $k$  et  $\mathcal{O}(n^2)$ , ce qui donne  $\mathcal{O}(kn^2)$  pour cette exploration.

La complexité totale revient à  $\mathcal{O}(kn^2)$ .

### 4.3 Minimisation

La minimisation d'automate se fait en deux étapes :

1. Se débarrasser de tous les états injoignables : ils ne participent pas à la construction du langage représenté
2. Grâce aux équivalences d'états trouvées grâce à l'algorithme de remplissage de tableau défini au point ??, construire un nouvel automate.

Soit un automate déterministe fini  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ . Les états non-atteignables peuvent être supprimés de  $Q$  et de  $\delta$ .

Pour minimiser cet automate, il faut :

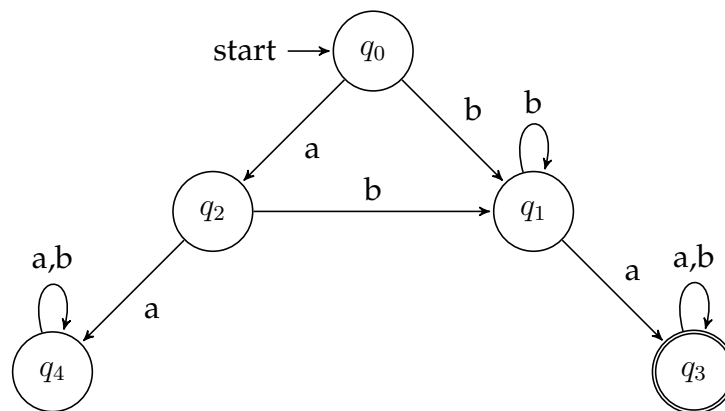
1. Générer la table de différenciation.
2. Séparer  $Q$  en classes d'équivalences
3. Construire l'automate canonique  $C = (Q_C, \Sigma, \delta_C, q_C, F_C)$  :
  - Soit  $S$  une des classes d'équivalence obtenues par la table de différenciation.
  - Ajouter  $S$  à  $Q_C$  et à  $F_C$  si  $S$  contient un état acceptant :  $q \in S, q \in F$ .
  - Si  $S$  contient  $q_0$  l'état initial de  $A$ , alors  $S$  est  $q_C$  l'état initial de  $C$ .
  - Pour un symbole  $a \in \Sigma$ , alors il doit exister une classe d'équivalence  $T$  tel que pour chaque état  $\forall q \in S, \delta(q, a) \in T$ . Si ce n'est pas le cas, c'est que deux états  $p$  et  $q$  dans  $S$  mènent à différentes classes d'équivalences. Or, ces deux états sont différenciables, et ne pourraient pas appartenir tous deux à  $S$  par construction. Ce fait est déjà mentionné dans le corollaire 4.2.1. On peut écrire  $\delta_C(S, a) = T$ . Pour rappel, la fonction  $\delta$  est définie pour tout état et tout symbole. Rien n'empêche  $T = S$ .

#### Exemple 13

Considérons l'automate  $A_1$  représenté à la figure 1. En supprimant l'état  $q_6$  qui n'est pas atteignable, on obtient l'automate  $A_2$  de la figure 9.

Le tableau de la figure 10 sert d'exemple pour l'algorithme de remplissage de tableau, sur  $A_2$ .  $A_3$ .

En appliquant l'algorithme, qui peut se résumer intuitivement à fusionner les états équivalents, on obtient l'automate  $A_3$  de la figure 11.

FIGURE 11: Automate  $A_3$ 

Une expression régulière  $((b + ab)b^*a(a + b)^*)$  peut être déduite pour  $L$  grâce à cet automate. Cette expression régulière est celle de l'exemple 2

**Théorème 4.4 (Minimalité de l'automate réduit)** Soit un ADF  $A$  et soit  $C$  l'automate construit par cet algorithme de minimisation. Aucun automate équivalent à  $A$  n'a moins d'états que  $C$ . De plus, chaque automate ayant autant d'états que  $C$  peut être transformé en celui-ci par homomorphisme.

#### Preuve 4.4.1

Prouvons que l'algorithme de minimisation fournit un automate minimum (il n'en existe aucun comportant moins d'états pour un même langage) Soient un ADF  $A$  et  $C$  l'automate obtenu par l'algorithme de minimisation. Posons que  $C$  comporte  $k$  états.

Par l'absurde, supposons qu'il existe  $M$  un ADF minimisé équivalent à  $A$  mais comptant moins d'états que  $C$ . Posons qu'il en comporte  $l < k$ . Appliquons l'algorithme de remplissage de table sur  $C$  et  $M$ , comme s'ils étaient un seul ADF, comme proposé dans la section ???. Les états initiaux sont équivalents (pas différenciables) puisque  $L(C) = L(M)$ . Dès lors, les successeurs pour chaque symboles sont eux aussi équivalents. Le cas contraire impliquerait que états initiaux sont différenciables, ce qui n'est pas le cas. De plus, ni  $C$  ni  $M$  n'ont un état inaccessible, sinon il pourrait être éliminé, résultant en un automate comportant moins d'états pour un même langage. Soit  $p$  un état de  $C$ . Soit un mot  $a_1a_2 \dots a_i$ , qui mène de l'état initial de  $C$  à  $p$ . Alors, il existe un état  $q$  de  $M$  équivalent à  $p$ . Puisque les états initiaux sont équivalents, et que par induction, les états obtenus par la lecture d'un symbole le sont aussi, l'état  $q$  dans  $M$  obtenu par la lecture du mot  $a_1a_2 \dots a_i$  est équivalent à  $p$ . Ceci signifie que tout état de  $C$  est équivalent à au moins un état de  $M$ . Or,  $lk > l$ . Cela signifie qu'il doit exister au moins deux états de  $C$  équivalents à un même état de  $M$  et donc équivalents entre eux. Il y a la contradiction : par construction, les états de  $C$  sont tous différenciables les uns des autres. La supposition de l'existence de  $M$  est fausse. Il n'existe pas d'automate équivalent à  $A$  comportant moins d'états que  $C$ .

□

#### Preuve 4.4.2

Prouvons que tout automate minimal pour un langage est  $C$ , à un isomorphisme sur les noms des états près.

Soit  $A$  un ADF pour un langage  $L$ . Soient  $C$  un ADF obtenu par l'algorithme de minimisation et  $M$  un automate minimal comportant autant d'états que  $C$ .

Comme mentionné dans la preuve précédente, il doit y avoir une équivalence 1 à 1 entre chaque état de  $C$  et de  $M$ . (Au minimum 1 et au plus 1). De plus, aucun état de  $M$  ne peut être équivalent à 2 états de  $C$ , selon le même argument.

Dès lors, l'automate minimisé, dit *canonique* est unique à l'exception du renommage des différents états.

□

## 4.4 Appartenance et équivalence

Considérons les automates  $A_H$  et  $A_I$  donnés dans les figures 12 et 13

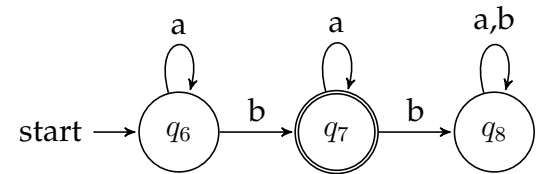
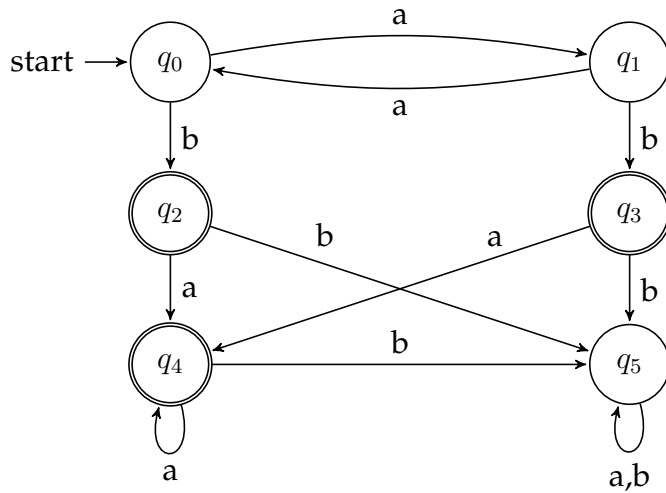


FIGURE 13: Automate  $A_I$ , provenant également de [2]. Les états ont été renommés.

FIGURE 12: Automate  $A_H$ , du livre d'Hopcraft et al. de 1979[2] (Fig3.2)

Il est possible de remplir un tableau via l'algorithme éponyme. Pour ce faire, les deux automates sont considérés comme un seul dont les états sont disjoints.

$q_1$									
$q_2$	x	x							
$q_3$	x	x							
$q_4$	x	x							
$q_5$	x	x	x	x	x				
$q_6$			x	x	x	x			
$q_7$	x	x				x	x		
$q_8$	x	x	x	x	x		x	x	
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	$q_7$	

FIGURE 14: Tableau généré par l'application de l'algorithme sur  $A_H$  et  $A_I$

De cette table, toujours grâce aux conclusions précédentes, il est possible d'extraire des classes d'équivalences :

- $C_0 = \{q_0, q_1, q_6\}$
- $C_1 = \{q_2, q_3, q_4, q_7\}$
- $C_2 = \{q_5, q_8\}$

En particulier, la classe  $C_0$  souligne que les états initiaux sont équivalents. Cela signifie, par définition, que tout mot  $w$  lu en partant d'un de ces états sera soit accepté dans les deux automates, soit refusé dans les deux.  $A_H$  et  $A_I$  définissent donc le même langage.

### Complexité 4.2.1

Reposant sur la construction de la table d'équivalence d'états, la complexité est en  $\mathcal{O}(kn^2)$ , avec  $k$  la taille de l'alphabet et  $n$  le nombre d'états. L'étape supplémentaire, la lecture de cette table, est en temps constant et n'impacte pas la complexité.

Les différentes notions liées à l'égalité : les propriétés de réflexivité, transitivité et symétrie ont été démontrées dans la section ??.

## 5 Algorithme d'Angluin

L'algorithme d'Angluin repose, en plus des éléments précédents sur quatre concepts :

- Une table d'observation
- La relation  $R_O$ , se basant sur la table d'observation et semblable à la relation  $R_L$
- La propriété de fermeture (closure en anglais)
- La propriété de cohérence (consistence en anglais)

Cette section commence par décrire cette table en ??, la relation  $R_O$  en ??, la fermeture en ??, la cohérence en ??.

Une fois toutes ces bases posées, une exécution de l'algorithme sur un exemple est proposée en ??, suivie du fonctionnement formel de l'algorithme et des preuves sur son exactitude et sa complexité en ??, ?? et ??.

### 5.1 La relation $R_L$

Soit un langage  $L$  sur un alphabet  $\Sigma$ .

Soit la relation  $R_L$  portant sur deux mots (ne faisant pas nécessairement partie de  $L$ ). Deux mots  $x$  et  $y$  respectent la relation de Myhill-Nérode  $R_L$  si

$$\forall z \in \Sigma^*, xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$$

Intuitivement, deux mots sont en relation si pour tout mot qu'on leur concatène, les deux mots résultants sont tous deux dans le langage ou non.

**Lemme 5.1** *Cette relation est une relation d'équivalence. De plus, elle respecte la congruence à droite. C'est à dire que si  $xR_Ly$ , alors pour tout symbole  $a \in \Sigma$ ,  $xaR_Lya$*

**Preuve 5.1.1 (Equivalence et Congruence à droite)**

Dire d'une relation qu'elle décrit une équivalence, revient à dire qu'elle est réflexive, transitive et symétrique

- $R_L$  est réflexive. Soit  $x \in \Sigma^*$ . Soit  $z \in \Sigma^*$ . Montrer que  $xR_Lx$  est vrai revient à montrer que  $xz \in L \Leftrightarrow xz \in L$  est vrai.  $R_L$  est donc réflexive.
- $R_L$  est symétrique. Soient  $x, y \in \Sigma^*$  tels que  $xR_Ly$ . Soit  $w \in \Sigma^*$ . Montrer que  $yR_Lx$  revient à montrer que  $yw \in L \Leftrightarrow xw \in L$ . Or, par hypothèse,  $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$ , qui peut s'écrire aussi  $yz \in L \Leftrightarrow xz \in L$  pour tout  $z \in \Sigma^*$ , et en particulier  $z = w$ .
- $R_L$  est transitive. Soient  $x, y, u \in \Sigma^*$  tels que  $xR_Ly$  et  $yR_Lz$ . Soit  $w \in \Sigma^*$ . Comme  $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$  et  $yz \in L \Leftrightarrow uz \in L$  pour tout  $z \in \Sigma^*$  (par hypothèse), c'est vrai en particulier pour  $z = w$ . Dès lors,  $xw \in L \Leftrightarrow yw \in L$  et  $yw \in L \Leftrightarrow uw \in L$ . Par transitivité de l'implication, on obtient  $xw \in L \Leftrightarrow uw \in L$ , à savoir  $xR_Lu$ .
- $R_L$  est congruente à droite. Soient  $x, y \in \Sigma^*$  tels que  $xR_Ly$ . Soit  $a \in \Sigma$ . Par hypothèse,  $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$  pour tout  $z \in \Sigma^*$ . Cela doit donc être vrai en particulier pour le mot  $z = aw$  avec  $w$  quelconque. En remplaçant dans l'hypothèse, on obtient  $xaw \in L \Leftrightarrow yaw \in L$ . Ce qui montre que  $xaR_Lya$ .

□

**5.2 Théorème de Myhill-Nerode**

Avant d'introduire la théorème de Myhill-Nérode, il faut s'intéresser à la relation d'équivalence  $R_B$ , qui facilite l'écriture de la preuve du théorème.

**Definition 1 (Relation  $R_B$ )** Soit un automate  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ . Soient deux mots  $x, y \in \Sigma^*$ . Alors la relation  $xR_By$  est vraie si et seulement si  $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$ . □

**Lemme 5.2**  $R_B$  est une relation d'équivalence congruente à droite.

**Preuve 5.2.1**

Prouver qu'une relation est dite d'équivalence, il faut prouver que celle-ci est transitive, réflexive et symétrique. Soit un automate  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ .

**Transitivité** Soient  $x, y, z \in \Sigma^*$ . Supposons que  $xR_By$  et  $yR_Bz$ . On a bien  $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, z)$  par la transitivité de l'équivalence entre deux états.

**Réflexivité** Soit  $y \in \Sigma^*$ . On a bien  $\hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, y)$  par réflexivité de l'équivalence sur un état.

**Symétrie** Soient  $x, y \in \Sigma^*$ . Supposons que  $xR_By$ . On a bien  $\hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, x)$  par symétrie de l'équivalence entre deux états.

**Congruence à droite** Soient  $x, y \in \Sigma^*$  tels que  $xR_By$ . Soit  $z \in \Sigma^*$ . Montrons que  $xzR_Byz$ .  
 $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), z) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, y), z) = \hat{\delta}(q_0, yz)$ .

**Théorème 5.3** Les trois énoncés suivants sont équivalents :

1. Un langage  $L \subseteq \Sigma^*$  est accepté par un DFA.
2. Il existe une congruence à droite sur  $\Sigma^*$  d'index fini telle que  $L$  est l'union de certaines classes d'équivalence.
3. La relation d'équivalence  $R_L$  est d'index fini.

### Preuve 5.3.1

La preuve d'équivalence se fait en prouvant chaque implication de façon cyclique :

(1)  $\rightarrow$  (2) Supposons que (1) soit vrai, c'est-à-dire que le langage  $L$  est accepté par un automate déterministe  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ . Considérons la relation d'équivalence congruente à droite  $R_B$ . Soit un mot  $w \in \Sigma^*$ . Alors tout mot  $x \in \Sigma^*$  tel que  $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, w)$  appartient à la même classe d'équivalence  $[w]$ . Or, la fonction  $\hat{\delta}$  retourne un état  $q \in Q$ . Chaque classe d'équivalence sur  $\Sigma$  correspond alors à un état de l'automate. Comme  $Q$  est fini,  $R_B$  est d'index fini. De plus, un sous-ensemble des classes d'équivalences doit correspondre aux états acceptants  $q \in F$ . Alors,  $L$  est l'union de ces classes d'équivalence.

(2)  $\rightarrow$  (3) Supposons qu'il existe une relation  $E$  satisfaisant (2). Montrons que chaque classe de celle-ci est intégralement contenue dans une seule classe de  $R_L$ . Puisque  $E$  est d'index fini, c'est un argument suffisant pour montrer que  $R_L$  est d'index fini. Soit  $x, y$  tels que  $xEy$ . Comme  $E$  est congruente à droite, pour tout mot  $z \in \Sigma^*$ , on sait que  $xzEyz$ . Comme  $L$  est un union de ces classes d'équivalence,  $xzEyz$  implique que  $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$ , ce qui revient à  $xR_Ly$ . Cela signifie que tout mot dans la classe d'équivalence de  $x$  définie par  $E$  se retrouve dans la même classe d'équivalence que  $x$  cette fois définie par  $R_L$ . Ceci permet de conclure que chaque classe d'équivalence de  $E$  est contenue dans une classe d'équivalence de  $R_L$  et donc que  $R_L$  est d'index fini.

(3)  $\rightarrow$  (1) Considérons la relation  $R_L$  définie précédemment. Soit un automate  $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  défini comme suit :

- Chaque état  $q \in Q$  correspond à une classe d'équivalence de  $R_L$ .
- Comme  $R_L$  porte sur un langage, l'alphabet  $\Sigma$  de celui-ci est déjà défini.
- Si  $[[\epsilon]]$  est la classe d'équivalence de  $\epsilon$  sur  $R_L$ ,  $q_0$  correspond à cette classe.
- Si  $q$  représente  $[[x]]$  et  $q_1$  représente  $[[xa]]$ , alors  $\delta(q, a) = q_1$ . Cette définition est cohérente car  $R_L$  est congruente à droite.
- $F = \{[[x]] \mid x \in L\}$ .

Cet automate est déterministe par la définition de  $\delta$  et fini car  $Q$  l'est, le nombre de classes de  $R_L$  étant fini par hypothèse. De plus, cet automate accepte tout mot  $x \in L$  puisque  $\delta(q_0, x) = [[x]] \in F$  (par définition, puisque  $x \in L$ ).  $\square$

### Corollaire 5.3.1

La partie (3)  $\rightarrow$  (1) de la preuve 5.3.1 donne une méthode permettant de construire un ADF à partir des classes d'équivalences de la relation  $R_L$ .

### 5.3 La table d'observation

### 5.4 Fermeture et cohérence

#### Fermeture

La propriété de fermeture (closure) s'exprime mathématiquement par

$$\forall u \in R, \forall a \in \Sigma, \exists v \in R, uaR_Ov$$

Cette propriété peut être vérifiée par cet algorithme, expliqué de façon visuelle sur la table O :

---

#### Algorithme 1 Vérification de la fermeture

---

**Promet:** si la fermeture est respectée ou non

```

1: pour chaque élément  $w$  de la section  $R$  faire
2:   pour chaque symbole  $a$  dans  $\Sigma$  faire
3:     si  $wa$  est dans  $R$  alors
4:       continuer
5:     sinon
6:        $\{wa \text{ est dans } R.\Sigma \text{ par construction}\}$ 
7:       si La ligne de  $wa$  dans  $T$  est différente de celle de  $w$  alors
8:         retourner Faux
9:       fin si
10:    fin si
11:  fin pour
12: fin pour
13: retourner Vrai

```

---

#### Cohérence

La propriété de *cohérence* (consistence) se définit mathématiquement comme

$$\forall u, v \in R, uR_Ov \Rightarrow \forall a \in \Sigma, uaR_Ova$$

Concrètement, il s'agit de prendre deux mots  $(u, v)$  dans  $R$  ayant la même ligne dans  $T$  et vérifier, pour chaque symbole  $(a)$ , s'ils  $(ua, va)$  ont la même ligne dans  $T$ .

### 5.5 L'algorithme

Considérons l'automate  $A_3$  de la figure 11 construit à la section ?? sur la minimisation.

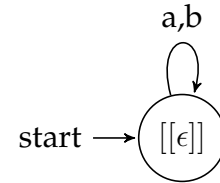
*TODO : Marquer la différence entre  $R_L$  et  $R_O$*



### 5.5.1 Première itération

L'algorithme d'Angluin précise, pour son cas de base, une initialisation de la table  $T$  avec les ensembles  $R$  et  $S$  contenant uniquement  $\epsilon$ . Le champ  $R.\{a, b\}$  ( $R.\Sigma$ ) est rempli via des requête d'appartenance sur les mots  $a$  et  $b$ .

$O_0$	$\epsilon$
$\epsilon$	0
$a$	0
$b$	0



Automate  $O_0$

L'étape suivante consiste à vérifier la *closure* de la table d'observation  $O_0$ . Mathématiquement :

$$\forall u \in R, \forall a \in \Sigma, \exists v \in R, uaR_L v$$

Intuitivement, pour chaque symbole (ici,  $\{a, b\}$ , et ce sera vrai jusqu'à la dernière itération), tout mot candidat (dans  $R$ , la partie supérieure de la table) doit se retrouver, complété de ce symbole, dans une classe d'équivalence d'un autre candidat de  $R$ . Ici, de toute évidence, les mots  $a$  et  $b$  sont dans la même classe d'équivalence que  $\epsilon$ . Dès lors, la propriété de *closure* est respectée.

Si la *closure* est respectée, alors la question de la *consistence* (cohérence) se pose. Mathématiquement :

$$\forall u, v \in R, uR_L v \Rightarrow \forall a \in \Sigma, uaR_L va$$

Intuitivement, si deux candidats semblent être dans la même classe d'équivalence (leur lignes dans la table supérieure sont identiques), alors pour n'importe quel symbole, les deux nouveaux mots sont également dans une même classe d'équivalence (leur lignes, potentiellement dans la partie inférieure de la table, sont identiques). N'ayant qu'un seul candidat, cette propriété est forcément respectée ( $R_L$  est réflexive).

Les deux propriétés étant respectées, les classes d'équivalences sont calculées (trivialement ici), et un automate  $O_0$  est proposé à l'enseignant pour vérification.

Sur cette itération, un automate initial a été proposé, et aucun état final ne pouvant être atteint avec un seul symbole, la version est minime.

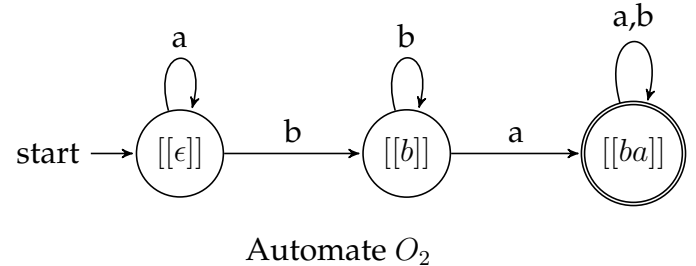
### 5.5.2 Seconde itération

L'enseignant répond que non, les automates ne sont pas équivalents. Il fournit le contre-exemple  $ba$ . Comme il est rejeté par  $O_0$ , cela signifie qu'il est accepté par  $A_4$ . Une nouvelle table est alors construite, en ajoutant  $ba$  et ses préfixes (ici, juste  $b$ ) à  $R$ .  $R.\Sigma$  est calculé et les mots

n'ayant pas encore reçu une valeur dans  $T$  sont soumis à l'enseignant pour un test d'appartenance.

$O_1$	$\epsilon$
$\epsilon$	0
$b$	0
$ba$	1
$a$	0
$bb$	0
$baa$	1
$bab$	1

$O_2$	$\epsilon$	$a$
$\epsilon$	0	0
$b$	0	1
$ba$	1	1
$a$	0	0
$bb$	0	1
$baa$	1	1
$bab$	1	1



Comme pour la première itération, la *fermeture* est testée, suivie de la *cohérence*. Celle-ci n'est pas respectée : si on considère les mots  $\epsilon$  et  $b$ , qui ont la même ligne dans la table  $T$  ( $\epsilon R_O b$ ), le symbole  $a$ , on obtient les mots  $a$  et  $ba$  qui n'ont pas la même ligne : ( $\not a R_O ba$ ). Le symbole  $a$  est alors ajouté à  $S$  et une nouvelle table  $O_2$  est calculée.

La fermeture étant déjà vérifiée, la question de la cohérence est reposée, et cette fois-ci elle est vérifiée ; l'automate est construit et proposé à l'enseignant.

Sur cette itération, l'algorithme a reçu le mot  $ba$  comme étant accepté. Il a du ajouter  $a$  à  $S$  pour permettre de différencier certains états. L'automate se voit ajouter les états  $[[b]]$  et  $[[ba]]$ .

### 5.5.3 Troisième itération

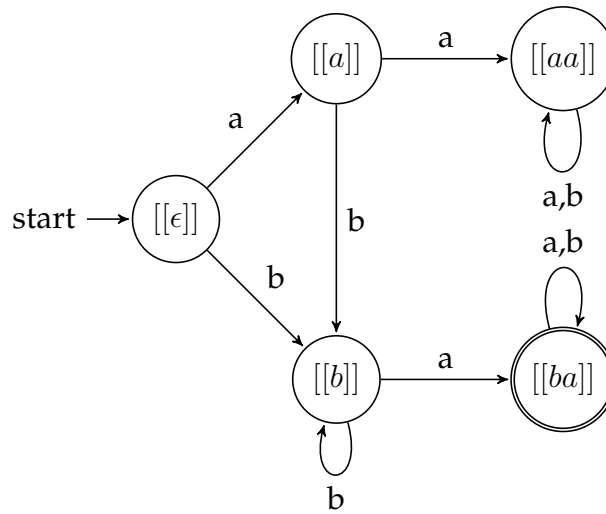
Suivant toujours l'algorithme de comparaison d'automates détaillé dans la section ??, l'enseignant découvre qu'ils sont différents.

Il sort le contre-exemple  $aaba$ . Si c'est un contre-exemple et qu'il est accepté par  $O_2$ , c'est qu'il ne l'est pas (0) par  $A_4$ . Une nouvelle table  $O_3$  doit être construite.

$O_3$	$\epsilon$	$a$
$\epsilon$	0	0
$a$	0	0
$b$	0	1
$aa$	0	0
$ba$	1	1
$aab$	0	0
$aaba$	0	0
$ab$	0	1
$bb$	0	1
$aaa$	0	0
$baa$	1	1
$bab$	1	1
$aabb$	0	0
$aabaa$	0	0
$aabab$	0	0

$O_4$	$\epsilon$	$a$
$\epsilon$	0	0
$a$	0	0
$b$	0	1
$aa$	0	0
$ab$	0	1
$ba$	1	1
$aab$	0	0
$aaba$	0	0
$bb$	0	1
$aaa$	0	0
$aba$	1	1
$abb$	0	1
$baa$	1	1
$bab$	1	1
$aabb$	0	0
$aabaa$	0	0
$aabab$	0	0

$O_5$	$\epsilon$	$a$
$\epsilon$	0	0
$a$	0	0
$b$	0	1
$aa$	0	0
$ab$	0	1
$ba$	1	1
$aab$	0	0
$aba$	1	1
$aaba$	0	0
$bb$	0	1
$aaa$	0	0
$abb$	0	1
$baa$	1	1
$bab$	1	1
$aabb$	0	0
$abaa$	1	1
$abab$	1	1
$aabaa$	0	0
$aabab$	0	0

Automate  $O_5$ 

Ayant reçu  $aaba$ , ce mot et tous ses préfixes sont ajoutés à la table. L'extension  $R.\Sigma$  est recalculée et la table  $O_3$  est construite.

Ensuite, la question de la *fermeture* est posée. Un manquement est détecté : le mot  $a$ . En effet, en lui ajoutant le symbole  $b$ , on obtient  $ab$  qui n'est ni dans  $R$  ni en relation  $R_O$  avec  $a$ .  $ab$  est alors ajouté à  $R$ , et  $R.\Sigma$  est étendu. La nouvelle table,  $O_4$  est de nouveau testée.

$O_4$  ne respecte pas la fermeture : le mot  $ab$ , agrémenté du symbole  $a$  donne le mot  $aba$ , qui n'est ni dans  $R$  ni en relation avec  $ab$ . Le mot est ajouté à  $R$ , et la table est étendue. La nouvelle

table,  $O_5$  est à la fois fermée et cohérente.

L'automate  $O_5$  est alors proposé à l'enseignant pour vérification. Celui-ci est accepté (isomorphe à  $A_4$ ). L'algorithme s'arrête et un automate minimal pour le langage a été construit.

## Références

- [1] J. E. HOPCROFT, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (2nd Edition)*, Addison Wesley, nov 2000.
- [2] J. E. HOPCROFT AND J. D. ULLMAN, *Introduction to automata theory, languages and computation. adison-wesley*, Reading, Mass, (1979).
- [3] A. VARDHAN, K. SEN, M. VISWANATHAN, AND G. AGHA, *Actively learning to verify safety for fifo automata*, in International Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, Springer, 2004, pp. 494–505.