UMONS

Faculté
des Sciences

Vérification de la sécurité d'automates à file par apprentissage actif

Étudiant : Benjamin André
Directrice :Véronique Bruyère
18 novembre 2020

Faculté des Sciences • Université de Mons • Place du Parc 20 • B-7000 Mons

Table des matières

Environnements théoriques

Exemples

Environnements algorithmiques

Chapitre 1

Introduction

Huitième version du document.

Le but de ce mémoire est de comprendre et implémenter l'article "Actively learning to verify safety for FIFO automata" [7].

Pour ce faire, plusieurs étapes sont necéssaires. Dans le chapitre 2, les bases théoriques et leurs notations sont rappelées. Celles-ci concernent les automates, les langages et l'algorithme d'Angluin.

Dans le chapitre 3, des notions plus spécifiques telles que les automates à files ou les langages de trace (développés dans l'article) sont abordées.

Ensuite, le chapitre 4 s'appuie sur toutes ces notions et explique l'algorithme LeVer (Learning to Verify) qui permet justement l'apprentissage actif d'automates à files pour vérifier leur sécurité.

Le chapitre 5 mentionne les choix techniques faits pour l'implémentation avant de présenter et discuter les résultats obtenus.

Finalement, le chapitre 6 résume l'apport et les conséquences de ce travail avant de proposer des pistes d'amélioration.

Chapitre 2

Bases théoriques

Dans la section 2.1, les notions de langage sont posées. Elles sont ensuite utilisées dans la section 2.2 sur les automates. Le "Table Filling Algorithm" de la section 2.3 se base sur ces automates et permet de les minimiser et de répondre à la requête d'équivalence. Cette requête d'équivalence est une des deux requêtes necéssaire au fonctionnement de l'algorithme d'angluin de la section 2.4.

Tous ces éléments combinés permettent la compréhension des notions plus spécifiques utilisées dans l'article [7] ainsi que celles qui y sont construites. Ces notions se retrouvent dans le chapitre 3.

2.1 Langage

Cette section pose les différents concepts et notations pour arriver à la notion de langage. Celles-ci reprennent les notations proposées par Hopcroft et al. [3]. Un sous-ensemble de ces langages correspond à des automates, sujet central de ce document.

2.1.1 Définitions

Un *alphabet* Σ est un ensemble fini et non vide de *symboles*. Un *mot* sur cet alphabet Σ est une suite finie de k éléments de Σ notée $w = a_1 a_2 \dots a_k$ où k est un nombre naturel. k est la *longueur* de ce mot aussi notée $|w| = k$. Le *mot vide* est un mot de taille $k = 0$ noté $w = \epsilon$.

La *concaténation* de deux mots $w = a_1 a_2 \dots a_k$ et $x = b_1 b_2 \dots b_j$ est l'opération consistant à créer un nouveau mot $wx = a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_j$ de longueur $i = k + j$.

Proposition 2.1.1 (ϵ et la concaténation) ϵ est *l'identité pour la concaténation*, à savoir pour tout mot w, $w\epsilon = \epsilon w = w$.

Cette proposition est triviale par la définition de la concaténation.

L'exponentiation d'un symbole a à la puissance k, notée a^k, retourne un mot de longueur k obtenu par la concaténation de k copies du symbole a. Noter que $a^0 = \epsilon$. Σ^k est *l'ensemble des mots sur* Σ de longueur k. L'ensemble de *tous les mots possibles sur* Σ est noté $\Sigma^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$.

Un ensemble quelconque de mots sur Σ est un *langage*, noté $L \subseteq \Sigma^*$. Étant donné que Σ^* est infini, L peut l'être également.

Exemple 1 (Langages)
Voici des exemples utilisant plusieurs modes de définition. Σ y est implicite mais peut être donné explicitement.

- $L = \{12, 35, 42, 7, 0\}$, un langage défini explicitement
- $L = \{0^k 1^j | k + j = 7\}$, les mots de 7 symboles sur $\Sigma = \{0, 1\}$ commençant par zéro, un ou plusieurs 0 et finissant par zéro, un ou plusieurs 1. Ici, L est donné par notation ensembliste
- L contient tous les noms de villes belges. Ici L est défini en langage courant.
- $\emptyset$ est un langage sur tout alphabet.
- $L = \{\epsilon\}$ ne contient que le mot vide, et est un langage sur tout alphabet.

2.1.2 Opérations sur les langages

Soient L et M deux langages. Le langage $L \cup M = \{w | w \in L \vee w \in M\}$ est l'*union* de ces deux langages. Il est composé des mots venant d'un des deux langages.

Le langage composé de tous les mots produits par la concaténation d'un mot de L avec un mot de M est une *concaténation* de ces deux langages et s'écrit $LM = \{vw | v \in L \wedge w \in M\}$.

La *fermeture* de L est un langage constitué de tous les mots qui peuvent être construits par un concaténation d'un nombre arbitraire de mots de L, noté $L^* = \{w_1 w_2 \dots w_n | n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, w_i \in L\}$.

2.1.3 Expressions régulières

Certains langages peuvent être exprimés par une *expression régulière*.

Une expression régulière est un mot utilisant les symboles à représenter ainsi que les symboles (,),*, | qui sont réservés pour différentes opérations. Une expression régulière est construite à partir d'élements atomiques (les symboles du langage à représenter) et assemblés pour obtenir des langages plus complexes. Un language qui peut-être représenté par une expression régulière est dit *langage régulier*.

Si plusieurs expressions régulières peuvent être composées en une expression plus complexe, une expression régulière peut aussi être décomposée en ses différents composants.

Cas de base Certains langages peuvent être construits directement sans passer par l'induction :

- ϵ est une expression régulière. Elle décrit le langage $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$
- $\emptyset$ est une expression régulière décrivant $L(\emptyset) = \emptyset$
- Si a est un symbole, alors a est une expression régulière décrivant le langage $L(a) = \{a\}$.

Induction Les autres langages réguliers sont construits suivant différentes règles d'induction présentées par ordre décroissant de priorité :

- Si E est une expression régulière, alors (E) est une expression régulière et $L((E)) = L(E)$.
- Si E est une expression régulière, alors E^* est une expression régulière représentant la fermeture de $L(E)$, à savoir $L(E^*) = L(E)^*$.

— Si E et F sont des expressions régulières, alors EF est une expression régulière décrivant la concaténation des deux langages représentés, à savoir $L(EF) = L(E)L(F)$.
— Si E et F sont des expressions régulières, alors $E + F$ est une expression régulière donnant l'union des deux langages représentés, à savoir $L(E+F) = L(E) \cup L(F)$. Ici encore, l'opération est associative et la priorité est à gauche.

Exemple 2 (Expressions régulières)
Soit l'expression $E = (b + ab)b^*a(a + b)^*$ qui décrit le langage $L = L(E)$.

— Le mot ba fait partie de L. En effet, $ba = b\epsilon a\epsilon = (b)b^0a(a + b)^0$, ce qui respecte bien la définition de E.
— Le mot $ababbab$ fait partie de L. A nouveau, $ababbab = ab\epsilon a(a + b)(a + b)(a + b)(a + b) = (ab)b^0a(a + b)^4$.
— Le mot aa ne fait **pas** partie de L. Supposons par l'absurde que $aa \in L$. Alors il existerait une façon de décomposer E en aa. Or, les premiers symboles doivent être soit b, soit ab. Il y a contradiction. Donc, $aa \notin L$.

Un autre exemple d'expression régulière est $E = 01^*0$. E décrit le langage $L(E)$ constitué de tous les mots commençant et finissant par 0 avec uniquement des 1 entre les deux.

2.2 Automate Fini

Cette section décrit les automates finis, fait le lien avec la notion de langage régulier et propose une représentation visuelle de ces automates. La notation suivie dans cette section s'appuye principalement sur [4], [3] et [5].

2.2.1 Définitions

Un *automate fini* $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ est défini comme suit :
— Q est un ensemble fini d'*états*
— Σ est un alphabet
— $q_0 \in Q$ est l'*état initial*
— δ est la *fonction de transition*
— $F \subseteq Q$ est un ensemble d'*états acceptants*.
La fonction de transition δ est définie différemment en fonction du type d'automate souhaité :
— **Automate Déterministe Fini (ADF)** $\delta : Q \times \Sigma \to Q$. Soit un état q et un symbole a. Alors la *transition* $\delta(q, a)$ retourne un état p. $\delta(q, a)$ doit être définie pour tout état et tout symbole.
— **Automate Non-déterministe Fini (ANF)** $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$. Soit un état q et un symbole a. Alors la transition $\delta(q, a)$ retourne un ensemble d'états $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq Q$.
— **Automate Non-déterministe Fini avec des transitions sur ϵ (ϵ-ANF)** $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to 2^Q$. Pareil que précédemment mais une transition peut exister sans symbole : elle se fait alors sur ϵ.

Lorsqu'un automate est mentionné dans ce document, il s'agit implicitement d'un ϵ-ANF, sauf mention contraire. En effet, c'est la forme la plus générale. Cependant, ces trois types d'automates ont la même puissance expressive, ce qui est prouvé dans la section 2.2.6.

Soit la transition $\delta(q, a) = p$ (dans un ADF). Pour q, c'est une *transition sortante sur a*. Pour p, c'est une *transition entrante sur a*.

Si $\delta(q, a) = P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ dans un ANF, alors les états $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ auront une transition entrante sur a.

Dans le cas des ANFs et ϵ-ANFs, il peut être pratique d'utiliser δ sur un ensemble d'états S. A ce moment, $\delta(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$ avec $a \in \Sigma$.

Exemple 3 (Automate déterministe fini)

On considère l'automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ défini comme suit :

— $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$
— $\Sigma = \{a, b\}$
— q_0 est l'état du même nom.
— La fonction de transition δ est décrite par la table 2.1.
— $F = \{q_3\}$

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_1
q_1	q_3	q_5
q_2	q_4	q_5
q_3^*	q_3	q_3
q_4	q_4	q_4
q_5	q_3	q_1
q_6	q_4	q_5

TABLE 2.1: La *table de transitions* δ d'un ANF

Cette table de transitions est construite comme suit :

— Les en-têtes de colonnes sont des symboles $a \in \Sigma$.
— Les en-têtes de lignes sont des états $q \in Q$.
— Un cellule à la croisée de la ligne q et du symbole a contient un état p avec $p = \delta(q, a)$.

Via la notation de la table 2.1, Q et Σ sont explicites. En dénotant l'état initial par $\rightarrow$ et les états acceptants par $*$ en exposant, on obtient une définition complète d'un automate : $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$.

Exemple 4 (ϵ-ANF)

De la même façon que pour l'exemple précédent, considérons un automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ défini comme suit :

— $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
— $\Sigma = \{a, b, c\}$
— q_0 est l'état du même nom
— δ est donnée par la table 2.2.

— $F = \{q_2\}$

A est un ϵ-ANF ; une colonne supplémentaire sert à représenter la transition sur ϵ.

	ϵ	a	b	c
$\rightarrow q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_2^*	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

TABLE 2.2: La table de transitions δ d'un Σ-ANF

Une table similaire sans la colonne ϵ représenterait un ANF au sens strict. Celui-ci ne serait pas pour autant équivalent à l'$\epsilon - ANF$ de la table 2.2.

2.2.2 Représentation graphique

Le *graphe d'un automate fini* $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ est un graphe dirigé construit comme suit :

— Chaque état de Q est représenté par un nœud.

— Chaque transition $\delta(q, a)$ est représenté par un arc étiqueté a. Dans le cas d'un automate non-déterministe, un arc existe pour chacun des états obtenus en suivant la transition. Si il y a plusieurs transitions sortant d'un même état et entrant dans un même autre état, les arcs peuvent être fusionnés en listant les étiquettes.

— L'état initial est mis en évidence par une flèche entrante.

— Les états acceptants sont représentés par un double cercle, en opposition au simple cercle des autres nœuds.

Exemple 5 (Graphe d'automate)

Voici les graphes représentant les automates définis dans les tables 2.1 et 2.2 :

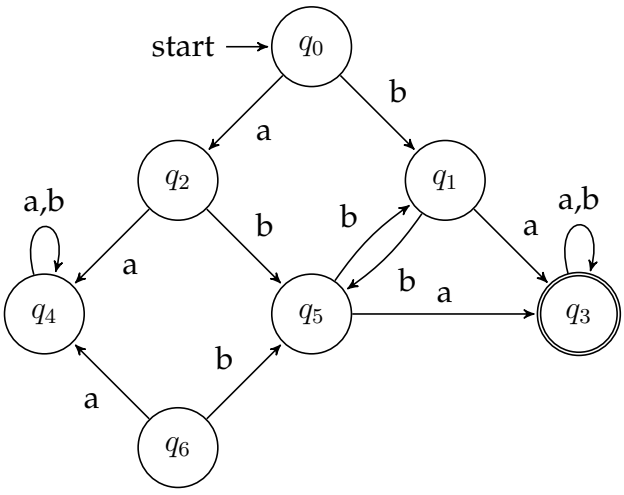


FIGURE 2.1: Graphe de l'ADF de la table 2.1

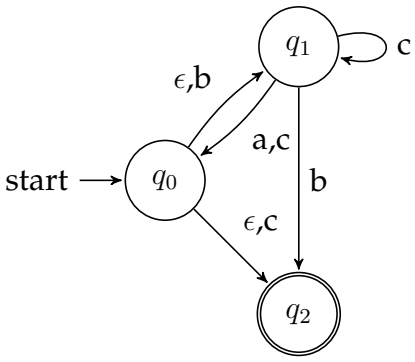


FIGURE 2.2: Graphe du ϵ-ANF de la table 2.2

Cette représentation a l'avantage d'être plus visuelle, alors que la table de transition est plus structurée.

2.2.3 ECLOSE

Cette sous-section introduit l'algorithme ECLOSE. Cet algorithme concerne les ϵ-ANFs. Il permet, à partir d'un état spécifique, de calculer l'ensemble des états atteignables uniquement par des transitions sur ϵ. Ce calcul sert notemment au test d'appartenance d'un mot à un langage défini par un ϵ-ANF comme présenté à la section 2.2.4.

Soit un ϵ-ANF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Il est possible de construire un fonction retournant l'ensemble des états atteints uniquement en suivant des transitions sur ϵ pour un état q donné. Cette fonction est la *fermeture sur epsilon* $ECLOSE : Q \to 2^Q$. Sa définition est inductive.

Soit q un état dans Q.
Cas de base q est dans ECLOSE(q)
Pas de récurrence Si p est dans ECLOSE(q) et qu'il existe un état r tel quel $r \in \delta(p, \epsilon)$, alors r est dans ECLOSE(q).

ECLOSE peut être utilisé indifféremment sur un ensemble d'états S ($ECLOSE : 2^Q \to 2^Q$). Alors, $ECLOSE(S) = \bigcup_{q \in S} ECLOSE(q)$.

Exemple 6 (ECLOSE)

Considérons l'automate A de l'exemple 4. Les différentes fermetures peuvent être calculées :
- ECLOSE(q_0) = $\{q_0, q_1, q_2\}$. En effet, q_0 appartient à sa fermeture, selon le cas de base. Aussi, $q_1, q_2 \in \delta(q_0, \epsilon)$.
- ECLOSE(q_1)=$\{q_1\}$ par le cas de base.
- ECLOSE(q_2)=$\{q_2\}$ par le cas de base.

2.2.4 Langage

Un automate représente un langage. Cette section explique comment il le fait pour les 3 catégories d'automates.

Fonction de transition étendue

La *fonction de transition étendue* $\hat{\delta}$ est une extension de la fonction de transition, acceptant plusieurs symboles de façon consécutive. Intuitivement, il s'agit de suivre plusieurs arcs sur le graphe.

Comme δ est différente en fonction du type d'automate considéré, $\hat{\delta}$ l'est aussi.
- **ADF :** $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$. $\hat{\delta}$ prend en entrée un état de Q et un mot w sur Σ et retourne un état de Q.
- **ANF et ϵ-ANF :** $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$. $\hat{\delta}$ prend en entrée un état de Q et un mot w sur Σ et retourne un ensemble d'états de Q.

Soit un état $q \in Q$ et un mot $w \in \Sigma^*$. Alors $\hat{\delta}$ est définie par :
Cas de base w est un mot vide :
- Pour un ADF ou ANF : $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$.
- Pour un ϵ-ANF : $\hat{\delta}(q, \epsilon) = ECLOSE(q)$.

Pas de récurrence Si $|w| \geq 1$, alors $w = xa$ avec x un mot sur Σ et a un symbole de Σ.

— Pour un ADF ou ANF : $\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$

— Pour un ϵ-ANF : $\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(q, xa) = ECLOSE(\delta(\hat{\delta}(q, x), a))$.

Dans le cas particulier où $|w| = 1$, $w = xa = \epsilon a$, ce qui mène au cas de base.

Il se peut que la fonction de transition δ ne soit pas définie pour une paire d'arguments. Auquel cas, $\hat{\delta}$ ne l'est pas non plus.

Chemin

Un *chemin* est une suite d'états d'un automate. Chaque état de cette suite doit être atteignable par une transition depuis l'état précédent dans cette suite.

Exemple 7 (Chemin)

Considérons l'automate A de la figure 2.1. Il existe un chemin de q_0 à q_5 : (q_0, q_2, q_5). En effet, les transitions sont définies : $\delta(q_0, a) = q_2$ et $\delta(q_2, b) = q_5$. Un mot représenté par ce chemin est ab.

Dans le cas où plusieurs transitions mènent d'un état à un autre, plusieurs mots peuvent être représentés par un même chemin. Chaque état d'un chemin entre deux états p et q et distinct de ceux-ci est dit *état intermédiaire*. S'il existe un chemin menant de q_0 à un état p, p est dit *atteignable*. Dans le cas contraire, il est *inatteignable*.

Langage

Le *langage représenté* par un automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ $L(A)$ peut alors se définir comme les mots qui, par l'application de $\hat{\delta}$ sur l'état initial, donnent un état acceptant. Si deux automates représentent le même langage, ils sont dit *équivalents*. Voici les définitions ensemblistes, respectivement pour un ADF et pour un (ϵ)-ANF

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} \quad L(A) = \{w \in \Sigma^* | \exists q \in \hat{\delta}(q_0, w), q \in F\}$$

Un mot appartenant à $L(A)$ est dit *accepté* par l'automate A.

Exemple 8

Soit A l'ADF de la figure 2.1. Alors $abaa$ est un exemple de mot appartenant à $L(A)$. En effet :

$$\begin{aligned}
&\hat{\delta}(q_0, abaa) = \\
&\delta(\hat{\delta}(q_0, aba), a) = \\
&\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, ab), a), a) = \\
&\delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, a), b), a), a) = \\
&\delta(\delta(\delta(\delta(q_0, a), b), a), a) = \\
&\delta(\delta(\delta(q_2, b), a), a) = \\
&\delta(\delta(q_5, a), a) = \\
&\delta(q_3, a) = \\
&q_3 \in F
\end{aligned}$$

Exemple 9

Soit A le Σ-ANF de la figure 2.2. Alors cb est un exemple de mot appartenant à $L(A)$. En effet :

$$\begin{aligned}
&\hat{\delta}(q_0, cb) = \\
&ECLOSE(\delta(\hat{\delta}(q_0, c), b)) = \\
&ECLOSE(\delta(ECLOSE(\delta(\hat{\delta}(q_0, \epsilon), c)), b)) = \\
&ECLOSE(\delta(ECLOSE(\delta(ECLOSE(q_0), c)), b)) = \\
&ECLOSE(\delta(ECLOSE(\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, c)), b)) = \\
&ECLOSE(\delta(ECLOSE(\{q_0, q_1, q_2\}), b)) = \\
&ECLOSE(\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, b)) = \\
&ECLOSE(\{q_1, q_2\}) = \\
&\{q_1, q_2\}
\end{aligned}$$

On a bien l'ensemble d'états $\{q_1, q_2\}$ avec $q_2 \in F$.

L'algorithme 2.2.1 représente cette appartenance pour un mot.

Algorithme 2.2.1 (Appartenance d'un mot à un langage défini par un automate)
Requis: *un mot w, un automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ représentant $L = L(A)$*
Promet: *si w appartient à L*

1: $C \leftarrow \{q_0\}$ *{C est l'ensemble des états courants}*
2: ***si*** *A est un ϵ-ANF* ***alors***
3: $\quad C \leftarrow ECLOSE(C)$
4: ***fin si***
5: ***tant que*** $|w| > 0$ ***faire***
6: *décomposer w en ax avec $a \in \Sigma$ et x le reste du mot*
7: $C \leftarrow \delta(C, a)$ *{passage à l'ensemble des états suivants}*
8: *{Si l'automate est un ADF, C ne contient toujours qu'un seul état}*
9: $w \leftarrow x$
10: ***si*** *A est un ϵ-ANF* ***alors***
11: $\quad C \leftarrow ECLOSE(C)$
12: ***fin si***
13: ***fin tant que***
14: ***retourner*** *s'il existe un état $q \in C$ appartenant à F*

Complexité 2.2.1.1 (Lecture d'un mot par un automate)

La complexité de l'algorithme 2.2.1 dépend du type d'automate considéré. Considérons que $|w| = n$.

L'opération 1 est en temps constant. Les opérations 2 à 4 ont la complexité d'ECLOSE. Pour un ADF ou ANF, cette opération est triviale ($\mathcal{O}(1)$). Pour un ϵ-ANF, cette opération est en $\mathcal{O}(n)$. En effet, n états au plus peuvent être ajoutés à l'ensemble.

Les opération 6 et 9 sont en temps constant. L'opération 7 à la complexité de δ. Cette fonction est triviale pour un ADF. Si celui-ci est stocké dans un tableau, l'opéation est en temps constant.

Pour un ANF ou ϵ-ANF, comme δ porte sur un sous-ensemble de Q, l'opération est en $\mathcal{O}(n)$. Le pire des cas étant $C = Q$ avant ou après l'application de δ. Les opérations 10 à 12 sont à nouveau une application de $ECLOSE$.

Dès lors, le pire des cas du corps de la boucle de l'opération 5 est le maximum entre le pire des cas de $ECLOSE$ et de δ. Cette boucle s'effectue au plus n fois. Une lettre est enlevée à chaque itération.

L'opération 14 se fait en $\mathcal{O}(\log_2(n))$ pour un ADF et $\mathcal{O}(n \log_2(n))$ pour un ANF ou ϵ-ANF. Cette valeur suppose une recherche efficace dans F (en $\mathcal{O}(\log_2(n))$).

En conclusion :

ADF	ANF	ϵ-ANF
$\mathcal{O}(1)+n(\mathcal{O}(1)+\mathcal{O}(1))+\mathcal{O}(\log_2(n))$	$\mathcal{O}(1)+n(\mathcal{O}(1)+\mathcal{O}(n))+\mathcal{O}(nlog_2(n))$	$\mathcal{O}(n)+n(\mathcal{O}(n)+\mathcal{O}(n))+\mathcal{O}(n \log_2(n))$
$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$

2.2.5 Équivalence entre expression régulière et automate

Certains problèmes peuvent être exprimés sous forme d'appartenance à un langage régulier, et par extension à une expression régulière. Pouvoir convertir une expression réguliere en automate permet d'exécuter cet automate sur une machine pour tester l'appartenance. Ainsi, grâce à cette méthode, une grande classe de problèmes peut être résolue.

Théorème 2.2.1 (ADF et expression régulière) *Un langage peut être exprimé par un automate déterministe fini si et seulement si il peut être décrit par une expression régulière.*

Ce théorème étant une double implication, il est vrai si les deux implications le sont. Étudions celles-ci séparemment.

Théorème 2.2.2 (ADF $\implies$ expression régulière) *Soit un langage L. Il existe un automate déterministe A tel que $L(A) = L$ $\implies$ il existe une expression régulière E telle que $L(E) = L$.*

Preuve 2.2.2.1

Soit un langage L. Supposons qu'il existe un ADF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ tel que $L(A) = L$. Q étant un ensemble fini, on peut définir sa cardinalité : $|Q| = n$. Supposons que ses états soient nommés $\{1, 2, \ldots, n\}$. Il est possible de construire des expressions régulières par induction sur le nombre d'états considérés. De plus, un tel automate est aisément représenté dans un ordre séquentiel, de gauche à droite. Ceci permet de séparer visuellement les k premiers états du reste.

Soient $i, j, k \in Q$, tous équivalents à des nombres inférieurs ou égaux à n. Définissons $E^k_{i,j}$ comme étant l'expression régulière décrivant un langage constitué des mots w tels que $\hat{\delta}(i, w) = j$ et qu'aucun état intermédiaire n'ait un nombre strictement supérieur à k.

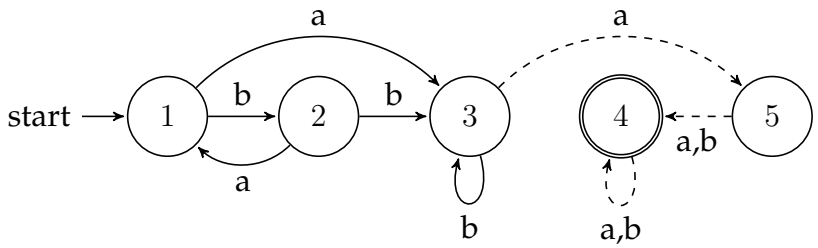


FIGURE 2.3: Exemple : automate mettant $E^3_{1,3}$ en évidence. Les mots représentés par un chemin passant par un arc discontinu n'appartiennent par à $E^3_{1,3}$: un des états intermédiaires est dénommé par un nombre supérieur à $k = 3$.

L'exemple ci-dessus illustre ce fait qu'aucun état supérieur à k ne peut faire partie des états intermédiaires. Intuitivement, il s'agit d'un automate auquel on a enlevé les transitions :

— Allant de i à un nombre supérieur à k (sauf j)
— Entre deux nombres supérieurs à k
— Allant d'un nombre supérieur à k (sauf i) à j

En pratiques, celles-ci ne sont juste pas considérées lors de l'application de δ.

Cas de base $k = 0$. Comme tout état est numéroté 1 ou plus, aucun intermédiaire n'est accepté.

Une possibilité est $i \neq j$. Alors les chemins possibles ne se composent que d'un arc allant directement de i à j. Pour les construire :

Pour chaque paire i, j :

— Il n'existe pas de symbole a tel que $\delta(i, a) = j$. Alors, $E^0_{ij} = \emptyset$
— Il existe un unique symbole a tel que $\delta(i, a) = j$. Alors, $E^0_{ij} = a$
— Il existe des symboles $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tels que $\forall l \in \{1, \ldots, k\}, \delta(i, a_l) = j$. Alors, $E^0_{ij} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$

Une autre possibilité est $i = j$ et indique un chemin de longueur 0. Auquel cas l'expression régulière représentant un chemin sans symbole est ϵ. Ce chemin doit être ajouté au langage décrit par $E^k_{i,j}$ si $i = j$.

Pas de récurrence Supposons qu'il existe un chemin allant de i à j ne passant par aucun état ayant un numéro supérieur à k. La première possibilité est que le-dit chemin ne passe pas par k. Alors, le mot représenté par ce chemin fait partie du langage de E^{k-1}_{ij}. Seconde possibilité, le chemin passe par k une ou plusieurs fois comme représenté à la figure 2.4.

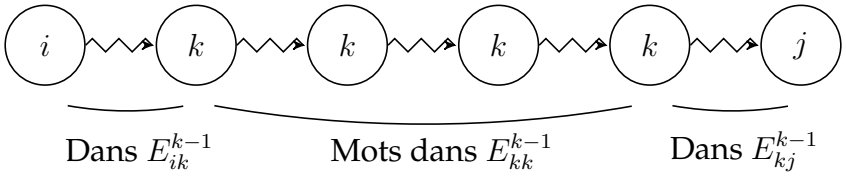


FIGURE 2.4: Un chemin de i à j peut être découpé en différent segment en fonction de k

Auquel cas, ces chemins sont composés d'un sous-chemin donnant un mot dans E_{ik}^{k-1}, suivi d'un sous-chemin donnant un ou plusieurs mots dans E_{kk}^{k-1} et finalement un mot dans E_{kj}^{k-1}.

En combinant les expressions des deux types, on obtient :

$$E_{ij}^{k} = E_{ij}^{k-1} + E_{ik}^{k-1}(E_{kk}^{k-1})^* E_{kj}^{k-1}$$

En commençant cette construction sur E_{ij}^{n}, comme l'appel se fait toujours à des chaînes plus courtes, éventuellement on retombe sur le cas de base. Si l'état initial est numéroté 1, alors l'expression régulière E exprimant L est l'union $(+)$ des E_{1j}^{n} tels que j est un état acceptant.

□

Complexité 2.2.2.1

Soit un ADF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ comportant n états. Pour connaître la complexité totale de cet algorithme, il faut connaître le nombre total d'expressions régulières construites et la longueur de chacune de celles-ci.

A chacune des n itérations (ajoutant progressivement des nouveaux états admis pour état intermédiaire), la longueur de l'expression peut quadrupler : elle est exprimée par 4 facteurs. Ainsi, après n étapes, cette expression peut être de taille $\mathcal{O}(4^n)$.

Le nombre d'expressions à construire, lui, est décomposable en deux facteurs également : le nombre d'itérations et celui de paires i, j possibles. Le premier facteur est n, quand aux paires, leur nombre s'exprime par n^2. n^3 expressions sont construites.

En regroupant ces deux facteurs, on obtient $n^3\mathcal{O}(4^n) = \mathcal{O}(n^3 4^n) = \mathcal{O}(2^n)$. Comme n correspond au nombre d'états, si la transformation se fait depuis un ANF, via un ADF, vers une expression régulière, la complexité devient doublement exponentielle. La première transformation étant elle-même exponentielle en le nombre d'états de l'ANF.

Exemple 10 (Construction d'une expression régulière)

Construction d'une expression régulière à partir de l'automate de la figure suivante :

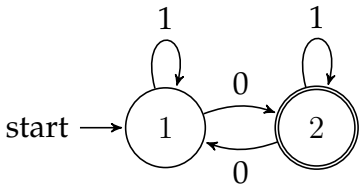


FIGURE 2.5: Un automate acceptant tout mot ayant un nombre impair de 0

La construction par récurrence commençant avec $k = 0$ le processus peut être représenté par des tableaux correspondant à différents k de façon croissante.

Première itération Dans la première itération, chaque expression se résume à un des trois cas de base, avec éventuellement ϵ si $i = j$ pour l'expression analysée. Ici, $k = 0$.

	Cas de base
E_{11}^0	$1+\epsilon$
E_{12}^0	0
E_{21}^0	0
E_{22}^0	$1+\epsilon$

Seconde itération Ensuite, l'état 1 est autorisé comme état intermédiaire : $k=1$. Ayant potentiellement un état intermédiaire, la formule de récurrence est utilisée.

	Formule de récurrence	Détail	Simplification
E_{11}^1	$E_{11}^0 + E_{11}^0(E_{11}^0)^*E_{11}^0$	$(1+\epsilon)+(1+\epsilon)(1+\epsilon)^*(1+\epsilon)$	1^*
E_{12}^1	$E_{12}^0 + E_{11}^0(E_{11}^0)^*E_{12}^0$	$0+(1+\epsilon)(1+\epsilon)^*0$	1^*0
E_{21}^1	$E_{21}^0 + E_{21}^0(E_{11}^0)^*E_{11}^0$	$0+0(1+\epsilon)^*(1+\epsilon)$	01^*
E_{22}^1	$E_{22}^0 + E_{21}^0(E_{11}^0)^*E_{12}^0$	$(1+\epsilon)+0(1+\epsilon)^*0$	$\epsilon+1+01^*0$

Troisième itération A la troisième itération, l'état 2 est autorisé comme état intermédiaire($k=2$).

	Résultat
E_{11}^2	$1^*+1^*0(1+01^*0)^*01^*$
E_{12}^2	$1^*0(1+01^*0)^*$
E_{21}^2	$(1+01^*0)^*01^*$
E_{22}^2	$(1+01^*0)^*$

Pour obtenir une expression régulière correspondant à l'automate, on s'intéresse à celle qui décrit un chemin entre l'état initial (1) et les états acceptants (uniquement 2 ici). Dès lors, $E_{12}^2 = 1^*0(1+01^*0)^* = L$.

Cette expression régulière $1^*0(1+01^*0)^*$ décrit bien un nombre impair de 0. Il en faut absolument un, et tout ajout supplémentaire se fait par paire.

Théorème 2.2.3 (Expression régulière $\implies$ ADF) *($\Leftarrow$) Soit un langage L. Il existe une expression régulière E telle que $L(E)=L$ $\implies$ il existe un automate déterministe A tel que $L(A)=L$.*

Preuve 2.2.3.1

Comme tout ϵ-ANF a un ADF équivalent (théorème 2.2.4), montrer qu'une expression régulière E a un ANF équivalent est suffisant pour obtenir cet ADF.

Soit un langage L. Soit E une expression régulière telle que $L(E)=L$. On peut construire l'automate récursivement sur la définition des expressions régulières à la section 2.1.3. Cette preuve par récurrence repose sur trois invariants portant sur chaque ANF construit :

1. Il y a un unique état acceptant
2. Aucune transition ne mène à l'état initial
3. Aucune transition ne part de l'état acceptant

Intuitivement, ces invariants servent à assurer que l'automate ainsi créé est lu de gauche à droite tel une expression régulière.

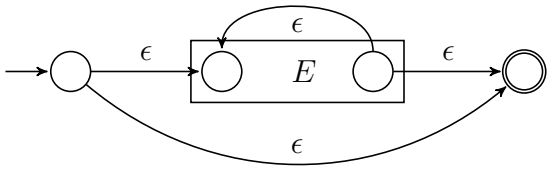
Cas de base Les ANFs de la figure 2.6 représentent les automates correspondant aux trois cas de base.

(a) $L = \{\epsilon\}$ (b) $L = \emptyset$ (c) $L = \{a\}$

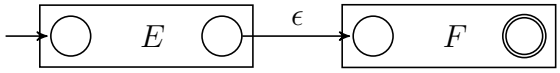
FIGURE 2.6: Blocs de base pour la construction d'un automate à partir d'une expression régulière

En effet, l'automate (a) représente le langage $\{\epsilon\}$ égal à $L(E)$: le seul arc de l'état initial à un état final est ϵ. L'automate (b) ne propose pas d'arc atteignant l'état final. Aucun mot n'appartient au langage représenté par cet automate qui vaut donc $\emptyset = L(\emptyset)$. Finalement, (c) propose un arc pour a. Dès lors, il existe un unique chemin de longueur 1 correspondant au mot a. Ainsi, le langage exprimé par cet automate $\{a\}$ est bien égal à $L(E) = L(a)$. De plus, ces automates respectent bien l'invariant de récurrence proposé.

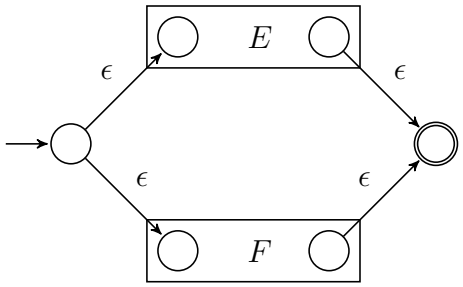
Pas de récurrence Les ANF *abstraits* de la figure 2.7 représentent la façon dont un automate peut être construit récursivement en fonction des règles de récurrence des expressions régulières. Ces ANF sont abstraits car le contenu d'un bloc E ou F n'est pas représenté explicitement. Cependant, celui-ci respecte les invariants de récurrence.



(a) $L = L(E)^*$



(b) $L = L(E)L(F)$



(c) $L = L(E) + L(F)$

FIGURE 2.7: Enchaînement de blocs pour une construction récursive

Les quatre règles de récurrence sur une expression régulière permettent de construire les automates :

— $L((E)) = L(E)$ ne necéssite pas de construction supplémentaire.
— $L(E^*) = L(E)^*$ est construit comme en (a). En effet, l'arc revenant au début de E permet d'exprimer E^1,E^2,E^3,...
— $L(EF) = L(E)L(F)$ est construit comme en (b). En effet, tout mot de cet automate est de la forme $v\epsilon w$ avec $v \in L(E)$ et $w \in L(F)$.
— $L(E + F) = L(E) \bigcup L(F)$ est construit comme en (c). En effet, tout mot de cet automate est de la forme $\epsilon v\epsilon$ ou $\epsilon w\epsilon$ avec $v \in L(E)$ et $w \in L(F)$, en accord avec la définition de l'union ensembliste.

Les automates (a), (b) et (c) respectent bien l'invariant de récurrence : pas de transition vers l'état initial, un seul état acceptant n'ayant pas de transition sortante. Chaque automate abstrait pour E ou F peut lui même être construit récursivement jusqu'au cas de base.

□

Complexité 2.2.3.1

Soit une expression régulière E contenant n symboles (alphabet et opérations comprises) représentant un langage $L = L(E)$. La construction d'un ANF pour L peut se faire en $\mathcal{O}(n)$. En effet :

— Cas de base : Au plus n ANFs sont créés. Chacun correspond à un symbole (opérations non comprises). Chaque ANF a un état, rendant la création en temps constant. La création de tous ces ANFs est alors en $\mathcal{O}(n)$
— Récurrence : Il reste au plus n symboles correspondant à des opérations, ce qui implique au plus n opérations. Chaque opération se base sur les 4 règles de récurrences définies précédemment. Dans les cas necéssitant une construction, celle-ci peut se faire en temps constant (ajout d'au plus deux états et quatre transitions). Chaque opération n'est à effectuer qu'une seule fois, consommant le symbole, et que chacune se fait en temps constant. Dès lors, la totalité des étapes de récurrence se fait au plus en $\mathcal{O}(n)$

La complexité totale de cette conversion est en $\mathcal{O}(n)$ vers un ANF. La conversion vers un ADF, comme mentionné dans la section ci-après peut quand à elle être exponentielle.

2.2.6 Équivalence entre un automate déterministe fini et un automate non-déterministe fini

Cette section présente une méthode permettant de créer un ADF à partir d'un ANF et réciproquement. Ici, ANF est considéré au sens-large et peut tout aussi bien être un ANF normal qu'un ϵ-ANF. Ceci permet de justifier l'abstraction faite entre les différents types d'automates finis et l'utilisation du même terme pour tous ceux-ci.

Soit un ANF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Alors l'ADF équivalent

$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$$

est défini par :

— $Q_D = \{T | T = \text{ECLOSE}(S) \text{ et } S \subseteq Q\}$. Concrètement, Q_D est l'ensemble des parties des Q fermées sur ϵ. Ceci qui signifie que chaque transition sur ϵ depuis un état de T mène à un état également dans T. L'ensemble $\emptyset$ est fermé sur ϵ.
— q_D=ECLOSE(q_0). L'état initial de D est l'ensemble des états dans la fermeture sur ϵ des états de A.
— $F_D = \{T | T \in Q_D \text{ et } T \cap F \neq \emptyset\}$ contient les ensembles dont au moins un état est acceptant pour A.
— $\delta_D(T, a)$ est construit, $\forall a \in \Sigma, \forall T \in Q_D$ par :
  1. Soit $T = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.
  2. Calculer $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$. Renommer cet ensemble en $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$.
  3. Alors $\delta_D(T, a) = \bigcup_{j=1}^{m} \text{ECLOSE}(r_j)$.

Exemple 11 (Transformation ANF vers ADF)

Considérons l'automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ de l'exemple 4 et les fermetures calculées dans l'exemple 6.

Alors, l'automate $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ est donné par :

— $Q_D = \{\emptyset, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$. Les ensembles $\{q_0, q_1\}$ et $\{q_0, q_2\}$ sont des sous-ensembles de Q mais ne sont pas fermés sur ϵ.
— $q_D = \{q_0, q_1, q_2\} = \text{ECLOSE}(q_0)$.

— $F_D = \{\{q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$, les ensembles contenant q_2, étant acceptant de A.
— δ_D est exprimé sur le graphe de la figure 2.8.

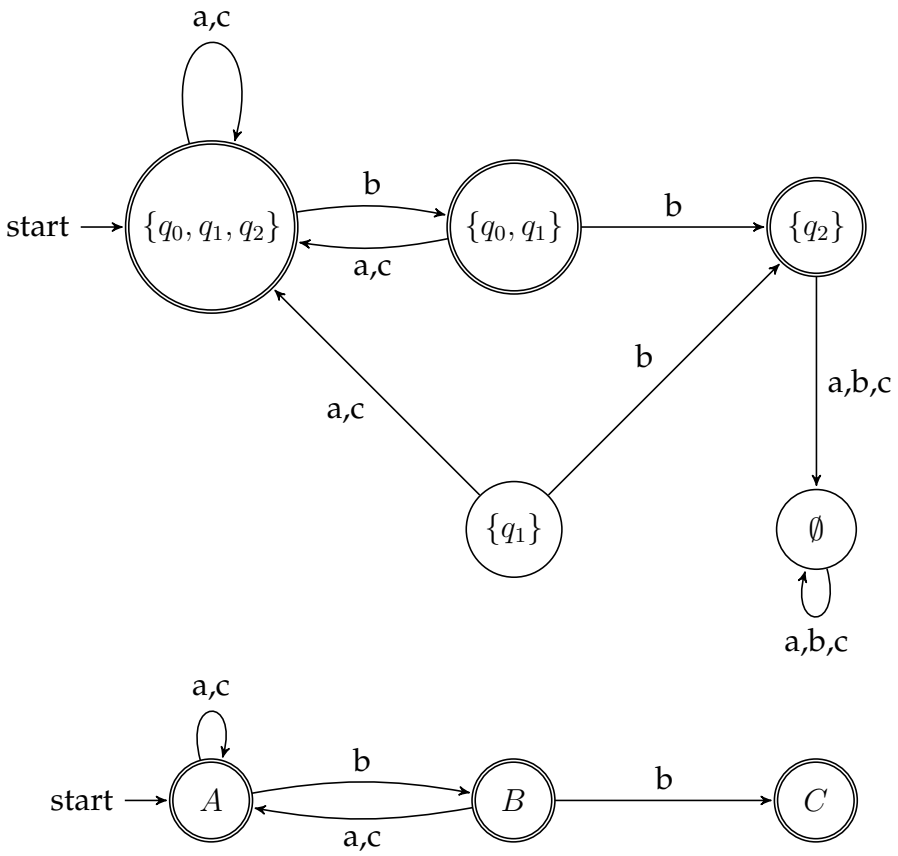


FIGURE 2.8: Automate D. De par la construction de Q, le nombre d'états de D est exponentiel. Les états inatteignables et $\emptyset$ sont souvent omis pour clarifier la représentation.

Théorème 2.2.4 (ANF ⇔ ADF) *Un langage L peut être représenté par un ANF si et seulement si il peut l'être par un ADF.*

Preuve 2.2.4.1

Soit L un langage. Cette preuve étant une double implication, chacune peut être prouvée séparément.

($\Leftarrow$) L peut être représenté par un ADF $\implies$ L peut être représenté par un ANF. Supposons qu'un automate $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ représente L : $L(D) = L$. L'ANF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ correspondant est construit comme suit :

— $Q = \{\{q\} | q \in Q_D\} \bigcup \emptyset$
— δ contient les transitions de D modifiées. Les objets retournés deviennent des ensembles d'états. C'est-à-dire, si $\delta_D(q, a) = p$ alors $\delta(\{q\}, a) = \{p\}$. De plus, pour chaque état $q \in Q_D$, $\delta(\{q\}, \epsilon) = \emptyset$.
— $q_0 = \{q_D\}$
— $F = \{\{q\} | q \in F_D\}$

Dès lors, les transitions sont les mêmes entre D et A, mais A précise explicitement qu'il n'y a pas de transition sur ϵ. Comme A représente le même langage, il existe donc bien un ANF qui représente L.

($\Rightarrow$) L peut être représenté par un ANF $\implies$ L peut être représenté par un ADF. Soit l'automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Supposons qu'il représente $L = L(A)$. Considérons l'automate obtenu par la transformation détaillée à la section précédente (page 20) :

$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$$

Montrons que $L(D) = L(A)$. Pour ce faire, montrons que les fonctions de transition étendues sont équivalentes. Auquel cas, les chemins sont équivalents et donc les langages sont égaux. Montrons que $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_D, w)$ pour tout mot w, par récurrence sur w.

Cas de base Si $|w| = 0$, alors $w = \epsilon$. $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) =$ ECLOSE(q_0), par définition de la fonction de transition étendue. q_D=ECLOSE(q_0) par la construction de q_D. Pour un ADF (ici, D), $\hat{\delta}(p, \epsilon) = p$, pour tout état p. Par conséquent, $\hat{\delta}_D(q_D, \epsilon) = q_D =$ ECLOSE(q_0) $= \hat{\delta}(q_0, \epsilon)$.

Pas de récurrence Supposons $w = xa$ avec a le dernier symbole de w. Notre hypothèse de récurrence est que $\hat{\delta}_D(q_D, x) = \hat{\delta}(q_0, x)$. Ce sont bien les mêmes objets car $\hat{\delta}_D$ retourne un état de D qui correspond à un ensemble d'états de A. Notons celui-ci $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Par définition de $\hat{\delta}$ pour un ANF, $\hat{\delta}(q_0, w)$ est obtenu en :

1. Construisant $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\} = \bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$. Cet ensemble correspond aux états obtenus par la lecture du symbole a à partir de $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.
2. Calculant $\hat{\delta}(q_0, w) = \bigcup_{j=1}^{m}$ECLOSE($r_j$). Un état atteint par la lecture de a l'est aussi par $a\epsilon$.

D a été construit avec ces deux mêmes étapes pour $\delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a)$. Dès lors, $\hat{\delta}_D(q_D, w) = \delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a) = \bigcup_{j=1}^{k}$ECLOSE($p_j$)$= \hat{\delta}(q_0, w)$.

On a bien $\hat{\delta}_D(q_D, w) = \hat{\delta}(q_0, w)$.

Les langages sont donc bien égaux.

□

Complexité 2.2.4.1 (Conversion ANF vers ADF)

La complexité d'une conversion ANF vers ADF peut être exprimée en fonction de n le nombre d'états de l'ANF. La taille de l'alphabet Σ est ici comptée comme une constante k. Elle est ignorée dans l'analyse grand-O. L'algorithme de conversion se fait en deux étapes. Le calcul de ECLOSE et la construction à proprement parler. Ici, l'automate est stocké sous forme d'une table de transitions. Cette solution est plus facile à manipuler mais peut engendrer un surcoût en mémoire, qui n'est pas analysé ici.

— ECLOSE : Chacun des n états ayant une entrée pour ϵ dans la fonction δ, le temps de calcul sur chaque nœud ajouté est en temps constant. Chacune des n fermetures pour chacun des n états $q \in Q$ pouvant au plus compter les n états, le temps total de cette opération est en $n\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$.

— Construction : Posons s le nombre d'états dans l'ADF (qui, dans le pire des cas vaut $s = 2^n$ par la construction des sous-ensembles). La création d'un état de l'ADF est en $\mathcal{O}(n)$. En effet, il faut garder des références vers les états de l'ANF concernés. Ceux-ci sont au plus n.
Comme il y a s états dans l'ADF, il y a ks transitions. Chacune de celle-ci peut être construite en $\mathcal{O}(n)$. En effet, chaque état de l'ADF étant constitué d'au plus n états de l'ANF, il y a au plus n transitions à suivre pour obtenir l'ensemble d'états résultant dans l'ANF. Cet ensemble correspond alors à un état de l'ADF obtenu. Les transitions sont construites en $\mathcal{O}(nks) = \mathcal{O}(nks)$. k est toujours considéré comme une constante.

La complexité dans le pire des cas est $\mathcal{O}(n^2) + \mathcal{O}(sn) + \mathcal{O}(sn) = \mathcal{O}(sn) = \mathcal{O}(n2^n)$. Le détail est donné sur s car, comme prouvé dans [3], en pratique le nombre d'états dans l'ADF obtenu est rarement de l'ordre de 2^n, typiquement de l'ordre de n. Dans ce cas là, la complexité devient $\mathcal{O}(n^2)$.

Complexité 2.2.4.2 (Conversion ADF vers ANF)

La conversion d'un ADF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ vers un ANF consiste au remplacement de n états par n ensembles d'un seul état. Chaque copie individuelle étant en temps constant, cette opération est en $\mathcal{O}(n)$. Ensuite, une nouvelle table de transition doit être créée. Si l'alphabet Σ est de taille k, celle-ci a toujours n lignes mais $k + 1$ colonnes. En effet, un colonne est ajoutée pour ϵ. La création de cette nouvelle table se fait alors en $\mathcal{O}(kn)$. La complexité totale d'une conversion d'un ADF vers un ANF est en $\mathcal{O}(kn)$.

2.3 Table Filling Algorithm

Cette section décrit le *Table Filling Algorithm*, algorithme permettant de minimiser un automate déterministe mais aussi de tester l'équivalence entre deux de ceux-ci. C'est un élément important pour l'algorithme d'Angluin, sujet principal de ce mémoire.

2.3.1 Relation R_F

Soit un ADF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Définissons la relation R_F entre deux états :

$$xR_Fy \iff (\forall w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(y, w) \in F)$$

Intuitivement, ces deux états sont en relation si tout mot lu à partir de ceux-ci mène à des états étant simultanément acceptants ou non.

Proposition 2.3.1 (R_F) *R_F est une relation d'équivalence.*

Preuve 2.3.1.1 (R_F est une relation d'équivalence)

Montrer que R_F est une relation d'équivalence revient à montrer qu'elle est réflexive, transitive et symétrique.

— **Réflexive :** Soient un état $x \in Q_M$ et un mot $w \in \Sigma^*$. Alors, $\hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(x, w) \in F$ et par définition, xR_Ex.

— **Transitive :** Soient les états $x, y, z \in Q_M$ tels que xR_Ey et yR_Ez ainsi que $w \in \Sigma^*$. Par hypothèse, $\hat{\delta}(x,w) \in F \iff \hat{\delta}(y,w) \in F$ et $\hat{\delta}(y,w) \in F \iff \hat{\delta}(z,w) \in F$. Par transitivité de l'implication, on obtient $\hat{\delta}(x,w) \in F \iff \hat{\delta}(z,w) \in F$. On a donc xR_Ez.
— **Symétrique :** Soient les états $x, y \in Q_M$ tels que xR_Ey et un mot $w \in \Sigma^*$. Par hypothèse, $\hat{\delta}(x,w) \in F \iff \hat{\delta}(y,w) \in F$. En lisant la double implication depuis la droite, on a bien $\hat{\delta}(y,w) \in F \iff \hat{\delta}(x,w) \in F$ et donc yR_Ex.

□

Corollaire 2.3.1.1

R_F répartit les états de Q en classes d'équivalence.

La classe d'équivalence de tous les états en relation R_F avec q (qui sert alors de *représentant*) se note $[[q]]$ ou par une lettre majuscule, typiquement S ou T.

Corollaire 2.3.1.2

Si Q est fini, alors le nombre de classe d'équivalences est fini aussi. Chaque classe d'équivalence $[[q]]$ contient un nombre d'états fini.

Proposition 2.3.2 (Congruence de R_F) *R_F est congruente à droite, c'est-à-dire*

$$xR_Fy \implies \forall a \in \Sigma, \delta(x,a)R_F\delta(y,a)$$

Preuve 2.3.2.1 (Congruence de R_F)

Montrons que si la relation est vraie pour deux états, elle reste valable pour les états atteints par la lecture d'un symbole quelconque. Soient les états $x, y \in Q_M$ tels que xR_Fy. Soit un symbole $a \in \Sigma$. Par hypothèse,

$$\forall w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(x,w) \in F \iff \hat{\delta}(y,w) \in F$$

C'est donc vrai en particulier pour $w = au, u \in \Sigma^*$. Dès lors,

$$\hat{\delta}(x,au) \in F \iff \hat{\delta}(y,au) \in F$$

$$\hat{\delta}(\delta(x,a),u) \in F \iff \hat{\delta}(\delta(y,a),u) \in F$$

$$\hat{\delta}(p,u) \in F \iff \hat{\delta}(q,u) \in F$$

□

Corollaire 2.3.2.1

Toutes les transitions étiquetées par un symbole a sortant d'une classe d'équivalence mènent à une même classe d'équivalence : $\forall$ classe d'équivalence $S, \forall a \in \Sigma, \exists$ une classe d'équivalence $T, \forall q \in S, \delta(q,a) \in T$.

2.3.2 Algorithme

Certains états d'un automate peuvent être *équivalents* selon la relation R_F . L'information que ceux-ci proposent est alors redondante. Dès lors, l'automate peut être simplifié pour offrir la même information de façon plus compacte. Une façon de détecter ces équivalences est de construire un tableau via le *table filling algorithm*. Le tableau obtenu est la *table de différenciation*.

Celui-ci détecte les paires *différenciables* récursivement sur un automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Un paire $\{p, q\}$ est différenciable s'il existe un mot w tel que $\hat{\delta}(p, w)$ est un état acceptant et $\hat{\delta}(q, w)$ ne l'est pas ou vice-versa. w sert alors de *mot témoin*. L'algorithme procède récursivement comme suit :

Cas de base : Si p est un état acceptant et que q ne l'est pas, alors la paire $\{p, q\}$ est différenciable. Le mot témoin est ϵ. La cellule correspondante dans le tableau est cochée.

Pas de récurrence : Soient p, q, r, s des états de Q et un symbole $a \in \Sigma$ tel que $\delta(p, a) = r$ et $\delta(q, a) = s$. Si r et s sont différenciables (les cellules sont cochées dans le tableau) alors p et q le sont aussi. En effet, il existe un mot *témoin* w qui permet de différencier r et s. Alors le mot aw est le mot témoin qui permet de différencier p et q. Les cellules de ces états sont cochées.

Théorème 2.3.3 (Table de différenciation) *Si deux états ne sont pas différenciés par le table filling algorithm, les états sont équivalents (ils respectent la relation R_F).*

Exemple 12 (Table de différenciation)

Voici une application du table filling algorithm sur l'automate A_2, version réduite de l'automate A_1 de la figure 2.1.

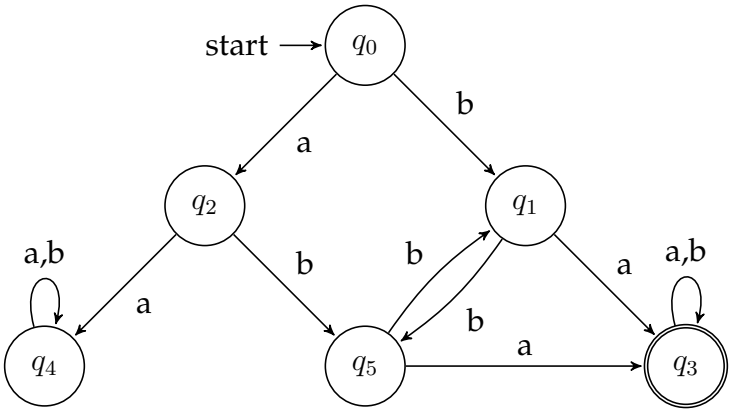


FIGURE 2.9: Automate A_2

La première étape est de remplir la table de différenciation avec l'algorithme précédent. Tout état est différenciable de q_3 : il est le seul état acceptant et tous les autres ne le sont pas. 5 cases peuvent déjà êtres cochées. Le reste de la table est remplie par induction comme représenté dans la table 2.3.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1					
q_2					
q_3	x	x	x		
q_4				x	
q_5				x	

(a) Cas de base : tous les états sont différents de q_3

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	x				
q_2		x			
q_3	x	x	x		
q_4		x		x	
q_5	x		x	x	x

(b) Première itération : Les nouvelles paires d'états différenciables mènent, via un symbole $a \in \Sigma$ à deux autres états différenciables.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	x				
q_2		x			
q_3	x	x	x		
q_4	x	x	x	x	
q_5	x		x	x	x

(c) Deuxième itération

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	x				
q_2	x	x			
q_3	x	x	x		
q_4	x	x	x	x	
q_5	x		x	x	x

(d) Troisième itération : q_1 et q_5 ne sont pas différenciés.

TABLE 2.3: Table de différenciation de l'automate A_2 2.9

D'après le théorème, comme q_1 et q_5 ne sont pas différenciés, on a $q_1 R_F\ q_5$.

Preuve 2.3.3.1

Considérons un automate déterministe fini quelconque $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Supposons par l'absurde qu'il existe une paire d'états $\{p, q\}$ telle que :

1. p et q ne sont pas différenciés par l'algorithme de remplissage de table.
2. Les états ne sont pas équivalents : $\neg(pR_Eq)$. Par extension, il existe un mot témoin w différenciant p et q.

Une telle paire est une *mauvaise paire*. Si il y a des mauvaises paires, chacune associée à un mot témoin, il doit exister un paire distinguée par un mot témoin le plus court. Posons $\{p, q\}$ comme étant cette paire et $w = a_1a_2 \dots a_n$ le mot témoin le plus court montrant que $\neg(pR_Eq)$. Dès lors, soit $\hat{\delta}(p, w)$ est acceptant, soit $\hat{\delta}(q, w)$ l'est, mais pas les deux.

Ce mot w ne peut pas être ϵ. Auquel cas, la table aurait été remplie dès le cas de base de l'algorithme avec la paire différenciable $\{p, q\}$. La paire $\{p, q\}$ ne serait pas une mauvaise paire.

w n'étant pas ϵ, $|w| \geq 1$. Considérons les états $r = \delta(p, a_1)$ et $s = \delta(q, a_1)$. Ces états sont différenciés par $a_2a_3 \dots a_n$ car $\hat{\delta}(p, w) = \hat{\delta}(r, a_2a_3 \dots a_n)$ et $\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(s, a_2a_3 \dots a_n)$ et p et q sont différenciables.

Cela signifie qu'il existe un mot plus petit que w qui différencie deux états : le mot $a_2a_3 \dots a_n$. Comme on a supposé que w est le mot le plus petit qui différencie une mauvaise paire, r et s ne peuvent pas être une mauvaise paire. Donc, l'algorithme a du découvrir qu'ils sont différenciables.

Cependant, le pas de récurrence impose que $\delta(p, a_1)$ et $\delta(q, a_1)$ mènent à deux états différenciables implique que p et q le sont aussi. On a une contradiction de notre hypothèse : $\{p, q\}$ n'est pas une mauvaise paire.

Ainsi, s'il n'existe pas de mauvaise paire, c'est que chaque paire différenciable est reconnue par l'algorithme.

□

Complexité 2.3.1.1

Considérons n le nombre d'états d'un automate, et k la taille de l'alphabet Σ supporté.

Considérons aussi une version optimisées de l'algorithme. Une optimisation simple est de construire pour chaque paire $\{r, s\}$ une liste des paires *dépendantes* $\{p, q\}$ telles que, pour un même symbole a, $\delta(p, a) = r$ et $\delta(q, a) = s$.

Cette liste peut être construite en considérant chaque symbole $a \in \Sigma$ et ajoutant les paires $\{p, q\}$ à chacune de leur dépendance $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$. Cette étape prend au plus $k.\mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(kn^2)$. (Le nombre de symboles multiplié par le nombre de paires à considérer).

Dès lors, on peut prendre la récurrence et la propager en ajoutant les paires dépendantes de celles différenciées au cas de base. Celui-ci s'effectue en $\mathcal{O}(n^2)$ opérations, cochant au plus la moitié des paires ($\frac{n(n-1)}{2*2}$). Ayant au plus $\frac{n(n-1)}{2}$ paires à atteindre, il y a au plus de l'ordre de $\mathcal{O}(n^2)$ opérations.

La complexité totale alors revient à $\mathcal{O}(kn^2)$.

2.3.3 Appartenance et équivalence

Comme mentionné en début de section, le test d'équivalence entre deux automates est un des piliers de l'algorithme d'Angluin. Comparer des langages représentés de façon ensembliste n'est pas toujours possible et rarement efficace. Grâce à de légères modifications apportées à l'algorithme de minimisation 2.3.3, il est possible de comparer deux automates déterministes finis et déterminer si ceux-ci sont équivalents. L'algorithme obtenu est seulement en temps quadratique par rapport au nombre d'états de l'ADF.

Considérons les ADF A_H et A_I donnés dans les figures 2.10 et 2.11. Les états ont été renommés pour simplifier la suite de l'exemple.

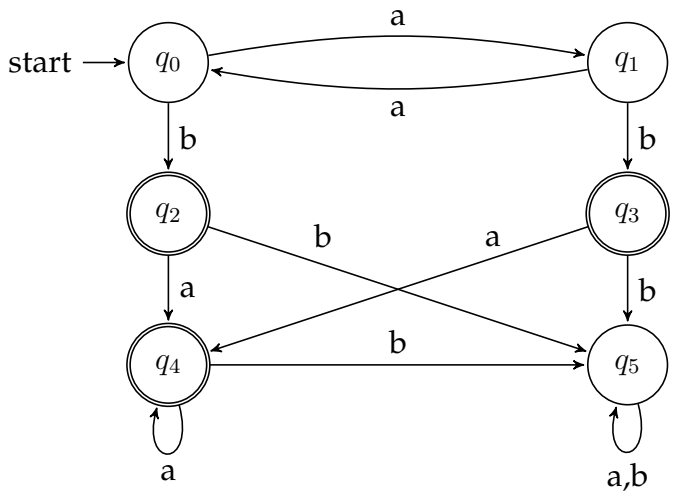


FIGURE 2.10: Automate A_H, du livre [4] (Fig3.2)

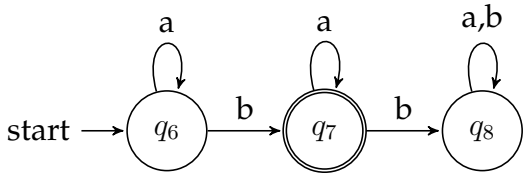


FIGURE 2.11: Automate A_I, provenant également de [4].

Il est possible de remplir un tableau via le table filling algorithm. Pour ce faire, les deux ADFs sont considérés comme un seul dont les états sont disjoints.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
q_1								
q_2	x	x						
q_3	x	x						
q_4	x	x						
q_5	x	x	x	x	x			
q_6			x	x	x	x		
q_7	x	x				x	x	
q_8	x	x	x	x	x		x	x

FIGURE 2.12: Tableau généré par l'application de l'algorithme sur A_H et A_I

De cette table, toujours grâce aux conclusions précédentes, il est possible d'extraire des classes d'équivalences :

— $C_0 = \{q_0, q_1, q_6\}$
— $C_1 = \{q_2, q_3, q_4, q_7\}$
— $C_2 = \{q_5, q_8\}$

En particulier, la classe C_0 souligne que les états initiaux sont équivalents. Cela signifie, par définition, que tout mot w lu en partant d'un de ces états sera soit accepté dans les deux automates, soit refusé dans les deux. A_H et A_I définissent donc le même langage.

Écrivons concrètement l'algorithme de test d'équivalence entre deux automates déterministes finis.

Algorithme 2.3.2 (Équivalence entre deux automates)
Soient les ADFs $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ et $B = (Q_B, \Sigma_b, q_b, \delta_b, F_b)$. Des automates utilisant des alphabets différents représenteront probablement des langages différents mais pas nécessairement.

1. *Considérer les deux automates comme un seul automate disjoint. Le choix de l'état initial de l'automate ainsi construit n'a pas d'importance, qu'il soit q_0 ou q_b.*
2. *Construire la table de différenciation par le table filling algorithm.*
3. *Si q_0 et q_b sont équivalents (non différenciés par la table), alors A et B sont équivalents.*

Complexité 2.3.2.1
Reposant sur la construction de la table d'équivalence d'états, la complexité est en $\mathcal{O}(kn^2)$, avec k la taille de l'alphabet et n le nombre d'états. L'étape supplémentaire, la lecture de cette table, est en temps constant et n'impacte pas la complexité.

Les différentes notions liées à l'égalité : les propriétés de réflexivité, transitivité et symétrie ont été démontrées dans la section 2.3.1.

2.3.4 Minimisation

Plusieurs automates peuvent représenter un même langage. Parmi ceux-ci, l'*automate minimal* est celui comportant le moins d'états.

La minimisation d'automate se fait en deux étapes :

1. Se débarrasser de tous les états inatteignables : ils ne participent pas à la construction du langage représenté
2. Grâce aux équivalences d'états trouvées grâce au table filling algorithm défini au point 2.3.2, construire un nouvel automate.

Décrivons en détail cette minimisation dans l'algorithme 2.3.3.

Algorithme 2.3.3 (Minimisation)
Soit un automate déterministe fini $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Les états inatteignables peuvent être supprimés de Q et de δ.

Pour minimiser cet automate, il faut :

1. *Construire la table de différenciation.*
2. *Séparer Q en classes d'équivalences.*
3. *Construire l'automate minimal $C = (Q_C, \Sigma, \delta_C, q_C, F_C)$:*
   (a) *Soit S une des classes d'équivalence obtenues par la table de différenciation.*
   (b) *Ajouter S à Q_C ainsi qu'à F_C si S contient un état acceptant $q \in F$. Cette opération est valide, comme mentionné dans le corollaire 2.3.2.1.*
   (c) *Si S contient q_0 l'état initial de A, alors S est q_C l'état initial de C.*
   (d) *Pour un symbole $a \in \Sigma$, alors il doit exister une classe d'équivalence T tel que pour chaque état $\forall q \in S, \delta(q, a) \in T$ par le corollaire 2.3.2.1. On défini alors $\delta_C(S, a) = T$.*

Exemple 13
Considérons l'automate A_1 représenté à la figure 2.1. En supprimant l'état q_6 qui n'est pas atteignable, on obtient l'automate A_2 de la figure 2.9.

Le tableau 2.3 sert d'exemple pour l'algorithme de remplissage de tableau, sur A_2.

En appliquant l'algorithme de minimisation ci-dessus, qui peut se résumer intuitivement à fusionner les états équivalents q_1 et q_5, on obtient l'automate A_3 de la figure 2.13.

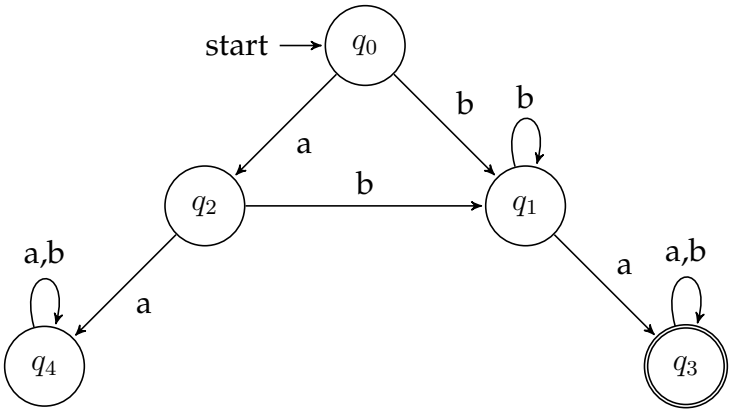


FIGURE 2.13: Automate A_3

Une expression régulière ($(b + ab)b^*a(a + b)^*$) peut être déduite pour $L = L(A_3)$ grâce à cet automate A_3. Cette expression régulière est celle de l'exemple 2

Théorème 2.3.4 (Minimalité de l'automate réduit) *Soit un ADF A et soit C l'automate construit par cet algorithme de minimisation. Aucun automate équivalent à A n'a moins d'états que C. De plus, chaque automate ayant autant d'états que C lui est homomorphique.*

Preuve 2.3.4.1

Prouvons que l'algorithme de minimisation fournit un automate minimum (il n'en existe aucun comportant moins d'états pour un même langage).

Soient un ADF A et C l'automate obtenu par l'algorithme de minimisation. Posons que C comporte k états.

Par l'absurde, supposons qu'il existe M un ADF minimisé équivalent à A mais comptant moins d'états que C. Posons qu'il en comporte $l < k$. Appliquons le table filling algorithm sur C et M, comme s'ils étaient un seul ADF, comme proposé dans la section 2.3.3.

C n'a pas d'état inaccessible par construction et M n'en a pas par hypothèse. En effet, M est sensé être minimal. Avoir un état qui peut être éliminé contredirait cette hypothèse.

De plus, les états initiaux sont équivalents puisque $L(C) = L(M)$. Dès lors, les successeurs pour chaque symbole sont eux aussi équivalents. Des successeurs différentiables impliquerait que les états initiaux sont différenciables, ce qui est faux par hypothèse.

Soit p un état de C. Soit un mot $a_1a_2 \dots a_i$, qui mène de l'état initial de C à p. Alors, il existe un état q de M équivalent à p. Puisque les états initiaux sont équivalents et que, par induction, les états obtenus par la lecture d'un symbole le sont aussi, l'état q dans M obtenu par la lecture du mot $a_1a_2 \dots a_i$ est équivalent à p. Comme p est quelconque, cela signifie que tout état de C est équivalent à au moins un état de M.

Or, $k > l$. Il doit exister au moins deux états de C équivalents à un même état de M et donc équivalents entre eux. Il y a là une contradiction : par construction, les états de C sont tous

différenciables les uns des autres. La supposition de l'existence de M est abusrde. Il n'existe pas d'automate équivalent à A comportant moins d'états que C.

□

Preuve 2.3.4.2

Prouvons que tout automate minimal pour un langage est C, à un isomorphisme sur les noms des états près.

Soit A un ADF pour un langage L. Soient C un ADF obtenu par l'algorithme de minimisation et M un automate minimal comportant autant d'états que C.

Comme mentionné dans la preuve précédente, il doit y avoir une équivalence 1 à 1 entre chaque état de C et de M. (Au minimum 1 et au plus 1). De plus, aucun état de M ne peut être équivalent à 2 états de C, selon le même argument.

Dès lors, l'automate minimisé, dit *canonique* est unique à l'exception du renommage des différents états.

□

2.4 Algorithme d'Angluin

L'algorithme d'Angluin[1] est un algorithme d'apprentissage actif d'automate. Il prend la forme d'un couple professeur/élève où :

— L'élève applique l'algorithme d'Angluin L^* en temps que tel pour construire un automate représentant le langage cible.
— Le professeur a accès au langage que l'élève veut apprendre.

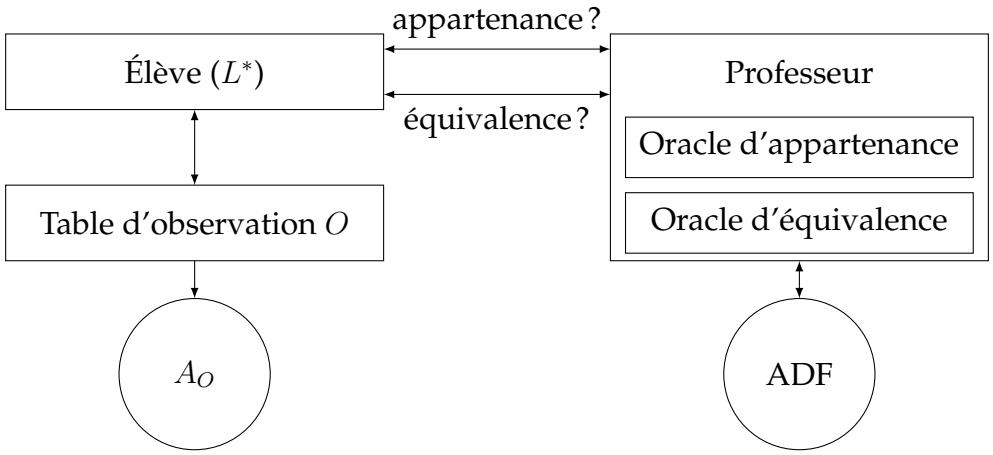


FIGURE 2.14: Vue schématique de l'algorithme d'Angluin

L'algorithme d'Angluin est nommé L^* et est exécuté par l'élève. Par abus de language, il peut aussi désigner l'environnement complet dont il a besoin pour être fonctionnel.

Celui-ci consiste, côté élève, d'une table d'observation définie à la section 2.4.3, et d'un automate A_O construit à partir de cette table.

Côté professeur, il faut un langage régulier L à apprendre, souvent représenté par un ADF. De plus, ce professeur contient deux oracles :

— L'oracle d'appartenance. Soit un mot w. Appartient-il à L ?
— L'oracle d'équivalence. Soit un automate A_O. Représente-t-il L ? Si non, fournir un contre-exemple w.

Théorème 2.4.1 *S'appuyant sur un professeur pour un langage régulier $L \subseteq \Sigma^*$, un élève peut utiliser l'algorithme d'Angluin L^* pour apprendre l'ADF canonique A représentant L en un temps polynimial à n le nombre d'états de A et m le nombre de contre-exemples reçus du professeur. Il effectue $\mathcal{O}(n)$ requêtes d'équivalence et $\mathcal{O}(mn^2)$ requêtes d'appartenance.[1]*

Corollaire 2.4.1.1
Si les requêtes d'appartenance et d'équivalence se font en temps polynomial en la taille de A, L^* est en temps polynomial.

Attention cependant : cet algorithme part du postulat que le langage étudié est régulier.
Les prochaines section introduisent les différentes notions notemment necéssaires à la compréhension du fonctionnement de la table d'observation.

2.4.1 La relation R_L

Soit un langage L sur un alphabet Σ.
Soit la relation $R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$. Deux mots x et y respectent la *relation de Myhill-Nérode* R_W si

$$\forall z \in \Sigma^*, xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$$

Intuitivement, deux mots sont en relation si pour tout mot qu'on leur concatène, les deux mots résultants sont tous deux dans le langage L ou non.
Cette relation est utilisée au fondement de l'algorithme d'Anluin pour séparer le langage en différentes classes, jusqu'à identifier celles qui sont acceptées de celles qui ne le sont pas.

Lemme 2.4.2 *Cette relation est une relation d'équivalence. De plus, elle est congruente à droite. C'est à dire que si xR_Ly, alors pour tout symbole $a \in \Sigma$, xaR_Lya*

Preuve 2.4.2.1 (Equivalence et Congruence à droite)
Dire d'une relation qu'elle décrit une équivalence, revient à dire qu'elle est réflexive, transitive et symétrique
— **Réflexive :** Soit $x \in \Sigma^*$. Soit $z \in \Sigma^*$. Montrer que xR_Lx est vrai revient à montrer que $xz \in L \Leftrightarrow xz \in L$ est vrai. R_L est donc réflexive.
— **Symétrique :** Soient $x, y \in \Sigma^*$ tels que xR_Ly. Soit $w \in \Sigma^*$. Montrer que yR_Lx revient à montrer que $yw \in L \Leftrightarrow xw \in L$. Or, par hypothèse, $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$, qui peut s'écrire aussi $yz \in L \Leftrightarrow xz \in L$ pour tout $z \in \Sigma^*$, et en particulier $z = w$.
— **Transitive :** Soient $x, y, u \in \Sigma^*$ tels que xR_Ly et yR_Lz. Soit $w \in \Sigma^*$. Comme $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$ et $yz \in L \Leftrightarrow uz \in L$ pour tout $z \in \Sigma^*$ (par hypothèse), c'est vrai en particulier pour $z = w$. Dès lors, $xw \in L \Leftrightarrow yw \in L$ et $yw \in L \Leftrightarrow uw \in L$. Par transitivité de l'implication, on obtient $xw \in L \Leftrightarrow uw \in L$, à savoir xR_Lu.

R_L est congruente à droite. Soient $x, y \in \Sigma^*$ tels que xR_Ly. Soit $a \in \Sigma$. Par hypothèse, $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$ pour tout $z \in \Sigma^*$. Cela doit donc être vrai en particulier pour le mot $z = aw$ avec w quelconque. En remplaçant dans l'hypothèse, on obtient $xaw \in L \Leftrightarrow yaw \in L$. Ce qui montre que xaR_Lya.

□

2.4.2 Théorème de Myhill-Nerode

Le thèorème de Myhill-Nérode est un résultat fort utilisant la relation R_L . Il permet de construire un automate à partir de celle-ci.

Cependant, avant d'énoncer le théorème de Myhill-Nérode, il faut s'intéresser à la relation d'équivalence R_A , qui facilite l'écriture de la preuve. R_L s'intéresse directement au langage alors que R_A s'intéresse à un automate qui la représente.

Definition 1 (Relation R_A) Soit un automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Soient deux mots $x, y \in \Sigma^*$. Alors la relation xR_Ay est vraie si et seulement si $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$. ▫

Intuitivement, deux mots sont en relation R_A par rapport à un automate A s'ils mènent à un même état dans celui-ci (ou à des états équivalents).

Lemme 2.4.3 *R_A est une relation d'équivalence congruente à droite.*

Preuve 2.4.3.1

Prouver qu'une relation est dite d'équivalence, il faut prouver que celle-ci est transitive, réflexive et symétrique. Soit un automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$.

- R_A est transitive. Soient $x, y, z \in \Sigma^*$. Supposons que xR_Ay et yR_Az. On a bien $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, z)$ par la transitivité de l'équivalence entre deux états.
- R_A est réflexive. Soit $y \in \Sigma^*$. On a bien $\hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, y)$ par réflexiviré de l'équivalence sur un état.
- R_A est symétrique. Soient $x, y \in \Sigma^*$. Supposons que xR_Ay. On a bien $\hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, x)$ par symétrie de l'équivalence entre deux états.

R_A est congruente à droite. Soient $x, y \in \Sigma^*$ tels que xR_Ay. Soit $z \in \Sigma^*$. Montrons que xzR_Ayz. $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), z) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, y), z) = \hat{\delta}(q_0, yz)$.

□

Théorème 2.4.4 *Les trois énoncés suivants sont équivalents :*

1. *Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est accepté par un ADF.*
2. *Il existe une congruence à droite sur Σ^* d'index fini telle que L est l'union de certaines classes d'équivalence.*
3. *La relation d'équivalence R_L est d'index fini.*

Preuve 2.4.4.1

La preuve d'équivalence se fait en prouvant chaque implication de façon cyclique :

$(1) \rightarrow (2)$ Supposons que (1) soit vrai, c'est-à-dire que le langage L est accepté par un automate déterministe $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Considérons la relation d'équivalence congruente à droite R_A . Soit un mot $w \in \Sigma^*$. Alors tout mot $x \in \Sigma^*$ tel que $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, w)$ appartient à la même classe d'équivalence $[w]$. Or, la fonction $\hat{\delta}$ retourne un état $q \in Q$. Chaque classe d'équivalence sur Σ correspond alors à un état de l'automate. Comme Q est fini, R_A est d'index fini. De plus, un sous-ensemble des classes d'équivalences doit correspondre aux états acceptants $q \in F$. Alors, L est l'union de ces classes d'équivalence.

$(2) \rightarrow (3)$ Supposons qu'il existe une relation E satisfaisant (2). Montrons que chaque classe de celle-ci est intégralement contenue dans une seule classe de R_L . Puisque E est d'index fini, c'est un argument suffisant pour montrer que R_L est d'index fini. Soit x, y tels que xEy. Comme E est congruente à droite, pour tout mot $z \in \Sigma^*$, on sait que $xzEyz$. Comme L est un union de ces classes d'équivalence, $xzEyz$ implique que $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$, ce qui revient à xR_Ly. Cela signifie que tout mot dans la classe d'équivalence de x définie par E se retrouve dans la même classe d'équivalence que x cette fois définie par R_L . Ceci permet de conclure que chaque classe d'équivalence de E est contenue dans une classe d'équivalence de R_L et donc que R_L est d'index fini.

$(3) \rightarrow (1)$ Considérons la relation R_L définie précédemment. Soit un automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ défini comme suit :

— Chaque état $q \in Q$ correspond à une classe d'équivalence de R_L .
— Comme R_L se défini pour un langage, l'alphabet Σ de celui-ci est déjà défini.
— Si $[[\epsilon]]$ est la classe d'équivalence de ϵ sur R_L , q_0 correspond à cette classe.
— Si q représente $[[x]]$ et q_1 représente $[[xa]]$, alors $\delta(q, a) = q_1$. Cette définition est cohérente car R_L est congruente à droite.
— $F = \{[[x]] | x \in L\}$.

Cet automate est déterministe par la définition de δ et fini car Q l'est, le nombre de classes de R_L étant fini par hypothèse. De plus, cet automate accepte tout mot $x \in L$ puisque $\delta(q_0, x) = [[x]] \in F$(par définition, puisque $x \in L$). □

Corollaire 2.4.4.1

La partie $(3) \rightarrow (1)$ de la preuve 2.4.4.1 donne une méthode permettant de construire un ADF à partir des classes d'équivalences de la relation R_L .

On peut prouver que l'automate obtenu de cette façon est l'automate minimal de L. Une preuve est disponible dans l'ouvrage [4] en lien avec le théorème 3.10.

2.4.3 La table d'observation

Une *table d'observation* est un tableau défini par $O = (R, S, T)$ avec $R \subseteq \Sigma^*$ un ensemble de mots *représentants*, $S \subseteq \Sigma^*$ un ensmble de mots *séparateurs* et $T : (R \bigcup R.\Sigma) \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction représentant le contenu de la table.[6] Soit un langage L qui est en train d'être appris par l'algorithme d'Angluin. Soit un mot $w \in L$. Alors, w appartient à une classe d'équivalence $[[u]]$ avec $u \in L$. Dans ce cas, $T(w) = 1$. Au contraire, si $w \notin L$, alors $T(w) = 0$.

Pour une table d'observation O, deux mots u, v peuvent être *équivalents sur O*, c'est-à-dire uR_Ov. u et v sont équivalents sur O si et seulement si $\forall w \in S, T(uw) = T(vw)$. Intuitivement, uR_Ov si les lignes correspondant à leur classe d'équivalence ont la même séquence de 0 et de 1.

Proposition 2.4.5 *Soient $u, v \in \Sigma^*$, un langage L et une table d'observation O associée à ce langage. Si uR_Lv, alors uR_Ov.*

Preuve 2.4.5.1

Soient un langage L, $u, v \in \Sigma^*$ tels que uR_Lv et une table d'observation O associée à L. Comme uR_Lv, alors pour tout mot $w \in \Sigma^*$, $uw \in L \iff vw \in L$. C'est donc vrai en particulier pour tout $w \in S$. Dès lors, $\forall w \in S, T(uw) = T(vw)$. □

Corollaire 2.4.5.1

Le nombre de classes d'équivalence sur R_O est inférieur ou égal à celui de classes d'équivalence sur R_L .

Cette table O représente la compréhension actuelle de l'élève du langage L. D'itération en itération, R_O représente de mieux en mieux R_L jusqu'à ce que l'automate induit de cette table soit jugé équivalent par le professeur. L'automate induit l'est par l'application du corollaire 2.4.4.1.

2.4.4 Fermeture et cohérence

Fermeture

La propriété de *fermeture* s'exprime mathématiquement par

$$\forall u \in R, \forall a \in \Sigma, \exists v \in R, uaR_Ov$$

Cette propriété peut être vérifiée par cet algorithme, expliqué de façon visuelle sur la table O :

Algorithme 1 Vérification de la fermeture

Promet: si la fermeture est respectée ou non

```
pour chaque élément w de la section R faire
    pour chaque symbole a dans Σ faire
        si wa est dans R alors
            continuer
        sinon
            {wa est dans R.Σ par construction}
            si La ligne de wa dans T est différente de celle de w alors
                retourner Faux
            fin si
        fin si
    fin pour
fin pour
retourner Vrai
```

Cohérence

La propriété de *cohérence* se définit mathématiquement comme

$$\forall u, v \in R, uR_Ov \Rightarrow \forall a \in \Sigma, uaR_Ova$$

Concrètement, il s'agit de prendre deux mots (u, v) dans R ayant la même ligne dans T et vérifier, pour chaque symbole (a), s'ils (ua, va) ont la même ligne dans T.

Exemple 14
Soit la table d'observation O de la table 2.4 :

O	ϵ	a
ϵ	0	0
a	0	0
aa	0	1

TABLE 2.4: Table d'observation O

Cette table n'est pas cohérente. En effet, $\epsilon R_O a$ mais en ajoutant le symbole $a \in \Sigma$, on obtient $\neg(aR_Oaa)$. Les lignes ont les mêmes valeurs, mais les lignes obtenues par la concaténation du symbole a ont des valeurs différentes.

2.4.5 L'algorithme

Le pseudocode de l'algorithme d'Angluin est fourni par l'algorithme 2.4.1[6]. Celui-ci repose sur les oracles du professeur et l'algorithme 2.4.2, remplissant les lignes de T encore vides. Le code est suivi d'un exemple d'exécution.

Algorithme 2.4.1 (Algorithme d'Angluin L^*)
Requis: *Un professeur pour le langage régulier $L \subseteq \Sigma^*$*
Promet: *Un automate canonique décrivant L*

Initialiser la table d'observation $O = (R, S, T)$ avec $R = S = \epsilon$
$corriger(O)$
répéter
  tant que *O n'est pas fermée ou pas cohérente* ***faire***
    si *O n'est pas fermée* ***alors***
      Choisir $r \in R$ et $a \in \Sigma$ tels que $[[ua]]_O \bigcap R = \emptyset$
      $R \leftarrow R \bigcup ua$
      $corriger(O)$
    fin si
    si *O n'est pas cohérente* ***alors***
      Choisir $uR_Lv \in R, a \in \Sigma$ et $w \in S$ tels que $T(uaw) \neq T(vaw)$
      $S \leftarrow S \bigcup aw$
      $corriger(O)$

14: ***fin si***
15: ***fin tant que***
16: *Construire* A_O
17: *Soumettre* A_O *à l'oracle d'équivalence*
18: ***si*** *le professeur retourne un contre-exemple* u ***alors***
19: $R \leftarrow R \bigcup Pref(u)$
20: $corriger(O)$
21: ***fin si***
22: ***jusqu'à*** *ce que le professeur réponde "oui" à l'équivalence*
23: ***retourner*** A_O

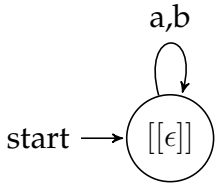
Algorithme 2.4.2 ($corriger(O)$)
Requis: *une table d'observation* O*, un professeur pour le langage régulier* $L \subseteq \Sigma^*$
Promet: *les entrées de* O *sont valide dans* L
1: ***pour chaque*** *entrée* $u \in (R \bigcup R\Sigma)$ *pour laquelle* $T(u)$ *n'est pas encore définie* ***faire***
2: ***si*** $u \in L$ *par le test d'appartenance* ***alors***
3: $T(u) \leftarrow 1$
4: ***sinon***
5: $T(u) \leftarrow 0$
6: ***fin si***
7: ***fin pour***

Considérons l'automate A_3 de la figure 2.13 construit à la section 2.3.4 sur la minimisation.

Première itération

L'algorithme d'Angluin précise, pour son cas de base, une initialisation de la table T avec les ensembles R et S contenant uniquement ϵ. Le champ $R.\{a, b\}$ ($R.\Sigma$) est rempli via des requêtes d'appartenance sur les mots a et b.

O_0	ϵ
ϵ	0
a	0
b	0



Automate O_0

L'étape suivante consiste à vérifier la fermeture de la table d'observation O_0. Pour rappel :

$$\forall u \in R, \forall a \in \Sigma, \exists v \in R, uaR_Ov$$

Intuitivement, pour chaque symbole (ici, $\{a, b\}$, et ce sera vrai jusqu'à la dernière itération), tout mot candidat (dans R, la partie supérieure de la table) doit se retrouver, complété de ce symbole, dans une classe d'équivalence d'un autre candidat de R. Ici, de toute évidence, les

mots a et b sont dans la même classe d'équivalence que ϵ. Dès lors, la propriété de fermeture est respectée.

Si la fermeture est respectée, alors la question de la cohérence se pose. Pour rappel :

$$\forall u, v \in R, uR_O v \Rightarrow \forall a \in \Sigma, uaR_O va$$

Intuitivement, si deux candidats semblent être dans la même classe d'équivalence (leur lignes dans la table supérieure sont identiques), alors pour n'importe quel symbole, les deux nouveaux mots sont également dans une même classe d'équivalence (leur lignes, potentiellement dans la partie inférieure de la table, sont identiques). N'ayant qu'un seul candidat, cette propriété est forcément respectée (R_L est réflexive).

Les deux propriétés étant respectées, les classes d'équivalences sont calculées (trivialement ici), et un automate O_0 est proposé à l'enseignant pour vérification.

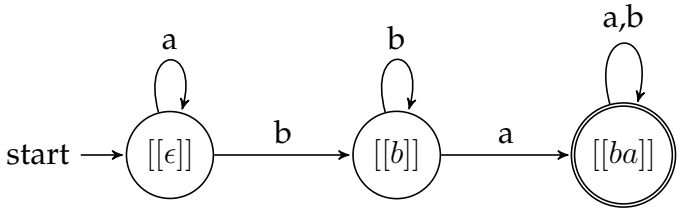
Sur cette itération, un automate initial a été proposé, et aucun état final ne pouvant être atteint avec un seul symbole, la version est minime.

Seconde itération

L'enseignant répond que non, les automates ne sont pas équivalents. Il fourni le contre-exemple ba. Comme il est rejeté par O_0, cela signifie qu'il est accepté par A_3. Une nouvelle table est alors construite, en ajoutant ba et ses préfixes (ici, juste b) à R. $R.\Sigma$ est calculé et les mots n'ayant pas encore reçu une valeur dans T sont soumis à l'enseignant pour un test d'appartenance. Les valeurs ajoutées ou modifiées dans la table d'observation sont mises en évidence en rouge.

O_1	ϵ
ϵ	0
b	0
ba	1
a	0
bb	0
baa	1
bab	1

O_2	ϵ	a
ϵ	0	0
b	0	1
ba	1	1
a	0	0
bb	0	1
baa	1	1
bab	1	1



Automate O_2

Comme pour la première itération, la fermeture est testée, suivie de la cohérence. Celle-ci n'est pas respectée : si on considère les mots ϵ et b, qui ont la même ligne dans la table T ($\epsilon R_O b$), le symbole a, on obtient les mots a et ba qui n'ont pas la même ligne : ($\neg aR_O ba$). Le symbole a est alors ajouté à S et une nouvelle table O_2 est calculée.

La fermeture étant déjà vérifiée, la question de la cohérence est reposée, et cette fois-ci elle est vérifiée ; l'automate est construit et proposé à l'enseignant.

Sur cette itération, l'algorithme a reçu le mot ba comme étant accepté. Il a du ajouter a à S pour permettre de différencier certains états. L'automate se voit ajouter les états $[[b]]$ et $[[ba]]$.

Troisième itération

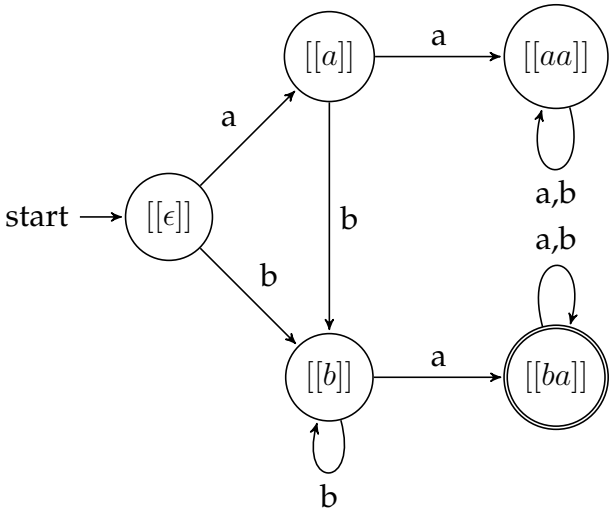
Suivant toujours l'algorithme de comparaison d'automates détaillé dans la section 2.3.3, l'enseignant découvre qu'ils sont différents.

Il sort le contre-exemple $aaba$. Si c'est un contre-exemple et qu'il est accepté par O_2, c'est qu'il ne l'est pas (0) par A_4. Une nouvelle table O_3 doit être construite.

O_3	ϵ	a
ϵ	0	0
a	0	0
b	0	1
aa	0	0
ba	1	1
aab	0	0
$aaba$	0	0
ab	0	1
bb	0	1
aaa	0	0
baa	1	1
bab	1	1
$aabb$	0	0
$aabaa$	0	0
$aabab$	0	0

O_4	ϵ	a
ϵ	0	0
a	0	0
b	0	1
aa	0	0
ab	0	1
ba	1	1
aab	0	0
$aaba$	0	0
bb	0	1
aaa	0	0
aba	1	1
abb	0	1
baa	1	1
bab	1	1
$aabb$	0	0
$aabaa$	0	0
$aabab$	0	0

O_7	ϵ	a	b	ab	ba
ϵ	0	0	0	1	1
a	0	0	0	0	1
b	0	1	0	1	1
aa	0	0	0	0	0
ab	0	1	0	1	1
ba	1	1	1	1	1
aab	0	0	0	0	0
$aaba$	0	0	0	0	0
bb	0	1	0	1	1
aaa	0	0	0	0	0
aba	1	1	1	1	1
abb	0	1	0	1	1
baa	1	1	1	1	1
bab	1	1	1	1	1
$aabb$	0	0	0	0	0
$aabaa$	0	0	0	0	0
$aabab$	0	0	0	0	0



Automate O_7

Ayant reçu $aaba$, ce mot et tous ses préfixes sont ajoutés à la table. L'extension $R.\Sigma$ est recalculée et la table O_3 est construite.

Un manquement à la fermeture est détecté : le mot a. En effet, en lui ajoutant le symbole

b, on obtient ab qui n'est ni dans R ni en relation R_O avec a. ab est alors ajouté à R, et $R.\Sigma$ est étendu. La nouvelle table, O_4 est de nouveau testée.

O_4 ne respecte pas la cohérence. Les mots ϵ et aa respectent R_O (leur ligne a la même valeur dans la table) mais $\neg bR_Oaab$. b est alors ajouté à S et une nouvelle colonne associée est ajoutée à la table, donnant le table O_5. Celle-ci a toujours un soucis de cohérence entre ϵ et aa, menant à l'ajout de ab à S et à la création de O_6. Finalement, pour régler le soucis de cohérence dans O_6 entre a et aa, le mot ba est ajouté à S et une table O_7 est ainsi créée avec la nouvelle colonne associée.

Cette table O_7 respectant la fermeture et la cohérence, l'automate associé O_7 est construit et soumis à l'enseignant pour être comparé à A_3. Celui-ci valide l'égalité et l'algorithme s'arrête : l'automate a été construit.

Chapitre 3

Notions spécifiques à LeVer

La section 3.1 défini plus clairement la problématique à l'aide des éléments du chapitre précédent. Elle explique comment les différentes sections de ce chapitre confluent vers une solution à la problématique en question.

Ensuite, la section 3.2 étend le concept des automates aux automates à files et défini une nouvelle opération. Une forme de langage sur ces nouveaux automates est proposée à la section 3.3.

Finalement, la notion de sécurité est définie dans la section 3.4 avec une formule permettant de calculer les états concernés.

Tous ces éléments combinés permettent l'utilisation de LeVer, la technique proposée par [7] et d'en implémenter l'algorithme dans le chapitre 5.

3.1 Problème

Cette section décrit le problème rencontré par [7] et la technique générale utilisée pour proposer une solution à ce problème.

Les automates à files définis à la section 3.2 sont plus puissants que les ADF définis dans le chapitre 2. Contrairement à ceux-ci, les automates à files ont potentiellement une infinité d'états. Dans ces conditions, il n'est pas possible d'en faire une exploration exhaustive pour trouver tous les états acceptants.

À la place, une propriété dite de sécurité est définie. Si un état respecte cette propriété, il est *sécurisé*. Si il y a moyen de prouver que la totalité des états de l'automate respectent cette propriété, l'automate est considéré comme sécurisé. Si au contraire, un exemple de violation de la propriété est trouvé, l'automate peut être déclaré comme insécure.

Les sections suivantes donnent les différents éléments utilisés par [7] pour répondre à cette question. Un nouveau langage est donné pour représenter les différents états d'un automate à files. Celui-ci est construit pour pouvoir être régulier pour certains automates. De la sorte, il est possible d'appliquer l'algorithme d'Angluin pour apprendre ce nouveau langage.

Celui-ci n'étant qu'une approximation du langage de l'automate à files, certaines incertitudes peuvent apparaître. Cependant, l'article justifie ces différents cas en ramenant la question à la sécurité, qui peut être répondue en un temps polynomial.

Dès lors, les différentes section permettent de construire ce langage, de se prononcer sur l'appartenance et l'équivalence avec ce langage et d'arrêter l'apprentissage s'il est possible de se prononcer sur la propriété de sécurité pour l'automate à files considéré.

3.2 Automate à files

L'article [7] se concentre sur un automate plus général : l'automate à files. Celui-ci est Turing Complete. De la sorte, l'équipe propose une réponse pour un ensemble plus large de langage. Cette section décrit les automates à files.

3.2.1 Définitions

Definition 2 Un *automate à files* $F = (Q, C, \Sigma, q_0, \Theta, \delta)$ est défini comme suit :

- Q est un ensemble fini d'*états de contrôle*
- C est un ensemble fini de *noms de canaux*
- Σ est un alphabet
- $q_0 \in Q$ est l'*état de contrôle initial*
- Θ est un ensemble fini de *noms de transitions*
- δ est la *fonction nommante*. $\delta : \Theta \to Q \times ((C \times \{?, !\} \times \Sigma) \bigcup \{\tau\}) \times Q$. Un nom de transition θ correspond à une transition de la forme $\delta(\theta) = (p, \text{"action"}, q)$. Cette action a une des trois formes suivantes :
  - $c!m$: C'est une action d'envoi. Le symbole m est ajouté en fin de canal c.
  - $c?m$: C'est une action de réception. Le symbole m est consommé en début de canal c.
  - τ : C'est une action interne. Aucun canal n'est modifié. □

Un automate F défini un *système de transitions* $\mathcal{T} = (S, \Theta, \to)$. $\mathcal{T}$ est l'objet qui permet de passer d'un *état* à un autre.

En effet, il existe les états de contrôles $q \in Q$, mais les états au sens d'un automate à files sont de forme $s \in S = Q \times (\Sigma^*)^C$. En particulier, $s = (q, w)$ avec $q \in Q$ un état de contrôle et $w \in (\Sigma^*)^C$ est un vecteur qui fait correspondre à chaque canal $c \in C$ un mot $w[c] \in \Sigma^*$ représentant le contenu de ce canal.

Un état s est composé d'un état de contrôle et du contenu des différents canaux.

De plus, la *fonction de transition* $\to$: $S \times \Theta \to S$ associe un état s et un nom de transition θ à un état s'.

$\mathcal{T}$ respecte trois règles, correspondants chacune à un des types d'actions mentionnés précédemment. En plus de la notation $w[c]$, celles-ci utilisent la notation $w[c \mapsto c']$ signifiant w à l'exception du canal c dont le contenu a été remplacé par le mot c'.

- Si $\delta(\theta) = (p, c?m, q)$ alors $(p, w) \xrightarrow{\theta} (q, w')$ si et seulement si $w = w'[c \mapsto mw'[c]]$
- Si $\delta(\theta) = (p, c!m, q)$ alors $(p, w) \xrightarrow{\theta} (q, w')$ si et seulement si $w' = w[c \mapsto mw[c]]$
- Si $\delta(\theta) = (p, \tau, q)$ alors $(p, w) \xrightarrow{\theta} (q, w')$ si et seulement si $w = w'$

Exemple 15

Soit un automate à files F tel que sont système de transitions corresponde à la figure 3.1. Chaque état de l'automate correspondant à un couple état de contrôle/mot, il est imprécis de référer au

système de transitions comme étant l'automate. Cependant, par abus de langage, ceux-ci seront souvent confondus dans ce document.

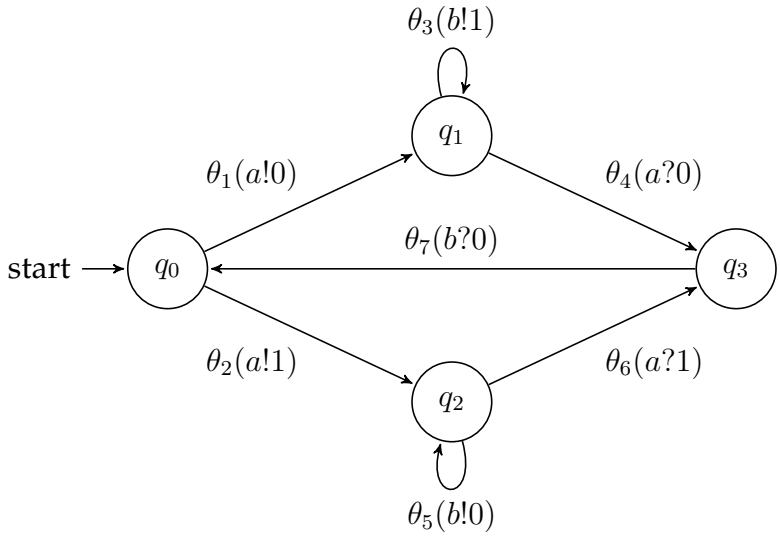


FIGURE 3.1: Système de transitions de l'automate à files F

On retrouve bien la définition d'un automate à files $F = (Q, C, \Sigma, q_0, \Theta, \delta)$ avec :
— $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
— $C = \{a, b\}$
— $\Sigma = \{0, 1\}$
— $q_0 \in Q$
— $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}$
— δ associant à chaque θ_i un triplet état/action/état. Celui-ci est représenté entre parenthèses à côté du nom de transition associé

De plus, on peut déduire le système de transition $\mathcal{T}$ défini par F. Considérons le mot $w = [\epsilon, \epsilon]$ où le premier élément du vecteur est le contenu du canal a et le second celui du canal b. Dans cet exemple, comme $\delta(\theta_1) = (q_0, a!0, q_1)$, alors $(q_0, w) \xrightarrow{\theta_1} (q_1, w')$. Dans ce cas, $w' = [0, \epsilon]$. A ce moment, on a bien $w' = w[a \mapsto 0w[a]]$. En utilisant ce nouveau mot w', un nouvel état est atteignable : q_3. En effet, comme $\delta(\theta_4) = (q_1, a?0, q_3)$, alors $(q_1, w') \xrightarrow{\theta_4} (q_4, w'')$. Dans ce cas, $w'' = [\epsilon, \epsilon]$. A ce moment, on a bien $w' = w''[a \mapsto 0w''[a]]$.

Intuitivement, la première transition θ_1 ajoute le symbole 0 en tête du canal a en passant de l'état q_0 à l'état q_1. La transition θ_4, elle, permet de passer de l'état q_1 à q_3 en consommant 0 en tête du canal a.

3.2.2 Produit cartésien

Par soucis de simplicité, un automate à files (et son système de transitions servant à le représenter) peut être représenté comme plusieurs systèmes de transitions utilisant les mêmes canaux. Le *produit cartésien* entre deux automates à files A et B retourne un nouvel automate $F = A \times B$. Dès lors, il est possible de représenter un automate à files en se concentrant sur

ses parties et en les isolant [2]. Cette propriété fait de l'automate à file un choix pertinent pour représenter des automates différents communiquant par des canaux. Dans une application pratique, cela pourrait être des programmes communiquant sur un réseau.

Ce produit cartésien fonctionne comme suit.

Soient les automates à files $A = (Q_A, C, \Sigma, q_{0A}, \Theta_A, \delta_A)$ et $B = (Q_B, C, \Sigma, q_{0B}, \Theta_B, \delta_B)$. Alors le système de transitions $\mathcal{T} = (S, \Theta, \rightarrow)$ de l'automate à files $F = A \times B$ est composé de :

— $S \subseteq (Q_A \times Q_B) \times (\Sigma^*)^C$ composé d'un couple d'états de contrôle de Q_A et Q_B et du contenu des différents canaux.

— Θ est un ensemble de noms de transitions.

— $\rightarrow$ est construit comme suit. Soit un état $((q_A, q_B), w) \in S$. Soit un triplet (p, a, q) avec $p, q \in (Q_A \bigcup Q_B)$ et $a \in ((C \times \{?, !\} \times \Sigma) \bigcup \{\tau\})$. $((q_A, q_B), w) \xrightarrow{\theta} ((q_{A'}, q_{B'}), w')$ si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est remplie.

  — $\exists \theta_A \in \Theta_A, \delta_A(\theta_A) = (q_A, a, q_{A'})$ et $(q_A, w) \xrightarrow{\theta_A} (q_{A'}, w')$ dans l'automate A et
  $\exists \theta_B \in \Theta_B, \delta_B(\theta_B) = (q_B, a, q_{B'})$ et $(q_B, w) \xrightarrow{\theta_B} (q_{B'}, w')$ dans l'automate B

  — $\exists \theta_A \in \Theta_A, \delta_A(\theta_A) = (q_A, a, q_{A'})$ et $(q_A, w) \xrightarrow{\theta_A} (q_{A'}, w')$ dans l'automate A,
  $\forall \theta_B \in \Theta_B, \forall q \in Q_B, \delta_B(\theta_B) \neq (q_B, a, q)$ dans l'automate B et $q_{B'} = q_B$

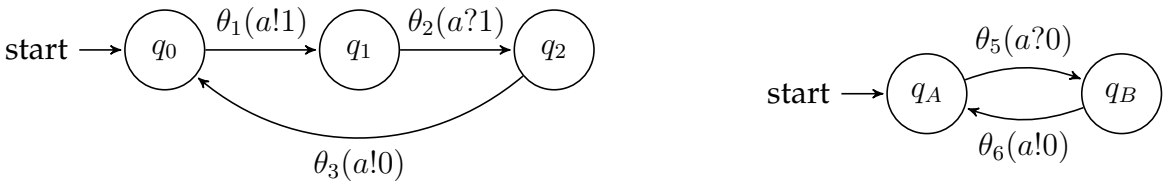
  — $\forall \theta_A \in \Theta_A, \forall q \in Q_A, \delta_A(\theta_A) \neq (q_A, a, q)$ dans l'automate A et $q_{A'} = q_A$,
  $\exists \theta_B \in \Theta_B, \delta_B(\theta_B) = (q_B, a, q_{B'})$ et $(q_B, w) \xrightarrow{\theta_B} (q_{B'}, w')$ dans l'automate B

Le produit cartésien est un nouvel automate représenté par son système de transitions. Celui-ci étant suffisant pour déduire le langage tracé, il n'est pas necéssaire de décrire formellement $F = (Q, C, \Sigma, q_0, \Theta, \delta)$.

De plus, ce nouvel automate est différent des deux autres, il n'est alors pas pertinent de prouver une égalité. Il s'agit juste d'un autre mode de représentation.

Exemple 16

Soient deux automates à files A et B tels que représentés par leur systèmes de transitions donnés par la figure 3.2.



(a) Automate à files A

(b) Automate à files B

FIGURE 3.2: Automates à files A et B représentés par leur système de transitions

L'automate $AB = A \times B$ est représenté par son sytème de transitions à la figure 3.3.

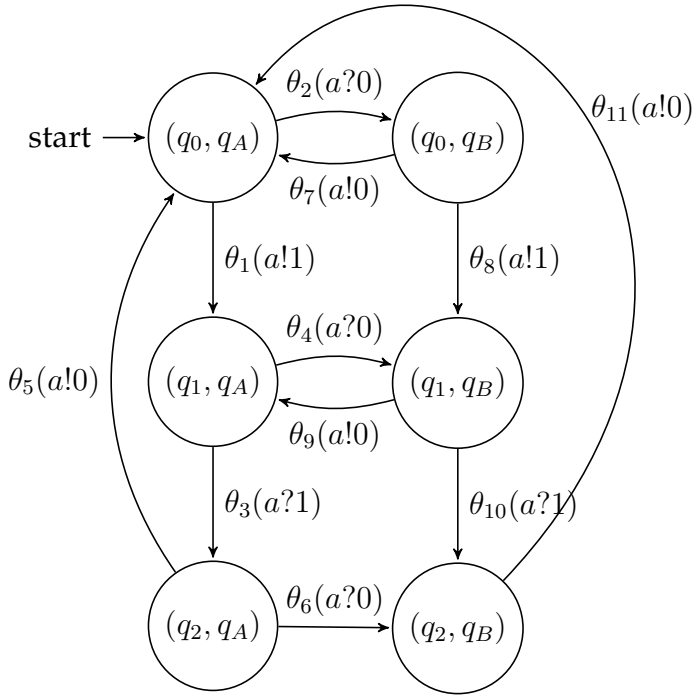


FIGURE 3.3: Automate AB résultant du produit cartésien $A \times B$

L'exemple 3.2.2 suffit à se convaincre qu'on peut parler indistinctement de plusieurs systèmes de transitions comme représentant un seul automate. Dans ce cas, il est sous-entendu que l'automate en question est celui obtenu par produit cartésien.

3.3 Trace d'automate

Cette section s'intéresse aux langages qui peuvent être associés à un automate. La section 3.3.1 défini le langage de trace d'un automate. Celui-ci est rarement régulier. Les sections suivantes s'appuyent sur [7] pour proposer un langage simplifié, plus souvent régulier, qui représente ce langage de trace. Finalement, la section 3.3.4 défini une fonction $\mathcal{F}$ qui étend une trace et explique en quoi cela aide à faciliter le processus d'apprentissage.

3.3.1 Langage tracé

Une façon de définir un langage à partir d'un automate à files est de s'intéresser aux noms des transitions suivies lors de l'exécution. Cette section défini les éléments permettant d'arriver à la construction d'un tel langage.

Dans un système de transitions $\mathcal{T} = (S, \Theta, \rightarrow)$, la fonction de transition $\rightarrow$: $S \times \Theta \rightarrow S$ permet de définir le passage d'un état à un autre.

La *fonction de transition étendue* $\xrightarrow{*}$ est la fermeture transitive et réflexive de $\rightarrow$.

Pour une suite de noms de transitions $\sigma = \theta_1\theta_2...\theta_n \in \Theta^*$, on note $(p, w) \xrightarrow{\sigma} (q, w')$ si il existe des états $(p_1, w_1)(p_2, w_2)...(p_{n-1}, w_{n-1})$ tels que $(p, w) \xrightarrow{\theta_1} (p_1, w_1) \xrightarrow{\theta_2} ... \xrightarrow{\theta_{n-1}} (p_{n-1}, w_{n-1}) \xrightarrow{\theta_n} (q, w')$. Dans ce cas, σ est une *trace de chemin*.

Definition 3 Soit un automate à files F et l'état initial $s_0 = (q_0, \epsilon^C)$. Celui-ci est le couple état de contrôle initial q_0 ainsi que des mots $w[c] = \epsilon$ pour tout canal $c \in C$.

Le *langage de trace* d'un automate F est

$$L(F) = \{\sigma \in \Theta^* | \exists s = (p, w) \text{ tel quel } s_0 \xrightarrow{\sigma} s\}$$

Exemple 17

Considérons l'automate F de la figure 3.1.

Pour celui-ci, $\sigma = \theta_1\theta_4\theta_7$ n'est pas un chemin. En effet,

$$(q_0, [\epsilon, \epsilon]) \xrightarrow{\theta_1} (q_1, [0, \epsilon]) \xrightarrow{\theta_4} (q_3, [\epsilon, \epsilon])$$

Mais, il n'existe pas d'état s tel que $(q_3, [\epsilon, \epsilon]) \xrightarrow{\theta_7} s$. En effet, pour appliquer cette transition, il aurait fallu que le canal b contienne un symbole 0. Ce n'est pas le cas. Noter quer σ est un mot du langage de trace et un chemin dans l'automate à files.

Par contre, $\sigma = \theta_2\theta_5\theta_5\theta_6\theta_7\theta_1\theta_4\theta_7$ est un chemin dans F :

$$(q_0, [\epsilon, \epsilon]) \xrightarrow{\theta_2} (q_0, [1, \epsilon]) \xrightarrow{\theta_5} (q_0, [1, 0]) \xrightarrow{\theta_5} (q_0, [1, 00]) \xrightarrow{\theta_6} (q_0, [\epsilon, 00]) \xrightarrow{\theta_7}$$
$$(q_0, [\epsilon, 0]) \xrightarrow{\theta_1} (q_0, [0, 0]) \xrightarrow{\theta_4} (q_0, [\epsilon, 0]) \xrightarrow{\theta_7} (q_0, [\epsilon, \epsilon])$$

On a bien un état s (ici $s = (q_0, [\epsilon, \epsilon]) = s_0$) tel que $s_0 \xrightarrow{\sigma} s$.

3.3.2 Alphabet d'annotation

Le langage de trace en tant que tel n'apporte pas de simplification à l'automate. C'est une autre façon d'écrire un chemin. Pour permettre l'apprentissage par l'algorithme d'Angluin, il faut en construire un nouveau langage, si possible régulier, qui permette de reconstruire le langage de trace. Pour ce faire, ce nouveau langage devrait pouvoir représenter tout état atteignable ainsi qu'un ou plusieurs chemins ou mots témoins permettant d'atteindre ceux-ci.

Pour ce faire, pour chaque nom de transition correspondant à une action d'envoi, un *co-nom* est défini :

$$\bar{\Theta} = \{\bar{\theta} | \theta \in \Theta \wedge \exists p, q \in Q, c \in C, a \in \Sigma, \text{tels que } \delta(\theta) = (p, c!a, q)\}$$

De plus, un *symbole de contrôle* est créé pour chaque état de contrôle : $T_Q = \{t_q | q \in Q\}$.

En combinant les noms de transitions, les co-noms et les symboles de contrôlé, un nouvel alphabet peut-être défini, l'*alphabet d'annotation* : $\Phi = (\Theta - \Theta_r) \bigcup \bar{\Theta} \bigcup T_Q$.

$\Theta_r = \{\theta | \theta \in \Theta \wedge \exists p, q \in Q, c \in C, a \in \Sigma, \text{tels que } \delta(\theta) = (p, c?a, q)\}$, similaire à $\bar{\Theta}$ mais avec un nom pour chaque transition pour les actions de réception.

3.3.3 Trace annotée

Soit $\mathcal{A} : \Theta^* \rightarrow \Phi^*$ une fonction associant une *trace annotée* à une trace d'automate. Cette fonction est décrite par l'algorithme 2.

Algorithme 2 $\mathcal{A} : \Theta^* \rightarrow \Phi^*$

Requis: un automate à files $F = (Q, C, \Sigma, q_0, \Theta, \delta)$, une suite de noms de transitions $\sigma \in \Theta^*$
Promet: une trace annotée $\gamma \in \Phi^*$ représentant σ

1: $\gamma \leftarrow \epsilon$
2: **pour chaque** nom de transition $\theta \in \sigma$ **faire**
3: **si** $\delta(\theta)$ est une action de réception **alors**
4: trouver $\theta_s \in \Theta$ correspondant à une action d'envoi antécédant dans σ telle que les actions s'appliquent sur le même canal et le même symbole
5: $\gamma \leftarrow \gamma$ où θ_s est remplacé par $\bar{\theta_s} \in \bar{\Theta}$ {θ n'est pas ajouté à γ}
6: **sinon si** $\delta(\theta)$ est une action d'envoi **alors**
7: $\gamma \leftarrow \gamma\theta$
8: **fin si**
9: **fin pour**
10: trouver q l'état de contrôle tel que $\delta(\theta) = (p, a, q)$ avec $p \in Q, a \in ((C \times \{?, !\} \times \Sigma) \bigcup \{\tau\})$
11: $\gamma \leftarrow \gamma t_q$ avec $t_q \in T_Q$ le symbole de contrôle associé à q
12: **retourner** γ

Soit $AL(F) = \{\mathcal{A}(\sigma) | \sigma \in L(F)\}$ le *langage de traces annotées* de l'automate F. $AL(F)$ est un ensemble de traces annotées correspondant à des exécutions valides de l'automate F. Intuitivement, $AL(F)$ contient l'ensemble des états atteignables par F ainsi que les traces annotées servant de témoins de cette atteignabilité.

Soit un mot $\gamma \in \Phi^*$. γ est *correctement formaté* si il fini par un symbole de T_Q qui qu'aucun autre symbole de cet ensemble n'apparaît dans le mot. Soit un langage arbitraire L. L est *correctement formaté* si tous les mots $w \in L$ le sont.

Exemple 18

Soit l'automate F représenté par la figure 3.2. Soient les traces $\sigma_1 = \theta_2\theta_8$ et $\sigma_2 = \theta_1\theta_3\theta_5\theta_2$. Alors, les traces annotées de ces traces sont : $\mathcal{A}(\sigma_1) = \theta_2\theta_8 t_{(q_1,q_B)} = \gamma_1$ et $\mathcal{A}(\sigma_2) = \bar{\theta_1}\bar{\theta_5} t_{(q_0,q_B)} = \gamma_2$. Bien qu'elles soient toutes deux correctement formatées, γ_1 ne correspond à aucune exécution valide de F. Dès lors, γ_1 n'appartient pas au langage de traces annotées de $AL(F)$ contrairement à γ_2.

Soit le mot $\gamma_3 = t_{q_0,q_A}\theta_2 t_{q_0,q_B} \in \Phi^*$. γ_3 n'est pas correctement formatée : il est impossible que cette trace annotée appartienne à $AL(F)$.

3.3.4 Fonction d'extension de trace

Cette section défini $\mathcal{F}(L)$ pour un langage arbitraire L et démontre que $AL(F)$ en est un point fixe minimum. De la sorte, tout langage qui n'est pas un point fixe minimum de $\mathcal{F}(L)$ ne peut pas être $AL(F)$. Si c'est le cas, la question d'équivalence est répondue : les langages ne sont pas égaux. Il reste alors à générer un contre-exemple.

La *fonction d'extension* $Post(L)$ permet d'étendre une trace annotée γ avec le symbole θ. Si γ est correctement formée, $source(\theta)$ et $cible(\theta)$ donnent respectivement la source et la cible d'une transition δ.

$$Post(\gamma,\theta) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \gamma \text{ n'est pas correctement formé ou si } \mathcal{C}(\gamma) \neq source(\theta) \\ \{\mathcal{T}(\gamma)t_{cible(\theta)}\} & \text{sinon si } \delta(\theta) = (p,\tau,q) \text{ ou } \delta(\theta) = (p,c_i!a_j,q) \text{ avec } p,q \in Q \\ \{deriv(\mathcal{T}(\gamma),\theta)t_{cible(\theta)}\} & \text{sinon si } \delta(\theta) = (p,c_i?a_j,q) \text{ avec } p,q \in Q \end{cases}$$

Sachant que $deriv(\mathcal{T}(\gamma),\theta)$ fonctionne comme l'algorithme $\mathcal{A}$ si θ est une action de réception. Elle le fait en remplaçant un $\theta_e \in \Theta$ associé à une action d'envoi et le remplace par $\bar{\theta_e} \in \bar{\Theta}$ si l'action porte sur le même canal et le même symbole que θ.

Posons $Post(\gamma) = \bigcup_{\theta\in\Theta} Post(\gamma,\theta)$ et $Post(L) = \bigcup_{\gamma\in L} Post(\gamma)$.

Théorème 3.3.1 *Soit $\mathcal{F}(L) = Post(L)\cup\{t_{q0}\}$ où q_0 est l'état de contrôle initial. $\mathcal{F}(L)$ est une opération monotone sur les ensemble c'est-à-dire qu'elle préserve l'inclusion d'ensembles. De plus, $AL(F)$ est un point fixe minimal de $\mathcal{F}(L)$.*

La preuve de ce théorème est disponible en annexe de [7].

Le théorème 3.3.1 donne bien une façon de répondre à la requête d'équivalence dans une direction. Alors, si $A \oplus B$ donne la différence symétrique entre deux ensembles (l'union à l'exception de leur intersection), le contre-exemple à l'équivalence se trouve dans $AL(F) \oplus L$.

Plusieurs cas sont possibles :

1. $\mathcal{F}(L) - L \neq \emptyset$. Il existe un mot $w \in \mathcal{F}(L)$ qui n'appartient pas à L.
   - Si $w = t_{q_0}$, alors il appartient à $AL(F) \oplus L$
   - Sinon, il faut vérifier si w est correctement formaté.
     - Si c'est le cas, alors $w \in (AL(F) \oplus L)$
     - Sinon, c'est qu'il existe $w' \in L$ tel que $w \in Post(w')$. $Post()$ d'une annotation valide retourne un annotation valide. Par contraposée, si w est invalide, w' l'est aussi. Dès lors, $w' \notin AL(F)$ et donc $w' \in (AL(F) \oplus L)$.
2. $\mathcal{F}(L) \subsetneq L$. Si un *point préfixe* est un ensemble Z qui réduit par l'application de $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}(Z) \subseteq Z$), alors L est un point préfixe.

   En appliquant $\mathcal{F}$ des deux côtés, ce qui préserve l'inclusion car $\mathcal{F}$ est monotone, on obtient $\mathcal{F}(\mathcal{F}(L)) \subsetneq \mathcal{F}(L)$.

   Donc, $\mathcal{F}(L)$ est également un point préfixe. Soit w un mot dans l'ensemble $L - \mathcal{F}(L)$. Comme w n'est pas dans l'intersection de ces deux point préfixes, il ne fait pas partie du point fixe minimum $AL(F)$. En effet, selon la théorie des points fixes de Knaster-Tarski (annexe B), un point fixe minimal est également l'intersection de tous les points préfixes de $\mathcal{F}$.

   Dès lors, $w \in AL(F) \oplus L$.
3. $\mathcal{F}(L) = L$. Soit $\mathcal{W}(L)$ l'ensemble des traces annotées menant à des états n'étant pas sûrs. $\mathcal{W}(L)$ est défini et une formule est donnée pour le calculer dans la section 3.4.
   - Si $\mathcal{W}(L)$ est vide, comme L est un point fixe (notre hypothèse pour ce point), le processus d'apprentissage peut être arrêté et la sécurité de l'automate est confirmée.

— Sinon, soit γ une trace annotée dans cet ensemble $\mathcal{W}(L)$. Si γ est valide, il peut être retourné comme contre-exemple à la sécurité de F. Si γ est invalide, $\gamma \in (AL(F) \oplus L)$

Le langage L n'est pas forcément $AL(F)$ dû à cette équivalence limitée (à un sens). Ce pourrait très bien être un autre point fixe contenant $AL(F)$ ou un autre ensemble contenant une trace annotée menant à un état qui n'est pas sûr. Cependant, ce n'est pas important tant que seule la propriété de sécurité est considérée.

3.4 Sécurité d'un automate à files

Comme mentionné au début du chapitre, ce travail s'intéresse à la propriété de sécurité dans les automates à files. Contrairement aux ADFs construits dans le chapitre 2, les automates à files ont un nombre potentiellement infini d'états. Dans ces conditions, il n'est pas possible d'énumérer l'ensemble des états acceptants.

Au lieu de proposer un ensemble d'état acceptants, on va fixer une propriété. Celle-ci permet de catégoriser les états qui sont souhaitables de ceux qui ne le sont pas. Par la suite, la section 3.4.2 propose une technique permettant de calculer l'ensemble des états indésirables à partir d'une trace annotée.

3.4.1 Définitions

Dans un automate à files $F = (Q, C, \Sigma, q_0, \Theta, \delta)$, chaque état de contrôle $q \in Q$ est associé à un union finie de langage réguliers pour chacun des canaux $c \in C$.

$$\bigcup_{0 \leq i \leq n_q} \Pi_{0 \leq j \leq k} U_q(i, c_j)$$

Où $U_q(i, c_j)$ est un langage régulier pour le contenu du canal c_j sur l'état q. n_q est le nombre de langages réguliers utilisés pour définir cette propriété par union.

Un état $s = (q, [w_0, w_1, \ldots, w_k])$ est *sécurisé* s'il n'existe pas $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $w_j \in U_q(i, c_j)$. Si tous les états d'un automate sont sécurisé, l'automate est également *sécurisé*.

Si un état n'est pas sécurisé, il est *à risque*. S'il existe au moins un état à risque dans un automate, celui-ci est *à risque*.

3.4.2 Traces annotées menant à des états à risques

Soit la fonction $h_c : \Phi^* \to \Sigma^*$ qui, pour un trace annotée donnée, ne retourne que les messages envoyés mais non réceptionnés sur le canal c.

h_c est l'unique homomorphisme qui étend la fonction suivante de Φ à Φ^* :

$$h_c(\theta) = \begin{cases} m & \text{si } \theta \in \Theta \text{ et } \delta(\theta) = (p, c!m, q) \\ \epsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $L = L(F)$ alors L_q est l'ensemble des mots correctements formattés pour L.

Si il existe un état à risque s, alors il existe une trace $\sigma \in \Theta^*$ telle que $s_0 \xrightarrow{\sigma} s$ où s_0 est l'état initial. Si les transitions dénotant des actions d'envoi et de réception d'un même symbole sur un même canal sont enlevées par paires, il ne reste que les transitions participant au contenu final des différents canaux de s. Par définition de h_c, pour chaque contenu $w[c_j]$ de chaque canal c_j, $w[c_j] = h_{cj}(\mathcal{A}(\sigma))$. Dès lors, pour que s soit atteignable, il faut qu'il existe une trace annotée $\gamma \in AL(F)$ telle que $s = (q_\gamma, [h_{c0}(\gamma), h_{c1}(\gamma), \ldots, h_{ck}(\gamma)])$ où q_γ est l'état de contrôle désigné par le symbole de contrôle à la fin de γ.

Soit la fonction $h_c^{-1} : \Sigma^* \to \Phi^*$ l'homomorphisme inverse de h_c. C'est-à-dire $h_{cj}^{-1}(U_q(i, c_j))$ retourne des traces annotées correspondant au contenu d'un canal. Dans ce cas particulier, un des langages réguliers servant à définir la propriété de sécurité. Comme un plusieurs traces annotées peuvent correspondre au même contenu de canaux par h_c, un contenu de canal peut correspondre à plusieurs traces annotées via h_c^{-1}.

En calculant cette fonction pour l'ensemble des états, canaux et langages réguliers définissant la sécurité de F et en s'assurant que ces traces sont correctement formatées, on obtient un ensemble de traces menant à des états à risque-.

Cet ensemble est décrit mathématiquement par $\mathcal{W}(L)$:

$$\mathcal{W}(L) = \bigcup_{q \in Q} \Big(\bigcup_{0 \leq i \leq n_q} \Big(\bigcap_{0 \leq j \leq k} h_{c_j}^{-1}(U_q(i, c_j)) \Big) \Big)$$

Chapitre 4

LeVer

Dans les chapitres précédants, les bases théoriques sur les automates et langages ont été posées. Celles-ci ont été suivies de concepts plus étroitement liés à LeVer tels que les automates à files, les traces, traces annotées et langages associés. Un dernier élément présenté dans la section 3.4 est la sécurité d'un état ou d'un automate.

En appliquant l'algorithme d'Angluin [1] selon la méthode LeVer [7], il est possible de se prononcer sur la sécurité pour toute une classe d'automates à files : ceux pour lesquels le language de traces annotées est régulier.

L'objectif dès lors n'est pas d'apprendre le language de l'automate à file mais le language de trace associé, et d'adapter la méthode pour répondre à la question de sécurité. En formulant les bonnes propriétés, il est également possible d'interrompre l'algorithme d'apprentissage avant terme si l'on peut se prononcer sur la sécurité de façon certaine.

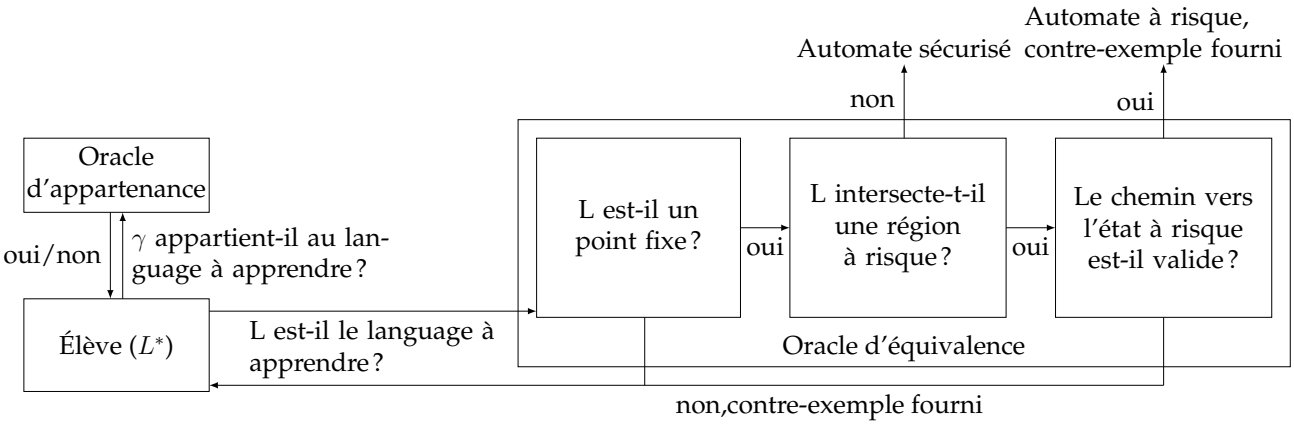


FIGURE 4.1: Vue schématique de l'algorithme d'Angluin pour LeVer[7]

Contrairement à la version proposée dans la section 2.4, ici il n'est pas possible de tester directement l'équivalence entre L et le language à apprendre. En effet, ce dernier peut ne pas être régulier et de façon générale le professeur ne connaît justement pas l'automate permettant une telle comparaison si celle-ci existe.

Ici, le professeur passe par trois questions mais à aucun moment il sait dire si L est exacte-

ment le language à apprendre. Il peut soit se prononcer sur la sécurité, soit dire avec certitude qu'il existe une meilleure approximation.

— *L est-il un point fixe ?* Cette question fait référence à l'application de la fonction d'extension de trace de la section 3.3.4.
— *L intersecte-t-il une région à risque ?* Si L est un point fixe de $\mathcal{F}$, il est soit le language à apprendre soit un point fixe le contenant. Si une surapproximation n'a pas d'intersection avec une région à risque, L n'en a pas non plus.
— *Le chemin vers l'état à risque est-il valide ?* Si un *chemin à risque* (menant à un état à risque) existe dans L, est-il valide ? C'est-à-dire, appartient-il au language visé et représente-t-il bien un chemin dans l'automate à files étudié ?

Les prochaines sections décrivent ce nouvel oracle d'appartenance et celui d'équivalence avec les trois questions posées avant de revenir sur une vue d'ensemble. De la sorte, la section 4.3 résume quand et pourquoi cette méthode fonctionne.

4.1 Appartenance

Lorsqu'un mot γ est fourni à l'oracle d'appartenance la question est de savoir s'il apparatient à $AL(F)$, le langage de trace annotée. Comme l'oracle ne possède pas d'automate pour représenter ce langage, il doit répondre en se basant sur F.

Ainsi, un mot γ appartient à $AL(F)$ s'il représente au moins un chemin σ valide dans F.

Soit une fonction $\mathcal{A}^{-1}(\gamma)$ donnant l'ensemble des chemins σ pour lesquels $\mathcal{A}(\sigma) = \gamma$. Si $\mathcal{A}^{-1}(\gamma) \neq \emptyset$, c'est que γ correspond bien à un chemin dans F ; que $\gamma \in AL(F)$.

Premièrement, si γ est incorrectement formaté, $\mathcal{A}^{-1}(\gamma) = \emptyset$ puisque tout mot de $AL(F)$ est conforme par définition.

En supposant que γ est correctement formatée, on peut remplacer les co-noms (appartenant à $\bar{\Theta}$) par leur nom de transition équivalent (de Θ). De plus, l'état final est omis. De la sorte, on obtient un mot σ' qui pourrait appartenir à $\mathcal{A}^{-1}$ si les transitions de réceptions correspondant aux états d'envois qui étaient barrés n'étaient pas omises.

Il est possible d'identifier ces transitions de réception. Dans le corps de γ, chaque envoi barré peut être associé à une transition de réception sur le même canal pour le même symbole. Cependant, la position à laquelle insérer de telles transitions dans le mot est inconnue.

Pour ce faire, il est possible de tester toutes les différentes positions (qui est un ensemble fini), et tester celles-ci sur l'automate F. Dès lors, toute trace σ correctement formatée pour laquelle $\mathcal{A}(\sigma) = \gamma$ appartient à $\mathcal{A}^{-1}(\gamma)$, rendant l'ensemble non-vide. Une seule trace est suffisante pour garantir que $\gamma \in AL(F)$.

Exemple 19

Considérons l'automate 3.2a. Pour rappel, celui-ci comprend trois transitions ($\delta(\theta_1) = (q_0, a!1, q_1)$, $\delta(\theta_2) = (q_1, a?1, q_2)$, et $\delta(\theta_3) = (q_2, a!0, q_0)$).

Une trace annotée $\gamma = \bar{\theta_1}\theta_3\bar{\theta_1}q_1$ appartient bien à $AL(A)$. En effet, $\mathcal{A}^-1(\gamma) = \{\theta_1\theta_2\theta_3\theta_1\}$.

Par contre, la trace $\gamma = \bar{\theta_1}\bar{\theta_1}\theta_3 q_0$ ne convient pas. Aucun chemin σ ne permet $\mathcal{A}(\sigma) = \gamma$. Il est facile de s'en convaincre : le chemin passe deux fois par θ_1 sans passer par θ_3 qui est ici inévitable pour retourner à l'état de contrôle q_0.

Par soucis d'efficacité, cet algorithme peut être effectué en exécutant l'automate par étape au lieu de générer toutes les combinaisons possibles avant de les trier. Cela permet de couper des branches dans l'arbre d'exécution. Dans le pire des cas, aucune branche n'est cependant coupée et aucune économie n'en résulte. Le pseudocode de l'annexe A donne le détail d'une telle optimisation.

4.2 Équivalence

Lorsqu'un langage régulier L, représenté par un automate A_O tel que $L(A_O) = L$, est donné à l'oracle d'équivalence, il doit se prononcer sur $L = AL(F)$. Cependant, il ne possède pas d'automate pour $AL(F)$ qui est justement le langage recherché. Il doit alors se prononcer sur l'égalité en se basant uniquement sur F.

Comme expliqué dans l'introduction du chapitre, c'est impossible de façon générale. Cependant, en supposant que $AL(F)$ est régulier, il est possible de contourner le problème pour répondre à la question de sécurité.

Contrairement à la version originale de l'algorithme d'Angluin qui a deux possibilités (équivalence ou contre-exemple), celle-ci en a trois. L'oracle peut répondre soit que $AL(F)$ est sécurisé, soit qu'il ne l'est pas, soit que L est différent de $AL(F)$ avec un contre-exemple.

L est-il un point fixe de $\mathcal{F}$?

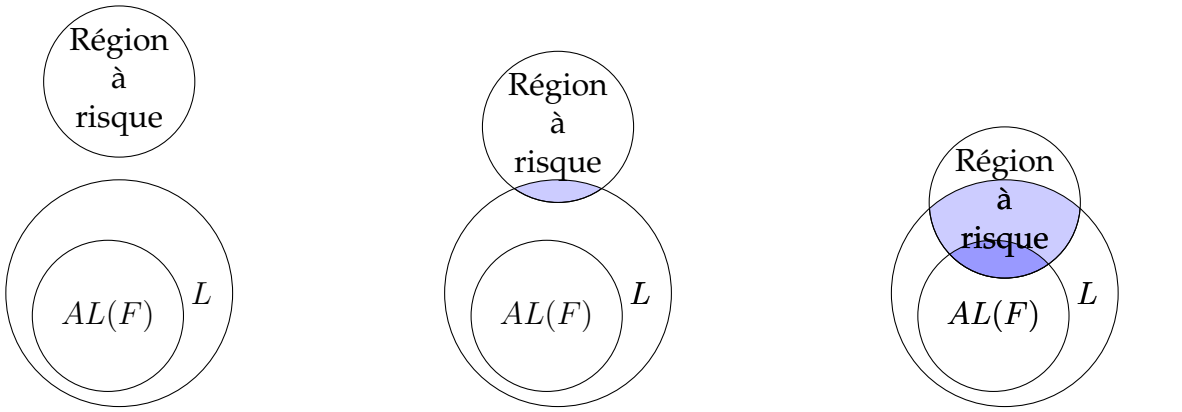
Cette question se base sur la proprité de $\mathcal{F}$ disant que $\mathcal{F}(AL(F)) = AL(F)$; que c'est une point fixe. Si L n'est pas un point fixe, il n'a alors aucune chance d'être $AL(F)$. Les trois cas de la section 3.3.4 donnent les différents détails.

Ceux-ci mentionnent trois possibilités :

— On peut directement retourner un contre-exemple
— $L = AL(F)$ et la sécurité peut être calculée
— L est une surapproximation de $AL(F)$. A ce moment, il faut se poser les deux autres questions pour pouvoir continuer à rafiner la compréhension de la relaiton entre L et $AL(F)$.

L intersecte-t-il avec une région à risque ?

En visualisant L comme étant un super-ensemble de $AL(F)$ et la région à risque comme un ensemble, il est possible de se représenter les différentes situations envisageables.



(a) Pas d'intersection (b) Intersection avec L seulement (c) Intersection avec $AL(F)$

FIGURE 4.2: L, $AL(F)$ et la région à risque

Pour savoir si nous sommes dans le scénario (a), (b) ou (c) de la figure 4.2, deux tests sont à effectuer.

Premièrement, vérifier si $\mathcal{W}(L)$ est vide ou non. S'il est vide, nous sommes dans le scénario (a) et il est possible d'annoncer avec certitude que F est sécurisé.

Le chemin vers l'état à risque est-il valide ?

Si la réponse à la question précédente est oui, sommes-nous dans le scénario (b) ou (c) ? Considérons un des éléments de $\mathcal{W}(L)$. Demandons à l'oracle d'appartenance si ce mot appartient également à $AL(F)$.

Si ce n'est pas le cas, c'est que $L \neq AL(F)$ et que l'algorithme d'Angluin peut continuer grâce au contre-exemple fourni. Ici, il peut s'agir soit d'un scénario (b) soit d'un scénario (c) puisqu'un autre mot de $\mathcal{W}(L)$ pourrait appartenir à $AL(F)$. Améliorer l'approximation d'$AL(F)$ permet justement de mieux discriminer ces deux scénarios sans devoir consulter la totalité de $\mathcal{W}(L)$.

Si par contre le mot étudié appartient aussi à $AL(F)$, on a un mot étant à la fois dans $AL(F)$ et dans la région à risque. F est déclaré à risque et le mot est retourné comme contre-exemple. Il s'agit du scénario (c).

4.3 Vue d'ensemble

Ce chapitre a décrit l'adaptation de l'algorithme d'Angluin à l'étude de la sécurité d'automates à file. Grâce à $\mathcal{W}(L)$ et $\mathcal{F}(L)$, des oracles ont pu être construits pour couvrir certains cas. De par les garanties del'algorithme d'Angluin[1] et la construction utilisée [7], certaines propriétés peuvent être prouvées, énoncées dans le théorème 4.3.1.

Théorème 4.3.1 *Pour vérifier la propriété de safety des automates FIFO, l'algorithme LeVer respecte les propriétés suivantes :*

1. *Si l'algorithme retourne une réponse, celle-ci est correcte*

2. *Si $AL(F)$ est régulier, la procédure s'arrête.*
3. *Le nombre de test d'appartenance et d'éuivalence dépend principalement de l'algorithme d'Angluin. Le temps total est borné en temps polynomial du nombre d'états de l'automate minimal pour $AL(F)$ et linéaire en le temps pris pour une requête d'appartenance à $AL(F)$*

Ce théorème rappelle la limite de la méthode. Il existe toutes une classe d'automates à files pour lesquels $AL(F)$ n'est pas régulier. À ce moment, aucune garantie ne peut-être fournie quand à l'exécution.

La preuve est disponible en annexe du travail de Vardhan et al.[7].

Chapitre 5

Implémentation

5.1 Choix

5.2 Résultats

Chapitre 6

Conclusion

Bibliographie

[1] D. ANGLUIN, *Learning regular sets from queries and counterexamples*, Information and Computation, 75 (1987), pp. 87 – 106.

[2] B. BOLLIG, A. FINKEL, AND A. SURESH, *Bounded Reachability Problems Are Decidable in FIFO Machines*, in 31st International Conference on Concurrency Theory (CONCUR 2020), I. Konnov and L. Kovács, eds., vol. 171 of Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), Dagstuhl, Germany, 2020, Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, pp. 49 :1–49 :17.

[3] J. E. HOPCROFT, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (2nd Edition)*, Addison Wesley, nov 2000.

[4] J. E. HOPCROFT AND J. D. ULLMAN, *Introduction to automata theory, languages and computation. adison-wesley*, Reading, Mass, (1979).

[5] D. C. KOZEN, *Automata and computability*, Springer Science & Business Media, 1997.

[6] D. NEIDER, *Applications of automata learning in verification and synthesis*, PhD thesis, Hochschulbibliothek der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 2014.

[7] A. VARDHAN, K. SEN, M. VISWANATHAN, AND G. AGHA, *Actively learning to verify safety for fifo automata*, in International Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, Springer, 2004, pp. 494–505.

Annexe A

Algorithme d'appartenance

Algorithme A.0.1 (Appartenance à $AL(F)$)
Requis: *une trace annotée $\gamma \in \Phi^*$ et un automate à files $F = (Q, C, \Sigma, q_0, \Theta, \delta)$*
Promet: *si $\gamma \in AL(F)$ ou non*

1: ***si*** *γ est mal formatée* ***alors***
2: ***retourner*** *faux*
3: ***fin si***
4: *candidats* $\leftarrow \{(q_0, \epsilon^c)\}$
5: ***pour chaque*** *symbole $\phi \in \gamma$* ***faire***
6: ***si*** *$\phi \in T_Q$* ***alors***
7: *{Fin du mot}*
8: ***pour chaque*** *$(q, w) \in$ candidats* ***faire***
9: ***si*** *ϕ est un t_q correspondant à q* ***alors***
10: ***retourner*** *vrai*
11: ***fin si***
12: ***fin pour***
13: ***retourner*** *faux*
14: ***sinon***
15: *{Exécution de l'automate sur une étape}*
16: *nouveau* $\leftarrow \emptyset$
17: *extension* $\leftarrow \emptyset$
18: ***pour chaque*** *$(q, w) \in$ candidats* ***faire***
19: *$\phi' \leftarrow \phi$ sans l'éventuelle barre*
20: *{Permet de rejeter les chemins incorrects sans effectuer l'exécution complète}*
21: *ajouter $\delta(\phi', (q, w))$ à extension si δ est définie pour ces valeurs*
22: ***fin pour***
23: *{Complète avec les actions de réception possibles}*
24: ***tant que*** *extension est non vide* ***faire***
25: *{Créer les différents cas de consommation des canaux}*
26: *prendre un élément $(q, w) \in$extension*
27: ***pour chaque*** *canal non-nul c de w commençant par un symbole s* ***faire***
28: ***si*** *$\exists\theta$ correspondant à l'action $c?s$ sortant de q* ***alors***

29: *{Comme une extension est elle-même étendue, on a récursivement les cas avec plusieurs réceptions bout à bout jusqu'à vider un canal}*
30: *ajouter $\delta(\theta, (q, w))$ à extension*
31: ***fin si***
32: ***fin pour***
33: *ajouter (q, w) à nouveaux*
34: *retirer (q, w) d'extension*
35: ***fin tant que***
36: *candidats $\leftarrow$ nouveaux*
37: ***fin si***
38: ***fin pour***

Note d'aide à la lecture

Cet algorithme a 3 étapes principales :
— La progression : un nouveau symbole est lu et les états qui le peuvent passent au nouvel état en suivant une transition. Les canaux sont mis à jour.
— L'extension : chaque candidat génère tous les candidats atteignables en consommant ce qu'il reste dans les canaux jusqu'à ce qu'ils soient vide ou qu'aucune transition ne permette de continuer.
— La vérification : une fois que l'algorithme a progressé jusqu'à la fin de γ, s'il reste des candidats, il vérifie si l'état de contrôle final correspond bien au symbole en fin de γ.

Intuitivement, si il y a n états de contrôle et m symboles, cet algorithme me semble être dans le pire des cas en $\mathcal{O}(mn^m)$. ***TODO** : une vérification formelle s'il est validé*. Il est est linéaire en le nombre d'états explorés. Par contre comme un symbole est consommé à chaque étape, il s'arrête toujours.

Annexe B

Théorème de Knaster-Tarski

Théorème B.0.1 *Soit une fonction monotone F portant sur des ensembles et P l'ensemble de points préfixes de F. Alors $\mu = \bigcap_{p \in P} p$ est le point fixe minimal de F.*

Il s'agit en réalité d'une reformulation adaptée aux ensembles et outils utilisés.

Preuve B.0.1.1

Soit une fonction monotone F portant sur des ensembles et P l'ensemble de points préfixes de F.

Posons $\mu = \bigcap_{p \in P} p$.

Par définition, $\forall p \in P, \mu \subseteq p$. Comme la fonction F est monotone, elle peut être appliquée aux deux ensembles : $\forall p \in P, F(\mu) \subseteq F(p)$.

Comme $F(p) \subseteq p$ par définition, on obtient par transitivité de l'inclusion que $\forall p \in P, F(\mu) \subseteq p$. Si $F(\mu)$ est inclus à tout ensemble p, c'est qu'aucun élément de $F(\mu)$ ne fait pas partie d'un p en particulier : cela revient à la définition de l'intersection. Donc, $F(\mu) \subseteq \bigcap_{p \in P} = \mu$. Cela prouve que μ est un point préfixe ($F(\mu) \subseteq \mu$). Comme F est monotone, $F(F(\mu)) \subseteq F(\mu)$ et $F(\mu)$ est également un point préfixe.

Or, comme $\mu \subseteq p$ est vrai pour tout p et en particulier pour $p = F(\mu)$ puisque $F(\mu)$ est un point préfixe et appartient alors à P, on obtient $\mu \subseteq (F(\mu))$. Dès lors, $\mu = F(\mu)$; μ est le point fixe minimal (la minimalité venant du fait que μ est déjà un point préfixe minimal).

□