UMONS

Faculté des Sciences

Vérification de la sûreté d'automates à file par apprentissage actif

Étudiant : Benjamin André
Directrice : Véronique Bruyère
30 mai 2021

Faculté des Sciences • Université de Mons • Place du Parc 20 • B-7000 Mons

Je soussigné, ANDRÉ BENJAMIN, atteste avoir respecté les règles éthiques en vigueur.

Remerciements

J'aimerais exprimer ma reconnaissance à certaines personnes sans qui ce mémoire ne serait pas ce qu'il est ; qui ont été des sources d'inspiration et de motivation.

Merci à Véronique Bruyère, directrice de ce mémoire pour l'investissement, la pédagogie, les précieuses relectures et la proactivité dont elle a fait part. Petit à petit, ce projet insurmontable a été décomposé en étapes surmontables et surmontées grâce à ses remarques et propositions.

Merci a Gaëtan Staquet pour son écoute, ses critiques et pour m'avoir guidé dans mes premiers pas avec les librairies utilisées dans ce projet.

Merci à ma famille qui m'a soutenu durant la rédaction en offrant une relecture supplémentaire qui a participé à la qualité finale de ce document.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce mémoire dont le titre est une traduction de "Actively learning to verify safety for FIFO automata" [6] est de comprendre et implémenter l'article en question.

Les automates à files sont des objets mathématiques permettant de représenter différents problèmes et sont particulièrement adaptés à la représentation de protocoles de communications ou de programmes informatiques communiquant par un réseau.

Une des opérations qui peut leur être appliquée est la vérification de la sûreté : est-il possible que l'automate à files finisse dans une configuration jugée comme étant indésirable ? Cela peut servir à detecter des bugs dans ces programmes de façon formelle.

Dans le cas d'un modèle fini, une exploration exhaustive est possible. Cependant, les automates à files présentent une infinité de configurations possibles dans la cas général. Dès lors, une solution plus élaborée doit être envisagée. C'est ce que présente [6] en appliquant et en adaptant un algorithme de machine learning pour répondre à la question de sûreté. Le processus consiste à fournir une représentation de l'automate à apprendre, de supposer que celle-ci est finie, et d'explorer celle-ci pour se prononcer sur la sûreté.

Pour tout cela, de nombreuses notions sont necéssaires. Le chapitre 2 introduit celles existant indépendamment de l'article, touchant à la notion d'automate à files et à l'apprentissage d'automates ayant un nombre fini de configurations.

Ensuite, le chapitre 3 décrit les nouvelles techniques et adaptations proposées par [6], une définition de la sûreté ainsi que l'algorithme de machine learning complet permettant de se prononcer sur la sûreté d'un automate à files.

Le chapitre 4 décrit les conditions d'implémentation, les logiciels utilisés et décrit des expérimentations servant à tester l'implémentation.

Finalement, le chapitre 5 reprend des éléments des différents chapitres pour nuancer les propos et proposer des pistes d'amélioration et d'exploration.

Chapitre 2

Automates et apprentissage

Ce chapitre, comme mentionné dans l'introduction 1, développe les différentes notions théoriques qui servent de blocs de base à l'apprentissage de la sûreté d'un automate à files.

En particulier, la section 2.1 défini les langages, suivies des expressions régulières à la section 2.2, donnant leur nom aux langages réguliers.

Ensuite, avant d'énoncer les automates à files, un modèle plus simple et fini est présenté : les automates finis de la section 2.3. Le Table Filling Algorithme est ensuite détaillé à la section 2.4. Celui-ci permet notamment de tester l'équivalence entre deux automates finis. Cette équivalence est un des éléments utilisés par l'algorithme d'Angluin de la section 2.5, permettant l'apprentissage actif d'automates finis.

Finalement, les automates à files sont introduits dans la section 2.6.

2.1 Langage

Un *alphabet* Σ est un ensemble fini et non vide de *symboles*. Un *mot* sur cet alphabet Σ est une suite finie de k éléments de Σ notée $w = a_1 a_2 \dots a_k$ où k est un nombre naturel. k est la *longueur* de ce mot aussi notée $|w| = k$. Le *mot vide* est un mot de taille $k = 0$ noté $w = \epsilon$.

La *concaténation* de deux mots $w = a_1 a_2 \dots a_k$ et $x = b_1 b_2 \dots b_j$ est l'opération consistant à créer un nouveau mot $wx = a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_j$ de longueur $i = k + j$.

Proposition 2.1.1 (ϵ et la concaténation) ϵ est *l'identité pour la concaténation*, à savoir pour tout mot w, $w\epsilon = \epsilon w = w$.

Cette proposition est triviale par la définition de la concaténation.

L'exponentiation d'un symbole a à la puissance k, notée a^k, retourne un mot de longueur k obtenu par la concaténation de k copies du symbole a. Noter que $a^0 = \epsilon$. Σ^k est *l'ensemble des mots sur* Σ de longueur k. L'ensemble de *tous les mots possibles sur* Σ est noté $\Sigma^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$.

Un ensemble quelconque de mots sur Σ est un *langage*, noté $L \subseteq \Sigma^*$. Étant donné que Σ^* est infini, L peut l'être également.

Exemple 1 (Langages)

Voici des exemples utilisant plusieurs modes de définition. Σ y est implicite mais peut être donné explicitement.

— $L = \{12, 35, 42, 7, 0\}$, un langage défini explicitement.
— $L = \{0^k 1^j | k + j = 7\}$, les mots de 7 symboles sur $\Sigma = \{0, 1\}$ commençant par zéro, un ou plusieurs 0 et finissant par zéro, un ou plusieurs 1. Ici, L est donné par notation ensembliste.
— L contient tous les noms de villes belges. Ici L est défini en langage courant.
— $\emptyset$ est un langage sur tout l'alphabet.
— $L = \{\epsilon\}$ ne contient que le mot vide, et est un langage sur tout alphabet.

Soient L et M deux langages. Le langage $L \cup M = \{w | w \in L \vee w \in M\}$ est l'*union* de ces deux langages. Il est composé des mots venant d'un des deux langages. Le langage $L \cap M = \{w | w \in L \wedge w \in M\}$ est l'*intersection* de ces deux langages. Il est composé des mots appartenant simultanément aux deux langages.

Le langage composé de tous les mots produits par la concaténation d'un mot de L avec un mot de M est une *concaténation* de ces deux langages et s'écrit $LM = \{vw | v \in L \wedge w \in M\}$.

La *fermeture* de L est un langage constitué de tous les mots qui peuvent être construits par un concaténation d'un nombre arbitraire de mots de L, noté $L^* = \{w_1 w_2 \ldots w_n | n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, w_i \in L\}$.

2.2 Expressions régulières

Certains langages peuvent être exprimés par une *expression régulière*.

Une expression régulière est un mot utilisant les symboles à représenter ainsi que les symboles (,),*,| qui sont réservés pour différentes opérations. Une expression régulière est construite à partir d'éléments atomiques (les symboles du langage à représenter) assemblés pour obtenir des langages plus complexes. Un langage qui peut-être représenté par une expression régulière est dit *langage régulier*.

Si plusieurs expressions régulières peuvent être composées en une expression plus complexe, une expression régulière peut aussi être décomposée en ses différents composants.

Cas de base Certains langages peuvent être construits directement sans passer par l'induction :
— ϵ est une expression régulière. Elle décrit le langage $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$
— $\emptyset$ est une expression régulière décrivant $L(\emptyset) = \emptyset$
— Si a est un symbole, alors a est une expression régulière décrivant le langage $L(a) = \{a\}$.

Pas de récurrence Les autres langages réguliers sont construits suivant différentes règles d'induction présentées par ordre décroissant de priorité :
— Si E est une expression régulière, alors (E) est une expression régulière et $L((E)) = L(E)$.
— Si E est une expression régulière, alors E^* est une expression régulière représentant la fermeture de $L(E)$, à savoir $L(E^*) = L(E)^*$.
— Si E et F sont des expressions régulières, alors EF est une expression régulière décrivant la concaténation des deux langages représentés, à savoir $L(EF) = L(E)L(F)$.
— Si E et F sont des expressions régulières, alors $E + F$ est une expression régulière donnant l'union des deux langages représentés, à savoir $L(E+F) = L(E) \cup L(F)$. L'opération est associative et la priorité est à gauche.

Exemple 2 (Expressions régulières)
Soit l'expression $E = (b + ab)b^*a(a + b)^*$ qui décrit le langage $L = L(E)$.

— Le mot ba fait partie de L. En effet, $ba = b\epsilon a\epsilon = (b)b^0a(a + b)^0$, ce qui respecte bien la définition de E.
— Le mot $ababbab$ fait partie de L. A nouveau, $ababbab = ab\epsilon a(a + b)(a + b)(a + b)(a + b) = (ab)b^0a(a + b)^4$.
— Le mot aa ne fait **pas** partie de L. Supposons par l'absurde que $aa \in L$, alors il existerait une façon de décomposer E en aa. Or, les premiers symboles doivent être soit b, soit ab. Il y a contradiction. Donc, $aa \notin L$.

Un autre exemple d'expression régulière est $E = 01^*0$. E décrit le langage $L(E)$ constitué de tous les mots commençant et finissant par 0 avec uniquement des 1 entre les deux.

2.3 Automates finis

Cette section décrit les automates déterministes finis (ADF) en 2.3.1 et en propose une représentation en 2.3.2. Par après, le langage correspondant est défini en 2.3.4. Les notations utilisées dans cette section s'appuyent principalement sur les différents travaux de Hopcroft Ullman ([3],[2]) et de Kozen [4].

En plus des automates déterministes finis, les automates non-déterministes finis avec ou sans transition sur ϵ sont également définis. Ils permettent de prouver l'équivalence entre un automate déterministe fini et une expression régulière en 2.3.5. Cela permet aussi de simplifier certains algorithme, laissant la transformation en automate déterministe en marge de la logique principale. Cette dernière section permet dès lors de passer d'une expression régulière à un automate et vice-versa, ce qui est utile lors de l'apprentissage d'un langage.

Pour faciliter la construction du langage et de l'algorithme d'équivalence, une fonction ECLOSE est définie en 2.3.3.

2.3.1 Définitions

Un *automate fini* $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ est défini comme suit :
— Q est un ensemble fini d'*états*
— Σ est un alphabet
— $q_0 \in Q$ est l'*état initial*
— δ est la *fonction de transition*
— $F \subseteq Q$ est un ensemble d'*états acceptants*.

La fonction de transition δ est définie différemment en fonction du type d'automate souhaité :
— **Automate Déterministe Fini (ADF)** $\delta : Q \times \Sigma \to Q$. Soit un état q et un symbole a. Alors la *transition* $\delta(q, a)$ retourne un état p. $\delta(q, a)$ doit être définie pour tout état et tout symbole.

— **Automate Non-déterministe Fini (ANF)** $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$. Soit un état q et un symbole a. Alors la transition $\delta(q, a)$ retourne un ensemble d'états $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq Q$.
— **Automate Non-déterministe Fini avec des transitions sur ϵ (ϵ-ANF)** $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to 2^Q$. Pareil que précédemment mais une transition peut exister sans symbole : elle se fait alors sur ϵ.

Lorsqu'un automate est mentionné dans ce document, il s'agit implicitement d'un ϵ-ANF, sauf mention contraire. En effet, c'est la forme la plus générale. Cependant, ces trois types d'automates ont la même puissance expressive, ce qui est prouvé dans plus loin dans cette section.

Soit la transition $\delta(q, a) = p$ (dans un ADF). Pour q, c'est une *transition sortante sur a*. Pour p, c'est une *transition entrante sur a*.

Si $\delta(q, a) = P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ dans un ANF, alors les états $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ auront une transition entrante sur a. Cette transition est *étiquettée* par a.

Dans le cas des ANFs et ϵ-ANFs, il peut être pratique d'utiliser δ sur un ensemble d'états S. A ce moment, $\delta(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$ avec $a \in \Sigma$.

Exemple 3 (Automate déterministe fini)

Considèrons l'ADF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ défini comme suit :
— $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$
— $\Sigma = \{a, b\}$
— q_0 est l'état du même nom.
— La fonction de transition δ est décrite par la table 2.1.
— $F = \{q_3\}$

	a	b
$\to q_0$	q_2	q_1
q_1	q_3	q_5
q_2	q_4	q_5
q_3^*	q_3	q_3
q_4	q_4	q_4
q_5	q_3	q_1
q_6	q_4	q_5

TABLE 2.1: La *table de transitions* δ d'un ADF

Cette table de transitions est construite comme suit :
— Les en-têtes de colonnes sont des symboles $a \in \Sigma$.
— Les en-têtes de lignes sont des états $q \in Q$.
— Une cellule à la croisée de la ligne q et du symbole a contient un état p avec $p = \delta(q, a)$.

Via la notation de la table 2.1, Q et Σ sont explicites. En dénotant l'état initial par $\to$ et les états acceptants par $*$ en exposant, on obtient une définition complète d'un automate : $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$.

Exemple 4 (ϵ-ANF)

De la même façon que pour l'exemple précédent, considérons un ϵ-ANF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ défini comme suit :

— $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
— $\Sigma = \{a, b, c\}$
— q_0 est l'état du même nom
— δ est donnée par la table 2.2.
— $F = \{q_2\}$
A est un ϵ-ANF ; une colonne supplémentaire sert à représenter la transition sur ϵ.

	ϵ	a	b	c
$\rightarrow q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_2^*	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

TABLE 2.2: La table de transitions δ d'un ϵ-ANF

Une table similaire sans la colonne ϵ représenterait un ANF au sens strict. Celui-ci ne serait pas pour autant équivalent à l'ϵ-ANF de la table 2.2.

2.3.2 Représentation graphique

Le *graphe d'un automate fini* $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ est un graphe dirigé construit comme suit :
— Chaque état de Q est représenté par un nœud.
— Chaque transition $\delta(q, a)$ est représentée par un arc étiqueté a. Dans le cas d'un automate non-déterministe, un arc existe pour chacun des états obtenus en suivant la transition. Si il y a plusieurs transitions sortant d'un même état et entrant dans un même autre état, les arcs peuvent être fusionnés en listant les étiquettes.
— L'état initial est mis en évidence par une flèche entrante.
— Les états acceptants sont représentés par un double cercle, en opposition au simple cercle des autres nœuds.

Exemple 5 (Graphe d'automate)

Voici les graphes représentant les automates définis dans les tables 2.1 et 2.2 :

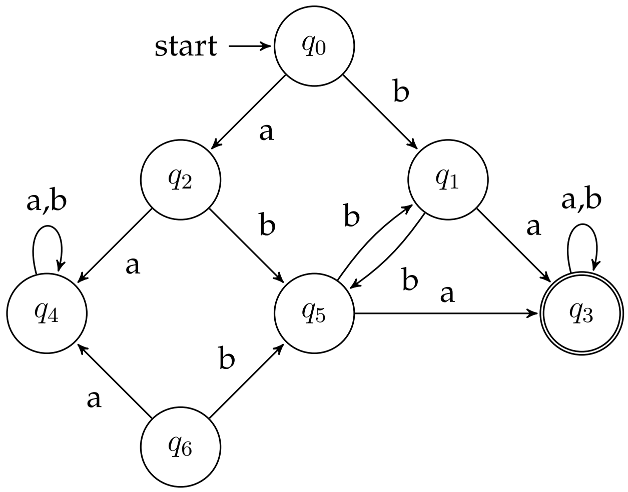


FIGURE 2.1: Graphe de l'ADF de la table 2.1

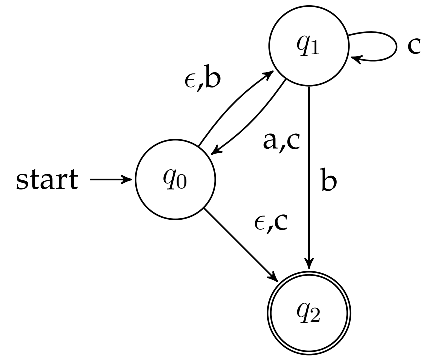


FIGURE 2.2: Graphe du ϵ-ANF de la table 2.2

Cette représentation a l'avantage d'être plus visuelle, alors que la table de transition est plus structurée. Par abus de langage, cette représentation peut être désignée comme étant l'automate qu'elle représente.

2.3.3 Algorithme ECLOSE

L'algorithme ECLOSE concerne les ϵ-ANF. Il permet, à partir d'un état spécifique, de calculer l'ensemble des états atteignables uniquement par des transitions sur ϵ. Ce calcul sert notamment au test d'appartenance d'un mot à un langage défini par un ϵ-ANF (section 2.3.4).

Soit un ϵ-ANF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Il est possible de construire une fonction retournant l'ensemble des états atteints uniquement en suivant des transitions sur ϵ pour un état q donné. Cette fonction est la *fermeture sur epsilon* $ECLOSE : Q \to 2^Q$. Sa définition est inductive.

Soit q un état dans Q.
Cas de base q est dans ECLOSE(q)
Pas de récurrence Si p est dans ECLOSE(q) et qu'il existe un état r tel quel $r \in \delta(p, \epsilon)$, alors r est dans ECLOSE(q).

ECLOSE peut être utilisé indifféremment sur un ensemble d'états S ($ECLOSE : 2^Q \to 2^Q$). Alors, $ECLOSE(S) = \bigcup_{q \in S} ECLOSE(q)$.

Exemple 6 (ECLOSE)

Considérons l'ϵ-ANF A de l'exemple 4, représenté dans la figure 2.2. Les différentes fermetures peuvent être calculées :

- ECLOSE(q_0) = $\{q_0, q_1, q_2\}$. En effet, q_0 appartient à sa fermeture selon le cas de base. Aussi, $q_1, q_2 \in \delta(q_0, \epsilon)$.
- ECLOSE(q_1)=$\{q_1\}$ par le cas de base.
- ECLOSE(q_2)=$\{q_2\}$ par le cas de base.

2.3.4 Langage d'un automate

Un automate *représente* un langage. Cette section explique les spécificités de cette représentation pour les 3 catégories d'automates rencontrés jusqu'ici.

Fonction de transition étendue

La *fonction de transition étendue* $\hat{\delta}$ est une extension de la fonction de transition, acceptant plusieurs symboles de façon consécutive. Intuitivement, il s'agit de suivre plusieurs arcs sur le graphe.

Comme la fonction de transition δ est différente en fonction du type d'automate considéré, $\hat{\delta}$ l'est aussi.

— **ADF :** $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$. $\hat{\delta}$ prend en entrée un état de Q et un mot w sur Σ et retourne un état de Q.

— **ANF et ϵ-ANF :** $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$. $\hat{\delta}$ prend en entrée un état de Q et un mot w sur Σ et retourne un ensemble d'états de Q.

Soit un état $q \in Q$ et un mot $w \in \Sigma^*$. Alors $\hat{\delta}$ est définie par :

Cas de base w est un mot vide :

— Pour un ADF ou ANF : $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$.

— Pour un ϵ-ANF : $\hat{\delta}(q, \epsilon) = ECLOSE(q)$.

Pas de récurrence Si $|w| \geq 1$, alors $w = xa$ avec x un mot sur Σ et a un symbole de Σ.

— Pour un ADF ou ANF : $\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$

— Pour un ϵ-ANF : $\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(q, xa) = ECLOSE(\delta(\hat{\delta}(q, x), a))$.

Dans le cas particulier où $|w| = 1$, $w = xa = \epsilon a$, ce qui mène au cas de base.

Il est possible que la fonction de transition δ ne soit pas définie pour une paire d'arguments. Auquel cas, $\hat{\delta}$ ne l'est pas non plus.

Chemin

Un *chemin* est une suite d'états d'un automate. Chaque état de cette suite doit être atteignable par une transition depuis l'état précédent dans cette suite.

Exemple 7 (Chemin)

Considérons l'automate A représenté par la figure 2.1. Il existe un chemin de q_0 à q_5 : (q_0, q_2, q_5). En effet, les transitions sont définies : $\delta(q_0, a) = q_2$ et $\delta(q_2, b) = q_5$. Un mot *représenté* par ce chemin est ab.

Dans le cas où plusieurs transitions mènent d'un état à un autre, plusieurs mots peuvent être représentés par un même chemin. Chaque état d'un chemin entre deux états p et q distinct de ceux-ci est dit *état intermédiaire*. S'il existe un chemin menant de q_0 à un état p, p est dit *atteignable*. Dans le cas contraire, il est *inatteignable*. Si pour un chemin donné il existe un état atteignable et acceptant, ce chemin est *accepté* par l'automate A.

Un chemin inclus dans un autre chemin est un *sous-chemin*.

Langage

Le *langage représenté* par un automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ $L(A)$ peut alors se définir comme les mots qui, par l'application de $\hat{\delta}$ sur l'état initial, donnent un état acceptant. Si deux automates représentent le même langage, ils sont dit *équivalents*. Voici les définitions ensemblistes, respectivement pour un ADF et pour un (ϵ)-ANF

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} \qquad L(A) = \{w \in \Sigma^* | \exists q \in \hat{\delta}(q_0, w), q \in F\}$$

Un mot appartenant à $L(A)$ est dit *accepté* par l'automate A.

Exemple 8
Soit A l'ADF de la figure 2.1. Alors $abaa$ est un exemple de mot appartenant à $L(A)$. En effet :

$$\begin{aligned}
&\hat{\delta}(q_0, abaa) = \\
&\delta(\hat{\delta}(q_0, aba), a) = \\
&\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, ab), a), a) = \\
&\delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, a), b), a), a) = \\
&\delta(\delta(\delta(\delta(q_0, a), b), a), a) = \\
&\delta(\delta(\delta(q_2, b), a), a) = \\
&\delta(\delta(q_5, a), a) = \\
&\delta(q_3, a) = \\
&q_3 \in F
\end{aligned}$$

Exemple 9
Soit A le Σ-ANF de la figure 2.2. Alors cb est un exemple de mot appartenant à $L(A)$. En effet :

$$\begin{aligned}
&\hat{\delta}(q_0, cb) = \\
&ECLOSE(\delta(\hat{\delta}(q_0, c), b)) = \\
&ECLOSE(\delta(ECLOSE(\delta(\hat{\delta}(q_0, \epsilon), c)), b)) = \\
&ECLOSE(\delta(ECLOSE(\delta(ECLOSE(q_0), c)), b)) = \\
&ECLOSE(\delta(ECLOSE(\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, c)), b)) = \\
&ECLOSE(\delta(ECLOSE(\{q_0, q_1, q_2\}), b)) = \\
&ECLOSE(\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, b)) = \\
&ECLOSE(\{q_1, q_2\}) = \\
&\{q_1, q_2\}
\end{aligned}$$

On a bien l'ensemble d'états $\{q_1, q_2\}$ avec $q_2 \in F$.

L'algorithme 2.3.1 détaille cette appartenance pour un mot.

Algorithme 2.3.1 (Appartenance d'un mot à un langage défini par un automate)
Requis: *un mot w, un automate quelconque $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ représentant $L = L(A)$*

Promet: *si w appartient à L*

1: $C \leftarrow \{q_0\}$ *{C est l'ensemble des états courants}*
2: ***si*** *A est un ϵ-ANF* ***alors***
3: $C \leftarrow ECLOSE(C)$
4: ***fin si***
5: ***tant que*** $|w| > 0$ ***faire***
6: *décomposer w en ax avec $a \in \Sigma$ et x le reste du mot*
7: $C \leftarrow \delta(C, a)$ *{passage à l'ensemble des états suivants}*
8: *{Si l'automate est un ADF, C ne contient toujours qu'un seul état}*
9: $w \leftarrow x$
10: ***si*** *A est un ϵ-ANF* ***alors***
11: $C \leftarrow ECLOSE(C)$
12: ***fin si***
13: ***fin tant que***
14: ***retourner*** *s'il existe un état $q \in C$ appartenant à F*

Complexité 2.3.1.1 (Lecture d'un mot par un automate)

La complexité de l'algorithme 2.3.1 dépend du type d'automate considéré. Considérons que $|w| = n$.

L'opération 1 est en temps constant. Les opérations 2 à 4 ont la complexité d'ECLOSE. Pour un ADF ou ANF, cette opération est triviale ($\mathcal{O}(1)$). Pour un ϵ-ANF, cette opération est en $\mathcal{O}(n)$. En effet, n états au plus peuvent être ajoutés à l'ensemble.

Les opération 6 et 9 sont en temps constant. L'opération 7 à la complexité de δ. Cette fonction est triviale pour un ADF. Si celui-ci est stocké dans un tableau, l'opération est en temps constant. Pour un ANF ou ϵ-ANF, comme δ porte sur un sous-ensemble de Q, l'opération est en $\mathcal{O}(n)$. Le pire des cas étant $C = Q$ avant ou après l'application de δ. Les opérations 10 à 12 sont à nouveau une application de $ECLOSE$.

Dès lors, le pire des cas du corps de la boucle de l'opération 5 est le maximum entre le pire des cas de $ECLOSE$ et de δ. Cette boucle s'effectue au plus n fois. Un symbole est enlevé à chaque itération.

L'opération 14 se fait en $\mathcal{O}(\log_2(n))$ pour un ADF et $\mathcal{O}(n \log_2(n))$ pour un ANF ou ϵ-ANF. Cette valeur suppose une recherche efficace dans F en $\mathcal{O}(\log_2(n))$.

En conclusion :

ADF	ANF	ϵ-ANF
$\mathcal{O}(1)+n(\mathcal{O}(1)+\mathcal{O}(1))+\mathcal{O}(\log_2(n))$	$\mathcal{O}(1)+n(\mathcal{O}(1)+\mathcal{O}(n))+\mathcal{O}(nlog_2(n))$	$\mathcal{O}(n)+n(\mathcal{O}(n)+\mathcal{O}(n))+\mathcal{O}(n\log_2(n))$
$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$

2.3.5 Équivalence entre expression régulière et automate

Certains problèmes peuvent être exprimés sous forme d'appartenance à un langage régulier, et par extension à une expression régulière. Pouvoir convertir une expression régulière en automate permet d'exécuter cet automate sur une machine pour tester l'appartenance. Ainsi, grâce à cette méthode, une grande classe de problèmes peut, en pratique, être résolue.

Théorème 2.3.1 (ADF et expression régulière) *Un langage peut être exprimé par un automate déterministe fini si et seulement si il peut être décrit par une expression régulière.*

Ce théorème étant une double implication, il est vrai si les deux implications le sont. Étudions celles-ci séparement.

Théorème 2.3.2 (ADF $\implies$ expression régulière) *Soit un langage L. Il existe un automate déterministe A tel que $L(A) = L \implies$ il existe une expression régulière E telle que $L(E) = L$.*

Preuve 2.3.2.1

Soit un langage L. Supposons qu'il existe un ADF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ tel que $L(A) = L$. Q étant un ensemble fini, on peut définir sa cardinalité : $|Q| = n$. Supposons que ses états soient nommés $\{1, 2, \ldots, n\}$. Il est possible de construire des expressions régulières par induction sur le nombre d'états considérés. De plus, un tel automate est aisément représenté dans un ordre séquentiel, de gauche à droite. Ceci permet de séparer visuellement les k premiers états du reste.

Soient $i, j, k \in Q$, tous correspondant à des nombres naturels inférieurs ou égaux à n. Définissons $E^k_{i,j}$ comme étant l'expression régulière décrivant un langage constitué des mots w tels que $\hat{\delta}(i, w) = j$ et qu'aucun état intermédiaire n'ait un nombre strictement supérieur à k.

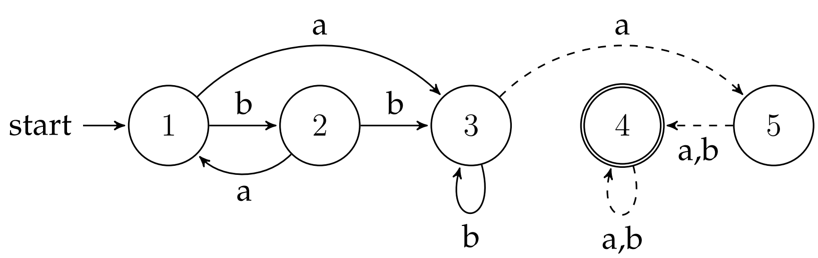


FIGURE 2.3: Exemple : automate mettant $E^3_{1,3}$ en évidence. Les mots représentés par un chemin passant par un arc discontinu n'appartiennent par à $E^3_{1,3}$: un des états intermédiaires est dénommé par un nombre supérieur à $k = 3$.

L'exemple ci-dessus illustre ce fait qu'aucun état supérieur à k ne peut faire partie des états intermédiaires. Intuitivement, il s'agit d'un automate auquel on a enlevé les transitions :

— Allant de i à un nombre supérieur à k (sauf j)
— Entre deux nombres supérieurs à k
— Allant d'un nombre supérieur à k (sauf i) à j

En pratique, celles-ci ne sont juste pas considérées lors de l'application de δ.

Cas de base $k = 0$. Comme tout état est numéroté 1 ou plus, aucun intermédiaire n'est accepté.

Une possibilité est $i \neq j$. Alors les chemins possibles ne se composent que d'un arc allant directement de i à j. Pour les construire :

Pour chaque paire i, j :

— Il n'existe pas de symbole a tel que $\delta(i, a) = j$. Alors, $E^0_{ij} = \emptyset$
— Il existe un unique symbole a tel que $\delta(i, a) = j$. Alors, $E^0_{ij} = a$

— Il existe des symboles $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tels que $\forall l \in \{1, \ldots, k\}, \delta(i, a_l) = j$. Alors, $E^0_{ij} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$

Une autre possibilité est $i = j$ et indique un chemin de longueur 0. Auquel cas l'expression régulière représentant un chemin sans symbole est ϵ. Ce chemin doit être ajouté au langage décrit par $E^k_{i,j}$ si $i = j$.

Pas de récurrence Supposons qu'il existe un chemin allant de i à j ne passant par aucun état ayant un numéro supérieur à k. La première possibilité est que le-dit chemin ne passe pas par k. Alors, le mot représenté par ce chemin fait partie du langage de E^{k-1}_{ij}. Seconde possibilité, le chemin passe par k une ou plusieurs fois comme représenté à la figure 2.4.

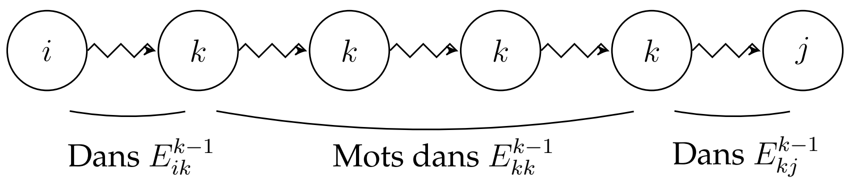


FIGURE 2.4: Un chemin de i à j peut être découpé en différents segments en fonction de k

Auquel cas, ces chemins sont composés d'un sous-chemin donnant un mot dans E^{k-1}_{ik}, suivi d'un sous-chemin donnant un ou plusieurs mots dans E^{k-1}_{kk} et finalement un mot dans E^{k-1}_{kj}.

En combinant les expressions des deux types, on obtient :

$$E^k_{ij} = E^{k-1}_{ij} + E^{k-1}_{ik}(E^{k-1}_{kk})^* E^{k-1}_{kj}$$

En commençant cette construction sur E^n_{ij}, comme l'appel se fait toujours à des chaînes plus courtes, éventuellement on retombe sur le cas de base. Si l'état initial est numéroté 1, alors l'expression régulière E exprimant L est l'union ($+$) des E^n_{1j} tels que j est un état acceptant.

$\square$

Complexité 2.3.2.1

Soit un ADF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ comportant n états. Pour connaître la complexité totale de cet algorithme, il faut connaître le nombre total d'expressions régulières construites et la longueur de chacune de celles-ci.

A chacune des n itérations (ajoutant progressivement des nouveaux états admis pour état intermédiaire), la longueur de l'expression peut quadrupler : elle est exprimée par 4 facteurs. Ainsi, après n étapes, cette expression peut être de taille $\mathcal{O}(4^n)$.

Le nombre d'expressions à construire, lui, est décomposable en deux facteurs également : le nombre d'itérations et celui de paires i, j possibles. Le premier facteur est n, quand aux paires, leur nombre s'exprime par n^2. n^3 expressions sont construites.

En regroupant ces deux facteurs, on obtient $n^3\mathcal{O}(4^n) = \mathcal{O}(n^3 4^n) = \mathcal{O}(2^n)$. Comme n correspond au nombre d'états, si la transformation se fait depuis un ANF, via un ADF, vers une expression régulière, la complexité devient doublement exponentielle. La première transformation étant elle-même exponentielle en le nombre d'états de l'ANF. Cependant, Hopcroft [2] précise que le pire des cas pour cette transformation concerne une classe limitée d'automates.

Exemple 10 (Construction d'une expression régulière)
Voici le processus de construction d'une expression régulière à partir de l'automate de la figure suivante :

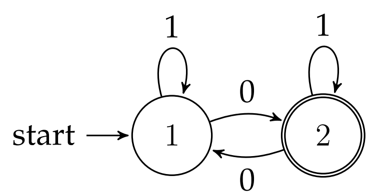


FIGURE 2.5: Un automate acceptant tout mot ayant un nombre impair de 0

La construction par récurrence commençant avec $k = 0$, le processus peut être représenté par des tableaux correspondant à différents k de façon croissante.

Première itération Dans la première itération, chaque expression se résume à un des trois cas de base, avec éventuellement ϵ si $i = j$ pour l'expression analysée. Ici, $k = 0$.

	Cas de base
E_{11}^0	$1 + \epsilon$
E_{12}^0	0
E_{21}^0	0
E_{22}^0	$1 + \epsilon$

Seconde itération Ensuite, l'état 1 est autorisé comme état intermédiaire : $k = 1$. Ayant potentiellement un état intermédiaire, la formule de récurrence est utilisée.

	Formule de récurrence	Détail	Simplification
E_{11}^1	$E_{11}^0 + E_{11}^0(E_{11}^0)^*E_{11}^0$	$(1+\epsilon) + (1+\epsilon)(1+\epsilon)^*(1+\epsilon)$	1^*
E_{12}^1	$E_{12}^0 + E_{11}^0(E_{11}^0)^*E_{12}^0$	$0 + (1+\epsilon)(1+\epsilon)^*0$	1^*0
E_{21}^1	$E_{21}^0 + E_{21}^0(E_{11}^0)^*E_{11}^0$	$0 + 0(1+\epsilon)^*(1+\epsilon)$	01^*
E_{22}^1	$E_{22}^0 + E_{21}^0(E_{11}^0)^*E_{12}^0$	$(1+\epsilon) + 0(1+\epsilon)^*0$	$\epsilon + 1 + 01^*0$

Troisième itération A la troisième itération, l'état 2 est autorisé comme état intermédiaire($k = 2$).

	Résultat
E_{11}^2	$1^* + 1^*0(1 + 01^*0)^*01^*$
E_{12}^2	$1^*0(1 + 01^*0)^*$
E_{21}^2	$(1 + 01^*0)^*01^*$
E_{22}^2	$(1 + 01^*0)^*$

Pour obtenir une expression régulière correspondant à l'automate, on s'intéresse à celle qui décrit un chemin entre l'état initial (1) et les états acceptants (uniquement 2 ici). Dès lors, $E_{12}^2 = 1^*0(1+01^*0)^* = L$.

Cette expression régulière $1^*0(1+01^*0)^*$ décrit bien un nombre impair de 0. Il en faut absolument un et tout ajout supplémentaire se fait par paire.

Théorème 2.3.3 (Expression régulière $\implies$ ADF) *($\Leftarrow$) Soit un langage L. Il existe une expression régulière E telle que $L(E) = L \implies$ il existe un automate déterministe A tel que $L(A) = L$.*

Preuve 2.3.3.1

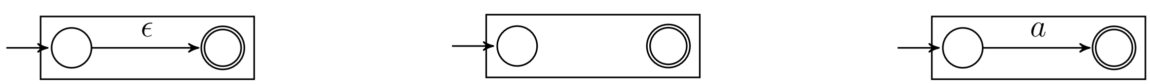
Comme tout ϵ-ANF a un ADF équivalent (théorème 2.3.4), montrer qu'une expression régulière E a un ANF équivalent est suffisant pour obtenir cet ADF.

Soit un langage L. Soit E une expression régulière telle que $L(E) = L$. On peut construire l'automate récursivement sur la définition des expressions régulières énoncées dans la section 2.2. Cette preuve par récurrence repose sur trois invariants portant sur chaque ANF construit :

1. Il y a un unique état acceptant
2. Aucune transition ne mène à l'état initial
3. Aucune transition ne part de l'état acceptant

Intuitivement, ces invariants servent à assurer que l'automate ainsi créé est lu de gauche à droite telle une expression régulière.

Cas de base Les ANF de la figure 2.6 représentent les automates correspondant aux trois cas de base.

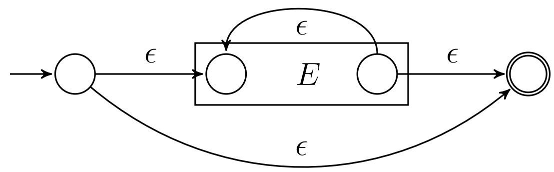


(a) $L = \{\epsilon\}$ (b) $L = \emptyset$ (c) $L = \{a\}$

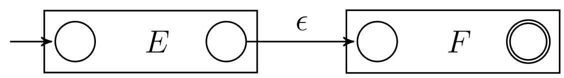
FIGURE 2.6: Blocs de base pour la construction d'un automate à partir d'une expression régulière

En effet, l'automate (a) représente le langage $\{\epsilon\}$ égal à $L(E)$: le seul arc de l'état initial à un état final est ϵ. L'automate (b) ne propose pas d'arc atteignant l'état final. Aucun mot n'appartient au langage représenté par cet automate qui vaut donc $\emptyset = L(\emptyset)$. Finalement, (c) propose un arc pour a. Dès lors, il existe un unique chemin de longueur 1 correspondant au mot a. Ainsi, le langage exprimé par cet automate $\{a\}$ est bien égal à $L(E) = L(a)$. De plus, ces automates respectent bien l'invariant de récurrence proposé.

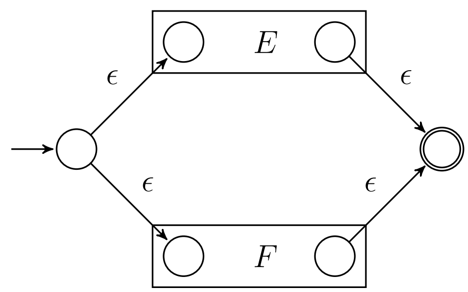
Pas de récurrence Les ANF *abstraits* de la figure 2.7 représentent la façon dont un automate peut être construit récursivement en fonction des règles de récurrence des expressions régulières. Ces ANF sont abstraits car le contenu d'un bloc E ou F n'est pas représenté explicitement. Cependant, celui-ci respecte les invariants de récurrence.



(a) $L = L(E)^*$



(b) $L = L(E)L(F)$



(c) $L = L(E) + L(F)$

FIGURE 2.7: Enchaînement de blocs pour une construction récursive

Les quatre règles de récurrence sur une expression régulière permettent de construire les automates :

— $L((E)) = L(E)$ ne nécessite pas de construction supplémentaire.

— $L(E^*) = L(E)^*$ est construit comme en (a). En effet, l'arc revenant au début de E permet d'exprimer E^1,E^2,E^3,...

— $L(EF) = L(E)L(F)$ est construit comme en (b). En effet, tout mot de cet automate est de la forme $v\epsilon w$ avec $v \in L(E)$ et $w \in L(F)$.

— $L(E + F) = L(E) \bigcup L(F)$ est construit comme en (c). En effet, tout mot de cet automate est de la forme $\epsilon v\epsilon$ ou $\epsilon w\epsilon$ avec $v \in L(E)$ et $w \in L(F)$, en accord avec la définition de l'union ensembliste.

Les automates (a), (b) et (c) respectent bien l'invariant de récurrence : pas de transition vers l'état initial, un seul état acceptant n'ayant pas de transition sortante. Chaque automate abstrait pour E ou F peut lui même être construit récursivement jusqu'au cas de base.

□

***Complexité* 2.3.3.1**

Soit une expression régulière E contenant n symboles (alphabet et opérations comprises) représentant un langage $L = L(E)$. La construction d'un ANF pour L peut se faire en $\mathcal{O}(n)$. En effet :

— **Cas de base** Au plus n ANF sont créés. Chacun correspond à un symbole (opérations non comprises). Chaque ANF a un état rendant la création en temps constant. La création de tous ces ANFs est alors en $\mathcal{O}(n)$
— **Pas de récurrence** Il reste au plus n symboles correspondant à des opérations, ce qui implique au plus n opérations. Chaque opération se base sur les 4 règles de récurrences définies précédemment. Dans les cas necéssitant une construction, celle-ci peut se faire en temps constant (ajout d'au plus deux états et quatre transitions). Chaque opération n'est à effectuer qu'une seule fois, consommant le symbole et chacune se fait en temps constant. Dès lors, la totalité des étapes de récurrence se fait au plus en $\mathcal{O}(n)$

La complexité totale de cette conversion est en $\mathcal{O}(n)$ vers un ANF. La conversion vers un ADF, comme mentionné dans la section ci-après peut, quand à elle, être exponentielle.

2.3.6 Équivalence entre un ADF et un ANF

Il est possible de construire un ADF à partir d'un ANF et réciproquement, tous deux représentant le même langage L. Ici, ANF est considéré au sens-large et peut tout aussi bien être un ANF normal qu'un ϵ-ANF. Ceci permet de justifier l'abstraction faite entre les différents types d'automates finis et l'utilisation du même terme pour tous ceux-ci.

Soit un ANF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Alors l'ADF équivalent

$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$$

est défini par :

— $Q_D = \{T | T =$ ECLOSE(S) et $S \subseteq Q\}$. Concrètement, Q_D est l'ensemble des parties des Q fermées sur ϵ. Ceci qui signifie que chaque transition sur ϵ depuis un état de T mène à un état également dans T. L'ensemble $\emptyset$ est fermé sur ϵ.
— q_D=ECLOSE(q_0). L'état initial de D est l'ensemble des états dans la fermeture sur ϵ des états de A.
— $F_D = \{T | T \in Q_D$ et $T \cap F \neq \emptyset\}$ contient les ensembles dont au moins un état est acceptant pour A.
— $\delta_D(T, a)$ est construit, $\forall a \in \Sigma, \forall T \in Q_D$ par :
  1. Soit $T = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.
  2. Calculer $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$. Renommer cet ensemble en $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$.
  3. Alors $\delta_D(T, a) = \bigcup_{j=1}^{m}$ ECLOSE(r_j).

Exemple 11 (Transformation d'un ANF vers un ADF)

Considérons l'automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ de l'exemple 4 et les fermetures calculées dans l'exemple 6.

Alors, l'automate $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ est donné par :

— $Q_D = \{\emptyset, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$. Les ensembles $\{q_0, q_1\}$ et $\{q_0, q_2\}$ sont des sous-ensembles de Q mais ne sont pas fermés sur ϵ.
— $q_D = \{q_0, q_1, q_2\} =$ ECLOSE(q_0).
— $F_D = \{\{q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$, les ensembles contenant q_2, étant acceptant de A.
— δ_D est exprimé sur le graphe de la figure 2.8.

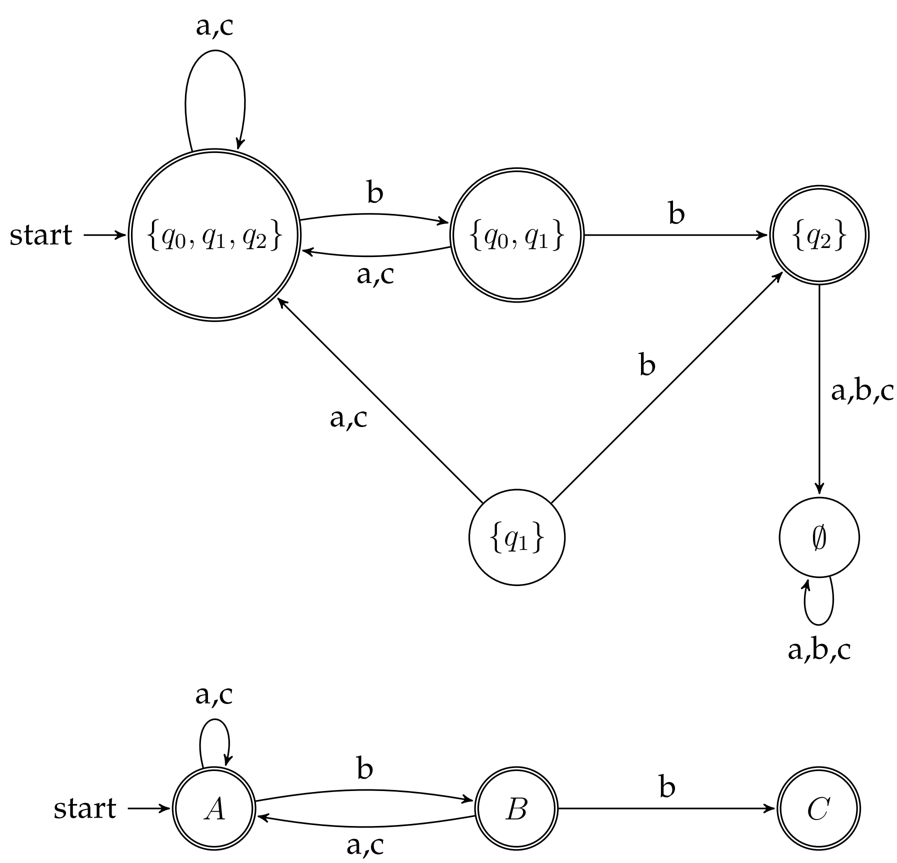


FIGURE 2.8: Automate D. De par la construction de Q, le nombre d'états de D est exponentiel. Les états inatteignables et $\emptyset$ sont souvent omis pour clarifier la représentation.

Théorème 2.3.4 (ANF $\Leftrightarrow$ ADF) *Un langage L peut être représenté par un ANF si et seulement si il peut l'être par un ADF.*

Preuve 2.3.4.1
Soit L un langage. Cette preuve étant une double implication, chacune peut être prouvée séparément.

($\Leftarrow$) L peut être représenté par un ADF $\implies$ L peut être représenté par un ANF. Supposons qu'un automate $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ représente L : $L(D) = L$. L'ANF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ correspondant est construit comme suit :

— $Q = \{\{q\} | q \in Q_D\} \bigcup \emptyset$
— δ contient les transitions de D modifiées. Les objets retournés sont des ensembles d'états. C'est-à-dire, si $\delta_D(q, a) = p$ alors $\delta(\{q\}, a) = \{p\}$. De plus, pour chaque état $q \in Q_D$, $\delta(\{q\}, \epsilon) = \emptyset$.
— $q_0 = \{q_D\}$
— $F = \{\{q\} | q \in F_D\}$

Dès lors, les transitions sont les mêmes entre D et A, mais A précise explicitement qu'il n'y a pas de transition sur ϵ. Comme A représente le même langage, il existe donc bien un ANF qui représente L.

($\Rightarrow$) L peut être représenté par un ANF $\implies$ L peut être représenté par un ADF. Soit l'automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Supposons qu'il représente $L = L(A)$. Considérons l'automate obtenu par la transformation détaillée à la section précédente (page 20) :

$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$$

Montrons que $L(D) = L(A)$. Pour ce faire, montrons que les fonctions de transition étendues sont équivalentes. Auquel cas, les chemins sont équivalents et donc les langages sont égaux. Montrons que $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_D, w)$ pour tout mot w, par récurrence sur w.

Cas de base Si $|w| = 0$, alors $w = \epsilon$. $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) =$ ECLOSE(q_0), par définition de la fonction de transition étendue. q_D=ECLOSE(q_0) par la construction de q_D. Pour un ADF (ici, D), $\hat{\delta}(p, \epsilon) = p$, pour tout état p. Par conséquent, $\hat{\delta}_D(q_D, \epsilon) = q_D =$ ECLOSE(q_0) $= \hat{\delta}(q_0, \epsilon)$.

Pas de récurrence Supposons $w = xa$ avec a le dernier symbole de w. Notre hypothèse de récurrence est que $\hat{\delta}_D(q_D, x) = \hat{\delta}(q_0, x)$. Ce sont bien les mêmes objets car $\hat{\delta}_D$ retourne un état de D qui correspond à un ensemble d'états de A. Notons celui-ci $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Par définition de $\hat{\delta}$ pour un ANF, $\hat{\delta}(q_0, w)$ est obtenu en :

1. Construisant $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\} = \bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$. Cet ensemble correspond aux états obtenus par la lecture du symbole a à partir de $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$.
2. Calculant $\hat{\delta}(q_0, w) = \bigcup_{j=1}^{m}$ECLOSE($r_j$). Un état atteint par la lecture de a l'est aussi par $a\epsilon$.

D a été construit avec ces deux mêmes étapes pour $\delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a)$. Dès lors, $\hat{\delta}_D(q_D, w) = \delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a) = \bigcup_{j=1}^{k}$ECLOSE($p_j$)$= \hat{\delta}(q_0, w)$.

On a bien $\hat{\delta}_D(q_D, w) = \hat{\delta}(q_0, w)$.

Les langages sont donc bien égaux.

$\square$

Complexité 2.3.4.1 (Conversion d'un ANF vers un ADF)

La complexité d'une conversion ANF vers ADF peut être exprimée en fonction de n le nombre d'états de l'ANF. La taille de l'alphabet Σ est ici comptée comme une constante $k = |\Sigma|$. Elle est ignorée dans l'analyse grand-O. L'algorithme de conversion se fait en deux étapes. Le calcul de ECLOSE et la construction à proprement parler. Ici, l'automate est stocké sous forme d'une table de transitions. Cette solution est plus facile à manipuler mais peut engendrer un surcoût en mémoire, qui n'est pas analysé ici.

— ECLOSE : chacun des n états ayant une entrée pour ϵ dans la fonction δ, le temps de calcul sur chaque nœud ajouté est en temps constant. Chacune des n fermetures pour chacun des n états $q \in Q$ pouvant au plus compter les n états, le temps total de cette opération est en $n\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$.

— Construction : posons s le nombre d'états dans l'ADF (qui, dans le pire des cas vaut $s = 2^n$ par la construction des sous-ensembles). La création d'un état de l'ADF est en $\mathcal{O}(n)$. En effet, il faut garder des références vers les états de l'ANF concernés. Il y a au plus n références.

Comme il y a s états dans l'ADF, il y a ks transitions. Chacune de celles-ci peut être construite en $\mathcal{O}(n)$. En effet, chaque état de l'ADF étant constitué d'au plus n états de l'ANF, il y a au plus n transitions à suivre pour obtenir l'ensemble d'états résultant dans l'ANF. Cet ensemble correspond alors à un état de l'ADF obtenu. Les transitions sont construites en $\mathcal{O}(nks) = \mathcal{O}(ns)$. k est toujours considéré comme une constante.

La complexité dans le pire des cas est $\mathcal{O}(n^2)+\mathcal{O}(sn)+\mathcal{O}(sn) = \mathcal{O}(sn) = \mathcal{O}(n2^n)$. Le détail est donné sur s car, comme prouvé dans le document d'Hopcroft [2], en pratique le nombre d'états dans l'ADF obtenu est rarement de l'ordre de 2^n, typiquement de l'ordre de n. Dans ce cas-là, la complexité devient $\mathcal{O}(n^2)$.

Complexité 2.3.4.2 (Conversion ADF vers ANF)

La conversion d'un ADF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ vers un ANF consiste au remplacement de n états par n ensembles d'un seul état. Chaque copie individuelle étant en temps constant, cette opération est en $\mathcal{O}(n)$. Ensuite, une nouvelle table de transition doit être créée. Si l'alphabet Σ est de taille k, celle-ci a toujours n lignes mais $k+1$ colonnes. En effet, une colonne est ajoutée pour ϵ. La création de cette nouvelle table se fait alors en $\mathcal{O}(kn)$. La complexité totale d'une conversion d'un ADF vers un ANF est en $\mathcal{O}(kn)$.

2.4 Algorithme Table Filling

L'algorithme Table Filling, détaillé en 2.4.2 vise à construire un tableau permettant de visualiser une relation entre les différents états d'un ADF. La relation en question, R_F , est définie en 2.4.1

Une fois l'algorithme défini, il est utilisé dans les sous-sections 2.4.3 et 2.4.4 pour tester l'équivalence entre deux automates ou en minimiser un.

2.4.1 Relation R_F

Soit un ADF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Définissons la relation R_F entre deux états :

$$xR_Fy \iff (\forall w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(y, w) \in F)$$

Intuitivement, ces deux états sont en relation si tout mot lu à partir de ceux-ci mène à des états étant simultanément acceptants ou non.

Proposition 2.4.1 (R_F) *R_F est une relation d'équivalence.*

Preuve 2.4.1.1 (R_F est une relation d'équivalence)

Montrer que R_F est une relation d'équivalence revient à montrer qu'elle est réflexive, transitive et symétrique.

— **Réflexive** Soient un état $x \in Q_M$ et un mot $w \in \Sigma^*$. Alors, $\hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(x, w) \in F$ et par définition, xR_Fx.

— **Transitive** Soient les états $x, y, z \in Q_M$ tels que xR_Fy et yR_Fz ainsi que $w \in \Sigma^*$. Par hypothèse, $\hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(y, w) \in F$ et $\hat{\delta}(y, w) \in F \iff \hat{\delta}(z, w) \in F$. Par transitivité de l'implication, on obtient $\hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(z, w) \in F$. On a donc xR_Fz.

— **Symétrique** Soient les états $x, y \in Q_M$ tels que xR_Fy et un mot $w \in \Sigma^*$. Par hypothèse, $\hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(y, w) \in F$. En lisant la double implication depuis la droite, on a bien $\hat{\delta}(y, w) \in F \iff \hat{\delta}(x, w) \in F$ et donc yR_Fx.

□

Corollaire 2.4.1.1
R_F répartit les états de Q en classes d'équivalence.

La classe d'équivalence de tous les états en relation R_F avec q (qui sert alors de *représentant*) se note soit par $[[q]]$ soit avec une lettre majuscule, typiquement S ou T.

Corollaire 2.4.1.2
Si Q est fini, alors le nombre de classes d'équivalence est fini aussi. Chaque classe d'équivalence $[[q]]$ contient un nombre d'états fini.

Proposition 2.4.2 (Congruence de $\boldsymbol{R_F}$) *R_F est congruente à droite, c'est-à-dire*

$$xR_Fy \implies \forall a \in \Sigma, \delta(x, a)R_F\delta(y, a)$$

Preuve 2.4.2.1 (Congruence de $\boldsymbol{R_F}$)
Montrons que si la relation est vraie pour deux états, elle reste valable pour les états atteints par la lecture d'un symbole quelconque. Soient les états $x, y \in Q_M$ tels que xR_Fy. Soit un symbole $a \in \Sigma$. Par hypothèse,

$$\forall w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(x, w) \in F \iff \hat{\delta}(y, w) \in F$$

C'est donc vrai en particulier pour $w = au, u \in \Sigma^*$. Dès lors,

$$\hat{\delta}(x, au) \in F \iff \hat{\delta}(y, au) \in F$$

$$\hat{\delta}(\delta(x, a), u) \in F \iff \hat{\delta}(\delta(y, a), u) \in F$$
$$\hat{\delta}(p, u) \in F \iff \hat{\delta}(q, u) \in F$$

□

Corollaire 2.4.2.1
Toutes les transitions étiquetées par un symbole a sortant d'une classe d'équivalence mènent à une même classe d'équivalence : $\forall$ classe d'équivalence $S, \forall a \in \Sigma, \exists$ une classe d'équivalence $T, \forall q \in S, \delta(q, a) \in T$.

2.4.2 Algorithme

Certains états d'un automate peuvent être *équivalents* selon la relation R_F . L'information que ceux-ci proposent est redondante. Dès lors, l'automate peut être simplifié pour offrir la même information de façon plus compacte. Une façon de détecter ces équivalences est de construire un tableau via l'algorithme *table filling*. Le tableau obtenu est la *table de différenciation*.

Celui-ci détecte les paires *différenciables* récursivement sur un automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Une paire $\{p, q\}$ est différenciable s'il existe un mot w tel que $\hat{\delta}(p, w)$ est un état acceptant et $\hat{\delta}(q, w)$ ne l'est pas ou vice-versa. w sert alors de *mot témoin*. L'algorithme procède récursivement comme suit :

Cas de base Si p est un état acceptant et que q ne l'est pas, alors la paire $\{p, q\}$ est différenciable. Le mot témoin est ϵ. La cellule correspondante dans le tableau est cochée.

Pas de récurrence Soient p, q, r, s des états de Q et un symbole $a \in \Sigma$ tel que $\delta(p, a) = r$ et $\delta(q, a) = s$. Si r et s sont différenciables (les cellules sont cochées dans le tableau) alors p et q le sont aussi. En effet, il existe un mot *témoin* w qui permet de différencier r et s. Alors le mot aw est le mot témoin qui permet de différencier p et q. Les cellules de ces états sont cochées.

Théorème 2.4.3 (Table de différenciation) *Si deux états ne sont pas différenciés par l'algorithme table filling, les états sont équivalents (ils respectent la relation R_F).*

Exemple 12 (Table de différenciation)

Voici une application du table filling algorithm sur l'automate A_2, version réduite de l'automate A_1 de la figure 2.1.

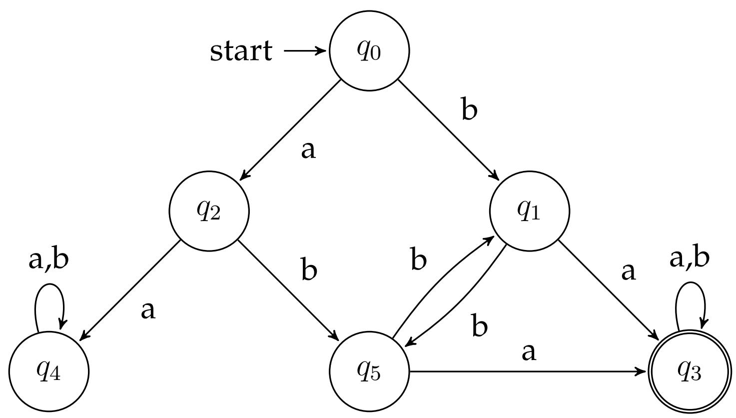


FIGURE 2.9: Automate A_2

La première étape est de compléter la table de différenciation avec l'algorithme précédent. Tout état est différenciable de q_3 : il est le seul état acceptant et tous les autres ne le sont pas. 5 cases peuvent déjà êtres cochées. Le reste de la table est remplie par induction comme représenté dans la table 2.3.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1					
q_2					
q_3	x	x	x		
q_4				x	
q_5				x	

(a) Cas de base : tous les états sont différents de q_3

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	x				
q_2		x			
q_3	x	x	x		
q_4		x		x	
q_5	x		x	x	x

(b) Première itération : les nouvelles paires d'états différenciables mènent, via un symbole $a \in \Sigma$ à deux autres états différenciables.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	x				
q_2		x			
q_3	x	x	x		
q_4	x	x	x	x	
q_5	x		x	x	x

(c) Deuxième itération

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	x				
q_2	x	x			
q_3	x	x	x		
q_4	x	x	x	x	
q_5	x		x	x	x

(d) Troisième itération : q_1 et q_5 ne sont pas différenciés.

TABLE 2.3: Tables de différenciation de l'automate A_2

D'après le théorème, comme q_1 et q_5 ne sont pas différenciés, on a $q_1 R_F\, q_5$.

Preuve 2.4.3.1

Considérons un ADF quelconque $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Supposons par l'absurde qu'il existe une paire d'états $\{p, q\}$ telle que :

1. p et q ne sont pas différenciés par l'algorithme de remplissage de table.
2. Les états ne sont pas équivalents : $\neg(pR_Fq)$. Par extension, il existe un mot témoin w différenciant p et q.

Une telle paire est une *mauvaise paire*. Si il y a des mauvaises paires, chacune associée à un mot témoin, il doit exister une mauvaise paire diférenciée par un mot témoin le plus court. Posons $\{p, q\}$ comme étant cette paire et $w = a_1a_2 \dots a_n$ le mot témoin le plus court montrant que $\neg(pR_Fq)$. Dès lors, soit $\hat{\delta}(p, w)$ est acceptant, soit $\hat{\delta}(q, w)$ l'est, mais pas les deux.

Ce mot w ne peut pas être ϵ. Auquel cas, la table aurait été remplie dès le cas de base de l'algorithme avec la paire différenciable $\{p, q\}$. La paire $\{p, q\}$ ne serait pas une mauvaise paire.

w n'étant pas ϵ, $|w| \geq 1$. Considérons les états $r = \delta(p, a_1)$ et $s = \delta(q, a_1)$. Ces états sont différenciés par $a_2a_3 \dots a_n$ car $\hat{\delta}(p, w) = \hat{\delta}(r, a_2a_3 \dots a_n)$ et $\hat{\delta}(q, w) = \hat{\delta}(s, a_2a_3 \dots a_n)$ et p et q sont différenciables.

Cela signifie qu'il existe un mot plus petit que w qui différencie deux états : le mot $a_2a_3 \dots a_n$. Comme on a supposé que w est le mot le plus petit qui différencie une mauvaise paire, r et s ne peuvent pas être une mauvaise paire. Donc, l'algorithme a dû découvrir qu'ils sont différenciables.

Cependant, le pas de récurrence impose que si $\delta(p, a_1)$ et $\delta(q, a_1)$ mènent à deux états différenciables, cela implique que p et q le sont aussi. On a une contradiction de notre hypothèse : $\{p, q\}$ n'est pas une mauvaise paire.

Ainsi, s'il n'existe pas de mauvaise paire, c'est que chaque paire différenciable est reconnue par l'algorithme.

□

Complexité 2.4.1.1

Considérons n le nombre d'états d'un automate A, et $k = |\Sigma|$ la taille de l'alphabet Σ de A.

Considérons aussi une version optimisée de l'algorithme. Une optimisation simple est de construire pour chaque paire $\{r, s\}$ une liste des paires *dépendantes* $\{p, q\}$ telles que, pour un même symbole a, $\delta(p, a) = r$ et $\delta(q, a) = s$.

Cette liste peut être construite en considérant chaque symbole $a \in \Sigma$ et ajoutant les paires $\{p, q\}$ à chacune de leur dépendance $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$. Cette étape prend au plus $k.\mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(kn^2)$. (Le nombre de symboles multiplié par le nombre de paires à considérer).

Dès lors, on peut prendre la récurrence et la propager en ajoutant les paires dépendantes de celles différenciées au cas de base. Celui-ci s'effectue en $\mathcal{O}(n^2)$ opérations, cochant au plus la moitié des paires ($\frac{n(n-1)}{2*2}$). Ayant au plus $\frac{n(n-1)}{2}$ paires à atteindre, il y a au plus de l'ordre de $\mathcal{O}(n^2)$ opérations.

La complexité totale revient à $\mathcal{O}(kn^2)$.

2.4.3 Appartenance et équivalence

Comme mentionné en début de section, le test d'équivalence entre deux automates est un des piliers de l'algorithme d'Angluin. Comparer des langages représentés de façon ensembliste n'est pas toujours possible et rarement efficace. Grâce à de légères modifications apportées à l'algorithme de minimisation de la section 2.4.3, il est possible de comparer deux ADF et déterminer si ceux-ci sont équivalents. L'algorithme obtenu est en temps quadratique par rapport au nombre d'états de l'ADF.

Considérons les ADF A_H et A_I représentés par les figures 2.10 et 2.11. Les états ont été renommés pour simplifier la suite de l'exemple.

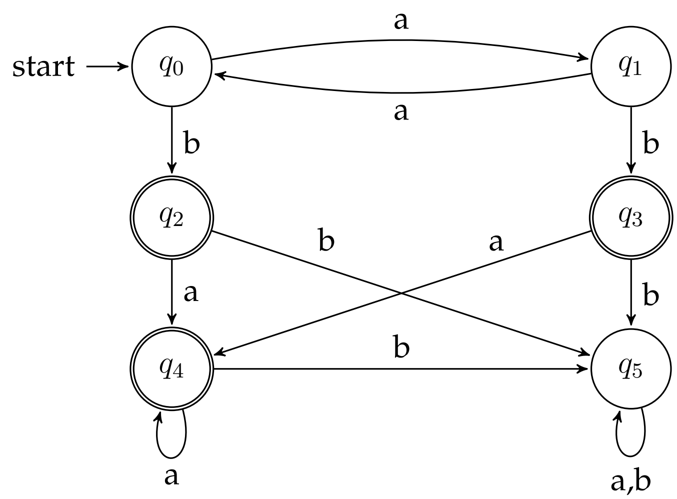


FIGURE 2.10: Automate A_H, exemple tiré du livre d'Hopcroft et Ullman [3] (Fig3.2)

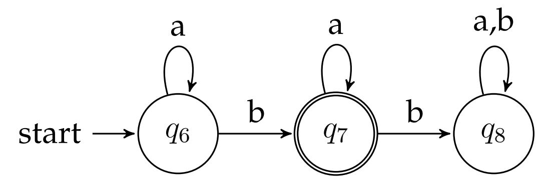


FIGURE 2.11: Automate A_I, provenant également de [3].

Il est possible de remplir un tableau via l'algorithme table filling. Pour ce faire, les deux ADF sont considérés comme un seul dont les états sont disjoints.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
q_1								
q_2	X	X						
q_3	X	X						
q_4	X	X						
q_5	X	X	X	X	X			
q_6			X	X	X	X		
q_7	X	X				X	X	
q_8	X	X	X	X	X		X	X

FIGURE 2.12: Tableau généré par l'application de l'algorithme sur A_H et A_I

De cette table, toujours grâce aux conclusions précédentes, il est possible d'extraire des classes d'équivalences :

— $C_0 = \{q_0, q_1, q_6\}$
— $C_1 = \{q_2, q_3, q_4, q_7\}$
— $C_2 = \{q_5, q_8\}$

En particulier, la classe C_0 souligne que les états initiaux sont équivalents. Cela signifie, par définition, que tout mot w lu en partant d'un de ces états sera soit accepté dans les deux automates, soit refusé dans les deux. A_H et A_I définissent donc le même langage.

Écrivons concrètement l'algorithme de test d'équivalence entre deux ADF.

Algorithme 2.4.2 (Équivalence entre deux automates)
Soient les ADFs $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ et $B = (Q_B, \Sigma_b, q_b, \delta_b, F_b)$. Des automates utilisant des alphabets

différents représenteront probablement des langages différents mais pas nécéssairement.

1. *Considérer les deux automates comme un seul automate disjoint. Le choix de l'état initial de l'automate ainsi construit n'a pas d'importance, qu'il soit q_0 ou q_b.*
2. *Construire la table de différenciation par l'algorithme table filling.*
3. *Si q_0 et q_b sont équivalents (non différenciés par la table), alors A et B sont équivalents.*

Complexité 2.4.2.1

Reposant sur la construction de la table d'équivalence d'états, la complexité est en $\mathcal{O}(kn^2)$, avec k la taille de l'alphabet et n le nombre d'états. L'étape supplémentaire, la lecture de cette table, est en temps constant et n'impacte pas la complexité.

Les différentes notions liées à l'égalité : les propriétés de réflexivité, transitivité et symétrie ont été démontrées au point 2.4.1.

2.4.4 Minimisation

Plusieurs automates peuvent représenter un même langage. Parmi ceux-ci, l'*automate minimal* est celui comportant le moins d'états.

La minimisation d'automate se fait en deux étapes :

1. Se débarrasser de tous les états inatteignables : ils ne participent pas à la construction du langage représenté
2. Grâce aux équivalences d'états trouvées grâce à l'algorithme table filling défini au point 2.4.2, construire un nouvel automate.

Décrivons en détail cette minimisation dans l'algorithme 2.4.3.

Algorithme 2.4.3 (Minimisation)

Soit un ADF $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Les états inatteignables peuvent être supprimés de Q et de δ.

Pour minimiser cet automate, il faut :

1. *Construire la table de différenciation.*
2. *Séparer Q en classes d'équivalences.*
3. *Construire l'automate minimal $C = (Q_C, \Sigma, \delta_C, q_C, F_C)$:*
   (a) *Soit S une des classes d'équivalence obtenues par la table de différenciation.*
   (b) *S est considéré comme un état $q_c \in Q_C$ dans C.*
   (c) *Ajouter S à Q_C ainsi qu'à F_C si S contient un état acceptant $q \in F$. Cette opération est valide, comme mentionné dans le corollaire 2.4.2.1.*
   (d) *Si S contient q_0 l'état initial de A, alors S est q_C l'état initial de C.*
   (e) *Pour un symbole $a \in \Sigma$, alors il doit exister une classe d'équivalence T tel que pour chaque état $\forall q \in S, \delta(q, a) \in T$ par le corollaire 2.4.2.1. On défini alors $\delta_C(S, a) = T$.*

Exemple 13

Considérons l'automate A_1 représenté à la figure 2.1. En supprimant l'état q_6 qui n'est pas atteignable, on obtient l'automate A_2 de la figure 2.9.

Le tableau 2.3 sert d'exemple pour l'algorithme table filling sur A_2.

En appliquant l'algorithme de minimisation ci-dessus, qui peut se résumer intuitivement à fusionner les états équivalents q_1 et q_5, on obtient l'automate A_3 de la figure 2.13.

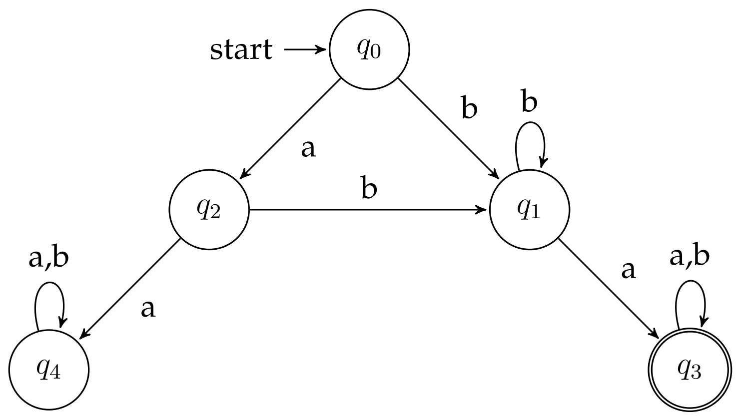


FIGURE 2.13: Automate A_3

Une expression régulière ($(b + ab)b^*a(a + b)^*$) peut être déduite pour $L = L(A_3)$ grâce à cet automate A_3. Cette expression régulière est celle de l'exemple 2.

Théorème 2.4.4 (Minimalité de l'automate réduit) *Soit un ADF A et soit C l'automate construit par cet algorithme de minimisation. Aucun automate équivalent à A n'a moins d'états que C. De plus, chaque automate ayant autant d'états que C lui est homomorphique.*

Preuve 2.4.4.1

Prouvons que l'algorithme de minimisation fournit un automate minimal (il n'en existe aucun comportant moins d'états pour un même langage).

Soient un ADF A et C l'automate obtenu par l'algorithme de minimisation. Posons que C comporte k états.

Par l'absurde, supposons qu'il existe M un ADF minimisé équivalent à A mais comptant moins d'états que C. Posons qu'il en comporte $l < k$. Appliquons l'algorithme table filling sur C et M, comme s'ils étaient un seul ADF, comme proposé dans la section 2.4.3.

C n'a pas d'état inaccessible par construction et M n'en a pas par hypothèse. En effet, M est sensé être minimal. Avoir un état qui peut être éliminé contredirait cette hypothèse.

De plus, les états initiaux sont équivalents puisque $L(C) = L(M)$. Dès lors, les successeurs pour chaque symbole sont eux aussi équivalents. Des successeurs différenciables impliquerait que les états initiaux sont différenciables, ce qui est faux par hypothèse.

Soit p un état de C. Soit un mot $a_1a_2 \dots a_i$, qui mène de l'état initial de C à p. Alors, il existe un état q de M équivalent à p. Puisque les états initiaux sont équivalents et que, par induction, les états obtenus par la lecture d'un symbole le sont aussi, l'état q dans M obtenu par la lecture du mot $a_1a_2\ldots a_i$ est équivalent à p. Comme p est quelconque, cela signifie que tout état de C est équivalent à au moins un état de M.

Or, $k > l$. Il doit exister au moins deux états de C équivalents à un même état de M et donc équivalents entre eux. Il y a là une contradiction : par construction, les états de C sont tous différenciables les uns des autres. La supposition de l'existence de M est absurde. Il n'existe pas d'ADF équivalent à A comportant moins d'états que C.

$\square$

Preuve 2.4.4.2

Prouvons que tout automate minimal pour un langage est C, à un isomorphisme sur les noms des états près.

Soit A un ADF pour un langage L. Soient C un ADF obtenu par l'algorithme de minimisation et M un automate minimal comportant autant d'états que C.

Comme mentionné dans la preuve précédente, il doit y avoir une équivalence 1 à 1 entre chaque état de C et de M. (Au minimum 1 et au plus 1). De plus, aucun état de M ne peut être équivalent à 2 états de C, selon le même argument.

Dès lors, l'automate minimisé, dit *canonique* est unique à l'exception du renommage des différents états.

$\square$

2.5 Algorithme d'Angluin

L'algorithme d'Angluin permet l'apprentissage actif d'ADF définis dans la section 2.3. Ceux-ci représentant un langage régulier, celui-ci est effectivement appris. C'est cet algorithme, adapté à la situation, qui se trouve au cœur de LeVer, objet de ce mémoire.

La section 2.5.1 donne une description générale de l'algorithme et de son exécution. Celui-ci repose sur différents concepts tels que :

- l'algorithme table filling de la section 2.4 (permettant notamment de tester l'équivalence entre deux automates et de les minimiser au besoin)
- la relation R_L de la section 2.5.2 (portant sur des mots d'un langage) elle-même utilisée par le théorème de Myhill-Nerode
- le théorème de Myhill-Nerode de la section 2.5.3
- la table d'observation de la section 2.5.4, utilisée pour stocker la progression de l'algorithme
- la fermeture et la cohérence définies dans les sections 2.5.5 et 2.5.6

Finalement, l'algorithme est donné dans la section 2.5.7. Sa complexité et ses limites y sont discutées.

2.5.1 Fonctionnement

Soit un langage régulier L. L'algorithme d'Angluin[1] est un algorithme d'apprentissage actif d'automate qui permet de construire un automate A représentant $L(A) = L$. Il prend la forme d'un couple professeur/élève où :

— L'élève applique l'algorithme d'Angluin L^* en tant que tel pour construire un automate représentant le langage étudié. Pour cela, il s'aide d'une table d'observation (section 2.5.4)

— Le professeur a accès au langage que l'élève veut apprendre.

De plus, ce professeur contient deux oracles :

— L'oracle d'appartenance. Soit un mot w. Appartient-il à L ?

— L'oracle d'équivalence. Soit un automate A_O. Représente-t-il L ? Si non, fournir un contre-exemple w.

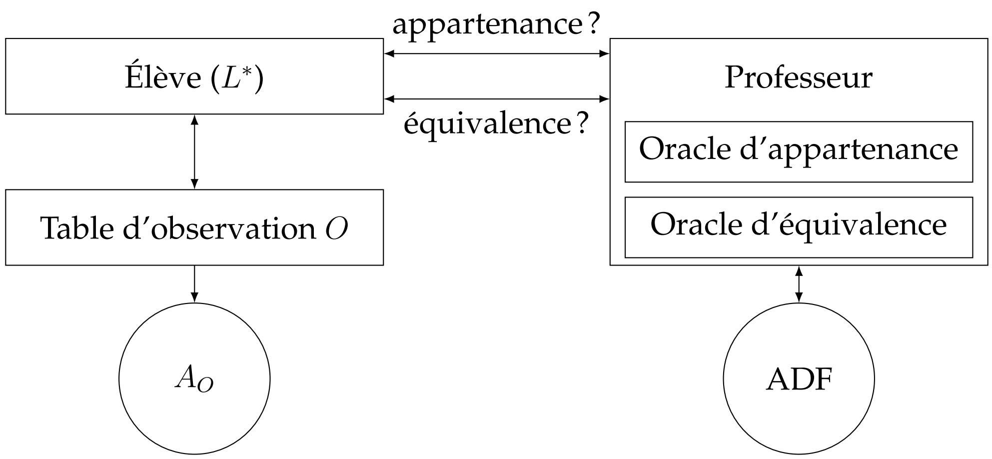


FIGURE 2.14: Vue schématique de l'algorithme d'Angluin

Théorème 2.5.1 *S'appuyant sur un professeur pour un langage régulier $L \subseteq \Sigma^*$, un élève peut utiliser l'algorithme d'Angluin L^* pour apprendre l'ADF canonique A représentant L en un temps polynimial à n le nombre d'états de A et m le nombre de contre-exemples reçus du professeur. Il effectue $\mathcal{O}(n)$ requêtes d'équivalence et $\mathcal{O}(mn^2)$ requêtes d'appartenance.[1]*

Corollaire 2.5.1.1

Si les requêtes d'appartenance et d'équivalence se font en temps polynomial en la taille de A, L^* est en temps polynomial.

Attention cependant : cet algorithme part du postulat que le langage étudié est régulier.

Les prochaines section introduisent les différentes notions notamment necéssaires à la compréhension du fonctionnement de la table d'observation.

2.5.2 Relation R_L

Soit un langage L sur un alphabet Σ.

Soit la relation $R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$. Deux mots x et y respectent la *relation de Myhill-Nérode* R_L si

$$\forall z \in \Sigma^*, xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$$

Intuitivement, deux mots sont en relation si pour tout mot qu'on leur concatène, les deux mots résultants sont soit tous deux dans le langage L soit tous deux hors de L.

Cette relation est utilisée au fondement de l'algorithme d'Anluin pour séparer le langage en différentes classes, jusqu'à identifier celles qui sont acceptées et celles qui ne le sont pas.

Lemme 2.5.2 *Cette relation est une relation d'équivalence. De plus, elle est congruente à droite. C'est à dire que si xR_Ly, alors pour tout symbole $a \in \Sigma$, xaR_Lya*

Preuve 2.5.2.1 (Equivalence et Congruence à droite)

Dire d'une relation qu'elle décrit une équivalence, revient à dire qu'elle est réflexive, transitive et symétrique

- **Réflexive** Soit $x \in \Sigma^*$. Soit $z \in \Sigma^*$. Montrer que xR_Lx est vrai revient à montrer que $xz \in L \Leftrightarrow xz \in L$ est vrai. R_L est donc réflexive.
- **Symétrique** Soient $x, y \in \Sigma^*$ tels que xR_Ly. Soit $w \in \Sigma^*$. Montrer que yR_Lx revient à montrer que $yw \in L \Leftrightarrow xw \in L$. Or, par hypothèse, $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$, qui peut s'écrire aussi $yz \in L \Leftrightarrow xz \in L$ pour tout $z \in \Sigma^*$, et en particulier $z = w$.
- **Transitive** Soient $x, y, u \in \Sigma^*$ tels que xR_Ly et yR_Lz. Soit $w \in \Sigma^*$. Comme $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$ et $yz \in L \Leftrightarrow uz \in L$ pour tout $z \in \Sigma^*$ (par hypothèse), c'est vrai en particulier pour $z = w$. Dès lors, $xw \in L \Leftrightarrow yw \in L$ et $yw \in L \Leftrightarrow uw \in L$. Par transitivité de l'implication, on obtient $xw \in L \Leftrightarrow uw \in L$, à savoir xR_Lu.

R_L est congruente à droite. Soient $x, y \in \Sigma^*$ tels que xR_Ly. Soit $a \in \Sigma$. Par hypothèse, $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$ pour tout $z \in \Sigma^*$. Cela doit donc être vrai en particulier pour le mot $z = aw$ avec w quelconque. En remplaçant dans l'hypothèse, on obtient $xaw \in L \Leftrightarrow yaw \in L$. Ce qui montre que xaR_Lya.

$\square$

2.5.3 Théorème de Myhill-Nérode

Le thèorème de Myhill-Nérode est un résultat fort utilisant la relation R_L . Il permet de construire un automate à partir de celle-ci.

Cependant, avant d'énoncer le théorème de Myhill-Nérode, il faut s'intéresser à la relation d'équivalence R_A , qui facilite l'écriture de la preuve. R_L s'intéresse directement au langage alors que R_A s'intéresse à un automate qui la représente.

Définition 1 (Relation R_A)

Soit un automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Soient deux mots $x, y \in \Sigma^*$. Alors la relation xR_Ay est vraie si et seulement si $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$.

Intuitivement, deux mots sont en relation R_A par rapport à un automate A s'ils mènent à un même état dans celui-ci (ou à des états équivalents). R_A est différente de R_F qui porte sur des états et non des mots.

Lemme 2.5.3 *R_A est une relation d'équivalence congruente à droite.*

Preuve 2.5.3.1

Prouver qu'une relation est dite d'équivalence, il faut prouver que celle-ci est transitive, réflexive et symétrique. Soit un automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$.

— **Réflexive** Soit $y \in \Sigma^*$. On a bien $\hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, y)$ par réflexiviré de l'équivalence sur un état.
— **Transitive** Soient $x, y, z \in \Sigma^*$. Supposons que xR_Ay et yR_Az. On a bien $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, z)$ par la transitivité de l'équivalence entre deux états.
— **Symétrique**. Soient $x, y \in \Sigma^*$. Supposons que xR_Ay. On a bien $\hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, x)$ par symétrie de l'équivalence entre deux états.

R_A est congruente à droite. Soient $x, y \in \Sigma^*$ tels que xR_Ay. Soit $z \in \Sigma^*$. Montrons que xzR_Ayz. $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), z) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, y), z) = \hat{\delta}(q_0, yz)$.

□

Théorème 2.5.4 *Les trois énoncés suivants sont équivalents :*

1. *Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est accepté par un ADF.*
2. *Il existe une congruence à droite sur Σ^* d'index fini telle que L est l'union de certaines classes d'équivalence.*
3. *La relation d'équivalence R_L est d'index fini.*

Preuve 2.5.4.1
La preuve d'équivalence se fait en prouvant chaque implication de façon cyclique :

$(1) \to (2)$ Supposons que (1) soit vrai, c'est-à-dire que le langage L est accepté par un automate déterministe $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Considérons la relation d'équivalence congruente à droite R_A . Soit un mot $w \in \Sigma^*$. Alors tout mot $x \in \Sigma^*$ tel que $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, w)$ appartient à la même classe d'équivalence $[w]$. Or, la fonction $\hat{\delta}$ retourne un état $q \in Q$. Chaque classe d'équivalence sur Σ correspond alors à un état de l'automate. Comme Q est fini, R_A est d'index fini. De plus, un sous-ensemble des classes d'équivalence doit correspondre aux états acceptants $q \in F$. Alors, L est l'union de ces classes d'équivalence.

$(2) \to (3)$ Supposons qu'il existe une relation E satisfaisant (2). Montrons que chaque classe de celle-ci est intégralement contenue dans une seule classe de R_L . Puisque E est d'index fini, c'est un argument suffisant pour montrer que R_L est d'index fini. Soit x, y tels que xEy. Comme E est congruente à droite, pour tout mot $z \in \Sigma^*$, on sait que $xzEyz$. Comme L est une union de ces classes d'équivalence, $xzEyz$ implique que $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$, ce qui revient à xR_Ly. Cela signifie que tout mot dans la classe d'équivalence de x définie par E se retrouve dans la même classe d'équivalence que x cette fois définie par R_L . Ceci permet de conclure que chaque classe d'équivalence de E est contenue dans une classe d'équivalence de R_L et donc que R_L est d'index fini.

$(3) \to (1)$ Considérons la relation R_L définie précédemment. Soit un automate $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ défini comme suit :

— Chaque état $q \in Q$ correspond à une classe d'équivalence de R_L .
— Comme R_L se défini pour un langage, l'alphabet Σ de celui-ci est déjà défini.
— Si $[[\epsilon]]$ est la classe d'équivalence de ϵ sur R_L , q_0 correspond à cette classe.
— Si q représente $[[x]]$ et q_1 représente $[[xa]]$, alors $\delta(q, a) = q_1$. Cette définition est cohérente car R_L est congruente à droite.
— $F = \{[[x]] | x \in L\}$.

Cet automate est déterministe par la définition de δ et fini car Q l'est, le nombre de classes de R_L étant fini par hypothèse. De plus, cet automate accepte tout mot $x \in L$ puisque $\delta(q_0, x) = [[x]] \in F$(par définition, puisque $x \in L$). □

Corollaire 2.5.4.1

La partie $(3) \rightarrow (1)$ de la preuve 2.5.4.1 donne une méthode permettant de construire un ADF à partir des classes d'équivalences de la relation R_L .

On peut prouver que l'automate obtenu de cette façon est l'automate minimal de L. Une preuve est disponible dans l'ouvrage [3] en lien avec le théorème 3.10.

2.5.4 Table d'observation

Une *table d'observation* est un tableau défini par $O = (R, S, T)$ avec $R \subseteq \Sigma^*$ un ensemble de mots *représentants*, $S \subseteq \Sigma^*$ un ensemble de mots *séparateurs* et $T : (R \bigcup R.\Sigma) \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction représentant le contenu de la table selon la définition de Neider [5]. Soit un langage L qui est en train d'être appris par l'algorithme d'Angluin. Soit un mot $w \in L$. Alors, w appartient à une classe d'équivalence $[[u]]$ avec $u \in L$. Dans ce cas, $T(w) = 1$. Au contraire, si $w \notin L$, alors $T(w) = 0$.

Pour une table d'observation O, deux mots u, v peuvent être *équivalents sur O*, c'est-à-dire uR_Ov. u et v sont équivalents sur O si et seulement si $\forall w \in S, T(uw) = T(vw)$. Intuitivement, uR_Ov si les lignes correspondant à leur classe d'équivalence ont la même séquence de 0 et de 1.

Proposition 2.5.5 *Soient $u, v \in \Sigma^*$, un langage L et une table d'observation O associée à ce langage. Si uR_Lv, alors uR_Ov.*

Preuve 2.5.5.1

Soient un langage L, $u, v \in \Sigma^*$ tels que uR_Lv et une table d'observation O associée à L. Comme uR_Lv, alors pour tout mot $w \in \Sigma^*$, $uw \in L \iff vw \in L$. C'est donc vrai en particulier pour tout $w \in S$. Dès lors, $\forall w \in S, T(uw) = T(vw)$. □

Corollaire 2.5.5.1

Le nombre de classes d'équivalence sur R_O est inférieur ou égal à celui de classes d'équivalence sur R_L .

Cette table O représente la compréhension actuelle de l'élève du langage L. D'itération en itération, R_O représente de mieux en mieux R_L jusqu'à ce que l'automate induit de cette table soit jugé équivalent par le professeur. L'automate induit l'est par l'application du corollaire 2.5.4.1.

2.5.5 Fermeture

La *fermeture* d'un table d'observation s'exprime mathématiquement par

$$\forall u \in R, \forall a \in \Sigma, \exists v \in R, uaR_Ov$$

Cette propriété peut être vérifiée l'algorithme 1, expliqué de façon visuelle sur la table O :

Algorithme 1 Vérification de la fermeture

Promet: si la fermeture est respectée ou non

pour chaque élément w de la section R **faire**
  pour chaque symbole a dans Σ **faire**
    si wa est dans R **alors**
      continuer
    sinon
      $\{wa$ est dans $R.\Sigma$ par construction$\}$
      si La ligne de wa dans T est différente de celle de w **alors**
        retourner Faux
      fin si
    fin si
  fin pour
fin pour
retourner Vrai

2.5.6 Cohérence

La propriété de *cohérence* se définit mathématiquement comme

$$\forall u, v \in R, uR_O v \Rightarrow \forall a \in \Sigma, uaR_O va$$

Concrètement, il s'agit de prendre deux mots (u, v) dans R ayant la même ligne dans T et vérifier, pour chaque symbole (a), s'ils (ua, va) ont la même ligne dans T.

Exemple 14

Soit la table d'observation O de la table 2.4 :

O	ϵ	a
ϵ	0	0
a	0	0
aa	0	1

TABLE 2.4: Table d'observation O

Ici, R est la colonne à gauche, les en-têtes de colonnes sont dans $R.\Sigma$ et le contenu de la grille est T.

Cette table n'est pas cohérente. En effet, $\epsilon R_O a$ mais en ajoutant le symbole $a \in \Sigma$, on obtient $\neg(aR_O aa)$. Les lignes ont les mêmes valeurs, mais les lignes obtenues par la concaténation du symbole a ont des valeurs différentes.

2.5.7 Algorithme

Le pseudo-code de l'algorithme d'Angluin est fourni par l'algorithme 2.5.1 provenant de [5]. Celui-ci repose sur les oracles du professeur et l'algorithme 2.5.2, remplissant les lignes de T encore vides. Le code est suivi d'un exemple d'exécution à la section 2.5.8.

Algorithme 2.5.1 (Algorithme d'Angluin L^*)
Requis: *Un professeur pour le langage régulier* $L \subseteq \Sigma^*$
Promet: *Un automate canonique décrivant* L

Initialiser la table d'observation $O = (R, S, T)$ *avec* $R = S = \epsilon$
$corriger(O)$
répéter
    tant que *O n'est pas fermée ou pas cohérente* ***faire***
        si *O n'est pas fermée* ***alors***
            Choisir $r \in R$ *et* $a \in \Sigma$ *tels que* $[[ua]]_O \bigcap R = \emptyset$
            $R \leftarrow R \bigcup ua$
            $corriger(O)$
        fin si
        si *O n'est pas cohérente* ***alors***
            Choisir $uR_Lv \in R, a \in \Sigma$ *et* $w \in S$ *tels que* $T(uaw) \neq T(vaw)$
            $S \leftarrow S \bigcup aw$
            $corriger(O)$
        fin si
    fin tant que
    Construire A_O
    Soumettre A_O *à l'oracle d'équivalence*
    si *le professeur retourne un contre-exemple* u ***alors***
        $R \leftarrow R \bigcup Pref(u)$
        $corriger(O)$
    fin si
jusqu'à *ce que le professeur réponde "oui" à l'équivalence*
retourner A_O

Algorithme 2.5.2 ($corriger(O)$)
Requis: *une table d'observation O, un professeur pour le langage régulier* $L \subseteq \Sigma^*$
Promet: *les entrées de O sont valide dans L*

pour chaque *entrée* $u \in (R \bigcup R\Sigma)$ *pour laquelle* $T(u)$ *n'est pas encore définie* ***faire***
    si $u \in L$ *par le test d'appartenance* ***alors***
        $T(u) \leftarrow 1$
    sinon
        $T(u) \leftarrow 0$
    fin si
fin pour

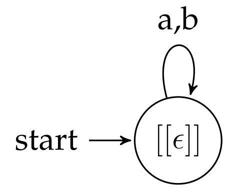
Considérons l'automate A_3 de la figure 2.13 construit à la section 2.4.4 sur la minimisation ainsi que le langage $L = L(A_3)$.

2.5.8 Exemple

Première itération

L'algorithme d'Angluin précise, pour son cas de base, une initialisation de la table T avec les ensembles R et S contenant uniquement ϵ. Le champ $R.\{a, b\}$ ($R.\Sigma$) est rempli via des requêtes d'appartenance sur les mots a et b.

O_0	ϵ
ϵ	0
a	0
b	0



Automate O_0

L'étape suivante consiste à vérifier la fermeture de la table d'observation O_0. Pour rappel :

$$\forall u \in R, \forall a \in \Sigma, \exists v \in R, uaR_O v$$

Intuitivement, pour chaque symbole (ici, $\{a, b\}$, et ce sera vrai jusqu'à la dernière itération), tout mot candidat (dans R, la partie supérieure de la table) doit se retrouver, concaténé de ce symbole, dans une classe d'équivalence d'un autre candidat de R. Ici, de toute évidence, les mots a et b sont dans la même classe d'équivalence que ϵ. Dès lors, la propriété de fermeture est respectée.

Si la fermeture est respectée, alors la question de la cohérence se pose. Pour rappel :

$$\forall u, v \in R, uR_O v \Rightarrow \forall a \in \Sigma, uaR_O va$$

Intuitivement, si deux candidats semblent être dans la même classe d'équivalence (leur lignes dans la table supérieure sont identiques), alors pour n'importe quel symbole, les deux nouveaux mots sont également dans une même classe d'équivalence (leurs lignes, potentiellement dans la partie inférieure de la table, sont identiques). N'ayant qu'un seul candidat, cette propriété est forcément respectée (R_L est réflexive).

Les deux propriétés étant respectées, les classes d'équivalence sont calculées (trivialement ici), et un automate O_0 est proposé au professeur pour vérification.

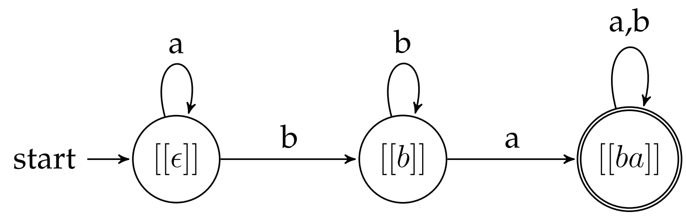
Sur cette itération, un automate initial a été proposé et aucun état final ne pouvant être atteint avec un seul symbole, cet automate est simplissime.

Seconde itération

L'enseignant répond que non, l'automate ne représente pas L. Il fournit le contre-exemple ba. Comme il est rejeté par O_0, cela signifie qu'il est accepté par A_3. Une nouvelle table est alors construite, en ajoutant ba et ses préfixes (ici, juste b) à R. $R.\Sigma$ est calculé et les mots n'ayant pas encore reçu une valeur dans T sont soumis à l'enseignant pour un test d'appartenance. Les valeurs ajoutées ou modifiées dans la table d'observation sont mises en évidence en rouge.

O_1	ϵ
ϵ	0
b	0
ba	1
a	0
bb	0
baa	1
bab	1

O_2	ϵ	a
ϵ	0	0
b	0	1
ba	1	1
a	0	0
bb	0	1
baa	1	1
bab	1	1



Automate O_2

Comme pour la première itération, la fermeture est testée, suivie de la cohérence. Celle-ci n'est pas respectée : si on considère les mots ϵ et b, qui ont la même ligne dans la table T ($\epsilon R_O b$), le symbole a, on obtient les mots a et ba qui n'ont pas la même ligne : ($\neg a R_O ba$). Le symbole a est alors ajouté à S et une nouvelle table O_2 est calculée.

La fermeture étant déjà vérifiée, la question de la cohérence est reposée, et cette fois-ci elle est vérifiée ; l'automate est construit et proposé à l'enseignant.

Sur cette itération, l'algorithme a reçu le mot ba comme étant accepté. Il a du ajouter a à S pour permettre de différencier certains états. L'automate se voit ajouter les états $[[b]]$ et $[[ba]]$.

Troisième itération

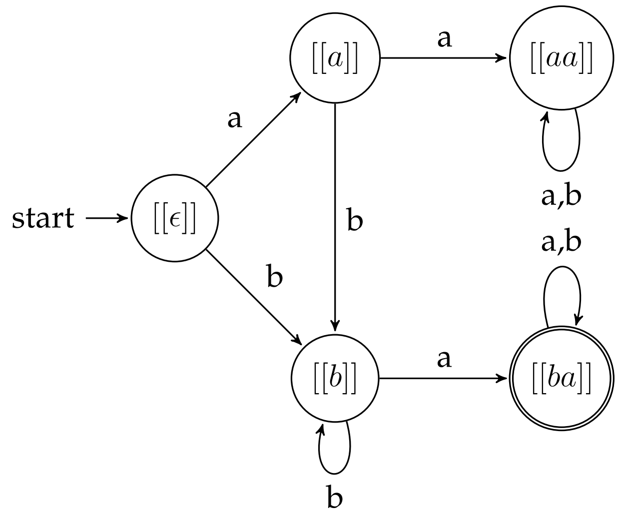
Suivant toujours l'algorithme de comparaison d'automates détaillé dans la section 2.4.3, l'enseignant découvre qu'il ne représente pas L.

Il sort le contre-exemple $aaba$. Si c'est un contre-exemple et qu'il est accepté par O_2, c'est qu'il ne l'est pas (0) par A_4. Une nouvelle table O_3 doit être construite.

O_3	ϵ	a
ϵ	0	0
a	0	0
b	0	1
aa	0	0
ba	1	1
aab	0	0
$aaba$	0	0
ab	0	1
bb	0	1
aaa	0	0
baa	1	1
bab	1	1
$aabb$	0	0
$aabaa$	0	0
$aabab$	0	0

O_4	ϵ	a
ϵ	0	0
a	0	0
b	0	1
aa	0	0
ab	0	1
ba	1	1
aab	0	0
$aaba$	0	0
bb	0	1
aaa	0	0
aba	1	1
abb	0	1
baa	1	1
bab	1	1
$aabb$	0	0
$aabaa$	0	0
$aabab$	0	0

O_7	ϵ	a	b	ab	ba
ϵ	0	0	0	1	1
a	0	0	0	0	1
b	0	1	0	1	1
aa	0	0	0	0	0
ab	0	1	0	1	1
ba	1	1	1	1	1
aab	0	0	0	0	0
$aaba$	0	0	0	0	0
bb	0	1	0	1	1
aaa	0	0	0	0	0
aba	1	1	1	1	1
abb	0	1	0	1	1
baa	1	1	1	1	1
bab	1	1	1	1	1
$aabb$	0	0	0	0	0
$aabaa$	0	0	0	0	0
$aabab$	0	0	0	0	0



Automate O_7

Ayant reçu $aaba$, ce mot et tous ses préfixes sont ajoutés à la table. L'extension $R.\Sigma$ est recalculée et la table O_3 est construite.

Un manquement à la fermeture est détecté : le mot a. En effet, en lui ajoutant le symbole b, on obtient ab qui n'est ni dans R ni en relation R_O avec a. ab est alors ajouté à R, et $R.\Sigma$ est étendu. La nouvelle table, O_4 est de nouveau testée.

O_4 ne respecte pas la cohérence. Les mots ϵ et aa respectent R_O (leur ligne a la même valeur dans la table) mais $\neg bR_Oaab$. b est alors ajouté à S et une nouvelle colonne associée est ajoutée à la table, donnant le table O_5. Celle-ci a toujours un soucis de cohérence entre ϵ et aa, menant à l'ajout de ab à S et à la création de O_6. Finalement, pour régler le souci de cohérence dans O_6 entre a et aa, le mot ba est ajouté à S et une table O_7 est ainsi créée avec la nouvelle colonne associée.

Cette table O_7 respectant la fermeture et la cohérence, l'automate associé O_7 est construit et soumis à l'enseignant pour être comparé à A_3. Celui-ci valide l'équivalence avec L et l'algorithme s'arrête : l'automate a été construit.

2.6 Automates à files

L'article [6] se concentre sur un automate plus général : l'automate à files. Les automates à files sont plus complexes que les ADF. Les langages définis par ceux-ci sont plus complexes que les langages réguliers mais toujours dans l'espace défini par Σ^*. La figure 2.15 propose une intuition des langages définis par les automates à files.

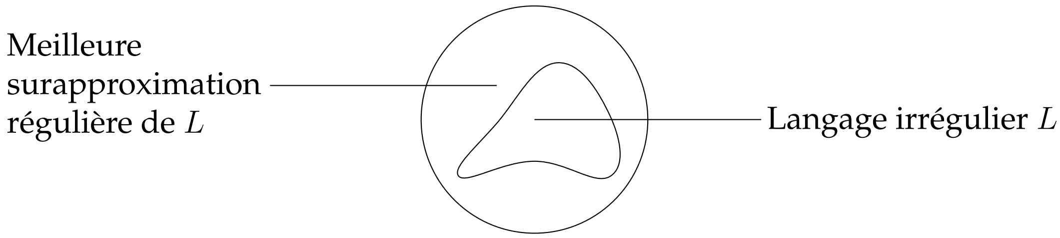


FIGURE 2.15: Relation entre langage régulier et langage irrégulier

Ainsi, de nouveaux langages peuvent être définis de façon plus précise. Cela a un coût : pour certains problèmes il n'existe pas de réponse générale ou si celle-ci existe elle prend un temps exponentiel à construire.

C'est le cas de la question de sûreté des automates à files dans ce mémoire. Cependant, le chapitre 3 décrit comment une solution peut-être construite pour tout un ensemble d'automates à files, permettant de se prononcer sur un ensemble plus large que les langages régulier. L'automate à file est dès lors un outil pertinent pour élargir l'ensemble des langages pour lesquels il est possible d'étudier la sécurité.

Cette section se divise en une première partie 2.6.1 donnant une définition formelle des automates à files et un exemple ainsi qu'une seconde partie 2.6.2 sur les systèmes de transitions, représentation potentiellement infinie des différentes configurations d'un automate à files. Finalement, la section 2.6.3 donne une définition formelle de ces nouveaux langages représentés par des automates à files.

2.6.1 Définition

Définition 2

Un *automate à files* $F = (Q, C, \Sigma, q_0, \Theta, \delta)$ est défini comme suit :

— Q est un ensemble fini d'*états de contrôle*

— C est un ensemble fini de *canaux*

— Σ est un alphabet

— $q_0 \in Q$ est l'*état de contrôle initial*

— Θ est un ensemble fini de *noms de transitions*

— δ est la *fonction nommante*. $\delta : \Theta \to Q \times ((C \times \{?, !\} \times \Sigma) \bigcup \{\tau\}) \times Q$. Un nom de transition θ correspond à une transition de la forme $\delta(\theta) = (p, \text{"action"}, q)$. Cette action a une des trois formes suivantes :

  — $c!m$: C'est une action d'envoi. Le symbole $m \in \Sigma$ est ajouté en fin de canal c.

  — $c?m$: C'est une action de réception. Le symbole $m \in \Sigma$ est consommé en début de canal c.

  — τ : C'est une action interne. Aucun canal n'est modifié.

Exemple 15

Soit un automate à files F représenté par la figure 2.16.

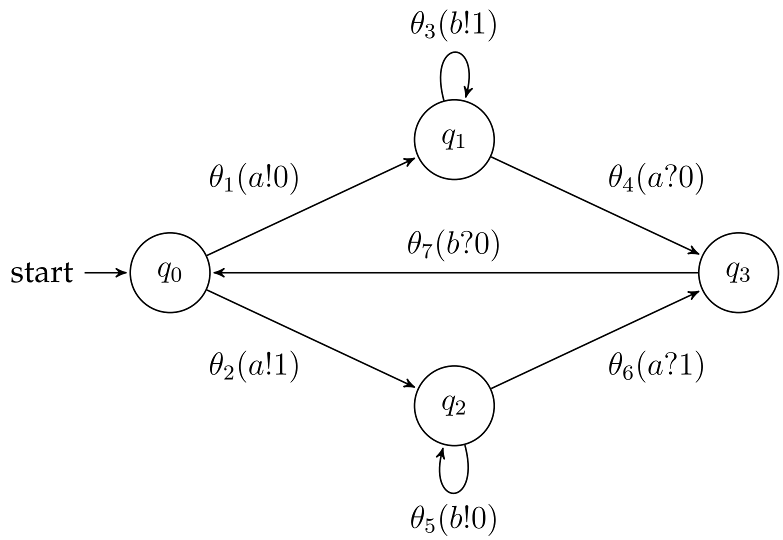


FIGURE 2.16: Automate à files F

On retrouve bien la définition d'un automate à files $F = (Q, C, \Sigma, q_0, \Theta, \delta)$ avec :
— $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
— $C = \{a, b\}$
— $\Sigma = \{0, 1\}$
— $q_0 \in Q$
— $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}$
— δ associant à chaque θ_i un triplet état/action/état telle que l'action est représentée entre parenthèses à côté du nom de transition associé

2.6.2 Système de transitions

Un automate F définit un *système de transitions* $\mathcal{T} = (S, \Theta, \rightarrow)$. $\mathcal{T}$ est l'objet qui permet de passer d'un *état* à un autre. C'est ce système de transitions qui est potentiellement infini mais qui doit être étudié pour se pronconcer sur la sûreté d'un automate à files.

En effet, il existe les états de contrôles $q \in Q$, mais les états au sens d'un automate à files sont de forme $s \in S = Q \times (\Sigma^*)^C$. En particulier, $s = (q, w)$ avec $q \in Q$ un état de contrôle et $w \in (\Sigma^*)^C$ est un vecteur qui fait correspondre à chaque canal $c \in C$ un mot $w[c] \in \Sigma^*$ représentant le contenu de ce canal. Intuitivement, un état s est composé d'un état de contrôle et du contenu des différents canaux.

De plus, la *fonction de transition* $\rightarrow$: $S \times \Theta \rightarrow S$ associe un état $s \in S$ et un nom de transition $\theta \in \Theta$ à un état $s' \in S$.

$\mathcal{T}$ respecte trois règles, correspondant chacune à un des types d'actions pouvant être associées par la fonction nommante. En plus de la notation $w[c]$, celles-ci utilisent la notation $w[c \mapsto c']$ signifiant w à l'exception du canal c dont le contenu a été remplacé par le mot c'.
— Si $\delta(\theta) = (p, c?m, q)$ alors $(p, w) \xrightarrow{\theta} (q, w')$ si et seulement si $w = w'[c \mapsto mw'[c]]$
— Si $\delta(\theta) = (p, c!m, q)$ alors $(p, w) \xrightarrow{\theta} (q, w')$ si et seulement si $w' = w[c \mapsto mw[c]]$

— Si $\delta(\theta) = (p, \tau, q)$ alors $(p, w) \xrightarrow{\theta} (q, w')$ si et seulement si $w = w'$

L'état initial de $\mathcal{T} = (S, \Theta, \rightarrow)$ est $s_0 = (q_0, \epsilon^c)$ où ϵ^c décrit chaque canal c comme étant vide.

Exemple 16

Reprenons l'automate à files F de la figure 2.16. Un système de transitions $\mathcal{T}$ peut lui être associé.

Considérons le mot $w = [\epsilon, \epsilon]$ où le premier élément du vecteur est le contenu du canal a et le second celui du canal b. Dans cet exemple, comme $\delta(\theta_1) = (q_0, a!0, q_1)$, alors $(q_0, w) \xrightarrow{\theta_1} (q_1, w')$. Dans ce cas, $w' = [0, \epsilon]$. A ce moment, on a bien $w' = w[a \mapsto 0w[a]]$. En utilisant ce nouveau mot w', un nouvel état est atteignable : q_3. En effet, comme $\delta(\theta_4) = (q_1, a?0, q_3)$, alors $(q_1, w') \xrightarrow{\theta_4} (q_4, w'')$. Dans ce cas, $w'' = [\epsilon, \epsilon]$. A ce moment, on a bien $w' = w''[a \mapsto 0w''[a]]$.

Intuitivement, la première transition θ_1 ajoute le symbole 0 en tête du canal a en passant de l'état q_0 à l'état q_1. La transition θ_4, elle, permet de passer de l'état q_1 à q_3 en consommant 0 en tête du canal a.

Comme ce système de transitions $\mathcal{T}$ est potentiellement infini, seule une représentation partielle est possible. La figure 2.17 offre cette représentation autour de $s = (q_0, [\epsilon, \epsilon])$. Noter qu'il existe une transition entrante vers s car la configuration $s' = (q_3, [\epsilon, 0])$ est possible et que la lecture de θ_7 retourne pour s' une configuration identique à s.

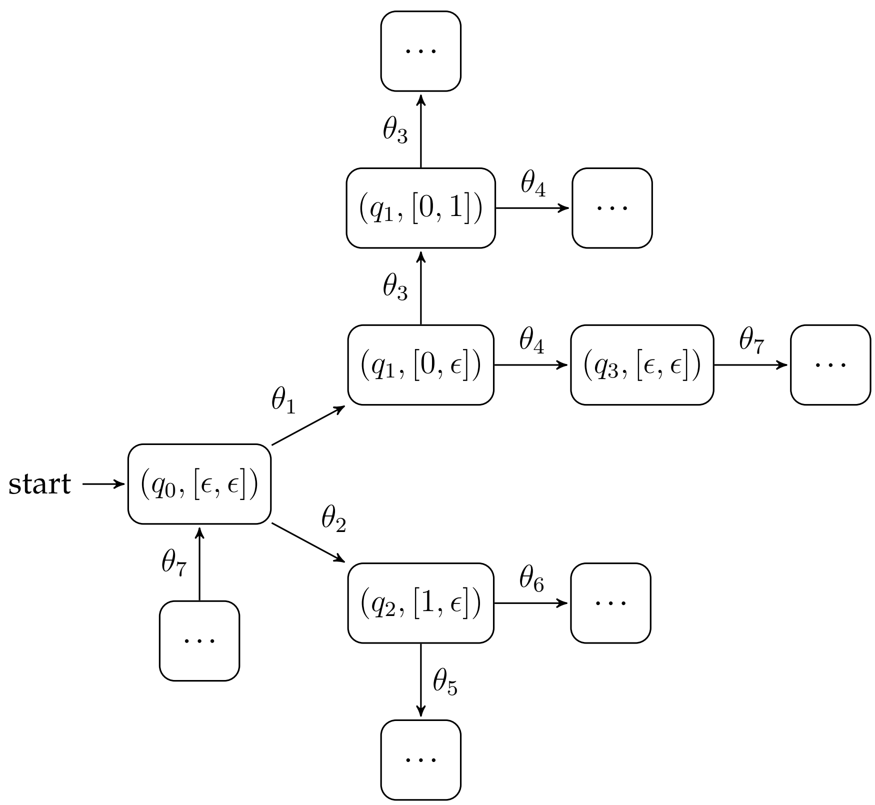


FIGURE 2.17: Système de transitions de l'automate à files F de la figure 2.16

2.6.3 Langage de traces

Une façon de définir un langage à partir d'un automate à files est de s'intéresser aux noms des transitions suivies lors de l'exécution.

Dans un système de transitions $\mathcal{T} = (S, \Theta, \rightarrow)$, la fonction de transition $\rightarrow : S \times \Theta \rightarrow S$ permet de définir le passage d'un état à un autre.

La *fonction de transition étendue* $\xrightarrow{*}$ est la fermeture transitive et réflexive de $\rightarrow$.

Pour une suite de noms de transitions $\sigma = \theta_1\theta_2...\theta_n \in \Theta^*$, on note $(p, w) \xrightarrow{\sigma} (q, w')$ si il existe des états $(p_1, w_1), (p_2, w_2), ..., (p_{n-1}, w_{n-1})$ tels que $(p, w) \xrightarrow{\theta_1} (p_1, w_1) \xrightarrow{\theta_2} ... \xrightarrow{\theta_{n-1}} (p_{n-1}, w_{n-1}) \xrightarrow{\theta_n} (q, w')$. Dans ce cas, σ est une *trace* et $(p_1, w_1), (p_2, w_2), ..., (p_{n-1}, w_{n-1})$ est un *chemin*.

De plus, comme σ correspond à un chemin, σ est une *trace valide*.

Définition 3

Soit un automate à files F et l'état initial $s_0 = (q_0, \epsilon^C)$. Celui-ci est le couple état de contrôle initial q_0 ainsi que des mots $w[c] = \epsilon$ pour tout canal $c \in C$.

Le *langage de traces* d'un automate F est

$$L(F) = \{\sigma \in \Theta^* | \exists s = (p, w) \text{ tel quel } s_0 \xrightarrow{\sigma} s\}$$

Exemple 17

Considérons l'automate F de la figure 2.16.

Pour celui-ci, $\sigma = \theta_1\theta_4\theta_7$ n'est pas une trace valide. En effet, on a

$$(q_0, [\epsilon, \epsilon]) \xrightarrow{\theta_1} (q_1, [0, \epsilon]) \xrightarrow{\theta_4} (q_3, [\epsilon, \epsilon])$$

mais, il n'existe pas d'état s tel que $(q_3, [\epsilon, \epsilon]) \xrightarrow{\theta_7} s$. Pour appliquer cette transition, il aurait fallu que le canal b contienne un symbole 0. Ce n'est pas le cas.

Par contre, $\sigma = \theta_2\theta_5\theta_5\theta_6\theta_7\theta_1\theta_4\theta_7$ est une trace valide. En effet, on a :

$$(q_0, [\epsilon, \epsilon]) \xrightarrow{\theta_2} (q_0, [1, \epsilon]) \xrightarrow{\theta_5} (q_0, [1, 0]) \xrightarrow{\theta_5} (q_0, [1, 00]) \xrightarrow{\theta_6} (q_0, [\epsilon, 00]) \xrightarrow{\theta_7}$$
$$(q_0, [\epsilon, 0]) \xrightarrow{\theta_1} (q_0, [0, 0]) \xrightarrow{\theta_4} (q_0, [\epsilon, 0]) \xrightarrow{\theta_7} (q_0, [\epsilon, \epsilon])$$

On a bien un état s (ici $s = (q_0, [\epsilon, \epsilon]) = s_0$) tel que $s_0 \xrightarrow{\sigma} s$.

Chapitre 3

Apprentissage d'automates à files

Ce chapitre présente le problème rencontré par [6] et la technique générale utilisée pour proposer une solution à ce problème dans la section 3.1. Ce problème s'intéresse à la proriété de sûreté des automates à files définis dans le chapitre 2. L'approche définie, un langage particulier est introduit : le langage de traces annotées de la section 3.2. Celui-ci permet de représenter certains systèmes de transitions, infinis, par des langages régulier et donc des ADF. Utilisant une version modifiée de l'algorithme d'Angluin, les oracles d'appartenance et d'équivalence sont ajustés respectivement dans les sections 3.3 et 3.4.

Finalement, la sûreté est définie formellement à la section 3.5. Tous ces éléments mis ensemble permettent de compléter l'approche proposée dans la section 3.1. Les détails algorithmiques sont consignés dans le chapitre 4.

3.1 Approche

Les automates à files définis à la section 2.6 sont plus puissants que les ADF définis dans la section 2.3. En effet, les systèmes de transitions associés ont potentiellement une infinité de configurations. Dans ces conditions, il n'est pas possible de faire une exploration exhaustive des états.

À la place, une propriété dite de sûreté est définie. Si un état respecte cette propriété, il est *sûr*. Si il y a moyen de prouver que la totalité des états de l'automate respectent cette propriété, l'automate est considéré comme sûr. Si au contraire, un exemple de violation de la propriété est trouvé, l'automate peut être déclaré comme à risque.

L'idée dès lors est de travailler non pas avec un système de transitions infini mais avec une représentation construite pour être finie dans un vaste ensemble de problèmes. Cette représentation est le langage de traces annotées défini dans la section 3.2.

En supposant que celui-ci est régulier, il est possible d'utiliser l'algorithme d'Angluin de la section 2.5 pour construire un ADF A. Cependant, ce langage n'est qu'un concept et le professeur n'a accès qu'à un automate à files F. Pour cette raison, les oracles d'appartenance et d'équivalence sont adaptés pour répondre à une requête entre un langage fourni par l'élève et F sans reposer sur un ADF.

La figure 3.1 donne une vue schématique de ce nouvel algorithme d'Angluin modifié.

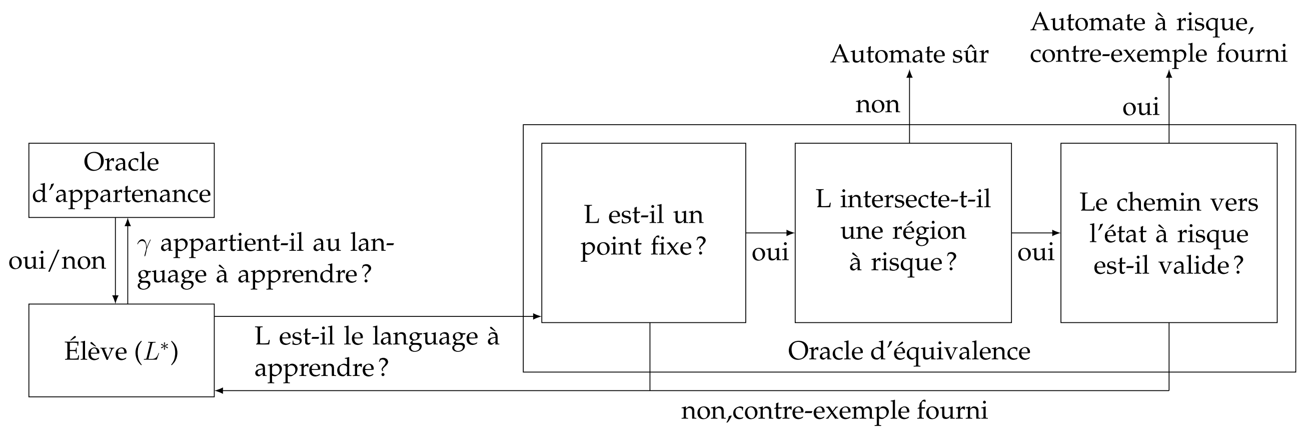


FIGURE 3.1: Vue schématique de l'algorithme d'Angluin pour LeVer[6]

LeVer (Learn to Verify) est le nom de cette technique. En particulier, on peut noter sur ce schéma que l'oracle d'équivalence peut non seulement répondre oui ou non mais également interrompre l'apprentissage s'il est possible de se prononcer sur la sûreté d'un automate à files F. Pour rappel, $L(F)$ n'est pas régulier en général. Pouvoir se prononcer sur la sûreté de F étant possible, il n'est ni utile ni forcémment possible de continuer à appliquer L^* pour obtenir une meilleure approximation L du langage de trace de F.

3.2 Trace annotée

Cette section propose un nouveau langage : les traces annotées. Il se base sur les traces et permet de retrouver celles-ci. Si ce langage de traces annotées est régulier, il peut être appris conformément à [6]. Se basant sur le langage de traces défini à la section 2.6, un nouvel alphabet est proposé en 3.2.1. Grâce à celui-ci, un algorithme est défini en 3.2.2 qui permet de construire une trace annotée à partir d'une trace. Finalement, la sous-section 3.2.3 propose une fonction d'extension de trace et en propose une propriété intéressante qui permet de faciliter la réponse à l'oracle d'équivalence par le professeur de l'algorithme d'Angluin défini dans la section 2.5.

3.2.1 Alphabet d'annotation

Le langage de traces en tant que tel n'apporte pas de simplification à l'automate. C'est une autre façon d'écrire un chemin. Pour permettre l'apprentissage par l'algorithme d'Angluin, il faut construire un nouveau langage, si possible régulier, qui permette de reconstruire le langage de trace. Pour ce faire, ce nouveau langage devrait pouvoir représenter tout état atteignable ainsi qu'un ou plusieurs chemins ou mots témoins permettant d'atteindre ceux-ci.

Pour ce faire, pour chaque nom de transition correspondant à une action d'envoi, un *co-nom* est défini :

$$\bar{\Theta} = \{\bar{\theta} | \theta \in \Theta \wedge \exists p, q \in Q, c \in C, a \in \Sigma, \text{tels que } \delta(\theta) = (p, c!a, q)\}$$

De plus, un *symbole de contrôle* est créé pour chaque état de contrôle : $T_Q = \{t_q | q \in Q\}$.

En combinant les noms de transitions, les co-noms et les symboles de contrôle, un nouvel alphabet peut être défini, l'*alphabet d'annotation* : $\Phi = (\Theta - \Theta_r) \bigcup \bar{\Theta} \bigcup T_Q$. Dans cet alphabet, on a $\Theta_r = \{\theta | \theta \in \Theta \land \exists p, q \in Q, c \in C, a \in \Sigma,$ tels que $\delta(\theta) = (p, c?a, q)\}$, similaire à $\bar{\Theta}$ mais avec un nom pour chaque transition pour les actions de réception.

3.2.2 Trace annotée

Soit $\mathcal{A} : L(F) \rightarrow \Phi^*$ une fonction associant une trace annotée $\gamma \in \Phi^*$ à une trace d'automate à file $\sigma \in \Theta^*$. Cette *trace annotée* est un mot sur l'alphabet d'annotation Φ tel qu'il représente au moins la trace σ. Il y a une perte d'information lors de cette transformation. $\mathcal{A}$ est la *fonction d'annotation*.

Intuitivement, $\mathcal{A}$ compacte une trace en remplaçant tout θ correspondant à une action d'envoi par son équivalent $\bar{\theta}$ si le symbole envoyé est consommé plus loin dans la trace, sur le même canal. Si une trace valide est annotée, il ne peut y avoir d'action de réception orpheline : le symbole a dû être envoyé avant d'être consommé. Dès lors, la trace annotée ne comporte que des symboles correspondant à des actions d'envoi, avec une barre ou non. De plus, un symbole appartenant à T_Q est ajouté à la fin pour signifier l'état de contrôle atteint en suivant le chemin défini par la trace.

Cette fonction est reprise algorithmiquement en l'algorithme 2.

Algorithme 2 $\mathcal{A} : \Theta^* \rightarrow \Phi^*$

Requis: un automate à files $F = (Q, C, \Sigma, q_0, \Theta, \delta)$, une trace $\sigma \in L(F)$
Promet: une trace annotée $\gamma \in \Phi^*$ représentant σ

$\gamma \leftarrow \epsilon$
pour chaque nom de transition $\theta \in \sigma$ **faire**
  si $\delta(\theta)$ est une action de réception **alors**
    trouver $\theta_s \in \Theta$ correspondant à une action d'envoi antécédant dans σ telle que les actions s'appliquent sur le même canal et le même symbole
    $\gamma \leftarrow \gamma$ où θ_s est remplacé par $\bar{\theta_s} \in \bar{\Theta}$ {θ n'est pas ajouté à γ}
  sinon si $\delta(\theta)$ est une action d'envoi **alors**
    $\gamma \leftarrow \gamma\theta$
  fin si
fin pour
trouver q l'état de contrôle tel que $s_O \xrightarrow{\sigma} s = (q, w)$ pour un certain $w \in (\Sigma^*)^c$
$\gamma \leftarrow \gamma t_q$ avec $t_q \in T_Q$ le symbole de contrôle associé à q
retourner γ

Soit $AL(F) = \{\mathcal{A}(\sigma) | \sigma \in L(F)\}$ le *langage de traces annotées* de l'automate F. $AL(F)$ est un ensemble de traces annotées correspondant à des traces valides pour l'automate F. Intuitivement, $AL(F)$ contient l'ensemble des états atteignables par F ainsi que les traces annotées servant de témoins de cette atteignabilité.

Soit un mot $\gamma \in \Phi^*$. γ est *correctement formaté* si il finit par un symbole de T_Q et aucune autre occurence d'un symbole de T_Q n'apparaît dans le mot. Soit un langage arbitraire L. L est *correctement formaté* si tous les mots $\gamma \in L$ le sont.

Exemple 18

Soit l'automate F représenté par la figure 2.16. Soient les traces $\sigma_1 = \theta_2\theta_8$ et $\sigma_2 = \theta_1\theta_3\theta_5\theta_2$. Alors, les traces annotées de ces traces sont : $\mathcal{A}(\sigma_1) = \theta_2\theta_8 t_{(q_1,q_B)} = \gamma_1$ et $\mathcal{A}(\sigma_2) = \bar{\theta_1}\bar{\theta_5} t_{(q_0,q_B)} = \gamma_2$. Bien qu'elles soient toutes deux correctement formatées, γ_1 ne correspond à aucune exécution valide de F. Dès lors, γ_1 n'appartient pas au langage de traces annotées de $AL(F)$ contrairement à γ_2.

Soit la trace annotée $\gamma_3 = t_{q_0,q_A}\theta_2 t_{q_0,q_B} \in \Phi^*$. γ_3 n'est pas correctement formatée : il est impossible que cette trace annotée appartienne à $AL(F)$.

3.2.3 Fonction d'extension de trace

Cette section définit $\mathcal{F}(L)$ pour un langage arbitraire L et démontre que $AL(F)$ en est un point fixe minimum. De la sorte, tout langage qui n'est pas un point fixe minimum de $\mathcal{F}(L)$ ne peut pas être $AL(F)$. Si c'est le cas, la question d'équivalence est répondue : les langages ne sont pas égaux. Il reste alors à générer un contre-exemple.

La *fonction d'extension* $Post(L)$ permet d'étendre une trace annotée γ avec le symbole θ. Si γ est correctement formatée, $source(\theta)$ et $cible(\theta)$ donnent respectivement la source et la cible d'une transition δ.

$$Post(\gamma,\theta) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \gamma \text{ n'est pas correctement formaté ou si } \mathcal{C}(\gamma) \neq source(\theta) \\ \{\mathcal{T}(\gamma)t_{cible(\theta)}\} & \text{sinon si } \delta(\theta) = (p,\tau,q) \text{ ou } \delta(\theta) = (p, c_i!a_j, q) \text{ avec } p,q \in Q \\ \{deriv(\mathcal{T}(\gamma),\theta)t_{cible(\theta)}\} & \text{sinon si } \delta(\theta) = (p, c_i?a_j, q) \text{ avec } p,q \in Q \end{cases}$$

Sachant que $deriv(\mathcal{T}(\gamma),\theta)$ fonctionne comme l'algorithme $\mathcal{A}$ si θ est une action de réception. Elle le fait en remplaçant un $\theta_e \in \Theta$ associé à une action d'envoi et le remplace par $\bar{\theta_e} \in \bar{\Theta}$ si l'action porte sur le même canal et le même symbole que θ.

Posons $Post(\gamma) = \bigcup_{\theta\in\Theta} Post(\gamma,\theta)$ et $Post(L) = \bigcup_{\gamma\in L} Post(\gamma)$.

Théorème 3.2.1 *Soit $\mathcal{F}(L) = Post(L) \cup \{t_{q_0}\}$ où q_0 est l'état de contrôle initial. $\mathcal{F}(L)$ est une opération monotone sur les ensembles c'est-à-dire qu'elle préserve l'inclusion d'ensembles. De plus, $AL(F)$ est le plus petit point fixe de $\mathcal{F}(L)$.*

La preuve de ce théorème est disponible en annexe de [6]. Un algorithme détaillant comment calculer $\mathcal{F}(L)$ est détaillé dans en section 4.4.

3.3 Appartenance

Lorsqu'un mot γ est fourni à l'oracle d'appartenance la question est de savoir s'il apparatient à $AL(F)$, le langage de trace annotée. Comme l'oracle ne possède pas d'automate pour représenter ce langage, il doit répondre en se basant sur F.

Ainsi, un mot γ appartient à $AL(F)$ s'il représente au moins un chemin σ valide pour F. $\gamma \notin AL(F)$ s'il n'est pas correctement formaté.

Simuler l'automate à files F, symbole par symbole, permet de tester si γ représente bien une exécution valide. La section 4.3 apporte un algorithme efficace pour simuler les différentes exécutions possibles pour une trace annotée.

3.4 Équivalence

Lorsqu'un langage régulier L, représenté par un automate A_O tel que $L(A_O) = L$, est donné à l'oracle d'équivalence, il doit se prononcer sur $L = AL(F)$. Cependant, il ne possède pas d'automate pour $AL(F)$ qui est justement le langage recherché. Il doit alors se prononcer sur l'égalité en se basant uniquement sur F.

Comme expliqué dans l'introduction du chapitre, c'est impossible de façon générale. Cependant, en supposant que $AL(F)$ est régulier, il est possible de contourner le problème pour répondre à la question de sécurité.

Contrairement à la version originale de l'algorithme d'Angluin qui a deux possibilités (équivalence ou contre-exemple), celle-ci en a trois. L'oracle peut répondre soit que $AL(F)$ est sécurisé, soit qu'il ne l'est pas, soit que L est différent de $AL(F)$ avec un contre-exemple.

3.4.1 L est-il un point fixe de $\mathcal{F}$?

Cette question se base sur le théorème 3.2.1 et en particulier du fait que $AL(F)$ est un point fixe. Il n'est pas possible de prouver que $L = AL(F)$ mais il est possible de montrer que $L \neq AL(F)$ en montrant que L n'est pas un point fixe.

Une façon de montrer que $L \neq AL(F)$, est d'énoncer un seul élément dans $L \bigcup AL(F) - L \bigcap AL(F)$ =$AL(F) \oplus L$, *l'union exclusive* des deux ensembles. Pour rappel, $AL(F)$ est un langage contenant l'ensemble des traces valides pour l'automate à files F.

En comparant $\mathcal{F}(L)$ avec L pour vérifier si L est un point fixe de $\mathcal{F}$, plusieurs situations peuvent apparaître :

— $\mathcal{F}(L) - L \neq \emptyset$. Considérons une trace annotée $\gamma \in \mathcal{F}(L) - L$ et montrons que $\gamma \in AL(F) \oplus L$.
  — Si $\gamma = t_{q_0}$, c'est que $t_{q_0} \notin L$. Pourtant, par définition, $t_{q_0} \in AL(F)$. Dès lors, $\gamma \in AL(F) \oplus L$
  — Sinon, si γ est une annotation valide, c'est que L n'est pas un point fixe de $\mathcal{F}$. Dès lors, γ suffit à démontrer que $AL(F) \neq L$.
  — Sinon, w n'est pas une annotation valide. γ faisant partie de $\mathcal{F}(L)$, cela signifie qu'il doit exister une trace annotée $\gamma' \in L$ telle que $\gamma = Post(\gamma')$. Ce γ' ne peut pas être une annotation valide : cela impliquerait que γ l'est également ce qui est posé comme faux ici. Comme γ' n'est pas une annotation valide pour F, $\gamma' \notin AL(F)$. Comme $\gamma' \in L$, naturellement $\gamma' \in AL(F) \oplus L$.

— $\mathcal{F}(L) \subsetneq L$. Dans ce cas, utilisons la notion de point préfixe. Un ensemble Z est un *point préfixe* d'une fonction $\mathcal{F}$ s'il réduit par son application : $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}(Z) \subseteq Z$). Selon cette définition, L est un point préfixe de $\mathcal{F}$. En appliquant $\mathcal{F}$ des deux côtés, ce qui préserve l'inclusion car $\mathcal{F}$ est monotone, on obtient $\mathcal{F}(\mathcal{F}(L)) \subsetneq \mathcal{F}(L)$.
  Donc, $\mathcal{F}(L)$ est également un point préfixe. Soit $\gamma \in L - \mathcal{F}(L)$. Comme γ n'est pas dans l'intersection de ces deux point préfixes, il ne fait pas partie du point fixe minimum $AL(F)$. En effet, selon la théorie des points fixes de Knaster-Tarski (annexe A), un point fixe minimal est également l'intersection de tous les points préfixes de $\mathcal{F}$.

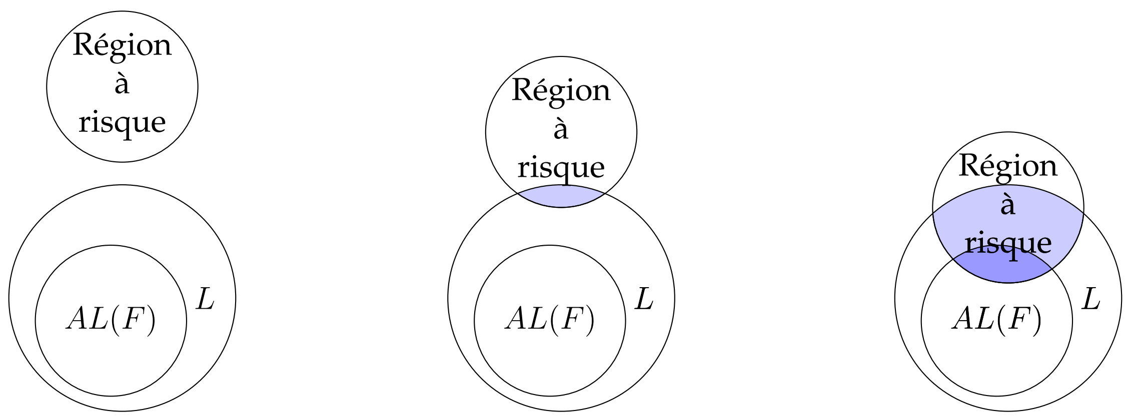
— $\mathcal{F}(L)$ =L. Cela signifie que L est un point fixe de $\mathcal{F}$. Cela signifie qu'il n'est pas possible de prouver que $L \neq AL(F)$ et infirmant cette propriété. Cela ne signifie par pour autant que $L = AL(F)$.

Ce pourrait très bien être un autre point fixe contenant $AL(F)$ ou un autre ensemble contenant une trace annotée menant à un état qui n'est pas sûr. Pour tenter de continuer à chercher un contre-exemple ou tester la sûreté, il faut poser d'autres questions.

La transcription en algorithme de la comparaison entre L et $\mathcal{F}(L)$ pour trouver un contre-exemple à $L = AL(F)$ est donnée dans la section 4.5, accompagnée d'un exemple.

3.4.2 L intersecte-t-il avec une région à risque ?

En visualisant L comme étant un super-ensemble de $AL(F)$ et la région à risque comme un ensemble, il est possible de se représenter les différentes situations envisageables.



(a) Pas d'intersection (b) Intersection avec L seulement (c) Intersection avec $AL(F)$

FIGURE 3.2: L, $AL(F)$ et la région à risque

Pour savoir si nous sommes dans le scénario (a), (b) ou (c) de la figure 3.2, deux tests sont à effectuer.

Premièrement, vérifier si l'intersection avec la région à risque $\mathcal{W}(L)$ est vide ou non. S'il est vide, nous sommes dans le scénario (a) et il est possible d'annoncer avec certitude que F est sécurisé.

3.4.3 Le chemin vers l'état à risque est-il valide ?

Si la réponse à la question précédente est oui, sommes-nous dans le scénario (b) ou (c) ? Considérons un des éléments de $\mathcal{W}(L)$. Demandons à l'oracle d'appartenance si ce mot appartient également à $AL(F)$.

Si ce n'est pas le cas, c'est que $L \neq AL(F)$ et que l'algorithme d'Angluin peut continuer grâce au contre-exemple fourni. Ici, il peut s'agir soit d'un scénario (b) soit d'un scénario (c) puisqu'un autre mot de $\mathcal{W}(L)$ pourrait appartenir à $AL(F)$. Cela correspondrait à prendre un mot de la zone bleue claire dans (c).

Améliorer l'approximation d'$AL(F)$ permet justement de mieux discerner ces deux scénarios sans devoir consulter la totalité de $\mathcal{W}(L)$.

Si par contre le mot étudié appartient aussi à $AL(F)$, on a un mot étant à la fois dans $AL(F)$ et dans la région à risque. F est déclaré à risque et le mot est retourné comme contre-exemple. Il s'agit du scénario (c).

3.5 Sûreté

Comme mentionné au début du chapitre, ce travail s'intéresse à la propriété de sécurité dans les automates à files. Contrairement aux ADF construits dans la section 2.3, les automates à files ont un nombre potentiellement infini d'états.

La propriété de sûreté permet de catégoriser les états qui sont souhaitables de ceux qui ne le sont pas. Par la suite, la section 3.5.2 propose une technique permettant de calculer l'ensemble des états indésirables à partir d'une trace annotée.

3.5.1 Définition

Dans un automate à files $F = (Q, C, \Sigma, q_0, \Theta, \delta)$, chaque état de contrôle $q \in Q$ est associé à une union finie de langages réguliers pour chacun des canaux $c \in C$.

$$\bigcup_{0 \leq i \leq n_q} \Pi_{0 \leq j \leq k} U_q(i, c_j)$$

Où $U_q(i, c_j)$ est un langage régulier pour le contenu du canal c_j sur l'état q. n_q est le nombre de langages réguliers utilisés pour définir cette propriété par union.

Un état $s = (q, [w_0, w_1, \dots, w_k])$ est *sûr* s'il n'existe pas $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $w_j \in U_q(i, c_j)$. Si tous les états d'un automate sont sécurisé, l'automate est également *sûr*.

Comme mentionné dans la section sur l'approche choisie en 3.1, si un état n'est pas sécurisé, il est *à risque*. S'il existe au moins un état à risque dans un automate, celui-ci est *à risque*.

3.5.2 Traces annotées menant à des états à risques

Soit la fonction $h_c : \Phi^* \to \Sigma^*$ qui, pour une trace annotée donnée, ne retourne que les messages envoyés mais non réceptionnés sur le canal c.

h_c est l'unique homomorphisme qui étend la fonction suivante de Φ à Φ^* :

$$h_c(\theta) = \begin{cases} m & \text{si } \theta \in \Theta \text{ et } \delta(\theta) = (p, c!m, q) \\ \epsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $L = L(F)$ alors L_q est l'ensemble des mots correctement formatés pour L.

Si il existe un état à risque s, alors il existe une trace $\sigma \in \Theta^*$ telle que $s_0 \xrightarrow{\sigma} s$ où s_0 est l'état initial. Si les transitions dénotant des actions d'envoi et de réception d'un même symbole sur un même canal sont enlevées par paires, il ne reste que les transitions participant au contenu final des différents canaux de s. Par définition de h_c, pour chaque contenu $w[c_j]$ de chaque canal c_j, $w[c_j] = h_{cj}(\mathcal{A}(\sigma))$. Dès lors, pour que s soit atteignable, il faut qu'il existe une trace annotée

$\gamma \in AL(F)$ telle que $s = (q_\gamma, [h_{c0}(\gamma), h_{c1}(\gamma), \dots, h_{ck}(\gamma)])$ où q_γ est l'état de contrôle désigné par le symbole de contrôle à la fin de γ.

Soit la fonction $h_c^{-1} : \Sigma^* \to \Phi^*$ l'homomorphisme inverse de h_c $h_{cj}^{-1}(U_q(i, c_j))$ retourne des traces annotées correspondant au contenu d'un canal. Dans ce cas particulier, un des langages réguliers servant à définir la propriété de sécurité. Comme plusieurs traces annotées peuvent correspondre au même contenu de canaux par h_c, un contenu de canal peut correspondre à plusieurs traces annotées via h_c^{-1}. Le contenu de chaque canal étant fini pour un mot donné, le nombre de traces annotées compatibles l'est aussi.

En calculant cette fonction pour l'ensemble des états, canaux et langages réguliers définissant la sûreté de F et en s'assurant que ces traces sont correctement formatées, on obtient un ensemble de traces annotées menant à des états à risque.

Cet ensemble est décrit mathématiquement par $\mathcal{W}(L)$:

$$\mathcal{W}(L) = \bigcup_{q \in Q} \Big(\bigcup_{0 \leq i \leq n_q} \Big(\bigcap_{0 \leq j \leq k} h_{c_j}^{-1}(U_q(i, c_j)) \Big) \Big)$$

Chapitre 4

Implémentation

Ce chapitre décrit les choix qui ont été faits pour implémenter l'algorithme développé dans le chapitre 3. La section 4.1 présente les choix envisagés de langages de programmation et librairies avant de nommer le candidat retenu de façon argumentée. Ensuite, la section 4.2 décrit les difficultés rencontrées ainsi que les solutions et compromis apportés à chacune d'elles. Trois d'entre elles étaient de l'ordre algorithmique. Les algorithmes proposés sont expliqués dans les sections 4.3, 4.4 et 4.5. Chacun est accompagné d'un exemple. Finalement, quelques expérimentations sont citées et appréciées dans la section 4.6.

Un résumé des changements effectués dans les librairies utilisées est disponible dans l'annexe B.

4.1 Langage de programmation et librairies

Implémenter ces différents types d'automates, les opérations associées, ainsi que les différents algorithmes demande une quantité considérable de travail.

Utiliser des librairies pré-existantes permet de réutiliser du code et de limiter le travail restant, plus spécifique à ce document.

Une librairie en python, automata-lib ainsi que les librairies java Automatalib et Learnlib ont été considérées.

automata-lib supporte tous les types d'automates necéssaires, avec des méthodes de bases telles que l'exécution pour un mot, la validité pour les automates sans files ainsi qu'une méthode de construction simple. Cependant, il manque beaucoup de fonctionnalités. Les opérations booléennes entre automates ne sont pas implémentées. La déterminisation d'un NFA ou l'algorithme d'Angluin ne sont pas proposés non plus.

Pour ces raisons, le couple Automatalib-Learnlib a été retenu. Ces librairies sont plus complexes et ne supportent pas les automates à files. Cependant, toutes les autres opérations citées précédemment sont présentes. Cela permet de limiter le travail à l'implémentation des automates à files et des méthodes et algorithmes couverts dans les chapitres 3 et 4.

4.2 Difficultés

Ce travail a rencontré plusieurs difficultés. En voici la liste avec les contre-mesures proposées si c'est pertinent.

- Les librairies utilisées sont complexes. Automatalib et Learnlib sont conçues de façon très générique. Cependant, ajouter le concept de file aux automates n'était pas prévu. La solution apportée est de développer un pan dans chaque librairie dédié plus spécifiquement aux automates à files. Éventuellement, des méthodes ont été dupliquées dans ce contexte.
- La documentation était insuffisante ou introuvable. La documentation des librairies sur leur site respectif est succinte et sommaire. En général, le code n'est commenté que pour les classes n'ayant pas elles-même de super-classe. De plus, il manque des explications sur les relations entre les classes. Pour travailler dans ces conditions, il a fallu explorer une grande partie du projet, tester certaines fonctionnalités. Pour simplifier la lecture du code ajouté, des commentaires plus fréquents y ont été ajoutés. L'annexe B sert aussi de référence aux relations entre classes.
- Certaines opérations ne sont proposées que pour les ANF alors que l'algorithme d'Angluin est défini ici pour les ADF. Une fonctionnalité a été ajoutée pour la traduction triviale d'un ANF à un ADF équivalent.
- Les librairies utilisent des dépendances complexes. Chaque librairie est découpée en de nombreux sous-modules interconnectés. Les cycles de dépendances sont interdits entre autres pour l'interprétation des annotations et la génération de code. La structure en sous-modules n'a pas été modifiée mais une attention particulière a été apportée aux dépendances et aux fichiers de configuration. Cette complexité se traduit aussi par un processus de compilation complexe.
- L'article de Vardhan et al.[6] manque de précision sur l'implémentation de la méthode *LeVer*. La comparaison d'ensembles potentiellement infinis (les langages) manque d'explications sur la mise en pratique avec les automates. Des algorithmes ont dû être reconstruits pour permettre l'implémentation de ces opérations sur des ordinateurs. Parmis ceux-ci :
  - L'algorithme d'appartenance de la section 4.3.
  - L'algorithme permettant de calcul de $\mathcal{F}(L)$ pour un langage de traces annotées L donné, à la section 4.4
  - L'algorithme permettant de comparer $\mathcal{F}(L)$ et L pour trouver un contre-exemple prouvant que L n'est pas un point-fixe de $\mathcal{F}$, à la section 4.5.

  L'article ne détaille pas non plus d'algorithme permettant de calculer l'ensemble des configurations à risque $\mathcal{W}(L)$. Cet ensemble est plus facile à calculer si les langages réguliers décrivant les configurations à risques ne s'intéressent pas au contenu des canaux mais uniquement aux états traversés dans l'automate à files. C'est cette approche qui est utilisée dans ce travail.

Une solution idéale à toutes ces difficultés demanderait une réécriture profonde des librairies ainsi qu'un grand travail de documentation. Cela améliorait grandement la qualité du code mais est au-delà des limites de ce travail.

4.3 Algorithme d'appartenance

L'oracle d'appartenance est l'un des deux oracles utilisés par l'algorithme d'Angluin découvert dans la section 2.5. La section 3.3 mentionne le comportement de cet oracle. Cependant, elle manque de précisions permettant d'exécuter l'automate à files de façon efficace.

L'algorithme d'appartenance 4.3.1 répond à cette problématique.

Algorithme 4.3.1 (Appartenance)

Requis: *une trace correctement annotée* $\gamma \in \Phi^*$ *, un automate à files* $F = (Q, C, \Sigma, q_0, \Theta, \delta)$ *et un état de contrôle actif* q_a

Promet: *si* $\gamma \in AL(F)$ *ou non*

$a, \gamma' \leftarrow$ *premier symbole de* γ *et le reste de la trace annotée*
si $a \in T_Q$ ***alors***
    si a *correspond à* q_a *et* $|\gamma'| = 0$ ***alors***
        retourner *vrai*
    fin si
sinon si $a \in \bar{\Theta}$ ***alors***
    $a' \leftarrow a$ *sans la barre*
    $(p, c!m, q) \leftarrow \delta(a')$ *{comme* $a \in \bar{\Theta}$*, il s'agit forcément d'une action d'envoi}*
    si $p = q_a$ ***alors***
        pour chaque θ_r *tel que* $\delta(\theta_r) = (r, c?m, s)c$ ***faire***
            pour chaque *position* i *dans* γ' *sauf après le symbole terminal* $t \in T_Q$ ***faire***
                $\gamma'' \leftarrow \gamma'$ *où* θ_r *a été inséré à la position* i
                si *Appartenance(*γ''*,* F*,* q*)* ***alors***
                    retourner *vrai*
                fin si
            fin pour
        fin pour
    fin si
sinon
    $(p, action, q) \leftarrow \delta(a)$ *{action est obligatoirement de type envoi sinon la trace ne serait pas correctement formattée}*
    si $p = q_a$ ***alors***
        retourner *Appartenance(*γ'*,* F*,* q*)*
    fin si
fin si
retourner *faux*

Exemple d'application de l'algorithme d'appartenance Soit l'automate à files F dans la figure 2.16. Soit le mot correctement formatté $\gamma = \bar{\theta}_2\bar{\theta}_5 t_{q_0} \in \Phi^*$.

Voici le déroulement de $appartenance(\gamma, F, q_0)$.

$q_a = q_0$, $a = \bar{\theta}_2$ et $\gamma' = \bar{\theta}_5 t_{q_0}$. $a \in \bar{\Theta}$ et $source(a) = q_0$. Les dérivés avec θ_r sont produits. Ici le seul θ_r compatible est θ_6

— $Appartenance(\theta_6\bar{\theta}_5 t_{q_0}, F, q_2)$

1. Ici, $source(\theta_6) = q_2$.
2. Un appel récursif est fait sur $Appartenance(\bar{\theta}_5 t_{q_0}, F, q_3)$
3. $source(\bar{\theta}_5) \neq q_3 = dest(\theta_6))$. Cet appel récursif retourne faux.

— $Appartenance(\bar{\theta}_5 \theta_6 t_{q_0}, F, q_2)$

1. $a = \bar{\theta}_5 \in \bar{\Theta}$ et $\gamma' = \theta_6 t_{q_0}$
2. Les dérivés avec θ_r sont produits. Le seul θ_r compatible avec $\bar{\theta}_5$ est θ_7.
3. $dest(\theta_5) = q_2$
   — $Appartenance(\theta_7 \theta_6 t_{q_0}, F, q_2)$
   (a) $source(\theta_7) = q_3 \neq q_2$
   (b) Cet appel récursif retourne faux.
   — $Appartenance(\theta_6 \theta_7 t_{q_0}, F, q_2)$
   (a) $source(\theta_6) = q_2$
   (b) $dest(\theta_6) = q3$
   (c) Appel récursif sur $Appartenance(\theta_7 t_{q_0}, F, q_3)$
   (d) $source(\theta_7) = q_3$ et $dest(\theta_7) = q_0$
   (e) Cet appel lance lui même un appel récursif sur $Appartenance(t_{q_0}, F, q_0)$ qui est vrai

4.4 Algorithme de construction de $\mathcal{F}(L)$

Soit un langage L et un automate A tel que $L = L(A)$. Calculer $\mathcal{F}(L)$ revient, par définition, à calculer $\bigcup_{\theta \in \Theta} Post(L, \theta) \bigcup \{t_{q_0}\}$.

Pour rappel, voici la définition de $Post(L, \theta)$ telle que donnée dans la section 3.2.3 :

$Post(L, \theta) = \bigcup_{\gamma \in L} Post(\gamma, \theta)$ avec

$$Post(\gamma, \theta) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \gamma \text{ n'est pas correctement formaté ou si } \mathcal{C}(\gamma) \neq source(\theta) \\ \{\mathcal{T}(\gamma) t_{cible(\theta)}\} & \text{sinon si } \delta(\theta) = (p, \tau, q) \text{ ou } \delta(\theta) = (p, c_i!a_j, q) \text{ avec } p, q \in Q \\ \{deriv(\mathcal{T}(\gamma), \theta) t_{cible(\theta)}\} & \text{sinon si } \delta(\theta) = (p, c_i?a_j, q) \text{ avec } p, q \in Q \end{cases}$$

Des automates A_θ peuvent être construits pour $Post(L, \theta)$ pour chaque θ à partir de A. L'union de ces automates $A' = \bigcup_{\theta \in \Theta A_\theta}$ accepte $\bigcup_{\theta \in \Theta} Post(L, \theta)$. L'union de ce nouvel automate avec un automate pour le language $L = \{t_{q_0}\}$ accepte $\mathcal{F}(L)$.

La suite de cette section s'intéresse donc au calcul de $L' = Post(L, \theta)$ où L est accepté par A et L' par un ADF A' construit à partir de A.

L'automate A' peut être non-déterministe. Ce n'est pas un problème car, comme l'explique la section 2.3.6, il existe un ADF équivalent. Dans le cadre de l'apprentissage avec Angluin, c'est cet ADF qui devient A' et est utilisé pour les autres opérations.

Soit $\theta \in \Theta$ tel que $\delta(\theta) = (p, action, q)$. On explique ci-après les différents cas à traiter pour calculer A_θ.

4.4.1 Si $action$ est τ ou de la forme $c!a$

Dans ce cas, construire un automate pour $L' = L \bigcap \Sigma^* t_p$ avec t_p correspondant au p de $\delta(\theta)$ et $\Sigma^* t_p$ étant représenté par l'ANF de la figure 4.1.

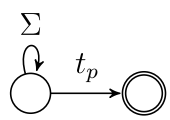
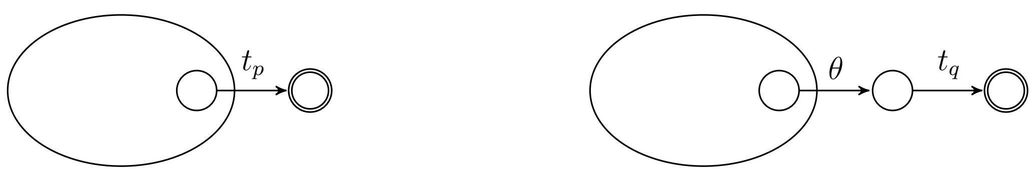


FIGURE 4.1: ANF pour $L = \Sigma^* t_p$

Dans cet automate L', seuls les états et transitions menant à l'état final par t_p sont considérés.

Construire un automate pour $L \bigcap \Sigma^* t_p = L'$. Si L' est vide, c'est qu'il n'y a pas de mot finissant concerné par θ et donc que $Post(L, \theta) = \emptyset$.

Sinon, si $L' \neq \emptyset$, supposons d'abord que $action$ est de la forme $c!a$ ou τ. Il faut alors appliquer une transformation à l'automate correspondant à $Post(L', \theta)$. Si $action$ est de forme $c!a$, la transition sur θ peut être ajoutée avant les transitions sur t_p et un nouveau t_q signalant le changement d'état dans l'automate à files F.



(a) Automate de L' (b) Automate de $Post(L', \theta)$

FIGURE 4.2: Application de $Post(L', \theta)$ sur un automate si l'action est de forme $c!a$

À présent, supposons que l'action de θ est de forme τ, $\theta \notin \Phi$. Alors, t_p est remplacé par t_q. La transition est alors sous-entendue.

(a) Automate de L' (b) Automate de $Post(L', \theta)$

FIGURE 4.3: Application de $Post(L', \theta)$ sur un automate si l'action est τ

4.4.2 Si $action$ est de la forme $c?a$

Pour qu'une réception $c?a$ d'un symbole soit possible, il faut qu'il existe un envoi qui lui soit associé. Cet envoi est noté θ_s tel que $\delta(\theta_s) = (r, c!a, s)$. De plus, il faut, comme dans la section précédente, tester si $Post(L, \theta)$ est vide ou non grâce au t_p correspondant au p de $\delta(\theta)$.

En utilisant θ_s, on construit $L' = L \bigcap \Sigma^* \Theta_s \Sigma^* t_p$ où Θ_s est l'ensemble des θ_s associés à $c?a$. Un automate acceptant ce langage est donné à la figure 4.4.

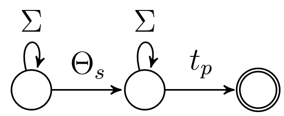


FIGURE 4.4: ANF pour $L = \Sigma^*\Theta_s\Sigma^*t_p$

Si $L' = \emptyset$, il n'existe pas de θ_s dans les chemins qui nous concernent. Il n'y aura donc pas de possibilité de consommer un symbole : $Post(L, \theta) = \emptyset$.

Sinon si L' est non vide, il faut alors, à partir de l'automate A' acceptant L', construire un automate A_θ acceptant le langage $Post(L', \theta)$.

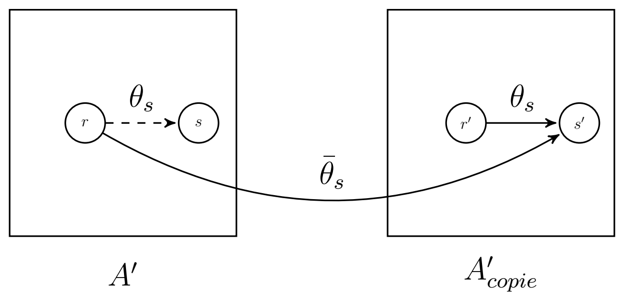


FIGURE 4.5: Première étape de construction de l'automate P_A pour $Post(L'', \theta)$

La figure 4.5 décrit comment l'automate A_θ est construit à partir de A'. Premièrement, une copie de A' est construite : A'_{copie}. Dans A', les états finaux sont considérés comme des états non finaux. Dans A'_{copie}, l'état initial est considéré comme un état non initial. Finalement, dans A', toute transition θ_s allant de r à s est remplacée par une transition sur $\bar{\theta}_s$ allant de r à s'.

De cette façon, pour qu'un mot soit valide, il faut qu'il commence dans A'. La première occurence de θ_s a été systématiquement remplacée pour $\bar{\theta}_s$ menant à A'_{copie}. Dans A'_{copie}, les autres transitions ne sont pas modifiées, laissant intact le reste du chemin. Cependant, la figure 4.5 à elle seule ne suffit pas à construire A_θ. Pour rester en accord avec la définition de $Post(L, \theta)$, il faut adapter le dernier symbole, ici t_p en t_q (figure 4.6).

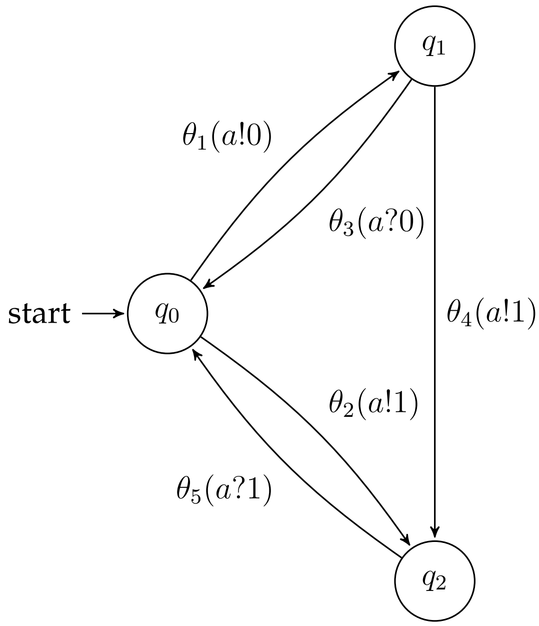
(a) Automate de la figure 4.5

(b) Automate A_θ de $Post(L', \theta)$

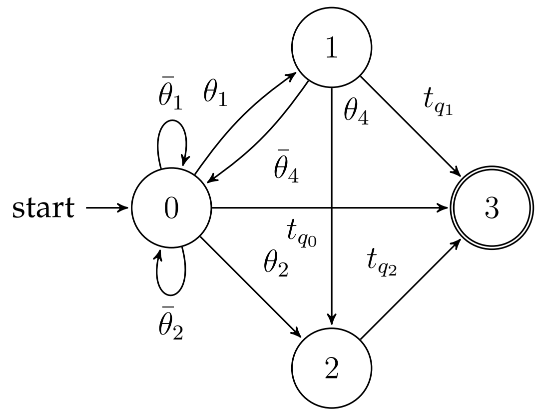
FIGURE 4.6: Deuxième étape de construction de l'automate A_θ pour $Post(L', \theta)$

4.4.3 Exemple

Dans cette section, on illustre la construction de $\mathcal{F}(L)$ donnée dans la section précédente. Cet exemple se base sur l'automate à files F de la figure 4.7a ainsi que l'ADF A de la figure 4.7b acceptant le langage de traces annotées L.



(a) Automate à files F



(b) Automate A acceptant L

F et $L(F)$ candidat à $AL(F)$ Pour simplifier la lecture de cet exemple, les états de A pour lesquels il existe une transition t_p vers un état final sont appelés *états pré-finaux* sur t_p.

— Soit θ_1 avec $\delta(\theta_1) = (q_0, a!0, q_1)$ menant au calcul de A_{θ_1}. Les états pré-finaux sur q_0 sont $\{0\}$. Un automate est construit pour $L' = L \bigcap \Sigma^* t_{q_0}$: celui de la figure 4.8.

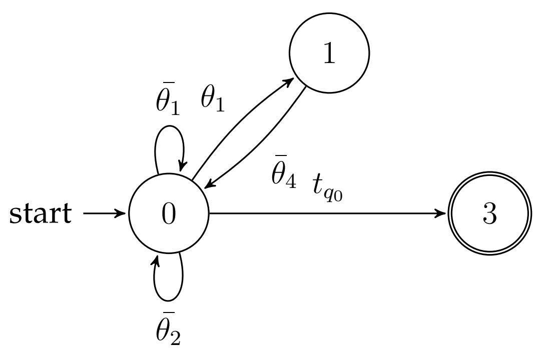


FIGURE 4.8: Un ANF représentant L'

En suivant la règle pour les θ dont l'action est de type $c!a$, ce qui est le cas pour θ_1, un nouvel état est créé entre 0 et 3 car il y a une transition t_{q_0} à cet endroit. Cela donne l'ANF de la figure 4.9

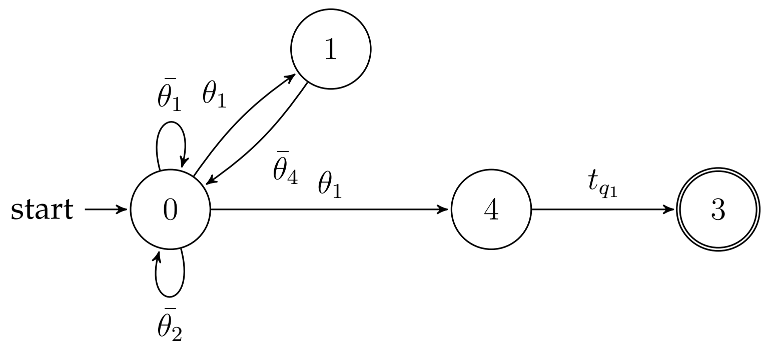


FIGURE 4.9: L'ANF A_{θ_1} acceptant $Post(L, \theta_1)$

Cet automate 4.9 n'est pas déterministe mais il existe un équivalent déterministe qui peut être utilisé pour l'algorithme d'Angluin.

— Soit θ_3 avec $\delta(\theta_3) = (q_1, a?0, q_3)$ menant au calcul de A_{θ_3}. Les états pré-finaux sur q_1 sont $\{1\}$. Contrairement à θ_1, θ_3 est une action de réception. Ici le seul symbole θ_s d'action $c!a$ correspondant à θ_3 ($a!0$) est θ_1.
Dès lors, l'ANF pour $L' = L \bigcap \Sigma^*.\{\theta_3\}.\Sigma^*.tq_1$ est calculé.

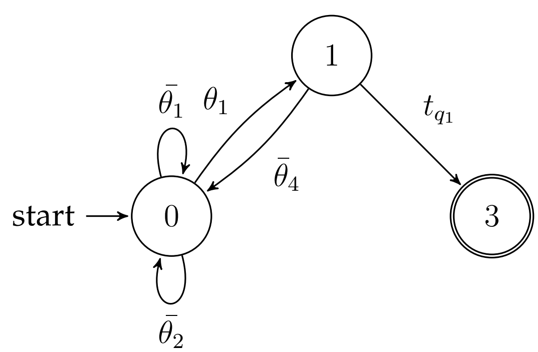


FIGURE 4.10: Un ANF représentant L'

Cet automate sert à construire $Post(L, \theta_3)$ comme décrit pour les θ dont l'action est de forme $c?a$. $Post'L, \theta_3)$ est représenté par la figure 4.11.

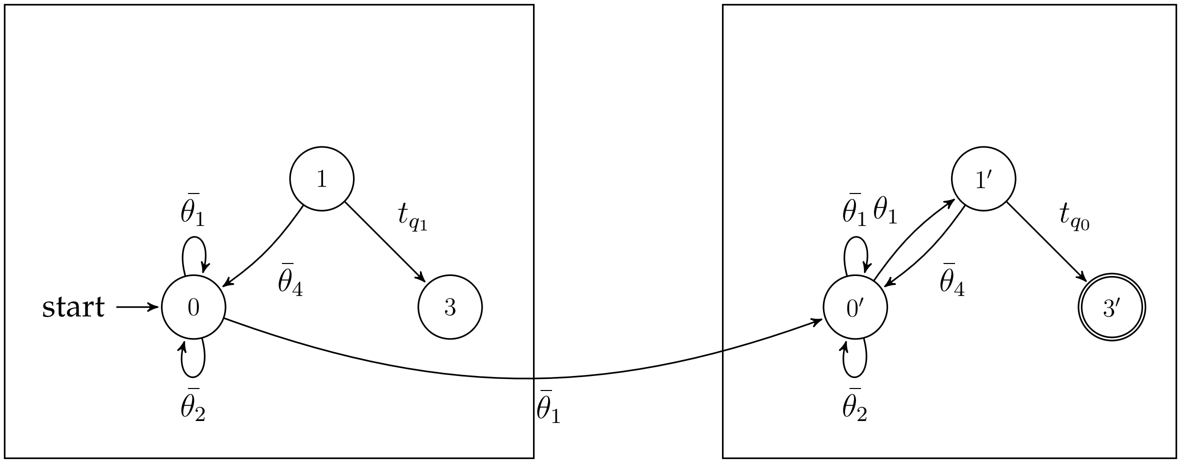


FIGURE 4.11: Un ANF représentant $Post(L, \theta_3)$

En répétant ces opérations pour les symboles $\{\theta_2, \theta_4, \theta_5\}$, il est possible de calculer l'automate A' représentant $L' = \bigcup_{\theta \in \Theta} Post(L, \theta)$. L'union de cet automate A' avec un automate représentant $\{t_{q_0}\}$ résulte en un automate A'' représentant $\mathcal{F}(L)$.

4.5 Algorithme de comparaison entre $\mathcal{F}(L)$ et L

Supposons être en possession de L et de $\mathcal{F}(L)$. Nous décrivons ici comment implémenter la comparaison de $\mathcal{F}(L)$ avec L selon les critères énoncés dans la section 3.4.1.

L'algorithme de comparaison 4.5.1 suppose l'existence d'opérations de base. Dans le cadre d'une implémentation, celles-ci doivent également être disponibles.

Soient deux ADF A et B ainsi que les langages qui sont représentés par ceux-ci, respectivement $L_A = L(A)$ et $L_B = L(B)$. Voici une liste des opérations nécéssaires.

— La conjonction : $L_A \bigcap L_B$

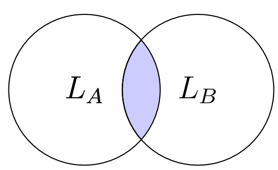


FIGURE 4.12: $L_A \bigcap L_B$ en bleu

— L'équivalence : L_A est-il égal à L_B ?
— La disjonction : $L_A \bigcup L_B$

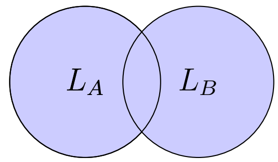


FIGURE 4.13: $L_A \bigcup L_B$ en bleu

— La disjonction exclusive ($(A \bigcup B) \backslash (A \bigcap B)$, notée $A \oplus B$)

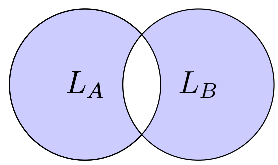


FIGURE 4.14: $L_A \oplus L_B$ en bleu

— La différence avec le vide : $L_A = \emptyset$?
— La sélection d'un mot : $w \in L_A$

La comparaison de $\mathcal{F}(L)$ avec L est plus complexe qu'une simple équivalence car le contre-exemple à retourner dépend de l'automate à files F. En effet, le contre-exemple recherché n'est pas un contre-exemple à l'égalité $L = \mathcal{F}(L)$ mais à l'égalité $L = AL(F)$. (Voir section 3.4.1)

Algorithme 4.5.1 (Comparaison)
Requis: *Un langage de traces annotées L pour un automate à files F, $\mathcal{F}(L)$*
Promet: *L'égalité entre L et $\mathcal{F}(L)$ ou un contre-exemple $\gamma \in \Phi^*$ à l'égalité $L = AL(F)$*

si $L = \mathcal{F}(L)$ ***alors***
    retourner *L est un point fixe de $\mathcal{F}$.*
sinon
    $X = L \oplus \mathcal{F}(L)$ *{X est non-vide car $L \neq \mathcal{F}(L)$}*
    Prenons $\gamma \in X$
    si $\gamma \in L$ ***alors***
        retourner γ
    sinon
        si *γ est une annotation valide* ***alors***
            retourner γ
        sinon
            retourner *reverseFL($\mathcal{F}(L)$, F, γ)*
        fin si
    fin si
fin si

A l'exception du mot t_{q_0}, $\mathcal{F}(L)$ contient des mots γ tels que $\exists \gamma' \in L \exists \theta \in \Theta, \gamma = Post(\gamma', \theta)$.

Sous l'hypothèse que γ n'est pas t_{q_0}, ce qui en ferait une annotation valide, rendant inutile l'appel à reverseFL, reverseFL trouve ce γ' et θ.

Algorithme 4.5.2 (reverseFL)

Requis: — *Un langage obtenu par la fonction $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}(L)$*
— *L'automate à files concerné par L : F*
— *Une trace annotée $\gamma \in \Phi^*$*

Promet: *une trace annotée $\gamma' \in L$ tel que $\exists\theta, \gamma = Post(\gamma', \theta)$ s'il existe*

si *γ est une trace correctement annotée* ***alors***
  $\gamma' t_q \leftarrow \gamma$ *avec $\gamma' \in \Phi^*, t_q \in T_Q$*
  si *$\exists\theta_\tau$ tel que $dest(\theta_\tau) = t_q$ et l'action de θ_τ est τ* ***alors***
    si *$\gamma' = \epsilon$ ou $dest(\gamma') = source(\theta_\tau)$* ***alors***
      retourner $\gamma'.source(\theta_\tau)$
    fin si
  fin si
  si *$\gamma' = \gamma''.\phi$ avec $\gamma'' \in \Phi^*$ et $\phi \in \Phi$* ***alors***
    si *$\phi \in \Theta$ et $dest(\phi) = q$* ***alors***
      retourner $\gamma''.t_{source(\phi)}$
    fin si
    pour chaque *symbole $\bar{\theta} \in \gamma''.\phi$ de droite à gauche tels que $\bar{\theta} \in \bar{\Theta}$* ***faire***
      $u_1.\bar{\theta}.u_2.t_q \leftarrow \gamma$ *avec $u_1, u_2 \in \Phi^*$*
      $(r, c!m, s) \leftarrow \delta(\theta)$
      pour chaque *symbole $\theta_r \in \Theta$* ***faire***
        si *$\delta(\theta_r) = (p, c?m, q)$ avec le q de t_q* ***alors***
          retourner $u_1.\theta.u_2.t_p$
        fin si
      fin pour
    fin pour
  fin si
fin si

4.5.1 Exemple d'application de reverseFL

Soit l'automate à files F dans la figure 2.16. Supposons être en possession d'un ADF A tel que $L(A) = AL(F)$. Comme $AL(F) = \mathcal{F}(AL(F))$, reverseFL peut être employé avec A. Soit la trace annotée $\gamma = \bar{\theta}_2\bar{\theta}_5\bar{\theta}_5\bar{\theta}_1\theta_4 t_{q_0} \in AL(F)$.

Voici le déroulement de $reverseFL(A, F, \gamma)$.

1. γ finit par $\theta_4 \in \Theta$ mais $dest(\theta_4) \neq q_0$
2. $\bar{\theta}_0 \in \bar{\Theta}$ pour lequel il existe θ_3 avec $\delta(\theta_3) = (q_1, a?0, q_3)$. $q_3 \neq q_0$
3. $\bar{\theta}_4 \in \bar{\Theta}$ pour lequel il existe θ_7 avec $\delta(\theta_7) = (q_3, b?0, q_0)$. q_0 est correct. L'algorithme retourne $\gamma' = (\bar{\theta}_2\bar{\theta}_5).\theta_5.(\bar{\theta}_1).t_{q_3}$

Le résultat peut être vérifié simplement : $Post(\gamma', \theta_7) = \gamma$.

4.6 Expérimentations

Plusieurs expérimentations sont nécéssaires pour se convaincre du bon fonctionnement global de la vérification de la sûreté d'automates à files par apprentissage actif. Trois cas sont retenus.
— L'algorithme s'arrête en déclarant l'automate sûr.
— L'algorithme s'arrête en déclarant l'automate comme étant à risque.
— L'algorithme ne s'arrête pas.
Le programme a été exécuté sur différents exemples F et le résultat a été confirmé par rapport à l'automate étudie. L'évolution de l'ADF A candidat pour accepter $AL(F)$ a été exportée sous forme d'images. Dans ces images, représentant des ADF, une notation a été établie.
— Une transition sur ti dans l'image représente une transition sur θ_i dans A.
— Une transition sur bi dans l'image représente une transition sur $\bar{\theta}_i$ dans A.
— Une transition sur si dans l'image représente une transition sur t_{q_i} dans A.

4.6.1 Exécution avec arrêt

L'automate à files F de la figure 4.15 permet d'étudier les deux premiers cas.

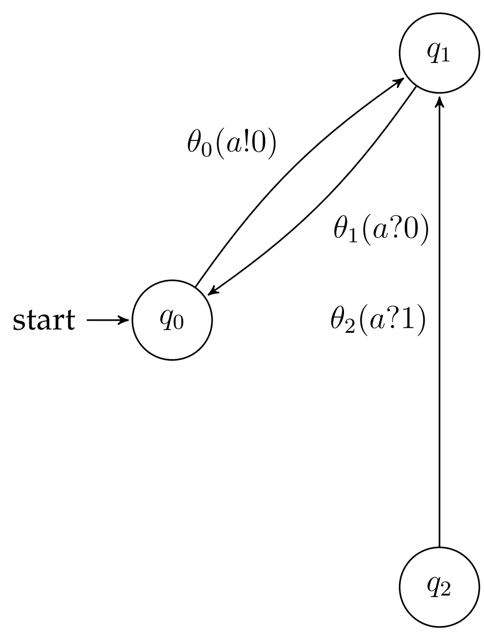


FIGURE 4.15: Automate à files F

La question de la sûreté de cet automate à files F est posée pour deux ensembles $\mathcal{W}$:
— $\mathcal{W}_1$: Toute configuration de l'automate à files où l'état courant est q_1.
— $\mathcal{W}_2$: Toute configuration de l'automate à files où l'état courant est q_2.
Voici les différentes itérations de l'algorithme avant l'arrêt du programme.

1. L'automate A_1 acceptant le langage $L = \{t_{q_0}\}$ est proposé (figure 4.16). Celui-ci est refusé et un contre-exemple est fourni : $\gamma = \theta_0 t_{q_1}$. En effet, A_1 n'accepte pas γ alors qu'il existe

bien une exécution valide de F pour ce mot.

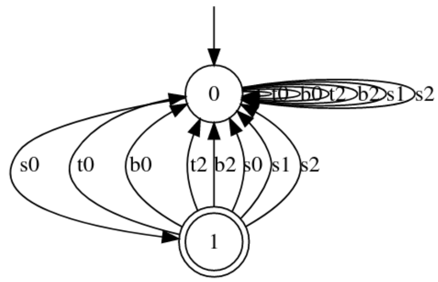


FIGURE 4.16: Automate A_1 lors du premier appel à l'oracle d'équivalence

2. L'automate A_2 de la figure 4.17 est proposé. Il est refusé et le contre-exemple $\gamma = \theta_1 t_{q_1}$ est retourné. En effet, il est accepté par A_2 mais ne peut pas être exécuté par F.

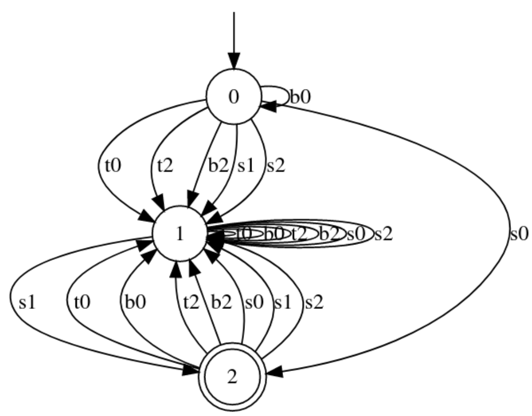


FIGURE 4.17: Automate A_2 lors du second appel à l'oracle d'équivalence

3. L'automate A_3 de la figure 4.18 est proposé. Aucun contre-exemple n'est trouvé contre $L(A) = AL(F)$. Alors, les ensembles $\mathcal{W}$ sont évalués.

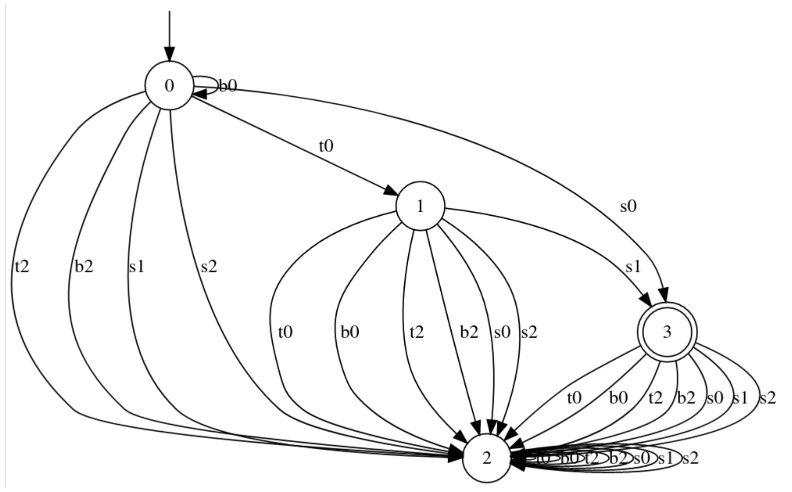


FIGURE 4.18: Automate A_3 lors du troisième appel à l'oracle d'équivalence

D'après A_3, il est possible de suivre le chemin $\gamma = \theta_1 t_{q_1}$. Ce chemin passe par q_1. F est alors déclaré comme à risque pour $\mathcal{W}_1$.
Par contre, aucun chemin valide ne passe par q_2. F est alors déclaré comme sûr pour $\mathcal{W}_2$.

4.6.2 Exécution sans arrêt

Pour cette troisième possibilité, l'algorithme qui ne s'arrête pas, l'automate à files F utilisé est donné à la figure 4.19. Au nom des transitions près, indexées à partir de zéro, il s'agit du même automate à file que celui de la figure 2.16.

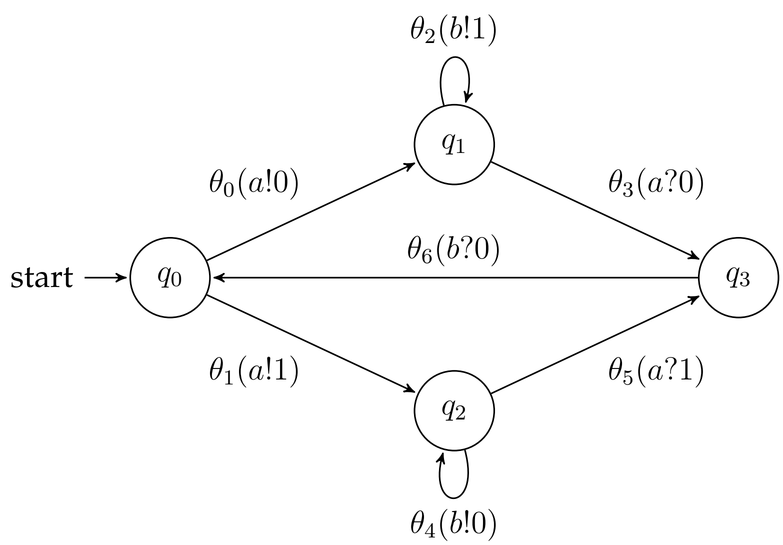


FIGURE 4.19: Automate à files F

Voici le suivi de l'exécution du programme jusqu'à ce qu'un motif récurrent émerge, suggérant que l'exécution ne s'arrête pas.

1. L'automate A_1 acceptant le langage $L = \{t_{q_0}\}$ est proposé (figure 4.16). Celui-ci est refusé et un contre-exemple est fourni : $\gamma = \theta_0 t_{q_1}$. En effet, A_1 n'accepte pas γ alors qu'il existe bien une exécution valide de F pour ce mot. C'est la même situation que dans la sous-section précédente.

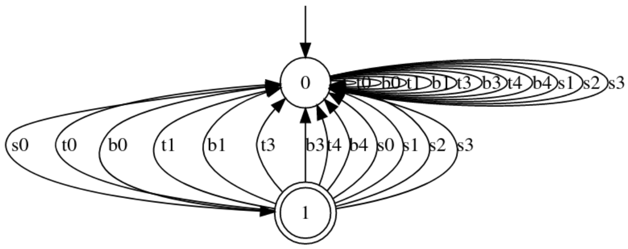


FIGURE 4.20: Automate A_1 lors du première appel à l'oracle d'équivalence

2. L'automate A_2 est proposé et refusé. Le contre-exemple $\gamma = \bar{\theta}_0 t_{q_3}$ est retourné. En effet, le chemin $w = \theta_0.\theta_3$ est valide dans F, mène bien à q_3 et $\mathcal{A}(w) = \gamma$. γ aurait dû être accepté par A_2.
3. L'automate A_3 est proposé et refusé. Le contre-exemple $\gamma = \theta_3 t_{q_3}$ est retourné. γ ne correspond à aucune exécution valide de F, ce mot ne devrait pas accepter par A_3.
4. L'automate A_4 est proposé et refusé. Le contre-exemple $\gamma = \bar{\theta}_1 \theta_3 t_{q_3}$ est retourné, étant accepté par A_4 à tort.
5. L'automate A_5 est proposé et refusé. Le contre-exemple $\gamma = \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_4 \theta_4 t_{q_0}$ est retourné, le mot γ n'étant pas accepté par A_5 alors qu'il devrait l'être.
6. L'automate A_6 de la figure 4.21 est proposé. Il a été simplifié depuis l'automate original par souci de lisibilité.

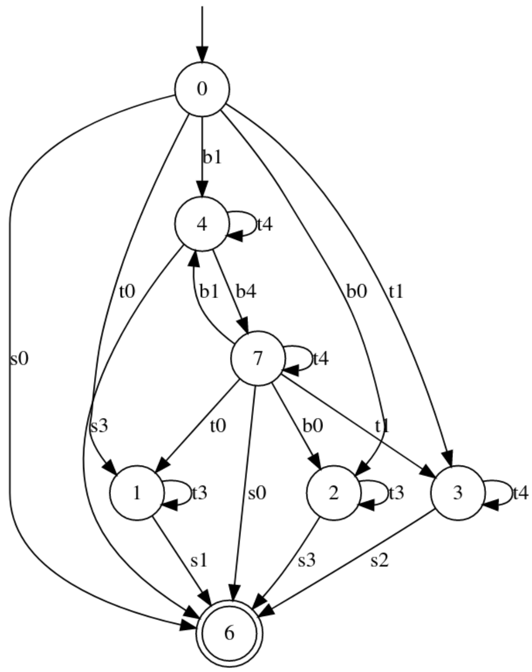


FIGURE 4.21: Automate A_6 lors du sixième appel à l'oracle d'équivalence

On peut déjà y remarquer une transition sur $\bar{\theta}_4$ entre les états 4 et 7. Cependant, ce n'est pas suffisant. Un contre-exemple $\gamma = \bar{\theta}_1\bar{\theta}_4\bar{\theta}_4\bar{\theta}_0 t_{q_0}$ est fourni. Le mot γ n'est pas accepté par A_6 alors qu'il devrait l'être. Auquel cas, une exécution valide dans F est : $w = \theta_1\theta_4\theta_4\theta_5\theta_6\theta_0\theta_3\theta_6$. w est bien une exécution valide dans F menant à q_0. De plus, $\mathcal{A}(w) = \gamma$.

7. L'automate A_7 de la figure 4.22 est proposé. Il est également simplifié pour plus de lisibilité. Néanmoins, il reste plus complexe que A_6. En particulier, on peut noter l'apparition des états 8 et 9, servant à compter une utilisation de θ_4 supplémentaire. Un contre-exemple $\gamma = \bar{\theta}_1\bar{\theta}_4\bar{\theta}_4\bar{\theta}_4\bar{\theta}_0\bar{\theta}_0 t_{q_0}$ est fourni. Il est semblable au contre-exemple précédent. En réalité, il contient une utilisation de θ_4 en plus.

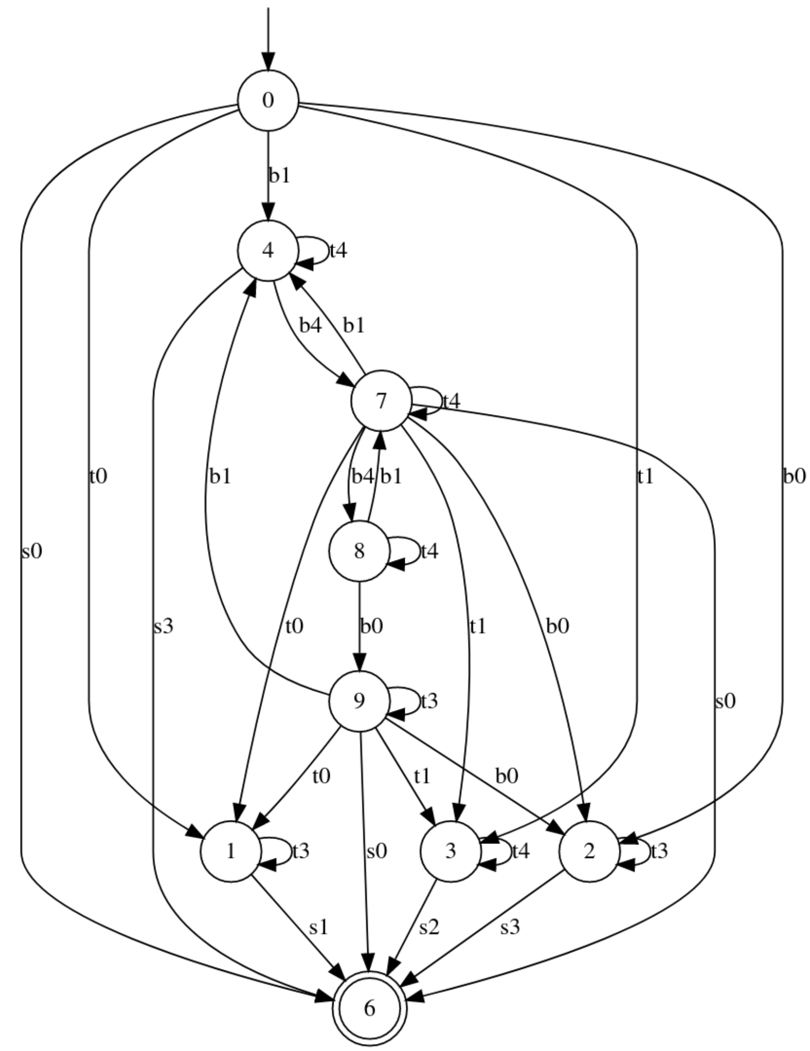


FIGURE 4.22: Automate A_7 lors du septième appel à l'oracle d'équivalence

À partir de là, l'automate se complexifie d'itération en itération, cherchant en vain à trouver un langage régulier permettant de garder le compte du nombre de transitions θ_4 suivies. C'est un comportement cohérent au vu de l'automate F. Cet automate simple fait partie de la classe des automates à files pour lesquels la méthode LeVer est insuffisante.

Chapitre 5

Conclusion

Au cours des différents chapitres, la sûreté d'un automate à files a été définie et les algorithmes permettant de l'évaluer par apprentissage actif ont été développés.

Pour arriver à ce résultat, de nombreuses notions ont été rencontrées. Le chapitre 2 a introduit les notions de langage (dont les langages réguliers liés aux expressions régulières) ainsi que les automates finis les représentant. Des algorithmes permettant de construire un automate déterministe à partir d'un automate non-déterministe, et d'en minimiser un ont été détaillés. La complexité y a été analysée, soulignant qu'ils sont utilisables en pratique. Ensuite, la section 2.5 a défini l'algorithme d'Angluin ainsi que les éléments necéssaires à son fonctionnement. C'est cet algorithme qui est utilisé pour l'apprentissage actif d'automate. La dernière notion introduite dans ce chapitre est l'automate à files, plus puissant que l'automate fini, mais plus complexe.

C'est pourquoi le chapitre 3 s'est intéressé à la méthode LeVer [6], permettant d'étudier la sûreté d'automates à files avec l'algorithme d'Angluin. Pour ce faire, les concepts de trace, trace annotée, fonction d'annotation et de région à risque ont été introduits.

Cependant, malgré le fait que la méthode soit complète, l'implémentation demande plus de précision sur des opérations servant de base à LeVer. En java avec les librairies Automatalib et Learnlib, comme expliqué dans le chapitre 4, la méthode a été implémentée. 4 détaille également les algorithmes qui ont dû être développés pour traduire des opérations abstraites sur les langages en opérations concrètes sur des automates. Ce chapitre se fini sur quelques expérimentations pour ce convaincre du bon fonctionnement de l'implémentation, en plus des tests unitaires.

La sûreté d'automates à files pouvant être apprise automatiquement, toute une classe de problèmes peut être étudiée formellement. C'est principalement le cas de machines communiquant en réseau.

Malgré l'attention portée à la complexité algorithmique, il est très certainement possible d'optimiser l'implémentation afin d'accélérer l'apprentissage. En fonction de la complexité de l'automate à files étudié, cela peut devenir necéssaire. De plus, la sûreté n'est implémentée que de façon minimale. Une extension à la définition complète de $\mathcal{W}(L)$, donné à la fin de la section 3.5, serait une continuation logique de l'implémentation.

Bibliographie

[1] D. ANGLUIN, *Learning regular sets from queries and counterexamples*, Information and Computation, 75 (1987), pp. 87 – 106.

[2] J. E. HOPCROFT, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (2nd Edition)*, Addison Wesley, nov 2000.

[3] J. E. HOPCROFT AND J. D. ULLMAN, *Introduction to automata theory, languages and computation. adison-wesley*, Reading, Mass, (1979).

[4] D. C. KOZEN, *Automata and computability*, Springer Science & Business Media, 1997.

[5] D. NEIDER, *Applications of automata learning in verification and synthesis*, PhD thesis, Hochschulbibliothek der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 2014.

[6] A. VARDHAN, K. SEN, M. VISWANATHAN, AND G. AGHA, *Actively learning to verify safety for fifo automata*, in International Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, Springer, 2004, pp. 494–505.

Annexe A

Théorème de Knaster-Tarski

Théorème A.0.1 *Soit une fonction monotone F portant sur des ensembles et P l'ensemble de points préfixes de F. Alors $\mu = \bigcap_{p \in P} p$ est le point fixe minimal de F.*

Il s'agit en réalité d'une reformulation adaptée aux ensembles et outils utilisés.

Preuve A.0.1.1
Soit une fonction monotone F portant sur des ensembles et P l'ensemble de points préfixes de F.

Posons $\mu = \bigcap_{p \in P} p$.

Par définition, $\forall p \in P, \mu \subseteq p$. Comme la fonction F est monotone, elle peut être appliquée aux deux ensembles : $\forall p \in P, F(\mu) \subseteq F(p)$.

Comme $F(p) \subseteq p$ par définition, on obtient par transitivité de l'inclusion que $\forall p \in P, F(\mu) \subseteq p$. Si $F(\mu)$ est inclus à tout ensemble p, c'est qu'aucun élément de $F(\mu)$ ne fait pas partie d'un p en particulier : cela revient à la définition de l'intersection. Donc, $F(\mu) \subseteq \bigcap_{p \in P} = \mu$. Cela prouve que μ est un point préfixe ($F(\mu) \subseteq \mu$). Comme F est monotone, $F(F(\mu)) \subseteq F(\mu)$ et $F(\mu)$ est également un point préfixe.

Or, comme $\mu \subseteq p$ est vrai pour tout p et en particulier pour $p = F(\mu)$ puisque $F(\mu)$ est un point préfixe et appartient alors à P, on obtient $\mu \subseteq (F(\mu))$. Dès lors, $\mu = F(\mu)$; μ est le point fixe minimal (la minimalité venant du fait que μ est déjà un point préfixe minimal).

□

Annexe B

Modifications à Learnlib et Automatalib

Cette annexe est une liste exhaustive des modifications apportées aux librairies Automatalib et Learnlib pour leur permettre de supporter l'apprentissage automatique de la sécurité d'automates à files.

B.1 Ajouts et modifications à Automatalib

Automatalib est, comme son nom l'indique, la librairie responsable de toutes les opérations sur les automates.

Voici une liste exhaustive des ajouts et modifications apportés :

— Une énumeration Action a été développée, listant les types d'action ($?, !, \tau$)

— Une classe Theta a été créée. Celle-ci permet d'abstraire une transition $(p, action, q)$ en un nom de transition θ

— Une nouvelle méthode dans Alphabets, permettant de calculer l'ensemble Θ en fonction des canaux et symboles utilisés.

— Une classe PhiChar, symbolisant les symboles $\phi \in \Phi$

— Une interface MutableFIFOA, définissant le contrat d'un automate à files. Il doit entre autre permettre d'obtenir son alphabet d'annotation Φ.

— Une interface FIFOA, continuant le contrat à la validation de trace annotée ; vérifiant au passage si elles sont correctement annotées.

— Une nouvelle méthode permettant d'insérer un symbole dans un mot Word à une place arbitraire, utile pour tester différentes permutations.

— Des méthodes permettant d'obtenir les transitions entrantes pour un symbole donné, dans CompactDFA et CompactNFA. Ces méthodes sont utilisées lors du calcul de $\mathcal{F}(L)$

— Une classe CompactFIFOA, remplissant les deux contrats FIFOA et MutableFIFOA. De plus, elle offre une méthode utilitaire permettant de retrouver l'ensemble de θ_s associés à une action $c!m$ précise. Cette classe hérite de CompactDFA, représentant l'automate à file comme un ADF dont les symbole de transition sont des θ.

— Des nouvelles méthodes dans AbstractCompact et AbstractCompactSimpleDeterministic simplifiant la manipulation bas niveau requise par les différents algorithmes.

— Une classe FIFOBuilder récupérant le système d'annotation et de syntaxe de la librairie

pour générer les classes offrant une syntaxe simple pour la création d'un automate à files. Voici l'expression régulière définissant les opérations acceptées pour construire un automate à files *(from (((on (write | read)) | pass) (loop | to))+)* withInitial create*
- Une classe FIFOAs offrant les principaux algorithmes détaillés dans le chapitre 4. On y trouve :
  - applyFL pour $\mathcal{F}(L)$.
  - sigmaStarTP créant un automate représentant $L = \Sigma^* t_p$.
  - sigmaStarThetaSSigmaStarTP créant un automate représentant $L = \Sigma^* \Theta_s \Sigma^* t_p$.
  - aPlusAPrime gérant le cas où l'action est de la forme $c?m$ lors du calcul de $\mathcal{F}(L)$.
  - reverseFL implémentant l'algorithme du même nom.
  - reversehcj implémentant la verison de $\mathcal{W}(L)$ limitée au test du passage par une liste d'états de contrôle.
- Une méthode dans DFAs pour fusionner de nombreux ADF. C'est utile pour calculer $\bigcup_{\theta \in \Theta} A_\theta$.
- Une méthode dans NFAs pour convertir un ADF en ANF équivalent.

B.2 Ajouts et modifications à Learnlib

De façon similaire, Learnlib contient entre autres la logique liée à l'apprentissage actif.
Voici une liste exhaustive des modifications et ajouts proposés pour Learnlib.
- Une exception SafeException permettant d'interrompre l'apprentissage (algorithme d'Angluin) s'il est possible de déclarer l'automate à files comme étant sûr.
- Une exception UnsafeException remplissant le même rôle dans le cas où l'automate à files est déclaré comme étant à risque.
- Une classe FIFOTraceSimulatorOracle permettant de répondre à l'oracle d'appartenance en simulant l'exécution d'une trace annotée dans l'automate à files.
- Une interface FIFOAEquivalenceOracle décrivant le contrat d'un oracle d'équivalence pour un automate à files. En pratique, c'est le même contrat que pour un automate fini, mais le typage oblige à créer une interface supplémentaire.
- Une classe ALFEQOracle implémentant le contrat précédant. Pour ce faire, différentes méthodes internes sont ajoutées, cherchant un contre-exemple à $L = AL(F)$, proposant un mot dans $\mathcal{W}(L)$ et vérifiant si celui-ci est valide. En pratique, cette classe utilise principalement la logique offerte par FIFOAs dans la librairie Automatalib.
- Une classe LeverExperiment faisant le lien entre les différentes classes implémentées et le moteur logique de Learnlib pour l'algorithme L^*.

B.3 Projet de démonstration

En plus des librairies Automatalib et Learnlib, un projet de démonstration est proposé. Celui-ci reprend les exemples cités dans la section 4.6. De plus, il propose une série de tests unitaires.

Voici la liste des ajouts du projet de démonstration :

- Une classe TestFIFOA fournissant un exemple complet de l'apprentissage automatique de la sûreté d'un automate à files. Aide aussi à mettre en évidence le processus par lequel un lecteur peut faire appel aux différents algorithmes pour étudier l'automate à files de son choix.
- Une classe TestAutomatons listant les ADF et automates à files utilisés pour des tests unitaires.
- Une class AlphabetTest composée de tests unitaires de l'utilisation de Φ
- Une classe FIFOATest composée de différents tests unitaires :
  - Des tests sur les traces. Sont-elles correctes ? Sont-elles valides ?
  - Des tests sur les différentes méthodes utilitaires.
- Finalement, une classe FLTest testant les différents segments servant à calculer $\mathcal{F}(L)$:
  - Des tests sur les automates pour $L = Sigma^*.t_p$.
  - Des tests sur les automates pour $L = \Sigma^*.\Theta_s.\Sigma^*.t_p$.
  - Des tests pour aplusAPrime.
  - Des tests pour reverseFL.