1 Workshop 4 - Betingelser

I denne workshop kigger vi på nogle betingelser for at et if-statement eksekveres. Koden, og det if-statement, der gerne skulle være opfyldt, kan ses i den tilhørende kode. Vi forestiller os en person, som leder efter et stort positivt heltal x, der opfylder nogle betingelser. For at beskrive hvilke betingelser det skal opfylde, definerer vi følgende udsagnsfunktioner:

$$\begin{aligned} P(x) &: x \text{ er et primtal} \\ Q(x) &: \gcd(x, 2) = 1 \\ R(x) &: 9^x - 2 \bmod 5 = 2 \end{aligned}$$

Vedkommende leder efter et x som gør følgende udsagn sand:

$$(P(x) \wedge \neg R(x)) \vee \neg(P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \wedge R(x)). \tag{1}$$

Indtil videre er det kun lykkedes vedkommende at finde tallet 2. I dette tilfælde gælder det, at $P(2)$ er sand, da 2 er et primtal, $Q(2)$ er falsk, da $\gcd(2, 2) = 2 \neq 1$ og $R(2)$ er falsk, da $9^2 - 2 \bmod 5 = 79 \bmod 5 = 4$. Derfor får vi, at

$$\begin{aligned} &(P(2) \wedge \neg R(2)) \vee \neg(P(2) \vee \neg Q(2) \vee R(2)) \vee (\neg P(2) \wedge \neg Q(2) \wedge R(2)) \\ \equiv &(\mathbb{T} \wedge \neg\mathbb{F}) \vee \neg(\mathbb{T} \vee \neg\mathbb{F} \vee \mathbb{F}) \vee (\neg\mathbb{T} \wedge \neg\mathbb{F} \wedge \mathbb{F}) \\ \equiv &(\mathbb{T} \wedge \mathbb{T}) \vee \neg(\mathbb{T} \vee \mathbb{T} \vee \mathbb{F}) \vee (\mathbb{F} \wedge \mathbb{T} \wedge \mathbb{F}) \\ \equiv &\mathbb{T} \vee \neg\mathbb{T} \vee \mathbb{F} \\ \equiv &\mathbb{T}. \end{aligned}$$

Problemet er dog, at vedkommende gerne vil have et meget større x. Han håber han kan finde mindst 3 tal $\{x, y, z\}$, hvor $100000 < x, y, z \leq 1000000$ som alle opfylder betingelsen. Vi prøver at arbejde med udtrykket for at finde ud af hvilke x, der overholder betingelsen.

2 Task 1

2.1 Subtask 1

På hvor mange måder kan vi vælge $\{x, y, z\}$, hvor $100000 < x, y, z \leq 1000000$?

Solution We can subtract through the equality and we get the following $0 < x, y, z < 900000$. Now we can do 899999 choose 3 to find the result.

$$\frac{899999!}{3! \cdot 899996!} \tag{2}$$

2.2 Subtask 2

Udfyld i den vedlagte kode funktionerne isPrime, is2mod5 og isGcd1 så de tjekker det ønskede. (Hint til isGcd1: Funktionen behøver ikke udregne gcd, men blot tjekke de mulige divisorer. Hint til is2mod5: Udtænk en måde sådan at I kan regne modulo løbende. Ellers får I alt for store tal til at C kan håndtere det, når I f.eks. udregner 9^x.)

Solution code is in the workshop 4 directory.

2.3 Subtask 3

Prøv for forskellige x-værdier og se om I kan finde et x, der opfylder betingelserne. Er det nemt?

Solution nej.

3 Task 2

3.1 Subtask 1

Omskriv betingelsen i (1) til kanonisk disjunktiv normalform (PDNF).

Solution:

$$(P(x) \wedge \neg R(x)) \vee \neg(P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \wedge R(x)). \quad (3)$$

Start of by making a truth table

P	R	Q	$P \wedge \neg R$	$P \vee \neg Q \vee R$	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	whole thing
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0

We need to have four minterms and combine them to get the corroct the result. The following should do nicely.

$$\begin{aligned} P \wedge R \wedge \neg Q \\ P \wedge \neg R \wedge \neg Q \\ \neg P \wedge R \wedge \neg Q \\ \neg P \wedge \neg R \wedge Q \end{aligned} \quad (4)$$

adding these together we get the desired result.

3.2 Subtask 2

Hvor mange minterms indeholder normalformen og hvad betyder det for den tilhørende sandhedstabel? (Hint: Er det en modstrid og hvad vil det have af betydning for forsøget på at finde x, som opfylder betingelsen?)

Solution

Umiddelbart er vi ikke kommet nærmere hvilke x, der opfylder (1). Vi kan dog vise, at $Q(x)$ og $R(x)$ egentlig er betingelser, der minder meget om hinanden.

4 Task 3

4.1 Subtask 1

Bevis følgende sætning: Lad x være et positivt heltal. At $\gcd(x, 2) = 1$ er ækvivalent med, at x er ulige.

Solution: We assume that $x = 2n$ and that $gcd(x, 2) = 1$. If the previous two are true it means that 2 does not divide x. However, x is even meaning that we can write is $2n$ clearly seing that it is divisible by 2. We now have a contradiction, thus if $gcd(x, 2) = 1$ x has to be odd.

4.2 Subtask 2

Forklar hvorfor, at ovenstående betyder, at $Q(x)$ reelt set er det samme som $R(x)$. Derfor kan vi erstatte $R(x)$ med $Q(x)$ i (1) og opnå, at (1) er ækvivalent med

$$\begin{aligned}
&(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg(P(x) \vee \neg Q(x) \vee Q(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \wedge Q(x)) \\
\equiv&(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg(P(x) \vee \mathbb{T}) \vee (\neg P(x) \wedge \mathbb{F}) \\
\equiv&P(x) \wedge \neg Q(x)
\end{aligned} \tag{5}$$

Solution: This means that if Q(x) is true x is odd on if Q(x) is false x is even. If we say that $9^2 = n$ we get that $nmod5 = 4$ for Q(x) be true. Now i just have to show that $9^x = 5m + 4$ when x is odd and that it doesn't when it's even. I start with the base cases of $x = 1$ and $x = 2$.

$$\begin{gathered}
9 = 5 + 4 = 5 \cdot m + 4 \\
9^2 = 81 = 16 \cdot 5 + 1 = 5 \cdot m + 1
\end{gathered} \tag{6}$$

Now for the subsequent cases we show that result does not change when we add 2 to the value of x.

$$\begin{gathered}
9^{x+2} \\
9^x \cdot 9^2
\end{gathered} \tag{7}$$

Now we have that 9^x x can either be odd or even if odd we assume that we get $5m + 4$ and if even we assume $5m + 1$ we know that $9^2 = 5m + 1$ so let's see if the results change.

$$\begin{gathered}(5m+4)\cdot(5m+1)\\(5m)^2+5m+5\cdot 4m+4\\5\cdot(5m^2+m+4m)+4\end{gathered}\tag{8}$$

$$\begin{gathered}(5m+1)\cdot(5m+1)\\(5m)^2+5m+5m+1\\5\cdot(5m^2+2m)+1\end{gathered}\tag{9}$$

This are the desired results thus Q(x) have been shown to be equivelant to R(x)

4.3 Subtask 3

Forklar om (5) **er på CNF, DNF, PCNF og PDNF.**

Solution: PCNF and PDNF are made up of max or min terms (might be the other way around). Both of these terms have to include the statements or their negation exactly once. Since there is no $R(x)$ this can't be PCNF or PDNF. It has to be CNF since both $P(x)$ and $\neg Q(x)$ are elementary disjunctive statements, and CNF is a statement made of conjections of elementary disjunctive statements.

Vi har altså fundet frem til, at betingelsen er det samme som, at x skal være et primtal og $\gcd(x, 2) \neq 1$.

5 Task 4

5.1 Subtask 1

Bevis, med et modstridsbevis, at for alle heltal $x > 2$ er $(P(x) \wedge \neg Q(x))$ falsk. Altså bevis følgende: Lad $x > 2$ være et heltal. Da kan x ikke både være et primtal og have $\gcd(x, 2) > 1$.

Solution: $gcd(x, 2)$ can either be 1 or 2. Let's assume that x is prime and that $gcd(x, 2) > 1$. That means that $gcd(x, 2) = 2$ and that in turn means that 2 divides x evenly. This however, goes against the defintion of primes, which states that for a number to be prime it can not be written as a product of two smaller natural numbers.