Disjunktive og konjunktive normalformer

Vi har tidligere i kurset set logiske udsagn, såsom $p \to q$, $(\neg p \vee q) \wedge r$ og $p \vee ((p \leftrightarrow r) \wedge q)$, der er dannet af $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\to$ og $\leftrightarrow$. Der har ikke nødvendigvis været nogen systematik i, hvordan vi har opskrevet et udsagn. I denne note gennemgås nogle standardiserede måder at repræsentere logiske udsagn; såkaldte normalformer. Husk på, at vi kalder $\wedge$ for en konjunktion og $\vee$ for en disjunktion.

Hvis en konjunktion kun indeholder variable eller deres negationer, siges den at være *elementær*. Det vil sige, at $p \wedge q$, $\neg q \wedge r \wedge \neg s \wedge t$ og $\neg r \wedge r$ er eksempler på elementære konjunktioner, mens $(q \to p) \wedge s$ ikke er det. Vi bemærker, at hvis en sådan elementær konjunktion indeholder både en variabel og dens negation, så må udsagnet være en modstrid. Altså, hvis konjunktionen har formen $p \wedge \neg p \wedge \cdots$, så kan dette reduceres til $\mathbb{F} \wedge \cdots$, som er falsk. Man kan overbevise sig om, at en elementær konjunktion kun kan være en modstrid, hvis dette sker.

På samme måde kaldes en disjunktion elementær, hvis den kun indeholder variable eller deres negationer. Udsagnene $p \vee q$ og $p \vee \neg q \vee s$ er således elementære disjunktioner. I modsætning til tidligere ser vi her, at hvis disjunktionen indeholder en variabel og dens negation, så er udsagnet en tautologi. Vi kan nemlig omskrive $p \vee \neg p \vee \cdots$ til $\mathbb{T} \vee \cdots$, som er sandt.

Disjunktiv normalform

I den første normalform vil vi udnytte de elementære konjunktioner, og sætte disse sammen ved hjælp af disjunktioner.

Definition 1 (Disjunktiv normalform):
Et udsagn siges at være på disjunktiv normalform (DNF), hvis det består af disjunktioner af elementære konjunktioner.

Eksempler på disjunktive normalformer kan således være $(p \wedge q) \vee \neg p \vee (p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)$ og $(q \wedge r) \vee (p \wedge \neg p)$. I det sidste udsagn, bemærker vi, at $(p \wedge \neg p)$ er en modstrid, så denne kan fjernes, hvorved udsagnet reduceres til $q \wedge r$.

Vi kan omdanne ethvert udsagn til disjunktiv normalform ved at omskrive $\to$ og $\leftrightarrow$ med $\wedge$, $\vee$ og $\neg$, og derefter bruge De Morgans love og de distributive love.

Eksempel 1:
Vi omskriver $(\neg p \to q) \wedge q$ til disjunktiv normalform.

$$
\begin{aligned}
&(q \vee \neg(\neg p)) \wedge q && \text{(Omskriv } \to\text{)} \\
&(q \vee p) \wedge q && \\
&(q \wedge q) \vee (p \wedge q) && \text{(Distributiv lov)}
\end{aligned}
$$

Udtrykket kan reduceres yderligere, men det er nu i DNF. ◀

Eksempel 2:
Udsagnet $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow q)$ kan bringes på disjunktiv normalform i følgende trin.

$$
\begin{aligned}
&(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(q \vee \neg p) && \text{(Omskriv } \rightarrow\text{)}\\
&\big[(p \wedge q) \wedge \neg(q \vee \neg p)\big] \vee \big[\neg(p \wedge q) \wedge \neg\neg(q \vee \neg p)\big] && \text{(Omskriv } \leftrightarrow\text{)}\\
&\big[(p \wedge q) \wedge (\neg q \wedge \neg(\neg p))\big] \vee \big[(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p)\big] && \text{(De Morgan } \times 2\text{)}\\
&\Big[(p \wedge q \wedge \neg q \wedge p)\Big] \vee \Big[\big(\neg p \wedge (q \vee \neg p)\big) \vee \big(\neg q \wedge (q \vee \neg p)\big)\Big] && \text{(Distributiv lov)}\\
&\big[(p \wedge q \wedge \neg q \wedge p)\big] \vee \big[(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)\big] && \text{(Distributiv lov } \times 2\text{)}
\end{aligned}
$$

Vi kan nu fjerne de firkantede parenteser, og udsagnet er på disjunktiv normalform. ◄

Det er værd at bemærke, at den disjunktive normalform for et udsagn ikke er entydig. For formelen i Eksempel 2 kan vi for eksempel fjerne de elementære konjunktioner, der udtrykker en modstrid. Gør vi dette, reduceres udsagnet til $(\neg p \wedge q) \vee \neg p \vee (\neg q \wedge \neg p)$, som er en ækvivalent disjunktiv normalform. Et andet eksempel er udsagnet $p \vee (q \wedge r)$. Ved den distributive lov kan dette også skrives som $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Fortsætter vi med at bruge de distributive love, opnås udtrykket $(p \wedge p) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge r)$. Denne DNF er ligeså korrekt som $p \vee (q \wedge r)$.

Konjunktiv normalform

Vi kan også danne en normalform ved at kombinere elementære disjunktioner ved hjælp af konjunktioner.

Definition 2 (Konjunktiv normalform):
Et udsagn siges at være på konjunktiv normalform (CNF), hvis det består af konjunktioner af elementære disjunktioner.

Det vil altså sige, at udsagnene $p \wedge (q \vee \neg s)$, $(\neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee s) \wedge q$ og $(p \vee s) \wedge (q \vee \neg q)$ alle er på konjunktiv normalform. Ligesom for de disjunktive normalformer, kan vi omskrive ethvert udsagn til konjunktiv normalform ved at bruge en lignende fremgangsmåde.

Eksempel 3:
Vi omskriver $(\neg p \rightarrow q) \wedge q$ til konjunktiv normalform.

$$
\begin{aligned}
&(q \vee \neg(\neg p)) \wedge q && \text{(Omskriv } \rightarrow\text{)}\\
&(q \vee p) \wedge q
\end{aligned}
$$

Altså, har vi allerede opnået en CNF. ◄

Eksempel 4:
Udsagnet $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow q)$ omkrives til konjunktiv normalform på følgende vis.

$$
\begin{aligned}
&(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(q \vee \neg p) && \text{(Omskriv } \rightarrow\text{)}\\
&\big[(p \wedge q) \wedge \neg(q \vee \neg p)\big] \vee \big[\neg(p \wedge q) \wedge \neg\neg(q \vee \neg p)\big] && \text{(Omskriv } \leftrightarrow\text{)}\\
&\big[(p \wedge q) \wedge (\neg q \wedge \neg(\neg p))\big] \vee \big[(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p)\big] && \text{(De Morgan } \times 2\text{)}\\
&(p \wedge q \wedge \neg q \wedge p) \vee \big[(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p)\big]
\end{aligned}
$$

Vi kunne nu bruge den distributive lov ad to omgange for at opnå en konjunktiv normalform, men bemærker vi i stedet, at $(p \wedge q \wedge \neg q \wedge p)$ er en modstrid, kan vi i stedet skrive $\mathbb{F} \vee \big[(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p)\big]$, som igen kan reduceres til $(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p)$. Sidstnævnte er på konjunktiv normalform. ◀

Også for de konjunktive normalformer gælder, at de ikke er entydige. Havde vi i stedet brugt den distributive lov i Eksempel 4, havde vi fået udsagnet

$$\begin{aligned}&(p \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg p \vee \neg q)\\ &\qquad \wedge (p \vee q \vee \neg p) \wedge (q \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee \neg p).\end{aligned}$$

Dette er også på konjunktiv normalform, og er ækvivalent med udtrykket fra Eksempel 4.

Kanoniske normalformer

For både DNF og CNF så vi, at normalformerne ikke er entydige. Vi kan delvist rette op på dette ved at ændre kravene til vores normalformer.

For disjunktive normalformer er tricket at udskifte elementære konjunktioner med det, der på engelsk kaldes *minterms*. Et minterm af n variable er en konjunktion, som for hver variabel enten indeholder variablen selv eller dens negation – men ikke begge dele. Det betyder, at alle mintermerne for p og q er

$$p \wedge q \qquad p \wedge \neg q \qquad \neg p \wedge q \qquad \neg p \wedge \neg q,$$

da vi meget naturligt betragter $p \wedge q$ og $q \wedge p$ som det samme. En måde at huske, at et sådant udsagn netop kaldes et minterm er, at der kun er én sandhedstildeling, som gør udsagnet sandt. Udsagnet har dermed minimal opfyldelighed.

Udskifter vi kravet om elementære konjunktioner i DNF-definitionen med mintermer, opnår vi den *kanoniske* DNF (på engelsk *principal* DNF).

Definition 3 (Kanonisk disjunktiv normalform):
Et udsagn siges at være på kanonisk disjunktiv normalform (PDNF), hvis det består af disjunktioner af minterms

Vi kan udlede den kanoniske DNF ud fra et udsagns sandhedstabel, som følgende eksempel illustrerer. I så også dette, hvis I nåede opgave 20 i afsnit 1.3 under en tidligere opgaveregning.

Eksempel 5:
Sandhedstabellen for udsagnet $p \to q$ er givet ved

p	q	$p \to q$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

Betragtes hver af de rækker, hvor udsagnet er sandt, ses det at $p \to q$ er sandt, præcis hvis $p \wedge q$, $\neg p \wedge q$ eller $\neg p \wedge \neg q$ er sand. Dette svarer til udsagnet

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q),$$

som er på kanonisk DNF. ◀

Generelt er det dog ikke særligt effektivt at opskrive en sandhedstabel, da et udsagn med n variable kræver 2^n rækker. Vi kan dog også konstruere en kanonisk DNF uden at lave sandhedstabellen først. Fremgangsmåden er den samme som disjunktive normalformer, men denne gang skal vi fjerne deludsagn, som udtrykker modstrid, og tilføje variable til de elementære konjunktioner, som ikke er mintermer. Udtrykket skal desuden reduceres, så gentagelser undgås.

Eksempel 6:
I Eksempel 1 opnåede vi den disjunktive normalform $(q \wedge q) \vee (p \wedge q)$, som også kan skrives som $q \vee (p \wedge q)$. Denne er ikke på kanonisk DNF, da den elementære konjunktion q ikke indeholder variablen p. Idet $\mathbb{T} \equiv p \vee \neg p$, kan vi dog omskrive til

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{T} \wedge q) \vee (p \wedge q) && \text{(Identitetslov)}\\
&((p \vee \neg p) \wedge q) \vee (p \wedge q) && \\
&((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)) && \text{(Distributiv lov)}\\
&(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) && \text{(Fjern dobbelte udsagn)}
\end{aligned}$$

Udsagnet er nu på kanonisk DNF. ◀

Eksempel 7:
Fjernes modstridsudsagn i resultatet fra Eksempel 2, opnås udsagnet

$$(\neg p \wedge q) \vee \neg p \vee (\neg q \wedge \neg p).$$

Dette kan bringes på kanonisk DNF ved at tilføje $(q \vee \neg q)$ til den midterste konjunktion:

$$\begin{aligned}
&(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (\neg q \wedge \neg p) && \\
&(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg p) && \text{(Distributiv lov)}\\
&(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(Fjern dobbelte udsagn)} \quad ◀
\end{aligned}$$

Udskiftes alle konjunktioner i et minterm med disjunktioner, opnås et *maxterm*. Altså er maxtermerne for p og q

$$p \vee q \qquad p \vee \neg q \qquad \neg p \vee q \qquad \neg p \vee \neg q.$$

Sådanne udsagn har den maksimale opfyldelighed i den forstand, at kun én sandhedstildeling gør udsagnet falsk – for alle andre sandhedstildelinger er det sandt.

Helt i stil med den kanoniske DNF, kan vi definere den kanoniske CNF.

Definition 4 (Kanonisk konjunktiv normalform):
Et udsagn siges at være på kanonisk konjunktiv normalform (PCNF), hvis det består af konjunktioner af maxterms.

Omskrivningen til kanonisk CNF følger samme fremgangsmåde som for kanonisk DNF. Bemærk dog, at vi for PDNF udvider et udsagn med $\mathbb{T} \wedge \cdots$, men i tilfældet for PCNF vil vi udvide med $\mathbb{F} \vee \cdots$, da dette medfører færre omskrivninger.

Eksempel 8:
I Eksempel 3, fandt vi udsagnet $(q \vee p) \wedge q$. Dette kan bringes på kanonisk CNF ved følgende trin.

$(q \vee p) \wedge (q \vee \mathbb{F})$	(Identitetslov)
$(q \vee p) \wedge (q \vee (p \wedge \neg p))$	
$(q \vee p) \wedge (q \vee p) \wedge (q \vee \neg p)$	(Distributiv lov)
$(q \vee p) \wedge (q \vee \neg p)$	(Fjern dobbelte udsagn) ◀

Eksempel 9:
Udtrykket $(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p)$, der blev udledt i Eksempel 4 er allerede på kanonisk CNF. ◀

Binær representation

De kanoniske normalformer viser sig at være entydige, hvis man ser bort fra rækkefølgen af de mintermer eller maxtermer, der indgår. For at argumentere for dette, kan vi se på en binær repræsentation af normalformerne.

Fastlæg en ordning af variablene $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Et minterm m associeres nu med en bitstreng $b_1 b_2 \ldots b_n$ af længde n, hvor $b_i = 1$, hvis p_i indgår i m, og $b_i = 0$, hvis $\neg p_i$ indgår i m. Hvis $b_1 b_2 \cdots b_n$ er den binære repræsentation af tallet k, vil vi betegne mintermet m med m_k. Disse har en klar ordning $m_0, m_1, \ldots, m_{2^n-1}$, og vi ser derfor at den kanoniske DNF er entydigt bestemt op til omrokering af mintermerne, samt ordning af variablene.

Eksempel 10:
Benytter vi for eksempel ordningen $p_1 = p, p_2 = q$ i de tidligere eksempler, består udsagnet $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$ fra Eksempel 6 af mintermerne m_3 og m_1, da $p \wedge q$ svarer til bitstrengen 11, og $\neg p \wedge q$ til 01. Udsagnet kan dermed skrives som $m_1 \vee m_3$. ◀

Da disjunktion traditionelt også kaldtes en sum, noteres disjunktionen af m_1 og m_3 også med $\sum 1, 3$.

Vi kan også associere maxtermer med bitstrenge, men her gør vi det modsat. Det vil sige, at maxtermet M repræsenteres ved bitstrengen $b_1 b_2 \cdots b_n$, hvor $b_i = 1$, hvis $\neg p_i$ er indeholdt i M, og $b_i = 0$, hvis p_i er indeholdt i M. Ligesom før, vil vi betegne M med M_k, hvis bitstrengen $b_1 b_2 \cdots b_n$ er den binære repræsentation af k.

Eksempel 11:
I Eksempel 8 så vi for eksempel den kanoniske CDF $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$ – variablene er her ordnet som $p_1 = p, p_2 = q$ ligesom før. Vi ser her, at udsagnet består af maxtermerne M_0 og M_2, da $p \vee q$ repræsenteres ved 00, og $\neg p \vee q$ ved 10. ◀

I lighed med sprogbrugen 'sum' for disjunktioner, kaldes konjunktioner også for produkter. Derfor ses konjunktionen af M_0 og M_2 også nogle gange som $\prod 0, 2$.

Bemærk her, at vi i både Eksempel 6 og 8 arbejdede med udsagnet $(\neg p \to q) \land q$. Vi har nu set, at dette både kan udtrykkes som $\sum 1, 3$ og $\prod 0, 2$. Da vi har to variable, kan en bitstreng af længde n udtrykke tallene $0, 1, 2, 3$. Altså er de tal, der findes i produktnotationen, præcis de tal, som ikke optræder i sumnotationen. Dette gælder helt generelt, men vi undlader beviset her.

Henvisninger

Rosen, Kenneth H. *Discrete Mathematics and Its Applications*. 7. udg. McGraw-Hill, 2013. Kap. 1.7. ISBN: 978-0-07-131501.

Stolyar, Abram Aronovich. *Introduction to elementary mathematical logic*. Dover Publications, 1983.

Opgaver til opgaveregningen

Lav CNF, DNF, PCNF og PDNF for følgende udtryk (Der kan hentes hjælp i Table 6 afsnit 1.3 i [Ros]):

- $q \land (p \lor \neg q)$
- $(q \to p) \land (\neg p \land q)$
- $p \to (p \land (q \to p))$

Opskriv følgende PCNF som et produkt (altså brug den binære repræsentation) og udled PDNF heraf:

- $(p \lor q \lor \neg r) \land (p \lor \neg q \lor r) \land (p \lor \neg q \lor \neg r)$