Workshop 4 - Betingelser

I denne workshop kigger vi på nogle betingelser for at et if-statement eksekveres. Koden, og det if-statement, der gerne skulle være opfyldt, kan ses i den tilhørende kode. Vi forestiller os en person, som leder efter et stort positivt heltal x, der opfylder nogle betingelser. For at beskrive hvilke betingelser det skal opfylde, definerer vi følgende udsagnsfunktioner:

$$\begin{aligned} P(x) &: x \text{ er et primtal} \\ Q(x) &: \gcd(x, 2) = 1 \\ R(x) &: 9^x - 2 \bmod 5 = 2 \end{aligned}$$

Vedkommende leder efter et x som gør følgende udsagn sand:

$$(P(x) \wedge \neg R(x)) \vee \neg(P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \wedge R(x)). \tag{1}$$

Indtil videre er det kun lykkedes vedkommende at finde tallet 2. I dette tilfælde gælder det, at $P(2)$ er sand, da 2 er et primtal, $Q(2)$ er falsk, da $\gcd(2, 2) = 2 \neq 1$ og $R(2)$ er falsk, da $9^2 - 2 \bmod 5 = 79 \bmod 5 = 4$. Derfor får vi, at

$$\begin{aligned} &(P(2) \wedge \neg R(2)) \vee \neg(P(2) \vee \neg Q(2) \vee R(2)) \vee (\neg P(2) \wedge \neg Q(2) \wedge R(2)) \\ \equiv&(\mathbb{T} \wedge \neg\mathbb{F}) \vee \neg(\mathbb{T} \vee \neg\mathbb{F} \vee \mathbb{F}) \vee (\neg\mathbb{T} \wedge \neg\mathbb{F} \wedge \mathbb{F}) \\ \equiv&(\mathbb{T} \wedge \mathbb{T}) \vee \neg(\mathbb{T} \vee \mathbb{T} \vee \mathbb{F}) \vee (\mathbb{F} \wedge \mathbb{T} \wedge \mathbb{F}) \\ \equiv&\mathbb{T} \vee \neg\mathbb{T} \vee \mathbb{F} \\ \equiv&\mathbb{T}. \end{aligned}$$

Problemet er dog, at vedkommende gerne vil have et meget større x. Han håber han kan finde mindst 3 tal $\{x, y, z\}$, hvor $100000 < x, y, z \leq 1000000$ som alle opfylder betingelsen.

Delopgave 1

1. På hvor mange måder kan vi vælge $\{x, y, z\}$, hvor $100000 < x, y, z \leq 1000000$?

2. Udfyld i den vedlagte kode funktionerne isPrime, is2mod5 og isGcd1 så de tjekker det ønskede. (Hint til isGcd1: Funktionen behøver ikke udregne gcd, men blot tjekke de mulige divisorer. Hint til is2mod5: Udtænk en måde sådan at I kan regne modulo løbende. Ellers får I alt for store tal til at C kan håndtere det, når I f.eks. udregner 9^x.)

3. Prøv for forskellige x-værdier og se om I kan finde et x, der opfylder betingelserne. Er det nemt?

Vi prøver at arbejde med udtrykket for at finde ud af hvilke x, der overholder betingelsen.

Delopgave 2

1. Omskriv betingelsen i (1) til kanonisk disjunktiv normalform (PDNF).
2. Hvor mange minterms indeholder normalformen og hvad betyder det for den tilhørende sandhedstabel? (Hint: Er det en modstrid og hvad vil det have af betydning for forsøget på at finde x, som opfylder betingelsen?)

Umiddelbart er vi ikke kommet nærmere hvilke x, der opfylder (1). Vi kan dog vise, at $Q(x)$ og $R(x)$ egentlig er betingelser, der minder meget om hinanden.

Delopgave 3

1. Bevis følgende sætning: Lad x være et positivt heltal. At $\gcd(x, 2) = 1$ er ækvivalent med, at x er ulige.
2. Bevis følgende sætning: Lad x være et positivt heltal. At $9^x - 2 \bmod 5 = 2$ er ækvivalent med, at x er ulige.
3. Forklar hvorfor, at ovenstående betyder, at $Q(x)$ reelt set er det samme som $R(x)$. Derfor kan vi erstatte $R(x)$ med $Q(x)$ i (1) og opnå, at (1) er ækvivalent med

$$\begin{aligned}
&(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg(P(x) \vee \neg Q(x) \vee Q(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \wedge Q(x)) \\
\equiv&(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg(P(x) \vee \mathbb{T}) \vee (\neg P(x) \wedge \mathbb{F}) \\
\equiv&P(x) \wedge \neg Q(x) \qquad (2)
\end{aligned}$$

4. Forklar om (2) er på CNF, DNF, PCNF og PDNF.

Vi har altså fundet frem til, at betingelsen er det samme som, at x skal være et primtal og $\gcd(x, 2) \neq 1$.

Delopgave 4

1. Bevis, med et modstridsbevis, at for alle heltal $x > 2$ er $(P(x) \wedge \neg Q(x))$ falsk. Altså bevis følgende: Lad $x > 2$ være et heltal. Da kan x ikke både være et primtal og have $\gcd(x, 2) > 1$.