Egenværdier og egenvektorer
Afsnit 5.1 og 5.8

20. februar 2021

SLIAL

Forår 2021

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Diagonalmatricer og kanonisk basis

Vektorerne $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ kaldes de kanoniske basisvektorer

Giver særligt pæne produkter med diagonalmatricer:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $e_1 = 2e_1$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$= -1 e_2$

En anden matrix

Lad $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$ og definer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Da har vi

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ -6\cdot 1 + 5\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\cdot v_1$$

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+3 \\ -6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)\cdot v_2$$

A opfører sig altså som en diagonalmatrix, men med 'forkert' basis

Egenvektorer

Definition

For en $n \times n$-matrix A kaldes $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en *egenvektor* for A, hvis

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

for et reelt tal λ. Tallet λ kaldes *egenværdien* hørende til $\mathbf{v}$.

Bemærk: Egenværdien kan være nul, men egenvektoren må ikke være nulvektoren

Egenvektorer

Eksempel

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$. Hvad er den tilhørende egenværdi?

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 2 + 4(-1) \\ -3 \cdot 2 + (-1)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14-4 \\ -6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$= 5 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 5$

Eksempel

Er $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ en egenvektor for $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$?

$$B \cdot v = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 3 \\ 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

nei!

Metode til at finde egenvektorer

Antag, at λ er en kendt egenværdi. Hvordan finder vi de tilhørende egenvektorer?

Fra definitionen skal en egenvektor **v** opfylde...

$$A \cdot v = \lambda v$$
$$= \lambda I v$$

Vi skal altså finde løsninger til systemet...

$$Av - \lambda I v$$
$$= \boxed{(A - \lambda I) v = 0,}$$
$$v \neq 0$$

Metode til at finde egenvektorer

Eksempel

$\lambda = 10$ er en egenværdi for $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$.

Hvad er de tilhørende egenvektorer?

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)v = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -6v_1 - 2v_2 = 0 \\ -3v_1 - 1v_2 = 0 \end{cases} \iff -3v_1 - v_2 = 0$$

$$v_2 = -3v_1$$

F.eks, $v_1 = 1$, $v_2 = -3$ $\Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

Betingelser for egenværdier:

Vi husker, at egenvektorerne og -værdierne opfylder $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Hvad sker der, hvis $A - \lambda I$ er inverterbar? Da er $\mathbf{v} =$ $(A - \lambda I)^{-1} \cdot 0 = 0$

Vi må derfor kræve, at $A - \lambda I \ldots$ er ikke inverterbar!

Triangulære (og diagonale) matricer

Eksempel

Egenværdierne for $A = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{2} & \pi \\ 0 & 1 & 99 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ findes let da...

$\lambda = 4$ eller $\lambda = 1$ eller $\lambda = -2$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} \underline{4-\lambda} & \sqrt{2} & \pi \\ 0 & \underline{1-\lambda} & 99 \\ 0 & 0 & \underline{-2-\lambda} \end{bmatrix}$$

← frie variabler!

$(A - \lambda I)v = 0$ har ikke-trivielle løsninger?

Har vi altid (reelle) egenværdier?

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb$

Eksempel

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Husk at $A - \lambda I$ er inverterbar $\iff$ $\det(A - \lambda I) \neq 0$.

$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$= (1-\lambda)(1-\lambda) - (-1)\cdot 1 = \underbrace{(1-\lambda)^2}_{\geq 0} + 1 \neq 0 \quad {>0} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Egenværdier og rækkeoperationer

Bemærk, at vi *ikke* kan bruge rækkeoperationer til at bestemme egenværdier

Altså, hvis A rækkereducerer til R, giver egenværdierne for R generelt ikke nogen information om egenværdierne for A

Men vi kan selvfølgelig bruge rækkeoperationer til at bestemme *egenvektorer* som løser $(A - \lambda I)v = 0$

Beregning af egenværdier:

- For matriser større end 5×5 *skal* der bruges iterative numeriske algoritmer
- Hvis vi kender en *egenvektor*, kan tilsvarende *egenværdi* bestemmes fra

$$\boxed{Av = \lambda v}$$

$v \neq 0$
$\lambda \in \mathbb{R}$

Eks: beregning af egenværdier/vektorer

Har sett at $\lambda = 10$ er (den største) egenværdi for $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

med tilsvarende egenvektor $v \approx \begin{bmatrix} -0.32 \\ 0.95 \end{bmatrix}$

Begynder med en tilfeldig vektor $x_0 \in \mathbb{R}^2$ og beregner $x_{k+1} = Ax_k$:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 48 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} -112 \\ 444 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} -1336 \\ 4332 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_0}{\|x_0\|} \approx \begin{bmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{bmatrix} \quad \frac{x_1}{\|x_1\|} \approx \begin{bmatrix} 0.32 \\ 0.95 \end{bmatrix} \quad \frac{x_2}{\|x_2\|} = \begin{bmatrix} -0.08 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \frac{x_3}{\|x_3\|} = \begin{bmatrix} -0.24 \\ 0.97 \end{bmatrix} \quad \frac{x_4}{\|x_4\|} = \begin{bmatrix} -0.29 \\ 0.96 \end{bmatrix}$$

Eks: beregning af egenværdier/vektorer

Har sett at $\lambda = 10$ er (den største) egenværdi for $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

med tilsvarende egenvektor $v \approx \begin{bmatrix} -0.32 \\ 0.95 \end{bmatrix}$

Begynder med en tilfeldig vektor $x_0 \in \mathbb{R}^2$ og beregner $x_{k+1} = Ax_k$:

$$x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} -48 \\ 126 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} -444 \\ 1278 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} -4332 \\ 12834 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_0}{\|x_0\|} \approx \begin{bmatrix} -0.71 \\ 0.71 \end{bmatrix} \quad \frac{x_1}{\|x_1\|} \approx \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0.89 \end{bmatrix} \quad \frac{x_2}{\|x_2\|} = \begin{bmatrix} -0.36 \\ 0.93 \end{bmatrix} \quad \frac{x_3}{\|x_3\|} = \begin{bmatrix} -0.33 \\ 0.94 \end{bmatrix} \quad \frac{x_4}{\|x_4\|} = \begin{bmatrix} -0.32 \\ 0.94 \end{bmatrix}$$

Power iteration:

Tilfældig $x_0 \in \mathbb{R}^n$
for $k = 0, 1, \ldots$ **do**
$y_k = Ax_k$ ←
$\mu_k = \|y_k\|$ ← bud på egenværdi!
$x_{k+1} = \mu_k^{-1} y_k$
end for

Stop når $\underline{\mu_k \approx \mu_{k+1} \approx \mu_{k+2} \approx \ldots}$

Forventer $\mu_k \to$ største egenværdi

$x_k \approx$ egenvektor

Beregning af egenværdier:

For matriser større end 5×5 *skal* der bruges iterative numeriske algoritmer.

Antagelser:

- A af størrelse $n \times n$
- $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ er egenvektorer til A med tilsvarende egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$:
$$Av_i = \lambda_i v_i \quad , i = 1 \dots n$$
- λ_1 er *den største* egenværdi:
$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$
- Egenvektorer $v_1, \dots, v_n$ er lineært uafhengige

Hvorfor fungerer power iteration?

Da $v_1, \ldots, v_n$ er lineært uafhengige, har ligningen

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

entydig løsning for alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$
kun triviel løsning
$c_1 = c_2 = \ldots c_n = 0$

Dessuden: for næsten alle tilfeldige x_0 er $c_1 \neq 0$

Hvorfor fungerer power iteration?

$$Ax_0 = A(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = c_1\underbrace{Av_1}_{=\lambda_1v_1} + \dots + c_n\underbrace{Av_n}_{=\lambda_nv_n}$$

$$
\begin{aligned}
\to \quad x_0 &= c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n\\
\to \quad Ax_0 &= c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + \cdots + c_n\lambda_nv_n\\
\to \quad A^2x_0 &= c_1\lambda_1^2v_1 + c_2\lambda_2^2v_2 + \cdots + c_n\lambda_n^2v_n\\
&\vdots\\
\to \quad A^kx_0 &= c_1\lambda_1^kv_1 + c_2\lambda_2^kv_2 + \cdots + c_n\lambda_n^kv_n
\end{aligned}
$$

Konklusionen:

$$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$$

$$\lambda_1^{-k}A^kx_0 = c_1v_1 + c_2\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k}v_2 + \cdots + c_n\frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k}v_n$$

$\to 0 \qquad \to 0$

$$\to c_1v_1$$

små $\to 0$, fordi: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_n|$

da $\lambda_i^k/\lambda_1^k \to 0$

Hvorfor fungerer power iteration?

$\boxed{\text{Hvis } x_k \to \text{egenvektor så } \mu_k = \|Ax_k\| / \|x_k\| \to \text{egenværdi}}$

$Ax_k \approx \mu_k x_k$

Hvad med andre egenværdier?

Se f.eks. "The inverse power method" i lærebogen

Tilfældig $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ - finner egenværdi som tættest på α

for $k = 0, 1, \ldots$ **do**

$\rightarrow$ Løs systemet $(A - \alpha I)y_k = x_k$

$\rightarrow$ $\mu_k = \|y_k\|$

$\rightarrow$ $\nu_k = \alpha + \mu_k^{-1}$ - bud på egenvektor

$\rightarrow$ $x_{k+1} = \mu_k^{-1} y_k$

end for

$\rightarrow [A - \alpha I]^{-1}$

- største egenværdi

$\nu_k \rightarrow$ egenværdi tættest på α