# Introduktion til Sandsynlighedsteori, Afsnit 7.1 og dele af 7.2 [Ros]

3. marts 2021

Sandsynlighedsteori og lineær algebra (SLIAL)

Forår 2021

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

# Del I

# Opfølgning Workshop

# Workshop 1 - Question 1

$T(O) = B$, hvor

$$\boxed{B_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \rho(d_{ijkl}) O_{k,l}}$$

$$e_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Lineær: $T(aO + bO') = aT(O) + bT(O')$

$a\,\_ + b\,O'_{\ldots}$

$$T(aO + bO')_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \rho(d_{ijkl})(aO_{k,l} + bO'_{k,l}) \stackrel{?}{=} aT(O)_{ij} + bT(O')_{ij}$$

Standard matrix $A = [T(\mathbf{e}_{1,1})\ T(\mathbf{e}_{1,2}) \cdots T(\mathbf{e}_{1,M})\ T(\mathbf{e}_{2,1})) \cdots T(\mathbf{e}_{N,M})]$

$k = 1 \quad l = 1$

$$T(\mathbf{e}_{1,1})_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \rho(d_{ijkl})(\mathbf{e}_{1,1})_{k,l} = \rho(d_{ij11})$$

$$\begin{bmatrix} \rho(d_{1111}) \\ \rho(d_{1211}) \cdots \\ \vdots \\ \rho(d_{NM11}) \end{bmatrix}$$

# Workshop 1 - Question 2 og 3.1



**Question 2:**
Diagonalen på $A$ bliver $\rho(d_{ijij}) = \rho(0)$ <– tjek dette. Vi har at diagonalelementerne i en diagonal dominant matrix opfylder $|A_{ii}| > \sum_{j\neq i} |A_{ij}| \geq 0$. Altså, at $|\rho(d_{ijij})| = |\rho(0)| > 0$.

**Question 3.1:**
$x_i^{(k+1)} = A_{ii}^{-1}(b_i - \sum_{j\neq i} A_{ij}x_j^{(k)})$. Vis at hvis $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)}$, så er $A\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b}$.

$$A_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j\neq i} A_{ij}x_j^{(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j^{(k+1)} = (A\mathbf{x}^{(k+1)})_i$$

$Ax^{(k+1)} = b$

# Del II

# Introducerende eksempel

# Sandsynlighedsregning og egenvektorer

## Xkøbing - modeleres som en Markov kæde



### Eksempel

- *Xkøbing er en by, der består af en midtby og en forstad. I alt med* 100 000 *indbyggere.*
- *Hvert år flytter* 5% *af indbyggerne i forstaden til midtbyen og* 3% *af indbyggerne i midtbyen flytter til forstaden.*
- *Efter $t$ år bor der $x_f^{(t)}$ indbyggere i forstaden og $x_m^{(t)}$ i midtbyen.*

# Sandsynlighedsregning og egenvektorer

## Xkøbing - modeleres som en Markov kæde



### Eksempel

- *Xkøbing er en by, der består af en midtby og en forstad. I alt med* 100 000 *indbyggere.*
- *Hvert år flytter* 5% *af indbyggerne i forstaden til midtbyen og* 3% *af indbyggerne i midtbyen flytter til forstaden.*
- *Efter t år bor der* $x_f^{(t)}$ *indbyggere i forstaden og* $x_m^{(t)}$ *i midtbyen.*

*Hvordan er fordelingen af indbyggere efter 5 år? Hvordan er den efter 10 år? Hvad med 100 år?*

# Sandsynlighedsregning og egenvektorer

Xkøbing - modeleres som en Markov kæde



## Eksempel

- *Xkøbing er en by, der består af en midtby og en forstad. I alt med* 100 000 *indbyggere.*
- *Hvert år flytter* 5% *af indbyggerne i forstaden til midtbyen og* 3% *af indbyggerne i midtbyen flytter til forstaden.*
- *Efter t år bor der* $x_f^{(t)}$ *indbyggere i forstaden og* $x_m^{(t)}$ *i midtbyen.*

*Hvordan er fordelingen af indbyggere efter 5 år? Hvordan er den efter 10 år? Hvad med 100 år?*
*Hvordan er fordelingen af indbyggere efter rigtig mange år?*

# Sandsynlighedsregning og egenvektorer

## Xkøbing - modeleres som en Markov kæde



### Eksempel

- *Xkøbing er en by, der består af en midtby og en forstad. I alt med* 100 000 *indbyggere.*
- *Hvert år flytter* 5% *af indbyggerne i forstaden til midtbyen og* 3% *af indbyggerne i midtbyen flytter til forstaden.*
- *Efter t år bor der* $x_f^{(t)}$ *indbyggere i forstaden og* $x_m^{(t)}$ *i midtbyen.*

*Hvordan er fordelingen af indbyggere efter 5 år? Hvordan er den efter 10 år? Hvad med 100 år?*

*Hvordan er fordelingen af indbyggere efter rigtig mange år?*

*Lad* $\mathbf{x}^{(t)} = \begin{bmatrix} x_f^{(t)} \\ x_m^{(t)} \end{bmatrix}$ *og lad* $A = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix}$.

# Sandsynlighedsregning og egenvektorer

Xkøbing - modeleres som en Markov kæde



## Eksempel (Fortsat)

*Så er*

$$A\mathbf{x}^{(t)} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f^{(t)} \\ x_m^{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95x_f^{(t)} + 0.03x_m^{(t)} \\ 0.05x_f^{(t)} + 0.97x_m^{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_f^{(t+1)} \\ x_m^{(t+1)} \end{bmatrix}$$

*Dvs.* $A\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t+1)}$

# Sandsynlighedsregning og egenvektorer

Xkøbing - modeleres som en Markov kæde



## Eksempel (Fortsat)

*Så er*

$$A\mathbf{x}^{(t)} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f^{(t)} \\ x_m^{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95x_f^{(t)} + 0.03x_m^{(t)} \\ 0.05x_f^{(t)} + 0.97x_m^{(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_f^{(t+1)} \\ x_m^{(t+1)} \end{bmatrix}$$

*Dvs.* $A\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t+1)}$

*Hvis der findes en "stabil" fordeling af indbyggere, så må der gælde at*

$$A\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{x}^{(t)}$$

*Udtrykket omskrives,*

$$0 = A\mathbf{x}^{(t)} - \mathbf{x}^{(t)} = (A - I_2)\mathbf{x}^{(t)} = (A - 1 \cdot I_2)\mathbf{x}^{(t)}$$

# Sandsynlighedsregning og egenvektorer

## Xkøbing - modeleres som en Markov kæde



### Eksempel (Forsat)

*At bestemme den vektor* $\mathbf{x}^{(t)}$ *som opfylder det homogene ligningssystem* $(A - 1 \cdot I_2)\mathbf{x}^{(t)} = 0$*, svarer til at bestemme egenvektoren tilhørende egenværdien* 1 *for matricen* $A$*.*

# Sandsynlighedsregning og egenvektorer

## Xkøbing - modeleres som en Markov kæde



### Eksempel (Forsat)

*At bestemme den vektor $\mathbf{x}^{(t)}$ som opfylder det homogene ligningssystem $(A - 1 \cdot I_2)\mathbf{x}^{(t)} = 0$, svarer til at bestemme egenvektoren tilhørende egenværdien 1 for matricen A.*

$$A - 1 \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 0.95 - 1 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 \\ 0.05 & -0.03 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Heraf ses at løsningsrummet er $\mathbf{x}^{(t)} = \underline{k[0.03, 0.05]}$ for $k \in \mathbb{R}$.*

# Sandsynlighedsregning og egenvektorer

## Xkøbing - modeleres som en Markov kæde



### Eksempel (Forsat)

*At bestemme den vektor $\mathbf{x}^{(t)}$ som opfylder det homogene ligningssystem $(A - 1 \cdot I_2)\mathbf{x}^{(t)} = 0$, svarer til at bestemme egenvektoren tilhørende egenværdien 1 for matricen A.*

$$A - 1 \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 0.95 - 1 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 \\ 0.05 & -0.03 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Heraf ses at løsningsrummet er $\mathbf{x}^{(t)} = k[0.03, 0.05]$ for $k \in \mathbb{R}$.*
*Vi søger den egenvektor, hvor summen af indgangene er 1 (hvorfor?).*

# Sandsynlighedsregning og egenvektorer

Xkøbing - modeleres som en Markov kæde



## Eksempel (Forsat)

*At bestemme den vektor $\mathbf{x}^{(t)}$ som opfylder det homogene ligningssystem $(A - 1 \cdot I_2)\mathbf{x}^{(t)} = 0$, svarer til at bestemme egenvektoren tilhørende egenværdien 1 for matricen A.*

$$A - 1 \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 0.95 - 1 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 \\ 0.05 & -0.03 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Heraf ses at løsningsrummet er $\mathbf{x}^{(t)} = k[0.03, 0.05]$ for $k \in \mathbb{R}$.*
*Vi søger den egenvektor, hvor summen af indgangene er 1 (hvorfor?).*
*For $k = 12.5$ er $\mathbf{x}^{(t)} = [0.375, 0.625]$.*

# Sandsynlighedsregning og egenvektorer

Xkøbing - modeleres som en Markov kæde



## Eksempel (Forsat)

*At bestemme den vektor $\mathbf{x}^{(t)}$ som opfylder det homogene ligningssystem $(A - 1 \cdot I_2)\mathbf{x}^{(t)} = 0$, svarer til at bestemme egenvektoren tilhørende egenværdien 1 for matricen A.*

$$A - 1 \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 0.95 - 1 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 \\ 0.05 & -0.03 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Heraf ses at løsningsrummet er $\mathbf{x}^{(t)} = k[0.03, 0.05]$ for $k \in \mathbb{R}$.*
*Vi søger den egenvektor, hvor summen af indgangene er 1 (hvorfor?).*
*For $k = 12.5$ er $\mathbf{x}^{(t)} = [0.375, 0.625]$.*
*Xkøbing har 100 000 indbyggere. En stabil fordeling af indbyggerne er derfor*

$$100\,000 \cdot \mathbf{x}^{(t)} = \begin{bmatrix} 37\,500 \\ 62\,500 \end{bmatrix}$$

# Del III

# Introducerende Sandsynlighedsteori

# Sandsynlighedsregning



Betragt et "eksperiment", f.eks.

- kast en terning, kast to terninger; Hvad er sandsynligheden for at slå en, eller to, seksere?

Der er endeligt mange udfald: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

# Sandsynlighedsregning



Betragt et "eksperiment", f.eks.

- kast en terning, kast to terninger; Hvad er sandsynligheden for at slå en, eller to, seksere?
- træk et kort, træk fire kort blandt 52; Hvad er sandsynligheden for at få en konge, eller fire konger?
- ...

Der er endeligt mange udfald: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

# Sandsynlighedsregning



Hvert udfald kan tildeles en sandsynlighed: et tal $p$, der opfylder $0 \leq p \leq 1$.

$p$ kan eventuelt udtrykkes som $p \cdot 100\%$.

# Sandsynlighedsregning



Hvert udfald kan tildeles en sandsynlighed: et tal $p$, der opfylder $0 \leq p \leq 1$.

$p$ kan eventuelt udtrykkes som $p \cdot 100\%$.

F.eks. hvis $p(a_1) = 0.5$, så siger vi, at der er $0.5 \cdot 100\% = 50\%$ sandsynlighed for at hændelsen $a_1$ finder sted.

Summen af alle sandsynligheder i et udfaldsrum er 1.

# Sandsynlighedsregning



Hvert udfald kan tildeles en sandsynlighed: et tal $p$, der opfylder $0 \leq p \leq 1$.

$p$ kan eventuelt udtrykkes som $p \cdot 100\%$.

F.eks. hvis $p(a_1) = 0.5$, så siger vi, at der er $0.5 \cdot 100\% = 50\%$ sandsynlighed for at hændelsen $a_1$ finder sted.

Summen af alle sandsynligheder i et udfaldsrum er 1.

I dag betragter vi kun udfaldsrum med et endeligt antal mulige hændelser, og hvor sandsynligheden for hver hændelse er ens.

# Sandsynlighedsregning

## Definition

Et **udfaldsrum** (sample space eller universe): en *endelig* mængde (set) $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, som indeholder mulige udfald $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En **hændelse** $E$ (event) er en delmængde af $S$.

# Sandsynlighedsregning



## Definition

Et **udfaldsrum** (sample space eller universe): en *endelig* mængde (set) $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, som indeholder mulige udfald $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
En **hændelse** $E$ (event) er en delmængde af $S$.

## Eksempel (Kast med en mønt)

*Udfald: Plat (P) og Krone (K).*
*Så er udfaldsrummet* $S = \{P, K\}$ *og de mulige udfald er* P *eller* K.

$\emptyset$, $\{P\}$, $\{K\}$, $\{P, K\}$

# Sandsynlighedsregning



## Eksempel (Kast med en 6-sidet terning)

*Udfald:* $1, 2, 3, 4, 5$ *eller* $6$ *øjne.*
*Så er udfaldsrummet* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

# Sandsynlighedsregning



## Eksempel (Kast med en 6-sidet terning)

*Udfald:* $1, 2, 3, 4, 5$ *eller* $6$ *øjne.*
*Så er udfaldsrummet* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

*En hændelse i udfaldsrummet er f.eks.*
$E_1 = \{1, 2\}$ *- maks 2 øjne på terningen,*

# Sandsynlighedsregning



## Eksempel (Kast med en 6-sidet terning)

*Udfald:* $1, 2, 3, 4, 5$ *eller* $6$ *øjne.*
*Så er udfaldsrummet* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

*En hændelse i udfaldsrummet er f.eks.*
$E_1 = \{1, 2\}$ *- maks 2 øjne på terningen,*
*eller*
$E_2 = \{2, 4, 6\}$ *- et lige antal øjne.*

# Sandsynlighedsregning



### Definition

Lad $S$ være et ikke-tomt udfaldsrum med ligefordelte udfald og lad $E$ være en hændelse, altså en delmængde af $S$. Da er sandsynligheden for hændelsen $E$ givet ved

$$p(E) = \frac{N(E)}{N(S)} = \frac{|E|}{|S|}$$

# Sandsynlighedsregning



## Definition

Lad $S$ være et ikke-tomt udfaldsrum med ligefordelte udfald og lad $E$ være en hændelse, altså en delmængde af $S$. Da er sandsynligheden for hændelsen $E$ givet ved

$$p(E) = \frac{N(E)}{N(S)} = \frac{|E|}{|S|}$$

Dette gælder *kun* når sandsynligheden for udfald er ligefordelt!

# Sandsynlighedsregning



### Eksempel (Kast med en fair mønt)

*Udfaldsrummet er* $S = \{P, K\}$ *og de mulige hændelser er*

$$E_1 = \{P\} \text{ og } E_2 = \{K\}.$$

# Sandsynlighedsregning



## Eksempel (Kast med en fair mønt)

*Udfaldsrummet er* $S = \{P, K\}$ *og de mulige hændelser er*

$$E_1 = \{P\} \text{ og } E_2 = \{K\}.$$

*Sandsynligheden for plat og sandsynligheden for krone er ens, så*

$$p(E_1) = p(\{P\}) = p(\{K\}) = p(E_2) = \frac{N(E_1)}{N(S)} = \frac{1}{2} = 0.5$$

# Sandsynlighedsregning



## Eksempel (Kast med en fair mønt)

*Udfaldsrummet er* $S = \{P, K\}$ *og de mulige hændelser er*

$$E_1 = \{P\} \text{ og } E_2 = \{K\}.$$

*Sandsynligheden for plat og sandsynligheden for krone er ens, så*

$$p(E_1) = p(\{P\}) = p(\{K\}) = p(E_2) = \frac{N(E_1)}{N(S)} = \frac{1}{2} = 0.5$$

*Observer at* $p(\{P\}) + p(\{K\}) = 0.5 + 0.5 = 1.$

# Sandsynlighedsregning



## Eksempel (Kast med en fair 6-sidet terning)

*Udfaldsrummet er* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
*Sandsynligheden for hændelsen* $\underline{E_1 = \{1, 2\}}$ *er*

$$p(E_1) = \frac{N(E_1)}{N(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

# Sandsynlighedsregning



## Eksempel (Kast med en fair 6-sidet terning)

*Udfaldsrummet er* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
*Sandsynligheden for hændelsen* $E_1 = \{1, 2\}$ *er*

$$p(E_1) = \frac{N(E_1)}{N(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

*og sandsynligheden for hændelsen* $E_2 = \{2, 4, 6\}$ *er*

$$p(E_2) = \frac{N(E_2)}{N(S)} = \frac{3}{6} = 0.5$$

# Sandsynlighedsregning



## Definition

Et **sandsynlighedsfelt** ( probability space) består af

- Et **udfaldsrum**: en *endelig* mængde $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, og

# Sandsynlighedsregning



## Definition

Et **sandsynlighedsfelt** ( probability space) består af

- Et **udfaldsrum**: en *endelig* mængde $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, og
- En **sandsynlighedsfunktion** ( probability distribution): en funktion $p$ med definitionsmængde $S$, som opfylder $p(a_i)$ er et reelt tal, $0 \leq p(a_i) \leq 1$, for ethvert $a_i \in S$. Desuden er

$p : S \to [0,1]$

$$\sum_{i=1}^{n} p(a_i) = p(a_1) + \ldots + p(a_n) = 1.$$

# Sandsynlighedsregning



## Eksempel (Kast med en fair mønt)

*Udfaldsrummet er* $S = \{P, K\}$*.*
*Sandsynlighedsfunktionen er*

$$p : S \to [0, 1]$$

*hvor der gælder at*

$$p(P) = 0.5 \quad og \quad p(K) = 0.5$$

# Sandsynlighedsregning



Som nævnt, så kaldes en delmængde $E$ af $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ for en **hændelse**.
Sandsynligheden for en hændelsen er

$$p(E) = \sum_{a_i \in E} p(a_i)$$

$$p(S) = p(a_1) + p(a_2) + \cdots + p(a_n) = 1$$

# Sandsynlighedsregning



## Eksempel (Kort spil)

*Lad $S$ være mængden af 52 forskellige kort.*
*Hvert kort tildeles sandsynlighed $\frac{1}{52}$.*
*Lad $E$ være de 13 hjertere.*
*Sandsynlighed for at trække en hjerter, når man trækker et kort er*

# Sandsynlighedsregning



## Eksempel (Kort spil)

*Lad S være mængden af 52 forskellige kort.*
*Hvert kort tildeles sandsynlighed $\frac{1}{52}$.*
*Lad E være de 13 hjertere.*
*Sandsynlighed for at trække en hjerter, når man trækker et kort er*

$$P(E) = \underbrace{P(\heartsuit 1) + P(\heartsuit 2) + \cdots + P(\heartsuit 13)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

# Uniform fordeling

## Definition

Lad $S$ være et udfaldsrum med $n$ elementer.
Hvis sandsynlighedsfunktionen $p$ opfylder at $p(x) = \frac{1}{n}$ så siger vi at fordelingen er **uniform** (UNIFORM DISTRIBUTION).
Sandsynligheden for en hændelse $E \subseteq S$ kan da bestemmes ved

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{|E|}{n}.$$

# Uniform fordeling



## Eksempel (Kast med en fair 6-sidet terning)

*Mulige udfald:* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$.
*Størrelsen af udfaldsrummet er* $N(S) = |S| = 6$.
*Hvad er sandsynligheden for at slå en 3er?*

# Uniform fordeling



## Eksempel (Kast med en fair 6-sidet terning)

*Mulige udfald:* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$.
*Størrelsen af udfaldsrummet er* $N(S) = |S| = 6$.
*Hvad er sandsynligheden for at slå en 3er?*
*Antal muligheder for at få hændelsen* $a_3 = \{\text{slå en 3er}\}$; *er* $N(a_3) = 1$.

$E = \{3\}$

$$p(\{\text{ slå en 3er}\}) = p(a_3) = \frac{\text{Antal mulige 3èr}}{\text{Antal mulige udfald}} = \frac{N(a_3)}{N(S)} = \frac{1}{6}$$

# Uniform fordeling



## Eksempel (Kast med en fair 6-sidet terning)

*Mulige udfald:* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$.
*Størrelsen af udfaldsrummet er* $N(S) = |S| = 6$.
*Hvad er sandsynligheden for at slå en 3er?*
*Antal muligheder for at få hændelsen* $a_3 = \{\text{slå en 3er}\}$; *er* $N(a_3) = 1$.

$$p(\{\text{ slå en 3er}\}) = p(a_3) = \frac{\text{Antal mulige 3èr}}{\text{Antal mulige udfald}} = \frac{N(a_3)}{N(S)} = \frac{1}{6}$$

*Hvad er sandsynligheden for at slå en 1er, en 2er, en 4er, en 5er, en 6er ?*

# Uniform fordeling



## Eksempel (Kast med en fair 6-sidet terning)

*Mulige udfald:* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$.
*Størrelsen af udfaldsrummet er* $N(S) = |S| = 6$.
*Hvad er sandsynligheden for at slå en 3er?*
*Antal muligheder for at få hændelsen* $a_3 = \{\text{slå en 3er}\}$*; er* $N(a_3) = 1$.

$$p(\{\text{ slå en 3er}\}) = p(a_3) = \frac{\text{Antal mulige 3èr}}{\text{Antal mulige udfald}} = \frac{N(a_3)}{N(S)} = \frac{1}{6}$$

*Hvad er sandsynligheden for at slå en 1er, en 2er, en 4er, en 5er, en 6er ?*

$$p(a_1) = p(a_2) = p(a_4) = p(a_5) = p(a_6) = \frac{1}{6}$$

*så fordelingen af sandsynlighedsfunktionen for "kast med fair 6-sidet terning" er uniform.*

# Uniform fordeling



## Eksempel (Kast med en fair 6-sidet terning, forsat)

*Udfaldsrummet er* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, *hvor* $p(a_i) = \frac{1}{6}$ *for* $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
*Sandsynligheden for hændelsen* $E_1 = \{1, 2\}$ *er*

$$p(E_1) = p(a_1) + p(a_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

# Uniform fordeling



## Eksempel (Kast med en fair 6-sidet terning, forsat)

*Udfaldsrummet er* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, *hvor* $p(a_i) = \frac{1}{6}$ *for* $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
*Sandsynligheden for hændelsen* $E_1 = \{1, 2\}$ *er*

$$p(E_1) = p(a_1) + p(a_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

*og sandsynligheden for hændelsen* $E_2 = \{2, 4, 6\}$ *er*

$$p(E_2) = p(a_2) + p(a_4) + p(a_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

# Uniform fordeling



## Eksempel (Kast med en fair 6-sidet terning, forsat)

*Udfaldsrummet er* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, *hvor* $p(a_i) = \frac{1}{6}$ *for* $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
*Sandsynligheden for hændelsen* $E_1 = \{1, 2\}$ *er*

$$p(E_1) = p(a_1) + p(a_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

*og sandsynligheden for hændelsen* $E_2 = \{2, 4, 6\}$ *er*

$$p(E_2) = p(a_2) + p(a_4) + p(a_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

*Observer desuden at sandsynligheden for hele udfaldsrummet er*

$$p(S) = p(a_1) + p(a_2) + p(a_3) + p(a_4) + p(a_5) + p(a_6) = 1$$

# Del IV

# Sandsynlighedslove

# Sandsynlighedslove



**Sætning (7.1.2 i Rosen)**

*Lad $E_1$ og $E_2$ være hændelser i udfaldsrummet $S$, så er*

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

# Sandsynlighedslove



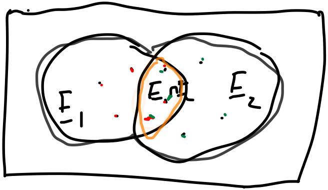
## Bevis.

Der gælder at

$$P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \sum_{s \in E_1} p(s) + \sum_{s \in E_2} p(s) - \sum_{s \in E_1 \cap E_2} p(s)$$

$$= \sum_{s \in E_1 \cup E_2} p(s)$$

$$= P(E_1 \cup E_2)$$




□

# Sandsynlighedslove



## Eksempel (Kast med en fair 6-sidet terning)

*Udfaldsrummet er* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Lad* $E_1 = \{1, 2\}$ *og* $E_2 = \{2, 4, 6\}$, *hvor om det gælder at* $p(E_1) = \frac{1}{3}$ *og* $p(E_2) = \frac{1}{2}$.
*Hvad er sandsynligheden for* $E_1 \cup E_2$*?*

# Sandsynlighedslove

## Eksempel (Kast med en fair 6-sidet terning)

*Udfaldsrummet er* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Lad* $E_1 = \{1, 2\}$ *og* $E_2 = \{2, 4, 6\}$, *hvor om det gælder at* $p(E_1) = \frac{1}{3}$ *og* $p(E_2) = \frac{1}{2}$.
*Hvad er sandsynligheden for* $E_1 \cup E_2$*?*

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - p(E_1 \cap E_2)$$

*Hvad er sandsynligheden for* $E_1 \cap E_2$*?*

# Sandsynlighedslove



## Eksempel (Kast med en fair 6-sidet terning)

*Udfaldsrummet er* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Lad* $E_1 = \{1, 2\}$ *og* $E_2 = \{2, 4, 6\}$, *hvor om det gælder at* $p(E_1) = \frac{1}{3}$ *og* $p(E_2) = \frac{1}{2}$.

*Hvad er sandsynligheden for* $E_1 \cup E_2$*?*

$$p(E_1 \cup E_2) = \underline{p(E_1)} + \underline{p(E_2)} - \underline{p(E_1 \cap E_2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - p(E_1 \cap E_2)$$

*Hvad er sandsynligheden for* $E_1 \cap E_2$*?*

*Observer at* $E_1 \cap E_2 = \{2\}$, *så* $p(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$. *Heraf fås at*

$$p(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 4, 6\}$ $\quad P(E_1 \cup E_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

# Sandsynlighedslove



## Sætning (7.1.1 i Rosen)

*Sandsynligheden for hændelsen $\overline{E} = S \setminus E$ er*

$$p(\overline{E}) = 1 - p(E).$$

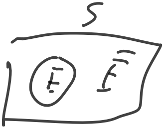
# Sandsynlighedslove



## Sætning (7.1.1 i Rosen)

*Sandsynligheden for hændelsen $\overline{E} = S \setminus E$ er*

$$p(\overline{E}) = 1 - p(E).$$




## Bevis.

Lad $E = E_1$ og $\overline{E} = E_2$ i beviset fra før:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(\overset{S}{E \cup \overline{E}}) = 1$$

men vi har også

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= P(E) + P(\overline{E}) - P(\underset{\emptyset}{E \cap \overline{E}}) \\ &= P(E) + P(\overline{E}) \end{aligned}$$

$$1 = P(E) + P(\overline{E})$$

□

# Sandsynlighedslove



## Eksempel (Kast en mønt 3 gange)

*Udfaldsrummet er*
$S = \{PPP, PPK, PKP, KPP, KKP, KPK, PKK, KKK\}$, *så* $|S| = 8$ *og* $p(a_i) = \frac{1}{8}$, *for* $a_i \in S$. *Det er en uniform fordeling.*
*Hvad er sandsynligheden for at kaste mindst 1 krone?*

# Sandsynlighedslove



## Eksempel (Kast en mønt 3 gange)

*Udfaldsrummet er*
$S = \{PPP, \underbrace{PPK, PKP, KPP, KKP, KPK, PKK, KKK}\}$, *så* $|S| = 8$ *og*
$p(a_i) = \frac{1}{8}$, *for* $a_i \in S$. *Det er en uniform fordeling.*

*Hvad er sandsynligheden for at kaste mindst 1 krone?*

*Lad* $E = \{PPK, PKP, KPP, KKP, KPK, PKK, KKK\}$, *så er* $p(E) = \frac{7}{8}$.

# Sandsynlighedslove



## Eksempel (Kast en mønt 3 gange)

*Udfaldsrummet er*
$S = \{PPP, PPK, PKP, KPP, KKP, KPK, PKK, KKK\}$, *så* $|S| = 8$ *og* $p(a_i) = \frac{1}{8}$, *for* $a_i \in S$. *Det er en uniform fordeling.*

*Hvad er sandsynligheden for at kaste mindst 1 krone?*

*Lad* $E = \{PPK, PKP, KPP, KKP, KPK, PKK, KKK\}$, *så er* $p(E) = \frac{7}{8}$.
*Alternativ; så er* $\overline{E} = \{PPP\}$, *hvor* $p(\overline{E}) = \frac{1}{8}$. *Så kan* $p(E)$ *bestemmes ved*

$$p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

# Del V

# Binomialkoefficienter

# Binomialkoefficienter



Antal måder man kan vælge $k$ elementer (hvor rækkefølgen er uden betydning) fra en mængde af $n$ er

$$\binom{n}{k} = C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

# Binomialkoefficienter



Antal måder man kan vælge $k$ elementer (hvor rækkefølgen er uden betydning) fra en mængde af $n$ er

$$\binom{n}{k} = C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Skalaren $C(n,k) = \binom{n}{k}$ kaldes en binomialkoefficient.

# Binomialkoefficienter



## Eksempel (Kast en mønt 3 gange)

*Udfaldsrummet er* $S = \{PPP, PPK, PKP, KPP, KKP, KPK, PKK, KKK\}$*, så* $|S| = 8$ *og* $p(a_i) = \frac{1}{8}$*, for* $a_i \in S$*. Det er en uniform fordeling.*

*På hvor mange forskellige måder kan man få et udfald med præcis* 1 *krone?*

# Binomialkoefficienter



## Eksempel (Kast en mønt 3 gange)

*Udfaldsrummet er*
$S = \{PPP, PPK, PKP, KPP, KKP, KPK, PKK, KKK\}$, *så* $|S| = 8$ *og* $p(a_i) = \frac{1}{8}$, *for* $a_i \in S$. *Det er en uniform fordeling.*

*På hvor mange forskellige måder kan man få et udfald med præcis* 1 *krone?*

*Vi bestemmer* $C(n, k)$ *hvor* $n = 3$ *og* $k = 1$,

$$C(3,1) = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{3}{1} = 3$$

*Hvad er så sandsynligheden for at få et udfald med præcis* 1 *krone?*

# Binomialkoefficienter



## Eksempel (Kast en mønt 3 gange)

*Udfaldsrummet er*
$S = \{PPP, PPK, PKP, KPP, KKP, KPK, PKK, KKK\}$, *så* $|S| = 8$ *og* $p(a_i) = \frac{1}{8}$, *for* $a_i \in S$. *Det er en uniform fordeling.*

*På hvor mange forskellige måder kan man få et udfald med præcis* 1 *krone?*

*Vi bestemmer* $C(n, k)$ *hvor* $n = 3$ *og* $k = 1$,

$$C(3,1) = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{3}{1} = 3$$

*Hvad er så sandsynligheden for at få et udfald med præcis* 1 *krone?*

*Lad* $E$ *være hændelsen at udfaldet indeholder præcis en krone. Da er*

$$p(E) = \frac{C(3,1)}{|S|} = \frac{3}{8}$$

# Binomialkoefficienter



## Eksempel (Kort spil)

*Hvor mange forskellige måder kan man trække 4 kort blandt 52?*

# Binomialkoefficienter



## Eksempel (Kort spil)

*Hvor mange forskellige måder kan man trække 4 kort blandt 52?*

$$\binom{52}{4} = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 17 \cdot 25 \cdot 49 = 270\,725$$

# Binomialkoefficienter



## Eksempel (Kort spil)

*Hvor mange forskellige måder kan man trække 4 kort blandt 52?*

$$\binom{52}{4} = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 13\cdot 17\cdot 25\cdot 49 = 270\,725$$

*Lad $E$ være hændelsen at ingen af de 4 kort er hjertere. Så er $p(E)$ givet ved*

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{\binom{39}{4}}{\binom{52}{4}} = \frac{82\,251}{270\,725} \approx 0.3038$$

# Binomialkoefficienter



## Eksempel (Kort spil)

*Hvor mange forskellige måder kan man trække 4 kort blandt 52?*

$$\binom{52}{4} = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 17 \cdot 25 \cdot 49 = 270\,725$$

*Lad $E$ være hændelsen at ingen af de 4 kort er hjertere. Så er $p(E)$ givet ved*

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{\binom{39}{4}}{\binom{52}{4}} = \frac{82\,251}{270\,725} \approx 0.3038$$

*Da er $\overline{E}$ hændelsen at mindst en af de 4 kort er hjertere. $p(\overline{E})$ er givet ved*

$$\underline{p(\overline{E}) = 1 - p(E)} = 1 - \frac{\binom{39}{4}}{\binom{52}{4}} \approx 0.6962$$

# Binomialkoefficienter



## Eksempel (Kort spil, forsat)

*Lad $F$ være hændelsen at højest en af de 4 kort er hjertere. Antallet af udfald i $F$ er da*

$$|F| = \binom{39}{4} + \binom{13}{1}\binom{39}{3} = 201\,058$$

# Binomialkoefficienter



## Eksempel (Kort spil, forsat)

*Lad $F$ være hændelsen at højest en af de 4 kort er hjertere. Antallet af udfald i $F$ er da*

$$|F| = \binom{39}{4} + \binom{13}{1}\binom{39}{3} = 201\,058$$

*Heraf er $p(F)$ givet ved*

$$p(F) = \frac{|F|}{\binom{52}{4}} = \frac{201\,058}{270\,725} \approx 0.7427$$

# Binomialkoefficienter



Binomialformelen er givet ved

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^k y^{n-k}.$$

# Binomialkoefficienter



Binomialformelen er givet ved

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k y^{n-k}.$$

Hvis $x$ og $y$ er sandsynligheder, således at $x + y = 1$, så giver binomialformelen

$$1 = 1^n = (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k y^{n-k}.$$

# Binomialkoefficienter



Binomialformelen er givet ved

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^k y^{n-k}.$$

Hvis $x$ og $y$ er sandsynligheder, således at $x + y = 1$, så giver binomialformelen

$$1 = 1^n = (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^k y^{n-k}.$$

Binomialformelen er anvendelig når vi betragter $n$ ens eksperimenter med 2 mulige udfald.

# Binomialkoefficienter



## Eksempel (Urne med bolde)

*En urne indeholder 5 bolde, 2 røde og 3 blå. Der er lige stor sandsynlighed for at tage en hvilken som helst bold op af urnen.*

*Hvad er sandsynligheden for at tage en rød bold? Og en blå bold?*

# Binomialkoefficienter



## Eksempel (Urne med bolde)

*En urne indeholder 5 bolde, 2 røde og 3 blå. Der er lige stor sandsynlighed for at tage en hvilken som helst bold op af urnen.*

*Hvad er sandsynligheden for at tage en rød bold? Og en blå bold?*

*Udfaldsrummet er* $S = \{rød1, rød2, \underbrace{blå1, blå2, blå3}\}$ *og*

$E_1 = \{rød1, rød2\}$

$$p(rød) = \frac{|røde\ bolde|}{|bolde|} = \frac{2}{5}$$

*og*

$$p(blå) = \frac{|blå\ bolde|}{|bolde|} = \frac{3}{5}$$

# Binomialkoefficienter



## Eksempel (Urne med bolde, forsat)

*Hvis du tager* 3 *bolde op af urnen - med tilbagelægning, hvad er sandsynligheden for at tage* 0 *blå bolde,* 1 *blå bold,* 2 *blå bolde eller* 3 *blå bolde?*

# Binomialkoefficienter



## Eksempel (Urne med bolde, forsat)

*Hvis du tager 3 bolde op af urnen - med tilbagelægning, hvad er sandsynligheden for at tage 0 blå bolde, 1 blå bold, 2 blå bolde eller 3 blå bolde? Vi skal bruge binomialformlen:*

$$p(0\ blå) = C(3,0)p(blå)^0 p(rød)^3 = 1\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

RRB RBR BRR

$$p(1\ blå) = C(3,1)p(blå)^1 p(rød)^2 = 3\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{36}{125}$$

$$p(2\ blå) = C(3,2)p(blå)^2 p(rød)^1 = 3\left(\frac{3}{5}\right)^2\frac{2}{5} = \frac{54}{125}$$

$$p(3\ blå) = C(3,3)p(blå)^3 p(rød)^0 = 1\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

# Monty Hall



## Eksempel

*Monty Hall er vært på et TV-show, hvor der er gemt en præmie bag én af tre låger.*

- *En deltager får lov til at vælge én af de tre låger.*

*Showets vært åbner derefter en låge;*

- *det er ikke den låge deltageren har valgt*
- *det er ikke den låge der gemmer på præmien.*

*Deltageren får nu mulighed for ændre sit valg (eller fastholde det oprindelige valg).*

- *Den nu valgte låge åbnes, og deltageren vinder præmien hvis den er bag den valgte låge.*

# Monty Hall



## Eksempel

*Monty Hall er vært på et TV-show, hvor der er gemt en præmie bag én af tre låger.*

- *En deltager får lov til at vælge én af de tre låger.*

*Showets vært åbner derefter en låge;*

- *det er ikke den låge deltageren har valgt*
- *det er ikke den låge der gemmer på præmien.*

*Deltageren får nu mulighed for ændre sit valg (eller fastholde det oprindelige valg).*

- *Den nu valgte låge åbnes, og deltageren vinder præmien hvis den er bag den valgte låge.*

*Bør deltageren fastholde det oprindelige valg eller skifte?*

# Monty Hall



## Eksempel (forsat)

*Observer at*

$$P(\textit{rigtig, 1. forsøg}) = \frac{1}{3}$$
$$P(\textit{forkert, 1. forsøg}) = \frac{2}{3}$$

*Vil du skifte låge?*

# Monty Hall



## Eksempel (forsat)

*Observer at*

$$P(\textit{rigtig, 1. forsøg}) = \frac{1}{3}$$
$$P(\textit{forkert, 1. forsøg}) = \frac{2}{3}$$

*Vil du skifte låge?*

$$\textit{Ved at holde fast i valg: } P(\textit{præmie}) = \frac{1}{3}$$
$$\textit{Ved at ændre valg:} P(\textit{præmie}) = \frac{2}{3}$$