1 Delopgave 2

Betragt en vektor $[a, b] \in \mathbb{R}^2$ forskellig fra nulvektoren. Givens rotation er en ortogonal transformation, som afbilleder $[a, b]$ til en vektor $[d, 0] \in \mathbb{R}^2$.

1.1

Brug sætning 7 i afsnit 6.2 [Lay], til at bestemme $[d]$ givet $[a, b]$

Let U be an m x n matrix with orthonormal columns, and let $x, y \in \mathbb{R}^n$. Then.

1. $||Ux|| = ||x||$
2. $(Ux) \cdot (Uy) = x \cdot y$
3. $(Ux) \cdot (Uy) = 0$ if and only if $x \cdot y = 0$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{d^2 + 0^2} = \sqrt{d^2} = d \tag{1}$$

1.2

Tjek at

$$G = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \tag{2}$$

Hvor $c = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ og $b/\sqrt{a^2 + b^2}$ er en ortogonal matrix som afbilleder $[a, b]$ til $[d, 0]$.

$$c \cdot s + (-s) \cdot c = 0 \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \sqrt{c^2 + (-s)^2} \\ \sqrt{c^2 + s^2} \\ \sqrt{(\tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 + (\tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2} \\ \sqrt{\tfrac{a^2}{a^2+b^2} + \tfrac{b^2}{a^2+b^2}} \\ \sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2}} \\ 1 \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot c \\ a \cdot (-s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \cdot s \\ b \cdot c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot c + b \cdot s \\ a \cdot (-s) + b \cdot c \end{bmatrix} \tag{5}$$

Focus on bottom and insert values

$$a \cdot \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + b \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \tag{6}$$

Focus and top and insert values

$$
\begin{gathered}
a \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + b \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
\frac{(a^2+b^2) \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2} \\
\sqrt{a^2+b^2}
\end{gathered} \tag{7}
$$

1.3

Lad os nu betragte en vektor $x \in \mathbb{R}^m, m \geq 2$, således at $x_i = a$ og $x_j = b$, $i < j$. Ve beregner c og s som i det sidste delspørsmål, og lad $G(i, j, a, b)$ være en m x m matrix, med alle række/søjle som i identitetsmatrix, bortset fra række/søjle i og j, hvor vi "indsætter" matrix G.

$$
G(i, j, a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}
$$

Tjek at $G(i, j, a, b)$ er en ortogonal matrix og at

$$
G(i, j, a, b)x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ d \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ 0 \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \tag{9}
$$

Hvis man tager udgangspunkt i identitetsmatrix som vi ved er ortogonal, er tre scenarier der skal kigges paa

1. To uændrede søjler
2. En uændredet søjle og en ændret
3. To ændrede søjler

$$0 \cdot 0 + \cdots + c \cdot s + \cdots + (-s) \cdot c + \cdots + 0 \cdot 0 = 0 \tag{10}$$

$$\begin{gathered} x_1 \cdot 0 + \cdots + x_i \cdot c + \cdots + x_j \cdot s + \cdots + x_m \cdot 0 \\ x_i \cdot c + x_j \cdot s \\ a \cdot c + b \cdot s \\ d \end{gathered} \tag{11}$$

$$x_i \cdot (-s) + x_j \cdot c = a \cdot (-s) + b \cdot c = 0 \tag{12}$$

1.4

Forklar, hvorfor produktet af ortogonal matricer er en ortogonal matrix. Dvs, hvis $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ er ortogonale matricer, forklar hvorfor matricen $Q_1 Q_2 \ldots Q_k$ er ortogonal.

To be orthogonal means to satisfy

$$A^T = A^{-1} \implies A^T A = A A^T = I \tag{13}$$

$$(M \cdot N)^T \cdot (M \cdot N) = N^T \cdot M^T \cdot M \cdot N = N^T \cdot N = I \tag{14}$$

$$(M \cdot N) \cdot (M \cdot N)^T = M \cdot N \cdot N^T \cdot M^T = M \cdot M^T = I \tag{15}$$