Selvstudie: middelværdi og varians, Afsnit 7.4 [Ros]

March 14, 2021

Sandsynlighedsteori og lineær algebra (SLIAL)

Forår 2021

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Vigtigeste begreb:

- Stokastisk variabel og deres uafhængighed
- Middelværdi
- Varians

Part I

Repetition fra sidst

Sandsynlighedsfelt

Definition

- Et **udfaldsrum** er en *endelig* mængde $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
- En **sandsynlighedsfunktion** på S er en funktion p med definitionsmængde S, som opfylder $p(a_i)$ er et reelt tal, $0 \leq p(a_i) \leq 1$, for ethvert a_i i S.
  Desuden er
  $$\sum_{i=1}^{n} a_i = p(a_1) + \ldots + p(a_n) = 1.$$

Sandsynlighedsfelt

Et udfaldsrum og en sandsynlighedsfunktion kaldes samlet et sandsynlighedsfelt.
En delmængde E af S kaldes en **hændelse**.
En hændelse tildeles også en sandsynlighed:

$$p(E) = \sum_{x \in E} p(x).$$

Stokastisk variabel

Definition

Hvis vi har givet et sandsynlighedsfelt med udfaldsrum S så siges X at være en **stokastisk variabel** hvis X er en funktion med definitionsmængde S og med værdier i $\mathbb{R}$.

Stokastisk variabel

Definition

Hvis vi har givet et sandsynlighedsfelt med udfaldsrum S så siges X at være en **stokastisk variabel** hvis X er en funktion med definitionsmængde S og med værdier i $\mathbb{R}$.

Eksempel (Kast med en 6-sidet fair terning)

Udfaldsrummet for en terning er $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Sandsynligheden for hvert udfald er ligefordelt, så $p(i) = \frac{1}{6}$.
Lad X være en stokastisk variabel som angivet antallet af "øjne" på terningen. Da er $X(i) = i$, for alle $i \in S$.

Stokastisk variabel

Definition

Hvis vi har givet et sandsynlighedsfelt med udfaldsrum S så siges X at være en **stokastisk variabel** hvis X er en funktion med definitionsmængde S og med værdier i $\mathbb{R}$.

Eksempel (Kast med en 6-sidet fair terning)

Udfaldsrummet for en terning er $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Sandsynligheden for hvert udfald er ligefordelt, så $p(i) = \frac{1}{6}$.
Lad X *være en stokastisk variabel som angivet antallet af "øjne" på terningen. Da er* $X(i) = i$, *for alle* $i \in S$.

Eksempel (n uafhængige Bernoulli forsøg)

Lad $X(s) =$ *antal succeser, hvor* s *er en række af* n *Bernoulli forsøg.*

Part II

Middelværdi

Middelværdi

En **stokastisk variabel** er funktion $X : S \to \mathbb{R}$.

Definition

Middelværdien (expectation) af en stokastisk variabel X er:

$$\boxed{\underline{E(X)} = \sum_{s \in S} p(s)X(s).}$$

Middelværdien af X er et vægtet gennemsnit af X's værdier.

Middelværdi

Eksempel (Kast med en 6-sidet fair terning)

Vi har $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p(i) = \frac{1}{6}$ *og* $X(i) = i$, *for alle* $i \in S$.
Det gennemsnitligt antal "øjne" på terningen er

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$E(X) \sum_{i=1}^{6} \underbrace{p(i)}_{=\frac{1}{6}} \cdot \underbrace{X(i)}_{= i}$$

Middelværdi

Eksempel (Kast med en 6-sidet fair terning)

Vi har $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*,* $p(i) = \frac{1}{6}$ *og* $X(i) = i$*, for alle* $i \in S$*.*
Det gennemsnitligt antal "øjne" på terningen er

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

Det kan også skrive som

$$\begin{aligned} \frac{1+2+3+4+5+6}{6} &= \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 \\ &= \sum_{s\in S} p(s)X(s) = E(X) \end{aligned}$$

Middelværdi

Sætning (7.4.1 i Rosen)

Lad X være en stokastisk variabel og lad $p(X = r) = \sum_{s \in S | X(s)=r} p(s)$ da er

$$E(X) = \sum_{r \in X(S)} p(X = r) r$$

Middelværdi

Sætning (7.4.1 i Rosen)

Lad X være en stokastisk variabel og lad $p(X = r) = \sum_{s \in S | X(s) = r} p(s)$ da er

$$E(X) = \sum_{r \in X(S)} p(X = r) r$$

Bevis.

Antag at X atager værdier i mængden $\{r_1, \ldots, r_n\} = X(S)$.
Lad $F_i = \{s \in S \mid X(s) = r_i\}$, så er $p(X = r_i) = p(F_i)$ for $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Da følger at

$$p(F_i) = \sum_{s \in F_i} p(s), \qquad \sum_{s \in F_i} p(s) \underbrace{X(s)}_{= r_i} = r_i \, p(F_i)$$

$$E(X) = \sum_{s \in S} p(s) X(s) = \sum_{i=1}^{n} p(F_i) r_i = \sum_{r \in X(S)} p(X = r) r$$

$\square$

Middelværdi

Eksempel (n uafhængige Bernoulli forsøg)

Lad $X(s)$ = antal succeser, hvor s er en række af n Bernoulli forsøg.
Antag at sandsynlighed for succes er p.
For $n = 3$, $p = \frac{1}{2}$, succes=P, fiasko=K er udfaldsrummet

$$S = \{PPP, PPK, PKP, KPP, PKK, KPK, KKP, KKK\}$$

og

$$X(S) = \{0, 1, 2, 3\}$$

Middelværdi

Middelværdien af succes er da

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \overset{p(PPP)}{\frac{1}{8}}X(PPP) + \frac{1}{8}X(PPK) + \frac{1}{8}X(PKP) + \frac{1}{8}X(KPP) + \frac{1}{8}X(PKK) \\
&+ \frac{1}{8}X(KPK) + \frac{1}{8}X(KKP) + \frac{1}{8}X(KKK) \\
&= \frac{1}{8}\underbrace{X(PPP)}_{3} + \frac{1}{8}\left(\underbrace{X(PPK)}_{2} + \underbrace{X(PKP)}_{2} + \underbrace{X(KPP)}_{2}\right) \\
&+ \frac{1}{8}\left(\underbrace{X(KKP)}_{1} + \underbrace{X(KPK)}_{1} + \underbrace{X(PKK)}_{1}\right) + \frac{1}{8}\underbrace{X(KKK)}_{0} \\
&= \frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot 1 + \frac{3}{8}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 = \frac{1\cdot 0 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 3}{8} = \frac{12}{8} = 1.5 \\
&= p(X=0)\cdot 0 + p(X=1)\cdot 1 + p(X=2)\cdot 2 + p(X=3)\cdot 3 \\
&= \sum_{r\in X(S)} p(X=r)r
\end{aligned}
$$

Eksempel

Lad udfaldsrummet $S = \{a, b, c, d\}$ og lad X være en stokastisk variabel, hvorom det gælder at $X(a) = 0$, $X(b) = 3$, $X(c) = 2$ og $X(d) = -1$. Desuden vides at udfald i S er ligefordelte.

Hvad er $E(X)$?

$$E(X) = \sum_{s \in S} p(s)X(s) = \frac{1}{4}X(a) + \frac{1}{4}X(b) + \frac{1}{4}X(c) + \frac{1}{4}X(d)$$

$$= \frac{1}{4}\left(0 + 3 + 2 + (-1)\right) = \frac{4}{4} = 1$$

Bernoulli forsøg
Middelværdi

- n uafhængige Bernoulli forsøg.
- $X(s)$ = antal succeser.
- Sandsynlighed for succes er p.

Bernoulli forsøg
Middelværdi

- n uafhængige Bernoulli forsøg.
- $X(s)$ = antal succeser.
- Sandsynlighed for succes er p.

Sætning (7.4.2 i Rosen)

Det forventet antal succeser ved udførelse af n Bernoulli forsøg, hvor p er sandsynligheden for succes og X er antal succeser, er

$$E(X) = np$$

Bernoulli forsøg
Middelværdi

Eksempel (n uafhængige Bernoulli forsøg)

Lad $X(s)$ være antal plat (P), hvor s er en række af $n = 3$ kast med fair mønt. Antag at sandsynlighed for succes er $p = \frac{1}{2}$. Udfaldsrummet er $S = \{PPP, PPK, PKP, KPP, PKK, KPK, KKP, KKK\}$ og det gennemsnitlige antal succes er

$$E(X) = \underbrace{3}_{= n} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{= p} = 1.5$$

(Sammenlign med slide 26.)

Stokastisk variabel

Lad X og Y være stokastiske variable, som afbilder fra udfaldsrummet S til de reelle tal. Hvis $Z_1 = X + Y$, så gælder at

$$Z_1(s) = X(s) + Y(s), \quad \text{for alle} \quad s \in S$$

Stokastisk variabel

Lad X og Y være stokastiske variable, som afbilder fra udfaldsrummet S til de reelle tal. Hvis $Z_1 = X + Y$, så gælder at

$$Z_1(s) = X(s) + Y(s), \quad \text{for alle} \quad s \in S$$

Hvis $Z_2 = X \cdot Y$, så gælder at

$$Z_2(s) = X(s) \cdot Y(s), \quad \text{for alle} \quad s \in S$$

Stokastisk variabel

Lad X og Y være stokastiske variable, som afbilder fra udfaldsrummet S til de reelle tal. Hvis $Z_1 = X + Y$, så gælder at

$$Z_1(s) = X(s) + Y(s), \quad \text{for alle} \quad s \in S$$

Hvis $Z_2 = X \cdot Y$, så gælder at

$$Z_2(s) = X(s) \cdot Y(s), \quad \text{for alle} \quad s \in S$$

Hvis $Z_3 = aX$, for $a \in \mathbb{R}$, så gælder at

$$Z_3(s) = aX(s), \quad \text{for alle} \quad s \in S$$

Stokastisk variabel

Lad X og Y være stokastiske variable, som afbilder fra udfaldsrummet S til de reelle tal. Hvis $Z_1 = X + Y$, så gælder at

$$Z_1(s) = X(s) + Y(s), \quad \text{for alle} \quad s \in S$$

Hvis $Z_2 = X \cdot Y$, så gælder at

$$Z_2(s) = X(s) \cdot Y(s), \quad \text{for alle} \quad s \in S$$

Hvis $Z_3 = aX$, for $a \in \mathbb{R}$, så gælder at

$$Z_3(s) = aX(s), \quad \text{for alle} \quad s \in S$$

Hvis $Z_4 = X + b$, for $b \in \mathbb{R}$, så gælder at

$$Z_4(s) = X(s) + b, \quad \text{for alle} \quad s \in S$$

Middelværdi

Middelværdi af en stokastisk variabel er en lineær funktion.

Sætning (7.4.3 i Rosen)

Lad X og Y være stokastiske variable defineret på samme sandsynlighedsfelt, og lad $a \in \mathbb{R}$.
Så er

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ *og*
- $E(aX) = aE(X)$.

Middelværdi

Bevis.

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{s\in S} p(s)(X(s)+Y(s)) = \sum_{s\in S}(p(s)X(s)+p(s)Y(s)) \\
&= \sum_{s\in S} p(s)X(s) + \sum_{s\in S} p(s)Y(s) = E(X)+E(Y)
\end{aligned}
$$

Middelværdi

Bevis.

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{s\in S} p(s)(X(s)+Y(s)) = \sum_{s\in S}(p(s)X(s)+p(s)Y(s)) \\
&= \sum_{s\in S} p(s)X(s) + \sum_{s\in S} p(s)Y(s) = E(X)+E(Y)
\end{aligned}
$$

$$
E(aX) = \sum_{s\in S} p(s)aX(s) = a\sum_{s\in S} p(s)X(s) = aE(X)
$$

□

Middelværdi

Eksempel (Kast med to fair terninger)

Lad X være antal øjne på første terning og lad Y være antal øjne på anden terning. Da er $E(X) = E(Y) = 3.5$ (se evt. slide 23). Middelværdien af antal øjne ved kast med to fair terninger er da

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3.5 + 3.5 = 7$$

Middelværdi

Eksempel (*n* uafhængige Bernoulli forsøg)

Lad X_i være antal plat (P) i det i'te kast med en mønt og lad $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ være antal plat (P) efter udførelse af n kast med mønt.
Antag at sandsynlighed for succes er p.
Da er

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = p + p + \cdots + p = np$$

(Som Sætning 2 også angiver.)

$$\boxed{E(X_i) = 1 \cdot p + 0(1-p) = p}$$

Part III

Uafhængige stokastiske variable

Uafhængige stokastiske variable

$E_1 \quad E_2 \qquad p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)\, p(E_2)$

Definition

Lad X og Y være stokastiske variable defineret på samme sandsynlighedsfelt. Vi siger X og Y er **uafhængige** (independent) hvis

$$p(X = r_1 \wedge Y = r_2) = P(X = r_1) \cdot p(Y = r_2)$$

for alle tal r_1, r_2.

Uafhængige stokastiske variable

Definition

Lad X og Y være stokastiske variable defineret på samme sandsynlighedsfelt. Vi siger X og Y er **uafhængige** (independent) hvis

$$p(X = r_1 \wedge Y = r_2) = P(X = r_1) \cdot p(Y = r_2)$$

for alle tal r_1, r_2.

Betingelsen i definitionen siger at hvis $E = \{s \in S \mid X(s) = r_1\}$ og $F = \{s \in S \mid Y(s) = r_2\}$ så er

$$p(E \cap F) = p(E) \cdot p(F)$$

altså E og F er uafhængige, for alle r_1, r_2

Uafhængige stokastiske variable

Sætning (7.4.5 i Rosen)

Lad X og Y være uafhængige *stokastiske variable.*
Så er $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Uafhængige stokastiske variable

Sætning (7.4.5 i Rosen)

Lad X og Y være uafhængige *stokastiske variable.*
Så er $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Eksempel (Kast med to fair terninger)

Lad X være antal øjne på første terning og Y være antal øjne på anden terning. Da er $E(X) = E(Y) = 3.5 = \frac{7}{2}$.
X og Y er uafhængige stokastiske variable.

Uafhængige stokastiske variable

Sætning (7.4.5 i Rosen)

Lad X og Y være uafhængige *stokastiske variable.*
Så er $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Eksempel (Kast med to fair terninger)

Lad X være antal øjne på første terning og Y være antal øjne på anden terning. Da er $E(X) = E(Y) = 3.5 = \frac{7}{2}$.
X og Y er uafhængige stokastiske variable.
Middelværdien af produktet af antal øjne er da

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4} = 12.25$$

Uafhængige stokastiske variable

Eksempel (2 uafhængige Bernoulli forsøg)

Lad X være antal plat (P) og Y antal krone (K) ved to kast med en fair mønt.
Udfaldsrummet for 2 kast med en fair mønt er $S = \{PP, PK, KP, KK\}$.

Uafhængige stokastiske variable

Eksempel (2 uafhængige Bernoulli forsøg)

Lad X være antal plat (P) og Y antal krone (K) ved to kast med en fair mønt.
Udfaldsrummet for 2 kast med en fair mønt er $S = \{PP, PK, KP, KK\}$.
Observer at $X(PP) = 2$, $X(PK) = 1$, $X(KP) = 1$, $X(KK) = 0$ og $p(X = 0) = \frac{1}{4}$, $p(X = 1) = \frac{1}{2}$ og $p(X = 2) = \frac{1}{4}$, så

$$E(X) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1$$

$= p \cdot n$

$\frac{1}{2}$ 2

Tilsvarende gælder for Y, så $E(Y) = 1$.

Uafhængige stokastiske variable

Eksempel (2 uafhængige Bernoulli forsøg, forsat)

Men,

$$
\begin{aligned}
X(s)Y(s) &= 2 \cdot 0 = 0 \quad \textit{for} \quad s = PP \\
X(s)Y(s) &= 1 \cdot 1 = 1 \quad \textit{for} \quad s = PK \\
X(s)Y(s) &= 1 \cdot 1 = 1 \quad \textit{for} \quad s = KP \\
X(s)Y(s) &= 0 \cdot 2 = 0 \quad \textit{for} \quad s = KK
\end{aligned}
$$

Uafhængige stokastiske variable

Eksempel (2 uafhængige Bernoulli forsøg, forsat)

Men,

$$\begin{aligned}
X(s)Y(s) &= 2\cdot 0 = 0 \quad &\text{for} \quad s = PP\\
X(s)Y(s) &= 1\cdot 1 = 1 \quad &\text{for} \quad s = PK\\
X(s)Y(s) &= 1\cdot 1 = 1 \quad &\text{for} \quad s = KP\\
X(s)Y(s) &= 0\cdot 2 = 0 \quad &\text{for} \quad s = KK
\end{aligned}$$

Så

$$E(XY) = 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1\cdot 1 = E(X)E(Y)$$

X og Y er ikke uafhængige stokastiske variable.

Part IV

Varians

Varians

Definition

Lad X være en stokastisk variabel. Variansen af X er

$$V(X) = \sum_{s \in S} p(s)(X(s) - E(X))^2.$$

Varians

Eksempel (Kast med en 6-sidet fair terning)

Udfaldsrummet er $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p(i) = \frac{1}{6}$ *og* $X(i) = i$, *for alle* $i \in S$. *Desuden er* $E(X) = \frac{7}{2} = 3.5$

Varians

Eksempel (Kast med en 6-sidet fair terning)

Udfaldsrummet er $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p(i) = \frac{1}{6}$ *og* $X(i) = i$, *for alle* $i \in S$. *Desuden er* $E(X) = \frac{7}{2} = 3.5$

Variansen er

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \frac{1}{6}\cdot(1-\frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6}\cdot(2-\frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6}\cdot(3-\frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6}\cdot(4-\frac{7}{2})^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}\cdot(5-\frac{7}{2})^2 + \frac{1}{6}\cdot(6-\frac{7}{2})^2 \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{25}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{9}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{9}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{25}{4} \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{70}{4} = \frac{70}{24} = \frac{35}{12} \approx 2.9167
\end{aligned}
$$

Eksempel

Lad udfaldsrummet $S = \{a, b, c, d\}$ og lad X være en stokastisk variabel, hvorom det gælder at $X(a) = 0$, $X(b) = 3$, $X(c) = 2$ og $X(d) = -1$. Desuden vides at udfald i S er ligefordelte.

Hvad er $V(X)$?

$$E(X) = \frac{0+3+2+(-1)}{4} = 1$$

$$V(X) = \underbrace{\frac{1}{4}(0-1)^2}_{s=a} + \underbrace{\frac{1}{4}(3-1)^2}_{s=b} + \underbrace{\frac{1}{4}(2-1)^2}_{s=c} + \underbrace{\frac{1}{4}(-1-1)^2}_{s=d}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\,4$$

$$= \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + 1 = 2\frac{1}{2}$$

Varians

Korollar (7.4.1. i Rosen)

Lad $\mu = E(X)$. Så er

$$V(X) = E((X - \mu)^2).$$

$$E((X-\mu)^2) = \sum_{s \in S} p(s)(X(s)-\mu)^2$$

$$= \sum_{s \in S} p(s)(X(s) - E(X))^2$$

$$= V(X)$$

Varians

Korollar (7.4.1. i Rosen)

Lad $\mu = E(X)$. Så er

$$V(X) = E((X - \mu)^2).$$

Bevis.

Lad X være en stokastisk variabel over udfaldsrummet S og lad $\mu = E(X)$. Så er $Y = (X - \mu)^2$ også en stokastisk variabel over udfaldsrummet S. Da gælder at

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{s \in S} p(s) Y(s) = \sum_{s \in S} p(s)(X(s) - \mu)^2 \\ &= \sum_{s \in S} p(s)(X(s) - E(X))^2 = V(X) \end{aligned}$$

$\square$

Varians

Sætning (7.4.6 i Rosen)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Varians

Sætning (7.4.6 i Rosen)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Eksempel (1 Bernoulli forsøg)

Lad X være antal plat (P) ved et kast med en mønt. Udfaldsrummet er $S = \{P, K\}$.
Lad p være sandsynligheden for succes. Da er $p(P) = p$ og $p(K) = q = 1 - p$. Desuden er $X(P) = 1$ og $X(K) = 0$.

Varians

Sætning (7.4.6 i Rosen)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Eksempel (1 Bernoulli forsøg)

Lad X være antal plat (P) ved et kast med en mønt. Udfaldsrummet er $S = \{P, K\}$.
Lad p være sandsynligheden for succes. Da er $p(P) = p$ og $p(K) = q = 1 - p$. Desuden er $X(P) = 1$ og $X(K) = 0$.
Middelværdien er $E(X) = \underline{p \cdot 1} + \underline{q \cdot 0} = p$.

$E(X^2) = p$ $\qquad$ $X^2 = X$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2$

$= p(1-p) = pq$

Varians

Sætning (7.4.6 i Rosen)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Eksempel (1 Bernoulli forsøg)

Lad X være antal plat (P) ved et kast med en mønt. Udfaldsrummet er $S = \{P, K\}$.
Lad p være sandsynligheden for succes. Da er $p(P) = p$ og $p(K) = q = 1 - p$. Desuden er $X(P) = 1$ og $X(K) = 0$.
Middelværdien er $E(X) = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p$.
Observer at $X(s)^2 = X(s)$ for alle $s \in S$. Så $E(X^2) = E(X) = p$. Heraf er variansen

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

Varians

Eksempel

Lad X være en stokastisk variabel, hvorom det gælder at $X(s) = b$ for alle $s \in S$. Da er $E(X) = b$ og $X^2 = b^2$, så $E(X^2) = b^2$.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= b^2 - b^2 = 0$$

Varians

Eksempel

Lad X være en stokastisk variabel, hvorom det gælder at $X(s) = b$ for alle $s \in S$. Da er $E(X) = b$ og $X^2 = b^2$, så $E(X^2) = b^2$.
Variansen er

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = b^2 - b^2 = 0$$

Varians

Eksempel

Lad X være en stokastisk variabel, hvorom det gælder at $X(s) = b$ for alle $s \in S$. Da er $E(X) = b$ og $X^2 = b^2$, så $E(X^2) = b^2$.
Variansen er

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = b^2 - b^2 = 0$$

Eksempel

Lad X være en stokastisk variabel og lad $a \in \mathbb{R}$. Da er
$E(aX) = aE(X)$

Varians

Eksempel

Lad X være en stokastisk variabel, hvorom det gælder at $X(s) = b$ for alle $s \in S$. Da er $E(X) = b$ og $X^2 = b^2$, så $E(X^2) = b^2$. Variansen er

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = b^2 - b^2 = 0$$

Eksempel

Lad X være en stokastisk variabel og lad $a \in \mathbb{R}$. Da er $E(aX) = aE(X)$ og variansen er

$$\begin{aligned} V(aX) &= E((aX)^2) - E(aX)^2 = E(a^2X^2) - (aE(X))^2 \\ &= a^2E(X^2) - a^2E(X)^2 \\ &= a^2(E(X^2) - E(X)^2) = a^2V(X) \end{aligned}$$

Uafhængige stokastiske variable

Definition

Lad X og Y være stokastiske variable defineret på samme sandsynlighedsfelt. Vi siger X og Y er **uafhængige** (independent) hvis

$$p(X = r_1 \wedge Y = r_2) = P(X = r_1) \cdot p(Y = r_2)$$

for alle tal r_1, r_2.

Sætning (7.4.7 i Rosen)

Lad X og Y være uafhængige *stokastiske variable.*
Så er $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Uafhængige stokastiske variable

Eksempel (n uafhængige Bernoulli forsøg)

Lad X_i være antal plat (P) i det i'te kast med en mønt og lad $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ være antal plat (P) efter udførelse af n kast med mønt.
Antag at sandsynlighed for succes er p og sandsynligheden for fiasko er q.

Uafhængige stokastiske variable

Eksempel (*n* uafhængige Bernoulli forsøg)

Lad X_i være antal plat (P) i det i'te kast med en mønt og lad $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ være antal plat (P) efter udførelse af n kast med mønt.
Antag at sandsynlighed for succes er p og sandsynligheden for fiasko er q.
Da er

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) = pq + pq + \cdots + pq = npq$$

Bernoulli forsøg

Et **Bernoulli forsøg** har to mulige udfald: succes og fiasko.
Forsøget udføres n gange.
Lad X være en stokastisk variabel hvor $X(s)$ angiver antal succeser ved udførelse af en række s af n uafhængige Bernoulli forsøg.
Lad p være sandsynligheden for succes i et Bernoulli forsøg og lad $q = 1 - p$ være sandsynligheden for fiasko.

- Så er sandsynligheden for præcis k succeser:

$$p(X = k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

- Middelværdien af X er $E(X) = np$.
- Variansen af X er $V(X) = npq$.