# Lineær optimering: Simplexalgoritme, Afsnit 9.3

05. may 2021

Sandsynlighedsteori og lineær algebra (SLIAL)

Forår 2021

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

# Del I

# Repetition

# Lineær optimeringsproblem



$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c \cdot x, \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

*Objektfunktion*: $c \cdot x$

*Mulighedsområdet* (feasible set):

$$\mathcal{F} = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0 \}$$

*Mulig løsning* (feasible solution): $x \in \mathcal{F}$

*Løsning* (solution): $\bar{x} \in \mathcal{F}$ således at

$$c^T \bar{x} = \max_{x \in \mathcal{F}} c^T x$$

# Lineær optimeringsproblem



$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & c \cdot x, \\
\text{subject to} \quad & Ax \leq b, \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

*Kanonisk form*: som ovenfor. Dvs:

- $\max$ og ikke $\min$
- kun $\leq$ bibetingelser
- alle variabler er ikke-negative

Alle lin. optimeringsproblemer kan opskrives i kanonisk form.

# Dualitet



LPer kommer i par:

$$\begin{array}{llcll} \text{maximize} & c \cdot x, & \qquad & \text{minimize} & b \cdot y, \\ \text{subject to} & x \in \mathcal{F} & & \text{subject to} & y \in \mathcal{F}^* \end{array}$$

hvor

$$\mathcal{F} = \{\, x \colon Ax \leq b, x \geq 0 \,\}$$
$$\mathcal{F}^* = \{\, y \colon A^T y \geq c, y \geq 0 \,\}$$

- $$\forall x \in \mathcal{F}, y \in \mathcal{F}^* : \boxed{c \cdot x \leq b \cdot y}$$
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\mathcal{F}^* \neq \emptyset \implies$ begge problemer har optimale løsninger.
- $\bar{x} \in \mathcal{F}$ løser primal, $\bar{y} \in \mathcal{F}^*$ løser dual $\iff \boxed{c \cdot \bar{x} = b \cdot \bar{y}}$.

# Del II

## Simplexalgoritmen
## Afsnit 9.3

# Oversikt



- Opfundet af George Dantzig i 1947 - før datamaskiner!
- Er i brug siden-fungerer virkelig godt i praxis
- I værste tilfælde kræver $\binom{n}{m}$ iterationer, hvor $n \geq m$ er antallet af ubekendte og bibetingelser - men dette sker sjældent
- Naum Shor i 1972 oppfundet ellipsoid method, som har væsentlig bedre teoretisk kompleksitet, men er supertreg i praxis
- Narendra Karmarkar i 1984 oppfundet indrepunktsmetoder for lineær optimering, som både har godt “værste tilfælde” kompleksitet og er hurtig i praxis. Problemer med $10^9$ variabler/bibetingelser kan løses p.t.

# Slackvariabler



Vi vet at løsningen findes i hjørner af det mulige område. Kan vi karakterisere dem på en algebraisk, og ikke geometrisk, måte?
Trin 1: omskriver kanonisk form/uligheder til ligheder ved å introdusere slackvariabler:

$$\{\, x : Ax \leq b, x \geq 0 \,\} \quad \Longleftrightarrow \quad \{\, (x, s) : Ax + s = b, x \geq 0, s \geq 0 \,\}$$

# Eksempel fra sidst: kan løses grafisk

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ & x_1 + 2x_2 \le 8, \\ & x_1 + x_2 \le 4.5, \\ & x \ge 0. \end{aligned}$$

Løsning: $(x_1, x_2) = (1, 3.5)$, $c \cdot x = 12.5$

https://www.geogebra.org/calculator/zysewucp

# Eksempel fra sidst: slackvariabler



3 bibetingelser = 3 slackvariabler

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & \\
& 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 12, \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 8, \\
& x_1 + x_2 + s_3 = 4.5, \\
& x \geq 0, s \geq 0.
\end{aligned}
$$

Løsning: $(x_1, x_2) = (1, 3.5) \implies s_1 = 12 - 3 - 7 = 2$, $s_2 = 8 - 1 - 7 = 0$, $s_3 = 4.5 - 1 - 3.5 = 0$.

# Eksempel fra sidst: matrix form

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{3} & \phantom{2} & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 4.5 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c \cdot \tilde{x} \\ \text{subject to} \quad & \\ & A\tilde{x} = b \\ & \tilde{x} \geq 0. \end{aligned}$$

hvor $\tilde{x} \in \mathbb{R}^5$ inkluderer både $x \in \mathbb{R}^2$ og $s \in \mathbb{R}^3$

# Eksempel fra sidst: ekstrempunkter



Mulighedsområdet har 5 ekstrempunkter:

1. $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 12, 8, 4.5)$
2. $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (4, 0, 0, 4, 0.5)$
3. $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (3, 1.5, 0, 2, 0)$
4. $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (1, 3.5, 2, 0, 0)$
5. $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 4, 4, 0, 0.5)$

# Eksempel fra sidst: ekstrempunkter

Algebraisk karakterisering:

1. $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (\overset{x_1}{0}, \overset{x_2}{0}, \overset{s_1}{12}, \overset{s_2}{8}, \overset{s_3}{4.5})$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Bs + \underline{N}x = b, \quad \underline{x = 0} \quad \Longrightarrow \quad \underline{s = B^{-1}b = b}$$

# Eksempel fra sidst: ekstrempunkter



Algebraisk karakterisering:

1. $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 12, 8, 4.5)$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Bs + Nx = b, \quad x = 0 \quad \Longrightarrow \quad s = B^{-1}b = b$$

2. $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \\ (4, & 0, & 0, & 4, & 0.5) \end{array}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & s_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B \begin{bmatrix} x_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \cancel{+ N \begin{bmatrix} x_2 \\ s_1 \end{bmatrix}} = b, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ s_1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

# Basisløsninger



Lad oss oppdele alle variabler $\tilde{x} = (x, s)$/søjler i $A$ i to grupper (kan gøres på mange måter):

- Basisvariabler, $i_B$.
  - Antallet af basisvariabler=antallet af rækker i $A$
  - Søjler svarende til basisvariabler er lineært uafhengige
- Ikke-basisvariabler, $i_N$=resten

# Mulige basisløsninger



Vi skriver

$$Ax = Bx_B + Nx_N = b$$

Da basissøjler er lin. uafhengige og $B$ er kvadratisk $\implies$ invertibel.

Antag at $x_N = 0 \implies \boxed{x_B = B^{-1}b.}$

Sådan $\tilde{x} = (x_B, x_N)$ oppfylder $\boxed{A\tilde{x} = b}$. Hvis i tillegg $\tilde{x} \geq 0$, dvs $x_B \geq 0$ da $\tilde{x} \in \mathcal{F}$ kaldes for mulig basisløsning!

# Mulige basisløsninger



- Mulige basisløsninger svarer til ekstrempunkter af mulighedsområdet
- Det kan være flere mulige basisløsninger som svarer til samme ekstrempunkt
- Antallet af mulige basisløsninger $\leq \binom{n}{m}$, hvis størrelse af $A$ er $m \times n$, $m \leq n$
- Løsningen til optimeringsproblemet findes imellem ekstrempunkter$\sim$ mulige basisløsninger

Simplexmetoden er bare en systematisk måde å "besøge" mulige basisløsninger

# Optimalitetsbetingelsene



Hvordan kan vi afgøre, om en mulig basisløsning optimal (uten dualitet, uten å sammenligne med andre ekstrempunkter)

$$Bx_B + Nx_N = b \implies x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$c^Tx = c_B^Tx_B + c_N^Tx_N = c_B^T[B^{-1}b - B^{-1}Nx_N] + c_N^Tx_N$$

$$= \underbrace{c_B^TB^{-1}b}_{\text{uafhengig fra } x_N} + [c_N - N^TB^{-T}c_B]^T \underbrace{x_N}_{\geq 0}.$$

- Hvis alle komponenter i vektoren $c_N - N^TB^{-T}c_B$ er $\leq 0$ så kan vi ikke gøre objektfunktionen større ved å endre $x_N$ fra 0. Dvs denne punk er en løsning
- Hvis det findes en komponent i $c_N - N^TB^{-T}c_B$ som er $> 0$ så kan vi gøre objektfunktionen større ved å endre denne komponent i $x_N$ fra 0 til $> 0$

# Eksempel: ekstrempunkt 1

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, \overset{s_1}{12}, \overset{s_2}{8}, \overset{s_3}{4.5})$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c_N = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c_N - N^T B^{-T} c_B = c_N = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ikke optimal da det findes koordinter $> 0$

# Eksempel: ekstrempunkt 4

$x_1$ $x_2$ $s_1$

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (1, 3.5, 2, 0, 0)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c_N - N^T B^{-T}} c_B = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

optimal da alle koordinter $\leq 0$

# Trin af simpleksalgoritmen



Vi befinder oss i en mulig basisløsning, som ikke er optimal

Dvs det findes en komponent i $c_N - N^T B^{-T} c_B$ som er $> 0$

Kan udbedre objektfunktionen ved å bruge værdi $> 0$ for denne $(x_N)_i$; dvs denne komponenten skal inngå i basisvariabler istedenfor.

Skal bare finde, hviklet basisvariable skal ekskluderes fra $i_B$ - dette gjøres ved å se, hviklet basisvariable blir 0 når $(x_N)_i$ medbringes i basis

# I praxis:



Vi undgår å løse nye systemer af lineære ligninger (beregne $B^{-1}$) hver gang vi endrer basis ved hjælp af "pivotering"/rækkeoperationer som i Gausselimination.

# Del III

# Simplex tableau: traditionel simplex notation

# Eksempel fra sidst: kanonisk form



$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\
& x_1 + 2x_2 \leq 8, \\
& x_1 + x_2 \leq 4.5, \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Løsning: $(x_1, x_2) = (1, 3.5)$, $c \cdot x = 12.5$

# Eksempel fra sidst: slack variabler



$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & \\
& 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 12, \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 8, \\
& x_1 + x_2 + s_3 = 4.5, \\
& x \geq 0, s \geq 0
\end{aligned}
$$

# Eksempel fra sidst: ny variabel for objektfunktion



$$M = 2x_1 + 3x_2$$

eller

$$\boxed{M - 2x_1 - 3x_2 = 0}$$

# Simplekstableau



$i_B = (s_1, s_2, s_3)$

$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ M
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & M & b \\
\hline
3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4.5 \\
\hline
-2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\quad \leftarrow \text{objekt.}
$$

# Simplekstableau



$i_B = (s_1, s_2, s_3)$

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ M \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & \color{blue}{s_1} & \color{blue}{s_2} & \color{blue}{s_3} & M & b \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4.5 \\ \hline -2 & \color{red}{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Vælger mest negative værdi i sidste række: vil inkludere $x_2$ i basis

# Simplekstableau

$\frac{12}{2} = 6, \quad \underline{\underline{\frac{8}{2} = 4}}, \quad \frac{4.5}{1} = 4.5$

$i_B = (s_1, s_2, s_3)$

$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ M
\end{array}
\left[
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & M & b \\
\hline
3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4.5 \\
\hline
-2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\right]
$$

- Vælger mest negative værdi i sidste række: vil inkludere $x_2$ i basis
- Til å finde hvilket variable skal “ud” fra basis, vi sammenligner $b_i/a_{i2}$, og vælger det mindste; det er $s_2$

# Simplekstableau



$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ M
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & \color{blue}{s_1} & \color{blue}{s_2} & \color{blue}{s_3} & M & b \\
\hline
3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\
0.5 & \color{red}{1} & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 4 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4.5 \\
\hline
-2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

- Vi deler række 2 med 2

# Simplekstableau



$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ M
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & M & b \\
\hline
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 4 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4.5 \\
\hline
-2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

- Vi subtragerer $2\times$ række 2 fra række 1

# Simplekstableau



$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ M
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & M & b \\
\hline
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 4 \\
0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0.5 \\
\hline
-2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

- Vi subtragerer $1\times$ række 2 fra række 3

# Simplekstableau



$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & M & b \\
\hline
s_1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
s_2 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 4 \\
s_3 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0.5 \\
\hline
M & -0.5 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 12
\end{array}
$$

- Vi subtragerer $-3\times$ række 2 fra række 4.
- Pivotering er ny fullført, da alle elementer i søjle 2 er nul, bortsett fra 1 i position $(2, 2)$.
- Vi står i ny ekstrempunkt/mulig basisløsning nu ($s_2$ ud af basis; $x_2$ ind). Objektfunktion er lig med 12.

# Simplekstableau



$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ x_2 \\ s_3 \\ M
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & M & b \\
\hline
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 4 \\
0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0.5 \\
\hline
-0.5 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 12
\end{array}\right]
$$

- Denne punkt er ikke optimal pga $-0.5 < 0$ i sidste række; vil inkludere $x_1$ i basis

# Simplekstableau



$\frac{4}{2} = 2, \quad \frac{4}{0.5} = 8, \quad \frac{0.5}{0.5} = 1$

$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ x_2 \\ s_3 \\ M
\end{array}
\left[
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & M & b \\
\hline
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 4 \\
0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0.5 \\
\hline
-0.5 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 12
\end{array}
\right]
$$

- Denne punkt er ikke optimal pga $-0.5 < 0$ i sidste række; vil inkludere $x_1$ i basis
- Ser på $b/a_{i1}$ og vælger det mindste; $s_3$ skal ud

# Simplekstableau



$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ x_2 \\ s_3 \\ M
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & {\color{blue}x_2} & {\color{blue}s_1} & s_2 & {\color{blue}s_3} & M & b \\
\hline
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 4 \\
{\color{red}1} & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\
\hline
-0.5 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 12
\end{array}\right]
$$

- Ganger række 3 med 2

# Simplekstableau



$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ x_2 \\ s_3 \\ M
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & M & b \\
\hline
0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 0 & 2 \\
0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 4 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\
\hline
-0.5 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 12
\end{array}\right]
$$

- Subtragerer 2× række 3 fra række 1

# Simplekstableau



$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ x_2 \\ s_3 \\ M
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & M & b \\
\hline
0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3.5 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\
\hline
-0.5 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 12
\end{array}\right]
$$

- Subtragerer $0.5\times$ række 3 fra række 2

# Simplekstableau



$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ x_2 \\ s_3 \\ M
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & {\color{blue}x_2} & {\color{blue}s_1} & s_2 & {\color{blue}s_3} & M & b \\
\hline
0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3.5 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\
\hline
{\color{green}0} & {\color{green}0} & {\color{green}0} & {\color{green}2} & {\color{green}1} & {\color{green}0} & {\color{green}12.5}
\end{array}\right]
$$

- Subtragerer $-0.5\times$ række 3 fra række 4
- Pivotering er ny fullført, da alle elementer i søjle 1 er nul, bortsett fra 1 i position $(3, 1)$.
- Vi står i ny ekstrempunkt/mulig basisløsning nu ($s_3$ ud af basis; $x_1$ ind). Objektfunktion er lig med 12.5.

# Simplekstableau



$$
\begin{array}{c}
\\
s_1 \\
x_2 \\
x_1 \\
M
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
\color{blue}{x_1} & \color{blue}{x_2} & \color{blue}{s_1} & s_2 & s_3 & M & b \\
\hline
0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3.5 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 12.5
\end{array}\right]
$$

- Det er en optimal løsning fordi alle koefficienter i sidste række er $\geq 0$
- Værdier av basisvariabler står i sidste søjle; dvs $(s_1, x_2, x_1) = (2, 3.5, 1)$
- Objektfunktion $M = 12.5$

# Praktiske detaljer



- Hvis $b \not\geq 0$, kan det være vanskeligt at finde en mulig basisløsning for å begynne algoritmen. Søg efter “Two phase simplex method” hvis I vill vite mer.
- Det kan skje, at vi står i det samme ekstrempunkt selvom vi hadde pivoteret til et annet mulige basisløsning. Lidt mer bookkeeping kreves for at unngå “cycling”