Introduktion til Sandsynlighedsteori, Afsnit 7.2 [Ros]

5. marts 2021

Sandsynlighedsteori og lineær algebra (SLIAL)

Forår 2021

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Viktigste begrepp

- Betingede sandsynlighed
- Uafhængige hædelser
- Bernoulli forsøg
- Stokastiske variable

Part I

Repetition fra sidst

Sandsynlighedsfelter

Definition

Et **sandsynlighedsfelt** består af

- Et **udfaldsrum**: en *endelig* mængde $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, og
- En **sandsynlighedsfunktion**: en funktion p med definitionsmængde S, som opfylder $p(a_i)$ er et reelt tal, $0 \leq p(a_i) \leq 1$, for ethvert a_i i S.
  Desuden er

$$\sum_{i=1}^{n} p(a_i) = p(a_1) + \ldots + p(a_n) = 1.$$

Hændelser

En delmængde E af S kaldes en **hændelse**.
En hændelse har sandsynligheden:

$$p(E) = \sum_{x \in E} p(x).$$

Hændelser

En delmængde E af S kaldes en **hændelse**.
En hændelse har sandsynligheden:

$$p(E) = \sum_{x \in E} p(x).$$

Eksempel

$0.2 + 0.3 + 0.1 + 0.4$
$= 1$

Lad $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$*, hvor* $p(a_1) = 0.2$, $p(a_2) = 0.3$, $p(a_3) = 0.1$ *og* $p(a_4) = 0.4$.
Lad $E \subseteq S$*, hvor* $E = \{a_1, a_2, a_4\}$.

Hændelser

En delmængde E af S kaldes en **hændelse**.
En hændelse har sandsynligheden:

$$p(E) = \sum_{x \in E} p(x).$$

Eksempel

Lad $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, *hvor* $p(a_1) = 0.2$, $p(a_2) = 0.3$, $p(a_3) = 0.1$ *og* $p(a_4) = 0.4$.
Lad $E \subseteq S$, *hvor* $E = \{a_1, a_2, a_4\}$. *Da er*

$$p(E) = p(a_1) + p(a_2) + p(a_4) = 0.2 + 0.3 + 0.4 = 0.9$$

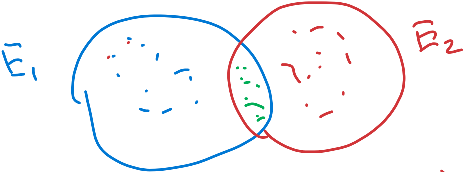
Komplement og union

$p(S) = 1$

$p(E) + p(\overline{E}) = p(S) = 1$

Sætning

- $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$, *hvor* $\overline{E}$ *betegner komplementærmængden af* E.
- $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$.



$p(E_1) + p(E_2) = p(E_1 \cup E_2)$
$- p(E_1 \cap E_2)$

Union

Sætning

Hvis $E_1, E_2, \ldots$ er en følge af parvise disjunkte hændelser i et udfaldsrum S, så er

$$p\left(\bigcup_i E_i\right) = p\,(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = \sum_i p(E_i)$$

Union

Eksempel (Kast med en 6-sidet terning)

Udfaldsrummet er $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, og $p(a_i) = \frac{1}{6}$ for $a_i \in S$. Lad $E_1 = \{1,2\}$, $E_2 = \{3\}$, $E_3 = \{4\}$ og $E_4 = \{2,4,6\}$. Da er

$$\begin{aligned} p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= p(\{1,2\} \cup \{3\} \cup \{4\}) = \underline{p(\{1,2,3,4\})} \\ &= p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

og

$$\underline{p(E_1)} + \underline{p(E_2)} + \underline{p(E_3)} = p(\{1,2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Hændelserne E_1, E_2 og E_3 er parvise disjunkte.

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ $E_1 \cap E_3 = \emptyset$

$E_2 \cap E_3 = \emptyset$

Union

Eksempel (Kast med en 6-sidet terning, forsat)

Men,

$$\begin{aligned} p(E_1 \cup E_4) &= p(\{1,2\} \cup \{2,4,6\}) = p(\{1,2,4,6\}) \\ &= p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

og

$$p(E_1) + p(E_4) = p(\{1,2\}) + p(\{2,4,6\}) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6} \neq \frac{2}{3}$$

Hændelserne E_1 og E_4 er ikke disjunkte.

$E_1 \cap E_4 = \{2\}$

Eksempler

Eksempel (Kasse med slikkepinde)

- *Du har en kasse med slikkepinde.*
- *Der er slikkepinde med lakridssmag og karamelsmag.*
- *Der er 5 gange så mange slikkepinde med lakridsmag som karamelsmag.*

Eksempler

Eksempel (Kasse med slikkepinde)

- *Du har en kasse med slikkepinde.*
- *Der er slikkepinde med lakridssmag og karamelsmag.*
- *Der er 5 gange så mange slikkepinde med lakridsmag som karamelsmag.*

Hvad er sandsynligheden for, at den tilfældige slikkepind du tager smager af karamel?

Eksempler

Eksempel (Kasse med slikkepinde)

- *Du har en kasse med slikkepinde.*
- *Der er slikkepinde med lakridssmag og karamelsmag.*
- *Der er 5 gange så mange slikkepinde med lakridsmag som karamelsmag.*

Hvad er sandsynligheden for, at den tilfældige slikkepind du tager smager af karamel? Lad p være sandsynligheden for at en slikkepind smager af karamel. Så er

$$5p = 1 - p$$

hvor $1 - p$ *er sandsynligheden for at slikkepinden smager af lakrids.*

Eksempler

Eksempel (Kasse med slikkepinde)

- *Du har en kasse med slikkepinde.*
- *Der er slikkepinde med lakridssmag og karamelsmag.*
- *Der er 5 gange så mange slikkepinde med lakridsmag som karamelsmag.*

Hvad er sandsynligheden for, at den tilfældige slikkepind du tager smager af karamel? Lad p være sandsynligheden for at en slikkepind smager af karamel. Så er

$$5p = 1 - p$$

hvor $1 - p$ er sandsynligheden for at slikkepinden smager af lakrids. Heraf er

$$5p = 1 - p \quad \Leftrightarrow \quad 6p = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{p = \frac{1}{6}}$$

Part II

Betingede sandsynlighed

Betingede sandsynlighed

Lad E og F være hændelser i udfaldsrummet S.
Hvis vi ved, at udfaldet af vores eksperiment er i F, hvad er så sandsynligheden for at det er i E , altså i $E \cap F$?

Betingede sandsynlighed

Lad E og F være hændelser i udfaldsrummet S.
Hvis vi ved, at udfaldet af vores eksperiment er i F, hvad er så sandsynligheden for at det er i E , altså i $E \cap F$?

Definition

Den **betingede sandsynlighed** (conditional probability) for E givet F er

$$p(E \mid F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$

Betingede sandsynlighed

Eksempel (Børn)

En familie har to børn. Hvis det ene barn er en dreng, hvad er så sandsynligheden for at det andet barn også er en dreng?

Betingede sandsynlighed

Eksempel (Børn)

En familie har to børn. Hvis det ene barn er en dreng, hvad er så sandsynligheden for at det andet barn også er en dreng?
Mulige udfald: $S = \{DD, DP, PD, PP\}$.

Betingede sandsynlighed

Eksempel (Børn)

En familie har to børn. Hvis det ene barn er en dreng, hvad er så sandsynligheden for at det andet barn også er en dreng?
Mulige udfald: $S = \{DD, DP, PD, PP\}$.
Vi ved, at familien har en dreng, så $F = \{DD, DP, PD\}$*, og vi søger sandsynligheden for to drenge, så* $E = \{DD\}$*. Fælles mængden mellem* E *og* F *er* $E \cap F = \{DD\}$.
Alle muligheder i udfaldsrummet S *er lige sandsynlige, så*

$$p(E) = \frac{1}{4}, \quad p(F) = \frac{3}{4} \quad \text{og} \quad p(E \cap F) = \frac{1}{4}$$

Betingede sandsynlighed

Eksempel (Børn)

En familie har to børn. Hvis det ene barn er en dreng, hvad er så sandsynligheden for at det andet barn også er en dreng?
Mulige udfald: $S = \{DD, DP, PD, PP\}$.
Vi ved, at familien har en dreng, så $F = \{DD, DP, PD\}$*, og vi søger sandsynligheden for to drenge, så* $E = \{DD\}$*. Fælles mængden mellem* E *og* F *er* $E \cap F = \{DD\}$.
Alle muligheder i udfaldsrummet S *er lige sandsynlige, så*

$$p(E) = \frac{1}{4}, \quad p(F) = \frac{3}{4} \quad og \quad p(E \cap F) = \frac{1}{4}$$

Sandsynligheden for at familien har to drenge, givet at de allerede har en, er derfor

$$p(E \mid F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Uafhængig sandsynlighed

Hvis $p(E) = p(E \mid F)$ så er sandsynligheden for hændelsen E uafhængig af om hændelsen F indtræffer.

Uafhængig sandsynlighed

Hvis $p(E) = p(E \mid F)$ så er sandsynligheden for hændelsen E uafhængig af om hændelsen F indtræffer.

Definition

Hændelserne E og F siges at være **uafhængige** (independent) hvis

$$p(E \cap F) = p(E)p(F).$$

$$\underline{p(E|F)} = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{p(E)\cancel{p(F)}}{\cancel{p(F)}} = \underline{p(E)}$$

Uafhængig sandsynlighed

Eksempel (Urne med bolde, med tilbagelægning)

En urne indeholder 5 *bolde,* 2 *røde og* 3 *blå. Der er lige stor sandsynlighed for at tage en hvilken som helst bold op af urnen, så* $p(rød) = \frac{2}{5}$ *og* $p(blå) = \frac{3}{5}$.

Hvad er sandsynligheden for at tage en rød bold, hvis du i forrige eksperiment tog en blå bold op?

Uafhængig sandsynlighed

Eksempel (Urne med bolde, med tilbagelægning)

En urne indeholder 5 bolde, 2 røde og 3 blå. Der er lige stor sandsynlighed for at tage en hvilken som helst bold op af urnen, så $p(rød) = \frac{2}{5}$ *og* $p(blå) = \frac{3}{5}$.

Hvad er sandsynligheden for at tage en rød bold, hvis du i forrige eksperiment tog en blå bold op?

Da hvert eksperiment er uafhængig af forrige eksperimenter, så er $p(rød \cap \text{sidste bold var blå}) = p(rød)p(\text{sidste bold var blå})$. *Heraf er*

$$
\begin{aligned}
p(rød \mid \text{sidste bold var blå}) &= \frac{p(rød \cap \text{sidste bold var blå})}{p(\text{sidste bold var blå})} \\
&= \frac{p(rød)p(\text{sidste bold var blå})}{p(\text{sidste bold var blå})} = p(rød) = \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

Uafhængig sandsynlighed

Definition

Hændelserne $E_1, E_2, \ldots, E_k$ siges at være parvis uafhængige hvis $p(E_i \cap E_j) = p(E_i)p(E_j)$ for alle $1 \leq i < j \leq k$.
De er **indbyrdes uafhængige** (mutually independent) hvis

$$p(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_m}) = p(E_{i_1})p(E_{i_2}) \cdots p(E_{i_m}),$$

for alle $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq k$

Uafhængig sandsynlighed

Eksempel (Fair oktaeder)

Kast et oktaeder ("terning" med 8 sider) med sider $1, 2, \ldots, 8$ *hver med sandsynlighed* $\frac{1}{8}$.
Lad

$$E_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E_2 = \{1, 2, 5, 6\}, \quad E_3 = \{1, 2, 7, 8\}$$

Da er $p(E_1) = p(E_2) = p(E_3) = \frac{1}{2}$.

Uafhængig sandsynlighed

Eksempel (Fair oktaeder)

Kast et oktaeder ("terning" med 8 sider) med sider $1, 2, \dots, 8$ *hver med sandsynlighed* $\frac{1}{8}$.
Lad

$$E_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E_2 = \{1, 2, 5, 6\}, \quad E_3 = \{1, 2, 7, 8\}$$

Da er $p(E_1) = p(E_2) = p(E_3) = \frac{1}{2}$.
For $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ *er* $E_i \cap E_j = \{1, 2\}$, *så*

$$\underline{p(E_i \cap E_j)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{p(E_i)}\underline{p(E_j)}$$

Altså er E_1, E_2 *og* E_3 *parvis uafhængige.*

Uafhængig sandsynlighed

Eksempel (Fair oktaeder)

Kast et oktaeder ("terning" med 8 sider) med sider $1, 2, \ldots, 8$ *hver med sandsynlighed* $\frac{1}{8}$.
Lad

$$E_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E_2 = \{1, 2, 5, 6\}, \quad E_3 = \{1, 2, 7, 8\}$$

Da er $p(E_1) = p(E_2) = p(E_3) = \frac{1}{2}$.
For $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ *er* $E_i \cap E_j = \{1, 2\}$, *så*

$$p(E_i \cap E_j) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = p(E_i)p(E_j)$$

Altså er E_1, E_2 *og* E_3 *parvis uafhængige.*
Men,

$$p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(\{1, 2\}) = \frac{1}{4} \neq \underbrace{p(E_1)}_{1/2}\underbrace{p(E_2)}_{1/2}\underbrace{p(E_3)}_{1/2} = \frac{1}{8}$$

så E_1, E_2 *og* E_3 *er ikke indbyrdes uafhængige.*

Uafhængig sandsynlighed

Eksempel (Forsat)

Lad nu

$$F_1 = \{1, 2, 3, 5\}, \quad F_2 = \{1, 2, 4, 6\}, \quad F_3 = \{1, 3, 4, 7\}$$

Da er $p(F_1) = p(F_2) = p(F_3) = \frac{1}{2}$.

$F_1 \cap F_2 = \{1,2\}$

$F_1 \cap F_3 = \{1,3\}$

$F_2 \cap F_3 = \{1,4\}$

$$\overset{1/4}{p(F_1 \cap F_2)} = \overset{1/2}{p(F_1)} \cdot \overset{1/2}{p(F_2)}$$

Uafhængig sandsynlighed

Eksempel (Forsat)

Lad nu

$$F_1 = \{1, 2, 3, 5\}, \quad F_2 = \{1, 2, 4, 6\}, \quad F_3 = \{1, 3, 4, 7\}$$

Da er $p(F_1) = p(F_2) = p(F_3) = \frac{1}{2}$.
$F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{1\}$ *så*

$$p(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = p(F_1)p(F_2)p(F_3)$$

så F_1, F_2 *og* F_3 *er indbyrdes uafhængige.*

Uafhængig sandsynlighed

Desuden er

$$\begin{aligned}
p(F_1 \cap F_2) &= p(\{1,2\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = p(F_1)p(F_2) \\
p(F_1 \cap F_3) &= p(\{1,3\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = p(F_1)p(F_3) \\
p(F_2 \cap F_3) &= p(\{1,4\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = p(F_2)p(F_3)
\end{aligned}$$

så F_1, F_2 og F_3 er også parvis uafhængige.

Part III

Bernoulli forsøg

Bernoulli forsøg

Et **Bernoulli forsøg** har to mulige udfald: succes og fiasko.
Udfør forsøget n gange.
De n forsøg antages at være indbyrdes uafhængige.

Bernoulli forsøg

Et **Bernoulli forsøg** har to mulige udfald: succes og fiasko.
Udfør forsøget n gange.
De n forsøg antages at være indbyrdes uafhængige.

Eksempel (Kast med en fair mønt)

Kast en mønt 3 gange. Antag at sandsynligheden for at få krone (K) er q og sandsynligheden for at få plat (P) er $1 - q$. Udfaldsrummet er $S = \{PPP, PPK, PKP, KPP, KKP, KPK, PKK, KKK\}$.

Bernoulli forsøg

Et **Bernoulli forsøg** har to mulige udfald: succes og fiasko.
Udfør forsøget n gange.
De n forsøg antages at være indbyrdes uafhængige.

Eksempel (Kast med en fair mønt)

Kast en mønt 3 gange. Antag at sandsynligheden for at få krone (K) er q og sandsynligheden for at få plat (P) er $1-q$. *Udfaldsrummet er* $S = \{PPP, PPK, PKP, KPP, KKP, KPK, PKK, KKK\}$.
Da er sandsynligheden for at få udfaldet PKP givet ved

$$p(PKP) = \underline{p(P)p(K)p(P)} = (1-q)q(1-q) = q(1-q)^2,$$

mens sandsynligheden for at få $2P$ *og* $1K$ *(rækkefølge underordnet) er givet ved*

$$p(\{PPK, PKP, KPP\}) = 3p(P)p(K)p(P) = 3(1-q)q(1-q) = \underline{3q(1-q)^2}$$

Bernoulli forsøg
Binomialkoefficienter

For at bestemme sandsynligheden for succes (eller fiasko) et bestemt antal gange, har vi brug for at tælle hvor mange forskellige muligheder der er for succes (eller fiasko).

Bernoulli forsøg

Binomialkoefficienter

For at bestemme sandsynligheden for succes (eller fiasko) et bestemt antal gange, har vi brug for at tælle hvor mange forskellige muligheder der er for succes (eller fiasko).

Antal måder man kan vælge k elementer (hvor rækkefølgen er uden betydning) fra en mængde af n er

$$\binom{n}{k} = C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Bernoulli forsøg

Sætning (7.2.2 fra Rosen)

Hvis sandsynligheden for succes i et Bernoulli forsøg betegnes p, og sandsynlighed for fiasko $q = 1 - p$.
Så er sandsynligheden for præcis k succeser ved n Bernoulli forsøg

$$b(k; n, p) := C(n, k)p^k q^{n-k}.$$

Denne sandsynlighedsfunktion kaldes **binomialfordeling**.

Bernoulli forsøg

Bevis.

- Ved udførelse af et Bernoulli forsøg er resultatet en følge af udfald $t_1, t_2, \dots, t_n$, hvor $t_i = s$ ved succes og $t_i = f$ ved fiasko, for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Bernoulli forsøg

Bevis.

- Ved udførelse af et Bernoulli forsøg er resultatet en følge af udfald $t_1, t_2, \ldots, t_n$, hvor $t_i = s$ ved succes og $t_i = f$ ved fiasko, for $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Hvert forsøg er uafhængig af alle andre forsøg. Sandsynligheden for hver enkelt ordnet kombinationsmulighed er derfor

$$p(k \text{ udfald af susses og } n-k \text{ udfald af fiasko}) = p^k q^{n-k}$$

Bernoulli forsøg

Bevis.

- Ved udførelse af et Bernoulli forsøg er resultatet en følge af udfald $t_1, t_2, \ldots, t_n$, hvor $t_i = s$ ved succes og $t_i = f$ ved fiasko, for $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Hvert forsøg er uafhængig af alle andre forsøg. Sandsynligheden for hver enkelt ordnet kombinationsmulighed er derfor

$$p(k \text{ udfald af susses og } n - k \text{ udfald af fiasko}) = p^k q^{n-k}$$

- Da rækkefølgen af udfaldene er underordnet, er sandsynligheden for en følge af udfald som indeholder k succes og $n - k$ fiasko, givet ved

$$C(n, k) p^k q^{n-k} =: b(k; n, p)$$

$\square$

Bernoulli forsøg

Eksempel (Kast en mønt 3 gange)

Antag at sandsynligheden for at få krone (K) er $q = \frac{1}{2}$ *og sandsynligheden for at få plat (P) er* $1 - q = \frac{1}{2}$. *Udfaldsrummet er* $S = \{PPP, PPK, PKP, KPP, KKP, KPK, PKK, KKK\}$.

Bernoulli forsøg

Eksempel (Kast en mønt 3 gange)

Antag at sandsynligheden for at få krone (K) er $q = \frac{1}{2}$ og sandsynligheden for at få plat (P) er $1 - q = \frac{1}{2}$. Udfaldsrummet er $S = \{PPP, PPK, PKP, KPP, KKP, KPK, PKK, KKK\}$.

Hvad er sandsynligheden for at få $0, 1, 2$ eller 3 K?

Bernoulli forsøg

Eksempel (Kast en mønt 3 gange)

Antag at sandsynligheden for at få krone (K) er $q = \frac{1}{2}$ og sandsynligheden for at få plat (P) er $1 - q = \frac{1}{2}$. Udfaldsrummet er $S = \{PPP, PPK, PKP, KPP, KKP, KPK, PKK, KKK\}$.

Hvad er sandsynligheden for at få $0, 1, 2$ eller 3 K?

Sandsynligheden for at få $0K$ er givet ved

$$b(0; 3, \frac{1}{2}) = C(3, 0) \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\frac{\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,\cancel{0!}} = 1$$

Bernoulli forsøg

Eksempel (Kast en mønt 3 gange, forsat)

Sandsynligheden for at få $1K$ *er givet ved*

$$b(1;3,\frac{1}{2}) = C(3,1)\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

Sandsynligheden for at få $2K$ *er givet ved*

$$b(2;3,\frac{1}{2}) = C(3,2)\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

Sandsynligheden for at få $3K$ *er givet ved*

$$b(3;3,\frac{1}{2}) = C(3,3)\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Bernoulli forsøg

Eksempel (Kast en mønt 3 gange, forsat)

Sandsynlighedsfunktionen $p : S \to \mathbb{R}$ for "antal K" er altså givet ved

$$p(i\,K) = b(i; 3, \frac{1}{2}), \qquad \text{for } i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Bemærk desuden at

$$p(0K) + p(1K) + p(2K) + P(3K) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Bernoulli forsøg

Eksempel (Kast en mønt 3 gange, forsat)

Sandsynlighedsfunktionen $p : S \to \mathbb{R}$ for "antal K" er altså givet ved

$$p(i\,K) = b(i; 3, \frac{1}{2}), \qquad \text{for } i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Bemærk desuden at

$$p(0K) + p(1K) + p(2K) + P(3K) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Hvad er sandsynligheden for at få $2K$ eller $3K$?

$$p(2K) + p(3K) = b(2; 3, \frac{1}{2}) + b(3; 3, \frac{1}{2}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Part IV

Stokastiske variable

Vektorer i sandsynlighedsteori

En sandsynlighedsfunktion er en funktion p fra udfaldsrummet S til de reelle tal $\mathbb{R}$,

$$p : S \to \mathbb{R}$$

som opfylder at $0 \leq p_i \leq 1$ for hvert i i S og at $\sum_i p_i = 1$

Vektorer i sandsynlighedsteori

En sandsynlighedsfunktion er en funktion p fra udfaldsrummet S til de reelle tal $\mathbb{R}$,

$$p : S \to \mathbb{R}$$

som opfylder at $0 \leq p_i \leq 1$ for hvert i i S og at $\sum_i p_i = 1$
p kan opfattet som vektor og kaldes så en sandsynlighedsvektor.
Altså er p en vektor i $\mathbb{R}^{|S|}$.

$|S|$ = antal af elementer i S

$p_i = p(a_i)$, $a_i \in S$

Vektorer i sandsynlighedsteori

En sandsynlighedsfunktion er en funktion p fra udfaldsrummet S til de reelle tal $\mathbb{R}$,

$$p : S \to \mathbb{R}$$

som opfylder at $0 \leq p_i \leq 1$ for hvert i i S og at $\sum_i p_i = 1$
p kan opfattet som vektor og kaldes så en sandsynlighedsvektor.
Altså er p en vektor i $\mathbb{R}^{|S|}$.

Eksempel (1,2,3,4)

Lad $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Definer sandsynlighedsfunktionen $p : S \to \mathbb{R}$ ved

$$p(i) = \frac{i}{10} \quad \textit{for} \quad i \in S$$

Så er sandsynlighedsvektoren p givet ved

$$p = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4]$$

$p \in \mathbb{R}^4$

$\sum p_i = 1 \quad p_i \geq 0$

Stokastiske variable

Definition

Hvis vi har givet et sandsynlighedsfelt med udfaldsrum S så siges X at være en **stokastisk variabel** (random variable) hvis X er en funktion med definitionsmængde S og med værdier i $\mathbb{R}$,

$$X : S \to \mathbb{R}$$

En stokastisk variabel kan opfattes som en vektor i $\mathbb{R}^{|S|}$.

Da er $\mathbb{R}^{|S|}$ mængden af alle stokastiske variable.

Stokastiske variable

Definition

Hvis vi har givet et sandsynlighedsfelt med udfaldsrum S så siges X at være en **stokastisk variabel** (random variable) hvis X er en funktion med definitionsmængde S og med værdier i $\mathbb{R}$,

$$X : S \to \mathbb{R}$$

En stokastisk variabel kan opfattes som en vektor i $\mathbb{R}^{|S|}$.

Da er $\mathbb{R}^{|S|}$ mængden af alle stokastiske variable.

En stokastisk variabel er en funktion! Det er *ikke* en variabel og det er *ikke* en tilfældig værdi.

Stokastiske variable

Eksempel (1,2,3,4)

Lad $S = \{1, 2, 3, 4\}$. *Lad den stokastiske variabel* X *være defineret ved*

$$X(i) = i^2 \quad \text{for} \quad i \in S$$

Dvs.

$$X(1) = 1, \quad X(2) = 4, \quad X(3) = 9, \quad X(4) = 16$$

og når X *opfattes som en vektor, så er* $X = [1, 4, 9, 16] \in \mathbb{R}^4$.

$X(S) = \{1, 4, 9, 16\}$

Stokastiske variable

Definition

Fordelingen (distribution) af en stokastisk variabel X på udfaldsrummet S er et par $(r, p(X = r))$ for alle $r \in X(S)$, hvor

- $p(X = r)$ er sandsynligheden for at X antager værdien r.

Ofte benyttes også begrebet sandsynlighedsfordeling (probability distribution) om fordelingen af en stokastisk variabel.

Stokastiske variable

Eksempel (1,2,3,4, forsat)

Betragt igen $S = \{1, 2, 3, 4\}$ hvor X er defineret ved $X(i) = i^2$ for $i \in S$. Lad fordelingen af X være givet ved

$$p(X = r) = \frac{\sqrt{r}}{10} \quad \text{for} \quad r \in X(S)$$

Dvs.

$$p(X = 1) = \frac{1}{10}, \quad p(X = 4) = \frac{2}{10}, \quad p(X = 9) = \frac{3}{10}, \quad p(X = 16) = \frac{4}{10}$$

Fordelingen af den stokastisk variabel X kan så angives ved par

$$\boxed{(1, \frac{1}{10}), \quad (4, \frac{2}{10}), \quad (9, \frac{3}{10}), \quad (16, \frac{4}{10})}$$

Part V

Fødselsdagsproblemet

Fødselsdagsproblemet

Eksempel

Hvad er sandsynligheden for, at dig bag skærmen har fødselsdag i dag?

Fødselsdagsproblemet

Eksempel

Hvad er sandsynligheden for, at dig bag skærmen har fødselsdag i dag?

$$p(\textit{Fødselsdag i dag}) = \frac{1}{366} \approx 0.0027$$

Hvad er sandsynligheden for, at du ikke har fødselsdag i dag?

Fødselsdagsproblemet

Eksempel

Hvad er sandsynligheden for, at dig bag skærmen har fødselsdag i dag?

$$p(\textit{Fødselsdag i dag}) = \frac{1}{366} \approx 0.0027$$

Hvad er sandsynligheden for, at du ikke har fødselsdag i dag?

$$p(\textit{Fødselsdag} \neq \textit{i dag}) = \frac{365}{366} \approx 0.9973$$

Fødselsdagsproblemet

Eksempel (Forsat)

Hvad er sandsynligheden for, at ingen af 7 personer har fødselsdag i dag?

Fødselsdagsproblemet

Eksempel (Forsat)

Hvad er sandsynligheden for, at ingen af 7 personer har fødselsdag i dag?

$$p(\textit{Ingen af 7 har fødselsdag i dag}) = \left(\frac{365}{366}\right)^7 \approx 0.981$$

Hvad er sandsynligheden for, at mindst en af 7 personer har fødselsdag i dag?

Fødselsdagsproblemet

Eksempel (Forsat)

Hvad er sandsynligheden for, at ingen af 7 personer har fødselsdag i dag?

$$p(\textit{Ingen af 7 har fødselsdag i dag}) = \left(\frac{365}{366}\right)^7 \approx 0.981$$

Hvad er sandsynligheden for, at mindst en af 7 personer har fødselsdag i dag?

$$p(\textit{Mindst en af 7 har fødselsdag i dag}) = 1 - \left(\frac{365}{366}\right)^7 \approx 0.019$$

Fødselsdagsproblemet

Antag at n mennesker er til stede i samme lokale. Hvad er sandsynligheden for, at mindst to har fødselsdag samme dag?

Fødselsdagsproblemet

Antag at *n* mennesker er til stede i samme lokale. Hvad er sandsynligheden for, at mindst to har fødselsdag samme dag?

- Antag at folks fødselsdato er uafhængig.
- Antag at der er lige stor sandsynlighed for at have fødselsdag alle årets dage (366 dage).

Fødselsdagsproblemet

Antag at n mennesker er til stede i samme lokale. Hvad er sandsynligheden for, at mindst to har fødselsdag samme dag?

- Antag at folks fødselsdato er uafhængig.
- Antag at der er lige stor sandsynlighed for at have fødselsdag alle årets dage (366 dage).

Vi udregner sandsynligheden for at n mennesker har fødselsdag forskellige dage:

$$p_n = \frac{365}{366}\frac{364}{366}\cdots\underbrace{\frac{367-n}{366}}_{\geq 0}$$

Fødselsdagsproblemet

Antag at n mennesker er til stede i samme lokale. Hvad er sandsynligheden for, at mindst to har fødselsdag samme dag?

- Antag at folks fødselsdato er uafhængig.
- Antag at der er lige stor sandsynlighed for at have fødselsdag alle årets dage (366 dage).

Vi udregner sandsynligheden for at n mennesker har fødselsdag forskellige dage:

$$\boxed{p_n = \frac{365}{366}\frac{364}{366}\cdots\frac{367-n}{366}}$$

Heraf er sandsynligheden for at mindste to har fødselsdag sammme dag,

$$1 - p_n = 1 - \frac{365}{366}\frac{364}{366}\cdots\frac{367-n}{366}$$

Fødselsdagsproblemet

Antag at n mennesker er til stede i samme lokale. Hvad er sandsynligheden for, at mindst to har fødselsdag samme dag?

- Antag at folks fødselsdato er uafhængig.
- Antag at der er lige stor sandsynlighed for at have fødselsdag alle årets dage (366 dage).

Vi udregner sandsynligheden for at n mennesker har fødselsdag forskellige dage:

$$p_n = \frac{365}{366}\frac{364}{366}\cdots\frac{367-n}{366}$$

Heraf er sandsynligheden for at mindste to har fødselsdag sammme dag,

$$1 - p_n = 1 - \frac{365}{366}\frac{364}{366}\cdots\frac{367-n}{366}$$

For $n = 10$, $n = 15$, $n = 20$ og $n = 25$ fås

$$1 - p_{10} = 0.12, \quad 1 - p_{15} = 0.25, \quad 1 - p_{20} = 0.41, \quad 1 - p_{25} = 0.57$$