Lineær uafhængighed og lineære transformationer, Afsnit 1.7–1.9

15. februar 2021

SLIAL, Blok 1

Forår 2021

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Del I

Repetition

Vektorspænd

Når vi skal afgøre, om en vektor **b** ligger i $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\}$, skal vi afgøre, om ligningssystemet med totalmatrix $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_s \mid \mathbf{b}]$ er konsistent

- Hvis **b** er kendt... række reduktion.

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow [v_1 - v_s \mid b]$$

- Hvis **b** ikke er kendt...

→ række reduktet. → ligninger som avgør om $b \in \mathrm{span}\{v_1 \cdots v_s\}$

Vektorspænd

Eksempel (**b** er kendt, Opg. 1.3 13)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ -2 & 8 & -4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 := r_3 + 2r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

pivot i sidste søjle

inkonsistent!

$b \notin \text{span}\{a_1, \ldots, a_3\}$

Vektorspænd

Eksempel (**b** er ikke kendt, eksemplet fra sidst)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Vi så, at totalmatricen $[A|\mathbf{b}]$ er rækkeækvivalent med

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 5 & 4b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - b_2 + b_3 \end{array}\right].$$

$= 0$

Systemet er konsistent at

For at **b** ligger i spændet, skal det gælde, at...

$b \in \text{Span}\{a_1 .. a_3\}$

$\Updownarrow \quad b_1 - b_2 + b_3 = 0$

Det homogene ligningssystem

Det homogene ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er særligt, da...

altid har mindst 1 løsning!

$x = 0 \qquad A \cdot 0 = 0$

Det inhomogene ligningssystem

Sætning

Lad $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ være et konsistent ligningssystem, hvor $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, og lad $\mathbf{p}$ være en (hvilken som helst) løsning.
Løsningsmængden for $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er da alle vektorer $\mathbf{w}$ på formen

$$\mathbf{w} = \boxed{\mathbf{p}} + \mathbf{v}_h,$$

hvor $\mathbf{v}_h$ er en løsning til det homogene system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Det inhomogene ligningssystem

Hvorfor er det en løsning?

Lad $\mathbf{p}$ være en løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Når $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$, hvor $\mathbf{v}_h$ er en løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, har vi

$$A\mathbf{w} = A(p+v_h) = \underbrace{Ap}_{=b} + \underbrace{Av_h}_{=0} = b + 0 = b$$

Del II

Nyt stof

To vektorspænd

Lad $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Hvad kan vi sige, om $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ og $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$?

$v_3 = v_1 + v_2$

$b \in \mathrm{span}\{v_1 \ldots v_3\}$

$b = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

$= c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 (v_1 + v_2)$

$= (c_1 + c_3) v_1 + (c_2 + c_3) v_2$

$\in \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$

Lineær (u)afhængighed

Definition

Mængden af vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s\}$ i $\mathbb{R}^n$ siges at være lineært uafhængig, hvis

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_s\mathbf{v}_s = \mathbf{0} \tag{1}$$

medfører $c_1 = c_2 = \cdots = c_s = 0$.

Hvis der eksisterer konstanter $c_1, c_2, \dots, c_s$ ikke alle lig nul, så (1) er opfyldt, kaldes $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s\}$ i $\mathbb{R}^n$ lineært afhængig.

Simple tilfælde

$\{\mathbf{v}_1\}$ er lineært afhængig, hvis og kun hvis...

$$c_1 v_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow v_1 \neq 0$$

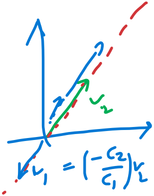
(ellers hvis $v_1 = 0$ $\forall c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow c_1 v_1 = 0$)

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er lineært afhængig, hvis og kun hvis...

$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$, men $c_1 \neq 0$ eller $c_2 \neq 0$

hvis $c_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right) v_2$

ellers $c_2 \neq 0 \Rightarrow v_2 = \left(-\frac{c_1}{c_2}\right) v_1$



$$v_1 = \underbrace{\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)}_{\in\mathbb{R}} v_2$$

Eksempler

$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ er lineært afhængig, da...

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{2}}_{c_1 \neq 0}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{1}_{c_2 \neq 0}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \underbrace{\left(-\frac{1}{5}\right)}_{c_3 \neq 0}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 0$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ er lineært uafhængig, da...

$$c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2c_1 + 4c_2 = 0 \\ 2c_1 - 3c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\left(\frac{3}{2}\right)c_2 + 4c_2 = 7c_2 = 0 \\ c_1 = \frac{3}{2}c_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ vektorer er lin. uafhængige

Sprogbrug

Ofte siger vi bare

„$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ *er lineært (u)afhængige*“

i stedet for

„$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ *er lineært (u)afhængig*“

Observation

$c \in \mathbb{R}^s$

Hvis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ er lineært afhængige, eksisterer $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, så

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_s\mathbf{v}_s = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Antag, at $c_1 \neq 0$. Isoleres $\mathbf{v}_1$ i (2), får vi

$$\mathbf{v}_1 = \frac{-c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 + \frac{-c_3}{c_1} + \cdots + \frac{-c_s}{c_1}\mathbf{v}_s.$$

Med andre ord: v_1 er lin. komb af $(v_2 .. v_s)$

$v_1 \in$ span $(v_2 .. v_s)$

En av vektorer kan skrives som lin. komb af andre vektorer.

ele

Observation

Eksempel

Vi så tidligere, at $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$.

Dette betyder også...

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = -\frac{5}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrixsøjler

Er søjlerne i $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]$ lineært uafhængige?

Vi skal undersøge løsninger til...

$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = 0$

$\left(\overset{?}{\Rightarrow} \ x_1 = x_2 \dots = x_n = 0 ? \right)$

$Ax = 0$

Sætning

Søjlerne i en matrix A er lineært uafhængige, hvis og kun hvis...

$Ax = 0$ har kun løsning $x = 0$

(kun den trivielle løsning)

Matrixsøjler

Da matrixsystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har frie variable, når...

vi har ikke-pivot søjler i koeff. matricen $[A \mid 0]$

...kan vi udlede:

Korollar

Søjlerne i en matrix A er lineært uafhængige, hvis og kun hvis...

alle søjler i A er pivot søjler

Matrixsøjler
Eksempel

$$\text{Betragt } A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 16 & 4 & 20 \\ 8 & 1 & 15 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

pivot søjler

ikke alle søjler er pivot søjler

$\Rightarrow$ søjler er lin. afhængige!

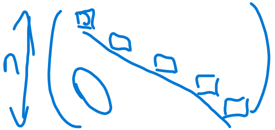
Antal lin. uafh. vektorer

Hvor mange lineært uafhængige vektorer kan vi have i $\mathbb{R}^n$?

Opskriv vektorerne som søjler i en matrix A. Antallet af pivotsøjler...

$A \sim n \times s$

$\subset \mathbb{R}^n$



højst n ledende koeff

(n rækker)

$\Rightarrow$ højst n lin uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^n$

Antal lin. uafh. vektorer

Eksempel

Kan $\{v_1, v_2, \ldots, v_8\} \subset \mathbb{R}^6$ være lineært uafhængig?

nei, $8 > 6$

Eksempel

Kan $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$ være lineært uafhængig?

ja, $4 \leq 4$

Matrix-vektor-produkt og afbildninger

Når vi går fra **x** til $A\mathbf{x}$ kan vi tænke på dette som en afbildning/funktion:

$x \mapsto Ax$ $$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

Hvilke vektorer kan vi putte ind/kommer ud, når A er $m \times n$?

$x \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ $Ax \in \mathbb{R}^m$

Transformationer

Definition

En transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en afbildning, der til hver vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ knytter præcist én vektor $T(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^m$.

$\mathbb{R}^n$ kaldes *definitionsmængden*, og $\mathbb{R}^m$ kaldes *dispositionsmængden*.

Nogle gange kaldes $T(\mathbf{v})$ billedet af $\mathbf{v}$ under T

Transformationer

Eksempler

$T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Eksempel

Lad $A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}}_{3}\Big\}^{2}$ og $T_1(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

$$T_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = $$

$$= 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4-3 \\ 0+2+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Eksempel

Lad $B = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{1}\Bigg\}^{3}$ og $T_2(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$.

$T_2 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$

$$T_2([3]) = 3\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Lineære transformationer

En transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kaldes *lineær*, hvis den opfylder

- $T(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
- $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$ for alle $c \in \mathbb{R}$ og alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

Bemærk:
Alle matricer overholder $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$ og $A(c\mathbf{v}) = cA\mathbf{v}$
Derfor er alle transformationer på formen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ lineære

Lineære transformationer
Eksempler

Eksempel

Er T_1 og T_2 fra før lineære?

ja, pga mat vek mult.
$T_1(x) = Ax$
$T_2(x) = Bx$

Eksempel

Lad $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være defineret som $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = [x_1 x_2]$.

Er T lineær?

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $c = 2$

$T(v) = 1 \cdot 2 = 2$

$c \cdot T(v) = 2 \cdot 2 = 4$

$T(cv) = T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 4 = 8$ $\neq$

Nei, T er ikke lin.

Lineære transformationer

Eksempel

Lad $F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. Er F lineær?

$c = 0$

$$F\left(c\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\neq$$

$$0 = \underbrace{c}_{c=0} \cdot F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = c \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 + 5 \\ x_2 + 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ikke lin.!

Observation

Ud fra definitionen af linearitet ser vi, at en lineær afbildning T altid overholder

$$T(\mathbf{0}) = T(0\cdot\vec{0}) = 0\cdot\underbrace{T(\vec{0})} = \vec{0}$$

og at

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_s\mathbf{v}_s) = T(c_1v_1) + T(c_2v_2 + \cdots + c_sv_s)$$

$$= c_1T(v_1) + T(c_2v_2 + \cdots + c_sv_s)$$

$$= c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \cdots + c_sT(v_s)$$

Fra lineær transformation til matrix

Forestil jer, at vi har en lineær transformation $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Kan vi finde en matrix A, så $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$?

Fra lineær transformation til matrix

En idé

Lad **x** være en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$. Vi kan skrive **x** som

$$\mathbb{R}^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_1 \in \mathbb{R}^n} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_2 \in \mathbb{R}^n} + \dots + x_n \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{e_n \in \mathbb{R}^n}$$

Fra lineær transformation til matrix

En idé

$\mathbf{e}_i$ betegner vektoren i $\mathbb{R}^n$, hvor indgang i er 1 og resten er 0

Vi har derfor $\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

Da T er lineær, har vi således

$$T(\mathbf{x}) = x_1 \underbrace{T(e_1)}_{\in \mathbb{R}^m} + x_2 \underbrace{T(e_2)}_{\mathbb{R}^m} + \dots + x_n \underbrace{T(e_n)}_{\mathbb{R}^m}$$

$$= [\, T(e_1) \quad T(e_2) \quad \dots \quad T(e_n) \,] \, x$$

Standardmatrix

Sætning

Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation. Da eksisterer en entydig $m \times n$-matrix A, sådan at

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Yderligere gælder, at

$$\boxed{A = [T(\mathbf{e}_1)\, T(\mathbf{e}_2) \, \cdots \, T(\mathbf{e}_n)].}$$

Matricen A i sætningen kaldes *standardmatricen* for T

Standardmatrix

Eksempler

Eksempel

En lineær afbildning T opfylder: $T\left(\overset{e_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}}\right)=\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$,

$$T\left(\overset{e_2}{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}}\right)=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\quad T\left(\overset{e_3}{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad T\left(\overset{e_4}{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}\right)=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}.$$

Dens standardmatrix er

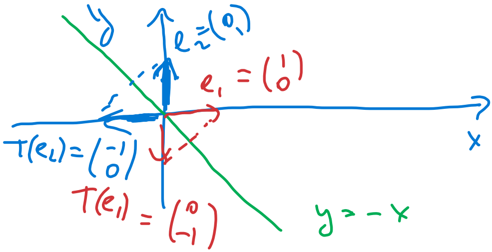
$$A=\begin{bmatrix}7 & 1 & 0 & 3\\ 4 & 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Standardmatrix

Eksempler

Eksempel

En lineær transformation $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sender $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ over i dens spejling langs linjen $y = -x$. Find standardmatricen A for T.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lineære transformationer

På siderne 90–92 i bogen findes eksempler på lineære transformationer:

- Rotationer (omkring Origo) er lineære
- Spejlinger (langs linje/plan gennem Origo) er lineære
- Strækninger og kontraktioner er linære
- Projektioner er lineære

Bemærk, at parallelforskydninger *ikke* er lineære