Linearkombinationer og spænd, Afsnit 1.3–1.5

06. februar 2021

SLIAL

Forår 2021

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Del I

Repetition

Pivotsøjler

Lad A være en matrix, og lad R være dens reducerede trappeform.

De søjler i A, hvor R har pivotindgange, kaldes *pivotsøjler*

For et konsistent ligningssystem $[A|\mathbf{b}]$, hvor $\mathbf{a}_i$ er i'te søjle i A, kaldes den tilhørende variabel x_i for. . .

- basis variabel hvis $\mathbf{a}_i$ er en pivotsøjle
- fri variabel hvis $\mathbf{a}_i$ *ikke* er en pivotsøjle

Antal løsninger

Fra trappeformen kan vi også afgøre, om ligningssystemet har nogen løsninger

Sætning

Lad $[R|\mathbf{c}]$ være trappeformen af totalmatricen $[A|\mathbf{b}]$ for et ligningssystem. Da gælder

- Hvis $[R|\mathbf{c}]$ har pivot i sidste søjle, er systemet inkonsistent.
- Hvis $[R|\mathbf{c}]$ ikke har pivot i sidste søjle, er systemet konsistent. Systemet har da uendeligt mange løsninger, hvis der er mindst én fri variabel. Ellers har det en entydig løsning.

Nulrækker er OK

Nulrækker kan ikke bruges til at afgøre, om systemet har løsninger eller ej

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & & 4 & & \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 7 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\rightarrow
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 7 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

konsistent

inkonsistent

Del II

Nyt stof

Særlige matricer

Definition

En $n \times 1$-matrix kaldes en *søjlevektor*, og en $1 \times n$-matrix kaldes en *rækkevektor*.

Ofte undlades 'søjle' og 'række', så vi bare kalder dem *vektorer*

Eksempel

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ - søjlevektor

2x1

1x1 $[1]$ - søjle / række vektor

1x5: $[1, 2, 3, 4, 5]$ - rækkevektor

Vektorer i mange dimensioner

I kender måske allerede vektorer i...

- planet (2 dimensioner)
- rummet (3 dimensioner)

Vi kan og skal sagtens arbejde i n dimensioner, hvor $n > 3$.

Rum af vektorer

Mængden af alle $m \times 1$-vektorer med reelle indgange betegnes $\mathbb{R}^m$

Det vil sige, at

- $\mathbb{R}^2$ er planet
- $\mathbb{R}^3$ er rummet

Et eksempel på en vektor i $\mathbb{R}^7$ er

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^7$$

Vektoraddition

Vektorer kan lægges sammen og ganges med skalarer (reelle tal)

$u, v \in \mathbb{R}^n$

- Summen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ udregnes elementvist

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}}_{n \times 1} \in \mathbb{R}^n$$

- For en skalar c er $c\mathbf{u}$ den vektor, hvor hvert element i $\mathbf{u}$ er ganget med c $\in \mathbb{R}$

$$c \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ \vdots \\ cu_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Linearkombinationer

Definition

Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$ og $c_1, c_2, \ldots, c_k$ skalarer i $\mathbb{R}$. Da siges

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \quad \in \mathbb{R}^n$$

at være en *linearkombination* af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ med koefficienter (el. vægte) $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Eksempel

Lad $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$. En linearkombination af v_1 og v_2 er

$$y = \underline{4}v_1 + \underline{5}v_2 = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \\ 35 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 34 \\ 43 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Vektorspænd

Definition

Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Mængden af alle linearkombinationer af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ kaldes *spændet* af vektorerne og betegnes $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

Eksempel

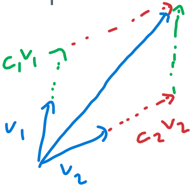
Lad $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ som før. $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ består af alle vektorer...

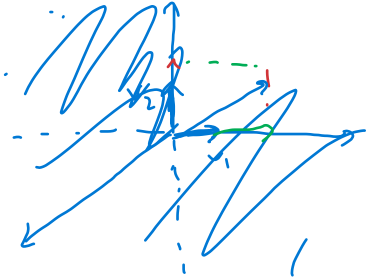
$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \cdot c_1 + 6 \cdot c_2 \\ 2 \cdot c_1 + 7 \cdot c_2 \end{bmatrix}}$$

alle vektorer $\in \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$ kan skrives sådan

Geometrisk fortolkning

Spændet af vektorer har en naturlig geometrisk fortolkning i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$





Ligger en vektor i spændet?

Vi så, at Span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 1 \cdot c_1 + 6c_2 \\ 2 \cdot c_1 + 7c_2 \end{bmatrix}$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Kan vi afgøre, om $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} \in \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$?

$$\begin{cases} 1 \cdot c_1 + 6 \cdot c_2 = 9 \\ 2 \cdot c_1 + 7 \cdot c_2 = 8 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & 8 \end{array}\right]$$

Ligner det noget, vi kender?

Vektorligninger

$A \sim m \times n$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_n \end{bmatrix}}_{n} \; \updownarrow m$$

Sætning

Lad A være en $m \times n$-matrix med søjler $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ (i $\mathbb{R}^m$), og lad $\mathbf{b}$ være en vektor i $\mathbb{R}^m$. Vektorligningen

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

$(b \in \operatorname{span}(a_1 - a_n))$

har samme løsningsmængde som det lineære ligningssystem med totalmatrix $[A|\mathbf{b}]$.

Hvilke vektorer ligger i spændet?

Vi kunne også undersøge:
Ligger alle vektorer **b** i $\mathrm{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$?

Hvis nej, hvilke gør så/gør så ikke?

Hvilke vektorer ligger i spændet?

Eksempel

Eksempel

$\in \mathbb{R}^3$ $\in \mathbb{R}^3$ $\in \mathbb{R}^3$ $b \in \mathbb{R}^3$ $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

Lad $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Hvad er Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 4 & 8 & 3 & b_2 \\ 3 & 6 & 1 & b_3 \end{array}\right] \underset{\substack{r_2 := r_2 - 4r_1 \\ r_3 := r_3 - 3r_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_2 - 4b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right] \underset{r_3 := r_3 - r_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_2 - 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{b_3 - 3b_1 - (b_2 - 4b_1)} \end{array}\right] \quad b_1 - b_2 + b_3$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3) \iff b_1 - b_2 + b_3 = 0$$

Matrix-vektor-produkt

I lineær algebra tænker vi ofte på et ligningssystem som et produkt mellem en matrix og en vektor

Definition

Lad A være en $m \times n$-matrix med søjler $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ (i $\mathbb{R}^m$), og lad $\mathbf{v}$ være en vektor i $\mathbb{R}^n$. Vi definerer da *matrix-vektor-produktet* mellem A og $\mathbf{v}$ til at være

$$A\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n.$$

$$[a_1 \cdots a_n]\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 a_1 + \cdots + v_n a_n$$

Bemærk, at størrelserne skal passe sammen: $\mathbf{v}$ skal have ligeså mange rækker som A har søjler.

Matrix-vektor-produkt

Eksempler

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 0 + 0(-1) \\ 7\cdot 1 + 0\cdot 2 + 3\cdot 0 + 2(-1) \\ 6\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + (-3)\cdot 0 + 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matrix-matrix prod.

$$= 1\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 3\cdot 3 \\ -2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ -2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Matrix-vektor-produkt

Nogle produkter er lette

(mat · vekt produkt)

Eksempel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_n \text{ - identitetsmatrix}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a \\ 1 \cdot b \\ 1 \cdot c \end{bmatrix}$$

søjle 2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$$

Observation

Det i'te element i $A\mathbf{v}$ er givet ved i'te element i

$$v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n.$$

Dette element er

$$\underline{v_1 a_{i1} + v_2 a_{i2} + \cdots + v_n a_{in}} = [a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}] \cdot \mathbf{v}$$

Altså: Det i'te element i $A\mathbf{v}$ er givet ved... prik produkt/skalarprod

række #i A og v

Egenskaber

Sætning

Lad A være en $m \times n$-matrix, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$ og c være et reelt tal. Da gælder

- $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
- $A(c\mathbf{v}) = c(A\mathbf{u})$
- $A\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$, hvor $\mathbf{e}_i$ har 1 i indgang i og 0 i alle andre
- $O_n\mathbf{v} = \mathbf{0}$, hvor O_n er $n \times n$-matricen med 0 i alle indgange
- $I_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$, hvor I_n er $n \times n$-matricen med indgang (i, j) lig 1, hvis $i = j$, og 0 ellers

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ← pos i

$A = [a_1 \cdots a_n]$

Egenskaber

Vi kan særligt bemærke, at de første to punkter giver

Korollar

Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$, og lad $c_1, c_2, \ldots, c_s$ være reelle tal. Da gælder

$$A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_s\mathbf{v}_s) = c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}_2 + \cdots + c_sA\mathbf{v}_s$$

Med andre ord: Matrix-vektorproduktet mellem A og en linearkombination af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ giver linearkombinationen af $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_s$ med samme koefficienter.

Matrixligninger

Hvis $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]$ og $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, har vi

$$A\mathbf{x} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots x_n a_n$$

Det vil sige, at matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, har samme løsninger som...

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$$ - vektor ligning

Tre ækvivalente repræsentationer

Sætning

Lad $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]$ være en $m \times n$-matrix, og lad $\mathbf{b}$ være en vektor i $\mathbb{R}^m$. Løsningsmængderne for følgende systemer er ens.

(i) Matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(ii) Vektorligningen $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$

(iii) Det lineære ligningssystem med totalmatrix $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n \mid \mathbf{b}]$

$[A | b]$

Tre ækvivalente repræsentationer

Eksempel

Eksempel

Oversæt matrixligningen $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$ til en vektorligning og til totalmatricen for et lineært ligningssystem.

$$x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

eller

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Konsistens og spænd

Ækvivalensen mellem matrixligninger og vektorligninger giver derfor:

Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning, hvis og kun hvis b er en linearkombination af $a_1, a_2 \dots a_n$ $\quad A = [a_1 \dots a_n]$

Med andre ord: Ligningen er konsistent, hvis og kun hvis

$$b \in \text{span}\{a_1 \dots a_n\}$$

Homogene ligningssystemer

En matrixligning på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kaldes *homogen*

Har denne altid en løsning?

$x = 0$

$A \cdot 0 = 0 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_n = 0$

$0 \in \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$

Parametrisk form

Sidste gang så vi, at systemet med totalmatrix

$$\begin{array}{cccc} & \text{fri} & & \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \end{array}\right] \\ \text{pivot} & & & \end{array}$$

har løsningerne givet ved

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 \\ x_2 \text{ er fri} \\ x_3 = 3x_4 \\ x_4 \text{ er fri} \end{cases}$$

Dette kan også skrives på formen

$$(s, t) = (x_2, x_3)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Parametrisk form

Betragter vi i stedet totalmatricen $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right]$ bliver løsningerne i stedet

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_2 + x_4 \\ x_2 \text{ er fri} \\ x_3 = 5 + 3x_4 \\ x_4 \text{ er fri} \end{cases}$$

$(s, t) = (x_2, x_4)$

På parametrisk er dette

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$$

Inhomogene systemer

$A x_1 = b$
$A x_2 = b$
$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$
– løser det homogene system.

Dette leder til følgende karakterisering af den *inhomogene* ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Sætning

Lad $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ være et konsistent ligningssystem, hvor $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, og lad $\mathbf{p}$ være en (hvilken som helst) løsning.
Løsningsmængden for $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er da alle vektorer $\mathbf{w}$ på formen

$$\boxed{\mathbf{w} = \mathbf{p}} + \mathbf{v}_h,$$

hvor $\mathbf{v}_h$ er en løsning til det homogene system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$Aw = A(p + v_h) = Ap + Av_h = b + 0 = b$$

Geometrisk fortolkning

Vi kan tænke på løsningerne til det inhomogene system som en parallelforskydning af løsningerne til det homogene.