Matrixregning, Afsnit 2.1, 2.4

01. februar 2021

Sandsynlighedsteori og lineær algebra (SLIAL)

Forår 2021

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Del I

Matrix addition, multiplikation med skalar

Summen af matricer

Hvis A og B begge er $m \times n$-matricer, defineres deres sum elementvist

Eksempel

$$2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & 5+2 & 10+3 \\ 2+4 & 4+5 & 6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

3

Ganges en matrix med en skalar, ganges skalaren ind på hvert element i matricen

Eksempel

$$2 \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot 5 & 2\cdot 10 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 4 & 2\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(-1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

Summen af matricer

Egenskaber

Hvis A, B og C er matricer af samme dimensioner, og r og s er skalarer, gælder

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + O = A$, hvor O er nulmatricen
- $r(A + B) = rA + rB$
- $(r + s)A = rA + sA$
- $r(sA) = (rs)A$
- $A - B := A + (-1)B$

$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$

$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$

$a_{ij} + 0 = a_{ij}$

$r(a_{ij} + b_{ij}) = r a_{ij} + r b_{ij}$

$(A - B)_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$

Summen af matricer

Egenskaber

Billig operation: $C = A + B$ “koster” $m \times n$ additioner, hvor $m \times n$ er størrelse af A, B

```
for (i=0; i<m; i++) {
  for (j=0; j<n; j++) {
      C[i][j] = A[i][j] + B[i][j];
  }
}
```

Del II

Matrix multiplikation

Matrixprodukt

$$A \qquad B$$

$$m \times n \qquad n \times p$$

$$= C$$

$$m \times p$$

Matrixprodukt

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + \cdots + A_{in}B_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

$$\left(\begin{matrix} n & \text{mult.} \\ (n-1) & \text{addit.} \end{matrix} \right) \cdot mp$$

$$\sim n \cdot m \cdot p$$

Matrixprodukt

Eksempler

$1\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 1$

2×3

Eksempel

$$\boxed{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{\underline{\underline{3}}} \; 3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\boxed{3}} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 = 4 & 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 6 & -3 \\ 4\cdot 2 + 5\cdot 1 + 6\cdot 0 = 13 & 4\cdot 1 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1 = 15 & \end{bmatrix}$$

$4\cdot 0 + 5\cdot(-3) + 6\cdot 1 = -9$

Eksempel

Udregn $\underset{2}{\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}} 2 \neq 3 \overset{2}{\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}}$, hvis det er defineret

$$\underset{2}{\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}} 2 \begin{bmatrix} -2 & 6 & -5 \\ 8 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\cdot(-2) + 8\cdot 8 & \ldots \end{bmatrix}$$

Matrixprodukt

Eksempler

Eksempel

Hvad er element $(\underline{2}, \underline{3})$ i produktet $\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 14 & 3 \\ 11 & -2 & 4 \end{bmatrix}}_{3}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 6 & 13 & 1 \\ 77 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

Svar: $11 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 1$

$= 11 - 2 + 4 = 13$

Identitetsmatricen

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$IA = A = AI_n$$

Pas på: hvis A har størrelse $m \times n$, så

- "den venstre" I har størrelse $m \times m$
- "den høyre" I har størrelse $n \times n$

$A \quad m \times n$

$\underbrace{A}_{n} \quad n\{\underbrace{I}_{n}$

$\underbrace{I}_{m} \quad m\{A$

Egenskaber

Matrixproduktet har følgende egenskaber:
(givet, at matricerne har passende dimensioner)

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $r(AB) = (rA)B = A(rB)$, hvor r er en vilkårlig skalar
- $IA = A = AI$, hvor I er identitetsmatricen

PAS PÅ!

Hvorfor nævner vi både $A(B+C)$ og $(B+C)A$ i egenskaberne?

Matrixproduktet opfylder generelt *ikke* $AB = BA$

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 1 & 0\cdot 0 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

PAS (stadig) PÅ!

Der er andre eksempler, hvor matrixproduktet opfører sig anderledes, end man måske kunne håbe

- $AB = AC$ medfører ikke nødvendigvis $B = C$
- $AB = O$ medfører ikke nødvendigvis $A = 0$ eller $B = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

$$C = O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$AB = O = AC$

$B \neq C$

Matrixprodukt

Egenskaber

Dyr operation: $C = AB$ "koster" $m \times n \times p$ additioner og multiplikationer, hvor $m \times n$ er størrelse af A, og $n \times p$ er størrelse af B.

C=0

```
for (i=0; i<m; i++) {
  for (j=0; j<p; j++) {
    for (k=0; k<n; k++) {
      C[i][j] += A[i][k]  B[k][j];
    }
  }
}
```

Kan gøres billigere: se Strassen algoritme!

Matrix power

$$A^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ ganger}}$$

$A^0 = I$

$A^1 = A$

$A^2 = \underbrace{A \cdot A}_{2}$

$\vdots$

$\underbrace{A}_{n} \cdot n\{A$

$A \sim n \times n$

Del III

Transponeret matrix

Transponeret matrix

Matricer har en ekstra operation: *transponering*

Hvis A er en $m \times n$-matrix, er $A^\top$ $n \times m$-matricen med $(A^\top)_{ij} = A_{ji}$

Eksempel

$$\begin{array}{cc} 2 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}^\top \\ & 4 \end{array} = \begin{array}{cc} 4 & \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \\ & 2 \end{array}$$

Transponeret matrix
Egenskaber

- $(A^\top)^\top$ = A
- $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
- $(rA)^\top = r(A^\top)$ for en vilkårlig skalar r
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$

$A \sim m \times n$

$B \sim n \times p$

$A^T \sim n \times m$

$B^T \sim p \times n$

$B^T A^T$

Del IV

Vektorer, $\mathbb{R}^n$, skalarprodukt

Vektorer

Skal betragte vektorer som $n \times 1$ matricer:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Men vi skal skrive x_i istedenfor $x_{i,1}$

Matrix-vektor produkt

- $A \sim m \times n$
- $x \sim n \times 1$
- $Ax \sim m \times 1 \in \mathbb{R}^m$
- $y \sim m \times 1 \in \mathbb{R}^m$
- $y^\top A \sim \underline{1 \times n}$

$$(A^T y)^T = y^T (A^T)^T$$
$$= y^T A$$

Skalarprodukt

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$x^T \sim 1 \times n$

$y \sim n \times 1$

$x^T y \sim 1 \times 1$

- $x, y \sim n \times \cancel{n}\,1$

Skalarprodukt:

$$x^\top y = y^\top x = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Del V

Strassen algoritme for matrix multiplikation

Divide-and-conquer

$A, B, C \sim \underbrace{2n}_{} \times \underbrace{2n}_{}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

hvor $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \sim n \times n$.

No free lunch på denne måde:

- Beregning af AB koster $\sim (2n)^3 = 8n^3$ operationer
- Beregning af $A_{ij}B_{jk}$ koster $\sim n^3$, men vi har 8 små matricer at gange

Divide-and-conquer

Strassen algoritme

$$\underbrace{}_{}$$

n x n n x n

$$M_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \qquad M_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$
$$M_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22}) \qquad M_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$$
$$M_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22} \qquad M_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12})$$
$$M_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$

Da

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{pmatrix}$$

- Beregning af AB koster $\sim (2n)^3 = 8n^3$ operationer
- Beregning af M_i koster $\sim n^3$, og vi har kun 7 små matricer at gange

Divide-and-conquer
Strassen algoritme

- Anvend Strassen's algoritme igen (rekursion) for at beregne M_i, $i = 1, \ldots, 7$

Antager: $A, B, C \sim 2^N \times 2^N$, og la antallet af operationer i Strassen's algoritmen være $f(N)$. Husk at den naive algoritme koster $(2^N)^3$.

- $f(1) = 1$
- $f(N) = \boxed{7f(N-1)} + \ell(2^{N-1} \cdot 2^{N-1})$, hvor ℓ er konstant (antallet av ekstra additioner/subtraktioner)
- $f(N) \approx 7^N = (2^N)^{\log_2 7} \approx (2^N)^{2.8074} < (2^N)^3$, som i den naive algoritme