Ortogonalitet,
Afsnit 6.1 og 6.2

12. april 2021

Sandsynlighedsteori og lineær algebra (SLIAL)

Forår 2021

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Overblik

Vi har tidligere set, hvordan man kan løse ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Når vi løser dette kan vi komme ud for følgende:

- Der er uendelig mange løsninger
- Der er én løsning
- Der er ingen løsninger

I denne blok vil vi se nærmere på det sidste tilfælde. Vi vil her prøve at finde et $\mathbf{x}$, der er "tættest på" en løsning.
For at beskrive hvad vi mener med tættest på, skal vi i dag kigge på ortogonalitet.

Span og lineær (u)afhængighed

Givet $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, hvor $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$, så er $\mathrm{span}(V)$ alle mulige linearkombinationer af $\mathbf{v}_i$'erne. Dvs.

$$\mathrm{span}(V) = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m \mid c_i \in \mathbb{R}\}.$$

V er en lineær uafhængig mængde hvis

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

medfører $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$. Hvis der findes en ikke-triviel løsning er den lineær afhængig.

Underrum

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ er et underrum hvis

1. $\mathbf{0} \in V$
2. For alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, har vi også at $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
3. For alle $\mathbf{u} \in V$ og $c \in \mathbb{R}$, har vi også at $c\mathbf{u} \in V$

Givet vektorer i $\mathbb{R}^n$, såsom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$, så er $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$ et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Eksempel

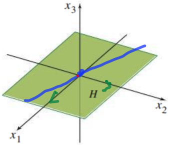
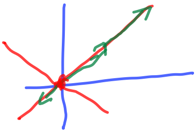


FIGURE 7
The x_1x_2-plane as a subspace of $\mathbb{R}^3$.



$\operatorname{span}(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix})$ *og* $\operatorname{span}(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\end{bmatrix})$

Andet eksempel med underrum

$Ax = 0$ $\quad A \sim R$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Null}(A) = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.
Dette er et underrum, da

1. $\mathbf{0} \in \mathrm{Null}(A)$ pga $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$
2. $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ når $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{Null}(A)$
3. $A(c\mathbf{u}) = cA\mathbf{u} = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ når $\mathbf{u} \in \mathrm{Null}(A)$

Basis

Lad V være et underrum af $\mathbb{R}^n$ og lad $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$. B er en basis for V hvis

1. Vektorerne i B er lineært uafhængige
2. $\mathrm{span}(B) = V$

Eksempel

$B_1 = \{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\}$ og $B_2 = \{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\end{bmatrix}\}$. Begge er en basis for underrummet bestående af vektorer i x_1x_2-planen. Dog er $B_1 \cup B_2$ ikke, da vektorerne heri er lineært afhængige.

Vektorer

Norm af en vektor

Definition

Lad $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ være en n-vektor. Normen af $\mathbf{v}$ betegnes $\|\mathbf{v}\|$ og er givet ved

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Vektorer

Norm af en vektor

Definition

Lad $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ være en n-vektor. Normen af $\mathbf{v}$ betegnes $\|\mathbf{v}\|$ og er givet ved

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Eksempel

Normen af vektoren $\mathbf{w} = [2, -6, 2, 4, -2]$ *er*

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 36 + 4 + 16 + 4} = \sqrt{64} = 8$$

Vektorer
Norm af en vektor

En norm er en (afstands) funktion som opfylder:

N1: $\|\mathbf{v}\| \geq 0$

N2: $\|\mathbf{v}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

N3: $\|c\mathbf{v}\| = |c| \, \|\mathbf{v}\|$, for enhver skalar c

N4: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Vektorer

Enhedsvektor

En vektor som har længden (normen) 1 kaldes for en enhedsvektor.
Givet en vilkårlig vektor, så kan vektoren normaliseres til en enhedsvektor.
Lad $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ være en n-vektor med normen $\|\mathbf{v}\|$. Da er vektoren

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \left[\frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|\mathbf{v}\|}\right]$$

$$\left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$

en enhedsvektor.

Vektorer
Indre produkt

Definition

Lad $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ og $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$.
Det indre produkt (også kaldet prikproduktet) af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Vektorer
Indre produkt

Definition

Lad $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ og $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$.
Det indre produkt (også kaldet prikproduktet) af **u** og **v** er

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Sammenhængen mellem et indre produkt og en norm er givet ved

$$\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \|\mathbf{v}\|$$

$\|v\|^2 = v \cdot v$

Vektorer
Indre produkt

Lad **u**, **v** og **w** være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Så er

$u_1 v_1$ $\quad$ $u^T v$ $\quad$ $[u_1 \ u_2 - u_n]\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
3. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ med lighed hvis og kun hvis $\mathbf{u} = 0$.

Bevis.

Første følger fra definitionen. For den anden

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} u_i w_i + v_i w_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

Tilsvarende kan gøres for den tredje. For den fjerde bemærk, at

$$\sum_{i=3}^{5} i+1 = (3+1) + (4+1) + (5+1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} (u_i)^2. = (u_1)^2 + (u_2)^2 + \dots + (u_n)^2$$

□

Ortogonale vektorer

Definition

To vektorer **u** og **v** i $\mathbb{R}^n$ siges at være ortogonale (orthogonal) hvis

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Ortogonal kaldes også vinkelret (perpendicular).

Vi siger også: **u** er ortogonal på **v**.

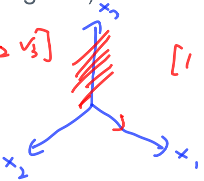
Ortogonale vektorer

Definition

To vektorer **u** og **v** i $\mathbb{R}^n$ siges at være ortogonale (orthogonal) hvis

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

$[0 \ v_2 \ v_3]$



$[1 \ 0 \ 0]^T$

Ortogonal kaldes også vinkelret (perpendicular).

Vi siger også: **u** er ortogonal på **v**.

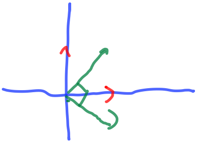
$v \cdot \bar{0} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots = 0$

Eksempel

Enhver vektor **v** *er ortogonal på nulvektoren* **0**.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *er ortogonal på* $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *er ortogonal på* $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. $1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$



Ortogonale vektorer

Lemma

1. *Hvis* $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{v}$ *er ortogonale og* $c \in \mathbb{R}$*, så er* $\mathbf{u}$ *og* $c\mathbf{v}$ *også ortogonale.*
2. *Hvis* $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{v}$ *begge er ortogonale på* $\mathbf{w}$ *så er* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *også ortogonal på* $\mathbf{w}$*.*

Ortogonale vektorer

Lemma

1. *Hvis* $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{v}$ *er ortogonale og* $c \in \mathbb{R}$, *så er* $\mathbf{u}$ *og* $c\mathbf{v}$ *også ortogonale.*
2. *Hvis* $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{v}$ *begge er ortogonale på* $\mathbf{w}$ *så er* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *også ortogonal på* $\mathbf{w}$.

Bevis.

1. $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = c0 = 0.$

$\square$

Ortogonale vektorer

Lemma

1. *Hvis* $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{v}$ *er ortogonale og* $c \in \mathbb{R}$*, så er* $\mathbf{u}$ *og* $c\mathbf{v}$ *også ortogonale.*
2. *Hvis* $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{v}$ *begge er ortogonale på* $\mathbf{w}$ *så er* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *også ortogonal på* $\mathbf{w}$*.*

Bevis.

1. $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = c0 = 0.$
2. $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 + 0 = 0.$

$\square$

Eksempler

Lad $\mathbf{v} = [1, 2, 4, 2]$, $\mathbf{w} = [-2, 1, -2, 4]$ og $\mathbf{u} = [0.5, 0.5, -0.5, 0.5]$

1. Hvad er $||\mathbf{v}||$?
2. Hvilken vektor er en enhedsvektor?
3. Hvad er $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$ og $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$?

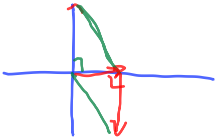
$$||v|| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+16+4} = \sqrt{25} = 5$$

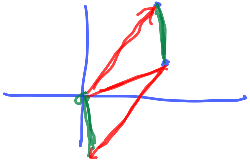
$$||u|| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$w \cdot u = -2 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + (-2)(-\tfrac{1}{2}) + 4 \cdot \tfrac{1}{2} = -1 + \tfrac{1}{2} + 1 + 2 = \tfrac{5}{2}$$

$$v \cdot w = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 0$$

Afstande i $\mathbb{R}^n$





Vi definerer at afstanden mellem **u** og **v** er $\mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$.

Eksempel

$\sqrt{3\cdot 3}$

Afstanden mellem 2 *og* 5 *i* $\mathbb{R}$ *er* $||2 - 5|| = \sqrt{3 \cdot 3} = 3$.

Afstanden mellem $[3, 0]$ *og* $[0, 4]$ *i* $\mathbb{R}^2$ *er* $||[3, -4]|| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$
(Tænk på Pythaghoras's sætning)

Pythagoras

Generelt fås det at $\operatorname{dist}(\mathbf{u},\mathbf{v})^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

$$\operatorname{dist}(\mathbf{u},\mathbf{v})^2 = (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \underbrace{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}_{= ||\mathbf{u}||^2} + \underbrace{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}_{= ||\mathbf{v}||^2} - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}).$$

Hvorfor siger vi vektorer er ortogonale når $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$?

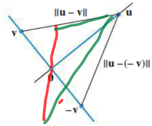


FIGURE 5

$$\operatorname{dist}(\mathbf{u},-\mathbf{v})^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

For at $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}$ er ortogonale skal $\operatorname{dist}(\mathbf{u},-\mathbf{v}) = \operatorname{dist}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, hvilket medfører $2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = -2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$. Derfor må $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.
Pythagoras sætning siger, at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale hvis og kun hvis $||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$

Ortogonale vektorer

Definition

En mængde af vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ kaldes en ortogonal mængde (orthogonal set) hvis enhver vektor i mængden er ortogonal til alle andre vektorer i mængden.
Dvs. der skal gælde at

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{for alle} \quad i \neq j, i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Ortogonale vektorer

Eksempel

Mængden

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

er en ortogonal mængde, da

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 1 - 1 + 0 = 0$$

Ortogonale vektorer

Definition

En mængde af vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ kaldes en ortonormal mængde (orthonormal set) hvis det er en ortogonal mængde og hvis enhver vektor er en enhedsvektor, dvs. $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ for $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ortogonale vektorer

Definition

En mængde af vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ kaldes en ortonormal mængde (orthonormal set) hvis det er en ortogonal mængde og hvis enhver vektor er en enhedsvektor, dvs. $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ for $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Eksempel

$v_1 \cdot v_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

Mængden

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

er en ortonormal mængde.

$v_1 \cdot v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0$

$v_2 \cdot v_2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$

Ortogonale vektorer

Sætning

En ortonormal (eller ortogonal) mængde af vektorer er lineære uafhængige.

Ortogonale vektorer

Sætning

En ortonormal (eller ortogonal) mængde af vektorer er lineære uafhængige.

Bevis.

Lad $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ være en ortonormal mængde. Betragt en linear kombination

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

hvor $c_1, \dots, c_n$ er konstanter.

Ortogonale vektorer

Sætning

En ortonormal (eller ortogonal) mængde af vektorer er lineære uafhængige.

Bevis.

Lad $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ være en ortonormal mængde. Betragt en linear kombination

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

hvor $c_1, \ldots, c_n$ er konstanter. Observer at

$$\begin{aligned}
(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \\
c_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1) + \cdots + c_n(\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_1) &= 0 \\
c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_n \cdot 0 &= 0
\end{aligned}$$

så $c_1 = 0$.

Ortogonale vektorer

Sætning

En ortonormal (eller ortogonal) mængde af vektorer er lineære uafhængige.

Bevis.

Lad $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ være en ortonormal mængde. Betragt en linear kombination

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

hvor $c_1, \ldots, c_n$ er konstanter. Observer at

$$\begin{aligned}
(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \\
c_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1) + \cdots + c_n(\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_1) &= 0 \\
c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_n \cdot 0 &= 0
\end{aligned}$$

så $c_1 = 0$. På tilsvarende måde vises at $c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$. Heraf er $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineære uafhængige. $\square$

Ortogonale vektorer

Proposition

Lad $V = \mathrm{span}(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}) \subseteq \mathbb{R}^n$*, hvor* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *er en ortogonal mængde. Da er* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *en basis for underrummet* V*.*

Ortogonale vektorer

Proposition

Lad $V = \mathrm{span}(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}) \subseteq \mathbb{R}^n$*, hvor* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *er en ortogonal mængde. Da er* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *en basis for underrummet* V*.*

Bevis.

Da $V = \mathrm{span}(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\})$ og $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ er lineære uafhængige, så er $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en basis for V. $\square$

I dette tilfælde kalder vi $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ en ortogonal basis. En ortonormal basis er en basis hvor vektorerne er ortogonale og hvor længden af alle vektorer er en.

Ortogonale baser

$$A = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$$

$$A\bar{c} = \bar{y}$$

Proposition

Lad $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ være en ortogonal basis for $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Lad $\mathbf{y} \in V$, så kan vi skrive $\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$. Hver c_i er da givet ved $c_i = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i}$.

Ortogonale baser

Proposition

Lad $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ være en ortogonal basis for $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Lad $\mathbf{y} \in V$, så kan vi skrive $\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$. Hver c_i er da givet ved $c_i = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i}$.

Bevis.

Da $\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_i = (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{v}_i = c_i(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$ fås resultatet. $\square$

Ortogonale baser

Proposition

Lad $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *være en ortogonal basis for* $V \subseteq \mathbb{R}^n$*. Lad* $\mathbf{y} \in V$*, så kan vi skrive* $\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$*. Hver* c_i *er da givet ved* $c_i = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i}$*.*

Bevis.

Da $\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_i = (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m)\cdot\mathbf{v}_i = c_i(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i)$ fås resultatet. $\square$

Bemærk, at hvis vi har en ortonormal basis fås $c_i = \mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_i$.

Bemærk yderligere, hvor nemt det er at finde disse koefficienter når vi har en ortogonal/ortonormal basis.

Eksempel med ortonormal basis

$$\left\{ \underset{v_1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}} \right\}$$

er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$. Udtryk $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ som en linearkombination af vektorerne i basen.

$y = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

$y \cdot v_1 = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{5}{\sqrt{2}} = c_1$

$y \cdot v_2 = 1 = c_2$

$y \cdot v_3 = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = c_3$

$\frac{5}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} y$

Ortogonale matricer

$U^T = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}$ $U = [u_1\ u_2 \cdots u_n]$

En ortogonal matrix er en $n \times n$ matrix, hvis søjler består af **ortonormale** vektorer. Matricer med orthonormale søjler benyttes ofte i computeralgoritmer.

$u_i^T u_j = u_i \cdot u_j$

Proposition

En $m \times n$ matrix U har ortonormale søjler hvis og kun hvis $U^T U = I$

Bevis.

Den (i,j)'te indgang i $U^T U$ er $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$ hvor $\mathbf{u}_i$ er den i'te søjle i U. Vi har at søjlerne er ortonormale hvis og kun hvis $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ når $i \neq j$ og $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 1$ når $i = j$. □

Bemærk, at hvis $m = n$ så U er en ortogonal matrix, så er $U^{-1} = U^T$.

$[U \mid I] \sim$

Ortogonale matricer

Proposition

Lad U være en $m \times n$ matrix med ortonormale søjler. Så er

1. $||U\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$
2. $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$
3. $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = 0$ *hvis og kun hvis* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

Bevis.

Vi beviser først den anden, da de andre følger heraf.

$$(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = (U\mathbf{x})^T(U\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \underline{U^T U}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T I \mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

$\square$

Ortogonalprojektion

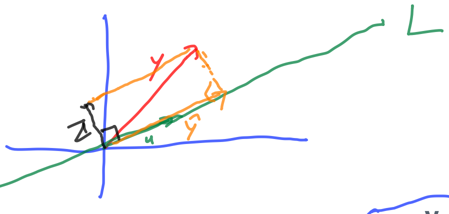
Næste gang kommer vi til at se mere om ortogonalprojektioner. I dag ser vi på et lille eksempel hvor vi vil projektiere en vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ ned på et underrum L udspændt $\mathbf{u}$. Vi ønsker altså at skrive $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$, hvor $\hat{\mathbf{y}} = c\mathbf{u}$ og $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ er ortogonal til $\mathbf{u}$.

cu

$\hat{y} + z = y$

$\hat{y} = cu$

$z = y - \hat{y}$

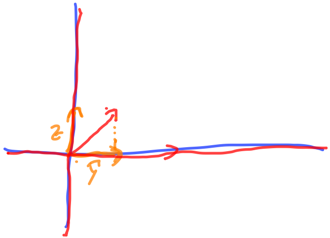


$$0 = \mathbf{z} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{y} - c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} - c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \Rightarrow c = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

Altså er $\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u}$

Eksempel på ortogonalprojektion

Lad $\mathbf{u} = [2, 0]^T$ og $\mathbf{y} = [1, 1]^T$. Find $\hat{\mathbf{y}}$ og $\mathbf{z}$ som ovenfor.



$$\hat{y} = cu$$

$$c = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{2^2 + 0^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{y} = \frac{1}{2} u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z = y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$