Vejledning

Implementeringsopgaver er markerede med *. Vi anbefaler at I begynder med at besvare de teoretiske spørsmål som giver grundlag til algoritmer.

Delopgave 1: Computertomografi

I denne delopgave skal vi se på mindstekvadratersproblemer. Vi skal især betragte et forenklet problem som opstår i computertomografi (CT). Målet med CT er at bestemme et billede af en d-dimensionelt objekt (typisk, patient), ud fra en række af $d-1$-dimensionelle X-ray billeder som er taget fra forskellige vinkler, se Fig. 1

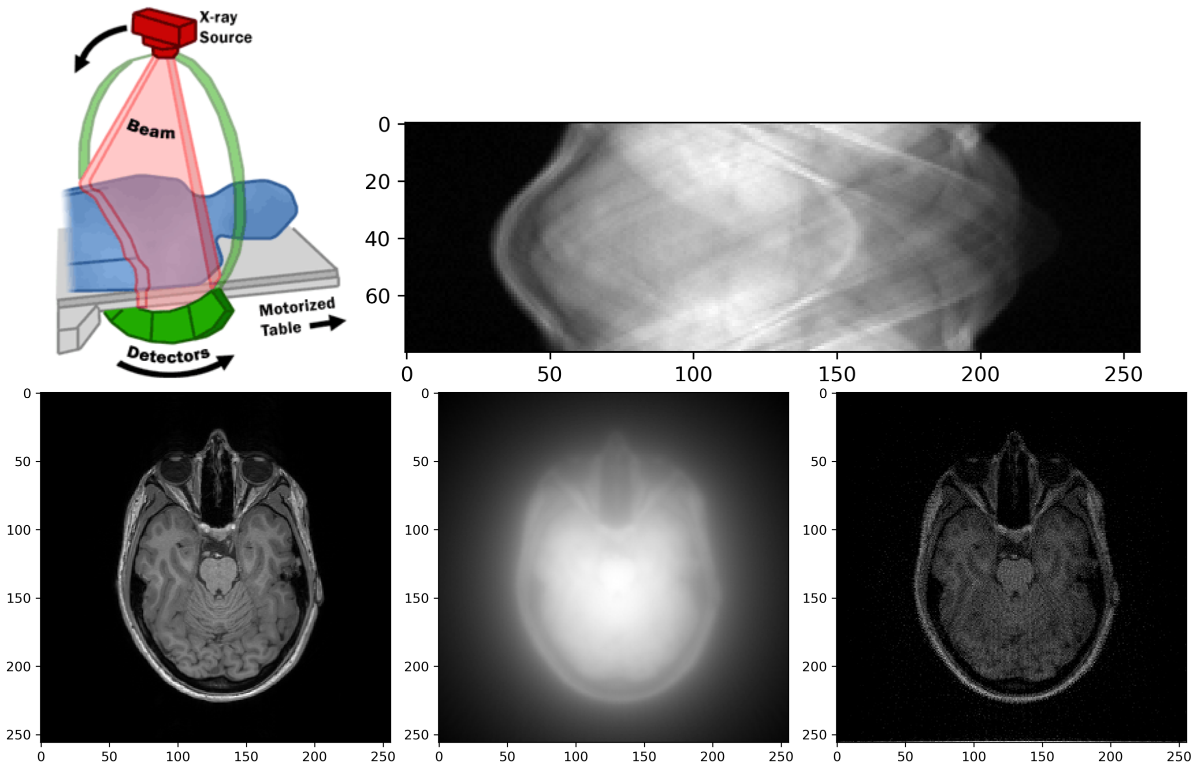

Figure 1: Illustration af CT processen. *Øverste række, venstre til højre*: tegning af CT-maskinen; målinger, hvor hver horisontale linje ræpresenterer 1 ud fra 80 1-dimensionelle X-ray billeder. Målingene indeholder 1% støj. Alle målinger samles i en lang vektor b. *Nederste række, venstre til høyre*: oprindelig ukendt objekt, som skal rekonstrueres baseret på målinger; den højre side i normalligninger, $A^T b$; mindstekvadraters rekonstuktionen $\hat{x}$, som løser normalligninger $A^T A\hat{x} = A^T b$.

Vi betragter en forenklet situation. Vi fokuserer på $d = 2$, således at vores X-ray billeder er en-dimensionelle. Vi antager også at vores objekt er givet af $N \times N$ gråskala pixels, og vi tager kun 4 "billeder" af den fra vinklene 0°, 90°, 45°, og 135°, med en X-ray stråle per pixel. Denne proces er illustreret i Fig. 2.

1. Baseret på beskrivelse i Fig. 2, find en matrix A for vores forenklede CT problem til at bestemme billedet $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ ud fra målinger uden fejl, sådan at systemet kan skrives som $Ax = b$. Hvad er størrelsen af A?

2. Nu antager vi at målningene indeholder ukendte fejl, dvs, istedet for den eksakte vektor b, måler vi en vektor $\tilde{b} = b + f$. Forklar hvorfor ligningsystemet $Ax = \tilde{b}$ ikke nødvendigvis er løsbar. Forklar begrebet mindstekvadratersproblem ud fra dette ligningssystem.

3. Fra og med dette delspørsmål skal vi betragte større billeder med $N \times N$ pixels istedet for 2×2. Vi betragter stadig situationen hvor kun 4 "X-ray billeder" tages, på samme måde som i Fig. 2. Hvad er størrelsen af x, b, og A i denne situation?

4. Brug sætning 8 i afsnit 1.7 i [Lay] til at afgøre, for hvilke $N \geq 2$ er søjlerne i matricen A fra det sidste delspørsmål nødvendigvis *lineært afhængige*? I de følgende spørsmål skal vi kun se på N, for hvilke A kan have *lineært uafhængige* søjler.

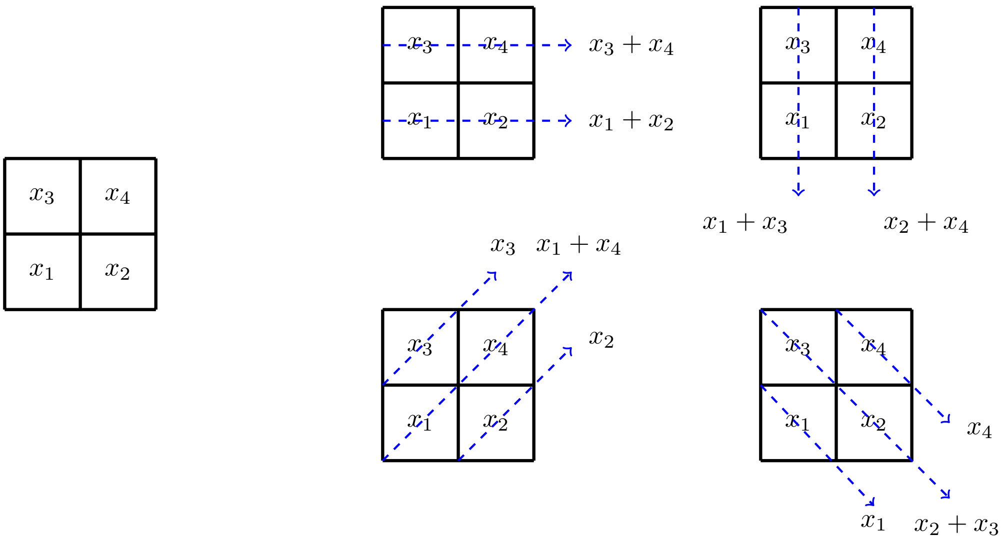

Figure 2: Vores model af CT med fire "X-ray billeder" af 2×2 billede $[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4$ fra fire vinkler. I denne situation måler vi (dvs hvis målinger ikke indeholder fejl) $b = [x_1+x_2, x_3+x_4, x_1+x_3, x_2+x_4, x_2, x_1+x_4, x_3, x_1, x_2+x_3, x_4] \in \mathbb{R}^{10}$. I virkeligheden måler vi $\tilde{b} = b + f \in \mathbb{R}^{10}$, hvor $f \in \mathbb{R}^{10}$ er en vektor med ukendte fejl.

5. Forklar hvordan Gram–Schmidt QR-faktorisering af en matrix A kan bruges til at løse mindstekvadratersproblemet $\min_x \|Ax - b\|^2$.

6. * På moodle finder I et script, som implementerer Gram–Schmidt baseret på ortogonaliseringsalgoritmen for en $m \times n$ matrix A. Test scriptet ved at tjekke, at $Q^T Q \approx I$[1], R er en øvre triangulær matrix, og at $QR \approx A$ for en tilfældig matrix A med lineært uafhængige søjler.

7. Lad nu $N = 2$, og $b = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] \in \mathbb{R}^{10}$. Bestem en projektion af b på underrummet $\mathrm{col}(A)$ som er udspændt af søjene i matricen A. I kan med fordel bruge QR-faktoriseringen, da $\mathrm{col}(A) = \mathrm{col}(Q)$.

8. * Lav et program, som givet et positiv heltal $N \geq 2$ producerer en matrix A knyttet til vores CT-model med 4 billeder.

9. * Lav et program som finder en løsning til mindstekvadratersproblemet knyttet til vores CT-model med 4 billeder givet et positiv heltal $N \geq 2$ og en vektor af målinger $\tilde{b}$. I kan teste på koden på den følgende måde: for en tilfældig vektor $\hat{x} \in \mathbb{R}^{N^2}$, kan vi bestemme $b = Ax$. For denne b kan vi forvente, at $\hat{x}$ løser mindstekvadratersproblemet $\min_x \|Ax - b\|^2$. Hvis vi lægger "lidt" tilfeldig støj f til b[2], kan vi også forvente, at løsningen til mindstekvadratersproblemet bliver tæt på $\hat{x}$, som kan måles ved at beregne afstanden til $\hat{x}$.

Deloppgave 2: Givens rotationer

Betragt en vektor $[a, b] \in \mathbb{R}^2$ forskellig fra nulvektoren. Givens rotation er en ortogonal transformation (rotation), som afbilleder $[a, b]$ til en vektor $[d, 0] \in \mathbb{R}^2$.

1. Brug sætning 7 i afsnit 6.2 [Lay], til at bestemme $|d|$ givet $[a, b]$.

2. Tjek at
$$G = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}, \tag{1}$$
hvor $c = a/\sqrt{a^2+b^2}$ og $s = b/\sqrt{a^2+b^2}$ er en ortogonal matrix som afbilleder $[a, b]$ til $[d, 0]$.

3. Lad os nu betragte en vektor $x \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, således at $x_i = a$ og $x_j = b$, $i < j$. Vi beregner c og s som i det sidste delspørsmål, og lad $G(i, j, a, b)$ være en $m \times m$ matrix, med alle række/søjle som i

[1] Vi bguger $\approx$ og ikke $=$ på grund af numeriske afrundningsfejl.
[2] Se Math.random() i JavaScript

identitetsmatrix, bortset fra række/søjle i og j, hvor vi "indsætter" matrix G fra (1), dvs $G(i,j,a,b)_{ii} = G(i,j,a,b)_{jj} = c$, $G(i,j,a,b)_{ij} = -G(i,j,a,b)_{ji} = s$:

$$G(i,j,a,b) = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & c & & s & \\ & & I & & \\ & -s & & c & \\ & & & & I \end{bmatrix}, \tag{2}$$

Tjek at $G(i,j,a,b)$ er en ortogonal matrix, og at

$$G(i,j,a,b)x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ d \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ 0 \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

4. Forklar, hvorfor produktet af ortogonale matricer er en ortogonal matrix. Dvs, hvis $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ er ortogonale matricer, forklar hvorfor matricen $Q_1 Q_2 \cdots Q_k$ er ortogonal.

5. Betragt den følgende algoritme, hvor matrix A af størrelse $m \times n$ er givet.

   $Q := I_{m\times m}$; $R := A$;
   for $i = 1, \ldots, n$ **do**
     for $j = i+1, \ldots, m$ **do**
       $a = R_{ii}$; $b = R_{ji}$;
       if $b \neq 0$ **then**
         $R := G(i,j,a,b)R$; $Q := QG(i,j,a,b)^T$;
       end if
     end for
   end for

   hvor $G(i,j,a,b)$ er givet av (2).

   (a) Brug det sidste delspørsmål til at forklare, hvorfor matrix Q er ortogonal i alle iterationer af algoritmen.

   (b) Forklar hvorfor betingelsen $A = QR$ er opfyldt i alle iterationer af algoritmen.

   (c) Brug (3) til at forklare, hvorfor algoritmen producerer en matrix R, som er øvre triangulær.

   Implementationen af denne algoritme findes på moodle, og forhåbentligt hjælper det jer til at besvare dette delspørsmål.