Markov-kæde,
Kapitel 10 [Lay]

March 21, 2021

Sandsynlighedsteori og lineær algebra (SLIAL)

Forår 2021

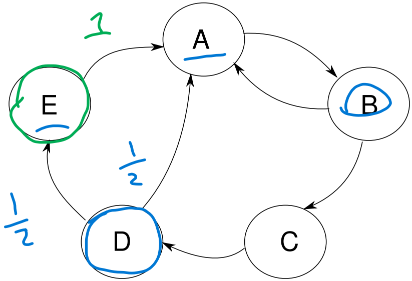
AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Part I

Markov-kæde

Eksempel: web surfer

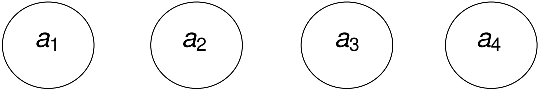
En web-surfer bevæger sig rundt på (en mini-udgave af) www. Antagelse: Når det er tid til at skifte side, så vælges et af de udgående links (alle med samme sandsynlighed) *uafhængigt* af hvor man tidligere har været.



Diskrete stokastiske systemer

Vi betragter

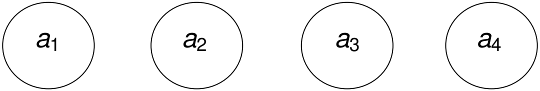
- et system med et endeligt antal n af tilstande (state),



Diskrete stokastiske systemer

Vi betragter

- et system med et endeligt antal n af tilstande (state),
- systemets tilstande observeres til diskrete tidspunkter,

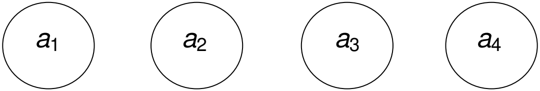


$$t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$$

Diskrete stokastiske systemer

Vi betragter

- et system med et endeligt antal *n* af tilstande (state),
- systemets tilstande observeres til diskrete tidspunkter,
- de diskrete tidspunkter betegnes oftest ved tiderne $0, 1, 2, 3, \ldots,$



$$t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, \ldots$$

Diskrete stokastiske systemer

Vi betragter

- et system med et endeligt antal n af tilstande (state),
- systemets tilstande observeres til diskrete tidspunkter,
- de diskrete tidspunkter betegnes oftest ved tiderne $0, 1, 2, 3, \ldots,$
- systemets tilstande til tiderne $0, 1, 2, 3, \ldots$ udtrykkes ved *tilstandsvektorer* eller *sandsynlighedsvektorer* $x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots$.

$$p(\text{systemet befinner sig i tilstand } a_j \text{ ved tid } t_i) = (x_i)_j$$

Husk: $(x_i)_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} (x_i)_j = 1$

Markovkæde

En Markovkæde er et stokastisk system som oppfyller

$$\boxed{x_{i+1} = Px_i,}$$

hvor P er $n \times n$ matrix.

$$x_i = e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{pos } k$$

$$x_{i+1} = Px_i = Pe_k = \begin{pmatrix} P_{1k} \\ \vdots \\ P_{nk} \end{pmatrix}$$

Hvad er P_{jk}?

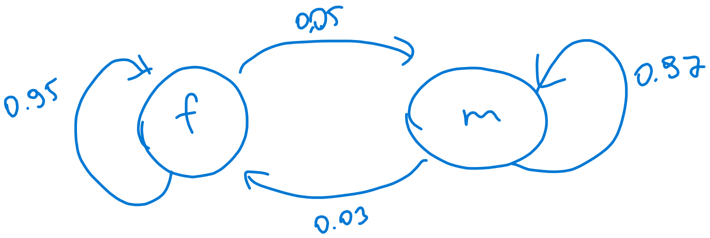
$$\boxed{P_{jk} = p(\text{tilstand ved tid } i + 1 \text{ er } a_j \mid \text{tilstand ved tid } i \text{ er } a_k).}$$

Eksempel: Xkøbing

- Xkøbing er en by, der består af en midtby og en forstad. I alt med 100 000 indbyggere. 100% − 5% = 95%
- Hvert år flytter 5% af indbyggerne i forstaden til midtbyen og 3% af indbyggerne i midtbyen flytter til forstaden.
- Efter t år bor der x_t^{f} indbyggere i forstaden og x_t^{m} i midtbyen.
- Tilsvarende sandsynlighedsvektor er $\mathbf{x}_t = (x_t^{\mathrm{f}}/100\,000, x_t^{\mathrm{m}}/100\,000)$.
- Lad $P = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix}$. Så $\mathbf{x}_{t+1} = P\mathbf{x}_t$

$$\frac{x^f_{t+1}}{100000} = 0.95 \cdot \frac{x^f_t}{100000} + 0.03 \cdot \frac{x^m_t}{10000}$$

Eksempel: Xkøbing



Stokastisk matrix

P er stokastisk matrix, da

- $0 \leq P_{jk} \leq 1$
- Alle søjle av *P* er sandsynlighedsvektorer:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{jk} = \sum_{j=1}^{n} p(\underbrace{\text{tilstand ved tid } i+1 \text{ er } a_j}_{E_{i+1,j}} \mid \underbrace{\text{tilstand ved tid } i \text{ er } a_k}_{E_{i,k}}) = 1$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_{i+1,j} \mid E_{i,k}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(E_{i+1,j} \cap E_{i,k})}{P(E_{i,k})}$$

$$= \frac{P(S_{i+1} \cap E_{i,k})}{P(E_{i,k})} = \frac{P(E_{i,k})}{P(E_{i,k})} = 1$$

Markov egenskaben

Fra definitionen, oppfyller markovkæde den følgende egenskab:

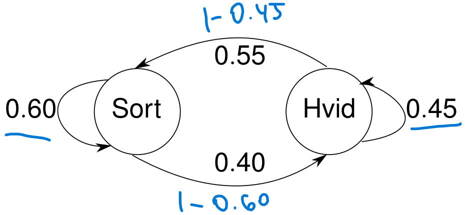
den betingede sandsynlighedsfordeling til ethvert observerede tidspunkt, givet det tidligere forløb, kun afhænger af den senest observede tilstand, dvs.

$$p(E_{j_{i+1},i+1} | E_{j_i,i} \cap E_{j_{i-1},i-1} \cap \cdots \cap E_{j_0,0}) = p(E_{j_{i+1},i+1} | E_{j_i,i}),$$

hvor $E_{j,i}$ = systemet befinner sig i tilstand a_j ved tid t_i

Altså: "hvor vi går hen efter tid t_i er uafhængigt af hvor vi kommer fra".

Eksempel: Peters t-shirts



Peter ejer kun hvide og sorte t-shirts. Hver morgen tager han en t-shirts på ud fra følgende overvejelser:

- Hvis Peter havde en sort t-shirts på dagen før, så er der 60% sandsynlighed for at han også tager en sort t-shirts på i dag.
- Hvis Peter havde en hvid t-shirts på dagen før, så er der 45% sandsynlighed for at han også tager en hvid t-shirts på i dag.

Eksempel: Peters t-shirts

Lad p_t^s (p_t^h) være sandsynligheden for, at Peter har en sort (hvid) t-shirt på dag t

Eksempel: Peters t-shirts

Lad p_t^s (p_t^h) være sandsynligheden for, at Peter har en sort (hvid) t-shirt på dag t Lad første søjle i matricen repræsentere overgangssandsynligheder mht. sort og anden søjle repræsentere overgangssandsynligheder mht. hvid. Da den tilsvarende stokastiske matrice er givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.55 \\ 0.4 & 0.45 \end{bmatrix}$$

Eksempel: Peters t-shirts

Lad p_t^s (p_t^h) være sandsynligheden for, at Peter har en sort (hvid) t-shirt på dag t Lad første søjle i matricen repræsentere overgangssandsynligheder mht. sort og anden søjle repræsentere overgangssandsynligheder mht. hvid. Da den tilsvarende stokastiske matrice er givet ved

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.55 \\ 0.4 & 0.45 \end{bmatrix}$$

og sandsynligheden for, at Peter tager en sort og en hvid t-shirt på dag $t + 1$ er

$$\begin{bmatrix} p_{t+1}^s \\ p_{t+1}^h \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.6 & 0.55 \\ 0.4 & 0.45 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} p_t^s \\ p_t^h \end{bmatrix}$$

Markov-kæde

Sandsynlighedsvektor

Eksempel (Web surfer)

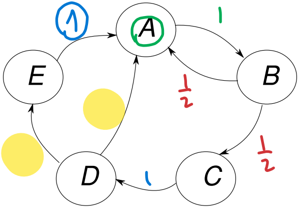
Der er i alt n web-sider som er alle er numereret. Tilstandsmængden (udfaldsrummet) er altså $\{1, 2, \dots, n\}$.
Antag at der går mindst ét link ud fra hver side.
Vi konstuerer en $n \times n$ matrix $A = [a_{ij}]$, hvor

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{hvis der er link fra } j \text{ til } i \text{ og der er i alt } k \text{ links fra } j \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Så er A en stokastisk matrix.

Markov-kæde
Sandsynlighedsvektor

Eksempel (Web surfer, forsat)



Her er

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \end{array}$$

Markov-kæde
Sandsynlighedsvektor

Eksempel (Web surfer, forsat)

Hvis vi starter med $\mathbf{p}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$*, så er*

$$\mathbf{p}^{(10)} = A^{10}\mathbf{p}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.306 \\ 0.306 \\ 0.150 \\ 0.163 \\ 0.075 \end{bmatrix}$$

Markov-kæde

Sandsynlighedsvektor

Eksempel (Web surfer, forsat)

Hvis vi starter med $\mathbf{p}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$*, så er*

$$\mathbf{p}^{(10)} = A^{10}\mathbf{p}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.306 \\ 0.306 \\ 0.150 \\ 0.163 \\ 0.075 \end{bmatrix}$$

Efter 10 *skrift til en ny side, er der altså større sandsynlighed for at være på side A og B end side C, D og E.*

Part II

Stationær fordeling

Stationær fordeling

Definition

En vektor π siges at være en **stationær fordeling(-svektor)** (stationary distribution) for en Markov-kæde med en stokastisk matrix P hvis

- π er en sandsynlighedsvektor og
- $P\pi = \pi$.

Stationær fordeling

Definition

En vektor π siges at være en **stationær fordeling(-svektor)** (stationary distribution) for en Markov-kæde med en stokastisk matrix P hvis

- π er en sandsynlighedsvektor og
- $P\pi = \pi$.

Observer at hvis $P\pi = \pi$, så er

$$0 = P\pi - \pi = (P - I_n)\pi = \underbrace{(P - 1I_n)}\pi$$

Stationær fordeling

Definition

En vektor π siges at være en **stationær fordeling(-svektor)** (stationary distribution) for en Markov-kæde med en stokastisk matrix P hvis

- π er en sandsynlighedsvektor og
- $P\pi = \pi$.

Observer at hvis $P\pi = \pi$, så er

$$0 = P\pi - \pi = (P - I_n)\pi = (P - 1I_n)\pi$$

π er altså en egenvektor med egenværdi $\lambda = 1$ for P.

Stationær fordeling

Sætning

Lad P være en stokastisk matrix. Så er 1 en egenværdi for P.

Stationær fordeling

Sætning

Lad P være en stokastisk matrix. Så er 1 en egenværdi for P.

Bevis.

$\lambda = 1$ er en egenværdi for P

$\iff$ det homogene system $(P - \lambda I_n)\pi = 0$ har en ikke triviel løsning

$\iff$ $P - \lambda I_n$ er ikke inverterbar

$\iff$ $P^\top - \lambda I_n$ er ikke inverterbar

$\iff$ $\lambda = 1$ er en egenværdi for $P^\top$ (se materiale fra blok 01)

$(P - \lambda I)^T = P^T - \lambda I$

Stationær fordeling

Sætning

Lad P være en stokastisk matrix. Så er 1 en egenværdi for P.

Bevis.

$\lambda = 1$ er en egenværdi for P

$\iff$ det homogene system $(P - \lambda I_n)\pi = 0$ har en ikke triviel løsning

$\iff$ $P - \lambda I_n$ er ikke inverterbar

$\iff$ $P^\top - \lambda I_n$ er ikke inverterbar

$\iff$ $\lambda = 1$ er en egenværdi for $P^\top$ (se materiale fra blok 01)

Lad $\mathbf{v} = [1, \ldots, 1]$. Da gælder det at

$$P^\top \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P^T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{række}_1(P^T) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \text{række}_n(P^T) \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{søjle}_1(P) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \text{søjle}_n(P) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

da summen af indgangen i en række i $P^\top$ er 1. $\square$

Stationær fordeling

Eksempel (Peters t-shirts)

I eksemplet med Peters t-shirts er den stokastisk matrix givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.55 \\ 0.4 & 0.45 \end{bmatrix}$$

Da er

$$A^\top \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.55 & 0.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 + 0.4 \\ 0.55 + 0.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Heraf ses at $\lambda = 1$ er en egenværdi for $A^\top$ og derfor også for A.

Stationær fordeling

Eksempel (Peters t-shirts, forsat)

Kan vi så bestemme den stationære fordeling?

Stationær fordeling

Eksempel (Peters t-shirts, forsat)

Hvis π er en stationær fordeling, så er π en løsning til det homogene ligningssystem $(A - I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Stationær fordeling

Eksempel (Peters t-shirts, forsat)

Hvis π er en stationær fordeling, så er π en løsning til det homogene ligningssystem $(A - I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi har at

$$A - I_2 = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.55 \\ 0.4 & -0.55 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -0.4 & 0.55 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

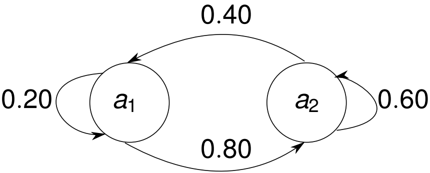
som har løsningsrummet

$$\mathbf{x} = k \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{R}$$

Da π er en sandsynlighedsfordeling, skal vi bestemme det k som opfylder at indgangene i π summer til en. Det er tilfældet for $k = \frac{20}{19}$. Heraf er

$$\pi = \frac{20}{19} \begin{bmatrix} \frac{11}{20} \\ \frac{8}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{19} \\ \frac{8}{19} \end{bmatrix}$$

Eksempel



Den stokastiske matrix for ovenstående system er $P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$

Hvad er den stationære fordelingsvektor?

1. $\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$
2. $\cancel{\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}$
3. $\pi = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
4. $\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

$$P\pi = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0.2 + 2\cdot 0.4 \\ 0.8 + 2\cdot 0.6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$P\pi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0.2 + 0.4 \\ 0.8 + 0.6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0.6 \\ 1.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \pi$$

Stationær fordeling

Hvornår findes der en entydig stationær fordeling?

Stationær fordeling

regulære

Hvornår findes der en entydig stationær fordeling?

Sætning

Lad P være en stokastisk matrix. Antag at alle tal i P er større end 0, eller at der findes et positivt helt tal k som opfylder at alle tal i P^k er større end 0.

Så findes der en entydig sandsynlighedsvektor π som opfylder at $P\pi = \pi$.

Stationær fordeling

Hvornår findes der en entydig stationær fordeling?

Sætning

Lad P være en stokastisk matrix. Antag at alle tal i P er større end 0, eller at der findes et positivt helt tal k som opfylder at alle tal i P^k er større end 0.
Så findes der en entydig sandsynlighedsvektor π som opfylder at $P\pi = \pi$.

Hvis $\mathbf{p}^{(0)}$ er vilkårlig sandsynlighedsvektor og $\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \mathbf{p}^{(3)}, \ldots$ opfylder at $\mathbf{p}^{(t+1)} = P\mathbf{p}^{(t)}$, så vil $\mathbf{p}^{(t)}$ nærme sig π når t bliver tilstrækkeligt stor.

Stationær fordeling

Hvornår findes der en entydig stationær fordeling?

Sætning

Lad P være en stokastisk matrix. Antag at alle tal i P er større end 0, eller at der findes et positivt helt tal k som opfylder at alle tal i P^k er større end 0.
Så findes der en entydig sandsynlighedsvektor π som opfylder at $P\pi = \pi$.

Hvis $\mathbf{p}^{(0)}$ er vilkårlig sandsynlighedsvektor og $\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \mathbf{p}^{(3)}, \ldots$ opfylder at $\mathbf{p}^{(t+1)} = P\mathbf{p}^{(t)}$, så vil $\mathbf{p}^{(t)}$ nærme sig π når t bliver tilstrækkeligt stor.

Vektoren π kan bestemmes med potensmetoden.

Stationær fordeling

Eksempel (Xkøbing)

Hvordan er fordelingen af indbyggerne efter rigtig mange år? Findes der en stationær fordeling?

Stationær fordeling

Eksempel (Xkøbing)

Hvordan er fordelingen af indbyggerne efter rigtig mange år? Findes der en stationær fordeling?

Den stokastiske matrix er $A = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix}$.

Da alle indgange i A *er større end nul, så findes en stationær fordeling* π.

Stationær fordeling

Eksempel (Xkøbing)

Hvordan er fordelingen af indbyggerne efter rigtig mange år? Findes der en stationær fordeling?

Den stokastiske matrix er $A = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix}$.

Da alle indgange i A er større end nul, så findes en stationær fordeling π.

Vi ser at

$$A - 1 \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 0.95 - 1 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 \\ 0.05 & -0.03 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -0.05 & 0.03 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så løsningsrummet er $c \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.05 \end{bmatrix}$ *hvor* $c \in \mathbb{R}$.

Stationær fordeling

Eksempel (Xkøbing, forsat)

Vi søger den specielle løsning, hvor summen af indgangene er 1*, så der skal gælde at*

$$1 = 0.03c + 0.05c = 0.08c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{0.08} = 12.5 = \frac{25}{2}$$

Stationær fordeling

Eksempel (Xkøbing, forsat)

Vi søger den specielle løsning, hvor summen af indgangene er 1*, så der skal gælde at*

$$1 = 0.03c + 0.05c = 0.08c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{0.08} = 12.5 = \frac{25}{2}$$

Den stationære fordeling er derfor

$$\pi = \frac{25}{2}\begin{bmatrix} \frac{3}{100} \\ \frac{5}{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{75}{200} \\ \frac{125}{200} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

Stationær fordeling

Eksempel (Xkøbing, forsat)

Vi søger den specielle løsning, hvor summen af indgangene er 1*, så der skal gælde at*

$$1 = 0.03c + 0.05c = 0.08c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{0.08} = 12.5 = \frac{25}{2}$$

Den stationære fordeling er derfor

$$\pi = \frac{25}{2}\begin{bmatrix} \frac{3}{100} \\ \frac{5}{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{75}{200} \\ \frac{125}{200} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

Xkøbing har 100 000 *indbyggere. En stabil fordeling af indbyggerne er derfor*

$$100\,000 \cdot \pi = \begin{bmatrix} 37\,500 \\ 62\,500 \end{bmatrix}$$

Stationær fordeling

Eksempel (Web surfer)

Her er

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad og \quad A^9 = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{9}{32} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{32} & \frac{3}{16} & \frac{5}{32} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Stationær fordeling

Eksempel (Web surfer)

Her er

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad og \quad A^9 = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{9}{32} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{32} & \frac{3}{16} & \frac{5}{32} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Da alle indgange i A^9 er større end nul, findes en stationær fordelingsvektor. Desuden er $\lambda = 1$ en egenværdi for A.

Stationær fordeling

Eksempel (Web surfer)

Her er

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A^9 = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{9}{32} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{32} & \frac{3}{16} & \frac{5}{32} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Da alle indgange i A^9 er større end nul, findes en stationær fordelingsvektor. Desuden er $\lambda = 1$ en egenværdi for A.
Hvis $\lambda = 1$ er en egenværdi for A med tilhørende egenvektor π, så er $A^k\pi = 1^k\pi$.

Stationær fordeling

Eksempel (Web surfer, forsat)

Potensmetoden giver så at

$$A^{k+1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \approx 1\mathbf{v}$$

hvor $\mathbf{v}$ *er en egenvektor tilhørende egenværdien* 1 *for* A.

Stationær fordeling

Eksempel (Web surfer, forsat)

Potensmetoden giver så at

$$A^{k+1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \approx 1\mathbf{v}$$

hvor $\mathbf{v}$ *er en egenvektor tilhørende egenværdien* 1 *for* A.

Da vi søger den egenvektor som er en sandsynlighedsvektor, approksimeres med en vektor hvor indgangene summer til 1 *i stedet for vektoren med* 1 *i alle indgange.*

Stationær fordeling

Eksempel (Web surfer, forsat)

Observer derfor at

$$A^{10}\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.306\\0.306\\0.150\\0.163\\0.075\end{bmatrix} \approx \frac{1}{13}\begin{bmatrix}4\\4\\2\\2\\1\end{bmatrix}$$

Stationær fordeling

Eksempel (Web surfer, forsat)

Observer derfor at

$$A^{10}\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.306\\ 0.306\\ 0.150\\ 0.163\\ 0.075\end{bmatrix} \approx \frac{1}{13}\begin{bmatrix}4\\ 4\\ 2\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$$

Heraf er $\pi = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}4\\ 4\\ 2\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$ *den stationære fordelingsvektor.*