Inverse og invertible matricer, Afsnit 2.2–2.3

19. februar 2021

SLIAL

Forår 2021

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Del I

Repetition

Lineær (u)afhængighed

Definition

Mængden af vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ i $\mathbb{R}^n$ siges at være lineært uafhængig, hvis

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_s\mathbf{v}_s = \mathbf{0} \tag{1}$$

medfører $c_1 = c_2 = \cdots = c_s = 0$.

Hvis der eksisterer konstanter $c_1, c_2, \ldots, c_s$ ikke alle lig nul, så (1) er opfyldt, kaldes $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ i $\mathbb{R}^n$ lineært afhængig.

Standardmatrix

$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$T(c \cdot x) = c\,T(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Sætning

Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation. Da eksisterer en entydig $m \times n$-matrix A, sådan at

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Yderligere gælder, at

$$A = [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ \cdots\ T(\mathbf{e}_n)].$$

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e pos i

Matricen A i sætningen kaldes *standardmatricen* for T

Del II

Nyt stof

Billedmængden af en transformation

For en transformation T betegner $\mathrm{range}(T)$ mængden af alle billeder under T

„alt det, vi rammer, når vi bruger alle mulige vektorer som input“

Hvis $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er lineær, er

hvor $A = [a_1 \dots a_n]$

$$T(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

Det vil sige, at $\mathrm{range}(T) =$ $\{y : y = Ax\} = \mathrm{span}\{a_1 \dots a_n\}$

Sammensætning av afbildninger

$T_1(x) = Ax$

$T_2(y) = By$

Antager:

- $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: lineær transformation med $m \times n$ standardmatrix A
- $T_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$: lineær transformation med $s \times m$ standardmatrix B

Lad oss betragte sammensætningen $T(x) = T_2(\underbrace{T_1(x)}_{\in \mathbb{R}^m})$; $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$.
T er lineær fordi både T_1 og T_2 er:

- $T(x+y) = T_2(T_1(x+y)) = T_2(T_1(x) + T_1(y)) = T_2(T_1(x)) + T_2(T_1(y))$

  $= T(x) + T(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$

- $T(cx) = T_2(T_1(cx)) = T_2(c\,T_1(x)) = c\,T_2(T_1(x))$

  $= c\,T(x)$

  $\forall\, c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$

Hvad er standardmatrix for sammensætningen?

$A = [a_1 \cdots a_n]$

$T_2(z) = Bz$

$T(x) = Cx$

T har standardmatrix

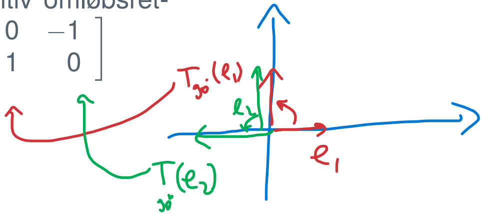
$C = [T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)] = [T_2(\underbrace{T_1(e_1)}_{a_1}) \ \cdots \ T_2(\underbrace{T_1(e_n)}_{a_n})]$

$= [Ba_1 \ Ba_2 \ \cdots \ Ba_n]$

$\boxed{\text{Dvs: } C = B \cdot A}$

F.eks: sammensætning af rotationer

Den lineære transformation $T_{90^\circ} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der drejer en vektor 90° i positiv omløbsretning har standardmatrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



$AA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

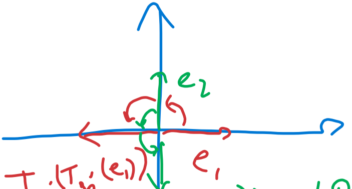
matrix av $T_{90^\circ}(T_{90^\circ}(\cdot))$

Passer det?

Sammensætning $T_{90^\circ} \circ T_{90^\circ}$ må være en rotation med 180°
(Dette er en lineær tranformation)

Standardmatricen for denne er

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{st matrix for}$$



$$T_{90^\circ}(T_{90^\circ}(e_1)) = T_{180^\circ}(e_1)$$

$$T_{90^\circ}(T_{90^\circ}(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T_{90^\circ}(T_{90^\circ}(\cdot)) = T_{180^\circ}$$

Identitetsafbildning

$\boxed{I(x) = x}$; lineær transformation.
Hvad er standardmatricen til I?

$$[I(e_1)\ \ I(e_2)\ \cdots\ I(e_n)]$$

$$= [e_1\ \ e_2\ \cdots\ e_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

$$\boxed{I_n x = x}$$

Matrixinvers

Hvornår betyder $AB = AC$, at $B = C$?

Vi vil på én eller anden måde gerne „dividere“ med en matrix
Men hvad betyder det?

For brøker gælder: At dividere med 2 er det samme som... $\Leftrightarrow 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Matrixinvers

Definition

En $n \times n$-matrix A kaldes *inverterbar*, hvis der eksisterer en matrix A^{-1}, som opfylder

$$\boxed{AA^{-1} = I_n \quad \text{og} \quad A^{-1}A = I_n.}$$

Matricen A^{-1} kaldes den *inverse* af A.

Eksempel

Er $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$? den inverse til $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$?

passer!

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & -2+2 \\ -1+1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Matrixinvers

Hvis A er inverterbar, og $AB = AC$, får vi...

$$\exists\ A^{-1}: \quad A^{-1}A = I_n$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I_n}B = \underbrace{A^{-1}A}_{I_n}C$$

$$I_nB = B = I_nC = C$$

Egenskaber

$$(A^{-1})A = I_n$$
$$A(A^{-1}) = I_n$$
$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Hvis A og B er inverterbare, gælder

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$(AB)^{-1}(AB) = I_n$$
$$(B^{-1}\underbrace{A^{-1})(A}_{I_n}B) = B^{-1}I_nB$$
$$= B^{-1}B = I_n$$

Bemærk desuden, at den inverse er entydig

$$(AB)(AB)^{-1} = I_n$$
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Hvordan udregnes A^{-1}?

For 2×2-matricer har vi følgende resultat:

Sætning

Matricen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er inverterbar, hvis og kun hvis $\det A = ad - cb \neq 0$.

Hvis A er inverterbar, er dens inverse givet ved

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

A^{-1} for 2×2-matricer

$\det \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 0$

Eksempel

Er $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ inverterbar? Nei!

$\det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 12 - 10 = \underline{\underline{2 \neq 0}}$

Eksempel

Er $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ inverterbar? ja!

$A^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}}}$

$A^{-1}A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 & 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \\ -5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 & -5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = I_2$

Elementærmatricer

En matrix kaldes en *elementærmatrix*, hvis den kan dannes ved at lave én rækkeoperation på identitetsmatricen.

Eksempel

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad r_1 \leftrightarrow r_2$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_2 := r_2 + 2 \cdot r_1$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elementærmatricer

Hvis E er en elementærmatrix, er EA matricen, hvor den tilsvarende rækkeoperation er udført på A.

Eksempel

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Da er $EA = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Elementærmatricer

Alle elementærmatricer er inverterbare:
Brug bare den „omvendte“ rækkeoperation

$r_2 := r_2 - 2 \cdot r_1$

$r_2 = r_2 + 2r_1$

Eksempel

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ har invers } E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$EE^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E^{-1}E$$

Elementærmatricer og invers

Antag, at $A \sim I$

Der eksisterer rækkeoperationer, så A reduceres til identitetsmatricen
Dermed eksisterer også tilhørende elementærmatricer $E_1, E_2, \ldots, E_s$

Dette betyder

$$\underbrace{E_s \cdots E_2 E_1}_{A^{-1}} I A = I_n$$

$$A^{1} = E_s \cdots E_2 E_1 I$$

Algoritme til at finde A^{-1}

- Opskriv matricen $[A \mid I]$, og rækkereducer til $[R \mid B]$
- Hvis...
  - ...$R = I$, er A inverterbar, og $A^{-1} = B$
  - ...$R \neq I$, er A ikke inverterbar

Eksempel

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_n} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right]$$

Algoritme til at finde A^{-1}

Eksempel

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$\neq I$

Ikke inverterbar!

Sammenhæng med matrixligning

Vi har ofte set på matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Hvad kan vi konkludere, hvis A er inverterbar?

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$\parallel$$

$$I_n x = A^{-1}b$$

$$\parallel$$

$$\boxed{x = A^{-1}b}$$

Dårlig idé numerisk!

Brug Gauss elim...

Kriterier for invertibilitet

Vi har set, at vi kan finde den inverse, hvis den eksisterer.

Kan vi sige noget generelt om, hvornår den inverse eksisterer?

En LAAANG sætning

Sætning (side 130)

Lad A være en $n \times n$-matrix. Følgende udsagn er ækvivalente.

1. A er inverterbar
2. A er rækkeækvivalent til I_n
3. A har n pivotsøjler
4. Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsning
5. Søjlerne i A er lineært uafhængige
6. Den lineære transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ er injektiv
7. Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mindst én løsning for hvert $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$
8. Søjlerne i A udspænder $\mathbb{R}^n$
9. Den lineære afbildning $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ afbilder $\mathbb{R}^n$ surjektivt til $\mathbb{R}^n$
10. Der eksisterer en $n \times n$-matrix B, så $BA = I_n$
11. Der eksisterer en $n \times n$-matrix C, så $AC = I_n$
12. A^T er en inverterbar matrix

$A^{-1}Ax = A^{-1}0 = 0$

$Ix = x$

$A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \forall b.$

$x = A^{-1}b$

$Ax = b$

$A(A^{-1}b) = Ib = b$

Lang sætning, korte eksempler

$$a_1 + a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a_2$$

Eksempel

Er $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ inverterbar?

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$a_1 - a_2 + a_3 = 0$

$\Rightarrow$ søjlene er lin afh.

$\Rightarrow A$ er ikke inv.

Eksempel

En $n \times n$-matrix B er inverterbar, og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Har ligningen $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en løsning?

$$B^{-1}Bx = B^{-1}b$$

$$Ix = \boxed{x = B^{-1}b}$$

Inverterbare lineære afbildninger

Vi siger, at en lineær afbildning $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er inverterbar, hvis der eksisterer en afbildning $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sådan at

$$S(T(x)) = (S \circ T)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = I(x) \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

og

$$T(S(x)) = (T \circ S)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = I(x) \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

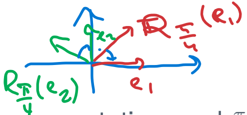
I stil med matricer, kaldes S den inverse til T og den noteres $S = T^{-1}$

Sammenhæng med standardmatricer

Sætning

Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være en lineær afbildning med standardmatrix A. Da er T inverterbar, hvis og kun hvis A er inverterbar.
Når T er inverterbar gælder desuden, at T^{-1} har standardmatrix A^{-1}.

Sammenhæng med standardmatricer

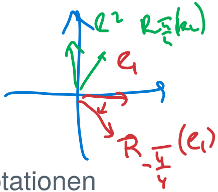


Eksempel

Den lineære afbildning $R_{\frac{\pi}{4}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en rotation med $\frac{\pi}{4}$ radianer omkring Origo. Dens standardmatrix er

$R_{-\frac{\pi}{4}}(R_{\frac{\pi}{4}}(x)) = x$

$$A_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



I kan tjekke, at $A_{\frac{\pi}{4}}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, som svarer til rotationen $(R_{\frac{\pi}{4}})^{-1} = R_{\frac{-\pi}{4}}$ i modsat retning

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+(-1)(-1) & 1-1 \\ 1-1 & 1+1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = I_2$$