Lineær optimering og dualitet, Afsnit 9.2 og 9.4

4. maj 2021

Sandsynlighedsteori og lineær algebra (SLIAL)

Forår 2021

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Del I

Lineær optimering
Afsnit 9.2

Vigtigste begreber

- Lineær optimeringsproblem
- Løsning
- Mulig/brugbar område/mængde, mulig løsning
- Kanonisk form og transformation til kanonisk form
- Umulig/uløseligt og ubegrænset problem
- Eksistens af løsninger

Optimering

- I mange situationer er vi interesserede i at finde den bedste mulige løsning til et system af ligninger og/eller uligheder. Disse ligninger/uligheder kaldes for bibetingelser.
- For at sammenligne forskellige løsninger bruger vi en (objekt)funktion. Vi søger derfor en løsning som giver den mindste mulige eller den størst mulige værdi af denne funktion.
- Lineær optimering arbejder med bibetingelser som er givet af lineære algebraiske ligninger/uligheder. Objektfunktionen er også en lineær funktion.

Eksempel: Stiglers ernæringsproblem

Stiglers ernæringsproblem er et optimeringsproblem opkaldt efter 1982 Nobelpristager i økonomi.

Stiglers ernæringsproblem

For en moderat aktiv mand, der vejer 70kg, hvor meget af hver af 77 fødevarer skal spises dagligt, således at indtagen af ni næringsstoffer er større eller lig end de anbefalede daglige diætgodtgørelser foreslået af US National Research Council i 1943, mens kostprisen er minimal?

Eksempel: Stiglers ernæringsproblem

- Lad $i = 1, \dots, 77$ være et indeks over de fødevarer vi betragter i modellen
- Lad $j = 1, \dots, 9$ være et indeks over de næringsstoffer vi betragter i modellen (kalorier, protein, calcium, jern samt vitaminer A, B_1, B_2, B_3 og C)
- Lad c_i være prisen af fødevare i (per enhed). Vi samler c_i i en vektor $c \in \mathbb{R}^{77}$
- Lad b_j være den anbefalede daglige diætgodtgørelse af næringsstof j. Vi samler b_j i en vektor $b \in \mathbb{R}^9$
- Lad A_{ji} være indholdet af næringsstof j i fødevare i. Vi kan samle A_{ji} i en matrix A med 9 rækker og 77 søjler
- Lad $x_i \geq 0$ være antallet af fødevare i i ernæringsplan. Vi samler x_i i en vektor $x \in \mathbb{R}^{77}$

Eksempel: Stiglers ernæringsproblem

- Mål/objektfunktion: Prisen for ernæringsplanen

$$\sum_i c_i x_i = c \cdot x$$

- Bibetingelser: næringsstofskravene

$$\sum_i A_{ji} x_i \geq b_j, \qquad j = 1, \ldots, 9.$$

Notationen: $\underline{Ax} \geq \underline{b}$

- Bibetingelser: sund fornuft

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, 77.$$

Notationen: $x \geq 0$.

Eksempel: Stiglers ernæringsproblem

Notationen:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c \cdot x, \\ \text{subject to} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Betydning: find $x \in \mathbb{R}^{77}$, således at funktionen $c \cdot x$ antager den mindste mulige værdi i mængden $Ax \geq b$, $x \geq 0$. Dvs: $x^* \in \mathbb{R}^{77}$ er en løsning, hvis

$$\begin{aligned} Ax^* &\geq b, & & \\ x^* &\geq 0, & & \text{og} \\ c \cdot x^* &\leq c \cdot x, & & \forall x : Ax \geq b, x \geq 0 \end{aligned}$$

Eksempel i 2D: kan løses grafisk

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{subject to} \quad & \\
& 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\
& x_1 + 2x_2 \le 8, \\
& x_1 + x_2 \le 4.5, \\
& x \ge 0.
\end{aligned}
$$

Eksempel i 2D: kan løses grafisk

https://www.geogebra.org/calculator/zysewucp

Tricks

-9 9

- Det er ligegyldigt om vi minimerer eller maksimerer: $\min \underline{c \cdot x}$ er ækvivalent med $-\max[(-c) \cdot x]$
- Det er ligegyldigt om vi bruger $\leq$ eller $\geq$:

$$Ax \leq b \iff (-A)x \geq (-b)$$

- En lighed kan erstattes med to uligheder:

$$Ax = b \iff \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

$Ax \leq b$

$Ax \geq b$ $-Ax \leq -b$

Kanonisk form

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c \cdot x, \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b, \\ & x \ge 0. \end{aligned}$$

Det mulige/brugbare område (feasible set):

$$\mathcal{F} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \le b, x \ge 0 \,\}$$

Mulig løsning (feasible solution): $x \in \mathcal{F}$

Løsning (solution): $\bar{x} \in \mathcal{F}$ således at

$$c^T \bar{x} = \max_{x \in \mathcal{F}} c^T x$$

Eksempel: omskrivning til kanonisk form

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad x_1 - 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&\qquad 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\
&\qquad x_1 + 2x_2 = 8, \\
&\qquad x_1 + x_2 \leq 4.5, \\
&\qquad x_1 \leq 0.
\end{aligned}
$$

$x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 \geq 8$

$-x_1 - 2x_2 \leq -8$

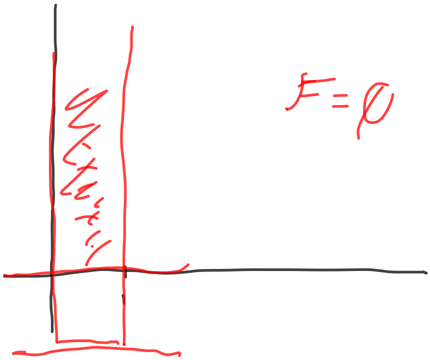
$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad -x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \quad -3x_1 - 2x_2 \leq -12 \\
&\qquad x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
&\qquad -x_1 - 2x_2 \leq -8 \\
&\qquad x_1 + x_2 \leq 4.5 \\
&\qquad x_1 \leq 0
\end{aligned}
$$

$$c = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0 \qquad b = \begin{bmatrix} -12 \\ 8 \\ -8 \\ 4.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ikke alle problemer er løsbare!

$\mathcal{F} = \emptyset$: umuligt/uløseligt (infeasible) problem
Eksempel: $x_1 \leq 1$, $x_2 \leq -2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.



$\mathcal{F} = \emptyset$

Ikke alle problemer er løsbare!

$x_1^{(1)} = 1$ $\quad$ $x_1^{(2)} = 2$

$1 \; x_1$ $\quad$ $x_1^{(k)}$

$x_1^{(k)}$

Der findes $x^{(k)} \in \mathcal{F}$: $\underline{\lim_{k\to\infty}} c^T x^{(k)} = +\infty$: ubegrænset problem.
Eksempel: maximize x_1, $x_1 \geq 0$.

$x^{(k)} = k$ $\qquad$ $x_k = k$

3 alternativer

Sætning (Theorem 6 i afsnit 9.2). Vi betragter et lineæroptimerings problem. Der er 3 muligheter:

1. Problemet er umuligt/uløseligt $\mathcal{F} = \emptyset$
2. Problemet er ubegrænset
3. Problemet har mindst en løsning

I tillæg, hvis problemet er formuleret i kanonisk form, og problemet har løsninger, da er mindst en af dem er "et hjørne" (ekstremapunkt, extreme point) af mængden $\mathcal{F}$.

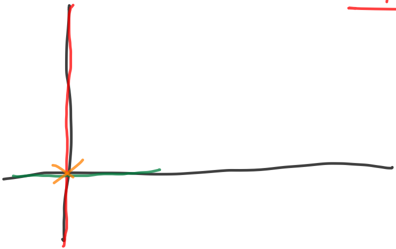
En algoritme som vi skal diskutere næste gang, "besøger og udbedrer hjørnerne" af $\mathcal{F}$ vha algebraiske operationer. Vi har kun endelig mange af "hjørnerne"!

Hvorfor kanonisk formen?

Kanonisk form garanterer, at hvis $\mathcal{F} \neq \emptyset$ så findes der mindst et "hjørne"

Eksempel: $\mathcal{F} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0 \} \neq \emptyset$ men har ikke noget hjørne.

$\underline{x_1 \geq 0}$ $\quad x_2 \geq 0$



Del II

Dualitet i lineær optimering
Afsnit 9.4

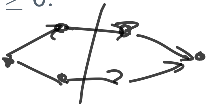
Primal-dual par

Primal P

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c \cdot x, \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Dual P^*

$$\begin{aligned} \text{mininize} \quad & b \cdot y, \\ \text{subject to} \quad & A^T y \geq c, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$



- Masser af forbindelser mellem løsninger
- Den ene kan være nemmere at løse, end den anden
- Visse algoritmer løser de to samtidigt
- Masser af implikationer og anvendelser:
  - Netværksproblemer: max flow-min cut sætning
  - Økonomi: marginal prices=skyggepriser=den duale løsning forklarer, hvordan den primale løsning ændrer sig, når vi ændrer *b*

Eksempel:

Primal problem P (allerede i kanonisk form):

$$c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_1 + x_2 \leq 4.5, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

$$b = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

Dual problem P^*:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 12y_1 + 8y_2 + 4.5y_3 = b^T x = b \cdot x \\ \text{subject to} \quad & \\ & 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 2, \leftarrow c_1 \\ & 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3, \leftarrow c_2 \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Notation: mulige områder

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$$
$$\mathcal{F}^* = \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y \geq c, y \geq 0\}$$

Svag dualitet

Antager: $x \in \mathcal{F}, y \in \mathcal{F}^*$.
Da: $c^T x \leq b^T y$.

Bevis:

$$\underbrace{c^T x \leq (A^T y)^T x}_{\text{da } x \geq 0,\, c \leq A^T y} = \underbrace{y^T A x \leq y^T b}_{\text{da } y \geq 0,\, Ax \leq b} = b^T y$$

Eksempel:

Primal problem P (allerede i kanonisk form):

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_1 + x_2 \leq 4.5, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Dual problem P^*:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 12y_1 + 8y_2 + 4.5y_3 \\ \text{subject to} \quad & \\ & 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 2, \\ & 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Eksempel:

$(3, 1) \in \mathcal{F}$; $(1, 1, 0) \in \mathcal{F}^*$;
$c^T x = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9$
$b^T y = 12 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 4.5 \cdot 0 = 20$;
$9 \leq 20$.

Svag dualitet: implikationer

Hvis P^* ikke er umulig (dvs $\mathcal{F}^* \neq \emptyset$) da kan P ikke være ubegrænset.

Bevis:
Da $\mathcal{F}^* \neq \emptyset$, $\exists y \in \mathcal{F}^*$. Pga svag dualitet, $\forall x \in \mathcal{F} : c^T x \leq b^T y$.

Svag dualitet: implikationer

Hvis både P og P^* har mulige løsninger, så er P (rent faktisk, også P^*) løsbar.

Bevis:

1. P kan ikke være umulig da $\mathcal{F} \neq \emptyset$
2. P kan ikke være ubegrænset da $\mathcal{F}^* \neq \emptyset$
3. Den eneste mulighed er da at P er løsbar

Svag dualitet: implikationer

Anvendelse: $c^T x \leq c^T \bar{x} \leq b^T \bar{y} \leq b^T y$, hvor $\bar{x}$ og $\bar{y}$ løser P og P^*. Derfor, kan man vurdere afstanden til den ukendte bedste funktionsværdi:

$$c^T \bar{x} - c^T x \leq b^T y - c^T x, \qquad \forall x \in \mathcal{F}, y \in \mathcal{F}^*$$

Implikation: hvis $x \in \mathcal{F}$ og $y \in \mathcal{F}^*$ opfylder $c^T x = b^T y$, så er x en løsning til P og y en løsning til P^*.

Eksempel:

Primal problem P (allerede i kanonisk form):

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_1 + x_2 \leq 4.5, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Dual problem P^*:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 12y_1 + 8y_2 + 4.5y_3 \\ \text{subject to} \quad & \\ & 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 2, \\ & 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Eksempel:

Den primale løsning: $\bar{x} = (1, 3.5)$, $c^T\bar{x} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3.5 = 12.5$.

Kan vi gætte en dual-mulig løsning $y \in \mathcal{F}^*$, således at $b^T y = 12.5$?

F.eks. $y = (0, 0, 3) \in \mathcal{F}^*$ har $b^T y = 12 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 4.5 \cdot 3 = 13.5$- næsten optimal (dvs $b^T y - b^T \bar{y} \leq 1$).

$y = (0, 1, 1) \in \mathcal{F}^*$ har $b^T y = 12 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 4.5 \cdot 1 = 12.5 \implies$ optimal løsning (pga svag dualitet)

Stærk dualitet

Antager: både P og P^* er løsbare. Da opfylder de optimale løsninger $\bar{x} \in \mathcal{F}$, $\bar{y} \in \mathcal{F}^*$ følgende

$$c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$$