

Syntaks og semantik

Skriftlig eksamen

Vejledende løsning og forslag til pointguide

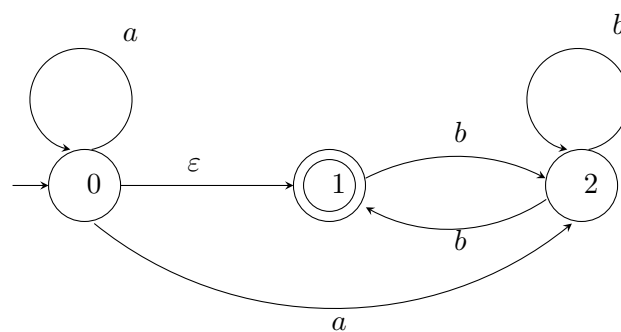
3. juni 2013 kl. 9.00-12.00

1 Mit forslag til principper

- Ingen opgave kan give mindre end 0 point.
- En opgave, der ikke er besvaret, giver 0 point.

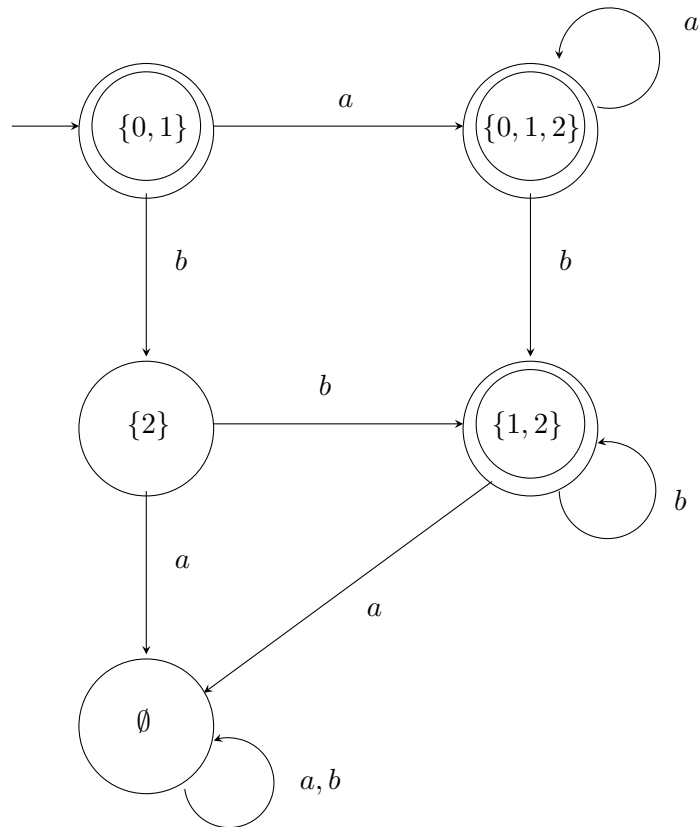
2 Opgaverne

1. (15 point) Herunder er en nondeterministisk automat.



Anvend den i kurset beskrevne metode til at konvertere denne NFA til en DFA.

Svar



Pointguide

- 15 point fratrækkes, hvis delmængdekonstruktion ikke anvendes
- 2 point fratrækkes for forkert angivne mængder (der skal dog ikke trækkes point fra, hvis uopnåelige tilstande i DFA'en ikke er angivet!)
- 2 point fratrækkes for forkert angivelse af starttilstand
- 2 point fratrækkes for forkert angivelse af accepttilstande
- 2 point fratrækkes for manglede epsilon-aflukning
- 2 point fratrækkes for manglende transitioner

2. (10 point) Her er påstande om regulære og kontekstfrie sprog. Sæt kryds ved de svar, du mener er de korrekte.

	Ja	Nej
Hvis et sprog er kontekstfrit, er det også regulært.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sproget $\{a^n \mid n \geq 0\}$ er regulært.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Nogle kontekstfrie sprog kan ikke beskrives med en grammatik på Chomsky-normalform.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Der findes en algoritme, der kan konvertere enhver pushdown-automat til en ækvivalent deterministisk pushdownautomat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sproget $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ er kontekstfrit.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Pointguide

- 2 point fratrækkes for hvert forkert eller manglende svar.

Svar

	Ja	Nej
Hvis et sprog er kontekstfrit, er det også regulært.		X
Sproget $\{a^n \mid n \geq 0\}$ er regulært.	X	
Nogle kontekstfrie sprog kan ikke beskrives med en grammatik på Chomsky-normalform.		X
Der findes en algoritme, der kan konvertere enhver pushdown-automat til en ækvivalent deterministisk pushdownautomat.		X
Sproget $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ er kontekstfrit.		X

3. (10 point) Beskriv ved brug af kursets notation for regulære udtryk (og kun denne) et regulært udtryk, der beskriver sproget

$\{w \in a, b^* \mid w \text{ starter med } b \text{ eller slutter med } bb \text{ og } w \text{ indeholder et lige antal } a\text{'er}\}$

Svar

$$b(b^*ab^*a)^*b^* \cup b^*(b^*ab^*a)^*bb$$

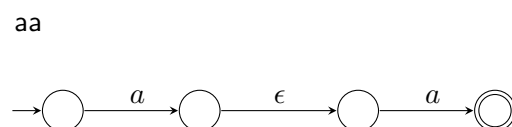
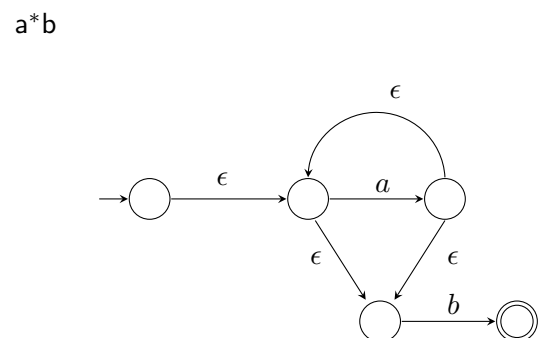
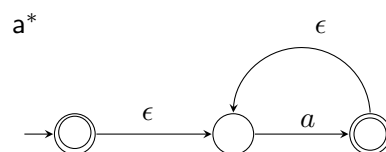
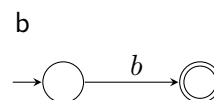
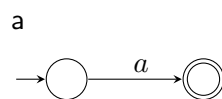
Pointguide

- 5 point fratrækkes, hvis notationen anvendes forkert.
- Op til 10 point fra fratrækkes for fejl, der gør udtrykket ukorrekt.

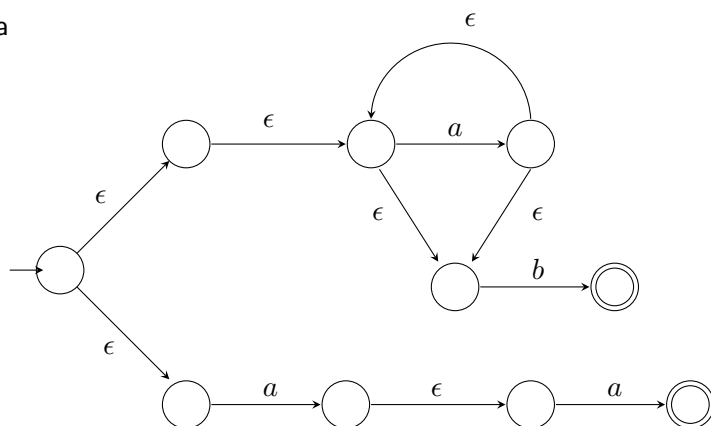
4. (10 point) Anvend den i kurset beskrevne metode til at konstruere en ækvivalent NFA for det regulære udtryk

$$((a^*b) \cup aa)^*$$

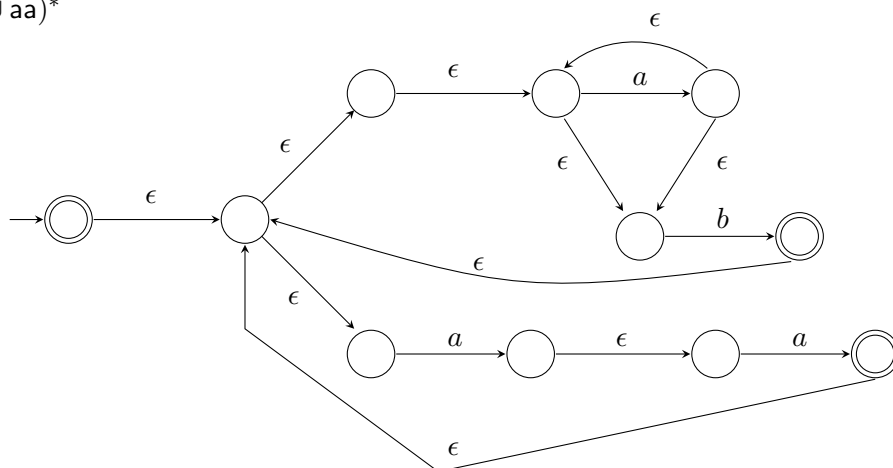
Svar



$(a^*b) \cup aa$



$((a^*b) \cup aa)^*$



Pointguide

- 10 point fratrækkes for løsninger, der ikke anvender konstruktionen, men laver et ad hoc-argument
- 2 point fratrækkes for 'genveje', der undlader ε -transitioner i konkatination
- 2 point fratrækkes for manglende mærkning af ε -transitioner
- 2 point fratrækkes for forkert angivelse af accepttilstande
- 2 point fratrækkes for forkert stjerne-konstruktion

5. (15 point) Her er et sprog L_1 .

$$L_1 = \{a^i b^j \mid i < j \text{ og } i, j \geq 0\}$$

a. Bevis, at L_1 ikke er regulært.

Svar

Antag at L_1 var regulært. Så var der en pumpelængde $p > 0$ så enhver streng s af længde mindst p kunne opdeles som $s = xyz$ så betingelserne 1-3 i Pumping Lemma var overholdt.

Men vælg $s = a^p b^{p+1}$. Det er klart at $|s| \geq p$. Hvis betingelsen $|xy| \leq p$ skal være overholdt, kan y kun bestå af a 'er. Hvis betingelsen $|y| > 0$ også skal være overholdt, kan y ikke være tom. Men strengen $xy^2z \notin L_1$, da der her er for mange a 'er. Så ingen opsplittning af s kan overholde alle tre betingelser, og L_1 kan derfor ikke være kontekstfrit.

Pointguide

- 10 point fratrækkes, hvis Pumping Lemma ikke forsøges anvendt i spørgsmål a.
 - 2 point fratrækkes, hvis pumpelængde p ikke anvendes eksplicit
 - 2 point fratrækkes, hvis kandidatstreng s med $|s| \geq p$ ikke vælges
 - 2 point fratrækkes, hvis kandidatstreng s med $|s| \geq p$ vælges forkert
 - 3 point fratrækkes, hvis der ikke laves en udtømmende analyse af mulige opsplittninger, men kun vælges en eksempel-opsplittning.
- b. Bevis, at L_1 er kontekstfrit.

Svar

Her er en kontekstfri grammatik.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow U_1 U_2 \\ U_1 &\rightarrow a U_1 b \mid \varepsilon \\ U_2 &\rightarrow b U_2 \mid b \end{aligned}$$

Pointguide

- 5 point fratrækkes, hvis Pumping Lemma forsøges anvendt.
 - 2 point fratrække for fejl i grammatik/automat.
6. (20 point) Her er et forkert forsøg på at vise at et sprog ikke er kontekstfrit.

Betragt sproget

$$L_2 = \{ww \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$$

Vi bruger Pumping Lemma til at vise at sproget ikke er kontekstfrit. Vælg $s = abcaabca$. Så må vi have $u = \varepsilon, v = abc, x = aab, y = ca$ og $z = \varepsilon$. Men $uv^2xy^2z \notin L_2$.

- a. Forklar de væsentligste grunde til at ovenstående forsøg på et bevis er forkert.

Svar

De væsentligste grunde er at der ikke antages en pumpelængde p og at der ikke vælges en streng af længde mindst p , for hvilke alle opsplittings undersøges.

- b. Giv et korrekt bevis for at L_2 ikke er kontekstfrit. (Det er en god idé *ikke* at forsøge at reparere det forkerte bevis!) Der er mere plads på næste side.

Svar

Antag af L_2 var kontekstfrit. Så var der en pumpelængde p så enhver streng s af længde mindst p kunne opdeles som $s = uvxyz$ så betingelserne 1-3 i Pumping Lemma gjaldt.

Men vælg $s = a^p b^p a^p b^p$. Vi undersøger nu hvor strengene v og y kan være. Betingelsen $|vxy| \leq p$ gør at v og y må være inden for et vindue på p tegn. Lad os kalde delstrengene a^p og b^p for segmenter i det følgende.

- Hvis v og y begge indeholder a 'er, er de begge inden for første a -segment eller begge inden for anden a -segment. Vi vil da få at $uv^2xy^2z \notin L_2$, da strengen ikke længere er på den form som kræves af L_2 .
- Det samme gælder, hvis v og y begge indeholder b 'er.
- Vi kan ikke have at både v og y indeholder flere slags tegn, da v og y skal findes inden for et vindue på p tegn. Hvis enten v eller y indeholder flere slags tegn, vil vi nu få at $uv^0xy^0z \notin L_2$.
- Hvis v består af a 'er og y består af b 'er, vil de findes i på hinanden følgende segmenter af s , og vi vil da få at $uv^2xy^2z \notin L_2$, da strengen ikke længere er på den form som kræves af L_2 .
- Det samme gælder, hvis v består af b 'er og y består af a 'er.

Pointguide

- 2 point fratrækkes for hver ukorrekt eller manglende grund til at beviset er forkert (dog højst 5 point)
- 15 point fratrækkes, hvis Pumping Lemma ikke forsøges anvendt i spørgsmål b.
- 5 point fratrækkes, hvis pumpelængde p ikke anvendes eksplicit
- 5 point fratrækkes, hvis kandidatstreng s med $|s| \geq p$ ikke vælges
- 2 point fratrækkes, hvis en af betingelserne (1-3) i Pumping Lemma ikke undersøges.
- 5 point fratrækkes, hvis der ikke laves en udtømmende analyse af mulige opsplittings, men kun vælges en eksempel-opsplitting. Kun 1 point fratrækkes dog, hvis nogle mulige tilfælde ikke er undersøgt, men gennemgangen ellers er systematisk.

7. (15 point) Vi udvider **Bims** med en ny kommando

$$S ::= \dots \mid \mathbf{swap}(x, y)$$

Denne nye kommando skal ombytte værdierne af værdierne for variablerne x og y . Hvis x havde værdi 5 og y havde værdi 6 før kommandoen blev udført, skal vi bagefter have at x har værdi 6 og y har værdi 5.

Giv en big-step-transitionsregel for den nye kommando.

Svar

$$(\text{SWAP}) \quad \langle \mathbf{swap}(x, y), s \rangle \rightarrow s[x \mapsto v_1][y \mapsto v_2]$$

$$\text{hvor } sx = v_2 \text{ og } sy = v_1$$

Pointguide

- 10 point fratrækkes for alvorlige fejl i notation.
- 10 point fratrækkes, hvis opdatering af tilstand er forkert (som f.eks. $s[x \mapsto y][y \mapsto x]$).

8. (20 point) Vi udvider **Bims** med en ny kommando

$$S ::= \dots \mid \mathbf{loop} S_1 \mathbf{while} b S_2 \mathbf{end}$$

Ideen er denne: S_1 skal udføres først. Hvis b nu evaluerer til sand udføres S_2 , og derpå gentages løkken. Hvis b derimod evaluerer til falsk, forlades løkken.

Giv big-step-transitionsregler for denne nye kommando.

Svar

$$(\text{LOOP-1}) \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \rightarrow s'}{\langle \mathbf{loop} S_1; \mathbf{while} b S_2 \mathbf{end}, s \rangle \rightarrow s'}$$

$$\text{hvor } s' \vdash b \rightarrow_b \text{ff}$$

$$(\text{LOOP-1}) \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \rightarrow s'' \quad \langle S_2, s'' \rangle \rightarrow s^3 \quad \langle \mathbf{loop} S_1; \mathbf{while} b S_2 \mathbf{end}, s^3 \rangle \rightarrow s'}{\langle \mathbf{loop} S_1; \mathbf{while} b S_2 \mathbf{end}, s \rangle \rightarrow s'}$$

$$\text{hvor } s'' \vdash b \rightarrow_b \text{tt}$$

Pointguide

- 10 point fratrækkes for hver helt manglende regel
- Op til 10 point fratrækkes for større fejl i regler (f.eks. forkerte konfigurationer med environment, store o.lign.)

- 2 point fratrækkes for hvert forkert angivet tilstand i præmis, konklusion eller sidebetingelser (f.eks. hvis det hævdes at b evalueres i tilstand b)
 - 2 point fratrækkes for fejl i sidebetingelser som $b = \#$ i stedet for $s \vdash b \rightarrow \#$.
9. (20 point) Herunder er en big-step-transitionsregel for procedurekald med parametre.
-

$$\frac{env'_V[x \mapsto l][next \mapsto l'], env_P \vdash \langle S, sto \rangle \rightarrow sto'}{env_V, env_P \vdash \langle \text{call } p(y), sto \rangle \rightarrow sto'}$$

hvor $env_P p = (S, x, env'_V)$

og $env_V y = l$

og $l' = env_V next$

- a. For hver af nedenstående bemærkninger skal du sætte en ring om det sted i reglen, som passer med bemærkningen, og skrive bemærkningens nummer ud for ringen. (For nogle af de nedenstående bemærkninger er der flere mulige steder, man kan sætte en ring – det er nok at vælge én af mulighederne.)
1. Her er selve procedurekaldet
 2. Vi slår op og finder procedurens krop
 3. Dette er den aktuelle parameter
 4. Dette er den formelle parameter
 5. Her er den aktuelle parameters lokation
 6. Her er variabel- og procedureenvironments, der gjaldt, da p blev erklæret
 7. Her er p 's krop
 8. Her er variabel- og procedureenvironments, der gjaldt, da p blev kaldt

Pointguide

- 1 point fratrækkes for hver forkert sat eller manglende ring.
- b. Hvad kaldes de scoperegler, som reglen udtrykker? Begrund dit svar.

Svar

Statiske scoperegler for variable, dynamiske scoperegler for procedurer. Under udførelsen af S anvendes procedureenvironment env_P fra kaldstidspunkt og environment env'_V fra erklæringstidspunkt.

Pointguide

- 2 point fratrækkes for korrekt svar, men manglende eller forkert begrundelse.
 - 4 point fratrækkes for forkert svar
- c. Hvad kaldes den parametermekanisme, som reglen udtrykker? Begrund dit svar.

Svar

Dette er call-by-reference. Den formelle parameter er en reference til den lokale (de bruger samme lokation).

Pointguide

- 2 point fratrækkes for korrekt svar, men manglende eller forkert begrundelse.
 - 4 point fratrækkes for forkert svar
- d. Er kald af proceduren p inde i p 's krop rekursiv eller ikke-rekursiv ifølge denne regel? Begrund dit svar.

Svar

Ja, alle kald er rekursive, da der er tale om dynamiske scoperegler for procedurer. I env_P er p jo allerede kendt.

Pointguide

- 2 point fratrækkes for korrekt svar, men manglende eller forkert begrundelse.
 - 4 point fratrækkes for forkert svar
10. (15 point) Her er to af small-step-transitionsreglerne for parallel sammensætning, men der mangler noget.

$$\begin{array}{c} \text{(PAR-1)} \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \Rightarrow \boxed{}}{\langle S_1 \text{ par } S_2, s \rangle \Rightarrow \boxed{}} \\[2ex] \text{(PAR-2)} \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1 \text{ par } S_2, s \rangle \Rightarrow \boxed{}} \end{array}$$

- a. Udfyld det, der mangler i reglerne ovenfor.

Svar

$$(PAR-1) \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \Rightarrow \langle S'_1, s' \rangle}{\langle S_1 \text{ par } S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S'_1 \text{ par } S_2, s' \rangle}$$

$$(PAR-2) \quad \frac{\langle S_1, s \rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1 \text{ par } S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S_2, s' \rangle}$$

- b. Skriv de resterende regler for parallel sammensætning herunder.

Svar

$$(PAR-3) \quad \frac{\langle S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S'_2, s' \rangle}{\langle S_1 \text{ par } S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S_1 \text{ par } S'_2, s' \rangle}$$

$$(PAR-4) \quad \frac{\langle S_2, s \rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1 \text{ par } S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S_1, s' \rangle}$$

Pointguide

Denne opgave kan ikke samlet give mindre end 0 point.

- 2 point fratrækkes for hvert forkert udfyldt eller ikke udfyldt felt.
- 3 point fratrækkes for hver manglende regel.
- 2 point fratrækkes, hvis konfigurationer angives forkert (hvis f.eks. der anvendes *env_V* og *sto* eller der er sammenblanding af abstrakt syntaks og semantisk notation).

11. (15 point) Betragt relationen over $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ defineret ved

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) \text{ hvis } a < c \text{ eller } (a = c \text{ og } b \leq d)$$

- a) Bevis, at $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sqsubseteq)$ er en partielt ordnet mængde. Der er mere plads på næste side.

Svar

Vi skal vise de tre betingelser, der gælder for en partielt ordnet mængde.

1. Det er klart at vi for ethvert par (a, b) har $(a, b) \sqsubseteq (a, b)$ da $a = a$ og $b \leq b$, så \sqsubseteq er refleksiv.
 2. Antag at $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$ og $(c, d) \sqsubseteq (a, b)$. Nu skal vi vise at $(a, b) = (c, d)$. Hvis vi havde at $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$ fordi $a < c$ kunne vi ikke også have at $(c, d) \sqsubseteq (a, b)$. Så vi må have at $a = c$. Men så har vi at $b \leq d$ og $d \leq b$, så $b = d$. Så \sqsubseteq er antisymmetrisk.
 3. Antag at $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$ og $(c, d) \sqsubseteq (e, f)$. Nu skal vi vise at $(a, b) \sqsubseteq (e, f)$. Hvis $a < c$ og $c < e$ har vi at $a < e$. Ellers, hvis $a = c$ og $c < e$ har vi at $a < e$. Og hvis $a = c = e$ har vi at $b \leq d$ og $c \leq f$, så $b \leq f$. Så \sqsubseteq er transitiv.
- b) Her er en funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ givet ved

$$f(a, b) = (b, a)$$

Er funktionen f monoton mht. ordningen \sqsubseteq som vi har defineret den i denne opgave? Hvis ja, så vis at f er monoton. Hvis nej, så vis med et modeksempel at f ikke er monoton.

Svar

Nej, f er ikke monoton. Så skulle vi nemlig have at hvis $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$ så havde vi også at $(b, a) \sqsubseteq (d, c)$. Et modeksempel er at $(2, 8) \sqsubseteq (3, 4)$; vi har ikke at $(8, 2) \sqsubseteq (4, 3)$.

Pointguide

- 5 point for ikke at nævne/anvende betingelserne i definitionen af en partiel ordning i delopgave b.
- 3 point for ikke at anvende definitionen af ordningen i delopgave b.
- 1 point for hver yderligere forståelsesmæssig 'regnefejl'.
- Op til 5 point fratrækkes for manglende forståelse af monotonibegrebet.