Syntaks og semantik – Skriftlig eksamen
Løsningsforslag

19. juni 2017 kl. 10.00-13.00

Navn

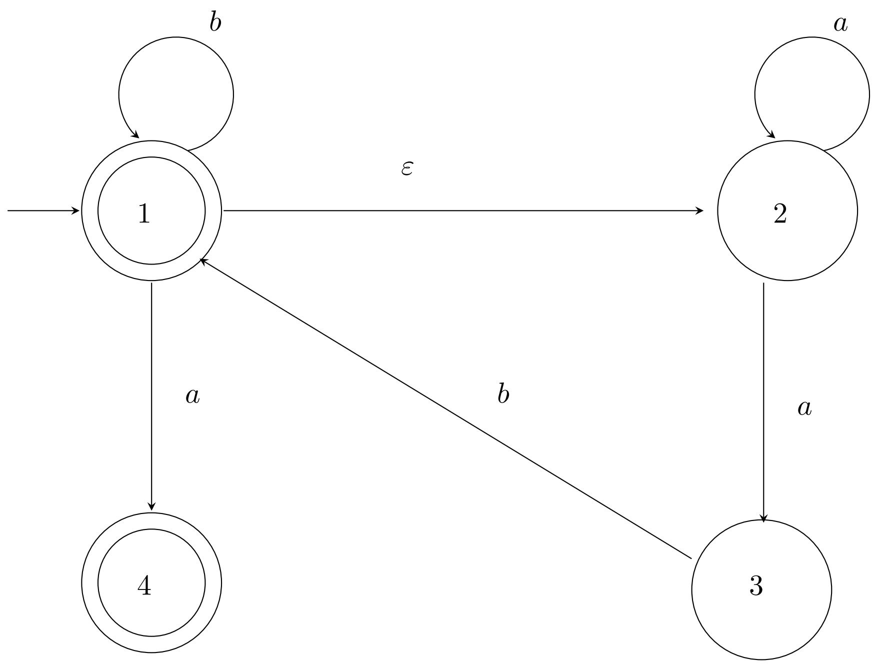
Studienummer

Læs dette, inden du går i gang!

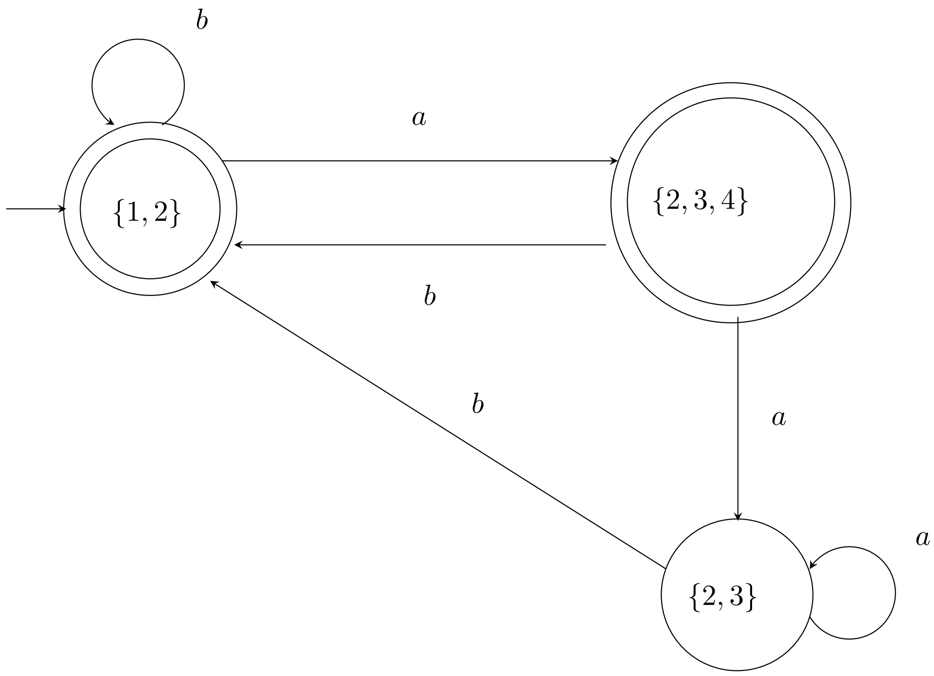
- Dette eksamenssæt er på i alt 8 sider, inklusive denne forside.
- Det samlede pointtal for alle opgaver er 100 point.
- Du skal udfylde de tomme kasser med tekst og figurer.
- Eneste tilladte hjælpemidler er blyant/kuglepen/viskelæder/blyantspidser/lineal og den portfolio, som er udleveret sammen med dette eksamenssæt.
- Du kan få kladdepapir ved at henvende dig til den tilsynsførende.
- Du kan kun aflevere selve besvarelsen på disse ark (du kan altså *ikke* aflevere supplerende besvarelse på kladdepapir!). Derfor er det en vældig god idé at lave en kladde, inden du skriver dine svar ind i besvarelsen.

Opgave 1

(10 point) Herunder er en nondeterministisk automat.



Anvend den i kurset beskrevne metode til at konvertere denne NFA til en DFA.
Løsning: Herunder er kun angivet de tilstande, der kan nås fra starttilstanden. Bemærk at starttilstanden er $E(\{1\}) = \{1, 2\}$.



Opgave 2

(5 point) Her er fem påstande om regulære og kontekstfrie sprog. Sæt kryds ved de svar, du mener er de korrekte.

	Ja	**Nej**
Ethvert kontekstfrit sprog er også et regulært sprog.		**Løsning:** NEJ
Sproget $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ er et kontekstfrit sprog.	**Løsning:** JA	
En kontekstfri grammatik på Chomsky-normalform kan have en produktion på formen $A \rightarrow BC$.	**Løsning:** JA	
Man kan konvertere enhver pushdownautomat til en deterministisk pushdownautomat, der genkender samme sprog.		**Løsning:** NEJ
Sproget $\{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\}$ er ikke kontekstfrit.	**Løsning:** JA	

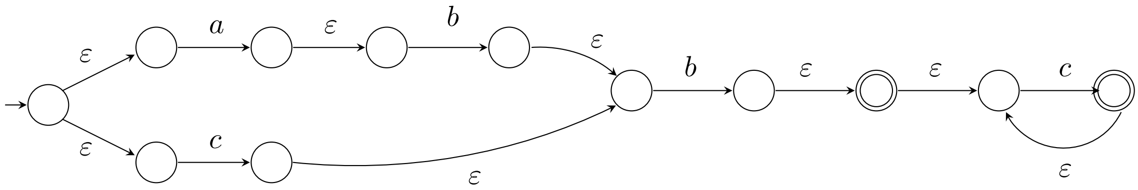
Opgave 3

(10 point) Her er et regulært udtryk.

$$(\mathsf{ab} \cup \mathsf{c})\mathsf{bc}^*$$

Anvend den i kurset beskrevne metode til at konstruere en NFA, der genkender samme sprog (der er yderligere plads på næste side).

Løsning:



Opgave 4

(20 point) Her er et sprog L_1.

$$L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, i = j + k\}$$

a. Bevis, at L_1 ikke er et regulært sprog.

Løsning:

Vi anvender Pumping Lemma for regulære sprog. Antag at L_1 var et regulært sprog.

Så var der et $p > 0$ således at alle $s \in L_1$ hvor $|s| \geq p$ havde en opsplitning $s = xyz$ så

a) $xy^i z \in L_1$ for alle $i \geq 0$

b) $|y| > 0$

c) $|xy| \leq p$

Vi vælger $s = a^{2p} b^p c^p$ og viser nu at ingen opsplitning af s vil kunne overholde alle tre betingelser samtidig. Hvis (ac) skal gælde, må vi have at xy kun kan bestå af a'er, dvs. at $y = a^k$ for et $k \geq 0$. Hvis (ab) også skal gælde, kan y ikke være den tomme streng. Men så overtrædes (aa), for vi har at $xy^2 z \notin L_1$, da $xyz = a^{2p+k} b^p c^p$ og $2p + k \neq p + p$.

b. Bevis, at L_1 er et kontekstfrit sprog.

Løsning: Her er en kontekstfri grammatik, der beskriver L_1.

$$S \to aSc \mid \varepsilon \mid aUb$$
$$U \to aUb \mid \varepsilon$$

Opgave 5

(15 point) I denne opgave skal du udvide den *big-step-semantik* for **Bims**, der anvender den simple tilstandsmodel, så vi også kan beskrive adfærden af en ny kommando. Vi udvider opbygningsreglerne for kommandoer i **Bims** således:

$$S ::= \cdots \mid x\texttt{+++}$$

Hensigten med den nye kommando er, at vi efter at have udført $x\texttt{+++}$ vil have fået lagt 2 til værdien af x.

Giv en big-step-transitionsregel for den nye kommando. Du skal anvende den simple tilstandsmodel.

Løsning:

$$(\textsc{PlusPlus}) \quad \langle x\texttt{+++}, s \rangle \to s[x \mapsto v'] \text{ hvor } v' = s(x) + 2$$

(Loop-Sand)	$\langle \texttt{loop}\ S\ \texttt{unless}\ b, s\rangle \to s$	hvis $b \to tt$
(Loop-Falsk)	$\dfrac{\langle S, s\rangle \to s'}{\langle \texttt{loop}\ S\ \texttt{unless}\ b, s\rangle \to s}$	hvis $b \to ff$

Tabel 1: Uddannelsesministeriets bud på transitionsregler

Opgave 6

(15 point) Uddannelsesministeriet vil hylde statsministeren ved at udvide den abstrakte syntaks for **Bims** med en ny kommando, der er en løkke.

Ministeriets nye opbygningsregler er udvidet på denne måde:

$$S ::= \cdots \mid \texttt{loop}\ S\ \texttt{unless}\ b$$

Hensigten med den nye kommando er, at kommandoen S skal udføres med mindre betingelsen b er sand. Efter at S er blevet udført, skal løkken så gentages.

En embedsmand har udarbejdet et officielt bud på big-step-transitionsregler for den nye kommando (med brug af den simple tilstandsmodel), og reglerne kan man finde i Tabel 1.

Desværre har der sneget sig alvorlige fejl ind i embedsmandens transitionsregler.

a. Sæt en ring om hvert af de steder i Tabel 1, hvor der er fejl.

Løsning:

Der er disse fejl i ministeriets bud på regler:

1. Betingelsen b skal evalueres relativt til starttilstanden s.
2. Betingelsen b skal evalueres relativt til starttilstanden s.
3. Der mangler en præmis her; løkken skal udføres igen.
4. Sluttilstanden vil ikke altid være den samme som starttilstanden.

b. Giv et korrekt bud på big-step-transitionsregler for $\texttt{loop}\ S\ \texttt{unless}\ b$ (hvor du bruger den simple tilstandsmodel)

Løsning:

(Loop-Sand)	$\langle \texttt{loop}\ S\ \texttt{unless}\ b, s\rangle \to s$	hvis $s \vdash b \to tt$
(Loop-Falsk)	$\dfrac{\langle S, s\rangle \to s'' \quad \langle \texttt{loop}\ S\ \texttt{unless}\ b, s''\rangle \to s'}{\langle \texttt{loop}\ S\ \texttt{unless}\ b, s\rangle \to s'}$	hvis $s \vdash b \to ff$

c. Giv en *small-step-transitionsregel* (hvor du bruger den simple tilstandsmodel) for $\texttt{loop}\ S\ \texttt{unless}\ b$.

Løsning:

$$(\textsc{Loop}) \quad \langle \texttt{loop}\ S\ \texttt{unless}\ b, s\rangle \Rightarrow \langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S; \texttt{loop}\ S\ \texttt{unless}\ b\ \texttt{else}\ \texttt{skip}, s\rangle$$

Opgave 7

(10 point) Herunder er en big-step-transitionsregel for procedurekald med én parameter.

$$(\text{CALL}) \quad \frac{env'_V[x \mapsto l][\text{next} \mapsto l'], env''_P \vdash \langle S, sto\rangle \to sto'}{env_V, env_P \vdash \langle \texttt{call}\ p(y), sto\rangle \to sto'}$$

$$\begin{array}{l} \text{hvor } env_P\ p = (S, x, env'_V, env'_P), env_V\ y = l \\ \text{og } l' = env_V \text{next} \\ \text{og } env''_P = env'_P[p \mapsto (S, x, env'_V, env'_P)] \end{array}$$

a. For hver af nedenstående bemærkninger skal du sætte en ring om det sted i reglen, som passer med bemærkningen, og skrive bemærkningens nummer ud for ringen. (For nogle af de nedenstående bemærkninger er der flere mulige steder, man kan sætte en ring – det er nok at vælge én af mulighederne.) Vi har allerede sat én ring og givet den et nummer, så du kan se hvordan du skal gøre.

1. Her er selve procedurekaldet
2. Vi slår op og finder procedurens krop
3. Dette er den aktuelle parameter
4. Dette er den formelle parameter
5. Her er den aktuelle parameters lokation
6. Her er variabel- og procedureenvironments, der gjaldt, da p blev erklæret
7. Her er p's krop
8. Her er variabel- og procedurenvironments, der gjaldt, da p blev kaldt

b. Hvad kaldes de scoperegler, som reglen udtrykker? Begrund dit svar.

Løsning: Der er tale om statiske scoperegler for både variabler og procedurer; de bindinger som er kendt under udførelsen af p's krop er de bindinger, der gjaldt, da p blev erklæret.

c. Hvad kaldes den parametermekanisme, som reglen udtrykker? Begrund dit svar.

Løsning: Der er tale om call-by-reference/referenceparameter; den formelle parameter x peger på samme lokation som den aktuelle parameter y og er dermed en reference til y.

d. Er kald af proceduren p inde i p's krop rekursive eller ikke-rekursive ifølge denne regel? Begrund dit svar.

Løsning: Ja, alle kald af p inde i p's krop vil være rekursive, for env_P'' har udvidet bindingerne fra erklæringstidspunktet for p med oplysninger om vores p.

Opgave 8

(15 point) Betragt mængden $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Lad os definere den leksikografiske ordning $\sqsubseteq$ for vilkårlige talpar $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ved

$$(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2) \quad \text{hvis } x_1 \leq x_2 \text{ og hvis } x_1 = x_2 \text{ så også } \ y_1 \leq y_2$$

hvor $\leq$ er den sædvanlige ordningsrelation for $\mathbb{N}$.

a. Find to forskellige eksempler på talpar (x_1, y_1) og (x_2, y_2), så $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$, og (x_3, y_3) og (x_4, y_4) så $(x_3, y_3) \sqsubseteq (x_y, y_4)$.

Løsning: Et eksempel er at $(2, 3) \sqsubseteq (2, 4)$. Et andet er at $(2, 17) \sqsubseteq (3, 1)$.

b. Bevis, at $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sqsubseteq)$ er en partielt ordnet mængde.

Løsning:

Vi skal vise at

- Vi skal vise at $\sqsubseteq$ er refleksiv, dvs. at for alle $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ har vi at $(x, y) \sqsubseteq (x, y)$. Men det er oplagt at $x = x$ og $y \leq y$, så dette følger umiddelbart.
- Vi skal vise at $\sqsubseteq$ er antisymmetrisk, dvs. at vi for alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ har at hvis $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$ og $(x_2, y_2) \sqsubseteq (x_1, y_1)$, så har vi at $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
  Så antag at $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$ og $(x_2, y_2) \sqsubseteq (x_1, y_1)$. $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$ kan skyldes at $x_1 = x_2$ og $y_1 \leq y_2$. Fordi vi også har $(x_2, y_2) \sqsubseteq (x_1, y_1)$ har vi også at $y_2 \leq y_1$, men da har vi, fordi $y_1 \leq y_2$ at $y_1 = y_2$ også. Ellers kan $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$ kan skyldes at $x_1 \leq x_2$, og $(x_2, y_2) \sqsubseteq (x_1, y_1)$ kan skyldes at $x_2 \leq x_1$, men da har vi at $x_1 = x_2$, og dermed har vi også at $y_1 \leq y_2$ og $y_2 \leq y_1$, dvs. at $y_1 = y_2$.
- Vi skal vise at $\sqsubseteq$ er transitiv, dvs. at hvis $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$ og $(x_2, y_2) \sqsubseteq (x_3, y_3)$ så har vi også at $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_3, y_3)$.
  Her er der fire tilfælde at undersøge. Hvis $x_1 = x_2$ og $x_2 = x_3$, har vi at $y_1 \leq y_2$ og $y_2 \leq y_3$, og derfor at $y_1 \leq y_3$, så det følger at $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_3, y_3)$. Hvis $x_1 < x_2$ og $x_2 = x_3$, har vi at $x_1 < x_3$ og derfor igen at $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_3, y_3)$. Hvis $x_1 < x_2$ og $x_2 = x_3$ har vi igen at $x_1 < x_3$, og derfor også igen at $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_3, y_3)$. Og hvis $x_1 < x_2$ og $x_2 < x_3$, har vi at $x_1 < x_3$, og igen har vi at $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_3, y_3)$.

c. Vi kan definere en funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ved

$$f\langle(x_1, y_1)\rangle = (y_1, x_1)$$

Er denne funktion monoton mht. $\sqsubseteq$? Begrund dit svar.

Løsning:

Nej, f er ikke monoton. f er monoton, hvis vi har at når $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$, så har vi også at $f\langle(x_1, y_1)\rangle \sqsubseteq f\langle(x_2, y_2)\rangle$. Men f bytter om på komponenterne i et par.

Her er et modeksempel: Vi har at $(2, 17) \sqsubseteq (3, 1)$.

Men $f\langle(2, 17)\rangle = (17, 2)$ og $f\langle(3, 1)\rangle = (1, 3)$, men vi har ikke at $(17, 2) \sqsubseteq (1, 3)$.