Syntaks og semantik – Skriftlig eksamen
Løsningsforslag

1. juni 2018 kl. 10.00-13.00

Navn

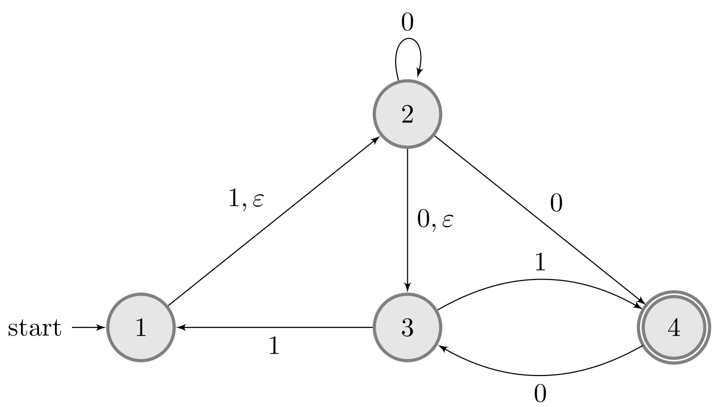
Studienummer

Læs dette, inden du går i gang!

- Dette eksamenssæt er på i alt 6 sider, inklusive denne forside.
- Det samlede pointtal for alle opgaver er 100 point.
- Du skal udfylde de tomme kasser med tekst og figurer.
- Eneste tilladte hjælpemidler er blyant/kuglepen/viskelæder/blyantspidser/lineal og den formelsamling, som er udleveret sammen med dette eksamenssæt.
- Du kan få kladdepapir ved at henvende dig til den tilsynsførende.
- Du kan kun aflevere selve besvarelsen på disse ark (du kan altså *ikke* aflevere supplerende besvarelse på kladdepapir!). Derfor er det en vældig god idé at lave en kladde, inden du skriver dine svar ind i besvarelsen.

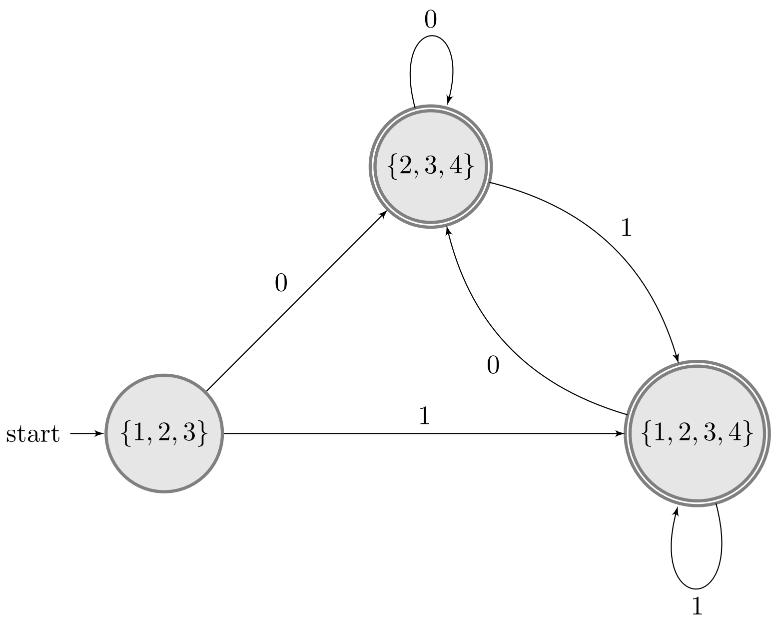
Opgave 1

(10 point) Herunder er en nondeterministisk automat.



Anvend den i kurset beskrevne metode til at konvertere denne NFA til en DFA.

Løsning: Herunder er kun angivet de tilstande, der kan nås fra starttilstanden. Bemærk at starttilstanden er $E(\{1\}) = \{1, 2, 3\}$.



Opgave 2

(5 point) Her er fem påstande om regulære og kontekstfrie sprog. Sæt kryds ved de svar, du mener er de korrekte.

	Ja	**Nej**
Der findes regulære sprog, som ikke er kontekstfrie.		**Løsning:** NEJ
Sproget $\{a^i b^i c^i \mid i \geq 0\}$ er et kontekstfrit sprog.		**Løsning:** NEJ
Sproget $\emptyset$ er et kontekstfrit sprog.	**Løsning:** JA	
Hvis L_1 og L_2 er regulære sprog, er $L_1 \cap L_2$ også et regulært sprog.	**Løsning:** JA	
Sproget $\{0^m 1^n \mid m, n \geq 0\}$ er et regulært sprog.	**Løsning:** JA	

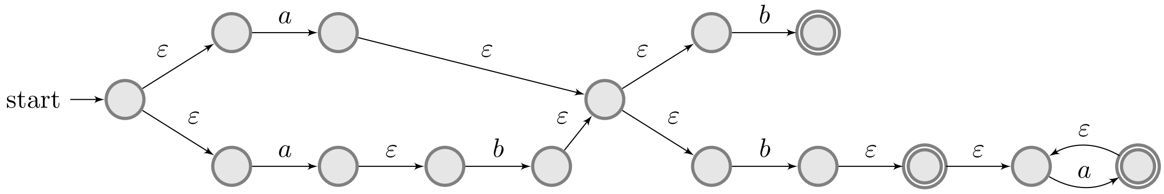
Opgave 3

(10 point) Her er et regulært udtryk.

$$(\mathsf{a} \cup \mathsf{ab})(\mathsf{b} \cup \mathsf{ba}^*)$$

Anvend den i kurset beskrevne metode til at konstruere en NFA, der genkender samme sprog (der er yderligere plads på næste side).

Løsning:



Opgave 4

(20 point)

Betragt sproget L_1.

$$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ har ulige længde og 0 som midterste tegn}\}$$

a. Bevis, at L_1 ikke er et regulært sprog.

Løsning:

Vi anvender Pumping Lemma for regulære sprog. Antag at L_1 var et regulært sprog.

Så var der et $p > 0$ således at alle $s \in L_1$ hvor $|s| \geq p$ havde en opsplitning $s = xyz$ så

1. $xy^iz \in L_1$ for alle $i \geq 0$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq p$

Vi vælger $s = 1^p01^p$ og viser nu at ingen opsplitning af s vil kunne overholde alle tre betingelser samtidig. Hvis betingelse 3 skal gælde, må vi have at xy kun kan bestå af 1'er, dvs. at $y = 1^k$ for et $k \geq 0$. Hvis betingelse 2 også skal gælde, kan y ikke være den tomme streng. Men så overtrædes betingelse 1, for vi har at $xy^2z \notin L_1$, da $xyz = 1^{p+k}01^p$ ikke har 0 som midterste tegn.

b. Bevis, at L_1 er et kontekstfrit sprog.

Løsning: Her er en kontekstfri grammatik, der beskriver L_1.

$$\begin{aligned} S &\to BSB \mid 0 \\ B &\to 0 \mid 1 \end{aligned}$$

Opgave 5

(15 point) I denne opgave skal du udvide den *big-step-semantik* for **Bims**, der anvender den simple tilstandsmodel, så vi også kan beskrive adfærden af en ny kommando. Vi udvider opbygningsreglerne for kommandoer i **Bims** således:

$$S ::= \cdots \mid \texttt{cutoff}(x, n)$$

Hensigten med den nye kommando er, at vi efter at have udført $\texttt{cutoff}(x, n)$ vil have at x har værdien af numeralen n, hvis x inden da havde en værdi, der var større end denne værdi. Hvis ikke, beholder x sin værdi.

Giv en big-step-semantik for den nye kommando. Du skal anvende den simple tilstandsmodel.

Løsning:

(CutOff1)	$\langle \texttt{cutoff}(x, n), s\rangle \to s[x \mapsto v]$ hvor $v = \mathcal{N}[\![n]\!]$ hvis $s(x) > \mathcal{N}[\![n]\!]$
(CutOff1)	$\langle \texttt{cutoff}(x, n), s\rangle \to s$ hvis $s(x) \leq \mathcal{N}[\![n]\!]$

Opgave 6

(15 point) I sine bestræbelser på at tiltrække flere feriegæster med kompetencer inden for datalogi har turistkontoret i Hjørring kommune bestemt sig til at udvide **Bims** med en ny kommando, der er inspireret af Løkken.

Opbygningsregler for Hjørring-udgaven af **Bims** er udvidet på denne måde:

$$S ::= \cdots \mid \texttt{iterate}\ S_1\ \texttt{exit}\ b\ S_2\ \texttt{end}$$

Hensigten med den nye kommando er, at kommandoen S_1 under alle omstændigheder skal udføres først. Hvis betingelsen b derefter evaluerer til sand, skal løkken forlades. Ellers skal S_2 udføres, og derefter skal løkken så gentages.

Turistkontoret har udarbejdet et officielt bud på big-step-transitionsregler for den nye kommando (med brug af den simple tilstandsmodel), og reglerne kan man finde i Tabel 1.

Desværre har der sneget sig alvorlige fejl ind i turistkontorets transitionsregler.

a. Sæt en ring om hvert af de steder i Tabel 1, hvor der er fejl.

Løsning:

Der er disse fejl i turistkontorets bud på regler:

1. Betingelsen b skal evalueres relativt til tilstanden s' efter at S_1 er udført.

$$\text{(ITERATE-SAND)} \quad \frac{\langle S_1, s\rangle \to s'}{\langle \texttt{iterate } S_1 \texttt{ exit } b\ S_2 \texttt{ end}, s\rangle \to s} \quad \text{hvis } b \to tt$$

1

$$\text{(ITERATE-FALSK)} \quad \frac{\langle S_1, s\rangle \to s'' \quad \langle S_2, s''\rangle \to s'}{\langle \texttt{iterate } S_1 \texttt{ exit } b\ S_2 \texttt{ end}, s\rangle \to s'} \quad \text{hvis } b \to ff$$

2 1

Tabel 1: Turistkontorets bud på transitionsregler

2. Der mangler en præmis her; løkken skal udføres igen.
3. Sluttilstanden vil ikke altid være den samme som starttilstanden.

b. Giv et korrekt bud på big-step-transitionsregler for $\texttt{iterate } S_1 \texttt{ exit } b\ S_2 \texttt{ end}$ (hvor du bruger den simple tilstandsmodel)

Løsning:

$$\text{(ITERATE-SAND)} \quad \frac{\langle S_1, s\rangle \to s'}{\langle \texttt{iterate } S_1 \texttt{ exit \_} S_2 \texttt{ end}, s\rangle \to s} \quad \text{hvis } s' \vdash b \to tt$$

$$\text{(ITERATE-FALSK)} \quad \frac{\begin{array}{c}\langle S_1, s\rangle \to s'' \quad \langle S_2, s''\rangle \to s^{(3)} \\ \langle \texttt{iterate } S_1 \texttt{ exit } b\ S_2 \texttt{ end}, s^{(3)}\rangle \to s'\end{array}}{\langle \texttt{iterate } S_1 \texttt{ exit } b\ S_2 \texttt{ end}, s\rangle \to s'} \quad \text{hvis } s'' \vdash b \to ff$$

c. Giv en *small-step-transitionsregel* (hvor du bruger den simple tilstandsmodel) for $\texttt{iterate } S_1 \texttt{ exit } b\ S_2 \texttt{ end}$.

Løsning:

$$\text{(ITERATE)} \quad \langle \texttt{iterate } S_1 \texttt{ exit } b\ S_2 \texttt{ end}, s\rangle \Rightarrow \langle S_1; \texttt{if } b \texttt{ then skip else } (S_2; \texttt{iterate } S_1 \texttt{ exit } b\ S_2 \texttt{ end}), s\rangle$$

d. Giv, udelukkende ved brug af $\texttt{iterate } S_1 \texttt{ exit } b\ S_2 \texttt{ end}$-kommandoen og resten af konstruktionerne fra **Bims** *(undtagen while-løkker)*, en kommando, der er big-step-semantisk ækvivalent med $\texttt{while } b \texttt{ do } S$.

Løsning:

Vi har

$$\texttt{while } b \texttt{ do } S \sim_{bss} \texttt{iterate skip exit } \neg b\ S \texttt{ end}$$

e. Giv, udelukkende ved brug af $\texttt{iterate } S_1 \texttt{ exit } b\ S_2 \texttt{ end}$-kommandoen og resten af konstruktionerne fra **Bims** *(undtagen while- og repeat-løkker)*, en kommando, der er big-step-semantisk ækvivalent med $\texttt{repeat } S \texttt{ until } b$.

Løsning:

Vi har

$$\texttt{repeat } S \texttt{ until } b \sim_{bss} \texttt{iterate } S \texttt{ exit } b \texttt{ skip end}$$

Opgave 7

(10 point) Herunder er en big-step-transitionsregel for procedurekald med én parameter.

$$(\text{CALL})\quad \frac{env'_V[x \mapsto l][\text{next} \mapsto l'], env'_P \vdash \langle \overset{7}{S}, sto\rangle \to sto'}{{}^{8}\, env_V, env_P \vdash \langle \underset{1}{\texttt{call}}\ p(y), sto\rangle \to sto'}$$

hvor ${}^{2}\, env_P\ p = (S, \underset{4}{x}, \underset{6}{env'_V, env'_P}), env_V\ \underset{4}{y} = \overset{5}{l}$
og $l' = env_V \text{next}$

a. For hver af nedenstående bemærkninger skal du sætte en ring om det sted i reglen, som passer med bemærkningen, og skrive bemærkningens nummer ud for ringen. (For nogle af de nedenstående bemærkninger er der flere mulige steder, man kan sætte en ring – det er nok at vælge én af mulighederne.) Vi har allerede sat én ring og givet den et nummer, så du kan se hvordan du skal gøre.

1. Her er selve procedurekaldet
2. Vi slår op og finder procedurens krop
3. Dette er den aktuelle parameter
4. Dette er den formelle parameter
5. Her er den aktuelle parameters lokation
6. Her er variabel- og procedureenvironments, der gjaldt, da p blev erklæret
7. Her er p's krop
8. Her er variabel- og procedurenvironments, der gjaldt, da p blev kaldt

b. Hvad kaldes de scoperegler, som reglen udtrykker? Begrund dit svar.

Løsning: Der er tale om statiske scoperegler for både variabler og procedurer; de bindinger som er kendt under udførelsen af p's krop er de bindinger, der gjaldt, lige inden p blev erklæret.

c. Hvad kaldes den parametermekanisme, som reglen udtrykker? Begrund dit svar.

Løsning: Der er tale om call-by-reference/referenceparameter; den formelle parameter x peger på samme lokation som den aktuelle parameter y og er dermed en reference til y.

d. Er kald af proceduren p inde i p's krop rekursive eller ikke-rekursive ifølge denne regel? Begrund dit svar.

Løsning: Nej, kald af p inde i p's krop vil aldrig være rekursive, for inden i p's krop kender vi ikke p selv på grund af at vi antager statiske scoperegler – procedurebindingerne i env'_P er dem, der gjaldt lige inden p blev erklæret.

Opgave 8

(15 point) Lad M være potensmængden $\mathcal{P}(1, 2, 3)$ og lad $M_{12} = M \times M$. Lad os definere at

$$(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2) \quad \text{hvis } x_1 \subseteq x_2 \text{ og } y_1 \subseteq y_2$$

hvor $\subseteq$ er den sædvanlige delmængde-relation.

a. Find to forskellige eksempler på par (x_1, y_1) og (x_2, y_2), så $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$, og (x_3, y_3) og (x_4, y_4) så $(x_3, y_3) \sqsubseteq (x_4, y_4)$.

Løsning: Et eksempel er at $(\{1, 2\}, \{2\}) \sqsubseteq (\{1, 2\}, \{1, 2\})$. Et andet er at $(\{1\}, \{2\}) \sqsubseteq (\{1, 2\}, \{2\})$.

b. Bevis, at $(M_{12}, \sqsubseteq)$ er en partielt ordnet mængde.

Løsning:

Der er tre betingelser, der skal vises for vores definition af relationen $\sqsubseteq$.

- Vi skal vise at $\sqsubseteq$ er refleksiv. Dvs. at for alle (x, y) har vi at $(x, y) \sqsubseteq (x, y)$. Det er klart at $x \subseteq x$ og at $y \subseteq y$.
- Vi skal vise at $\sqsubseteq$ er antisymmetrisk. Dvs. at hvis $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$ og $(x_2, y_2) \sqsubseteq (x_1, y_1)$ så er $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

  Men hvis $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$ har vi pr. definition at $x_1 \subseteq x_2$ og at $y_1 \subseteq y_2$. Tilsvarende har vi at $x_2 \subseteq x_1$ og at $y_2 \subseteq y_1$. Men da har vi at $x_1 = x_2$ og at $y_1 = y_2$.
- Vi skal vise at $\sqsubseteq$ er transitiv. Dvs. at hvis $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$ og $(x_2, y_2) \sqsubseteq (x_3, y_3)$ så er $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_3, y_3)$. Men hvis $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$ har vi pr. definition at $x_1 \subseteq x_2$ og at $y_1 \subseteq y_2$. Tilsvarende har vi at $x_2 \subseteq x_3$ og at $y_2 \subseteq y_3$. Men da har vi at $x_1 \subseteq x_3$ og at $y_1 = y_3$.

c. Vi kan definere en funktion $f : M_{12} \to M_{12}$ ved

$$f\langle(x_1, x_2)\rangle = (x_2, x_1)$$

Er denne funktion monoton mht. $\sqsubseteq$? Begrund dit svar.

Løsning:

Ja, f er monoton. Vi skal vise, at det gælder at hvis $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$, så har vi at $f\langle(x_1, y_1)\rangle \sqsubseteq f\langle(x_2, y_2)\rangle$, dvs. at $(y_1, x_1) \sqsubseteq (y_2, x_2)$.

Antag at $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$. Da har vi fra definitionen af $\sqsubseteq$ at $x_1 \subseteq x_2$ og at $y_1 \subseteq y_2$. Men så har vi selvfølgelig derfra, at $(y_1, x_1) \sqsubseteq (y_2, x_2)$.