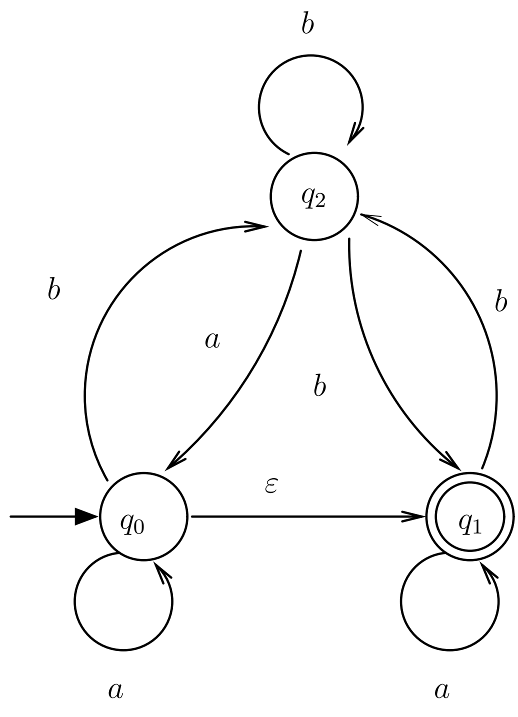
Syntaks og semantik – Skriftlig eksamen
Løsning

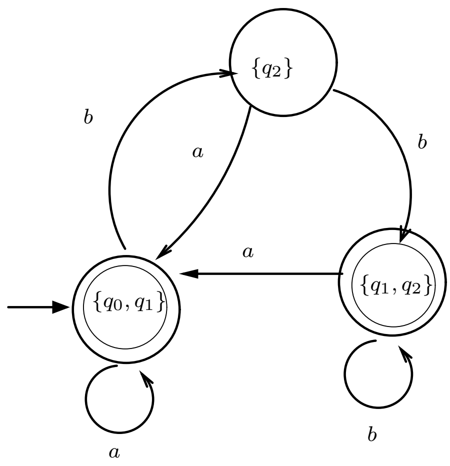
13. august 2012 kl. 9.00-12.00

1. *(15 point)* Herunder er en nondeterministisk automat.



Anvend den i kurset beskrevne metode (dvs. uden ad hoc-løsninger) til at konvertere denne NFA til en DFA.

Svar



2. *(10 point)* Her er påstande om regulære og kontekstfrie sprog. Sæt kryds ved de svar, du mener er de korrekte.

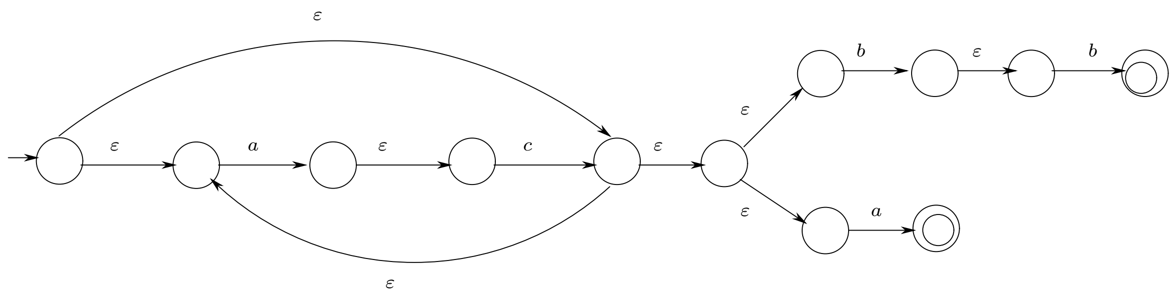
Svar

	Ja	**Nej**
Hvis L er et kontekstfrit sprog, er L også et regulært sprog.	☐	X
Sproget $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ er regulært.	☐	X
En kontekstfri grammatik på Chomsky-normalform kan have en produktion på formen $A \rightarrow BCD$.	☐	X
En kontekstfri grammatik G kaldes for tvetydig, hvis der eksisterer en streng $w \in L(G)$ som kan udledes med en venstrederivation.	☐	X
Sproget $\{0^n 1^n 0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ er kontekstfrit.	☐	X

3. *(10 point)* Herunder er et regulært udtryk. Anvend den i kurset beskrevne metode (dvs. uden 'smarte genveje' o.lign.) til at konstruere en ækvivalent NFA (der er yderligere plads på næste side).

$$(\mathsf{ac})^*(\mathsf{bb} \cup \mathsf{a})$$

Svar



4. *(15 point)* Her er et sprog L_1.

$$L_1 = \{a^i b^j \mid i \leq j\}$$

a. Bevis, at L_1 ikke er regulært.

Svar

Vi anvender Pumping Lemma for regulære sprog. Antag at L_1 var regulært. Da var der en pumpelængde $p \geq 0$ så alle $s \in L_1$ med $|s| \geq p$ tillod en opsplitning $s = xyz$ som overholdt betingelserne i Pumping Lemma.
Men vælg $s = a^p b^p$. Det er klart at $|s| \geq p$. Vi viser nu, at ingen opsplitning $s = xyz$ kan overholde alle tre betingelser i Pumping Lemma. Hvis betingelsen $|xy| \leq p$ skal overholdes, kan y kun bestå af a'er. Hvis betingelsen $|y| > 0$ skal overholdes, kan y ikke være den tomme streng. Men så overtrædes betingelsen at $xy^i z \in L_1$ for alle $i \geq 0$, da $xy^2 z \notin L_1$; denne streng har nemlig flere a'er end b'er.

b. Bevis, at L_1 er kontekstfrit.

Svar

Her er en kontekstfri grammatik, der beskriver L_1.

$$S \to aSb \mid U$$
$$U \to bU \mid \varepsilon$$

5. *(20 point)* Her er et mislykket forsøg på at vise at et sprog ikke er kontekstfrit.

Betragt sproget

$$L_2 = \{w \mid \text{der findes en } w_1 \in \{a, b\}^* \text{ så } w = w_1 w_1\}$$

Vi bruger Pumping Lemma til at vise at L_2 ikke er kontekstfrit.
Vælg $s = aabbaabb$. Så kan vi vælge $u = aa, v = b$, $x = baa$, $y = bb$ og $z = \varepsilon$. Men så har vi at $uv^2xy^2z \notin L_2$.

a. Forklar de væsentligste grunde til at ovenstående forsøg på et bevis er forkert.

Svar

Man skal vælge en pumpelængde p, betragte en $s \in L_2$ så $|s| \geq p$ og vise at *alle* opsplitninger af s vil overtræde mindst én af de tre betingelser i Pumping Lemma.

b. Giv et korrekt bevis for at L_2 ikke er kontekstfrit. (Det er en god idé *ikke* at forsøge at reparere det forkerte bevis!) Der er mere plads på næste side.

Svar

Anvendelse af Pumping Lemma for kontekstfrie sprog. Antag at p er pumpelængden for L_2. Vi vælger nu en $s \in L_2$ så $|s| \geq p$ og viser at ingen opsplitning $s = uvxyz$ kan overholde betingelserne 1–3 samtidig.

Vælg $s = a^p b^p a^p b^p$. Det er klart at $|s| \geq p$.

Vi skal nu undersøge alle mulige opsplitninger $s = uvxyz$. Her er tre tilfælde:

i. v og y indeholder tilsammen begge slags tegn. Men da $|vxy| \leq p$ skal gælde, skal vxy enten ligge i første delstreng $a^p b^p$, i anden delstreng $a^p b^p$ eller i delstrengen $b^p a^p$. blive for lang, da der er p b'er. I alle tre tilfælde vil $uv^2 xy^z \notin L_2$, da den resulterende streng ikke er på formen $w_1 w_1$ for nogen w_1, og betingelsen, at $uv^i xy^i z \in L_2$ for alle $i \geq 0$, bliver overtrådt.

ii. v of y indeholder tilsammen én bestemt slags tegn. Men da $|vxy| \leq p$ skal gælde, må v og y ligge inden for samme delstreng på formen $a^p b^p$, og igen vil $uv^2 xy^2 z \notin L_2$, så betingelsen, at $uv^i xy^i z \in L_2$ for alle $i \geq 0$, bliver også her overtrådt.

6. *(20 point)* Her er opbygningsreglerne for kommandoer i **Bims**.

$$S ::= \quad x{:=}a \mid \texttt{skip} \mid S_1; S_2 \mid \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2 \mid \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S$$

Betragt *big-step-semantikken* for **Bims**. Udfyld for hver af disse sproglige konstruktioner, de transitionsregler, der er nødvendige.

Assignment (tildeling)	
If-then-else	
While-løkker	

Svar

(ASS)	$\langle x := a, s\rangle \to s[x \mapsto v]$ hvor $s \vdash a \to_a v$
(IF-SAND)	$\dfrac{\langle S_1, s\rangle \to s'}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2\ , s\rangle \to s'}$ hvis $s \vdash b \to_b tt$
(IF-FALSK)	$\dfrac{\langle S_2, s\rangle \to s'}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2\ , s\rangle \to s'}$ hvis $s \vdash b \to_b ff$
(WHILE-SAND)	$\dfrac{\langle S, s\rangle \to s'' \quad \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s''\rangle \to s'}{\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s\rangle \to s'}$ hvis $s \vdash b \to_b tt$
(WHILE-FALSK)	$\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s\rangle \to s$ hvis $s \vdash b \to_b ff$

---

7. *(10 point)* Betragt *small-step-semantikken* for **Bims**. Herunder er angivet transitionsreglerne for sekventiel sammensætning. Udfyld det, der mangler.

(COMP-1)	$\dfrac{\boxed{}}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \boxed{}}$
(COMP-2)	$\dfrac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \boxed{}}$

Svar

$$\text{(COMP-1)sss} \qquad \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2, s'\rangle}$$

$$\text{(COMP-2)sss} \qquad \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle}$$

---

8. *(20 point)* Herunder er en big-step-transitionsregel for procedurekald med parametre.

$$\text{(CALL)} \qquad \frac{env_V'[x \mapsto l][\text{next} \mapsto \text{new } l], env_P' \vdash \langle S, sto[l \mapsto v]\rangle \rightarrow sto'}{env_V, env_P \vdash \langle \texttt{call } p(a), sto\rangle \rightarrow sto'}$$

hvor $env_P\ p = (S, x, env_V', env_P')$
og $env_V, sto \vdash a \rightarrow_a v$
og $l = env_V$ next

---

a. For hver af nedenstående bemærkninger skal du sætte en ring om det sted i reglen, som passer med bemærkningen, og skrive bemærkningens nummer ud for ringen. (For nogle af de nedenstående bemærkninger er der flere mulige steder, man kan sætte en ring – det er nok at vælge én af mulighederne.)

   1. Her er selve procedurekaldet
   2. Vi slår op og finder procedurens krop
   3. Dette er den aktuelle parameter
   4. Dette er den formelle parameter
   5. Her er den formelle parameters lokation
   6. Her er den aktuelle parameters værdi
   7. Her er variabel- og procedureenvironments, der gjaldt, da p blev erklæret
   8. Her er p's krop
   9. Her er variabel- og procedurenvironments, der gjaldt, da p blev kaldt

b. Hvad kaldes de scoperegler, som reglen udtrykker? Begrund dit svar.

c. Hvad kaldes den parametermekanisme, som reglen udtrykker? Begrund dit svar.

d. Er kald af proceduren p inde i p's krop rekursive eller ikke-rekursive ifølge denne regel? Begrund dit svar.

Svar

a.

$$(\text{CALL}) \quad \frac{env'_V[x \mapsto l][\text{next} \mapsto \text{new } l], env'_P \vdash \langle S, sto[l \mapsto v]\rangle \to sto'}{env_V, env_P \vdash \langle \texttt{call } p(a), sto\rangle \to sto'}$$

hvor $env_P\ p = (S, x, env'_V, env'_P)$
og $env_V, sto \vdash a \to_a v$
og $l = env_V$ next

b. Der er tale om statiske scoperegler, da de environments, som anvendes under udførelse af procedurens krop er de environments, som var kendt, da proceduren blev erklæret.

c. Parametermekanismen er call-by-value. Den aktuelle parameter er et aritmetisk udtryk, der evalueres til værdien v. Denne værdi placeres i den nye lokation l.

d. Procedurekald i kroppen af p vil aldrig være rekursive, da de procedurebindinger som er kendt i kroppen S, er bindingerne der gjaldt, *inden* p blev erklæret og altså ikke indbefatter p selv.

9. *(10 point)* Her er en af big-step-transitionsreglerne for nondeterministisk valg, men der mangler noget.

$$(\text{OR-1}) \quad \frac{\boxed{}}{\langle S_1 \texttt{ or } S_2, s\rangle \to \boxed{}}$$

a. Udfyld det, der mangler i reglen ovenfor.

b. Skriv de resterende regler for nondeterminisme herunder.

Svar

($\textsc{or}$-1)	$\langle S_1 \texttt{ or } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle$
($\textsc{or}$-2)	$\langle S_1 \texttt{ or } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle$

10. *(15 point)* Betragt mængden af par af hele tal $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Lad os definere ordningen $\sqsubseteq$ for vilkårlige par $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ved

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) \quad \text{hvis } a < c \text{ eller } a = c \text{ og } b \leq d$$

Det gælder således at $(1, 7) \sqsubseteq (3, 5)$ og at $(2, 4) \sqsubseteq (2, 7)$.

a) Det gælder, at $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \sqsubseteq)$ er en partielt ordnet mængde. Hvad vil det ifølge definitionen sige, at en mængde er en partielt ordnet mængde? Bevis at $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$ er en partielt ordnet mængde.

b) Er $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$ også en totalt ordnet mængde? Hvis ja, bevis det. Hvis nej, bevis at det ikke er tilfældet. Forklar først, hvad det ifølge definitionen vil sige at være en totalt ordnet mængde.

c) Betragt funktionen $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ defineret ved

$$f(a, b) = (a + 2, b + 3)$$

Denne funktion er monoton. Bevis at f er monoton mht. ordningen $\sqsubseteq$. Forklar først, hvad det vil sige at f skal være monoton mht. ordningen $\sqsubseteq$.

Svar

a. En partiel ordning er total, hvis det gælder at det for to vilkårlige elementer (a, b) og (c, d) gælder at enten er $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$ eller $(c, d) \sqsubseteq (a, b)$. Hvis $a < c$, har vi at $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$. Hvis $a > c$, har vi at $(c, d) \sqsubseteq (a, b)$. Hvis $a = c$, gælder det enten at $b \leq d$ eller $d \leq d$. I førstnævnte tilfælde har vi at $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$, i sidstnævnte har vi at $(c,d) \sqsubseteq (a,b)$.

b. Vi skal vise, at $\sqsubseteq$ er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

$\sqsubseteq$ **er refleksiv:** Vi skal vise at $(a,b) \sqsubseteq (a,b)$ for alle x. Men dette er klart, da $a = a$.

$\sqsubseteq$ **er antisymmetrisk:** Vi skal vise at hvis $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$ og $(c,d) \sqsubseteq (a,b)$ så har vi $(a,b) = (c,d)$. Vi kan ikke have at $a < c$ eller $c < a$, hvis vi både skal have $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$ og $(c,d) \sqsubseteq (a,b)$. Derfor må vi have at $a = b$. Tilsvarende kan vi ikke have at $b < d$ eller $d < b$, og derfor må vi også have at $b = d$.

$\sqsubseteq$ **er transitiv:** Vi skal vise at hvis $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$ og $(c,d) \sqsubseteq (e,f)$ så har vi at $(a,b) \sqsubseteq (e,f)$. Da $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$, må vi have at $a \leq c$. Da $(c,d) \sqsubseteq (e,f)$, må vi have at $c \leq e$. Men da har vi at $a \leq e$. Hvis $a = e$, så har vi at $b \leq c$ og at $c \leq d$, og derfor at $b \leq d$. Hvis $a < e$, får vi umiddelbart at $(a,b) \sqsubseteq (e,f)$.

c. Vi skal vise, at hvis $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$, så har vi også at $f((a,b)) \sqsubseteq f((c,d))$. Der er to tilfælde at betragte. Hvis $a = c$, har vi at $b \leq d$. Men så har vi at $a + 2 = c + 2$ og at $b + 3 \leq d + 3$ og derfor at $(a + 2, d + 3) \sqsubseteq (c + 2, d + 3)$. Hvis $a < c$, har vi også at $a + 2 < c + 2$, og derfor igen at $(a + 2, d + 3) \sqsubseteq (c + 2, d + 3)$.