Syntaks og semantik – Skriftlig eksamen
Løsningsforslag

16. august 2018 kl. 10.00-13.00

Navn

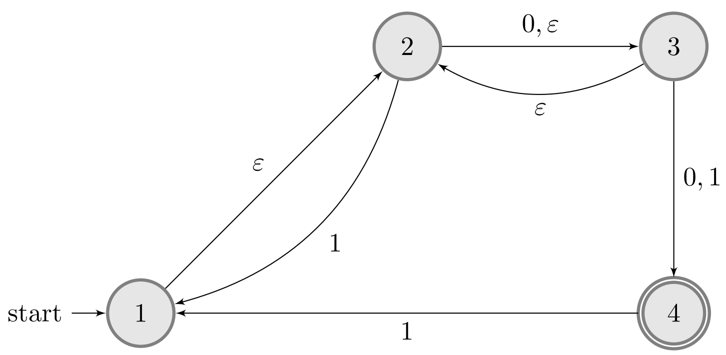
Studienummer

Læs dette, inden du går i gang!

- Dette eksamenssæt er på i alt 6 sider, inklusive denne forside.
- Det samlede pointtal for alle opgaver er 100 point.
- Du skal udfylde de tomme kasser med tekst og figurer.
- Eneste tilladte hjælpemidler er blyant/kuglepen/viskelæder/blyantspidser/lineal og den formelsamling, som er udleveret sammen med dette eksamenssæt.
- Du kan få kladdepapir ved at henvende dig til den tilsynsførende.
- Du kan kun aflevere selve besvarelsen på disse ark (du kan altså *ikke* aflevere supplerende besvarelse på kladdepapir!). Derfor er det en vældig god idé at lave en kladde, inden du skriver dine svar ind i besvarelsen.

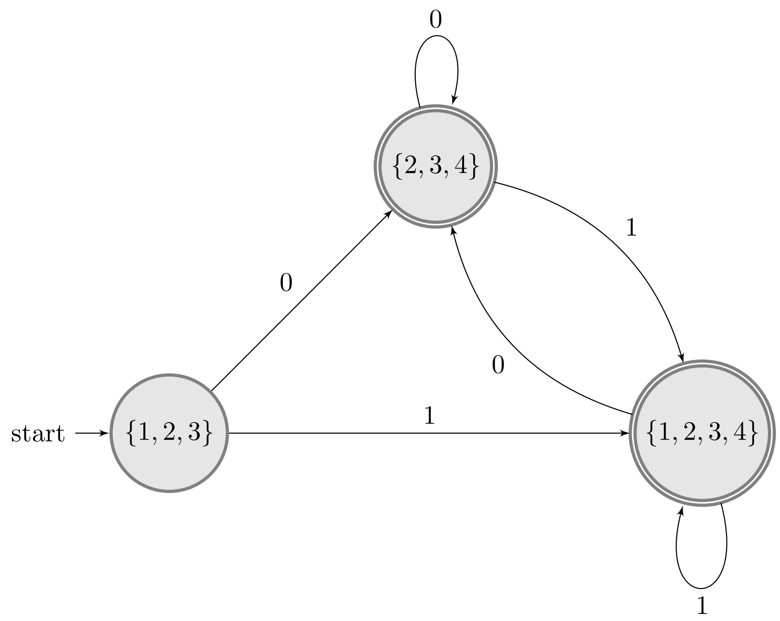
Opgave 1

(10 point) Herunder er en nondeterministisk endelig automat over inputalfabetet $\{0, 1\}$.



Anvend den i kurset beskrevne metode til at konvertere denne NFA til en DFA.

Løsning: Herunder er kun angivet de tilstande, der kan nås fra starttilstanden. Bemærk at starttilstanden er $E(\{1\}) = \{1, 2, 3\}$.



Opgave 2

(5 point) Her er fem påstande om regulære og kontekstfrie sprog. Sæt kryds ved de svar, du mener er de korrekte.

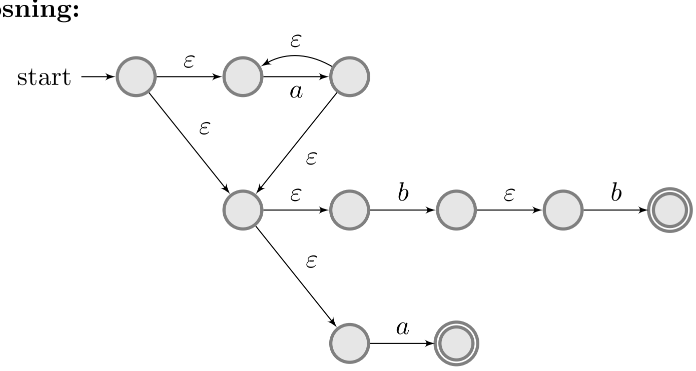
	Ja	**Nej**
Sproget $\{0^i 1^j 2^k \mid i = j = k, i, j, k \geq 0\}$ er kontekstfrit.		**Løsning:** NEJ
Alle kontekstfrie sprog er regulære.		**Løsning:** NEJ
Grammatikken $\begin{array}{l} S \to A \mid S \\ A \to BC \\ B \to a \mid \varepsilon \\ C \to b \end{array}$ er på Chomsky-normalform.		**Løsning:** NEJ
Hvis L_1 og L_2 er regulære sprog, er $L_1 \cup L_2$ også et regulært sprog.	**Løsning:** JA	
En kontekstfri grammatik G er tvetydig, hvis der findes en streng $w \in L(G)$ som kan deriveres på flere måder.		**Løsning:** NEJ

Opgave 3

(10 point) Her er et regulært udtryk.

$$\mathsf{a}^*(\mathsf{bb} \cup \mathsf{a})$$

Anvend den i kurset beskrevne metode til at konstruere en NFA, der genkender samme sprog som det regulære udtryk betegner (der er yderligere plads på næste side).
Løsning:



Opgave 4

(20 point)
Betragt sproget L_1.

$$L_1 = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \geq 0\}$$

a. Bevis, at L_1 ikke er et regulært sprog.

Løsning:

Vi anvender Pumping Lemma for regulære sprog. Antag at L_1 var et regulært sprog.

Så var der et $p > 0$ således at alle $s \in L_1$ hvor $|s| \geq p$ havde en opsplitning $s = xyz$ så

1. $xy^iz \in L_1$ for alle $i \geq 0$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq p$

Vi vælger $s = a^p b^p c^{2p}$. Det er klart at $s \in L_1$ og at $|s| \geq p$, da $|s| = 4p$. Vi viser nu at ingen opsplitning af s vil kunne overholde alle tre betingelser samtidig. Hvis betingelse 3 skal gælde, må vi have at xy kun kan bestå af a'er, dvs. at $y = a^k$ for et $k \geq 0$. Hvis betingelse 2 også skal gælde, kan y ikke være den tomme streng. Men så overtrædes betingelse 1, for vi har at $xy^2z \notin L_1$, da $xyz = a^{p+k}b^pc^{2p}$ ikke overholder at $2p = p + k + p$.

b. Bevis, at L_1 er et kontekstfrit sprog.

Løsning: Her er en kontekstfri grammatik, der beskriver L_1.

$$\begin{aligned} S &\to U \\ U &\to aUc \mid Z \\ Z &\to bZc \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Opgave 5

(15 point) I denne opgave skal du udvide den *big-step-semantik* for **Bims**, der anvender den simple tilstandsmodel, så vi også kan beskrive adfærden af en ny kommando. Vi udvider opbygningsreglerne for kommandoer i **Bims** således:

$$S ::= \cdots \mid \texttt{raise}(x, n)$$

Hensigten med den nye kommando er, at vi efter at have udført $\texttt{raise}(x, n)$ vil have at x får værdien af numeralen n, hvis x forinden havde en værdi, der var mindre end denne værdi. Hvis ikke, beholder x sin værdi.

Giv en big-step-semantik for den nye kommando. Du skal anvende den simple tilstandsmodel.

Løsning:

(RAISE-1)	$\langle \texttt{raise}(x, n), s\rangle \to s[x \mapsto v]$ hvor $v = \mathcal{N}[\![n]\!]$ hvis $s(x) < \mathcal{N}[\![n]\!]$
(RAISE-2)	$\langle \texttt{raise}(x, n), s\rangle \to s$ hvis $s(x) \geq \mathcal{N}[\![n]\!]$

Opgave 6

(15 point) I et forsøg på at øge det enkelte menneskes selvtillid og lykkefølelse har en kendt forfatter af selvhjælpsbøger besluttet sig til at udvide **Bims** med en ny løkke-kommando, en såkaldt `try`-løkke.

Opbygningsregler for selvhjælpsforfatterens udgave af **Bims** er udvidet på denne måde:

$$S ::= \cdots \mid \texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}$$

Hensigten med den nye kommando er, at hvis betingelsen b_1 evaluerer til sand, skal S_1 udføres. Hvis b_1 evaluerede til falsk, men b_2 evaluerer til sand, skal S_2 udføres. Hvis ingen af betingelserne evaluerede til sand, skal løkken forlades. Ellers skal `try`-løkken herefter gentages.

Selvhjælpsforfatteren har udarbejdet et officielt bud på big-step-transitionsregler for den nye kommando (med brug af den simple tilstandsmodel), og reglerne kan man finde i Tabel 1.

Desværre har der sneget sig alvorlige fejl ind i selvhjælpsforfatterens transitionsregler.

(Try-Sand-1)	$\dfrac{\langle S_1, s\rangle \to s'}{\langle \texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}, s\rangle \to s}$	hvis $b_1 \to tt$	
(Try-Sand-2)	$\dfrac{\langle S_2, s\rangle \to s'}{\langle \texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}, s\rangle \to s}$	hvis $b_1 \to ff$ hvis $b_2 \to tt$	
(Try-Falsk)	$\dfrac{\langle \texttt{skip}, s'\rangle}{\langle \texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}, s\rangle \to s'}$	hvis $b_1 \to ff$ hvis $b_2 \to ff$	

Tabel 1: Selvhjælpsforfatterens bud på transitionsregler

a. Sæt en ring om hvert af de steder i Tabel 1, hvor der er fejl.

Løsning:

Der er disse fejl i selvhjælpsforfatterens bud på regler:

1. Betingelsen b skal evalueres relativt til tilstanden s' efter at S_1 er udført.
2. Der mangler en præmis her; løkken skal udføres igen.
3. Sluttilstanden vil ikke altid være den samme som starttilstanden.

b. Giv et korrekt bud på big-step-transitionsregler for $\texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}$ (hvor du bruger den simple tilstandsmodel)

Løsning:

(Try-1)	$\dfrac{\langle S_1, s\rangle \to s'' \quad \langle \texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}, s''\rangle \to s'}{\langle \texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}, s\rangle \to s}$	hvis $s \vdash b_1 \to tt$
(Try-2)	$\dfrac{\langle S_2, s\rangle \to s'' \quad \langle \texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}, s''\rangle \to s'}{\langle \texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}, s\rangle \to s'}$	hvis $s \vdash b_1 \to ff$ men $s \vdash b_2 \to tt$
(Try-3)	$\langle \texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}, s\rangle \to s$ hvis $s \vdash b_1 \to ff$ og $s \vdash b_2 \to ff$	

c. Giv en *small-step-transitionsregel* for $\texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}$. Du skal bruge den simple tilstandsmodel.

Løsning:

(Try)	$\langle \texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}, s\rangle \Rightarrow$ $\langle \texttt{if}\ b_1\ \texttt{then}\ S_1; \texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}\ \texttt{else}\ \texttt{if}\ b_2\ \texttt{then}\ S_2; \texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}\ \texttt{else}\ \texttt{skip}, s\rangle$

d. Giv, udelukkende ved brug af $\texttt{try}\ b_1 : S_1\ \texttt{try}\ b_2 : S_2\ \texttt{end}$-kommandoen og resten af konstruktionerne fra **Bims** *(undtagen while-løkker)*, en kommando, der er big-step-semantisk ækvivalent med $\texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S$.

Løsning:

Vi har

$$\texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S \sim_{bss} \texttt{try}\ b : S\ \texttt{try}\ b : S\ \texttt{end}$$

Opgave 7

(10 point) Herunder er en big-step-transitionsregel for procedurekald med én parameter.

$$\text{(CALL)} \quad \frac{env'_V[x \mapsto l][\text{next} \mapsto \text{new } l], env'_P \vdash \langle S, sto[l \mapsto v] \rangle \to sto'}{env_V, env_P \vdash \langle \texttt{call } p(a), sto \rangle \to sto'}$$

$$\text{hvor } env_P\ p = (S, x, env'_V, env'_P)$$
$$env_V, sto \vdash a \to_a v \text{ og } l = env_V \text{ next}$$

---

a. For hver af nedenstående bemærkninger skal du sætte en ring om det sted i reglen, som passer med bemærkningen, og skrive bemærkningens nummer ud for ringen. (For nogle af de nedenstående bemærkninger er der flere mulige steder, man kan sætte en ring – det er nok at vælge én af mulighederne.) Vi har allerede sat én ring og givet den et nummer, så du kan se hvordan du skal gøre.

1. Her er selve procedurekaldet
2. Vi slår op og finder procedurens krop
3. Dette er den aktuelle parameter
4. Dette er den formelle parameter
5. Her er den formelle parameters lokation
6. Her er variabel- og procedureenvironments, der gjaldt, da p blev erklæret
7. Her er p's krop
8. Her er variabel- og procedurenvironments, der gjaldt, da p blev kaldt

b. Hvad kaldes de scoperegler, som reglen udtrykker? Begrund dit svar.

Løsning: Der er tale om statiske scoperegler for både variabler og procedurer; de bindinger som er kendt under udførelsen af p's krop er de bindinger, der gjaldt, lige inden p blev erklæret.

c. Hvad kaldes den parametermekanisme, som reglen udtrykker? Begrund dit svar.

Løsning: Der er tale om call-by-value/værdiparameter; den formelle parameter x peger på en ny lokation, der som startværdi får værdien af den aktuelle parameter a.

d. Er kald af en procedure ved navn p inde i p's krop rekursive eller ikke-rekursive ifølge denne regel? Begrund dit svar.

Løsning: Nej, kald af p inde i p's krop vil aldrig være rekursive, for inden i p's krop kender vi ikke p selv på grund af at vi antager statiske scoperegler – procedurebindingerne i env'_P er dem, der gjaldt lige inden p blev erklæret.

Opgave 8

(15 point) Lad D være potensmængden $\mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$ og lad $D^2 = D \times D$. Lad os definere en ordning for medlemmer af D^2 ved at

$$(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2) \quad \text{hvis } x_2 \subseteq x_1 \text{ og } y_2 \subseteq y_1$$

a. Find to forskellige eksempler på par (x_1, y_1) og (x_2, y_2), så $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$, og (x_3, y_3) og (x_4, y_4) så $(x_3, y_3) \sqsubseteq (x_4, y_4)$.

Løsning: Et eksempel er at $(\{a,b,c\}, \{a,b\}) \sqsubseteq (\{a,b,c\}, \{a\})$. Et andet er at $(\{a,b,c,d\}, \{d\}) \sqsubseteq (\{b,c,d\}, \emptyset)$.

b. Bevis, at $(D^2, \sqsubseteq)$ er en partielt ordnet mængde.

Løsning:

Der er tre betingelser, der skal vises for vores definition af relationen $\sqsubseteq$.

- Vi skal vise at $\sqsubseteq$ er refleksiv. Dvs. at for alle (x, y) har vi at $(x, y) \sqsubseteq (x, y)$. Det er klart at $x \subseteq x$ og at $y \subseteq y$.
- Vi skal vise at $\sqsubseteq$ er antisymmetrisk. Dvs. at hvis $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$ og $(x_2, y_2) \sqsubseteq (x_1, y_1)$ så er $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
  Men hvis $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$ har vi pr. definition at $x_2 \subseteq x_1$ og at $y_2 \subseteq y_1$. Tilsvarende har vi at $x_1 \subseteq x_2$ og at $y_1 \subseteq y_2$. Men da har vi at $x_1 = x_2$ og at $y_1 = y_2$.
- Vi skal vise at $\sqsubseteq$ er transitiv. Dvs. at hvis $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$ og $(x_2, y_2) \sqsubseteq (x_3, y_3)$ så er $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_3, y_3)$. Men hvis $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$ har vi pr. definition at $x_2 \subseteq x_1$ og at $y_2 \subseteq y_1$. Tilsvarende har vi at $x_3 \subseteq x_2$ og at $y_3 \subseteq y_1$. Men da har vi at $x_3 \subseteq x_1$ og at $y_3 \subseteq y_1$, så $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_3, y_3)$.

c. Vi kan definere en funktion $f : D^2 \to D^2$ ved

$$f\langle(x_1, x_2)\rangle = (x_1 \cup \{a\}, x_2 \cup \{a\})$$

Er denne funktion monoton mht. $\sqsubseteq$? Begrund dit svar.

Løsning:

Ja, f er monoton. Vi skal vise, at det gælder at hvis $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$, så har vi at $f\langle(x_1 \cup \{a\}, y_1 \cup \{a\})\rangle \sqsubseteq f\langle(x_2 \cup \{a\}, y_2 \cup \{a\})\rangle$.

Antag at $(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2)$. Da har vi fra definitionen af $\sqsubseteq$ at $x_2 \subseteq x_1$ og at $y_2 \subseteq y_1$. Men så har vi selvfølgelig derfra, at $x_2 \cup \{a\} \subseteq x_1 \cup \{a\}$ og at $y_2 \cup \{a\} \subseteq y_1 \cup \{a\}$.