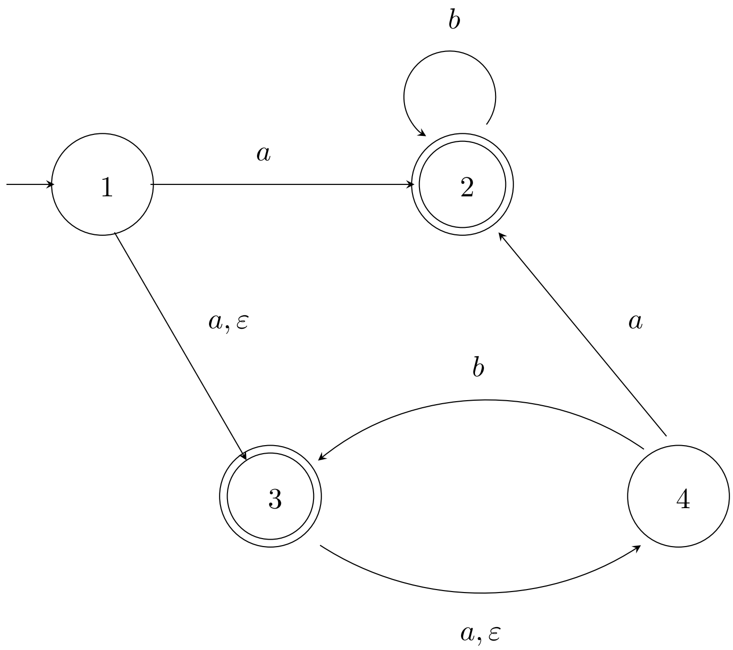
Syntaks og semantik

Skriftlig eksamen
Vejledende løsning

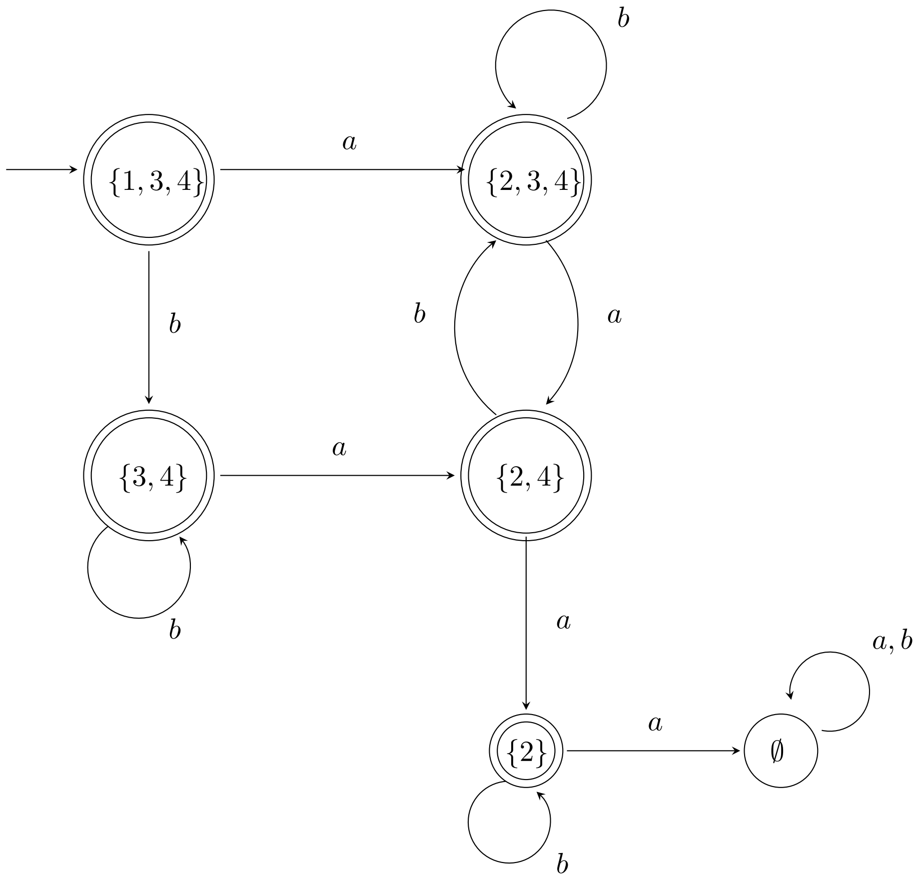
9. august 2013 kl. 9.00-12.00

1. *(15 point)* Herunder er en nondeterministisk automat.



Anvend den i kurset beskrevne metode til at konvertere denne NFA til en DFA.

Svar



2. *(10 point)* Her er nogle påstande om regulære og kontekstfrie sprog. Sæt kryds ved de svar, du mener er de korrekte.

Svar

	Ja	Nej
Sproget $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ er et palindrom}\}$ er regulært		X
Sproget $\{b^n \mid n \geq 0\}$ er regulært.	X	
I en grammatik på Chomsky-normalform kan der være regler på formen $A \to BCD$.		X
Der findes en algoritme, der kan konvertere enhver pushdown-automat til en ækvivalent deterministisk pushdownautomat.		X
Sproget $\{a^n b^n a^n b^n \mid n \geq 0\}$ er kontekstfrit.		X

3. *(10 point)* Beskriv ved brug af kursets notation for regulære udtryk (og kun denne) et regulært udtryk, der beskriver sproget

   $\{w \in a, b^* \mid w$ starter med b og slutter med a, eller indeholder et ulige antal b'er $\}$

   ## Svar

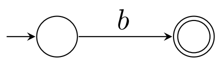
   $$\mathsf{b(a \cup b)^*a \cup a^*b(a^*ba^*b)^*a^*}$$

4. *(10 point)* Anvend den i kurset beskrevne metode (og kun den) til at konstruere en ækvivalent NFA for det regulære udtryk

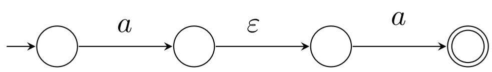
   $$\mathsf{b((aa)^* \cup b)}$$

   ## Svar

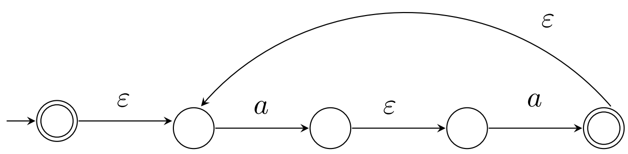
b :



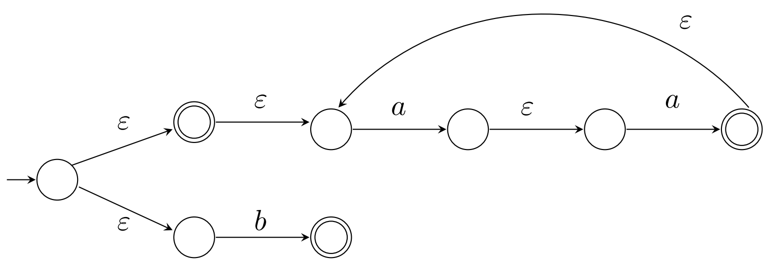
aa :



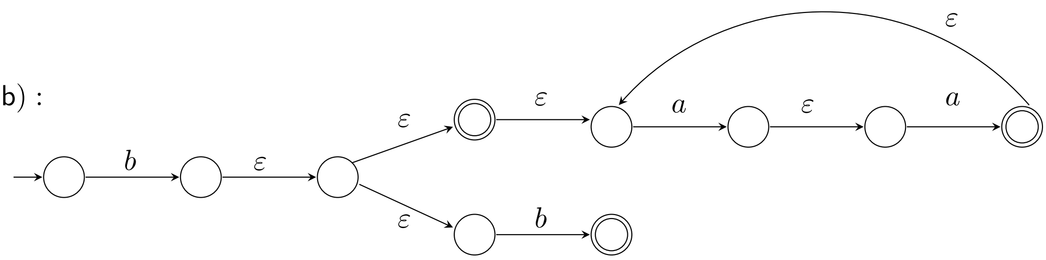
$\mathsf{(aa)^*}$:



$\mathsf{(aa)^* \cup b}$:



$\mathsf{b((aa)^* \cup b)}$:



5. *(15 point)* Her er et sprog L_1.

$$L_1 = \{a^i b^j a^k \mid i = j + k\}$$

a. Bevis, at L_1 ikke er regulært.

Svar

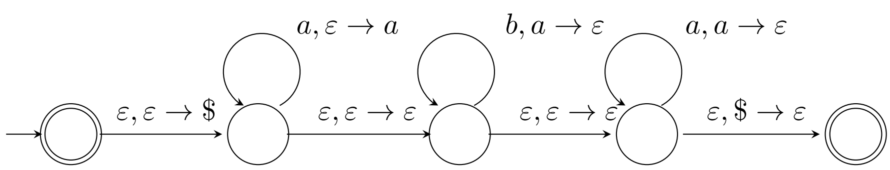
Vi anvender Pumping Lemma for regulære sprog. Hvis L_1 var regulært, ville der være et tal $p \geq 0$ således at enhver streng $s \in L_1$ hvor $|s| \geq p$ tillod en opsplitning $s = xyz$ så betingelserne 1–3 i Pumping Lemma var overholdt.

Det er nok at vise at vi for ethvert p kan finde en $s \in L_1$ med $|s| \geq p$ så ingen opsplitning kan overholde alle tre betingelser. Vælg $s = a^{2p}b^p a^p$. Hvis betingelsen $|xy| \leq p$ skal være overholdt for en opsplitning, må vi have at y kun kan bestå af a'er. Hvis betingelsen $|y| > 0$ også skal være overholdt, må vi have $y = a^k$ for er $k > 0$. Men da må have vi at $xy^2z \notin L_1$, da denne streng indeholder for mange a'er. Betingelsen $xy^i z \in L_1$ for alle $i \geq 0$ kan da ikke gælde.

b. Bevis, at L_1 er kontekstfrit.

Svar

Det nemmeste er her at konstruere en pushdown-automat, der genkender L_1.



6. *(15 point)* Her er et forkert forsøg på at vise at et sprog ikke er kontekstfrit.

   Betragt sproget

   $$L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

   Vi bruger Pumping Lemma til at vise at sproget ikke er kontekstfrit. Vælg $s = a^p b^p c^p$. Det er klart at $|s| \geq p$. Men vi kan vælge $u = \varepsilon$, $v = a$, $x = a$,$y = a^{p-2}$ og $z = b^p c^p$. Det gælder så at $uv^2xy^2z \notin L_2$. Modstrid.

a. Forklar de væsentligste grunde til at ovenstående forsøg på et bevis er forkert.

Svar

Man skal vise at det for ethvert p gælder at der findes en streng $s \in L_2$ med $|s| \geq p$ så *ingen* opsplitning af s kan overholde betingelserne 1–3. Ovenstående forsøg betragter kun én enkelt opsplitning.

b. Giv et korrekt bevis for at L_2 ikke er kontekstfrit. (Det er en god idé *ikke* at forsøge at reparere det forkerte bevis!) Der er mere plads på næste side.

Svar

Vi bruger Pumping Lemma for kontekstfrie sprog. Vi skal vise at det for ethvert p gælder at der findes en streng $s \in L_2$ med $|s| \geq p$ så *ingen* opsplitning af s kan overholde betingelserne 1–3. Vi vælger $s = a^p b^p c^p$. Det er klart at $|s| \geq p$. Vi skal vise at ingen opsplitning $s = uvxyz$ kan overholde betingelserne 1-3 samtidig. Der er følgende mulige tilfælde.

- v og y indeholder i alt kun én slags symbol. Men da har vi at $uv^2xy^2z \notin L_2$, da der her vil blive for få af de to andre slags symboler
- v og y indeholder i alt to slags symboler. Men da har vi at $uv^2xy^2z \notin L_2$, da der her vil blive for få af den tredje slags symbol.
- v og y indeholder i alt alle tre slags symboler. Men da vil betingelsen $|vxy| \leq p$ ikke kunne blive overholdt.

7. *(15 point)* Vi udvider **Bims** med en ny kommando

$$S ::= \cdots \mid \mathbf{maxout}(x, y)$$

Denne nye kommando giver variablerne x og y en fælles værdi, der er deres fælles maksimumsværdi. Hvis x havde værdi 8 før kommandoen blev udført og y havde værdien 2, skal vi således bagefter have at x og y begge har værdi 8. Hvis x havde værdi 3 og y havde værdi 5 før kommandoen udførtes, har x og y efter kommandoen er udført begge værdien 5.

Giv en big-step-transitionsregel for den nye kommando.

Svar

$$\langle \mathbf{maxout}(x, y), s \rangle \to s[x \mapsto v, y \mapsto v]$$

hvor $sx = v_1, sy = v_2, v = \max(x, y)$

8. *(20 point)* Vi udvider **Bims** med en ny kommando

$$S :: \cdots \mid \mathbf{cycle}\ S_1\ \mathbf{exit\ on}\ b\ S_2\ \mathbf{end}\ b$$

Ideen er denne: S_1 skal udføres først. Hvis b herefter evaluerer til sand, skal løkken forlades. Hvis b derimod evaluerer til falsk, skal S_2 udføres, og derpå gentages løkken.

Giv big-step-transitionsregler for denne nye kommando.

Svar

$$\frac{\langle S_1, s\rangle \to s'}{\langle \textbf{cycle } S_1 \textbf{ exit on } b\ S_2 \textbf{ end } b, s\rangle \to s'} \qquad s' \vdash b \to tt$$

$$\frac{\langle S_1, s\rangle \to s'' \quad \langle S_2, s''\rangle \to s^3 \quad \langle \textbf{cycle } S_1 \textbf{ exit on } b\ S_2 \textbf{ end } b, s^3\rangle \to s'}{\langle \textbf{cycle } S_1 \textbf{ exit on } b\ S_2 \textbf{ end } b, s\rangle \to s'} \qquad s'' \vdash b \to ff$$

9. *(20 point)* Herunder er en big-step-transitionsregel for procedurekald med parametre. De øvrige transitionsregler for erklæringer og kommandoer er som i pensum.

$$\frac{env_V[x \mapsto l][\text{next} \mapsto l'], env'_P \vdash \langle S, sto\rangle \to sto'}{env_V, env_P \vdash \langle \texttt{call}\ p(a), sto[l \mapsto v]\rangle \to sto'}$$

hvor $env_P\ p = (S, x, env'_P)$
og env_V next $= l$
og $env_V, sto \vdash a \to v$
og $l' =$ new next

---

a. For hver af nedenstående bemærkninger skal du sætte en ring om det sted i reglen, som passer med bemærkningen, og skrive bemærkningens nummer ud for ringen. (For nogle af de nedenstående bemærkninger er der flere mulige steder, man kan sætte en ring – det er nok at vælge én af mulighederne.)

   1. Her er selve procedurekaldet
   2. Vi slår op og finder procedurens krop
   3. Dette er den aktuelle parameter
   4. Dette er den formelle parameter
   5. Her er den formelle parameters lokation
   6. Her er et environment, der gjaldt, da p blev erklæret
   7. Her er p's krop
   8. Her er et environment, der gjaldt, da p blev kaldt

b. Hvad kaldes de scoperegler, som reglen udtrykker? Begrund dit svar.

Svar

Blandede scoperegler med statiske scoperegler for procedurer og dynamiske scoperegler for variabler. Dette kan ses af at variabelenvironment under udførelse af procedurekroppen er environment på kaldstidspunktet, mens procedureenvironment er environment fra da p blev erklæret.

c. Hvad kaldes den parametermekanisme, som reglen udtrykker? Begrund dit svar.

Svar

Der er tale om en procedure med værdiparameter (call-by-value). Værdien v af den aktuelle parameter a bindes til en ny lokation l.

d. Er kald af proceduren p inde i p's krop rekursive eller ikke-rekursive ifølge denne regel? Begrund dit svar.

Svar

Kald er *ikke rekursive*, da procedureenvironment under udførelse af kroppen S er environment fra erklæringstidspunktet, dvs. angiver de bindinger der gjaldt lige inden p blev erklæret.

10. *(15 point)* Her er small-step-transitionsreglerne for sekventiel sammensætning, men der mangler noget.

$$(\textsc{Comp-1}) \quad \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \boxed{}}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \boxed{}}$$

$$(\textsc{Comp-2}) \quad \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \boxed{}}$$

Udfyld det, der mangler i reglerne ovenfor.

Svar

(COMP-1) $$\frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1'; S_2\rangle}$$

(COMP-2) $$\frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle}$$

---

11. *(20 point)* En streng u er en *delstreng* af en streng v hvis v kan skrives som $v = w_1 u w_2$, hvor w_1 og w_2 er strenge. Betragt relationen over $\{a, b\}^*$ defineret ved
$$u \sqsubseteq v \text{ hvis } u \text{ er en delstreng af } v$$

a) Bevis, at $(\{a, b\}^*, \sqsubseteq)$ er en partielt ordnet mængde. Der er mere plads på næste side.

Svar

Vi skal vise, at $\sqsubseteq$ er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

- Det er let at se at $u \sqsubseteq u$ for enhver streng u, for vi har at $u = \varepsilon \circ u \circ \varepsilon$.
- Vi skal vise at hvis $u \sqsubseteq v$ og $v \sqsubseteq u$, så er $u = v$. Men da $u \sqsubseteq v$ findes der w_1 og w_2 så $v = w_1 u w_2$ og da $v \sqsubseteq u$ findes der x_1 og x_2 så $u = x_1 v x_2$. Men ved at sætte ind får vi da at $v = w_1 x_1 v x_2 w_2$, og det er kun muligt hvis $w_1 = x_1 = w_2 = x_2 = \varepsilon$.
- Vi skal vise at hvis $u \sqsubseteq v$ og $v \sqsubseteq x$ så er $u \sqsubseteq x$. Men da $u \sqsubseteq v$ findes der z_1 og z_2 så $v = z_1 u z_2$, og da $v \sqsubseteq x$ findes der y_1 og y_2 så $x = y_1 v y_2$. Men så har vi at $x = z_1 y_1 u y_2 z_2$, så vælg $w_1 = z_1 y_1$ og $w_2 = y_2 z_2$.

b) Her er en funktion $f : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ givet ved
$$f(u) = uaab$$
dvs. f sætter konkatenerer u med strengen aab.
Er funktionen f monoton mht. ordningen $\sqsubseteq$ som vi har defineret den i denne opgave? Hvis ja, så vis at f er monoton. Hvis nej, så vis med et modeksempel at f ikke er monoton.

Svar

Hvis f er monoton, vil det gælde at når $u \sqsubseteq v$ har vi også at $f(u) \sqsubseteq f(v)$.
Men vælg $u = a$ og $v = ab$. Det er klart at $u \sqsubseteq v$. Vi har $f(u) = aaab$ og $f(v) = abaab$, men det er klart at $aaab$ ikke er en delstreng af $abaab$. Så f er ikke monoton.