

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika

Benjamin Levičar, Jan Nabergoj

Pakirno kromatično število subdivizij subkubičnih grafov

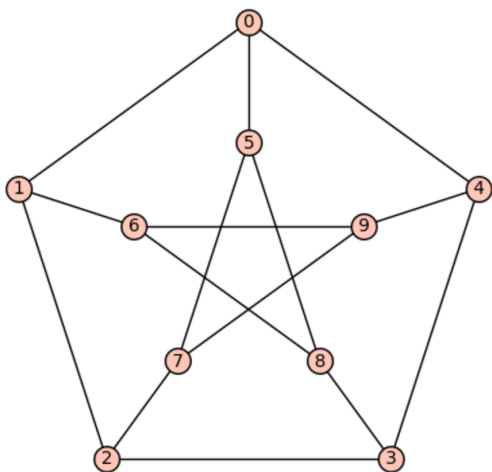
Mentorja: doc. dr. Janoš Vidali,
prof. dr. Riste Škrekovski

Ljubljana, januar 2025

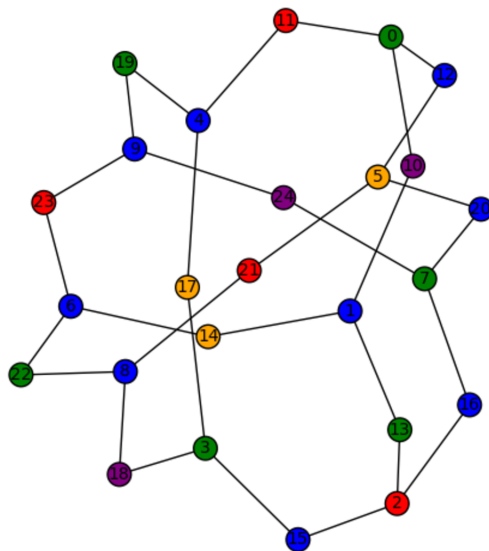
1 Osnovne definicije in opis problema

1.1 Definicije

- *Subkubičen graf* je graf v katerem imajo vsa vozlišča stopnjo največ 3.
- Imejmo graf $G = (V, E)$. *Subdivizijo povezave* $uv \in E$ dobimo tako, da jo odstranimo in dodamo novo vozlišče w ter povezavi uw, vw . *Subdivizija grafa* G je graf, ki ga dobimo da subdividiramo nekatere njegove povezave. Za naše namene bomo z $S(G)$ označili graf, ki ga dobimo, če v G subdividiramo vse povezave natanko enkrat.
- Naj bo $G = (V, E)$ graf in $i \in \mathbb{N}$, *i-pakiranje* grafa G je množica $X \subseteq V$, tako da za poljubni vozlišči $u, v \in X$ velja $d_G(u, v) > i$. *Pakirno kromatično število* grafa G je najmanjše število k , tako da se lahko dobi particijo X_1, X_2, \dots, X_k množice V in da je X_i *i-pakiranje* za vsak $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Označimo ga z $\chi_\rho(G)$.



Slika 1: Petersenov graf



Slika 2: Barvanje subdivizije petersenovega grafa

1.2 Opis problema

Preveriti želimo domnevo: *Za vsako subdivizijo subkubičnega grafa G velja $\chi_\rho(S(G)) \leq 5$.* Tega se bomo lotili z iskanjem protiprimera, torej želimo poiskati subdivizijo subkubičnega grafa, ki ima pakirno kromatično število vsaj 6. Na manjših grafih se problema lotimo sistematično in preverimo vse povezane subkubične grafe. Ker število grafov narašča eksponentno z številom vozlišč, pri večjem številu vozlišč pa iščemo s pomočjo stohastičnega iskanja.

2 Sistematično iskanje

2.1 CLP

Za izračun pakirnega kromatičnega števila sva implementirala sledeči celoštevilski linearni program iz [1]:

imejmo graf $G = (V, E)$ za vozlišče $v \in V$ in $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ naj bo $x_{v,i}$ enak 1, če je v pobarvano z barvo i in 0 sicer, k je največje število dovoljenih barv. Naj bo z največje število uporabljenih barv.

$$\min z \quad (1)$$

$$\text{p.p.} \quad \sum_{i=1}^k x_{v,i} = 1 \quad \forall v \in V(G) \quad (2)$$

$$x_{v,i} + x_{u,i} \leq 1 \quad d_G(u, v) \leq i, \forall u, v \in V(G), 1 \leq i \leq k \quad (3)$$

$$ix_{v,i} \leq z \quad \forall v \in V(G), 1 \leq i \leq k \quad (4)$$

$$x_{v,i} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V(G), 1 \leq i \leq k \quad (5)$$

Pogoj (2) poskrbi, da je vsako vozlišče pobarvano z natanko eno barvo.

Pogoj (3) poskrbi, da sta vozlišči pobarvani z različnima barvama, če je $d_G(u, v) \leq i$.

Pogoj (4) poskrbi, da je vsako vozlišče pobarvano z barvo $\leq z$.

Pogoj (5) določi dovoljene vrednosti za spremenljivke $x_{v,i}$.

2.2 Generiranje grafov

Za generiranje subkubičnih grafov sva uporabila funkcijo *nauty_geng* z omejitvami, da mora biti graf povezan ter najvišja stopnja vozlišča je 3. Pakirno kromatično število dobljenih grafov sva dobila z uporabo že zgoraj navedenega CLP. S tem sva preverila vse grafe na do vključno 14 vozlišč. Grafa katerega subdivizija bi imela pakirno kromatično število 6 ali več na tako malo vozliščih nisva našla.

2.3 Lastnosti grafov z pakirnim kromatičnim števiom 5

Odločila sva se, da pregledava lastnosti grafov katerih subdivizije imajo do sedaj največjo najdeno pakirno kromatično število 5 in si znjimi pomagava pri nadaljnjem iskanju. Preverjala sva dvodelnost, ravninskost, gostoto, zgoščenost, premer, ...

Definicije lastnosti:

- *Dvodelnost*: Graf je dvodelen, če lahko njegova vozlišča razdelimo v dve skupini tako, da vozlišča v isti skupini med seboj niso povezana. To pomeni, da ga lahko z klasičnim barvanjem pobarvamo z dvema barvama.
- *Ravninskost*: Graf je ravninski, če lahko narišemo vse njegove povezave brez, da bi se sekale. Primer neravninskega grafa je $K_{3,3}$.
- *Zgoščenost*: meri, kako verjetno so sosednja vozlišča povezana med seboj. Izračunamo pa formuli $C_v = \frac{2E_v}{k_v(k_v-1)}$ za vozlišče v . E_v število povezav med sosedi in $\frac{k_v(k_v-1)}{2}$ pa število vseh možnih povezav na grafu. To naredimo za vsako vozlišče in povprečimo.
- *Povprečna razdalja*: nam pove koliko so v povprečju vozlišča v grafu narazen. To poračunamo preko matkike razdalj.
- *Premer*: je najdaljša najkrajša razdalja med dvema vozliščema v grafu.

2.3.1 8 vozlišč

Od 196 najdenih grafov je 6 grafov katerih subdivizije imajo pakirno kromatično število 5. Kar je 3%.

Število dvodelnih	Število ravninskih	Gostota	Zgoščenost	Povprečna razdalja	Premier
0	4	1.0	0.09	1.95	3.67

2.3.2 9 vozlišč

Od 531 najdenih grafov je 13 grafov katerih subdivizije imajo pakirno kromatično število 5. Kar je 2,4%.

Število dvodelnih	Število ravninskih	Gostota	Zgoščenost	Povprečna razdalja	Premier
0	11	0.89	0.13	2.12	4.07

2.3.3 10 vozlišč

Od 1733 najdenih grafov je 42 grafov katerih subdivizije imajo pakirno kromatično število 5. Kar je 2,4%.

Število dvodelnih	Število ravninskih	Gostota	Zgoščenost	Povprečna razdalja	Premier
0	34	0.98	0.11	2.3	4.8

2.3.4 11 vozlišč

Od 5524 najdenih grafov je 99 grafov katerih subdivizije imajo pakirno kromatično število 5. Kar je 1,7%.

Število dvodelnih	Število ravninskih	Gostota	Zgoščenost	Povprečna razdalja	Premier
0	80	0.88	0.12	2.5	5.27

2.3.5 12 vozlišč

Od 19430 najdenih grafov je 365 grafov katerih subdivizije imajo pakirno kromatično število 5. Kar je 1,8%.

Število dvodelnih	Število ravninskih	Gostota	Zgoščenost	Povprečna razdalja	Premier
0	294	0.95	0.12	2.64	5.64

2.3.6 13 vozlišč

Od 69322 najdenih grafov je 1021 grafov katerih subdivizije imajo pakirno kromatično število 5. Kar je 1,4%.

Število dvodelnih	Število ravninskih	Gostota	Zgoščenost	Povprečna razdalja	Premier
0	819	0.87	0.11	2.83	6.18

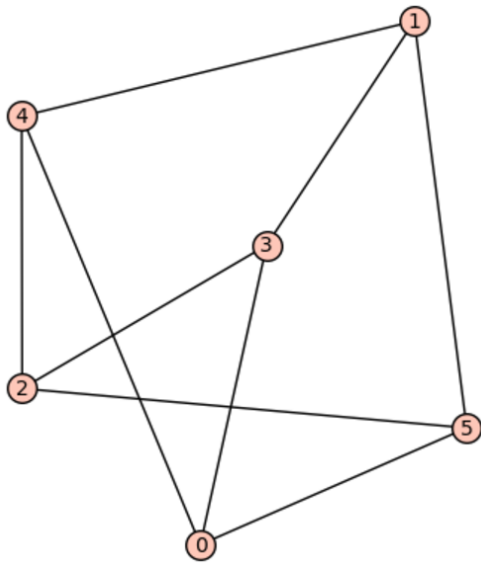
2.3.7 14 vozlišč

Od 262044 najdenih grafov je 3680 grafov katerih subdivizije imajo pakirno kromatično število 5. Kar je 1,4%

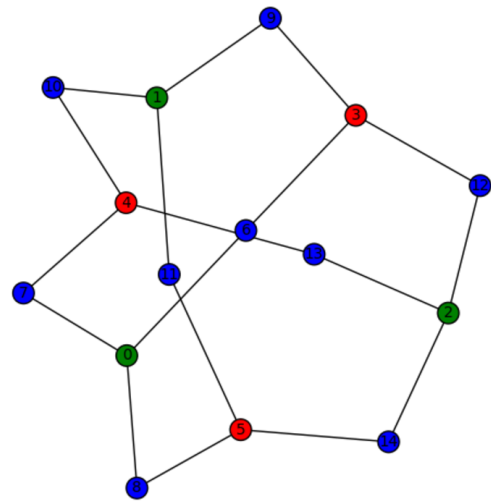
Število dvodelnih	Število ravninskih	Gostota	Zgoščenost	Povprečna razdalja	Premer
0	2813	0.94	0.11	2.96	6.47

2.4 Ugotovitve sistematičnega iskanja

Opazimo lahko, da noben graf katerega subdivizija ima pakirno kromatično barvanje enako 5 ni dvodelen. Če pomislimo zakaj, lahko vidimo da ima vsaka subdivizija dvodelnega grafa barvanje 3. Dodana vozlišča lahko pobarvamo z barvo 1, vozlišča iz ene skupine z barvo 2 in vozlišča iz druge skupine z barvo 3.



Slika 3: Polni dvodelni graf na 6 vozliščih



Slika 4: Barvanje subdivizije polnega dvodelnega grafa na 6 vozliščih

3 Stohastično iskanje

3.1 SAT

Stohastičnega iskanja sva se lotila na drugačen način in sicer s t.i. "*Boolean satisfiability problem*" oz. "*propositional satisfiability problem*" oz. krajše SAT iz [1]. Deluje na principu logike, za dano logično formulo proba poiskati interpretacijo, ki zadošča formuli. Omejitve predstavimo z logičnimi izrazi, ki jih združimo v konjunktivno normalno obliko na katero poženemo "solver". Uporabila sva MinisatGH solver. Za to metodo sva se odločila, ker je bila občutno hitrejša kot CLP.

Uporabila sva sledeče omejitve:

$$\bigvee_{i=1}^k x_{v,i} \quad \forall v \in V(G) \quad (6)$$

$$\neg x_{v,i} \vee \neg x_{v,j} \quad \forall v \in V(G), 1 \leq i < j \leq k \quad (7)$$

$$\neg x_{v,i} \vee \neg x_{u,i} \quad \forall u, v \in V(G), 1 \leq i \leq k \quad (8)$$

Pogoj (6) poskrbi, da je vsako vozlišče pobarvano z vsaj eno barvo.

Pogoj (7) poskrbi, da je vsako vozlišče pobarvano z natanko eno barvo.

Pogoj (8) poskrbi, da sta vozlišči pobarvani z različnima barvama, če je $d_G(u, v) \leq i$.

Poleg tega nisva iskala pakirnega števila na subkubičnih grafih, temveč le na kubičnih. To pa zato, ker če je H podgraf grafa G je potem $\chi_\rho(S(H)) \leq \chi_\rho(S(G))$ (to sledi iz dejstva, da je $d_H(u, v) \geq d_G(u, v)$ za vsaki vozlišči $u, v \in V(H)$) in ker je vsak subkubičen graf podgraf nekega kubičnega. Torej če najdemo nek kubičen graf G z $\chi_\rho(S(G)) \leq 5$ bodo imeli vsi njegovi podgrafi pakirno kromatično število ≤ 5 . Kot je bilo povedano že v prejšnjem delu, če je G dvodelen pomeni, da bo $\chi_\rho(S(G)) = 3$, torej sva ignorirala tudi dvodelne grafe.

3.2 Lastnosti grafov pri stohastičnem iskanju

3.2.1 16 vozlišč

Število dvodelnih	Število ravninskih	Gostota	Zgoščenost	Povprečna razdalja	Premjer
0	247	1	0.11	2.46	4.51

3.2.2 18 vozlišč

Število dvodelnih	Število ravninskih	Gostota	Zgoščenost	Povprečna razdalja	Premjer
0	187	1	0.095	2.6	4.8

3.2.3 20 vozlišč

Število dvodelnih	Število ravninskih	Gostota	Zgoščenost	Povprečna razdalja	Premjer
0	112	1	0.089	2.7	5.16

3.2.4 22 vozlišč

Število dvodelnih	Število ravninskih	Gostota	Zgoščenost	Povprečna razdalja	Premjer
0	53	1	0.079	2.86	5.39

3.2.5 24 vozlišč

Število dvodelnih	Število ravninskih	Gostota	Zgoščenost	Povprečna razdalja	Premjer
0	29	1	0.072	2.96	5.57

3.3 Ugotovitve stohastičnega iskanja

S povečevanjem števila vozlišč opazimo, da se količina ravninskih grafov zmanjšuje. To lahko pripišemo temu, da izbiramo med večjo količino grafov in imamo zato manjšo možnost da najdemo ravninski graf. Po pričakovanjih se premer in povprečna razdalja povečujeta ko povečujemo število vozlišč. Je pa zanimivo da se zgoščenost zmanjšuje, kar pomeni, da so povezave bolj enakomerno razporejene po grafu. Gostota pa je povsod enaka 1 saj sva generirala 3-regularne(kubične) grafe, ki pa so glede na najine predpostavke polni(imajo vse možne povezave).

Začetne domneve: za vsako subdivizijo subkubičnega grafa G velja $\chi_\rho(S(G)) \leq 5$, nisva ovrгла, saj nisva našla protiprimera.

Literatura

- [1] Zehui Shao in Aleksander Vesel. “Modeling the packing coloring problem of graphs”. V: *Applied Mathematical Modelling* 39.13 (2015), str. 3588–3595. ISSN: 0307-904X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.11.060>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X14006556>.