Mathematical Finance Note

Mathematical Finance Note

Chapter 1 Finance Foundation

1.1. Introduction

Macroeconomics => Microeconomics => Finance => Financial Engineering => Financial Mathematics

Three close concepts that are actually slightly different

- Financial Mathematics: it is difficult so the application to graduate school is easy
- Financial Engineering: the application to graduate school is difficult
- Financial Economics: it uses micro-economics to study finance, so it has the concept of "economic equilibrium". The core is asset pricing, corporate finance, financial market. The main idea is arbitrage, optimization, equilibriums.

金融学有三个基本问题：风险管理，资产定价，资金时间价值（存疑），而资产定价问题和数学联系非常紧密，逐渐衍生出了金融数学（数理金融），也就意味着金融数学和资产定价可以算是同义词。金融数学有两个原理：

1. 无套利定价
2. 均衡定价

两者都是假设，根据任意一个就能进行定价。而定价的对象为

1. 债券定价
2. 风险资产定价
3. 衍生品定价

1.2. Derivative Pricing

Two foundametal assumptions :

- No arbitrage
- The market is complete

Three important roles

- Value of an asset in a bank account e^{rt} , it earns interests without any risk
- Value of a security is a stochastic process $X(\omega, t)$
    - Expectation represents what the value would be on average
    - Variance represents the extent to which value would deviate from expectation, it means risk
- Value of a derivative security, it is function of underlying product

One mathematical tool :

- Stochastic Analysis

Security can be understood as the generalization of stock, the underlying asset (e.g. company bond, government bond, stock). Derivative security can be used to achieve goals in financial market: hedge(对冲), speculation(投机), arbitrage(套利), for instance forward contract(远期合约), futures contract(期货合约), option

No arbitrage means any opportunity to make profit without risk would disappear so quickly that in general the market doesn't offer such opportunity. So we have to eliminate the opportunity of profit without risk in our mathematical model and it is the universal guideline to do anything financially.

"The market is complete" means we can use foundamental assets to create a portfolio which can perfectly replicate the value of a derivative security.

The goal is to study the interaction among three roles, under the two assumptions, using the tool of stochastic analysis.

具体步骤是

1. 我们有股票，并且假定它价格是某种随机过程，这个随机过程多种多样（教材上有二叉树，布朗运动，几何布朗运动）
2. 然后我们在这基础上定义衍生品（欧式期权，美式期权），并且用各种方法得到它合理的价格

方法有两种

1. 概率方法（鞅，测度变换）
2. PDE方法（需要Delta对冲知识）

前沿研究为两点

1. 换随机过程，加各种特性
2. 定义各种新式期权

目的是得到期权当前价格的显式解

零散知识：投资离不开的就是HJB方程

1.3. Jargon

Buy Sell Long Short

Chapter 2 Arbitrage and Completion

2.1. No Arbitrage

No arbitrage principle means that we create a model and adjust parameters to eliminate all opportunities of profit without risk. But this guideline is rather vague, we use all kinds of derivative forms of "no arbitrage" in various situations.

2.1.1. The Law of One Price

Consider two investments, at present the first costs the fixed amount C_1 and the second the fixed amount C_2. If the payoff from the first investment is always identical to that of the second investment, then either $C_1 = C_2$ or there is an arbitrage.

2.1.2. The Generalized Law of One Price

Consider two investments, the first costs the fixed amount C_1 and the second the fixed amount C_2. If $C_1 < C_2$ and the (present value) payoff from the first investment is always at least as large as that from the second investment, then there is an abitrage.

2.1.3. Put–call option parity formula

Let C be the price of a call option that enables its holder to buy one share of a stock at an exercise price K at time t; also,
let P be the price of a European put option that enables its holder to sell one share of the stock for the amount K at time t. Let S be the price of the stock at time 0. Then, assuming that interest is continuously discounted at a nominal rate r, either

$$S + P - C = Ke^{-rt}$$

or there is an arbitrage opportunity

2.1.4. Fundamental theorem of asset pricing

It is not just the result of no arbitrage, but of both assumptions

- If a market model has a risk-neutral probability measure, then it does not admit arbitrage
- Consider a market model that has a risk-neutral probability measure. The model is complete if and only if the risk-neutral probability measure is unique

The first statement means that if the market admit not arbitrage, we can find at least one risk-neutral probability measure and maybe more. The second statement means that the completion of a market can narrow down all these measures to one

Risk neutrality means martingale. What the theorem's guide for us is that 我不用去管无套利原则，也不用去管BS公式，我只用去找风险中性测度（定义就是在此测度下，折现股价是鞅），只要找到了，那么任何在此测度下的操作都自动满足无套利原则。

2.2. 完备和套利的辨析

参考Arbitrage Theory in Continuous Time 8.3节

市场上两种东西在抗衡：随机因素，基本资产。随机因素过多，人没有办法操控市场，那么就没有办法套利。基本资产过多，人就能设计各种花样的资产组合去抗衡随机因素，从而套利。所以

1. 随机因素多=>无套利
2. 基本资产多=>完备

3. 两者平衡=>无套利且完备

完备和复制大部分时间是同时出现，那么有没有不完备，也就是随机因素过多，但我还能够用基本资产去复制特定投资组合呢？是可以的，但是这个投资组合的形式要非常特殊，比如说Zongxia_Liang2014

$$dr(t) = (a - br(t))dt - \sqrt{k_1 r(t) + k_2} dW_r(t)$$
$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt$$
$$\frac{dB_K(t)}{B_K(t)} = r(t)dt + h(K)\sqrt{k_1 r(t) + k_2} \times (\lambda_r \sqrt{k_1 r(t) + k_2} dt + dW_r(t))$$
$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma_S \sqrt{k_1 r(t) + k_2} \times (\lambda_r \sqrt{k_1 r(t) + k_2} dt + dW_r(t)) + \nu L(t)dt + \sqrt{L(t)} dW_S($$
$$dL(t) = \alpha(\delta - L(t))dt + \sigma_L \sqrt{L(t)} dW_L(t)$$

除去无风险资产外，只有两个风险资产，但是总共有三个随机元素，市场不完备，但是工资过程

$$\frac{dC(t)}{C(t)} = \mu dt + \sigma_{C_1} \sqrt{k_1 r(t) + k_2} \times (\lambda_r \sqrt{k_1 r(t) + k_2} dt + dW_r(t)) + \sigma_{C_2}(\nu L(t)dt + \sqrt{L(t)} dW$$

的结构设计得太凑巧，我们能够将 W_L 有关的因素整体用 S 去表示，导致在不完全市场下，我们还是能够复制工资过程。

Chapter 3 Interest Rates and Present Value Analysis

This chapter is about non-risk asset, which is money in a bank account.

Chapter 4 Basics of Option Pricing

4.1. Option Pricing

It bases on two fundamental assumptions and is expressed as

$$V = \Pi \; and \; dV = d\Pi$$
$$\Pi = \gamma e^{rt} + \Delta S(t)$$
$$V = V(t, S(t))$$

- No arbitrage principle states if Π and V have the same terminal value, their values at any given time must stay the same, that is the two equations at the top
- Completion of market states the specfic form of Π , that is the expression in the middle
- Goal is to figure out the initial value of V

首先对积分形式做一些说明。一自融资的（Self-financing）资产组合 Π_t 由 γ_t 的债券（比如银行存款，无风险纯涨利息）和 Δ_t 的股票（有风险）组成，则 $\Pi_t = \gamma_t e^{rt} + \Delta_t S_t$。如此构建的直觉理解，衍生品是是在股票（底层证券）的基础上减小波动，那么如果我要用股票来复制它，那么股票一定要减小波动，换句话说另外搭配一个小波动的底层证券，有什么比银行存款波动更小的呢？

那接下来看它们的微分形式

这里涉及到一个定义叫做自融资资产组合，什么是自融资？Finance 的英文本意是“资金支持”，那么 Self-financing 的意思就是，这个组合的资金自给自足嘛，即这个资产组合在整个过程中，我们不再添加资金或取出资金。这样的自融资资产组合，有数学上的定义：如果有 $d\Pi_t = \sum_{i=1}^n w_i dS_{i,t}$, 资产组合 $\Pi_t = \sum_{i=1}^n w_i S_{i,t}$ 是自融资的。它的意思是我的资产组合的价值增量完全来自于我本身持有的各种证券的价格增量，因此可以构建等式，而如果有外部因素，两个微分式就不可能相等，那么 $d\Pi_t = r\gamma_t e^{rt} dt + \Delta_t dS_t$

假设某标的资产是股票的衍生品，在到期时的Payoff与到期时的股价 S_T 有关，设Payoff为 $V(S_T, T)$ 。假如是欧式看涨期权，则 $V(S_T, T) = (S_T - K)^+$ 。我们再来看衍生品的 t 时刻的价值 $V(S_t, t)$ ，他的微分 $dV(S_t, t)$ 怎么求？这里我们需要用到随机分析里的牛莱公式—— 伊藤-德布林公式。

定理 *(Ito-Doeblin)*：设函数 $f(t,x)$ 的偏导数 $f_t(t,x), f_x(t,x), f_{xx}(t,x)$ 都有定义并且连续，$X(t)$ 是适应的伊藤过程，则对于每个 $T \geq 0$，都有：
$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)d[X_t, X_t]$

用以上的公式，我们可以套出：

$$dV_t = V_t' dt + V_x' dS_t + \frac{1}{2} V_{xx}'' d[S_t, S_t] = \left(V_t' + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 V_{xx}'' \right) dt + V_x' dS_t$$

那么两个微分形式都有了，接下来的任务就是两个等式 $V = \Pi \; and \; dV = d\Pi$ ，并让他们微分的 dt 和 dS_t 的部分分别相等，可以得到

$$\begin{cases} V_x' = \Delta_t & (dS_t) \\ V_t' + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 V_{xx}'' = r\gamma_t e^{rt} & (dt) \end{cases}$$

根据第一行的关系我们有 $\gamma_t e^{rt} = \Pi_t - \Delta_t S_t = V_t - V_x' S_t$ ，从而换掉第二行右边得到

$$\begin{cases} V_x' = \Delta_t \\ V_t' + rS_t V_x' + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 V_{xx}'' - rV_t = 0 \end{cases}$$

可以看到1式就是 Delta 对冲法则，2式就是著名的 Black-Scholes 偏微分方程。

总地来说，BS公式最核心的假设只有两个，也就是无套利和市场完备，当然再过程中我们还引入了其他假设，比如自融资（目的是写出 Π 的微分形式），S_t 为几何布朗运动。而着一切都和测度没有任何关系，也就是说衍生品定价的核心就是“复制”二字，它和测度变换，鞅没有任何关系。

而所谓的Delta-hedging Option Pricing就是上述定价的一个变体

$$
\begin{aligned}
V = \Pi = \gamma e^{rt} + \Delta S(t) \\
\Rightarrow \gamma e^{rt} = V - \Delta S(t)
\end{aligned}
$$

也就是用衍生品对冲风险证券，使得总投资组合为无风险证券，同样有等式两边相等且微分相等，得到BS公式。

4.2. Feynman-Kac Theorem

这一小节的目的是说明风险中性定价的来源

定理 **(Feynman-Kac)**

第一条线索：有如下偏微分方程，

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial V}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - rV = 0 \\
V(x,T)\ is\ given
\end{gathered}
$$

可以得到第一个 $V = V(x,t)$ 的形式

第二条线索：我们构造一个随机过程

$$
dX_t = \mu(X_t,t)dt + \sigma(X_t,t)dW_t
$$

在此基础上构造一个函数

$$
\begin{gathered}
V(X(t),t) = e^{-r(T-t)}E[V(X(T),T)|\mathcal{F}_t] \\
e^{-rt}V(X(t),t) = E[e^{-rT}V(X(T),T)|\mathcal{F}_t]
\end{gathered}
$$

会得到第二个 $V = V(x,t)$ 的形式，结论是这两个 V 是一样的。Sherev陈述这个定理的证明逻辑为

1. find the martingale
2. take the differential
3. set the dt term equal to zero

意思是，我们构造 V 的定义式如上，在定义式中包含期望的情况下，不论 V 的具体形式如何，我们必然能够推出 $e^{-rt}V(X(t),t)$ 是一个鞅，也就是如下描述（限制条件）就是鞅的描述

$$
e^{-rt}V(X(t),t) = E[e^{-rT}V(X(T),T)|\mathcal{F}_t]
$$

而这也代表着如果我对它取微分，它的 dt 项一定要为 0，也就能得到偏微分方程（描述信息减少）。也就是说这个偏微分方程是我们构造 V 的鞅属性（初始描述）的一个附属产品，底层随机过程 μ, σ 以及参数 r，同时操控着 V 的积分和微分形式。

那我们现在来对比这里的方程和前面的BS方程，往底层倒推随机过程形式

$$V_t'+rS_tV_x'+\frac{1}{2}\sigma^2S_t^2V_{xx}''-rV_t=0,\ \ V(x,T)\ is\ given$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}+\mu(x,t)\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-rV=0,\ \ V(x,T)\ is\ given$$

可以看到，BS方程对应的期望形式解应该是底层随机过程为

$$dX_t=rSdt+\sigma SdW_t$$

的期望

$$V(x,t)=e^{-r(T-t)}E[V(X(T),T)|\mathcal{F}_t]$$

要注意这里还不涉及测度变换，我不管是什么测度，只要能在这个测度上构造上述随机过程，我就能找到BS方程的解，涉及到概率以及随机过程的部分只是我为了解这个方程使用的工具而已。这些工具并不会影响我的方程解，因为方程形式给定，参数给定，边界条件给定，$V(x,t)$ 就唯一确定了。所有的定理，数学技巧都是为了解这个方程！！！

那测度变换是什么呢？简而言之就是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 中的一个事件 ω ，它具有概率 $P(\omega)$ ，然后我改变测度，它的概率值就变成了 $\tilde{P}(\omega)$ 。核心就是我盯住同一个事件，从一个测度，变成另一个测度，它概率值变了，这就是测度变换，也就是说盯住同一个 ω ，测度变换才有意义。而这里测度的具体体现就是随机过程的漂移和波动参数。

但其实我们是不需要引入测度变换（盯住同一个 ω ）这个概念的，因为 $dX_t=rXdt+\sigma XdW_t$ 只是我们为了解BS方程引入的工具，它的样本路径可以和真实样本路径没有一点关系。但是数学家可能觉得不优雅，认为就算是工具，底层样本路径也应该是真实样本路径，那么要将原本是 $dS=\mu Sdt+\sigma SdW$ 的过程变成 $dX_t=rXdt+\sigma XdW_t$ ，那只能变测度，这就有了测度变换。

所以真正的逻辑是

$$\begin{aligned}real\ world\ stochastic\ process\Rightarrow No\ Arbitrage\ +\ Completion\Rightarrow BS\ equation\\ \Downarrow\\ tool\ stochastic\ process\Leftarrow martingale\Leftarrow Feynman-Kac\Leftarrow BS\ equation\end{aligned}$$

而将两个随机过程通过测度变换联系起来并将工具测度取名为风险中性测度只不过是锦上添花的点缀而已（利用Girsanov定理），但大多数书都是先用真实随机过程推工具随机过程再去干别的，其实有点本末倒置的意思，可能目的是让上述逻辑形成闭环？

那有多少种符合要求的测度呢？如果真实样本路径和工具样本路径不是同一个的话，也就是根据FK定理随便造一个符合要求的随机过程，那有无数个符合要求的测度，唯一的要求就能在此测度下能造出随机过程 $dX_t=rXdt+\sigma XdW$ 。但是真实样本路径和工具样本路径是同一个的话，fundamental theorem of asset pricing指出来，No Arbitrage假设说明我们肯定能找到这样的测度，可能还不止一个，而Completion则可将这样的测度数量限制成一个。

4.3. Risk Neutral Pricing

这一节的思路就是先采用测度变换将真实随机过程和工具随机过程连接起来，也就是将工具随机过程造出来，再构造鞅从而定价，逻辑对应上述流程图第二行从左到右。

首先我们有证券的折现过程

$$
\begin{aligned}
d(e^{-rt}S) &= (\alpha - r)e^{-rt}Sdt + \sigma e^{-rt}SdW \\
&= \sigma e^{-rt}S[\frac{\mu - r}{\sigma}dt + dW] \\
&= \sigma e^{-rt}S[\Theta dt + dW] \\
&= \sigma e^{-rt}Sd\tilde{W} \\
or & \\
dS &= rSdt + \sigma S\tilde{W}
\end{aligned}
$$

针对证券折现过程我认为有两种说法，第一种是调整测度使得证券的过程参数 $\mu = r$ ，第二种是调整测度使得 $\Theta dt + dW$ 变成布朗运动，这两种说法其实是一个意思。而从第二个式子我们可以直观看出这种调整就是将证券遵从的几何布朗运动参数 μ 换成了 r 。那么折现过程

$$
e^{-rt}S(t) = S(0) + \int_0^t \sigma e^{-rt}S(u)d\tilde{W}(u)
$$

from Stochastic Calculus we know that an ito integral is a martingale, so $e^{-rt}S$ is a martingale under risk neutral measure $\tilde{P}$. 在底层随机过程准备好之后我们来看投资组合

$$
\Pi = \Delta S + \gamma e^{rt}
$$
$$
e^{-rt}\Pi = \Delta e^{-rt}S + \gamma
$$
$$
d(e^{-rt}\Pi) = \Delta d(e^{-rt}S) = \Delta\sigma e^{-rt}Sd\tilde{W}
$$

也就是在底层随机过程调整到 Q 测度下后，我构建的这个投资组合变成了鞅，这里我们可以看到Portfolio变成鞅的本质是通过添加折现因素，Portfolio的无风险资产部分变成了一个常数（也就是将它固定成初始无风险资产，而没有利息），求导后 $d(e^{-rt}\Pi)$ 和 $d(e^{-rt}S)$ 直接挂钩，后者是鞅，那么前者也是鞅。而由于市场完备，衍生品能够由组合完美复制，则

$$
d(e^{-rt}V) = \Delta d(e^{-rt}S) = \Delta\sigma e^{-rt}Sd\tilde{W}
$$

衍生价格的折现过程在 Q 测度下为鞅。到现在为止，我们所作的是在底层随机过程为

$$
dS = rSdt + \sigma S\tilde{W}
$$

的基础上，构建一个衍生品，并且它具有鞅属性

$$
e^{-rt}V(t) = E[\mathrm{e}^{-rY}V(T)|\mathcal{F}_t]
$$

那么根据Feynman-Kac公式，我们知道它一定满足BS公式，那么上述 V 就是我们需要的BS方程的期望形式解

$$
V_t' + rS_tV_x' + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 V_{xx}'' - rV_t = 0, \;\; V(x,T) \; is \; given
$$

或者说我们找到了等价鞅测度（折现股价为鞅），那么在此测度下算出来的任何东西都是满足无套利原则的

4.4. How to Use

市场是完备的，也就是我能用风险证券和无风险证券复制任何资产，也就是说上述 V 是任何形式的衍生品，我都能带进去往里面算。而不同衍生品的不同之处就在于 V 的形式不同，也就是 $V(x,T)=\varphi(x)$ 这个边界条件不同，比如我带进欧式看涨期权的边界条件

$$V(x,T)=(x-K)^+ \ for\ PDE$$
$$V(X(T),T)=(X(T)-K)^+ \ for\ SDE$$

算出来就是

$$V_t=S_tN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

而如果是另外的衍生品，就会有另外的 φ 形式，就会算出另外的 V_t 。那么我们要如何使用这个公式呢？

首先我们check是否假设证券价格服从几何布朗运动，要是的话肯定会告诉我们 μ 和 σ ，然后用 σ 和 r 我们能得到风险中性测度下的布朗运动长什么样，也就是 X_T 取特定值的风险中性概率我们能够知道，也就是 $\varphi(X_T)$ 取特定值的风险中性概率我们能够知道，也就能够算期望 $E[\varphi(X_T)|\mathcal{F}_t]$ ，那么价格也就定好了。

我们是直接算概率，算期望，而不去解PDE。

4.5. Revelation

在多数情况下，我们可以不用给任何无套利，BS方程的讨论，直接去找等价鞅测度。这是因为无套利的等价描述就是风险中性测度（Fundamental theorem of asset pricing给出），我们去构造风险中性测度下的鞅就是在用无套利原则。而BS公式只不过是无套利的附属品，当然可以省去。也就是说逻辑

$$\begin{aligned} real\ stochastic\ process \Rightarrow No\ Arbitrage\ +\ Completion \Rightarrow BS\ equation \\ \Downarrow \\ tool\ stochastic\ process \Leftarrow martingale \Leftarrow Feynman-Kac \Leftarrow BS\ equation \end{aligned}$$

是历史上衍生品定价的发展逻辑，而真正使用的逻辑则是

$$\begin{array}{lll} real\ stochastic\ process & \Rightarrow & No\ Arbitrage\ (+\ Completion) \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ tool\ stochastic\ process & \Rightarrow & martingale \end{array}$$

例如分红证券，带跳证券等等全是按照上述这个逻辑进行定价的

4.6. Implied Volatility

Chapter 5 Dividend-Paying Securities

5.1. Continuously Paying Dividend with Constant Coefficients

这里陈述连续支付红利证券，带有分红的证券像是风险证券和无风险证券的结合，首先我们在 $t=0$ 时以 $S(0)$ 持有一股，价格依照 $S(t)$ 随机过程进行演化，并且每个时刻都会分红，而我们立即用这个分红去购买股票，那么分红的效果就是我持有的证券数量会以 e^{ft} 进行膨胀，结合才是分红证券在 t 时刻的市场总价值，而这个总价值符合几何布朗运动。（分红的直接动作是给钱，但我用这个钱去继续买股票，导致效果是股票数量增加）。就是说如果我在 t 时刻去证券市场看，一股证券的价值服从的是 $S(t)$ ，而如果我从0时刻买一单位证券，在 t 时刻它在我手中的数量会变成 e^{ft} 股，那么总价值变成 $e^{ft}S(t)$ 。

$$
\begin{gathered}
M(t)=e^{ft}S(t)\\
dM=\mu Mdt+\sigma MdW=\mu e^{ft}Sdt+\sigma e^{ft}SdW\\
d(e^{ft}S)=fe^{ft}Sdt+e^{ft}dS\\
dS=-fSdt+\mu Sdt+\sigma SdW
\end{gathered}
$$

上面这段陈述可以解释两个问题：第一为什么 $M(t)$ 符合几何布朗运动？为什么定价用是 $S(t)$ ？分红导致持有股票数量上升，而分红同时也会使得公司股价下降，两者相互作用使得 $M(t)$ 满足某种不因个体而决定的规律；定价肯定是基于公开市场上某个东西的价值，而不是某个人手中某个东西的价值。

底层随机过程已经有了，现在要在此基础上去看我手里的Portfolio（复制衍生品的工具）满足什么方程

$$
\begin{gathered}
\Pi(t)=\Delta S(t)+\gamma e^{rt}=\Delta S(t)+(\Pi(t)-\Delta S(t))\\
d\Pi=\Delta dS+\Delta fSdt+\gamma re^{rt}dt=\Delta\mu Sdt+\Delta\sigma SdW+r(\Pi-\Delta S)dt\\
=r\Pi dt+\Delta\sigma S(\frac{\mu-r}{\sigma}dt+dW)
\end{gathered}
$$

这里风险资产的形式依旧为 $\Delta S(t)$ ，这是因为 e^{ft} 被吸收进了 Δ ，与前面基础的定价对比，这里我手握证券的数量也会变化，因此如果进行微分它会产生两项 $d(\Delta S)=d\Delta S+\Delta dS=\Delta dS+\Delta fSdt$ ，但因为我们之前规定 $M(t)$ 符合几何布朗运动，其实也就是我的风险资产部分仍符合几何布朗运动，那么最终的微分形式和常规情况肯定是一致的（这里的一致也是测度变换仍是将 μ 换 r 的原因）。紧接着我们对衍生价格进行微分，并且 Π 和 V 以及它们的微分相等

$$d\Pi = \Delta dS + \Delta fSdt + r(\Pi - \Delta S)dt$$

$$dV_t = V_t'dt + V_x'dS + \frac{1}{2}V_{xx}''d[S,S] = \left(V_t' + \frac{1}{2}\sigma^2S^2V_{xx}''\right)dt + V_x'dS$$

$$so$$

$$V_x'fS + r(V - V_x'S) = V_t' + \frac{1}{2}\sigma^2S^2V_{xx}''$$

$$V_t' + (r-f)SV_x' + \frac{1}{2}\sigma^2S^2V_{xx}'' - rV = 0$$

与一般的底层为几何布朗运动的BS公式对比

$$V_t' + rSV_x' + \frac{1}{2}\sigma^2S^2V_{xx}'' - rV = 0$$

我们可以发现不同之处在于第二项的系数由 r 变成了 $r-f$ ，那我们用 Feynman-Kac找工具随机过程时，要找的就是（或者说需要进行测度变换）

$$dX = (r-f)Xdt + \sigma XdW$$

$$or$$

$$dS = -fSdt + \mu Sdt + \sigma SdW \Longrightarrow dS = -fSdt + rSdt + \sigma Sd\tilde{W}$$

依旧是将漂移参数从 μ 换成 r （也就是测度的变换仍和常规情况一样），而方程的期望解形式为

$$e^{-rt}V(X(t),t) = E[e^{-rT}V(X(T),T)|\mathcal{F}_t]$$

其中 $V(x,T)$ 形式给定，且 $X(T)$ 是漂移率和波动率为 $r-f$ 和 σ 的几何布朗运动。

到这里我们的思路还是先算出BS方程，再去找期望形式解，那能不能简化步骤直接找到期望形式解，而不去考虑BS方程，并且我们所简化的步骤自动满足BS方程？是可以的，这其实也就是Risk Neutral Pricing一直在讲的内容，用分红证券举例，按照Shreve的逻辑有如下几步：

1. $d\Pi = r\Pi dt + \Delta\sigma S(\frac{\mu-r}{\sigma}dt + dW) = r\Pi dt + \Delta\sigma Sd\tilde{W}$ 同时
   $dS = -fSdt + rSdt + \sigma Sd\tilde{W}$
2. $d(e^{-rt}V) = \Delta e^{-rt}\sigma Sd\tilde{W}$
3. $e^{-rt}V(S(t),t) = E[e^{-rT}V(S(T),T)|\mathcal{F}_t]$

首先我们根据市场的完备性，用构建的Portfolio去复制衍生品，并取微分，然后将微分整成上面这种两项形式，第一项一定要为“利率乘衍生品价值乘dt”形式，其他的都放在第二项，并将第二项换测度整成一个布朗运动。这里我们还能推出一个在第三步需要用的结果：在新测度下，底层的风险证券满足的随机过程

然后我们考虑折现过程，这会将我的第一项消除，而第二项为布朗运动，因此折现过程是鞅，折现过程也是第一步如此处理的原因

最后根据鞅的性质将期望形式解写出，而在第一步中我们得到了底层证券的性质，也就是新测度下 $S(T)$ 分布的具体形式，那么我们就能够去算期望

这三步就是衍生品定价的基本步骤，为什么上述三步找到求得的值一定满足BS方程？这可以依据Sheldon Ross书中套利定理给出解答，套利定理本质上是告诉我们下面的逻辑第二行从左往右，鞅=>BS方程也是对的，再结合我们已经能够从右往左，可以推出“新测度下折现过程是鞅”和“BS”公式等价，也就是Feynman-Kac公式正向反向用都可以

$$\begin{aligned} real\ world\ stochastic\ process \Rightarrow No\ Arbitrage\ +\ Completion \Rightarrow BS\ equation \\ \Downarrow\quad \\ tool\ stochastic\ process \Leftarrow martingale \Leftarrow Feynman-Kac \Leftarrow BS\ equation \end{aligned}$$

我们这三步的目标就一个，找新测度将 $e^{-rt}V$ 变成鞅，鞅代表着公平，换句话说我们的目标就是找新测度使Portfolio变得公平，而根据套利定理，如果这样的测度找到了，那么在真实世界中我们就没办法套利了，也就自动满足BS公式。

5.2. Lump Payments of Dividends with Constant Coefficients

这是连续支付红利的特殊情况，我们考虑一个点

Chapter 6 Option Pricing with Jump