(4) Podemos definir $\varepsilon_{n+1} = r_{n+1} - r_{e+1}$, $\varepsilon_n = r_n - r_e$.

donde r_{e+1} es la posición exacta en $n+1$

entonces:

Usando [el] método de verlet donde

$$r_{n+1} = 2\vec{r}_n - \vec{r}_{n-1} + \vec{a}(\vec{r}_n)h^2$$

reemplazándolo

$$\varepsilon_{n+1} = (2r_n - r_{n-1} + a(r_n)h^2) - (2r_e - r_{e-1} + a(r_e)h^2)$$

$$\varepsilon_{n+1} = 2(r_n - r_e) - (r_{n-1} - r_{e-1}) + a_n(r_n)h^2 - a(r_e)h^2.$$

$$\varepsilon_{n+1} = 2\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + a(r_n)h^2 - a(r_e)h^2$$

Utilizando expansión de taylor para reescribir la aceleración.

$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a)$. , tenemos que

$$a(r_n) = a(r_e) + a'(r_e)\varepsilon_n.$$

entonces:

$$\varepsilon_{n+1} = 2\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + (a(r_e) + a'(r_e)\varepsilon_n)h^2 - a(r_e)h^2.$$

$$\varepsilon_{n+1} = 2\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + a'(r_e)\varepsilon_n h^2.$$

donde

$$\underline{\varepsilon_{n+1} - (2 + h^2 a'_n)\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0}$$

ahora, para el caso de un oscilador armonico tenemos que $a = -w^2 x$

utilizando $2R = h^2 w^2 \rightarrow R = \frac{h^2 w^2}{2}$

$a' = -w^2$

$$\varepsilon_{n+1} - 2\left(1 - \frac{w^2 h^2}{2}\right)\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0$$

$$\varepsilon_{n+1} - 2(1-R)\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0 \quad //$$

(c) tenemos que $\varepsilon_n = \varepsilon_0 \lambda^n$

$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_0 \lambda^{n+1}$

$\varepsilon_{n-1} = \varepsilon_0 \lambda^{n-1}$.

Reemplazando:

$\varepsilon_0 \lambda^{n+1} - 2(1-R)\varepsilon_0 \lambda^n + \varepsilon_0 \lambda^{n-1} = 0$, si dividimos por $\varepsilon_0 \lambda^{n-1}$.

obtenemos.

$\lambda^2 - 2(1-R)\lambda + 1 = 0$.

Usando la formula cuadratica $\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

utilizamos:

$a = 1$, $b = -2(1-R)$, $c = 1$.

$$\lambda = \frac{2(1-R) \pm \sqrt{[2(1-R)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$$

$$\lambda \pm 1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R}$$

d) Para que el método de integración sea estable.

los valores absolutos de las raices deben ser menores o iguales a 1

$|\lambda_{\pm}| \leq 1$ o sea $|1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R}| \leq 1$

Sabiendo que $R = \frac{h^2 w^2}{2}$

$$\left|1 - \frac{h^2 w^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{h^2 w^2}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{h^2 w^2}{2}\right)}\right| \leq 1$$

Simplificando:

$$\left(\frac{h^2 w^2}{2}\right)\left(\frac{h^2 w^2}{2} - 2\right)$$

$\rightarrow$

$$\left|1 - \frac{h^2 w^2}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2 w^2}{2}\left(\frac{h^2 w^2}{2} - 2\right)}\right| \leq 1$$

$$\left|1 - \frac{h^2 w^2}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2 w^2}{2}} \sqrt{\frac{h^2 w^2}{2} - 2}\right| \leq 1 \rightarrow \left|1 - \frac{h^2 w^2}{2} \pm \frac{hw}{2} \sqrt{h^2 w^2 - 4}\right| \leq 1$$

Para que sea estable.

$\sqrt{h^2 w^2 - 4} \rightarrow h^2 w^2 \geq 4 \rightarrow h^2 \geq \frac{4}{w^2} \quad h \geq \frac{2}{w}$.