

Stephan Voss

**Semianalytische Modellierung elektrischer Ersatzschaltbilder  
für drahtgewickelte Spulen und Transformatoren  
in der Leistungselektronik**

Erlangen 2006



# **Semianalytische Modellierung elektrischer Ersatzschaltbilder für drahtgewickelte Spulen und Transformatoren in der Leistungselektronik**

Der Technischen Fakultät der  
Universität Erlangen-Nürnberg

zur Erlangung des Grades

**DOKTOR-INGENIEUR**

vorgelegt von

**Stephan Voss**

Erlangen 2006

Als Dissertation genehmigt von der  
Technischen Fakultät der  
Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: Mittwoch, 14. Dezember 2005  
Tag der Promotion: Mittwoch, 7. Juni 2006  
Dekan: Prof. Dr.-Ing. A. Leipertz  
Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. M. Albach  
Prof. em. Dr.-Ing. Dr. h. c. R. Unbehauen

# **Danksagung**

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Albach für die Anregung und Ermöglichung dieser Dissertation im Rahmen meiner Tätigkeit am Lehrstuhl für Elektromagnetische Felder. Herrn Prof. em. Dr.-Ing. Dr. h. c. R. Unbehauen gilt mein Dank für die Übernahme des Korreferats und die zahlreichen anregenden Diskussionen.

Ein Quell an Ideen waren auch die Gespräche mit Kollegen. Stellvertretend möchte ich Herrn H. Mayer danken und besonders Herrn Dr.-Ing. H. Roßmanith für seine hilfreichen Anregungen sowie für das Korrekturlesen dieser Arbeit und weiterer Berichte einschließlich der kritischen wie exakten Überprüfung der enthaltenen Formeln.

Mit der Herstellung zahlreicher Messobjekte beauftragte ich Herrn N. Altmann, wobei ich für alle Tätigkeiten am Lehrstuhl stets auf intensive Unterstützung seinerseits vertrauen konnte. Ich Danke ihm für diese angenehme Zusammenarbeit ebenso wie Frau H. Schadel, die mir bei der Erstellung und Konvertierung von Zeichnungen eine große Hilfe war.

Ich möchte mich auch für hervorragende und belastbare Freundschaften bedanken. In dem Zusammenhang sind insbesondere die motivierenden Gespräche mit Herrn Dr.-Ing. J. Rößler zu nennen.

Die stete Förderung durch die ganze Familie erfüllt mich mit großer Dankbarkeit — ganz besonders gegenüber meinen Eltern und meiner Frau Marion für ihre aufopfernde und liebevolle Unterstützung.

Stephan Voss



## **Zusammenfassung**

In der Leistungselektronik werden Hochfrequenz-Spulen und Transformatoren als magnetische Energiespeicher eingesetzt. Als Designparameter für den Schaltungsentwurf dient die Induktivität einer Spule bzw. die Hauptinduktivität eines Transformators, wobei der praktische Aufbau einer Komponente entscheidenden Einfluss auf die magnetischen Kopplungen, den Wirkungsgrad und das EMV-Verhalten einer Schaltung hat. Die vorliegende Arbeit liefert Beiträge zur Ermittlung elektrischer Ersatzschaltbilder für drahtgewickelte Hochfrequenz-Spulen und Transformatoren unter Vorgabe der Geometrie, der Materialdaten und des Betriebszustandes eines Bauelements.

Die Elemente der elektrischen Ersatzschaltbilder von Spulen und Transformatoren sind mit Hilfe der Maxwell'schen Feldtheorie aus den elektromagnetischen Feldgrößen herleitbar. Die Problemstellung wird zunächst auf die Ermittlung der elektromagnetischen Felder der untersuchten Bauelemente zurückgeführt. Hierfür werden weitestgehend analytische Lösungsansätze verfolgt, wodurch in der praktischen Umsetzung der vorgestellten Kombination von Verfahren kurze Simulationszeiten erreicht werden können.

Zur Ermittlung von Verlustleistung und induktiven Kopplungen werden zunächst die magnetischen Feldgrößen betrachtet und abschließend Ersatzschaltbilder aus Induktivitäten und Widerständen vorgestellt. Für rotationssymmetrisch gewickelte Spulen und Transformatoren kann auf eine numerische Implementierung der Verlust- und Induktivitätsberechnung zurückgegriffen werden, welche auf Lösung partieller Differentialgleichungen durch Separationsansätze basiert. Die vorliegende Arbeit untersucht in Erweiterung dazu Bauelemente, bei denen keine Rotationssymmetrie vorliegt. Der Einfluss eines Ferritkerns wird mit Hilfe der Momenten-Methode durch Einführung einer Ersatzanordnung aus Magnetisierungsstrombelägen berücksichtigt. Magnetische Feldstärkeanteile und Vektorpotentiale der Ferritkern-Ersatzanordnung können durch Anwendung des Satzes von Helmholtz weitgehend analytisch berechnet werden.

Zur Berechnung der Wicklungsverluste wird ein zweidimensionales Verfahren von Albach angewendet (vergl. [2]). Es wird durch Kombination mit einer Ferritkern-Ersatzanordnung sowie zusätzliche feldtheoretische und geometrische Überlegungen zur Anwendung auf dreidimensionale Problemstellungen erweitert.

Auch für die Ermittlung der Induktivitäten erweist sich die Verwendung der Ferritkern-Ersatzanordnung als vorteilhaft, da Gegeninduktivitätsanteile zwischen Teilen der Wicklungen und Teilen der Ferritkern-Ersatzanordnung weitgehend analytisch berechnet werden können.

Die parasitären Kapazitäten eines Bauelements werden aus den elektrischen Feldgrößen berechnet. Zunächst wird der Einfluss eines elektrisch (schwach) leitfähigen Ferritkerns untersucht. Dies erfolgt analog zur magnetischen Ferritkern-Ersatzanordnung mit einer elektrischen Ersatzanordnung aus Ladungsbelägen. Auch die elektrischen Feldstärke- und Potentialanteile

der Kern-Ersatzanordnung können weitgehend analytisch berechnet werden.

Zur Ermittlung der elektrischen Feldstärkebeiträge der Windungen wird das Bauelement als Mehrleiterystem betrachtet, wobei für jeden Leiter ein Randwertproblem formuliert wird. Aufgrund der elektrischen Kopplung der benachbarten Leiter wird zunächst ein iteratives Verfahren zur Berechnung der elektrischen Potentialbeiträge der Windungen verwendet. Schließlich werden die Windungen in Leitermengen gruppiert, für welche jeweils ein geschlossenes Gleichungssystem aufgestellt wird. Ein teilexplizites Feldberechnungsverfahren wird vorgestellt, wobei eine Zusammenfassung aller Leiter in nur eine einzige Leitermenge denkbar ist, so dass ein explizites Lösungsverfahren erreicht werden kann.

Anschließend werden die Kapazitäten über das Coulomb-Gesetz aus der Feldverteilung bestimmt. Die Simulationsergebnisse liegen zunächst in einer Kapazitätsmatrix vor. Für die Umformung in eine zur Verwendung in Software-Schaltkreissimulatoren besser auswertbare Matrix aus Teilkapazitäten wird sowohl ein netzwerktheoretischer als auch ein energiebasierter Ansatz vorgestellt. Diese Teilkapazitäten können direkt in ein elektrisches Ersatzschaltbild übernommen werden.

Abschließend werden geeignete Messmethoden ausgewählt und die Anwendbarkeit der gewonnenen Modellierungserfahren anhand zahlreicher Beispiele belegt. Simulationen und Messungen von Haupt- und Gegeninduktivitäten sowie Wicklungswiderständen und parasitären Kapazitäten werden für unterschiedliche, praktisch aufgebaute Spulen- und Transformatorm-Bauformen vorgestellt und diskutiert.

**Equivalent circuit modelling for wire-wound coils and transformers  
in power electronics**

## **Abstract**

In power electronics high-frequency coils and transformers are used for magnetic energy storage. The inductance of a coil or main inductance of a transformer serve as main design parameter for the development process of power supplies. The construction of a component has a main influence on magnetic coupling, efficiency and EMI-compatibility of the entire circuit. This work contributes to modelling of equivalent circuits for wire-wound, high-frequency coils and transformers based on geometry, material data and operation status of particular components.

All elements of an equivalent circuit of a component can be derived under terms of Maxwell's field theory by first calculating the electromagnetic field distribution of a device. As a major gain of applying analytical approaches numerical implementations of the proposed methods will lead to very fast computation of simulation results.

In order to determine winding losses and magnetic couplings, first of all, the magnetic field distribution has to be calculated, and finally, resistances and inductances of an equivalent circuit will be determined. For rotation-symmetrically-wound components a numerical implementation of loss- and inductance-calculation is applied, based on a state-of-the-art solution of partial differential equations using separation of variables. Furthermore, this work explores components not influenced by rotation-symmetry. The influence of a ferrite core will be investigated applying the method of moments and implementing an equivalent layout of magnetizing currents. Magnetic field distribution and even magnetic vector potential of an equivalent ferrite core layout can be determined analytically under terms of the Helmholtz' theorem.

A method by Albach [2] serves to identify winding losses as far as two-dimensional scales are concerned. It will be extended on a three-dimensional scale taking into account a ferrite core equivalent layout and applying additional field-theoretical approaches and geometrical considerations.

Equivalent ferrite core layouts prove also suitable to resolve inductances since shares of mutual inductances between parts of windings and magnetizing currents of equivalent ferrite core layouts can be largely determined analytically.

Parasitic capacitances of a device can be derived from electric field distribution. In order to achieve this the influence of a highly resistive ferrite core will be analyzed first, and then an electric equivalent core layout will be introduced consisting of electrically influenced charges. As well as with the magnetic equivalent core layout the contributions of these charges to the entire electric field distribution can be calculated analytically.

To determine electric field distribution shares related to windings a boundary value problem will be put forward and solved for each single turn. Due to couplings of electric flux between adjacent turns the field distribution of each turn is approached by application of an iterative

method. The number of iterations may be decreased by arranging several turns and merging their boundary value problems into larger systems of linear equations so that even an explicit solution is achievable.

A matrix of capacitances can be derived from electric field distribution under terms of Coulomb's law. For the final determination of parasitic capacitances of the equivalent circuit network theoretical considerations are introduced as well as an energy based comparison.

In conclusion, this work reflects upon suitable measuring methods and verifies the introduced equivalent circuit modelling with regard to its practical use. Based on the construction and different arrangements of a broad variety of components measurements of main and mutual inductances, winding losses and parasitic capacitances will be compared with simulation results.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Formulierung der Problemstellung</b>	<b>1</b>
1.1 Stationäre Betrachtung . . . . .	3
1.2 Grundgleichungen der Elektrodynamik . . . . .	5
1.3 Verlustmechanismen . . . . .	9
1.3.1 Kernverluste . . . . .	9
1.3.2 Wicklungsverluste . . . . .	10
1.4 Induktive Kopplungen . . . . .	11
1.5 Kapazitive Kopplungen . . . . .	12
1.6 Zusammenfassung . . . . .	14
<b>2 Mathematische Hilfsmittel zur Feldberechnung</b>	<b>17</b>
2.1 Integralgleichungen . . . . .	17
2.1.1 Magnetfelder allgemeiner Stromverteilungen . . . . .	18
2.1.2 Elektrische Felder allgemeiner Ladungsanordnungen . . . . .	19
2.1.3 Einschränkungen . . . . .	19
2.2 Ersatzanordnungen . . . . .	20
2.3 Lösung von Randwertproblemen . . . . .	22
2.3.1 Minimierung der Fehlerquadrate . . . . .	23
2.3.2 Momenten-Methode . . . . .	24
2.3.3 Separation der Variablen . . . . .	25
2.4 Zusammenfassung . . . . .	27
<b>3 Stationäre magnetische Ferritkern-Ersatzanordnung</b>	<b>29</b>
3.1 Auswertung der magnetischen Randbedingung . . . . .	29
3.2 Ferritkern-Ersatzanordnung . . . . .	31
3.3 Ermittlung der Magnetisierungsströme . . . . .	34
3.4 Zusammenfassung . . . . .	38
<b>4 Verlustmechanismen und deren Modellierung</b>	<b>41</b>
4.1 Kernverluste . . . . .	41
4.1.1 Spezifische Kernverluste . . . . .	41
4.1.2 Wirbelstromverluste im Ferritkern . . . . .	42
4.2 Wicklungsverluste . . . . .	42
4.3 Runddraht im externen magnetischen Feld . . . . .	43
4.3.1 Feldkomponenten normal zum Stromverlauf . . . . .	44
4.3.2 Feldkomponenten parallel zum Stromverlauf . . . . .	47
4.3.3 Zusammenfassung der Wicklungsverluste . . . . .	51
4.4 Darstellung der Verluste im Ersatzschaltbild . . . . .	51

<b>5 Modellierung induktiver Kopplungen</b>	<b>53</b>
5.1 Induktivitätsmatrix des Übertragers . . . . .	53
5.2 Induktivitätsbeiträge des Mehrleitersystems . . . . .	53
5.3 Analytische Induktivitätsberechnung . . . . .	54
5.4 Induktivitätsberechnung für Übertrager ohne Ferritkern . . . . .	56
5.5 Induktivitätsberechnung für Übertrager mit Ferritkern . . . . .	58
5.6 Einfluss des Betriebszustandes des Ferritkernes auf die Induktivitäten . . . . .	60
5.7 Zusammenfassung . . . . .	61
<b>6 Elektrische Ferritkern-Ersatzanordnung</b>	<b>63</b>
6.1 Auswertung der elektrischen Randbedingung . . . . .	63
6.2 Ferritkern-Ersatzladungsanordnungen . . . . .	66
6.3 Quasistationäre Ferritkern-Ersatzladungsanordnung . . . . .	68
6.4 Ferritkern-Ersatzladungsanordnung als Bezugspotential . . . . .	71
6.5 Zusammenfassung . . . . .	72
<b>7 Modellierung parasitärer Kapazitäten</b>	<b>73</b>
7.1 Isolierte Drahtwindung im elektrischen Feld . . . . .	74
7.2 Berücksichtigung elektrischer Ferritkern-Ersatzanordnungen . . . . .	76
7.3 Netzwerktheoretische Kapazitätsberechnung . . . . .	78
7.4 Leistungsbasierte Kapazitätsberechnung . . . . .	82
7.5 Zusammenfassung . . . . .	85
<b>8 Elektrisches Randwertproblem in Torus-Koordinaten</b>	<b>87</b>
8.1 Orthogonale Torus-Koordinaten . . . . .	87
8.2 Isolierte, kreisförmige Drahtwindung im externen elektrischen Feld . . . . .	90
8.2.1 Potentialansatz und elektrische Feldstärke . . . . .	91
8.2.2 Randbedingungen . . . . .	93
8.2.3 Potentialansätze für den isolierten Leiter . . . . .	94
8.2.4 Lösung durch Auswertung der Randbedingungen . . . . .	96
8.2.5 Berechnung der Kapazitätsmatrix . . . . .	102
8.3 Matrizenschreibweise des Randwertproblems . . . . .	102
8.4 Teilexplizites Lösungsverfahren . . . . .	107
8.5 Berücksichtigung einer Kern-Ersatzanordnung . . . . .	112
8.6 Simulationsbeispiele elektrostatischer Felder . . . . .	115
8.7 Zusammenfassung . . . . .	120
<b>9 Auswertung</b>	<b>123</b>
9.1 Induktives Ersatzschaltbild und Simulation . . . . .	124
9.1.1 Messung der Verluste und der Induktivitäten . . . . .	125
9.2 Messung der parasitären Kapazitäten . . . . .	127
9.2.1 Messung bei einseitigem Abschluss . . . . .	129
9.2.2 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 1 und 2 . . . . .	131
9.2.3 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 1 und 3 . . . . .	131
9.2.4 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 2 und 3 . . . . .	132
9.2.5 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 1 und 4 . . . . .	132
9.2.6 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 1 und 5 . . . . .	134
9.2.7 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 2 und 4 . . . . .	135
9.2.8 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 2 und 5 . . . . .	136

9.3	Rechteckförmig gewickelte Luftspulen . . . . .	138
9.4	Spulen auf hochpermeablen E-Kernen . . . . .	147
9.4.1	107 Windungen auf einem E32/16/9-Ferritkern . . . . .	147
9.4.2	70 Windungen auf einem E42/21/15-Ferritkern . . . . .	151
9.5	Transformatoren auf hochpermeablen E-Kernen . . . . .	153
9.5.1	Transformator in zwei Wicklungs-Kammern . . . . .	153
9.5.2	Transformator in einer Wicklungs-Kammer . . . . .	155
9.6	Kapazitäten von Luftspulen . . . . .	157
9.6.1	Lagenwicklung . . . . .	157
9.6.2	Wicklung in mehreren Kammern . . . . .	159
9.7	Kapazitäten von Spulen in Topfkernen aus Ferrit . . . . .	165
9.8	Kapazitäten von Transformatoren in Topfkernen aus Ferrit . . . . .	177
9.8.1	Übertrager-Beispiel Nr. 1 . . . . .	178
9.8.2	Übertrager-Beispiel Nr. 2 . . . . .	185
<b>Zusammenfassung</b>		<b>193</b>
<b>A Integrale Maxwellgleichungen</b>		<b>197</b>
<b>B Magnetostatische Felder</b>		<b>199</b>
B.1	Linienstrom . . . . .	199
B.2	Ebener Strombelag . . . . .	201
B.2.1	Schleife aus ebenen Strombelägen . . . . .	206
B.3	Strombelagsführender Zylinder . . . . .	207
B.3.1	Strombelagsführender Zylindermantel . . . . .	207
B.3.2	Strombelagsführender Kreisring . . . . .	208
B.3.3	Stromführender Kreis . . . . .	209
<b>C Gegeninduktivitätsbeiträge</b>		<b>211</b>
C.1	Parallele Leiterstrecken . . . . .	211
C.2	Symmetrische Anordnung aus rechteckförmigen Stromschleifen . . . . .	212
C.3	Windschiefe Leiterstrecken . . . . .	213
C.4	Leiterstrecke vor ebenem Strombelag . . . . .	213
C.5	Kreisschleife vor ebenem Strombelag . . . . .	217
C.6	Zylindermantel und Leiterstrecke . . . . .	218
C.7	Konzentrische Anordnung aus stromführendem Zylindermantel und stromführenden Kreisschleife . . . . .	218
C.8	Symmetrische Anordnung aus zwei stromführenden Kreisschleifen . . . . .	219
C.9	Stromführender Zylindermantel und ebener Strombelag . . . . .	220
C.10	Strombelagsführende Kreisscheibe und Kreisschleife . . . . .	221
<b>D Elektrostatische Felder</b>		<b>223</b>
D.1	Gerades Linienladungsstück . . . . .	223
D.2	Ebener Ladungsbelag . . . . .	224
D.3	Elektrisches Feld einer Ringladung . . . . .	227
D.4	Elektrisches Feld einer zylinderförmigen Ladungsanordnung . . . . .	229
D.5	Elektrisches Feld einer kreisscheibenförmigen Ladungsanordnung . . . . .	231

*Inhaltsverzeichnis*

<b>E Einfluss rechteckförmiger Wicklungsgeometrie</b>	<b>233</b>
E.1 Windungen um einen rechteckförmigen Wickelkörper mit abgefasten Kanten . . . . .	234
E.2 Äquivalente Abmessungen einer Windung um einen rechteckförmigen Wickelkörper mit abgefasten Kanten . . . . .	240
E.3 Anpassung rechteckförmiger Wicklungen zur Induktivitäts- und Verlustberechnung	241
E.4 Anpassung der Verlustberechnung für rechteckförmige Windungen . . . . .	242
E.5 Beispiele . . . . .	244
E.6 Zusammenfassung . . . . .	250
<b>F Verwendete Symbole</b>	<b>251</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>255</b>

# 1 Formulierung der Problemstellung

Moderne Hochfrequenztransformatoren werden in Schaltnetzteilen bei Schaltfrequenzen von einigen kHz bis einigen 100 kHz betrieben. Im Rahmen dieser Arbeit sollen Verfahren zur Modellierung von elektrischen Ersatzschaltbildern für drahtgewickelte Hochfrequenztransformatoren auf Ferritkernen mit Luftspalt erörtert werden.

Während der Entwurfsphase einer Schaltung werden insbesondere die verwendeten induktiven Bauelemente oft als ideal angenommen, z.B.

- Spulen und Transformatoren als lineare, verlustlose und kapazitätsfreie Induktivitäten,
- Kondensatoren als lineare, verlustlose und induktivitätsfreie Kapazitäten,
- Widerstände als linear und induktivitätsfrei,
- Dioden und Transistoren als verlustlose und kapazitätsfreie Schalter.

Diese Annahmen beschreiben das tatsächliche Verhalten der Bauelemente in einer praktisch aufgebauten Schaltung oft nicht ausreichend genau, haben jedoch den großen Vorteil, dass zum Schaltungsentwurf einfache mathematische Modelle herangezogen werden können. Die Schaltung kann so auf einfache Weise für ihre Funktion entworfen werden wie z.B. Energietransport oder Energiewandlung. Die Zustandsgrößen (Ströme, Spannungen, u.s.w.) können mit einfachen Grundgleichungen abgeschätzt werden (vergl. Unbehauen, [32]).

Die in einem praktischen Schaltungsaufbau gemessenen Zustandsgrößen stimmen aufgrund der beim Entwurf getroffenen Vernachlässigungen oft nicht ausreichend korrekt mit den zuvor berechneten und daher erwarteten Zustandsgrößen überein. Dies betrifft nicht nur die Beträge der Signalverläufe, sondern auch Verzerrungen, die darauf zurückzuführen sind, dass ggf. schon die angenommene Linearität der Bauelementeeigenschaften nicht erfüllt ist, was nicht nur Einfluss auf den Wirkungsgrad, sondern auch auf die prinzipielle Funktion der Schaltung haben kann.

Eine genauere Beschreibung der verwendeten Bauelemente könnte dazu beitragen, zu erwartende Probleme eines praktischen Aufbaus bereits in der Entwurfsphase zu erkennen und zu berücksichtigen. Zu diesem Zweck sind die verwendeten Bauelemente jedoch zunächst physikalisch zu analysieren, um anschließend ein mathematisches Modell formulieren zu können. Hierbei ist der Verwendungszweck des angestrebten Modells entscheidend.

- Die Optimierung einer Schaltung erfordert eine gute Simulation der Zustandsgrößen des Bauelementes wie sie im Schaltbild vorkommen. Oft können die nichtlinearen Eigenschaften zumindest durch Verwendung stückweise linearisierter Kennlinien nachgebildet werden.
- In eine Optimierung der Geometrie eines Bauelementes werden sowohl die Zustandsgrößen als auch die Feldgrößen in bestimmten Teilbereichen des Bauelementes einbezogen.

## 1 Formulierung der Problemstellung

Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zur physikalischen Analyse und mathematischen Modellbildung für die zuvor genannten Hochfrequenztransformatoren. Die resultierenden Modelle finden sowohl in einem Optimierungswerkzeug für die Geometrie der Transformatoren als auch bei der Modellierung elektrischer Ersatzschaltbilder der Bauelemente Verwendung; beides soll vom Schaltkreisentwickler in einem iterativen Entwurfsprozess anwendbar sein.

Zur Realisierung einer Schaltung werde ein Transformator mit bestimmten elektrischen und magnetischen Eigenschaften benötigt. Das Bauelement wird nach einfachen Grundregeln und begrenzter Berücksichtigung des späteren Betriebszustandes in der kompletten Schaltung entworfen. In der Regel werden hierfür die Datenblätter von Bauelementherstellern herangezogen, so dass eine Auswahl der Komponenten getroffen werden kann. Ein Optimierungswerkzeug dient nun zum Vergleich der geforderten mit den zu erwartenden Bauelementeeigenschaften, welche von Material, Geometrie und Betriebszustand abhängen. Diese zu erwartenden Eigenschaften sind aus der Perspektive eines Schaltkreisentwicklers zumeist in Form elektrischer Ersatzschaltbilder darstellbar. Also sollte ein Optimierungswerkzeug auf der Basis der Entwurfsparameter elektrische Ersatzschaltbilder modellieren, um dem Entwickler eine Vergleichsmöglichkeit zu geben und Nachbesserungen vornehmen zu können.

Die Ersatzschaltbilder sollten messtechnisch verifizierbar und auch für die Verwendung in elektrischen Schaltkreissimulatoren einsetzbar sein. Das elektrische Verhalten der betrachteten Transformatoren wird im Wesentlichen durch die physikalischen Effekte beschrieben, welche durch die Speicherung und Umwandlung elektrischer und magnetischer Energie im Ferritkern (und den Luftspalten), im Bereich der Wicklungen und in den Drahtwindungen und deren Isolation auftreten. Die Wirkung der Effekte soll in Form konzentrierter Elemente im Ersatzschaltbild des Bauelementes repräsentiert werden. An dieser Stelle sollen diese Effekte nur in drei Gruppen zusammengefasst werden. Eine feinere Unterteilung dieser Gruppen wird weiter unten physikalisch begründet.

**Verluste.** Die Differenz aus abgegebener und zugeführter elektrischer und magnetischer Leistung wird im Bauelement durch diverse physikalische Phänomene zumeist in Wärme umgewandelt und steht zur Funktion der entworfenen Schaltung nicht mehr zur Verfügung<sup>1</sup>. Die verschiedenen Beiträge zu dieser Verlustleistung werden im Ersatzschaltbild als Widerstände dargestellt.

**Induktive Kopplungen.** Die Speicherung von Energie im magnetischen Feld und die damit verbundene induktive Kopplung zwischen stromdurchflossenen Leitern des Bauelementes und der Umgebung wird im Ersatzschaltbild in Form von Induktivitäten wiedergegeben.

**Kapazitive Kopplungen.** Die Speicherung von Energie im elektrischen Feld und die Influenzwirkung zwischen den Leitern des Bauelementes und seiner Umgebung wird im Ersatzschaltbild durch Teilkapazitäten repräsentiert.

Das Auftreten physikalischer Effekte im Bauelement kann jedoch nicht immer speziellen Zustandsgrößen zugeordnet werden, welche an den Anschlüssen des Bauelementes definiert sind. Ersatzschaltbilder stellen vielmehr eine Abbildung der physikalischen Effekte in diese Zustandsgrößen dar. Diese Abbildung ist jedoch nicht eindeutig. So kann z.B. die Speicherung elektrischer

<sup>1</sup> Bei großer Wärmeentwicklung stellt die Abführung der Wärme den Entwickler ggf. vor zusätzliche Herausforderungen. Um eine mögliche thermische Mitkopplung und damit eine Zerstörung des Bauelementes schon im Entwicklungsstadium zu erkennen und zu verhindern kann eine thermische Modellierung des Bauelementes notwendig werden.

Energie (bzw. die Influenz) zwischen der Primär- und der Sekundärseite eines Transformators nicht eindeutig in eine Teilkapazität zwischen zwei der vier möglichen Anschlüsse der beiden Transformatorwicklungen abgebildet werden.

Der Verwendungszweck des angestrebten Modells spielt eine entscheidende Rolle. Meist wird kein komplettes Ersatzschaltbild formuliert werden können. Auch ein komplettes Ersatzschaltbild eines Transformators würde die induktiven und kapazitiven Kopplungen zu benachbarten Leitern nicht angemessen wiedergeben. Vereinfachungen sind erforderlich. Eine Konzentration auf einzelne der genannten Effekte hilft, induktive oder kapazitive Effekte oder Verlustmechanismen zunächst getrennt zu analysieren und zu optimieren. Gegebenenfalls sind nur qualitative Aussagen über die Geometrieabhängigkeit einzelner Effekte möglich.

## 1.1 Stationäre Betrachtung

Für die folgenden Berechnungen wird stets davon ausgegangen, dass die zu untersuchenden Bauelemente im stationären Zustand betrieben werden, auch wenn die erregenden Strom- und Spannungsverläufe dabei nicht sinusförmig sind. Es wird also davon ausgegangen, dass Einschwingvorgänge, wie sie etwa durch die Regelung während eines Überganges zwischen zwei Betriebszuständen einer Schaltung auftreten, bereits abgeklungen sind und dass Zustandsgrößen im untersuchten Bauelement für die weitere Betrachtung als periodisch vorausgesetzt werden.

Elektrische und magnetische Feldgrößen gehorchen linearen Differentialgleichungen. Zur einfachen Lösung dieser Differentialgleichungen ist die Annahme bereichsweise erforderlich, dass die verwendeten Materialien im Rahmen der folgenden Betrachtungen isotrop und linear sind

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.1 \text{ a})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.1 \text{ b})$$

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}. \quad (1.1 \text{ c})$$

Dies ist aber insbesondere für die magnetische Suszeptibilität  $\chi_m$  und folglich auch für die Permeabilität  $\mu$  aufgrund der Hysterese- und Sättigungserscheinung von Ferritmaterialien allgemein nicht erfüllt. Ein Vergleich verschiedener Ansätze zur Modellierung der Hysterese kann bei Brockmeyer [9] nachgeschlagen werden.

Es ist in der Leistungselektronik jedoch gängige Praxis, die Hysteresekurve bzw. die Kommutierungskurve stückweise zu linearisieren, da sonst eine Beschreibung mit Hilfe einer Induktivitätsmatrix bzw. Haupt- und Streuinduktivitäten als konzentrierte Elemente im Ersatzschaltbild nicht möglich ist. Zwei wesentliche Eigenschaften rechtfertigen eine stückweise Linearisierung der Kommutierungskurve.

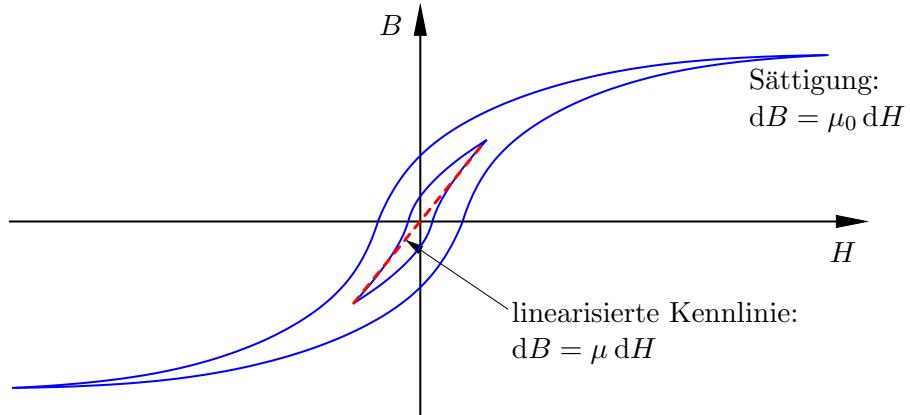
- Ein stabiler Betrieb einer Konverterschaltung ist nur möglich, solange die Sättigungsinduktion  $B_{\text{sat}}$  nicht überschritten wird.
- Ferritmaterialien sind weichmagnetisch, d.h. die Koerzitivfeldstärke  $H_C$  ist i.d.R. sehr gering (vergl. [34]). Dies gilt insbesondere bei geringer Aussteuerung  $\hat{B} < B_{\text{sat}}$  (oder gar  $\hat{B} \ll B_{\text{sat}}$ ).

Eine stückweise Linearisierung oder etwa eine aus der Definition der Amplitudenpermeabilität

$$\hat{B} = \mu_a \mu_0 \hat{H} \quad \Rightarrow \quad dB \approx \mu_a \mu_0 dH \quad (1.2)$$

## 1 Formulierung der Problemstellung

hergeleitete Linearisierung für periodische Erregungen (vergl. hierzu Abbildung 1.1) reicht für gewöhnlich aus, so dass im normalen Betrieb eines Bauelementes die Gl. (1.1 b) erfüllt ist. Es



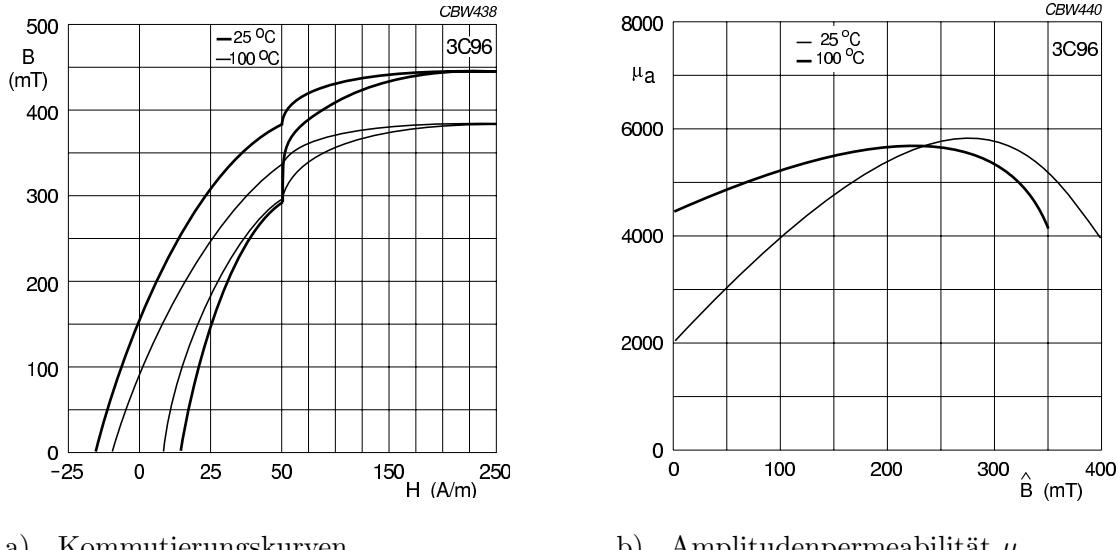
**Abbildung 1.1:** Kommutierungskurven für kleine und große Aussteuerung  $\hat{B}$  und linearisierte Kennlinie für kleine Auslenkung  $\hat{B}$ , unterhalb der Sättigungsinduktion

muss hierbei wiederholt werden, dass diese Linearisierung dazu dient, eine Induktivitätsmatrix aufzustellen zu können. Der Einfluss der nichtlinearen Ferriteigenschaften auf die Induktivitäten sinkt erfahrungsgemäß mit steigender Luftspaltlänge, welche üblicherweise so gewählt wird, dass die Sättigungsinduktion  $B_{\text{sat}}$  im Kern auch während der Einschaltphase und in Fehlersituationen nicht erreicht wird.

Die Abbildung 1.2 a) zeigt den ersten und zweiten Quadranten der Kommutierungskurven des Materials 3C96 der Herstellerfirma Ferroxcube für Umgebungs- und Materialtemperaturen 25 °C und 100 °C aus dem Datenblatt. Zur Aufzeichnung der Kurven wurde das Material jeweils bis weit in die Sättigung hinein erregt, so dass die Koerzitivfeldstärken für diese Erregung relativ groß sind. Der Hersteller gibt im Datenblatt [24] weiterhin die Amplitudenpermeabilität  $\mu_a$  für Wechselspannungserregung für verschiedene Amplituden  $\hat{B}$  der erreichten Induktion an (vergl. Abbildung 1.2 b). Bei harmonischer Erregung mit geringerer Aussteuerung  $\hat{B}$  werden magnetische Induktion  $B$  und magnetische Feldstärke  $H$  einer entsprechend kleineren Hystereseschleife folgen, sowohl mit kleinerer Remanenzinduktion als auch mit geringerer Koerzitivfeldstärke, so dass die Gleichung (1.1 b) für den betrachteten Betriebsfall ausreichend genau erfüllt wird (vergl. Abbildung 1.1). Eine Bestimmung der spezifischen Kernverluste ist mit magnetischen Feldstärken, welche mit Hilfe einer Linearisierung der Kommutierungskurve errechnet wurden, nicht möglich, da die Hysterese so nicht mehr berücksichtigt wird. Auch die Bestimmung von Wirbelstromverlusten im Kern mit Hilfe einer linearisierten Kommutierungskurve ist fehlerbehaftet. Bzgl. der Anwendbarkeit der Linearisierung (1.1 b) zur Bestimmung der magnetischen Feldstärke sei an dieser Stelle auf die Messergebnisse im Anhang verwiesen.

Die Linearität der Gl. (1.1 a) kann an dieser Stelle nicht bewiesen werden, zumal die elektrischen Eigenschaften des Isolationslackes von Kupferlackdrähten, wie sie für den Aufbau drahtgewickelter Spulen und Transformatoren üblicherweise verwendet werden, nicht dokumentiert sind<sup>2</sup>. Das Ohm'sche Gesetz Gl. (1.1 c) kann für die Drahtwindungen aus gut leitfähigem Material (i.d.R. Kupfer) als erfüllt angesehen werden. Auch für Ferritkerne werden in Datenbüchern

<sup>2</sup> Es wurden Messdaten aus [13, 14, 24, 34, 39] verwendet.



a) Kommutierungskurven

 b) Amplitudenpermeabilität  $\mu_a$ 
**Abbildung 1.2:** Auszug aus dem Datenblatt [24] des Ferritmaterials 3C96

(siehe [34]) üblicherweise nur konstante Werte für die spezifischen Leitfähigkeiten angegeben.

In den folgenden Abschnitten wird fast ausnahmslos unter den genannten Voraussetzungen und mit den Fouriertransformierten der Zustandsgrößen (Ladungen, Spannungen, Ströme) und Feldgrößen (Feldstärken, Flussdichten) gerechnet. Stellvertretend für die genannten Größen wird am Beispiel einer absolut integrierbaren Zeitfunktion  $f$  der korrespondierende Spitzenwertzeiger  $\underline{F}$  eingeführt (vergl. Unbehauen [33]):

$$\underline{F}(j\omega) \rightarrow f(t), \text{ so dass } f(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.3)$$

Die Transformationsvorschriften können der einschlägigen Literatur entnommen werden (z.B. [32, 33]). Auf die Einführung komplexer Materialkonstanten, wie sie in der Literatur oft zur Verlustberechnung eingeführt werden (vergl. [13, 14, 15, 39]), wird hier zunächst verzichtet.

## 1.2 Grundgleichungen der Elektrodynamik

In der klassischen Elektrodynamik werden die elektrischen und magnetischen Feldgrößen durch die Verknüpfung mit ihren Quellen und Wirbeln gemäß den *Maxwellgleichungen*

$$\operatorname{div} \underline{\vec{D}} = \rho_f \quad \text{Coulomb-Gesetz,} \quad (1.4 \text{ a})$$

$$\operatorname{rot} \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}} \quad \text{Induktionsgesetz,} \quad (1.4 \text{ b})$$

$$\operatorname{div} \underline{\vec{B}} = 0 \quad \text{Quellenfreiheit der magnetischen Induktion,} \quad (1.4 \text{ c})$$

$$\operatorname{rot} \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}_f + j\omega \underline{\vec{D}} \quad \text{Durchflutungsgesetz} \quad (1.4 \text{ d})$$

## 1 Formulierung der Problemstellung

und der *Kontinuitätsgleichung*

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{J}}_f = -j\omega \underline{\rho}_f \quad (1.5)$$

beschrieben. Der Index „f“ bezeichnet freie, eingeprägte Quellen, deren Entstehung nicht auf Polarisation oder Magnetisierung zurückzuführen ist.

Die Flussdichten  $\underline{\mathbf{D}}$ ,  $\underline{\mathbf{B}}$  und die Stromdichte  $\underline{\mathbf{J}}$  sind durch die Materialgleichungen (1.1 a) bis einschließlich dem Ohm'schen Gesetz (1.1 c) (hier für ruhende Leiter) mit den Feldstärken  $\underline{\mathbf{E}}$  und  $\underline{\mathbf{H}}$  verknüpft.

Die Einführung der Polarisation  $\underline{\mathbf{P}}$  gemäß [23]

$$\underline{\mathbf{D}} = \epsilon \underline{\mathbf{E}} = \epsilon_0 \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{P}} \quad \text{mit} \quad \operatorname{div} \underline{\mathbf{P}} = -\underline{\rho}_{\text{pol}} \quad (1.6)$$

wird in den folgenden Abschnitten zur Definition elektrischer Ersatzanordnungen benötigt. Zur Veranschaulichung wird das Coulomb-Gesetz, Gl. (1.4 a) mit Hilfe von Gl. (1.6) umgeformt

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \operatorname{div} \underline{\mathbf{E}} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{P}} = \underline{\rho} - \underline{\rho}_{\text{pol}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\rho} = \underline{\rho}_f + \underline{\rho}_{\text{pol}}, \quad (1.7)$$

wobei erstmalig die Linearität der dielektrischen Materialeigenschaften vorausgesetzt wird. Das Ergebnis legt die Folgerung nahe, dass durch Polarisation zusätzliche Quellen  $\underline{\rho}_{\text{pol}}$  entstehen.  $\underline{\rho}$  gibt die gesamte Raumladungsdichte im untersuchten Punkt des betrachteten Gebietes an.

Analog wird für die Definition magnetischer Ersatzanordnungen die Magnetisierung  $\underline{\mathbf{M}}$  (ebenfalls gemäß [23])

$$\underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}} = \mu_0 (\underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{M}}) \quad \text{mit} \quad \operatorname{rot} \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{J}}_{\text{mag}} \quad (1.8)$$

eingeführt. Unter der Annahme der Linearität der magnetischen Materialeigenschaften wird an dieser Stelle zur Veranschaulichung das Durchflutungsgesetz, Gl. (1.4 d) mit Hilfe von Gl. (1.6) und Gl. (1.8) umgeformt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{B}} - \operatorname{rot} \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{J}} - \underline{\mathbf{J}}_{\text{mag}} + j\omega \epsilon_0 \underline{\mathbf{E}} + j\omega \underline{\mathbf{P}} \quad \Rightarrow \\ \underline{\mathbf{J}} &= \underline{\mathbf{J}}_f + \underline{\mathbf{J}}_{\text{mag}} - j\omega \underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{J}}_f + \underline{\mathbf{J}}_{\text{mag}} + \underline{\mathbf{J}}_{\text{pol}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Auch in diesem Fall kann das Ergebnis als Überlagerung zusätzlicher, durch Magnetisierung entstandener Ströme  $\underline{\mathbf{J}}_{\text{mag}}$  und durch Polarisation entstandener Ströme

$$\underline{\mathbf{J}}_{\text{pol}} := -j\omega \underline{\mathbf{P}}$$

betrachtet werden.  $\underline{\mathbf{J}}$  gibt hier die gesamte Stromdichte im untersuchten Punkt des Gebietes an.

Bei einer Vielzahl von Problemstellungen in der Elektrodynamik können die felderregenden Quellen und Wirbel jedoch nicht ohne weiteres angegeben werden, so dass keine direkte analytische Berechnung der Feldgrößen aus den Quellen und Wirbeln gemäß Gln. (1.4 a...d) oder äquivalenter integraler Gleichungen möglich ist. Zur Lösung feldtheoretischer Problemstellungen wird stattdessen oft auf das skalare elektrische Potential  $\underline{\varphi}_e$  und das magnetische Vektorpotential  $\underline{\mathbf{A}}$  gemäß den Definitionen

$$\underline{\mathbf{E}} = -\operatorname{grad} \underline{\varphi}_e - j\omega \underline{\mathbf{A}}, \quad (1.10 \text{ a})$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \underline{\mathbf{A}} \quad (1.10 \text{ b})$$

zurückgegriffen, welche darauf basieren, dass Gradientenfelder wirbelfrei ( $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi_e = \vec{0}$ ) und Wirbelfelder quellenfrei sind ( $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$ ), so dass die Gleichungen (1.4 a...d) erfüllt sind und die beiden Potentiale die Felder vollständig beschreiben (vergl. [23]). Anstelle der Verteilung der Quellen können in gegebenen Problemstellungen oft nur Aussagen über die Feldstärken und die Potentiale an Übergängen zwischen Teilbereichen unterschiedlicher Materialeigenschaften getroffen werden.

Die Abbildung 1.3 zeigt eine Grenzfläche  $A$  zwischen zwei Teilbereichen 1 und 2 mit verschiedenen Materialeigenschaften. An der Grenzfläche  $A$  sind die Feldgrößen über Randbedingungen miteinander verknüpft (vergl. hierzu Hafner [18] oder auch Kröger [23]). Zur Erläuterung der Randbedingungen werden zunächst die Grenzwerte  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$  einer vektorwertigen Funktion  $\vec{F}(\vec{r})$  auf beiden Seiten einer Grenzfläche  $A$  zwischen zwei Teilbereichen 1 und 2 eingeführt. Der Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}$  zeige normal auf die Grenzfläche  $A$  vom Teilbereich 2 in den Teilbereich 1.  $\vec{F}$  steht für die Feldstärken  $\underline{\underline{E}}$ ,  $\underline{\underline{H}}$  und die Flussdichten  $\underline{\underline{D}}$ ,  $\underline{\underline{B}}$ . Dafür existieren in der Nähe eines beliebigen Punktes  $P_A$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_A$  auf der Grenzfläche  $A$  die beidseitigen Grenzwerte entsprechend der Definition

$$\vec{F}_1 = \vec{F}\Big|_{A^+} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \vec{F}(\vec{r}_A + |\xi| \vec{n}), \quad (1.11 \text{ a})$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}\Big|_{A^-} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \vec{F}(\vec{r}_A - |\xi| \vec{n}). \quad (1.11 \text{ b})$$

Für spätere Betrachtungen wird an dieser Stelle der Differenzenoperator  $\vec{L}_{(A)}$  eingeführt, für den im Punkt  $P_A$  auf der Grenzfläche  $A$  die Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \vec{L}_{(A)} \odot \vec{F}(\vec{r}_A) &:= \vec{n} \cdot \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ \vec{F}\{\vec{r}_A + |\xi| \vec{n}\} - \vec{F}\{\vec{r}_A - |\xi| \vec{n}\} \right] \\ &:= \vec{n} \cdot (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) \end{aligned} \quad (1.12 \text{ a})$$

und

$$\begin{aligned} \vec{L}_{(A)} \otimes \vec{F}(\vec{r}_A) &:= \vec{n} \times \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ \vec{F}\{\vec{r}_A + |\xi| \vec{n}\} - \vec{F}\{\vec{r}_A - |\xi| \vec{n}\} \right] \\ &:= \vec{n} \times (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) \end{aligned} \quad (1.12 \text{ b})$$

mit der Funktion  $\vec{F}$  definiert werden.

Die Abbildung 1.3 veranschaulicht die vorgenommenen Definitionen für die unmittelbare Umgebung einer Grenzfläche zweier felderfüllter Teilbereiche. Aus den Feldgleichungen (1.4 a...d) folgen unter bestimmten Voraussetzungen die Randbedingungen für Normal- und Tangentialkomponenten der Feldgrößen auf der Grenzfläche  $A$

$$\vec{L}_{(A)} \odot \underline{\underline{D}} = \vec{n} \cdot (\underline{\underline{D}}_1 - \underline{\underline{D}}_2) = \sigma_f, \quad (1.13 \text{ a})$$

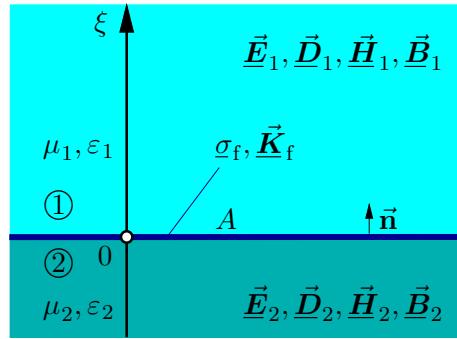
$$\vec{L}_{(A)} \otimes \underline{\underline{E}} = \vec{n} \times (\underline{\underline{E}}_1 - \underline{\underline{E}}_2) = \vec{0}, \quad (1.13 \text{ b})$$

$$\vec{L}_{(A)} \odot \underline{\underline{B}} = \vec{n} \cdot (\underline{\underline{B}}_1 - \underline{\underline{B}}_2) = 0, \quad (1.13 \text{ c})$$

$$\vec{L}_{(A)} \otimes \underline{\underline{H}} = \vec{n} \times (\underline{\underline{H}}_1 - \underline{\underline{H}}_2) = \underline{\underline{K}}_f, \quad (1.13 \text{ d})$$

wobei hier auf die Herleitungen in [18] bzw. [23] verwiesen wird. Der freie Ladungsbelag  $\sigma_f$  und

## 1 Formulierung der Problemstellung



**Abbildung 1.3:** Grenzfläche  $A$  zweier felderfüllter Teilbereiche 1 und 2

der freie Strombelag  $\vec{K}_f$  sind nur auf der Grenzfläche  $A$  verteilt (vergl. Abbildung 1.3).

Unter der Voraussetzung, dass bei einer Problemstellung mit unbekannter Quellenverteilung alle Ströme dem Ohm'schen Gesetz Gl. (1.1 c) gehorchen, werden zur Lösung die Feldgleichungen (1.4 a...d) mit den Materialgleichungen (1.1 a...c) verknüpft und in Differentialgleichungen für die in Gln. (1.10 a, b) definierten Potentiale umgeformt

$$\Delta \underline{\vec{A}} - j\omega \mu \kappa \underline{\vec{A}} - (j\omega)^2 \mu \epsilon \underline{\vec{A}} = \text{grad} \left( \text{div} \underline{\vec{A}} + \mu \kappa \varphi_e + j\omega \mu \epsilon \varphi_e \right), \quad (1.14 \text{ a})$$

$$\underline{\varphi}_e = -j\omega \text{div} \underline{\vec{A}} - \frac{\rho_f}{\epsilon}. \quad (1.14 \text{ b})$$

Nach wie vor sind weder die Quellen  $\rho_f$  des elektrischen Feldes noch die Quellen des magnetischen Vektorpotentials  $\underline{\vec{A}}$  beschrieben. Das elektrische Feld einer eventuell vorhandenen, eingeprägten freien Ladungsverteilung  $\rho_f$  kann auf jeden Fall mit Hilfe integraler Feldgleichungen bestimmt und aus den Differentialgleichungen (1.14 a, b) entkoppelt werden.

Da bei diesen Differentialgleichungen im Frequenzbereich wiederholt die Korrespondenzen zur ersten und zweiten Ableitung nach der Zeit im Zusammenhang mit den Materialeigenschaften auftauchen, werden hier die Definitionen

$$\underline{\alpha}^2 := j\omega \mu \kappa, \quad \text{der sogenannten Skinkonstante } \underline{\alpha}, \quad (1.15 \text{ a})$$

$$\beta^2 := -(j\omega)^2 \mu \epsilon, \quad \text{der Wellenkonstante } \beta \text{ und} \quad (1.15 \text{ b})$$

$$\underline{\gamma}^2 := \underline{\alpha}^2 - \beta^2, \quad \text{der komplexen Wellenkonstante } \underline{\gamma} \quad (1.15 \text{ c})$$

eingeführt, um den Schreibaufwand etwas abzukürzen.

Anhand der Beträge dieser Konstanten kann für eine Problemstellung leicht abgeschätzt werden, ob die Leitungsstromdichte  $|\vec{J}|$  oder die Verschiebungsstromdichte  $|j\omega \vec{D}|$  und damit die Wellenausbreitung überwiegt, worin auch die Bezeichnung der Konstante  $\beta$  als Wellenkonstante begründet ist.

Je nach Problemstellung können geeignete Eichungen für die elektrodynamischen Potentiale angewendet werden (vergl. [23]), so dass die Differentialgleichungen (1.14 a, b) entkoppelt werden können.

- Die *Lorenz-Konvention* ist eine Eichung für die Quellen von  $\vec{A}$

$$j\omega \operatorname{div} \vec{A} + \gamma^2 \varphi_e = 0. \quad (1.16)$$

Sie führt auf die komplexen *Wellengleichungen* für beide Potentiale

$$\Delta \underline{\vec{A}} - \underline{\gamma}^2 \underline{\vec{A}} = \vec{0} \quad (1.17 \text{ a})$$

$$\Delta \underline{\varphi}_e - \underline{\gamma}^2 \underline{\varphi}_e = \frac{\rho_f}{\epsilon}. \quad (1.17 \text{ b})$$

Sie können sowohl bei überwiegendem Leitungsstrom als auch bei überwiegender Wellenausbreitung verwendet werden.

- Die Eichung

$$j\omega \underline{\vec{A}}' = -\operatorname{grad} \underline{\varphi}_e - j\omega \underline{\vec{A}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{A}}', \quad (1.18)$$

wird üblicherweise zur Lösung von Problemstellungen mit überwiegendem Leitungsstrom bevorzugt, da in den Volumina bereichsweise keine Differentialgleichung für das elektrische Potential zu lösen ist. Es verbleibt eine Wellengleichung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\vec{A}}' + \underline{\gamma}^2 \underline{\vec{A}}' = \vec{0}. \quad (1.19)$$

Wird eine geeignete Konvention appliziert, so ist die Problemstellung mit den Gln. (1.13 a...d) und (1.14 a, b) schon fast vollständig beschrieben und die Aufgabenstellung hat sich hin zur Bestimmung der Lösungsfunktionen der Differentialgleichungen (1.14 a, b) bzw. Gln. (1.17 a, b) oder Gl. (1.19) verlagert. Oft verbleibt ein konstanter Anteil eines Potentials zunächst unbestimmt, wenn nicht zusätzlich geeignete Annahmen vereinbart werden, wie etwa

- die Kenntnis des Potentials in einem bestimmten Punkt oder zumindest
- die Annahme regulärer (bzw. endlicher) Feldgrößen im gesamten betrachteten Gebiet, frei von diskreten Quellen.

## 1.3 Verlustmechanismen

### 1.3.1 Kernverluste

Die betrachteten Hochfrequenztransformatoren werden aus lackierten Kupferdrähten und hochpermeablen Ferritkernen aufgebaut. Die Wickelkörper seien an dieser Stelle vernachlässigt. Auch wenn die lineare Materialgleichung Gl. (1.1 b) für einige Problemstellungen ausreichend gut erfüllt ist, so kann der nichtlineare Zusammenhang zwischen magnetischer Feldstärke und magnetischer Induktion, wie er für zwei Aussteuerungen prinzipiell in Abbildung 1.1 skizziert ist, insbesondere für die Abschätzung der Ummagnetisierung im Ferritkern nicht vernachlässigt werden. Je größer die Aussteuerung  $\hat{B}$  im Ferritkern wird, desto größer sind sowohl Remanenzinduktion als auch Koerzitivfeldstärke. Die von der Hysteresekurve umschlossene Fläche steigt mit der Aussteuerung; sie wird oft als Maß für die Energie herangezogen, welche zur Magnetisierung des Materials verbraucht wird. Die Form der Hysteresekurve hängt auch von der Arbeitsfrequenz  $f$  und der Temperatur  $\vartheta$  ab (siehe [13]). Die Materialeigenschaften werden von den Herstellern in Datenblättern (z.B. [24]) und Datenbüchern (z.B. [34]) für typische Betriebsfälle angegeben.

## 1 Formulierung der Problemstellung

Neben den Ummagnetisierungsverlusten führt auch die nicht verschwindende elektrische Leitfähigkeit  $\kappa$  von Ferritmaterien zu weiteren Verlusten im Kern. Im elektromagnetischen Wechselfeld sind die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  über das Induktionsgesetz Gl. (1.4 b) linear miteinander verknüpft. Auch das Ohm'sche Gesetz Gl. (1.1 c) ist linear, so dass im zeitlichen Mittel im Kernvolumen  $V_\mu$  der spezifischen Leitfähigkeit  $\kappa$  eine Leistung

$$P_J = \frac{1}{2} \iiint_{V_\mu} \hat{J}_f \hat{E} \, dV = \frac{1}{2} \iiint_{V_\mu} \frac{1}{\kappa} \hat{J}_f^2 \, dV \quad (1.20)$$

in Joule'sche Wärme umgewandelt wird. Auch wenn die Leitfähigkeit stark über der Frequenz variiert, können die Wirbelstromverluste auf diese Art berechnet und die spektralen Anteile linear überlagert werden.

### 1.3.2 Wicklungsverluste

Auch die Drahtwindungen sind nicht ideal. Eine Wicklung bestehe aus einem Draht der Querschnittsfläche  $A_L$  und der Länge  $l_L$ . Aufgrund der endlichen Leitfähigkeit wird auch in ihr Joule'sche Wärme gemäß Gl. (1.20) erzeugt. Diese Verlustleistung kann in drei Anteile gruppiert werden.

**Ohm'sche Verluste.** Unter der Annahme der Strom verteile sich homogen über den gesamten Leiterquerschnitt kann die Ohm'sche Verlustleistung gemäß Gl. (1.20) berechnet werden.

**Skinverluste.** Die zur Berechnung der Ohm'schen Verluste getroffene Annahme der homogenen Stromverteilung trifft bei dynamischer Erregung nicht zu. Stattdessen hat der dem Leiter eingeprägte Stromverlauf ein dynamisches elektromagnetisches Feld sowohl innerhalb als auch außerhalb des betrachteten Leiters zur Folge. Im gesamten Raum sind elektrische und magnetische Feldgrößen des betrachteten Leiters über das Induktionsgesetz miteinander verknüpft. Im Leiter kommt die Verknüpfung durch das Ohm'sche Gesetz hinzu. Wirbelströme werden induziert, die wiederum aufgrund der endlichen Leitfähigkeit zu Verlusten führen.

**Proximityverluste.** In einem Mehrleitersystem befindet sich jeder Leiter im externen elektromagnetischen Feld der benachbarten Leiter, welches im betrachteten Leiter über die Verknüpfung durch Induktions- und Ohm'sches Gesetz Wirbelströme induziert und somit zu Verlusten führt.

Die Ohm'schen Verluste entstehen gleichermaßen bei Gleichstrom und Wechselstrom, während Skin- und Proximityverluste nur bei Wechselstrom auftreten. Aufgrund der Linearität der Feld- und Materialgleichungen im leitfähigen Draht können die spektralen Beiträge jedoch linear überlagert werden.

Zu einer vollständigen Verlustbetrachtung ist auch das Volumen zwischen den Windungen und dem Ferritkern einzubeziehen. Die Leiter sind i.d.R. durch einen Lack (oder evtl. durch Polyvinylchlorid) voneinander isoliert. Die elektrischen Eigenschaften (wie etwa die elektrische Permittivität  $\epsilon_r$  und der Verlustfaktor  $\tan \delta_\epsilon$ ) sind i.d.R. nicht dokumentiert [13]. Insbesondere Hochspannungstransformatoren werden zur Erhöhung der Durchschlagfestigkeit oft mit Kunstarzen oder Paraffinen vergossen, deren Verlustfaktor  $\tan \delta_\epsilon$  jedoch nicht unbedingt vernachlässigbar ist.

## 1.4 Induktive Kopplungen

An dieser Stelle sollen die nichtidealen Eigenschaften eines ruhenden, induktiven Bauelementes der Einfachheit halber vernachlässigt werden. In der integralen Form (A.3 b) des Induktionsgesetzes (1.4 b)

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_A (j\omega \vec{B}) \cdot d\vec{a} = - \oint_{\partial A} j\omega \vec{A} \cdot d\vec{s} = - j\omega \Phi_A \quad (1.21)$$

ist die Definition der Induktivität als elektrische Bauelementeigenschaft enthalten. Die Fläche  $A$  werde von der Wicklung  $v$  umschlossen und von Flussbeiträgen  $\Phi_{vw}$  mehrerer freier Stromquellen  $I_1, \dots, I_W$  durchdrungen. Jeder Strom  $I_w \in \{I_1, \dots, I_W\}$  erzeugt ein Vektorpotential  $\vec{A}_w$ . In der untersuchten Windung wird die Spannung

$$\underline{U}_v^{(\text{ind})} = \sum_{w=1}^W j\omega \Phi_{vw} = \sum_{w=1}^W \left( \oint_{C_v} j\omega \vec{A}_w \cdot d\vec{s}_v \right) = \sum_{w=1}^W L_{vw} (j\omega I_w) \quad (1.22)$$

induziert. Bei vernachlässigbarer Wellenausbreitung sind die Induktivitäten  $L_{vw}$  in guter Näherung nur von der Geometrie des Bauelementes und dem Material des Ferritkernes abhängig. Die Frequenzabhängigkeit der Induktivität steht einerseits im Zusammenhang mit der Frequenzabhängigkeit der Permeabilität des Ferritkernes, andererseits aber auch mit der lokalen Verteilung der magnetischen Energiedichte in den Windungen. Skin- und Proximityeffekt sind die Ursachen für eine Veränderung der Stromverteilung mit zunehmender Arbeitsfrequenz. Die resultierende Änderung der Verteilung der magnetischen Energiedichte ist insbesondere bei dünnen Drahtquerschnitten im Vergleich mit den umwickelten Windungsflächen vernachlässigbar, da dann der Anteil der koppelnden magnetischen Flüsse an der Induktivität größer ist als der Anteil der in den Leitervolumina gespeicherten magnetischen Energie.

Die Formulierung der induzierten Spannungen gemäß Gl. (1.22) für alle Leiter eines Systems führt zu einer vollständigen Verknüpfung der Quellströme mit den induzierten Spannungen mit Hilfe der sogenannten Induktivitätsmatrix. Für die rechnergestützte Simulation der magnetischen Kopplungen eines Transformatoren ist diese Beschreibung hinreichend. Jedes Element der Induktivitätsmatrix  $\mathbf{L}$  ist ein Maß für die magnetische Kopplung zwischen einem verursachenden Strom und einer Leiterschleife.

Oft wird vom Schaltungsentwickler jedoch eine andere Darstellung der Induktivitäten bevorzugt. Die Einteilung in Haupt- und Streuinduktivitäten repräsentiert die magnetischen Streuflüsse sowie die koppelnden Flüsse. Der Vorteil liegt in der einfacheren Darstellung in Form eines Ersatzschaltbildes, dessen Elemente aus der Induktivitätsmatrix berechnet werden können (vergl. [32]). Für Transformatoren mit zwei Wicklungen ist ein solches Ersatzschaltbild jedoch nicht eindeutig. Infolge der lediglich drei unabhängigen Werte  $L_{11}$ ,  $L_{12}$  und  $L_{22}$  in der Induktivitätsmatrix kann z.B. das Übersetzungsverhältnis frei gewählt werden. Auch Ersatzschaltbilder mit Haupt- und Streuinduktivitäten für Transformatoren mit vier Wicklungen und mehr sind nicht eindeutig.

## 1.5 Kapazitive Kopplungen

Für die folgenden Erklärungen wird ein verlust- und induktivitätsfreies Mehrleitersystem betrachtet. Bei genauer Betrachtung des Coulomb-Gesetzes (1.4 a) in der integralen Form (A.3 a)

$$\iint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a} = \iiint_V \rho_f dV = Q_f^{(V)} = \Psi_{\partial V} \quad (1.23)$$

fallen zwei Punkte auf.

- Wird das Volumen  $V$  eines einzelnen Leiters  $v$  in einem Mehrleitersystem betrachtet, so bezeichnet  $Q_f^{(V)}$  die vollständige freie, eingeprägte Ladung im betrachteten Leiter.
- Wird der restliche Raum  $V_\infty \setminus V$  mit Hilfe des Coulomb-Gesetzes (1.23) betrachtet, so muss dort die Ladung  $-Q_f^{(V)}$  auf alle anderen Leiter und die unendlich ferne Hülle verteilt sein.

Die gesamte Ladung  $Q_v$  des Leiters  $v$  ist folglich nicht nur durch das elektrische Potential  $\varphi_{ev}$  des Leiters selbst eingeprägt, sondern durch die elektrischen Flussbeiträge aller Leiter und somit durch alle elektrischen Potentiale und die Geometrie der gesamten Anordnung

$$Q_v = \sum_{w=1}^W \left( \iint_{\partial V_v} \vec{D}_w \cdot d\vec{a}_v \right) = \sum_{w=1}^W \Psi_{vw} = \sum_{w=1}^W k_{vw} \varphi_{ew}. \quad (1.24)$$

Der elektrische Fluss

$$\Psi_{vw} = \iint_{\partial V_v} \vec{D}_w \cdot d\vec{a}_v = k_{vw} \varphi_{ew} \quad (1.25)$$

geht genau dann vom Leiter  $v$  aus, wenn ausschließlich der Leiter  $w$  das Potential  $\varphi_{ew}$  besitzt und alle anderen Potentiale im System verschwinden. Ein Kapazitätskoeffizient  $k_{vw}$  ist folglich ein Maß für den (auf das Potential normierten) elektrischen Fluss  $\Psi_{vw}$  zwischen zwei Leitern. Der Kapazitätskoeffizient  $k_{vv}$  beschreibt den gesamten Fluss des Leiters  $v$  vom Leiter weg. Zur rechnergestützten Simulation der kapazitiven Kopplungen eines Mehrleitersystems reicht die sogenannte Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K}$ , bestehend aus den Kapazitätskoeffizienten des Systems aus.

I.d.R. wird jedoch mit den Spannungen des Netzwerks und nicht mit den absoluten Potentiaien gerechnet. Beim Übergang von der Rechnung mit Potentialen zur Rechnung mit Potentialdifferenzen kann auch die Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K}$  in eine Matrix  $\mathbf{C}$  aus Teilkapazitäten umgeformt werden. Beim Übergang vom Mehrleitersystem zum Ersatzschaltbild eines Bauelementes wird die elektrische Energiespeicherung bzw. die elektrische Influenzwirkung zwischen Leitergruppen in wenige Kapazitäten konzentriert. Bei der Untersuchung von Hochfrequenztransformatoren interessieren besonders die Kapazitäten

- parallel zu den einzelnen Wicklungen, sowie
- zwischen den verschiedenen Wicklungen und
- zwischen den Wicklungen und dem Ferritkern bzw. der Schaltungsmasse.

Die im elektrischen Feld  $\vec{\underline{E}}$  (mit der konjugiert komplexen elektrischen Flussdichte  $\vec{\underline{D}}^* = \varepsilon \vec{\underline{E}}^*$ ) gespeicherte Energie ist mit den Teilkapazitäten und den Spannungen des Systems verknüpft

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{V_\infty} \vec{\underline{E}} \cdot \vec{\underline{D}}^* dV = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^W \sum_{w=1}^W C_{vw} |\underline{U}_{vw}|^2 . \quad (1.26)$$

Zur Ermittlung der Kapazitäten werden zunächst die Leiterpotentiale bzw. die Spannungen im Mehrleitersystem aus den entsprechenden Ladungen berechnet. Im betrachteten Frequenzbereich kann die Wellenausbreitung vernachlässigt werden und so ist zur Ermittlung der elektrischen Feldverteilung  $\vec{\underline{E}}$  im Bereich außerhalb der Leiter die Laplace-Gleichung für das elektrische Potential  $\varphi_e$  zu erfüllen

$$\Delta \varphi_e = 0 . \quad (1.27)$$

Dies kann für einfache Anordnungen evtl. noch analytisch erfolgen. Schon für rotationssymmetrische Mehrleitersysteme ist das allgemein jedoch nicht mehr möglich.

Beispiele für diese energiebasierte Kapazitätsberechnung finden sich in der Literatur. Koch setzt für die Berechnung der Lagenkapazität einfacher drahtgewickelter Spulen in [22] einfache Geometrien voraus, so dass im Zwischenraum eng benachbarter Drähte einfache Ansätze für die elektrische Feldstärke herangezogen werden können. Die Integration gemäß Gl. (1.26) kann unter den genannten Voraussetzungen auf kleine Teilbereiche beschränkt und analytisch durchgeführt werden. Auf diese Weise wird die elektrische Energie zwischen eng benachbarten Wicklungslegen berechnet. Abschließend werden die Teilkapazitäten der einzelnen Lagen einer Spulenwicklung mit den Windungszahlenverhältnissen der Lagen auf die beiden Anschlüsse der Spule transformiert. Der Vorteil des Verfahrens liegt in der Vermeidung einer numerischen Lösung sowohl der Feldgleichung als auch der Integration über die Energiedichte.

Aufgrund der strengen Voraussetzungen ist das Verfahren jedoch nur eingeschränkt anwendbar. Insbesondere dann, wenn die Leiter nicht mehr eng benachbart sind, kann keine analytische Näherung für die Feldfunktionen im Raum zwischen den Leitern angegeben werden. Zur Verringerung der Kapazität einer Spule müssen die Abstände zwischen den Leitern jedoch vergrößert werden. Dies wird z.B. durch Kammerwicklung erreicht. Für jede Kammer sind die Voraussetzungen erfüllt und es können die Teilkapazitäten der Kammerwicklungen berechnet werden. Je näher jedoch die Kammern benachbart sind, desto stärker sind die Kapazitäten zwischen den Kammern zu berücksichtigen. Das Verfahren von Koch ist hierfür nicht geeignet. Auch für die Berechnung der Kapazitäten zwischen verschiedenen Wicklungen eines Transformators ist das Verfahren nur bei Lagenwicklung geeignet.

Im allgemeinen Fall, wenn die Feldgleichung nicht analytisch gelöst werden kann, wird oft auf Feldberechnungsprogramme zurückgegriffen, welche auf der *Methode der Finiten Elemente (FEM)* basieren. Auch dreidimensionale Problemstellungen sind damit lösbar, jedoch ist eine Vorstellung des zu erwartenden Feldverlaufes schon vor der Lösung erforderlich, um eine geeignete Diskretisierung des Leiter-Zwischenraumes durchführen zu können.

- Ist die Diskretisierung zu grob, weicht die numerisch ermittelte Lösung zwischen den Stützstellen der Diskretisierung evtl. zu stark von der tatsächlichen Lösung ab.
- Eine sehr feine Diskretisierung führt ggf. auf eine hinreichend genaue Lösung, jedoch steigen sowohl Speicherbedarf als auch der Rechenzeitaufwand dramatisch an.

Um plausible Ergebnisse mit FEM-Programmen zu erzielen ist eine große Erfahrung erforderlich.

## 1.6 Zusammenfassung

Die dominierenden physikalischen Effekte in einem Hochfrequenztransformator können an den Anschlüssen des Bauelementes messtechnisch als Spannungen und Ströme nachgewiesen werden. I.d.R. werden die Auswirkungen verschiedener Effekte sich überlagern, so dass je nach Betriebszustand aber auch nach Komplexität des Bauelementes nur bedingt eine isolierte Betrachtung der einzelnen Effekte vorgenommen werden kann. So spielt bei der Messung einer einfachen Spule sowohl die Verlustleistung als auch die Wickelkapazität eine Rolle. Es gilt zur Messung der Induktivität den Betriebszustand überwiegender magnetischer Kopplungen einzustellen, d.h. bei sinusförmiger Erregung des Bauelementes sollte der Strom der Klemmenspannung mit einer Phasenverschiebung von möglichst genau  $90^\circ$  folgen. Aus den Amplituden  $\hat{u}$ ,  $\hat{i}$  und der Arbeitsfrequenz  $f$  kann dann einfach die Induktivität abgeschätzt werden  $L = \hat{u}/2\pi f \hat{i}$ . Zur Messung der Verluste wird das Bauelement i.d.R. in der Resonanz betrieben, da dort keine Energie gespeichert wird und somit Strom und Spannung in Phase sind. Hieraus folgt jedoch keine Aussage über frequenzabhängige Verluste. Im Ersatzschaltbild werden diese Verluste durch einen Ohm'schen Widerstand repräsentiert, z.B.  $R = \hat{u}/\hat{i}$ . Verluste können jedoch in der Wicklung oder im Kern auftreten und werden im Ersatzschaltbild unterschiedlich repräsentiert, obwohl eine getrennte Messung oft nicht möglich ist. Die Kapazität des Schwingkreises kann aus der Resonanzfrequenz  $f_0$  und der Induktivität bestimmt werden  $C = 1/(4\pi^2 f_0^2 L)$ .

Die Berechnung der Elemente im Ersatzschaltbild kann über die im zeitlichen Mittel gespeicherte oder verbrauchte Energie erfolgen, sowie mit Hilfe von Induktionsgesetz (1.21) und Coulomb-Gesetz (1.23). In jedem Fall ist die Kenntnis der Feldgrößen in Teilbereichen des Bauelementes erforderlich. Diese sind über die Materialgleichungen (1.1 a...c), die Maxwellgleichungen (1.4 a...d) und die Kontinuitätsgleichung (1.5) miteinander verknüpft. Mit Ausnahme der Berechnung der spezifischen Kernverluste (Ummagnetisierungsverluste) werden die Materialgleichungen vereinfachend als linear angenommen und es wird im Frequenzbereich gerechnet.

Ist eine direkte Berechnung der Feldgrößen aus den Maxwellgleichungen nicht möglich, so bleiben sie jedoch stets gültig und geeignete Verknüpfungen der einzelnen Gleichungen führen zu den Feldgleichungen (1.14 a, b). An Grenzbereichen der Materialeigenschaften erfüllen die Feldgrößen die Randbedingungen (1.13 a...d). Jede Problemstellung ist somit im gesamten Raum in Form eines Randwertproblems für die elektrodynamischen Potentiale  $\varphi_e$  und  $\vec{A}$  beschrieben, welche eindeutig bestimmt werden können.

Ein größeres Problem stellt die Kopplung der beiden Feldgleichungen (1.14 a, b) dar. Es wird daher möglichst versucht, die drei dominierenden physikalischen Effekte getrennt voneinander zu betrachten und erst im Ersatzschaltbild wieder zu überlagern.

Zur Berechnung von Verlusten und induktiven Kopplungen wird im Rahmen dieser Arbeit vorausgesetzt, dass aufgrund der hohen elektrischen Leitfähigkeiten der Materialien keine freien Ladungsträger räumlich eingeprägt seien. (Auch der Raum außerhalb leitfähiger Materialien sei frei von eingeprägten Ladungen.) Weiterhin sind für die betrachteten Arbeitsfrequenzen die Wellenlängen auch im Material sehr viel größer als die Bauelementeabmessungen. Es kann daher angenommen werden, dass der leitungsgebundene Strom gegenüber der Wellenausbreitung stark überwiegt. Mathematisch ist dies in der Eichung (1.18) ausgedrückt und führt zur Begrenzung der Problemstellung auf eine Feldgleichung (1.19).

Zur Berechnung der kapazitiven Kopplungen wird angenommen, dass die Kapazitäten un-

abhängig von der Arbeitsfrequenz sind. Daher reicht eine Betrachtung der Feldgleichung (1.14 b) für den elektrostatischen Fall  $f = 0$  aus. Zur Untersuchung der Teilkapazitäten eines Mehrleiter-systems können einerseits die Leiterpotentiale eingeprägt werden. Es ist dann zu untersuchen, welches Feld sich zwischen den Leitern einstellt und welche Ladungen influenziert werden. Andererseits können den Leitern die Ladungen eingeprägt werden, um anschließend zu untersuchen, welche Potentiale sich einstellen werden.

In beiden Fällen können die Ursachen (Ströme, Ladungen) jedoch als bekannt vorausgesetzt werden, deren Felder unter den genannten Voraussetzungen mit Hilfe von Integralgleichungen berechnet werden können. In den folgenden Abschnitten werden geeignete Verfahren vorgestellt und ausgewählt, um den numerischen Aufwand zur Lösung der gegebenen Problemstellungen zu minimieren. Dies kann durch Ermittlung von Ersatzanordnungen (z.B. durch Anwendung von Spiegelungsverfahren) oder die Isolierung bekannter und unbekannter Teillösungen der Feldgleichungen mit entsprechender Anpassung der Randbedingungen erfolgen. Abschließend werden Verfahren vorgestellt, um aus den ermittelten Feldgrößen die Elemente im Ersatzschaltbild zu berechnen.

## *1 Formulierung der Problemstellung*

## 2 Mathematische Hilfsmittel zur Feldberechnung

Wie in Kapitel 1 erläutert, besteht die zentrale Aufgabe bei der Modellierung von Ersatzschaltbildern für Hochfrequenztransformatoren in der Berechnung der elektromagnetischen Feldgrößen  $\underline{\vec{E}}$ ,  $\underline{\vec{D}}$ ,  $\underline{\vec{H}}$  und  $\underline{\vec{B}}$ . In diesem Abschnitt sollen geeignete Methoden vorgestellt werden. Abschließend wird eine Auswahl bzw. eine Kombination von Verfahren getroffen. Auf dieser Basis von Verfahren wird in den folgenden Kapiteln die Bestimmung der Ersatzschaltbildelemente erläutert.

### 2.1 Integralgleichungen

Die in Abschnitt 1.2 zusammengefassten Maxwellgleichungen (1.4 a...d) verknüpfen die Feldgrößen mit ihren Quellen und Wirbeln. Gibt die Funktion

$$\begin{aligned} q &= \operatorname{div} \vec{F} && \text{die Quellen und die Funktion} \\ \vec{w} &= \operatorname{rot} \vec{F} && \text{die Wirbel} \end{aligned}$$

eines beliebigen Vektorfeldes  $\vec{F}$  im unendlichen Volumen  $V_\infty$  an, so kann umgekehrt nach dem *Satz von Helmholtz* das Vektorfeld aus seinen Quellen und Wirbeln bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}_P) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{q(\vec{r}_Q)(\vec{r}_P - \vec{r}_Q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|^3} dV_Q \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{\vec{w}(\vec{r}_Q) \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|^3} dV_Q. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Das Feld  $\vec{F}$  ist demnach eine Überlagerung

$$\vec{F} = \vec{F}^{(q)} + \vec{F}^{(w)} \tag{2.2 a}$$

## 2 Mathematische Hilfsmittel zur Feldberechnung

aus dem wirbelfreien Gradientenfeld

$$\begin{aligned}\vec{F}^{(q)}(\vec{r}_P) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{q(\vec{r}_Q)(\vec{r}_P - \vec{r}_Q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|^3} dV_Q \\ &= -\frac{1}{4\pi} \text{grad}_P \left[ \iiint_{V_\infty} \frac{q(\vec{r}_Q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|} dV_Q \right]\end{aligned}\quad (2.2 b)$$

seiner Quellen  $q$  und dem quellenfreien Wirbelfeld

$$\begin{aligned}\vec{F}^{(w)}(\vec{r}_P) &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{\vec{w}(\vec{r}_Q) \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|^3} dV_Q \\ &= \frac{1}{4\pi} \text{rot}_P \left[ \iiint_{V_\infty} \frac{\vec{w}(\vec{r}_Q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|} dV_Q \right].\end{aligned}\quad (2.2 c)$$

### 2.1.1 Magnetfelder allgemeiner Stromverteilungen

Die Wirbel des Magnetfeldes sind über das Durchflutungsgesetz (1.4 d) mit den Feldgrößen verknüpft. Da die magnetische Induktion jedoch quellenfrei ist (vergl. Gl. (1.4 c)), ist wegen der angenommenen linearen Materialgleichung (1.1 b) auch das Magnetfeld zumindest bereichsweise quellenfrei. Da das Magnetfeld nicht nur durch eingeprägte Ströme bestimmt wird (vergl. Gl. (1.9)), soll an dieser Stelle stattdessen die magnetische Induktion berechnet werden

$$\underline{\vec{B}}(\vec{r}_P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \left( \underline{\vec{J}}(\vec{r}_Q) + j\omega \varepsilon_0 \underline{\vec{E}}(\vec{r}_Q) \right) \times \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_Q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|^3} dV_Q. \quad (2.3)$$

Basierend auf seiner Definition (1.10 b) und der Gl. (2.2 c) ist auch das magnetische Vektorpotential mit einer Integralgleichung bestimmbar

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}_P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{\underline{\vec{J}}(\vec{r}_Q) + j\omega \varepsilon_0 \underline{\vec{E}}(\vec{r}_Q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|} dV_Q. \quad (2.4)$$

Für den Fall überwiegenden Leitungsstromes bzw. vernachlässigbarer Wellenausbreitung  $|\underline{\vec{J}}| \gg \omega |\underline{\vec{D}}|$  vereinfachen sich die beiden Integrale geringfügig und es resultiert das *Gesetz von Biot-Savart* zur Berechnung des Magnetfeldes einer Stromverteilung. Enorme Vereinfachungen können durch Ausnutzung von möglichen Symmetrien erreicht werden. Oft sind die Ausdehnungen der Stromverteilungen auch nur zweidimensional, wie etwa bei dünnen stromführenden Folien, oder eindimensional, wie z.B. bei dünnen Drähten. Die Integrationen können dann ggf. noch analytisch durchgeführt werden.

Im Anhang B werden die magnetischen Feldgrößen der wichtigsten statischen Stromanordnungen zur Verwendung im Rahmen dieser Arbeit weitgehend analytisch berechnet.

### 2.1.2 Elektrische Felder allgemeiner Ladungsanordnungen

Die Quellen des elektrischen Feldes sind über das Coulomb-Gesetz (1.4 a) und die Wirbel über das Induktionsgesetz (1.4 b) mit den Feldgrößen verknüpft. Dementsprechend kann auch die elektrische Feldstärke nach dem Satz von Helmholtz (2.1) berechnet werden, wobei hier jedoch der Einfluss durch Polarisation entstandener Ladungen gemäß Gl. (1.7) berücksichtigt werden muss

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}_P) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V_\infty} \frac{\underline{\rho}(\vec{r}_Q)(\vec{r}_P - \vec{r}_Q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|^3} dV_Q \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_\infty} j\omega \vec{B}(\vec{r}_Q) \times \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_Q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|^3} dV_Q.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Das elektrodynamische Potential einer eingeprägten Ladungsverteilung  $\underline{\rho}_f$  ist nach Gl. (2.2 b)

$$\varphi_e(\vec{r}_P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V_\infty} \frac{\underline{\rho}_f(\vec{r}_Q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|} dV_Q,\quad (2.6)$$

so dass mit den Gleichungen (2.3) bis (2.6) sowohl die Maxwellgleichungen (1.4 a...d) als auch die Beziehungen (1.10 a, b) zwischen den Potentialen und den Feldstärken bzw. Flussdichten erfüllt sind.

Für langsam zeitveränderliche Ladungsanordnungen kann der Einfluss der Induktion vernachlässigt werden. Im Anhang D werden die elektrostatischen Felder von Ladungsanordnungen einfacher Geometrien und flacher (zweidimensionaler) oder gar eindimensionaler Ausdehnung betrachtet, welche teilweise analytisch dargestellt werden können. Sie finden Verwendung bei der Berechnung der Kapazitätsmatrix von Hochfrequenztransformatoren.

### 2.1.3 Einschränkungen

Zur Verwendung der Integralgleichungen (2.3) bis (2.6) muss vorausgesetzt werden können, dass die Verteilung der felderregenden Quellen im gesamten Raum bekannt ist. Erschwerend kommt hinzu, dass diese felderregenden Quellen nicht ausschließlich die eingeprägten Quellen sein müssen.

- Wird ein permeabler Körper in den Raum gebracht, so muss die Magnetisierungsstromverteilung  $\vec{J}_{mag}$  (gemäß Gl. (1.9)) bei der Feldberechnung berücksichtigt werden.
- Die Anwesenheit eines elektrisch permittiven Bereiches hat zur Folge, dass sich dem Feld der eingeprägten Ladungsverteilung ein Feld von Polarisationsladungen  $\underline{\rho}_{pol}$  (gemäß Gl. (1.7)) überlagert.
- Auf einem elektrisch leitfähigen Körper wird sich eine Influenzladungsverteilung bilden. Sie bleibt als Teil der eingeprägten Ladungsverteilung  $\underline{\rho}_f$  zu berücksichtigen.

Es ist anzumerken, dass permeable Werkstoffe i.d.R. auch eine nicht zu vernachlässigende Leitfähigkeit besitzen, so dass z.B. Ferritkerne auch als elektrische Leiter zu betrachten sind. Bei

hohen Frequenzen werden sich in elektrisch leitfähigen Bereichen Wirbelströme ausbilden, welche ein zusätzliches Magnetfeld zur Folge haben. Wie so oft entspricht eine isolierte Betrachtung der Effekte nicht der Realität, kann aber trotzdem zu hinreichend guten Simulationsergebnissen führen.

## 2.2 Ersatzanordnungen

Sind die Feldgleichung in einem Gebiet  $G$  und die Randbedingungen auf dem Rand  $\partial G$  bekannt, so ist das Problem gemäß Kröger [23] eindeutig bestimmt und auch die Lösung ist eindeutig.

Bei der Einführung der Grundgleichungen der Elektrodynamik in Abschnitt 1.2 wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Raumladungsdichte gemäß Gl. (1.7) als Überlagerung  $\rho = \rho_f + \rho_{pol}$  und auch die Stromdichte gemäß Gl. (1.9) als eine Überlagerung  $\underline{J} = \underline{J}_f + \underline{J}_{mag} + \underline{J}_{pol}$  dargestellt werden kann. Die Maxwellgleichungen (1.4 a...d) können dann neu notiert werden

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \underline{\vec{E}} = \rho_f + \rho_{pol} \quad \text{Coulomb-Gesetz,} \quad (2.7 \text{ a})$$

$$\operatorname{rot} \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}} \quad \text{Induktionsgesetz,} \quad (2.7 \text{ b})$$

$$\operatorname{div} \underline{\vec{B}} = 0 \quad \text{Quellenfreiheit von } \underline{\vec{B}}, \quad (2.7 \text{ c})$$

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \underline{\vec{B}} = \underline{J}_f + \underline{J}_{mag} + \underline{J}_{pol} + j\omega \varepsilon_0 \underline{\vec{E}} \quad \text{Durchflutungsgesetz,} \quad (2.7 \text{ d})$$

wobei die Flussdichten  $\underline{\vec{D}}$ ,  $\underline{\vec{B}}$  und Feldstärken  $\underline{\vec{E}}$ ,  $\underline{\vec{H}}$  zwar weiterhin über die Materialeigenschaften in der Form (1.1 a...c) verknüpft sind, diese Verknüpfung hier jedoch nicht einfließt, sondern stattdessen in den zusätzlichen Quellen  $\rho_{pol}$ ,  $\underline{J}_{mag}$ ,  $\underline{J}_{pol}$  erfasst ist.

Die Oberfläche  $\partial G$  des Gebietes  $G$  entspricht der Grenzfläche  $A$  zu einem benachbarten Bereich (vergl. Abbildung 1.3). Auf der Grenzfläche  $A := \partial G$  zwischen zwei Teilbereichen 1 und 2 werden nun entsprechend Gl. (1.7) und Gl. (1.9) auch der Ladungsbetrag  $\sigma$  und der Strombelag  $\underline{\vec{K}}$  als Superpositionen definiert:

$$\sigma := \sigma_f + \sigma_{pol}, \quad (2.8 \text{ a})$$

$$\underline{\vec{K}} := \underline{\vec{K}}_f + \underline{\vec{K}}_{mag}. \quad (2.8 \text{ b})$$

Der Magnetisierungsstrombelag  $\underline{\vec{K}}_{mag}$  fließt in der Trennfläche  $A$ . Der Polarisationsstrom  $\underline{J}_{pol}$  fließt normal durch die Oberfläche  $\partial G$ . Ein Polarisationsstrombelag  $\underline{\vec{K}}_{pol}$  existiert daher nicht (vergl. [23]). Der Polarisationsladungsbetrag  $\sigma_{pol}$  enthält Einflüsse der Polarisationsladungsbeläge  $\sigma_{pol1}$  und  $\sigma_{pol2}$  von beiden Seiten des Gebietsrandes  $\partial G$ , welcher die Bereiche 1 und 2 trennt. Vergleichbares gilt auch für den Magnetisierungsstrombelag  $\underline{\vec{K}}_{mag}$ .

Die Randbedingungen (1.13 a...d) entsprechen dann

$$\varepsilon_0 \underline{\vec{L}}_{(\partial G)} \odot \underline{\vec{E}} = \varepsilon_0 \vec{n} \cdot (\underline{\vec{E}}_1 - \underline{\vec{E}}_2) = \sigma_f + \sigma_{pol}, \quad (2.9 \text{ a})$$

$$\underline{\vec{L}}_{(\partial G)} \otimes \underline{\vec{E}} = \vec{n} \times (\underline{\vec{E}}_1 - \underline{\vec{E}}_2) = \vec{0}, \quad (2.9 \text{ b})$$

$$\underline{\vec{L}}_{(\partial G)} \odot \underline{\vec{B}} = \vec{n} \cdot (\underline{\vec{B}}_1 - \underline{\vec{B}}_2) = 0, \quad (2.9 \text{ c})$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{L}}_{\langle \partial G \rangle} \otimes \underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathbf{n}} \times (\underline{\mathbf{B}}_1 - \underline{\mathbf{B}}_2) = \underline{\mathbf{K}}_f + \underline{\mathbf{K}}_{\text{mag}}. \quad (2.9 \text{ d})$$

Zur Verdeutlichung wird an dieser Stelle ein Zustand  $Z^{(0)}$  definiert, dessen Quellen, Wirbel und Feldgrößen mit den Ausgangsgrößen der Gln. (2.7 a...d) verknüpft sind

$$\underline{\rho}_f^{(0)} = \underline{\rho} = \underline{\rho}_f + \underline{\rho}_{\text{pol}}, \quad (2.10 \text{ a})$$

$$\underline{\sigma}_f^{(0)} = \underline{\sigma} = \underline{\sigma}_f + \underline{\sigma}_{\text{pol}}, \quad (2.10 \text{ b})$$

$$\underline{\mathbf{D}}^{(0)} = \epsilon_0 \underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{D}} - \underline{\mathbf{P}}, \quad (2.10 \text{ c})$$

$$\underline{\mathbf{J}}_f^{(0)} = \underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}_f + \underline{\mathbf{J}}_{\text{mag}} + \underline{\mathbf{J}}_{\text{pol}}, \quad (2.10 \text{ d})$$

$$\underline{\mathbf{K}}_f^{(0)} = \underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{K}}_f + \underline{\mathbf{K}}_{\text{mag}}, \quad (2.10 \text{ e})$$

$$\underline{\mathbf{H}}^{(0)} = \frac{1}{\mu_0} \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{M}}, \quad (2.10 \text{ f})$$

so dass die Maxwellgleichungen für den Zustand  $Z^{(0)}$  noch offensichtlicher mit den entsprechenden Gleichungen (1.4 a...d) bzw. (2.7 a...d) für die Ausgangsgrößen verglichen werden können:

$$\text{div } \underline{\mathbf{D}}^{(0)} = \underline{\rho}_f^{(0)} \quad \text{Coulomb-Gesetz}, \quad (2.11 \text{ a})$$

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}} \quad \text{Induktionsgesetz}, \quad (2.11 \text{ b})$$

$$\text{div } \underline{\mathbf{B}} = 0 \quad \text{Quellenfreiheit von } \underline{\mathbf{B}}, \quad (2.11 \text{ c})$$

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}}^{(0)} = \underline{\mathbf{J}}_f^{(0)} + j\omega \underline{\mathbf{D}}^{(0)} \quad \text{Durchflutungsgesetz}. \quad (2.11 \text{ d})$$

Zur Vollständigkeit werden auch die Randbedingungen für den Zustand  $Z^{(0)}$  notiert

$$\vec{\mathbf{L}}_{\langle \partial G \rangle} \odot \underline{\mathbf{D}}^{(0)} = \vec{\mathbf{n}} \cdot (\underline{\mathbf{D}}_1^{(0)} - \underline{\mathbf{D}}_2^{(0)}) = \underline{\sigma}_f^{(0)}, \quad (2.12 \text{ a})$$

$$\vec{\mathbf{L}}_{\langle \partial G \rangle} \otimes \underline{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{n}} \times (\underline{\mathbf{E}}_1 - \underline{\mathbf{E}}_2) = \vec{0}, \quad (2.12 \text{ b})$$

$$\vec{\mathbf{L}}_{\langle \partial G \rangle} \odot \underline{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{n}} \cdot (\underline{\mathbf{B}}_1 - \underline{\mathbf{B}}_2) = 0, \quad (2.12 \text{ c})$$

$$\vec{\mathbf{L}}_{\langle \partial G \rangle} \otimes \underline{\mathbf{H}}^{(0)} = \vec{\mathbf{n}} \times (\underline{\mathbf{H}}_1^{(0)} - \underline{\mathbf{H}}_2^{(0)}) = \underline{\mathbf{K}}_f^{(0)}. \quad (2.12 \text{ d})$$

Wie in den Gleichungen (2.10) bis (2.12) des Zustandes  $Z^{(0)}$  zu erkennen ist, sind die Materialeigenschaften vollständig in Form von Polarisationsladungen, Magnetisierungs- und Polarisationsströmen in den neuen eingeprägten Quellen und Wirbeln dieses Zustandes berücksichtigt, welche als Ersatzquellen und Ersatzwirbel bezeichnet werden. Die Materialgleichungen für den Zustand  $Z^{(0)}$  wurden auf die in Vakuum gültigen Beziehungen (2.10 c) und (2.10 f) reduziert. Zusammengefasst bedeutet dies, dass im Zustand  $Z^{(0)}$  weder elektrisch polarisierbare noch magnetisierbare Bereiche vorhanden sind. Mit Hilfe der für diesen Zustand ermittelten Ersatzquellen und Ersatzwirbel können dennoch die elektrische Feldstärke  $\underline{\mathbf{E}}$  und die magnetische Induktion  $\underline{\mathbf{B}}$  ermittelt werden, die auch für den Ausgangszustand mit polarisierbaren und magnetisierbaren Bereichen gültig sind. Der Zustand  $Z^{(0)}$  beschreibt folglich eine Ersatzanordnung für den Ausgangszustand. Die Berechnung der Feldgrößen kann z.B. durch Auswertung der Helmholtz-Integrale Gl. (2.1) für die Ersatzquellen und Ersatzwirbel erfolgen.

Die Definition des Zustandes  $Z^{(0)}$  dient lediglich zum Ersatz von Materialeigenschaften durch zusätzliche Quellen und Wirbel. Eine weitere Definition eines Zustandes  $Z^{(\text{inf})}$  wird später

eingeführt, um im stationären Betrieb einer Anordnung Influenzwirkungen durch eine Ersatzanordnung beschreiben zu können.

Als einfachste Beispiele für die Ermittlung von Ersatzanordnungen seien Spiegelungsverfahren für die Elektrostatik, Magnetostatik oder das stationäre Strömungsfeld genannt, wie sie Thomson (Lord Kelvin) [31] und Maxwell [26, 27] formulierten. Einen ausführlichen Überblick über verschiedene Spiegelungsverfahren geben z.B. Binns [6, 7] und Harrington [19]. Auch die Momenten-Methode liefert in der in Abschnitt 2.3.2 beschriebenen Form eine Ersatzanordnung.

## 2.3 Lösung von Randwertproblemen

Die Anwendung der Integralgleichungen des Abschnittes 2.1 erfordert insbesondere dann besondere Maßnahmen, wenn im betrachteten Gebiet  $G$

- Dielektrika mit unterschiedlichen elektrischen Permittivitäten,
- leitfähige Elektroden oder
- magnetische Körper wie z.B. ein Ferritkern

vorhanden sind. Der Einfluss unterschiedlicher elektrischer und magnetischer Materialeigenschaften einzelner Teilbereiche  $G_i$  auf elektrische und magnetische Feldgrößen im Gebiet  $G$  kann zwar über die Feldverteilung der Polarisations- und ggf. Influenzladungen oder Magnetisierungsströme bei der Integration berücksichtigt werden. Das setzt jedoch voraus, dass sowohl die zusätzlichen Quellenverteilungen als auch ihre Wirkung auf die eingeprägte Quellenverteilung bekannt sind.

Kann dies nicht vorausgesetzt werden, wird eine Problemstellung allgemein durch die Gültigkeit der Differentialgleichungen (1.14 a, b) für die Feldgrößen in einem betrachteten Gebiet  $G$  beschrieben, wobei an Grenzen unterschiedlicher Materialeigenschaften und auch am Gebietsrand  $\partial G$  die Randbedingungen (1.13 a...d) erfüllt sein müssen. Es hängt stark von der Komplexität einer betrachteten Anordnung ab, ob das Randwertproblem analytisch lösbar ist, was nur bei einfachsten Geometrien der Fall sein wird.

In den folgenden Aufgabenstellungen handelt es sich stets um homogene Differentialgleichungen bzw. homogene Helmholtzgleichungen für vektorielle

$$(\Delta + \underline{k}^2) \underline{\underline{F}}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (2.13 \text{ a})$$

oder skalare Feldgrößen

$$(\Delta + k^2) \underline{\Phi}(\vec{r}) = 0 \quad (2.13 \text{ b})$$

auf einem Gebiet  $G$ . Im Rahmen dieser Arbeit werden nur solche Problemstellungen behandelt, bei denen sich aufgrund relativ einfacher Geometrien auch die vektorielle Differentialgleichung (2.13 a) in nur eine skalare und homogene Helmholtzgleichung (2.13 b) für eine Komponente der vektoriellen Feldgröße

$$\vec{F} = \underline{F} \vec{e}_u$$

überführen lässt. Im statischen Fall wird auch der proportionale Anteil in der Differentialgleichung verschwinden ( $k = 0$ ).

Die erwähnten Randbedingungen auf  $\partial G$  werden für die folgenden Betrachtungen zunächst verallgemeinert als inhomogen angenommen und in einem Differentialoperator zusammengefasst.<sup>1</sup> Als Beispiel dient hier nur ein einfaches skalares Potential  $\underline{\Phi}$

$$L_{\langle \partial G \rangle} \underline{\Phi} := \underline{H}. \quad (2.14)$$

Es kann jedoch analog auf vektorielle Feldgrößen erweitert werden

$$\vec{L}_{\langle \partial G \rangle} \odot \underline{\vec{F}} := \underline{V}' \quad \text{und} \quad \vec{L}_{\langle \partial G \rangle} \otimes \underline{\vec{F}} := \underline{\vec{V}}''. \quad (2.15)$$

Im betrachteten Gebiet  $G$  sei das skalare Potential  $\underline{\Phi}$  zu ermitteln. Den hier betrachteten numerischen und semi-numerischen Verfahren ist gemeinsam, dass das gesuchte Potential durch eine Superposition approximiert wird

$$\underline{\Phi} \approx \underline{\Phi}^{[0]} = \sum_{i=1}^N \underline{a}_i \underline{\Phi}_i \quad \text{mit} \quad i, N \in \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

Unterschiede liegen folglich in den Eigenschaften der Teilpotentiale  $\underline{\Phi}_i$  und in der Herleitung eines geeigneten Gleichungssystems zur Ermittlung der Koeffizienten  $\underline{a}_i$  begründet. Einen Überblick der bekanntesten Verfahren zur numerischen Berechnung elektromagnetischer Felder bietet Hafner [18].

### 2.3.1 Minimierung der Fehlerquadrate

Als Beispiel zur Ermittlung von Gleichungssystemen sei kurz die Methode der *Minimierung der Fehlerquadrate* wiederholt. Gemäß Gl. (2.16) erfüllt die zu ermittelnde Näherungslösung  $\underline{\Phi}^{[0]}$  voraussichtlich weder die Feldgleichung (2.13 b) im betrachteten Gebiet  $G$  noch die Randbedingung (2.14) auf dem Gebietsrand  $\partial G$  genau. Sie ist lediglich eine Approximation, deren Abweichung von der gesuchten Lösung  $\underline{\Phi}$  in Bezug auf die Parameter  $\underline{a}_i$  zu minimieren ist. Zu diesem Zweck wird der quadratische Fehler im Gebiet  $G$

$$\delta_G^2 = \int_G g_G \left\| (\Delta + k^2) \underline{\Phi}^{[0]} \right\|_2^2 dV \quad (2.17)$$

mit der *Gewichtungsfunktion*  $g_G$  auf  $G$  und der quadratische Fehler auf dem Gebietsrand  $\partial G$

$$\delta_{\partial G}^2 = \int_{\partial G} g_{\partial G} \left\| L_{\langle \partial G \rangle} \underline{\Phi}^{[0]} - \underline{H} \right\|_2^2 da \quad (2.18)$$

mit der Gewichtungsfunktion  $g_{\partial G}$  auf  $\partial G$  eingeführt.

Mit Hilfe der Gewichtungsfunktionen können zum einen Teilebereiche von  $G$  oder  $\partial G$  oder aber Teillösungen (bzw. Funktionen) bei der Fehlerminimierung stärker betont werden. Ihre Definition obliegt dem Anwender eines Verfahrens und sei hier nicht weiter ausgeführt. Für die hier beschriebenen quadratischen Fehler ist laut Hafner [18] eine einfache Charakterisierung numerischer Berechnungsverfahren möglich.

<sup>1</sup>Unter Umständen kann dies auch nur ein Differenzenoperator sein.

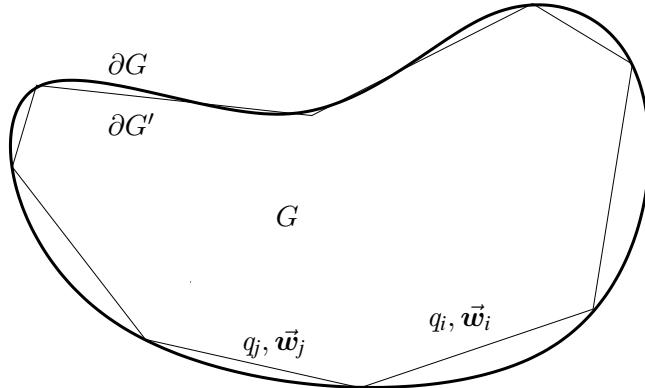
**Semi-numerische Verfahren** erfordern lediglich eine Minimierung des quadratischen Fehlers  $\delta_{\partial G}^2$  auf dem Gebietsrand  $\partial G$ ,

**numerische Verfahren** hingegen die Minimierung beider quadratischer Fehler  $\delta_G^2$  und  $\delta_{\partial G}^2$ .

Aufgrund des zu erwartenden höheren Rechenzeitaufwandes bei der Anwendung numerischer Verfahren wird im Rahmen dieser Arbeit auf semi-numerische Verfahren zurückgegriffen. Als Beispiel für ein numerisches Verfahren sei trotzdem kurz die *Methode der Finiten Elemente* vorgestellt, um neben den Unterschieden bei der Ermittlung des Gleichungssystems auch noch die Unterschiede zwischen den Teillösungen  $\Phi_i$  gemäß Gl. (2.16) zumindest kurz zu erläutern.

### 2.3.2 Momenten-Methode

Im Gegensatz zur Methode der Finiten Elemente ist die *Momenten-Methode* ein semi-numerisches Verfahren. Nur der Gebietsrand  $\partial G$  wird in  $N$  Teilstücke diskretisiert. Die Quellen  $q$  bzw. Wir-



**Abbildung 2.1:** Diskretisierung des Randes eines Gebietes  $G$  zur Anwendung der Momenten-Methode

bel  $\vec{w}$  sind in diesem Fall die Momente der Methode. Sie werden auf dem Gebietsrand  $\partial G$  definiert und durch Quellen  $q_i$  und Wirbel  $\vec{w}_i$  auf den Teilstücken des diskretisierten Gebietsrandes  $\partial G'$  approximiert

$$\begin{aligned} q &\approx q^{[0]} = \sum_{i=1}^N a_i q_i \\ \vec{w} &\approx \vec{w}^{[0]} = \sum_{i=1}^N b_i \vec{w}_i, \end{aligned} \tag{2.19}$$

so dass auch hier die gesuchte Feldgröße durch eine Superposition approximiert werden kann

$$\vec{F} \approx \vec{F}^{[0]} = \sum_{i=1}^N \left( \vec{F}_i^{(q)} + \vec{F}_i^{(w)} \right), \tag{2.20}$$

welche für einfache Geometrien oder z.B. im elektrostatischen Fall durch eine skalare Feldgröße und somit in der Form der Gl. (2.16) dargestellt wird. Die resultierenden Feldgrößen  $\vec{F}_i^{(q)}$  und  $\vec{F}_i^{(w)}$  können mit Hilfe der Helmholtz-Integrale gemäß der Gl. (2.1) berechnet werden.

Die Herleitung eines Gleichungssystems zur Ermittlung der Koeffizienten  $a_i$  bzw.  $b_i$  kann auf vielfältige Art und Weise erfolgen, z.B. mit Hilfe der beschriebenen Methode der Minimierung der Fehlerquadrate oder aber mit der Projektionsmethode (vergl. Hafner [18]), stets jedoch nur auf dem Gebietsrand  $\partial G$ .

Letztendlich entspricht die Minimierung der Fehlerquadrate auf  $\partial G'$  mit Hilfe einer geeigneten Gewichtungsfunktion der Auswertung der Randbedingungen (1.13 a...d), wobei insbesondere anhand von Gl. (1.13 a) die Verknüpfung mit den Quellen (bzw. Ladungen) und mit Hilfe von Gl. (1.13 d) die Verknüpfung mit den Wirbeln (bzw. Strömen) deutlich wird.

Im Folgenden werden elektrische und magnetische Problemstellungen getrennt betrachtet, so dass entweder die Koeffizienten  $a_i$  der Quellen oder die Koeffizienten  $b_i$  der Wirbel zu ermitteln sind.

Die Vorteile der Momenten-Methode gegenüber der Methode der Finiten Elemente liegen auf der Hand:

- Es braucht nur der Gebietsrand diskretisiert werden. Ist eine genauere Berechnung der Feldgrößen in einem Teilbereich  $G_i$  von  $G$  erforderlich, so muss auch nur ein Teil des Gebietsrandes in der Nähe des Teilbereichs  $G_i$  feiner diskretisiert werden.
- Da die Momente den Quellen und Wirbeln entsprechen, erfüllen die mit den Helmholtz-Integralen ermittelten Feldgrößen automatisch die Feldgleichung im betrachteten Gebiet.

### 2.3.3 Separation der Variablen

Oft kann auf dem betrachteten Gebiet  $G$  das Koordinatensystem so geeignet gewählt werden (z.B.  $(u, v, w)$ ), dass durch Anwendung eines geeigneten *Separa tionsansatzes*, wie z.B.

$$\underline{\Phi}(\vec{r}) = \underline{\Phi}(u, v, w) := U(u) \underline{V}(v) \underline{W}(w) , \quad (2.21)$$

für das komplexe skalare Potential zumindest ein Teil der Problemstellung in Form einer *Sturm-Liouville'schen Eigenwertaufgabe* z.B. für die Funktion  $U$  auf ihrem abgeschlossenen Definitionsbereich  $I = [a, b]$  dargestellt werden kann. Eine allgemeine Darstellung der Separation sowie zahlreiche Beispiele sind bei Moon/Spencer [28] zu finden.

Gemäß Heuser [20] muss die Funktion  $U$  auf dem Definitionsbereich  $I$  die Differentialgleichung

$$L_{(u)} U + \lambda^2 \eta_{(u)}(u) U = 0 \quad \text{mit} \quad L_{(u)} U = \frac{d}{du} \left[ p(u) \frac{dU}{du} \right] + q(u) U \quad (2.22 \text{ a})$$

und auf den Rändern  $u = a$  bzw.  $u = b$  Randbedingungen der Form

$$\begin{aligned} \alpha_1 U(a) + \alpha_2 \frac{dU}{du}(a) &= 0 \\ \beta_1 U(b) + \beta_2 \frac{dU}{du}(b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.22 \text{ b})$$

erfüllen.  $\lambda$  wird Eigenwert genannt. Eine Lösung  $U_m$  der Differentialgleichung (2.22 a) bei einem

## 2 Mathematische Hilfsmittel zur Feldberechnung

Eigenwert  $\lambda_m$  (mit  $m \in \mathbb{N}$ ) wird Eigenfunktion genannt. Unter den Voraussetzungen

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0 \text{ und } \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0, \\ p \text{ stetig, differenzierbar und positiv auf } I, \\ q \text{ stetig auf } I, \text{ sowie} \\ \eta(u) \text{ stetig und positiv auf } I, \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

existieren gemäß [20] zu einer Sturm-Liouville'schen Eigenwertaufgabe der Form (2.22 a, b) unendlich viele Eigenwerte  $\lambda_m$  (mit  $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \lambda_3^2 < \dots$ ) und zu jedem Eigenwert  $\lambda_m$  existiert eine Eigenfunktion  $U_m$ . Zwei verschiedene Eigenfunktionen  $U_m$  und  $U_n$  (mit  $m, n \in \mathbb{N}$ ) sind bzgl. der sogenannten Gewichtungsfunktion  $\eta(u)$  zueinander orthogonal, d.h.

$$\int_a^b U_m(u) U_n(u) \eta(u) du = \begin{cases} N_m > 0 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.24)$$

$N_m$  wird als die Norm der Lösung  $U_m$  bezeichnet. Aufgrund der Linearität der Differentialgleichung (2.22 a) können die einzelnen Lösungen bzw. Eigenfunktionen  $U_m$  zu einer Lösung (entsprechend Gl. (2.16)) linearkombiniert werden

$$U = \sum_{m \in \mathbb{N}} c_m U_m. \quad (2.25)$$

Aus den Randbedingungen (1.13 a...d) für die Feldgrößen folgen sogenannte Neumannsche Randbedingungen für die Normalableitungen des Potentials<sup>2</sup>. Eine direkte Vorgabe des Potentials auf dem Rand liefert eine Dirichletsche Randbedingung<sup>3</sup>. Die Lösung der Aufgabe kann durch Entwicklung der Funktion  $U$  nach Eigenfunktionen erfolgen. Die Ermittlung der Koeffizienten der Gl. (2.25) mündet in einer Reihenentwicklung, welche auf der Orthogonalität der Eigenfunktionen basiert.

Es wird nun angenommen, dass ein geeignetes Koordinatensystem gewählt worden ist, so dass die homogene Helmholtzgleichung (2.13 b) mit Hilfe des gemäß Gl. (2.22 a) definierten und eines weiteren linearen Differentialoperators  $L'_{(vw)}$  separiert werden kann, wobei dieser keinerlei Abhängigkeiten von der Koordinate  $u$ , sondern nur Differentiationen und Abhängigkeiten nach den restlichen Variablen enthält. Die resultierende Darstellung der Problemstellung ist dann gegeben durch

$$(\Delta + k^2) \underline{\Phi} = \left( \frac{1}{\eta(u)} L_{(u)} + L'_{(vw)} + k^2 \right) \underline{\Phi} = 0. \quad (2.26)$$

Dank der gemachten Voraussetzungen kann die Gl. (2.26) nach einer Division durch  $\underline{\Phi} = U \underline{V} \underline{W}$  separiert werden

$$\underbrace{\frac{1}{\eta(u)} L_{(u)} U}_{=-\lambda^2} + \underbrace{\frac{1}{\underline{V} \underline{W}} L'_{(vw)} (\underline{V} \underline{W})}_{=+\lambda^2} + k^2 = 0. \quad (2.27)$$

Denkbar ist auch, dass in einem geeigneten Koordinatensystem der Differentialoperator  $L'_{(vw)}$  mit Hilfe zweier linearer Differentialoperatoren  $L_{(v)}$  und  $L'_{(w)}$  weiter separierbar ist, so dass auch

<sup>2</sup>In den Randbedingungen nach Gl. (2.22 b) entspricht dies  $\alpha_1 = 0$  bzw.  $\beta_1 = 0$ .

<sup>3</sup>In den Randbedingungen nach Gl. (2.22 b) entspricht dies  $\alpha_2 = 0$  bzw.  $\beta_2 = 0$

für die Funktion  $V$  eine Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgabe analog der Form (2.22 a, b) gefunden werden kann

$$(\Delta + k^2) \underline{\Phi} = \left( \frac{1}{\eta_{(u)}(u)} L_{(u)} + \frac{1}{\eta_{(v)}(v)} L_{(v)} + L'_{(w)} + k^2 \right) \underline{\Phi} = 0. \quad (2.28)$$

Erneut kommen die gemachten Voraussetzungen zum Tragen und auch die Gleichung (2.28) kann nach einer Division durch  $\underline{\Phi}$  separiert werden

$$\underbrace{\frac{1}{\eta_{(u)} U} L_{(u)} U}_{=-\lambda_{(u)}^2} + \underbrace{\frac{1}{\eta_{(v)} V} L_{(v)} V}_{=-\lambda_{(v)}^2} + \underbrace{\frac{1}{\eta_{(w)} W} L'_{(w)} W}_{=+\lambda_{(w)}^2} + k^2 = 0, \quad (2.29)$$

wobei die Eigenwerte  $\lambda_{(u)}$ ,  $\lambda_{(v)}$  und  $\lambda_{(w)}$  über

$$\lambda_{(u)}^2 + \lambda_{(v)}^2 = \lambda_{(w)}^2 \quad (2.30)$$

miteinander verknüpft sind.

## 2.4 Zusammenfassung

Mit Programmen, welche auf der Methode der Finiten Elemente (FE) oder Finiten Differenzen (FD) basieren, sind für die hier betrachteten Problemstellung Lösungen berechenbar. Aufgrund der Tatsache, dass im betrachteten Feldgebiet  $G$  im Falle von Hochfrequenztransformatoren jedoch dünne stromführende bzw. (im elektrostatischen Fall) geladene dünne Leiterschleifen liegen, ist davon auszugehen, dass die Diskretisierung sehr fein gewählt werden muss. Beide Verfahren werden im Rahmen dieser Arbeit keine Anwendung finden.

Aufgrund der Linearität der Feldgleichungen und der Linearisierung der Materialeigenschaften sind die Feldgrößen insgesamt als Superposition darstellbar. Sofern eingeprägte Quellen und Wirbel bekannt sind, werden deren Feldgrößen mit Hilfe von Integralgleichungen ermittelt, wobei möglichst eine analytische Lösung angestrebt wird. Dies wird in der Regel nur durch Anwendung geometrischer Vereinfachungen erzielt werden können. Die so verbleibenden Anteile unbekannter Quellen- und Wirbelverteilungen sind mit Hilfe semi-numerischer Verfahren zu ermitteln. Gegebenenfalls kann durch die Anwendung der Momenten-Methode eine Ersatzanordnung ermittelt werden, so dass weitere Feldanteile durch Integralgleichungen berechnet werden können. Bei gänzlich unbekannter Feldverteilung wird auf die Methode der Separation der Variablen zurückgegriffen. Generell ist eine weitestgehende geometrische Vereinfachung für jede Problemstellung anzustreben, um sie so weit wie möglich analytisch lösen zu können und dadurch den numerischen Rechenaufwand minimal zu halten.

## *2 Mathematische Hilfsmittel zur Feldberechnung*

# 3 Stationäre magnetische Ferritkern-Ersatzanordnung

Wie in den Abschnitten 1.3 und 1.4 erwähnt, werden zur Berechnung von Verlusten und magnetischen Kopplungen von Spulen und Transformatoren in den folgenden Abschnitten wiederholt die magnetische Feldstärke  $\underline{\underline{H}}$ , die magnetische Flussdichte  $\underline{\underline{B}}$  und das magnetische Vektorpotential  $\underline{\underline{A}}$  im Bereich der erregenden Windungen  $n = 1, 2, \dots, N$  benötigt.

Zur Berechnung von Wirbelstromverlusten innerhalb eines Ferritkernes sind die magnetischen Feldgrößen auch dort zu berechnen.

Stets wird dabei jedoch vorausgesetzt, dass die erregenden harmonischen Ströme  $I_n$  in den Windungen eingeprägt und somit bekannt sind. Weitere Quellen seien nicht vorhanden. Das magnetische Feld der erregenden Ströme kann mit Hilfe der Helmholtz-Integrale in Abschnitt 2.1 berechnet werden.

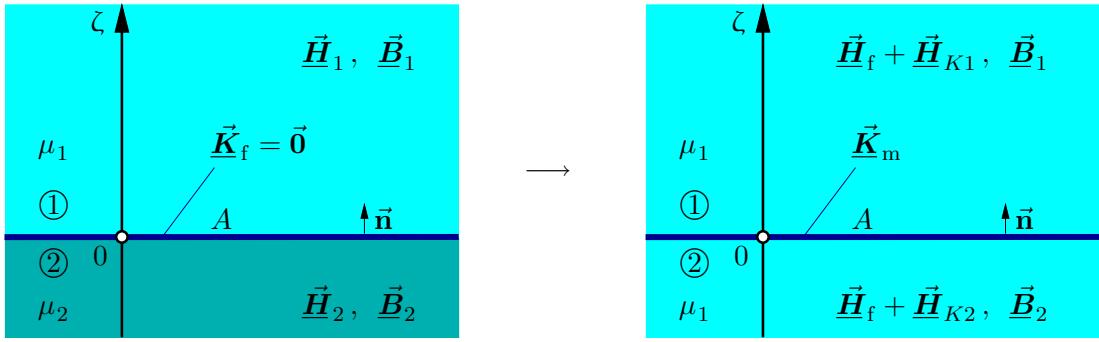
Wenn die untersuchte Komponente jedoch hochpermeable Teilbereiche, wie z.B. einen Ferritkern enthält, reichen die so berechneten Feldgrößen zur Verlustberechnung und zur Induktivitätsberechnung nicht aus.

## 3.1 Auswertung der magnetischen Randbedingung

Abbildung 3.1 a) zeigt die Grenzfläche  $A$  zwischen zwei Teilbereichen ① und ② mit homogenen Materialeigenschaften. In unmittelbarer Nähe zur Grenzfläche  $A$  können alle Feldgrößen und Materialeigenschaften als homogen angenommen werden. Der Bereich ② ist hochpermeabel gegenüber dem Bereich ① ( $\mu_2 \gg \mu_1$ , z.B. ein Ferritkern). Die felderregenden Ströme  $I_n$  sind im Bereich ① eingeprägt und erzeugen ein Magnetfeld  $\underline{\underline{H}}_f$ , das dem der Situation entspricht, wenn der ganze Raum homogen mit der Permeabilität  $\mu_1$  ausgefüllt ist und keine weiteren Ströme vorhanden sind. Das Magnetfeld im oberen Teilbereich ① der Abbildung 3.1 a) ist nun eine Überlagerung der erregenden Feldstärke  $\underline{\underline{H}}_f$  und einer weiteren Feldstärke  $\underline{\underline{H}}_\mu$ , welche aufgrund der Materialeigenschaften im Teilbereich ② und der damit verbundenen Magnetisierungsströme entsteht

$$\underline{\underline{H}}_1 = \underline{\underline{H}}_f + \underline{\underline{H}}_\mu . \quad (3.1)$$

Der Teilbereich ② ist frei von eingeprägten Strömen. Aufgrund der Homogenität und Linearität der Materialeigenschaften werden die Magnetisierungsströme daher lediglich in der Grenzfläche  $A$  in Form eines Strombelages  $\underline{\underline{K}}_m = \vec{e}_K K_m$  (mit  $\vec{n} \cdot \vec{e}_K = 0$ ) ausgeprägt sein. Der Strombelag erzeugt ein Magnetfeld  $\underline{\underline{H}}_{K1}$  im Teilbereich ① und ein Magnetfeld  $\underline{\underline{H}}_{K2}$  im Teilbereich ②. Die Randbedingungen (1.13 c, d) werden auf die Anordnung in Abbildung 3.1 a)



a) Anordnung mit hochpermeablem Teilbereich ②

b) Ersatzanordnung mit einheitlichen Materialeigenschaften

Abbildung 3.1: Kern-Ersatzanordnung

angewendet

$$\vec{L}_{(A)} \otimes \vec{H} = \vec{n} \times (\underline{\vec{H}}_1 - \underline{\vec{H}}_2) = \underline{\vec{K}}_f = \vec{0}, \quad (3.2 \text{ a})$$

$$\vec{L}_{(A)} \odot \vec{B} = \vec{n} \cdot (\underline{\vec{B}}_1 - \underline{\vec{B}}_2) = 0, \quad (3.2 \text{ b})$$

so dass eine Ersatzanordnung gemäß Abbildung 3.1 b) gefunden werden kann, die nur noch einen einzigen niedelpermeablen Teilbereich enthält. Dabei soll der magnetische Fluss der Ersatzanordnung im ganzen Raum mit dem Fluss der Ausgangsanordnung übereinstimmen. Aus diesen Forderungen folgt unmittelbar

$$\mu_1 \underline{\vec{H}}_1 = \mu_1 (\underline{\vec{H}}_f + \underline{\vec{H}}_{K1}) \quad \text{bzw.} \quad \underline{\vec{H}}_{K1} := \underline{\vec{H}}_\mu, \quad (3.3 \text{ a})$$

$$\mu_2 \underline{\vec{H}}_2 = \mu_1 (\underline{\vec{H}}_f + \underline{\vec{H}}_{K2}). \quad (3.3 \text{ b})$$

Die Randbedingung (1.13 d) wird nun auf die Ersatzanordnung in Abbildung 3.1 b) angewendet

$$\vec{L}_{(A)} \otimes \vec{H} = \vec{n} \times (\underline{\vec{H}}_f + \underline{\vec{H}}_{K1} - \underline{\vec{H}}_f - \underline{\vec{H}}_{K2}) = \underline{\vec{K}}_m = \vec{e}_K \underline{K}_m. \quad (3.4)$$

In der Ersatzanordnung 3.1 b) ist zu erkennen, dass die magnetischen Feldstärken  $\underline{\vec{H}}_{K1}$  und  $\underline{\vec{H}}_{K2}$  nur von einem Strombelag  $\underline{\vec{K}}_m$  auf der ebenen Grenzfläche hervorgerufen werden und somit symmetrisch zur Trennfläche A sind

$$\vec{n} \times \underline{\vec{H}}_{K1} := -\vec{n} \times \underline{\vec{H}}_{K2} = \vec{n} \times \underline{\vec{H}}_\mu. \quad (3.5)$$

Sie sind mit dem Strombelag  $\underline{\vec{K}}_m$  nach Gl. (3.4) und Gl. (3.5) verknüpft durch

$$\underline{\vec{K}}_m = 2 \vec{n} \times \underline{\vec{H}}_\mu. \quad (3.6)$$

Die erneute Anwendung der Randbedingung (3.2 a) liefert mit Gln. (3.3 a, b) und Gl. (3.5) zunächst

$$\vec{n} \times \left[ \underline{\vec{H}}_f + \underline{\vec{H}}_\mu - \frac{\mu_1}{\mu_2} (\underline{\vec{H}}_f - \underline{\vec{H}}_\mu) \right] = \vec{0} \quad (3.7)$$

und hieraus die noch fehlende Feldstärke  $\underline{\vec{H}}_\mu$  mit

$$\vec{n} \times \underline{\vec{H}}_\mu = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \vec{n} \times \underline{\vec{H}}_f \quad (3.8)$$

zur Bestimmung des Strombelag  $\underline{\vec{K}}_m$  gemäß Gl. (3.6).

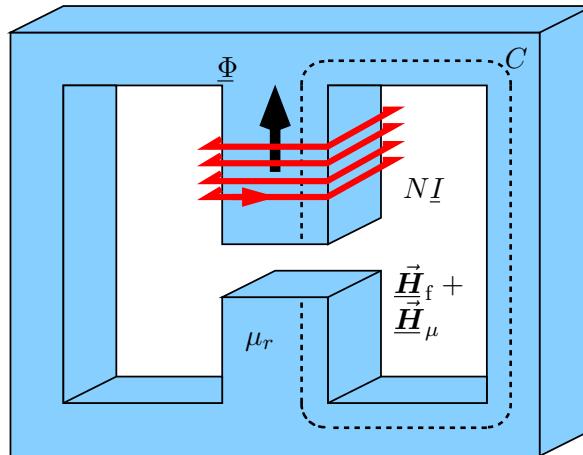
Die magnetische Feldstärke  $\underline{\vec{H}}_K$  des Strombelages  $\underline{\vec{K}}_m$  kann nun an einem beliebigen Beobachtungspunkt P bestimmt werden. Sie ist identisch mit der Feldstärke  $\underline{\vec{H}}_\mu$ . Für spätere Berechnungen wird abschließend die normierte magnetische Feldstärke  $\underline{\vec{F}}_K$  für diese Anordnung eingeführt

$$\underline{\vec{H}}_K(\vec{r}_P) = \underline{K}_m \underline{\vec{F}}_K(\vec{r}_P) . \quad (3.9)$$

## 3.2 Ferritkern-Ersatzanordnung

Der Vorteil der Ersatzanordnung gegenüber der realen Anordnung in Abbildung 3.1 liegt darin begründet, dass alle zu berechnenden Feldgrößen der realen Anordnung weitgehend analytisch, z.B. durch Verwendung der Helmholtz-Integrale in Abschnitt 2.1, aus den Strömen der Ersatzanordnung bestimmt werden können.

Abbildung 3.2 zeigt eine drahtgewickelte Spule auf einem E-Kern aus hochpermeablem Material. Zur Berechnung der Verluste in den Drähten aber auch zur Bestimmung der Induktivität des Bauelementes wird die vollständige magnetische Feldstärke im Bereich der felderregenden Windungen benötigt. Die felderregenden Ströme  $I_n$  sind eingeprägt; ihre magnetische Feldstärke  $\underline{\vec{H}}_f$  kann im ganzen Raum berechnet werden, allerdings noch ohne den E-Kern zu berücksichtigen. Zur Ermittlung des Beitrages des E-Kernes  $\underline{\vec{H}}_\mu$  zur gesamten magnetischen



**Abbildung 3.2:** Spule auf hochpermeablem E-Kern

Feldstärke wird im folgenden Abschnitt der magnetisierte Ferritkern durch eine Ersatzanordnung aus Magnetisierungsströmen ersetzt, deren Elemente (im Gegensatz zu [36] und [37]) gemäß Abschnitt 3.3 mit Hilfe eines Gleichungssystems aus den Randbedingungen auf der Kern-Oberfläche bestimmt werden.

### 3 Stationäre magnetische Ferritkern-Ersatzanordnung

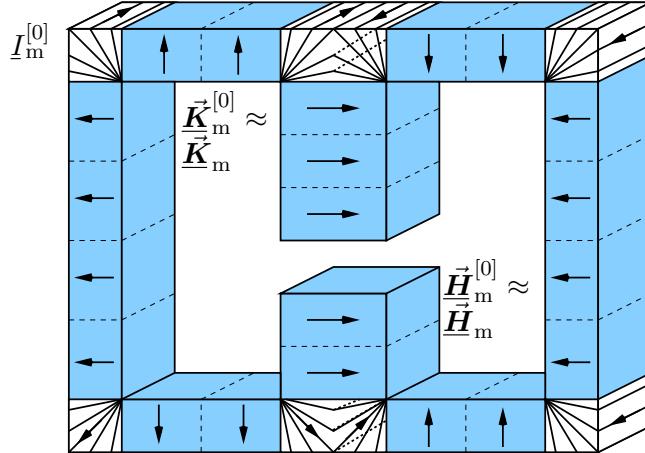
Die Magnetisierung des Kernes wird zur Vereinfachung der Aufgabenstellung zunächst als bereichsweise homogen angenommen ( $M = \text{const.}$ ). Unter diesen Voraussetzungen ist im Kern keine räumliche Magnetisierungsstromverteilung  $\vec{J}_m$  vorhanden, da

$$\text{rot } \underline{\vec{M}} = \vec{J}_m = \vec{0}. \quad (3.10)$$

Einzig auf den Oberflächen ist die Tangentialkomponente der Magnetisierung  $\vec{M}$  unstetig. Da die Tangentialkomponente der erregenden Feldstärke  $\vec{H}$  jedoch stetig ist, folgt aus Gl. (2.10 f) und der Randbedingung (2.9 d), dass auf der Kernoberfläche ein Magnetisierungsstrombelag  $\vec{K}_m$  fließen muss. Die magnetische Feldstärke  $\vec{H}_m$  dieses Magnetisierungsstrombelages kann gemäß Gl. (2.3) berechnet werden. Aufgrund der numerischen Implementierung wird jedoch nur eine hinreichend gute Näherung der Strombeläge  $\vec{K}_m^{[0]} \approx \vec{K}_m$  ermittelt werden können, deren Magnetfeld auch nur eine gute Näherung

$$\underline{\vec{H}}_m^{[0]} \approx \underline{\vec{H}}_m = \underline{\vec{H}}_\mu \quad (3.11)$$

für den Beitrag  $\underline{\vec{H}}_\mu$  des Ferritkernes zum gesamten Magnetfeld sein kann. Mit Hilfe der Erkenntnisse aus Abschnitt 3.1 soll nun der magnetisierte Kern aus Abbildung 3.2 durch eine Anordnung aus Magnetisierungsstrombelägen auf der Kernoberfläche ersetzt werden, wie sie Abbildung 3.3 zeigt. Zunächst ist eine Diskretisierung der Kernoberfläche erforderlich. Im be-

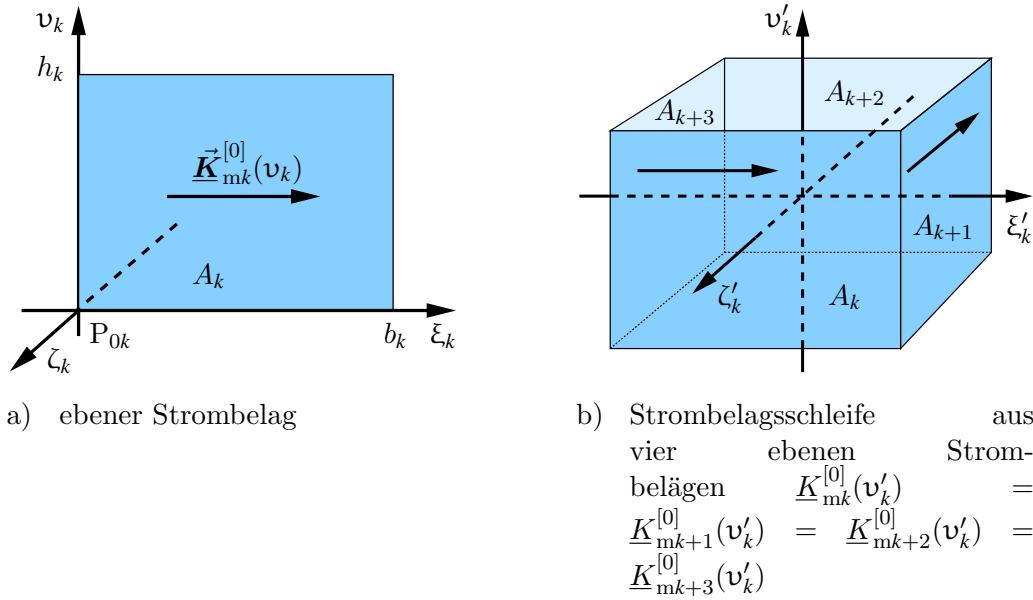


**Abbildung 3.3:** E-Kern Ersatzanordnung aus Strombelägen und Linienströmen

trachteten Beispiel wird die Kurve  $C$  als der Verlauf der mittleren magnetischen Flusslinie im Kern der Abbildung 3.2 angenommen. Die Magnetisierungsstromschleifen der Abbildung 3.3 umschließen Teilstücke der Kurve  $C$  im Rechtsschraubensinn. Die Diskretisierung der Oberfläche erfolgt am einfachsten durch eine Diskretisierung der Kurve  $C$  in Teilstücke, deren Längen den Höhen der Magnetisierungsstrombelagschleifen entsprechen.

Die Außen-, Mittel-, oberen und die unteren Schenkel des Kernes werden durch Strombelagschleifen rechteckförmigen Querschnittes ersetzt, wie in Abbildung 3.4 dargestellt. Die  $v_k$ -Achse verläuft parallel zu einem Stück der Länge  $h_k$  der Kurve  $C$ . Insgesamt enthalte die Ersatzanordnung  $N_K$  Strombelagschleifen.

Die Ecken der Ersatzanordnung werden aus Strombelagschleifen zusammengesetzt wie in Abbildung 3.5 dargestellt. Die Kurven  $C_i$  bzw.  $C_j$  sind Teilstücke der Kurve  $C$ . Ihre Längen



**Abbildung 3.4:** Strombeläge als Teile der Ferritkern-Ersatzanordnung

sind  $l_{Ci}$  bzw.  $l_{Cj}$ . Für eine hinreichend genaue Felddarstellung ist eine Anzahl  $N_I$  solcher Strombelagsschleifen in den Ecken des Kernes erforderlich. Alle Magnetisierungsstromschleifen zusammen decken die Oberfläche des Kernes vollständig ab und die Länge  $l_C$  der Kurve  $C$  ist somit  $l_C = \sum_{k=1}^{N_K} h_k + \sum_{i=1}^{N_I} l_{Ci}$ .

Werden zur Berechnung der magnetischen Feldstärken der Anordnung aus erregenden Strömen und der Kern-Ersatzanordnung die Integralgleichungen aus Abschnitt 2.1 verwendet, so sind die maxwellschen Gleichungen erfüllt. Die Magnetisierungsströme werden im folgenden Abschnitt so ermittelt, dass die magnetische Feldstärke der Magnetisierungsstromschleifen im Bereich der Wicklungen in guter Näherung der gesuchten magnetischen Feldstärke des magnetisierten Ferritkernes der Abbildung 3.2 entspricht.

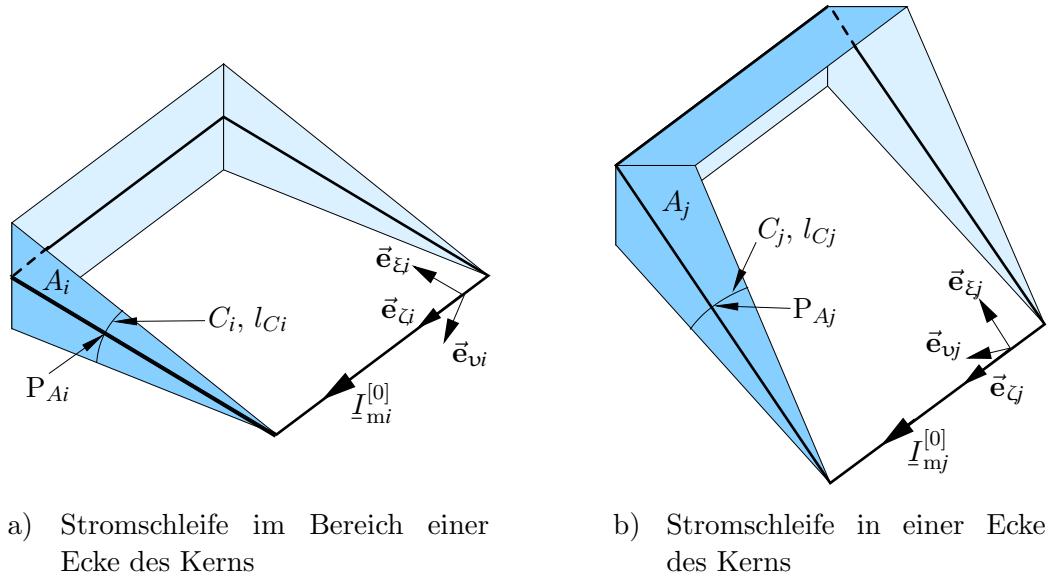
Das Verfahren kann für hochpermeable Teilbereiche komplexer Form verwendet werden, solange das Material im näherungsweise linearen Kennlinienbereich betrieben wird. Für die vorliegende Arbeit sind neben unzähligen weiteren Kernformen vor allem von Interesse

**E-Kerne** mit rechteckförmigen Mittel- und Außenschenkeln; die felderregenden Windungen werden i.d.R. auf einen Wickelkörper rechteckförmigen Querschnitts um den Mittelschenkel gewickelt,

**Stabkerne** mit rechteckförmiger oder kreisförmiger Querschnittsfläche.

**UI-Kerne** aus einem U-Kern mit rechteckförmigem Querschnitt und einem Joch ebenfalls rechteckförmigen Querschnittes,

**ETD-Kerne** mit rundem Mittelschenkel und Außenschenkeln rechteckförmigen Querschnitts; die Transformatorkreisläufe werden auf einen Wickelkörper kreisförmigen Querschnitts um den Mittelschenkel aufgebracht.



a) Stromschleife im Bereich einer Ecke des Kerns      b) Stromschleife in einer Ecke des Kerns

**Abbildung 3.5:** Stromschleifen als Teil der Ferritkern-Ersatzanordnung

**P-Kerne** mit rundem Mittelschenkel, die rotationssymmetrisch das Wickelfenster fast vollständig umschließen (Topfkerne).

Die genannten Kerne können durch eine Ersatzanordnung aus Magnetisierungsstromschleifen beschrieben werden. In Anhang B sind alle notwendigen Elemente sowie deren Magnetfelder und Vektorpotentiale zusammengetragen und bestimmt worden.

### 3.3 Ermittlung der Magnetisierungsströme

Die magnetische Feldstärke der Kern-Ersatzanordnung aus Magnetisierungsstromschleifen kann analytisch berechnet werden. Die Magnetisierungsströme sind bislang jedoch noch unbekannt. Sie sind aus der Erfüllung der Randbedingung (3.6) mit Gl. (3.8) auf der Kernoberfläche zu ermitteln.

Die Magnetisierung im Ferritkern wird nun nicht mehr als homogen vorausgesetzt. Neben der Annahme linearer Materialeigenschaften sind aufgrund der Geometrie der betrachteten Anordnungen weitere Vereinfachungen sinnvoll. Es werden zunächst Strombelagselemente gemäß der Abbildung 3.4 betrachtet. Die Magnetisierung des Kernes wird abschnittsweise in guter Näherung parallel zur  $v_k$ -Achse ausgerichtet sein, so dass Schleifen aus Strombelägen gemäß Abbildung 3.4 b) aus einzelnen Strombelagselementen der Form der Abbildung 3.4 a) den magnetischen Fluss im Kern im Rechtsschraubensinn umfassen. Der Strombelag  $\vec{K}_{mk}^{[0]}$  sei eine Funktion der Koordinaten  $v_k$ . Bei hinreichend genauer Diskretisierung der Kernoberfläche wird eine Beschreibung der Ortsabhängigkeit des Strombelages durch eine lineare Funktion ausreichen.

Zur Verallgemeinerung der Schreibweise soll ein beliebiger Strombelag  $\vec{K}_{mk}^{[0]}$  gemäß Abbildung 3.4 a) zunächst als lineare Funktion eines beliebigen Ortsvektors  $\vec{r}$  dargestellt werden. Der Ursprung  $P_{0k}$  des Koordinatensystems  $(\xi_k, v_k, \zeta_k)$  wird durch den Ortsvektor  $\vec{r}_{0k}$  beschrieben.

Der Einheitsvektor  $\vec{e}_{\xi k}$  zeigt in Flussrichtung des Strombelages  $\vec{K}_{mk}^{[0]}$  entlang der  $\xi_k$ -Achse und spannt mit dem Einheitsvektor  $\vec{e}_{vk}$  die  $\xi_k - v_k$ -Ebene auf, in welcher der Strombelag fließt. Der letzte Einheitsvektor wird durch ein Kreuzprodukt erzeugt:

$$\vec{e}_{\zeta k} := \vec{e}_{\xi k} \times \vec{e}_{vk}. \quad (3.12)$$

Der Strombelag selbst wird als Superposition zweier linearer Anteile dargestellt

$$\vec{K}_{m1k}^{[0]}(\vec{r}) := \underline{K}_{m1k}^{[0]} s_{Ak}(\vec{r}) r_k(\vec{r}) \vec{e}_{\xi k}, \quad (3.13 \text{ a})$$

$$\vec{K}_{m2k}^{[0]}(\vec{r}) := \underline{K}_{m2k}^{[0]} s_{Ak}(\vec{r}) [1 - r_k(\vec{r})] \vec{e}_{\xi k}, \quad (3.13 \text{ b})$$

$$\vec{K}_{mk}^{[0]}(\vec{r}) := \vec{K}_{m1k}^{[0]}(\vec{r}) + \vec{K}_{m2k}^{[0]}(\vec{r}) \quad (3.13 \text{ c})$$

mit der Sprungfunktion

$$s_{Ak}(\vec{r}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \begin{aligned} 0 \leq \vec{e}_{\xi k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0k}) &< b_k \quad \wedge \\ 0 \leq \vec{e}_{vk} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0k}) &< h_k \quad \wedge \\ \vec{e}_{\zeta k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0k}) &= 0 \end{aligned} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.14)$$

und der auf die Elementenhöhe  $h_k$  normierten Länge

$$r_k(\vec{r}) := \frac{\vec{e}_{vk} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0k})}{h_k} = \frac{v_k}{h_k} \quad (3.15)$$

der Projektion des Vektors  $\vec{r} - \vec{r}_{0k}$  auf die  $v_k$ -Achse. Diese Darstellung vereinfacht die Aufstellung eines linearen Gleichungssystems, denn auch die magnetische Feldstärke des betrachteten Strombelages ist eine Superposition zweier gemäß Gl. (3.9) normierter Feldstärkeanteile

$$\vec{H}_{K1k}^{[0]}(\vec{r}_P) = \underline{K}_{m1k}^{[0]} \vec{F}_{K1k}^{[0]}(\vec{r}_P) \quad \text{und} \quad (3.16 \text{ a})$$

$$\vec{H}_{K2k}^{[0]}(\vec{r}_P) = \underline{K}_{m2k}^{[0]} \vec{F}_{K2k}^{[0]}(\vec{r}_P); \quad (3.16 \text{ b})$$

$$\vec{H}_{Kk}^{[0]}(\vec{r}_P) = \vec{H}_{K1k}^{[0]}(\vec{r}_P) + \vec{H}_{K2k}^{[0]}(\vec{r}_P). \quad (3.16 \text{ c})$$

In einem beliebigen Punkt  $P_{Ak}$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_{Ak}$  auf der Fläche  $A_k$ , auf welcher der Strombelag  $\vec{K}_{mk}^{[0]}$  fließe, gelte für das Magnetfeld hingegen

$$\vec{e}_{\zeta k} \times \vec{H}_{Kk}^{[0]}(\vec{r}_{Ak}) := \vec{0}. \quad (3.16 \text{ d})$$

Mit den Erkenntnissen aus Abschnitt 2.1 können die normierten magnetischen Feldstärken analytisch berechnet werden und dürfen somit als bekannt vorausgesetzt werden. Für die in dieser Arbeit verwendeten Anordnungen sind die normierten magnetischen Feldstärken in Anhang B ermittelt und zusammengetragen worden. Die skalaren Strombeläge  $\underline{K}_{m1k}^{[0]}$  und  $\underline{K}_{m2k}^{[0]}$  sind jedoch noch unbekannt.

Werden die Stromschleifen gemäß der Abbildung 3.5 a) betrachtet, so ist die Magnetisierung des Kernes in guter Näherung parallel zum Einheitsvektor  $\vec{e}_{vi}$  ausgerichtet, so dass der magnetische Fluss im Kern im Rechtsschraubensinn von den Stromschleifen umfasst wird. Nur auf einem Teilstück einer Stromschleife fließt der Strom  $I_{mi}^{[0]}$  linienförmig entlang einer Strecke.

### 3 Stationäre magnetische Ferritkern-Ersatzanordnung

Auf den restlichen drei Teilstücken wird der Strom verteilt in Form eines Strombelages fließen, welcher im Punkt  $P_{Ai}$  den Wert  $\underline{I}_{mi}^{[0]}/l_{Ci}$  annimmt. Die Betrachtung der Stromschleife in Abbildung 3.5 b) erfolgt analog dazu.

Auch für die Stromschleifen der Abbildung 3.5 können die normierten magnetischen Feldstärken durch Anwendung der Integralgleichungen des Abschnittes 2.1 analytisch berechnet werden. Sie sind ebenfalls in Anhang B dokumentiert und dürfen somit als bekannt vorausgesetzt werden

$$\underline{\underline{H}}_{Ii}^{[0]}(\vec{r}_P) = \underline{I}_{mi}^{[0]} \vec{F}_{Ii}^{[0]}(\vec{r}_P). \quad (3.16\text{ e})$$

In einem beliebigen Punkt  $P_{Ai}$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_{Ai}$  auf der Fläche  $A_i$ , auf welcher der Gesamtstrom  $I_i$  in Richtung von  $\vec{e}_{\xi_i}$  fließe, wird das Magnetfeld des Stromes analog zur Gl. (3.16 d) definiert

$$\vec{e}_{\xi_i} \times \underline{\underline{H}}_{Ii}^{[0]}(\vec{r}_{Ai}) := \vec{0}. \quad (3.16\text{ f})$$

Die Ströme  $\underline{I}_{mi}^{[0]}$  sind zu ermitteln.

Das gesamte Magnetfeld kann nun gemäß Gln. (3.1) und (3.11) als Superposition

$$\vec{H} = \underline{\underline{H}}_f + \underline{\underline{H}}_\mu \approx \underline{\underline{H}}^{[0]} := \underline{\underline{H}}_f + \underline{\underline{H}}_m^{[0]} \quad (3.17)$$

aus der erregenden Feldstärke  $\underline{\underline{H}}_f$  und dem Feldstärkebeitrag  $\underline{\underline{H}}_\mu$  des Ferritkernes dargestellt werden. Der Beitrag der Ferritkern-Ersatzanordnung zum gesamten Magnetfeld ist die Superposition der Magnetfelder aller  $N_K$  Strombeläge und  $N_I$  Stromschleifen und somit eine Linear-kombination

$$\begin{aligned} \underline{\underline{H}}_\mu(\vec{r}_P) \approx \underline{\underline{H}}_m^{[0]}(\vec{r}_P) &= \sum_{k=1}^{N_K} \underline{\underline{H}}_{Kk}^{[0]}(\vec{r}_P) + \sum_{i=1}^{N_I} \underline{\underline{H}}_{Ii}^{[0]}(\vec{r}_P) \\ &= \sum_{k=1}^{N_K} \left[ \underline{K}_{m1k}^{[0]} \vec{F}_{K1k}^{[0]}(\vec{r}_P) + \underline{K}_{m2k}^{[0]} \vec{F}_{K2k}^{[0]}(\vec{r}_P) \right] + \sum_{i=1}^{N_I} \underline{I}_{mi}^{[0]} \vec{F}_{Ii}^{[0]}(\vec{r}_P) \end{aligned} \quad (3.18)$$

der oben genannten normierten Feldstärken mit den Magnetisierungsstrombelägen und Magnetisierungsströmen als Koeffizienten.

Für die Bestimmung der bislang noch unbekannten, linear interpolierten Ströme und Strombeläge ist die magnetische Randbedingung (3.4) auf der Oberfläche  $\partial V$  des Kernvolumens  $V$  auszuwerten

$$\begin{aligned} \vec{L}_{\langle \partial V \rangle} \otimes \underline{\underline{H}}^{[0]}(\vec{r}_{\partial V}) &= \vec{n}_{\partial V}(\vec{r}_{\partial V}) \\ &\times \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[ \underline{\underline{H}}^{[0]}(\vec{r}_{\partial V} + |\zeta| \vec{n}_{\partial V}) - \underline{\underline{H}}^{[0]}(\vec{r}_{\partial V} - |\zeta| \vec{n}_{\partial V}) \right] \\ &\approx \underline{\underline{K}}_m^{[0]}(\vec{r}_{\partial V}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Da am Ort des Strombelages  $\underline{\underline{K}}_m^{[0]}$  gemäß der Definitionen (3.16 d) und (3.16 f) kein eigener Feldbeitrag des dort fließenden Strombelages zur Tangentialkomponente des Magnetfeldes  $\underline{\underline{H}}_\mu^{[0]}$  der Kern-Ersatzanordnung einfließt, wird aus der Randbedingung (3.19) nach Anwendung der Gl. (3.6) mit Gl. (3.8)

$$\underline{\underline{K}}_m^{[0]}(\vec{r}_{\partial V}) \approx 2 \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 + \mu} \vec{n}_{\partial V}(\vec{r}_{\partial V}) \times \left[ \underline{\underline{H}}_f(\vec{r}_{\partial V}) + \underline{\underline{H}}_m^{[0]}(\vec{r}_{\partial V}) \right]. \quad (3.20)$$

Diese Forderung ist auf der gesamten Oberfläche  $\partial V_\mu$  des Ferritkernes zu erfüllen. Die Ferritkern-Ersatzanordnung ist jedoch nur eine lineare Interpolation der Magnetisierungsströme des realen Ferritkernes. Außerdem kann die Randbedingung bei numerischen Verfahren nicht auf der gesamten Oberfläche berechnet werden, so dass gemäß Gl. (2.18) zumindest der begangene Fehler

$$\delta_{\partial V}^2 = \int_{\partial V} g_{\partial V}(\vec{r}) \left\| \vec{L}_{(\partial V)} \otimes \vec{\underline{H}}^{[0]}(\vec{r}) - \vec{\underline{K}}_m^{[0]}(\vec{r}) \right\|_2^2 da \quad (3.21)$$

minimiert werden soll. Die Gewichtungsfunktion  $g_{\partial V}$  wird an dieser Stelle so gewählt, dass sie zu einer numerischen Auswertbarkeit des Integrals in Form eines linearen Gleichungssystems führt.

Eine einfache Wahl ist das sogenannte *Point Matching* (vergl. Hafner [18]). Es werden  $N_G$  Punkte  $P_{\partial V,s}$  mit  $s \in \{1, \dots, N_G\}$  auf der Kernoberfläche  $\partial V_\mu$  definiert. Ihre Ortsvektoren sind  $\vec{r}_{\partial V,s}$  und die Gewichtungsfunktion ist eine Linearkombination von Diracschen Deltafunktionen

$$g_{\partial V}(\vec{r}) := \sum_{s \in \{1, \dots, N_G\}} g_s^2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\partial V,s}). \quad (3.22)$$

Dies führt bei der Auswertung des Integrals (3.21) dazu, dass der Fehler bei der Erfüllung der Randbedingung (3.19) in den Punkten  $P_{\partial V,s}$  minimiert wird. Die Gleichungen in den Punkten können mit Hilfe der Koeffizienten  $g_s$  gewichtet werden. Werden die Punkte an genau  $N_G = 2N_K + N_I$  verschiedenen Orten gewählt, so resultiert ein System linear unabhängiger Gleichungen:

$$\mathbf{A}_m \mathbf{i}_m = \mathbf{h}_f, \quad (3.23)$$

wobei  $\mathbf{i}_m$  ein Vektor aus den Magnetisierungsströmen und -strombelägen der Ferritkern-Ersatzanordnung ist und  $\mathbf{h}_f$  die Feldstärken der Stromanordnung ohne Ferritkern an den Orten  $P_{\partial V,s}$  — gewichtet mit  $g_s$  — enthält. Das Gleichungssystem besteht aus genau  $N_G$  Gleichungen und der Fehler verschwindet  $\delta_{\partial V}^2 = 0$ . Die Definition der Koeffizienten  $g_s$  ist dann irrelevant. Dies beinhaltet jedoch noch keine Aussage über die Qualität der Approximation bzgl. der Erfüllung der Randbedingung zwischen den gewählten Punkten  $P_{\partial V,s}$ . Um die Randbedingung (3.19) auf dem ganzen Rand möglichst gut zu erfüllen, müsste eine kontinuierliche Gewichtungsfunktion definiert werden. Dies erhöht den Rechenaufwand oder führt gar zu numerischen Integrationen bei der Ermittlung des Gleichungssystems. Alternativ können die Auswertungspunkte  $P_{\partial V,s}$  dichter positioniert und ihre Anzahl erhöht werden  $N_G > 2N_K + N_I$ . Dies führt jedoch zu einem überbestimmten Gleichungssystem analog zur Gl. (3.23).

Die Koeffizienten  $g_s$  sind nun wieder frei zur Gewichtung der Randbedingungen in den Auswertungspunkten definierbar. Die Integralgleichung (3.21) kann für diesen Fall des überbestimmten Gleichungssystems laut Zürmühl [40] in ein lösbares Gleichungssystem überführt werden, wobei der Fehler gemäß Gl. (3.21) genau für

$$\mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_m \mathbf{i}_m = \mathbf{A}_m^T \mathbf{h}_f \quad (3.24)$$

minimal wird.

Für die betrachtete Ferritkern-Ersatzanordnung wird angenommen, dass der Magnetisierungsstrombelag auf der Oberfläche  $\partial V$  stetig ist. Für benachbarte Magnetisierungsstromschleifen  $k$  und  $k+1$  bedeutet diese Forderung

$$\underline{K}_{m1(k+1)}^{[0]} = \underline{K}_{m2k}^{[0]}. \quad (3.25)$$

### 3 Stationäre magnetische Ferritkern-Ersatzanordnung

Dann führt die Wahl von genau einem Auswertungspunkt auf jeder Magnetisierungsstrombelagschleife (und jeder Magnetisierungsstromschleife), zu einem lösbar, linear unabhängigen Gleichungssystem. Sobald die Anzahl der Punkte erhöht wird, ist das Gleichungssystem überbestimmt.

In der folgenden Betrachtung sollen die einzelnen Gleichungen aus der Randbedingung (3.19) an den  $N_G$  Orten  $P_{\partial V_s}$  formuliert werden, so dass nach abschließender Gewichtung ein Gleichungssystem der Form (3.23) notiert werden kann.

Fällt ein Punkt  $P_{\partial V_s}$  in die Fläche  $A_k$ , auf welcher der Strombelag  $\vec{K}_{mk}^{[0]}$  fließt, so resultiert aus Gl. (3.19) bzw. Gl. (3.20) unter Einbeziehung der Gewichtung

$$\begin{aligned} g_s \left\{ r_k(\vec{r}_{\partial V_s}) \left[ \underline{K}_{m1k}^{[0]} - \underline{K}_{m2k}^{[0]} \right] + \underline{K}_{m2k}^{[0]} \right\} = \\ = 2 g_s \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \vec{e}_{\xi k} \cdot \left\{ \vec{e}_{\zeta k} \times \left[ \vec{H}_f(\vec{r}_{\partial V_s}) + \vec{H}_m^{[0]}(\vec{r}_{\partial V_s}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.26 \text{ a})$$

Fällt der Punkt  $P_{\partial V_s}$  in die Fläche  $A_i$ , auf welcher der Strom  $I_{mi}^{[0]}$  fließt, so ist zunächst gemäß der Abbildung 3.5 eine korrespondierende Feldlinienlänge  $l_{Cs}$  zu definieren und es resultiert aus Gl. (3.19) bzw. Gl. (3.20) unter Einbeziehung der Gewichtung

$$g_s \frac{I_{mi}^{[0]}}{l_{Cs}} = g_s \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \vec{e}_{\xi i} \cdot \left\{ \vec{e}_{\zeta i} \times \left[ \vec{H}_f(\vec{r}_{\partial V_s}) + \vec{H}_m^{[0]}(\vec{r}_{\partial V_s}) \right] \right\}. \quad (3.26 \text{ b})$$

Die Zusammenfassung der Gleichungen (3.25) und (3.26 a, b) führt auf ein Gleichungssystem der Form (3.23) zur Ermittlung der Magnetisierungsströme und Magnetisierungsstrombeläge der Kern-Ersatzanordnung.

## 3.4 Zusammenfassung

Zu einer gegebenen Transformatoranordnung aus Ferritkern und Wicklungen kann für einen Betriebszustand mit eingeprägten Wicklungsströmen eine Ersatzanordnung für den Ferritkern ermittelt werden. Die Ersatzanordnung besteht aus Magnetisierungsstromschleifen. Im Modell verlaufen die Magnetisierungsstromschleifen lediglich auf den Oberflächen der Kernbereiche. Für die Ermittlung der Feldstärke im Bereich der felderregenden Wicklungen und auch für die Ermittlung von Transformator-Induktivitäten werden Messungen in Kapitel 9 belegen, dass diese Annahmen zu hinreichend genauen Ergebnissen führen. Zur Bestimmung der Magnetisierung des Ferritkernes ist die Diskretisierung der Magnetisierungsströme zu grob. Für diesbezügliche Berechnungen sei auf Verfahren mit einer feineren Diskretisierung des Kernvolumens verwiesen, wie z.B. bei Fränkel [16].

Zur Ermittlung einer Ferritkern-Ersatzanordnung muss zunächst der Verlauf einer mittleren Feldlinie  $C$  im Kern abgeschätzt werden. Die so ermittelte Feldlinie wird auf die Kernoberfläche projiziert und in Teilstrecken diskretisiert. Die Teilstrecken werden mit Magnetisierungsstrombelagschleifen oder Magnetisierungsstromschleifen im Rechtsschraubensinn umschlossen, deren Ströme und Strombeläge jedoch zunächst unbekannt sind. Die Stromschleifen sollen die Kernoberfläche vollständig abdecken und nicht überlappen. Durch Erfüllung der Randbedingungen — insbesondere für die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke — auf der

Kernoberfläche wird ein Gleichungssystem aufgestellt, dessen Unbekannte die gesuchten Ströme und Strombeläge sind. Die erregenden Feldstärken und auch die Koeffizienten des Gleichungssystems lassen sich mit Hilfe von Integralgleichungen nach Helmholtz analytisch aus der Geometrie der Ersatzanordnung und der felderregenden Wicklungen und Ströme berechnen.

Die Genauigkeit der Feldberechnung mit Hilfe einer solchen magnetischen Ferritkern-Ersatzanordnung kann durch eine feinere Diskretisierung der Kernoberfläche erhöht werden. Eine ineinanderschachtelung mehrerer Ersatzanordnungen erhöht ebenfalls die Genauigkeit der Feldberechnung, zumal so auch eine inhomogene Magnetisierung des Kerns berücksichtigt wird. Allerdings ist die Verschachtelung von Ersatzanordnungen stark abhängig von der Kerngeometrie.

### *3 Stationäre magnetische Ferritkern-Ersatzanordnung*

# 4 Verlustmechanismen und deren Modellierung

Auf Basis der einleitenden Gruppierung der Verlustmechanismen in Kern und Wicklung sollen diese nun getrennt untersucht werden. Soweit möglich wird auf bekannte Verfahren zurückgegriffen. Der Schwerpunkt der Arbeit liegt jedoch eindeutig bei der Ermittlung der Wicklungsverluste. Grund hierfür ist die stets notwendige Feldberechnung im betrachteten Bereich. Die in Kapitel 3 vorgestellte Kern-Ersatzanordnung reicht zur Feldberechnung im Kernvolumen und somit zur Ermittlung der Kernverluste nicht aus. Zudem wird dort keine Leitfähigkeit berücksichtigt. Die verwendete Ersatzanordnung wurde nur für die Berechnung des Ferritkernbeitrages zur magnetischen Feldstärke im Bereich der Wicklung entworfen.

## 4.1 Kernverluste

Gemäß Abschnitt 3.4 ist für die Berechnung der im Ferritkern anfallenden Verluste aufgrund von Hysterese und Wirbelströmen ein geeignetes Verfahren zur Feldberechnung auszuwählen.

### 4.1.1 Spezifische Kernverluste

Die Berechnung der im Kernvolumen anfallenden spezifischen Verlustleistung unterscheidet sich von allen weiteren Berechnungen aufgrund des von der Materialtemperatur  $\vartheta$  abhängigen und nichtlinearen, kausalen Zusammenhangs zwischen magnetischer Feldstärke und Induktion im hochpermeablen Ferritkern

$$\vec{H}(t_0) = \vec{H}\left(\vec{B}(t \leq t_0), \vartheta\right) \quad \text{bzw.} \quad \vec{B}(t_0) = \vec{B}\left(\vec{H}(t \leq t_0), \vartheta\right). \quad (4.1)$$

Aufgrund der Hysterese muss Gl. (4.1) statt Gl. (1.1 b) als Materialgleichung für die Verknüpfung der Maxwellgleichungen herangezogen werden. Die Nichtlinearität verbietet zudem die Betrachtung der Problemstellung im Frequenzbereich und eine Verknüpfung der Maxwellgleichungen im Zeitbereich führt unter der Voraussetzung Ohm'scher Leiter und linearer Dielektrika zur Differentialgleichung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = -\kappa \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (4.2)$$

Üblicherweise wird der Verschiebungsstrom im Kern gegenüber dem Ohm'schen Beitrag als vernachlässigbar angenommen, so dass bzgl. der Zeit eine Differentialgleichung erster Ordnung resultiert

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = -\kappa \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.3)$$

welche aufgrund der oben genannten nichtlinearen Verknüpfung (4.1) der gesuchten Funktionen  $\vec{H}$  und  $\vec{B}$  nicht weiter vereinfacht werden kann. Für die technischen Ferritmaterialien wird

## 4 Verlustmechanismen und deren Modellierung

die spezifische Verlustleistung vom Hersteller i.d.R. für sinusförmige Erregung

$$B = \hat{B} \sin(2\pi ft)$$

als Funktion der Aussteuerung  $\hat{B}$ , der Frequenz  $f$  und der Materialtemperatur  $\vartheta$  angegeben (z.B. [24]). Im Rahmen dieser Arbeit wird zur Abschätzung der Kernverluste eine modifizierte Steinmetz-Formel verwendet (vergleiche z.B. Mulder [29], Albach [12, 4])

$$P_s = C_m f^x \hat{B}^y (a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2) V_e \quad \text{mit } \tau = \frac{\vartheta}{100 \text{ } ^\circ\text{C}}. \quad (4.4)$$

Die Koeffizienten  $C_m, x, y, a_0, a_1, a_2$  können anhand der Graphen in den Materialdatenbüchern bestimmt werden. Das effektive Volumen  $V_e$  wird ebenfalls vom Kernhersteller angegeben. Für nicht sinusförmige Erregungen ist aufgrund der Nichtlinearität der Materialeigenschaften jedoch keine Superposition einzelner spektraler Anteile möglich. Albach und Dürbaum [12] definieren zur Abschätzung der spezifischen Kernverluste für nicht sinusförmige periodische Erregung eine Ersatzfrequenz  $\tilde{f}$  anhand des arithmetischen Mittels der Anstiegs geschwindigkeit der magnetischen Induktion, welche (gemäß [23]) in die lokale Leistungsdichte

$$p_m = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.5)$$

im Ferritkern eingeht. Anhand von Messungen wird belegt, dass diese Ersatzfrequenz zur Berechnung der spezifischen Kernverluste mit Hilfe der Steinmetz-Formel (4.4) verwendet werden kann.

### 4.1.2 Wirbelstromverluste im Ferritkern

Die Wirbelstromverluste werden aus den elektrischen Feldgrößen durch eine Integration über das Volumen des leitfähigen Ferritkernes entsprechend Gl. (1.20) berechnet.

## 4.2 Wicklungsverluste

Auch die Drahtwindungen sind nicht ideal. Eine Wicklung bestehe aus  $N$  Windungen eines Drahts der Querschnittsfläche  $A_L$  und der Länge  $l_L$ . Aufgrund der endlichen Leitfähigkeit wird auch in ihr Joule'sche Wärme gemäß Gl. (1.20) erzeugt. Diese Verlustleistung ist auf die im Leiter fließenden Ströme zurückzuführen. Sie wird in den kommenden Abschnitten geschlossen berechnet und erst später gemäß der einleitenden Gruppierung in

- Ohm'sche Verluste,
- Skinverluste und
- Proximityverluste

aufgeteilt.

### 4.3 Runddraht im externen magnetischen Feld

Der dem Leiter eingeprägte Stromverlauf hat ein dynamisches elektromagnetisches Feld sowohl innerhalb als auch außerhalb des betrachteten Leiters zur Folge. Im gesamten Raum sind elektrische und magnetische Feldgrößen des betrachteten Leiters über das Induktionsgesetz miteinander verknüpft. Im Leiter kommt die Verknüpfung durch das Ohm'sche Gesetz hinzu. Wirbelströme werden induziert, die wiederum aufgrund der endlichen Leitfähigkeit zu Verlusten führen. In einem Mehrleiterystem befindet sich jeder Leiter zudem im externen elektromagnetischen Feld der benachbarten Leiter, welches im betrachteten Leiter über die Verknüpfung durch Induktions- und Ohm'sches Gesetz Wirbelströme induziert und somit zu weiteren Verlusten führt. In den folgenden Abschnitten wird ein Leiter mit rundem Querschnitt im externen Magnetfeld untersucht wie in Abbildung 4.1 veranschaulicht. Für die Betrachtung der Problemstellung kann die Wel-

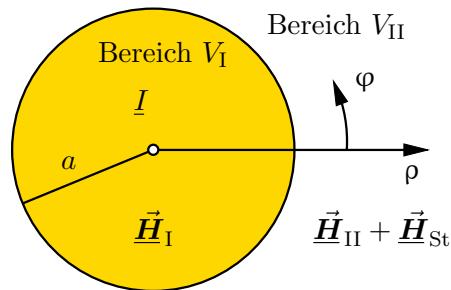


Abbildung 4.1: Kupferdraht im externen Magnetfeld

lenausbreitung gegenüber leitungsgebundenen Strömen vernachlässigt werden ( $|j\omega \underline{D}| \ll |\underline{J}|$ ). Dies führt zur Annahme der Eichung (1.18) und statt der Feldgleichung (1.19) ist im gesamten Raum ( $\rho \in [0, \infty[, \varphi \in [0, 2\pi[, z \in ]-\infty, +\infty[$ ) die Skingleichung für das Vektorpotential zu erfüllen

$$\text{rot rot } \underline{A} + \underline{\alpha}^2 \underline{A} = \underline{0}, \quad (4.6 \text{ a})$$

wobei der betrachtete Bereich in das Leiterraum (Bereich  $V_I$ ) und den Außenraum  $V_{II}$  unterteilt werden kann mit

$$\underline{\alpha}^2 = \begin{cases} j\omega \kappa \mu_0 & \text{für } \rho \leq a \quad (\text{im Leiter}) \\ 0 & \text{für } \rho > a \quad (\text{außerhalb des Leiters}). \end{cases} \quad (4.6 \text{ b})$$

Im Leiter fließe der Strom

$$I = \iint_A \underline{J}(\rho, \varphi) \cdot d\underline{a}. \quad (4.7)$$

Der Leiter besitzt keine magnetische Polarisierbarkeit und so enthält die Stromdichte  $\underline{J}$  keinerlei Magnetisierungsstromanteile. Die Ströme und Magnetisierungen im Außenraum werden durch ihr Magnetfeld  $\underline{H}_{St}$  beschrieben. Die Problemstellung wird zur Vereinfachung der Darstellung als eben bezüglich der Koordinate  $z$  angenommen, d.h.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \approx 0 \quad (4.8)$$

für alle betrachteten Funktionen und Feldgrößen ( $\underline{J} \mapsto \Phi$ , bzw.  $\underline{H} \mapsto \Phi$  u.s.w.). Im Bereich  $V_I$  beschreibt  $\underline{H}_I$  die gesamte magnetische Feldstärke. Im Bereich  $V_{II}$  ist die gesamte magnetische

Feldstärke eine Superposition aus der externen Feldstärke  $\vec{H}_{\text{St}}$  und der Feldstärke  $\vec{H}_{\text{II}}$ , welche im Außenraum durch Ströme des betreffenden Leiters hervorgerufen wird. Die Feldstärke  $\vec{H}_{\text{St}}$  hingegen wird durch Ströme in benachbarten oder entfernten Leitern und evtl. durch die Anwesenheit eines Ferritkernes verursacht. Im Rahmen der Beschreibung des Berechnungsverfahrens für die Feldstärken  $\vec{H}_{\text{I}}$  und  $\vec{H}_{\text{II}}$  wird noch detaillierter auf diese Feldstärke eingegangen. Auf dem Rand  $\rho = a$  sind die Randbedingungen (1.13 c, d) für die magnetischen Feldgrößen zu erfüllen. Zudem sind die Feldgrößen für  $\rho \rightarrow 0$  bzw.  $\rho \rightarrow \infty$  und auch überall dort endlich, wo keine Linieströme fließen. Die elektrischen Feldgrößen können mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen (1.4) und der Materialgleichungen (1.1) aus den magnetischen Feldgrößen  $\vec{B}$  und  $\underline{\vec{H}}$  berechnet werden. Aufgrund der getroffenen Vereinbarungen sind Stromdichte

$$\vec{J}(\rho, \varphi) = [\underline{J}_\rho(\rho, \varphi) \vec{e}_\rho + \underline{J}_\varphi(\rho, \varphi) \vec{e}_\varphi] + \underline{J}_z(\rho, \varphi) \vec{e}_z \quad (4.9)$$

und Vektorpotential

$$\vec{A}(\rho, \varphi) = [\underline{A}_\rho(\rho, \varphi) \vec{e}_\rho + \underline{A}_\varphi(\rho, \varphi) \vec{e}_\varphi] + \underline{A}_z(\rho, \varphi) \vec{e}_z \quad (4.10)$$

proportional  $\vec{J} = -j\omega\kappa\vec{A}$ . Zwischen Stromdichte und magnetischer Feldstärke sind jedoch nur orthogonale Komponenten miteinander verknüpft

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = \vec{J}. \quad (4.11 \text{ a})$$

Da der eingeprägte Strom in Richtung der z-Achse fließt und gemäß Gl. (4.8) keine z-Abhängigkeit vorliegt, ist eine Aufteilung in die Verknüpfungen

$$\text{rot } [\underline{H}_\rho \vec{e}_\rho + \underline{H}_\varphi \vec{e}_\varphi] = \underline{J}_z \vec{e}_z \quad (4.11 \text{ b})$$

und

$$\text{rot } [\underline{H}_z \vec{e}_z] = \underline{J}_\rho \vec{e}_\rho + \underline{J}_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (4.11 \text{ c})$$

sinnvoll. Dies führt auch zu einer Entkopplung der Problemstellung der Abbildung 4.1 für das zur z-Achse parallele Vektorpotential

$$\underline{\vec{A}}' := (\vec{e}_z \cdot \underline{\vec{A}}) \vec{e}_z = \underline{A}_z(\rho, \varphi) \vec{e}_z \quad (4.12)$$

und die zur z-Achse parallele magnetische Feldstärke  $\underline{\vec{H}}'' := \underline{H}_z \vec{e}_z$  mit dem magnetischen Vektorpotential

$$\underline{\vec{A}}'' := (\vec{e}_z \times \underline{\vec{A}}) \times \vec{e}_z = \underline{A}_\rho(\rho, \varphi) \vec{e}_\rho + \underline{A}_\varphi(\rho, \varphi) \vec{e}_\varphi. \quad (4.13)$$

### 4.3.1 Feldkomponenten normal zum Stromverlauf

Dieser Abschnitt gibt eine Zusammenfassung einer von Albach [2] vorgestellten iterativen Methode zur Berechnung der Hochfrequenzverluste aufgrund externer Magnetfeldkomponenten normal zum Stromverlauf wieder. Für das betrachtete Vektorpotential  $\underline{\vec{A}}' = \underline{A}_z(\rho, \varphi) \vec{e}_z$  liefert die Skin-Gleichung (4.6 a)

$$-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \underline{A}_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \underline{A}_z - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \underline{A}_z + \alpha^2 \underline{A}_z = 0. \quad (4.14)$$

Die korrespondierenden magnetischen Feldstärkekomponenten können aus dem Vektorpotential berechnet werden

$$\underline{\vec{H}}' := \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \underline{\vec{A}}' = \frac{1}{\mu_0 \rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \vec{e}_\rho - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi = \underline{H}_\rho \vec{e}_\rho + \underline{H}_\varphi \vec{e}_\varphi. \quad (4.15)$$

Zur vollständigen Beschreibung des Randwertproblems ist die Formulierung der Bestimmungsgleichungen und Randbedingungen erforderlich. Magnetische Feldstärke und Strom sind über das Durchflutungsgesetz (A.3 d) miteinander verknüpft

$$I = \oint_{\rho=a} \underline{\vec{H}}' \cdot d\vec{s}. \quad (4.16 \text{ a})$$

Alle Feldgrößen sind periodisch bzgl. der Koordinate  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Es verbleibt die Auswertung der Randbedingungen (1.13 c, d)

$$\mu_0 \underline{H}_{I\rho}(a, \varphi) = \mu_0 \underline{H}_{II\rho}(a, \varphi) + \mu_0 \underline{H}_{St\rho}(a, \varphi), \quad (4.16 \text{ b})$$

$$\underline{H}_{I\varphi}(a, \varphi) = \underline{H}_{II\varphi}(a, \varphi) + \underline{H}_{St\varphi}(a, \varphi) \quad (4.16 \text{ c})$$

und die Forderungen nach einem regulären Feld

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |A_{Iz}(\rho, \varphi)| \quad \text{existiert}, \quad (4.16 \text{ d})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} |\underline{\vec{H}}_{II}(\rho, \varphi)| = 0. \quad (4.16 \text{ e})$$

Durch Separation wird die partielle Differentialgleichung (4.14) in beiden Teilbereichen  $V_I$  und  $V_{II}$  gelöst. Im Leitervolumen  $V_I$  ist das Vektorpotential unter Berücksichtigung von Gl. (4.16 d)

$$A_{Iz} = \underline{A}_0 I_0(\underline{\alpha} \rho) + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(\underline{\alpha} \rho) (\underline{A}_k \cos k\varphi + \underline{B}_k \sin k\varphi), \quad (4.17)$$

wobei  $I_v$  die modifizierte Besselfunktion erster Art der Ordnung  $v = 0, 1, \dots$  ist. Durch Ableitung dieser z-Komponente des Vektorpotentials gemäß Gl. (4.15) (und den Ableitungsregeln gemäß [1] und [10]) sind die resultierenden Feldstärkekomponenten

$$\underline{H}_{I\rho} = \frac{\underline{\alpha}}{\mu_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\underline{\alpha} \rho} I_k(\underline{\alpha} \rho) (-\underline{A}_k \sin k\varphi + \underline{B}_k \cos k\varphi), \quad (4.18 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \underline{H}_{I\varphi} &= -\frac{\underline{\alpha} \underline{A}_0}{\mu_0} I_1(\underline{\alpha} \rho) \\ &\quad + \frac{\underline{\alpha}}{\mu_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{k}{\underline{\alpha} \rho} I_k(\underline{\alpha} \rho) - I_{k-1}(\underline{\alpha} \rho) \right] (\underline{A}_k \cos k\varphi + \underline{B}_k \sin k\varphi). \end{aligned} \quad (4.18 \text{ b})$$

Aufgrund der verschwindenden Leitfähigkeit im Außenraum  $V_{II}$  ist dort die Laplacegleichung zu erfüllen und das Vektorpotential ist dort

$$A_{IIz} = \underline{C}_0 + \underline{D}_0 \ln \frac{\rho}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a}{\rho} \right)^k (\underline{C}_k \cos k\varphi + \underline{D}_k \sin k\varphi) \quad (4.19)$$

## 4 Verlustmechanismen und deren Modellierung

mit den resultierenden Feldstärkekomponenten

$$\underline{H}_{\text{II}\rho} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a} \left( \frac{a}{\rho} \right)^{k+1} (-\underline{C}_k \sin k\varphi + \underline{D}_k \cos k\varphi), \quad (4.20 \text{ a})$$

$$\underline{H}_{\text{II}\varphi} = -\frac{\underline{D}_0}{\mu_0 \rho} + \frac{1}{\mu_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a} \left( \frac{a}{\rho} \right)^{k+1} (\underline{C}_k \cos k\varphi + \underline{D}_k \sin k\varphi). \quad (4.20 \text{ b})$$

Die zum Strom senkrechten Komponenten der externen Magnetfeldstärke werden auf dem Leiterrand  $\rho = a$  in Fourier-Reihen entwickelt

$$\underline{H}_{\text{St}\rho}(a, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{a}_k \cos k\varphi + \underline{b}_k \sin k\varphi \quad (4.21)$$

und

$$\underline{H}_{\text{St}\varphi}(a, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{c}_k \cos k\varphi + \underline{d}_k \sin k\varphi. \quad (4.22)$$

Durch Auswertung der Randbedingungen (4.16 b, c) auf die magnetischen Feldstärkekomponenten der Gln. (4.18 a, b) und Gln. (4.20 a, b) werden die noch fehlenden Koeffizienten bestimmt:

$$\underline{A}_0 = -\frac{I\mu_0}{2\pi \underline{\alpha} a I_1(\underline{\alpha} a)}, \quad (4.23 \text{ a})$$

$$\underline{B}_0 = 0, \quad (4.23 \text{ b})$$

$$\underline{C}_0 = 0, \quad (4.23 \text{ c})$$

$$\underline{D}_0 = -\frac{I\mu_0}{2\pi} \quad (4.23 \text{ d})$$

und

$$\underline{A}_k = -\frac{\mu_0 (b_k + \underline{c}_k)}{\underline{\alpha} I_{k-1}(\underline{\alpha} a)}, \quad (4.23 \text{ e})$$

$$\underline{B}_k = \frac{\mu_0 (a_k - \underline{d}_k)}{\underline{\alpha} I_{k-1}(\underline{\alpha} a)}, \quad (4.23 \text{ f})$$

$$\underline{C}_k = -\mu_0 a \left[ (b_k + \underline{c}_k) \frac{I_k(\underline{\alpha} a)}{\underline{\alpha} a I_{k-1}(\underline{\alpha} a)} - \frac{b_k}{k} \right], \quad (4.23 \text{ g})$$

$$\underline{D}_k = \mu_0 a \left[ (a_k - \underline{d}_k) \frac{I_k(\underline{\alpha} a)}{\underline{\alpha} a I_{k-1}(\underline{\alpha} a)} - \frac{a_k}{k} \right]. \quad (4.23 \text{ h})$$

Abschließend kann die elektrische Feldstärke aus dem Vektorpotential berechnet und die durch die Leiteroberfläche  $A$  aufgenommene Leistung durch Integration über den komplexen Poyntingvektor

$$\vec{S}_{\perp} = \frac{1}{2} \underline{\vec{E}}' \times \underline{\vec{H}}'^* \quad (4.24)$$

ermittelt werden. Die Verlustleistung ist hierbei

$$\begin{aligned} P_{\perp V} &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_A \left( \underline{\vec{E}}' \times \underline{\vec{H}}'^* \right) \cdot d\vec{a} \\ &= -\frac{l}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} j\omega \underline{A}_{Iz} \underline{H}_{I\varphi}^* a d\varphi. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Die Feldgleichung ist auch für den Gleichstromfall  $j\omega = 0$  erfüllt und die Verlustleistung ist eine Überlagerung

$$P_{\perp V} = P_{\text{rms}} + P_{\text{Skin}} + P_{\perp \text{Prox}} \quad (4.26)$$

aus

- der Ohm'schen Verlustleistung  $P_{\text{rms}}$ , welche auch für  $j\omega = 0$  und  $\underline{\underline{H}}_{\text{St}} = \vec{0}$  auftritt,
- der Verlustleistung  $P_{\text{Skin}}$  für  $j\omega \neq 0$  und  $\underline{\underline{H}}_{\text{St}} = \vec{0}$ ; diese Verluste werden Skinverluste genannt, und
- der Verlustleistung  $P_{\perp \text{Prox}}$ , welche sich für  $j\omega \neq 0$  aufgrund der externen Feldstärke  $\underline{\underline{H}}_{\text{St}} \neq \vec{0}$  benachbarter Leiterströme  $I$  und Magnetisierungen den zuvor genannten Verlusten überlagert. Dieser letzte Anteil wird daher Proximityverluste<sup>1</sup> genannt.

Der Index  $\perp$  deutet an, dass bislang nur die externen Magnetfeldanteile normal zum Erregerstrom betrachtet worden sind. Es sind weiter unten folglich noch Verlustleistungsanteile aufgrund der zum Erregerstrom parallelen externen Magnetfeldanteile zu ermitteln. Für den Fall  $\underline{\underline{H}}_{\text{St}} = \vec{0}$  wird der Skinfaktor  $F_S$  definiert als Verknüpfung der Ohm'schen Verluste eines Leiters mit den Gesamtverlusten desselben Leiters bei harmonischer Erregung nämlich

$$P_{\text{rms}} + P_{\text{Skin}} = \frac{II^*}{2} \frac{l}{\kappa\pi a^2} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\alpha a I_0(\alpha a)}{I_1(\alpha a)} \right\} = \frac{II^*}{2} R_{\text{dc}} F_S(j\omega) = P_{\text{rms}} F_S(j\omega). \quad (4.27)$$

Der Skinfaktor  $F_S$  ist sowohl von der Arbeitsfrequenz als auch von der Geometrie des betrachteten Leiters abhängig. Für den Fall  $\underline{\underline{H}}_{\text{St}} \neq \vec{0}$  fallen zusätzlich die Proximityverluste an

$$P_{\perp \text{Prox}} = \frac{\pi l}{2\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ |b_k + c_k|^2 + |a_k - d_k|^2 \right] \operatorname{Re} \left\{ \frac{\alpha a I_k(\alpha a)}{I_{k-1}(\alpha a)} \right\}. \quad (4.28)$$

Sie hängen sowohl von der Arbeitsfrequenz als auch vom Leiterradius und dem Verlauf des äußeren Magnetfeldes am Leiterumfang ab.

### 4.3.2 Feldkomponenten parallel zum Stromverlauf

An dieser Stelle sollen die Verluste untersucht werden, welche auf eine zum Erregerstrom parallele magnetische Feldstärkekomponente zurückzuführen sind. Diese Erweiterung ist insbesondere für dreidimensionale (z.B. nicht rotationssymmetrische) Anordnungen erforderlich. Dies sind u.a. Bauelemente auf E-, EFD-, UI- aber auch ETD-Ferritkernen. Der Anhang E beinhaltet zusätzliche, geometrische Überlegungen speziell für Bauelemente auf rechteckförmigen Wickelkörpern. Für das zu betrachtende Vektorpotential

$$\underline{\underline{A}}'' = A_\rho(\rho, \varphi) \vec{e}_\rho + A_\varphi(\rho, \varphi) \vec{e}_\varphi \quad (4.29)$$

führt die Differentialgleichung (4.6 a) zu zwei verkoppelten partiellen Differentialgleichungen für die beiden Komponenten. Es ist daher einfacher, durch Rotationsbildung der beiden Seiten

---

<sup>1</sup>Proximity: (englisch) die Nachbarschaft

der Gl. (4.29) die entsprechende Differentialgleichung für die korrespondierende magnetische Feldstärke  $\vec{H}'' = \underline{H}_z(\rho, \varphi) \vec{e}_z$  aufzustellen

$$-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \underline{H}_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \underline{H}_z - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \underline{H}_z + \alpha^2 \underline{H}_z = 0. \quad (4.30)$$

Die Verknüpfung

$$\text{rot } \vec{A}'' = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z = \mu_0 \underline{H}_z \vec{e}_z \quad (4.31)$$

führt zu Integralgleichungen zur Bestimmung des Vektorpotentials  $\vec{A}''$  aus der magnetischen Feldstärke. Zur vollständigen Beschreibung des Randwertproblems ist erneut die Formulierung der Bestimmungsgleichungen und Randbedingungen erforderlich. Da kein Strom durch die Leiteroberfläche fließt, bedeutet dies gemäß der Eichung (1.18) und dem Ohm'schen Gesetz (1.1 c)

$$A_{I\rho}(a, \varphi) = 0. \quad (4.32 \text{ a})$$

Die Tangentialkomponente hingegen hat analog zur Randbedingung (1.13 b) für die magnetische Flussdichte lediglich eine Stetigkeitsbedingung (1.13 c) zu erfüllen

$$A_{I\varphi}(a, \varphi) = A_{II\varphi}(a, \varphi) + A_{St\varphi}(a, \varphi). \quad (4.32 \text{ b})$$

Da die Normalkomponente von Feldstärke und Flussdichte auf der Leiteroberfläche verschwinden, verbleibt die Auswertung der Randbedingung (1.13 d)

$$\underline{H}_{Iz}(a, \varphi) = \underline{H}_{Iiz}(a, \varphi) + \underline{H}_{Stz}(a, \varphi) \quad (4.32 \text{ c})$$

und Forderungen nach einem regulären Feld

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |A_{I\rho}(\rho, \varphi)| \quad \text{und} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} |A_{I\varphi}(\rho, \varphi)| \quad \text{existieren,} \quad (4.32 \text{ d})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} |\vec{H}_{Iiz}(\rho, \varphi)| = 0. \quad (4.32 \text{ e})$$

Durch Separation wird die partielle Differentialgleichung (4.30) in beiden Teilbereichen gelöst. Dies erfolgt analog zur Lösung der Gl. (4.14) und braucht hier nicht wiederholt zu werden. Es ergeben sich an dieser Stelle ähnliche Ansätze für die magnetische Feldstärke wie in Abschnitt 4.3.1 für das Vektorpotential. Analog zur Gl. (4.17) ist im Bereich  $V_I$ , dem Leitervolumen, die magnetische Feldstärke

$$\underline{H}_{Iz} = R_0 I_0(\alpha \rho) + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(\alpha \rho) (R_k \cos k\varphi + S_k \sin k\varphi). \quad (4.33)$$

Die modifizierte Besselfunktion K zweiter Art kann auch hier wegen der Singularität für  $\rho \rightarrow 0$  kein Teil der Lösung sein. Aufgrund der verschwindenden Leitfähigkeit im Außenraum  $V_{II}$  ist dort die Laplacegleichung zu erfüllen und die magnetische Feldstärke ist analog zur Gl. (4.19)

$$\underline{H}_{Iiz} = V_0 + W_0 \ln \rho + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a}{\rho} \right)^k (V_k \cos k\varphi + W_k \sin k\varphi), \quad (4.34)$$

wobei aufgrund der Forderung (4.32 e) das logarithmische Glied kein Teil der Lösung sein kann ( $W_0 = 0$ ), ebenso wie schon die Potenzen  $\rho^k$ . Für die Auswertung der Randbedingungen (4.32 a)

und (4.32 b) und zur späteren Verlustberechnung mit Hilfe des Poyntingvektors wird das Vektorpotential benötigt. Die Auswertung der Gl. (4.31) ist somit erforderlich und wird zu Integralgleichungen führen. Zu diesem Zweck werden zunächst auch für die Komponenten des Vektorpotentials Produktansätze definiert

$$\underline{A}_\rho := \underline{A}_{\rho(\rho)}(\rho) \underline{A}_{\rho(\varphi)}(\varphi) \quad \text{und} \quad (4.35 \text{ a})$$

$$\underline{A}_\varphi := \underline{A}_{\varphi(\rho)}(\rho) \underline{A}_{\varphi(\varphi)}(\varphi), \quad (4.35 \text{ b})$$

welche nun in beiden Bereichen  $V_I$  und  $V_{II}$  separat ermittelt werden müssen. Einsetzen dieses Ansatzes für den Bereich  $V_I$  in die Gl. (4.31) führt auf

$$\underline{A}_{I\rho(\varphi)}(\varphi) = b_{Ik} \sin k\varphi - c_{Ik} \cos k\varphi, \quad (4.36 \text{ a})$$

$$\underline{A}_{I\rho(\rho)}(\rho) = \rho I_k(\alpha\rho) \quad (4.36 \text{ b})$$

und

$$\underline{A}_{I\varphi(\varphi)}(\varphi) = d_{Ik} \cos k\varphi + e_{Ik} \sin k\varphi, \quad (4.36 \text{ c})$$

$$\underline{A}_{I\varphi(\rho)}(\rho) = \frac{1}{\rho} \int \rho I_k(\alpha\rho) d\rho. \quad (4.36 \text{ d})$$

Dieses Integral ist laut Abramowitz [1, Abschnitt 11] zwar berechenbar, wird jedoch in eine unendliche Reihe entwickelt zu deren Berechnung die hypergeometrische Funktion benötigt wird. Auch diese wird i.d.R. als unendliche Reihe dargestellt (vergl. [1]). Die Auswertung gestaltet sich als problematisch. Es soll an dieser Stelle darauf verzichtet werden. Weiter unten wird die Berechnung der Verluste aufgrund der zum Strom parallelen Feldkomponente stark vereinfacht untersucht, um zumindest einen Anteil dieser Proximityverluste zu erfassen und vergleichen zu können. Der Vollständigkeit halber werden durch Einsetzen des Ansatzes der Gln. (4.35 a, b) in die Gl. (4.31) die noch fehlenden Ansätze für das Vektorpotential im Bereich  $V_{II}$  ermittelt

$$\underline{A}_{II\rho(\varphi)}(\varphi) = b_{Ik} \sin k\varphi - c_{Ik} \cos k\varphi, \quad (4.37 \text{ a})$$

$$\underline{A}_{II\rho(\rho)}(\rho) = \rho \left( \frac{a}{\rho} \right)^k \quad (4.37 \text{ b})$$

und

$$\underline{A}_{II\varphi(\varphi)}(\varphi) = d_{Ik} \cos k\varphi + e_{Ik} \sin k\varphi. \quad (4.37 \text{ c})$$

$$\underline{A}_{II\varphi(\rho)}(\rho) = \frac{1}{\rho} \int \rho \left( \frac{a}{\rho} \right)^k d\rho = a^k \frac{\rho^{1-k}}{2-k}. \quad (4.37 \text{ d})$$

Abschließend sind die Ansätze in beiden Teilbereichen für alle Eigenwerte  $k = 0, 1, 2, \dots$  zu überlagern. Die fehlenden Koeffizienten können aus den Randbedingungen (4.32 a-f) ermittelt werden.

### Vereinfachte Verlustberechnung aufgrund von Feldkomponenten parallel zum Stromverlauf

Die Winkelabhängigkeit des Magnetfeldes wird an dieser Stelle zur Vereinfachung der Problemstellung vernachlässigt  $\vec{H}''(\rho, \varphi) \approx H_z(\rho) \vec{e}_z$ . Gemäß Gl. (4.31) vereinfacht sich das Vektorpotential zu  $\underline{A}''(\rho) = \underline{A}_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi$ , wodurch die zu erfüllende Feldgleichung (4.6 a) für nur eine Vektorpotentialkomponente formuliert werden kann

$$\frac{1}{\rho^2} \underline{A}_\varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \underline{A}_\varphi - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \underline{A}_\varphi + \alpha^2 \underline{A}_\varphi = 0. \quad (4.38)$$

## 4 Verlustmechanismen und deren Modellierung

Dieser vereinfachte Vektorpotentialansatz kann so interpretiert werden, dass nur einfache Wirbelströme um die Leiter-Symmetriearchse berücksichtigt werden und keine Verwirbelungen höherer Ordnungen  $n_W = 2, 3, 4, \dots$  (um parallel angeordnete Achsen im Leiter). Da die von den Wirbelströmen höherer Ordnungen umschlossenen Flächen mindestens mit  $1/n_W$  kleiner werden, klingen auch die Amplituden der resultierenden Vektorpotentiale für eine feste Arbeitsfrequenz mit der Ordnungszahl ab. Die Verluste aufgrund der Wirbelströme erster Ordnung können folglich als ausreichendes Maß für die Verluste aufgrund zur Erregerstromachse paralleler Feldkomponenten herangezogen werden. Außerhalb des Leiters, im Bereich  $V_{II}$ , ist  $\underline{\alpha} = 0$  und aus der Differentialgleichung (4.38) wird die Eulersche Differentialgleichung mit der allgemeinen Lösung

$$\underline{A}_{II\varphi} = \underline{\epsilon}_1 \rho + \underline{\epsilon}_2 \frac{1}{\rho}. \quad (4.39)$$

Aufgrund der Forderung (4.32 e) nach einem regulären Feld muss  $\underline{\epsilon}_1 = 0$  gewählt werden. Die Konstante  $\underline{\epsilon}_2$  kann aus der Stetigkeitsforderung (4.32 b) auf der Leiteroberfläche ermittelt werden. Im Leiterrvolumen  $V_I$  entspricht die Differentialgleichung (4.38) der modifizierten Bessel-Differentialgleichung erster Ordnung mit der allgemeinen Lösung

$$\underline{A}_{I\varphi} = \underline{\epsilon}_3 I_1(\underline{\alpha}\rho) + \underline{\epsilon}_4 K_1(\underline{\alpha}\rho). \quad (4.40)$$

Die modifizierte Besselfunktion  $K$  zweiter Art ist jedoch singulär für  $\rho \rightarrow 0$ , so dass sie aufgrund der Forderung (4.32 d) nicht Teil der Lösung sein kann ( $\underline{\epsilon}_4 = 0$ ). Die Konstante  $\underline{\epsilon}_3$  kann—wie schon  $\underline{\epsilon}_2$ —aus der Stetigkeitsforderung (4.32 b) auf der Leiteroberfläche ermittelt werden. Die Feldstärke wird gemäß Gl. (4.31) ermittelt. Sie besitzt im Bereich  $V_I$  nur die z-Komponente

$$\underline{H}_{Iz}(\rho) = \frac{1}{\mu_0} \underline{\epsilon}_3 \frac{\underline{\alpha}}{\underline{\alpha}\rho} \frac{1}{\underline{\alpha}} \frac{d}{d\rho} [\underline{\alpha}\rho I_1(\underline{\alpha}\rho)] = \frac{\underline{\epsilon}_3 \underline{\alpha}}{\mu_0} I_0(\underline{\alpha}\rho) \quad (4.41)$$

und im Bereich  $V_{II}$  nur die z-Komponente

$$\underline{H}_{IIZ}(\rho) = \frac{1}{\mu_0} \underline{\epsilon}_2 \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{1}{\rho} \right) = 0. \quad (4.42)$$

Aus der Stetigkeitsforderung (4.32 c) folgt dann

$$\underline{\epsilon}_3 = \frac{\mu_0}{\underline{\alpha} I_0(\underline{\alpha}a)} \underline{H}_{Stz}(a) \quad (4.43)$$

Mit Gl. (4.32 a) könnte nun auch die noch fehlende Konstante  $\underline{\epsilon}_2$  ermittelt werden. Dies ist jedoch nicht notwendig. Die Kenntnis von Vektorpotential

$$\underline{A}_{I\varphi}(\rho) = \frac{\mu_0 \underline{H}_{Stz}(a)}{\underline{\alpha} I_0(\underline{\alpha}a)} I_1(\underline{\alpha}\rho) \quad (4.44)$$

und Magnetfeld im Leiterinneren  $V_I$

$$\underline{H}_{Iz}(\rho) = \frac{\underline{H}_{Stz}(a)}{I_0(\underline{\alpha}a)} I_0(\underline{\alpha}\rho) \quad (4.45)$$

reicht zur Berechnung des Poyntingschen Vektors auf der Leiteroberfläche aus

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \vec{e}_\rho \cdot \underline{E}_{I\varphi}(a) \cdot \underline{H}_{Iz}^*(a) = -\frac{j\omega}{2} \vec{e}_\rho \cdot \underline{A}_{I\varphi}(a) \cdot \underline{H}_{Iz}^*(a). \quad (4.46)$$

Durch Integration dieser Leistungsdichte über die Oberfläche des Leiters kann die gesamte im Leiter verbrauchte Leistung berechnet werden

$$\begin{aligned} P_{\parallel \text{Prox}} &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -j\omega 2\pi al \frac{\mu_0}{\underline{\alpha}} \frac{H_{\text{Stz}}(a)}{I_0(\underline{\alpha}a)} I_1(\underline{\alpha}a) \frac{H_{\text{Stz}}^*(a)}{I_0^*(\underline{\alpha}a)} I_0^*(\underline{\alpha}a) \right\} \\ &= -\omega \pi a^2 l \mu_0 |H_{\text{Stz}}(a)|^2 \operatorname{Im} \left\{ \frac{I_1(\underline{\alpha}a)}{\underline{\alpha}a I_0(\underline{\alpha}a)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

### 4.3.3 Zusammenfassung der Wicklungsverluste

Die magnetischen Feldgrößen erfüllen die lineare Skingleichung (4.6 a) und sind über lineare Materialgleichungen miteinander verknüpft. Die Wicklungsverluste eines stromdurchflossenen Leiters im externen Magnetfeld sind frequenzabhängig und eine Überlagerung

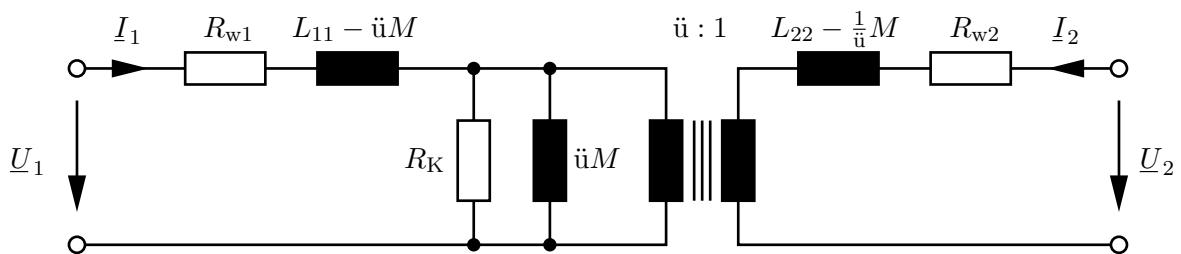
$$P_V(j\omega) = P_{\text{rms}} + P_{\text{Skin}}(j\omega) + P_{\perp \text{Prox}}(j\omega) + P_{\parallel \text{Prox}}(j\omega) \quad (4.48)$$

der Wirkleistungen aus den Ohm'schen Verlusten  $P_{\text{rms}}$ , den Verlusten  $P_{\text{Skin}}$  aufgrund des Skin-effektes und den Proximityverlusten  $P_{\perp \text{Prox}}$  und  $P_{\parallel \text{Prox}}$ , welche durch externe Magnetfeldkomponenten verursacht werden. Die Proximityverluste sind von der Geometrie und den Strömen in der gesamten Anordnung abhängig. Für nicht sinusförmige Erregerströme muss die Ermittlung der Verlustleistungen für das gesamte Spektrum durchgeführt werden.

Insbesondere für nicht rotationssymmetrisch aufgebaute Bauelemente, z.B. auf E-, EFD- und UI- Ferritkernen mit rechteckförmigen Wickelkörpern, sind in Anhang E zusätzliche, geometrische Überlegungen dargestellt.

## 4.4 Darstellung der Verluste im Ersatzschaltbild

Die zuvor berechneten Verlustleistungen können für einen Betriebsfall ausgerechnet werden und sollen nun in ein Ersatzschaltbild für das untersuchte Bauelement übernommen werden. Abbildung 4.2 zeigt ein Ersatzschaltbild für einen verlustbehafteten Übertrager mit zwei Wicklungen.



**Abbildung 4.2:** Ersatzschaltbild des verlustbehafteten Übertragers

## 4 Verlustmechanismen und deren Modellierung

Die Wicklungsverluste für eine Wicklung

$$P_{\text{rms}} + P_{\text{Skin}} + P_{\perp \text{Prox}} + P_{\parallel \text{Prox}} =: R_w(j\omega) \frac{|\underline{I}|^2}{2} \quad (4.49)$$

entstehen gemäß Gl. (4.27) und Gl. (4.28) aufgrund des Stromes  $\underline{I}$  in der Wicklung.

Aufgrund der Abhängigkeit (4.49) werden die Verluste im Ersatzschaltbild üblicherweise in Reihe zu den Induktivitäten geschaltet. Für den Übertrager in Abbildung 4.2 sind dies die Widerstände  $R_{w1}$  und  $R_{w2}$ . Diese Widerstände hängen jedoch sowohl von der Geometrie als auch vom Betriebszustand des Bauelementes ab.

Der Anteil  $P_{\parallel \text{Prox}}$  wird im Vergleich zu  $P_{\perp \text{Prox}}$  gering sein. Für eine Abschätzung werden die Mittelwerte der magnetischen Feldstärkeanteile parallel zum Stromverlauf  $\underline{\underline{H}}_{\text{St}\parallel} = \underline{\underline{H}}_{\text{Stz}}$  und normal zum Stromverlauf  $\underline{\underline{H}}_{\text{St}\perp}$  mit

$$\begin{aligned} |\underline{\underline{H}}_{\text{St}\perp}|^2 &= \overset{\text{Gl. (4.20 a, b)}}{=} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (\underline{H}_{\text{St}\rho} \cos \varphi - \underline{H}_{\text{St}\varphi} \sin \varphi) d\varphi \right|^2 + \\ &\quad \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\underline{H}_{\text{St}\rho} \sin \varphi + \underline{H}_{\text{St}\varphi} \cos \varphi) d\varphi \right|^2 \quad (4.50) \\ &= \frac{|a_1 - d_1|^2}{4} + \frac{|b_1 + c_1|^2}{4} \end{aligned}$$

benötigt. Der Grenzwert für das Verhältnis

$$\begin{aligned} \frac{P_{\parallel \text{Prox}}}{P_{\perp \text{Prox}}} &= \left| \frac{\omega \pi a^2 l \mu_0 |\underline{\underline{H}}_{\text{Stz}}(a)|^2 \operatorname{Im} \left\{ \frac{I_1(\alpha a)}{\alpha a I_0(\alpha a)} \right\}}{\frac{\pi l}{2\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} [ |b_k + c_k|^2 + |a_k - d_k|^2 ] \operatorname{Re} \left\{ \frac{\alpha a I_k(\alpha a)}{I_{k-1}(\alpha a)} \right\}} \right| \\ &\leq \frac{|\alpha a|^2}{2} \left| \frac{\operatorname{Im} \left\{ \frac{I_1(\alpha a)}{\alpha a I_0(\alpha a)} \right\}}{\operatorname{Re} \left\{ \frac{\alpha a I_1(\alpha a)}{I_0(\alpha a)} \right\}} \right| \left| \frac{\underline{\underline{H}}_{\text{St}\parallel}}{\underline{\underline{H}}_{\text{St}\perp}} \right|^2 = \frac{1}{2} \left| \frac{\underline{\underline{H}}_{\text{St}\parallel}}{\underline{\underline{H}}_{\text{St}\perp}} \right|^2 \quad (4.51) \end{aligned}$$

wird im Zusammenhang mit den Messungen in Abschnitt 9 ausgewertet.

Die in Abschnitt 4.1 erläuterten Kernverluste, im Ersatzschaltbild 4.2 als Realteil der komplexen Leistung

$$P_K = \frac{j\omega \bar{M} R_K}{R_K + j\omega \bar{M}} \frac{|I_1 + \frac{1}{\bar{u}} I_2|^2}{2} = P_s + jP_m \quad (4.52)$$

zusammengefasst, fallen nur an sofern ein magnetischer Fluss im Kern erregt wird.

# 5 Modellierung induktiver Kopplungen

## 5.1 Induktivitätsmatrix des Übertragers

Es wird ein Übertrager mit  $N$  Windungen untersucht. Die Menge der Nummern aller Windungen sei  $\mathbb{T} = \{1, \dots, N\}$ . Zudem seien die Windungen zu  $W \geq 1$  Wicklungen verschaltet. Die Menge der Nummern aller Wicklungen  $\mathbb{W} = \{1, \dots, W\}$  charakterisiert den Übertrager. Die Wicklung  $w \in \mathbb{W}$  bestehe aus  $N_w \geq 1$  Windungen, welche für die folgenden Betrachtungen in Reihe verschaltet sein sollen.  $\mathbb{T}_w = \{i_1^{(w)}, i_2^{(w)}, \dots, i_{N_w}^{(w)}\}$  sei die Menge der Nummern der Windungen  $i_r^{(w)} \in \mathbb{T}$  (mit  $r \in \{1, \dots, N_w\}$ ) der Wicklung  $w$ , so dass der komplette Übertrager aus Wicklungen zusammengesetzt dargestellt werden kann

$$\mathbb{T} = \bigcup_{w \in \mathbb{W}} \mathbb{T}_w \quad \text{und} \quad \mathbb{T}_v \cap \mathbb{T}_w = 0 \quad \text{für } v \neq w, v, w \in \mathbb{W}. \quad (5.1)$$

Der Übertrager werde für die folgenden Betrachtungen stets mit harmonischen Strömen betrieben. Eine Wicklung  $w \in \mathbb{W}$  führe einen Strom  $I_w$ , so dass jede Wicklung  $v \in \mathbb{W}$  einen magnetischen Fluss  $\Phi_v$  umschließt, welcher eine Überlagerung aus Flussbeiträgen aller Wicklungen des Übertragers ist. Die Ströme und magnetischen Flüsse sind laut [23] durch die symmetrische Induktivitätsmatrix  $\mathbf{L} = (L_{vw}) = \mathbf{L}^T$  miteinander verknüpft

$$\Phi_v = \sum_{w \in \mathbb{W}} L_{vw} I_w. \quad (5.2)$$

Aufgabe in einem konkreten Fall ist die Berechnung der Eigeninduktivität  $L_{vv}$  jeder Wicklung  $v$  und aller Gegeninduktivitäten  $L_{vw}$  jeweils zweier Wicklungen  $v \neq w$  des Systems.

Je nach Verwendungszweck können die Induktivitäten geeigneterer Ersatzschaltbilder stets aus der Induktivitätsmatrix  $\mathbf{L}$  gewonnen werden.

## 5.2 Induktivitätsbeiträge des Mehrleitersystems

Die Gl. (5.2) verknüpft die magnetischen Flüsse des Übertragers mit den Strömen und Induktivitäten der Übertragerwicklungen. Eine äquivalente Verknüpfung ist auch für die magnetischen Flüsse, Ströme und die Induktivitäten der einzelnen Windungen des Übertragers möglich. Hierzu wird die Verschaltung der Windungen zu den Wicklungen des Übertragers zunächst vernachlässigt und verallgemeinert von einem Mehrleitersystem gesprochen. Die einzelnen Windungen sind die Leiter dieses Systems.

Eine Windung  $k \in \mathbb{T}$  führe einen Strom  $I'_k$ , so dass jede Windung  $i \in \mathbb{T}$  einen magnetischen Fluss  $\Phi'_i$  umschließt, welcher eine Überlagerung aus Flussbeiträgen aller Windungen des

Übertragers und auch eines evtl. vorhandenen Ferritkernes ist. Die Ströme und magnetischen Flüsse sind durch die ebenfalls symmetrische Induktivitätsmatrix  $\mathbf{L}' = (L'_{ik}) = \mathbf{L}'^T$  des Mehrleiterystems miteinander verknüpft

$$\underline{\Phi}'_i = \sum_{k \in \mathbb{T}} L'_{ik} \underline{I}'_k . \quad (5.3)$$

In den in Reihe geschalteten Windungen einer Wicklung  $v$  fließt derselbe Strom

$$\underline{I}'_i = \underline{I}_v \quad \text{für} \quad i \in \mathbb{T}_v . \quad (5.4)$$

Die Wicklung  $v$  umschließt die Summe aller magnetischen Teilflüsse, welche die Windungen der Wicklung umschließen

$$\underline{\Phi}_v = \sum_{i \in \mathbb{T}_v} \underline{\Phi}'_i = \sum_{i \in \mathbb{T}_v} \sum_{k \in \mathbb{T}} L'_{ik} \underline{I}'_k = \sum_{w \in \mathbb{W}} \sum_{i \in \mathbb{T}_v} \sum_{k \in \mathbb{T}_w} L'_{ik} \underline{I}_w . \quad (5.5)$$

Nach geeigneter Sortierung unter Berücksichtigung der Gl. (5.2) wird die Induktivitätsmatrix  $\mathbf{L}$  des Übertragers aus der Induktivitätsmatrix  $\mathbf{L}'$  des Mehrleiterystems berechnet

$$L_{vw} = \sum_{i \in \mathbb{T}_v} \sum_{k \in \mathbb{T}_w} L'_{ik} , \quad (5.6)$$

wobei die Symmetrie der Matrix  $\mathbf{L}'$  zur Beschleunigung der Berechnung der Gl. (5.6) ausgenutzt werden kann und die Symmetrie der Matrix  $\mathbf{L}$  die Anzahl der gemäß derselben Gl. (5.6) zu bestimmenden Elemente reduziert.

### 5.3 Analytische Induktivitätsberechnung

An dieser Stelle soll zunächst eine exakte Methode zur Berechnung der Induktivitätsmatrix  $\mathbf{L}'$  des Mehrleiterystems vorgestellt werden. Diese Methode wird weiter unten in geeigneter Weise angewendet. Vielfach reicht jedoch eine vereinfachte Methode aus, welche ebenfalls weiter unten vorgestellt wird.

Die im Magnetfeld  $\vec{H}$  des endlich ausgedehnten Mehrleiterystems  $\mathbb{T}$  gespeicherte Energie  $W_m$  kann für die endlich ausgedehnte Anordnung laut [23] aus dem magnetischen Vektorpotential  $\vec{A}$  und der Verteilung  $\vec{J}_f$  eingeprägter Ströme des Systems durch eine Integration über den gesamten Raum  $V$  berechnet werden

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \underline{\vec{B}} \cdot \underline{\vec{H}}^* dV = \frac{1}{2} \iiint_V \underline{\vec{A}} \cdot \underline{\vec{J}}_f^* dV . \quad (5.7)$$

Diese im Magnetfeld gespeicherte Energie  $W_m$  ist sowohl mit den Induktivitäten und Strömen des Übertragers als auch den Induktivitäten und Strömen des Mehrleiterystems verknüpft

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{v \in \mathbb{W}} \sum_{w \in \mathbb{W}} L_{vw} \underline{I}_v \underline{I}_w^* = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{T}} \sum_{k \in \mathbb{T}} L'_{ik} \underline{I}'_i \underline{I}'_k^* . \quad (5.8)$$

Zur Auswertung der Integration der Gl. (5.7) ist eine genauere Betrachtung der Ströme und Vektorpotentiale des Systems erforderlich. Im Volumen  $V_i$  des Leiters  $i \in \mathbb{T}$  mit der Querschnittsfläche  $A_i$  fließt der Strom

$$\underline{I}'_i = \iint_{A_i} \underline{\vec{J}}_i \cdot d\vec{a}_i. \quad (5.9)$$

Außerhalb der Leiter ist kein Strom eingeprägt. Indirekt wird über die den Leitern eingeprägten Ströme dem Ferritkern eine Magnetisierungsstromverteilung eingeprägt, welche als Superposition dargestellt werden kann

$$\underline{\vec{J}}_{\text{mag}} := \sum_{i \in \mathbb{T}} \underline{\vec{J}}_{\text{mag},i}, \quad (5.10)$$

solange der Ferritkern nicht in Sättigung betrieben wird und somit in guter Näherung als linear betrachtet werden kann. Der Beitrag  $\underline{\vec{J}}_{\text{mag},i}$  ist die Magnetisierungsstromverteilung, welche gemäß Gl. (1.8) aus der Magnetisierung  $\vec{M}$  des Ferritkernes berechnet wird, wenn nur der Windung  $i$  ein Strom  $\underline{I}'_i$  eingeprägt ist und alle anderen Windungen des Mehrleitersystems leerlaufen

$$\underline{I}'_k = \begin{cases} \underline{I}'_i \neq 0 & \text{für } k = i \\ 0 & \text{für } k \neq i. \end{cases} \quad (5.11)$$

Der gesamte Magnetisierungsstrom ist dann linear abhängig vom eingeprägten Windungsstrom

$$\underline{I}_{\text{mag},i} = \iint_{A_\mu} \underline{\vec{J}}_{\text{mag},i} \cdot d\vec{a}_\mu = c_{\text{mag},i} \cdot \underline{I}'_i \quad (5.12)$$

und der Koeffizient  $c_{\text{mag},i}$  ist aus der Geometrie der Anordnung berechenbar. Im statischen Fall fließen im Ferritkern keine freien Ströme und eine Integration über das Kernvolumen  $V_\mu$  zur Energieberechnung gemäß Gl. (5.7) entfällt.

Das Vektorpotential kann als eine Überlagerung dargestellt werden

$$\underline{\vec{A}} := \underline{\vec{A}}^{(0)} + \underline{\vec{A}}^{(\mu)} \quad (5.13)$$

aus dem Vektorpotential  $\underline{\vec{A}}^{(0)}$  des stromführenden Mehrleitersystems ohne Ferritkern und einem zusätzlichen Vektorpotential  $\underline{\vec{A}}^{(\mu)}$ , das von den Magnetisierungsströmen im Ferritkern herrührt.

Da der Ferritkern im linearen Bereich betrieben werden soll, können beide Vektorpotentiale weiter aufgegliedert werden

$$\underline{\vec{A}}^{(0)} := \sum_{i \in \mathbb{T}} \underline{\vec{A}}_i^{(0)}, \quad (5.14 \text{ a})$$

$$\underline{\vec{A}}^{(\mu)} := \sum_{i \in \mathbb{T}} \underline{\vec{A}}_i^{(\mu)}. \quad (5.14 \text{ b})$$

Äquivalent zu  $\underline{\vec{A}}^{(0)}$  ist  $\underline{\vec{A}}_i^{(0)}$  das Vektorpotential, wenn das Mehrleitersystem im Zustand der Gl. (5.11) betrieben wird und kein Ferritkern vorhanden ist. Wird für diesen Betriebsfall der Ferritkern berücksichtigt, so hat dessen Anwesenheit im Magnetfeld der Windung  $i$  das zusätzliche Vektorpotential  $\underline{\vec{A}}_i^{(\mu)}$  zur Folge.

Die Verknüpfung der im Magnetfeld gespeicherten Energie  $W_m$  aus Gl. (5.7) mit den Induktivitäten und Strömen des Übertragers bzw. des Mehrleitersystems gemäß Gl. (5.8) kann

## 5 Modellierung induktiver Kopplungen

mit den vereinbarten Superpositionsansätzen für das Vektorpotential in eine Verknüpfung mit Induktivitätsbeiträgen des Systems ohne Ferritkern und Induktivitätsbeiträgen aufgrund der Anwesenheit des Ferritkernes überführt werden

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{T}} \left\{ \iiint_{V_i} \left[ \sum_{k \in \mathbb{T}} (\vec{A}_k^{(0)} + \vec{A}_k^{(\mu)}) \right] \cdot \vec{J}_i^* dV_i \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{T}} \sum_{k \in \mathbb{T}} \iiint_{V_i} \vec{A}_k^{(0)} \cdot \vec{J}_i^* dV_i + \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{T}} \sum_{k \in \mathbb{T}} \iiint_{V_i} \vec{A}_k^{(\mu)} \cdot \vec{J}_i^* dV_i \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{T}} \sum_{k \in \mathbb{T}} L'_{ik}^{(0)} I_k I_i'^* + \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{T}} \sum_{k \in \mathbb{T}} L'_{ik}^{(\mu)} I_k I_i'^* \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{v \in \mathbb{W}} \sum_{w \in \mathbb{W}} L_{vw}^{(0)} I_v I_w^* + \frac{1}{2} \sum_{v \in \mathbb{W}} \sum_{w \in \mathbb{W}} L_{vw}^{(\mu)} I_v I_w^*. 
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Die Induktivitäten gemäß Gl. (5.6) können somit auf eine Überlagerung aus Induktivitätsbeiträgen  $L_{vw}^{(0)}$  des Bauelementes ohne Ferritkern und Induktivitätsbeiträgen  $L_{vw}^{(\mu)}$  aufgrund der Anwesenheit des Ferritkernes im Mehrleiterystem zurückgeführt werden

$$L_{vw} = L_{vw}^{(0)} + L_{vw}^{(\mu)} = \sum_{i \in \mathbb{T}_v} \sum_{k \in \mathbb{T}_w} L'_{ik}^{(0)} + \sum_{i \in \mathbb{T}_v} \sum_{k \in \mathbb{T}_w} L'_{ik}^{(\mu)}. \tag{5.16}$$

## 5.4 Induktivitätsberechnung für Übertrager ohne Ferritkern

Mit Hilfe der zuvor eingeführten Superpositionsansätze für das magnetische Vektorpotential aus Beiträgen der stromführenden Windungen ohne Berücksichtigung des Ferritkerneinflusses und weiteren Beiträgen, welche ausschließlich auf die Anwesenheit des Ferritkernes im stromführenden Mehrleiterystem zurückzuführen sind, können die Gegeninduktivitätsbeiträge der Gl. (5.15) separat betrachtet werden. In diesem Abschnitt beschränken sich alle Betrachtungen auf die Berechnung von Induktivitätsbeiträgen im Mehrleiterystem ohne Ferritkern.

Ein Vergleich der Summanden auf beiden Seiten der Gl. (5.15) führt zur analytischen Berechnung der Gegeninduktivität

$$L'_{ik}^{(0)} = \iiint_{V_i} \frac{\vec{A}_k^{(0)}}{I_k} \cdot \frac{\vec{J}_i^*}{I_i^*} dV_i \tag{5.17}$$

zweier Leiter  $i \neq k$  in Luft bzw. der Eigeninduktivität des Leiters  $i$  für  $k = i$ .

Die in Abschnitt 5.3 angekündigte Vereinfachung dieses Berechnungsverfahrens beruht auf einer Näherung. Ist der Drahtquerschnitt  $A_i$  einer Windung  $i$  klein gegenüber der von der Windung umschlossenen Fläche  $\tilde{A}_i$ , so ist auch das erregende Vektorpotential  $\vec{A}_k'^{(0)}$  im Leiter nur auf einer kleinen Fläche auszuwerten im Vergleich mit der von der Leiterschleife umschlossenen Fläche. Die umschlossene Fläche  $\tilde{A}_i$  ragt hierbei nicht in das Leitervolumen hinein.

In einem Beobachtungspunkt P mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$  ist das Vektorpotential eines Lini-

enstromes  $\underline{I}_k$

$$\underline{\mathbf{A}}_k'^{(0)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \underline{I}_k}{4\pi} \oint_{C_k} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} d\vec{r}_k. \quad (5.18)$$

Das erregende Vektorpotential  $\underline{\mathbf{A}}_k'^{(0)}$  wird im betrachteten Frequenzbereich als homogen über den (kleinen) Leiterquerschnitt  $A_i$  verteilt angenommen. Die Volumenintegration gemäß Gl. (5.17) kann auf eine Integration entlang einer dem Verlauf des Stromes  $\underline{I}_i$  folgenden, geschlossenen Kurve  $C_i$  reduziert werden. Die Gegeninduktivität zweier Leiter  $i \neq k$  ist somit

$$L'_{ik}^{(0)} \approx \oint_{C_i} \frac{\underline{\mathbf{A}}_k'^{(0)}}{\underline{I}_k} \cdot d\vec{r}_i \quad (5.19 \text{ a})$$

und für die betrachteten Leiteranordnungen analytisch darstellbar. Das erregende Vektorpotential  $\underline{\mathbf{A}}_k'^{(0)}$  ist auf der Kurve  $C_k$  jedoch singulär, so dass für  $i = k$  auch das Integral (5.19 a) nicht existiert. Für den Fall  $k = i$  wird also die Näherung modifiziert. Der Strom  $\underline{I}_i$  verläuft nach wie vor entlang der Kurve  $C_i$ . Die Integration wird jedoch entlang einer  $C_i$  nicht schneidenden Kurve  $C'_i = \partial \tilde{A}_i$  durchgeführt, welche auf der Leiteroberfläche  $\partial V_i$  verläuft, und die von der Windung  $i$  umschlossene Fläche  $\tilde{A}_i$  berandet. Die Eigeninduktivität des Leiters  $i$  ist damit

$$L'_{ii}^{(0)} \approx \oint_{C'_i} \frac{\underline{\mathbf{A}}_i'^{(0)}}{\underline{I}_i} \cdot d\vec{r}_i + L_i'^{(i)} = L_i'^{(0)} + L_i'^{(i)}, \quad (5.19 \text{ b})$$

wobei der gegenüber Gl. (5.19 a) begangene Fehler durch einen weiteren Induktivitätsbeitrag  $L_i'^{(i)}$  reduziert wird. Die Kurve  $C'_i$  berandet eine kleinere Fläche als die Kurve  $C_i$ . Dies entspricht der Aufteilung der Induktivitätsbeiträge einer Doppelleitung bei Albach [3].

$L_i'^{(i)}$  wird aus der Energie im magnetischen Feld im Leitervolumen  $V_i$  berechnet, wenn ausschließlich der Leiter  $i$  einen Strom führt. Dies führt zurück zur exakten Lösung gemäß Gl. (5.17) für den Fall  $k = i$ , welche für zylindrisch gewickelte Windungen die Auswertung eines elliptischen Integrals erfordert. Für rechteckförmig gewickelte Windungen ist das Vektorpotential im Leiter bereits eine Überlagerung von Beiträgen von Strömen in allen Teilstücken der in gerade Strecken zerlegbaren Windung. Eine einfacher zu berechnende und hinreichend genaue Näherung liefert die Betrachtung eines unendlich langen geraden Leiters mit rundem Querschnitt der Fläche  $A = \pi a^2$ , in dem der Strom  $I$  homogen verteilt fließen soll. Die im Magnetfeld im Leiterquerschnitt gespeicherte Energie pro Länge  $l$  des Leiters ist

$$\frac{W_m^{(i)}}{l} = \frac{\mu_0 \underline{I} \underline{I}^*}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( \frac{\rho}{2\pi a^2} \right)^2 \rho d\rho d\varphi = \frac{\mu_0}{16\pi} \underline{I} \underline{I}^* = \frac{1}{2} \frac{L_i^{(i)}}{l} \underline{I} \underline{I}^*. \quad (5.19 \text{ c})$$

Dieser Wert wird auch für gebogene Leiter, wie die Windungen des Übertragers, näherungsweise gelten. Ist  $l_i$  die Länge der Windung  $i$  so wird

$$L_i'^{(i)} = \frac{\mu_0 l_i}{8\pi} \quad (5.19 \text{ d})$$

als innere Eigeninduktivität der Windung  $i$  bezeichnet, da sie ein Maß für die im Leitervolumen gespeicherte magnetische Energie ist.  $L_i'^{(0)}$  wird als äußere Eigeninduktivität bezeichnet. Sie ist ein Maß für den vom Leiter umschlossenen magnetischen Fluss.

## 5 Modellierung induktiver Kopplungen

Die Integrale (5.19 a-c) sind für die betrachteten Leiteranordnungen berechenbar. Vektorpotentiale und Magnetfelder sind in Anhang B zusammengestellt, teilweise im Rahmen der vorliegenden Arbeit hergeleitet worden. Die Ausdrücke für Gegeninduktivitätsbeiträge können dem Anhang C entnommen werden.

Abschließend kann die Gegeninduktivität zweier Wicklungen  $v \neq w$  bzw. die Eigeninduktivität der Wicklung  $v = w$  des Übertragers ohne Ferritkern mit den gewonnenen Ergebnissen analytisch berechnet werden

$$L_{vw}^{(0)} = \sum_{i \in \mathbb{T}_v} \sum_{k \in \mathbb{T}_w} L_{ik}^{'(0)}. \quad (5.20)$$

## 5.5 Induktivitätsberechnung für Übertrager mit Ferritkern

Es wird erneut auf die in Gl. (5.13) bzw. (5.14 a, b) eingeführten Superpositionsansätze für das magnetische Vektorpotential zurückgegriffen und der noch nicht bestimmte Einfluss des Ferritkernes betrachtet.

Analog zur Berechnung der Induktivitätsbeiträge ohne Ferritkern gemäß Gl. (5.17) führt ein Vergleich der Summanden der Gl. (5.15) zur analytischen Berechnung der Induktivitätsbeiträge

$$L_{ik}^{'(\mu)} = \iiint_{V_i} \frac{\vec{A}_k^{(\mu)}}{I_k} \cdot \frac{\vec{J}_i^*}{I_i^*} dV_i, \quad (5.21)$$

welche auf die Anwesenheit des Ferritkernes im stromführenden Mehrleitersystem zurückzuführen sind.

Für eine große Anzahl  $N$  von Windungen führt die Ermittlung der Vektorpotentiale  $\vec{A}_k^{(\mu)}$  zu einem großen Rechenzeitaufwand. Aufgrund der Reihenschaltung der Windungen einer Wicklung  $w \in \mathbb{W}$  führen jedoch alle Windungen einer Wicklung denselben Strom. Die Anzahl der Zustände, für die ein Vektorpotentialbeitrag des Ferritkernes zu ermitteln ist, kann also auf die Anzahl  $W$  der Wicklungen reduziert werden. Führt nur die Wicklung Nummer  $w$  einen Strom  $I_w$ , so ist der entsprechende Vektorpotentialbeitrag des Ferritkernes

$$\vec{A}_{\mathbb{T}_w}^{(\mu)} = \sum_{k \in \mathbb{T}_w} \vec{A}_k^{(\mu)}. \quad (5.22)$$

Mit Hilfe dieses Vektorpotentialbeitrages dient die Definition eines weiteren Induktivitätsbeitrages

$$\begin{aligned} L_{vw}^{(\mu)} &:= \sum_{i \in \mathbb{T}_v} \sum_{k \in \mathbb{T}_w} L_{ki}^{'(\mu)} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{T}_v} \sum_{k \in \mathbb{T}_w} \iiint_{V_i} \frac{\vec{A}_k^{(\mu)}}{I_k} \cdot \frac{\vec{J}_i^*}{I_i^*} dV_i \\ &= \sum_{i \in \mathbb{T}_v} \iiint_{V_i} \frac{\vec{A}_{\mathbb{T}_w}^{(\mu)}}{I_w} \cdot \frac{\vec{J}_i^*}{I_i^*} dV_i \end{aligned} \quad (5.23)$$

der Verbesserung der Lesbarkeit.  $L_{vw}^{(\mu)}$  ist ein Gegeninduktivitätsbeitrag allein aufgrund der Anwesenheit des Ferritkernes und ist als Summe von Gegeninduktivitätsbeiträgen

$$L'_{wi}^{(\mu 0)} := \iiint_{V_i} \frac{\vec{A}_{\mathbb{T}_w}^{(\mu)}}{I_w} \cdot \frac{\vec{J}_i^*}{I_i^*} dV_i \quad (5.24)$$

definiert.

Die in Abschnitt 5.4 verwendete Näherung kann auch zur Berechnung des Gegeninduktivitätsbeitrages gemäß Gl. (5.24) angewendet werden, zumal keines der Vektorpotentiale  $\vec{A}_{\mathbb{T}_w}^{(\mu)}$  mit  $w \in \mathbb{W}$  außerhalb des Ferritkernes singulär ist. Es wird die Beziehung  $\vec{J}_i^* dV_i = I_i^* d\vec{r}_i$  angewendet. Die Volumenintegration kann auf eine Integration entlang der dem Verlauf des Stromes  $I_i$  folgenden, geschlossenen Kurve  $C_i$  reduziert werden

$$L'_{wi}^{(\mu 0)} \approx \oint_{C_i} \frac{\vec{A}_{\mathbb{T}_w}^{(\mu)}}{I_w} \cdot d\vec{r}_i. \quad (5.25)$$

Das Vektorpotential  $\vec{A}_{\mathbb{T}_w}^{(\mu)}$  wird mit Hilfe einer Ferritkern-Ersatzanordnung gemäß Kapitel 3 aus  $M$  Segmenten berechnet. Für den Betriebsfall einer einzelnen stromführenden Wicklung  $w$

$$I_v = \begin{cases} I_w & \text{für } v = w \\ 0 & \text{für } v \neq w \end{cases} \quad (5.26)$$

wird eine Menge  $\mathbb{M}_w = \{1, \dots, M\}$  von Magnetisierungsstromsegmenten  $m \in \mathbb{M}_w$  definiert. Weiterhin wird das Vektorpotential  $\vec{A}_{\mathbb{M}_m}^{(w)}$  des Magnetisierungssegmentes  $m$  für den oben genannten Betriebsfall definiert. Die Magnetfelder und Vektorpotentiale der in dieser Arbeit verwendeten Magnetisierungssegmente sind in Anhang B dokumentiert. Das zur Berechnung der Gl. (5.25) gesuchte Vektorpotential ist die Überlagerung

$$\vec{A}_{\mathbb{T}_w}^{(\mu)} := \sum_{m \in \mathbb{M}_w} \vec{A}_{\mathbb{M}_m}^{(w)} \quad (5.27)$$

und auch der gesuchte Gegeninduktivitätsbeitrag zwischen der Windung  $i$  und der Ferritkern-Ersatzanordnung  $\mathbb{M}_w$  ist eine Superposition

$$L'_{wi}^{(\mu 0)} \approx \sum_{m \in \mathbb{M}_w} \oint_{C_i} \frac{\vec{A}_{\mathbb{M}_m}^{(w)}}{I_w} \cdot d\vec{r}_i := \sum_{m \in \mathbb{M}_w} \Lambda_{mi}^{(\mu w)} \quad (5.28)$$

mit Gegeninduktivitätsbeiträgen

$$\Lambda_{mi}^{(\mu w)} = \oint_{C_i} \frac{\vec{A}_{\mathbb{M}_m}^{(w)}}{I_w} \cdot d\vec{r}_i \quad (5.29)$$

zwischen einer Windung  $i \in \mathbb{T}$  des Mehrleitersystems und einem Segment  $m \in \mathbb{M}$  der Magnetisierungsstrom-Ersatzanordnung des Ferritkernes im Betriebsfall gemäß Gl. (5.26). Für rechteckförmig gewickelte Windungen kann eine weitere Unterteilung dieses Induktivitätsbeitrages in

## 5 Modellierung induktiver Kopplungen

Induktivitätsbeiträge zwischen einer geraden Teilstrecke  $C_s$  der Windungskurve  $C_i$  und einem Segment der Ersatzanordnung erforderlich werden

$$\Lambda_{mi}^{(\mu w)} := \sum_s \tilde{\Lambda}_{ms}^{(\mu w)} \quad \text{mit} \quad \tilde{\Lambda}_{ms}^{(\mu w)} := \int_{C_s} \frac{\vec{A}_{\mathbb{M}_m}^{(w)}}{I_w} \cdot d\vec{r}_i \quad \text{und} \quad C_i = \bigcup_s C_s, \quad (5.30)$$

damit eine analytische Auswertung der resultierenden Integrale zu erreichen ist. Die Gegeninduktivitätsbeiträge gemäß Gl. (5.29) der in dieser Arbeit verwendeten Magnetisierungssegmente und Windungsformen sind in Anhang C dokumentiert.

Der letzte gemäß Gl. (5.23) bzw. (5.16) gesuchte Induktivitätsbeitrag des Ferritkernes ist mit den gewonnenen Erkenntnissen

$$L_{vw}^{(\mu)} = \sum_{i \in \mathbb{T}_v} L'_{wi}^{(\mu 0)} = \sum_{i \in \mathbb{T}_v} \sum_{m \in \mathbb{M}_w} \Lambda_{mi}^{(\mu w)}. \quad (5.31)$$

## 5.6 Einfluss des Betriebszustandes des Ferritkernes auf die Induktivitäten

Bislang wurde der Übertrager im statischen Betriebsfall untersucht, wobei die Induktivitäten  $L_{vw}$  einzig von der Bauelementgeometrie und den Materialeigenschaften abhängen und nicht von den eingeprägten Strömen oder Spannungen des Systems.

Werden dem Übertrager nun zeitabhängige Ströme  $i_v(t)$  bzw. Spannungen  $u_v(t)$  eingeprägt, so ist zu beachten, dass die Materialeigenschaften von Ferrit-Werkstoffen abhängig sind und zwar

- vom zeitlichen Verlauf der Induktion im Kern bzw. bei sinusförmiger Erregung von der Arbeitsfrequenz,
- von der Arbeitstemperatur des Bauelementes, welche sich aufgrund der anfallenden Verluste einstellen wird,
- von der Amplitude der magnetischen Induktion im Kern und
- von Wirbelströmen, welche aufgrund der nicht verschwindenden Leitfähigkeit des Materials im Ferritkern induziert werden und zu einer Verringerung des magnetischen Flusses führen.

Können diese Einflüsse nicht vernachlässigt werden, so sind die Ferritkern-Ersatzanordnungen  $\mathbb{M}_w$  für den Betriebszustand zu ermitteln, für welchen das Übertrager-Ersatzschaltbild bzw. die Induktivitätsmatrix des Übertragers ermittelt werden soll. Weiterhin wird ausgeschlossen, dass der Ferritkern in Sättigung betrieben werden kann. Jeder Betriebsfall wird als linear angenommen, so dass die statische Berechnungsmethode unter Einbeziehung der Materialeigenschaften des Betriebszustandes zu akzeptablen Ergebnissen führt.

Für normale Betriebszustände kann die Sättigung ausgeschlossen und die Arbeitstemperatur ermittelt werden. Die maximale Induktion dient bereits als Entwurfsparameter und ist bekannt, so dass die relative Permeabilität für den Betriebszustand aus dem Datenblatt des

verwendeten Werkstoffes entnommen werden kann. Zur Berücksichtigung der Wirbelströme im Ferritkern ist die Lösung der Skingleichung (4.6 a) im gesamten Kernvolumen erforderlich, wobei eine Einbeziehung dieses Effektes zu einer Erhöhung des Rechenzeitaufwandes führen wird. Diese Arbeit strebt eine weitgehend analytische Lösung auch deswegen an, um Simulationsergebnisse für praktisch einsetzbare Bauelemente mit handelsüblichen Arbeitsplatzrechnern<sup>1</sup> innerhalb von Minuten ermitteln zu können.

Weiterhin ist zu beachten, dass das zeitlich veränderliche Magnetfeld des Systems gemäß dem Induktionsgesetz auch auf die Windungen des Übertragers selbst wirkt und eine Veränderung der Stromdichte in den Windungen zur Folge hat. Dieser Proximity-Effekt wird insbesondere bei der Berechnung der Verluste untersucht. Es sei vorweggenommen, dass der Strom im Leiter zum Rand verdrängt wird. Diese Verteilung ist aufgrund des von benachbarten Leitern wirkenden Magnetfeldes nicht symmetrisch. Die magnetische Energie, welche im Leiter gespeichert ist wird somit verringert. Dies hat zur Folge, dass die innere Eigeninduktivität  $L_i^{(i)}$  einer Windung  $i$  gegenüber dem gemäß Gl. (5.19 d) berechneten Wert mit steigender Arbeitsfrequenz geringer wird.

## 5.7 Zusammenfassung

Die Berechnung der Induktivitätsmatrix  $\mathbf{L}$  eines Übertragers kann durch Aufsummation der Eigen- und Gegeninduktivitäten der einzelnen Windungen des Übertragers erfolgen. Gemäß Gl. (5.16) ist diese Aufsummation teilweise ohne Berücksichtigung des Ferritkernes durchführbar. Die Eigen- und Gegeninduktivitäten der Übertragerwindungen im Mehrleiterystem ohne den Ferritkern sind für die untersuchten Leiteranordnungen gemäß Gln. (5.19 a-c) in guter Näherung analytisch berechenbar (vergl. Anhang C).

Der Einfluss des Ferritkernes wird durch zusätzliche Induktivitätsbeiträge berechnet. Der Ferritkern wird durch eine Superposition von Anordnungen aus Magnetisierungsstromsegmenten ersetzt, deren Vektorpotentiale für die untersuchten Bauelemente so weit wie möglich analytisch berechnet werden können (vergl. Anhang B).

Die so gewonnenen Vektorpotentiale werden zur Berechnung von Gegeninduktivitätsbeiträgen zwischen Windungen bzw. Windungsteilen und Magnetisierungsstromsegmenten der Kern-Ersatzanordnung gemäß Gl. (5.29) bzw. Gl. (5.30) verwendet, welche ebenfalls so weit wie möglich analytisch berechnet werden können (vergl. Anhang C). Abschließend werden diese Gegeninduktivitätsbeiträge gemäß Gl. (5.31) aufsummiert und den Eigen- und Gegeninduktivitäten des Systems ohne Ferritkern gemäß Gl. (5.16) überlagert.

Geignete Übertrager-Ersatzschaltbilder werden im Zusammenhang mit der messtechnischen Verifikation der Ergebnisse in Abschnitt 9 diskutiert. Für Wicklungen auf rechteckförmigen Wickelkörpern wird in Anhang E eine Anpassung der Induktivitätsberechnung vorgestellt.

---

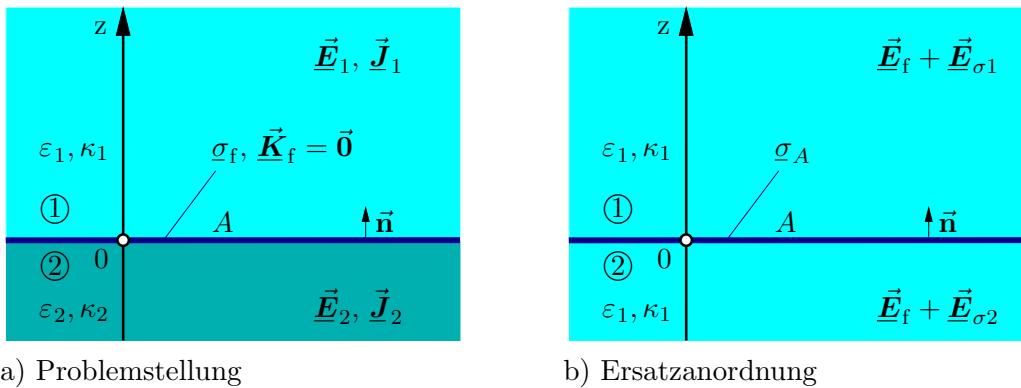
<sup>1</sup>Stand der Technik im Jahr 2005 ist eine Rechenleistung von weniger als 1000 MegaFLOPS (Millionen Fließkomma Instruktionen pro Sekunde) und ca. 512 Megabyte Arbeitsspeicher.

## *5 Modellierung induktiver Kopplungen*

# 6 Elektrische Ferritkern-Ersatzanordnung

## 6.1 Auswertung der elektrischen Randbedingung

Die Abbildung 6.1 a) zeigt einen infinitesimal kleinen Abschnitt der Trennfläche  $A$  zwischen zwei Räumen unterschiedlicher elektrischer Eigenschaften. Die eingeprägten Ladungs- und Stromanordnungen seien harmonisch und im Raum ① (elektrische Permittivität  $\varepsilon_1$ , Leitfähigkeit  $\kappa_1$ ) oberhalb der Trennfläche  $A$  angeordnet. Die in Abbildung 6.1 a) eingetragenen Feldstärken und Stromdichten sind eine Überlagerung eingeprägter, ohmscher und influenziert Anteile. Diese Überlagerung wird zur Ermittlung einer Ersatzanordnung gemäß Abbildung 6.1 b) verwendet und ist dort für die elektrische Feldstärke angedeutet. Raum ② unterhalb hingegen (elektrische Permittivität  $\varepsilon_2$ , Leitfähigkeit  $\kappa_2$ ) sei frei von eingeprägten Ladungen und Strömen. Der Ladungsbetrag  $\underline{\sigma}_f$  wird auf der Trennfläche  $A$  durch Influenz erzeugt. Die Ausdehnung der gesamten Anordnung sei jedoch klein gegenüber der Wellenlänge der Feldgrößen, so dass für die folgende Betrachtung die Wellenausbreitung vernachlässigt werden kann.



**Abbildung 6.1:** Ersatzanordnung zur Berechnung der elektrischen Feldstärke auf beiden Seiten einer Gebietsberandung  $A$  zweier Teilräume unterschiedlicher Materialien

Weitere Ladungen und Ströme seien durch Polarisation und Influenz entstanden und können bei harmonischer Erregung aus den Randbedingungen (1.13 a-d) auf der Oberfläche  $A$  ermittelt werden. Wird die Divergenz auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens des Durchflutungsgesetzes (1.4 d) gebildet, so folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{\vec{H}} = 0 = \operatorname{div} \underline{\vec{J}}_f + j\omega \operatorname{div} \underline{\vec{D}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \underline{\vec{J}}_f = -j\omega \operatorname{div} \underline{\vec{D}} = -j\omega \underline{\rho}_f \quad (6.1)$$

und es resultiert eine weitere Randbedingung

$$\vec{L}_{\langle A \rangle} \odot (\underline{\vec{J}}_f + j\omega \underline{\vec{D}}) = 0. \quad (6.2)$$

Diese kann durch Anwenden der Randbedingung (1.13 a) zu einer Randbedingung entsprechend der Kontinuitätsgleichung

$$\vec{L}_{\langle A \rangle} \odot \vec{J} = -j\omega \underline{\sigma}_f \quad (6.3)$$

umgeformt werden, was letztlich die Stetigkeit der Normalkomponente der Stromdichte beim Übergang zwischen den Teilräumen bedeutet, sofern kein erregender Ladungsbelaag  $\underline{\sigma}_f$  auf dem Rand  $A$  vorhanden ist. Ein Beispiel zur Anwendung sind sogenannte Ballproben zur Messung elektrischer Wechselfelder. Solche Ballproben messen den elektrischen Fluss, der auf die Sondenoberfläche einwirkt. Der elektrische Fluss wird in Form eines Stromes gemessen, wenngleich in der Umgebung der Ballprobe kein elektrischer Strom fließt. Die Normalkomponente der Stromdichte ist beim Übergang von der umgebenden Luft durch die Sondenoberfläche in die leitfähige Ballprobe nicht stetig. Auf der Sondenoberfläche ist als freier Ladungsbelaag die Influenzladung vorhanden. Die Randbedingung (6.2) ist erfüllt. Es ist die Änderung der Influenzladung auf der Sondenoberfläche, welche sich in Form eines Stromes am Messgerät nachweisen lässt.

Aufgrund der Anwesenheit des leitfähigen und polarisierbaren Materials im Raum ② werden sich im Teilraum ② Influenz- und Polarisationsladungen bilden, die ein zusätzliches elektrisches Feld und somit auch eine zusätzliche Stromverteilung in beiden Teilräumen bewirken. Im Anschluss an die Betrachtung dieses Teilproblems werden die Feldstärken des freien Ladungsbelaags den Feldern der Anordnung ohne freien Ladungsbelaag überlagert, um eine vollständige Lösung für die Feldstärken und Ströme der Anordnung in Abbildung 6.1 a) zu erhalten. Die elektrische Feldstärke  $\vec{E}_1$  im Raum ① ist die Überlagerung

$$\vec{E}_1 := \vec{E}_f + \vec{E}_{\sigma 1} \quad (6.4)$$

eines Feldanteils  $\vec{E}_f$ , welcher nur durch eingeprägte Quellen innerhalb des Raumes ① entstanden ist, und eines weiteren Anteils  $\vec{E}_{\sigma 1}$ , der durch die Unterschiede in der Materialbeschaffenheit des Raumes ② im Vergleich zum Raum ① entstanden ist. Diese Unterschiede beruhen lediglich auf den unterschiedlichen elektrischen Permittivitäten  $\varepsilon_1$  bzw.  $\varepsilon_2$  sowie den unterschiedlichen elektrischen Leitfähigkeiten  $\kappa_1$  bzw.  $\kappa_2$ .

Auch für den Raum ② ist die gesamte elektrische Feldstärke eine Superposition

$$\vec{E}_2 := \vec{E}_f + \vec{E}_{\sigma 2} \quad (6.5)$$

der gleichen Feldstärke  $\vec{E}_f$  der eingeprägten Quellen aus Raum ① und eines weiteren Anteils  $\vec{E}_{\sigma 2}$ , welcher wieder nur durch die Unterschiede in der Materialbeschaffenheit des Raumes ② im Vergleich zum Raum ① entstanden ist.

Unter Anwendung der Überlagerungsansätze (6.4), (6.5) und des Ohm'schen Gesetzes (1.1 c) (für  $\vec{v} = \vec{0}$ ) wird die Randbedingung (6.2) neu formuliert:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{n} \cdot \left\{ \vec{J}_1 \Big|_{A^+} + j\omega \varepsilon_1 \vec{E}_1 \Big|_{A^+} - \vec{J}_2 \Big|_{A^-} - j\omega \varepsilon_2 \vec{E}_2 \Big|_{A^-} \right\} \\ &= \vec{n} \cdot \left\{ (\kappa_1 + j\omega \varepsilon_1) \vec{E}_1 \Big|_{A^+} - (\kappa_2 + j\omega \varepsilon_2) \vec{E}_2 \Big|_{A^-} \right\} \\ &= \vec{n} \cdot \left\{ (\kappa_1 + j\omega \varepsilon_1) [\vec{E}_f + \vec{E}_{\sigma 1}]_{A^+} - (\kappa_2 + j\omega \varepsilon_2) [\vec{E}_f + \vec{E}_{\sigma 2}]_{A^-} \right\}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Das Ziel ist es, den Einfluss der Materialeigenschaften des Raumes ② auf Quellenanordnungen im Raum ① zu ermitteln. Hierzu ist es praktisch, eine Ersatzanordnung für den

Raum ② in einer Weise zu ermitteln, dass die Feldstärken in beiden Teirläumen ① und ② mit den Feldstärken der Ausgangssituation übereinstimmen, der Raum ② jedoch mit den gleichen Materialeigenschaften  $\varepsilon_1$  und  $\kappa_1$  ausgefüllt wird wie der Raum ①.

Die erregende Feldstärke  $\vec{E}_f$  wird weder von Quellen im Teilraum ② noch auf der Grenzfläche  $A$  verursacht

$$\vec{L}_{\langle A \rangle} \odot (\varepsilon_1 \vec{E}_f) = 0 \quad \left[ \text{und} \quad \vec{L}_{\langle A \rangle} \otimes \vec{E}_f = \vec{0} \right]. \quad (6.7)$$

Wird nun der Raum ② mit Material der elektrischen Permittivität  $\varepsilon_1$  und der Leitfähigkeit  $\kappa_1$  ausgefüllt, so sind die Quellen  $\underline{\sigma}_A$  der Feldstärken  $\vec{E}_{\sigma 1}$  und  $\vec{E}_{\sigma 2}$  beschrieben durch

$$\vec{n} \cdot \left( \vec{E}_{\sigma 1} \Big|_{A^+} - \vec{E}_{\sigma 2} \Big|_{A^-} \right) := \vec{L}_{\langle A \rangle} \odot \vec{E}_\sigma = \frac{\underline{\sigma}_A}{\varepsilon_1}. \quad (6.8 \text{ a})$$

Im Teilraum ② sind keine Quellen eingeprägt. Die Feldstärken  $\vec{E}_{\sigma 1}$  und  $\vec{E}_{\sigma 2}$  werden also durch den Ladungsbetrag  $\underline{\sigma}_A$  auf dem Rand  $A$  erzeugt, der in unmittelbarer Umgebung des Randes ein symmetrisches elektrisches Feld

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_\sigma = \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{E}_{\sigma 1} & \text{im Teilraum ①} \\ -\vec{n} \cdot \vec{E}_{\sigma 2} & \text{im Teilraum ②} \end{cases} \quad (6.8 \text{ b})$$

zur Folge hat mit

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_{\sigma 1} = -\vec{n} \cdot \vec{E}_{\sigma 2}. \quad (6.8 \text{ c})$$

Der Ladungsbetrag  $\underline{\sigma}_A$  in der Grenzfläche der Ersatzanordnung in Abbildung 6.1 b) selbst ist eine Superposition

$$\underline{\sigma}_A := \underline{\sigma}_f + \underline{\sigma}_{pol} \quad (6.9)$$

aus dem Polarisationsladungsbetrag  $\underline{\sigma}_{pol}$  und einem Influenzladungsbetrag  $\underline{\sigma}_f$  aufgrund der unterschiedlichen Permittivitäten und Leitfähigkeiten der Teilebereiche der Ausgangsanordnung in Abbildung 6.1 a).

Mit Hilfe der Eigenschaften (6.7) bis (6.8 c) der elektrischen Feldstärke der Anordnung folgt aus der Forderung (6.6) die Verknüpfung des Ladungsbetrages  $\underline{\sigma}_A$  mit der erregenden Feldstärke

$$\vec{L}_{\langle A \rangle} \odot \vec{E}_\sigma = \frac{\underline{\sigma}_A}{\varepsilon_1} = 2 \frac{\kappa_2 + j\omega\varepsilon_2 - \kappa_1 - j\omega\varepsilon_1}{\kappa_2 + j\omega\varepsilon_2 + \kappa_1 + j\omega\varepsilon_1} \vec{n} \cdot \vec{E}_f \Big|_{A^+} = 2 \eta \vec{n} \cdot \vec{E}_f \Big|_{A^+}, \quad (6.10)$$

analog zu den Spiegelungsgesetzen der Elektrostatik und des stationären Strömungsfeldes. Hier ist es eine Überlagerung und kann im Sinne eines Spiegelungsgesetzes für das stationäre elektrische Wechselfeld mit stationärem Strömungsfeld verstanden werden mit

$$\eta = \frac{\kappa_2 - \kappa_1 + j\omega(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\kappa_2 + \kappa_1 + j\omega(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}. \quad (6.11)$$

Für sehr hohe Frequenzen ( $|j\omega \vec{D}| \gg |\vec{J}|$ ) oder aber verschwindende Leitfähigkeiten ( $|\vec{J}| = 0$ ) resultiert der Sonderfall des Spiegelungsgesetzes für das elektrische Feld mit

$$\eta_{el} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}. \quad (6.12)$$

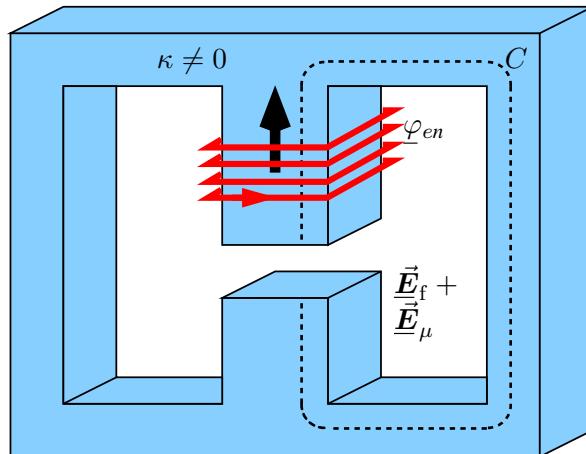
Ist der Verschiebungsstrom vernachlässigbar gegenüber dem Leitungsstrom ( $|j\omega \vec{D}| \ll |\vec{J}|$ ), so resultiert das Spiegelungsgesetz für das stationäre Strömungsfeld mit

$$\eta_J = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1}. \quad (6.13)$$

Diese Analogien beruhen darauf, dass letztlich dieselben Feldgleichungen und Randbedingungen zu erfüllen sind. Lediglich die Materialgleichungen wurden mit unterschiedlichen Parametern angewendet, was zu einer Verlagerung von Quellbelägen in den Randbedingungen (1.13 a) und (6.2) führte. Aus Polarisationsladungen der Ausgangssituation werden Influenzladungen in der Ersatzanordnung.

## 6.2 Ferritkern-Ersatzladungsanordnungen

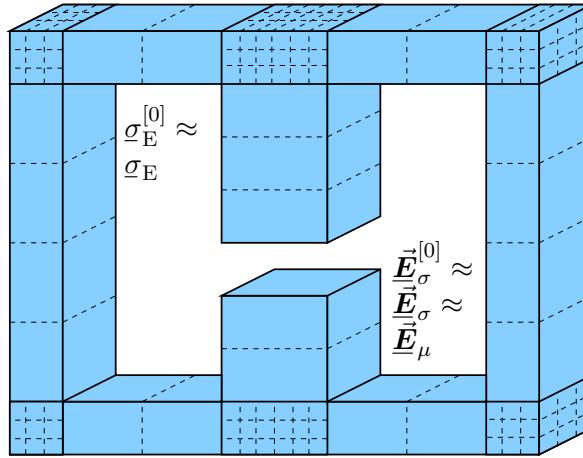
Abbildung 6.2 zeigt eine drahtgewickelte Spule auf einem E-Kern aus hochpermeablem Material. Zur Berechnung der kapazitiven Kopplungen des Bauelementes wird die vollständige elektrische Feldstärke im Bereich der felderregenden Windungen benötigt. Die Potentiale  $\varphi_{en}$  der Leiter sind eingeprägt; ihre elektrische Feldstärke  $\vec{E}_f$  kann im ganzen Raum berechnet werden, sofern der E-Kern nicht berücksichtigt wird. Zur Ermittlung des Beitrages  $\vec{E}_\mu$  des E-Kerns zur



**Abbildung 6.2:** Spule auf hochpermeablem E-Kern

gesamten elektrischen Feldstärke werden den Transformatorenwindungen im folgenden Abschnitt die Potentiale  $\varphi_{en}$  eingeprägt und der leitfähige und evtl. elektrisch permittive Ferritkern durch eine Ersatzanordnung aus Polarisations- und Influenzladungsbälgen ersetzt. Der Vorteil der Ersatzanordnung in Abbildung 6.1 b) gegenüber der realen Anordnung in Abbildung 6.1 a) liegt darin begründet, dass alle zu berechnenden Feldgrößen der realen Anordnung weitgehend analytisch, z.B. durch Verwendung der Helmholtz-Integrale in Abschnitt 2.1, aus den Ladungen der Ersatzanordnung bestimmt werden können.

Mit Hilfe der Erkenntnisse aus Abschnitt 6.1 soll nun der Kern aus Abbildung 6.2 durch eine Anordnung aus Ersatzladungsbälgen  $\sigma_E$  auf der Kernoberfläche mit der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}_\sigma$  ersetzt werden, wie sie Abbildung 6.3 zeigt. Für die spätere numerische Implemen-

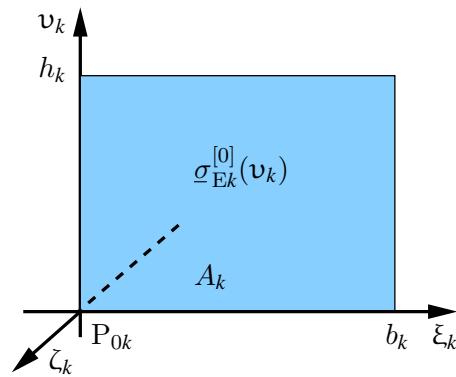


**Abbildung 6.3:** E-Kern Ersatzanordnung aus Ladungsbelägen

tierung ist zunächst eine Diskretisierung der Kernoberfläche erforderlich. Im Gegensatz zur magnetischen Kern-Ersatzanordnung der Abbildung 3.3 werden im elektrischen Fall auch die Ecken durch Ladungsbeläge nachgebildet, welche ggf. jedoch enger diskretisiert werden müssen als die restlichen Schenkel des Kerns. Ähnlich wie schon bei der magnetischen Ersatzanordnung wird die Ortsabhängigkeit der Ersatzladungsbeläge  $\underline{\sigma}_E$  im folgenden Abschnitt linear approximiert, so dass das elektrische Feld  $\vec{E}_\sigma^{[0]}$  der Ladungsbeläge  $\underline{\sigma}_E^{[0]}$  eine möglichst gute Näherung des elektrischen Feldstärkebeitrages des Ferritkernes ist

$$\vec{E}_\sigma^{[0]} \approx \vec{E}_\sigma \approx \vec{E}_\mu. \quad (6.14)$$

In jedem Diskretisierungselement  $A_k$  der Kernoberfläche  $\partial V$  wird ein Ladungsbelag eingeprägt wie in Abbildung 6.4 dargestellt. Die  $v_k$ -Achse verläuft parallel zur Symmetriearchse des Kernsegmentes, auf dem sich das betrachtete Ladungsbelagselement befindet. Insgesamt enthalte die Ersatzanordnung  $N_\sigma$  solche Ladungsbeläge.



**Abbildung 6.4:** Ladungsbelag als Teil der elektrischen Ferritkern-Ersatzanordnung

Werden zur Berechnung der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}_f$  der Windungen und der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}_\sigma$  der Kern-Ersatzanordnung die Integralgleichungen aus Abschnitt 2.1

verwendet, so sind die Maxwellschen Gleichungen erfüllt. Die Ladungsbeläge werden im folgenden Abschnitt so ermittelt, dass die elektrische Feldstärke der Ladungsbeläge im Bereich der Wicklungen in guter Näherung der gesuchten elektrischen Feldstärke des Ferritkernes der Abbildung 6.2 entspricht.

Das Verfahren kann für elektrisch leitfähige oder permittive Teilbereiche komplexer Form ähnlich angewendet werden wie die Ermittlung der magnetischen Kern-Ersatzanordnung in Abschnitt 3.2. Die dort genannten Kerne können nun durch eine Ersatzanordnung aus Ersatzladungsbelägen beschrieben werden. In Anhang D sind alle notwendigen Elemente sowie deren elektrische Feldstärken und Potentiale zusammengetragen.

### 6.3 Quasistationäre Ferritkern-Ersatzladungsanordnung

Einzelne Windungen auf einem hochpermeablen Ferritkern sind zu Transformatorenwicklungen verschaltet. Aus der angeschlossenen Spannung und den Ohm'schen Windungswiderständen können die Potentiale der einzelnen Windungen approximiert werden.

Für die betrachteten Anordnungen können sowohl das elektrische Potential als auch die elektrische Feldstärke der Windungen im gesamten Raum, zunächst jedoch ohne Berücksichtigung des Ferritkernes, analytisch berechnet werden (vergl. Anhang D).

Der Ferritkern wird als leitfähig angenommen und durch eine Ersatzanordnung aus Ladungsbelägen ersetzt. Die Ersatzladungsbeläge sind bislang jedoch noch unbekannt. Sie sind aus der Erfüllung der Randbedingung (6.10) auf der Keroberfläche zu ermitteln.

Aufgrund der Geometrie der betrachteten Anordnungen sind weitere Vereinfachungen sinnvoll. Am Beispiel eines E-Kernes werden zunächst Ladungsbelagselemente gemäß der Abbildung 6.4 betrachtet. Der Ladungsbelag  $\sigma_{Ek}$  sei eine Funktion der Koordinaten  $v_k$ . Bei hinreichend genauer Diskretisierung der Keroberfläche wird eine Beschreibung der Ortsabhängigkeit des Ladungsbelages durch eine lineare Funktion  $\sigma_{Ek}^{[0]}(v_k)$  ausreichen. Die im Rahmen der Arbeit verwendeten Ladungsbelagselemente für weitere Anordnungen sind in Anhang D zusammengefasst.

Zur Verallgemeinerung der Schreibweise soll ein beliebiger Ladungsbelag  $\sigma_{Ek}^{[0]}$  zunächst als lineare Funktion eines beliebigen Ortsvektors  $\vec{r}$  beschrieben werden. Der Ursprung  $P_{0k}$  des Koordinatensystems  $(\xi_k, v_k, \zeta_k)$  wird durch den Ortsvektor  $\vec{r}_{0k}$  beschrieben. Der Einheitsvektor  $\vec{e}_{\xi k}$  zeigt entlang der Unterkante des Ladungsbelages  $\sigma_{Ek}^{[0]}$  entlang der  $\xi_k$ -Achse und spannt mit dem Einheitsvektor  $\vec{e}_{vk}$  die  $\xi_k - v_k$ -Ebene auf, in welcher der Ladungsbelag ist. Der letzte Einheitsvektor wird durch ein Kreuzprodukt erzeugt:

$$\vec{e}_{\zeta k} := \vec{e}_{\xi k} \times \vec{e}_{vk}. \quad (6.15)$$

Der Ladungsbelag selbst kann als Superposition zweier linearer Anteile dargestellt werden

$$\underline{\sigma}_{E1k}^{[0]}(\vec{r}) := \sigma_{E1k}^{[0]} s_{Ak}(\vec{r}) r_k(\vec{r}), \quad (6.16 \text{ a})$$

$$\underline{\sigma}_{E2k}^{[0]}(\vec{r}) := \sigma_{E2k}^{[0]} s_{Ak}(\vec{r}) [1 - r_k(\vec{r})]; \quad (6.16 \text{ b})$$

$$\underline{\sigma}_{Ek}^{[0]}(\vec{r}) := \sigma_{E1k}^{[0]}(\vec{r}) + \sigma_{E2k}^{[0]}(\vec{r}) \quad (6.16 \text{ c})$$

### 6.3 Quasistationäre Ferritkern-Ersatzladungsanordnung

mit der Sprungfunktion

$$s_{Ak}(\vec{r}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \begin{aligned} 0 \leq \vec{e}_{\xi k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0k}) < b_k & \wedge \\ 0 \leq \vec{e}_{v k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0k}) < h_k & \wedge \\ \vec{e}_{\zeta k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0k}) = 0 \end{aligned} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.17)$$

und der auf die Elementhöhe  $h_k$  normierten Länge

$$r_k(\vec{r}) := \frac{\vec{e}_{v k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{0k})}{h_k} \quad (6.18)$$

der Projektion des Vektors  $\vec{r} - \vec{r}_{0k}$  auf die  $v_k$ -Achse. Die elektrische Feldstärke des betrachteten Ladungsbelages ist eine Superposition zweier auf die Ladungsbeläge normierter Feldstärkeanteile  $\vec{F}_{\sigma 1k}^{[0]}$  und  $\vec{F}_{\sigma 2k}^{[0]}$

$$\underline{\vec{E}}_{\sigma 1k}^{[0]}(\vec{r}_P) := \sigma_{E1k}^{[0]} \vec{F}_{\sigma 1k}^{[0]}(\vec{r}_P) \quad \text{und} \quad (6.19 \text{ a})$$

$$\underline{\vec{E}}_{\sigma 2k}^{[0]}(\vec{r}_P) := \sigma_{E2k}^{[0]} \vec{F}_{\sigma 2k}^{[0]}(\vec{r}_P); \quad (6.19 \text{ b})$$

$$\underline{\vec{E}}_{\sigma k}^{[0]}(\vec{r}_P) := \underline{\vec{E}}_{\sigma 1k}^{[0]}(\vec{r}_P) + \underline{\vec{E}}_{\sigma 2k}^{[0]}(\vec{r}_P). \quad (6.19 \text{ c})$$

In einem beliebigen Punkt  $P_{Ak}$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_{Ak}$  auf der Fläche  $A_k$  des Ladungsbelages  $\sigma_k^{[0]}$  wird die Normalkomponente dieses elektrischen Feldes wie folgt definiert:

$$\vec{e}_{\zeta k} \cdot \underline{\vec{E}}_{\sigma k}^{[0]}(\vec{r}_{Ak}) := \vec{e}_{\zeta k} \cdot \frac{1}{2} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[ \underline{\vec{E}}_{\sigma k}^{[0]}(\vec{r}_{Ak} + |\zeta| \vec{e}_{\zeta k}) + \underline{\vec{E}}_{\sigma k}^{[0]}(\vec{r}_{Ak} - |\zeta| \vec{e}_{\zeta k}) \right] = 0. \quad (6.19 \text{ d})$$

Das elektrische Potential des Ladungsbelages kann analog zu den Gln. (6.19 a-c) als Linearkombination zweier auf die Ladungsbeläge normierter Potentiale  $V_{\sigma 1k}^{[0]}$  und  $V_{\sigma 2k}^{[0]}$  dargestellt werden

$$\underline{\varphi}_{e\sigma 1k}^{[0]}(\vec{r}_P) := \sigma_{E1k}^{[0]} V_{\sigma 1k}^{[0]}(\vec{r}_P) \quad \text{und} \quad (6.19 \text{ e})$$

$$\underline{\varphi}_{e\sigma 2k}^{[0]}(\vec{r}_P) := \sigma_{E2k}^{[0]} V_{\sigma 2k}^{[0]}(\vec{r}_P); \quad (6.19 \text{ f})$$

$$\underline{\varphi}_{e\sigma k}^{[0]}(\vec{r}_P) := \underline{\varphi}_{e\sigma 1k}^{[0]}(\vec{r}_P) + \underline{\varphi}_{e\sigma 2k}^{[0]}(\vec{r}_P). \quad (6.19 \text{ g})$$

Mit den Erkenntnissen des Abschnittes 2.1 können die normierten elektrischen Feldstärken und Potentiale analytisch berechnet werden und dürfen somit als bekannt vorausgesetzt werden. Für die in dieser Arbeit verwendeten Anordnungen sind die elektrischen Feldstärken und Potentiale in Anhang D zusammengestellt worden. Die Ersatzladungsbeläge  $\sigma_{E1k}^{[0]}$  und  $\sigma_{E2k}^{[0]}$  sind zu ermitteln.

Das gesamte elektrische Feld kann nun unter Anwendung der Gl. (6.14) als Superposition

$$\underline{\vec{E}} := \underline{\vec{E}}_f + \underline{\vec{E}}_\mu \approx \underline{\vec{E}}^{[0]} := \underline{\vec{E}}_f + \underline{\vec{E}}_\sigma^{[0]} \quad (6.20)$$

aus der Feldstärke  $\underline{\vec{E}}_f$  und dem Feldstärkebeitrag des Ferritkernes bzw. seiner Ersatzanordnung dargestellt werden, so dass hier eine geeignete Näherung  $\underline{\vec{E}}^{[0]}$  für die elektrische Feldstärke  $\underline{\vec{E}}$  der gesamten Anordnung ermittelt wird. Der Beitrag der Ferritkern-Ersatzanordnung zum gesamten elektrischen Feld ist die Superposition der Feldstärken aller Ersatzladungsbeläge und somit eine Linearkombination:

$$\begin{aligned}\vec{\underline{E}}_\mu(\vec{r}_P) \approx \vec{\underline{E}}_\sigma^{[0]}(\vec{r}_P) &= \sum_{k=1}^{N_\sigma} \vec{\underline{E}}_{\sigma k}^{[0]}(\vec{r}_P) \\ &= \sum_{k=1}^{N_\sigma} \left[ \underline{\sigma}_{E1k}^{[0]} \vec{\underline{F}}_{\sigma 1k}^{[0]}(\vec{r}_P) + \underline{\sigma}_{E2k}^{[0]} \vec{\underline{F}}_{\sigma 2k}^{[0]}(\vec{r}_P) \right].\end{aligned}\quad (6.21)$$

Die Ersatzladungsbeläge sind die Koeffizienten der Linearkombination (6.21).

Für die Bestimmung der bislang noch unbekannten Ladungsbeläge ist die elektrische Randbedingung (1.13 a) auf der Oberfläche  $\partial V$  des Kernvolumens  $V$  auszuwerten:

$$\begin{aligned}\vec{\underline{L}}_{\langle\partial V\rangle} \odot \vec{\underline{E}}^{[0]}(\vec{r}_{\partial V}) &= \vec{\underline{n}}_{\partial V}(\vec{r}_{\partial V}) \\ &\cdot \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[ \vec{\underline{E}}^{[0]}(\vec{r}_{\partial V} + |\zeta| \vec{\underline{n}}_{\partial V}) - \vec{\underline{E}}^{[0]}(\vec{r}_{\partial V} - |\zeta| \vec{\underline{n}}_{\partial V}) \right] \\ &= \frac{\underline{\sigma}_E^{[0]}(\vec{r}_{\partial V})}{\varepsilon_0}.\end{aligned}\quad (6.22)$$

Am Ort des Ladungsbelages  $\underline{\sigma}_E^{[0]}$  fließt gemäß der Definition (6.19 d) kein eigener Feldbeitrag des dort eingeprägten Ladungsbelages in das Feld  $\vec{\underline{E}}_\sigma^{[0]}$  der Kern-Ersatzanordnung ein. Stattdessen ist zur Anwendung der Gl. (6.10) die eingeprägte elektrische Feldstärke  $\vec{\underline{E}}_f$  anzupassen, da am Ort eines untersuchten Ladungsbelages auch die elektrischen Feldstärkebeiträge aller anderen Ladungsbeläge der Ersatzanordnung berücksichtigt werden müssen. Aus der Randbedingung (6.22) wird nach Anwendung der Gl. (6.10):

$$\underline{\sigma}_E^{[0]}(\vec{r}_{\partial V}) \approx 2 \varepsilon_0 \underline{\eta} \vec{\underline{n}}_{\partial V}(\vec{r}_{\partial V}) \cdot \left[ \vec{\underline{E}}_f(\vec{r}_{\partial V}) + \vec{\underline{E}}_\sigma^{[0]}(\vec{r}_{\partial V}) \right].\quad (6.23)$$

Diese Forderung ist auf der gesamten Oberfläche  $\partial V_\mu$  des Ferritkernes zu erfüllen. Die Ferritkern-Ersatzanordnung ist jedoch nur eine lineare Interpolation der Polarisations- und Influenzladungen, welche auf dem realen Ferritkern vorhanden sind. Außerdem kann die Randbedingung bei einer numerischen Berechnung nicht auf der gesamten Oberfläche erfüllt werden, so dass gemäß Gl. (2.18) zumindest der begangene Fehler

$$\delta_{\partial V}^2 = \int_{\partial V} g_{\partial V}(\vec{r}) \left\| \vec{\underline{L}}_{\langle\partial V\rangle} \odot \vec{\underline{E}}^{(0)}(\vec{r}) - \underline{\sigma}_E^{[0]}(\vec{r}) \right\|_2^2 \mathrm{d}a\quad (6.24)$$

minimiert werden sollte. Die Gewichtungsfunktion  $g_{\partial V}$  wird an dieser Stelle so gewählt, dass sie zu einer numerischen Auswertbarkeit des Integrals in Form eines linearen Gleichungssystems führt.

Wie schon bei der Ermittlung der magnetischen Ersatzanordnung wird auch hier auf das sogenannte Point Matching zurückgegriffen. Es werden  $N_G$  Punkte  $P_{\partial V_s}$  mit  $s \in \{1, \dots, N_G\}$  auf der Kernoberfläche  $\partial V_\mu$  definiert. Ihre Ortsvektoren sind  $\vec{r}_{\partial V_s}$  und die Gewichtungsfunktion ist eine Linearkombination von Diracschen Deltafunktionen:

$$g_{\partial V}(\vec{r}) := \sum_{s \in \{1, \dots, N_G\}} g_s^2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\partial V_s}).\quad (6.25)$$

Dies führt bei der Auswertung des Integrals (6.24) dazu, dass der Fehler bei der Erfüllung der Randbedingung (6.22) in den Punkten  $P_{\partial V_s}$  minimiert wird. Die Gleichungen in den Punkten

können mit Hilfe der Koeffizienten  $g_s$  gewichtet werden. Werden die Punkte an genau  $N_G = 2N_\sigma$  verschiedenen Orten gewählt, so resultiert ein linear unabhängiges Gleichungssystem

$$\mathbf{B}_m \underline{\mathbf{q}}_m = \underline{\mathbf{e}}_f, \quad (6.26)$$

wobei  $\underline{\mathbf{q}}_m$  ein Vektor aus den Ladungsbelägen der Ferritkern-Ersatzanordnung ist und  $\underline{\mathbf{e}}_f$  die Feldstärken der Transformatorwindungen ohne Ferritkern an den Punkten  $P_{\partial V_s}$  enthält. Das Gleichungssystem besteht aus genau  $N_G$  Gleichungen und der Fehler verschwindet  $\delta_{\partial V}^2 = 0$ . Die Definition der Koeffizienten  $g_s$  ist dann irrelevant. Dies beinhaltet jedoch noch keine Aussage über die Qualität der Approximation bzgl. der Erfüllung der Randbedingung zwischen den gewählten Punkten  $P_{\partial V_s}$ . Um die Randbedingung (6.22) auf dem ganzen Rand möglichst gut zu erfüllen, muss eine kontinuierliche Gewichtungsfunktion definiert werden. Dies erhöht den Rechenaufwand oder führt gar zu numerischen Integrationen zur Ermittlung des Gleichungssystems. Alternativ können die Auswertungspunkte  $P_{\partial V_s}$  dichter positioniert und ihre Anzahl erhöht werden ( $N_G > 2N_\sigma$ ). Dies führt jedoch zu einem überbestimmten Gleichungssystem in Gl. (6.26).

Die Koeffizienten  $g_s$  sind nun wieder frei zur Gewichtung der Randbedingungen in den Auswertungspunkten definierbar. Die Integralgleichung (6.24) kann für diesen Sonderfall laut Zurmühl [40] in ein lösbares Gleichungssystem überführt werden, wobei der Fehler gemäß Gl. (6.24) genau für

$$\mathbf{B}_m^T \mathbf{B}_m \underline{\mathbf{q}}_m = \mathbf{B}_m^T \underline{\mathbf{e}}_f \quad (6.27)$$

minimal wird.

Die Wahl von genau zwei Auswertungspunkten auf jedem Ersatzladungsbelag führt zu einem lösbar, linear unabhängigen Gleichungssystem. Sobald die Anzahl der Punkte erhöht wird, ist das Gleichungssystem überbestimmt.

In der folgenden Betrachtung sollen die einzelnen Gleichungen aus der Randbedingung (6.22) an den  $N_G$  Punkten  $P_{\partial V_s}$  formuliert werden, so dass nach abschließender Gewichtung ein Gleichungssystem der Form (6.26) notiert werden kann.

Fällt ein Punkt  $P_{\partial V_s}$  in die Fläche  $A_k$  des Ladungsbelages  $\underline{\sigma}_{E_k}^{[0]}$ , so resultiert aus Gl. (6.22) bzw. Gl. (6.23) unter Einbeziehung der Gewichtung folgende Gleichung:

$$g_s \left\{ r_k(\vec{r}_{\partial V_s}) \left[ \underline{\sigma}_{E1k}^{[0]} - \underline{\sigma}_{E2k}^{[0]} \right] + \underline{\sigma}_{E2k}^{[0]} \right\} = 2 \varepsilon_0 g_s \vec{\mathbf{e}}_{\zeta k} \cdot \left[ \underline{\mathbf{E}}_f(\vec{r}_{\partial V_s}) + \underline{\mathbf{E}}_\sigma^{[0]}(\vec{r}_{\partial V_s}) \right]. \quad (6.28)$$

Die Zusammenfassung der Gl. (6.28) für alle Punkte  $P_{\partial V_s}$  führt auf ein Gleichungssystem der Form (6.26) zur Ermittlung der Ladungsbeläge der Kern-Ersatzanordnung.

## 6.4 Ferritkern-Ersatzladungsanordnung als Bezugspotential

Wie schon das elektrische Feld (siehe Gl. (6.20)) kann auch das elektrische Potential als Superposition

$$\underline{\varphi}_e^{[0]} := \underline{\varphi}_{ef} + \underline{\varphi}_{e\sigma}^{[0]} \approx \underline{\varphi}_{ef} + \underline{\varphi}_{e\mu} \quad (6.29)$$

aus dem Potential  $\underline{\varphi}_{ef}$  der felderregenden Transformatorwindungen und dem Potentialbeitrag  $\underline{\varphi}_{e\mu}$  des Ferritkernes bzw. dem Potentialbeitrag  $\underline{\varphi}_{e\sigma}^{[0]}$  der elektrischen Ersatzanordnung dargestellt

werden. Der Beitrag der Ferritkern-Ersatzanordnung zum elektrischen Potential ist vergleichbar zu Gl. (6.21) die Superposition der Potentiale aller Ersatzladungsbeläge und somit eine Linearkombination:

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_{e\sigma}^{[0]}(\vec{r}_P) &= \sum_{k=1}^{N_\sigma} \underline{\varphi}_{e\sigma k}^{[0]}(\vec{r}_P) \\ &= \sum_{k=1}^{N_\sigma} \left[ \underline{\sigma}_{E1k}^{[0]} V_{\sigma 1k}^{[0]}(\vec{r}_P) + \underline{\sigma}_{E2k}^{[0]} V_{\sigma 2k}^{[0]}(\vec{r}_P) \right].\end{aligned}\quad (6.30)$$

Alternativ zu der in Abschnitt 6.3 vorgestellten quasistationären Ferritkern-Ersatzanordnung aus einer Summe von Influenzladungen, welche den elektrischen Fluss der felderregenden Wicklungen auf ihrer Oberfläche sammelt, wird hier eine Ersatzladungsanordnung vorgestellt, welche die Kernoberfläche als Äquipotentialfläche mit dem Bezugspotential  $\varphi_{e0}$  definiert. Auch sie ist mit Influenzladungen belegt.

Anstelle der Gl. (6.24) ist für diese Ersatzanordnung jedoch der quadratische Fehler

$$\delta_{\partial V}^2 = \int_{\partial V} g_{\partial V}(\vec{r}) \left| \underline{\varphi}_e^{(0)}(\vec{r}) - \varphi_{e0} \right|^2 da \quad (6.31)$$

auf der Kernoberfläche  $\partial V$  zu minimieren. Die Gewichtungsfunktion  $g_{\partial V}(\vec{r})$  kann gemäß den zuvor getroffenen Vereinbarungen gewählt werden, so dass ein lineares System aus gewichteten Gleichungen

$$g_s \left[ \underline{\varphi}_{ef}(\vec{r}_{\partial V s}) + \underline{\varphi}_{e\sigma}^{[0]}(\vec{r}_{\partial V s}) - \varphi_{e0} \right] = 0 \quad (6.32)$$

zur Bestimmung der Ersatzladungsbeläge resultiert.

## 6.5 Zusammenfassung

Ähnlich zur magnetischen Ersatzanordnung des Abschnittes 3 kann für einen Transformatorkern aufgrund der nicht verschwindenden elektrischen Leitfähigkeit des Kernmaterials eine elektrische Ersatzanordnung gefunden werden. Auch Ferritmaterialeien sind elektrisch schwach leitfähig.

Die elektrische Ersatzanordnung besteht aus Ladungsbelägen, welche die Oberfläche des Kernvolumens abdecken und gemäß der Randbedingung (6.10) aus der erregenden elektrischen Feldstärke  $\vec{E}_f$  der Transformatorwicklung berechnet werden. Zur Bestimmung der erregenden elektrischen Feldstärke  $\vec{E}_f$  müssen die Ladungen der einzelnen Windungen der Transformatorwicklung bekannt sein. Diese werden entweder eingeprägt oder mit dem Coulomb-Gesetz ermittelt.

Sowohl die erregende elektrische Feldstärke  $\vec{E}_f$  als auch die elektrische Feldstärke  $\vec{E}_\sigma^{[0]}$  der Ersatzanordnung kann mit den Helmholtzschen Integralen gemäß Abschnitt 2.1.2 berechnet werden. Dies ist in Anhang D für einige Beispiele bereits weitestgehend analytisch durchgeführt worden. Dort sind auch die elektrischen Potentiale der Anordnungen zusammengestellt.

## 7 Modellierung parasitärer Kapazitäten

Es sollen nun die parasitären Kapazitäten einer Spule bzw. eines Transformators anhand der Geometrie des Aufbaus ermittelt werden. Das betrachtete Bauelement bestehe aus  $W \geq 1$  Wicklungen. Die Menge der Nummern aller Wicklungen ist  $\mathbb{W} = \{1, \dots, W\}$ . Abbildung 7.1 veranschaulicht am Beispiel eines Übertragers mit zwei Wicklungen  $v$  und  $w$  das für alle folgenden Betrachtungen zugrunde gelegte kapazitive Ersatzschaltbild. Es kann leicht für Übertrager mit mehr als zwei Wicklungen erweitert werden. Die Menge der Nummern aller Anschlussknoten ohne den Bezugsknoten 0 sei  $\mathbb{K} = \{1, \dots, W\} \cup \{1', \dots, W'\}$ . Sie enthält beide Anschlussknoten  $v, v' \in \mathbb{K}$  jeder Wicklung  $v \in \mathbb{W}$  des Übertragers. Verluste und magnetische Kopplungen werden in diesem Ersatzschaltbild zunächst nur in Form einer Admittanzmatrix  $\underline{Y}_L$  des Übertragers berücksichtigt. Das Bauelement wird zunächst als Mehrleiterystem aus  $N$  einzelnen

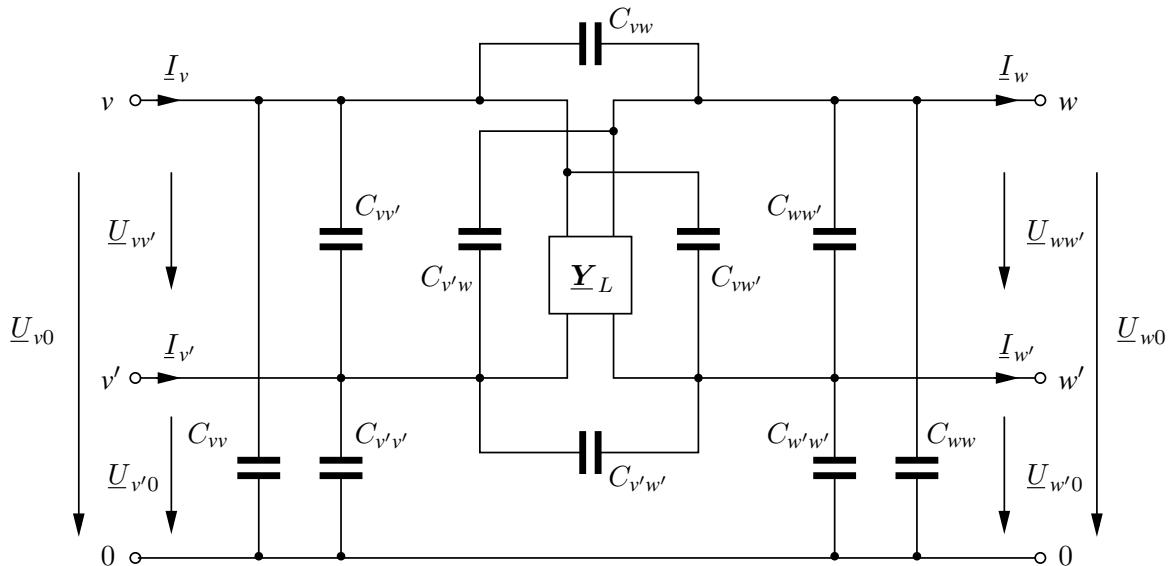


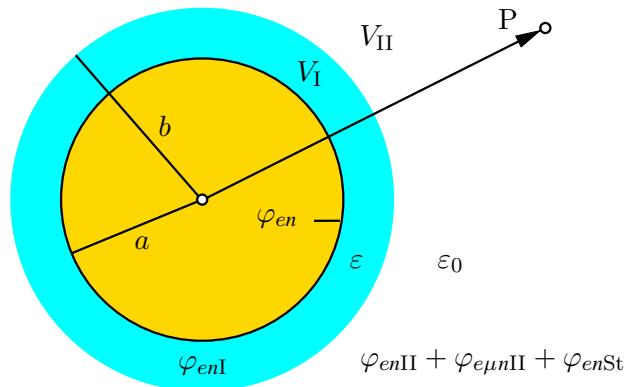
Abbildung 7.1: Transformator mit parasitären Kapazitäten

Windungen und evtl. einem Ferritkern betrachtet. Für jeden Leiter bzw. jede Windung des Mehrleiterystems wird zunächst ein elektrisches Randwertproblem formuliert. Aus der Lösung des Randwertproblems wird die sogenannte Kapazitätsmatrix des Mehrleiterystems mit und ohne Ferritkern berechnet. Zwei Methoden zur Überführung der Kapazitätsmatrix in die gesuchten Teilkapazitäten eines zugrundegelegten Ersatzschaltbildes werden vorgestellt.

## 7.1 Isolierte Drahtwindung im elektrischen Feld

Das Bauelement sei symmetrisch (z.B. rotationssymmetrisch) aufgebaut, so dass alle Problemstellungen lediglich zweidimensional in einer Schnittebene betrachtet werden.

Abbildung 7.2 zeigt den Querschnitt einer Windung  $n$  aus Kupferlackdraht mit dem Drahtdurchmesser  $d_{\text{nom}} = 2a$  und dem Außendurchmesser  $d_{\text{out}} = 2b$ . Der Kupferleiter befindet sich



**Abbildung 7.2:** isolierter Runddraht

auf dem elektrischen Potential  $\varphi_{en}$ . Auch die elektrische Permittivität  $\varepsilon$  der Lackschicht wird als bekannt vorausgesetzt. Im Isolationsbereich  $V_I$  ist  $\varphi_{enI}$  das vollständige elektrische Potential. In der Umgebung  $V_{II}$  des Leiter befinden sich weitere Leiter und evtl. ein Ferritkern, was hier jedoch so berücksichtigt wird, dass alle diese Beiträge zum elektrischen Potential in einem beliebigen Punkt P im Außenraum  $V_{II}$  als bekannt vorausgesetzt werden. Der Potentialbeitrag aufgrund eines vorhandenen Ferritkernes wird als  $\varphi_{e\mu nII}$  definiert und der Potentialbeitrag benachbarter Leiter als  $\varphi_{enSt}$ .

Der elektrische Fluss  $\Psi_{nn}$ , welcher auf dem Leiter  $n$  einzig auf das Potential  $\varphi_{en} \neq 0$  des Leiters selbst zurückzuführen ist, trägt im Außenraum  $V_{II}$  mit dem Potential  $\varphi_{enII}$  und einem weiteren Potential  $\varphi_{e\mu nII}$  zum gesamten elektrischen Potential bei:

$$\varphi_e = \begin{cases} \varphi_{en} & \text{im Leiter,} \\ \varphi_{enI} & \text{im Bereich } V_I, \\ \varphi_{enII} + \varphi_{e\mu nII} + \varphi_{enSt} & \text{im Außenraum } V_{II}. \end{cases} \quad (7.1)$$

Das Potential  $\varphi_{e\mu nII}$  wird anschließend auf die Anwesenheit des Ferritkernes im Feld des elektrischen Flusses  $\Psi_{nn}$  zurückgeführt. Dieser Beitrag verschwindet folglich für Luftspulen und Übertrager ohne Kern.

Das elektrische Potential erfüllt in allen drei Bereichen die Laplace-Gleichung

$$\Delta \varphi_e = 0, \quad (7.2)$$

da lediglich auf den Gebietsrändern Ladungen vorhanden sein können. Es sind dies ein eingeprägter und ein influenzierter Ladungsbelag auf der Oberfläche des Kupferleiters und ein Polarisationsladungsbelag auf den Oberflächen des Isolationsmantels. Ihr Einfluss wird in den

Randbedingungen (1.13 a, b) berücksichtigt. Es sind dies die Forderungen nach der Stetigkeit des elektrischen Potentials im gesamten Raum bzw. nach der Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke und der Stetigkeit der Normalkomponente der elektrischen Flussdichte an Grenzflächen ohne freie Flächenladung. Ist ein Ferritkern vorhanden, so soll das elektrische Potential auf seiner Oberfläche verschwinden. Der Bezugspunkt fällt dann in den Ferritkern.

Die weitere Vorgehensweise ist stark von der Geometrie der Anordnung abhängig. In Abschnitt 8 wird eine Lösung für rotationssymmetrische Leiteranordnungen vorgestellt, welche auch den Ferritkern berücksichtigt.

An dieser Stelle ist zunächst nur wichtig, dass eine Lösung für jeden Leiter und somit für das gesamte Mehrleitersystem existiert. Die Beiträge aller Leiter (und des Ferritkernes) zum Potential und zur elektrischen Feldstärke im gesamten Raum können dann berechnet werden.

In Abschnitt 8 wird aus den elektrischen Feldstärken abschließend über das Coulomb-Gesetz (1.4 a) in seiner integralen Form Gl. (A.3 a) die Ladung  $Q_n$  jedes einzelnen Leiters  $n$  bestimmt und gemäß Kröger [23] eine Verknüpfung mit sämtlichen elektrischen Potentialbeiträgen aller Leiter im System ermittelt:

$$Q_n = \sum_{m=1}^N k_{nm} \varphi_{em}. \quad (7.3)$$

Die Koeffizienten  $k_{nm}$  werden Kapazitätskoeffizienten genannt und in der Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K} = (k_{nm})$  gesammelt. Die Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K}$  des Mehrleitersystems wird in den folgenden Abschnitten zur Berechnung der Teilkapazitäten im Übertrager-Ersatzschaltbild verwendet. Wird die Gl. (7.3) durch eine Gruppierung der Kapazitätskoeffizienten nach den Potentialdifferenzen zu allen anderen Leitern bzw. zum Bezugspunkt geeignet umgestellt, das heißt in der Form

$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{m=1}^N k_{nm} (\varphi_{en} - 0) + \sum_{m=1}^N -k_{nm} (\varphi_{en} - \varphi_{em}) \\ &= \underbrace{c_{nn} (\varphi_{en} - 0)}_{\Psi_{nn}} + \sum_{m=1}^N \underbrace{c_{nm} (\varphi_{en} - \varphi_{em})}_{\Psi_{nm}} \end{aligned} \quad (7.4)$$

ausgedrückt, so resultieren die Teilkapazitäten des Mehrleitersystems

$$c_{nm} = \begin{cases} \sum_{s=1}^N k_{ns} & \text{für } m = n, \\ -k_{nm} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.5)$$

Auch diese werden in einer Matrix  $\mathbf{C} = (c_{nm})$  der Teilkapazitäten  $c_{nm}$  zusammengefasst. Die Sortierung gemäß Gl. (7.4) veranschaulicht die Überlagerung der elektrischen Teilflüsse  $\Psi_{nm}$ , welche sich aufgrund der Potentialdifferenzen zu anderen Leitern  $m$  auf dem Leiter  $n$  sammeln. Laut Kroeger [23] ist der vom Leiter  $m$  auf dem Leiter  $n$  influenzierte elektrische Fluss  $\Psi_{nm}$  dem vom Leiter  $n$  auf dem Leiter  $m$  influenzierten elektrischen Fluss  $\Psi_{mn}$  entgegengesetzt, das heißt

$$\Psi_{nm} = -\Psi_{mn}, \quad (7.6)$$

was auch bedeutet, dass die Matrix  $\mathbf{C}$  der Teilkapazitäten symmetrisch ist:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^T. \quad (7.7)$$

Der elektrische Teilfluss  $\Psi_{nn}$  hingegen hängt nicht von den Potentialen der anderen Leiter ab. Dieser Teilfluss wirkt zum Bezugspunkt bzw. zu einem evtl. vorhandenen Ferritkern. Aus diesem Grund muss vor der Berechnung der Teilkapazitäten im Ersatzschaltbild zunächst noch der Einfluss der in Abschnitt 6 eingeführten Ferritkern-Ersatzanordnung auf die Kapazitätsmatrix erläutert werden.

## 7.2 Berücksichtigung elektrischer Ferritkern-Ersatzanordnungen

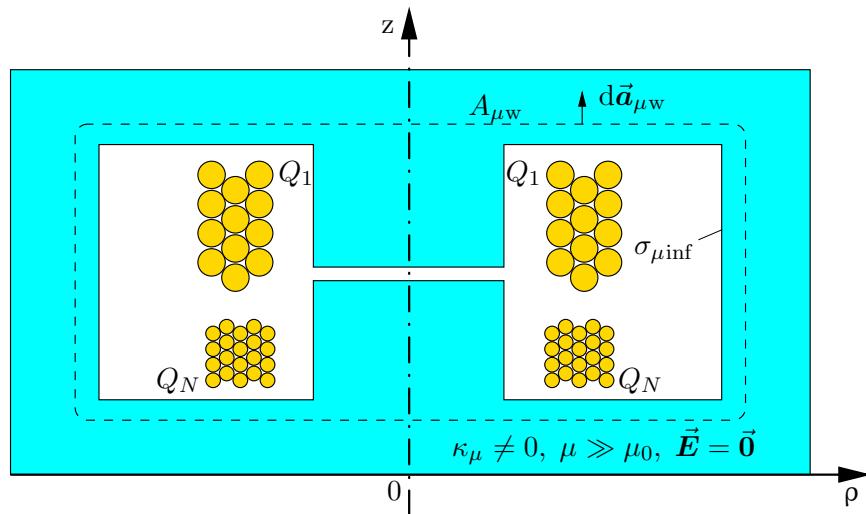
Zur Vereinfachung soll angenommen werden, dass der Ferritkern die Transformator-Wicklungen vollständig umschließt. Luftspalte und sonstige Öffnungen des Ferritkernes werden vernachlässigt und Rotationssymmetrie vorausgesetzt. Die gesamte elektrische Ladung aller Windungen des Übertragers ist:

$$Q_{\text{Wickl}} := \sum_{n=1}^N Q_n. \quad (7.8)$$

Diese ist vom Ferritkern eingeschlossen. Selbst bei schwacher Leitfähigkeit  $\kappa_\mu \neq 0$  des Ferritkernes wird im statischen Betriebsfall im Kernvolumen kein elektrisches Feld vorhanden sein. Das Coulomb-Gesetz (A.3 a) wird nun auf einer geschlossenen, vollständig im Kernvolumen und den Wicklungsbereich vollständig umschließenden Oberfläche  $A_{\mu w}$  ausgewertet (vergl. Abbildung 7.3):

$$\iint_{A_{\mu w}} \vec{D} \cdot d\vec{a}_{\mu w} = Q_{\text{Wickl}} + Q_{\mu \text{inf}} = 0. \quad (7.9)$$

Aufgrund der Feldfreiheit des Ferritkernes verschwindet das Ergebnis. Neben der Ladung  $Q_{\text{Wickl}}$  der Wicklungen wurde eine Influenzladung  $Q_{\mu \text{inf}} = -Q_{\text{Wickl}}$  erfasst, welche auf der dem Wicklungsbereich zugewandten Oberfläche des Ferritkernes als Ladungsbelag  $\sigma_{\mu \text{inf}}$  verteilt ist.



**Abbildung 7.3:** Übertrager im Topfkern (P-Kern)

Wird die Influenzladung  $Q_{\mu \text{inf}}$  unter Einbeziehung der Gln. (7.4) und (7.6) ausgewertet, so ist

zu erkennen, dass sie nur eine Überlagerung

$$Q_{\mu\text{inf}} = -Q_{\text{Wickl}} = - \sum_{n=1}^N C_{nn} (\varphi_{en} - 0) = - \sum_{n=1}^N \Psi_{nn} = \sum_{n=1}^N q_{\mu\text{inf}\,n} \quad (7.10)$$

der elektrischen Teilflüsse  $q_{\mu\text{inf}\,n} = -\Psi_{nn}$  ist. Alle anderen Teilflüsse wirken nur wechselseitig innerhalb der Windungen und heben sich in der Summe gegenseitig auf.

Die in Abschnitt 6 eingeführte elektrische Ferritkern-Ersatzanordnung besteht aus Influenzladungsbelägen auf der Oberfläche des Ferritkern-Volumens. Umschließt die Ersatzanordnung den Wicklungsbereich vollständig, so entspricht die gesamte Influenzladung der Ersatzanordnung den hier getroffenen Vereinbarungen. Für die spätere Berechnung der Teilkapazitäten im Ersatzschaltbild ist die Kenntnis der gesamten Influenzladung  $Q_{\mu\text{inf}}$  jedoch nicht ausreichend. Die Beiträge  $q_{\mu\text{inf}\,n}$  der einzelnen Leiter des Mehrleitersystems müssen bekannt sein.

Voraussetzung zur Ermittlung einer Ersatzanordnung ist allerdings die Kenntnis der Potentialbeiträge  $\varphi_{en\text{II}}$  und  $\varphi_{e\mu n\text{II}}$  aller Leiter  $n = 1, \dots, N$ . Diese sind jedoch erst nach separater Lösung des elektrischen Randwertproblems gemäß Abschnitt 7.1 für jeden Leiter bekannt. Eine Ersatzanordnung kann also erst nach Lösung des Randwertproblems ermittelt werden und hat einen zusätzlichen Beitrag zum elektrischen Potential  $\varphi_{en\text{St}}$  im Außenraum  $V_{\text{II}}$  jedes Leiters  $n$  zur Folge, welcher jedoch zur Formulierung des Randwertproblems noch nicht bekannt war. Ein iteratives Verfahren mit der Iterationsnummer  $z \in \mathbb{N}$  ist die Folge. Alle eingeführten Größen werden zusätzlich mit dem Iterationsindex  $z$  versehen, z.B.  $\Phi^{(z)}$  (stellvertretend für alle Ladungen, Potentiale, Feldstärken und Ersatzanordnungen). Die zu Beginn einer Iteration  $z$  vorhandene Ersatzanordnung wird nun als  $\mathbb{E}^{(z)}$  bezeichnet. Sie ist das Ergebnis der vorangegangen Iteration  $z - 1$ . Zu Beginn des Verfahrens ( $z = 1$ ) ist jedoch noch keine elektrische Ferritkern-Ersatzanordnung vorhanden, d.h. die Menge  $\mathbb{E}^{(1)}$  ist leer.

Im Iterationsschritt  $z$  fließt das elektrische Potential der Ferritkern-Ersatzanordnung  $\mathbb{E}^{(z)}$  in das Potential  $\varphi_{en\text{St}}^{(z)}$  im Außenraum des Leiters  $n$  ein. Das Randwertproblem wird für alle Leiter  $n = 1, \dots, N$  gelöst.

Zu jeder Windung  $n$  korrespondierend wird nun eine separate elektrische Ferritkern-Ersatzanordnung  $\mathbb{E}_n^{(z+1)}$  gemäß der Vorgehensweise in Abschnitt 6 aus den Randbedingungen auf der Kern-Oberfläche ermittelt. Das in Gl. (7.1) noch unbenannte Potential  $\varphi_{e\mu n\text{II}}^{(z)}$  ist dabei das elektrische Potential der Ladungsbeläge der Ersatzanordnung  $\mathbb{E}_n^{(z)}$ . In die Auswertung der Randbedingungen zur Ermittlung der Ersatzanordnung  $\mathbb{E}_n^{(z+1)}$  fließen nur die Potentialbeiträge  $\varphi_{en\text{II}}^{(z)}$  und  $\varphi_{e\mu n\text{II}}^{(z)}$  bzw. die dazu korrespondierenden elektrischen Feldstärken  $\vec{E}_{n\text{II}}^{(z)}$  und  $\vec{E}_{\mu n\text{II}}^{(z)}$  ein. Die Überlagerung aller Ersatzanordnungen ist die vollständige Ersatzanordnung für den Ferritkern des Übertragers:

$$\mathbb{E}^{(z+1)} = \bigcup_{n=1}^N \mathbb{E}_n^{(z+1)}. \quad (7.11)$$

Die Kenntnis der Ersatzanordnung  $\mathbb{E}^{(z+1)}$  ist nur für den nächsten Iterationsschritt von Bedeutung. Für die Ermittlung der Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K}$  des Mehrleitersystems ist die Kenntnis der elektrischen Feldstärken  $\vec{E}_{n\text{II}}^{(z)}$  und  $\vec{E}_{\mu n\text{II}}^{(z)}$  entscheidend, denn die Ladung  $Q_n^{(z)}$  einer Windung  $n$  kann gemäß dem Coulomb-Gesetz (A.3 a) per Integration über die nach außen gewandte Ober-

fläche  $A_{n\text{II}}$  des Isolationsbereiches  $V_{\text{II}}$  des Leiters  $n$  ermittelt werden

$$Q_n^{(z)} = \sum_{m=1}^N \underbrace{\iint_{A_{n\text{II}}} \varepsilon_0 (\vec{E}_{m\text{II}}^{(z)} + \vec{E}_{\mu m\text{II}}^{(z)}) \cdot d\vec{a}_n}_{=k_{nm}^{(z)} \varphi_{em}} . \quad (7.12)$$

Bei Abbruch nach Iteration  $Z$  sollen die Kapazitätskoeffizienten

$$k_{nm} := k_{nm}^{(Z)} = \frac{1}{\varphi_{em}} \iint_{A_{n\text{II}}} \varepsilon_0 (\vec{E}_{m\text{II}}^{(Z)} + \vec{E}_{\mu m\text{II}}^{(Z)}) \cdot d\vec{a}_n \quad (7.13)$$

und die Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K} = (k_{nm}) = (k_{nm}^{(Z)})$  für weitere Berechnungen verwendet werden.

### 7.3 Netzwerktheoretische Kapazitätsberechnung

Die parasitären Kapazitäten bzw. die Kapazitätsmatrix des Mehrleitersystems werden nun als bekannt vorausgesetzt und als unabhängig vom Betriebszustand angenommen. Für die weiteren Betrachtungen wird das Bauelement bei harmonischer Erregung betrieben. In Abbildung 7.4 sind Elemente des Ersatzschaltbildes des Mehrleitersystems dargestellt, welches zum untersuchten Transformator aus  $N$  Windungen und  $W$  Wicklungen korrespondiert. Abbildung 7.4 a) zeigt eine Windung  $n$  zwischen den Knoten  $n$  und  $n'$ . Die Streuinduktivität

$$L_{\sigma n} = L_{nn} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N L_{nk} \quad (7.14)$$

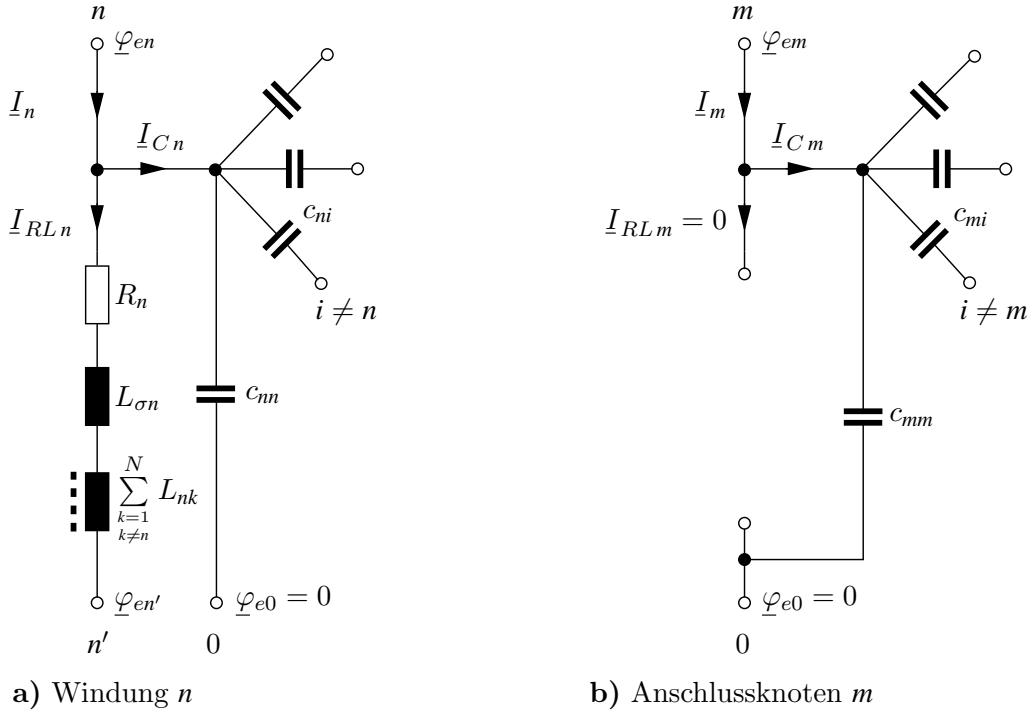
koppelt magnetisch nicht zu anderen Windungen. Die magnetischen Kopplungen werden in der Reihenschaltung aller Gegeninduktivitäten  $L_{nk}$  hier symbolisch zusammengefasst als

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N L_{nk} \quad (7.15)$$

dargestellt. Der Strom  $I_n$  fließt aus einer am Knoten  $n$  angeschlossenen Windung (z.B. aus der Windung  $n+1$ ) in die Windung  $n$ . Ein Teil  $I_{Cn}$  des Stromes fließt jedoch über parasitäre Kapazitäten  $c_{ni}$  ab, so dass nur ein Teil  $I_{RLn}$  durch die verlustbehaftete, induktive Windung selbst fließt und mit anderen Windungen des Transformatoren magnetisch koppeln kann. Die Verluste der Windung werden im Widerstand  $R_n$  zusammengefasst.

Abbildung 7.4 b) zeigt den ersten (von zwei) Anschlussknoten  $m \in \{N+1, \dots, N+W\}$  einer Wicklung. Er ist mit dem Knoten  $n'$  der ersten Windung einer Wicklung zu verbinden. Der letzte Anschlussknoten einer Wicklung ist bereits in Abbildung 7.4 b) erfasst. Für jede Wicklung wird eine solche zusätzliche Leerlaufwindung  $m$  definiert. (Dabei gilt:  $R_m \rightarrow \infty$  und  $L_{\sigma m} := 0$ ,  $L_{mk} := 0$ .) Es wird somit ein System aus  $N_0 = N + W$  Leitern betrachtet.

Der Kapazitätsindex  $i \in \{1, \dots, N_0\}$  legt fest, zu welchem Knoten  $i$  die Kapazität  $c_{ni}$  verbunden wird, während der Induktivitätsindex  $k \in \{1, \dots, N_0\} \setminus n$  festlegt, zu welcher Schleife



**Abbildung 7.4:** Ersatzschaltbildelemente des Mehrleitersystems

(bzw. Windung)  $k$  die Gegeninduktivität  $L_{nk}$  koppelt. Die parasitäre Kapazität  $c_{nn}$  ist stets direkt zum Bezugsknoten 0 verbunden.

Der Gesamtstrom setzt sich also aus dem Leistungsstrom  $I_{RL n}$  durch die Windung und einem kapazitiven Anteil  $I_{C n}$  zusammen:

$$I_n = I_{RL n} + I_{C n}. \quad (7.16)$$

Der Knoten  $n$  befindet sich auf dem elektrischen Potential  $\underline{\varphi}_{en}$  und die Spannung über der Windung  $n$  ist mit den Strömen des Systems über das Induktionsgesetz verknüpft

$$U_n = \underline{\varphi}_{en} - \underline{\varphi}_{en'} = (R + j\omega L_{nn}) I_{RL n} + j\omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{N_0} L_{nk} I_{RL k}. \quad (7.17 \text{ a})$$

Der kapazitive Strom  $I_{C n}$  kann gemäß dem Coulomb-Gesetz aus den Kapazitätskoeffizienten  $k_{nm}$  bzw. den Teilkapazitäten  $C_{nm}$  des Mehrleitersystems bestimmt werden, nämlich aus

$$\begin{aligned} I_{C n} &= I_n - I_{RL n} = j\omega \sum_{i=1}^{N_0} k_{ni} \underline{\varphi}_{ei} \\ &= j\omega c_{nn} \underline{\varphi}_{en} + j\omega \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{N_0} c_{ni} (\underline{\varphi}_{en} - \underline{\varphi}_{ei}), \end{aligned} \quad (7.17 \text{ b})$$

sofern die Leiterpotentiale bekannt sind. Es sei zunächst noch nicht spezifiziert, ob ein Teil des

## 7 Modellierung parasitärer Kapazitäten

kapazitiven Stromes aus dem Knoten  $n$  in den Knoten  $n'$  fließt. Dies wird durch die Verschaltung der Windungen festzulegen sein. I.d.R. werden die Windungen einer Wicklung in Reihe geschaltet, d.h.

$$\underline{I}_{n+1} := \underline{I}_{RLn} \quad \text{und} \quad \underline{\varphi}_{en+1} := \underline{\varphi}_{en'} . \quad (7.18)$$

Für die Berechnung werden die erregenden Ströme  $\underline{I}_{eqw}$  in die  $W$  Wicklungen eingeprägt, so dass zumindest  $W$  weitere Ströme  $\underline{I}_m$  der jeweils ersten Windungen der Wicklungen bekannt sind. Des Weiteren werden die Spannungen der Wicklungen zum Massepotential vorgegeben, so dass  $W$  Potentiale  $\underline{\varphi}_{em'}$  der letzten Windungen der Wicklungen als bekannt vorausgesetzt werden können. Die Potentiale und Ströme des Transformators werden zu Vektoren zusammengefasst

$$\underline{p}_e = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_{e1} \\ \vdots \\ \underline{\varphi}_{eN_0} \end{pmatrix}, \quad \underline{p}'_e = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_{e1'} \\ \vdots \\ \underline{\varphi}_{eN'_0} \end{pmatrix}, \quad \underline{i} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \vdots \\ \underline{I}_{N_0} \end{pmatrix}, \quad \underline{i}_{RL} = \begin{pmatrix} \underline{I}_{RL1} \\ \vdots \\ \underline{I}_{RN_0} \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Ebenso werden die erregenden Spannungen und Ströme im Ersatzschaltbild des Transformators zu Vektoren zusammengefasst

$$\underline{p}_{e\text{ eq}} = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_{eeq1} \\ \vdots \\ \underline{\varphi}_{eeq2W} \end{pmatrix}, \quad \underline{p}'_{e\text{ eq}} = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}'_{eeq1} \\ \vdots \\ \underline{\varphi}'_{eeq2W} \end{pmatrix}, \quad \underline{i}_{\text{eq}} = \begin{pmatrix} \underline{I}_{eq1} \\ \vdots \\ \underline{I}_{eq2W} \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

Dann kann die interne und externe Verschaltung der  $N_0$  Windungen zu einem Transistor mit  $W$  Wicklungen in Matrizenbeschreibung notiert werden

$$\underline{p}'_e = \mathbf{A}_U \underline{p}_e + \mathbf{B}_U \underline{p}_{e\text{ eq}} + \mathbf{B}'_U \underline{p}'_{e\text{ eq}} \quad \text{und} \quad \underline{i} = \mathbf{A}_I \underline{i}_{RL} + \mathbf{B}_I \underline{i}_{\text{eq}}, \quad (7.21 \text{ a, b})$$

wobei die Matrizen  $\mathbf{A}_I, \mathbf{A}_U \in \mathbb{R}^{N_0 \times N_0}$  und  $\mathbf{B}_I, \mathbf{B}_U, \mathbf{B}'_U \in \mathbb{R}^{N_0 \times 2W}$  zunächst unbekannt sind, aber gemäß Gl. (7.18) auf einfache Art und Weise gewonnen werden können.

Die Gln. (7.17 a) und (7.17 b) können ebenfalls in Matrizennotation geschrieben werden

$$\underline{p}_e - \underline{p}'_e = \mathbf{R} \underline{i}_{RL} + j\omega \mathbf{L} \underline{i}_{RL} \quad \text{bzw.} \quad \underline{i} - \underline{i}_{RL} = j\omega \mathbf{K} \underline{p}_e. \quad (7.22 \text{ a, b})$$

Unter Anwendung der Verschaltungen gemäß Gl. (7.21 a) resultiert für das Induktionsgesetz (7.17 a)

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}_U) \underline{p}_e - \mathbf{B}_U \underline{p}_{e\text{ eq}} - \mathbf{B}'_U \underline{p}'_{e\text{ eq}} = \mathbf{R} \underline{i}_{RL} + j\omega \mathbf{L} \underline{i}_{RL} \quad (7.23 \text{ a})$$

und für die kapazitiven Ströme

$$(\mathbf{A}_I - \mathbf{E}) \underline{i}_{RL} + \mathbf{B}_I \underline{i}_{\text{eq}} = j\omega \mathbf{K} \underline{p}_e. \quad (7.23 \text{ b})$$

Auch das Ersatzschaltbild des Transformators kann aus einer Verschaltung

$$\underline{p}'_{e\text{ eq}} = \mathbf{A}_{U\text{eq}} \underline{p}_{e\text{ eq}} \quad \text{und} \quad \underline{i}_{\text{eq}} = \mathbf{A}_{I\text{eq}} \underline{i}_{RL\text{eq}} \quad (7.24 \text{ a, b})$$

von  $2W$  Maschen und  $2W$  Knoten erzeugt werden mit  $\mathbf{A}_{I\text{eq}}, \mathbf{A}_{U\text{eq}} \in \mathbb{R}^{2W \times 2W}$ . Für den Transistor werden die Maschenregeln

$$\underline{p}_{e\text{ eq}} - \underline{p}'_{e\text{ eq}} = \mathbf{R}_{\text{eq}} \underline{i}_{RL\text{eq}} + j\omega \mathbf{L}_{\text{eq}} \underline{i}_{RL\text{eq}} \quad (7.25 \text{ a})$$

und die Knotenregeln für die kapazitiven Ströme notiert:

$$\underline{\mathbf{i}}_{\text{eq}} - \underline{\mathbf{i}}_{RL\text{ eq}} = j\omega \mathbf{K}_{\text{eq}} \underline{\mathbf{p}}_{e\text{ eq}}. \quad (7.25 \text{ b})$$

Die Anwendung der Verschaltungen gemäß Gl. (7.24) liefert mit Gl. (7.25 a)

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}_{U\text{ eq}}) \underline{\mathbf{p}}_{e\text{ eq}} = \mathbf{R}_{\text{eq}} \underline{\mathbf{i}}_{RL\text{ eq}} + j\omega \mathbf{L}_{\text{eq}} \underline{\mathbf{i}}_{RL\text{ eq}} \quad (7.26 \text{ a})$$

und für die kapazitiven Ströme aus Gl. (7.25 b):

$$(\mathbf{A}_{I\text{ eq}} - \mathbf{E}) \underline{\mathbf{i}}_{RL\text{ eq}} = j\omega \mathbf{K}_{\text{eq}} \underline{\mathbf{p}}_{e\text{ eq}}. \quad (7.26 \text{ b})$$

Werden die Gln. (7.21) und (7.23) zusammengefasst, so ergibt dies

$$\begin{aligned} & (\mathbf{E} - \mathbf{A}_U) \underline{\mathbf{p}}_e - (\mathbf{B}_U + \mathbf{B}'_U \mathbf{A}'_{U\text{ eq}}) \underline{\mathbf{p}}_{e\text{ eq}} \\ &= (\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) (\mathbf{A}_I - \mathbf{E})^{-1} (j\omega \mathbf{K} \underline{\mathbf{p}}_e - \mathbf{B}_I \underline{\mathbf{i}}_{\text{eq}}) \end{aligned} \quad (7.27)$$

bzw. mit  $\mathbf{B}''_U := \mathbf{B}_U + \mathbf{B}'_U \mathbf{A}_{U\text{ eq}}$

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{E} - \mathbf{A}_U) - (\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) (\mathbf{A}_I - \mathbf{E})^{-1} j\omega \mathbf{K}] \underline{\mathbf{p}}_e - \mathbf{B}''_U \underline{\mathbf{p}}_{e\text{ eq}} \\ &= -(\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) (\mathbf{A}_I - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{B}_I \underline{\mathbf{i}}_{\text{eq}}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Zur Berechnung der Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K}$  wurde bereits angenommen, dass die Leiterpotentiale in guter Näherung aus den erregenden Strömen bzw. Spannungen berechnet werden können:

$$\underline{\mathbf{p}}_e \approx \underline{\mathbf{Z}}_0 \underline{\mathbf{i}}_{\text{eq}} + \mathbf{N}_0 \underline{\mathbf{p}}_{e\text{ eq}} \approx \underline{\mathbf{N}}'_0 \underline{\mathbf{p}}_{e\text{ eq}}. \quad (7.29)$$

Somit kann die Problemstellung weiter vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{E} - \mathbf{A}_U) \mathbf{N}_0 - (\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) (\mathbf{A}_I - \mathbf{E})^{-1} j\omega \mathbf{K} \mathbf{N}_0 - \mathbf{B}''_U] \underline{\mathbf{p}}_{e\text{ eq}} \\ &= [(\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) (\mathbf{A}_I - \mathbf{E})^{-1} (j\omega \mathbf{K} \underline{\mathbf{Z}}_0 - \mathbf{B}_I) - (\mathbf{E} - \mathbf{A}_U) \underline{\mathbf{Z}}_0] \underline{\mathbf{i}}_{\text{eq}}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Nach Einsetzen der Gln. (7.25 b) und (7.26 a) ergibt sich

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{E} - \mathbf{A}_U) \mathbf{N}_0 - (\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) (\mathbf{A}_I - \mathbf{E})^{-1} j\omega \mathbf{K} \mathbf{N}_0 - \mathbf{B}''_U] \underline{\mathbf{p}}_{e\text{ eq}} \\ &= [(\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) (\mathbf{A}_I - \mathbf{E})^{-1} (j\omega \mathbf{K} \underline{\mathbf{Z}}_0 - \mathbf{B}_I) - (\mathbf{E} - \mathbf{A}_U) \underline{\mathbf{Z}}_0] \cdot \\ & \quad \cdot [j\omega \mathbf{K}_{\text{eq}} + (\mathbf{R}_{\text{eq}} + j\omega \mathbf{L}_{\text{eq}})^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{A}_{U\text{ eq}})] \underline{\mathbf{p}}_{e\text{ eq}}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Die gesuchte Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{eq}}$  kann in einem linearen Gleichungssystem isoliert werden

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{E} - \mathbf{A}_U) \mathbf{N}_0 - (\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) (\mathbf{A}_I - \mathbf{E})^{-1} j\omega \mathbf{K} \mathbf{N}_0 - \mathbf{B}''_U] \underline{\mathbf{p}}_{e\text{ eq}} \\ & - [(\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) (\mathbf{A}_I - \mathbf{E})^{-1} (j\omega \mathbf{K} \underline{\mathbf{Z}}_0 - \mathbf{B}_I) - (\mathbf{E} - \mathbf{A}_U) \underline{\mathbf{Z}}_0] \cdot \\ & \quad \cdot (\mathbf{R}_{\text{eq}} + j\omega \mathbf{L}_{\text{eq}})^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{A}_{U\text{ eq}}) \underline{\mathbf{p}}_{e\text{ eq}} \\ &= [(\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) (\mathbf{A}_I - \mathbf{E})^{-1} (j\omega \mathbf{K} \underline{\mathbf{Z}}_0 - \mathbf{B}_I) - (\mathbf{E} - \mathbf{A}_U) \underline{\mathbf{Z}}_0] j\omega \mathbf{K}_{\text{eq}} \underline{\mathbf{p}}_{e\text{ eq}}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

## 7 Modellierung parasitärer Kapazitäten

Das Problem mündet in einem überbestimmten Gleichungssystem der Form

$$(\underline{\mathbf{N}} - j\omega \underline{\mathbf{Z}} \mathbf{K}_{\text{eq}}) \underline{\mathbf{p}}_{e \text{ eq}} = \mathbf{0} \quad (7.33)$$

mit den bekannten Matrizen  $\underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{Z}} \in \mathbb{C}^{N_0 \times 2W}$ :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{N}} = & \left[ (\mathbf{E} - \mathbf{A}_U) \mathbf{N}_0 - (\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) (\mathbf{A}_I - \mathbf{E})^{-1} j\omega \mathbf{K} \mathbf{N}_0 - \mathbf{B}_U'' \right] - \\ & \left[ (\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) (\mathbf{A}_I - \mathbf{E})^{-1} (j\omega \mathbf{K} \underline{\mathbf{Z}}_0 - \mathbf{B}_I) - (\mathbf{E} - \mathbf{A}_U) \underline{\mathbf{Z}}_0 \right] \cdot \\ & \cdot (\mathbf{R}_{\text{eq}} + j\omega \mathbf{L}_{\text{eq}})^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{A}_{U \text{ eq}}), \end{aligned} \quad (7.34 \text{ a})$$

$$\underline{\mathbf{Z}} = \left[ (\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L}) (\mathbf{A}_I - \mathbf{E})^{-1} (j\omega \mathbf{K} \underline{\mathbf{Z}}_0 - \mathbf{B}_I) - (\mathbf{E} - \mathbf{A}_U) \underline{\mathbf{Z}}_0 \right], \quad (7.34 \text{ b})$$

sowie gegebenem Vektor  $\underline{\mathbf{p}}_{e \text{ eq}}$  und gesuchter Matrix  $\mathbf{K}_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^{2W \times 2W}$ .

Eine Lösung des Problems (7.33) wird mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ermittelt. Die gesuchte Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{eq}}$  des Ersatzschaltbildes kann so bestimmt werden, dass das überbestimmte Gleichungssystem (7.33) bestmöglich erfüllt wird. Das heißt, die Summe der Fehlerquadrate

$$\left\| \underline{\mathbf{N}} \underline{\mathbf{p}}_{e \text{ eq}} - j\omega \underline{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eq}} \underline{\mathbf{p}}_{e \text{ eq}} \right\|^2 = \sum_{w=1}^{2W} \delta \hat{\varphi}_{e \text{ eq } w}^2 \quad \text{wird minimal.} \quad (7.35)$$

Dies ist gerade für

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{eq}} = \left[ (j\omega \underline{\mathbf{Z}})^{*T} j\omega \underline{\mathbf{Z}} \right]^{-1} (j\omega \underline{\mathbf{Z}})^{*T} \underline{\mathbf{N}} = (k_{\text{eq } vw}) \quad (7.36)$$

der Fall. Eine bestmögliche Lösung kann in der Praxis mit Hilfe einer Singulärwertzerlegung der Matrix  $\underline{\mathbf{Z}}$  erfolgen ([11], [30], [40]).

Abschließend bleibt die Berechnung der Teilkapazitäten  $C_{rs}$  ( $r, s \in \mathbb{K}$ ) des Transformator-Ersatzschaltbildes aus der zuvor berechneten Kapazitätsmatrix  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{eq}}$  zu bewerkstelligen. Bei der gewählten Definition der Spannungen und Potentiale im Ersatzschaltbild folgt

$$C_{rr} = \sum_{i \in \mathbb{K}} k_{\text{eq } ri} \quad \text{und} \quad C_{rs} = -k_{\text{eq } rs} \quad \text{mit} \quad r, s \in \mathbb{K} \quad (7.37)$$

und somit eine bestmögliche Lösung für die Matrix aus Teilkapazitäten

$$\mathbf{C}_{\text{eq}} = (C_{rs}). \quad (7.38)$$

## 7.4 Leistungsisierte Kapazitätsberechnung

Trotz der exakten Vorgehensweise bei der netzwerktheoretischen Kapazitätsberechnung in Abschnitt 7.3, resultiert ein überbestimmtes Gleichungssystem (7.33), welches durch Fehlerminimierung gelöst wurde.

Zusätzlich soll hier noch eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Teilkapazitäten des Ersatzschaltbildes 7.1 aus der Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K}$  des Mehrleiterystems vorgestellt werden,

welche auf dem Vergleich des kapazitiven Blindleistungsanteiles im Mehrleitersystem und im Ersatzschaltbild des Bauelementes basiert.

Mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung kann aus den Spitzenwertzeigern der Ströme und Spannungen im System die komplexe Leistung berechnet werden:

$$\underline{P} = P_V + jP_b. \quad (7.39)$$

Der Realteil ist die Verlustleistung  $P_V$  und die Blindleistung ist eine Überlagerung

$$P_b := P_{b,m} - P_{b,e} \quad (7.40)$$

aus einem induktiven Anteil  $P_{b,m}$  und dem kapazitiven Anteil  $P_{b,e}$ . Im Ersatzschaltbild 7.1 ist der Anteil der parasitären Kapazitäten zur Blindleistung des Bauelementes:

$$\begin{aligned} P_{b,e} = \frac{\omega}{2} \sum_{v=1}^W & \left\{ C_{vv'} |\underline{U}_{v0} - \underline{U}_{v'0}|^2 + C_{vv} |\underline{U}_{v0}|^2 + C_{v'v'} |\underline{U}_{v'0}|^2 \right. \\ & + \sum_{w=v+1}^W \left[ C_{vw} |\underline{U}_{v0} - \underline{U}_{w0}|^2 + C_{vw'} |\underline{U}_{v0} - \underline{U}_{w'0}|^2 \right. \\ & \left. \left. + C_{v'w} |\underline{U}_{v'0} - \underline{U}_{w0}|^2 + C_{v'w'} |\underline{U}_{v'0} - \underline{U}_{w'0}|^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Im Vergleich hierzu wird das Bauelement nun als Mehrleitersystem betrachtet, welches aus  $N$  Windungen und evtl. einem Ferritkern zusammengestellt sein soll. Die Menge aller Windungen sei  $\mathbb{T} = \{1, \dots, N\}$ . Die Ladung  $\underline{q}_n$  und das elektrische Potential  $\underline{\varphi}_{en}$  einer Windung  $n \in \mathbb{T}$  sind entsprechend Gl. (7.3) über die Kapazitätskoeffizienten  $k_{nm}$  miteinander verknüpft. Sie werden hier als bekannt vorausgesetzt und wurden zur symmetrischen Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K} = (k_{nm}) = \mathbf{K}^T$  zusammengefasst. Die Ladungen und Potentiale werden zu den Spaltenvektoren zusammengefasst:

$$\underline{q} = (\underline{q}_n)^T \quad \text{und} \quad \underline{p}_e = (\underline{\varphi}_{en})^T \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{T}. \quad (7.42)$$

Die Gl. (7.3) wird dann in Matrizenbeschreibweise für die Ladungen und Potentiale der Gl. (7.42) notiert

$$\underline{q} = \mathbf{K} \underline{p}_e. \quad (7.43)$$

Ist ein Ferritkern vorhanden, so soll dieser für weitere Betrachtungen per Definition auf dem Bezugspotential  $\underline{\varphi}_{e0} = 0$  V des Bezugsknotens 0 liegen. Der kapazitive Anteil der Blindleistung lautet dann

$$P_{b,e} = \frac{j}{2} \underline{p}_e^T (j\omega \underline{q})^* = \frac{\omega}{2} \underline{p}_e^T \mathbf{K} \underline{p}_e^*. \quad (7.44)$$

Dieser Blindleistungsbeitrag muss mit der Gl. (7.41) übereinstimmen, wobei keine Matrizennotation für die Gl. (7.41) gefunden werden kann.

Die in den am Knoten  $r \in \mathbb{K}$  anliegenden Kapazitäten gesammelte Ladung  $\underline{q}_{eq,r}$  ist sowohl mit den Kapazitäten als auch mit den Spannungen des Systems verknüpft:

$$\underline{q}_{eq,r} = C_{rr} \underline{U}_{r0} + \sum_{\substack{s \in \mathbb{K}, \\ s \neq r}} C_{rs} (\underline{U}_{r0} - \underline{U}_{s0}). \quad (7.45)$$

## 7 Modellierung parasitärer Kapazitäten

Die Teilkapazitäten werden in einer symmetrischen Matrix  $\mathbf{C}_{\text{eq}} = (C_{rs}) = \mathbf{C}_{\text{eq}}^T$  zusammengefasst, deren Elemente zu bestimmen sind. Die Matrix  $\mathbf{C}_{\text{eq}}$  aus Teilkapazitäten kann bei der zuvor getroffenen Wahl des Bezugsknotens 0 und den so definierten Spannungen  $\underline{U}_{r0}$  in eine symmetrische Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{eq}} = (k_{\text{eq}rs}) = \mathbf{K}_{\text{eq}}^T$  überführt werden mit den Elementen

$$k_{\text{eq}rs} = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{K}} C_{rn} & \text{für } r = s, \\ -C_{rs} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.46)$$

Damit ist die Ladung  $\underline{q}_{\text{eq}r}$  am Knoten  $r$  auch mit Hilfe der Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{eq}}$  berechenbar

$$\underline{q}_{\text{eq}r} = \sum_{s \in \mathbb{K}} k_{\text{eq}rs} \underline{U}_{s0}. \quad (7.47)$$

Werden alle Ladungen bzw. Spannungen in den Spaltenvektoren

$$\underline{\mathbf{q}}_{\text{eq}} = (\underline{q}_{\text{eq}r})^T \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{u}}_{\text{eq}} = (\underline{U}_{r0})^T \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{K} \quad (7.48)$$

zusammengefasst, so gilt

$$\underline{\mathbf{q}}_{\text{eq}} = \mathbf{K}_{\text{eq}} \underline{\mathbf{u}}_{\text{eq}}. \quad (7.49)$$

Vorteile hat diese Darstellung insbesondere für die Berechnung des kapazitiven Anteiles zur Blindleistung, denn dieser Anteil ist nun im Gegensatz zur Gl. (7.41) in Matrzenschreibweise darstellbar:

$$P_{\text{b}e} = \frac{j}{2} \underline{\mathbf{u}}_{\text{eq}}^T (j\omega \underline{\mathbf{q}}_{\text{eq}})^* = \frac{\omega}{2} \underline{\mathbf{u}}_{\text{eq}}^T \mathbf{K}_{\text{eq}} \underline{\mathbf{u}}_{\text{eq}}^*. \quad (7.50)$$

Die Verknüpfung der Gleichungen (7.44) und (7.50) liefert

$$\underline{\mathbf{u}}_{\text{eq}}^T \mathbf{K}_{\text{eq}} \underline{\mathbf{u}}_{\text{eq}}^* = \underline{\mathbf{p}}_e^T \mathbf{K} \underline{\mathbf{p}}_e^*. \quad (7.51)$$

Doch auch die elektrischen Potentiale  $\underline{\mathbf{p}}_e$  sind als Linearkombinationen der Spannungen  $\underline{\mathbf{u}}_{\text{eq}}$  im Ersatzschaltbild darstellbar

$$\underline{\mathbf{p}}_e = \mathbf{A}_R \underline{\mathbf{u}}_{\text{eq}}. \quad (7.52)$$

Es wird eine beliebige Windung  $n \in \mathbb{T}$  der Wicklung  $v \in \mathbb{W}$  betrachtet. Sowohl der ohmsche Widerstand  $R_{Wn}$  der Windung  $n$  als auch der ohmsche Widerstand  $R_v$  der Wicklung  $v \in \mathbb{W}$  sind analytisch berechenbar. Wird das Bauelement bei hinreichend niedriger Frequenz betrieben, so sind sowohl magnetische als auch kapazitive Kopplungen vernachlässigbar und über der Windung  $n$  fällt die Spannung

$$\underline{U}_{Wn} = \frac{R_{Wn}}{R_v} (\underline{U}_{v0} - \underline{U}_{v'0}) \quad (7.53)$$

ab. Die Verschaltung der Windungen zu den Wicklungen des Bauelementes liefert die letzten Bestimmungsgleichungen für die Linearkombination (7.52). Eine Reihenschaltung der Windung  $n$  mit Windung  $n-1$  führt zur Definition

$$\underline{U}_{Wn} := \underline{\varphi}_{en} - \underline{\varphi}_{en-1}. \quad (7.54)$$

Die Kapazitätsmatrix des Ersatzschaltbildes lautet

$$\mathbf{K}_{\text{eq}} = \mathbf{A}_R^T \mathbf{K} \mathbf{A}_R \quad (7.55)$$

und wird für diesen Betriebsfall aus dem Vergleich der kapazitiven Blindleistungsanteile im Mehrleiterystem und im Ersatzschaltbild gemäß Gl. (7.51) berechnet. Sie ist für alle denkbaren Betriebsfälle identisch. Die Umkehrung der Gl. (7.46) liefert abschließend die gesuchten Teilkapazitäten:

$$C_{rs} = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{K}} k_{eq\,rn} & \text{für } r = s, \\ -k_{eq\,rs} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.56)$$

## 7.5 Zusammenfassung

Die Teilkapazitäten  $C_{rs}$  des Transformators lassen sich in einem Ersatzschaltbild zwischen den Anschlüssen der einzelnen Wicklungen und dem Massepotential (des Bezugsknotens)) darstellen.

Zunächst wurde die Verwendung einer elektrischen Ferritkern-Ersatzanordnung gemäß Abschnitt 6 zur Berücksichtigung des Kerneinflusses auf die parasitären Kapazitäten erläutert.

Aus einer feldtheoretischen Betrachtung des Transformators als Mehrleiterystem aus einzelnen Windungen werden jedoch zunächst die Kapazitätskoeffizienten  $k_{rs}$  des Mehrleiterystems berechnet. Zwei Verfahren zur Berechnung der Teilkapazitäten  $C_{rs}$  wurden vorgestellt:

- netzwerktheoretisch und
- leistungs- bzw. energiebasiert.

In die netzwerktheoretische Berechnung fließen die Ergebnisse der Induktivitäts- und Verlustmodellierung mit ein. In die leistungsbasierte Berechnung fließt lediglich die Verschaltung der einzelnen Windungen zu den Transformatorwicklungen ein.

Es verbleibt die Berechnung der Kapazitätskoeffizienten  $k_{rs}$ , welche hier bereits als bekannt vorausgesetzt worden sind. Die Berechnung folgt in Abschnitt 8 in Form eines Randwertproblems für rotationssymmetrisch gewickelte Bauelemente.

## *7 Modellierung parasitärer Kapazitäten*

# 8 Elektrisches Randwertproblem in Torus-Koordinaten

Ziel des Abschnittes ist die Berechnung der elektrischen Feldstärke und der Matrix  $\mathbf{K}$  aus Kapazitätskoeffizienten  $k_{rs}$  eines drahtgewickelten Transformators auf einem Ferritkern. Darauf aufbauend können die Teilkapazitäten  $C_{rs}$  des Transformators gemäß Abschnitt 7 berechnet werden.

Die Problemstellung wird analog zu [38] über die Formulierung eines elektrischen Randwertproblems gelöst — hier jedoch in einem Torus-Koordinatensystem gemäß Moon [28, Abschnitt E 4 Ry].

Der Vorteil zu [38] liegt in einer besseren geometrischen Entsprechung des gewählten Koordinatensystems zum untersuchten Transformatoraufbau. Eine Anpassung mittels Formfaktoren ist hierbei nicht erforderlich.

Nach der Einführung des Koordinatensystems wird zunächst eine einzelne isolierte Drahtschleife im externen elektrischen Feld untersucht. Abschließend werden Gleichungssysteme für Teilmengen aus Drahtwindungen des Systems formuliert. Die Zusammenfassung der Gleichungssysteme führt zur Lösung der Problemstellung.

## 8.1 Orthogonale Torus-Koordinaten

Entsprechend Moon [28, Abschnitt E 4 Ry] sind die Torus-Koordinaten  $(\eta, \theta, \psi)$  auf ihren Definitionsbereichen

$$0 \leq \eta < \infty, \quad -\pi < \theta \leq +\pi, \quad 0 \leq \psi < 2\pi \quad (8.1 \text{ a})$$

mit den Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$  und einem Parameter  $a_0$  verknüpft

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{a_0 \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \theta}, \\ z &= \frac{a_0 \sin \theta}{\cosh \eta - \cos \theta}, \\ \varphi &= \psi. \end{aligned} \quad (8.1 \text{ b})$$

Die Oberfläche einer kreisförmigen Drahtwindung vom Radius  $\rho_Q$  mit dem Drahtdurchmesser  $d_{\text{nom}} = 2a$  ist durch einen Torus

$$\eta_a = \operatorname{arccosh}\left(\frac{\rho_Q}{a}\right) \quad (8.2 \text{ a})$$

mit dem Parameter

$$a_0 = a_a = a \sinh \eta_a \quad (8.2 \text{ b})$$

beschrieben.

Trotzdem ist für die Betrachtung eines Mehrleitersystems aus isolierten Drähten diese Definition des Parameters  $a_0$  nach Gln. (8.2 a, b) nicht geeignet, denn die Isolationsoberfläche einer kreisförmigen Drahtwindung vom Radius  $\rho_Q$  mit dem Außendurchmesser  $d_{\text{out}} = 2b > d_{\text{nom}}$  ist durch einen Torus

$$\eta_b = \operatorname{arccosh} \left( \frac{\rho_Q}{b} \right) \quad (8.3 \text{ a})$$

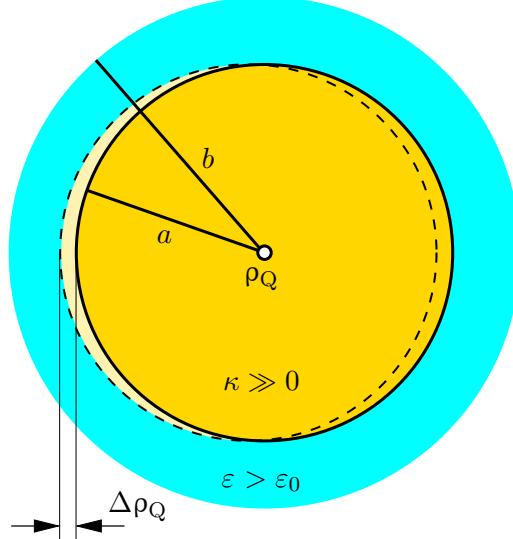
mit dem Parameter

$$a'_0 = a_b = b \sinh \eta_b \quad (8.3 \text{ b})$$

beschrieben, wobei  $a_0 = a_a \neq a_b = a'_0$  gilt.

Nach Definition (8.2 a, b) ist die Isolationsoberfläche nicht als Torus  $\eta = \eta_b = \text{const.}$  darstellbar.

Nach Definition (8.3 a, b) ist die Leiteroberfläche nicht als Torus  $\eta = \eta_a = \text{const.}$  darstellbar.



**Abbildung 8.1:** Positionierungsfehler  $\Delta \rho_Q$

Definition (8.2 a, b) scheint zunächst als geeigneter, denn die Leiteroberfläche ist eine Äquipotentialfläche. Bei enger Wicklung eines Transformators sind die Isolationen der einzelnen Drahtwindungen direkt benachbart. Eine einfache Beschreibung der Isolationsoberfläche einer Drahtwindung macht die Formulierung der Randbedingungen dort überhaupt erst möglich. Für die folgenden Berechnungen in Toruskoordinaten wird daher der Parameter  $a'_0 = a_b$  gemäß Gln. (8.3 a, b) definiert. Um auch die Leiteroberfläche einfach durch

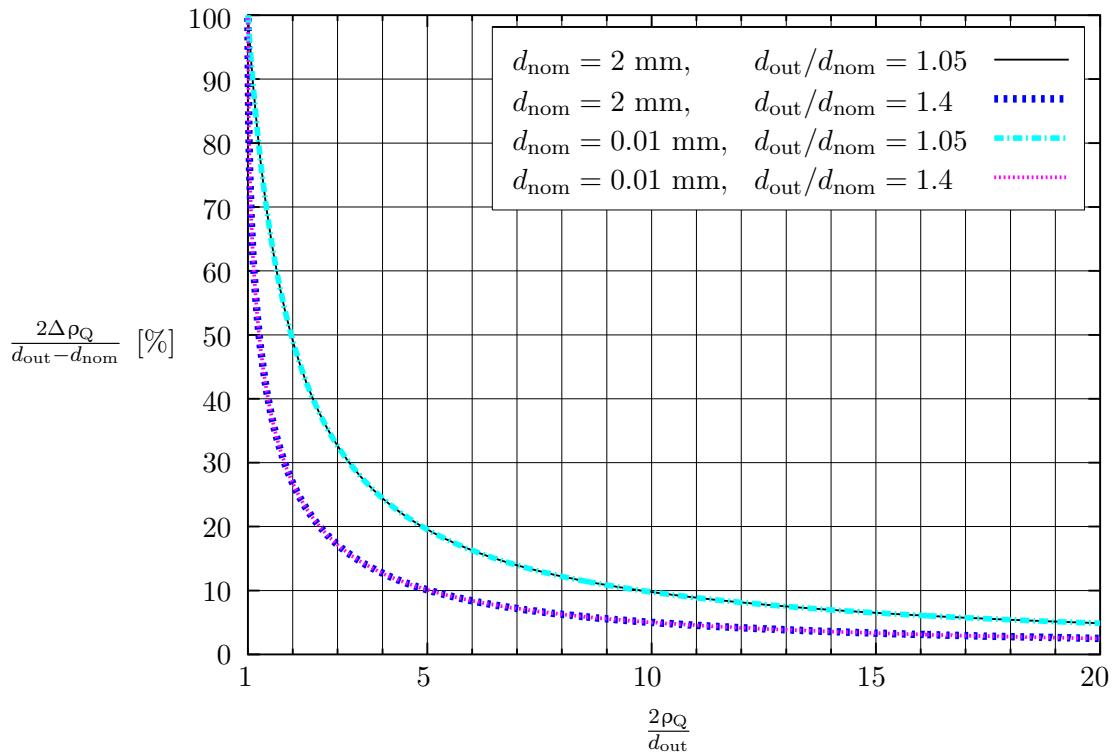
$$\eta = \eta'_a := \operatorname{arsinh} \left( \frac{a_b}{a} \right) := \operatorname{arsinh} \left( \frac{a'_0}{a} \right) := \text{const.} \quad (8.4)$$

beschreiben zu können, wird ein kleiner Fehler bezüglich des Windungsradius  $\rho_Q$  akzeptiert. Die Beschreibung der Leiteroberfläche durch Gl. (8.4) kommt einer Verkleinerung des Windungsradius auf  $\rho'_Q = a_b \coth(\eta'_a)$  gleich.

Die abweichende Positionierung  $\Delta\rho_Q := \rho_Q - \rho'_Q$  wird auf die Stärke  $(d_{\text{out}} - d_{\text{nom}})/2$  der isolierenden Lackschicht bezogen. Der relative Fehler ist dann

$$\begin{aligned} f_{\text{err}}\left(\frac{2\rho_Q}{d_{\text{out}}}, \frac{d_{\text{out}}}{d_{\text{nom}}}\right) &= \frac{2\Delta\rho_Q}{d_{\text{out}} - d_{\text{nom}}} = 2 \frac{\rho_Q - \rho'_Q}{d_{\text{out}} - d_{\text{nom}}} \\ &= \frac{\rho_Q - \rho'_Q}{b - a} = \frac{a_b (\coth \eta_b - \coth \eta'_a)}{b - a} \end{aligned} \quad (8.5)$$

und gibt die Veränderung der Isolationsschichtdicke durch die vorgenommene Näherung wieder. Dieser relative Fehler  $f_{\text{err}}$  ist monoton fallend für einen ansteigenden Quotienten  $\frac{2\rho_Q}{d_{\text{out}}} \geq 1$ . Der maximale Positionierungsfehler  $\max(|f_{\text{err}}|)$  für die behandelten Problemstellungen ist abzuschätzen.



**Abbildung 8.2:** Relativer Positionierungsfehler

Die Isolation von Kupferlackdrähten ist üblicherweise nicht sehr dick. I.d.R. ist die Relation  $1.05 \leq \frac{d_{\text{out}}}{d_{\text{nom}}} \leq 1.4$  sehr gut erfüllt. Eine Windung mit dem Quotienten  $\frac{2\rho_Q}{d_{\text{out}}} = 1$  ist technisch nicht zu realisieren und macht für Transformatoren keinen Sinn, da so gut wie kein magnetischer Fluss umschlossen wird. In Abbildung 8.2 ist der relative Positionierungsfehler für verschiedene Quotienten  $\frac{d_{\text{out}}}{d_{\text{nom}}}$  aufgetragen, wobei zu erkennen ist, dass die Isolationsschichtdicke theoretisch zwar bis zu 100% von der realen Lackschichtdicke abweichen kann, der begangene Fehler jedoch (für  $\frac{2\rho_Q}{d_{\text{out}}} \geq 5$ ) unter 20% liegt und schon für  $\frac{2\rho_Q}{d_{\text{out}}} \geq 10$  unter 10% bleiben wird.

Es werden noch die folgenden Einheitsvektoren des Torus-Koordinatensystems benötigt:

$$\begin{aligned}\vec{e}_\eta &= \frac{1 - \cosh \eta \cos \theta}{\cosh \eta - \cos \theta} \vec{e}_\rho - \frac{\sinh \eta \sin \theta}{\cosh \eta - \cos \theta} \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\theta &= -\frac{\sinh \eta \sin \theta}{\cosh \eta - \cos \theta} \vec{e}_\rho + \frac{\cosh \eta \cos \theta - 1}{\cosh \eta - \cos \theta} \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\psi &= \vec{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (8.6)$$

Außerdem wird noch eine Abbildung der Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$  auf die Torus-Koordinaten  $(\eta, \theta, \psi)$  benötigt:

$$\theta = \begin{cases} \frac{z}{2|z|} \arccos \left( \frac{2(\rho^2+z^2)(\rho^2+z^2-a_b^2)^2}{\rho^2(\rho^2+z^2-a_b^2)^2+z^2(\rho^2+z^2+a_b^2)^2} - 1 \right) & \text{für } z \neq 0 \text{ und } a_b^2 \leq \rho^2 + z^2, \\ \pi - \frac{z}{2|z|} \arccos \left( \frac{2(\rho^2+z^2)(\rho^2+z^2-a_b^2)^2}{\rho^2(\rho^2+z^2-a_b^2)^2+z^2(\rho^2+z^2+a_b^2)^2} - 1 \right) & \text{für } z \neq 0 \text{ und } a_b^2 > \rho^2 + z^2, \\ 0 & \text{für } z = 0 \text{ und } \rho > a_b, \\ \pi & \text{für } z = 0 \text{ und } \rho < a_b, \end{cases} \quad (8.7 \text{ a})$$

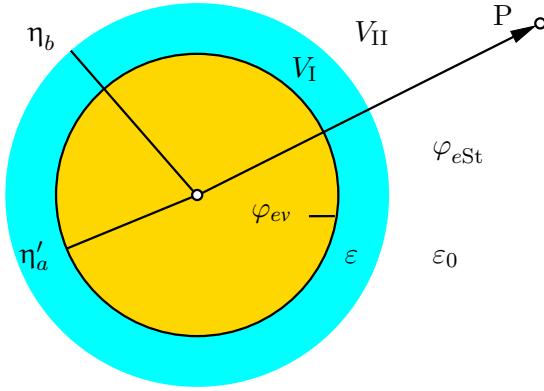
und

$$\eta = \begin{cases} \operatorname{arsinh} \left( \frac{\rho}{z} \sin \theta \right) & \text{für } z \neq 0, \\ \operatorname{arcosh} \left( \frac{\rho^2+a_b^2}{\rho^2-a_b^2} \right) & \text{für } z = 0 \text{ und } \rho > a_b, \\ \operatorname{arcosh} \left( \frac{a_b^2+\rho^2}{a_b^2-\rho^2} \right) & \text{für } z = 0 \text{ und } \rho < a_b \end{cases} \quad (8.7 \text{ b})$$

mit  $\psi = \varphi$ .

## 8.2 Isolierte, kreisförmige Drahtwindung im externen elektrischen Feld

Es wird nun ein Leiter  $v \in \mathbb{N}$  eines konzentrisch gewickelten rotationssymmetrischen Mehrleitersystems aus  $N$  isolierten Drahtwindungen betrachtet. Die Abbildung 8.3 zeigt den Querschnitt durch den Leiter  $v$ , welcher sich auf dem konstanten elektrostatischen Potential  $\varphi_{ev}$  befindet. Der Leiter habe den Durchmesser  $2a$  sowie den Außendurchmesser (der Isolation)  $2b$ . Aufgrund der Rotationssymmetrie der Anordnung wird die Problemstellung in einem Torus-Koordinatensystem gemäß Abschnitt 8.1 untersucht, wobei die Leiteroberfläche durch die Torus-Koordinate  $\eta'_a$  und die Isolationsoberfläche durch  $\eta_b$  repräsentiert werden und ein kleiner Positionierungsfehler des Leiters akzeptiert wird. Das Gebiet außerhalb des Leiters wird in den Bereich  $V_I$  ( $\eta'_a > \eta \geq \eta_b$ ) des Isolators und den Außenraum  $V_{II}$  ( $\eta_b > \eta \geq 0$ ) unterteilt, wobei die Anwesenheit benachbarter Leiter des Systems ein Potential  $\varphi_{eSt}$  im Bereich  $V_{II}$  und einen noch unbekannten Anteil am elektrostatischen Potential im Isolationsbereich  $V_I$  zur Folge hat. Für die Problemstellung ist das elektrostatische Potential rotationssymmetrisch  $\varphi_e = \varphi_e(\eta, \theta)$



**Abbildung 8.3:** Schnitt  $\psi = \text{const.}$  durch einen isolierten Runddraht (der Windung  $v$ )

und beschrieben durch

$$\varphi_e := \begin{cases} \varphi_{ev} = \text{const.} & \text{für } \eta \geq \eta'_a, \text{ im Leiter } v \\ \varphi_{eI} & \text{für } \eta'_a > \eta \geq \eta_b, \text{ im Bereich } V_I \text{ (Isolation)} \\ \varphi_{eII} + \varphi_{e\mu} + \varphi_{eSt} & \text{für } \eta_b > \eta \geq 0, \text{ im Bereich } V_{II}. \end{cases} \quad (8.8)$$

Gemäß dieser Definition beschreibt das Potential  $\varphi_{eI}$  die vollständige Lösung im Bereich  $V_I$ , also auch den Anteil der Ladungen auf den benachbarten Leitern, während im Bereich  $V_{II}$  die vollständige Lösung durch eine Superposition aus

- dem Potential  $\varphi_{eII}$  der elektrischen Flussanteile des Leiters  $v$  zur unendlich fernen Hülle,
- dem Potential  $\varphi_{e\mu}$ , der elektrischen Flussanteile des Leiters  $v$  zu einem evtl. vorhandenen Ferritkern und
- dem Potential  $\varphi_{eSt}$  der elektrischen Flussanteile aller anderen benachbarten Leiter zur unendlich fernen Hülle bzw. dem Ferritkern

erzeugt werden muss. Aufgrund der Gültigkeit des Coulomb-Gesetzes (1.4 a) erfüllt das elektrostatische Potential  $\varphi_e$  in raumladungsfreien Bereichen die Laplace-Gleichung

$$\Delta \varphi_e = 0. \quad (8.9)$$

### 8.2.1 Potentialansatz und elektrische Feldstärke

Gemäß Moon [28, Abschnitt E 4 Ry] ist eine Separation der partiellen Differentialgleichung (8.9) möglich mit dem Ansatz

$$\varphi_e(\eta, \theta) = \sqrt{\cosh \eta - \cos \theta} \, H(\eta) \, \Theta(\theta), \quad (8.10)$$

welcher auf ein Sturm-Liouville'sches Eigenwertproblem gemäß Gl. (2.22) für die Funktion  $\Theta$  führt. Die Eigenfunktionen sind laut Moon [28, Abschnitt E 4 Ry]

$$\Theta_\lambda(\theta) := \begin{cases} c_0 + d_0 \theta & \text{für } \lambda = 0 \\ c_\lambda \cos \lambda \theta + d_\lambda \sin \lambda \theta & \text{für } \lambda \neq 0 \end{cases} \quad (8.11 \text{ a})$$

und der noch fehlende Anteil

$$H_\lambda(\eta) := a_\lambda \mathcal{P}_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) + b_\lambda \mathcal{Q}_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \quad (8.11 \text{ b})$$

mit  $\mathcal{P}_{\lambda-\frac{1}{2}}$  und  $\mathcal{Q}_{\lambda-\frac{1}{2}}$  als Legendresche Funktion 1. bzw. 2. Art der Ordnung 0 und vom Grad  $\lambda - \frac{1}{2}$  (vergl. [1]). Die zugehörigen Eigenwerte  $\lambda$  sind noch zu ermitteln.

Für jeden Eigenwert  $\lambda$  wird ein Produktansatz gemäß Gl. (8.10)

$$\varphi_{e\lambda}(\eta, \theta) := \sqrt{\cosh \eta - \cos \theta} H_\lambda(\eta) \Theta_\lambda(\theta) \quad (8.12)$$

gewählt und die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung (8.9) ist eine Superposition der Art

$$\begin{aligned} \varphi_e(\eta, \theta) &= \sum_{\lambda} \varphi_{e\lambda}(\eta, \theta) = \sqrt{\cosh \eta - \cos \theta} \sum_{\lambda} H_\lambda(\eta) \Theta_\lambda(\theta) \\ &= \sqrt{\cosh \eta - \cos \theta} \cdot \left\{ \left[ a_0 \mathcal{P}_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) + b_0 \mathcal{Q}_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \right] [c_0 + d_0 \theta] + \right. \\ &\quad + \sum_{\lambda} \left[ a_\lambda \mathcal{P}_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) + b_\lambda \mathcal{Q}_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \right] \cdot \\ &\quad \left. [c_\lambda \cos \lambda \theta + d_\lambda \sin \lambda \theta] \right\}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Eine weitere Lösung ist die Konstante

$$\varphi_e(\eta, \theta) = \Phi_0. \quad (8.14)$$

Die elektrische Feldstärke ist somit allgemein gemäß

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi_e = -\frac{1}{a_b} (\cosh \eta - \cos \theta) \left[ \vec{e}_\eta \frac{\partial \varphi_e}{\partial \eta} + \vec{e}_\theta \frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} \right] \quad (8.15)$$

zu bestimmen.

Demnach ist die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke

$$E_\eta = -\frac{1}{a_b} (\cosh \eta - \cos \theta) \frac{\partial \varphi_e}{\partial \eta} \quad (8.16)$$

oder angewendet auf Gl. (8.13)

$$\begin{aligned} E_\eta(\eta, \theta) &= -\frac{1}{a_b} \sum_{\lambda} \left[ \left\{ \frac{\sinh \eta}{2} \sqrt{\cosh \eta - \cos \theta} \right. \right. \\ &\quad + (\cosh \eta - \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \coth \eta \left. \right\} H_\lambda(\eta) \\ &\quad \left. - \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \frac{(\cosh \eta - \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{\sinh \eta} H'_\lambda(\eta) \right] \Theta_\lambda(\theta) \end{aligned} \quad (8.17)$$

## 8.2 Isolierte, kreisförmige Drahtwindung im externen elektrischen Feld

mit

$$H'_\lambda(\eta) = a_\lambda \mathcal{P}_{\lambda-\frac{3}{2}}(\cosh \eta) + b_\lambda \mathcal{Q}_{\lambda-\frac{3}{2}}(\cosh \eta) . \quad (8.18)$$

Für die spätere Berechnung werden noch die Relationen aus [1]

$$\mathcal{P}_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \stackrel{[1]}{=} \mathcal{P}_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh \eta)$$

und

$$\mathcal{Q}_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \stackrel{[1]}{=} \mathcal{Q}_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh \eta)$$

benötigt—insbesondere (für  $\lambda = 0$ ) zur Berechnung der Funktion

$$H'_0(\eta) = a_0 \mathcal{P}_{-\frac{3}{2}}(\cosh \eta) + b_0 \mathcal{Q}_{-\frac{3}{2}}(\cosh \eta) = a_0 \mathcal{P}_{\frac{1}{2}}(\cosh \eta) + b_0 \mathcal{Q}_{\frac{1}{2}}(\cosh \eta) .$$

Für spätere Berechnungen wird auch die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke benötigt, die durch Anwendung des  $\theta$ -Anteiles der Gl. (8.15)

$$E_\theta = -\frac{1}{a_b} (\cosh \eta - \cos \theta) \frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} \quad (8.19)$$

auf Gl. (8.13) ausgerechnet werden kann:

$$E_\theta(\eta, \theta) = -\frac{1}{a_b} \sum_{\lambda} H_\lambda(\eta) \left[ \frac{\sin \theta}{2} \sqrt{\cosh \eta - \cos \theta} \Theta_\lambda(\theta) + (\cosh \eta - \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \frac{d}{d\theta} \Theta_\lambda(\theta) \right] . \quad (8.20)$$

### 8.2.2 Randbedingungen

#### Allgemeine Randbedingungen

Auf der Leiteroberfläche  $\eta = \eta'_a$  und der Isolationsoberfläche  $\eta = \eta_b$  sind folgende Randbedingungen

$$\varphi_{eI}(\eta'_a, \theta) = \varphi_{ev} \quad \text{bzw.} \quad E_{\theta I}(\eta'_a, \theta) = 0 , \quad (8.21 \text{ a})$$

$$\varphi_{eI}(\eta_b, \theta) = \varphi_{eII}(\eta_b, \theta) + \varphi_{e\mu}(\eta_b, \theta) + \varphi_{eSt}(\eta_b, \theta) \quad \text{bzw.}$$

$$E_{\theta I}(\eta_b, \theta) = E_{\theta II}(\eta_b, \theta) + E_{\theta \mu}(\eta_b, \theta) + E_{\theta St}(\eta_b, \theta) , \quad (8.21 \text{ b})$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} E_{\eta I}(\eta_b, \theta) = E_{\eta II}(\eta_b, \theta) + E_{\eta \mu}(\eta_b, \theta) + E_{\eta St}(\eta_b, \theta) \quad (8.21 \text{ c})$$

zu erfüllen. Aufgrund der Ringsymmetrie sind alle Funktionen  $f$  des betrachteten Systems periodisch bzgl. der  $\theta$ -Koordinate, d.h.

$$\lim_{\theta \rightarrow -\pi} f(\eta, \theta) = f(\eta, \pi) . \quad (8.21 \text{ d})$$

Sie nehmen in den betrachteten Bereichen  $V_I$  und  $V_{II}$  endliche Werte an. Eine letzte Randbedingung hängt davon ab, ob ein Ferritkern berücksichtigt werden muss.

### Randbedingungen für die Luftspule

Liegt kein Ferritkerneinfluss vor, so verschwindet das elektrostatische Potential im Bezugspunkt  $P_0 = (\eta_0, \theta_0)$ , d.h.

$$\varphi_{eII}(\eta_0, \theta_0) + \varphi_{eSt}(\eta_0, \theta_0) = 0. \quad (8.21 \text{ e})$$

Der Bezugspunkt  $P_0$  kann zwar auf der Rotationsachse  $\eta_0 = 0$  frei gewählt werden (auch  $P_0 \rightarrow \infty$  bzw.  $\theta_0 \rightarrow \pm 0$  ist möglich), die Wahl muss jedoch für das Mehrleiterystem einheitlich sein.

Aufgrund der endlichen Ausdehnung der Mehrleiteranordnung wird sich ein reguläres Feld ausprägen, d.h. im System ohne Kerneinfluss existiert für einen Winkel  $\theta_1 \in ]-\pi, \pi]$  der Grenzwert

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} [\varphi_{eII}(\eta, \theta_1) + \varphi_{eSt}(\eta, \theta_1)] \quad \text{ist endlich.} \quad (8.21 \text{ f})$$

Dies entspricht der Forderung

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} |\vec{E}_{II}(\eta, \theta_1) + \vec{E}_{St}(\eta, \theta_1)| = 0.$$

### Randbedingungen für die Spule mit Ferritkern

Ist der Einfluss eines Ferritkernes auf das elektrische Feld zu berücksichtigen, so wird hier definiert, dass für jeden Leiter  $v$  auf der Kernoberfläche  $A_{V_\mu}$  das elektrostatische Potential verschwinden soll, d.h.

$$[\varphi_{eII} + \varphi_{e\mu}]_{A_{V_\mu}} = 0. \quad (8.21 \text{ g})$$

Als Konsequenz wird zur Simulation für jeden Leiter  $v$  ein separater Reihenansatz für den Beitrag  $\varphi_{e\mu}$  aufgestellt, so dass auch die Randbedingungen für alle Leiter separat untersucht werden können. Dies setzt voraus, dass auch  $\varphi_{eSt}|_{A_{V_\mu}} = 0$  gilt.

Die Randbedingung (8.21 g) ist eine sehr strenge Forderung im Vergleich mit der hinreichenden Randbedingung auf der Kernoberfläche  $A_{V_\mu}$ , d.h.

$$\sum_v [\varphi_{eII} + \varphi_{e\mu}]_{A_{V_\mu}} = 0. \quad (8.22)$$

Gl. (8.21 g) ermöglicht im Gegensatz zu Gl. (8.22) jedoch die Aufteilung der elektrischen Flüsse der einzelnen Leiter, welche mit dem Ferritkern wechselwirken.

### 8.2.3 Potentialansätze für den isolierten Leiter

Für die Potentiale  $\varphi_{eI}$ ,  $\varphi_{eII}$  und  $\varphi_{e\mu}$  der speziellen Lösung der Problemstellung werden die Faktoren  $\Theta_\lambda$  und  $H_\lambda$  der allgemeinen Lösung gemäß den Gln. (8.11 a) und (8.11 b) mit eigenen Koeffizienten definiert. Dies sind für den Bereich  $V_I$

$$\Theta_{I\lambda}(\theta) := \begin{cases} c_{I0} + d_{I0}\theta & \text{für } \lambda = 0, \\ c_{I\lambda} \cos \lambda \theta + d_{I\lambda} \sin \lambda \theta & \text{für } \lambda \neq 0, \end{cases} \quad (8.23 \text{ a})$$

$$H_{I\lambda}(\eta) := a_{I\lambda} \mathcal{P}_{\lambda - \frac{1}{2}}(\cosh \eta) + b_{I\lambda} \mathcal{Q}_{\lambda - \frac{1}{2}}(\cosh \eta), \quad (8.23 \text{ b})$$

für den Bereich  $V_{\text{II}}$

$$\Theta_{\text{III}\lambda}(\theta) := \begin{cases} c_{\text{II}0} + d_{\text{II}0}\theta & \text{für } \lambda = 0, \\ c_{\text{III}\lambda} \cos \lambda\theta + d_{\text{III}\lambda} \sin \lambda\theta & \text{für } \lambda \neq 0, \end{cases} \quad (8.24 \text{ a})$$

$$H_{\text{III}\lambda}(\eta) := a_{\text{III}\lambda} \mathcal{P}_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) + b_{\text{III}\lambda} \mathcal{Q}_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \quad (8.24 \text{ b})$$

und für den Anteil des Kerneinflusses

$$\Theta_{\mu\lambda}(\theta) := \begin{cases} c_{\mu 0} + d_{\mu 0}\theta & \text{für } \lambda = 0, \\ c_{\mu\lambda} \cos \lambda\theta + d_{\mu\lambda} \sin \lambda\theta & \text{für } \lambda \neq 0, \end{cases} \quad (8.25 \text{ a})$$

$$H_{\mu\lambda}(\eta) := a_{\mu\lambda} \mathcal{P}_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) + b_{\mu\lambda} \mathcal{Q}_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh \eta). \quad (8.25 \text{ b})$$

Aufgrund der Periodizität der Anordnung gemäß Gl. (8.21 d) nehmen die Eigenwerte  $\lambda$  diskrete Werte an ( $\lambda = n$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$ ) und es gilt  $d_{\text{I}0} = d_{\text{II}0} = d_{\mu 0} = 0$ .

Die Lösung ist in  $V_{\text{I}}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{eI}(\eta, \theta) = \Phi_{\text{I}} + \sqrt{\cosh \eta - \cos \theta} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[ a_{\text{I}0} \mathcal{P}_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) + b_{\text{I}0} \mathcal{Q}_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \right] \cdot c_{\text{I}0} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_{\text{In}} \mathcal{P}_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) + b_{\text{In}} \mathcal{Q}_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \right] \cdot \\ & [c_{\text{In}} \cos n\theta + d_{\text{In}} \sin n\theta] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (8.26)$$

und im Bereich  $V_{\text{II}}$

$$\begin{aligned} \varphi_{eII}(\eta, \theta) = \Phi_{\text{II}} + \sqrt{\cosh \eta - \cos \theta} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[ a_{\text{II}0} \mathcal{P}_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) + b_{\text{II}0} \mathcal{Q}_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \right] \cdot c_{\text{II}0} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_{\text{In}} \mathcal{P}_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) + b_{\text{In}} \mathcal{Q}_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \right] \cdot \\ & [c_{\text{In}} \cos n\theta + d_{\text{In}} \sin n\theta] \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Auch die Koeffizienten  $a_{\text{I}0}, a_{\text{In}}$  und  $a_{\text{II}0}, a_{\text{In}}$  werden weiter unten ohne Einschränkung der Lösung geeignet definiert.

Auf der Oberfläche eines vorhandenen Ferritkernes ist die zusätzliche Randbedingung (8.21 g) zu erfüllen. Zu diesem Zweck wurde als ein weiterer Beitrag zur Lösung folgendes Potential eingeführt:

$$\begin{aligned} \varphi_{e\mu}(\eta, \theta) = \Phi_{\mu} + \sqrt{\cosh \eta - \cos \theta} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[ a_{\mu 0} \mathcal{P}_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) + b_{\mu 0} \mathcal{Q}_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \right] \cdot c_{\mu 0} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_{\mu n} \mathcal{P}_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) + b_{\mu n} \mathcal{Q}_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \right] \cdot \\ & [c_{\mu n} \cos n\theta + d_{\mu n} \sin n\theta] \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Der Beitrag dieses Potentiales soll auf der Isolationsoberfläche des Leiters verschwinden

$$\varphi_{e\mu}(\eta_b, \theta) := 0. \quad (8.29)$$

Dies schränkt die Lösung nicht ein, wird durch geeignete Definition der Koeffizienten  $a_{\mu n}$  und  $b_{\mu n}$  erreicht und hat den Vorteil, dass die Randbedingungen (8.21 b) und (8.21 c) leichter auszuwerten sind. Durch die Vermeidung der Orthogonalentwicklung über gleich zwei Ansätze, sondern nur noch über einen, wird auch eine zusätzliche Fehlerquelle der numerischen Auswertung auf der Isolationsoberfläche beseitigt.

### 8.2.4 Lösung durch Auswertung der Randbedingungen

**Die Leiteroberfläche ist eine Äquipotentialfläche.**

Aus Randbedingung (8.21 a) folgt sowohl  $\Phi_I = \varphi_{ev}$  als auch

$$a_{I\hat{n}} \mathcal{P}_{\hat{n}-\frac{1}{2}}(\cosh \eta'_a) = -b_{I\hat{n}} \mathcal{Q}_{\hat{n}-\frac{1}{2}}(\cosh \eta'_a) \quad \text{für } \hat{n} \in \mathbb{N}_0, \quad (8.30)$$

was durch eine geeignete Wahl der Koeffizienten erfüllt ist, z.B.

$$a_{I\hat{n}} := \frac{1}{\mathcal{P}_{\hat{n}-\frac{1}{2}}(\cosh \eta'_a)} \quad \text{und} \quad b_{I\hat{n}} := -\frac{1}{\mathcal{Q}_{\hat{n}-\frac{1}{2}}(\cosh \eta'_a)}. \quad (8.31)$$

#### Reguläres Feld ohne Ferritkern

Ist kein Ferritkern vorhanden, so muss im Bezugspunkt  $P_0$  das elektrostatische Potential  $\varphi_{eII}$  verschwinden. Da jedoch für eine konstante Koordinate  $\theta_1 \in ]-\pi, \pi]$  und  $\hat{n} \in \mathbb{N}_0$  kein Grenzwert

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \sqrt{\cosh \eta - \cos \theta_1} \mathcal{Q}_{\hat{n}-\frac{1}{2}}(\cosh \eta) \right| \rightarrow \infty \quad (8.32)$$

existiert (vergl. [1]), was nicht nur die Randbedingung (8.21 e), sondern auch die Forderung gemäß Gl. (8.21 f) nach einem regulären Feld verletzt, kann keine Ringfunktion  $\mathcal{Q}_{\hat{n}-\frac{1}{2}}$  Teil der Lösung sein. Folglich ist auch  $b_{II0} = b_{I\hat{n}} = 0$  und  $\Phi_{II} = 0$ . Der Koeffizient  $a_{II\hat{n}}$  kann im Außenraum ebenfalls geeignet gewählt werden:

$$a_{II\hat{n}} := \frac{1}{\mathcal{P}_{n-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_b)} \quad \text{und} \quad b_{II\hat{n}} := 0. \quad (8.33 \text{ a})$$

Der Potentialbeitrag  $\varphi_{e\mu}$  verschwindet für das System ohne Ferritkern, d.h.

$$a_{\mu\hat{n}} := 0 \quad \text{und} \quad b_{\mu\hat{n}} := 0. \quad (8.33 \text{ b})$$

#### Reguläres Feld mit Ferritkern

Ist hingegen ein Ferritkern vorhanden, so erweisen sich die Definitionen

$$a_{II\hat{n}} := \frac{1}{2\mathcal{P}_{\hat{n}-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_b)} \quad \text{und} \quad b_{II\hat{n}} := \frac{1}{2\mathcal{Q}_{\hat{n}-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_b)} \quad (8.34 \text{ a})$$

und

$$a_{\mu \hat{n}} := \frac{1}{2P_{\hat{n}-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_b)} \quad \text{und} \quad b_{\mu \hat{n}} := -\frac{1}{2Q_{\hat{n}-\frac{1}{2}}(\cosh \eta_b)} \quad (8.34 \text{ b})$$

als sehr günstig, da einerseits die Lösung nicht eingeschränkt wird, andererseits aber das Potential  $\varphi_{e\mu}$  auf dem Rand  $\eta = \eta_b$  verschwindet und somit die Randbedingung (8.21 b) übersichtlicher wird. Sie bleibt trotz Kerneinfluss unverändert.

### Stetigkeit des Potentials auf der Isolationsoberfläche

Zur Auswertung der Randbedingung (8.21 b) wird das elektrostatische Potential auf dem Rand  $\eta = \eta_b$  in eine Fourierreihe entwickelt, d.h.

$$\varphi_{eSt}(\eta_b, \theta) - \varphi_{ev} = \sqrt{\cosh \eta_b - \cos \theta} \left[ \frac{e_{St0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (e_{Stn} \cos n\theta + f_{Stn} \sin n\theta) \right], \quad (8.35 \text{ a})$$

mit den Koeffizienten

$$e_{St0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi_{eSt}(\eta_b, \theta) - \varphi_{ev}}{\sqrt{\cosh \eta_b - \cos \theta}} d\theta \quad (8.35 \text{ b})$$

und

$$e_{Stn} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi_{eSt}(\eta_b, \theta) - \varphi_{ev}}{\sqrt{\cosh \eta_b - \cos \theta}} \cos n\theta d\theta, \quad (8.35 \text{ c})$$

$$f_{Stn} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi_{eSt}(\eta_b, \theta) - \varphi_{ev}}{\sqrt{\cosh \eta_b - \cos \theta}} \sin n\theta d\theta. \quad (8.35 \text{ d})$$

Orthogonalentwicklung der Randbedingung (8.21 b) liefert unter Berücksichtigung der Definitionen (8.29) und (8.23 b) die Beziehungen

$$c_{I0} H_{I0}(\eta_b) = c_{II0} + \frac{e_{St0}}{2}, \quad (8.36 \text{ a})$$

$$c_{In} H_{In}(\eta_b) = c_{II n} + e_{Stn}, \quad (8.36 \text{ b})$$

$$d_{In} H_{In}(\eta_b) = d_{II n} + f_{Stn}. \quad (8.36 \text{ c})$$

### Stetigkeit der elektrischen Flussdichte auf der Isolationsoberfläche

Auf dem Rand  $\eta = \eta_b$  wird  $E_\eta$  in eine Fourierreihe entwickelt, d.h.

$$E_\eta(\eta_b, \theta) = \frac{g_{\eta 0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (g_{\eta m} \cos m\theta + h_{\eta m} \sin m\theta) \quad (8.37 \text{ a})$$

mit den Koeffizienten

$$g_{\eta 0} = -\frac{1}{\pi a_b} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \left\{ \frac{\sinh \eta_b}{2} \sqrt{\cosh \eta_b - \cos \theta} \right. \right. \\ \left. + (\cosh \eta_b - \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \left( n - \frac{1}{2} \right) \coth \eta_b \right\} H_n(\eta_b) \\ \left. - \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{(\cosh \eta_b - \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{\sinh \eta_b} H'_n(\eta_b) \right] \Theta_n(\theta) d\theta, \quad (8.37 \text{ b})$$

$$g_{\eta m} = -\frac{1}{\pi a_b} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \left\{ \frac{\sinh \eta_b}{2} \sqrt{\cosh \eta_b - \cos \theta} \right. \right. \\ \left. + (\cosh \eta_b - \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \left( n - \frac{1}{2} \right) \coth \eta_b \right\} H_n(\eta_b) \\ \left. - \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{(\cosh \eta_b - \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{\sinh \eta_b} H'_n(\eta_b) \right] \Theta_n(\theta) \cos m\theta d\theta \quad (8.37 \text{ c})$$

und

$$h_{\eta m} = -\frac{1}{\pi a_b} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \left\{ \frac{\sinh \eta_b}{2} \sqrt{\cosh \eta_b - \cos \theta} \right. \right. \\ \left. + (\cosh \eta_b - \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \left( n - \frac{1}{2} \right) \coth \eta_b \right\} H_n(\eta_b) \\ \left. - \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{(\cosh \eta_b - \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{\sinh \eta_b} H'_n(\eta_b) \right] \Theta_n(\theta) \sin m\theta d\theta. \quad (8.37 \text{ d})$$

Nach Definition der Schar von geraden Hilfsfunktionen

$$f_n(\eta, \theta) = -\frac{1}{a_b} \left[ \left\{ \frac{\sinh \eta}{2} \sqrt{\cosh \eta - \cos \theta} \right. \right. \\ \left. + (\cosh \eta - \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \left( n - \frac{1}{2} \right) \coth \eta \right\} H_n(\eta) \\ \left. - \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{(\cosh \eta - \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{\sinh \eta} H'_n(\eta) \right] \quad (8.38)$$

mit

$$f_n(\eta, \theta) = f_n(\eta, -\theta)$$

## 8.2 Isolierte, kreisförmige Drahtwindung im externen elektrischen Feld

verkürzt sich die Darstellung der Koeffizienten zu

$$\begin{aligned}
 g_{\eta m} &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\eta_b, \theta) \Theta_n(\theta) \cos m\theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\eta_b, \theta) c_0 \cos m\theta \, d\theta \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\eta_b, \theta) (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \cos m\theta \, d\theta \\
 &= A_{m,0} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{m,n} c_n + B_{m,n} d_n)
 \end{aligned} \tag{8.39 a}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 h_{\eta m} &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\eta_b, \theta) \Theta_n(\theta) \sin m\theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\eta_b, \theta) c_0 \sin m\theta \, d\theta \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\eta_b, \theta) (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \sin m\theta \, d\theta \\
 &= C_{m,0} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_{m,n} c_n + D_{m,n} d_n)
 \end{aligned} \tag{8.39 b}$$

mit  $m \in \mathbb{N}_0$ , wobei  $h_{\eta 0} = 0$  nicht benötigt wird.

## 8 Elektrisches Randwertproblem in Torus-Koordinaten

Die neuen Koeffizienten  $A_{m,n}$ ,  $B_{m,n}$ ,  $C_{m,n}$  und  $D_{m,n}$  sind somit gegeben als

$$A_{m,0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\eta_b, \theta) \cos m\theta d\theta, \quad (8.40 \text{ a})$$

$$A_{m,n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\eta_b, \theta) \cos n\theta \cos m\theta d\theta, \quad (8.40 \text{ b})$$

$$B_{m,n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\eta_b, \theta) \sin n\theta \cos m\theta d\theta = 0, \quad (8.40 \text{ c})$$

$$C_{m,0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\eta_b, \theta) \sin m\theta d\theta = 0, \quad (8.40 \text{ d})$$

$$C_{m,n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\eta_b, \theta) \cos n\theta \sin m\theta d\theta = 0, \quad (8.40 \text{ e})$$

$$D_{m,n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\eta_b, \theta) \sin n\theta \sin m\theta d\theta. \quad (8.40 \text{ f})$$

Auf beiden Seiten des Randes  $\eta = \eta_b$  können die elektrischen Feldstärkekomponenten  $E_{\eta I}$ ,  $E_{\eta II}$  und  $E_{\eta \mu}$  gemäß Gl. (8.17) und Gl. (8.37 a) in drei Fourierreihen entwickelt werden

$$E_{\eta I}(\eta_b, \theta) = \frac{g_{I0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (g_{Im} \cos m\theta + h_{Im} \sin m\theta), \quad (8.41)$$

$$E_{\eta II}(\eta_b, \theta) = \frac{g_{II0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (g_{IIm} \cos m\theta + h_{IIm} \sin m\theta) \quad (8.42)$$

und

$$E_{\eta \mu}(\eta_b, \theta) = \frac{g_{\mu 0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (g_{\mu m} \cos m\theta + h_{\mu m} \sin m\theta). \quad (8.43)$$

Die externe elektrische Feldstärke  $\vec{E}_{St}$  wird als bekannt vorausgesetzt, so dass auf dem Rand  $\eta = \eta_b$  eine Fourierreihe ihrer Normalkomponente

$$E_{\eta St}(\eta_b, \theta) = \frac{g_{St0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (g_{Stm} \cos m\theta + h_{Stm} \sin m\theta) \quad (8.44 \text{ a})$$

mit den Koeffizienten

$$g_{St0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_{\eta St}(\eta_b, \theta) d\theta \quad (8.44 \text{ b})$$

und

$$g_{Stm} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_{\eta St}(\eta_b, \theta) \cos m\theta d\theta, \quad (8.44 \text{ c})$$

## 8.2 Isolierte, kreisförmige Drahtwindung im externen elektrischen Feld

$$h_{St\,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_{\eta_{St}}(\eta_b, \theta) \sin m\theta \, d\theta \quad (8.44 \text{ d})$$

angegeben werden kann.

Die Orthogonalentwicklung der Randbedingung (8.21 c) liefert abschließend

$$\varepsilon g_{I0} = \varepsilon_0 (g_{II0} + g_{\mu 0} + g_{St0}) , \quad (8.45 \text{ a})$$

$$\varepsilon g_{Im} = \varepsilon_0 (g_{IIm} + g_{\mu m} + g_{Stm}) , \quad (8.45 \text{ b})$$

$$\varepsilon h_{Im} = \varepsilon_0 (h_{IIm} + h_{\mu m} + h_{Stm}) \quad (8.45 \text{ c})$$

bzw.

$$\begin{aligned} g_{St0} &= \varepsilon_r A_{I0,0} c_{I0} - A_{II0,0} c_{II0} - A_{\mu 0,0} c_{\mu 0} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_r A_{I0,n} c_{In} - A_{II0,n} c_{In} - A_{\mu 0,n} c_{\mu n}) , \end{aligned} \quad (8.46 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} g_{Stm} &= \varepsilon_r A_{Im,0} c_{I0} - A_{IIm,0} c_{II0} - A_{\mu m,0} c_{\mu 0} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_r A_{Im,n} c_{In} - A_{IIm,n} c_{In} - A_{\mu m,n} c_{\mu n}) , \end{aligned} \quad (8.46 \text{ b})$$

$$h_{Stm} = \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_r D_{Im,n} d_{In} - D_{IIm,n} d_{In} - D_{\mu m,n} d_{\mu n}) . \quad (8.46 \text{ c})$$

### Randbedingung auf der Ferritkernoberfläche

Die Randbedingung (8.21 g) ist an jedem Ort auf einer geschlossenen Kurve  $C_{V_\mu}$  der Länge  $l_{CV_\mu}$ , auf der dem Wickelfenster zugewandten Ferritkernoberfläche  $A_{V_\mu}$  zu erfüllen. Die Kurve umschließt das Wickelfenster vollständig. Diese Forderung ist im Rahmen einer numerischen Ermittlung der gesuchten Koeffizienten und auch aufgrund der Tatsache, dass die eingeführten Reihenentwicklungen nach einer endlichen Anzahl  $K$  von Reihengliedern abgebrochen werden, nicht exakt erfüllbar. Stattdessen wird die Randbedingung (8.21 g) einer Orthogonalentwicklung unterzogen. Zunächst werden jedoch ein Wegparameter  $\gamma \in [0, l_{CV_\mu}]$  und eine Gewichtungsfunktion  $g_{CV_\mu}(\gamma)$  auf der vollständigen Kurve  $C_{V_\mu}$  definiert, denn auch

$$g_{CV_\mu} \cdot [\varphi_{eII} + \varphi_{e\mu}]_{C_{V_\mu}} = 0 \quad (8.47)$$

erfüllt die Randbedingung (8.21 g).

Die Orthogonalentwicklung

$$\int_{CV_\mu} g_{CV_\mu}(\gamma) \cdot [\varphi_{eII} + \varphi_{e\mu}]_{C_{V_\mu}} \cos \left( n \frac{2\pi}{l_{CV_\mu}} \gamma \right) d\gamma = 0 \quad (8.48 \text{ a})$$

für  $n \in \{0, 1, \dots, K\}$  und

$$\int_{C_{V_\mu}} g_{CV_\mu}(\gamma) \cdot [\varphi_{eII} + \varphi_{e\mu}]_{CV_\mu} \sin\left(n \frac{2\pi}{l_{CV_\mu}} \gamma\right) d\gamma = 0 \quad (8.48 \text{ b})$$

für  $n \in \{1, 2, \dots, K\}$  liefert  $2K + 1$  weitere Verknüpfungen zwischen den zu bestimmenden Koeffizienten der Potentialansätze im Bereich  $V_{II}$ .

Aufgrund der Definition (8.29) liefert die Entwicklung (8.48 a) über den konstanten Anteil ( $n = 0$ ) der Potentialansätze im Bereich  $V_{II}$  in den Ansätzen (8.27) und (8.28)

$$\Phi_{II} + \Phi_\mu = 0. \quad (8.48 \text{ c})$$

Da beide Ansätze  $\varphi_{eII}$  und  $\varphi_{e\mu}$  im Bereich  $V_{II}$  stets überlagert werden, ist die Definition

$$\Phi_{II} := \Phi_\mu := 0 \quad (8.49)$$

zulässig.

### 8.2.5 Berechnung der Kapazitätsmatrix

Alle Koeffizienten können durch Erfüllung der Randbedingungen und Lösen eines linearen Gleichungssystems ermittelt und die Feldstärken  $\vec{E}_I$  sowie  $\vec{E}_{II}$  und  $\vec{E}_\mu$  können in ihren Gültigkeitsbereichen berechnet werden.

Auswertung des Coulomb-Gesetzes (A.3 a) für die betrachtete Windung  $v$  auf der Isolationsoberfläche  $A_v$  (mit  $\eta^{(v)} = \eta_b^{(v)}$ )

$$\begin{aligned} Q_v &= \varepsilon_0 \iint_{A_v} \left( \vec{E}_{II}^{(v)} + \vec{E}_\mu^{(v)} + \vec{E}_{St}^{(v)} \right) \cdot d\vec{a}_v \\ &= \underbrace{\left[ \varepsilon_0 \iint_{A_v} \left[ \vec{E}_{II}^{(v)} + \vec{E}_\mu^{(v)} \right]_{A_v} \cdot d\vec{a}_v \right]}_{k_{vv}\varphi_{ev}} + \sum_{w=1}^N \underbrace{\left[ \varepsilon_0 \iint_{A_v} \left[ \vec{E}_{II}^{(w)} + \vec{E}_\mu^{(w)} \right]_{A_v} \cdot d\vec{a}_v \right]}_{k_{vw}\varphi_{ew}} \end{aligned} \quad (8.50)$$

mit dem vektoriellen infinitesimalen Oberflächenelement

$$d\vec{a}_v = -\vec{e}_{\eta_b^{(v)}} \frac{a_b^{(v)2} \sinh \eta_b^{(v)}}{\left( \cosh \eta_b^{(v)} - \cos \theta^{(v)} \right)^2} d\theta^{(v)} d\varphi$$

veranschaulicht, dass die hier vorgestellte Methode die Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K}$  eines rotationssymmetrischen Mehrleitersystems liefert, wenn es für alle Windungen  $1 \leq v \leq N$  gelöst wird.

## 8.3 Matrzenschreibweise des Randwertproblems

Die in Abschnitt 8.2 beschriebene rotationssymmetrische, elektrostatische Problemstellung soll an dieser Stelle in eine geeignete Matrizenform überführt werden. Das Randwertproblem wird

für jeden Leiter  $v \in \{1, \dots, N\} = \mathbb{M}$  der insgesamt  $N$  Leiter formuliert und nacheinander gelöst, wobei zur Lösung für den betrachteten Leiter jeweils das Feld aller anderen Leiter als bekannt vorausgesetzt und in die Randbedingungen (8.21 a...d) als externes Potential bzw. externe Feldstärke eingesetzt wird.

Sowohl das elektrostatische Potential  $\varphi_e^{(v)}$  als auch die elektrische Feldstärke  $\vec{E}^{(v)}$  können im Ringkoordinatensystem  $(\eta^{(v)}, \theta^{(v)})$  des Leiters  $v$  in Form von Reihenentwicklungen aus skalaren Funktionen  $V_{cI0}, V_{cIp}, V_{dIp}, V_{cII0}, V_{cIIP}, V_{dIIP}, V_{c\mu 0}, V_{c\mu p}, V_{d\mu p}$  und vektoriellen Funktionen  $\vec{F}_{cI0}, \vec{F}_{cIp}, \vec{F}_{dIp}, \vec{F}_{cII0}, \vec{F}_{cIIP}, \vec{F}_{dIIP}, \vec{F}_{c\mu 0}, \vec{F}_{c\mu p}, \vec{F}_{d\mu p}$  mit  $p \in \{1, \dots, K\}$  dargestellt werden. Im Bereich  $V_I$ , der Drahtisolation des Leiters  $v$ , beschreiben das elektrostatische Potential

$$\begin{aligned}\varphi_{eI}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) &= \varphi_{ev} + c_{I0}^{(v)} V_{cI0}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) \\ &\quad + \sum_p [c_{Ip}^{(v)} V_{cIp}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) + d_{Ip}^{(v)} V_{dIp}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)})]\end{aligned}\tag{8.51 a}$$

bzw. die elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned}\vec{E}_I^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) &= c_{I0}^{(v)} \vec{F}_{cI0}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) \\ &\quad + \sum_p [c_{Ip}^{(v)} \vec{F}_{cIp}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) + d_{Ip}^{(v)} \vec{F}_{dIp}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)})]\end{aligned}\tag{8.51 b}$$

das vollständige elektrostatische Feld des Mehrleitersystems.

Im Bereich  $V_{II}$ , außerhalb der Isolation des Leiters  $v$  beschreiben das Potential

$$\begin{aligned}\varphi_{eII}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) &= c_{II0}^{(v)} V_{cII0}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) \\ &\quad + \sum_p [c_{Ip}^{(v)} V_{cIp}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) + d_{Ip}^{(v)} V_{dIp}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)})]\end{aligned}\tag{8.52 a}$$

und die elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned}\vec{E}_{II}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) &= c_{II0}^{(v)} \vec{F}_{cII0}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) \\ &\quad + \sum_p [c_{Ip}^{(v)} \vec{F}_{cIp}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) + d_{Ip}^{(v)} \vec{F}_{dIp}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)})].\end{aligned}\tag{8.52 b}$$

hingegen nur einen Beitrag zum elektrischen Feld aufgrund der elektrischen Teilflüsse vom Leiter  $v$ . Es ist—insbesondere für Spulen und Transformatoren mit Ferritkern—ein weiteres Potential

$$\begin{aligned}\varphi_{e\mu}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) &= c_{\mu 0}^{(v)} V_{c\mu 0}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) \\ &\quad + \sum_p [c_{\mu p}^{(v)} V_{c\mu p}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) + d_{\mu p}^{(v)} V_{d\mu p}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)})]\end{aligned}\tag{8.53 a}$$

bzw. eine weitere elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned}\vec{E}_\mu^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) &= c_{\mu 0}^{(v)} \vec{F}_{c\mu 0}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) \\ &\quad + \sum_p [c_{\mu p}^{(v)} \vec{F}_{c\mu p}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)}) + d_{\mu p}^{(v)} \vec{F}_{d\mu p}^{(v)}(\eta^{(v)}, \theta^{(v)})]\end{aligned}\tag{8.53 b}$$

zu überlagern. Diese Beiträge bleiben auch für Luftspulen und Transformatoren ohne Ferritkern erhalten. Stattdessen sind die Randbedingungen gemäß Abschnitt 8.2.2 zu verwenden.

Die fehlenden Koeffizienten der Reihenentwicklungen (8.51 a, b), (8.52 a, b) sowie (8.53 a, b) werden in Spaltenvektoren

$$\mathbf{c}_I^{(v)} = \begin{pmatrix} c_{I0}^{(v)} & c_{I1}^{(v)} & \dots & c_{IK}^{(v)} \end{pmatrix}^T, \quad (8.54 \text{ a})$$

$$\mathbf{d}_I^{(v)} = \begin{pmatrix} d_{I1}^{(v)} & d_{I2}^{(v)} & \dots & d_{IK}^{(v)} \end{pmatrix}^T, \quad (8.54 \text{ b})$$

$$\mathbf{c}_{II}^{(v)} = \begin{pmatrix} c_{II0}^{(v)} & c_{II1}^{(v)} & \dots & c_{IJK}^{(v)} \end{pmatrix}^T, \quad (8.54 \text{ c})$$

$$\mathbf{d}_{II}^{(v)} = \begin{pmatrix} d_{II1}^{(v)} & d_{II2}^{(v)} & \dots & d_{IJK}^{(v)} \end{pmatrix}^T \quad (8.54 \text{ d})$$

$$\mathbf{c}_\mu^{(v)} = \begin{pmatrix} c_{\mu 0}^{(v)} & c_{\mu 1}^{(v)} & \dots & c_{\mu K}^{(v)} \end{pmatrix}^T, \quad (8.54 \text{ e})$$

$$\mathbf{d}_\mu^{(v)} = \begin{pmatrix} d_{\mu 1}^{(v)} & d_{\mu 2}^{(v)} & \dots & d_{\mu K}^{(v)} \end{pmatrix}^T \quad (8.54 \text{ f})$$

und schließlich in einem Spaltenvektor

$$\mathbf{x}^{(v)} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_I^{(v)} \\ \mathbf{c}_{II}^{(v)} \\ \mathbf{c}_\mu^{(v)} \\ \mathbf{d}_I^{(v)} \\ \mathbf{d}_{II}^{(v)} \\ \mathbf{d}_\mu^{(v)} \end{pmatrix} \quad (8.55)$$

zusammengefasst. Sie werden gemäß den Gleichungen (8.36 a-c), (8.46 a-c) und (8.48 a, b) aus den Reihenentwicklungen der Randbedingungen ermittelt.

Die Gleichungen (8.36 a-c), (8.46 a-c) und (8.48 a, b) selbst können in Blockmatrizendarstellung notiert werden:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{eI}^{(v)} & -\mathbf{E}_e^{(v)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{fI}^{(v)} & -\mathbf{E}_f^{(v)} & \mathbf{0} \\ \varepsilon_r^{(v)} \mathbf{A}_{gI}^{(v)} & -\mathbf{A}_{gII}^{(v)} & -\mathbf{A}_{g\mu}^{(v)} & \varepsilon_r^{(v)} \mathbf{B}_{gI}^{(v)} & -\mathbf{B}_{gII}^{(v)} & -\mathbf{B}_{g\mu}^{(v)} \\ \varepsilon_r^{(v)} \mathbf{C}_{hI}^{(v)} & -\mathbf{C}_{hII}^{(v)} & -\mathbf{C}_{h\mu}^{(v)} & \varepsilon_r^{(v)} \mathbf{D}_{hI}^{(v)} & -\mathbf{D}_{hII}^{(v)} & -\mathbf{D}_{h\mu}^{(v)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{ccII}^{(v)} & -\mathbf{G}_{cc\mu}^{(v)} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{cdII}^{(v)} & -\mathbf{G}_{cd\mu}^{(v)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{scII}^{(v)} & -\mathbf{G}_{sc\mu}^{(v)} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{sdII}^{(v)} & -\mathbf{G}_{sd\mu}^{(v)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_I^{(v)} \\ \mathbf{c}_{II}^{(v)} \\ \mathbf{c}_\mu^{(v)} \\ \mathbf{d}_I^{(v)} \\ \mathbf{d}_{II}^{(v)} \\ \mathbf{d}_\mu^{(v)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{(v)} \\ \mathbf{f}^{(v)} \\ \mathbf{g}^{(v)} \\ \mathbf{h}^{(v)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (8.56)$$

Auch die Elemente der Lösungsvektoren

$$\mathbf{e}^{(v)} = \left( \frac{e_{St0}^{(v)}}{2} \quad e_{St1}^{(v)} \quad \dots \quad e_{StK}^{(v)} \right)^T, \quad (8.57 \text{ a})$$

$$\mathbf{f}^{(v)} = \begin{pmatrix} f_{\text{St}1}^{(v)} & f_{\text{St}2}^{(v)} & \cdots & f_{\text{St}K}^{(v)} \end{pmatrix}^T, \quad (8.57 \text{ b})$$

$$\mathbf{g}^{(v)} = \begin{pmatrix} g_{\text{St}0}^{(v)} & g_{\text{St}1}^{(v)} & \cdots & g_{\text{St}K}^{(v)} \end{pmatrix}^T, \quad (8.57 \text{ c})$$

$$\mathbf{h}^{(v)} = \begin{pmatrix} h_{\text{St}1}^{(v)} & h_{\text{St}2}^{(v)} & \cdots & h_{\text{St}K}^{(v)} \end{pmatrix}^T \quad (8.57 \text{ d})$$

und die Elemente der Matrizen

$$\mathbf{E}_e^{(v)} = \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(K+1) \times (K+1)}, \quad (8.58 \text{ a})$$

$$\mathbf{E}_f^{(v)} = \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times K}, \quad (8.58 \text{ b})$$

$$\mathbf{A}_{eI}^{(v)} = \text{diag} \begin{bmatrix} H_{I0}^{(v)}(\eta_b^{(v)}) & H_{I1}^{(v)}(\eta_b^{(v)}) & \cdots & H_{IK}^{(v)}(\eta_b^{(v)}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(K+1) \times (K+1)}, \quad (8.58 \text{ c})$$

$$\mathbf{A}_{fI}^{(v)} = \text{diag} \begin{bmatrix} H_{I1}^{(v)}(\eta_b^{(v)}) & H_{I2}^{(v)}(\eta_b^{(v)}) & \cdots & H_{IK}^{(v)}(\eta_b^{(v)}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times K} \quad (8.58 \text{ d})$$

können den Gleichungen (8.36 a-c) und (8.46 a-c) entnommen werden.

Die Elemente der Matrizen

$$\mathbf{A}_{gI}^{(v)} = \left( A_{Ii,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\}, \quad (8.59 \text{ a})$$

$$\mathbf{A}_{gII}^{(v)} = \left( A_{IIi,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\}, \quad (8.59 \text{ b})$$

$$\mathbf{A}_{g\mu}^{(v)} = \left( A_{\mu i,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\}, \quad (8.59 \text{ c})$$

$$\mathbf{B}_{gI}^{(v)} = \left( B_{Ii,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\}, \quad (8.59 \text{ d})$$

$$\mathbf{B}_{gII}^{(v)} = \left( B_{IIi,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\}, \quad (8.59 \text{ e})$$

$$\mathbf{B}_{g\mu}^{(v)} = \left( B_{\mu i,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\}, \quad (8.59 \text{ f})$$

$$\mathbf{C}_{hI}^{(v)} = \left( C_{Ii,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\}, \quad (8.59 \text{ g})$$

$$\mathbf{C}_{hII}^{(v)} = \left( C_{IIi,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\}, \quad (8.59 \text{ h})$$

$$\mathbf{C}_{h\mu}^{(v)} = \left( C_{\mu i,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\}, \quad (8.59 \text{ i})$$

$$\mathbf{D}_{hI}^{(v)} = \left( D_{Ii,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\}, \quad (8.59 \text{ j})$$

$$\mathbf{D}_{hII}^{(v)} = \left( D_{IIi,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\}, \quad (8.59 \text{ k})$$

$$\mathbf{D}_{h\mu}^{(v)} = \left( D_{\mu i,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad (8.59 \text{ l})$$

können mit Hilfe von Gl. (8.40) gewonnen werden.

Die Orthogonalentwicklungen der Gln. (8.48 a, b) liefern folgende Koeffizientenmatrizen

$$\mathbf{G}_{cc\text{II}}^{(v)} = \left( G_{cc\text{II} i,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und} \\ G_{cc\text{II} i,k}^{(v)} = \frac{2}{l_{CV_\mu} C_{V_\mu}} \int g_{CV_\mu} V_{c\text{II} k}^{(v)} \Big|_{C_{V_\mu}} \cos \left( i \frac{2\pi}{l_{CV_\mu}} \gamma \right) d\gamma \cdot \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i = 0 \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (8.60 \text{ a})$$

$$\mathbf{G}_{cc\mu}^{(v)} = \left( G_{cc\mu i,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und} \\ G_{cc\mu i,k}^{(v)} = \frac{2}{l_{CV_\mu} C_{V_\mu}} \int g_{CV_\mu} V_{c\mu k}^{(v)} \Big|_{C_{V_\mu}} \cos \left( i \frac{2\pi}{l_{CV_\mu}} \gamma \right) d\gamma \cdot \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i = 0 \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (8.60 \text{ b})$$

$$\mathbf{G}_{cd\text{II}}^{(v)} = \left( G_{cd\text{II} i,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und} \\ G_{cd\text{II} i,k}^{(v)} = \frac{2}{l_{CV_\mu} C_{V_\mu}} \int g_{CV_\mu} V_{d\text{II} k}^{(v)} \Big|_{C_{V_\mu}} \cos \left( i \frac{2\pi}{l_{CV_\mu}} \gamma \right) d\gamma \cdot \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i = 0 \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (8.60 \text{ c})$$

$$\mathbf{G}_{cd\mu}^{(v)} = \left( G_{cd\mu i,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und} \\ G_{cd\mu i,k}^{(v)} = \frac{2}{l_{CV_\mu} C_{V_\mu}} \int g_{CV_\mu} V_{d\mu k}^{(v)} \Big|_{C_{V_\mu}} \cos \left( i \frac{2\pi}{l_{CV_\mu}} \gamma \right) d\gamma \cdot \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i = 0 \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (8.60 \text{ d})$$

$$\mathbf{G}_{sc\text{II}}^{(v)} = \left( G_{sc\text{II} i,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und} \\ G_{sc\text{II} i,k}^{(v)} = \frac{2}{l_{CV_\mu} C_{V_\mu}} \int g_{CV_\mu} V_{c\text{II} k}^{(v)} \Big|_{C_{V_\mu}} \sin \left( i \frac{2\pi}{l_{CV_\mu}} \gamma \right) d\gamma \quad (8.60 \text{ e})$$

$$\mathbf{G}_{sc\mu}^{(v)} = \left( G_{sc\mu i,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und} \\ G_{sc\mu i,k}^{(v)} = \frac{2}{l_{CV_\mu} C_{V_\mu}} \int g_{CV_\mu} V_{c\mu k}^{(v)} \Big|_{C_{V_\mu}} \sin \left( i \frac{2\pi}{l_{CV_\mu}} \gamma \right) d\gamma \quad (8.60 \text{ f})$$

$$\mathbf{G}_{sd\text{II}}^{(v)} = \left( G_{sd\text{II} i,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und} \\ G_{sd\text{II} i,k}^{(v)} = \frac{2}{l_{CV_\mu} C_{V_\mu}} \int g_{CV_\mu} V_{d\text{II} k}^{(v)} \Big|_{C_{V_\mu}} \sin \left( i \frac{2\pi}{l_{CV_\mu}} \gamma \right) d\gamma \quad (8.60 \text{ g})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{sd\mu}^{(v)} &= \left( G_{sd\mu i,k}^{(v)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und} \\ G_{sd\mu i,k}^{(v)} &= \frac{2}{l_{CV_\mu}} \int_{C_{V_\mu}} g_{CV_\mu} V_{d\mu k} \Big|_{C_{V_\mu}} \sin \left( i \frac{2\pi}{l_{CV_\mu}} \gamma \right) d\gamma. \end{aligned} \quad (8.60 \text{ h})$$

Mit dem zusammengefassten Lösungsvektor

$$\mathbf{b}^{(v)} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{(v)} \\ \mathbf{f}^{(v)} \\ \mathbf{g}^{(v)} \\ \mathbf{h}^{(v)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (8.61)$$

kann die Gl. (8.56) kurz in der Form

$$\mathbf{A}^{(v)} \mathbf{x}^{(v)} = \mathbf{b}^{(v)} \quad (8.62)$$

geschrieben werden kann.

## 8.4 Teilexplizites Lösungsverfahren

Der untersuchte Übertrager ist aus  $N$  Windungen  $v \in \mathbb{M}$  ggf. auf einem hochpermeablen Kern gewickelt. In Abschnitt 8.3 ist die Überführung des Randwertproblems für den Leiter  $v$  in nur eine Gleichung (8.56) beschrieben. Der Lösungsvektor  $\mathbf{b}^{(v)}$  enthält neben dem konstanten Potential  $\varphi_{ev}$  des Leiters  $v$  nur noch Einflüsse der Influenzladungen der anderen Leiter des Systems und des Ferritkernes.

Zur weiteren Betrachtung wird die Menge  $\mathbb{M}$  der Windungen des Übertragers in  $S \in \mathbb{N}$  Teilmengen zerlegt

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2 \cup \dots \cup \mathbb{M}_S. \quad (8.63)$$

Es ist praktisch, räumlich eng benachbarte Windungen in Mengen zu gruppieren. Die Mengenaufteilung ist mathematisch jedoch nicht erforderlich — auch der Fall  $S = 1$  ist denkbar. Es gibt drei Gründe, warum sie an dieser Stelle dennoch durchgeführt wird.

- Die Anzahl  $N$  der Windungen ist theoretisch nicht begrenzt.
- Alle Verfahren dieser Arbeit sind in Form eines Computerprogrammes implementiert worden und mussten somit numerisch berechenbar bleiben. Auch Speicher- und Rechenzeitaufwand sollten minimal gehalten werden.
- Große Matrizen sind oft schlecht konditioniert.

In diesem Abschnitt werden alle Leiter einer beliebigen Menge  $\mathbb{M}_m \subset \mathbb{M}$  betrachtet (mit  $m \in \{1, 2, \dots, S\}$ ). Es wird zusätzlich zu  $v$  ein weiterer Leiterindex  $w$  eingeführt mit  $v, w \in \mathbb{M}_m$ .

Der Vektor  $\mathbf{x}^{(v)}$  ist gemäß der Gl. (8.62) zu ermitteln. Die Matrix  $\mathbf{A}^{(v)}$  hängt nur von der Geometrie des Leiters  $v$  und den Reihenentwicklungen von Potential und Feldstärke gemäß den Gln. (8.51 a, b), (8.52 a, b) und (8.53 a, b) ab.

Ein Einfluss jedes Leiters  $w \neq v$  auf den Leiter  $v$  muss folglich im Lösungsvektor  $\mathbf{b}^{(v)}$  vorhanden sein. Die Summe dieser Einflüsse wird an dieser Stelle zunächst in der Form

$$\mathbf{e}^{(v)} = \tilde{\mathbf{e}}^{(v)} - \sum_{w \neq v} \mathbf{e}^{(v,w)} = \tilde{\mathbf{e}}^{(v)} - \sum_{w \neq v} \mathbf{A}_e^{(v,w)} \mathbf{x}^{(w)} \quad (8.64 \text{ a})$$

$$\mathbf{f}^{(v)} = \tilde{\mathbf{f}}^{(v)} - \sum_{w \neq v} \mathbf{f}^{(v,w)} = \tilde{\mathbf{f}}^{(v)} - \sum_{w \neq v} \mathbf{A}_f^{(v,w)} \mathbf{x}^{(w)} \quad (8.64 \text{ b})$$

$$\mathbf{g}^{(v)} = \tilde{\mathbf{g}}^{(v)} - \sum_{w \neq v} \mathbf{g}^{(v,w)} = \tilde{\mathbf{g}}^{(v)} - \sum_{w \neq v} \mathbf{A}_g^{(v,w)} \mathbf{x}^{(w)} \quad (8.64 \text{ c})$$

$$\mathbf{h}^{(v)} = \tilde{\mathbf{h}}^{(v)} - \sum_{w \neq v} \mathbf{h}^{(v,w)} = \tilde{\mathbf{h}}^{(v)} - \sum_{w \neq v} \mathbf{A}_h^{(v,w)} \mathbf{x}^{(w)} \quad (8.64 \text{ d})$$

dargestellt. Da der Leiter  $v$  im Bereich  $V_{II}$  jedes Leiters  $w$  liegt, beschreibt

- $\tilde{\mathbf{e}}^{(v,w)} = \mathbf{A}_e^{(v,w)} \mathbf{x}^{(w)}$  den Einfluss der Kosinus-Entwicklung der Potentiale  $V_{cIIp}^{(w)}, V_{c\mu p}^{(w)}, V_{dIIp}^{(w)}$  und  $V_{d\mu p}^{(w)}$  des Leiters  $w$  auf der Isolationsoberfläche  $A_b^{(v)}$  des Leiters  $v$ ,
- $\tilde{\mathbf{f}}^{(v,w)} = \mathbf{A}_f^{(v,w)} \mathbf{x}^{(w)}$  den Einfluss der Sinus-Entwicklung der Potentiale  $V_{cIIp}^{(w)}, V_{c\mu p}^{(w)}, V_{dIIp}^{(w)}$  und  $V_{d\mu p}^{(w)}$  des Leiters  $w$  auf der Isolationsoberfläche  $A_b^{(v)}$  des Leiters  $v$ ,
- $\tilde{\mathbf{g}}^{(v,w)} = \mathbf{A}_g^{(v,w)} \mathbf{x}^{(w)}$  den Einfluss der Kosinus-Entwicklung der Normalkomponenten der elektrischen Feldstärken  $\vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{cIIp}^{(w)}, \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{c\mu p}^{(w)}, \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{dIIp}^{(w)}$  und  $\vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{d\mu p}^{(w)}$  des Leiters  $w$  auf der Isolationsoberfläche  $A_b^{(v)}$  des Leiters  $v$ ,
- $\tilde{\mathbf{h}}^{(v,w)} = \mathbf{A}_h^{(v,w)} \mathbf{x}^{(w)}$  den Einfluss der Sinus-Entwicklung der Normalkomponenten der elektrischen Feldstärken  $\vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{cIIp}^{(w)}, \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{c\mu p}^{(w)}, \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{dIIp}^{(w)}$  und  $\vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{d\mu p}^{(w)}$  des Leiters  $w$  auf der Isolationsoberfläche  $A_b^{(v)}$  des Leiters  $v$ .

Die Potentiale  $V_{cI}^{(w)}, V_{dI}^{(w)}$  und die korrespondierenden Feldstärken sind im Bereich  $V_{II}$  nicht definiert. Somit fließt kein Beitrag der Koeffizienten  $c_{I0}, c_{Ip}$  und  $d_{Ip}$  in die Gln. (8.64 a-d) ein. Die Matrizen der Form

$$\mathbf{A}_e^{(v,w)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{ecII}^{(v,w)} & \mathbf{A}_{ec\mu}^{(v,w)} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{edII}^{(v,w)} & \mathbf{A}_{ed\mu}^{(v,w)} \end{pmatrix}, \quad (8.65 \text{ a})$$

$$\mathbf{A}_f^{(v,w)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{fcII}^{(v,w)} & \mathbf{A}_{fc\mu}^{(v,w)} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{fdII}^{(v,w)} & \mathbf{A}_{fd\mu}^{(v,w)} \end{pmatrix}, \quad (8.65 \text{ b})$$

$$\mathbf{A}_g^{(v,w)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{gcII}^{(v,w)} & \mathbf{A}_{gc\mu}^{(v,w)} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{gdII}^{(v,w)} & \mathbf{A}_{gd\mu}^{(v,w)} \end{pmatrix}, \quad (8.65 \text{ c})$$

$$\mathbf{A}_h^{(v,w)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{hcII}^{(v,w)} & \mathbf{A}_{hcm}^{(v,w)} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{hdII}^{(v,w)} & \mathbf{A}_{hd\mu}^{(v,w)} \end{pmatrix} \quad (8.65 \text{ d})$$

werden in einer Blockmatrix

$$\mathbf{A}^{(v,w)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_e^{(v,w)} \\ \mathbf{A}_f^{(v,w)} \\ \mathbf{A}_g^{(v,w)} \\ \mathbf{A}_h^{(v,w)} \end{pmatrix} \quad (8.66)$$

zusammengefasst. Die Elemente der einzelnen Matrizen werden weiter unten erläutert. Für den Leiter  $v$  hat diese Zusammenfassung zur Folge, dass das lineare Gleichungssystem (8.56) modifiziert werden kann:

$$\mathbf{A}^{(v)} \mathbf{x}^{(v)} + \sum_{w \neq v} \mathbf{A}^{(v,w)} \mathbf{x}^{(w)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}^{(v)} \\ \tilde{\mathbf{f}}^{(v)} \\ \tilde{\mathbf{g}}^{(v)} \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(v)} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{b}}^{(v)}. \quad (8.67)$$

Diese Gleichung kann für alle Leiter  $w \in \mathbb{M}_m$  aufgestellt werden. Zusammenfassend resultiert ein Gleichungssystem für die Leitermenge  $\mathbb{M}_m$

$$\tilde{\mathbf{A}}_m \mathbf{x}_m = \tilde{\mathbf{b}}_m \quad (8.68 \text{ a})$$

mit der Matrix

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_m &= (\mathbf{A}_{v,w}) \quad \text{mit } v, w \in \mathbb{M}_m \quad \text{und} \\ \mathbf{A}_{v,w} &= \begin{cases} \mathbf{A}^{(v)} & \text{für } v = w \\ \mathbf{A}^{(v,w)} & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.68 \text{ b})$$

dem Vektor der gesuchten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m &= (\mathbf{x}_v^T)^T \quad \text{mit } v \in \mathbb{M}_m \quad \text{und} \\ \mathbf{x}_v &= \mathbf{x}^{(v)} \end{aligned} \quad (8.68 \text{ c})$$

und dem Lösungsvektor

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}_m &= (\tilde{\mathbf{b}}_v^T)^T \quad \text{mit } v \in \mathbb{M}_m \quad \text{und} \\ \tilde{\mathbf{b}}_v &= \tilde{\mathbf{b}}^{(v)}. \end{aligned} \quad (8.68 \text{ d})$$

Gemäß den Aussagen zu den Gleichungen (8.64 a...d) seien hier noch die fehlenden Matrizen der Gleichungen (8.65 a...d) genannt.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ecII}^{(v,w)} &= \left( A_{ecII i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und} \\ A_{ecII i,k}^{(v,w)} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_{cII k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}}}{\sqrt{\cosh \eta_b^{(v)} - \cos \theta^{(v)}}} \cos i\theta^{(v)} d\theta^{(v)} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i = 0 \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.69 \text{ a})$$

$$\mathbf{A}_{edII}^{(v,w)} = \left( A_{edII i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{edII i,k}^{(v,w)} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_{dII k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}}}{\sqrt{\cosh \eta_b^{(v)} - \cos \theta^{(v)}}} \cos i\theta^{(v)} d\theta^{(v)} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ f\"ur } i = 0 \\ 1 \text{ sonst, } \end{cases} \quad (8.69 \text{ b})$$

$$\mathbf{A}_{fcII}^{(v,w)} = \left( A_{fcII i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{fcII i,k}^{(v,w)} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_{cII k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}}}{\sqrt{\cosh \eta_b^{(v)} - \cos \theta^{(v)}}} \sin i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}, \quad (8.69 \text{ c})$$

$$\mathbf{A}_{fdII}^{(v,w)} = \left( A_{fdII i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{fdII i,k}^{(v,w)} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_{dII k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}}}{\sqrt{\cosh \eta_b^{(v)} - \cos \theta^{(v)}}} \sin i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}, \quad (8.69 \text{ d})$$

$$\mathbf{A}_{gcII}^{(v,w)} = \left( A_{gcII i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{gcII i,k}^{(v,w)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{cII k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}} \cos i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}, \quad (8.69 \text{ e})$$

$$\mathbf{A}_{gdII}^{(v,w)} = \left( A_{gdII i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{gdII i,k}^{(v,w)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{dII k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}} \cos i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}, \quad (8.69 \text{ f})$$

$$\mathbf{A}_{hcII}^{(v,w)} = \left( A_{hcII i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{hcII i,k}^{(v,w)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{cII k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}} \sin i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}, \quad (8.69 \text{ g})$$

$$\mathbf{A}_{hdII}^{(v,w)} = \left( A_{hdII i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{hdII i,k}^{(v,w)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{dII k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}} \sin i\theta^{(v)} d\theta^{(v)} \quad (8.69 \text{ h})$$

$$\mathbf{A}_{ec\mu}^{(v,w)} = \left( A_{ec\mu i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{ec\mu i,k}^{(v,w)} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_{c\mu k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}}}{\sqrt{\cosh \eta_b^{(v)} - \cos \theta^{(v)}}} \cos i\theta^{(v)} d\theta^{(v)} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ für } i = 0 \\ 1 \text{ sonst, } \end{cases} \quad (8.70 \text{ a})$$

$$\mathbf{A}_{ed\mu}^{(v,w)} = \left( A_{ed\mu i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{ed\mu i,k}^{(v,w)} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_{d\mu k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}}}{\sqrt{\cosh \eta_b^{(v)} - \cos \theta^{(v)}}} \cos i\theta^{(v)} d\theta^{(v)} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ für } i = 0 \\ 1 \text{ sonst, } \end{cases} \quad (8.70 \text{ b})$$

$$\mathbf{A}_{fc\mu}^{(v,w)} = \left( A_{fc\mu i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{fc\mu i,k}^{(v,w)} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_{c\mu k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}}}{\sqrt{\cosh \eta_b^{(v)} - \cos \theta^{(v)}}} \sin i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}, \quad (8.70 \text{ c})$$

$$\mathbf{A}_{fd\mu}^{(v,w)} = \left( A_{fd\mu i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{fd\mu i,k}^{(v,w)} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_{d\mu k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}}}{\sqrt{\cosh \eta_b^{(v)} - \cos \theta^{(v)}}} \sin i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}, \quad (8.70 \text{ d})$$

$$\mathbf{A}_{gc\mu}^{(v,w)} = \left( A_{gc\mu i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{gc\mu i,k}^{(v,w)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{c\mu k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}} \cos i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}, \quad (8.70 \text{ e})$$

$$\mathbf{A}_{gd\mu}^{(v,w)} = \left( A_{gd\mu i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{gd\mu i,k}^{(v,w)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{d\mu k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}} \cos i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}, \quad (8.70 \text{ f})$$

$$\mathbf{A}_{hc\mu}^{(v,w)} = \left( A_{hc\mu i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und}$$

$$A_{hc\mu i,k}^{(v,w)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{c\mu k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}} \sin i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}, \quad (8.70 \text{ g})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{hd\mu}^{(v,w)} &= \left( A_{hd\mu i,k}^{(v,w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und } k \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und} \\ A_{hd\mu i,k}^{(v,w)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{d\mu k}^{(w)} \Big|_{A_b^{(v)}} \sin i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}. \end{aligned} \quad (8.70 \text{ h})$$

Auffällig erscheint, dass im ersten Element der Cosinus-Entwicklungen der elektrischen Potentiale stets der Faktor  $\frac{1}{2}$  auftaucht. Das ist in den Gln. (8.36 a-c) begründet, während der gleiche Faktor bzgl. der Entwicklung der elektrischen Feldstärken gemäß Gln. (8.36 a-c) gekürzt werden kann.

Aus der Randbedingung (8.21 b) (Stetigkeit des Potentials) folgt gemäß der Fourierreihenentwicklung (8.35 a-d) die Berechnung der Koeffizienten

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}^{(v)} &= \left( \tilde{e}_i^{(v)} \right)^T \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und} \\ \tilde{e}_i^{(v)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sum_{z \notin \mathbb{M}_n} \left[ \varphi_{e\text{II}}^{(z)} + \varphi_{e\mu}^{(z)} \right]_{A_b^{(v)}} - \varphi_{ev}}{\sqrt{\cosh \eta_b^{(v)} - \cos \theta^{(v)}}} \cos i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}. \end{aligned} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ für } i = 0 \\ 1 \text{ sonst} \end{cases} \quad (8.71 \text{ a})$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}^{(v)} &= \left( \tilde{f}_i^{(v)} \right)^T \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und} \\ \tilde{f}_i^{(v)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sum_{z \notin \mathbb{M}_n} \left[ \varphi_{e\text{II}}^{(z)} + \varphi_{e\mu}^{(z)} \right]_{A_b^{(v)}} - \varphi_{ev}}{\sqrt{\cosh \eta_b^{(v)} - \cos \theta^{(v)}}} \sin i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}. \end{aligned} \quad (8.71 \text{ b})$$

Aus der Randbedingung (8.21 c) (Stetigkeit der Normalkomponente der elektrischen Flussdichte) folgt gemäß der Fourierreihenentwicklung (8.37 a-d) die Berechnung der Koeffizienten

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}^{(v)} &= \left( \tilde{g}_i^{(v)} \right)^T \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und} \\ \tilde{g}_i^{(v)} &= \sum_{z \notin \mathbb{M}_n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \left\{ \left[ \vec{\mathbf{E}}_{\text{II}}^{(z)} + \vec{\mathbf{E}}_{\mu}^{(z)} \right]_{A_b^{(v)}} \right\} \cos i\theta^{(v)} d\theta^{(v)} \end{aligned} \quad (8.71 \text{ c})$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{h}}^{(v)} &= \left( \tilde{h}_i^{(v)} \right)^T \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und} \\ \tilde{h}_i^{(v)} &= \sum_{z \notin \mathbb{M}_n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \left\{ \left[ \vec{\mathbf{E}}_{\text{II}}^{(z)} + \vec{\mathbf{E}}_{\mu}^{(z)} \right]_{A_b^{(v)}} \right\} \sin i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}. \end{aligned} \quad (8.71 \text{ d})$$

## 8.5 Berücksichtigung einer Kern-Ersatzanordnung

Eine elektrische Ferritkern-Ersatzanordnung gemäß Abschnitt 6 wurde in den bisherigen Betrachtungen noch nicht berücksichtigt. Ihr Beitrag  $\varphi_{e\sigma}$  zum elektrischen Potential und  $\vec{\mathbf{E}}_{\sigma}$  zur

elektrischen Feldstärke ist somit noch in den modifizierten Lösungsvektoren  $\tilde{\mathbf{b}}^{(v)}$  nach Gl. (8.67) enthalten. Im Randwertproblem des Abschnittes 8.2 ist der Potentialbeitrag  $\varphi_{e\sigma}$  nicht enthalten. Der Einfluss des Ferritkernes wird bereits mit dem Ansatz  $\varphi_{eu}$  berücksichtigt. Zur Konvergenzverbesserung soll die Ersatzanordnung trotzdem berücksichtigt werden und ist im genannten Randwertproblem als Anteil des erregenden Potentials

$$\varphi_{eSt} = \varphi'_{eSt} + \varphi_{e\sigma} \quad (8.72 \text{ a})$$

bzw. als Anteil der erregenden Feldstärke

$$\vec{E}_{St} = \vec{E}'_{St} + \vec{E}_\sigma \quad (8.72 \text{ b})$$

enthalten.

Genau wie schon bei der Lösung des elektrischen Randwertproblems für jeden Leiter ein separater Potentialansatz zur Erfassung des Ferritkern-Einflusses aufgestellt worden ist, so ist gemäß Abschnitt 7.2 für jeden Leiter  $w$  eine separate, elektrische Ferritkern-Ersatzanordnung  $\mathbb{E}_w$  zu ermitteln. Dies ist in der Bestimmung der Kapazitätskoeffizienten  $k_{vw}$  gemäß Gl. (8.50) begründet, wonach die elektrischen Teilflüsse nach jedem einzelnen Leiter aufgeschlüsselt werden. Wenn für jeden Leiter  $w$  eine elektrische Ferritkern-Ersatzanordnung bestimmt wird, so hat diese nicht nur am Ort des Leiters  $w$  selbst, sondern auch am Ort des Leiters  $v$  eine elektrische Feldstärke bzw. ein elektrisches Potential zur Folge. Der Einfluss der elektrischen Kern-Ersatzanordnungen wird aus den Lösungsvektoren isoliert. Dies führt zu den Gleichungen

$$\tilde{\mathbf{e}}^{(v)} = \hat{\mathbf{e}}^{(v)} + \mathbf{e}^{\sigma(v,v)} + \sum_{w \neq v} \mathbf{e}^{\sigma(v,w)}, \quad (8.73 \text{ a})$$

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(v)} = \hat{\mathbf{f}}^{(v)} + \mathbf{f}^{\sigma(v,v)} + \sum_{w \neq v} \mathbf{f}^{\sigma(v,w)}, \quad (8.73 \text{ b})$$

$$\tilde{\mathbf{g}}^{(v)} = \hat{\mathbf{g}}^{(v)} + \mathbf{g}^{\sigma(v,v)} + \sum_{w \neq v} \mathbf{g}^{\sigma(v,w)}, \quad (8.73 \text{ c})$$

$$\tilde{\mathbf{h}}^{(v)} = \hat{\mathbf{h}}^{(v)} + \mathbf{h}^{\sigma(v,v)} + \sum_{w \neq v} \mathbf{h}^{\sigma(v,w)}. \quad (8.73 \text{ d})$$

Das elektrische Potential  $\varphi_{e\sigma}^{(w)}$  und die elektrische Feldstärke  $\vec{E}_\sigma^{(w)}$  der zum Leiter  $w$  korrespondierenden Ersatzanordnung  $\mathbb{E}_w$  werden am Ort  $P_v$  jedes Leiters  $v$  bestimmt und auf den zum Ferritkern wirkenden elektrischen Fluss  $Q_{w\infty}$  normiert, d.h.

$$\vec{F}_{v,w}^{(\sigma)} = \frac{\vec{E}_\sigma^{(w)}(\vec{r}_v)}{Q_{w\infty}}, \quad (8.74 \text{ a})$$

$$P_{v,w}^{(\sigma)} = \frac{\varphi_{e\sigma}^{(w)}(\vec{r}_v)}{Q_{w\infty}}. \quad (8.74 \text{ b})$$

Diese Normierung findet sich auch in den Beiträgen

$$\mathbf{e}^{\sigma(v,w)} = \mathbf{a}_e^{\sigma(v,w)} Q_{w\infty}, \quad (8.75 \text{ a})$$

$$\mathbf{f}^{\sigma(v,w)} = \mathbf{a}_f^{\sigma(v,w)} Q_{w\infty}, \quad (8.75 \text{ b})$$

$$\mathbf{g}^{\sigma(v,w)} = \mathbf{a}_g^{\sigma(v,w)} Q_{w\infty} \quad \text{und} \quad (8.75 \text{ c})$$

$$\mathbf{h}^{\sigma(v,w)} = \mathbf{a}_h^{\sigma(v,w)} Q_{w\infty} \quad (8.75 \text{ d})$$

wieder. Aufgrund des Überlagerungsansatzes (8.8) im Außenraum  $V_{\text{II}}$  jedes Leiters  $w$  kann die Ladung  $Q_{w\infty}$  als Linearkombination der Koeffizienten der Ansätze gemäß Gln. (8.52 a,b) und Gln. (8.53 a,b) dargestellt werden:

$$Q_{w\infty} = \mathbf{m}^{(w)} \cdot \mathbf{x}^{(w)} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{c}_I^{(w)} + \mathbf{m}_{c\text{II}}^{(w)} \cdot \mathbf{c}_{\text{II}}^{(w)} + \mathbf{m}_{c\mu}^{(w)} \cdot \mathbf{c}_{\mu}^{(w)} + \mathbf{0} \cdot \mathbf{d}_I^{(w)} + \mathbf{m}_{d\text{II}}^{(w)} \cdot \mathbf{d}_{\text{II}}^{(w)} + \mathbf{m}_{d\mu}^{(w)} \cdot \mathbf{d}_{\mu}^{(w)}. \quad (8.76)$$

Die Elemente des Vektors

$$\mathbf{m}^{(w)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m}_{c\text{II}}^{(w)} & \mathbf{m}_{c\mu}^{(w)} & \mathbf{0} & \mathbf{m}_{d\text{II}}^{(w)} & \mathbf{m}_{d\mu}^{(w)} \end{pmatrix} \quad (8.77)$$

können aus der Auswertung des Coulombschen Gesetzes auf der Oberfläche des Leiters  $w$  ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{c\text{II}}^{(w)} &= \left( m_{c\text{II}i}^{(w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und} \\ m_{c\text{II}i}^{(w)} &= -2\pi\varepsilon_0 \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(w)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{c\text{II}i}^{(w)} \Big|_{A_b^{(w)}} \frac{a_b^{(w)2} \sinh \eta_b^{(w)}}{\left( \cosh \eta_b^{(w)} - \cos \theta^{(w)} \right)^2} d\theta^{(w)}, \end{aligned} \quad (8.78 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{c\mu}^{(w)} &= \left( m_{c\mu i}^{(w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und} \\ m_{c\mu i}^{(w)} &= -2\pi\varepsilon_0 \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(w)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{c\mu i}^{(w)} \Big|_{A_b^{(w)}} \frac{a_b^{(w)2} \sinh \eta_b^{(w)}}{\left( \cosh \eta_b^{(w)} - \cos \theta^{(w)} \right)^2} d\theta^{(w)}, \end{aligned} \quad (8.78 \text{ b})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{d\text{II}}^{(w)} &= \left( m_{d\text{II}i}^{(w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und} \\ m_{d\text{II}i}^{(w)} &= -2\pi\varepsilon_0 \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(w)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{d\text{II}i}^{(w)} \Big|_{A_b^{(w)}} \frac{a_b^{(w)2} \sinh \eta_b^{(w)}}{\left( \cosh \eta_b^{(w)} - \cos \theta^{(w)} \right)^2} d\theta^{(w)} \end{aligned} \quad (8.78 \text{ c})$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{d\mu}^{(w)} &= \left( m_{d\mu i}^{(w)} \right) \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und} \\ m_{d\mu i}^{(w)} &= -2\pi\varepsilon_0 \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(w)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{d\mu i}^{(w)} \Big|_{A_b^{(w)}} \frac{a_b^{(w)2} \sinh \eta_b^{(w)}}{\left( \cosh \eta_b^{(w)} - \cos \theta^{(w)} \right)^2} d\theta^{(w)}. \end{aligned} \quad (8.78 \text{ d})$$

Aus der Randbedingung (8.21 b) (Stetigkeit des Potentials) folgt gemäß der Fourierreihenentwicklung (8.35 a-d) die Berechnung der Elemente

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e^{\sigma(v,w)} &= \left( a_{ei}^{\sigma(v,w)} \right)^T \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und} \\ a_{ei}^{\sigma(v,w)} &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P_{v,w}^{(\sigma)}}{\sqrt{\cosh \eta_b^{(v)} - \cos \theta^{(v)}}} \cos i\theta^{(v)} d\theta^{(v)} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.79 \text{ a})$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_f^{\sigma(v,w)} &= \left( a_{fi}^{\sigma(v,w)} \right)^T \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und} \\ a_{fi}^{\sigma(v,w)} &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P_{v,w}^{(\sigma)}}{\sqrt{\cosh \eta_b^{(v)} - \cos \theta^{(v)}}} \sin i\theta^{(v)} d\theta^{(v)}. \end{aligned} \quad (8.79 \text{ b})$$

Aus der Randbedingung (8.21 c) (Stetigkeit der Normalkomponente der elektrischen Flussdichte) folgt gemäß der Fourierreihenentwicklung (8.37 a-d) die Berechnung der Koeffizienten

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_g^{\sigma(v,w)} &= \left( a_{gi}^{\sigma(v,w)} \right)^T \quad \text{mit } i \in \{0, 1, \dots, K\} \quad \text{und} \\ a_{gi}^{\sigma(v,w)} &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{v,w}^{(\sigma)} \cos i\theta^{(v)} d\theta^{(v)} \end{aligned} \quad (8.79 \text{ c})$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_h^{\sigma(v,w)} &= \left( a_{hi}^{\sigma(v,w)} \right)^T \quad \text{mit } i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad \text{und} \\ a_{hi}^{\sigma(v,w)} &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{\mathbf{e}}_{\eta^{(v)}} \cdot \vec{\mathbf{F}}_{v,w}^{(\sigma)} \sin i\theta^{(v)} d\theta^{(v)} \end{aligned} \quad (8.79 \text{ d})$$

Das endgültige Gleichungssystem für den Leiter  $v \in \mathbb{M}_m$  ist dann

$$\sum_{w \in \mathbb{M}_m} \left[ \mathbf{A}^{(v,w)} - \begin{pmatrix} \mathbf{a}_e^{(v,w)} \\ \mathbf{a}_f^{(v,w)} \\ \mathbf{a}_g^{(v,w)} \\ \mathbf{a}_h^{(v,w)} \end{pmatrix} \mathbf{m}^{(w)} \right] \mathbf{x}^{(w)} \approx \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}^{(v)} \\ \hat{\mathbf{f}}^{(v)} \\ \hat{\mathbf{g}}^{(v)} \\ \hat{\mathbf{h}}^{(v)} \end{pmatrix}. \quad (8.80)$$

## 8.6 Simulationsbeispiele elektrostatischer Felder

An dieser Stelle soll zunächst die Lösung des elektrischen Randwertproblems aus Abschnitt 8.2 unter Anwendung der Erweiterung zu einem teilexpliziten Lösungsverfahren gemäß Abschnitt 8.4 (und folgende) an Beispielen mit mehreren isolierten Drahtwindungen mit und ohne Ferritkern demonstriert werden. Den einzelnen Leitern und einem evtl. vorhandenen Ferritkern werden unterschiedliche elektrostatische Potentiale eingeprägt und dann das elektrostatische Potential im Bereich der Windungen berechnet und dargestellt. Diese Beispiele dienen nur der Veranschaulichung der elektrischen Feldverläufe. Die Berechnung der Teilkapazitäten gemäß Abschnitt 8.2.5 wird in der Auswertung, Kapitel 9, an geeigneteren Aufbauten messtechnisch verglichen.

Die Grafik in Abbildung 8.5 zeigt das elektrostatische Potential zweier benachbarter Windungen aus 2.5 mm Kupferlackdraht um einen zylindrischen P22/13 Wickelkörper um die z-Achse. Der Außendurchmesser des Drahtes beträgt 2.631 mm. Abbildung 8.4 zeigt eine Skizze des Aufbaus. Zunächst wird der Ferritkern weggelassen. Den Leitern wurden die Potentiale 5 V und 10 V eingeprägt. Die Potentialansätze gemäß Gl. (8.13) wurden nach dem zwölften Glied abgebrochen.

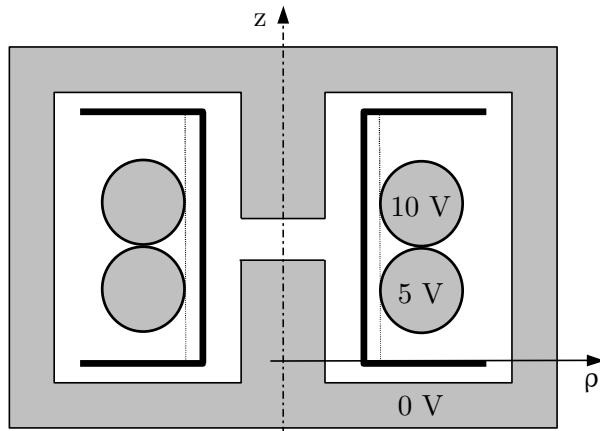


Abbildung 8.4: Zwei Windungen auf einem P22/13 Kern

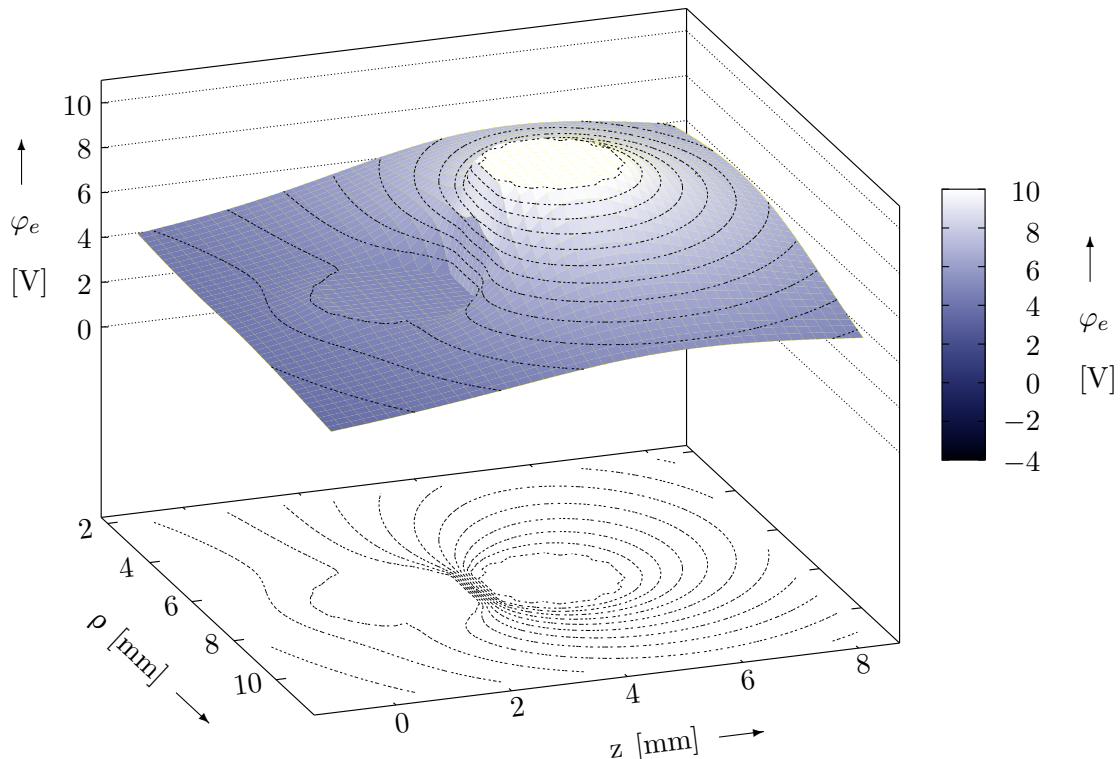
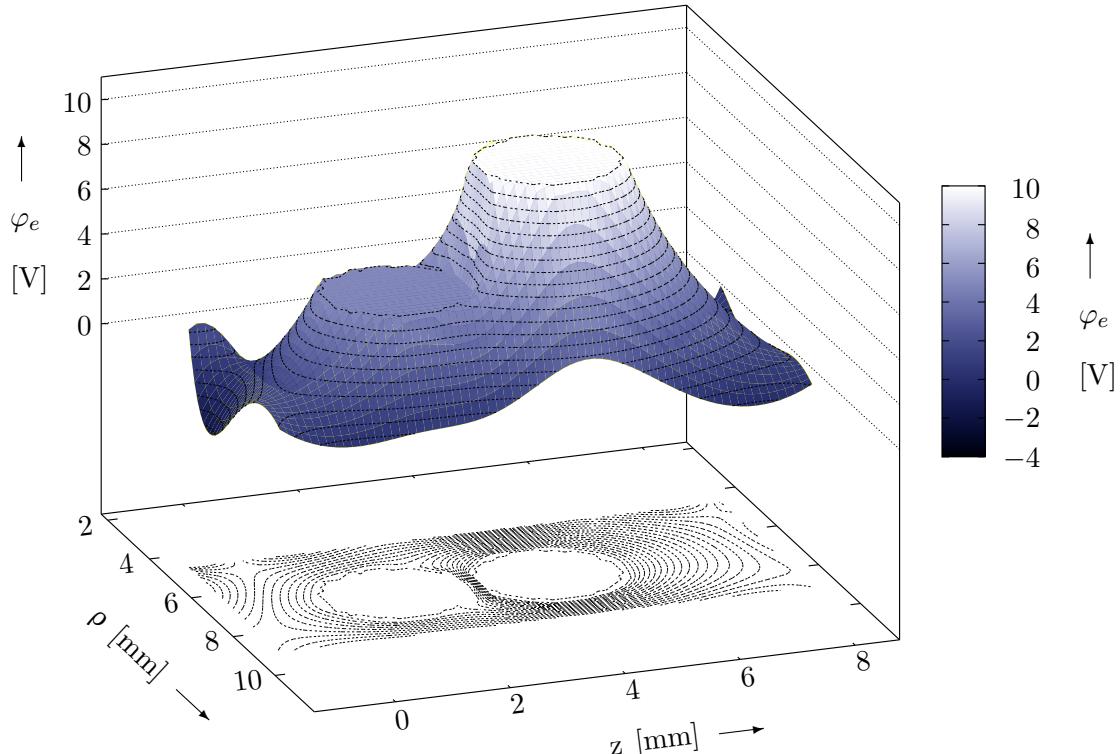


Abbildung 8.5: Elektrostatisches Potential einer Wicklung aus 2 Windungen ohne Ferritkern

Die genannte Spule aus zwei Windungen wird auf den Mittelschenkel eines P22/13 Ferritkerns gesteckt (vergl. Abbildung 8.4). Die Windungen sind vom elektrisch schwach leitfähigen Topfkern vollständig umschlossen. Die Grafik in Abbildung 8.6 zeigt das elektrostatische Potential im Wickelfenster der Spule (Schnittebene  $\varphi = 0$ ). Den Leitern wurden erneut die Potentiale 5 V und 10 V eingeprägt, während der Topfkern auf dem Bezugspotential 0 V liegt. Die Potentialansätze gemäß Gl. (8.13) wurden nach dem sechsten Glied abgebrochen. Dies macht sich insbesondere auf der Ferritkern-Oberfläche bemerkbar, so dass das Potential dort nur nähe-

rungsweise 0 V erreicht, stellenweise sogar negativ werden kann und in der Nähe der Ferritkern-Oberfläche scheinbar singuläre Punkte entstehen. Hier macht sich das Gibb'sche Phänomen für Fourierreihen bemerkbar. Auch bei einer Erweiterung der Reihenentwicklung werden sich singuläre Punkte ausprägen und das simulierte Potential auf der Ferritkern-Oberfläche um den angestrebten Wert schwingen. Hier zeigt sich, wie günstig die Definition (8.29) für diese Problemstellung gewählt ist, wodurch eine Orthogonalentwicklung auf der Isolationsoberfläche der Kupferlackdrähte vermieden wurde, wo das Coulomb-Gesetz zur Kapazitätsberechnung ausgewertet wird.

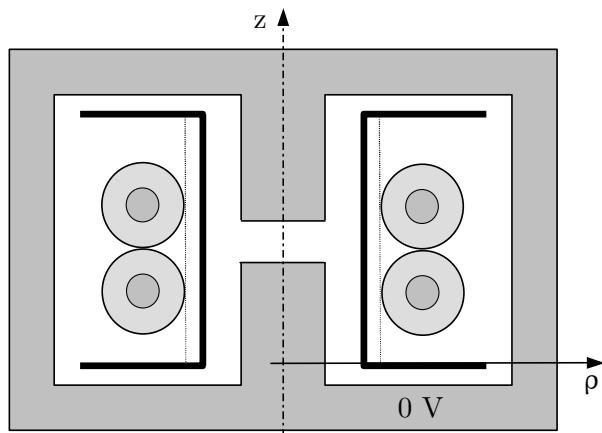


**Abbildung 8.6:** Elektrostatisches Potential einer Wicklung aus 2 Windungen mit P22/13 Ferritkern

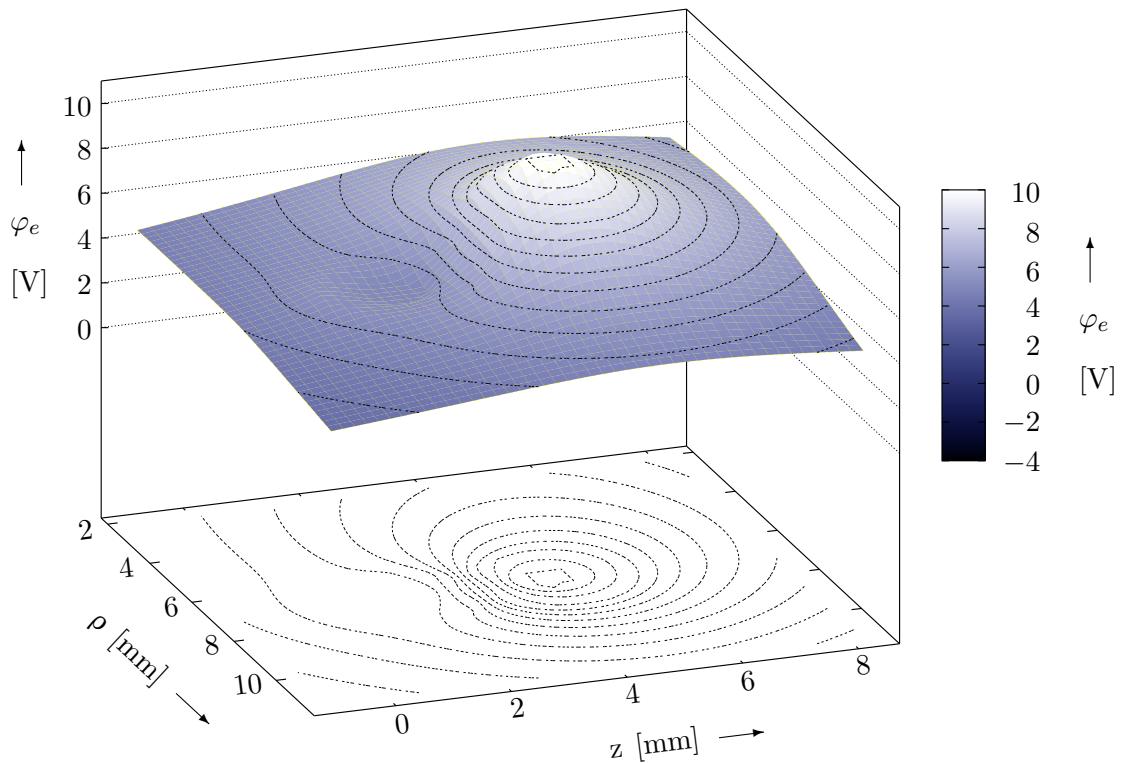
Um den Einfluss der Lackschicht zu veranschaulichen, wurde zur Simulation der Kupferdurchmesser der gleichen Komponente auf 1 mm verkleinert, während der Außendurchmesser beibehalten wurde (2.631 mm). Die Dielektrizitätszahl des Lackes wurde als  $\epsilon_r \approx 3$  angenommen. Die Abbildung 8.7 zeigt den zur Abbildung 8.4 ähnlichen Aufbau. Wieder wird der Ferritkern jedoch zunächst weggelassen.

Die Grafik in Abbildung 8.8 zeigt zunächst das elektrostatische Potential der Leiter ohne den Ferritkerneinfluss.

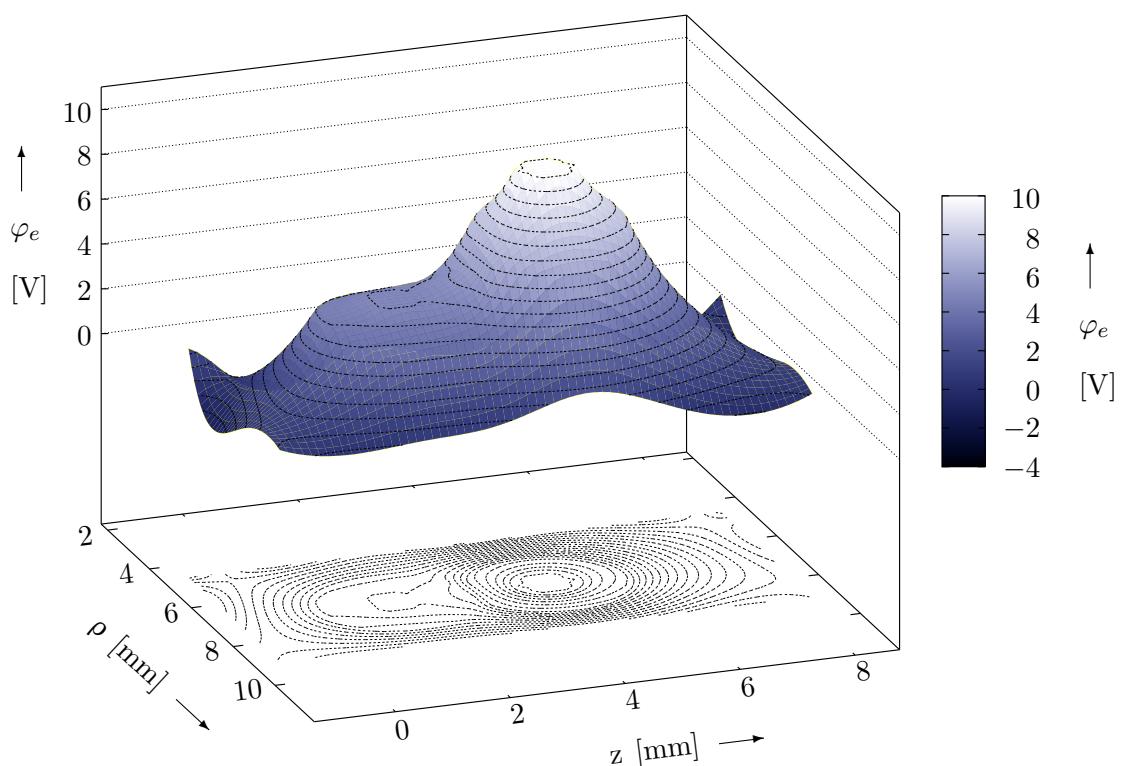
Zur Erstellung der Grafik in Abbildung 8.9 wurde zusätzlich wieder ein leitfähiger P22/13 Ferritkern hinzugefügt. Die (übertrieben dicke) Lackschicht ist nun im Potentialverlauf deutlich wiederzuerkennen. Der Kerneinfluss wird in der Randbedingung (8.21 g) berücksichtigt und fließt in die Orthogonalentwicklung (8.48) auf der Kernoberfläche ein. Zusätzlich wurde eine elektrische Ferritkern-Ersatzanordnung gemäß Abschnitt 6 verwendet.



**Abbildung 8.7:** Zwei Windungen auf einem P22/13 Ferritkern

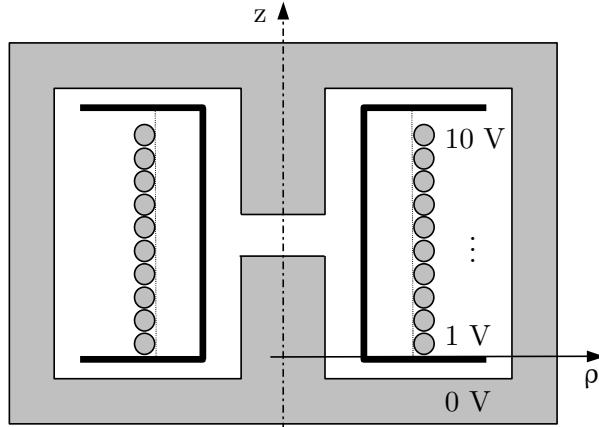


**Abbildung 8.8:** Elektrostatisches Potential einer Wicklung aus 2 Windungen ohne Ferritkern



**Abbildung 8.9:** Elektrostatisches Potential einer Wicklung aus 2 Windungen auf einem P22/13 Ferritkern

Es wird jetzt eine Spule aus zehn Kupferlackdraht-Windungen um die z-Achse in einer Wicklungslage auf einem P30/19 Wickelkörper untersucht wie sie die Abbildung 8.10 zeigt. Der Draht hat einen Kupferdurchmesser von 1 mm und einen Außendurchmesser von 1.09 mm. Den einzelnen Windungen wurden die Potentiale 1 V...10 V eingeprägt.



**Abbildung 8.10:** Elektrostatisches Potential einer Wicklung aus 10 Windungen auf einem P30/19 Ferritkern

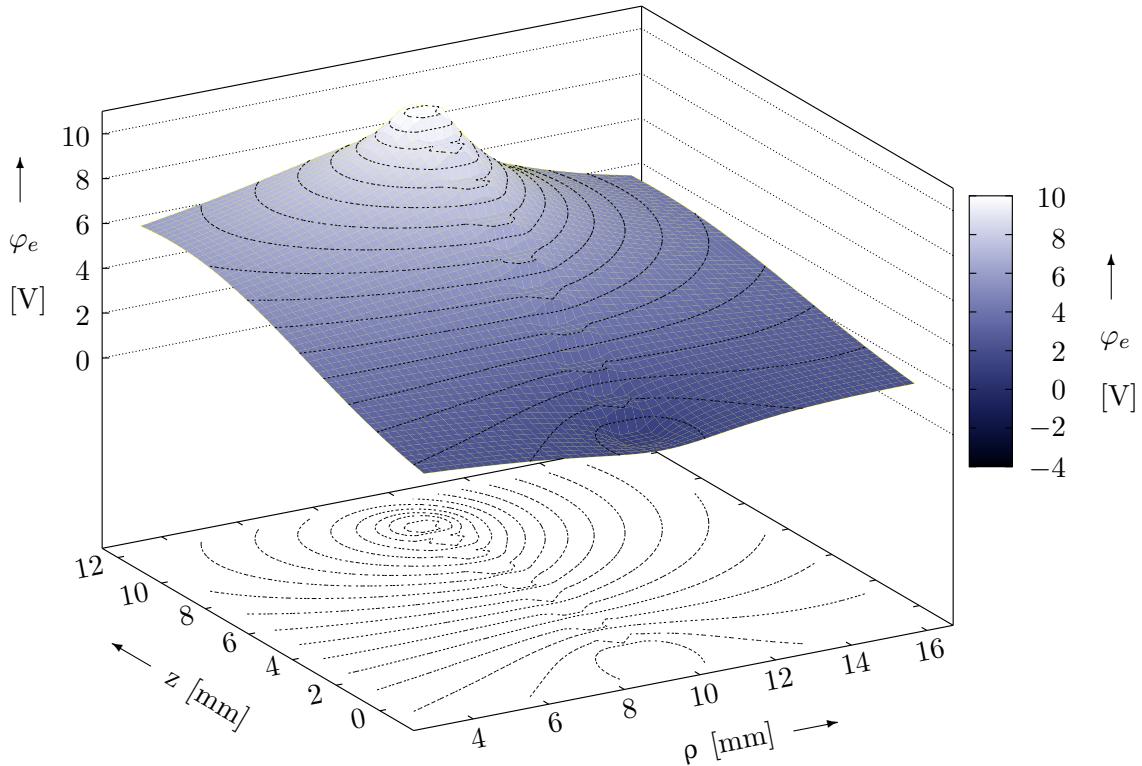
Die Grafik der Abbildung 8.11 zeigt das elektrostatische Potential der Anordnung aus Abbildung 8.10, wobei der Ferritkern zunächst weggelassen wird. Die Potentialansätze gemäß Gl. (8.13) wurden wieder nach dem zwölften Glied abgebrochen.

Zum Vergleich ist zur Simulation für die Grafik in Abbildung 8.12 das Bauelement auf dem Mittelschenkel eines schwach leitfähigen P30/19 Ferritkerns positioniert worden. Dem Ferritkern sei das Bezugspotential 0 V eingeprägt. Die Potentialansätze gemäß Gl. (8.13) wurden bei dieser Simulation wieder nach dem sechsten Glied abgebrochen.

## 8.7 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde in Anlehnung an die in Abschnitt 4.3 zusammengefasst dargestellte magnetische Problemstellung [2] an dieser Stelle ein elektrisches Randwertproblem formuliert und gelöst. Zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens und zur Beschleunigung der Rechnung wurde das iterative Verfahren in Abschnitt 8.4 jedoch abgewandelt. Die Gleichungssysteme einzelner Leiter wurden zu Gleichungssystemen von Leitermengen  $M_m$  zusammengefasst. Dies ermöglicht für die praktische, numerische Umsetzung des Verfahrens den Erhalt des iterativen Verfahrens in der Art, dass die Größe der Leitergruppen so gewählt werden kann, dass sowohl der Speicherbedarf abgedeckt werden kann als auch die Kondition der zu invertierenden Matrizen nicht zu schlecht wird.

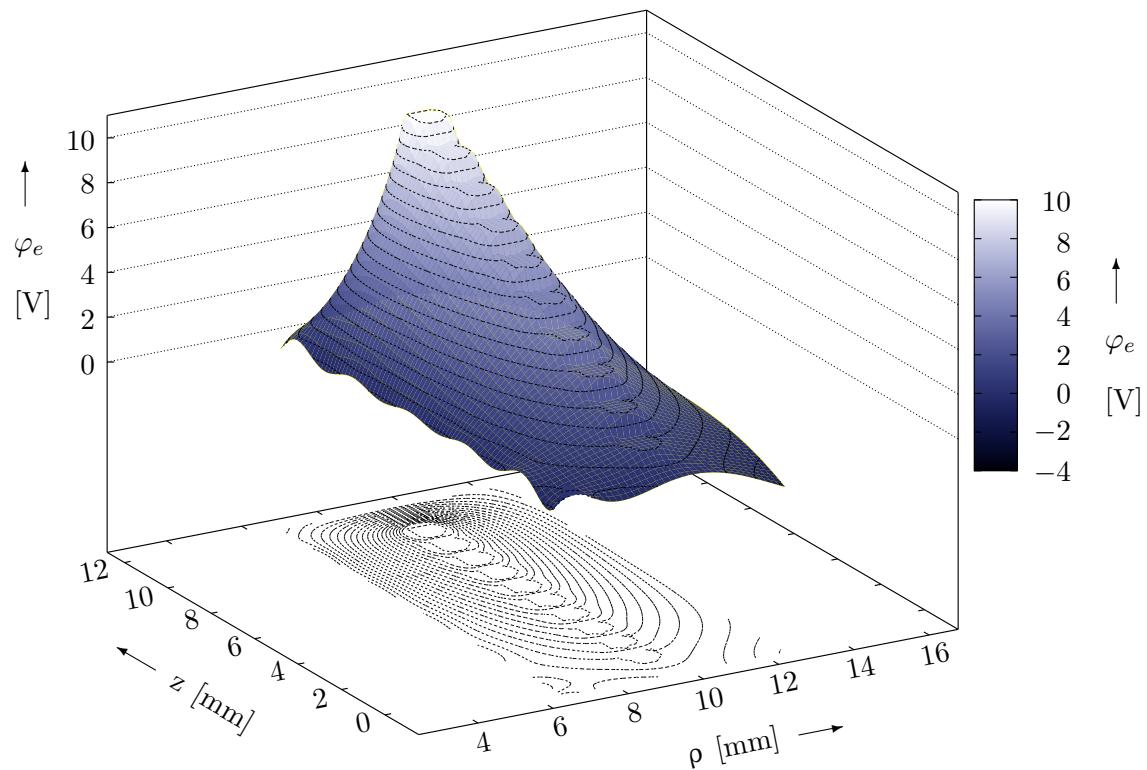
So werden in jedem Schritt die Koeffizienten der Potentialansätze einer ganzen Menge von Leitern gleichzeitig ermittelt. Ihr Potential und ihre elektrische Feldstärke fließt dann in die Randbedingungen zur Ermittlung der Matrizelemente der weiteren Leitergruppen ein. Diese Abwandlung des Verfahrens ist insbesondere bei der Untersuchung von Spulen und Transfor-



**Abbildung 8.11:** Elektrostatisches Potential einer Wicklung aus 10 Windungen ohne Ferritkern

toren mit sehr vielen Windungen erforderlich geworden.

Beispiele hierfür sind die Spulen mit jeweils  $N = 242$  Windungen in Abschnitt 9.6.2 der folgenden Auswertung. Wird die Anzahl der Leitermengen  $S = N$  gleich der Windungszahl eingeprägt, so enthält jede Leitermenge  $M_m$  nur einen Leiter. Dies reduziert das teilexplizite Lösungsverfahren zum rein iterativen Lösungsverfahren. Für die Simulation zur Spule mit nur einer Wicklungskammer waren über 1000 Iterationsschritte zur Lösung aller Randwertaufgaben erforderlich, für die Spulen in mehreren Wicklungskammern immerhin noch zwischen 200 und 800. Bei einer Anzahl  $S = 8$  der Leitermengen konvergiert dasselbe Verfahren für die untersuchten Spulen stets in weniger als 50 Iterationsschritten. Dies entspricht einer expliziten Lösung für jeweils 30 bis 31 Leiter in einer Leitermenge und iterativer Abgleichung der Randbedingungen zwischen den insgesamt 8 Leitermengen. Die Simulationen in Abschnitt 9.6.2 wurden mit  $S = 4$  Leitermengen durchgeführt (60 bzw. 61 Leiter je Leitermenge).



**Abbildung 8.12:** Elektrostatisches Potential einer Wicklung aus 10 Windungen mit P30/19 Ferritkern

## 9 Auswertung

Die Qualität der vorgestellten Modellierungsverfahren soll abschließend untersucht werden. Insbesondere sollen

- die Verwendbarkeit der magnetischen Kern-Ersatzanordnung nach Abschnitt 3 zur Berechnung der Wicklungsverluste nach Abschnitt 4.2 und
- die Berechnung von Übertrager-Induktivitäten ohne Ferritkern nach Abschnitt 5.4 und
- zur Berechnung von Übertrager-Induktivitäten mit Ferritkern nach Abschnitt 5.5 sowie
- die Berechnung parasitärer Übertrager-Kapazitäten mit und ohne Ferritkern nach Abschnitt 7

messtechnisch überprüft werden. Die Anpassung bei rechteckförmiger Windungsgeometrie gemäß Abschnitt E und die elektrische Ersatzanordnung gemäß Abschnitt 6 fließen bereits in die Ergebnisse mit ein.

Die Berechnung der spezifischen Kernverluste erfolgt gemäß [29] und [12, 4] mit der modifizierten Steinmetz-Formel (4.4). Bzgl. der Berechnung der Wirbelstromverluste wurde auf Folgearbeiten verwiesen, so dass insgesamt kein messtechnischer Vergleich der Kernverluste im Rahmen dieser Arbeit vorgenommen wird.

Für alle anderen Nachweise werden Impedanzmessungen zwischen zwei Klemmen eines Bauelementes mit modellierten Impedanzen zwischen den gleichen Klemmen im Ersatzschaltbild des Bauelementes verglichen. Um den Einfluss von Kernverlusten auf die Impedanzmessungen zu minimieren, wird bei kleiner Aussteuerung gemessen.

Die Induktivitäten werden stets als konstant angenommen. Ihr Wert wird bei einer Frequenz unterhalb der ersten Resonanzfrequenz bestimmt, wo die Phase in guter Näherung bei  $\pi/2$  ist.

Die parasitären Kapazitäten werden ebenfalls als konstant angenommen und anhand der Lage der Resonanzfrequenzen verglichen. Zur Messung der parasitären Kapazitäten zu einem Ferritkern wurde dieser als Bezugsknoten eingeführt. Zudem wurde die elektrische Leitfähigkeit der Kernoberfläche erhöht, indem die dem Wickelfenster zugewandte Oberfläche mit einem leitfähigen Silberlack überstrichen wurde. Um zu vermeiden, dass der Lack wie eine Kurzschlusswicklung um das Wickelfenster wirkt, wurde die Schicht auf einer Seite unterbrochen. Dies entspricht besser der Modellierung der parasitären Kapazitäten, welche auch unter Voraussetzung hoher elektrischer Leitfähigkeit des Kernes erfolgt. In der Tat ist mit dieser Modellierung nur eine qualitative Aussage über die parasitären Kapazitäten möglich.

Die Wicklungsverluste sind stark frequenzabhängig. Auch eine geringfügige Abweichung der simulierten Resonanzfrequenz von einer gemessenen Resonanzfrequenz kann eine große Abweichung der simulierten von der gemessenen Impedanz zur Folge haben, was jedoch nicht auf eine fehlerhafte Berechnung der Verluste selbst schließen lässt. Deshalb soll der Vergleich der Verluste nur bis knapp zur ersten Resonanzfrequenz erfolgen.

Alle Messungen werden ausschließlich an einfachen Spulen oder Übertragern mit maximal zwei Wicklungen mit oder ohne Ferritkern vorgenommen. Die bislang verwendeten Verfahren sind unabhängig von der Anzahl der Wicklungen anwendbar. Eine Betrachtung des Ersatzschaltbildes von Übertragern mit mehr als zwei Wicklungen ist jedoch nicht erforderlich, da alle auftretenden Effekte bereits an Übertragern mit zwei Wicklungen auftreten und auf den gleichen physikalischen Prinzipien beruhen. Die Erhöhung der Wicklungszahl führt zu umfangreicheren Ersatzschaltbildern, was lediglich den Vergleich von Simulation und Messung erschwert.

## 9.1 Induktives Ersatzschaltbild und Simulation

Unter Vernachlässigung der Kernverluste und zunächst auch der parasitären Kapazitäten ist das Ersatzschaltbild eines beliebigen Übertragers mit zwei Wicklungen in Abbildung 9.1 gegeben. Das durch den Wicklungsaufbau eingestellte Übersetzungsverhältnis  $\dot{\nu} = w_1/w_2$  ist während der Modellierungsphase nicht bekannt und zur Lösung der feldtheoretischen Problemstellung unwichtig. Um dennoch die galvanische Trennung zweier Wicklungen im Ersatzschaltbild zu berücksichtigen ist ein idealer Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis 1 : 1 integriert. Die

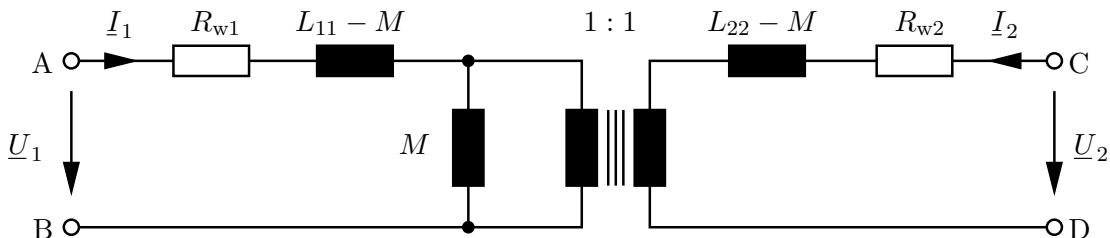


Abbildung 9.1: Transformator mit Wicklungsverlusten

Spannungen und Ströme am Übertrager in Abbildung 9.1 sind über die Impedanzmatrix  $\underline{Z}_L$  miteinander verknüpft

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{Z}_L \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{w1} + j\omega L_{11} & j\omega M \\ j\omega M & R_{w2} + j\omega L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

Für spätere Berechnungen wird die Umkehrung dieser Verknüpfung

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{Y}_L \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

mit der Admittanzmatrix

$$\underline{Y}_L = (\underline{Y}_{L,i,k}) = \underline{Z}_L^{-1} = \frac{1}{\Delta_L} \begin{pmatrix} R_{w2} + j\omega L_{22} & -j\omega M \\ -j\omega M & R_{w1} + j\omega L_{11} \end{pmatrix} \quad (9.3 \text{ a})$$

und der Determinante

$$\Delta_L = (R_{w1} + j\omega L_{11})(R_{w2} + j\omega L_{22}) + \omega^2 M^2 \quad (9.3 \text{ b})$$

benötigt.

Unter Berücksichtigung des Übersetzungsverhältnisses  $\ddot{u}$  wird der reaktive Anteil des Übertragers in das Ersatzschaltbild gemäß Abbildung 9.2 aus den Streuinduktivitäten

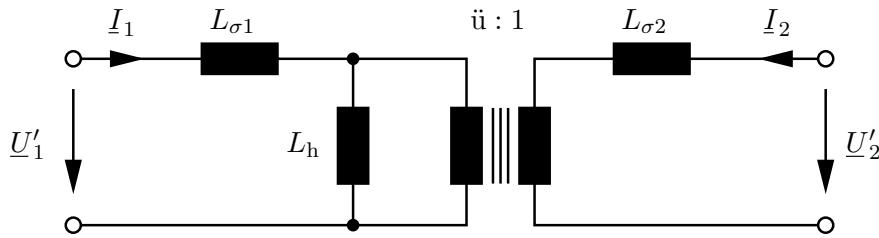
$$L_{\sigma 1} = L_{11} - \ddot{u}M, \quad (9.4 \text{ a})$$

$$L_{\sigma 2} = L_{22} - \frac{1}{\ddot{u}}M \quad (9.4 \text{ b})$$

und der Hauptinduktivität

$$L_h = \ddot{u}M \quad (9.4 \text{ c})$$

überführt.



**Abbildung 9.2:** Haupt- und Streuinduktivitäten des Transfomers

### 9.1.1 Messung der Verluste und der Induktivitäten

Wird bei sekundärseitigem Leerlauf primärseitig die Impedanz

$$Z_{p0} = \left. \frac{\underline{U}_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = R_{w1} + j\omega L_{11} = R_{w1} + j\omega (L_{\sigma 1} + L_h) \quad (9.5)$$

gemessen, so kann

- anhand des Realteiles  $R_{w1}$  die Modellierung der Wicklungsverluste auf der Primärseite verglichen werden und
- anhand des Imaginärteiles die primärseitige Induktivität  $L_{11}$  überprüft werden.

Wird hingegen bei primärseitigem Leerlauf sekundärseitig die Impedanz

$$Z_{s0} = \left. \frac{\underline{U}_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = R_{w2} + j\omega L_{22} = R_{w2} + j\omega \left( L_{\sigma 2} + \frac{1}{\ddot{u}^2} L_h \right) \quad (9.6)$$

gemessen, so kann

## 9 Auswertung

- anhand des Realteiles  $R_{w2}$  die Modellierung der Wicklungsverluste auf der Sekundärseite verglichen werden und
- anhand des Imaginärteiles die sekundärseitige Induktivität  $L_{22}$  überprüft werden.

Sowohl die primärseitige Impedanzmessung bei sekundärseitigem Kurzschluss

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{p1} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \Big|_{\underline{U}_2=0} \approx \frac{(R'_{w1} + j\omega L_{11})(R'_{w2} + j\omega L_{22}) + \omega^2 M^2}{R'_{w2} + j\omega L_{22}} \\ &= R'_{w1} + j\omega L_{\sigma1} + \frac{j\omega L_h \ddot{u}^2 (R'_{w2} + j\omega L_{\sigma2})}{j\omega L_h + \ddot{u}^2 (R'_{w2} + j\omega L_{\sigma2})} \end{aligned} \quad (9.7)$$

als auch die sekundärseitige Impedanzmessung bei primärseitigem Kurzschluss

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{p2} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \Big|_{\underline{U}_1=0} \approx \frac{(R''_{w1} + j\omega L_{11})(R''_{w2} + j\omega L_{22}) + \omega^2 M^2}{R''_{w1} + j\omega L_{11}} \\ &= R''_{w2} + j\omega L_{\sigma2} + \frac{1}{\ddot{u}^2} \frac{j\omega L_h (R''_{w1} + j\omega L_{\sigma1})}{j\omega L_h + (R''_{w1} + j\omega L_{\sigma1})} \end{aligned} \quad (9.8)$$

sind stark fehlerbehaftet, da nicht nur die zuvor unterlaufenen Messfehler mit enthalten sind, sondern auch die in den Gln. (9.5) und (9.6) bestimmten Widerstände  $R_{w1}$  und  $R_{w2}$  nicht zur Bestimmung der Impedanzen gemäß Gln. (9.7) und (9.8) herangezogen werden können. Die Messungen gemäß Gln. (9.7) und (9.8) sind zwei weitere Betriebszustände des Transformators, deren unterschiedliche Magnetfeldverteilungen im Bereich der Wicklungen gemäß Abschnitt 4.4 auch unterschiedliche Wicklungsverluste zur Folge haben. Die Wicklungs-Widerstände  $R'_{w1}$  und  $R''_{w1}$  sowie  $R'_{w2}$  und  $R''_{w2}$  können daher von  $R_{w1}$  bzw.  $R_{w2}$  abweichen und auch die Vernachlässigung der Kernverluste muss überprüft werden. Lediglich die Gegeninduktivität ist in diesem Modell nicht vom Betriebszustand abhängig.

Es ist also anstelle der Messungen gemäß Gln. (9.7) und (9.8) eine geeignete Messung zu finden, welche geringere Fehler aufweist. Werden Primär- und Sekundärseite in Reihe verschaltet und die Impedanzen

$$\underline{Z}_{r1} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_2}{\underline{I}_1} \Big|_{I_1=I_2} = \tilde{R}_{w1} + \tilde{R}_{w2} + j\omega(L_{11} + L_{22} + 2M) \quad (9.9 \text{ a})$$

sowie

$$\underline{Z}_{r2} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{I}_1} \Big|_{I_1=-I_2} = \hat{R}_{w1} + \hat{R}_{w2} + j\omega(L_{11} + L_{22} - 2M) \quad (9.9 \text{ b})$$

gemessen, dann sind bei der Ermittlung der Gegeninduktivität

$$M = \frac{1}{4\omega} \text{Im}\{\underline{Z}_{r1} - \underline{Z}_{r2}\} \quad (9.10)$$

sowohl die Verluste—repräsentiert durch  $\tilde{R}_{w1}$ ,  $\tilde{R}_{w2}$ ,  $\hat{R}_{w1}$  und  $\hat{R}_{w2}$ —als auch die zuvor begangenen Messfehler bei der Ermittlung der Induktivitäten  $L_{11}$  und  $L_{22}$  vernachlässigbar.

## 9.2 Messung der parasitären Kapazitäten

Die Induktivitäten und auch die Verluste sollen in diesem Abschnitt als bekannt vorausgesetzt werden. Sie werden anhand der Admittanzmatrix  $\underline{Y}_L$  des verlustbehafteten Übertragers gemäß Abbildung 9.1 und Gln. (9.3) in den folgenden Betrachtungen berücksichtigt. Erneut wird ein Übertrager mit zwei Wicklungen untersucht. Nun sollen allerdings die parasitären Kapazitäten messtechnisch verglichen werden. Das Ersatzschaltbild wird gemäß Abbildung 9.3 definiert und berücksichtigt sowohl Kapazitäten einzelner Wicklungen und zwischen den Wicklungen als auch Kapazitäten zu einem Bezugsknoten (3 und 6) des verlustbehafteten Übertragers aus Abbildung 9.1, welcher mit seinen Anschlussknoten A bis D mit den Knoten 1, 2, 4 und 5 verbunden ist. Der Bezugsknoten 3 bzw. 6 ist für Transformatoren ohne Ferritkern die unendlich ferne Hülle. Die Kapazitäten  $C_{13}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{46}$  und  $C_{56}$  werden dann vernachlässigt. Ist ein Ferritkern vorhanden, so wird dieser als Bezugsknoten herangezogen und somit werden die Kapazitäten zum Kern wichtig.

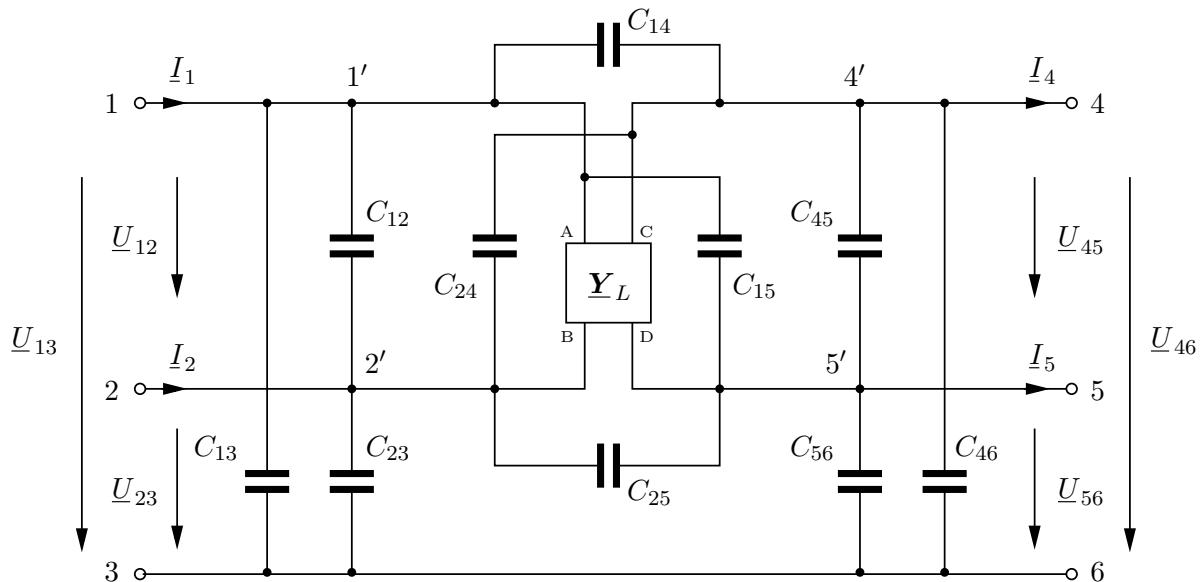


Abbildung 9.3: Transformator mit parasitären Kapazitäten

Mit den Admittanzen der Kapazitäten

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{12} &= j\omega C_{12}, \quad \underline{Y}_{23} = j\omega C_{23}, \quad \underline{Y}_{13} = j\omega C_{13}, \\ \underline{Y}_{14} &= j\omega C_{14}, \quad \underline{Y}_{15} = j\omega C_{15}, \quad \underline{Y}_{24} = j\omega C_{24}, \quad \underline{Y}_{25} = j\omega C_{25}, \\ \underline{Y}_{45} &= j\omega C_{45}, \quad \underline{Y}_{56} = j\omega C_{56}, \quad \underline{Y}_{46} = j\omega C_{46}\end{aligned}$$

gilt für den Knoten 1' in Abbildung 9.3

$$\begin{aligned}-I_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_{12} + \underline{Y}_{13}\underline{U}_{13} \\ + \underline{Y}_{14}(\underline{U}_{13} - \underline{U}_{46}) + \underline{Y}_{15}(\underline{U}_{13} - \underline{U}_{46} + \underline{U}_{45}) \\ + \underline{Y}_{L1,1}\underline{U}_{12} + \underline{Y}_{L1,2}\underline{U}_{45} = 0,\end{aligned}\tag{9.11}$$

## 9 Auswertung

für den Knoten 2' in Abbildung 9.3

$$\begin{aligned} & -I_2 - \underline{Y}_{12}\underline{U}_{12} + \underline{Y}_{23}(\underline{U}_{13} - \underline{U}_{12}) \\ & + \underline{Y}_{25}(\underline{U}_{13} - \underline{U}_{12} - \underline{U}_{46} + \underline{U}_{45}) + \underline{Y}_{24}(\underline{U}_{13} - \underline{U}_{12} - \underline{U}_{46}) \\ & - \underline{Y}_{L1,1}\underline{U}_{12} - \underline{Y}_{L1,2}\underline{U}_{45} = 0, \end{aligned} \quad (9.12)$$

für den Knoten 4' in Abbildung 9.3

$$\begin{aligned} & +I_4 + \underline{Y}_{45}\underline{U}_{45} + \underline{Y}_{46}\underline{U}_{46} \\ & + \underline{Y}_{14}(\underline{U}_{46} - \underline{U}_{13}) + \underline{Y}_{24}(\underline{U}_{46} - \underline{U}_{13} + \underline{U}_{12}) \\ & + \underline{Y}_{L2,1}\underline{U}_{12} + \underline{Y}_{L2,2}\underline{U}_{45} = 0 \end{aligned} \quad (9.13)$$

und den Knoten 5' in Abbildung 9.3

$$\begin{aligned} & +I_5 - \underline{Y}_{45}\underline{U}_{45} + \underline{Y}_{56}(\underline{U}_{46} - \underline{U}_{45}) \\ & + \underline{Y}_{25}(\underline{U}_{46} - \underline{U}_{45} - \underline{U}_{13} + \underline{U}_{12}) + \underline{Y}_{15}(\underline{U}_{46} - \underline{U}_{45} - \underline{U}_{13}) \\ & - \underline{Y}_{L2,1}\underline{U}_{12} - \underline{Y}_{L2,2}\underline{U}_{45} = 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Über die Formulierung der Kontinuitätsgleichungen für die aus den Knoten herausfließenden Ströme wird also ein Gleichungssystem

$$\underline{A}_l \begin{pmatrix} \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{13} \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \underline{A}_r \begin{pmatrix} \underline{U}_{45} \\ \underline{U}_{46} \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} \quad (9.15 \text{ a})$$

mit den Matrizen

$$\underline{A}_l = \begin{pmatrix} +\underline{Y}_{12} & +\underline{Y}_{L1,1} & +\underline{Y}_{13} + \underline{Y}_{14} + \underline{Y}_{15} & -1 & 0 \\ -\underline{Y}_{12} - \underline{Y}_{23} - \underline{Y}_{24} - \underline{Y}_{25} - \underline{Y}_{L1,1} & +\underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{24} + \underline{Y}_{25} & 0 & -1 \\ +\underline{Y}_{24} & +\underline{Y}_{L2,1} & -\underline{Y}_{14} - \underline{Y}_{24} & 0 & 0 \\ +\underline{Y}_{25} - \underline{Y}_{L2,1} & -\underline{Y}_{15} - \underline{Y}_{25} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.15 \text{ b})$$

und

$$\underline{A}_r = - \begin{pmatrix} +\underline{Y}_{15} & +\underline{Y}_{L1,2} & -\underline{Y}_{14} - \underline{Y}_{15} & 0 & 0 \\ +\underline{Y}_{25} & -\underline{Y}_{L1,2} & -\underline{Y}_{24} - \underline{Y}_{25} & 0 & 0 \\ +\underline{Y}_{45} & +\underline{Y}_{L2,2} & +\underline{Y}_{14} + \underline{Y}_{24} + \underline{Y}_{46} & 1 & 0 \\ -\underline{Y}_{15} - \underline{Y}_{25} - \underline{Y}_{45} - \underline{Y}_{56} - \underline{Y}_{L2,2} & +\underline{Y}_{15} + \underline{Y}_{25} + \underline{Y}_{56} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.15 \text{ c})$$

aufgestellt.

Die primär- und sekundärseitigen Ströme und Spannungen sind über die Kettenleitermatrix

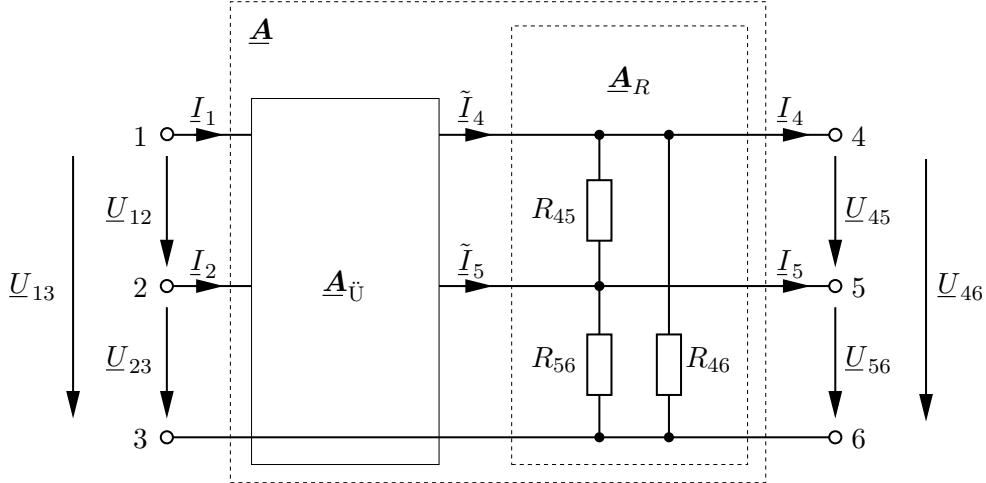
$$\underline{A}_{\ddot{U}} = \underline{A}_l^{-1} \underline{A}_r = \left( a_{\ddot{U}i,k} \right) \quad \text{mit} \quad i, k \in \{1, \dots, 4\} \quad (9.16)$$

folgendermaßen miteinander verknüpft:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{13} \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \underline{A}_{\ddot{U}} \begin{pmatrix} \underline{U}_{45} \\ \underline{U}_{46} \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix}. \quad (9.17)$$

### 9.2.1 Messung bei einseitigem Abschluss

Der Sechspol nach Abbildung 9.3 kann bei primärseitigen Messungen sekundärseitig evtl. mit einem Parallel-Sechspol abgeschlossen werden. Das Ersatzschaltbild dieser Kettenschaltung ist in Abbildung 9.4 gezeigt.



**Abbildung 9.4:** Transformator Ersatzschaltbild zum Vergleich mit primärseitigen Impedanzmessungen bei sekundärseitigem Abschluss

Die Kettenleitermatrix des sekundärseitigen Parallel-Sechspols ist

$$\underline{\mathbf{A}}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_{45}} & \frac{1}{R_{46}} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_{45}} - \frac{1}{R_{56}} & \frac{1}{R_{56}} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.18)$$

wobei üblicherweise einzelne Knoten kurzgeschlossen werden, d.h.

$$\begin{aligned} R_{45} &\rightarrow 0, \quad R_{56} \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad R_{46} \rightarrow \infty \quad \text{oder} \\ R_{45} &\rightarrow \infty, \quad R_{56} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad R_{46} \rightarrow \infty \quad \text{oder} \\ R_{45} &\rightarrow \infty, \quad R_{56} \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad R_{46} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Spannungen und Ströme der Kettenschaltung sind mit der Kettenleitermatrix

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}_U \underline{\mathbf{A}}_R = (\underline{a}_{i,k}) \quad \text{mit} \quad i, k \in \{1, \dots, 4\} \quad (9.19)$$

verknüpft

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{13} \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \underline{U}_{45} \\ \underline{U}_{46} \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{pmatrix}. \quad (9.20)$$

In den folgenden Abschnitten werden aus den Elementen  $\underline{a}_{i,k}$  dieser Kettenleitermatrix die Impedanzen ermittelt, welche zwischen jeweils einem Klemmenpaar der Schaltung gemäß Abbildung 9.4 bei Leerlauf aller anderen Klemmen anliegen.

## 9 Auswertung

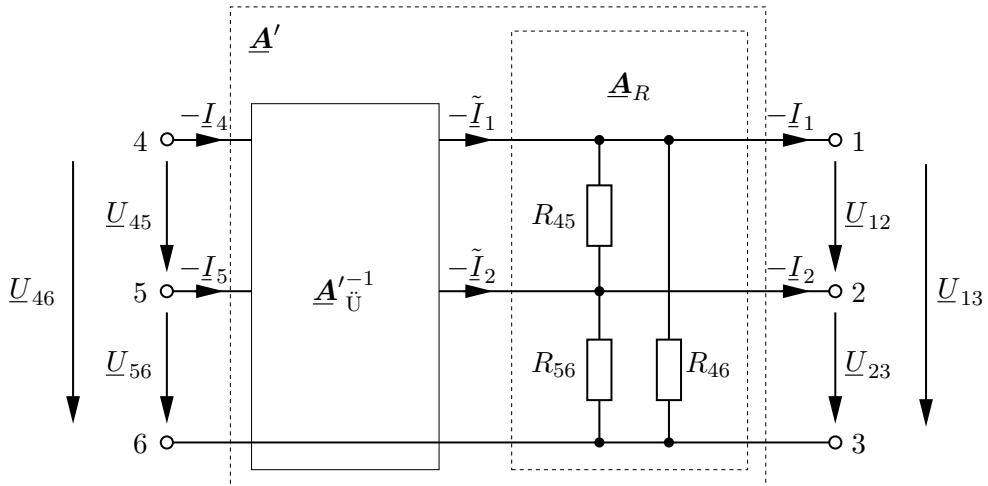
Für sekundärseitige Impedanzmessungen ist die Verknüpfung (9.17) der Ströme und Spannungen des Übertragers in Abbildung 9.3 mit der leicht modifizierten Kettenleitermatrix

$$\underline{\mathbf{A}}'_{\ddot{\mathbf{U}}} = \begin{pmatrix} a_{\ddot{\mathbf{U}}1,1} & a_{\ddot{\mathbf{U}}1,2} & -a_{\ddot{\mathbf{U}}1,3} & -a_{\ddot{\mathbf{U}}1,4} \\ a_{\ddot{\mathbf{U}}2,1} & a_{\ddot{\mathbf{U}}2,2} & -a_{\ddot{\mathbf{U}}2,3} & -a_{\ddot{\mathbf{U}}2,4} \\ -a_{\ddot{\mathbf{U}}3,1} & -a_{\ddot{\mathbf{U}}3,2} & a_{\ddot{\mathbf{U}}3,3} & a_{\ddot{\mathbf{U}}3,4} \\ -a_{\ddot{\mathbf{U}}4,1} & -a_{\ddot{\mathbf{U}}4,2} & a_{\ddot{\mathbf{U}}4,3} & a_{\ddot{\mathbf{U}}4,4} \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

so anzupassen, dass Primär- und Sekundärseite vertauscht werden

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{45} \\ \underline{U}_{46} \\ -I_4 \\ -I_5 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}}'^{-1}_{\ddot{\mathbf{U}}} \begin{pmatrix} \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{13} \\ -I_1 \\ -I_2 \end{pmatrix}. \quad (9.22)$$

Abbildung 9.5 zeigt eine zu Abbildung 9.4 vergleichbare Kettenbeschaltung des Übertragers, welcher nun jedoch primärseitig mit dem Parallel-Sechspol aus  $R_{45}$ ,  $R_{56}$  und  $R_{46}$  abgeschlossen wird.



**Abbildung 9.5:** Transformator Ersatzschaltbild zum Vergleich mit sekundärseitigen Impedanzmessungen bei primärseitigem Abschluss

Die Kettenleitermatrix dieser Schaltung ist

$$\underline{\mathbf{A}}' = \underline{\mathbf{A}}'^{-1}_{\ddot{\mathbf{U}}} \underline{\mathbf{A}}_R = (\underline{a}'_{i,k}) \quad \text{mit} \quad i, k \in \{1, \dots, 4\} \quad (9.23)$$

und die Ströme und Spannungen der Schaltung in Abbildung 9.5 sind gemäß

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{45} \\ \underline{U}_{46} \\ -I_4 \\ -I_5 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}}' \begin{pmatrix} \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{13} \\ -I_1 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (9.24)$$

miteinander verknüpft.

Die folgende Berechnung der Impedanzen bei sekundärseitigem Abschluss wird nicht für primärseitigen Abschluss wiederholt. Eine Modifikation der Ergebnisse ist leicht durch Vertauschung der Klemmen 1, 2 und 3 mit den Klemmen 4, 5 und 6 und Ersetzung der Koeffizienten  $\underline{a}_{i,k}$  durch die Koeffizienten  $\underline{a}'_{i,k}$  möglich. Aus den Bestimmungsgleichungen der primärseitigen Impedanzen  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{23}$  und  $\underline{Z}_{13}$  folgen z.B. unmittelbar die Bestimmungsgleichungen der sekundärseitigen Impedanzen  $\underline{Z}_{45}$ ,  $\underline{Z}_{56}$  und  $\underline{Z}_{46}$ :

$$\underline{Z}_{12} = f_1(\underline{a}_{i,k}) \Rightarrow \underline{Z}_{45} = f_1(\underline{a}'_{i,k}), \quad (9.25 \text{ a})$$

$$\underline{Z}_{23} = f_2(\underline{a}_{i,k}) \Rightarrow \underline{Z}_{56} = f_2(\underline{a}'_{i,k}), \quad (9.25 \text{ b})$$

$$\underline{Z}_{13} = f_3(\underline{a}_{i,k}) \Rightarrow \underline{Z}_{46} = f_3(\underline{a}'_{i,k}). \quad (9.25 \text{ c})$$

### 9.2.2 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 1 und 2

Für die Bestimmung der Impedanz zwischen den Klemmen 1 und 2 der Schaltung in Abbildung 9.4 sind die Ströme

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &:= -\underline{I}_1 \quad \text{und} \\ \underline{I}_4 &:= \underline{I}_5 := 0 \end{aligned}$$

gemäß Gl. (9.20) mit den Spannungen  $\underline{U}_{45}$  und  $\underline{U}_{46}$  wie folgt verknüpft:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{a}_{31}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{32}\underline{U}_{46}, \\ -\underline{I}_1 &= \underline{a}_{41}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{42}\underline{U}_{46}. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Ebenfalls aus Gl. (9.20) folgt abschließend die Verknüpfung mit der gesuchten Impedanz  $\underline{Z}_{12}$ :

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{a}_{11}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{12}\underline{U}_{46} \\ &= \frac{\underline{a}_{11}(\underline{a}_{42} + \underline{a}_{32}) - \underline{a}_{12}(\underline{a}_{41} + \underline{a}_{31})}{\underline{a}_{31}\underline{a}_{42} - \underline{a}_{32}\underline{a}_{41}} \underline{I}_1 \\ &= \underline{Z}_{12}\underline{I}_1. \end{aligned} \quad (9.27)$$

### 9.2.3 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 1 und 3

Für die Bestimmung der Impedanz zwischen den Klemmen 1 und 3 der Schaltung in Abbildung 9.4 verschwinden folgende Ströme

$$\underline{I}_2 := \underline{I}_4 := \underline{I}_5 := 0.$$

Es folgen aus Gl. (9.20) die Beziehungen

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{a}_{31}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{32}\underline{U}_{46}, \\ 0 &= \underline{a}_{41}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{42}\underline{U}_{46} \end{aligned} \quad (9.28)$$

## 9 Auswertung

sowie die Bestimmungsgleichung für die Impedanz  $\underline{Z}_{13}$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{13} &= \underline{a}_{21}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{22}\underline{U}_{46} \\ &= \frac{\underline{a}_{21}\underline{a}_{42} - \underline{a}_{22}\underline{a}_{41}}{\underline{a}_{31}\underline{a}_{42} - \underline{a}_{32}\underline{a}_{41}} \underline{I}_1 \\ &= \underline{Z}_{13}\underline{I}_1.\end{aligned}\tag{9.29}$$

### 9.2.4 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 2 und 3

Für die Bestimmung der Impedanz zwischen den Klemmen 2 und 3 der Schaltung in Abbildung 9.4 verschwinden folgende Ströme:

$$\underline{I}_1 := \underline{I}_4 := \underline{I}_5 := 0$$

und es folgt aus Gl. (9.20)

$$\begin{aligned}0 &= \underline{a}_{31}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{32}\underline{U}_{46}, \\ \underline{I}_2 &= \underline{a}_{41}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{42}\underline{U}_{46}\end{aligned}\tag{9.30}$$

sowie auch die Bestimmungsgleichung für die Impedanz  $\underline{Z}_{23}$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{23} &= \underline{U}_{13} - \underline{U}_{12} \\ &= (\underline{a}_{21} - \underline{a}_{11})\underline{U}_{45} + (\underline{a}_{22} - \underline{a}_{12})\underline{U}_{46} \\ &= \frac{-(\underline{a}_{21} - \underline{a}_{11})\underline{a}_{32} + (\underline{a}_{22} - \underline{a}_{12})\underline{a}_{31}}{\underline{a}_{31}\underline{a}_{42} - \underline{a}_{32}\underline{a}_{41}} \underline{I}_2 \\ &= \underline{Z}_{23}\underline{I}_2.\end{aligned}\tag{9.31}$$

### 9.2.5 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 1 und 4

Für die Bestimmung der Impedanz zwischen den Klemmen 1 und 4 der Schaltung in Abbildung 9.4 sind folgende Ströme

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &:= \underline{I}_4, \\ \underline{I}_2 &:= \underline{I}_5 := 0\end{aligned}$$

entsprechend Gl. (9.20) gemäß

$$\begin{aligned}(1 - \underline{a}_{33})\underline{I}_1 &= \underline{a}_{31}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{32}\underline{U}_{46}, \\ -\underline{a}_{43}\underline{I}_1 &= \underline{a}_{41}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{42}\underline{U}_{46}\end{aligned}\tag{9.32}$$

mit den Spannungen verknüpft und die Bestimmungsgleichung für die gesuchte Impedanz  $\underline{Z}_{14}$  lautet

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{14} &= \underline{U}_{13} - \underline{U}_{46} \\
 &= a_{21}\underline{U}_{45} + (a_{22} - 1)\underline{U}_{46} + a_{23}I_1 \\
 &= \left[ \frac{1}{a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41}} \cdot \left\{ a_{21} [a_{42}(1 - a_{33}) + a_{32}a_{43}] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (a_{22} - 1) [-a_{41}(1 - a_{33}) - a_{31}a_{43}] \right\} + a_{23} \right] I_1 \\
 &= \underline{Z}_{14}I_1.
 \end{aligned} \tag{9.33}$$

### Kurzschluss der Klemmen 2 und 5

Alternativ zur Impedanz  $\underline{Z}_{14}$  können zur Bestimmung einer weiteren Impedanz  $\underline{Z}'_{14}$  zwischen den Klemmen 1 und 4 zusätzlich die Klemmen 2 und 5 kurzgeschlossen werden. Dies entspricht den Impedanzen gemäß Gl. (9.9), welche bereits am Übertrager-Vierpol — jedoch noch ohne Berücksichtigung der parasitären Kapazitäten — eingeführt worden sind. Die Ströme und Spannungen des Sechspols in Abbildung 9.4 gehorchen dann den Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &:= \underline{I}_4, \\
 \underline{I}_2 &:= \underline{I}_5, \\
 \underline{U}_{13} - \underline{U}_{12} &:= \underline{U}_{46} - \underline{U}_{45}
 \end{aligned}$$

so dass aus Gl. (9.20) folgt:

$$\begin{aligned}
 (1 - a_{33})\underline{I}_1 &= a_{31}\underline{U}_{45} + a_{32}\underline{U}_{46} + a_{34}\underline{I}_2, \\
 -a_{43}\underline{I}_1 &= a_{41}\underline{U}_{45} + a_{42}\underline{U}_{46} + (a_{44} - 1)\underline{I}_2, \\
 (a_{13} - a_{23})\underline{I}_1 &= (a_{21} - a_{11} + 1)\underline{U}_{45} + (a_{22} - a_{12} - 1)\underline{U}_{46} + (a_{24} - a_{14})\underline{I}_2.
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

mit der Lösung

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{45} \\ \underline{U}_{46} \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} - 1 \\ a_{21} - a_{11} + 1 & a_{22} - a_{12} - 1 & a_{24} - a_{14} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - a_{33} \\ -a_{43} \\ a_{13} - a_{23} \end{pmatrix} I_1. \tag{9.35}$$

Diese Lösung wird in die Bestimmungsgleichung der Impedanz  $\underline{Z}'_{14}$  eingesetzt und liefert die Beziehung

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{14} &= \underline{U}_{12} - \underline{U}_{45} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & a_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_{45} \\ \underline{U}_{46} \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} + a_{13}\underline{I}_1 \\
 &= \underline{Z}'_{14}\underline{I}_1,
 \end{aligned} \tag{9.36}$$

welche ebenfalls aus Gl. (9.20) folgt.

### 9.2.6 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 1 und 5

Für die Bestimmung der Impedanz zwischen den Klemmen 1 und 5 der Schaltung in Abbildung 9.4 sind folgende Ströme

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &:= \underline{I}_5, \\ \underline{I}_2 &:= \underline{I}_4 := 0\end{aligned}$$

entsprechend Gl. (9.20) gemäß

$$\begin{aligned}(1 - \underline{a}_{34})\underline{I}_1 &= \underline{a}_{31}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{32}\underline{U}_{46}, \\ -\underline{a}_{44}\underline{I}_1 &= \underline{a}_{41}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{42}\underline{U}_{46}\end{aligned}\quad (9.37)$$

mit den Spannungen verknüpft. Die Bestimmungsgleichung der Impedanz  $\underline{Z}_{15}$  lautet dann

$$\begin{aligned}\underline{U}_{15} &= \underline{U}_{13} - (\underline{U}_{46} - \underline{U}_{45}) \\ &= (\underline{a}_{21} + 1)\underline{U}_{45} + (\underline{a}_{22} - 1)\underline{U}_{46} + \underline{a}_{24}\underline{I}_1 \\ &= \left[ \frac{1}{\underline{a}_{31}\underline{a}_{42} - \underline{a}_{32}\underline{a}_{41}} \cdot \left\{ (\underline{a}_{21} + 1)[\underline{a}_{42}(1 - \underline{a}_{34}) + \underline{a}_{32}\underline{a}_{44}] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\underline{a}_{22} - 1)[-a_{41}(1 - \underline{a}_{34}) - \underline{a}_{31}\underline{a}_{44}] \right\} + \underline{a}_{24} \right] \underline{I}_1 \\ &= \underline{Z}_{15}\underline{I}_1.\end{aligned}\quad (9.38)$$

### Kurzschluss der Klemmen 2 und 4

Entsprechend Abschnitt 9.2.5 können auch hier zur Bestimmung einer weiteren Impedanz  $\underline{Z}'_{15}$  zwischen den Klemmen 1 und 5 zusätzlich die Klemmen 2 und 4 kurzgeschlossen werden. Die Ströme und Spannungen des Sechspols in Abbildung 9.4 gehorchen dann den Beziehungen

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &:= \underline{I}_5, \\ \underline{I}_2 &:= \underline{I}_4, \\ \underline{U}_{13} - \underline{U}_{12} &:= \underline{U}_{46}\end{aligned}$$

und aus Gl. (9.20) folgt hiermit

$$\begin{aligned}(1 - \underline{a}_{34})\underline{I}_1 &= \underline{a}_{31}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{32}\underline{U}_{46} + \underline{a}_{33}\underline{I}_2, \\ -\underline{a}_{44}\underline{I}_1 &= \underline{a}_{41}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{42}\underline{U}_{46} + (\underline{a}_{43} - 1)\underline{I}_2, \\ (\underline{a}_{14} - \underline{a}_{24})\underline{I}_1 &= (\underline{a}_{21} - \underline{a}_{11})\underline{U}_{45} + (\underline{a}_{22} - \underline{a}_{12} - 1)\underline{U}_{46} + (\underline{a}_{23} - \underline{a}_{13})\underline{I}_2.\end{aligned}\quad (9.39)$$

Die Lösung des Gleichungssystems (9.39) lautet

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{45} \\ \underline{U}_{46} \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{31} & \underline{a}_{32} & \underline{a}_{33} \\ \underline{a}_{41} & \underline{a}_{42} & \underline{a}_{43} - 1 \\ \underline{a}_{21} - \underline{a}_{11} & \underline{a}_{22} - \underline{a}_{12} - 1 & \underline{a}_{23} - \underline{a}_{13} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - \underline{a}_{34} \\ -\underline{a}_{44} \\ \underline{a}_{14} - \underline{a}_{24} \end{pmatrix} \underline{I}_1. \quad (9.40)$$

Die gesuchte Impedanz  $\underline{Z}'_{15}$  lässt sich gemäß

$$\begin{aligned}\underline{U}_{15} &= \underline{U}_{12} + \underline{U}_{45} \\ &= \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} + 1 & \underline{a}_{12} & \underline{a}_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_{45} \\ \underline{U}_{46} \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} + \underline{a}_{14} \underline{I}_1 \\ &= \underline{Z}'_{15} \underline{I}_1\end{aligned}\quad (9.41)$$

berechnen.

### 9.2.7 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 2 und 4

Die Impedanz  $\underline{Z}_{24}$  zwischen den Klemmen 2 und 4 soll berechnet werden. Die Ströme sind

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &:= \underline{I}_5 := 0, \\ \underline{I}_2 &:= \underline{I}_4.\end{aligned}$$

Aus Gl. (9.20) folgt

$$\begin{aligned}-\underline{a}_{33} \underline{I}_2 &= \underline{a}_{31} \underline{U}_{45} + \underline{a}_{32} \underline{U}_{46}, \\ (1 - \underline{a}_{43}) \underline{I}_2 &= \underline{a}_{41} \underline{U}_{45} + \underline{a}_{42} \underline{U}_{46}.\end{aligned}\quad (9.42)$$

Die Impedanz  $\underline{Z}_{24}$  lässt sich gemäß

$$\begin{aligned}\underline{U}_{24} &= \underline{U}_{13} - \underline{U}_{12} - \underline{U}_{46} \\ &= (\underline{a}_{21} - \underline{a}_{11}) \underline{U}_{45} + (\underline{a}_{22} - \underline{a}_{12} - 1) \underline{U}_{46} + (\underline{a}_{23} - \underline{a}_{13}) \underline{I}_2 \\ &= \left[ \frac{1}{\underline{a}_{31} \underline{a}_{42} - \underline{a}_{32} \underline{a}_{41}} \cdot \left\{ (\underline{a}_{21} - \underline{a}_{11}) [-\underline{a}_{42} \underline{a}_{33} - \underline{a}_{32} (1 - \underline{a}_{43})] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\underline{a}_{22} - \underline{a}_{12} - 1) [\underline{a}_{41} \underline{a}_{33} + \underline{a}_{31} (1 - \underline{a}_{43})] \right\} + \underline{a}_{23} - \underline{a}_{13} \right] \underline{I}_2 \\ &= \underline{Z}_{24} \underline{I}_2\end{aligned}\quad (9.43)$$

berechnen.

### Kurzschluss der Klemmen 1 und 5

Die Vorgehensweise nach Abschnitt 9.2.5 wird wiederholt. Zur Bestimmung einer weiteren Impedanz  $\underline{Z}'_{24}$  zwischen den Klemmen 2 und 4 werden nun zusätzlich die Klemmen 1 und 5 kurzgeschlossen. Die Ströme und Spannungen des Sechspols in Abbildung 9.4 gehorchen den Beziehungen

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &:= \underline{I}_5, \\ \underline{I}_2 &:= \underline{I}_4, \\ \underline{U}_{13} &:= \underline{U}_{46} - \underline{U}_{45}\end{aligned}$$

## 9 Auswertung

und aus Gl. (9.20) folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\underline{a}_{33}\underline{I}_2 &= \underline{a}_{31}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{32}\underline{U}_{46} + (\underline{a}_{34} - 1)\underline{I}_1, \\ (1 - \underline{a}_{43})\underline{I}_2 &= \underline{a}_{41}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{42}\underline{U}_{46} + \underline{a}_{44}\underline{I}_1, \\ -\underline{a}_{23}\underline{I}_2 &= (\underline{a}_{21} + 1)\underline{U}_{45} + (\underline{a}_{22} - 1)\underline{U}_{46} + \underline{a}_{24}\underline{I}_1 \end{aligned} \quad (9.44)$$

mit der Lösung

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{45} \\ \underline{U}_{46} \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{31} & \underline{a}_{32} & \underline{a}_{34} - 1 \\ \underline{a}_{41} & \underline{a}_{42} & \underline{a}_{44} \\ \underline{a}_{21} + 1 & \underline{a}_{22} - 1 & \underline{a}_{24} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\underline{a}_{33} \\ 1 - \underline{a}_{43} \\ -\underline{a}_{23} \end{pmatrix} \underline{I}_2. \quad (9.45)$$

Die Impedanz  $\underline{Z}'_{24}$  lässt sich schließlich aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \underline{U}_{24} &= -\underline{U}_{12} - \underline{U}_{45} \\ &= -\begin{pmatrix} \underline{a}_{11} + 1 & \underline{a}_{12} & \underline{a}_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_{45} \\ \underline{U}_{46} \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} - \underline{a}_{13}\underline{I}_2 \\ &= \underline{Z}'_{24}\underline{I}_2 \end{aligned} \quad (9.46)$$

bestimmen.

### 9.2.8 Impedanzmessung zwischen den Klemmen 2 und 5

Abschließend werden die Impedanzen zwischen den Klemmen 2 und 5 bestimmt. Zunächst sind die Ströme gegeben durch

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &:= \underline{I}_4 := 0 \quad \text{und} \\ \underline{I}_2 &:= \underline{I}_5. \end{aligned}$$

Aus Gl. (9.20) folgen dann die Beziehungen

$$\begin{aligned} -\underline{a}_{34}\underline{I}_2 &= \underline{a}_{31}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{32}\underline{U}_{46}, \\ (1 - \underline{a}_{44})\underline{I}_2 &= \underline{a}_{41}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{42}\underline{U}_{46}. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Spannung  $\underline{U}_{25}$  und Strom  $\underline{I}_2$  sind wie folgt miteinander verknüpft:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{25} &= \underline{U}_{13} - \underline{U}_{12} - (\underline{U}_{46} - \underline{U}_{45}) \\ &= (\underline{a}_{21} - \underline{a}_{11} + 1)\underline{U}_{45} + (\underline{a}_{22} - \underline{a}_{12} - 1)\underline{U}_{46} + (\underline{a}_{24} - \underline{a}_{14})\underline{I}_2 \\ &= \left[ \frac{1}{\underline{a}_{31}\underline{a}_{42} - \underline{a}_{32}\underline{a}_{41}} \cdot \left\{ (\underline{a}_{21} - \underline{a}_{11} + 1)[\underline{a}_{42}(-\underline{a}_{34}) - \underline{a}_{32}(1 - \underline{a}_{44})] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\underline{a}_{22} - \underline{a}_{12} - 1)[\underline{a}_{41}\underline{a}_{34} + \underline{a}_{31}(1 - \underline{a}_{44})] \right\} + \underline{a}_{24} - \underline{a}_{14} \right] \underline{I}_2 \end{aligned} \quad (9.48 \text{ a})$$

Hieraus folgt also die gesuchte Impedanz  $\underline{Z}_{25}$ :

$$\underline{Z}_{25} = \frac{\underline{U}_{25}}{\underline{I}_2}. \quad (9.48 \text{ b})$$

**Kurzschluss der Klemmen 1 und 4**

Nun werden zusätzlich die Klemmen 1 und 4 kurzgeschlossen, um eine weitere Impedanz  $\underline{Z}'_{25}$  zu bestimmen. Die Ströme und Spannungen des Sechspols in Abbildung 9.4 sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &:= \underline{I}_4, \\ \underline{I}_2 &:= \underline{I}_5, \\ \underline{U}_{13} &:= \underline{U}_{46}. \end{aligned}$$

Aus Gl. (9.20) folgt dann das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\underline{a}_{34}\underline{I}_2 &= \underline{a}_{31}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{32}\underline{U}_{46} + (\underline{a}_{33} - 1)\underline{I}_1, \\ (1 - \underline{a}_{44})\underline{I}_2 &= \underline{a}_{41}\underline{U}_{45} + \underline{a}_{42}\underline{U}_{46} + \underline{a}_{43}\underline{I}_1, \\ -\underline{a}_{24}\underline{I}_2 &= \underline{a}_{21}\underline{U}_{45} + (\underline{a}_{22} - 1)\underline{U}_{46} + \underline{a}_{23}\underline{I}_1, \end{aligned} \quad (9.49)$$

Es besitzt die Lösung

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{45} \\ \underline{U}_{46} \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{31} & \underline{a}_{32} & \underline{a}_{33} - 1 \\ \underline{a}_{41} & \underline{a}_{42} & \underline{a}_{43} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} - 1 & \underline{a}_{23} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\underline{a}_{34} \\ 1 - \underline{a}_{44} \\ -\underline{a}_{24} \end{pmatrix} \underline{I}_2. \quad (9.50)$$

Die Impedanz  $\underline{Z}'_{25}$  folgt dann aus der Beziehung

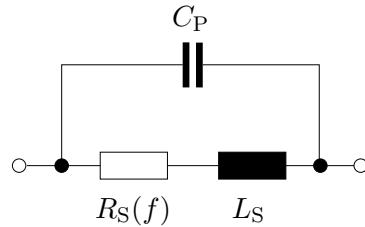
$$\begin{aligned} \underline{U}_{25} &= -\underline{U}_{12} + \underline{U}_{45} \\ &= -\begin{pmatrix} \underline{a}_{11} - 1 & \underline{a}_{12} & \underline{a}_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_{45} \\ \underline{U}_{46} \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} - \underline{a}_{14}\underline{I}_2, \end{aligned} \quad (9.51 \text{ a})$$

also aus

$$\underline{U}_{25} = \underline{Z}'_{25}\underline{I}_2. \quad (9.51 \text{ b})$$

### 9.3 Rechteckförmig gewickelte Luftspulen

Zum Vergleich von Messung und Simulation wird für Luftspulen das Ersatzschaltbild 9.6 verwendet. Bei der Untersuchung von Luftspulen fällt die gesamte Verlustleistung in der Wicklung an und wird im Ersatzschaltbild im frequenzabhängigen Serienwiderstand  $R_S(f)$  in Reihe zur Induktivität  $L_S$  dargestellt. Die Induktivität wird für steigende Arbeitsfrequenz  $f$  nur geringfügig abnehmen und wird daher in guter Näherung als konstant angenommen. Die parasitäre Kapazität  $C_P$  liegt parallel zur Wicklung (vergl. Abbildung 9.6).



**Abbildung 9.6:** Ersatzschaltbild der Luftspule

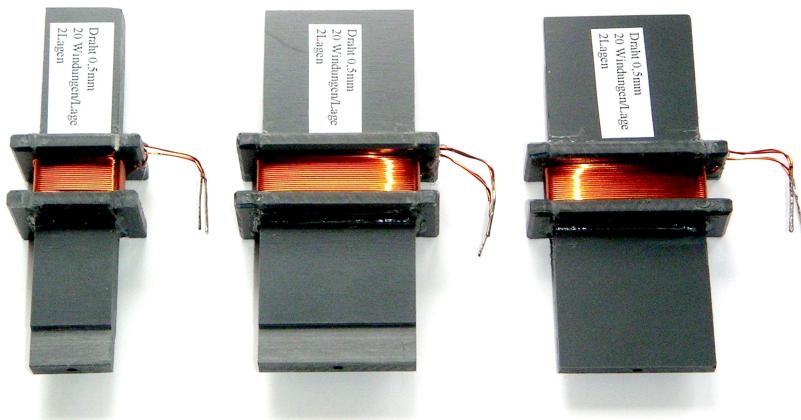
Zunächst soll die Qualität der Simulation von Induktivitäten und Verlusten von rechteckförmigen Luftspulen demonstriert werden. In die Simulation fließen die Verfahren zur Verlust- und Induktivitätsberechnung aus den Abschnitten 4, 5 und auch die Formanpassung aus Anhang E ein.

Zu diesem Zweck wurden spezielle Wickelkörper mit rechteckförmigen Querschnitten aus Polyvinylchlorid (PVC) hergestellt. Es wurden sowohl die Form des Wickelkörpers als auch die Drahtstärke variiert. Das Verhältnis von Verlustleistungsanteilen  $P_{\parallel\text{Prox}}/P_{\perp\text{Prox}}$  aufgrund zum Leiter paralleler und orthogonaler Magnetfeldanteile wurde gemäß Gl. (4.51) in Abschnitt 4.4 zusätzlich abgeschätzt.

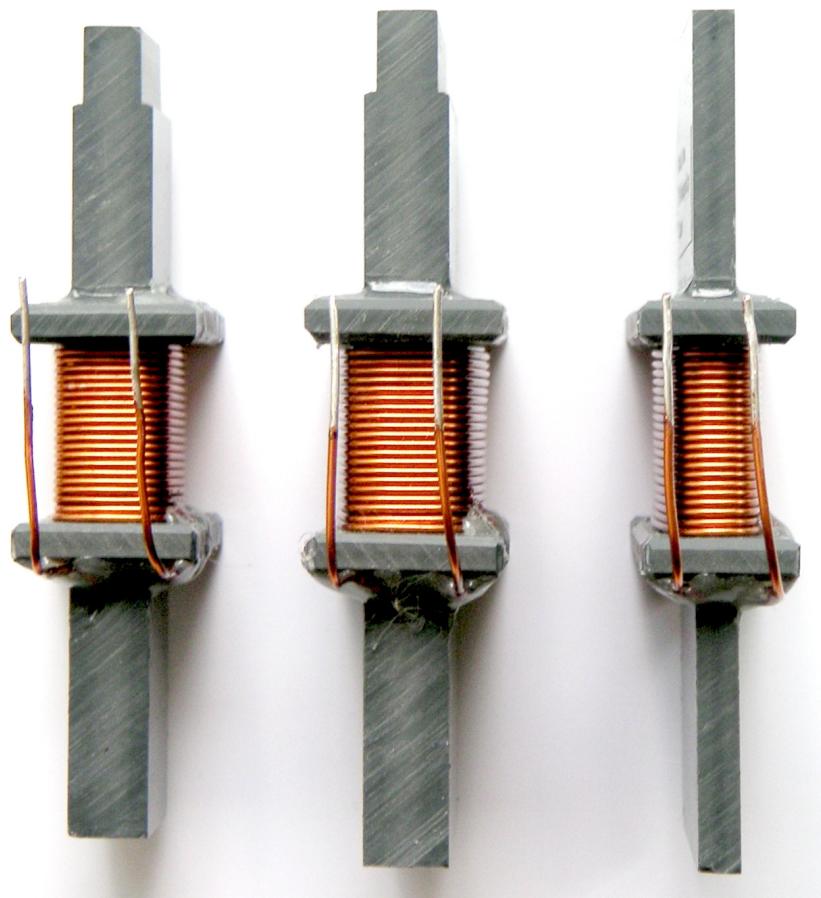
Das Bild 9.7 zeigt drei der Spulen aus einem Kupferlackdraht mit 0.5 mm nominellem Kupferdurchmesser auf Wickelkörpern der rechteckförmigen Querschnittsflächen  $20 \times 10 \text{ mm}^2$ ,  $40 \times 10 \text{ mm}^2$  und  $40 \times 5 \text{ mm}^2$ .

Das Bild 9.8 zeigt drei weitere Spulen aus einem Kupferlackdraht mit 1.0 mm nominellem Kupferdurchmesser auf vergleichbaren Wickelkörpern zu Bild 9.7.

### 9.3 Rechteckförmig gewickelte Luftspulen



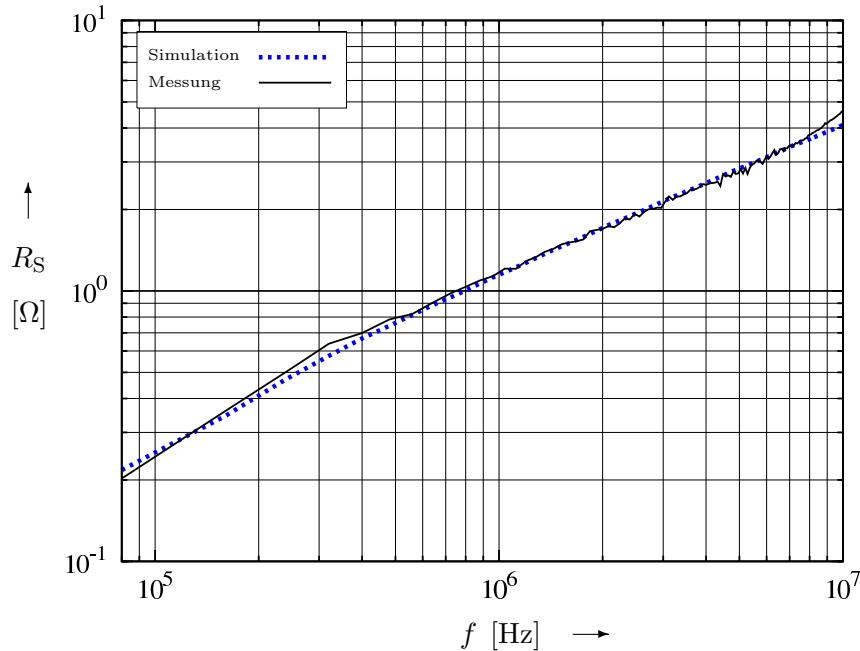
**Abbildung 9.7:**  $\phi$  0.5 mm Draht auf rechteckförmigen Wickelkörpern:  $20 \times 10 \text{ mm}^2$ ,  $40 \times 10 \text{ mm}^2$  bzw.  $40 \times 5 \text{ mm}^2$  (von links nach rechts)



**Abbildung 9.8:**  $\phi$  1.0 mm Draht auf rechteckförmigen Wickelkörpern:  $20 \times 10 \text{ mm}^2$ ,  $40 \times 10 \text{ mm}^2$  bzw.  $40 \times 5 \text{ mm}^2$  (von links nach rechts)

## 9 Auswertung

Zur Aufnahme der Graphen in den Abbildungen 9.9 und 9.10 wurde zunächst für den  $20 \times 10 \text{ mm}^2$  Wickelkörper der nominelle Drahtdurchmesser variiert ( $\phi 0.5 \text{ mm}$  und  $\phi 1.0 \text{ mm}$ ). Beide Spulen bestehen aus zehn Windungen in zwei Lagen.

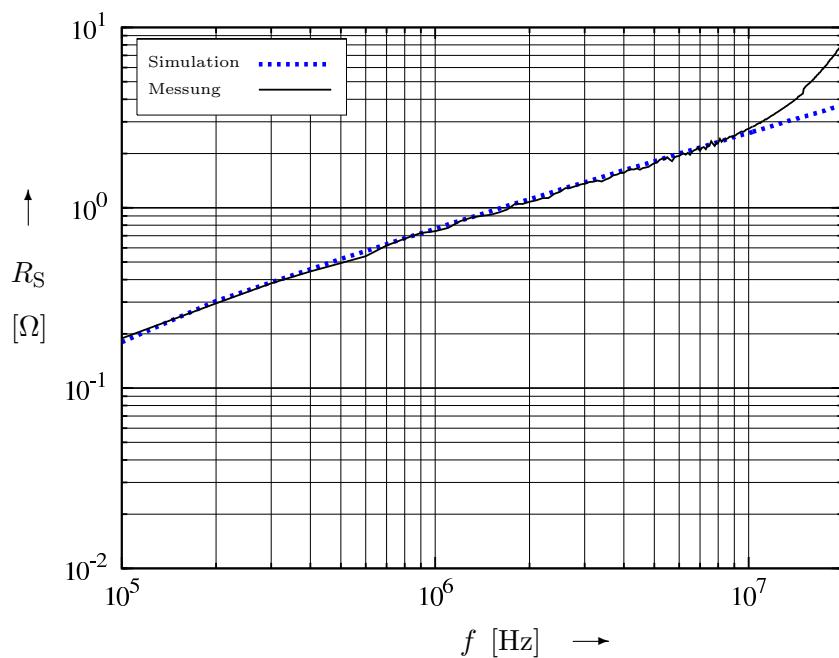


$$L_S^{(\text{Sim})} = 9.05 \mu\text{H}$$

$$L_S^{(\text{Mess})} = 10 \mu\text{H}$$

$$\frac{P_{\parallel \text{Prox}}}{P_{\perp \text{Prox}}} \leq 1.35 \%$$

**Abbildung 9.9:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 10 Wnd. je Lage, 2 Lagen, Draht:  $\phi 0.5 \text{ mm}$ , Wickelkörper:  $20 \times 10 \text{ mm}^2$



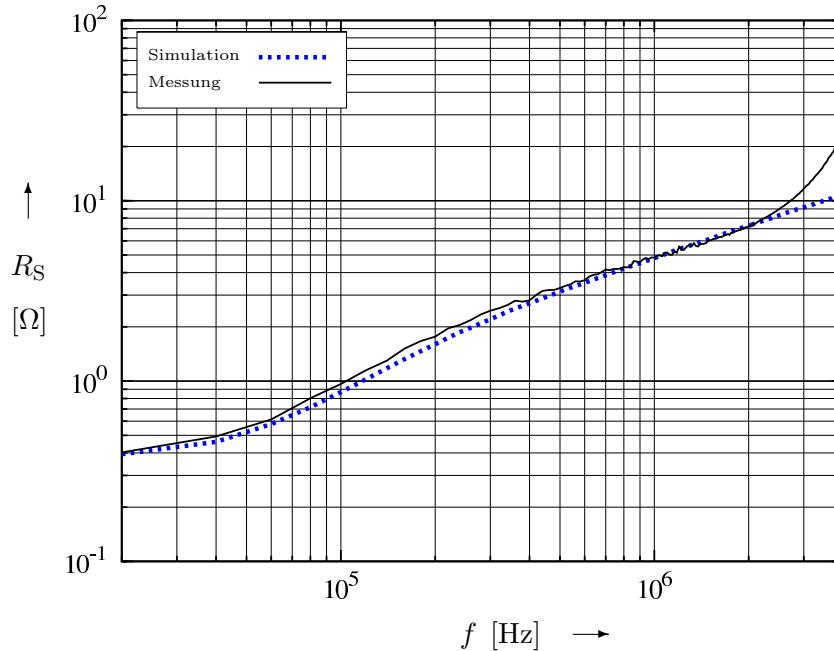
$$L_S^{(\text{Sim})} = 6.37 \mu\text{H}$$

$$L_S^{(\text{Mess})} = 6.3 \mu\text{H}$$

$$\frac{P_{\parallel \text{Prox}}}{P_{\perp \text{Prox}}} \leq 1.55 \%$$

**Abbildung 9.10:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 10 Wnd. je Lage, 2 Lagen, Draht:  $\phi 1.0 \text{ mm}$ , Wickelkörper:  $20 \times 10 \text{ mm}^2$

Zur Aufnahme der Graphen in den Abbildungen 9.11 und 9.12 wurde für den  $40 \times 10 \text{ mm}^2$  Wickelkörper der nominelle Drahtdurchmesser variiert ( $\phi 0.5 \text{ mm}$  und  $\phi 1.0 \text{ mm}$ ). Beide Spulen bestehen aus 20 Windungen in zwei Lagen.

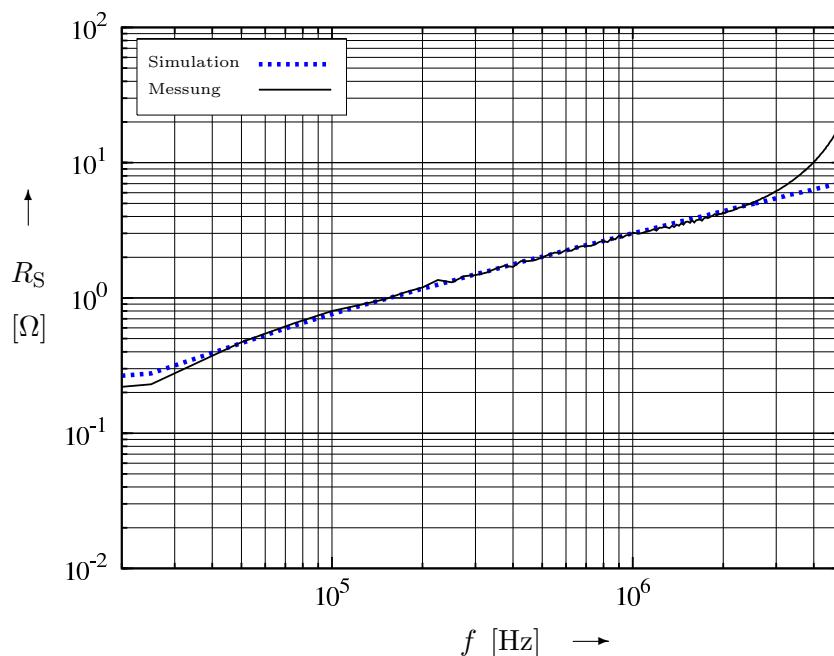


$$L_S^{(\text{Sim})} = 43.9 \mu\text{H}$$

$$L_S^{(\text{Mess})} = 46.7 \mu\text{H}$$

$$\frac{P_{\parallel \text{Prox}}}{P_{\perp \text{Prox}}} \leq 1.65 \%$$

**Abbildung 9.11:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 20 Wnd. je Lage, 2 Lagen, Draht:  $\phi 0.5 \text{ mm}$ , Wickelkörper:  $40 \times 10 \text{ mm}^2$



$$L_S^{(\text{Sim})} = 30.5 \mu\text{H}$$

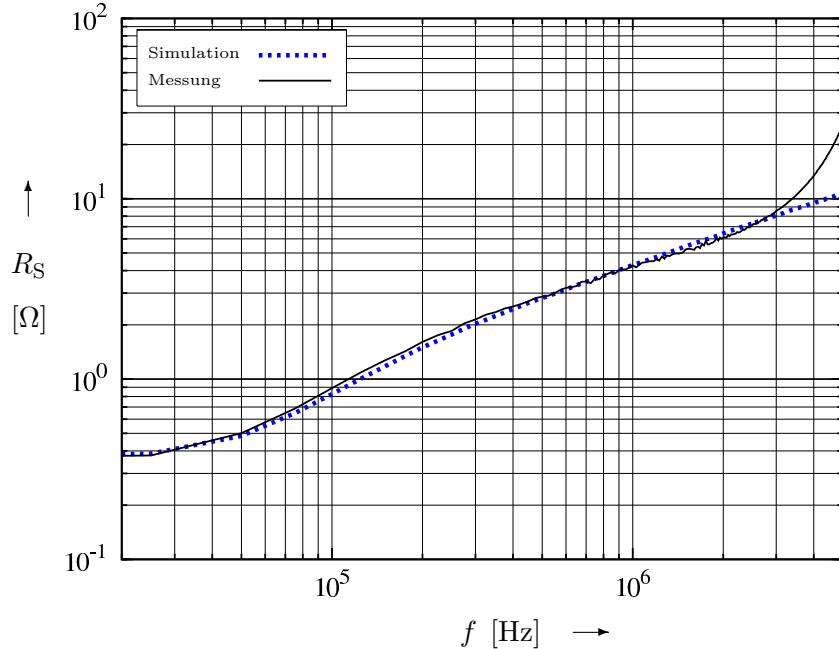
$$L_S^{(\text{Mess})} = 33.9 \mu\text{H}$$

$$\frac{P_{\parallel \text{Prox}}}{P_{\perp \text{Prox}}} \leq 2.48 \%$$

**Abbildung 9.12:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 20 Wnd. je Lage, 2 Lagen, Draht:  $\phi 1.0 \text{ mm}$ , Wickelkörper:  $40 \times 10 \text{ mm}^2$

## 9 Auswertung

Zur Aufnahme der Graphen in den Abbildungen 9.13 und 9.14 wurde für den sehr schmalen  $40 \times 5 \text{ mm}^2$  Wickelkörper der nominelle Drahtdurchmesser variiert ( $\phi 0.5 \text{ mm}$  und  $\phi 1.0 \text{ mm}$ ). Beide Spulen bestehen aus 20 Windungen in zwei Lagen.

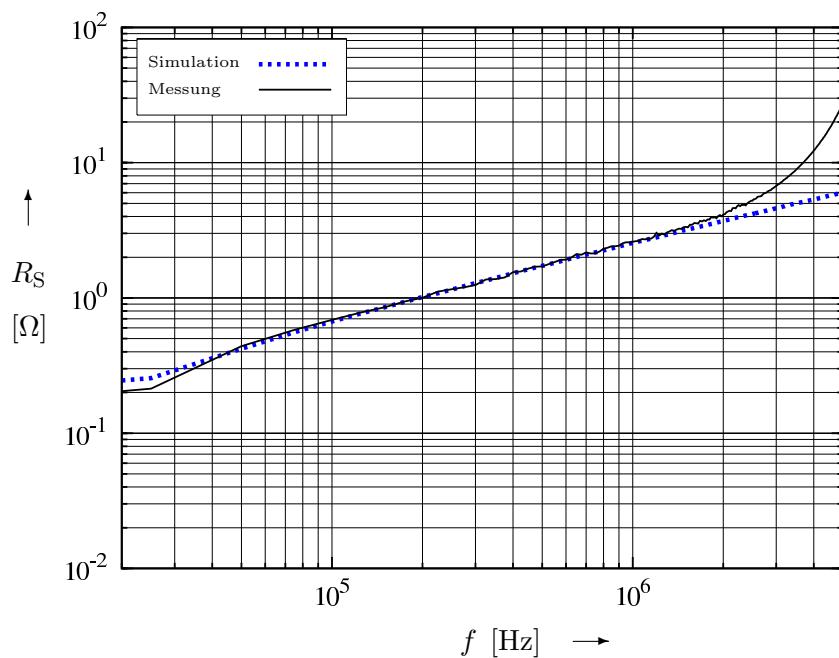


$$L_S^{(\text{Sim})} = 28.1 \mu\text{H}$$

$$L_S^{(\text{Mess})} = 30.9 \mu\text{H}$$

$$\frac{P_{\parallel \text{Prox}}}{P_{\perp \text{Prox}}} \leq 2.49 \%$$

**Abbildung 9.13:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 20 Wnd. je Lage, 2 Lagen, Draht:  $\phi 0.5 \text{ mm}$ , Wickelkörper:  $40 \times 5 \text{ mm}^2$



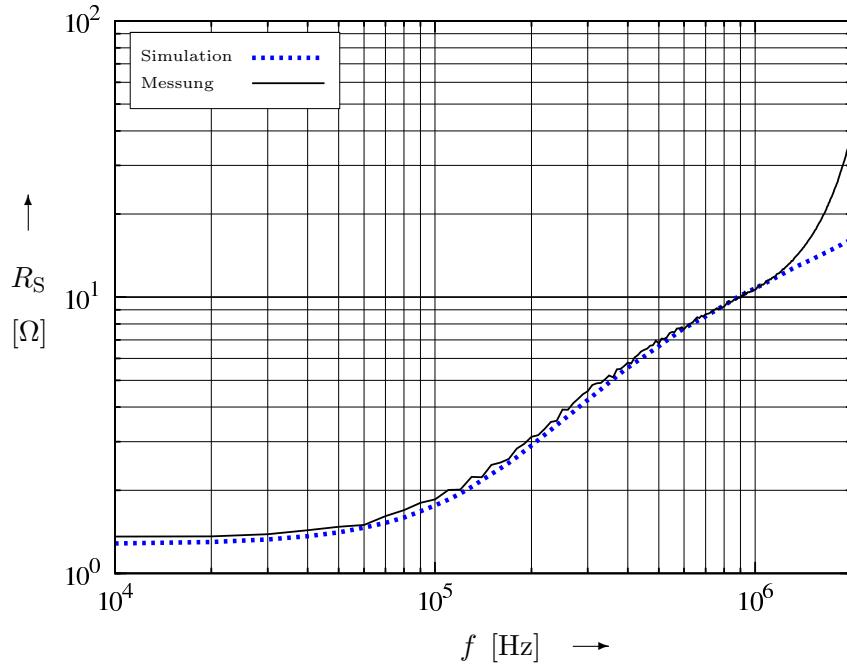
$$L_S^{(\text{Sim})} = 19.2 \mu\text{H}$$

$$L_S^{(\text{Mess})} = 22 \mu\text{H}$$

$$\frac{P_{\parallel \text{Prox}}}{P_{\perp \text{Prox}}} \leq 3.01 \%$$

**Abbildung 9.14:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 20 Wnd. je Lage, 2 Lagen, Draht:  $\phi 1.0 \text{ mm}$ , Wickelkörper:  $40 \times 5 \text{ mm}^2$

Die Abbildungen 9.15 und 9.16 zeigen den Vergleich von Messung und Simulation für Luftspulen auf E32/16/9 Wickelkörpern.

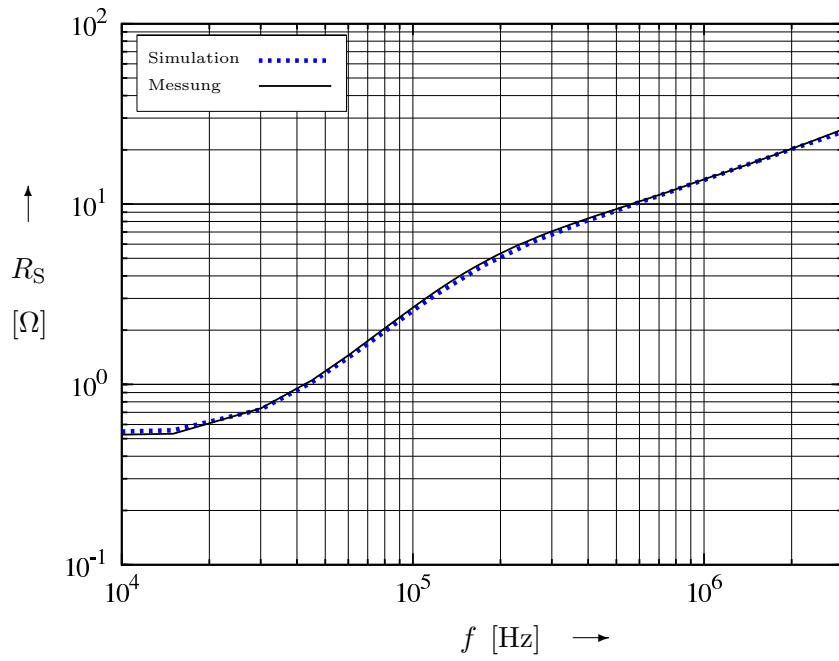


$$L_S^{(\text{Sim})} = 87.1 \mu\text{H}$$

$$L_S^{(\text{Mess})} = 99 \mu\text{H}$$

$$\frac{P_{\parallel \text{Prox}}}{P_{\perp \text{Prox}}} \leq 1.76 \%$$

**Abbildung 9.15:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 117 Wnd., Draht:  $\phi 0.3$  mm, Wickelkörper: E32/16/9



$$L_S^{(\text{Sim})} = 79.7 \mu\text{H}$$

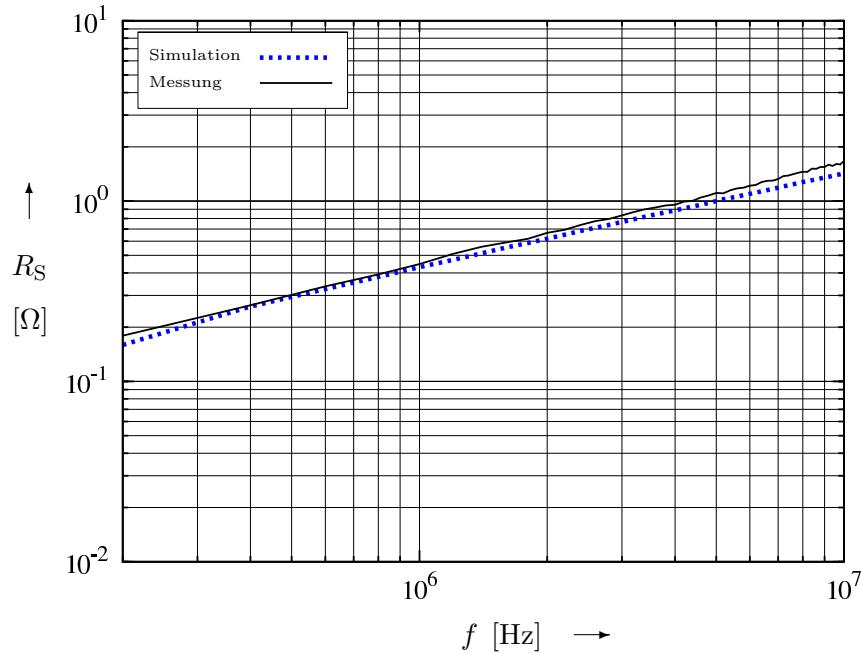
$$L_S^{(\text{Mess})} = 84 \mu\text{H}$$

$$\frac{P_{\parallel \text{Prox}}}{P_{\perp \text{Prox}}} \leq 1.96 \%$$

**Abbildung 9.16:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 107 Wnd., Draht:  $\phi 0.5$  mm, Wickelkörper: E32/16/9

## 9 Auswertung

Die Abbildungen 9.17, 9.18 und 9.19 zeigen Messungen und Simulationen für Luftspulen auf E42/21/15 Wickelkörpern.

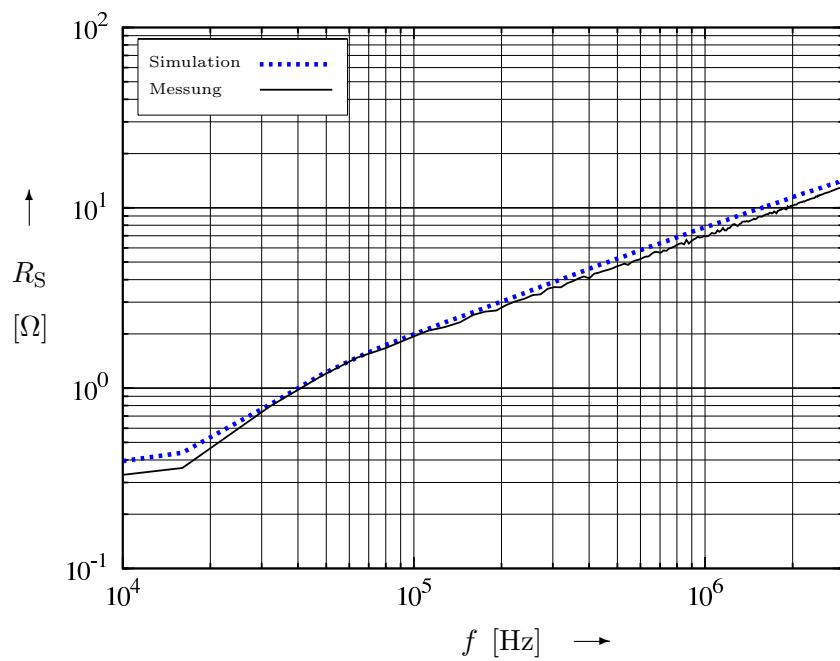


$$L_S^{(\text{Sim})} = 5.73 \mu\text{H}$$

$$L_S^{(\text{Mess})} = 6.0 \mu\text{H}$$

$$\frac{P_{\parallel \text{Prox}}}{P_{\perp \text{Prox}}} \leq 1.76 \%$$

**Abbildung 9.17:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 23 Wnd., Draht:  $\phi 1.0$  mm, Wickelkörper: E42/21/15

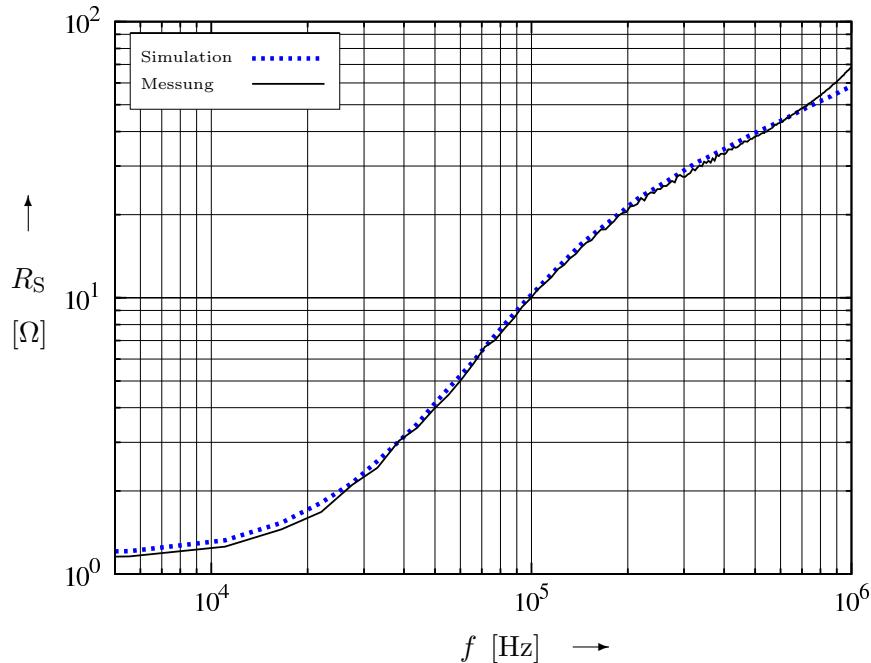


$$L_S^{(\text{Sim})} = 58.8 \mu\text{H}$$

$$L_S^{(\text{Mess})} = 54.5 \mu\text{H}$$

$$\frac{P_{\parallel \text{Prox}}}{P_{\perp \text{Prox}}} \leq 2.12 \%$$

**Abbildung 9.18:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 70 Wnd., Draht:  $\phi 1.0$  mm, Wickelkörper: E42/21/15



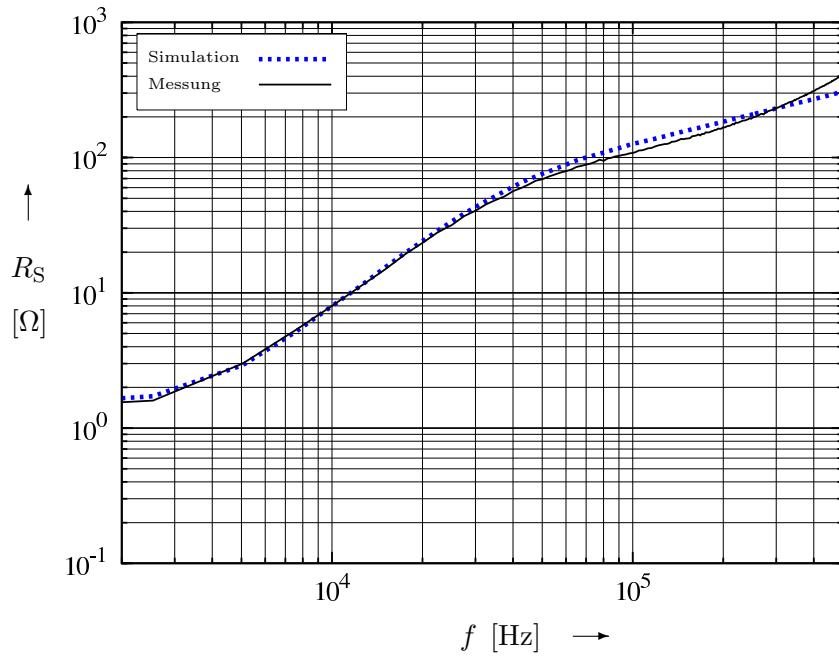
$$L_S^{(\text{Sim})} = 394 \mu\text{H}$$

$$L_S^{(\text{Mess})} = 377 \mu\text{H}$$

$$\frac{P_{\parallel\text{Prox}}}{P_{\perp\text{Prox}}} \leq 2.41 \%$$

**Abbildung 9.19:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 178 Wnd., Draht:  $\phi 0.5$  mm, Wickelkörper: E42/21/15

Die Abbildung 9.20 zeigt Messungen und Simulationen für eine Luftspule auf einem E65/32/27 Wickelkörper.



$$L_S^{(\text{Sim})} = 2.67 \text{ mH}$$

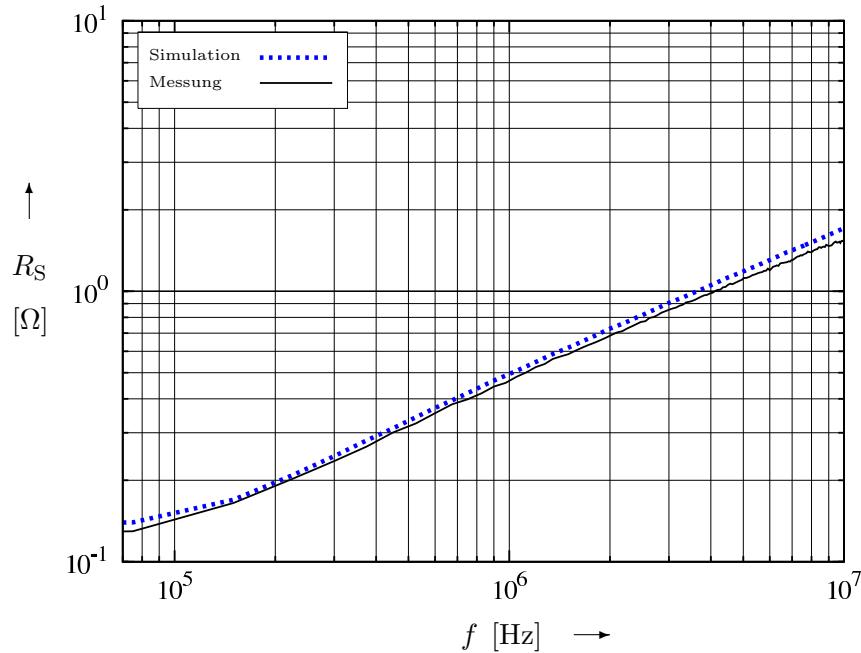
$$L_S^{(\text{Mess})} = 2.16 \text{ mH}$$

$$\frac{P_{\parallel\text{Prox}}}{P_{\perp\text{Prox}}} \leq 2.83 \%$$

**Abbildung 9.20:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 323 Wnd., Draht:  $\phi 1.0$  mm, Wickelkörper: E65/32/27

## 9 Auswertung

Abschließend werden in Abbildung 9.21 und 9.22 Messungen und Simulationen für Luftsulen auf EFD20/7-1s10p Wickelkörpern dargestellt.

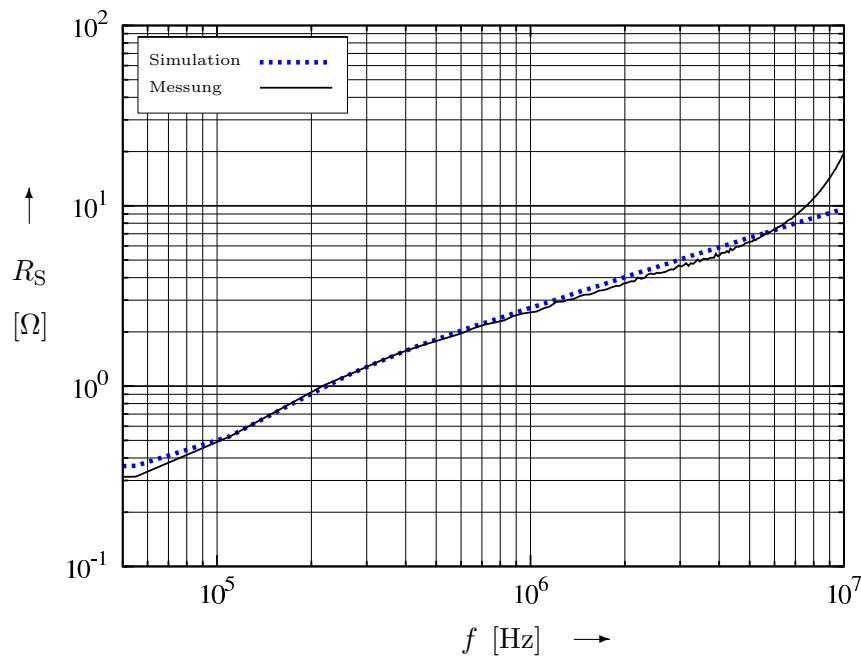


$$L_S^{(\text{Sim})} = 3.5 \mu\text{H}$$

$$L_S^{(\text{Mess})} = 3.24 \mu\text{H}$$

$$\frac{P_{||\text{Prox}}}{P_{\perp\text{Prox}}} \leq 2.05 \%$$

**Abbildung 9.21:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 29 Wnd., Draht:  $\phi 0.4$  mm, Wickelkörper: EFD20/7/1s10p



$$L_S^{(\text{Sim})} = 15.0 \mu\text{H}$$

$$L_S^{(\text{Mess})} = 13.5 \mu\text{H}$$

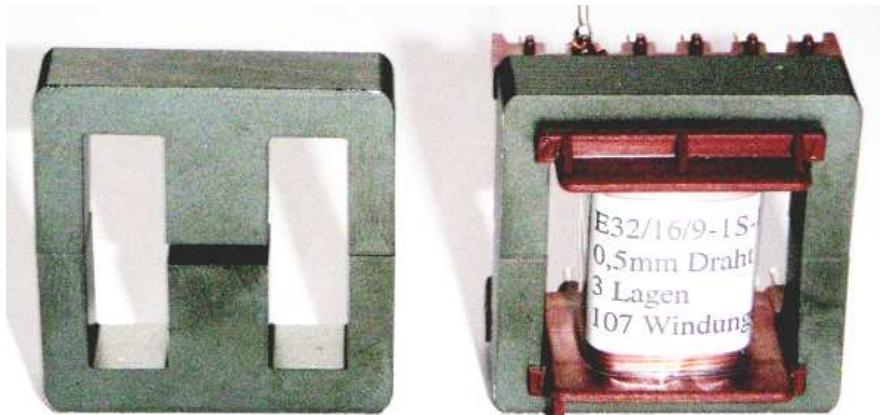
$$\frac{P_{||\text{Prox}}}{P_{\perp\text{Prox}}} \leq 1.96 \%$$

**Abbildung 9.22:** Messungen und Simulationen zur Spule aus 58 Wnd., Draht:  $\phi 0.4$  mm, Wickelkörper: EFD20/7/1s10p

## 9.4 Spulen auf hochpermeablen E-Kernen

Für Spulen und Transformatoren mit hochpermeablen Ferritkernen wird die Messung mit ausreichendem Luftspalt und bei Kleinsignalerregung durchgeführt, so dass die Kernverluste im Vergleich zu den Wicklungsverlusten vernachlässigt werden können. Für diesen Betriebsfall kann das gleiche Ersatzschaltbild 9.6 verwendet werden. Erneut ist die Verlustleistung — und damit der Widerstand  $R_S$  — aufgrund von Skin- und Proximityeffekt stark frequenzabhängig. Die Induktivität  $L_S$  hingegen wird bzgl. der Frequenz wieder als konstant angenommen. Diese Annahme ist für das zu den Messungen verwendete Ferritkernmaterial N27 (der Firma EPCOS) zumindest bis zur Grenzfrequenz  $f_0 \approx 1.5$  MHz zulässig. Erneut wurde das Verhältnis von Verlustleistungsanteilen  $P_{\parallel\text{Prox}}/P_{\perp\text{Prox}}$  aufgrund zum Leiter paralleler und orthogonaler Magnetfeldanteile gemäß Gl. (4.51) in Abschnitt 4.4 abgeschätzt.

Bild 9.23 zeigt links einen hochpermeablen E32 Ferritkern aus N27 Material mit einem Luftspalt im Mittelschenkel. Rechts ist eine Spule mit einer Wicklung um den Mittelschenkel eines solchen Ferritkerns dargestellt. Diese und vergleichbar aufgebaute Komponenten wurden zur Messung von Induktivitäten und Verlusten verwendet.



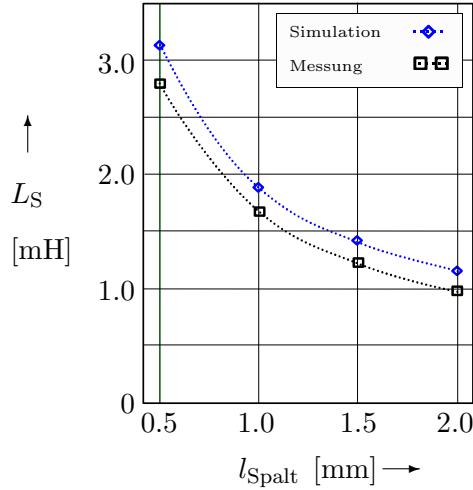
**Abbildung 9.23:** Spule auf E32/16/9-Kern

In die Simulation geht nun neben der Formanpassung aus Abschnitt E auch die magnetische Ferritkernanordnung gemäß Abschnitt 3 sowohl für die Verlustberechnung gemäß Abschnitt 4 als auch für die Induktivitätsberechnung nach Abschnitt 5 ein.

### 9.4.1 107 Windungen auf einem E32/16/9-Ferritkern

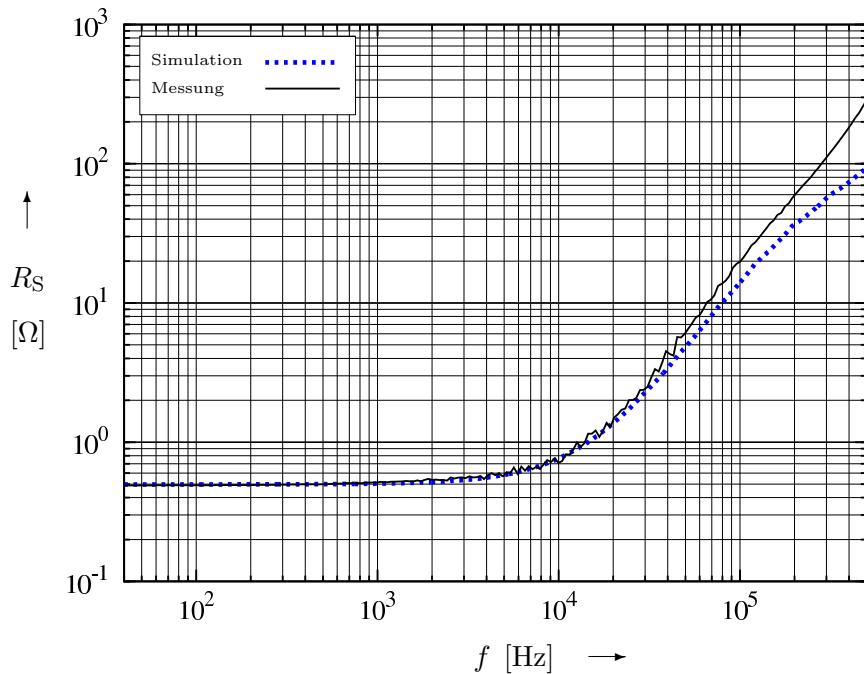
Es wird zunächst eine Spule aus 107 Windungen Kupferlackdraht mit einem nominellen Kupferdurchmesser von  $d_{\text{nom}} = 0.5$  mm betrachtet. Die Windungen sind in drei Lagen auf einem Standard E32-Wickelkörper aus Kunststoff gewickelt. Für die Messungen wurden jeweils zwei Kernhälften aus einer Reihe unterschiedlicher Kernsätze miteinander kombiniert und so die Luftspaltlänge des Bauelementes variiert. Der Graph in Abbildung 9.24 zeigt die Induktivität des Bauelementes in Abhängigkeit von der Luftspaltlänge  $l_{\text{Spalt}}$ . Der Graph in Abbildung 9.25 hingegen zeigt den Serienwiderstand  $R_S$  als Funktion der Arbeitsfrequenz  $f$  für eine Spule

## 9 Auswertung



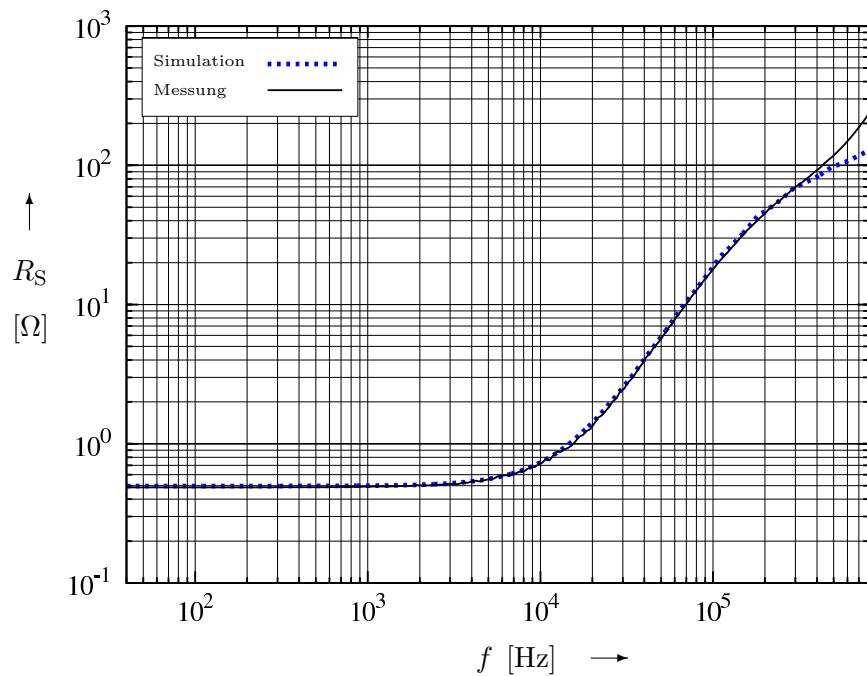
**Abbildung 9.24:** Induktivität  $L_S$  als Funktion der Luftspaltlänge  $l_{\text{Spalt}}$

mit  $l_{\text{Spalt}} = 0.5 \text{ mm}$  Luftspalt. Auch wenn die Verteilung der magnetischen Feldstärke im Bereich der Wicklung stark mit der Luftspaltlänge variiert, so zeigt die Summe der Gesamtverluste und damit der Serienwiderstand  $R_S$  kaum eine Abhängigkeit, was der Graph in Abbildung 9.26 für eine Luftspaltlänge von  $l_{\text{Spalt}} = 2.0 \text{ mm}$  zeigt.



**Abbildung 9.25:** Serienwiderstand  $R_S$  für 0.5 mm Luftspaltlänge

Tabelle 9.1 zeigt gemäß Gl. (4.51) die Abschätzung der Proximity-Verlustleistungsanteile  $P_{\parallel \text{Prox}}$ , welche auf zum Spulenstrom paralleler Magnetfeldanteile zurückzuführen sind im Vergleich zu  $P_{\perp \text{Prox}}$ , welche aufgrund zum Strom orthogonaler Magnetfeldanteile entstehen.



**Abbildung 9.26:** Serienwiderstand  $R_S$  für 2.0 mm Luftspaltlänge

Luftspalt	$\frac{P_{\parallel \text{Prox}}}{P_{\perp \text{Prox}}}$
0.5 mm	$\leq 5.80 \%$
1.0 mm	$\leq 5.41 \%$
1.5 mm	$\leq 6.18 \%$
2.0 mm	$\leq 7.17 \%$

**Tabelle 9.1:** Abschätzung der Proximity-Verlustleistungsanteile aufgrund zum Strom paralleler und orthogonaler Magnetfeldkomponenten

## *9 Auswertung*

### 9.4.2 70 Windungen auf einem E42/21/15-Ferritkern

Es wird eine weitere Spule mit 70 Windungen Kupferlackdraht mit einem nominellen Kupferdurchmesser von  $d_{\text{nom}} = 1.0 \text{ mm}$  betrachtet. Die Windungen sind in zwei Lagen auf einem Standard E42-Wickelkörper aus Kunststoff gewickelt. Verschiedene Luftspaltlängen wurden für die Messungen erneut durch Kombination unterschiedlicher Kernhälften erzielt. Der Graph in Abbildung 9.27 zeigt die Induktivität dieses Bauelementes in Abhängigkeit von der Luftspaltlänge  $l_{\text{Spalt}}$ . Der Graph in Abbildung 9.28 zeigt den Serienwiderstand  $R_S$  als Funktion der

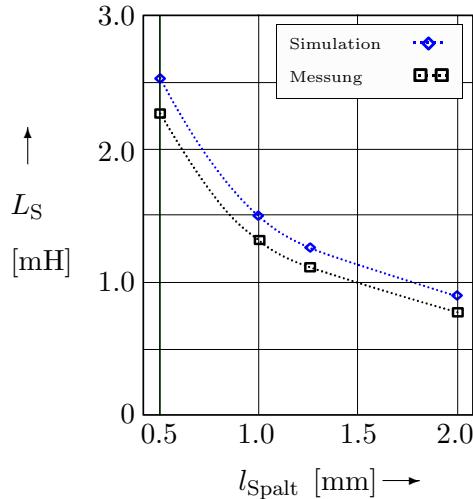


Abbildung 9.27: Induktivität  $L$  als Funktion der Luftspaltlänge  $l_{\text{Spalt}}$

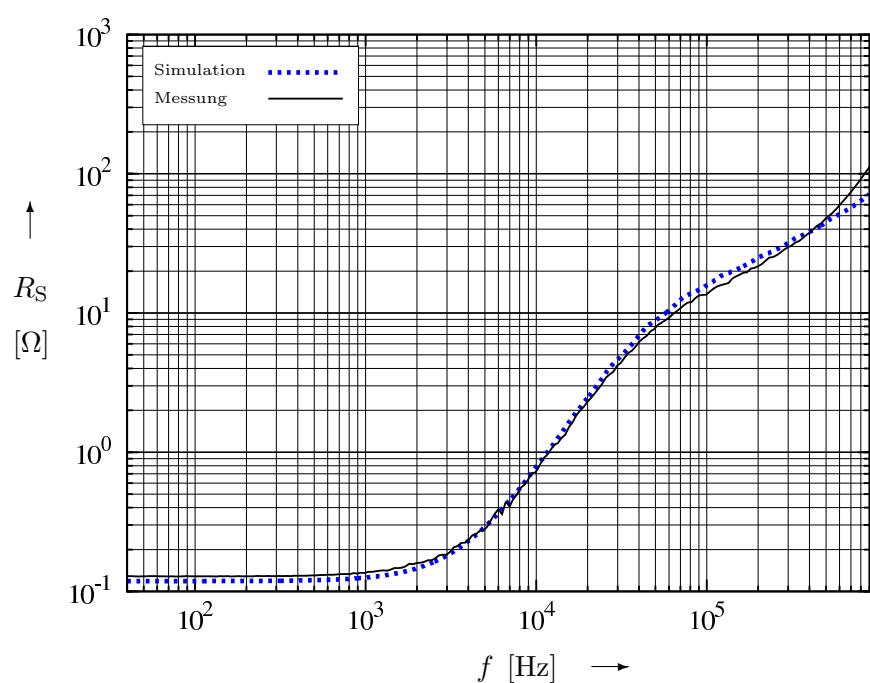
Arbeitsfrequenz  $f$  für eine Spule mit  $l_{\text{Spalt}} = 2.0 \text{ mm}$  Luftspalt auf einem E42-Kern.

Tabelle 9.2 zeigt für die hier untersuchten Spulen erneut gemäß Gl. (4.51) die Abschätzung der Proximity-Verlustleistungsanteile  $P_{\parallel \text{Prox}}$ , welche auf zum Spulenstrom paralleler Magnetfeldanteile zurückzuführen sind im Vergleich zu  $P_{\perp \text{Prox}}$ , welche aufgrund zum Strom orthogonaler Magnetfeldanteile entstehen.

Luftspalt	$\frac{P_{\parallel \text{Prox}}}{P_{\perp \text{Prox}}}$
0.5 mm	$\leq 6.22 \%$
1.0 mm	$\leq 3.91 \%$
1.25 mm	$\leq 3.77 \%$
2.0 mm	$\leq 4.77 \%$

Tabelle 9.2: Abschätzung der Proximity-Verlustleistungsanteile aufgrund zum Strom paralleler und orthogonaler Magnetfeldkomponenten

## 9 Auswertung



**Abbildung 9.28:** Serienwiderstand  $R_S$  für 2.0 mm Luftspaltlänge

## 9.5 Transformatoren auf hochpermeablen E-Kernen

Zur weiteren Überprüfung der Induktivitätsberechnung gemäß Abschnitt 5 werden noch zwei Beispiel-Transformatoren zur Bestimmung von Übertrager-Induktivitäten vorgestellt. Da die Gegeninduktivitäten für Transformatoren mit zwei und mehr Wicklungen stets gleich berechnet werden, reicht die Untersuchung von Transformatoren mit zwei Wicklungen aus.

Die Simulation basiert auf den Verfahren des Abschnittes 5 unter Berücksichtigung der Formanpassung gemäß Anhang E und Einbeziehung der magnetischen Ersatzanordnung für den Ferritkern gemäß Abschnitt 3. Die Modellierung liefert die Elemente  $L_{vw}$  der Induktivitätsmatrix  $\mathbf{L}$  (hier mit  $v, w \in \{1, 2\}$ ).

Es wird das Ersatzschaltbild gemäß Abbildung 9.1 verwendet. Die Elemente  $L_{vw}$  der Induktivitätsmatrix werden gemäß Abschnitt 9.1.1 aus einem Satz von Impedanzmessungen am Übertrager direkt ermittelt, ohne Umweg über Haupt- und Streuinduktivitäten, die ja hingegen abgeleitete Werte sind.

### 9.5.1 Transformator in zwei Wicklungs-Kammern

Es wird zunächst ein Übertrager mit zwei Wicklungen in zwei benachbarten Kammern betrachtet, wie er in Abbildung 9.29 skizziert ist. Unterhalb der Grenzfrequenz von  $f_0 \approx 1.5$  MHz wird die Permeabilität des N27 Ferritmateriale des hochpermeablen E42-Kernes als näherungsweise konstant angenommen ( $\mu_r \approx 2015$ ). Der Mittelschenkel beider Kernhälften ist um jeweils die halbe Luftspaltlänge  $l_{\text{Spalt}}/2 = 1$  mm verkürzt. Die Primärseite besteht aus 88 Windungen eines Kupferlackdrahtes des nominellen Kupferdurchmessers 0.45 mm. Die Sekundärseite wird mit dem gleichen Draht in einer Lage aus 23 Windungen in die benachbarte Kammer gewickelt.

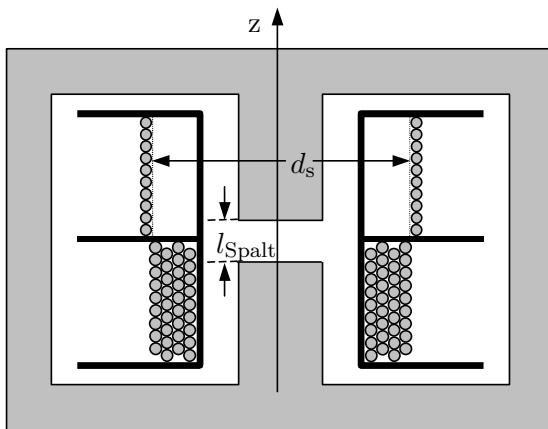


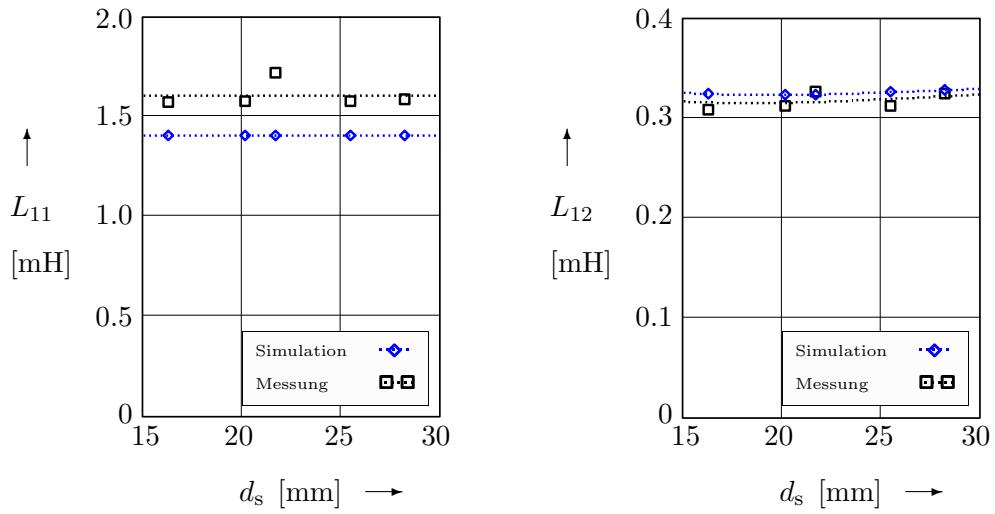
Abbildung 9.29: Übertrager-Aufbau

Übertrager-Aufbau:

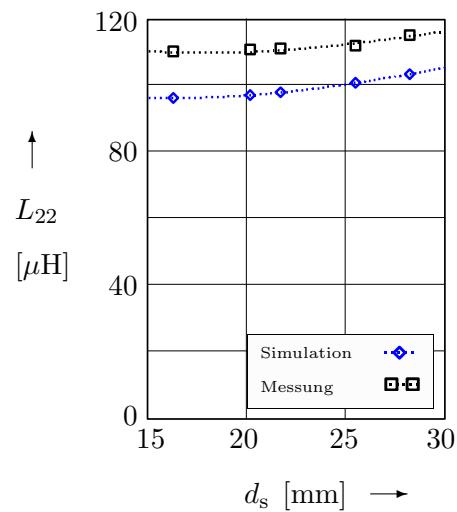
Kerntyp:	E42/21/15
Kernmaterial:	N27
	$\mu_r \approx 2015$
Luftspaltlänge:	$l_{\text{Spalt}} = 2$ mm
Primärwicklung:	$\phi 0.45$ mm, 88 Wnd. in 4 Lagen
Sekundärwicklung:	$\phi 0.45$ mm, 23 Wnd. in 1 Lage

Es wurden mehrere Transformatoren angefertigt, wobei der Innendurchmesser  $d_s$  der Sekundärseite variiert worden ist. Die Graphen der Abbildung 9.30 zeigen die primärseitige Induktivität  $L_{11}$  und die Gegeninduktivität  $L_{12}$  über dem Durchmesser  $d_s$  der Sekundärseite. Der Graph der Abbildung 9.31 zeigt die sekundärseitige Induktivität  $L_{22}$  über dem Durchmesser  $d_s$ .

## 9 Auswertung



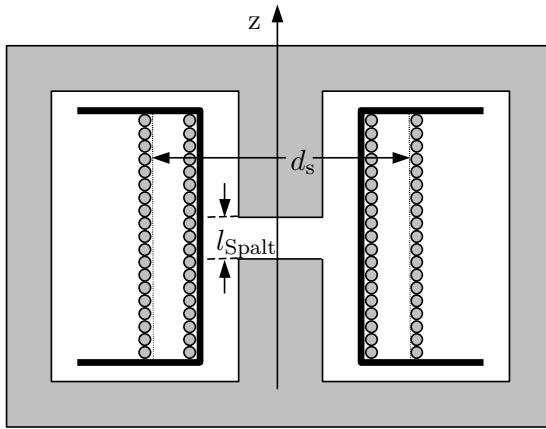
**Abbildung 9.30:** Primärseitige Induktivität  $L_{11}$  und Gegeninduktivität  $L_{12}$



**Abbildung 9.31:** Sekundärseitige Induktivität  $L_{22}$

### 9.5.2 Transformator in einer Wicklungs-Kammer

Es wird noch ein Übertrager mit zwei benachbarten Wicklungen in einer Kammer betrachtet, wie er in Abbildung 9.32 skizziert ist. Der E32-Kern dieses Übertragers besteht wiederum aus N27 Ferritmaterial ( $\mu_r \approx 2015$ ). Der Mittelschenkel einer Kernhälfte ist um die Luftspaltlänge  $l_{\text{Spalt}} = 1 \text{ mm}$  verkürzt. Primärseite und Sekundärseite bestehen jeweils aus 40 Windungen eines Kupferlackdrahtes des nominellen Kupferdurchmessers 0.45 mm.

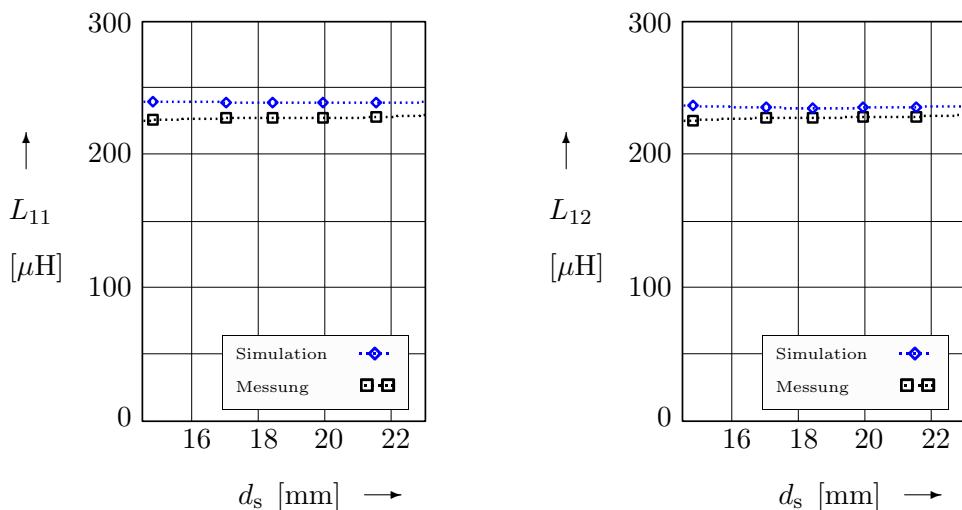


**Abbildung 9.32:** Übertrager-Aufbau

Übertrager-Aufbau:

Kerntyp: E32/16/9  
 Kernmaterial: N27  
 $\mu_r \approx 2015$   
 Luftspaltlänge:  $l_{\text{Spalt}} = 1 \text{ mm}$   
 Primärwicklung:  
 $\phi 0.45 \text{ mm}, 40 \text{ Wnd.}$   
 in 1 Lage  
 Sekundärwicklung:  
 $\phi 0.45 \text{ mm}, 40 \text{ Wnd.}$   
 in 1 Lage

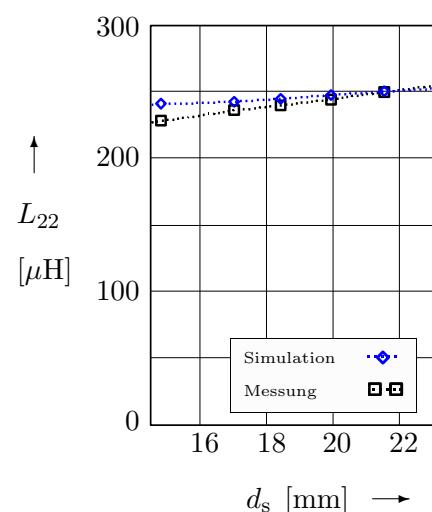
Es wurden mehrere Transformatoren angefertigt, wobei erneut der Innendurchmesser  $d_s$  der Sekundärseite variiert worden ist. Die Graphen der Abbildung 9.33 zeigen die primärseitige Induktivität  $L_{11}$  und die Gegeninduktivität  $L_{12}$  über dem Durchmesser  $d_s$ .



**Abbildung 9.33:** Primärseitige Induktivität  $L_{11}$  und Gegeninduktivität  $L_{12}$

Der Graph der Abbildung 9.34 zeigt die sekundärseitige Induktivität  $L_{22}$  über dem Durchmesser  $d_s$ .

## 9 Auswertung



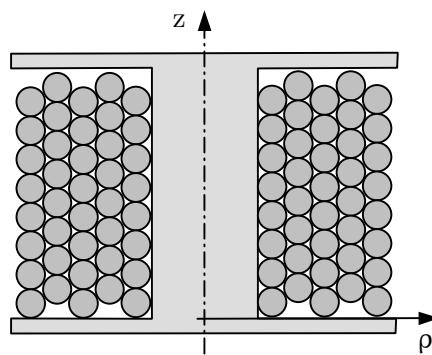
**Abbildung 9.34:** Sekundärseitige Induktivität  $L_{22}$

## 9.6 Kapazitäten von Luftspulen

Nachdem in Abschnitt 8.6 bereits ein paar elementare Beispiele für elektrische Feldverteilungen im Bereich der Wicklungen von Spulen und Transformatoren vorgestellt worden sind, sollen hier die Kapazitäten von Luftspulen simuliert und die Simulationen messtechnisch oder mit anderen Simulationen verifiziert werden.

### 9.6.1 Lagenwicklung

Im Graphen der Abbildung 9.36 ist die Kapazität einer zylindrischen, lagengewickelten Luftspule gemäß der Skizze in Abbildung 9.35 als Funktion der Windungszahl  $N$  dargestellt.

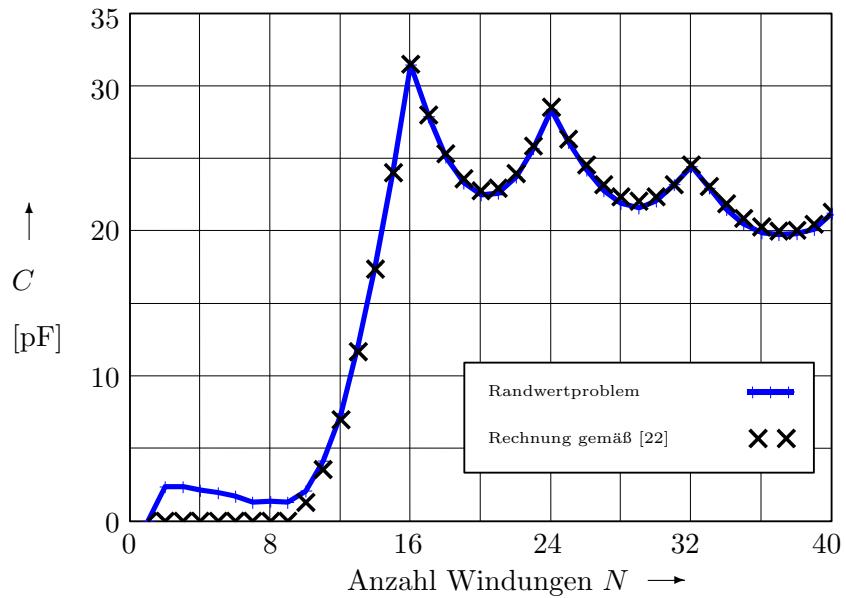


**Abbildung 9.35:** Lagenwicklung einer Luftspule

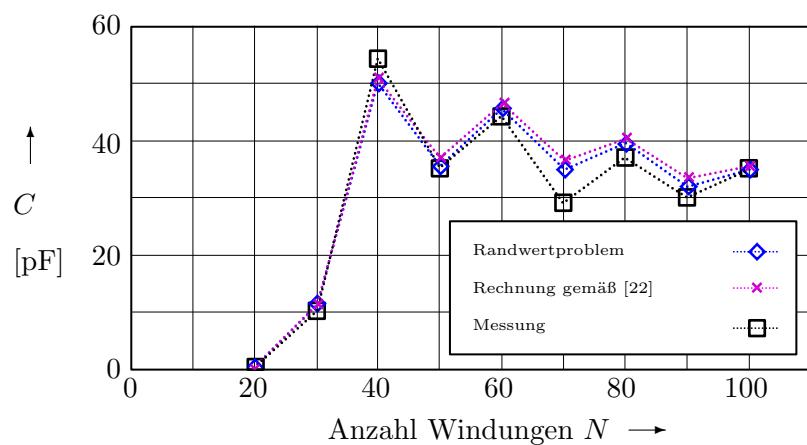
Zunächst werden hier zwei Simulationen verglichen—das Randwertproblem des Kapitels 8 mit der Methode nach Koch [22]. Zum messtechnischen Vergleich beider Simulationsverfahren wurde eine Spule auf einem P30/19-Wickelkörper angefertigt.

Der Graph der Abbildung 9.37 zeigt den Vergleich der Messung mit den gemäß dem Randwertproblem des Kapitels 8 und auch den gemäß der Methode nach Koch [22] ermittelten Kapazitätswerten, wobei zur Messung von der vollständigen Spule mit 100 Windungen in fünf Lagen jeweils halbe Lagen abgewickelt wurden. Die Ergebnisse der beiden unterschiedlichen Simulationen stimmen sehr gut mit der Messung überein.

## 9 Auswertung



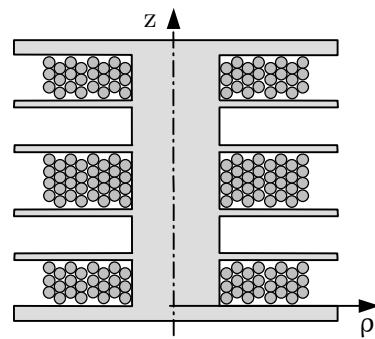
**Abbildung 9.36:** Kapazität als Funktion der Anzahl  $N$  der Windungen bei 8 Windungen je Lage,  $\phi 0.5$  mm Draht auf P30 Wickelkörper



**Abbildung 9.37:** Kapazität als Funktion der Anzahl  $N$  der Windungen bei 20 Windungen je Lage,  $\phi 0.5$  mm Draht auf P30 Wickelkörper

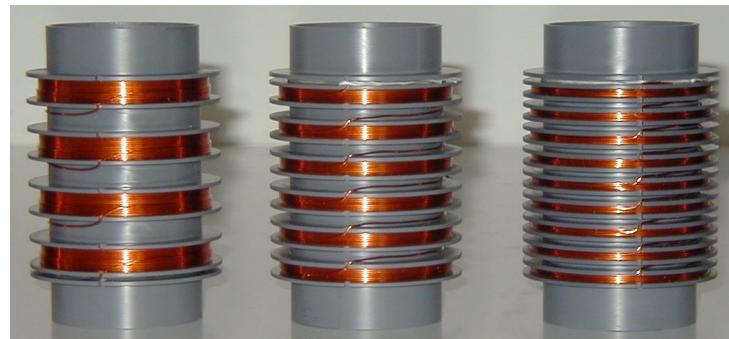
### 9.6.2 Wicklung in mehreren Kammern

Im Unterschied zur Methode nach Koch [22] ist die Position der Windungen für die Anwendung der Randwertmethode gemäß Kapitel 8 nicht eingeschränkt. An dieser Stelle wird die Kapazität eines Satzes von Spulen mit konstant bleibender Anzahl Windungen  $N = 242$  untersucht, wenn die Windungen gleichmäßig auf eine unterschiedliche Anzahl von Wicklungskammern verteilt werden, wie dies in Abbildung 9.38 für drei Kammern skizziert ist.



**Abbildung 9.38:** Kammernwicklung einer Luftspule

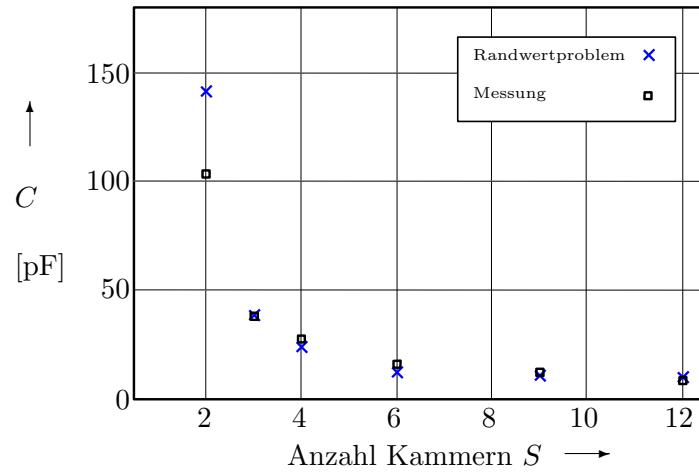
Die Abbildung 9.39 zeigt drei der zur Messung verwendeten Spulen mit vier, sechs und neun Wicklungskammern.



**Abbildung 9.39:** Spulen mit vier, sechs und neun Wicklungskammern

## 9 Auswertung

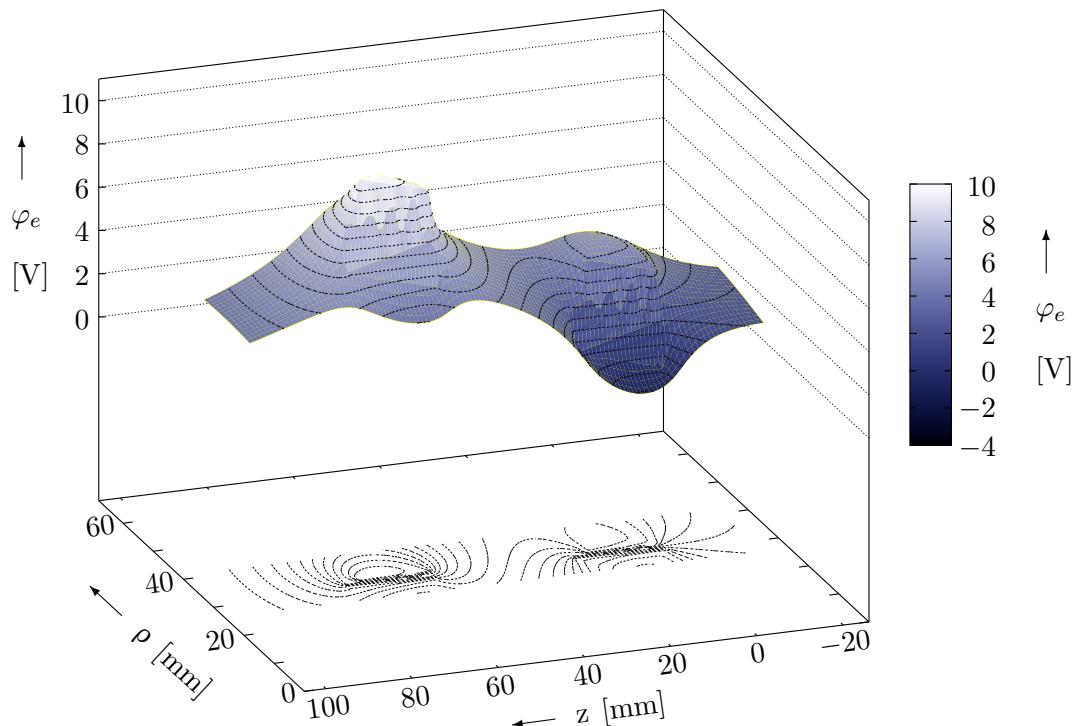
Der Graph in Abbildung 9.40 zeigt den Vergleich zwischen der Simulation gemäß dem vorgestellten Randwertproblem und der Messung an den aufgebauten Spulen. In Abschnitt 8.6 wurde die Konvergenz des Verfahrens bereits erwähnt. Für diese Simulationen wurden 200 Iterationen durchgeführt. Das Ergebnis stimmt für die Spule in zwei Wicklungskammern nicht so gut überein wie bei den weiteren Beispielen, da die Potentialdifferenzen eng benachbarter Leiter hier größer sind und das gleiche Verfahren trotz der Verbesserung aus Abschnitt 8.4 für dieses Beispiel deutlich langsamer konvergiert als für die anderen Spulen.



**Abbildung 9.40:** Kapazität als Funktion der Anzahl  $S$  der Wickelkammern bei 242 Windungen  $\phi 0.5$  mm Draht

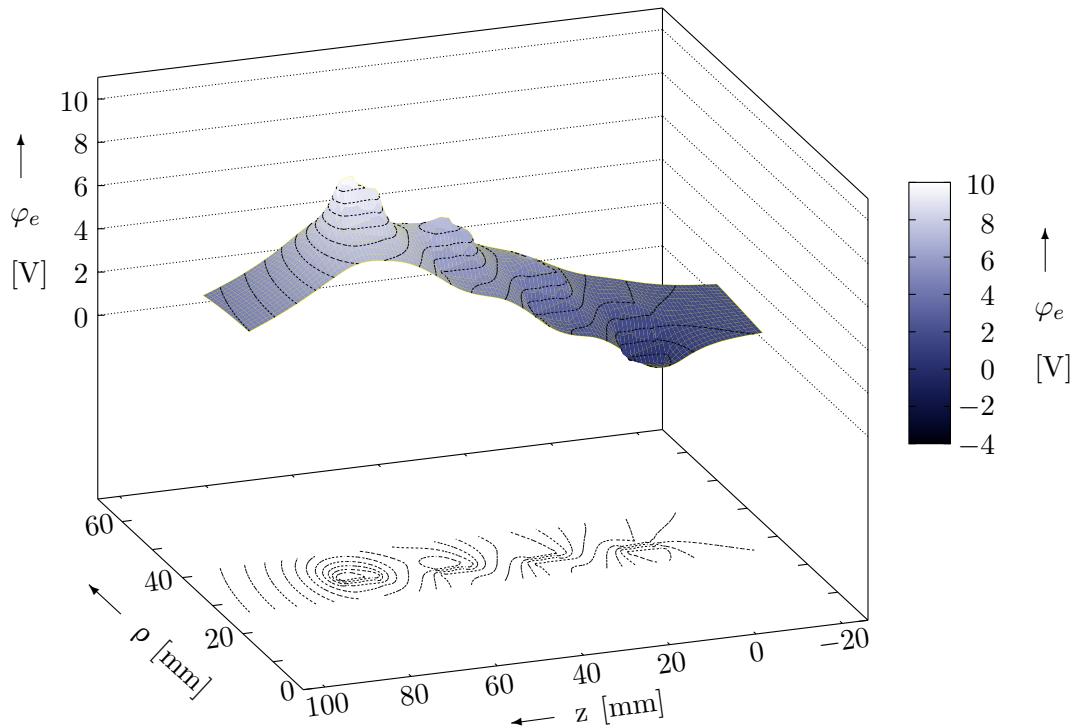
### **Elektrostatische Felder**

Die Abbildungen 9.41, 9.42, 9.43 und 9.44 zeigen das elektrostatische Potential im Bereich der Windungen für die zuvor untersuchten Spulen mit jeweils 242 Windungen, hier in zwei, vier, sechs bzw. zwölf Wicklungskammern.

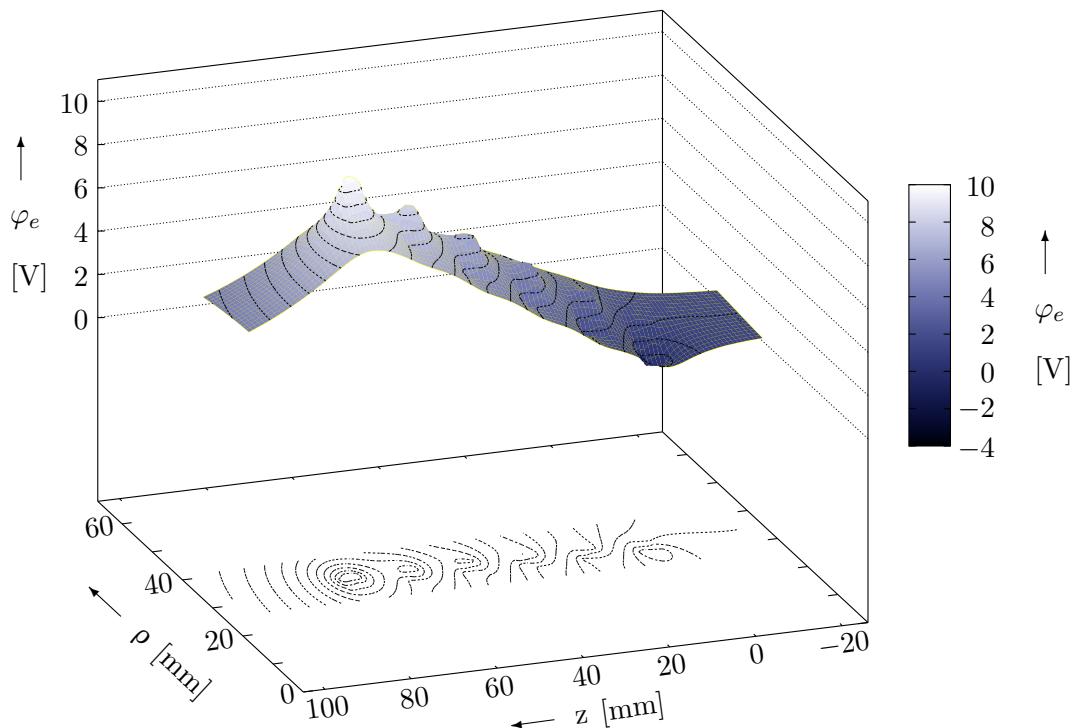


**Abbildung 9.41:** Elektrostatisches Potential einer Wicklung aus 242 Windungen in 2 Kammern

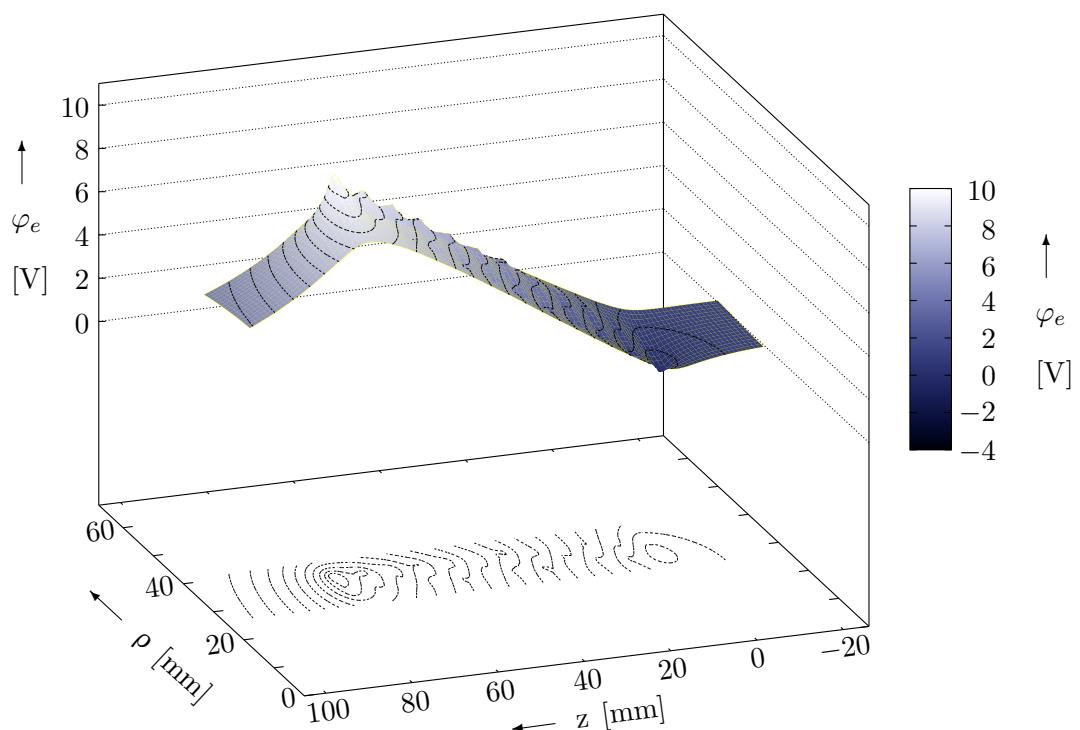
## 9 Auswertung



**Abbildung 9.42:** Elektrostatisches Potential einer Wicklung aus 242 Windungen in 4 Kammern



**Abbildung 9.43:** Elektrostatisches Potential einer Wicklung aus 242 Windungen in 6 Kammern



**Abbildung 9.44:** Elektrostatisches Potential einer Wicklung aus 242 Windungen in 12 Kammern

## *9 Auswertung*

## 9.7 Kapazitäten von Spulen in Topfkernen aus Ferrit

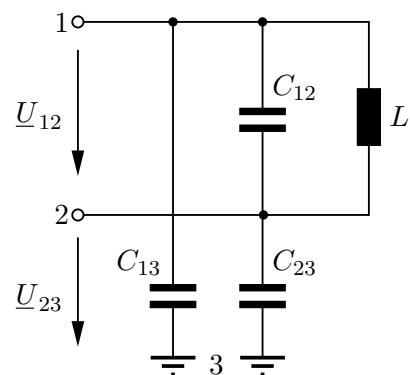
Abschließend sollen die parasitären Kapazitäten zwischen der Drahtwicklung der Spule aus Abschnitt 9.6.1 und einem Ferritkern mit berücksichtigt werden. Parallel zu den Messungen im Graphen 9.37 wurden diverse Impedanzmessungen an der gleichen Spule für unterschiedliche Windungszahlen  $N$  in Kombination mit einem P30/19-Ferritkern (Topfkernhälften aus dem Material 3B7) durchgeführt.

Da zur Berechnung der elektrischen Feldstärke mit einem elektrisch gut leitfähigen Kern gerechnet wird, wurde für die Messungen die Leitfähigkeit auf der zur Wicklung zugewandten inneren Kernoberfläche durch Auftragen einer Silberleitlackschicht erhöht, vergl. Abbildung 9.45. Die Leitlackschicht ist an einer Seite unterbrochen, um zu vermeiden, dass die leitfähige Schicht als Kurzschlusswindung wirkt und dies einen Einfluss auf die gemessene Induktivität des Bauelementes hat.



**Abbildung 9.45:** P30 Topfkern, innenseitig mit Leitlack beschichtet. Die Leitlackschicht ist an einer Seite unterbrochen, um Wirbelströme zu vermeiden.

Für die Betrachtung von Spulen ist prinzipiell das Übertrager-Ersatzschaltbild in Abbildung 9.3 anwendbar, wobei sowohl die Sekundärseite wegfällt als auch alle elektrischen und magnetischen Kopplungen zwischen Primär- und Sekundärseite. Das vereinfachte Ersatzschaltbild zeigt die Abbildung 9.46. Üblicherweise besitzt der Ferritkern keine elektrischen Anschlussklemmen. Zur Messung wurde er mit Kupferbändern kontaktiert und als Klemmennummer 3 definiert. Auf diese Weise kann ein Teil der in Abschnitt 9.2 aufgeführten Impedanzmessungen unter Einbeziehung des Ferritkernes als Bezugspunkt bzw. Klemme 3 durchgeführt werden.



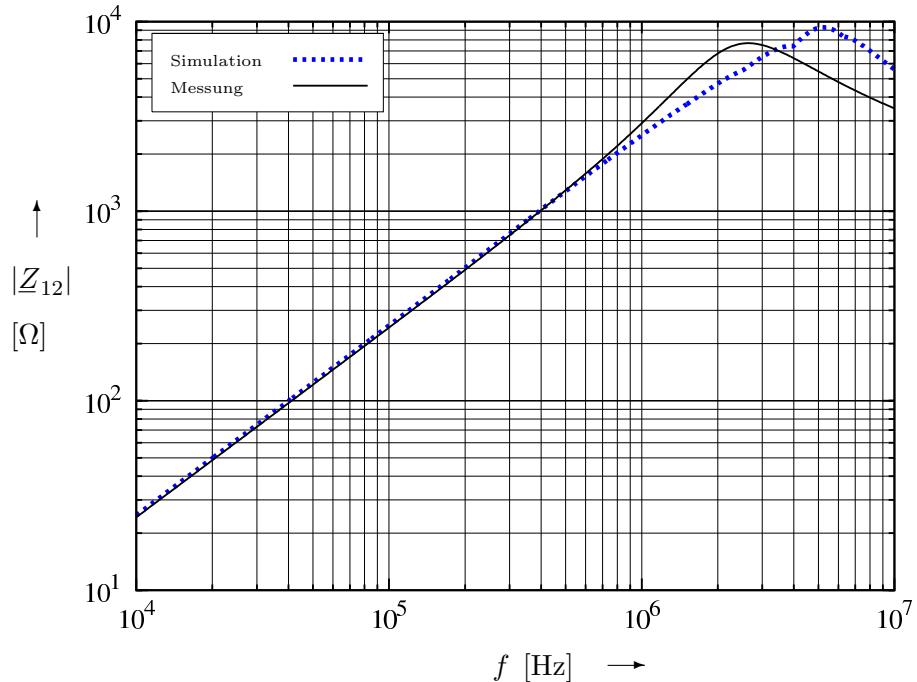
**Abbildung 9.46:** Ersatzschaltbild der Spule mit Ferritkern

## 9 Auswertung

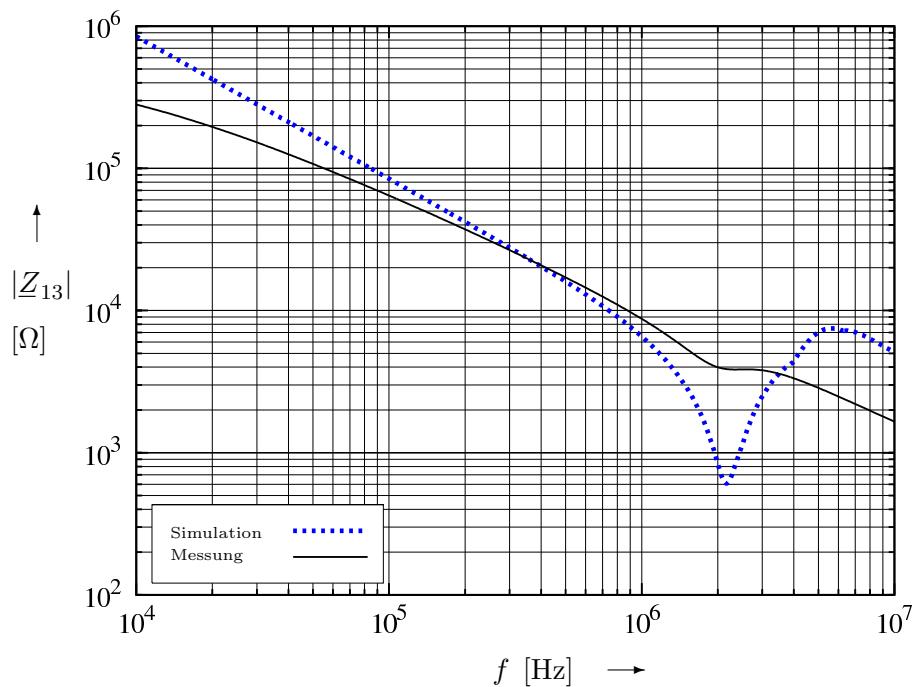
Messung und Simulation wurden teilweise bis zu sehr hohen Arbeitsfrequenzen, oberhalb der Grenzfrequenz des Ferritmateriale 3B7 durchgeführt. Für die Simulation der Induktivität wurde die Modellierung der Anfangspermeabilität gemäß Albach [21] berücksichtigt. Kern- und Wicklungsverluste können bei der Modellierung des elektrischen Randwertproblems jedoch nicht berücksichtigt werden. Dies führt dazu, dass insbesondere die Resonanzen in Simulation und Messung unterschiedlich ausgeprägt sein können. Bei wenigen Messungen weicht der Betrag der Impedanz für sehr niedrige Frequenzen von der Simulation ab (vergl. Abbildungen 9.48, 9.49). Es sind dies stets die Messungen der Impedanzen zwischen dem Topfkern (Klemme 3) und der Klemme 1 bzw. 2 der Wicklung, wobei der Ferritkern in diesen Betriebsfällen überwiegend als elektrischer Leiter und nicht als magnetischer Energiespeicher betrieben wird. Für die betreffenden Messungen weicht die Phase der Impedanz bei niedrigen Frequenzen stark von  $90^\circ$  ab und geht gegen Null (für  $f \rightarrow 0$ ). Am Beispiel der Impedanzmessung zwischen den Klemmen 1 und 3 (vergl. Abbildungen 9.48) ist zu erkennen, dass dann für den Ferritkern im Ersatzschaltbild 9.46 zusätzlich ein ohmscher Widerstand parallel zur Kapazität  $C_{13}$  anzugeben ist, wodurch eine Verringerung der Impedanz für niedrige Frequenzen auch in der Simulation erzielt werden kann.

Andere Messungen hingegen weichen bei sehr hohen Frequenzen vom Betrag der Simulation ab. Diese Abweichung liegt in der Verwendung der Exponentialfunktion zur Modellierung der Anfangspermeabilität begründet. Die Anfangspermeabilität in der Simulation fällt somit jenseits der Grenzfrequenz nicht für alle Frequenzen so steil ab, wie dies den Messkurven des Materialherstellers [25] zu entnehmen ist.

Die Graphen in den Abbildungen 9.47, 9.48 bzw. 9.49 zeigen für eine Spule mit 20 Windungen in einer Lage jeweils den Betrag der Impedanzen  $Z_{12}$ ,  $Z_{13}$  bzw.  $Z_{23}$  zwischen den Anschlussklemmen 1, 2 bzw. 3.

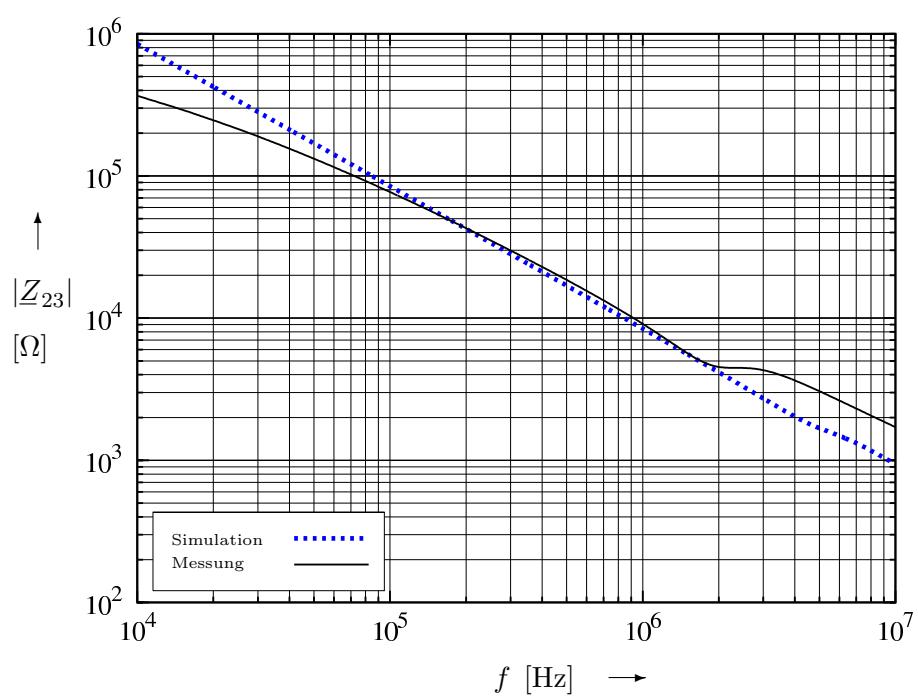


**Abbildung 9.47:**  $|Z_{12}|$  für eine Spule aus 20 Windungen auf P30 Topfkern



**Abbildung 9.48:**  $|Z_{13}|$  für eine Spule aus 20 Windungen auf P30 Topfkern

## 9 Auswertung



**Abbildung 9.49:**  $|Z_{23}|$  für eine Spule aus 20 Windungen auf P30 Topfkern

Die Graphen in den Abbildungen 9.50, 9.51 bzw. 9.52 zeigen für eine Spule mit 30 Windungen (verteilt auf eineinhalb Wicklungslagen) jeweils den Betrag der Impedanzen  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{13}$  bzw.  $\underline{Z}_{23}$  zwischen den Anschlussklemmen 1, 2 bzw. 3.

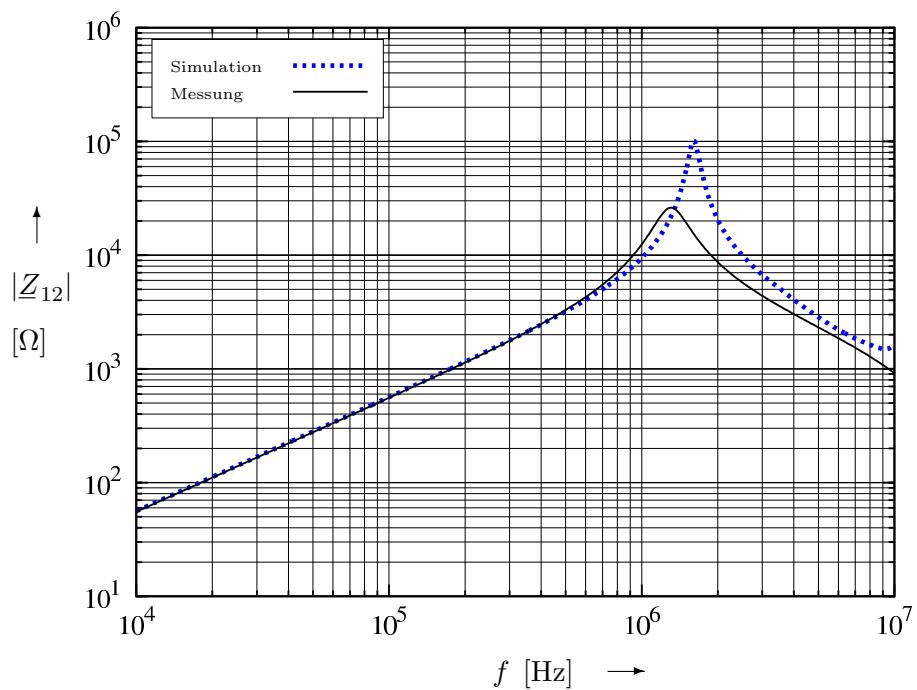
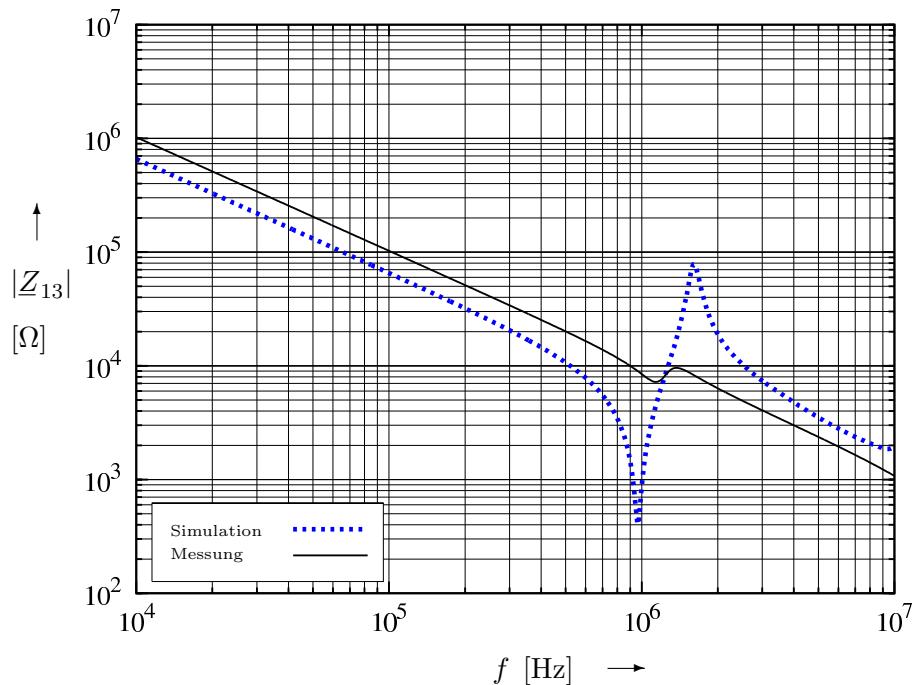
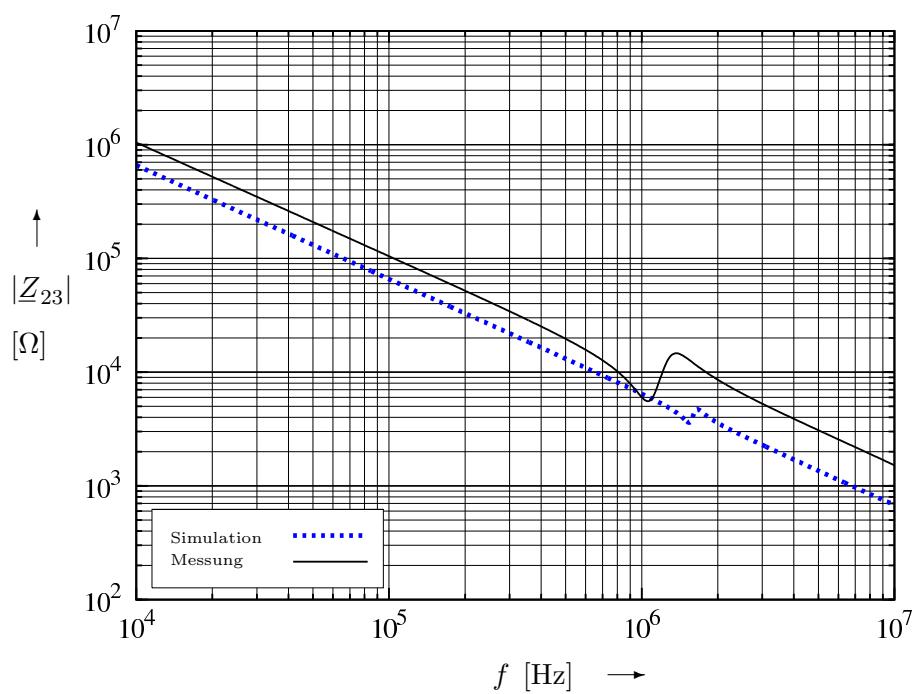


Abbildung 9.50:  $|\underline{Z}_{12}|$  für eine Spule aus 30 Windungen auf P30 Topfkern

## 9 Auswertung



**Abbildung 9.51:**  $|Z_{13}|$  für eine Spule aus 30 Windungen auf P30 Topfkern



**Abbildung 9.52:**  $|Z_{23}|$  für eine Spule aus 30 Windungen auf P30 Topfkern

Die Graphen in den Abbildungen 9.53, 9.54 bzw. 9.55 zeigen für eine Spule mit 40 Windungen (in zwei vollständigen Wicklungslagen) jeweils den Betrag der Impedanzen  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{13}$  bzw.  $\underline{Z}_{23}$  zwischen den Anschlussklemmen 1, 2 bzw. 3.

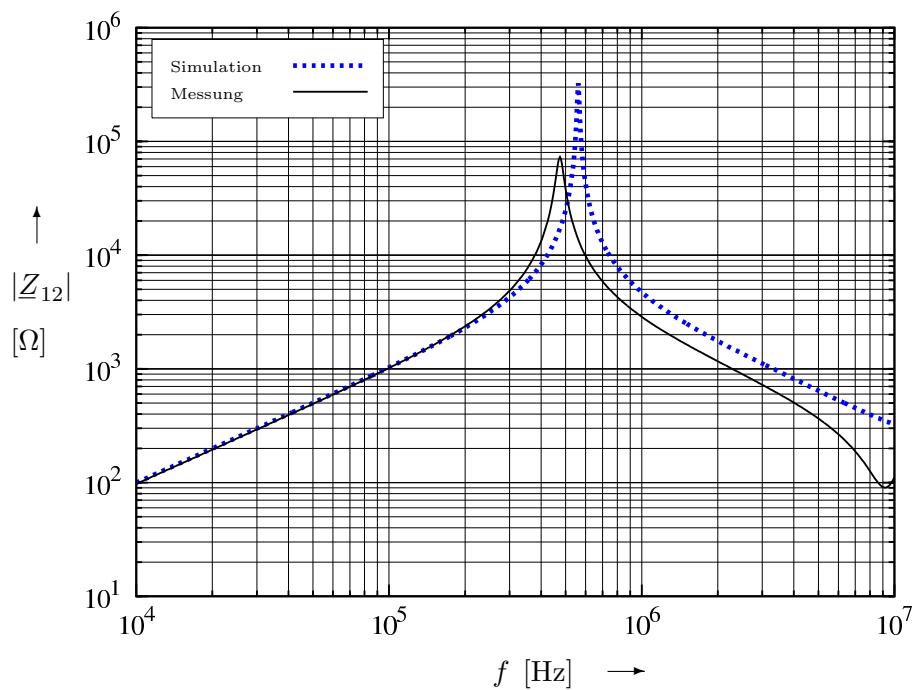


Abbildung 9.53:  $|\underline{Z}_{12}|$  für eine Spule aus 40 Windungen auf P30 Topfkern

## 9 Auswertung

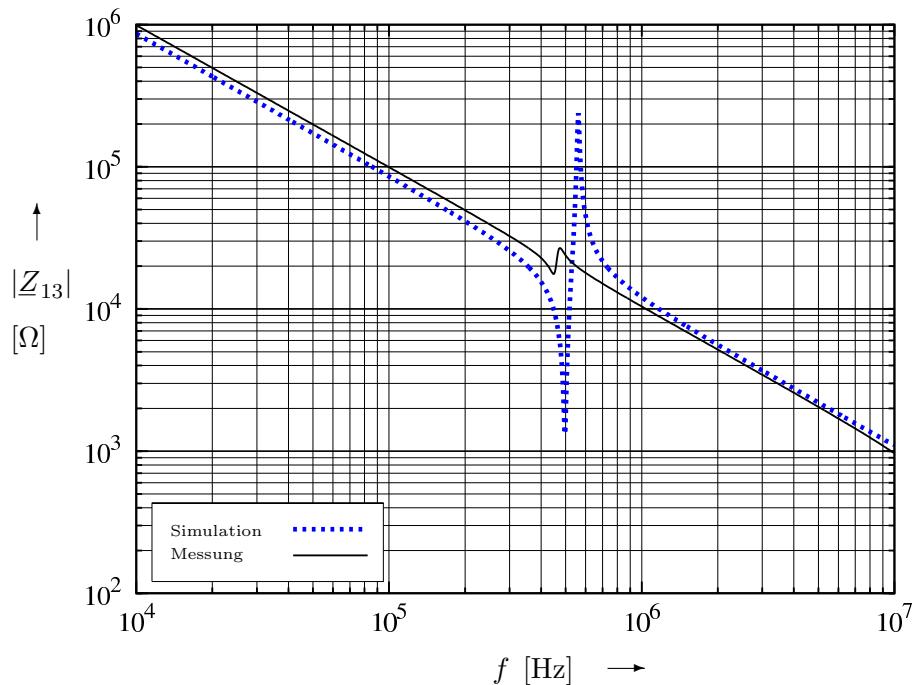


Abbildung 9.54:  $|Z_{13}|$  für eine Spule aus 40 Windungen auf P30 Topfkern

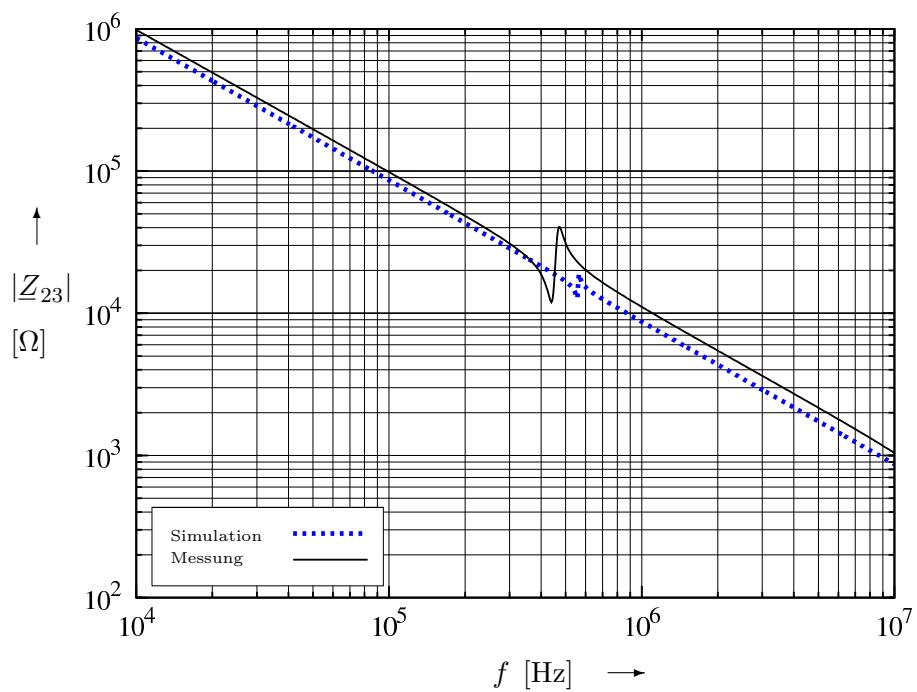


Abbildung 9.55:  $|Z_{23}|$  für eine Spule aus 40 Windungen auf P30 Topfkern

Die Graphen in den Abbildungen 9.56, 9.57 bzw. 9.58 zeigen für eine Spule mit 70 Windungen (in dreieinhalf Wicklungslagen) jeweils den Betrag der Impedanzen  $Z_{12}$ ,  $Z_{13}$  bzw.  $Z_{23}$  zwischen den Anschlussklemmen 1, 2 bzw. 3.

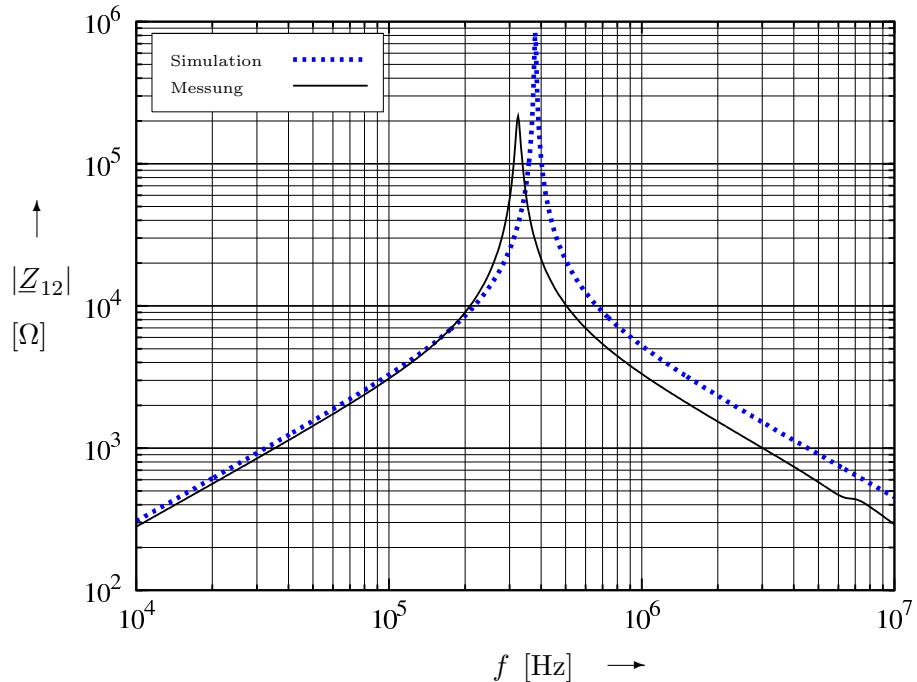


Abbildung 9.56:  $|Z_{12}|$  für eine Spule aus 70 Windungen auf P30 Topfkern

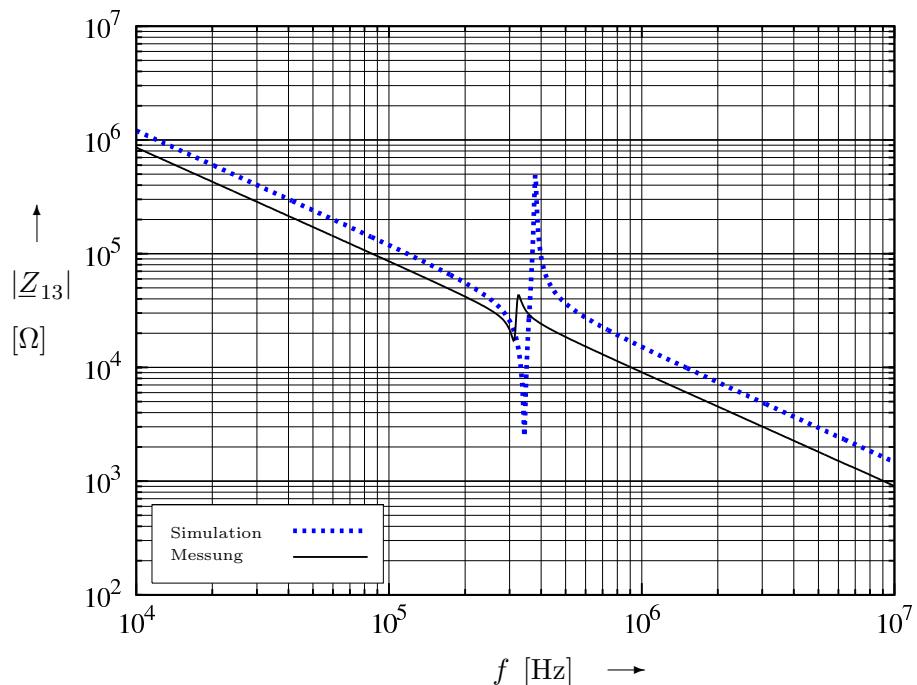
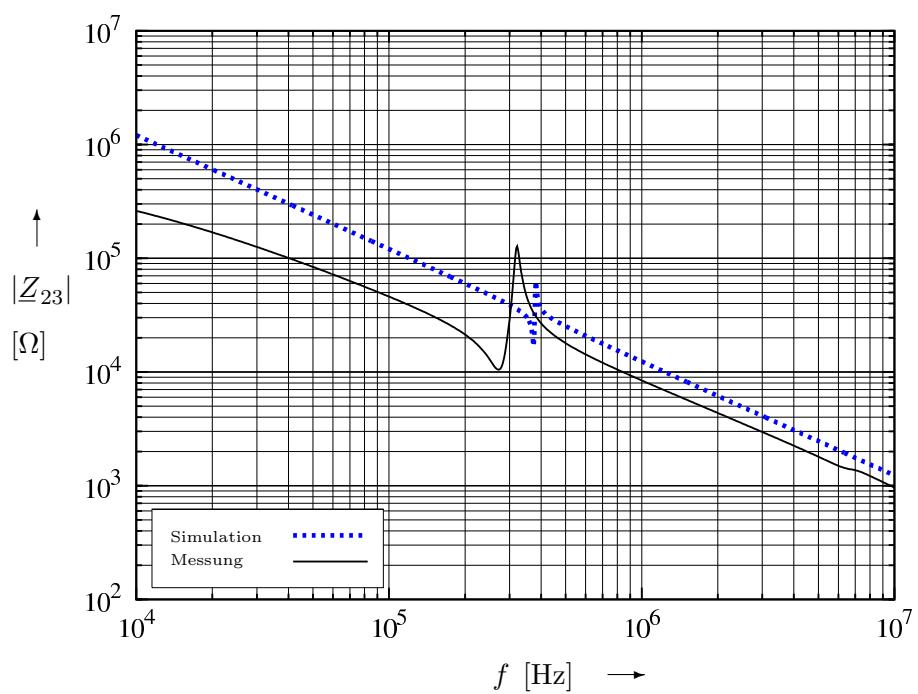


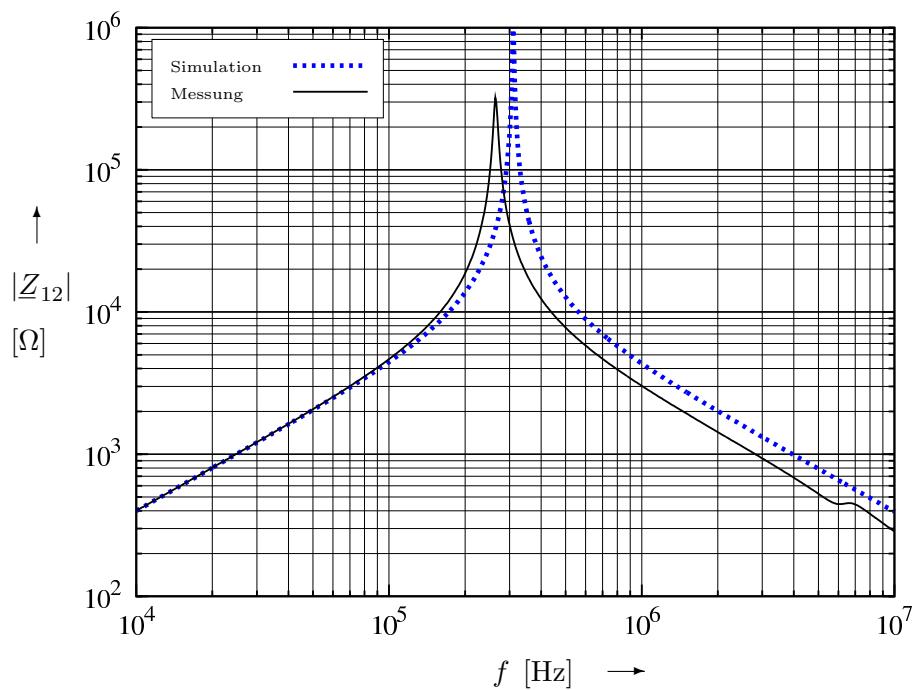
Abbildung 9.57:  $|Z_{13}|$  für eine Spule aus 70 Windungen auf P30 Topfkern

## 9 Auswertung



**Abbildung 9.58:**  $|Z_{23}|$  für eine Spule aus 70 Windungen auf P30 Topfkern

Die Graphen in den Abbildungen 9.59, 9.60 bzw. 9.61 zeigen für eine Spule mit 80 Windungen (in vier vollständigen Wicklungslagen) jeweils den Betrag der Impedanzen  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{13}$  bzw.  $\underline{Z}_{23}$  zwischen den Anschlussklemmen 1, 2 bzw. 3.



**Abbildung 9.59:**  $|\underline{Z}_{12}|$  für eine Spule aus 80 Windungen auf P30 Topfkern

## 9 Auswertung

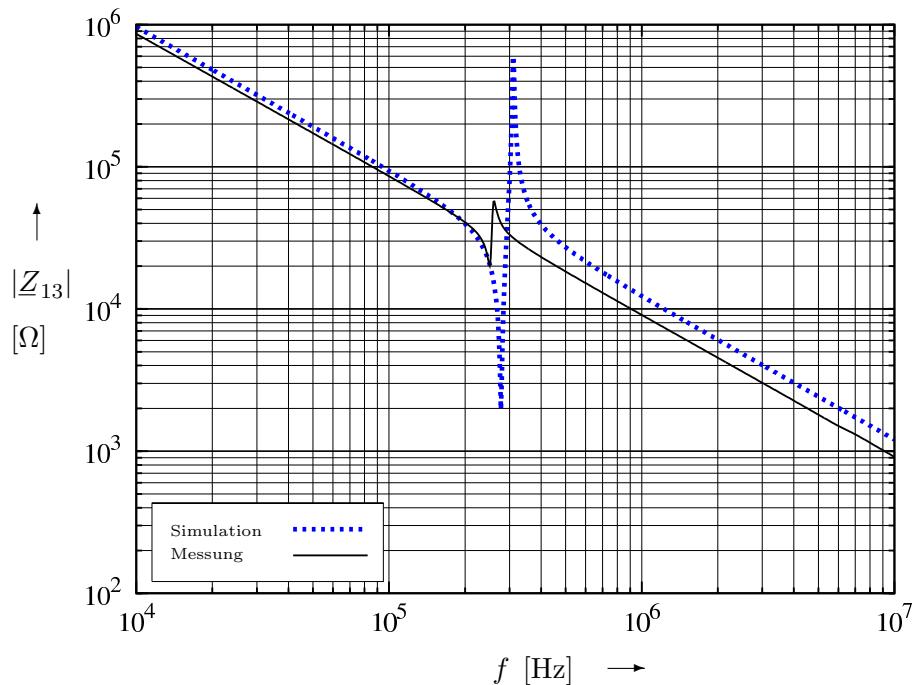


Abbildung 9.60:  $|Z_{13}|$  für eine Spule aus 80 Windungen auf P30 Topfkern

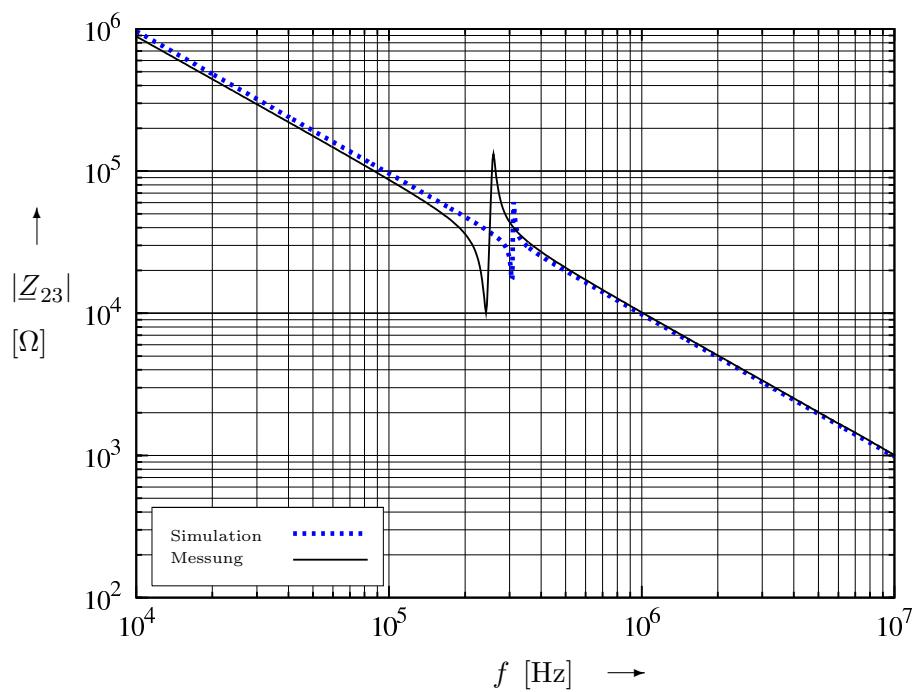
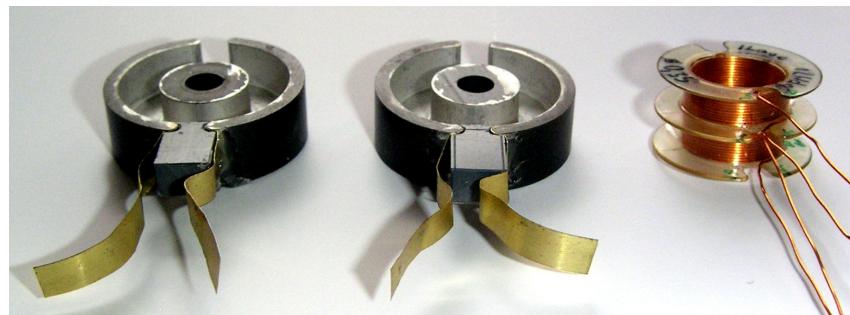


Abbildung 9.61:  $|Z_{23}|$  für eine Spule aus 80 Windungen auf P30 Topfkern

## 9.8 Kapazitäten von Transformatoren in Topfkernen aus Ferrit

Analog zu den Messungen in Abschnitt 9.7 werden exemplarisch noch die Impedanzen zweier Übertrager mit jeweils zwei Wicklungen in Kombination mit einem P30/19-Ferritkern unter Berücksichtigung der parasitären Kapazitäten untersucht.

Erneut wurden die leitfähig lackierten Ferritkernhälften verwendet. Die Komponenten eines solchen Aufbaus zeigt die Abbildung 9.62. Zum Vergleich von Messungen und Simulationen wurde das Übertrager-Ersatzschaltbild gemäß Abbildung 9.3 zu Grunde gelegt und die in Abschnitt 9.2 aufgeführten Impedanzmessungen—unter Einbeziehung des Ferritkernes als Bezugspunkt bzw. Klemmen 3 und 6—durchgeführt. Im Vergleich zur Messung 1, welche unter Verwendung der leitfähig beschichteten Kernhälften aufgenommen wurde, ist zusätzlich teilweise eine Messung 2 durchgeführt worden unter Verwendung eines normalen, unbeschichteten Schalenkerns mit gleicher Luftspaltlänge.



**Abbildung 9.62:** elektrisch leitfähig beschichteter und kontaktierter P30 Topfkern mit einem Beispiel-Übertrager

Bezüglich Abweichungen von Simulation und Messung sind die Aussagen des Abschnittes 9.7 zu berücksichtigen.

### 9.8.1 Übertrager-Beispiel Nr. 1

Zunächst wird ein Übertrager mit zwei eng benachbarten Wicklungen betrachtet. Jede Wicklung besteht aus 22 Windungen eines Kupferlackdrahtes mit einem nominellen Durchmesser  $d_{\text{nom}} = 0.5 \text{ mm}$  in zwei eng benachbarten Lagen. Abbildung 9.63 zeigt eine Skizze des Aufbaus.

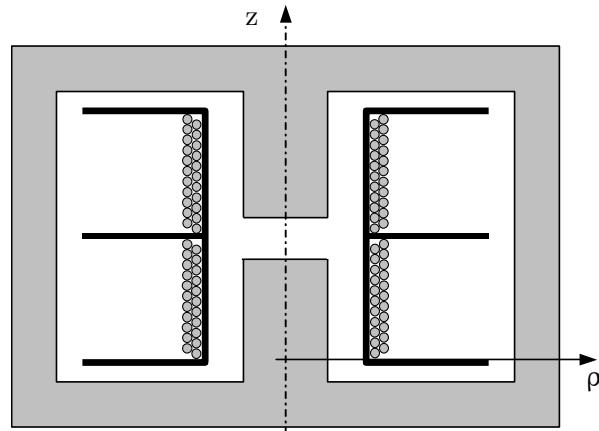


Abbildung 9.63: Zwei Wicklungen auf einem P30/19 Kern

Die Abbildungen 9.64 bis 9.75 zeigen den Vergleich von Messung und Simulation der Beträge der Impedanzen  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{13}$ ,  $\underline{Z}_{23}$ ,  $\underline{Z}_{45}$ ,  $\underline{Z}_{46}$ ,  $\underline{Z}_{56}$ ,  $\underline{Z}'_{15}$ ,  $\underline{Z}'_{24}$ ,  $\underline{Z}_{15}$ ,  $\underline{Z}_{24}$ ,  $\underline{Z}_{14}$  und  $\underline{Z}_{25}$ .

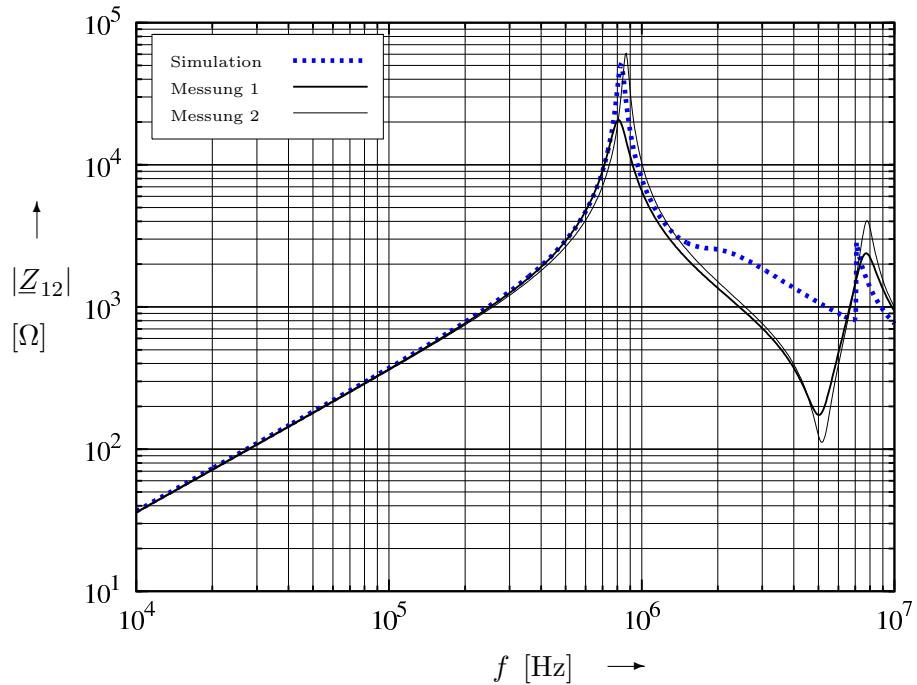


Abbildung 9.64: Messung und Simulation zu  $|\underline{Z}_{12}|$

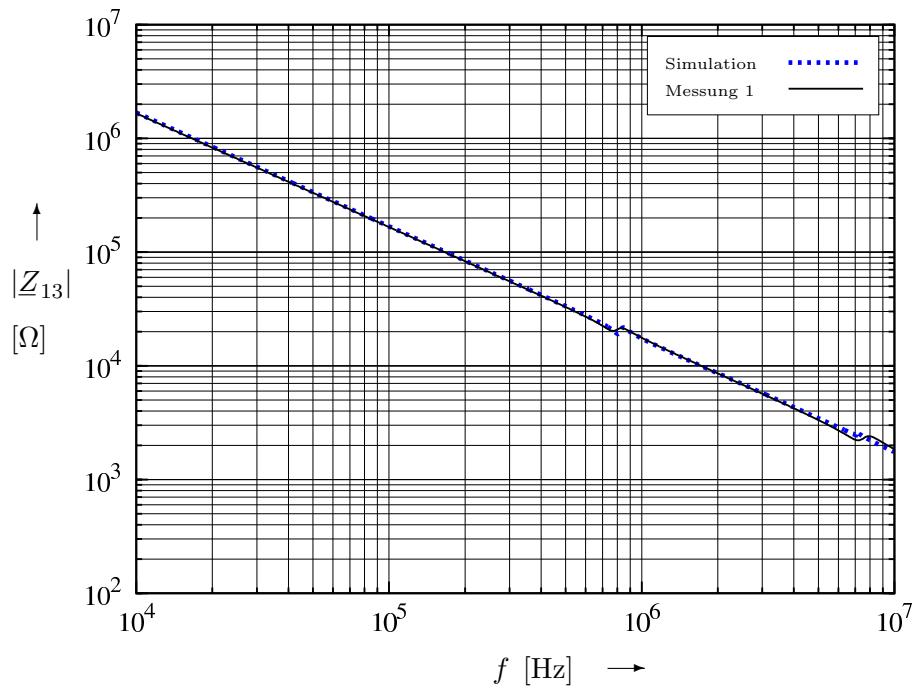


Abbildung 9.65: Messung und Simulation zu  $|Z_{13}|$

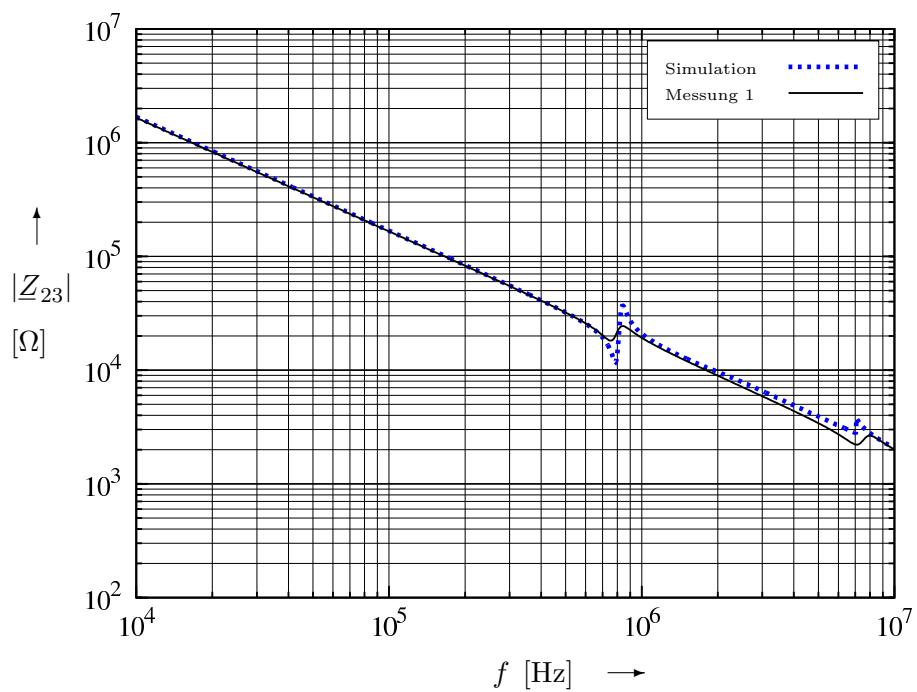
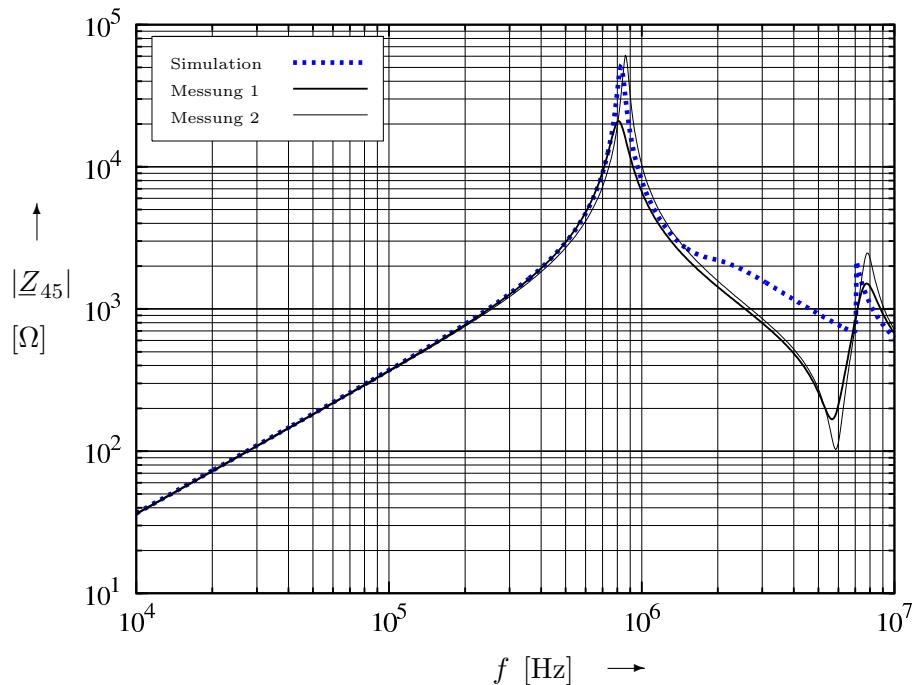
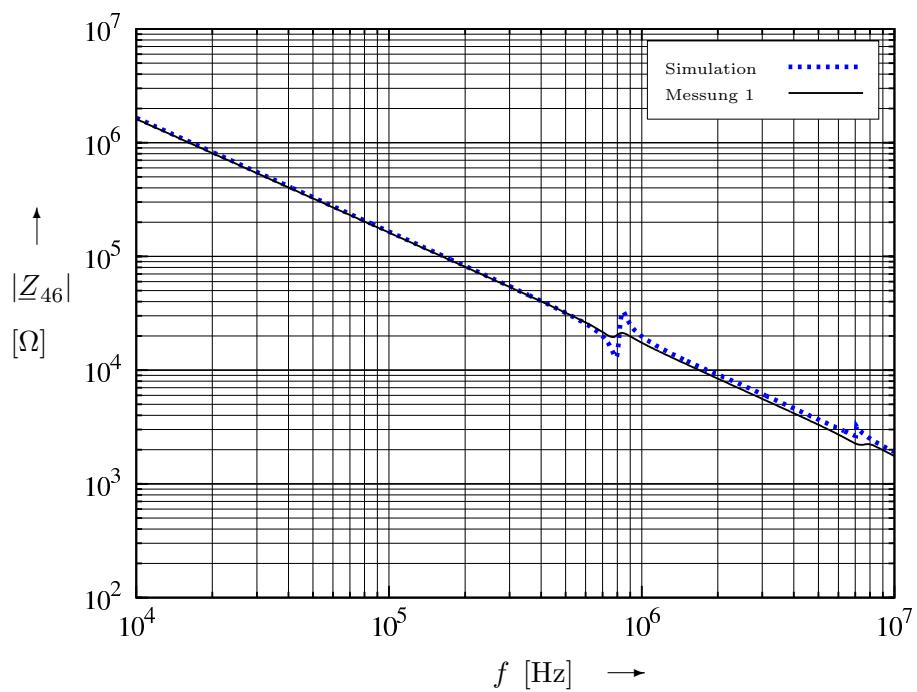


Abbildung 9.66: Messung und Simulation zu  $|Z_{23}|$

## 9 Auswertung



**Abbildung 9.67:** Messung und Simulation zu  $|Z_{45}|$



**Abbildung 9.68:** Messung und Simulation zu  $|Z_{46}|$

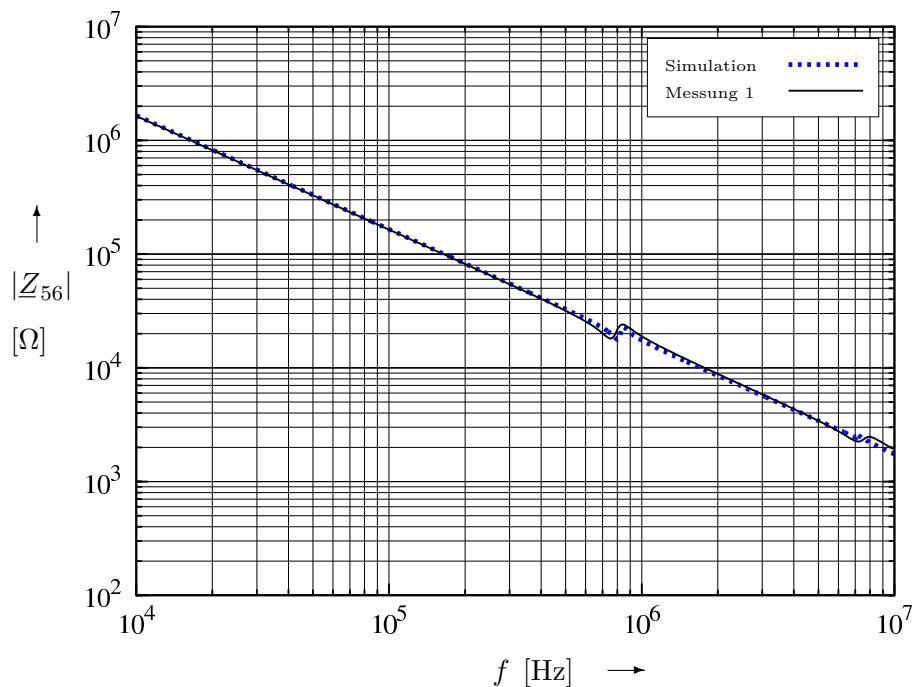


Abbildung 9.69: Messung und Simulation zu  $|Z_{56}|$

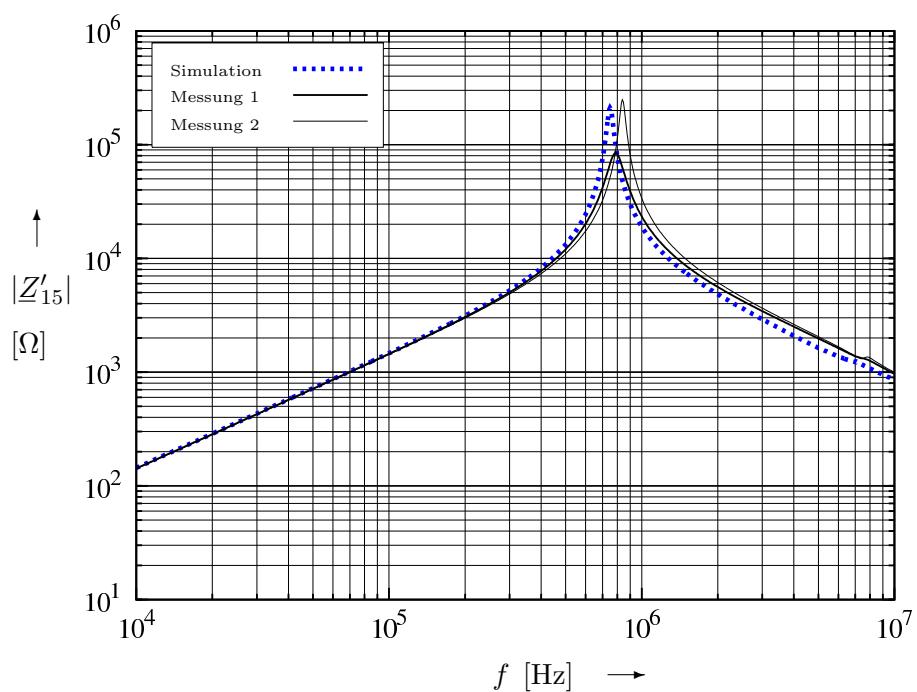
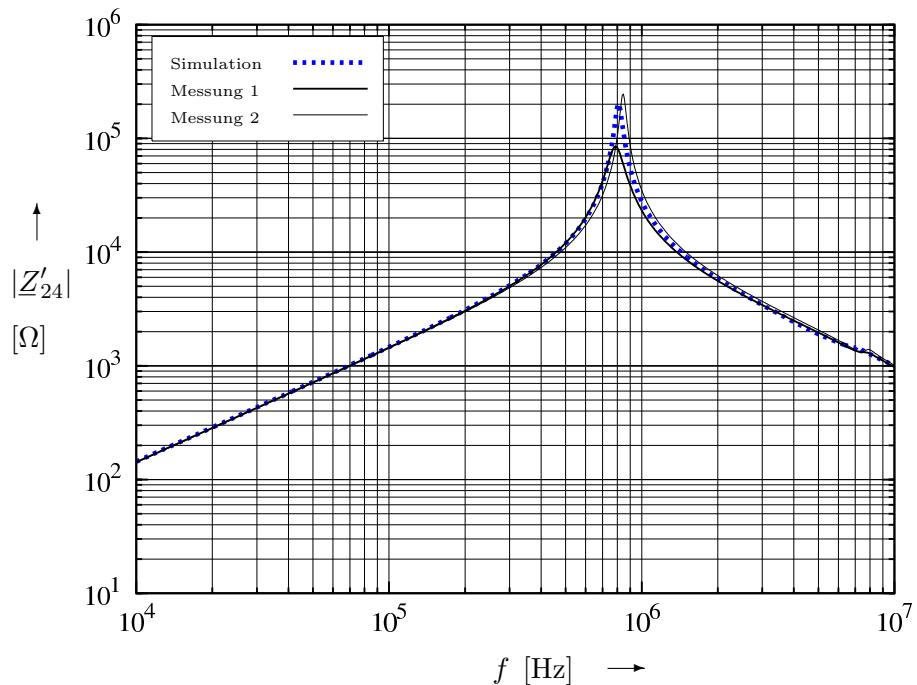
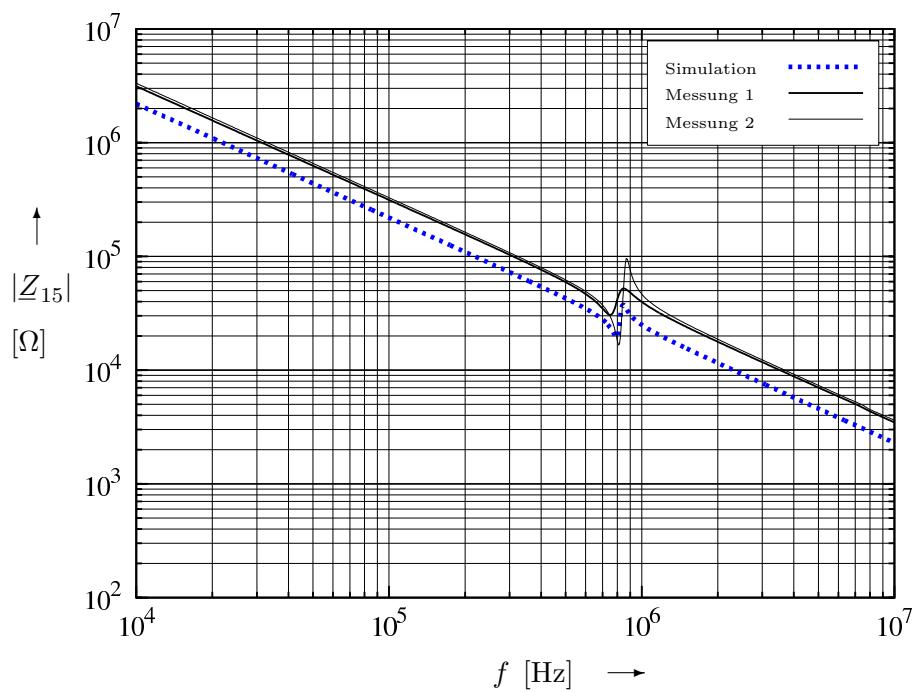


Abbildung 9.70: Messung und Simulation zu  $|Z'_{15}|$

## 9 Auswertung



**Abbildung 9.71:** Messung und Simulation zu  $|Z'_{24}|$



**Abbildung 9.72:** Messung und Simulation zu  $|Z_{15}|$

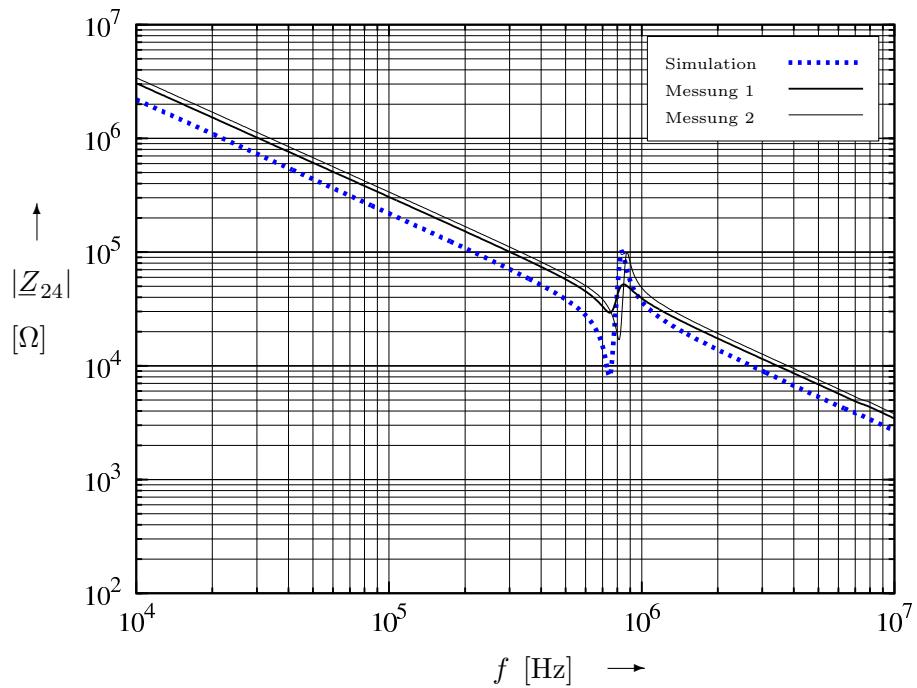


Abbildung 9.73: Messung und Simulation zu  $|Z_{24}|$

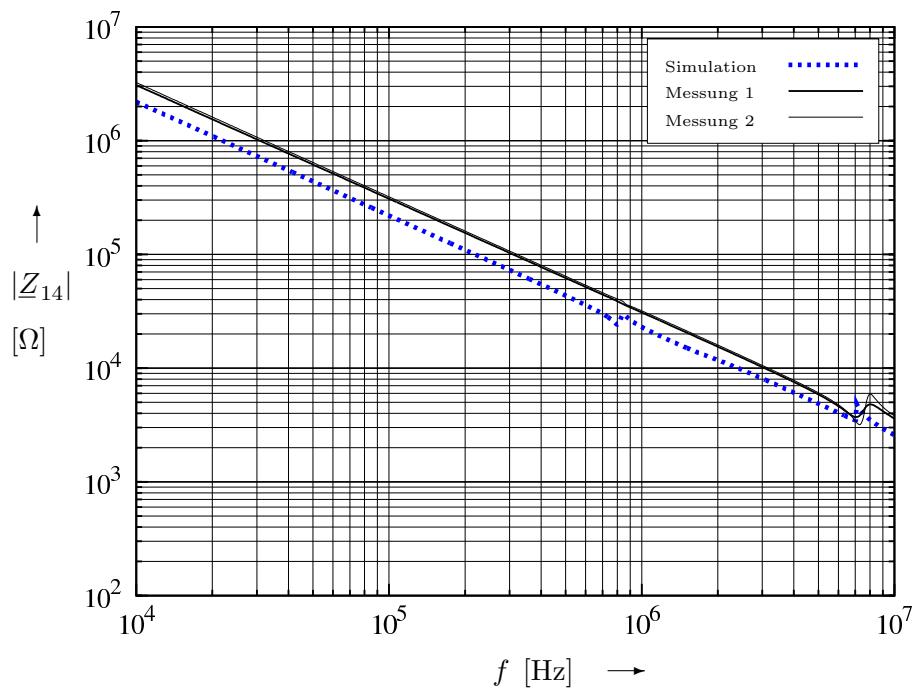
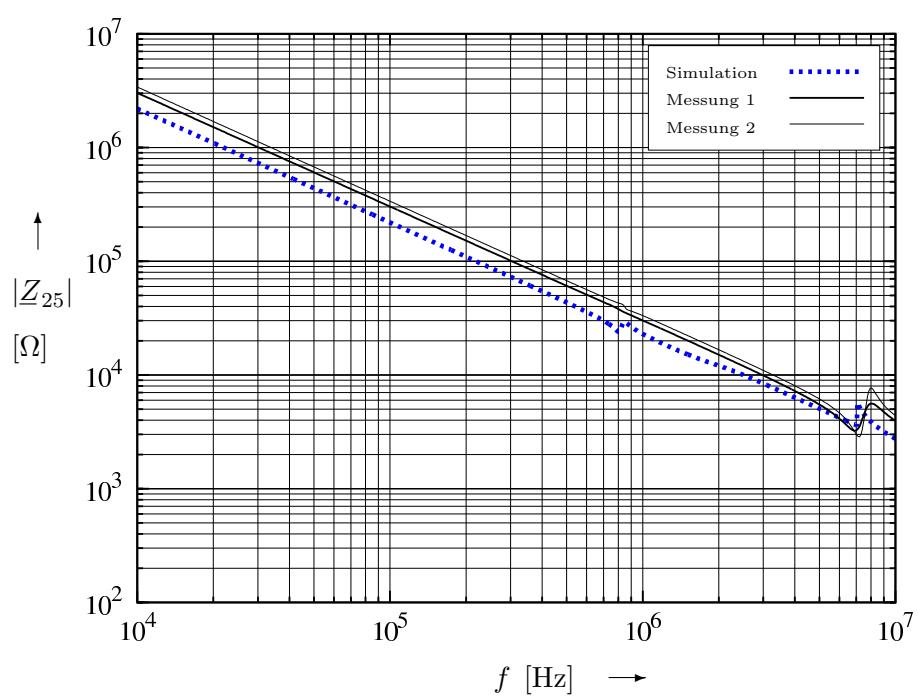


Abbildung 9.74: Messung und Simulation zu  $|Z_{14}|$

## 9 Auswertung



**Abbildung 9.75:** Messung und Simulation zu  $|Z_{25}|$

### 9.8.2 Übertrager-Beispiel Nr. 2

Es folgt die Untersuchung eines weiteren Übertragers mit zwei Wicklungen. Jede Wicklung besteht aus 14 Windungen eines Kupferlackdrahtes mit einem nominellen Durchmesser  $d_{\text{nom}} = 0.5 \text{ mm}$  in zwei eng benachbarten Lagen. Abbildung 9.76 zeigt eine Skizze des Aufbaus.

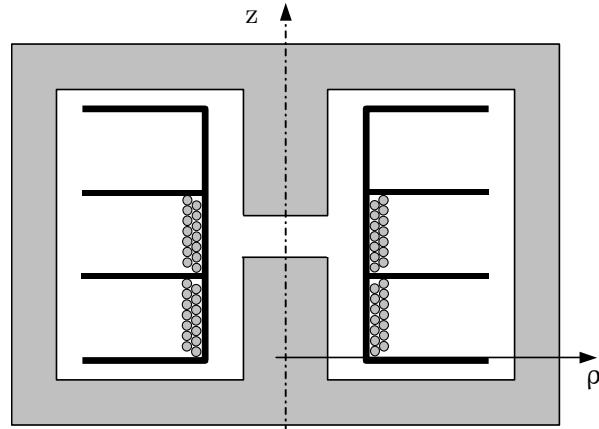


Abbildung 9.76: Zwei Wicklungen auf einem P30/19 Kern

Die Abbildungen 9.77 bis 9.88 zeigen den Vergleich von Messung und Simulation der Beträge der Impedanzen  $Z_{12}$ ,  $Z_{13}$ ,  $Z_{23}$ ,  $Z_{45}$ ,  $Z_{46}$ ,  $Z_{56}$ ,  $Z'_{15}$ ,  $Z'_{24}$ ,  $Z_{15}$ ,  $Z_{24}$ ,  $Z_{14}$  und  $Z_{25}$ .

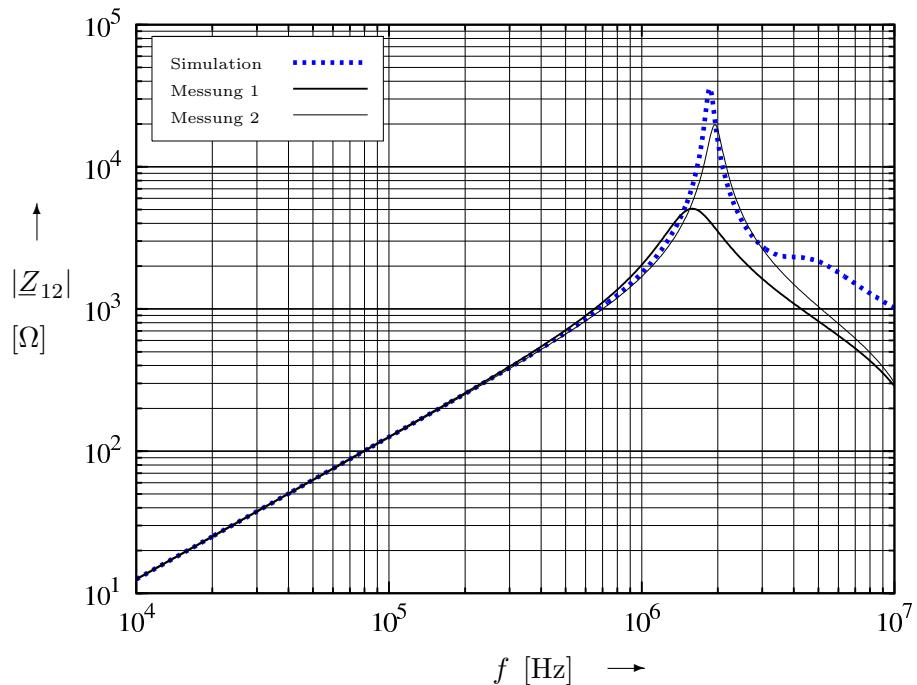


Abbildung 9.77: Messung und Simulation zu  $|Z_{12}|$

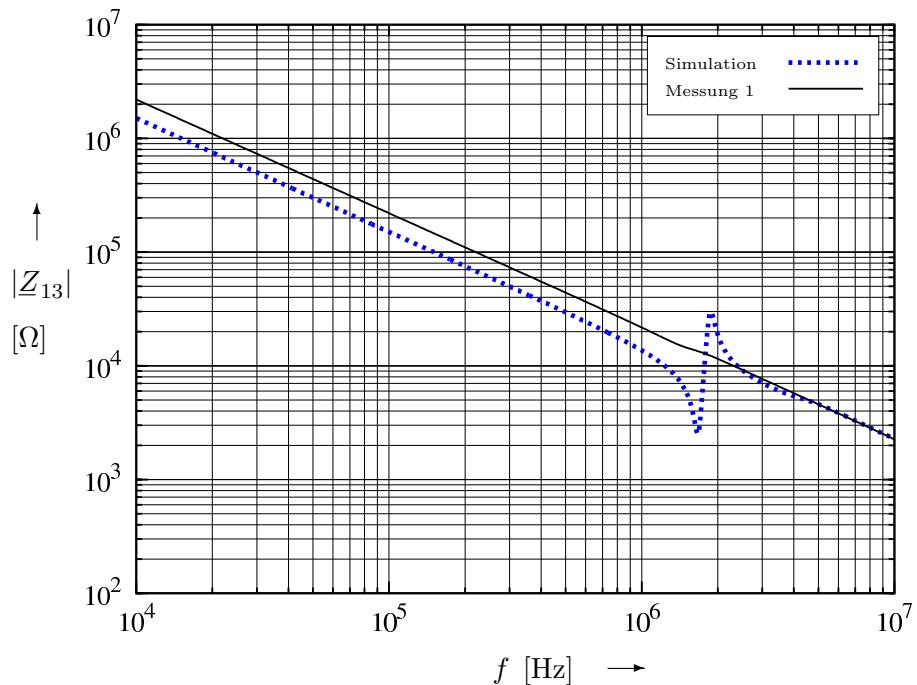


Abbildung 9.78: Messung und Simulation zu  $|Z_{13}|$

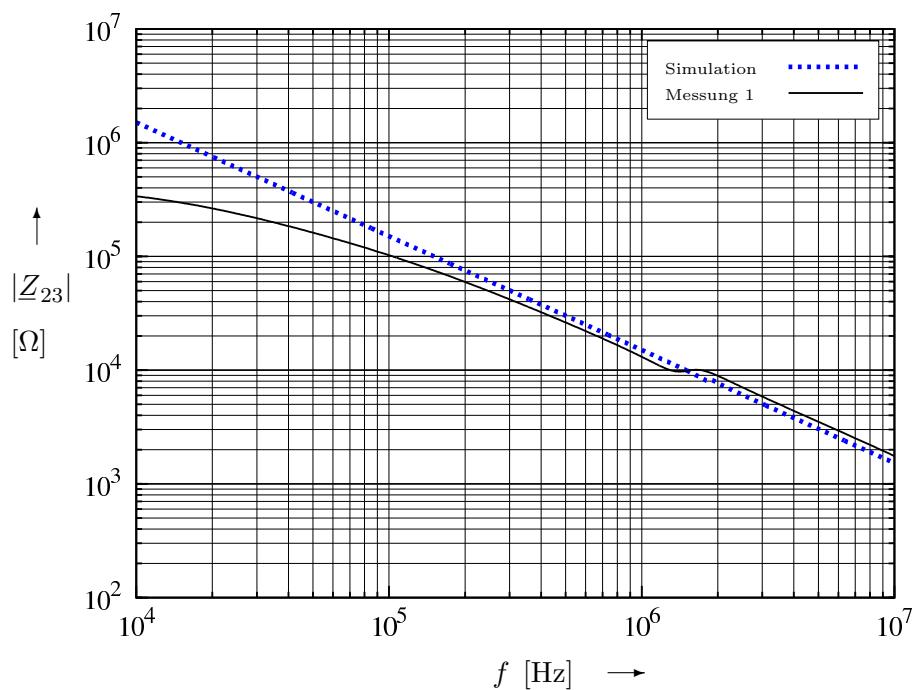


Abbildung 9.79: Messung und Simulation zu  $|Z_{23}|$

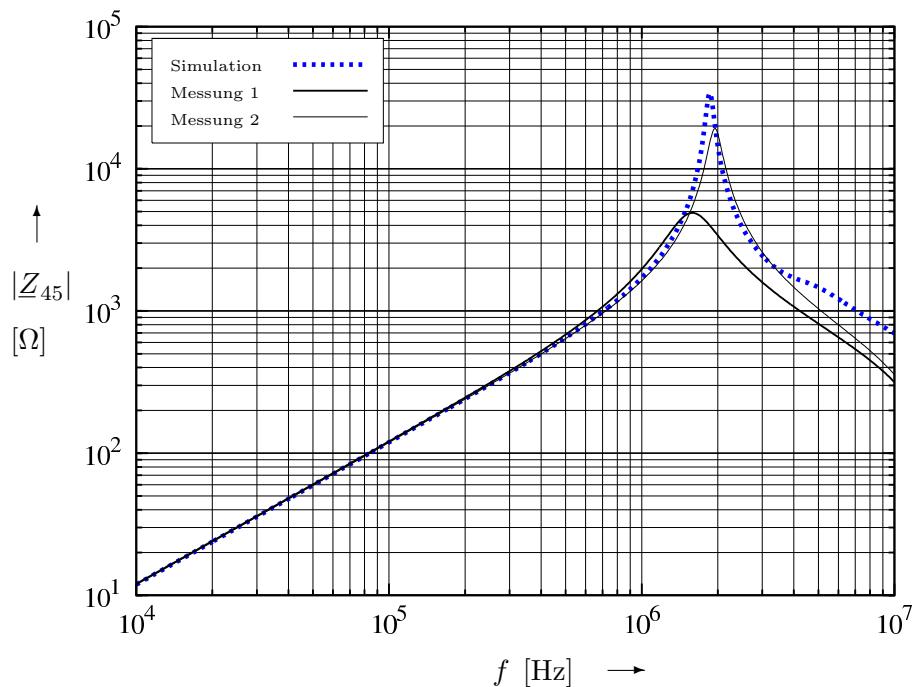


Abbildung 9.80: Messung und Simulation zu  $|Z_{45}|$

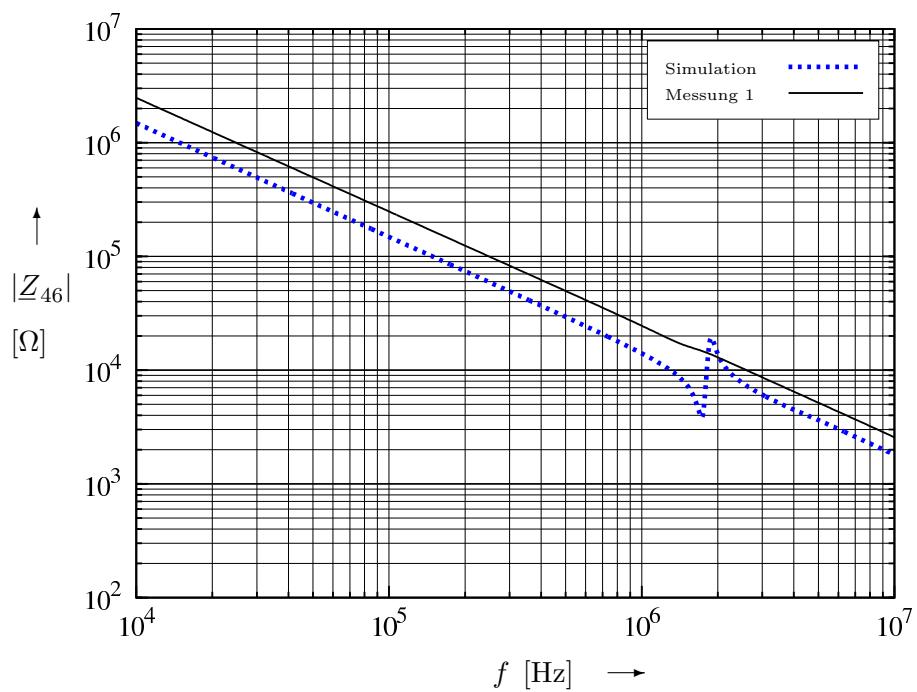
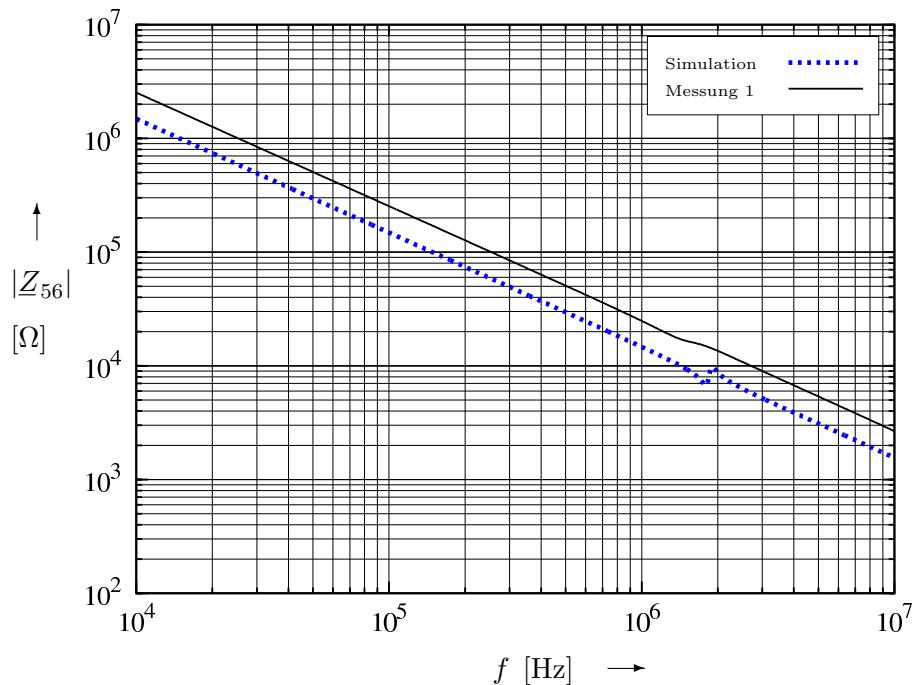
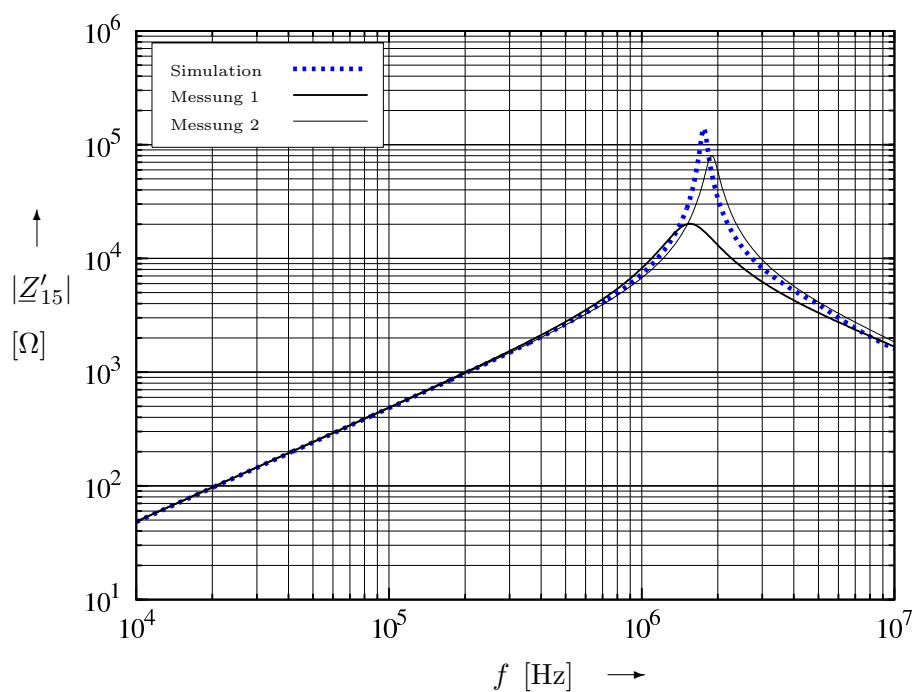


Abbildung 9.81: Messung und Simulation zu  $|Z_{46}|$

## 9 Auswertung



**Abbildung 9.82:** Messung und Simulation zu  $|Z_{56}|$



**Abbildung 9.83:** Messung und Simulation zu  $|Z'_{15}|$

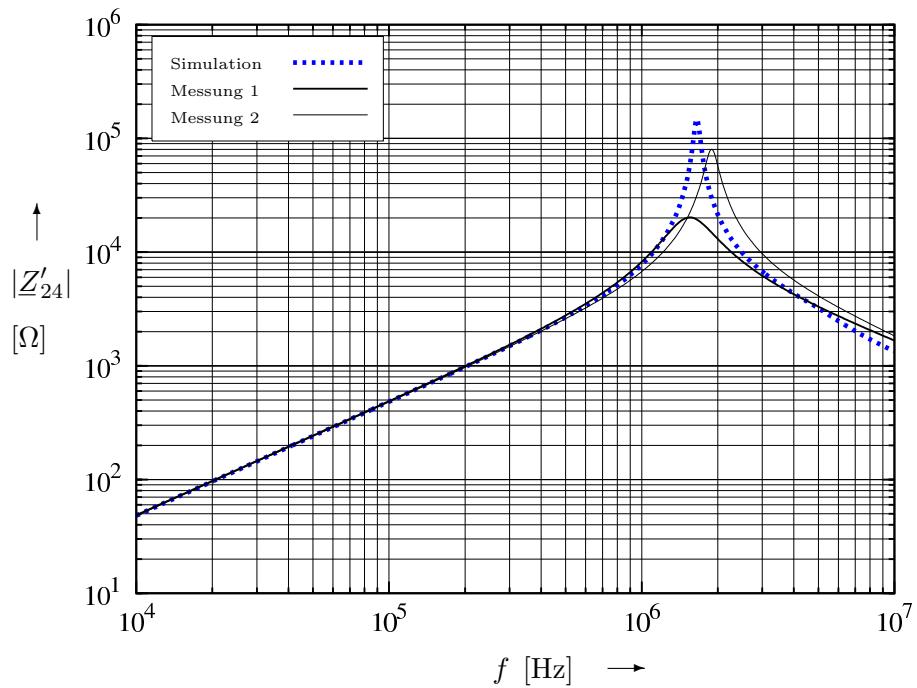


Abbildung 9.84: Messung und Simulation zu  $|Z'_{24}|$

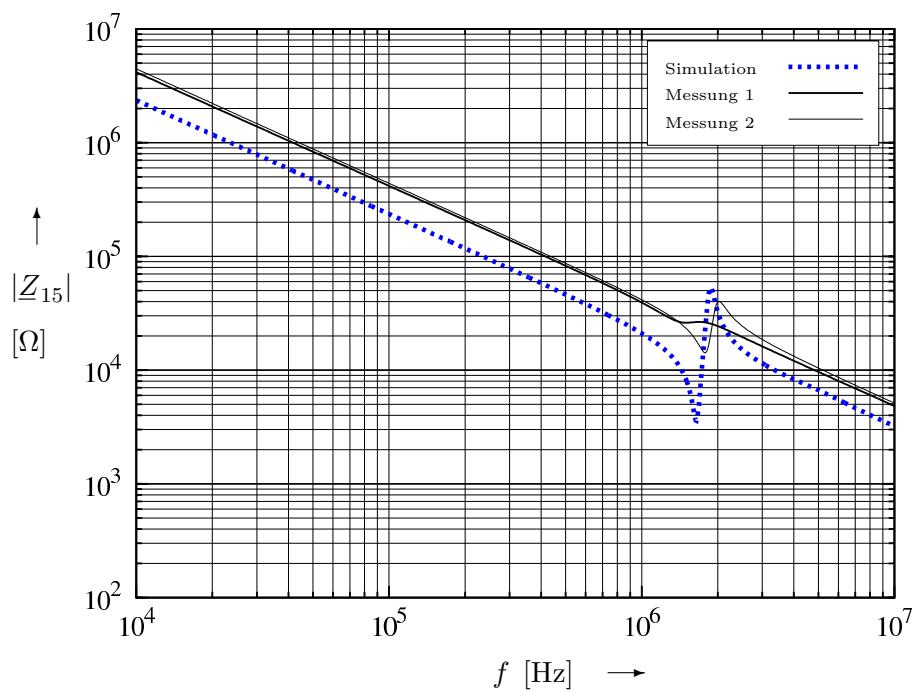
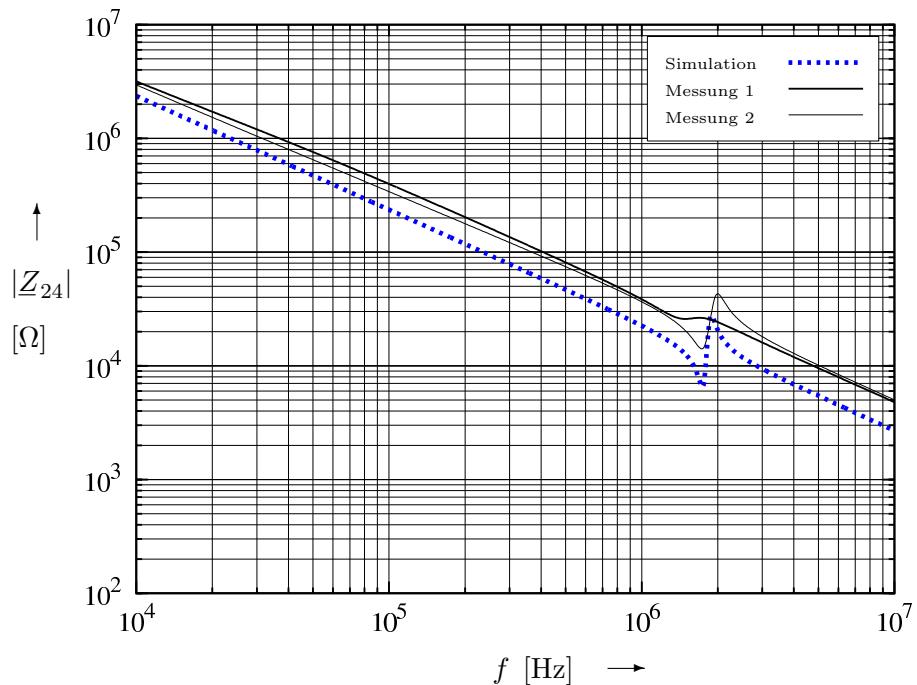
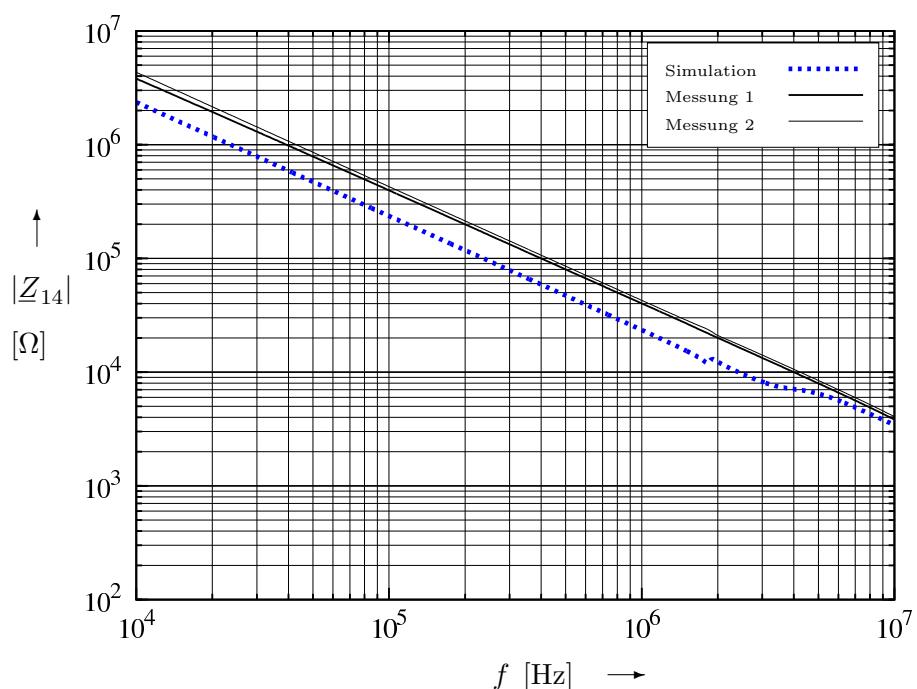


Abbildung 9.85: Messung und Simulation zu  $|Z_{15}|$

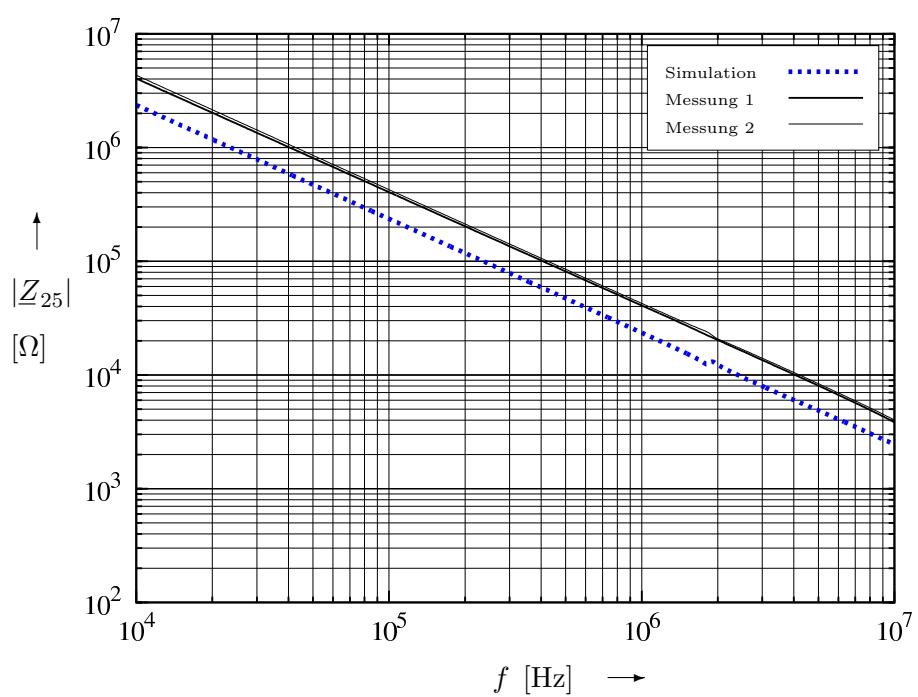
## 9 Auswertung



**Abbildung 9.86:** Messung und Simulation zu  $|Z_{24}|$



**Abbildung 9.87:** Messung und Simulation zu  $|Z_{14}|$



**Abbildung 9.88:** Messung und Simulation zu  $|Z_{25}|$

## *9 Auswertung*

# Zusammenfassung

Mit dem Ziel einer numerischen Implementierung in einem Simulationsprogramm wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit Verfahren zur Ermittlung elektrischer Ersatzschaltbilder für drahtgewickelte Hochfrequenz-Spulen und Transformatoren angewendet und weiterentwickelt.

Das Simulationsprogramm soll Schaltungs- und Komponentenentwicklern nach Spezifizierung von Geometrie, Materialdaten und Betriebszustand einer Spule bzw. eines Transformators einerseits ein elektrisches Ersatzschaltbild zur Verwendung in digitalen Schaltkreissimulatoren ausgeben. Andererseits sollen die Simulationen an einem Arbeitsplatzrechner ausführbar sein und den Entwickler in die Lage versetzen, die Komponente durch Veränderungen und Neustart der Simulation binnen kurzer Zeit für den Verwendungszweck zu optimieren.

Die Forderung nach kurzen Simulationszeiten war ausschlaggebend dafür, dass weitestgehend analytische Lösungsansätze verfolgt wurden. Die Elemente der elektrischen Ersatzschaltbilder von Spulen und Transformatoren sind mit Hilfe der Maxwell'schen Feldtheorie aus den magnetischen und elektrischen Feldgrößen herleitbar. Die Problemstellung konnte zunächst auf die Ermittlung der elektromagnetischen Felder der untersuchten Bauelemente zurückgeführt werden.

Zur Ermittlung von Verlustleistung und induktiven Kopplungen wurden in Kapitel 4 die magnetischen Feldgrößen betrachtet und abschließend Ersatzschaltbilder aus Induktivitäten und Widerständen (für den Betriebsfall) vorgestellt. Für rotationssymmetrisch gewickelte Spulen und Transformatoren konnte auf eine numerische Implementierung der Verlust- und Induktivitätsberechnung von Albach (vergl. z.B. [2], [35], [5]) zurückgegriffen werden, welche auf Lösung partieller Differentialgleichungen durch Separationsansätze basieren. Die vorliegende Arbeit untersucht in Erweiterung dazu Bauelemente, bei denen keine Rotationssymmetrie vorliegt. Der Einfluss eines Ferritkernes wird deshalb mit Hilfe der Momenten-Methode berücksichtigt, welche zunächst in Kapitel 3 für die Anwendung auf Ferritkernformen der untersuchten Bauelemente angewendet wird. Magnetische Feldstärkeanteile und Vektorpotentiale des Ferritkernes können so weitgehend analytisch berechnet werden. Sie sind in Anhang B zusammengestellt.

Zur Berechnung der Wicklungsverluste wurde in Abschnitt 4.3.1 ein Verfahren von Albach [2] aufgegriffen. Es ist nur für zweidimensionale Problemstellungen anwendbar und wird einerseits in Abschnitt 4.3.2 durch zusätzliche feldtheoretische Überlegungen, andererseits in Anhang E durch geometrische Überlegungen zur Anwendung auf dreidimensionale Problemstellungen erweitert.

Die Ermittlung der Induktivitäten gemäß Abschnitt 5 basiert auf dem Induktionsgesetz (1.21). Auch hierfür erweist sich die Verwendung der Ferritkern-Ersatzanordnung aus Kapitel 3 als vorteilhaft, da Gegeninduktivitätsanteile zwischen Teilen der Wicklungen und Teilen der Ferritkern-Ersatzanordnung weitgehend analytisch berechnet werden können. Die verwendeten

## Zusammenfassung

Gegeninduktivitätsbeiträge sind in Anhang C hergeleitet. Die Ermittlung der Induktivitäten eines Transformator-Ersatzschaltbildes ist somit für Komponenten mit oder ohne Ferritkern sehr ähnlich und auch für beide Fälle vergleichbar schnell durchführbar.

Die Simulationen von Verlustleistungen und Induktivitäten nehmen für einen Betriebszustand auch für Komponenten mit mehreren hundert Windungen trotzdem nur wenige Minuten in Anspruch. Beispiele sind in Kapitel 9 dargestellt.

Die parasitären Kapazitäten eines Bauelementes können aus den elektrischen Feldgrößen berechnet werden. Zunächst ist jedoch der Einfluss eines elektrisch (schwach) leitfähigen Ferritkernes zu ermitteln. Dies erfolgt einerseits analog zur magnetischen Ferritkern-Ersatzanordnung des Kapitels 3 mit einer elektrischen Ersatzanordnung gemäß Kapitel 6, andererseits per Orthogonalentwicklung über die Randbedingungen der Problemstellung in Kapitel 8. Auch die elektrischen Feldstärke- und Potentialanteile der elektrischen Kern-Ersatzanordnung können weitgehend analytisch berechnet werden wie in Anhang D hergeleitet.

Zur Ermittlung der elektrischen Feldstärke wird das Bauelement in Kapitel 7 als Mehrleiterystem betrachtet, wobei für jeden Leiter ein Randwertproblem formuliert wird. Dies entspricht zunächst dem Prinzip der Verlustberechnung gemäß Albach [2]. Anschließend können die Kapazitäten über das Coulomb-Gesetz (1.23) bestimmt werden. Die Simulationsergebnisse liegen jedoch in ungeeigneter Form (in einer Kapazitätsmatrix) vor. Für die Umformung in eine zur Verwendung in Schaltkreissimulatoren besser auswertbare Matrix aus Teilkapazitäten wurde sowohl ein netzwerktheoretischer als auch ein energiebasierter Ansatz vorgestellt. Diese Teilkapazitäten können direkt in ein elektrisches Ersatzschaltbild übernommen werden.

Kapitel 8 liefert die Lösung zur Berechnung der elektrischen Feldstärke im Bereich der Windungen. Die entscheidenden Erweiterungen zum Randwertproblem gemäß Kapitel 7 sind hier

- die Wahl des Koordinatensystems und die sich daraus ergebenden Lösungsfunktionen,
- die Kombination der Orthogonalentwicklung der Randbedingungen mit der elektrischen Ferritkern-Ersatzanordnung gemäß Kapitel 6, sowie
- die Verbesserung der Konvergenz durch Zusammenfassung der Gleichungssysteme einzelner Leiter zu Gleichungssystemen von Leiterpaketen in Abschnitt 8.4.

Eine mathematische Untersuchung des Konvergenzverhaltens dieses Verfahrens muss jedoch Folgearbeiten überlassen werden, da die vorliegende Arbeit das Ziel der numerischen Implementierung verfolgte. Es konnte lediglich im praktischen Vergleich festgestellt werden, dass bei Verkleinerung der Gleichungssysteme das gleiche Verfahren am selben Beispiel erheblich langsamer oder gar nicht mehr konvergierte.

Die Simulationen von Verlustleistungen und Induktivitäten nehmen für einen Betriebszustand auch bei mehreren hundert Windungen trotzdem nur wenige Minuten in Anspruch. Am Vergleich zwischen Simulationen und Messungen konnte in Kapitel 9 auch eine gute Übereinstimmung mit dem Verfahren nach Koch [22] nachgewiesen werden. Darüber hinaus können Kapazitäten zwischen beliebig angeordneten Transformator-Wicklungen auf rotationssymmetrischen Wickelkörpern und auch Kapazitäten zwischen Wicklungen und dem Ferritkern in guter Näherung berechnet werden.

In Verbindung mit dem messtechnischen Nachweis der Anwendbarkeit der Modellierungsverfahren dieser Arbeit sind in Kapitel 9 die nötigen Umformungen erläutert, welche zum Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Messungen erforderlich sind und zu reproduzierbaren Messungen führen.

*Zusammenfassung*

# A Die Maxwellgleichungen in ihrer integralen Form

Mit Hilfe des *Satzes von Gauss*

$$\iiint_V \operatorname{div} \underline{\underline{F}} dV = \oint_{\partial V} \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{a} \quad (\text{A.1})$$

und des *Satzes von Stokes*

$$\iint_A \operatorname{rot} \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{a} = \oint_{\partial A} \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{s} \quad (\text{A.2})$$

können die Maxwellgleichungen der differentiellen Form gemäß Gl. (1.4) in ihre integrale Form überführt werden (vergl. Kröger [23])

$$\oint_{\partial V} \underline{\underline{D}} \cdot d\underline{a} = \iiint_V \rho_f dV = Q_f \quad \text{Coulomb-Gesetz,} \quad (\text{A.3 a})$$

$$\oint_{\partial A} \underline{\underline{E}} \cdot d\underline{s} = - \iint_A (j\omega \underline{\underline{B}}) \cdot d\underline{a} \quad \text{Induktionsgesetz,} \quad (\text{A.3 b})$$

$$\oint_{\partial V} \underline{\underline{B}} \cdot d\underline{a} = 0 \quad \text{Quellenfreiheit von } \underline{\underline{B}}, \quad (\text{A.3 c})$$

$$\oint_{\partial A} \underline{\underline{H}} \cdot d\underline{s} = \iint_A (\underline{\underline{J}}_f + j\omega \underline{\underline{D}}) \cdot d\underline{a} \quad \text{Durchflutungsgesetz.} \quad (\text{A.3 d})$$

## *A Integrale Maxwellgleichungen*

## B Magnetostatische Felder einfacher Stromanordnungen

Im folgenden Abschnitt werden einfache, endlich ausgedehnte stromführende Anordnungen betrachtet, deren magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  und Vektorpotential  $\vec{A}$  zu berechnen sind.

Die Herleitung der folgenden Formeln erfolgte teilweise auch im Rahmen dieser Arbeit und ist durch entsprechende Verweise in mathematische Nachschlagewerken wie [10], [1] oder [17] transparent dargestellt.

Hierbei werden zur Referenzierung von Formeln anderer Autoren (gemäß Anhang F) folgende Symbole verwendet:

[1] ( $X$ )	Gleichung Nr. $X$ bei Abramowitz [1]
[10] $\int X \int$	unbestimmtes Integral Nr. $X$ gemäß Bronstein [10], Abschnitt 1.1.3.3.
[17] ( $X$ )	Gleichung Nr. $X$ bei Gradshteyn [17]

### B.1 Linienstrom

Die erste elementare Anordnung wird gemäß der Darstellung von Kröger [23] übernommen.

In einem kartesischen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  fließt entlang einer Strecke zwischen dem Punkt  $P_1$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_1 = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z$  und dem Punkt  $P_2$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_2 = x_2 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y + z_2 \vec{e}_z$  der Strom  $I$  (vergl. Abbildung B.1).

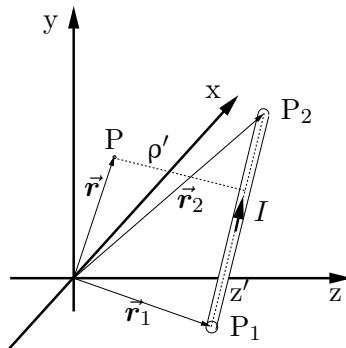


Abbildung B.1: Stromführende Strecke

In einem beliebigen Punkt  $P$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$  außerhalb der stromführenden

## B Magnetostatische Felder

den Strecke sollen magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  und Vektorpotential  $\vec{A}$  der Anordnung berechnet werden. Die Berechnung erfolgt mit der Formel von Biot-Savart.

Den Definitionen bei Kröger [23] folgend

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_{z'} &= \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \\
 \vec{n}_{\varphi'} &= \vec{e}_{z'} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \\
 \vec{e}_{\varphi'} &= \frac{\vec{n}_{\varphi'}}{|\vec{n}_{\varphi'}|} \\
 \vec{e}_{\rho'} &= \vec{e}_{\varphi'} \times \vec{e}_{z'} \\
 \rho' &= \vec{e}_{\rho'} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) \\
 z' &= \vec{e}_{z'} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) \\
 z'_1 &= 0 \\
 z'_2 &= |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

ist die magnetische Feldstärke

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi\rho'} \cdot \left[ \frac{z' - z'_1}{\sqrt{(z' - z'_1)^2 + \rho'^2}} - \frac{z' - z'_2}{\sqrt{(z' - z'_2)^2 + \rho'^2}} \right] \vec{e}_{\varphi'} \tag{B.2}$$

und das Vektorpotential lautet

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(\vec{r}) &= \vec{e}_{z'} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{1}{\sqrt{(z' - z_Q)^2 + \rho'^2}} dz_Q \\
 &\stackrel{[10]}{=} \vec{e}_{z'} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \operatorname{arsinh} \frac{z_Q - z'}{\rho'} \right]_{z_Q=z'_1}^{z_Q=z'_2} \\
 &\stackrel{[10]}{=} \vec{e}_{z'} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \ln \left( z_Q - z' + \sqrt{(z_Q - z')^2 + \rho'^2} \right) \right]_{z_Q=z'_1}^{z_Q=z'_2}.
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

## B.2 Ebener Strombelag

In einem kartesischen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  ist im Bereich  $0 \leq x \leq x_2$ ,  $0 \leq y \leq y_2$  der Ebene  $z = 0$  ein ebener Strombelag (vergl. Abbildung B.2) vorhanden:

$$\vec{K}(y) = K_x(y) \vec{e}_x \quad (\text{B.4 a})$$

mit

$$K_x(y) = \frac{K_2 - K_1}{y_2} y + K_1 = sy + k. \quad (\text{B.4 b})$$

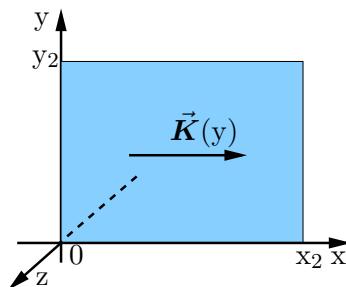


Abbildung B.2: ebener Strombelag

In einem beliebigen Punkt P mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ , jedoch außerhalb des stromführenden Bereiches, wird die magnetische Feldstärke  $\vec{H}_K(\vec{r})$  des Strombelags entsprechend der Helmholtzschen Integralgleichung (2.3) (für Gleichstrom, bzw.  $\omega = 0$ ) beschrieben durch

$$\vec{H}_K(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{x_2} \int_0^{y_2} K_x(y_Q) \vec{e}_x \times \frac{(x - x_Q) \vec{e}_x + (y - y_Q) \vec{e}_y + (z - z_Q) \vec{e}_z}{[(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2]^{\frac{3}{2}}} dy_Q dx_Q. \quad (\text{B.5})$$

## B Magnetostatische Felder

Mit Hilfe der Substitutionen  $\tilde{y} = y_Q - y$ ,  $\tilde{y}_1 = -y$  und  $\tilde{y}_2 = y_2 - y$  kann die Integration nach  $y_Q$  analytisch durchgeführt werden

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_K(\vec{r}) &= \frac{-1}{4\pi} \int_0^{x_2} \int_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2} \frac{\overbrace{s\tilde{y}^2 \vec{e}_z}^{[10] f^{208f}} + \overbrace{s\tilde{y}(z - z_Q) \vec{e}_y}^{[10] f^{207f}} + \dots}{[(x - x_Q)^2 + \tilde{y}^2 + \dots]} \\
 &\quad \cdot \frac{\overbrace{\dots + (k + sy)\tilde{y}\vec{e}_z}^{[10] f^{207f}} + \overbrace{(k + sy)(z - z_Q)\vec{e}_y}^{[10] f^{206f}}}{\dots + (z - z_Q)^2} d\tilde{y} dx_Q \\
 &= \frac{s}{4\pi} \int_0^{x_2} \left[ \overbrace{\frac{\tilde{y}}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + \tilde{y}^2 + (z - z_Q)^2}}}^{[10] f^{192f}} + \right. \\
 &\quad \left. - \overbrace{\text{arsinh}\left(\frac{\tilde{y}}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + (z - z_Q)^2}}\right)}^{\text{Gl. (B.10)}} \right]_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2} dx_Q \vec{e}_z \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} [s(z - z_Q)\vec{e}_y + (k + sy)\vec{e}_z] \cdot \\
 &\quad \cdot \int_0^{x_2} \left[ \overbrace{\frac{1}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + \tilde{y}^2 + (z - z_Q)^2}}}^{[10] f^{192f}} \right]_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2} dx_Q \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi} (k + sy)(z - z_Q) \int_{x_1}^{x_2} \left[ \overbrace{\frac{\tilde{y}}{[(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2]}}^{[10] f^{267f}} \dots \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + \tilde{y}^2 + (z - z_Q)^2}} \right]_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2} dx_Q \vec{e}_y. \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

Zur Erhöhung der Lesbarkeit werden die Stammfunktionen  $F_1$  bis  $F_4$  eingeführt

$$\begin{aligned}
 F_1(\chi, \eta, \theta) &:= \int \frac{1}{\sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} d\chi \\
 &= \text{arsinh}\left(\frac{\chi}{\sqrt{\eta^2 + \theta^2}}\right) + C_1 \\
 &= \ln\left(\chi + \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}\right) + C'_1, \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\chi, \eta, \theta) &:= \int \frac{1}{(\chi^2 + \theta^2) \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} d\chi \\ &\stackrel{[10] f^{267f}}{=} \frac{1}{|\eta| \theta} \arctan \left( \frac{\chi |\eta|}{|\theta| \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} \right) + C_2, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} F_3(\chi, \eta, \theta) &:= \int \frac{\chi^2}{(\chi^2 + \theta^2) \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} d\chi \\ &= \int \frac{(\chi^2 + \theta^2) - \theta^2}{(\chi^2 + \theta^2) \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} d\chi \\ &= F_1(\chi, \eta, \theta) - \theta^2 \cdot F_2(\chi, \eta, \theta) \\ &= \operatorname{arsinh} \left( \frac{\chi}{\sqrt{\eta^2 + \theta^2}} \right) \\ &\quad - \frac{|\theta|}{|\eta|} \arctan \left( \frac{|\eta| \chi}{|\theta| \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} \right) + C_3, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} F_4(\chi, \eta, \theta) &:= \int \operatorname{arsinh} \left( \frac{\eta}{\sqrt{\chi^2 + \theta^2}} \right) d\chi \\ &= (\chi + C_4) \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{\eta}{\sqrt{\chi^2 + \theta^2}} \right) + \eta \int \frac{\chi (\chi + C_4)}{(\chi^2 + \theta^2) \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} d\chi \\ &= \chi \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{\eta}{\sqrt{\chi^2 + \theta^2}} \right) + \eta \int \frac{\chi^2}{(\chi^2 + \theta^2) \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} d\chi \\ &= \chi \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{\eta}{\sqrt{\chi^2 + \theta^2}} \right) + \eta F_3(\chi, \eta, \theta) + C'_4 \\ &= \chi \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{\eta}{\sqrt{\chi^2 + \theta^2}} \right) + \eta F_1(\chi, \eta, \theta) - \eta \theta^2 \cdot F_2(\chi, \eta, \theta) + C''_4 \\ &= \chi \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{\eta}{\sqrt{\chi^2 + \theta^2}} \right) + \eta \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{\chi}{\sqrt{\eta^2 + \theta^2}} \right) \\ &\quad - |\theta| \operatorname{sgn}(\eta) \arctan \left( \frac{|\eta| \chi}{|\theta| \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} \right) + C'''_4. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Die Integrationskonstanten  $C_1, C'_1, C_2, C_3, C_4, C'_4, C''_4$  und  $C'''_4$  sind noch unbestimmt.

## B Magnetostatische Felder

Abschließend wird die magnetische Feldstärke für den in Abb. B.2 dargestellten Strombelag (mit  $z_Q = 0$ ,  $x_1 = 0$  und  $y_1 = 0$ ) mit Hilfe dieser Stammfunktionen notiert

$$\vec{H}_K(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[ \begin{aligned} & \left[ \vec{e}_z s \{ \eta F_1(\chi, \eta, z) - F_4(\chi, \eta, z) \} \right. \\ & + \{ s z \vec{e}_y + (k + sy) \vec{e}_z \} F_1(\chi, \eta, z) \\ & \left. - \vec{e}_y (k + sy) z \eta F_2(\chi, \eta, z) \right]_{\eta=-y}^{\eta=y_2-y} \right]_{\chi=x}^{x=x-x_2} \quad (B.11)$$

bzw. nach weiterer Zusammenfassung der Stammfunktionen

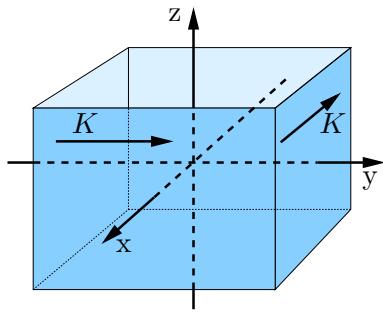
$$\begin{aligned} \vec{H}_K(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \left[ \begin{aligned} & \left[ \vec{e}_y \{ s z F_1(\chi, \eta, z) - (k + sy) z \eta F_2(\chi, \eta, z) \} \right. \\ & + \vec{e}_z \left\{ (k + sy) F_1(\chi, \eta, z) + s \eta z^2 F_2(\chi, \eta, z) \right. \\ & \left. - s \chi \operatorname{arsinh} \left( \frac{\eta}{\sqrt{\chi^2 + z^2}} \right) \right\} \right]_{\eta=-y}^{\eta=y_2-y} \right]_{\chi=x}^{x=x-x_2} \\ &= H_{K,y}(x, y, z, x_2, y_2) \vec{e}_y + H_{K,z}(x, y, z, x_2, y_2) \vec{e}_z . \end{aligned} \quad (B.12)$$

Auch das Vektorpotential für diesen Strombelag kann analytisch berechnet und mit Hilfe der Stammfunktionen  $F_1$  bis  $F_4$  dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
 \vec{A}_K(x, y, z) &= \vec{e}_x \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{sy_Q + k}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2}} dy_Q dx_Q \\
 &\stackrel{[10] f^{193f}}{=} \vec{e}_x \frac{\mu_0}{4\pi} s \int_{x_1}^{x_2} \left[ \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2} \right]_{y_Q=y_1}^{y_Q=y_2} dx_Q \\
 &\stackrel{[10] f^{192f}}{=} + \vec{e}_x \frac{\mu_0}{4\pi} (sy + k) \cdot \\
 &\quad \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left[ \operatorname{arsinh} \left( \frac{y_Q - y}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + (z - z_Q)^2}} \right) \right]_{y_Q=y_1}^{y_Q=y_2} dx_Q \\
 &\stackrel{[10] f^{185f}}{=} \vec{e}_x \frac{\mu_0 s}{8\pi} \left[ \left[ (x_Q - x) \cdot \right. \right. \\
 &\quad \cdot \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2} \left. \right]_{y_Q=y_1}^{y_Q=y_2} \Big|_{x_Q=x_1}^{x_Q=x_2} \\
 &\quad + \vec{e}_x \frac{\mu_0 s}{8\pi} \left[ \left[ \left\{ (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2 \right\} \cdot \right. \right. \\
 &\quad \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{x_Q - x}{\sqrt{(y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2}} \right) \left. \right]_{y_Q=y_1}^{y_Q=y_2} \Big|_{x_Q=x_1}^{x_Q=x_2} \\
 &\stackrel{\text{Gl. (B.10)}}{=} + \vec{e}_x \frac{\mu_0}{4\pi} (sy + k) \left[ \left[ F_4(x - x_Q, y - y_Q, z - z_Q) \right]_{y_Q=y_1}^{y_Q=y_2} \right]_{x_Q=x_1}^{x_Q=x_2}.
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

### B.2.1 Schleife aus ebenen Strombelägen

Aus einzelnen ebenen Strombelägen gemäß Abbildung B.2 wird nun eine geschlossene Strombelagsschleife zusammengesetzt wie in Abbildung B.3 dargestellt. Die Strombelagsschleife erstreckt sich über eine Höhe  $2h$  und umschließt ein Rechteck der Breite  $2b$  und Tiefe  $2l$ . Ein kartesisches Koordinatensystem  $(x, y, z)$  wird im Zentrum der Schleife so angeordnet, dass der Strombelag die  $z$ -Achse im Rechtsschraubensinn umschließt (vergl. Abbildung B.3).



**Abbildung B.3:** Strombelagsschleife um die  $z$ -Achse

Die magnetische Feldstärke dieser Schleife kann in einem beliebigen Punkt  $(x, y, z)$  (außerhalb der Bereiche, in denen die Strombeläge fließen) mit Hilfe einer Überlagerung der zuvor berechneten magnetischen Feldstärken gemäß Gl. (B.12) bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \vec{H}_m(x, y, z) = & \vec{e}_x [H_{K,z}(y + l, z + h, x - b, 2l, 2h) \\ & - H_{K,z}(y + l, z + h, x + b, 2l, 2h)] \\ & + \vec{e}_y [H_{K,z}(-x + b, z + h, y - l, 2b, 2h) \\ & - H_{K,z}(-x + b, z + h, y + l, 2b, 2h)] \\ & + \vec{e}_z [H_{K,y}(y + l, z + h, x - b, 2l, 2h) \\ & - H_{K,y}(y + l, z + h, x + b, 2l, 2h) \\ & + H_{K,y}(-x + b, z + h, y - l, 2b, 2h) \\ & - H_{K,y}(-x + b, z + h, y + l, 2b, 2h)] . \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

## B.3 Strombelagsführender Zylinder

### B.3.1 Strombelagsführender Zylindermantel

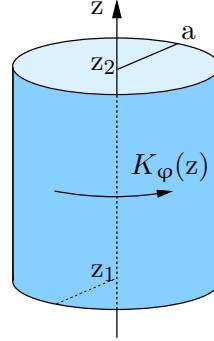
In einem Zylinderkoordinatensystem  $(\rho, \varphi, z)$  fließt im Bereich  $z_1 \leq z \leq z_2$  auf der Manteloberfläche eines Zylinders mit dem Radius  $a$  ein Strombelag

$$\vec{K}(z) = K_\varphi(z) \vec{e}_\varphi \quad (\text{B.15 a})$$

mit

$$K_\varphi(z) = \frac{K'_2 - K'_1}{z_2 - z_1} (z - z_1) + K'_1 = s'z + k'. \quad (\text{B.15 b})$$

Zu berechnen sind das Vektorpotential  $\vec{A}_K$  und die magnetische Feldstärke  $\vec{H}_K$  dieses Strombelags in einem beliebigen Punkt  $P$  der rotationssymmetrischen Anordnung mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ), jedoch außerhalb des stromführenden Bereiches.



**Abbildung B.4:** Strombelagsführender Zylindermantel

Zur Berechnung des Vektorpotentials wird zunächst das elliptische Integral

$$G(\eta, \rho, z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + \frac{\rho^2 + z^2}{\eta^2} - 2\frac{\rho}{\eta} \cos \varphi}} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + \frac{\rho^2 + z^2}{\eta^2} - 2\frac{\rho}{\eta} \cos \varphi}} d\varphi \quad (\text{B.16})$$

eingeführt. Das Vektorpotential ist dann entsprechend der Helmholtzschen Integralgleichung (2.4) (für Gleichstrom, bzw.  $\omega = 0$ ) beschrieben durch

$$\vec{A}_K(\rho, z) = \vec{e}_\varphi \mu_0 \int_{z_1}^{z_2} K_\varphi(z_Q) G(a, \rho, z - z_Q) dz_Q. \quad (\text{B.17})$$

Zur Berechnung der magnetischen Feldstärke wird der Zusammenhang (1.10 b) ausgenutzt

$$\mu_0 \vec{H}_K = \text{rot } \vec{A}_K = -\vec{e}_\rho \frac{\partial A}{\partial z} + \vec{e}_z \left( \frac{A}{\rho} + \frac{\partial A}{\partial \rho} \right), \quad (\text{B.18})$$

## B Magnetostatische Felder

was die Einführung der partiellen Ableitungen des elliptischen Integrals  $G$  erfordert

$$\partial_z G(\eta, \rho, z) := \frac{\partial}{\partial z} G(\eta, \rho, z) = -\frac{z}{2\pi\eta^2} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{\left(1 + \frac{\rho^2+z^2}{\eta^2} - 2\frac{\rho}{\eta} \cos \varphi\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \quad (\text{B.19})$$

und

$$\partial_\rho G(\eta, \rho, z) := \frac{\partial}{\partial \rho} G(\eta, \rho, z) = \frac{-1}{2\pi\eta} \int_0^\pi \frac{\left[\frac{\rho}{\eta} - \cos \varphi\right] \cdot \cos \varphi}{\left(1 + \frac{\rho^2+z^2}{\eta^2} - 2\frac{\rho}{\eta} \cos \varphi\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi. \quad (\text{B.20})$$

Die magnetische Feldstärke  $\vec{H}_K = \vec{e}_\rho H_\rho + \vec{e}_z H_z$  besteht gemäß Gl. (B.18) aus den zwei Komponenten

$$H_\rho(\rho, z) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A}{\partial z} = -\int_{z_1}^{z_2} K_\varphi(z_Q) \partial_z G(a, \rho, z - z_Q) dz_Q \quad (\text{B.21})$$

und

$$H_z(\rho, z) = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{A}{\rho} + \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) = \int_{z_1}^{z_2} K_\varphi(z_Q) \left[ \frac{1}{\rho} G(a, \rho, z - z_Q) + \partial_\rho G(a, \rho, z - z_Q) \right] dz_Q. \quad (\text{B.22})$$

### B.3.2 Strombelagsführender Kreisring

Auf der kreisringförmigen Fläche mit den Radien  $\rho_2$  und  $\rho_1$  um die z-Achse eines Zylinderkoordinatensystems  $(\rho, \varphi, z)$  in Abbildung B.5 wird ein rotationssymmetrischer Strombelag

$$\vec{K}'(\rho) = K'_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi \quad (\text{B.23 a})$$

mit

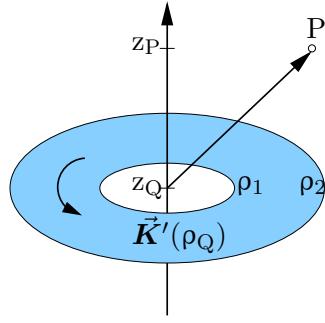
$$K'_\varphi(\rho) = \frac{K''_2 - K''_1}{\rho_2 - \rho_1} (\rho - \rho_1) + K''_1 = s''\rho + k''. \quad (\text{B.23 b})$$

eingeprägt, welcher im Bereich  $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$  den Punkt  $(0, z_Q)$  auf der z-Achse im Rechtsschraubensinn umfließt. Erneut sind das Vektorpotential  $\vec{A}_K$  und die magnetische Feldstärke  $\vec{H}_K$  dieses Strombelags in einem beliebigen Punkt P der rotationssymmetrischen Anordnung mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) zu berechnen, jedoch außerhalb des stromführenden Bereiches.

Basierend auf der Einführung des elliptischen Integrals gemäß Gl. (B.16) und den partiellen Ableitungen nach Gl. (B.19) und Gl. (B.20) kann die Integration der Feldbeiträge über die Quellen vergleichbar zu den Berechnungen in Abschnitt B.3.1 erfolgen.

Das Vektorpotential ist dann

$$\vec{A}_K(\rho, z) = \vec{e}_\varphi \mu_0 \int_{\rho_1}^{\rho_2} K_\varphi(\rho_Q) G(\rho_Q, \rho, z - z_Q) d\rho_Q \quad (\text{B.24})$$



**Abbildung B.5:** Strombelagsführende Kreisringfläche

und die Komponenten der magnetischen Feldstärke sind beschrieben durch

$$H_\rho(\rho, z) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A}{\partial z} = -\int_{\rho_1}^{\rho_2} K_\varphi(\rho_Q) \partial_z G(\rho_Q, \rho, z - z_Q) d\rho_Q \quad (\text{B.25})$$

und

$$\begin{aligned} H_z(\rho, z) &= \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{A}{\rho} + \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) \\ &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} K_\varphi(\rho_Q) \left[ \frac{1}{\rho} G(\rho_Q, \rho, z - z_Q) + \partial_\rho G(\rho_Q, \rho, z - z_Q) \right] d\rho_Q. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

### B.3.3 Stromführender Kreis

Schrumpft die Zylinderhöhe  $z_2 \rightarrow z_1$  der Anordnung aus Abschnitt B.3.1, Abbildung B.4 bei gleichbleibendem Gesamtstrom  $I_K$

$$K_\varphi(z) = I_K \cdot \delta(z - z_1), \quad (\text{B.27})$$

so ist das Vektorpotential gemäß Gl. (B.17) beschrieben durch

$$\vec{A}_K(\rho, z) = \vec{e}_\varphi \mu_0 I_K G(a, \rho, z - z_1) \quad (\text{B.28})$$

und die Komponenten der magnetischen Feldstärke lauten

$$H_\rho(\rho, z) = -I_K \partial_z G(a, \rho, z - z_1) \quad (\text{B.29})$$

bzw.

$$H_z(\rho, z) = I_K \left[ \frac{1}{\rho} G(a, \rho, z - z_1) + \partial_\rho G(a, \rho, z - z_1) \right]. \quad (\text{B.30})$$

*B Magnetostatische Felder*

# C Gegeninduktivitätsbeiträge einfacher Leiteranordnungen

Im folgenden Abschnitt werden Gegeninduktivitätsbeiträge einfacher, endlich ausgedehnter stromführender Teilanordnungen betrachtet, welche zur Berechnung von Gegeninduktivitäten von Leiterschleifen gemäß dem in Kapitel 5 beschriebenen Verfahren verwendet (bzw. aufsummiert) werden.

Die Herleitung der folgenden Formeln erfolgte zum Großteil im Rahmen dieser Arbeit und ist durch entsprechende Verweise in mathematische Nachschlagewerken wie [10], [1] oder [17] transparent dargestellt.

Hierbei werden zur Referenzierung von Formeln anderer Autoren (gemäß Anhang F) erneut folgende Symbole verwendet:

[1] ( $X$ )	Gleichung Nr. $X$ bei Abramowitz [1]
[10] $\int X f$	unbestimmtes Integral Nr. $X$ gemäß Bronstein [10], Abschnitt 1.1.3.3.
[17] ( $X$ )	Gleichung Nr. $X$ bei Gradshteyn [17]

## C.1 Parallele Leiterstrecken

Im kartesischen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  fließt der Strom  $I_1$  entlang der  $x$ -Achse im Bereich  $0 \leq x \leq l$ . Ein weiterer Strom  $I_2$  fließt parallel zum ersten mit dem Lotfußpunktabstand  $\rho = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$ . Der Strom  $I_2$  fließt im Bereich  $x_a \leq x \leq x_b$ . Die entsprechende Anordnung der Leiterstrecken ist in Abbildung C.1 dargestellt.

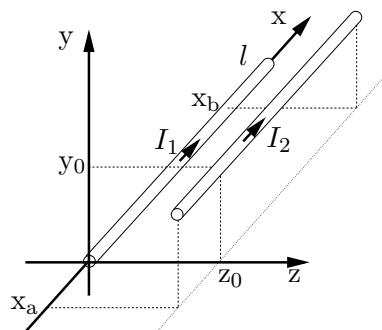


Abbildung C.1: parallele Leiterstrecken

## C Gegeninduktivitätsbeiträge

Die Definition der Hilfsfunktion

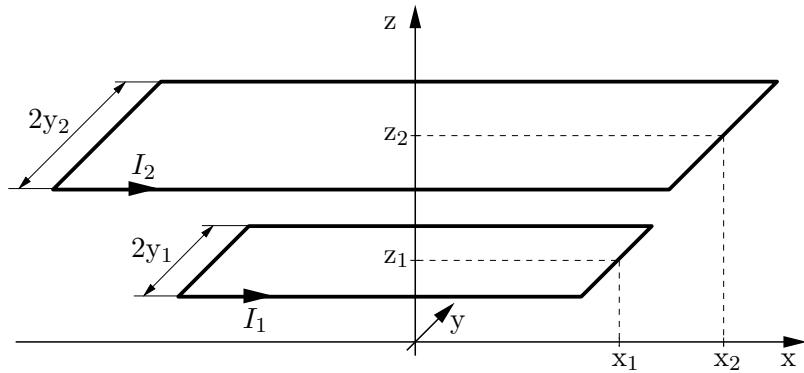
$$f_L(\chi) := \chi \operatorname{arsinh} \chi - \sqrt{\chi^2 + 1} \quad (\text{C.1})$$

ermöglicht eine besonders übersichtliche Darstellung des Gegeninduktivitätsbeitrages der beiden Leiterstücke

$$\begin{aligned} \Lambda_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \int_{x_a}^{x_b} \frac{1}{\sqrt{(\tau - \eta)^2 + \rho^2}} d\tau d\eta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \rho \left[ -f_L\left(\frac{l - x_b}{\rho}\right) + f_L\left(\frac{l - x_a}{\rho}\right) + f_L\left(\frac{-x_b}{\rho}\right) - f_L\left(\frac{-x_a}{\rho}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

## C.2 Symmetrische Anordnung aus rechteckförmigen Stromschleifen

Zwei rechteckförmige Leiterschleifen sind — wie in Abbildung C.2 skizziert — konzentrisch angeordnet.



**Abbildung C.2:** Symmetrische Anordnung aus rechteckförmigen Stromschleifen

Ihre Gegeninduktivität ist nach Abschnitt C.1 gegeben durch

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{\mu_0}{\pi} \left\{ c_1 \left[ f_L\left(\frac{x_1 + x_2}{c_1}\right) - f_L\left(\frac{x_1 - x_2}{c_1}\right) \right] \right. \\ &\quad - c_2 \left[ f_L\left(\frac{x_1 + x_2}{c_2}\right) - f_L\left(\frac{x_1 - x_2}{c_2}\right) \right] \\ &\quad + c_3 \left[ f_L\left(\frac{y_1 + y_2}{c_3}\right) - f_L\left(\frac{y_1 - y_2}{c_3}\right) \right] \\ &\quad \left. - c_4 \left[ f_L\left(\frac{y_1 + y_2}{c_4}\right) - f_L\left(\frac{y_1 - y_2}{c_4}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

mit

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 c_2 &= \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (y_2 + y_1)^2} \\
 c_3 &= \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \\
 c_4 &= \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (x_2 + x_1)^2}.
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

### C.3 Windschiefe Leiterstrecken

Zwei stromdurchflossene Leiterstrecken liegen windschief zueinander im Raum wie in Abbildung C.3 dargestellt.

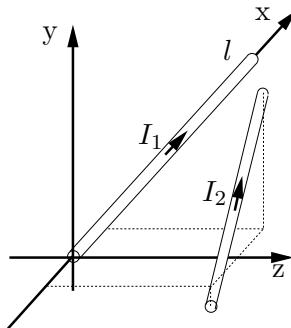


Abbildung C.3: windschiefe Leiterstrecken

Zur Berechnung des Gegeninduktivitätsbeitrages

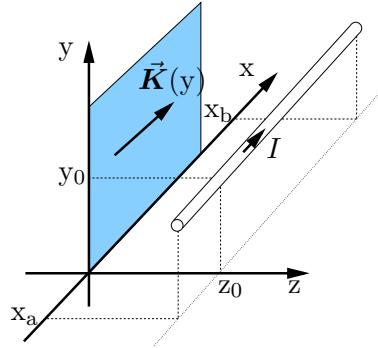
$$\Lambda_{12} = \int_0^l \frac{\vec{A}_2(x, 0, 0)}{I_2} \vec{e}_x \, dx \tag{C.5}$$

wird die x-Komponente des Vektorpotentials  $\vec{A}_2$  des zweiten Stromes  $I_2$  entlang des ersten Leiterstückes auf der x-Achse benötigt.  $\vec{A}_2$  kann gemäß Gl. (B.3) berechnet werden.

### C.4 Leiterstrecke vor ebenem Strombelag

Vor einem ebenen Strombelagselement  $\vec{K}(y)$  der Breite  $x_2$  und Höhe  $y_2$ , wie in Abschnitt B.2, Gl. (B.4) beschrieben, fließt ein Strom  $I$  in einer kurzen Leiterstrecke. Die Anordnung ist in Abbildung C.4 skizziert.

## C Gegeninduktivitätsbeiträge



**Abbildung C.4:** Leiterstrecke vor ebenem Strombelag

Der Strombelag  $\vec{K}$  führt einen Gesamtstrom

$$I_K = \int_0^{y_2} K_x(y_Q) dy_Q = \frac{1}{2} s y_2^2 + k y_2 = \frac{1}{2} (K_1 + K_2) y_2. \quad (\text{C.6})$$

Der Gegeninduktivitätsbeitrag  $\Lambda_{KI}$  der beiden Leiter (zur Gegeninduktivität zweier Leiterschleifen) kann gemäß Gl. (5.7) und (5.8) durch eine Integration

$$\Lambda_{KI} = \int_0^{y_2} \int_0^{x_2} \frac{\vec{K}(y_Q)}{I_K} \cdot \frac{\vec{A}_I}{I} \Big|_{z_Q=0} dx_Q dy_Q \quad (\text{C.7})$$

über das Produkt der aus dem Strombelag  $\vec{K}$  und dem Vektorpotential  $\vec{A}_I$  des dünnen Stromelementes  $I$  gemäß Gl. (B.3) im Bereich des Strombelags berechnet werden.

Alternativ führt auch die Integration

$$\Lambda_{IK} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\vec{A}_K}{I_K} \Big|_{y_Q=y_0, z_Q=z_0} \cdot \frac{I}{I} \vec{e}_x dx_Q = \Lambda_{KI} \quad (\text{C.8})$$

entlang der Leiterstrecke des Stromes  $I$  zum gleichen Ergebnis, ist jedoch analytisch nicht so einfach durchzuführen wie Gl. (C.7).

Es wird daher die Berechnung nach Gl. (C.7) durchgeführt

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{KI} &= \frac{\mu_0}{4\pi I_K} \int_0^{y_2} \int_0^{x_2} (sy_{Q2} + k) \cdot \\
 &\quad \left[ \operatorname{arsinh} \left( \frac{x_Q - x_{Q2}}{\sqrt{(y_0 - y_{Q2})^2 + z_0^2}} \right) \right]_{x_Q=x_a}^{x_Q=x_b} dx_{Q2} dy_{Q2} \\
 &\stackrel{[10] f^{512f}}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi I_K} \int_0^{y_2} (sy_{Q2} + k) \cdot \\
 &\quad \left[ \left[ (x_Q - x_{Q2}) \operatorname{arsinh} \left( \frac{x_Q - x_{Q2}}{\sqrt{(y_0 - y_{Q2})^2 + z_0^2}} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sqrt{(x_Q - x_{Q2})^2 + (y_0 - y_{Q2})^2 + z_0^2} \right]_{x_Q=x_a}^{x_Q=x_b} \right]_{x_{Q2}=0}^{x_{Q2}=x_2} dy_{Q2}, \tag{C.9}
 \end{aligned}$$

wobei auf die nach den Gleichungen (B.7) bis (B.10) definierten Stammfunktionen und weitere Stammfunktionen  $F_5$  bis  $F_9$  zurückgegriffen wird:

$$\begin{aligned}
 F_5(\chi, \eta, \theta) &:= \int \operatorname{arsinh} \left( \frac{\chi}{\sqrt{\eta^2 + \theta^2}} \right) d\chi \\
 &\stackrel{[10] f^{512f}}{=} \chi \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{\chi}{\sqrt{\eta^2 + \theta^2}} \right) - \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}, \tag{C.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_6(\chi, \eta, \theta) &:= \int \arctan \left( \frac{|\eta| \chi}{|\theta| \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} \right) d\chi \\
 &= \chi \cdot \arctan \left( \frac{|\eta| \chi}{|\theta| \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} \right) \\
 &\quad - \int \chi \frac{|\eta \theta|}{(\chi^2 + \theta^2) \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} d\chi \\
 &\stackrel{[10] f^{149f}}{=} \chi \cdot \arctan \left( \frac{|\eta| \chi}{|\theta| \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} \right) \\
 &\quad - \frac{|\theta|}{2} \ln \frac{\sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2} - |\eta|}{\sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2} + |\eta|} \\
 &= \chi \cdot \arctan \left( \frac{|\eta| \chi}{|\theta| \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} \right) \\
 &\quad + |\theta| \operatorname{artanh} \left( \frac{|\eta|}{\sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} \right), \tag{C.11}
 \end{aligned}$$

## C Gegeninduktivitätsbeiträge

$$\begin{aligned}
F_7(\chi, \eta, \theta) &:= \int \chi \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{\eta}{\sqrt{\chi^2 + \theta^2}} \right) d\chi \\
&\stackrel{\text{Gl. (B.10)}}{=} \chi \cdot F_4(\chi, \eta, \theta) - \int F_4(\chi, \eta, \theta) d\chi \\
&= \chi \cdot F_4(\chi, \eta, \theta) - F_7(\chi, \eta, \theta) - \eta \int \overbrace{\operatorname{arsinh} \left( \frac{\chi}{\sqrt{\eta^2 + \theta^2}} \right)}^{\text{Gl. (C.10)}} d\chi \\
&\quad + |\theta| \operatorname{sgn}(\eta) \int \overbrace{\arctan \left( \frac{|\eta| \chi}{|\theta| \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2}} \right)}^{\text{Gl. (C.11)}} d\chi
\end{aligned} \tag{C.12}$$

$$F_7(\chi, \eta, \theta) = \frac{\chi}{2} F_4(\chi, \eta, \theta) - \frac{\eta}{2} F_5(\chi, \eta, \theta) + \frac{|\theta| \operatorname{sgn}(\eta)}{2} F_6(\chi, \eta, \theta), \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
F_8(\chi, \eta, \theta) &:= \int \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2} d\chi \\
&\stackrel{[10] f^{185f}}{=} \frac{1}{2} \left[ \chi \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2} + (\eta^2 + \theta^2) \operatorname{arsinh} \left( \frac{\chi}{\sqrt{\eta^2 + \theta^2}} \right) \right],
\end{aligned} \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned}
F_9(\chi, \eta, \theta) &= \int \chi \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \theta^2} d\chi \\
&\stackrel{[10] f^{186f}}{=} \frac{1}{3} (\chi^2 + \eta^2 + \theta^2)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Der Gegeninduktivitätsbeitrag ist dann beschrieben durch

$$\begin{aligned}
\Lambda_{KI} &= \frac{\mu_0}{4\pi I_K} \left[ \left[ \left[ -s(x_Q - x_{Q2}) F_7(y_{Q2} - y_0, x_Q - x_{Q2}, z_0) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - (sy_0 + k)(x_Q - x_{Q2}) F_4(y_{Q2} - y_0, x_Q - x_{Q2}, z_0) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + s F_9(y_{Q2} - y_0, x_Q - x_{Q2}, z_0) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + (sy_0 + k) F_8(y_{Q2} - y_0, x_Q - x_{Q2}, z_0) \right]_{x_Q=x_a}^{x_Q=x_b} \right]_{x_{Q2}=0}^{x_{Q2}=x_2} \right]_{y_{Q2}=0}^{y_{Q2}=y_2},
\end{aligned} \tag{C.16}$$

## C.5 Kreisschleife vor ebenem Strombelag

Abbildung C.5 zeigt einen ebenen Strombelag gemäß Abschnitt B.2, Gl. (B.4) und eine beliebig orientierte, kreisförmige Leiterschleife vom Radius  $b$ , deren Zentrum  $P_0$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_0 = x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + z_0\vec{e}_z$  so angeordnet ist, dass der in der Kreisschleife fließende Strom  $I$  den Strombelag nicht durchstößt.

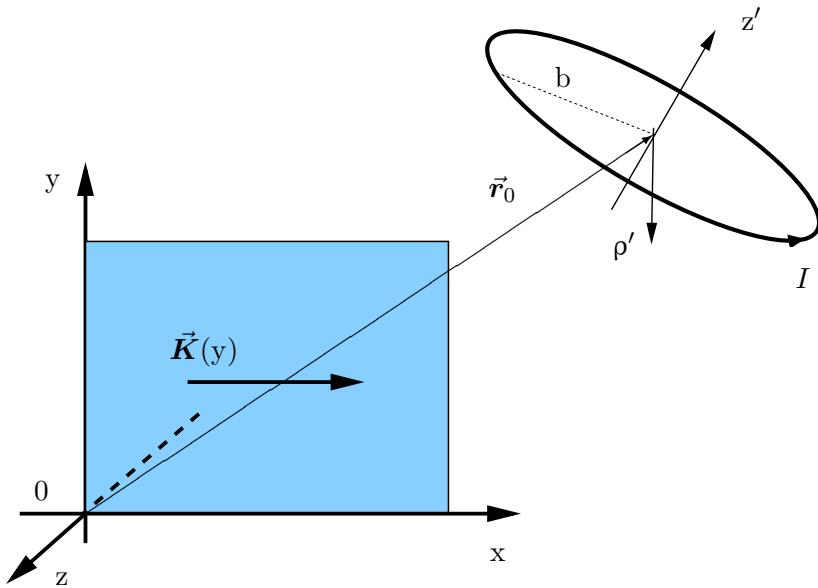


Abbildung C.5: Kreisschleife vor ebenem Strombelag

Für die folgenden Berechnungen wird ein Zylinderkoordinatensystem  $(\rho', \phi', z')$  mit Ursprung im Zentrum der Kreisschleife und der  $z'$ -Achse als Symmetrieachse der Kreisschleife eingeführt, so dass ein Punkt  $P'$  auf der Kreisschleife durch die kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} x_I &= \vec{e}_x \cdot (\vec{r}_0 + \vec{e}_{\rho'} b) \\ y_I &= \vec{e}_y \cdot (\vec{r}_0 + \vec{e}_{\rho'} b) \\ z_I &= \vec{e}_z \cdot (\vec{r}_0 + \vec{e}_{\rho'} b) \end{aligned} \quad (C.17)$$

beschrieben wird, wobei der Einheitsvektor  $\vec{e}_{\rho'}$  in radialer Richtung von der  $z'$ -Achse weg zeigt.

Des Weiteren wird zu dem Zylinderkoordinatensystem der Kreisschleife ein kartesisches Koordinatensystem  $(x', y', z')$  definiert, dessen Einheitsvektoren durch  $\vec{e}_{z'}$  und

$$\begin{aligned} \vec{e}_{y'} &= \frac{\vec{e}_{z'} \times \vec{e}_x}{|\vec{e}_{z'} \times \vec{e}_x|}, \\ \vec{e}_{x'} &= \vec{e}_{y'} \times \vec{e}_{z'} \end{aligned} \quad (C.18)$$

definiert werden können, so dass nun auch die noch fehlenden Einheitsvektoren des Zylinderkoordinatensystems der Kreisschleife beschrieben sind

$$\begin{aligned}\vec{e}_{\rho'} &= \cos(\varphi') \vec{e}_x' + \sin(\varphi') \vec{e}_y', \\ \vec{e}_{\varphi'} &= -\sin(\varphi') \vec{e}_x' + \cos(\varphi') \vec{e}_y'.\end{aligned}\quad (\text{C.19})$$

Das Vektorpotential  $\vec{A}_K$  ist gegeben durch Gl. (B.17) und wird zur Berechnung des Gegeninduktivitätsbeitrages der Anordnung in Abbildung C.5 benötigt:

$$\Lambda_{KI} = \int_0^{2\pi} \frac{\vec{A}_K(x_I, y_I, z_I)}{I_K} \cdot \frac{I}{I} \vec{e}_{\varphi'} b d\varphi'. \quad (\text{C.20})$$

Dieser Beitrag verschwindet ( $\Lambda_{KI} = 0$ ), wenn die  $z'$ -Achse parallel zur  $x$ -Achse liegt ( $\vec{e}_x \parallel \vec{e}_{z'}$ ). Zum Beweis sei auf die Gl. (2.4) verwiesen, wonach das Vektorpotential  $\vec{A}_K$  des  $x$ -gerichteten Strombelages  $\vec{K}$  nur eine  $x$ -Komponente hat, während der Einheitsvektor  $\vec{e}_{\varphi'}$  für den Fall  $\vec{e}_x \parallel \vec{e}_{z'}$  stets orthogonal zu  $\vec{e}_x$  ist.

## C.6 Zylindermantel und Leiterstrecke

Ein Strombelag  $\vec{K}'$  auf einer Zylindermantelfläche gemäß der Beschreibung in Abschnitt B.3.1 führt den Gesamtstrom

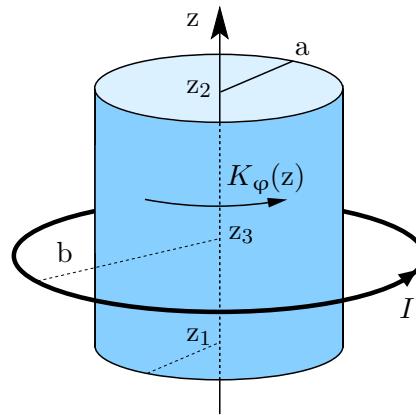
$$I_K = \int_{z_1}^{z_2} K_\varphi(z_Q) dz_Q = \frac{1}{2} s' (z_2^2 - z_1^2) + k' (z_2 - z_1) = \frac{1}{2} (K'_1 + K'_2) (z_2 - z_1). \quad (\text{C.21})$$

Auf der Strecke vom Punkt  $P_1$  zum Punkt  $P_2$  mit den Ortsvektoren  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  fließt ein linienhafter Strom  $I_2$ . Das Vektorpotential  $\vec{A}_K$  ist gegeben durch Gl. (B.17). Der Gegeninduktivitätsbeitrag der beiden Leiter (zur Gegeninduktivität zweier Leiterschleifen) ist somit

$$\begin{aligned}\Lambda_{KI} &= \int_0^{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \frac{\vec{A}_K(\vec{e}_\rho \cdot [\vec{r}_1 + \vec{e}_{z'} z'], \vec{e}_z \cdot [\vec{r}_1 + \vec{e}_{z'} z'])}{I_K} \cdot \frac{I_2}{I_2} \vec{e}_{z'} dz' \\ &\quad \text{mit} \quad \vec{e}_{z'} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}.\end{aligned}\quad (\text{C.22})$$

## C.7 Konzentrische Anordnung aus stromführendem Zylindermantel und stromführender Kreisschleife

Ein Strombelag  $\vec{K}'$  auf einer Zylindermantelfläche gemäß der Beschreibung in Abschnitt B.3.1 führt den Gesamtstrom gemäß Gl. (C.21). Der Zylindermantel wird konzentrisch von einem Strom  $I$  auf einem Kreis vom Radius  $b$  und Ursprung bei  $(0, 0, z_3)$  umflossen, wie in Abbildung C.6 dargestellt.



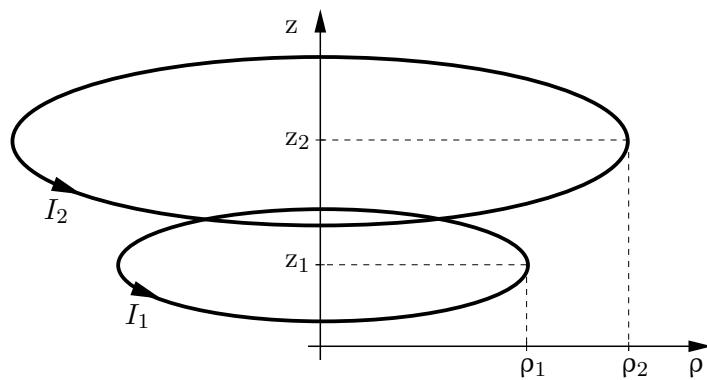
**Abbildung C.6:** Konzentrische Anordnung aus stromführendem Zylindermantel und stromführender Kreisschleife

Das Vektorpotential  $\vec{A}_K$  ist gegeben durch Gl. (B.17). Die Gegeninduktivität wird durch Integration berechnet

$$\begin{aligned} L_{KI} &= \int_0^{2\pi} \frac{\vec{A}_K(b, z_3)}{I_K} \cdot \frac{I}{I} \vec{e}_\varphi b d\varphi \\ &= \mu_0 2\pi b \int_{z_1}^{z_2} \frac{K_\varphi(z_Q)}{I_K} G(a, b, z_3 - z_Q) dz_Q. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

## C.8 Symmetrische Anordnung aus zwei stromführenden Kreisschleifen

Die Abbildung C.7 zeigt zwei konzentrische, stromführende Kreisschleifen.



**Abbildung C.7:** Symmetrische Anordnung aus zwei stromführenden Kreisschleifen

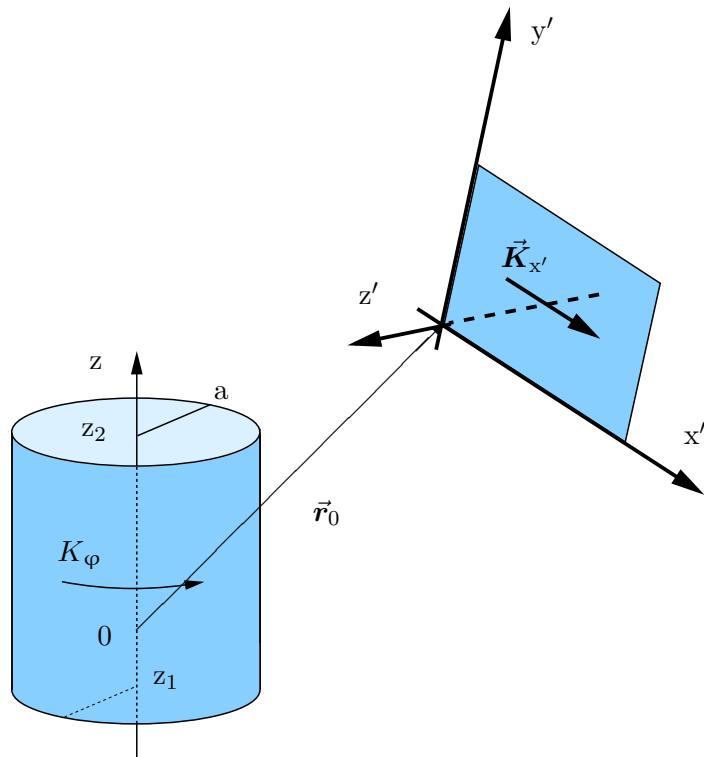
## C Gegeninduktivitätsbeiträge

Die Gegeninduktivität ist

$$L_{12} = 2\pi\mu_0\rho_2 G(\rho_1, \rho_2, z_2 - z_1) = 2\pi\mu_0\rho_1 G(\rho_2, \rho_1, z_1 - z_2). \quad (\text{C.24})$$

## C.9 Stromführender Zylindermantel und ebener Strombelag

Ein ebener Strombelag  $K_{x'}$  gemäß der Beschreibung in Abschnitt B.2, Gl. (B.4) befindet sich vor einem stromführenden Zylindermantel wie in Abbildung C.8 skizziert. Der ebene Strombelag wird im kartesischen Koordinatensystem  $(x', y', z')$  beschrieben, dessen Ursprung im Punkt 0 mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_0 = x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + z_0\vec{e}_z$  im kartesischen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  bzw. im Zylinderkoordinatensystem  $(\rho, \varphi, z)$  des Zylindermantels gemäß der Beschreibung in Abschnitt B.3.1 liegt.



**Abbildung C.8:** Stromführender Zylindermantel und ebener Strombelag

Ein Punkt  $P' = (x', y', 0)$  im kartesischen Koordinatensystem des ebenen Strombelages wird im Zylinderkoordinatensystem des Zylindermantels beschrieben durch den Abstand

$$\rho' = \vec{e}_\rho \cdot (\vec{r}_0 + x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'})$$

und die Höhe

$$z' = \vec{e}_z \cdot (\vec{r}_0 + x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'}) ,$$

sowie einen Winkel  $\varphi'$ , welcher aufgrund der Rotationssymmetrie des Feldes des Strombelages auf dem Zylindermantel jedoch nicht benötigt wird.

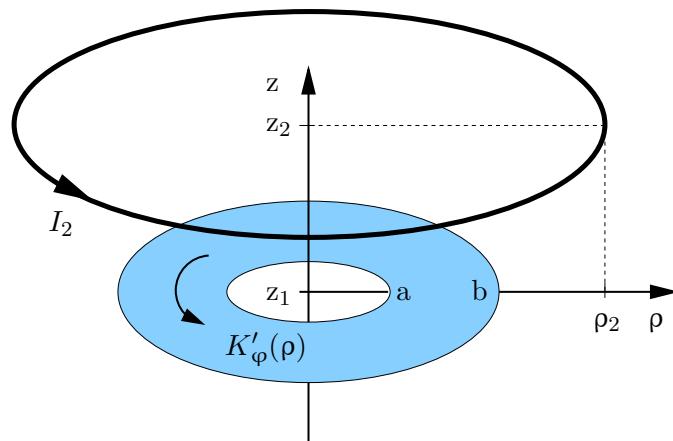
Der ebene Strombelag  $\vec{K}'$  führt den Gesamtstrom  $I_{K'}$ , welcher nach Gl. (C.6) berechnet werden kann. Der Strombelag  $\vec{K}$  auf dem Zylindermantel führt einen Gesamtstrom gemäß Gl. (C.21). Das Vektorpotential  $\vec{A}_K$  des Strombelages auf dem Zylindermantel ist gegeben durch Gl. (B.17)

Der Gegeninduktivitätsbeitrag der betrachteten Anordnung (zur Gegeninduktivität eine Anordnung aus geschlossenen Leiterschleifen) kann durch Integration bestimmt werden:

$$\Lambda_{KK'} = \int_0^{y'_2} \int_0^{x'_2} \frac{\vec{A}_K(\rho', z')}{I_K} \cdot \frac{K_{x'}(y')}{I_{K'}} \vec{e}_{x'} dx' dy'. \quad (\text{C.25})$$

## C.10 Strombelagsführende Kreisscheibe und Kreisschleife

Es wird eine konzentrische Anordnung aus einer strombelagsführenden Kreisscheibe und einer stromführenden Kreisschleife wie in Abbildung C.9 untersucht.



**Abbildung C.9:** Konzentrische Anordnung aus stromführendem Zylinderdeckel und strombelagsführender Kreisschleife

Der Strom der strombelagsführenden Kreisscheibe ist

$$\begin{aligned} I_{K'} &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} K_\varphi'(\rho_Q) d\rho_Q \\ &= \frac{1}{2} s'' (b^2 - a^2) + k'' (b - a) = \frac{1}{2} (K_1'' + K_2'') (b - a) \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

und die Gegeninduktivität der Anordnung

C Gegeninduktivitätsbeiträge

$$\begin{aligned}
 L_{KI} &= \int_0^{2\pi} \frac{\vec{A}_{K'}(\rho_2, z_2)}{I_{K'}} \cdot \frac{I_2}{I_2} \vec{e}_\varphi \rho_2 d\varphi \\
 &= 2\pi \mu_0 \rho_2 \int_a^b \frac{K'_\varphi(\rho_Q)}{I_{K'}} G(\rho_Q, \rho_2, z_2 - z_1) d\rho_Q.
 \end{aligned} \tag{C.27}$$

## D Elektrostatische Felder einfacher Ladungsanordnungen

Im folgenden Abschnitt werden einfache, endlich ausgedehnte statische Ladungsanordnungen betrachtet, deren elektrisches Potential  $\varphi_e$  und elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  zu berechnen sind. Aufgrund der endlichen Ausdehnung der Anordnungen wird der Bezugspunkt  $P_0$  stets im Unendlichen angenommen. Dort verschwindet das elektrische Potential  $\varphi_e$ .

Die Herleitung der folgenden Formeln erfolgte zum Großteil im Rahmen dieser Arbeit und ist durch entsprechende Verweise in mathematische Nachschlagewerken wie [10], [1] oder [17] transparent dargestellt.

Auch hierbei werden zur Referenzierung von Formeln anderer Autoren (gemäß Anhang F) folgende Symbole verwendet:

[1] ( $X$ )	Gleichung Nr. $X$ bei Abramowitz [1]
[10] $\int X \int$	unbestimmtes Integral Nr. $X$ gemäß Bronstein [10], Abschnitt 1.1.3.3.
[17] ( $X$ )	Gleichung Nr. $X$ bei Gradshteyn [17]

### D.1 Gerades Linienladungsstück

Auf der  $x$ -Achse ( $y_Q = z_Q = 0$ ) ist im Bereich  $0 = x_1 \leq x_Q \leq x_2$  die Gesamtladung  $Q = \lambda(x_2 - x_1)$  homogen verteilt.

Mit Hilfe der Helmholtzintegrale Gln. (2.5) und (2.6) kann in einem Beobachtungspunkt  $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$  sowohl das elektrostatische Potential

$$\begin{aligned}
 \varphi_{e\lambda}(\vec{r}) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2}} dx_Q \\
 &\stackrel{[10] \int 192f}{=} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \operatorname{arsinh}\left( \frac{x_Q - x}{\sqrt{(y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2}} \right) \right]_{x_Q=x_1}^{x_Q=x_2} \\
 &\stackrel{[10] \int 192f}{=} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \ln\left( x_Q - x + \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2} \right) \right]_{x_Q=x_1}^{x_Q=x_2} \\
 &\stackrel{\text{Gl. (B.7)}}{=} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[ F_1(x_Q - x, y_Q - y, z_Q - z) \right]_{x_Q=x_1}^{x_Q=x_2}
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

als auch die elektrostatische Feldstärke der Anordnung

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_\lambda(\vec{r}) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_Q) \vec{e}_x + (y - y_Q) \vec{e}_y + (z - z_Q) \vec{e}_z}{\left[(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2\right]^{\frac{3}{2}}} dx_Q \\
 &\stackrel{[10] \int 207f}{=} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \vec{e}_x \frac{1}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(y - y_Q) \vec{e}_y + (z - z_Q) \vec{e}_z}{(y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2} \cdot \frac{x_Q - x}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2}} \right]_{x_Q=x_1}^{x_Q=x_2} \\
 &\stackrel{[10] \int 206f}{=}
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

berechnet werden.

## D.2 Ebener Ladungsbelag

In der Ebene  $z = 0$  des kartesischen Koordinatensystems  $(x, y, z)$  ist im Bereich

$$x_1 = 0 \leq x_Q \leq x_2 \quad \text{und} \quad y_1 = 0 \leq y_Q \leq y_2 \tag{D.3 a}$$

ein endlich ausgedehnter und ebener Ladungsbelag

$$\sigma(y_Q) = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{y_2 - y_1} (y_Q - y_1) + \sigma_1 = s_\sigma y_Q + k_0 \tag{D.3 b}$$

eingeprägt, wie in Abbildung D.1 dargestellt.

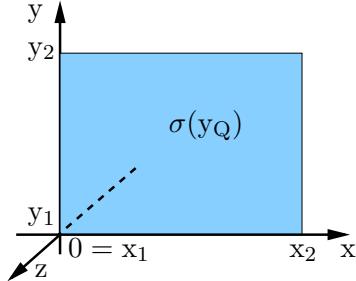


Abbildung D.1: ebener Ladungsbelag

Das skalare elektrostatische Potential  $\varphi_{e\sigma}$  dieser Anordnung kann in einem Beobachtungspunkt P mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$  berechnet werden, wobei erneut die durch die Gleichungen (B.7) bis (B.10) definierten Stammfunktionen zur Verbesserung der Lesbarkeit verwendet werden:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{e\sigma}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{s_\sigma y_Q + k_0}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2}} dy_Q dx_Q \\
 &\stackrel{[10] f^{193}f}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} s_\sigma \int_{x_1}^{x_2} \left[ \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2} \right]_{y_Q=y_1}^{y_Q=y_2} dx_Q \\
 &\stackrel{[10] f^{192}f}{=} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (s_\sigma y + k_0) \cdot \\
 &\quad \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left[ \operatorname{arsinh} \left( \frac{y_Q - y}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + (z - z_Q)^2}} \right) \right]_{y_Q=y_1}^{y_Q=y_2} dx_Q \\
 &\stackrel{[10] f^{185}f}{=} \frac{s_\sigma}{8\pi\epsilon_0} \left[ \left[ (x_Q - x) \cdot \right. \right. \\
 &\quad \cdot \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2} \Big]_{y_Q=y_1}^{y_Q=y_2} \Big]_{x_Q=x_1}^{x_Q=x_2} \\
 &\quad + \frac{s_\sigma}{8\pi\epsilon_0} \left[ \left[ \left\{ (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2 \right\} \cdot \right. \right. \\
 &\quad \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{x_Q - x}{\sqrt{(y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2}} \right) \Big]_{y_Q=y_1}^{y_Q=y_2} \Big]_{x_Q=x_1}^{x_Q=x_2} \\
 &\stackrel{\text{Gl. (B.10)}}{=} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (s_\sigma y + k_0) \left[ \left[ F_4(x - x_Q, y - y_Q, z - z_Q) \right]_{y_Q=y_1}^{y_Q=y_2} \right]_{x_Q=x_1}^{x_Q=x_2} \\
 &\stackrel{\text{Gl. (C.14)}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left[ s_\sigma F_8(x_Q - x, y_Q - y, z_Q - z) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (s_\sigma y + k_0) F_4(x - x_Q, y - y_Q, z - z_Q) \right]_{y_Q=y_1}^{y_Q=y_2} \right]_{x_Q=x_1}^{x_Q=x_2}
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

Auch die elektrostatische Feldstärke  $\vec{E}_\sigma$  der Anordnung ist analytisch darstellbar:

$$\vec{E}_\sigma(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \sigma(y_Q) \frac{(x - x_Q) \vec{e}_x + (y - y_Q) \vec{e}_y + (z - z_Q) \vec{e}_z}{\left[ (x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + (z - z_Q)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} dy_Q dx_Q. \tag{D.5}$$

Mit der Substitution  $\tilde{y} = y_Q - y$ ,  $\tilde{y}_1 = -y$  und  $\tilde{y}_2 = y_2 - y$  wird daraus

$$\vec{E}_\sigma(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2} (k_0 + s_\sigma y + s_\sigma \tilde{y}) \frac{(x - x_Q) \vec{e}_x - \tilde{y} \vec{e}_y + (z - z_Q) \vec{e}_z}{\left[ (x - x_Q)^2 + \tilde{y}^2 + (z - z_Q)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\tilde{y} dx_Q. \tag{D.6}$$

Mit Ausnahme der Berechnung der x-Komponente der elektrischen Feldstärke

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_x \cdot \vec{E}_\sigma(\vec{r}) &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} (k_0 + s_\sigma y) \overbrace{\int_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_Q - x)}{\left[(x - x_Q)^2 + \tilde{y}^2 + (z - z_Q)^2\right]^{\frac{3}{2}}} dx_Q d\tilde{y}}^{[10] \int 207f} \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} s_\sigma \int_{x_1}^{x_2} (x_Q - x) \overbrace{\int_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2} \frac{\tilde{y}}{\left[(x - x_Q)^2 + \tilde{y}^2 + (z - z_Q)^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\tilde{y} dx_Q}^{[10] \int 207f} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (k_0 + s_\sigma y) \overbrace{\int_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + \tilde{y}^2 + (z - z_Q)^2}} \right]_{x_Q=x_1}^{x_2} d\tilde{y}}^{[10] \int 192f} \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} s_\sigma \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{(x_Q - x)}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + \tilde{y}^2 + (z - z_Q)^2}} \right]_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2} dx_Q \\
 &= \frac{k_0 + s_\sigma y}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left[ \text{arsinh} \frac{\tilde{y}}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + (z - z_Q)^2}} \right]_{x_Q=x_1}^{x_2} \right]_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2} \\
 &\quad + \frac{s_\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left[ \sqrt{(x - x_Q)^2 + \tilde{y}^2 + (z - z_Q)^2} \right]_{x_Q=x_1}^{x_2} \right]_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2} \\
 &= \frac{k_0 + s_\sigma y}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left[ \ln \left( \tilde{y} + \sqrt{(x - x_Q)^2 + \tilde{y}^2 + (z - z_Q)^2} \right) \right]_{x_Q=x_1}^{x_2} \right]_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2} \\
 &\quad + \frac{s_\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left[ \sqrt{(x - x_Q)^2 + \tilde{y}^2 + (z - z_Q)^2} \right]_{x_Q=x_1}^{x_2} \right]_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2}
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

sind alle Substitutionen und Zwischenschritte mit der Berechnung der magnetischen Feldstärke in Abschnitt B.2, Gl. (B.6) und folgende vergleichbar. Die gesamte Feldstärke kann mit Hilfe der zuvor definierten Stammfunktionen  $F_1$  bis  $F_4$  ermittelt werden

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_\sigma(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left[ \begin{aligned} &+ \vec{e}_x (k_0 + s_\sigma y) F_1(\eta, \chi, z) \\ &- \vec{e}_x s_\sigma \sqrt{\chi^2 + \eta^2 + z^2} \\ &+ \vec{e}_y s_\sigma \{ \eta F_1(\chi, \eta, z) - F_4(\chi, \eta, z) \} \\ &+ \{ -s_\sigma z \vec{e}_z + (k_0 + s_\sigma y) \vec{e}_y \} F_1(\chi, \eta, z) \\ &+ \vec{e}_z (k_0 + s_\sigma y) z \eta F_2(\chi, \eta, z) \end{aligned} \right]_{\eta=-y}^{\eta=y_2-y} \right]_{\chi=x}^{\chi=x-x_2}.
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

## D.3 Elektrisches Feld einer Ringladung

Es wird eine homogene Ringladung  $Q = 2\pi\rho_Q\lambda$  entlang der Kurve  $C_Q$  in Abbildung D.2 betrachtet. Der Ring  $C_Q$  mit dem Radius  $\rho_Q$  ist auf der Höhe  $z_Q$  konzentrisch um die z-Achse angeordnet.

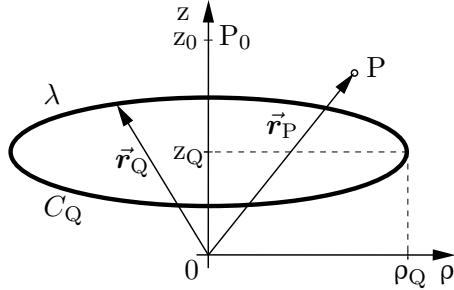


Abbildung D.2: Ringladung

Es sollen das elektrische Potential  $\varphi_e$  und die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  in einem beliebigen Beobachtungspunkt

$$\vec{r}_P = \rho_P \vec{e}_{\rho_P} + z_P \vec{e}_z \notin C_Q$$

berechnet werden.

Ein beliebiger Punkt auf der Kurve  $C_Q$  wird durch den Ortsvektor

$$\vec{r}_Q = \rho_Q \vec{e}_{\rho_Q} + z_Q \vec{e}_z$$

beschrieben.

Der Bezugspunkt  $P_0$  für die Berechnung des elektrischen Potentials liege auf der z-Achse und ist durch den Ortsvektor  $\vec{r}_0 = z_0 \vec{e}_z$  beschrieben. In  $P_0$  verschwindet das elektrische Potential. Aufgrund der endlichen Ausdehnung der betrachteten Anordnungen kann der Beobachtungspunkt auch in unendliche Ferne rücken,  $z_0 \rightarrow \pm\infty$ .

Für weitere Berechnungen werden zunächst einige Funktionen

$$s^2(\rho_P, z_P) := \frac{\rho_Q^2}{(\rho_Q + \rho_P)^2 + (z_P - z_Q)^2}, \quad (\text{D.9})$$

und

$$h^2(\rho_P, z_P) := 4 \frac{\rho_P}{\rho_Q} s^2(\rho_Q, z_Q, \rho_P, z_P) \quad (\text{D.10})$$

und die Parameter  $s^2 = s^2(\rho_P, z_P)$  und  $h^2 = h^2(\rho_P, z_P)$  definiert. Sie werden zur Berechnung der vollständigen elliptischen Integrale ersten und zweiter Art

$$K(h^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - h^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi, \quad E(h^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - h^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (\text{D.11})$$

## D Elektrostatische Felder

und auch der dritten Art benötigt

$$\Pi(m, h^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 - m \sin^2 \varphi)} \frac{1}{\sqrt{1 - h^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi. \quad (\text{D.12})$$

Für die in Abbildung D.2 betrachtete Anordnung muss das Integral (D.12) lediglich für den Fall  $m = h^2$  berechnet werden:

$$\Pi(m, h^2) = \Pi(h^2) \stackrel{[1]}{=} \frac{1}{1 - h^2} E(h^2). \quad (\text{D.13})$$

Ein infinitesimales Ladungselement  $dq(\vec{r}_Q) = \lambda ds_Q$  liefert den Beitrag

$$d\varphi_e(\vec{r}_P) = \frac{dq(\vec{r}_Q)}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_Q|} \right] \quad (\text{D.14})$$

zum elektrischen Potential am Ort  $\vec{r}_P$ , welches aus einer Integration über die Kurve  $C_Q$  berechnet wird:

$$\begin{aligned} \varphi_e(\vec{r}_P) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \oint_{C_Q} \left[ \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_Q|} \right] ds_Q \\ \varphi_e(\rho_P, z_P) &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} s(\rho_P, z_P) K(h^2(\rho_P, z_P)) - \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{\rho_Q}{\sqrt{(z_0 - z_Q)^2 - \rho_Q^2}} \\ &= \varphi_e(s^2, h^2) \stackrel{z_0 \rightarrow \infty}{=} \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} s K(h^2). \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Auch zur Berechnung der elektrischen Feldstärke können die Beiträge

$$d\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{dq(\vec{r}_Q)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_Q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|^3} \quad (\text{D.16})$$

infinitesimaler Ladungselemente überlagert werden

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}_P) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \oint_{C_Q} \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_Q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_Q|^3} ds_Q \\ \vec{E}(\rho_P, z_P) &= \vec{E}(s^2, h^2) \\ &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left( s K(h^2) \frac{1}{2\rho_P} \vec{e}_{\rho_P} + \right. \\ &\quad \left. + s^3 \Pi(h^2) \frac{1}{\rho_Q^2} \left[ \frac{\rho_P^2 - \rho_Q^2 - (z_P - z_Q)^2}{2\rho_P} \vec{e}_{\rho_P} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (z_P - z_Q) \vec{e}_z \right] \right). \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Zuletzt wird das elliptische Integral  $\Pi$  gemäß Gl. (D.13) aus dem Ergebnis eliminiert:

$$\begin{aligned} \vec{E}(s^2, h^2) = & \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \left( s K(h^2) \frac{1}{2\rho_P} \vec{e}_{\rho_P} + \right. \\ & + s^3 \frac{1}{1-h^2} E(h^2) \frac{1}{\rho_Q^2} \left[ \frac{\rho_P^2 - \rho_Q^2 - (z_P - z_Q)^2}{2\rho_P} \vec{e}_{\rho_P} + \right. \\ & \left. \left. + (z_P - z_Q) \vec{e}_z \right] \right). \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

## D.4 Elektrisches Feld einer zylinderförmigen Ladungsanordnung

Auf der Manteloberfläche des Zylinders vom Radius  $a$  und der Höhe  $z_2 - z_1$  in Abbildung D.3 wird ein Ladungsbelag

$$\sigma(z_Q) = \frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{z_2 - z_1} (z_Q - z_1) + \sigma'_1 = s'_\sigma z_Q + k'_\sigma \quad (\text{D.19})$$

eingeprägt. Im folgenden Abschnitt sollen das skalare, elektrostatische Potential  $\varphi_{e\sigma}$  und die elektrische Feldstärke  $\vec{E}_\sigma$  der rotationssymmetrischen Anordnung ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) in einem beliebigen Beobachtungspunkt P mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$  berechnet werden.

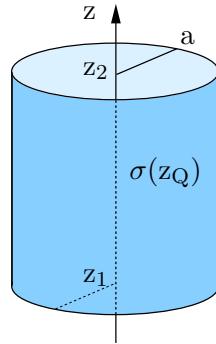


Abbildung D.3: zylindrischer Ladungsbelag

Zur Berechnung des Potentials wird zunächst das elliptische Integral

$$\tilde{G}(\eta, \rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\rho^2 + z^2}{\eta^2} - 2\frac{\rho}{\eta} \cos \varphi}} d\varphi \quad (\text{D.20})$$

eingeführt.

Das elektrostatische Potential lautet dann

$$\varphi_{e\sigma}(\rho, z) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \sigma(z_Q) \tilde{G}(a, \rho, z - z_Q) dz_Q. \quad (\text{D.21})$$

## D Elektrostatische Felder

Zur Berechnung der elektrostatischen Feldstärke gemäß

$$\vec{E}_\sigma = -\operatorname{grad} \varphi_{e\sigma} = \vec{e}_\rho E_{\sigma\rho} + \vec{e}_z E_{\sigma z} \quad (\text{D.22})$$

werden die partiellen Ableitungen des elliptischen Integrals  $\tilde{G}$  benötigt:

$$\partial_z \tilde{G}(\eta, \rho, z) := \frac{\partial}{\partial z} \tilde{G}(\eta, \rho, z) = -\frac{z}{2\pi\eta^2} \int_0^\pi \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho^2+z^2}{\eta^2} - 2\frac{\rho}{\eta} \cos \varphi\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \quad (\text{D.23})$$

und

$$\partial_\rho \tilde{G}(\eta, \rho, z) := \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}(\eta, \rho, z) = \frac{-1}{2\pi\eta} \int_0^\pi \frac{\frac{\rho}{\eta} - \cos \varphi}{\left(1 + \frac{\rho^2+z^2}{\eta^2} - 2\frac{\rho}{\eta} \cos \varphi\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi. \quad (\text{D.24})$$

Die elektrische Feldstärke besteht dann gemäß Gl. (D.22) aus den Komponenten

$$E_{\sigma\rho}(\rho, z) = -\frac{\partial \varphi_{e\sigma}}{\partial \rho} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \sigma(z_Q) \partial_\rho \tilde{G}(a, \rho, z - z_Q) dz_Q \quad (\text{D.25})$$

und

$$E_{\sigma z}(\rho, z) = -\frac{\partial \varphi_{e\sigma}}{\partial z} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \sigma(z_Q) \partial_z \tilde{G}(a, \rho, z - z_Q) dz_Q. \quad (\text{D.26})$$

Schrumpft der Ladungsbelag auf eine kreisförmige Leiterschleife vom Radius  $a$  mit der Gesamtladung  $Q_\sigma = 2\pi a \lambda_\sigma$  um  $z_1$  zusammen ( $z_2 \rightarrow z_1$ ), so wird daraus

$$\sigma(z) = \lambda_\sigma \cdot \delta(z - z_1) \quad (\text{D.27})$$

und es resultiert das elektrostatische Potential

$$\varphi_{e\sigma}(\rho, z) = \frac{1}{\varepsilon_0} \lambda_\sigma \tilde{G}(a, \rho, z - z_1), \quad (\text{D.28})$$

sowie die Komponenten der elektrischen Feldstärke

$$E_{\lambda\rho}(\rho, z) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \lambda_\sigma \partial_\rho \tilde{G}(a, \rho, z - z_1) \quad (\text{D.29 a})$$

und

$$E_{\lambda z}(\rho, z) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \lambda_\sigma \partial_z \tilde{G}(a, \rho, z - z_1). \quad (\text{D.29 b})$$

Ein Vergleich der Gl. (D.28) mit Gl. (D.15) zeigt

$$\tilde{G}(\rho_Q, \rho_P, z_P - z_Q) = \frac{1}{\pi} s K(h^2). \quad (\text{D.30})$$

Ein Vergleich der Gl. (D.29) mit Gl. (D.18) liefert

$$\partial_\rho \tilde{G}(\rho_Q, \rho_P, z_P - z_Q) = -\frac{s K(h^2)}{2\varepsilon_0 \rho_P} - \frac{s^3 E(h^2)}{1 - h^2} \cdot \frac{\rho_P^2 - \rho_Q^2 - (z_P - z_Q)^2}{2\varepsilon_0 \rho_Q^2 \rho_P} \quad (\text{D.31 a})$$

und

$$\partial_z \tilde{G}(\rho_Q, \rho_P, z_P - z_Q) = -\frac{s^3 E(h^2)}{1 - h^2} \cdot \frac{z_P - z_Q}{\varepsilon_0 \rho_Q^2}. \quad (\text{D.31 b})$$

## D.5 Elektrisches Feld einer kreisscheibenförmigen Ladungsanordnung

Auf der kreisscheibenförmigen Fläche vom Radius  $\rho_2$  mit einem kreisförmigen Ausschnitt vom Radius  $\rho_1$  um den Ursprung in Abbildung D.4 wird ein Ladungsbelag

$$\sigma'(\rho_Q) = \frac{\sigma''_2 - \sigma''_1}{\rho_2 - \rho_1} (\rho_Q - \rho_1) + \sigma''_1 = s''_\sigma \rho_Q + k''_\sigma \quad (\text{D.32})$$

eingeprägt. Im folgenden Abschnitt sollen das skalare, elektrostatische Potential  $\varphi_{e\sigma}$  und die elektrische Feldstärke  $\vec{E}_\sigma$  der rotationssymmetrischen Anordnung ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) in einem beliebigen Beobachtungspunkt mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$  berechnet werden.

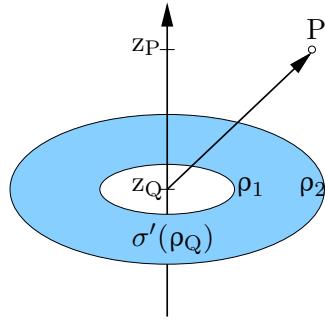


Abbildung D.4: kreisscheibenförmiger Ladungsbelag

Das elektrostatische Potential im Punkt P ist

$$\varphi_{e\sigma'}(\rho, z) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sigma'(\rho_Q) \tilde{G}(\rho_Q, \rho, z - z_Q) d\rho_Q \quad (\text{D.33})$$

mit Hilfe des elliptischen Integrals  $\tilde{G}$  gemäß Gl. (D.20).

Zur Berechnung der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}_{\sigma'} = \vec{e}_\rho E_{\sigma'\rho} + \vec{e}_z E_{\sigma'z}$  bestehend aus den zwei Komponenten

$$E_{\sigma'\rho}(\rho, z) = -\frac{\partial \varphi_{e\sigma'}}{\partial \rho} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sigma'(\rho_Q) \partial_\rho \tilde{G}(\rho_Q, \rho, z - z_Q) d\rho_Q \quad (\text{D.34})$$

und

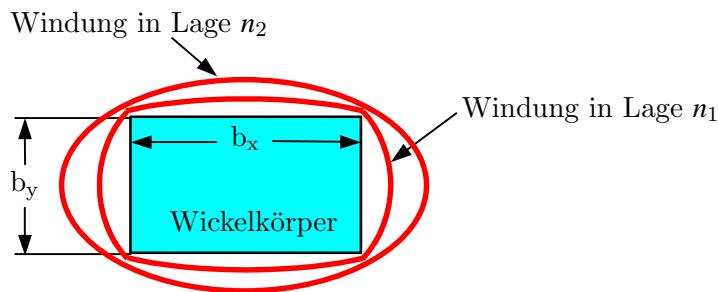
$$E_{\sigma'z}(\rho, z) = -\frac{\partial \varphi_{e\sigma'}}{\partial z} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sigma'(\rho_Q) \partial_z \tilde{G}(\rho_Q, \rho, z - z_Q) d\rho_Q \quad (\text{D.35})$$

werden erneut die Gleichungen (D.22), (D.23) und (D.24) herangezogen.

*D Elektrostatische Felder*

## E Einfluss rechteckförmiger Wicklungsgeometrie

Im folgenden Abschnitt werden Transformatorwindungen auf rechteckförmigen Wickelkörpern—wie etwa für E-Kerne gebräuchlich—betrachtet. Die Induktivitäten für solche rechteckförmigen Wicklungen sind mit den Ergebnissen aus Abschnitt 5.1 und den Gegeninduktivitätsbeiträgen gemäß Anhang C analytisch berechenbar.



**Abbildung E.1:** Windungen um einen rechteckförmigen Wickelkörper mit abgefasten Kanten

Die Abbildung E.1 veranschaulicht, dass insbesondere bei rechteckförmigen Wickelkörpern die Windungsform stark von der theoretisch angenommenen Rechteckform abweichen kann. Die Windungen werden je nach Drahtquerschnitt nur an den Ecken des Wickelkörpers eng anliegen. In größerer Entfernung von den Ecken werden die Abstände zwischen Windungen benachbarter Lagen verändert, im Gegensatz zu Wicklungen auf runden Wickelkörpern—wie etwa für P- oder ETD-Kerne gebräuchlich.

Dies hat zur Folge, dass die Windungen

- eine größere Fläche umschließen und
- länger sind

als theoretisch angenommen. Beides hat Einfluss auf die Induktivitäten des Systems. Die abweichende Form und Länge hat auch Einfluss auf die Wicklungsverluste.

Es wird daher die Form einer Drahtwindung  $i$  mit dem nominellen Drahtdurchmesser  $d_{\text{nom}}^{(i)}$  und dem Drahtdurchmesser des isolierten Drahts  $d_{\text{out}}^{(i)}$  um einen rechteckförmigen Wickelkörper mit den Kantenlängen  $b_x, b_y$  beschrieben, um abschließend Aussagen über erforderliche Anpassungen der Induktivitäts- und der Verlustberechnung formulieren zu können.

## E.1 Windungen um einen rechteckförmigen Wickelkörper mit abgefasten Kanten

Aufgrund der Symmetrie des Wickelkörpers ist es ausreichend, nur ein Viertel des Körpers zu betrachten. Punkte  $x < 0$  und  $y < 0$  können durch Spiegelung an der  $y$ -Achse bzw. der  $x$ -Achse gewonnen werden. Die Geometrie einer einzelnen Windung  $i$  in der Wicklungslage  $L^{(i)} \geq 1$  um einen rechteckförmigen Wickelkörper mit abgefasten Kanten wird in fünf Sektoren unterteilt. Die Abbildung E.2 zeigt ein Viertel einer Schnittebene durch einen solchen Wickelkörper. Der Ursprung des eingezeichneten kartesischen Koordinatensystems liegt auf den Symmetrieeachsen des Wickelkörpers.

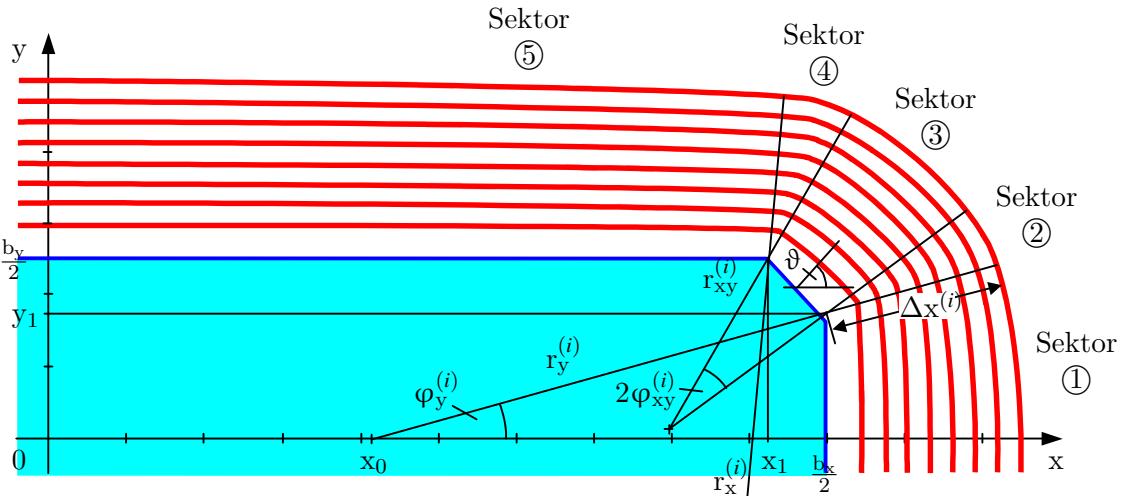


Abbildung E.2: 8 Wicklungslagen auf einem rechteckförmigen Wickelkörper

Der Schnitt durch den Wickelkörper im ersten Quadranten des Koordinatensystems setze sich aus drei Geraden zusammen, welche die vier Punkte  $(\frac{b_x}{2}, 0)$ ,  $(\frac{b_x}{2}, y_1)$ ,  $(x_1, \frac{b_y}{2})$  und  $(0, \frac{b_y}{2})$  verbinden. Die Normale auf die Gerade zwischen den Punkten  $(\frac{b_x}{2}, y_1)$  und  $(x_1, \frac{b_y}{2})$  schließe den Winkel  $\vartheta$  mit der  $x$ -Achse ein mit

$$\tan \vartheta = \frac{b_x - 2x_1}{b_y - 2y_1}.$$

Der Verlauf einer Windung soll nun beschrieben werden, indem die kartesische Ortskoordinate  $(x, y)$  eines Punktes  $P$  auf der Windung  $i$  in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$  zur  $x$ -Achse ermittelt wird. Hierbei geht die Wicklungslage  $L^{(i)}$  der Windung  $i$  in die Berechnung mit ein.

Des Weiteren wird die Steifigkeit des Drahtes berücksichtigt. Der Draht liegt deshalb nur an den Knickpunkten  $P_1 = (\frac{b_x}{2}, y_1)$  und  $P_2 = (x_1, \frac{b_y}{2})$  am Wickelkörper bzw. in den Segmenten 2 und 4 an der darunter liegenden Wicklungslage an. Dazwischen wird sich der Draht aufgrund seiner Steifigkeit und der begrenzten Wickelspannung vom Wickelkörper bzw. von der darunterliegenden Wicklungslage abheben. Es entstehen Leerräume.

Die Windung folgt im ersten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems näherungsweise einer Form, die aus fünf Kreisbogensegmenten zusammengesetzt wird. Hierbei sind die Radien

## E.1 Windungen um einen rechteckförmigen Wickelkörper mit abgefasten Kanten

der Kreisbögen 1, 3 und 5 von der Wickelspannung abhängig. Ein Punkt auf der Windungsform im Sektor 1 liegt auf einem Kreisbogensegment, dessen Ursprung im Punkt  $P_y = (x_0, 0)$  liege und welches den Radius  $r_y^{(i)}$  habe. Dieses Kreissegment umspannt einen Winkel von  $-\varphi_y^{(i)}$  bis  $\varphi_y^{(i)}$  symmetrisch zur x-Achse, in dem es deckungsgleich mit dem Sektor 1 der Windung  $i$  sei.

Ein Punkt auf der Windungsform im Sektor 3 liegt auf einem Kreisbogensegment, dessen Ursprung im Punkt  $P_{xy} = (x_{d0}, y_{d0})$  liege und welches den Radius  $r_{xy}^{(i)}$  habe. Dieses Kreissegment umspannt einen Winkel von  $-\varphi_{xy}^{(i)}$  bis  $\varphi_{xy}^{(i)}$  symmetrisch zur Normalen auf das Segment zwischen den Punkten  $(x_1, \frac{b_y}{2})$  und  $(\frac{b_x}{2}, y_1)$  auf dem Wickelkörper. Dieses Kreisbogensegment sei deckungsgleich mit dem Segment in Sektor 3 der Windung  $i$ .

Ein Punkt auf der Windungsform im Sektor 5 liegt auf einem Kreisbogensegment, dessen Ursprung im Punkt  $P_x = (0, y_0)$  liege und welches den Radius  $r_x^{(i)}$  habe. Dieses Kreissegment umspannt einen Winkel von  $-\varphi_x^{(i)}$  bis  $\varphi_x^{(i)}$  symmetrisch zur y-Achse, in dem es deckungsgleich mit dem Segment in Sektor 5 der Windung  $i$  sei. (Der Winkel  $\varphi_x^{(i)}$  ist nicht in der Abbildung E.2 eingezeichnet.)

In den Sektoren 2 und 4 folgt die Windung  $i$  Kreisbögen, welche die Sektoren 1 und 3 bzw. 3 und 5 so verbinden, daß die Tangenten unmittelbar links und unmittelbar rechts neben den Übergangspunkten identische Steigung haben.

Die Wahl der Winkel  $\varphi_x^{(i)}$ ,  $\varphi_y^{(i)}$  und  $\varphi_{xy}^{(i)}$  ist nahezu frei. Einschränkend gilt jedoch:

$$\varphi_x^{(i)} + \varphi_y^{(i)} + 2 \cdot \varphi_{xy}^{(i)} \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{E.1})$$

Die Windungen mit dem Durchmesser  $d_{\text{out}}^{(i)}$  des isolierten Kupferlackdrahtes verlaufen in jeder Wicklungslage  $L \geq 1$  in der Nähe der Ecken des Wickelkörpers etwas stärker abgerundet als in den darunter gewickelten Lagen. Dies setze sich bis zur Lage

$$M_{\text{ell}} := \int \left( \frac{b_x + b_y}{2 \cdot d_{\text{out}}^{(i)}} \right) \quad (\text{E.2})$$

fort. Ein Maß für diese Abrundung der Windung um die Ecken des Wickelkörpers wird im Abrundungsfaktor

$$p_{\text{ell}}^{(i)} := \begin{cases} \frac{L^{(i)}}{M_{\text{ell}}}, & \text{für } L^{(i)} \leq M_{\text{ell}}; \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

beschrieben.

Die Winkel  $\varphi_x^{(i)}$ ,  $\varphi_y^{(i)}$  und  $\varphi_{xy}^{(i)}$  sind von diesem Abrundungsfaktor  $p_{\text{ell}}^{(i)}$  und der Wickelspannung  $s > 0$  abhängig. Für die Winkel wird definiert, dass sie in gleicher Relation zueinander stehen wie die Koordinaten  $x_1, y_1$  und die Länge

$$d := \sqrt{\left( \frac{b_x}{2} - x_1 \right)^2 + \left( \frac{b_y}{2} - y_1 \right)^2} \quad (\text{E.4})$$

der abgefasten Kante (vergl. Abbildung E.5). Dies bedeutet

$$\frac{2\varphi_x^{(i)}}{2\varphi_y^{(i)}} := \frac{2x_1}{2y_1} \quad , \quad \frac{2\varphi_x^{(i)}}{2\varphi_{xy}^{(i)}} := \frac{2x_1}{d} \quad , \quad \frac{2\varphi_y^{(i)}}{2\varphi_{xy}^{(i)}} := \frac{2y_1}{d} . \quad (\text{E.5})$$

## E Einfluss rechteckförmiger Wicklungsgeometrie

Die auftretenden Winkel werden für die Berechnung wie folgt definiert

$$\varphi_x^{(i)} := \frac{\pi}{2} \cdot f_{\text{ell}}^{(i)} \cdot \frac{x_1}{x_1 + y_1 + d}, \quad (\text{E.6 a})$$

$$\varphi_y^{(i)} := \frac{\pi}{2} \cdot f_{\text{ell}}^{(i)} \cdot \frac{y_1}{x_1 + y_1 + d} \quad \text{und} \quad (\text{E.6 b})$$

$$2\varphi_{xy}^{(i)} := \frac{\pi}{2} \cdot f_{\text{ell}}^{(i)} \cdot \frac{d}{x_1 + y_1 + d} \quad \text{mit} \quad f_{\text{ell}}^{(i)} \leq 1. \quad (\text{E.6 c})$$

Die Qualität dieser Definition wird später an Messungen verglichen. Der Faktor  $f_{\text{ell}}^{(i)}$  ist in geeigneter Weise zu definieren, um eine größtmögliche Übereinstimmung zwischen dieser Abschätzung und realen Windungsverläufen zu erreichen (vergl. Abschnitt E.5). Für die folgende Berechnung sei  $\Delta x^{(i)}$  der kürzeste Abstand der Windung  $i$  in der Wicklungslage  $L^{(i)}$  von der Ecke des Wickelkörpers. Es sind nun die zuvor genannten Radien  $r_x^{(i)}, r_y^{(i)}, r_{xy}^{(i)}$  und die Ursprungskoordinaten  $x_0, y_0$  und  $x_{d0}, y_{d0}$  für die Kreissegmente so zu bestimmen, daß diese deckungsgleich werden mit den entsprechenden Segmenten 1, 3 und 5 der Windungsform. Die Abhängigkeit von der Wicklungslage ist sowohl im Abstand  $\Delta x^{(i)}$  als auch in den Winkeln  $\varphi_x^{(i)}, \varphi_y^{(i)}$  und  $\varphi_{xy}^{(i)}$  bereits berücksichtigt.

Der Sektor 1 wird durch den Radius

$$r_y^{(i)} = \frac{y_1}{\sin(\varphi_y^{(i)})} + \Delta x^{(i)} \quad (\text{E.7})$$

und den Mittelpunkt  $(x_0, 0)$  beschrieben mit

$$x_0 = \frac{b_x}{2} - (r_y^{(i)} - \Delta x^{(i)}) \cdot \cos(\varphi_y^{(i)}). \quad (\text{E.8})$$

Der Öffnungswinkel ist  $\pm\varphi_y^{(i)}$  symmetrisch um die x-Achse.

Der Sektor 3 wird durch den Radius

$$r_{xy}^{(i)} = \frac{d}{\sin(\varphi_{xy}^{(i)})} + \Delta x^{(i)} \quad (\text{E.9})$$

und den Mittelpunkt  $(x_{d0}, y_{d0})$  beschrieben mit

$$x_{d0} = \frac{b_x}{2} - (r_{xy}^{(i)} - \Delta x^{(i)}) \cdot \cos(\vartheta - \varphi_{xy}^{(i)}) \quad (\text{E.10 a})$$

$$y_{d0} = \frac{b_x}{2} - (r_{xy}^{(i)} - \Delta x^{(i)}) \cdot \sin(\vartheta + \varphi_{xy}^{(i)}). \quad (\text{E.10 b})$$

Der Öffnungswinkel ist  $\pm\varphi_{xy}^{(i)}$  symmetrisch um den Winkel  $\vartheta$ .

Der Sektor 5 wird durch den Radius

$$r_x^{(i)} = \frac{x_1}{\sin(\varphi_x^{(i)})} + \Delta x^{(i)} \quad (\text{E.11})$$

### E.1 Windungen um einen rechteckförmigen Wickelkörper mit abgefasten Kanten

und den Mittelpunkt  $(0, y_0)$  beschrieben mit

$$y_0 = \frac{b_y}{2} - \left( r_x^{(i)} - \Delta x^{(i)} \right) \cdot \cos \left( \varphi_x^{(i)} \right). \quad (\text{E.12})$$

Der Öffnungswinkel ist  $\pm \varphi_x^{(i)}$  symmetrisch um die y-Achse.

In den dazwischen liegenden Kreissektoren 2 und 4 liegt der Mittelpunkt jeweils auf dem am nächsten gelegenen Eckpunkt des Wickelkörpers. Der Radius ist  $\Delta x^{(i)}$ .

Nun soll die Koordinate  $(x, y)$  des Schnittpunktes der Windung  $i$  in der Wicklungslage  $L^{(i)}$  mit einem Strahl ermittelt werden, der aus dem Ursprung mit dem Winkel  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  zur x-Achse verläuft. Somit kann jede Koordinate eines Punktes einer Windung in Abhängigkeit des Winkels  $\varphi$  bestimmt werden.

In Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$  und der Wicklungslage  $L^{(i)}$  muss zunächst ermittelt werden, in welchem der fünf beschriebenen Segmente der gesuchte Punkt liegt.

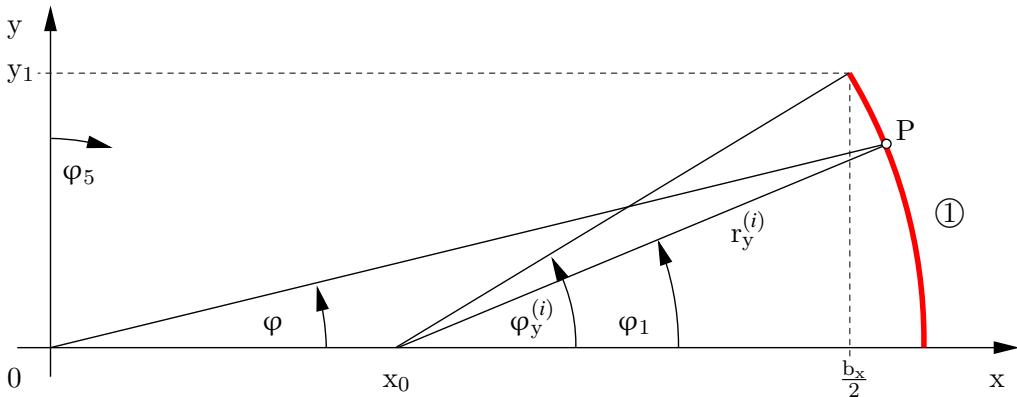
Hierzu werden drei Hilfswinkel  $\varphi_1$ ,  $\varphi_5$  und  $\varphi_3$  benötigt:

$$\varphi_1 = \varphi + \arcsin \left( \frac{x_0}{r_y^{(i)}} \cdot \sin(\varphi) \right) \quad (\text{E.13})$$

$$\varphi_5 = \frac{\pi}{2} - \varphi + \arcsin \left( \frac{y_0}{r_x^{(i)}} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right) \quad (\text{E.14})$$

$$\varphi_3 = \begin{cases} \varphi + \arcsin \left( \frac{\sqrt{x_{d0}^2 + y_{d0}^2}}{r_{xy}^{(i)}} \cdot \left| \sin \left( \varphi - \arctan \left( \frac{y_{d0}}{x_{d0}} \right) \right) \right| \right), & \text{für } x_{d0} > 0; \\ \varphi + \arcsin \left( \frac{\sqrt{x_{d0}^2 + y_{d0}^2}}{r_{xy}^{(i)}} \cdot \left| \sin \left( \varphi + \pi - \arctan \left( \frac{y_{d0}}{x_{d0}} \right) \right) \right| \right), & \text{für } x_{d0} \leq 0. \end{cases} \quad (\text{E.15})$$

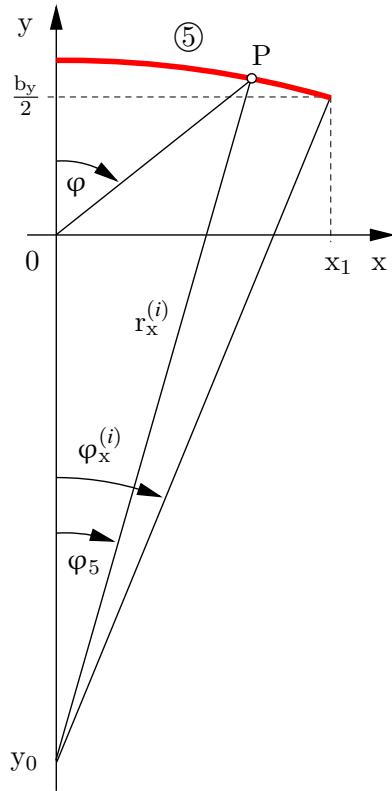
Abbildung E.3 zeigt den Hilfswinkel  $\varphi_1$  im Windungssektor 1 der Windung  $i$ . Der Winkel  $\varphi$  wird stets zur x-Achse definiert.



**Abbildung E.3:** Windungssektor 1 mit Hilfswinkel  $\varphi_1$

## E Einfluss rechteckförmiger Wicklungsgeometrie

Der Winkel  $\varphi_5$  ist entsprechend dem Winkel  $\varphi_1$  für den Sektor 5 zur y-Achse definiert, wie dies in Abbildung E.4 veranschaulicht wird.



**Abbildung E.4:** Windungssektor 5 mit Hilfswinkel  $\varphi_5$

Abbildung E.5 und Abbildung E.6 zeigen die Hilfswinkel  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  und  $\varphi_4$  für die Sektoren 2, 3 und 4 der Windung  $i$ .

Die Sektorennummer kann nun wie folgt ermittelt werden:

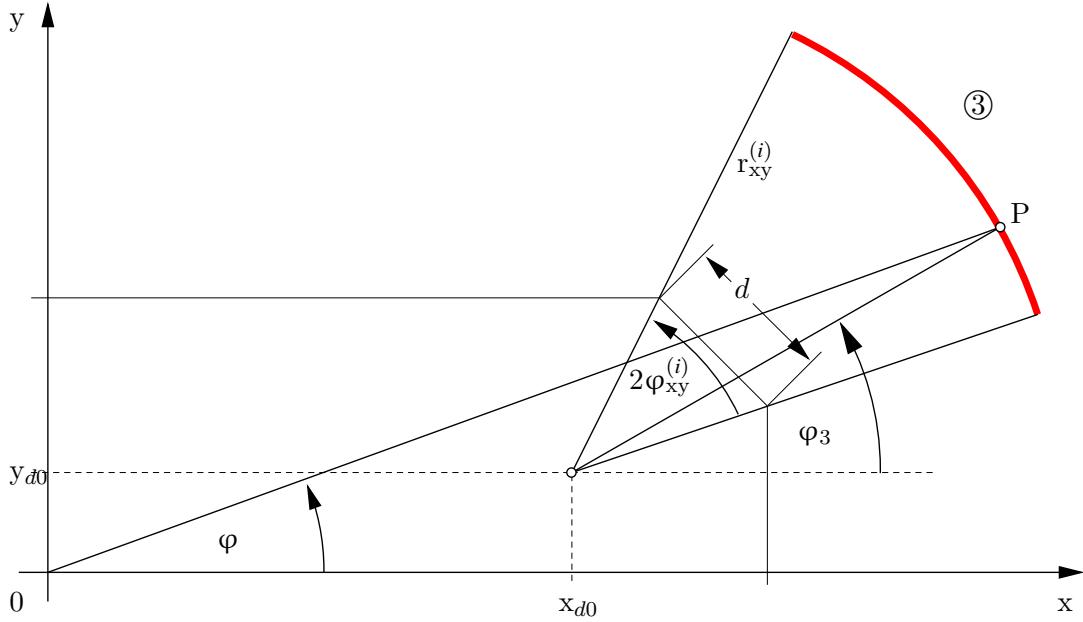
$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{für } \varphi_1 < \varphi_y^{(i)}; \\ 2, & \text{für } \varphi_3 < \vartheta - \varphi_{xy}^{(i)}; \\ 3, & \text{für } \varphi_3 \geq \vartheta - \varphi_{xy}^{(i)} \text{ und } \varphi_3 \leq \vartheta + \varphi_{xy}^{(i)}; \\ 4, & \text{für } \varphi_3 > \vartheta + \varphi_{xy}^{(i)}; \\ 5, & \text{für } \varphi_5 < \varphi_x^{(i)}. \end{cases} \quad (\text{E.16})$$

(In einem Programm sollte zunächst überprüft werden, ob der Punkt in Sektor 1 liegt, anschließend ob er in Sektor 5 liegt. Dann erst folgen die Sektoren 3, 2 und 4.)

Ist die Sektorennummer bekannt, können die Koordinaten  $x$  und  $y$  in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$  und den Hilfswinkeln

$$\varphi_2 = \varphi + \arcsin \left( \frac{\sqrt{b_x^2 + 4y_1^2}}{2\Delta x^{(i)}} \cdot \left| \sin \left( \varphi - \arctan \left( \frac{2y_1}{b_x} \right) \right) \right| \right) \quad (\text{E.17})$$

### E.1 Windungen um einen rechteckförmigen Wickelkörper mit abgefasten Kanten



**Abbildung E.5:** Windungssektor 3 mit Hilfswinkel  $\varphi_3$

und

$$\varphi_4 = \varphi + \arcsin \left( \frac{\sqrt{b_y^2 + 4x_1^2}}{2\Delta y^{(i)}} \cdot \left| \sin \left( \varphi - \arctan \left( \frac{2x_1}{b_y} \right) \right) \right| \right) \quad (\text{E.18})$$

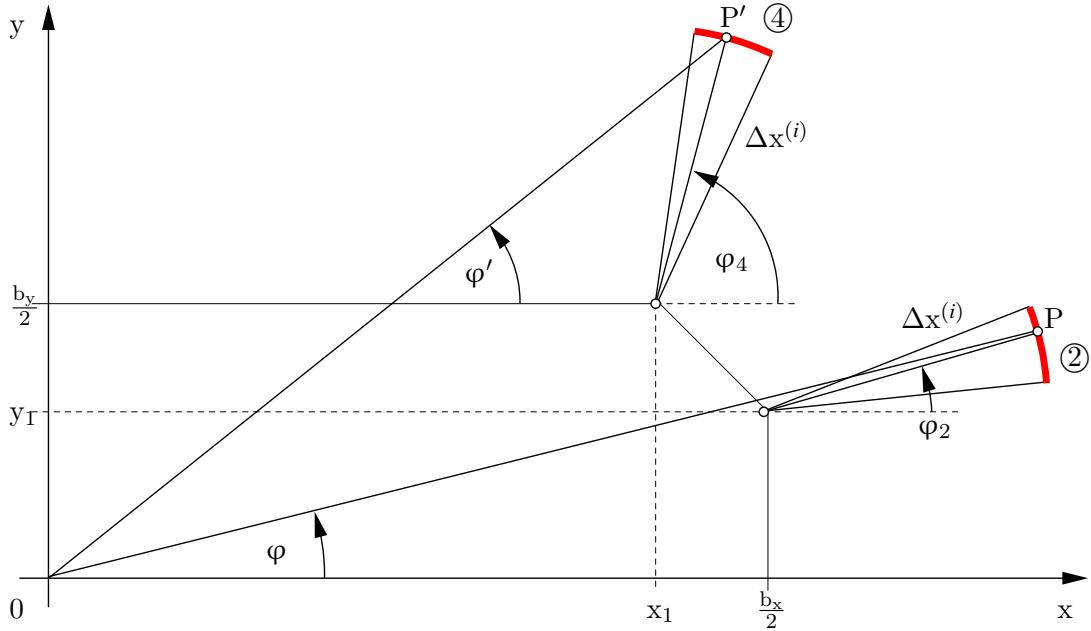
errechnet werden:

$$x = \begin{cases} r_y^{(i)} + x_0, & \text{für } S_n = 1 \text{ und } \varphi = 0; \\ r_y^{(i)} \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \cot(\varphi), & \text{für } S_n = 1 \text{ und } \varphi \neq 0; \\ \frac{b_x}{2} + \Delta x^{(i)} \cdot \cos(\varphi_2), & \text{für } S_n = 2; \\ r_{xy}^{(i)} \cdot \cos(\varphi_3) + x_{d0}; & \text{für } S_n = 3; \\ x_1 + \Delta x^{(i)} \cdot \cos(\varphi_4), & \text{für } S_n = 4; \\ 0, & \text{für } S_n = 5 \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2}; \\ r_x^{(i)} \cdot \sin(\varphi_5), & \text{für } S_n = 5 \text{ und } \varphi \neq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (\text{E.19})$$

$$y = \begin{cases} 0, & \text{für } S_n = 1 \text{ und } \varphi = 0; \\ r_y^{(i)} \cdot \sin(\varphi_1), & \text{für } S_n = 1 \text{ und } \varphi \neq 0; \\ y_1 + \Delta x^{(i)} \cdot \sin(\varphi_2), & \text{für } S_n = 2; \\ r_{xy}^{(i)} \cdot \sin(\varphi_3) + y_{d0}; & \text{für } S_n = 3; \\ \frac{b_y}{2} + \Delta x^{(i)} \cdot \sin(\varphi_4), & \text{für } S_n = 4; \\ r_x^{(i)} + y_0, & \text{für } S_n = 5 \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2}; \\ r_x^{(i)} \cdot \sin(\varphi_5) \cdot \cot(\frac{\pi}{2} - \varphi), & \text{für } S_n = 5 \text{ und } \varphi \neq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (\text{E.20})$$

Diese Gleichungen sind auch für einen rechteckförmigen Wickelkörper mit nicht abgefasten Kanten anwendbar. Dann gilt jedoch

$$x_1 = \frac{b_x}{2} \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{b_y}{2}. \quad (\text{E.21})$$



**Abbildung E.6:** Windungssektoren 2 und 4 mit Hilfswinkeln  $\varphi_2$  und  $\varphi_4$

und die Sektorennummer kann wie folgt ermittelt werden:

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{für } \varphi_1 < \varphi_y^{(i)}; \\ 5, & \text{für } \varphi_5 < \varphi_x^{(i)}; \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{E.22})$$

Die Sektoren 3 und 4 existieren für diesen Fall nicht und der Sektor 2 beschreibt die Verbindung zwischen den Segmenten in Sektor 1 und 5.

## E.2 Äquivalente Abmessungen einer Windung um einen rechteckförmigen Wickelkörper mit abgefaste Kanten

Der Wickelkörper umschließt die Querschnittsfläche

$$A_W = b_x b_y - 2 \left( \frac{b_x}{2} - x_1 \right) \left( \frac{b_y}{2} - y_1 \right). \quad (\text{E.23})$$

Die zwischen der Windung  $i$  und dem Wickelkörper umschlossene Fläche  $\Delta A^{(i)}$  kann aus den Bogensegmenten berechnet werden

$$\begin{aligned} \frac{\Delta A^{(i)}}{4} = & \left( r_y^{(i)} \right)^2 \varphi_y^{(i)} - \frac{1}{2} y_1 \left( \frac{b_x}{2} - x_0 \right) \\ & + \left( \Delta x^{(i)} \right)^2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_x^{(i)} - \varphi_y^{(i)} - 2\varphi_{xy}^{(i)} \right) \\ & + \left( r_{xy}^{(i)} \right)^2 2\varphi_{xy}^{(i)} - \left( r_{xy}^{(i)} - \Delta x \right)^2 \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{xy}^{(i)} \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

$$+ \left( r_x^{(i)} \right)^2 \varphi_x^{(i)} - \frac{1}{2} x_1 \left( \frac{b_y}{2} - y_0 \right) .$$

Die gesamte von der Windung  $i$  umwickelte Fläche ist gegeben durch

$$A_o^{(i)} = A_W + \Delta A^{(i)} . \quad (\text{E.25})$$

Die Länge der Windung  $i$  ist die Summe der Bogenlängen

$$l_o^{(i)} = 4r_x^{(i)}\varphi_x^{(i)} + 4r_y^{(i)}\varphi_y^{(i)} + 8r_{xy}^{(i)}\varphi_{xy}^{(i)} + 4\Delta x^{(i)} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_x^{(i)} - \varphi_y^{(i)} - 2\varphi_{xy}^{(i)} \right) . \quad (\text{E.26})$$

### E.3 Anpassung rechteckförmiger Wicklungen zur Induktivitäts- und Verlustberechnung

Es werde nun eine Wicklung  $\mathbb{T} = \{1, \dots, N\}$  um den rechteckförmigen Wickelkörper untersucht. Eine als ideal rechteckförmig angenommene Windung  $i \in \mathbb{T}$  habe die Kantenlängen  $2x^{(i)}$  und  $2y^{(i)}$ . Sie umschließt die Fläche  $\tilde{A}_i = 4x^{(i)}y^{(i)}$ .

Die Berechnungen der Induktivitätsbeiträge gemäß Gln. (5.19 a-c), (5.29) bzw. (5.30) entspricht jeweils einer Integration des von einer Kurve umschlossenen magnetischen Flusses. Um nun auch reale Wicklungen gemäß Abbildung E.2 mit diesen Gleichungen zu erfassen, ist die Fläche der Windung anzupassen. Eine einfache Skalierung der Induktivitäten mit dem Verhältnis der angenommenen Flächen

$$\frac{A_o^{(i)}}{\tilde{A}_i}$$

führt insbesondere für die Gegeninduktivitäten eng benachbarter Leiter nicht zu akzeptablen Ergebnissen. Weiterhin sei angemerkt, dass zur Gegeninduktivitätsberechnung beide in die Berechnung einfließenden Windungen anzupassen sind.

Stattdessen werden zur Induktivitätsberechnung für alle Windungen  $i \in \mathbb{T}$  des Systems die Kantenlängen so angepasst,  $2x'^{(i)}$ ,  $2y'^{(i)}$ , dass die umschlossene Querschnittsfläche  $\tilde{A}'_i = 4x'^{(i)}y'^{(i)}$  mit der Fläche  $A_o^{(i)}$  gemäß Gl. (E.25) übereinstimmt und auch das Kantenverhältnis erhalten bleibt

$$\frac{y'^{(i)}}{x'^{(i)}} = \frac{y^{(i)}}{x^{(i)}} . \quad (\text{E.27})$$

Dies ist für die Kantenlängen

$$y'^{(i)} = \frac{1}{2} \sqrt{A_o^{(i)} \frac{y^{(i)}}{x^{(i)}}} \quad \text{und} \quad x'^{(i)} = \frac{1}{2} \sqrt{A_o^{(i)} \frac{x^{(i)}}{y^{(i)}}} \quad (\text{E.28})$$

erfüllt.

In die Berechnung der inneren Eigeninduktivität gemäß Gl. (5.19 d) bei ideal rechteckförmigen Windungen fließt lediglich die Windungslänge  $l^{(i)} = 4x^{(i)} + 4y^{(i)}$  ein. Für reale Windungen gemäß Abbildung E.2 ist sie stattdessen gemäß Gl. (E.26) zu ermitteln

$$l'^{(i)} = l_o^{(i)} . \quad (\text{E.29})$$

## E.4 Anpassung der Verlustberechnung für rechteckförmige Windungen

In zylindrisch aufgebauten Spulen und Übertragern (z.B. mit einem Topfkern) führt die Rotationssymmetrie über die Lösung eines zweidimensionalen Randwertproblems hin zur Berechnung der Wicklungsverluste aus der Magnetfeldverteilung. Die Verlustleistung einer einzelnen Windung wird durch eine Integration des Poyntingvektors  $\underline{\vec{S}}$  auf der Oberfläche  $\partial V_i$  des Leitervolumens  $V_i$  über der Querschnittsfläche  $A_i$  berechnet

$$P_{V_i}^o = -\operatorname{Re} \left\{ \iint_{\partial V_i} \underline{\vec{S}} \cdot d\underline{a}_i \right\} = -l^{(i)} \operatorname{Re} \left\{ \oint_{\partial A_i} \underline{\vec{S}} \cdot \vec{n}_i dr_i \right\}. \quad (\text{E.30})$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie der Wicklung wird die Integration entlang dem Verlauf einer Windung auf das Produkt mit der Windungslänge reduziert.  $\vec{n}_i$  ist ein Normaleneinheitsvektor auf der Oberfläche des Leitervolumens.

Die Magnetfeldverteilung von Spulen und Übertragern auf rechteckförmigen Wickelkörpern ist dreidimensional. Dies kann auch dann der Fall sein, wenn der Wickelkörper rotationssymmetrisch ist. Als Beispiel seien ETD-Kerne genannt. Somit ist auch das zu lösende Randwertproblem zur Ermittlung der Magnetfeldverteilung am Ort eines Leiters dreidimensional. Die Lösung des dreidimensionalen Randwertproblems wurde bereits in Kapitel 4 durch Anwendung einer Näherung umgangen, indem ausschließlich die zum Strom orthogonalen Magnetfeldanteile  $\vec{e}_I \times \underline{\vec{H}}$  ermittelt und für die berechnung der Verluste verwendet werden.

Die Anpassungen der Kantenlängen gemäß Abschnitt E.3 werden auch für die Verlustberechnung für alle Windungen eingeführt.

Die so angepasste Kurve  $\check{C}_i$  der untersuchten Windung  $i$  der Länge  $l^{(i)}$  wird in  $Z$  Teilkurven  $C_s$  der Länge  $l_{xs}$  diskretisiert, so dass

$$\check{C}_i = \bigcup_{s \in \{1, \dots, Z\}} C_s \quad \text{und} \quad C_r \cap C_s = 0 \quad \text{für} \quad r \neq s, \quad r, s \in \{1, \dots, Z\}. \quad (\text{E.31})$$

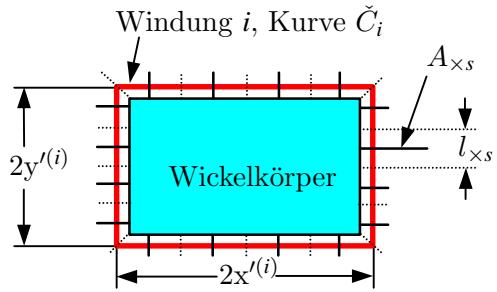
Im Verlauf einer Kurve  $C_s$  wird eine zum dort fließenden Strom  $I$  senkrecht orientierte Schnittebene  $\vec{e}_I A_{xs}$  definiert. Diese kann z.B. auf halber Strecke eines Teilstücks  $l_{xs}$  liegen, wie in Abbildung E.7 dargestellt. Die Diskretisierung wird so fein gestaltet bzw. die Längen  $l_{xs}$  werden so kurz gewählt ( $l_{xs} \ll l^{(i)}$ ), dass die magnetische Feldstärke entlang dem Kurvenverlauf  $C_s$  kaum variiert. Innerhalb einer Schnittebene  $A_{xs}$  werden gemäß den Abschnitten 4.3.1 und 4.3.2 nur noch die in der Schnittebene zum dort verlaufenden Kurvenabschnitt  $C_s$  parallel bzw. normal gerichteten Magnetfeldkomponenten berechnet und der Poyntingvektor  $\underline{\vec{S}}_{ixs}$  auf der Schnittkurve

$$\partial A_{ixs} = \partial V_i \cap A_{xs} \quad (\text{E.32})$$

von Leiteroberfläche  $\partial V_i$  und Schnittebenenfläche  $A_{xs}$  ermittelt. Die Berechnung der Verlustleistung der Windung kann dann in jedem Diskretisierungsabschnitt durch eine Oberflächenintegration über den Poyntingvektor erfolgen und die gesamte Verlustleistung der rechteckförmig gewickelten Windung ist in guter Näherung

$$P_{V_i}^{\square} \approx -\frac{l_o^{(i)}}{4 [x'(i) + y'(i)]} \sum_{s=1}^Z l_{xs} \operatorname{Re} \left\{ \oint_{\partial A_{ixs}} \underline{\vec{S}}_{ixs} \cdot \vec{n}_{ixs} dr_s \right\}, \quad (\text{E.33})$$

#### E.4 Anpassung der Verlustberechnung für rechteckförmige Windungen



**Abbildung E.7:** Windungen um einen rechteckförmigen Wickelkörper

wobei auch schon die genauere Windungslänge  $l_o^{(i)}$  der gegenüber dem idealen Fall nicht rechteckförmigen Windung gemäß Gl. (E.26) berücksichtigt worden ist.

## E.5 Beispiele

Zur Bestimmung der Öffnungswinkel der Kreisbogensegmente entsprechend der Gln. (E.6 a-c) wird für die folgenden Beispiele der Faktor

$$f_{\text{ell}}^{(i)} := f_{\max} + (f_{\min} - f_{\max}) e^{-K(L^{(i)} - 1)} \quad (\text{E.34})$$

in Abhängigkeit von der Wicklungslage  $L^{(i)}$  der Windung  $i$  mit den für alle Beispiele und Lagen gleichermaßen gültigen Konstanten

$$f_{\min} := \frac{1}{1 + s M_{\text{ell}}^{k_1}}, \quad (\text{E.35})$$

$$f_{\max} := f_{\min}^{k_2}, \quad (\text{E.36})$$

$$f_M := 0.9(f_{\max} - f_{\min}) + f_{\min}, \quad (\text{E.37})$$

$$K := \frac{\log \frac{f_{\min} - f_{\max}}{f_M - f_{\max}}}{M_{\text{ell}} - 1}, \quad (\text{E.38})$$

sowie  $k_1 = 1.1$ ,  $s = 0.3$ ,  $k_2 = 0.5$  und  $M_{\text{ell}}$  gemäß Gl. (E.2) definiert. Dieser Satz an Konstanten ist evtl. nicht für jede Spule die beste Wahl, führt jedoch zu einer hinreichend guten Übereinstimmung zwischen simulierten und realen Wicklungsverläufen für verschiedenste Wickelkörper und unterschiedliche Drahtstärken. Mit der Konstanten  $s$  kann die Wickelspannung variiert werden. Kleinere Werte führen dazu, dass die Öffnungswinkel der Kreissegmente kleiner, die Windungen also bauchiger werden. Größere Werte führen zu enger am Wickelkörper anliegenden Drahtverläufen.

Die Tabellen E.1 bis E.11 zeigen Vergleiche zwischen gemessenen und simulierten Außendurchmessern von Spulen aus Kupferlackdraht auf rechteckförmigen Wickelkörpern. Die Abbildungen E.8 bis E.13 zeigen den Verlauf der Drahtmitte durch verschiedene Lagen von drahtgewickelten Spulen. Die in den Tabellen angegebene Breite wurde entlang der x-Achse gemessen, die Stärke entlang der y-Achse, wobei gegenüber den Abbildungen der Außendurchmesser des Kupferlackdrahtes entsprechend berücksichtigt wurde.

Lage	Messung [ mm ]		Simulation [ mm ]	
	Breite	Stärke	Breite	Stärke
1	41.4	7.1	41.2	7.7
2	42.2	8.6	42.2	9.0
6	46.4	13.6	46.2	14.0

**Tabelle E.1:** Wickelkörper:  $40 \times 5 \text{ mm}^2$ , Drahtdurchmesser:  $d_{\text{nom}} = 0.5 \text{ mm}$

	Messung [ mm ]		Simulation [ mm ]	
Lage	Breite	Stärke	Breite	Stärke
1	42.8	10.6	42.2	10.3
2	44.6	12.9	44.2	13.0
4	48.3	17.5	48.0	18.0
8	55.7	26.2	55.8	27.4

**Tabelle E.2:** Wickelkörper:  $40 \times 5 \text{ mm}^2$ , Drahtdurchmesser:  $d_{\text{nom}} = 1.0 \text{ mm}$ 

	Messung [ mm ]		Simulation [ mm ]	
Lage	Breite	Stärke	Breite	Stärke
1	41.8	12.0	41.2	12.4
2	43.0	13.8	42.2	13.6
6	46.9	18.6	46.3	18.4

**Tabelle E.3:** Wickelkörper:  $40 \times 10 \text{ mm}^2$ , Drahtdurchmesser:  $d_{\text{nom}} = 0.5 \text{ mm}$ 

	Messung [ mm ]		Simulation [ mm ]	
Lage	Breite	Stärke	Breite	Stärke
1	43.1	15.7	42.4	14.7
2	44.2	18.2	44.2	17.3
4	48.9	22.5	48.2	22.0

**Tabelle E.4:** Wickelkörper:  $40 \times 10 \text{ mm}^2$ , Drahtdurchmesser:  $d_{\text{nom}} = 1.0 \text{ mm}$ 

	Messung [ mm ]		Simulation [ mm ]	
Lage	Breite	Stärke	Breite	Stärke
1	21.8	11.9	21.4	12.0
2	23.0	13.0	22.4	13.2
6	27.0	17.4	26.6	17.8

**Tabelle E.5:** Wickelkörper:  $20 \times 10 \text{ mm}^2$ , Drahtdurchmesser:  $d_{\text{nom}} = 0.5 \text{ mm}$ 

	Messung [ mm ]		Simulation [ mm ]	
Lage	Breite	Stärke	Breite	Stärke
1	23.2	13.8	22.6	13.9
2	25.4	15.8	24.7	16.3
4	29.0	20.3	28.7	20.8

**Tabelle E.6:** Wickelkörper:  $20 \times 10 \text{ mm}^2$ , Drahtdurchmesser:  $d_{\text{nom}} = 1.0 \text{ mm}$

## E Einfluss rechteckförmiger Wicklungsgeometrie

Lage	Messung [ mm ]		Simulation [ mm ]	
	Breite	Stärke	Breite	Stärke
2	13.7	13.7	13.3	13.3
4	14.9	14.9	14.7	14.7
9	18.2	18.0	18.2	18.2
16	22.5	22.3	23.0	23.0

**Tabelle E.7:** Wickelkörper: E32/16/9, Drahtdurchmesser:  $d_{\text{nom}} = 0.3 \text{ mm}$

Lage	Messung [ mm ]		Simulation [ mm ]	
	Breite	Stärke	Breite	Stärke
3	15.7	15.7	15.4	15.4
9	21.7	21.5	21.8	21.8

**Tabelle E.8:** Wickelkörper: E32/16/9, Drahtdurchmesser:  $d_{\text{nom}} = 0.5 \text{ mm}$

Lage	Messung [ mm ]		Simulation [ mm ]	
	Breite	Stärke	Breite	Stärke
3	22.6	20.0	21.7	19.0
4	23.1	20.7	22.8	20.1
16	35.3	32.6	-	-

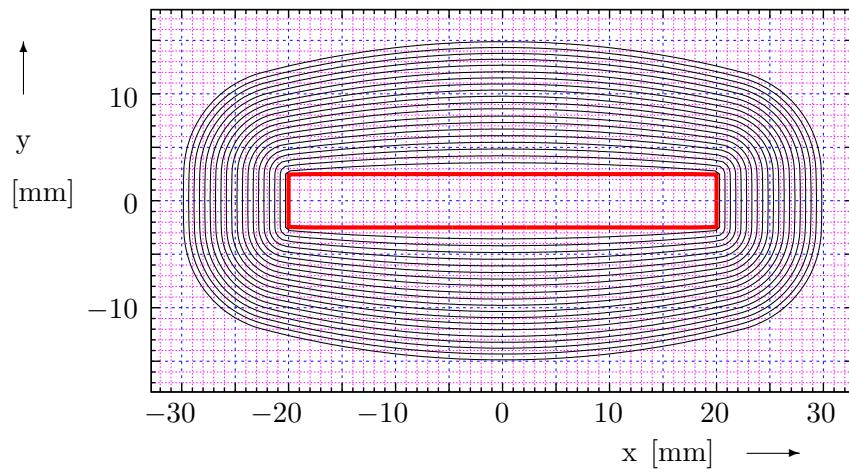
**Tabelle E.9:** Wickelkörper: E42/21/15, Drahtdurchmesser:  $d_{\text{nom}} = 0.5 \text{ mm}$

Lage	Messung [ mm ]		Simulation [ mm ]	
	Breite	Stärke	Breite	Stärke
1	21.5	18.9	21.0	18.4
3	25.3	22.5	25.3	22.8
9	37.0	34.8	-	-

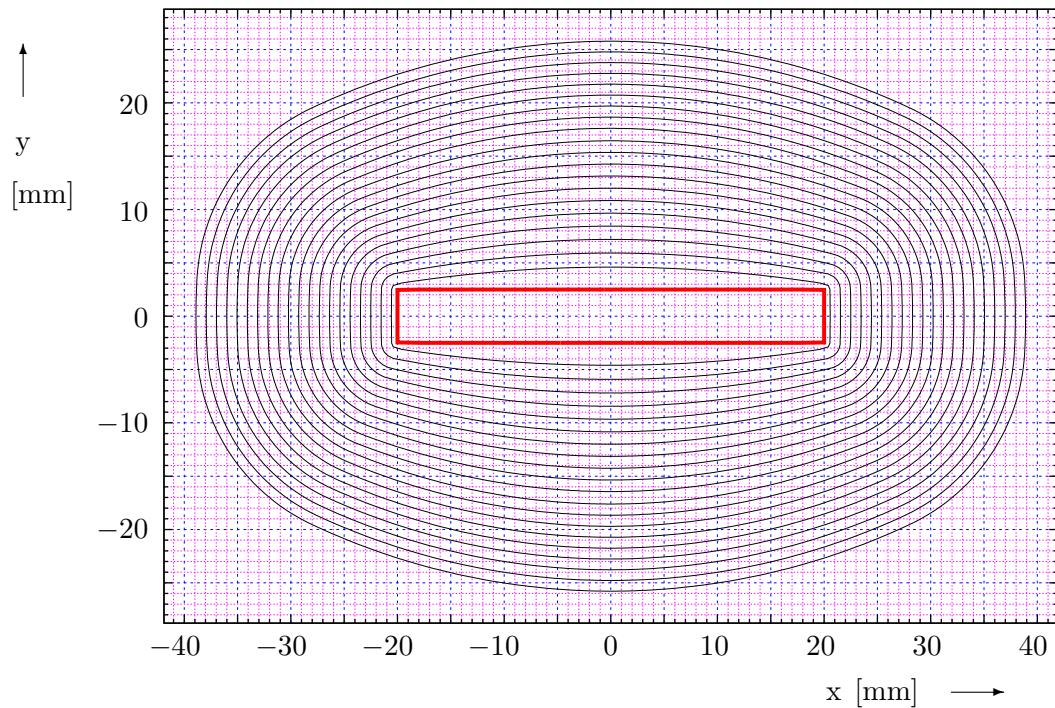
**Tabelle E.10:** Wickelkörper: E42/21/15, Drahtdurchmesser:  $d_{\text{nom}} = 1.0 \text{ mm}$

Lage	Messung [ mm ]		Simulation [ mm ]	
	Breite	Stärke	Breite	Stärke
1	33.5	27.1	32.9	26.4
3	37.8	31.5	37.1	30.8
9	49.8	43.9	49.2	43.4

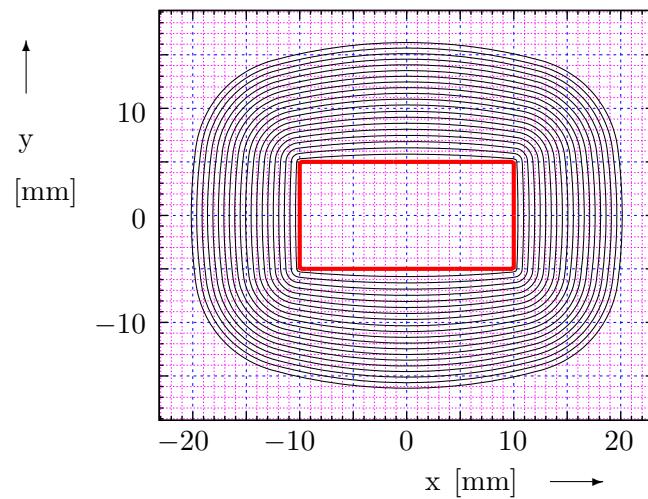
**Tabelle E.11:** Wickelkörper: E65/32/27, Drahtdurchmesser:  $d_{\text{nom}} = 1.0 \text{ mm}$



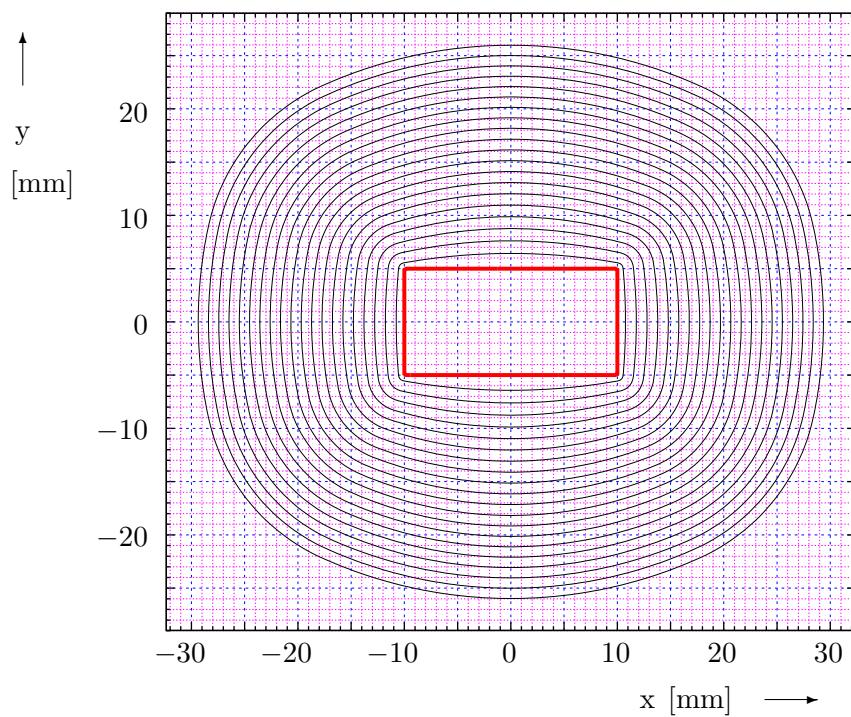
**Abbildung E.8:** Windungen um einen rechteckförmigen Wickelkörper  $40 \times 5 \text{ mm}^2$ , Drahtdurchmesser  $d_{\text{nom}} = 0.5 \text{ mm}$



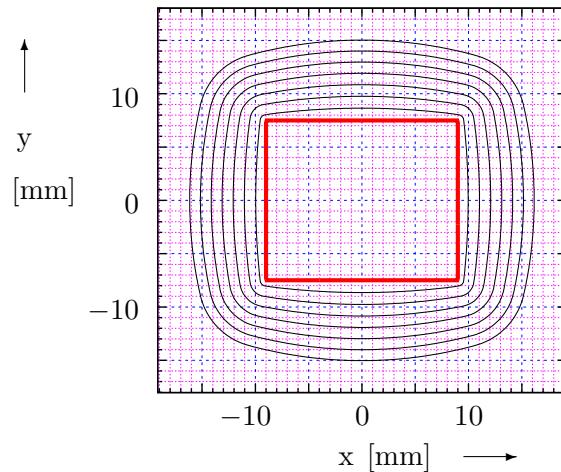
**Abbildung E.9:** Windungen um einen rechteckförmigen Wickelkörper  $40 \times 5 \text{ mm}^2$ , Drahtdurchmesser  $d_{\text{nom}} = 1.0 \text{ mm}$



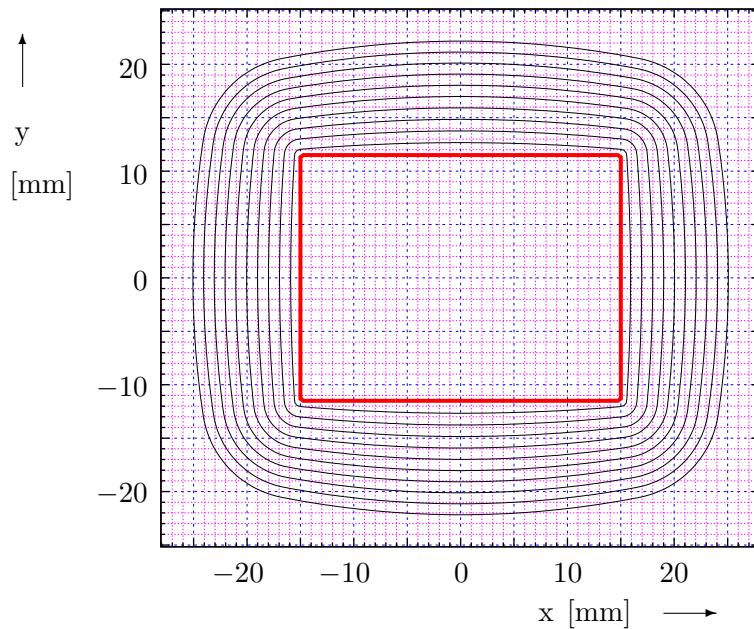
**Abbildung E.10:** Windungen um einen rechteckförmigen Wickelkörper  $20 \times 10 \text{ mm}^2$ , Drahtdurchmesser  $d_{\text{nom}} = 0.5 \text{ mm}$



**Abbildung E.11:** Windungen um einen rechteckförmigen Wickelkörper  $20 \times 10 \text{ mm}^2$ , Drahtdurchmesser  $d_{\text{nom}} = 1.0 \text{ mm}$



**Abbildung E.12:** Windungen um einen rechteckförmigen Wickelkörper E42/21/15, Drahtdurchmesser  $d_{\text{nom}} = 1.0 \text{ mm}$



**Abbildung E.13:** Windungen um einen rechteckförmigen Wickelkörper E65/32/27, Drahtdurchmesser  $d_{\text{nom}} = 1.0 \text{ mm}$

## E.6 Zusammenfassung

Der Einfluss der nicht ideal rechteckförmigen Wicklungsform einer Windung wurde untersucht, indem zunächst die Form einer solchen Windung so gut wie möglich beschrieben wurde. Als Freiheitsgrad fließt u.a. eine normierte mechanische Wicklungsspannung  $s$  ein. Je größer diese Spannung ist, desto ähnlicher wird der reale Windungsverlauf einem Rechteck. Bei kleiner Wicklungsspannung wird die Windung nur lose am Wickelkörper bzw. darunterliegenden Wicklungslagen anliegen. Mit jeder weiteren Wicklungslage nehmen die Windungen zunehmend Kreis- bzw. Ellipsenform an.

Ist der Windungsverlauf hinreichend gut beschrieben, so können aus der umwickelten Fläche und der Windungslänge Aussagen zu einer Verbesserung der Induktivitäts- und Verlustberechnung getroffen werden. Sollen alle Berechnungen nach wie vor analytisch erfolgen, so ist es sinnvoll die so gewonnenen Flächen lediglich für eine Anpassung der Kantenlängen der rechteckförmigen Windungen zu verwenden und nach wie vor mit ideal rechteckförmiger Wicklungsform zu rechnen. Abschließend können die Ergebnisse mit Hilfe der neu berechneten Windungslänge angepasst werden.

# F Verwendete Symbole

**Referenzen auf Gleichungen anderer Autoren:**

[1] ( $X$ )	Gleichung Nr. $X$ bei Abramowitz [1]
[10] $\int X \int$	unbestimmtes Integral Nr. $X$ gemäß Bronstein [10], Abschnitt 1.1.3.3.
[17] ( $X$ )	Gleichung Nr. $X$ bei Gradshteyn [17]

**Symbole:**

$a$	Kupferradius eines Drahtes
$a_i, b_i$	Koeffizienten einer Linearkombination
$\mathbf{a}$	reeller Zeilenvektor ( $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ ) oder reeller Spaltenvektor ( $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ )
$(a_n)$	reeller Zeilenvektor ( $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ )
$\underline{\mathbf{a}}$	komplexer Zeilenvektor ( $\underline{\mathbf{a}} \in \mathbb{C}^{1 \times N}$ ) oder komplexer Spaltenvektor ( $\underline{\mathbf{a}} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ )
$(\underline{a}_n)$	komplexer Zeilenvektor ( $\underline{\mathbf{a}} \in \mathbb{C}^{1 \times N}$ )
$\mathbf{a}^T$	transponierter Vektor zu $\mathbf{a}$
$\underline{\mathbf{a}}^{*T}$	adjungierter Vektor zu $\underline{\mathbf{a}}$
$da$	differentielles Flächenelement
$d\vec{a}$	diff. Oberflächenelement
$A$	Flächeninhalt
$A_m, \dots, H_m$	Koeffizienten einer Reihenentwicklung
$\mathbf{A}$	$(M \times N)$ -Matrix ( $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ )
$= (A_{m,n})$	
$\underline{\mathbf{A}}$	$(M \times N)$ -Matrix ( $\underline{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ )
$= (\underline{A}_{m,n})$	
$\mathbf{A}^T$	transponierte Matrix zu $\mathbf{A}$
$\underline{\mathbf{A}}^{*T}$	adjungierte Matrix zu $\underline{\mathbf{A}}$
$\alpha$	Winkel
$b$	Radius eines isolierten Drahtes
$C$	Kapazität; Kurve
$C$	Konstante
$C_{rs}$	Teilkapazität
$\mathbf{C}$	Matrix aus Teilkapazitäten
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^{N \times 1}$	Menge komplexer Spaltenvektoren
$\mathbb{C}^{M \times N}$	Menge komplexer Matrizen
$d$	Durchmesser
$\vec{D}$	elektrische Flussdichte

## F Verwendete Symbole

$\Delta$	Laplace-Operator
$\vec{e}_x$	Einheitsvektor (z.B. parallel zur x-Achse)
$\vec{E}$	elektrische Feldstärke
$E(h^2)$	komplettes elliptisches Integral zweiter Art
$\varepsilon$	elektrische Permittivität
$\varepsilon_0$	elektrische Feldkonstante
$\varepsilon_r$	relative Permittivitätszahl
$f(x)$	Funktion
$f^{[0]}(x)$	Näherung (oder lineare Interpolation) zur Funktion $f(x)$
$f_{\text{err}}$	relativer Positionsfehler, Funktion
$F$	Stammfunktion
$\vec{F}$	vektorwertige Funktion
$g$	Gewichtungsfunktion
$h_1, h_2, h_3$	Metrische Faktoren
$H(\eta)$	Teillösung der Laplacegleichung in Torus-Koordinaten [28]
$\Theta(\theta)$	Teillösung der Laplacegleichung in Torus-Koordinaten [28]
$i(t)$	Stromstärke (Zeitbereich)
$I$	Stromstärke (Betrag)
$\underline{i}$	Vektor aus Stromzeigern ( $\underline{i} \in \mathbb{C}^n$ )
$\underline{I}$	Stromzeiger
$j$	imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$
$I_n(\rho)$	modifizierte Besselfunktion erster Art der Ordnung $n$
$K_n(\rho)$	modifizierte Besselfunktion zweiter Art der Ordnung $n$
$k_{rs}$	Kapazitätskoeffizient
$K(h^2)$	komplettes elliptisches Integral erster Art
$\vec{K}$	Strombelag
$\mathbf{K}$	Kapazitätsmatrix
$\kappa$	elektrische Leitfähigkeit
$\Lambda$	Beitrag zu einer Induktivität bzw. zu einer Gegeninduktivität
$L$	Induktivität
$L_{rs}$	Induktivitätskoeffizient
$\mathbf{L}$	Induktivitätsmatrix
$\lambda$	Linienladungsdichte
$\lambda$	Eigenwert
$m, n$	Indizes ( $m, n \in \mathbb{N}$ )
$\mu$	magnetische Permittivität
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante
$\mu_r$	relative magnetische Permittivität
$N$	natürliche Zahl, Windungszahl, Norm
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen erweitert um die Zahl 0
$O, 0$	Koordinaten-Ursprung
$\underline{p}_e$	Vektor aus Potentialzeigern ( $\underline{p}_e \in \mathbb{C}^n$ )
$P$	Aufpunkt
$\underline{P}_e$	elektrischer Potentialzeiger
$\mathcal{P}_\nu(x)$	Legendre-Funktion erster Art, Grad $\nu$ und Ordnung 0
$\Pi(m, h^2)$	komplettes elliptisches Integral dritter Art

$q, Q$	elektrische Ladung
$\underline{q}$	Ladungszeiger ( $\underline{q} \in \mathbb{C}^n$ )
$Q$	Quellpunkt
$Q_\nu(x)$	Legendre-Funktion zweiter Art, Grad $\nu$ und Ordnung 0
$r, s$	Indizes ( $r, s \in \mathbb{N}$ )
$\vec{r}$	Ortsvektor, $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$
$R$	Widerstand
$\mathbf{R}$	Widerstandsmatrix
$R(\rho)$	Teillösung der Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N \times 1}$	Menge reeller Spaltenvektoren
$\mathbb{R}^{M \times N}$	Menge reeller Matrizen
$(\rho_Q, \varphi_Q, z_Q)$	Quellpunkt-Vektor $\vec{r}_Q = \overrightarrow{OQ}$ in Zylinderkoordinaten
$t$	Zeit
$\vartheta$	Temperatur [ $^\circ C$ ]
$U$	el. Spannung; skalare Funktion
$\underline{U}$	Spannungs-Zeiger
$\underline{u}$	Vektor aus Spannungs-Zeigern ( $\underline{u} \in \mathbb{C}^n$ )
$v, w$	Indizes ( $v, w \in \mathbb{N}$ )
$V$	Volumen
$V$	natürliche Zahl
$W$	Wicklungs-Anzahl
$W$	Energie
$\underline{x}$	Vektor ( $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ )
$\varphi_e$	elektrisches Potential
$\varphi$	Phase; Zylinderkoordinate
$\Phi$	konstantes Potential
$\Phi(\varphi)$	Teillösung der Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten
$\Psi$	elektrischer Fluss
$\Phi$	magnetischer Fluss
$\underline{\psi}_m$	Vektor aus magnetischen Flusszeigern ( $\underline{\psi}_m \in \mathbb{C}^n$ )
$\omega$	Kreisfrequenz
$z, \underline{z}^*$	komplexe Zahl und konjugiert komplexe Zahl, so dass $zz^* =  \underline{z} ^2$

### Integration, Stammfunktionen:

$$F(x) = \int f(x) dx + C$$

Stammfunktion, unbestimmtes Integral

$$\begin{aligned} \left[ F(x) \right]_{x=a}^{x=b} &= F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Differenz von Stammfunktionen, bestimmtes Integral

## F Verwendete Symbole

### Differentiation:

$\partial_x f$	$= \frac{\partial f}{\partial x}$ , partielle Ableitung der Funktion $f$ nach der Variablen $x$
$\Delta f$	Laplace-Operator angewendet auf Funktion $f$
$Lf$	Differentialoperator allgemein, angewendet auf Funktion $f$

### Koordinaten:

(x, y, z)	kartesische Koordinaten
( $\rho$ , $\varphi$ , z)	Zylinderkoordinaten
(r, $\varphi$ , $\vartheta$ )	Kugelkoordinaten
( $\eta$ , $\varphi$ , $\theta$ )	Torus-Koordinaten gemäß Moon [28]

### Konstanten:

Eulersche Konstante	e	$\approx 2,71828$
Kreiszahl	$\pi$	$\approx 3,14159$
magnetische Feldkonstante	$\mu_0$	$= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$
elektrische Feldkonstante	$\varepsilon_0$	$\approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

# Literaturverzeichnis

- [1] ABRAMOWITZ, MILTON und IRENE A. STEGUN: *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publishing Inc., New York, 9. Dover Auflage, 1972. (konform zur 10. Auflage, Government Printing Office, Dez. 1972).
- [2] ALBACH, M.: *Two-dimensional calculation of winding losses in transformers*. In: *Proceedings of the 2000 Power Electronics Specialist Conference*, Band 3, Seiten 1639–1644, 2000.
- [3] ALBACH, M.: *Grundlagen der Elektrotechnik*, Band 1. Pearson Studium, München, 1. Auflage, 2004. Erfahrungssätze, Bauelemente, Gleichstromschaltungen.
- [4] ALBACH, M., T. DÜRBAUM und A. BROCKMEYER: *Calculating core losses in transformers for arbitrary magnetizing currents a comparison of different approaches*. In: *PESC Record. 27th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference*, Band 2, Seiten 1463–1468, 1996.
- [5] ALBACH, M. und H. ROSSMANITH: *The influence of air gap size and winding position on the proximity losses in high frequency transformers*. In: *2001 IEEE 32nd Annual Power Electronics Specialists Conference*, Band 3, Seiten 1485–1490, 2001.
- [6] BINNS, K.J. und P.J. LAWRENSON: *Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems*. Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris, 1963.
- [7] BINNS, K.J., P.J. LAWRENSON und C.W. TROWBRIDGE: *The analytical and numerical Solution of Electric and Magnetic Fields*. John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapur, 1992.
- [8] BROCKMEYER, A., M. ALBACH und T. DÜRBAUM: *Remagnetization losses of ferrite materials used in power electronic applications*. In: *Proceedings of 18th European Conference on Power Electronics, Drives and Motion*, Seiten 387–394, 1996.
- [9] BROCKMEYER, ANSGAR: *Dimensionierungswerkzeug für magnetische Bauelemente in Stromrichteranwendungen*. Dissertation, RWTH-Aachen, Institut für Stromrichtertechnik und Elektrische Antriebe (ISEA), Aachen, 1997.
- [10] BRONSTEIN, IL'JA N. und KONSTANTIN A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 24. Auflage, 1989.
- [11] DEWILDE, P. und E.F. DEPRETTERE: *Singular value decomposition: An Introduction*. In: DEPRETTERE, E.F. (Herausgeber): *SVD and signal processing: Algorithms, Applications and Architectures*. Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland), New York, 1988.

## Literaturverzeichnis

- [12] DÜRBAUM, TH. und M. ALBACH: *Core losses in transformers with an arbitrary shape of the magnetizing current.* In: *Proceedings of European Conference on Power Electronics and Applications*, Seiten 171–176, 1995.
- [13] FELDTKELLER, ERNST: *Dielektrische und magnetische Materialeigenschaften I.* Verlag Anton Hain, Meisenheim/Glan, 1973.
- [14] FELDTKELLER, ERNST: *Dielektrische und magnetische Materialeigenschaften II, Piezoelektrische, magnetostriktive und dynamische Eigenschaften.* Verlag Anton Hain, Meisenheim/Glan, 1974.
- [15] FELDTKELLER, RICHARD: *Theorie der Spulen und Übertrager.* S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 4. Auflage, 1963.
- [16] FRÄNKEL, D. und R. NUSCHELER: *Dreidimensionale numerische Berechnung magnetischer Felder mit Hilfe eines Summationsverfahrens.* Archiv für Elektrotechnik, 62(6):327–333, Sept. 1980.
- [17] GRADSHTEYN, I.S. und I.M. RYZHIK: *Table of Integrals, Series, and Products.* Academic Press Ltd., San Diego, California, 5. Auflage, 1994. Lektor: Jeffrey, Alan.
- [18] HAFNER, CHRISTIAN: *Numerische Berechnung elektromagnetischer Felder.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [19] HARRINGTON, ROGER F.: *Field Computation by Moment Methods.* Macmillan, New York, 1. Auflage, 1968.
- [20] HEUSER, HARRO: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 2. Auflage, 1991.
- [21] HORST, PETER und MANFRED ALBACH: *The Influence of the non-linear Ferrite Characteristics on the Attenuation of Power Line Filters.* In: *9th European Conference on Power Electronics and Applications, EPE 2001*, Graz, Österreich, Aug. 2001. EPE Association, c/o VUB-SRBE/KBVE, av. de la Plaine, 2 Pleinlaan, 10050 Brüssel.
- [22] KOCH, J.: *Berechnung der Kapazität von Spulen, insbesondere in Schalenkernen.* In: *Valvo Berichte*, Band XIV, Heft 3. Valvo, 1969.
- [23] KRÖGER, ROLAND und ROLF UNBEHAUEN: *Elektrodynamik.* Teubner Verlag, Stuttgart, 3. Auflage, 1993.
- [24] 3C96 Material grade specification. Magnetic Products Data Sheet, Dez. 1999. Philips Components.
- [25] 3B7 Material grade specification. Magnetic Products Data Sheet, Sep. 2004. Philips Components.
- [26] MAXWELL, JAMES CLERK: *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Band 1. Clarendon Press, Oxford, 3. Auflage, 1891. (ungekürzte 3. Auflage, Neuveröffentlichung, Dover Publications Inc., New York, 1954).
- [27] MAXWELL, JAMES CLERK: *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Band 2. Clarendon Press, Oxford, 3. Auflage, 1891. (ungekürzte 3. Auflage, Neuveröffentlichung, Dover Publications Inc., New York, 1954).

- [28] MOON, P. und D.E. SPENCER: *Field Theory Handbook*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1971. (korrigierte 3. Auflage, 1988).
- [29] MULDER, STEEF A.: *Fit formulae for power loss in ferrites and their use in transformer design*. In: *PCIM'93*, Seiten 345–359, Nürnberg, Juni 1993. ZM Communications.
- [30] RAO, CALYAMPUDI RADHAKRISHNA und SUJIT KUMAR MITRA: *Generalized inverse of matrices and its applications*. Wiley series in probability and mathematical statistics. John Wiley and Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1971.
- [31] THOMSON, W. (LORD KELVIN): *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism*. Macmillan, London, 1872.
- [32] UNBEHAUEN, ROLF: *Elektrische Netzwerke*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 3. Auflage, 1990.
- [33] UNBEHAUEN, ROLF: *Systemtheorie*. R. Oldenbourg Verlag, München, 6. Auflage, 1993.
- [34] *Ferroxcube 1976*. Valvo Handbuch, 1976. Unternehmensbereich Bauelemente der Philips GmbH.
- [35] VOSS, S., H. ROSSMANITH und M. ALBACH: *The influence of air gap position and winding position on the inductance in high frequency transformers*. In: *9th European Conference on Power Electronics and Applications*, Seite 7 ff., 2001.
- [36] VOSS, STEPHAN: *Equivalent Circuit Modelling for hf-Transformers*. In: *2nd International Conference on Electrical and Power Engineering, EPE 2002*, Band C, Seiten 15–20, Iași, Rumänien, Nov. 2002.
- [37] VOSS, STEPHAN: *Equivalent Circuit Modelling for HF-Transformers*. In: *10th European Conference on Power Electronics and Applications, EPE 2003*, Toulouse, Frankreich, Sept. 2003.
- [38] VOSS, STEPHAN und MANFRED ALBACH: *Analytical Calculation of Winding Capacitances in Transformers*. In: *International Magnetics Conference, Intermag 2003*, Boston, Massachusetts, März/April 2003.
- [39] ZINKE, OTTO und SEITHER HANS: *Widerstände, Kondensatoren, Spulen und ihre Werkstoffe*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1982.
- [40] ZURMÜHL, RUDOLF und SIGURD FALK: *Matrizen und ihre technischen Anwendungen, Teil 1. Grundlagen*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 5. Auflage, 1984.



# **Lebenslauf**

## **Persönliche Daten**

Name: Stephan Voss  
Geburtsdatum: 9. April 1971  
Geburtsort: Lübeck

## **Ausbildung**

1977 - 1981	Grundschule Roter Hahn in Lübeck
1981 - 1990	Trave-Gymnasium zu Lübeck
1990	Abschluss der Schulausbildung mit dem Abitur
1990 - 1991	Allgemeiner Wehrdienst in der Fernmeldeinstandsetzung in Coesfeld und Eutin
1991 - 1998	Studium der Elektrotechnik an der Friedrich-Alexander-Universität in Erlangen
1998	Abschluss des Studiums als Dipl.-Ing. Univ.

## **Berufstätigkeit**

1998 - 1999	Siemens AG, Anlagenbau und Technische Dienstleistungen, Abteilung Netzwerk-Infrastruktur in Erlangen
2000 - 2005	Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Elektromagnetische Felder der Friedrich-Alexander-Universität in Erlangen