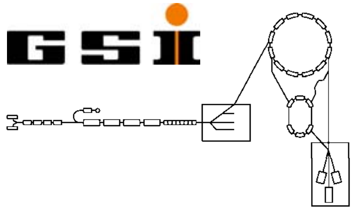


10. Kavitäten

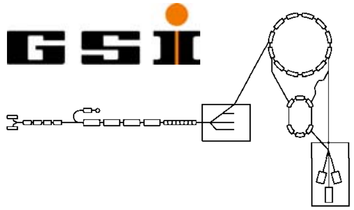
Vorlesungsfolien 24.06.2011

Inhalt

10. Kavitäten

- 10.1 Die SIS18 Ferrit-Kavität (installiert im Tunnel)
- 10.2 Das Schema der SIS18 Ferrit-Kavität selbst
- 10.3 Das Schema der SIS18-Ferritkavität mit Tetrodenverstärker
- 10.4 Zur Ferrit-Füllung der Kavität
- 10.5 Ein vereinfachtes Kavitätenmodell zur Auswertung der ersten und zweiten Maxwellschen Gleichung
- 10.6 Zur Erklärung der Funktion der Achterschleife
- 10.7 Die Auswertung der zweiten Maxwellschen Gleichung am vereinfachten Kavitätenmodell
- 10.9 Gapspannung und die Kavitätenimpedanz
- 10.10 Die Eingangsimpedanz der Kavität
- 10.11 Gapspannung und Generatorspannung unter Einfluß des Strahlstroms
- 10.12 Abstimmung der Kavität
- 10.13 Equivalentes Serienersatzbild
- 10.14 Equivalentes Parallelersatzbild
- 10.15 Equivalentes Parallelersatzbild zur Untersuchung der Generator-Resonator-Strahl-Wechselwirkung

GSI RF-Group, P. Hülsmann, Email: P.Huelsmann@gsi.de, Phone: +49 6159 71 2066




10. Kavitäten
Wichtige Definitionen

Hier ein paar Definitionen, die bei der Planung vom Kavitäten-Generatorsystem äußerst wichtig sind:

Die Shuntimpedanz einer Kavität:

$$R_{Sh} = \frac{V^2}{2P_V} = \frac{(\text{Spannung übers Gap})^2}{2\text{ x }(\text{verbrauchte Leistung})}$$

Die unbelastete Güte einer Kavität:

$$Q_0 = \omega_0 \frac{W}{\left(-\frac{dW}{dt}\right)} = 2\pi\,\text{Resonanzfrequenz}\,\frac{\text{gespeicherte Energie}}{(-\text{verbrauchte Energie})}$$

Die belastete Güte einer Kavität:

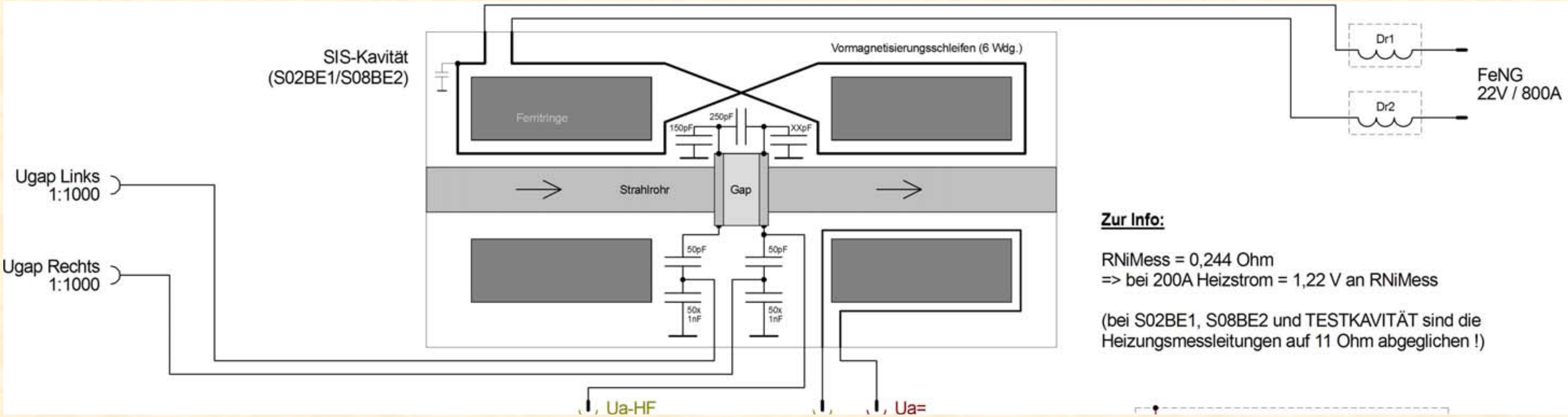
$$Q_L = \omega_0 \frac{W}{\left(-\frac{dW}{dt} - \frac{dW_{Ext}}{dt}\right)} = \omega_0 \frac{W}{(P_V + P_{Ext})} = \omega_0 \frac{W}{P_V\left(1 + \frac{P_{Ext}}{P_V}\right)} = \frac{Q_0}{(1+k)}$$

P_V : in der Kavität verbrauchte Leistung, P_{Ext} : im Generator verbrauchte Leistung, $k = \frac{P_{Ext}}{P_V}$: Koppelfaktor

BESCHLEUNIGUNGSSTRECKE

10. Kavitäten

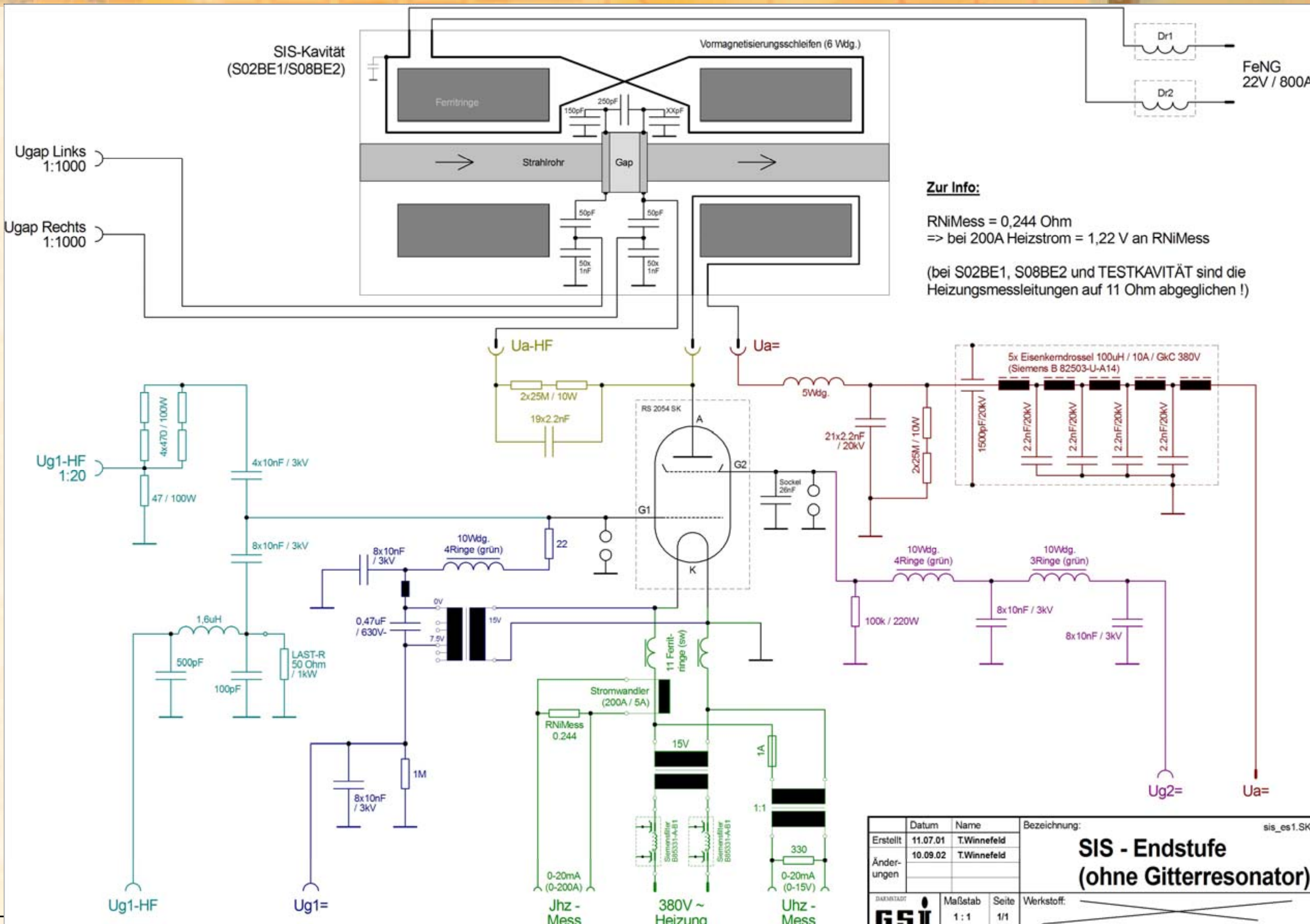
10.2 Das Schema der SIS18 Ferrit-Kavität selbst

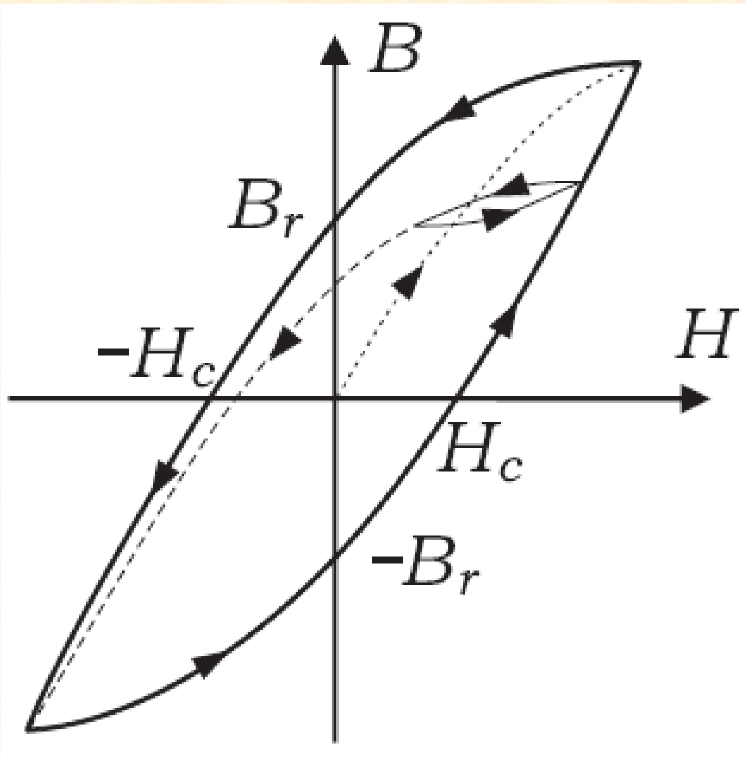


1) Die SIS18-Kavität besteht aus zwei Stapeln von je 32 Ferrit-Scheiben.
2) Die Ferrit-Ringe sind vom Typ Ferroxcube FXC 8C12m (Phillips in Eindhoven).
3) Abmessungen der Ferrit-Scheiben: d_a=498 mm, d_i=270 mm, l=25 mm.
4) Die beiden Ferrit-Stapel werden über 6 achtförmige Windungen vorbestromt.
5) Die Einkopplung der HF erfolgt gemischt, induktive- und kapazitive Einkopplung
6) Die Gapspannung jeder Gaphälfte wird über einen Gapspannungsteiler gemessen. Teilerverhältnis: 50 nF/50 pF = 1000
7) Die in die achtförmigen Vorbestromungswindungen eingekoppelte HF wird über 3 Blockkondensatoren von 15x5 nF = 75 nF abgeleitet.
8) Die Gapkapazität ist 250 pF, zusätzlich sind nochmal 2x150 pF parallel zum Gap geschaltet.

10. Kavitäten

10.3 Das Schema der SIS18-Ferritkavität mit Tetrodenverstärker





H_c: coercive magnetizing field
B_r: residual induction

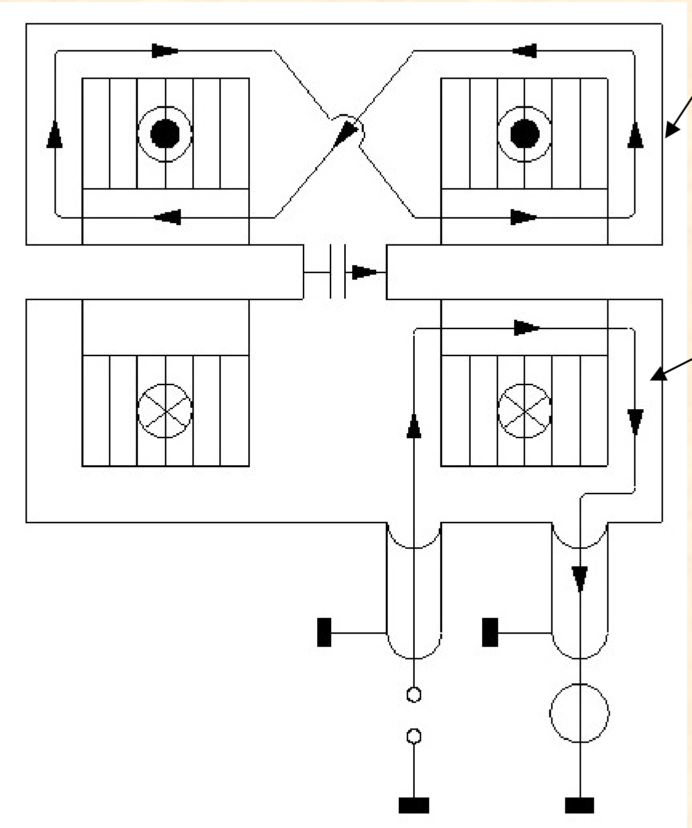
soft magnetic material:
narrow hysteresis loop
hard magnetic material:
wide hysteresis loop
(limits between soft and hard are not strict)

Bias current $\rightarrow H_{bias} \rightarrow$ modification of differential permeability:

$$\boxed{\mu_\Delta = \frac{\Delta B}{\Delta H}}$$

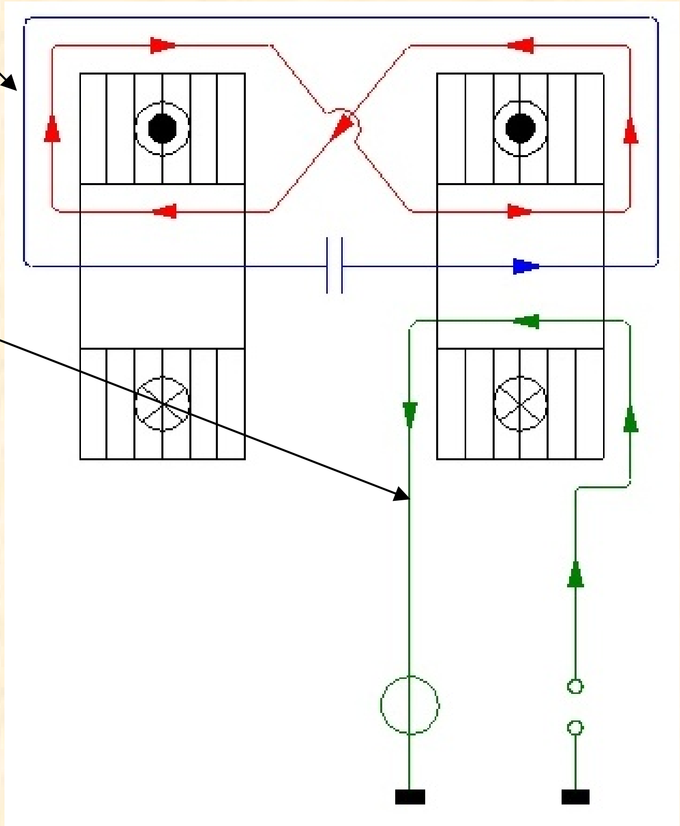
Index Δ is now left out...

10.5 Ein vereinfachtes Kavitätenmodell zur Auswertung der ersten und zweiten Maxwellschen Gleichung



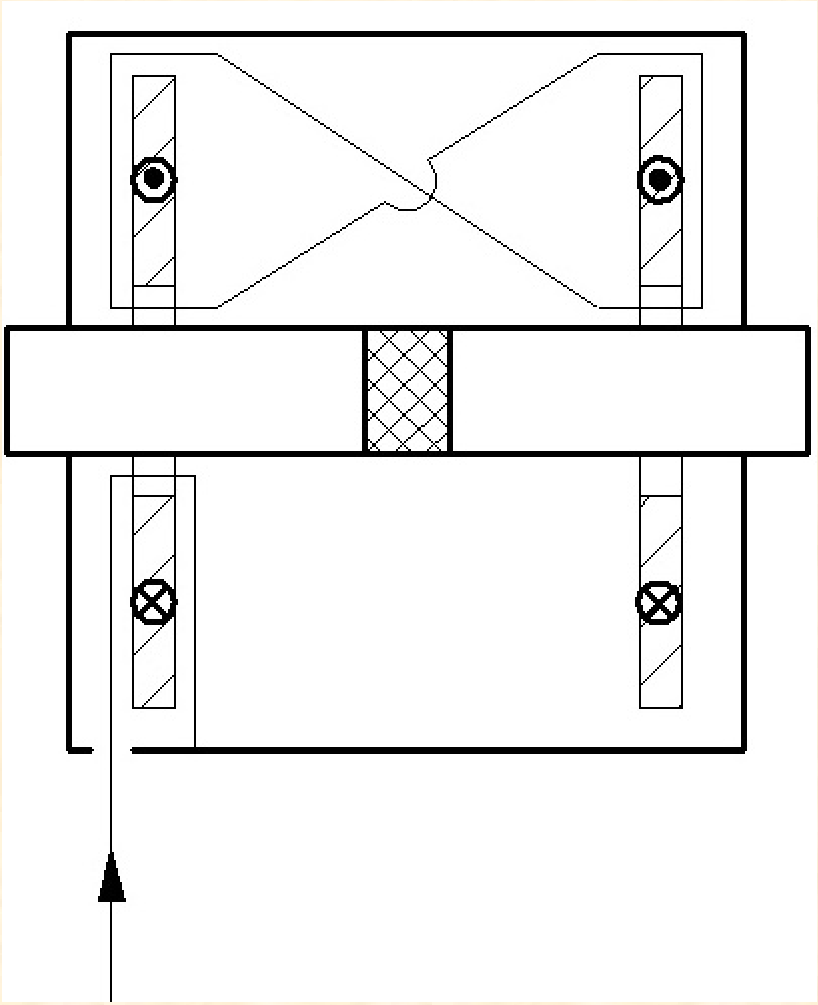
Kavitätengehäuse mit keramischem Gap wird durch eine einzige Windung mit Gapkapazität vereinfacht

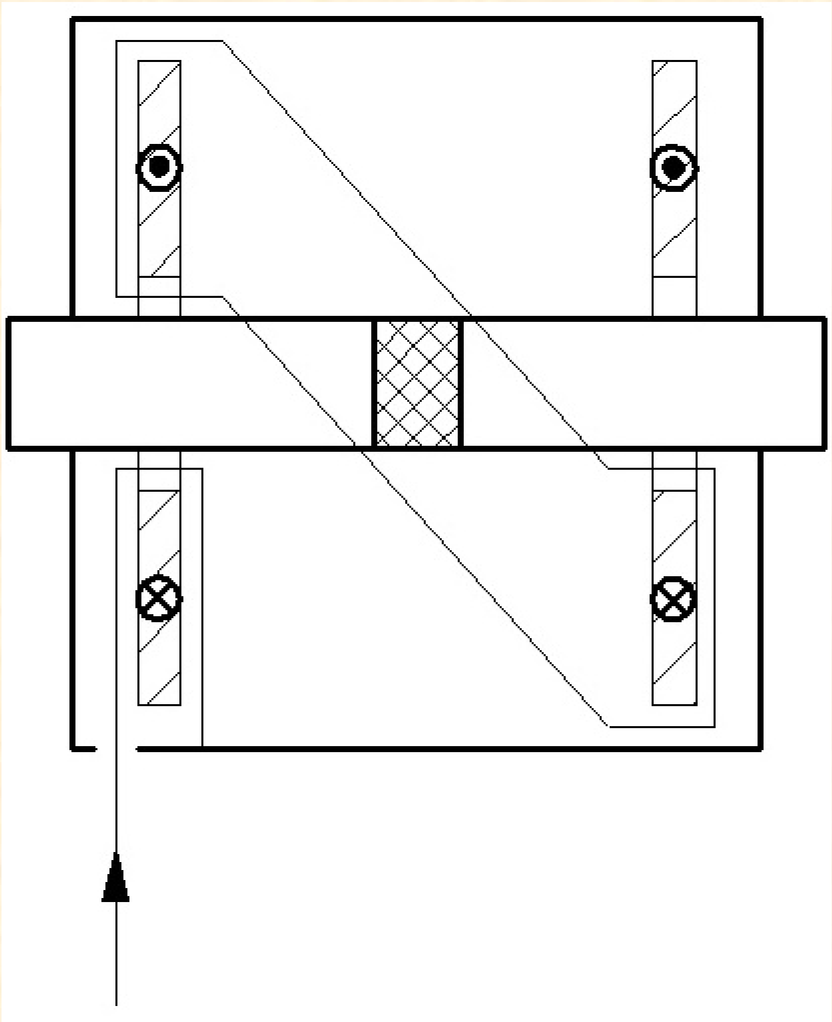
Einkoppelschleife koppelt die HF vom Generator in die Kavität ein

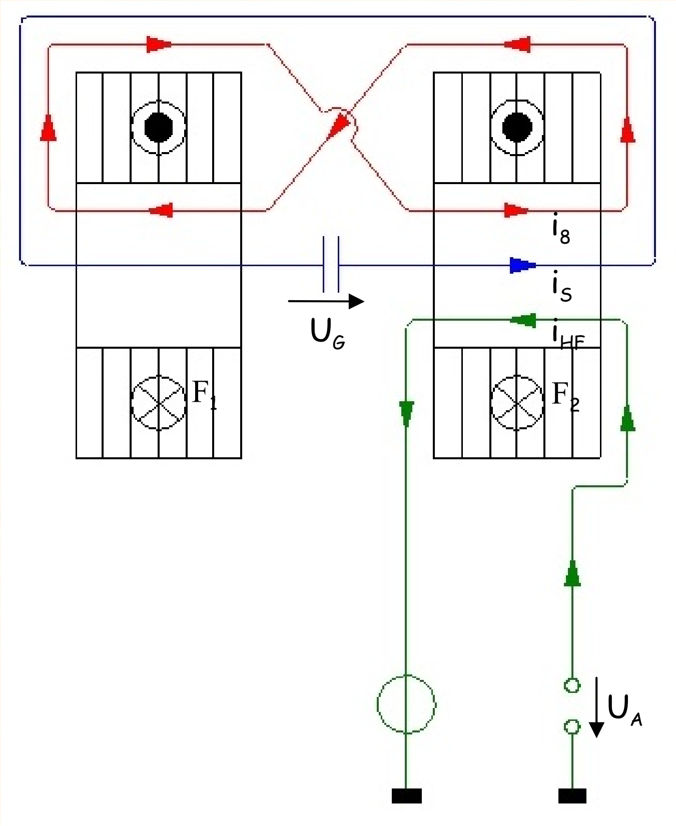


Die achtförmige Schleife sorgt dafür, dass beide Ringkernstapel fest miteinander verkoppelt werden und die gleiche Flussrichtung zueinander haben.

10.6 Zur Erklärung der Funktion der Achterschleife







Wir wenden zuerst die zweite Maxwellsche Gleichung auf den blauen Umlaufweg an:

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = U = -i\omega\int_A \vec{B}\cdot d\vec{a} = -i\omega\phi$$

An der Gap-Kapazität ist die Schleife unterbrochen und es ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$U_G = -i\omega\left(\phi_1 + \phi_2\right)$$

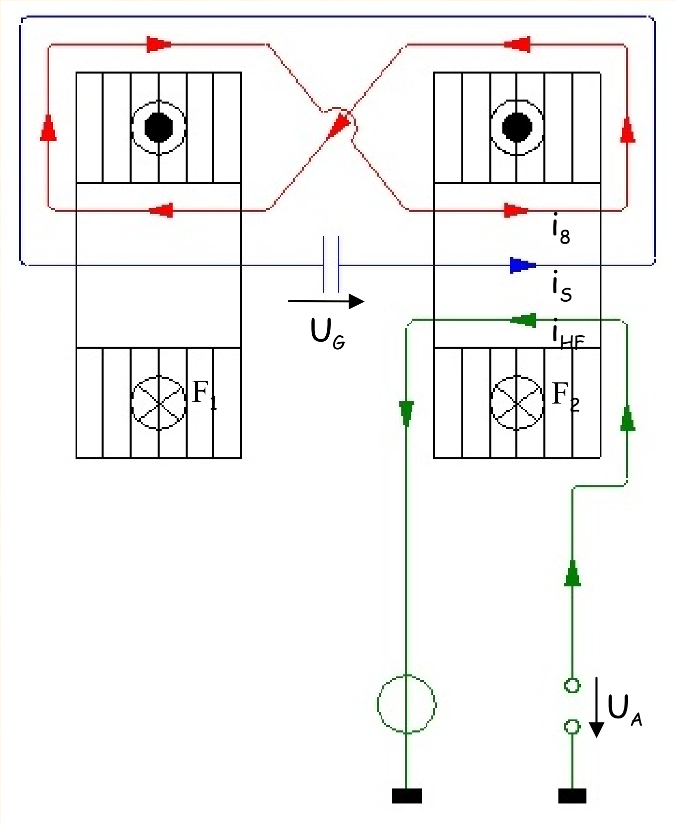
Bei der achtförmigen Schleife gibt es keine Unterbrechungen und daher wird auch keine Spannung induziert, jedoch sind die Flüsse entgegengesetzt gerichtet. Es muss also gelten:

$$-i\omega\left(\phi_1 - \phi_2\right) = 0 \qquad \phi_1 = \phi_2 = \phi$$

Für die Gap-Spannung heißt das also:

$$U_G = -i\omega 2\phi$$

Die achtförmige Schleife erzwingt also einen Fluß durch beide Ringkernstapel in gleicher Richtung.



Wir wenden nun die zweite Maxwellsche Gleichung auf den grünen Umlaufweg an:

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = U = -i\omega\int_A \vec{B}\cdot d\vec{a} = -i\omega\phi$$

An der HF-Generator ist die Schleife unterbrochen und es ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$U_A = -i\omega\phi_2$$

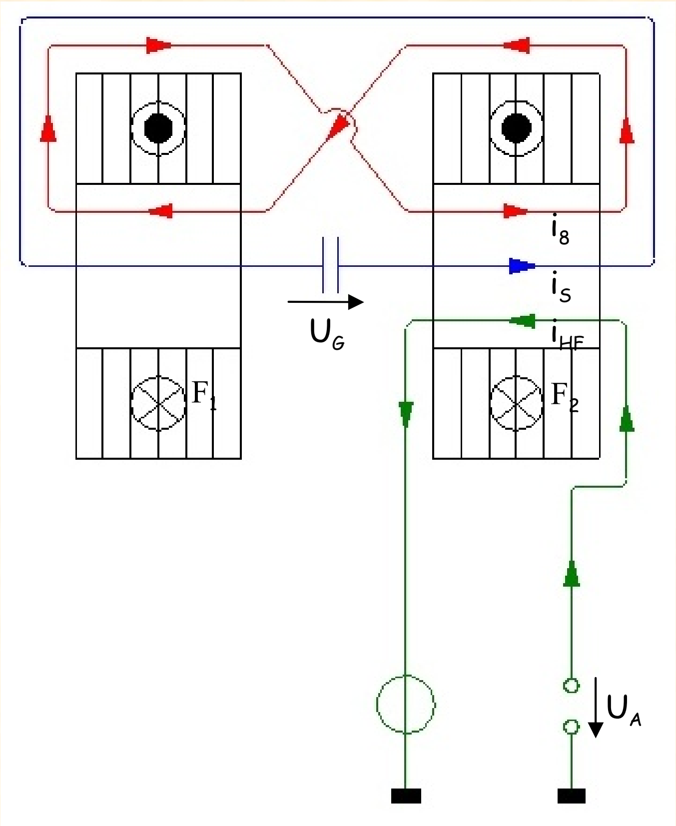
und wegen $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ gilt auch

$$U_A = -i\omega\phi$$

Die Gap-Spannung ist also die doppelte Generator-Spannung:

$$U_G = 2U_A$$

Die achtförmige Schleife erzwingt also einen Fluß durch beide Ringkernstapel in gleicher Richtung.



Wir wenden nun die erste Maxwellsche Gleichung an:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{ges}$$

Beim rechten Ringkernstapel ergibt sich

$$H_\varphi 2\pi r = -i_A + i_S + i_8$$

Da alle Ströme mit positivem Vorzeichen durch die Integrationsfläche gehen.

$$H_\varphi 2\pi r = i_S - i_8$$

Zieht man beide Gleichungen voneinander ab, so erhält man

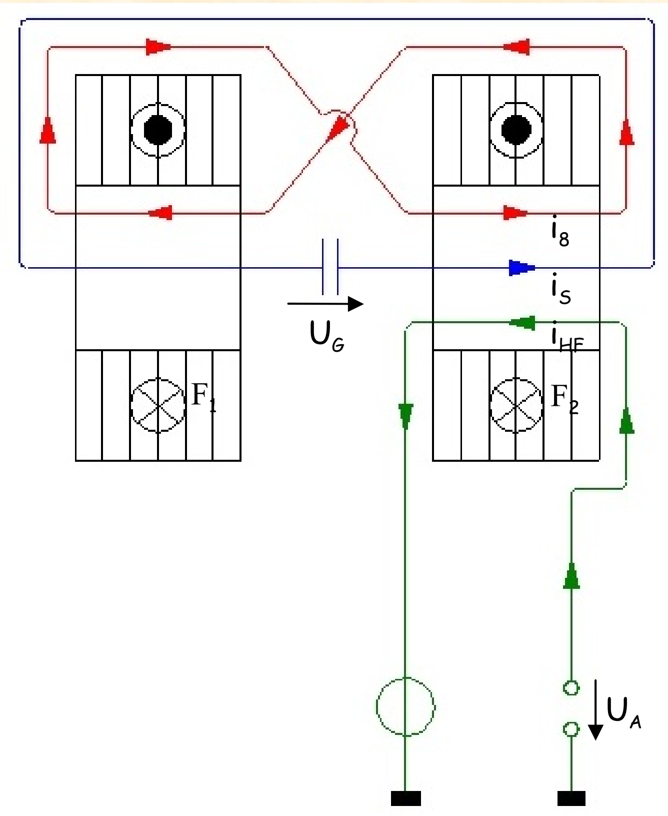
$$i_{HF} + 2i_8 = 0$$

was auf das Ergebnis führt:

$$\boxed{i_8 = \frac{i_A}{2}}$$

Das heißt, die achtförmige Schleife führt den halben HF-Strom.

10.9Gapspannung und die Kavitätenimpedanz



Für das azimuthale Magnetfeld hatten wir den Ausdruck

$$H_\varphi 2\pi r = -i_{HF} + i_S + i_8 = -\frac{i_{HF}}{2} + i_S$$

ermittelt. Den können wir jetzt benutzen um den Fluß auszurechnen

$$U_G = -i\omega 2\phi = -i\omega 2\int_A \vec{B}\cdot d\vec{a}$$

$$= -i\omega 2\frac{\mu_0(\mu' - i\mu'')l}{2\pi}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)\left(-\frac{i_{HF}}{2} + i_s\right) = -2i_{ges}Z$$

Damit hat der Ringkernstapel jetzt ein serielles Ersatzbild bekommen mit folgenden Größen:

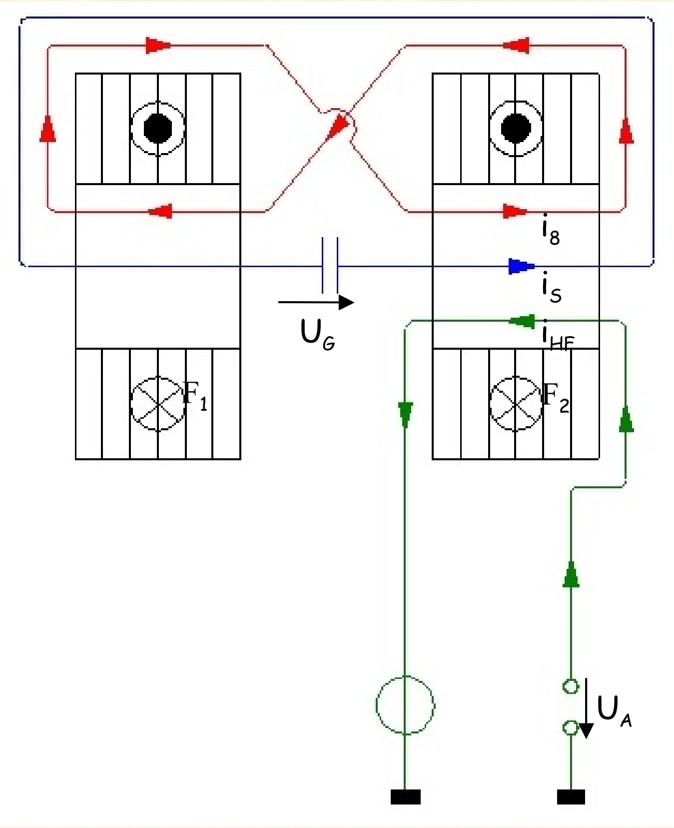
$$Z = i\omega L + R \qquad L = \frac{\mu_0\mu' l}{2\pi}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \qquad R = \frac{\omega\mu_0\mu'' l}{2\pi}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

Jetzt kann man die Kavitätenimpedanz ermitteln:

$$U_G = -2Z\left(-\frac{i_{HF}}{2} + i_s\right) = -2Z\left(-\frac{i_{HF}}{2} + \frac{U_G}{Z_G}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{Z_{Kav} = \frac{U_G}{i_{HF}} = \frac{Z}{1 + 2\frac{Z}{Z_G}} = \frac{R + i\omega L}{1 + 2i\omega C_G(R + i\omega L)}}$$

10.10 Die Eingangsimpedanz der Kavität



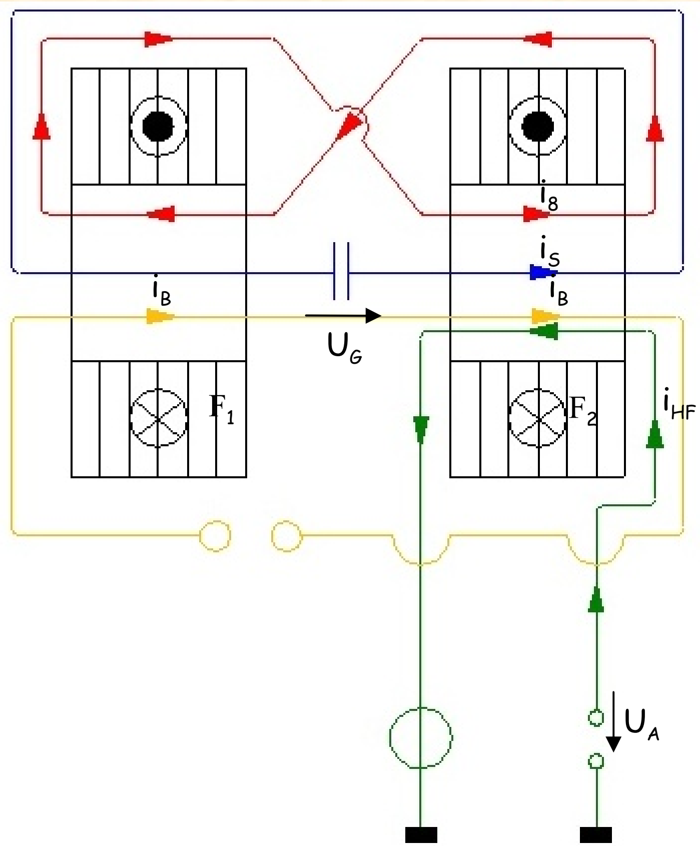
Eine wichtige Größe ist die Eingangsimpedanz, die der HF-Generator, bzw. die Röhre (Tetrode) "sieht":

$$2U_A = U_G = -2Z\left(-\frac{i_{HF}}{2} + i_S\right) = -2Z\left(-\frac{i_{HF}}{2} + \frac{2U_A}{Z_G}\right)$$

$$\boxed{Z_E = \frac{U_A}{i_{HF}} = \frac{1}{2}\frac{Z}{\left(1 + 2\frac{Z}{Z_G}\right)}}$$

Das ist eine wichtige Größe die man kennen muss, denn die Tetrode (hier als Spannungsgenerator vereinfacht) sollte mit ihrem Innenwiderstand zur Eingangsimpedanz passen, denn sonst wird der Wirkungsgrad bei der HF-Erzeugung schlecht.

10.11 Gapspannung und Generatorspannung unter Einfluß des Strahlstroms



Bei Berücksichtigung des Strahlstroms müssen wir den Gesamtstrom zur Berechnung der Gapspannung modifizieren:

$$U_G = -i\omega 2\phi = -2i\omega \frac{\mu_0(\mu' - i\mu'')l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) i_{ges} = -2Z(i_B - i_{HF} + i_8 + i_S)$$

Folgendes ist bereits bekannt: $i_8 = \frac{i_{HF}}{2}$ $\qquad i_S = \frac{U_G}{Z_G}$

Dann ergibt sich eine modifizierte Gleichung für die Gapspannung:

$$U_G = -2Z(i_B - \frac{i_{HF}}{2} + \frac{U_G}{Z_G})$$

$$U_G = \frac{2Z(\frac{i_{HF}}{2} - i_B)}{1 + 2\frac{Z}{Z_G}} = \frac{Z}{1 + 2\frac{Z}{Z_G}} i_{HF} - \frac{2Z}{1 + 2\frac{Z}{Z_G}} i_B = Z_{Kav} i_{HF} - 2Z_{Kav} i_B$$

$$U_A = \frac{Z(\frac{i_{HF}}{2} - i_B)}{1 + 2\frac{Z}{Z_G}} = \frac{1}{2}\frac{Z}{1 + 2\frac{Z}{Z_G}} i_{HF} - \frac{Z}{1 + 2\frac{Z}{Z_G}} i_B = \frac{1}{2} Z_{Kav} i_{HF} - Z_{Kav} i_B$$

Dann kann man sowohl den Einfluß des Strahlstroms auf die Gapspannung, als auch auf die Generatorspannung berechnen.

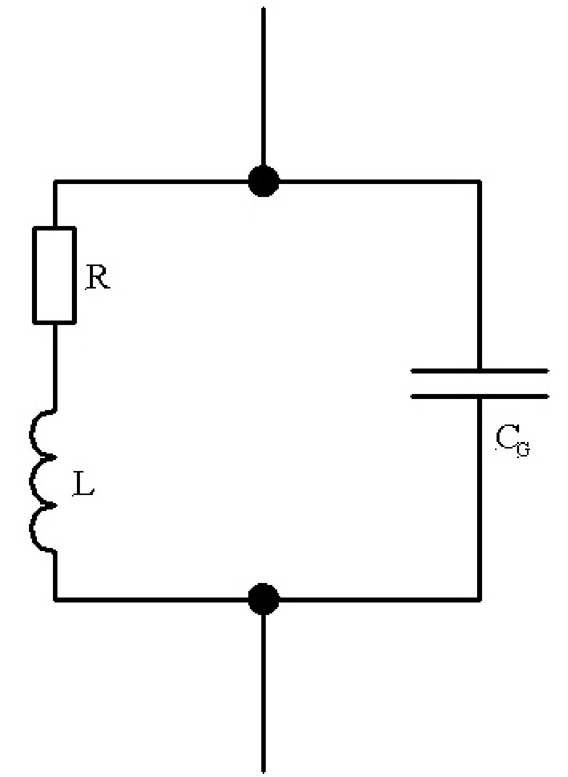
$$Z_{Kav} = \frac{U_G}{i_{HF}} = \frac{Z}{1+2\dfrac{Z}{Z_G}} = \frac{R+i\omega L}{1+2i\omega C_G\left(R+i\omega L\right)}$$

$$Z_E = \frac{U_A}{i_{HF}} = \frac{1}{2}\frac{Z}{\left(1+2\dfrac{Z}{Z_G}\right)}$$

$$U_G = \frac{2Z(\dfrac{i_{HF}}{2}-i_B)}{1+2\dfrac{Z}{Z_G}} = \frac{Z}{1+2\dfrac{Z}{Z_G}}i_{HF} - \frac{2Z}{1+2\dfrac{Z}{Z_G}}i_B = Z_{Kav}i_{HF} - 2Z_{Kav}i_B$$

$$U_A = \frac{Z(\dfrac{i_{HF}}{2}-i_B)}{1+2\dfrac{Z}{Z_G}} = \frac{1}{2}\frac{Z}{1+2\dfrac{Z}{Z_G}}i_{HF} - \frac{Z}{1+2\dfrac{Z}{Z_G}}i_B = \frac{1}{2}Z_{Kav}i_{HF} - Z_{Kav}i_B$$

10.12 Abstimmung der Kavität



Im folgenden wird angenommen, dass der Strahlstrom vernachlässigbar ist. Für die Abstimmung der Kavität darf nicht einfach $2w^2LC=1$, wie üblich gesetzt werden. Es sorgt eine Eigenfrequenzregelung dafür, dass Z_{Kav} reell wird. Wegen

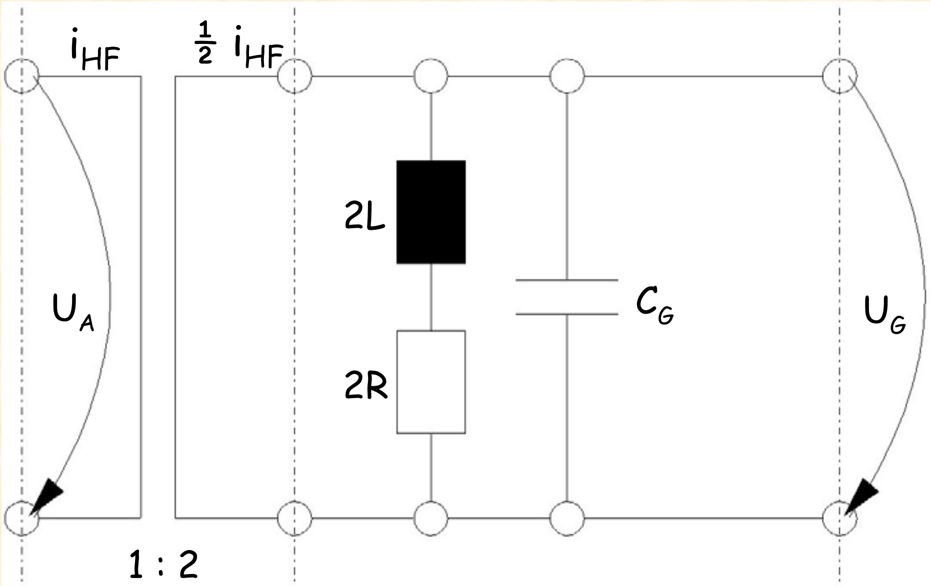
$$Z_{Kav} = \frac{Z}{1+2\frac{Z}{Z_G}} = \frac{R + j\omega L\left(1-\omega^2 2LC_G - 2\frac{C_G}{L}R^2\right)}{\left(1-\omega^2 2LC\right)^2 + \left(\omega 2CR\right)^2}$$

muß für eine abgestimmte Kavität die Bedingung gelten:

$$1-\omega^2 2LC_G - 2\frac{C_G}{L}R^2 = 0 \qquad 2\left(\omega L\right)^2 + 2R^2 = \frac{L}{C_G}$$

Im abgestimmten Fall gilt wegen obiger Gleichung für die Impedanz:

$$Z_{Kav} = \frac{L}{2RC_G} = R + \frac{\omega^2 L^2}{R} = R(1+Q^2)$$



Wir müssen bei der Einführung eines equivalenten Ersatzbildes folgendes beachten:

1) Der HF-Generator muß die Eingangsimpedanz der Kavität sehen.
2) Die Kavitätenimpedanz Z_{Kav} multipliziert mit dem HF-Strom i_{HF} muß die Gapspannung U_G ergeben.

Die Kavitätenimpedanz läßt sich folgendermaßen durch eine Parallelschaltung ausdrücken:

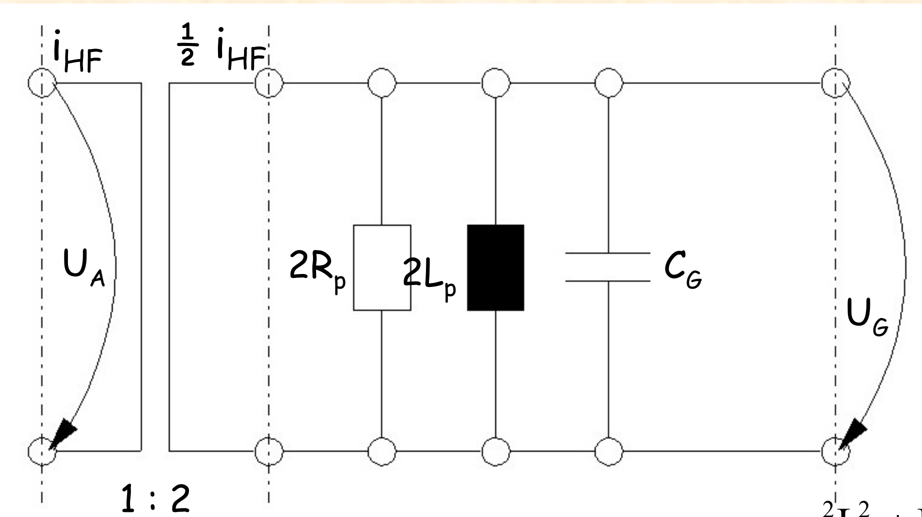
$$Z_{\mathrm{Kav}} = \frac{Z}{1+2\dfrac{Z}{Z_G}} = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_G\,(2Z)}{Z_G+2Z}\right) = \frac{1}{2}\left(Z_G \,\|\, 2Z\right)$$

Das gleiche lässt sich auch mit der Eingangsimpedanz machen:

$$Z_E = \frac{1}{2}\,\frac{Z}{\left(1+2\dfrac{Z}{Z_G}\right)} = \frac{1}{4}\,\frac{(Z_G\,2Z)}{Z_G+2Z} = \frac{1}{4}\left(Z_G \,\|\, 2Z\right)$$

Durch die Einführung eines verlustlosen Transformators mit dem Übersetzungsverhältnis 1 : 2 ergibt sich schließlich zwanglos das oben stehende equivalente Ersatzbild.

10.14 Equivalentes Parallelersatzbild



Die Umrechnung vom Serienkreis in den Parallelkreis erfolgt durch die Überlegung:

$$\frac{1}{Z_S} = \frac{1}{i\omega L_S + R_S} = \frac{1}{i\omega L_P} + \frac{1}{R_P}$$

Beide Impedanzen, ob parallel oder seriell, müssen identisch sein, das heißt, sowohl Realteil als auch Imaginärteil müssen identisch sein. Es müssen also die beiden Gleichungen gelten:

Aus dem Realteil ergibt sich:

$$R_P = \frac{\omega^2 L_S^2 + R_S^2}{R_S} = R_S\left(1 + \frac{\omega^2 L_S^2}{R_S^2}\right) = R_S\left(1 + Q^2\right)$$

$$Q = \omega \frac{L_S}{R_S} = \frac{R_P}{\omega L_P}$$

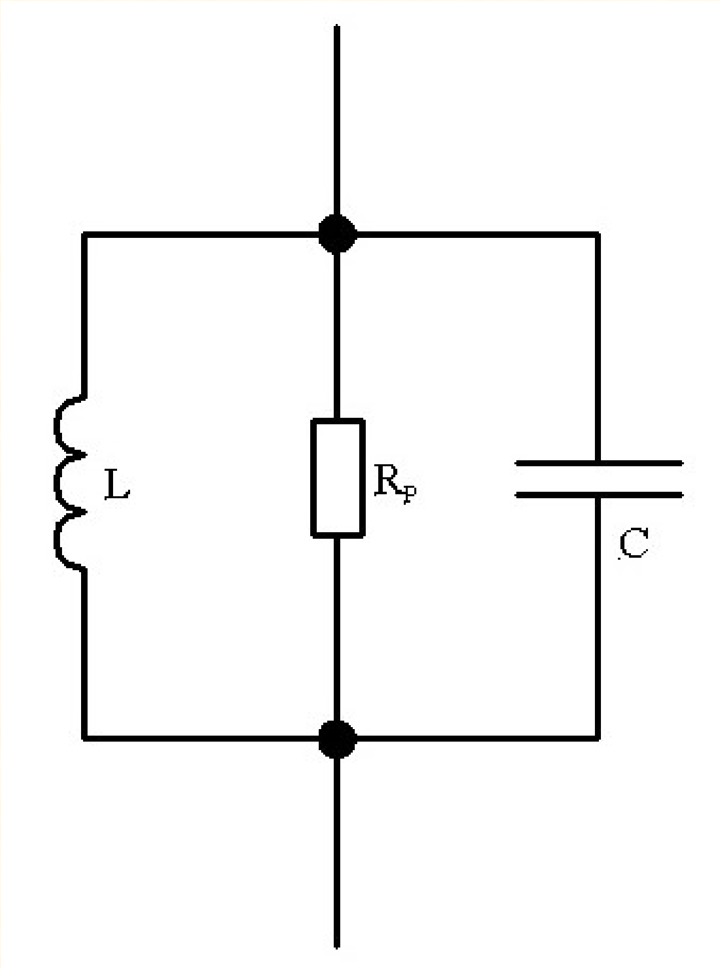
Aus dem Imaginärteil ergibt sich:

$$L_P = \frac{\omega^2 L_S^2 + R_S^2}{\omega^2 L_S} = L_S\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)$$

$$Z_P = \frac{2R_P}{1 + iQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{2R_P}{1 + iQ_0\Omega}$$

$$Q_0 = \omega_0 2 R_P C_G$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2L_P C_G}}$$



Nahe der Resonanz kann man im Prinzip jede Kavität durch einen parallelen Resonanzkreis beschreiben

$$Z_P = \frac{R_P}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{R_P}{1 + jQ_0\Omega}$$

$Q_0\Omega$ heißt "Detuning-Faktor".

Erweitert man die obige Formel konjugiert komplex, dann kann man schreiben:

$$Z_P = \frac{R_P\left(1 - jQ_0\Omega\right)}{1 + \left(Q_0\Omega\right)^2} = \frac{R_P}{\sqrt{1 + \left(Q_0\Omega\right)^2}} e^{i\psi}, \quad \tan\left(\psi\right) = -Q_0\Omega$$

Setzt man den Tangens im Nenner ein, dann ergibt sich die endgültige Form, wie sie in der Beschleunigertechnik immer wieder vorkommt:

$$Z_P = \frac{R_P}{\sqrt{1 + \tan^2\left(\psi\right)}} e^{i\psi} = R_P \cos\left(\psi\right) e^{i\psi}, \quad \tan\left(\psi\right) = -Q_0\Omega$$

10. Kavitäten
10.14 Equivalentes Parallelersatzbild

Für die SIS-Kavitäten gelten folgende Werte für die Ringkernstapel:
$d_a = 2r_a = 498\text{mm}$, $d_i = 2r_i = 270\text{mm}$, $l = 32 \times 25\text{mm} = 0{,}8\text{m}$

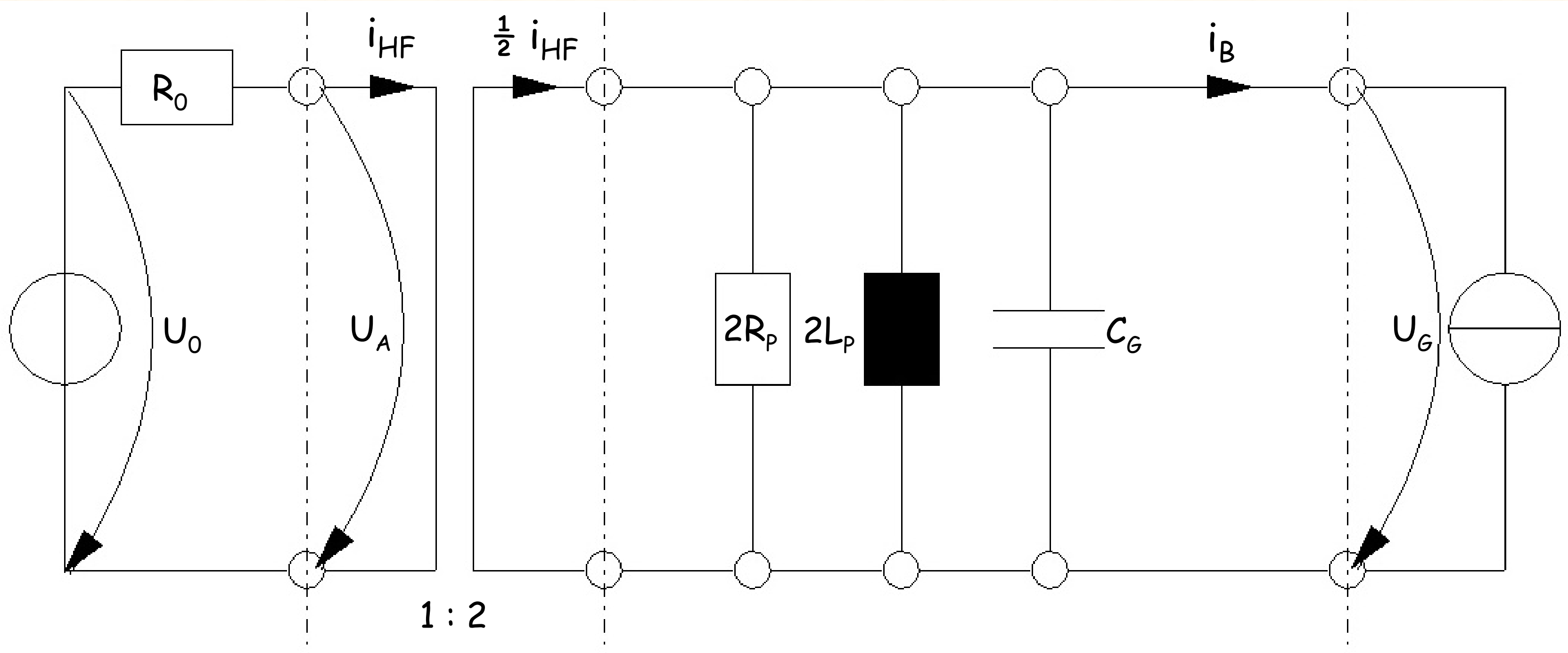
Resonant frequency f_0	620 kHz	2.5 MHz	5 MHz
Relative permeability $\mu'_{p,r}$	450	28	7
Magnetic bias field at mean radius H_{bias}	25 A/m	700 A/m	2750 A/m
Bias current I_{bias}	4.8 A	135 A	528 A
$\mu'_{p,r}Qf$ product	$4.2 \cdot 10^9\ \text{s}^{-1}$	$3.7 \cdot 10^9\ \text{s}^{-1}$	$3.3 \cdot 10^9\ \text{s}^{-1}$
Q-factor Q	15	53	94
L_s	88.2 μH	5.49 μH	1.37 μH
L_p	88.5 μH	5.49 μH	1.37 μH
R_s	22.8 Ω	1.63 Ω	0.46 Ω
R_p	5200 Ω	4600 Ω	4100 Ω
Cavity time constant τ	7.7 μs	6.7 μs	6.0 μs

Die Tabelle wurde H. Klingbeil zur Verfügung gestellt.

Auffallend ist, daß sich für alle drei Frequenzen etwa dasselbe $2R_p$ ergibt für die Ersatzschaltung. Die Röhre sieht, und das ist eine sehr wichtige Information, eine Last von etwa $R_p/4 \approx 1{,}2$ kW, der Strahl sieht, ohne Röhre, rund 5 kW.

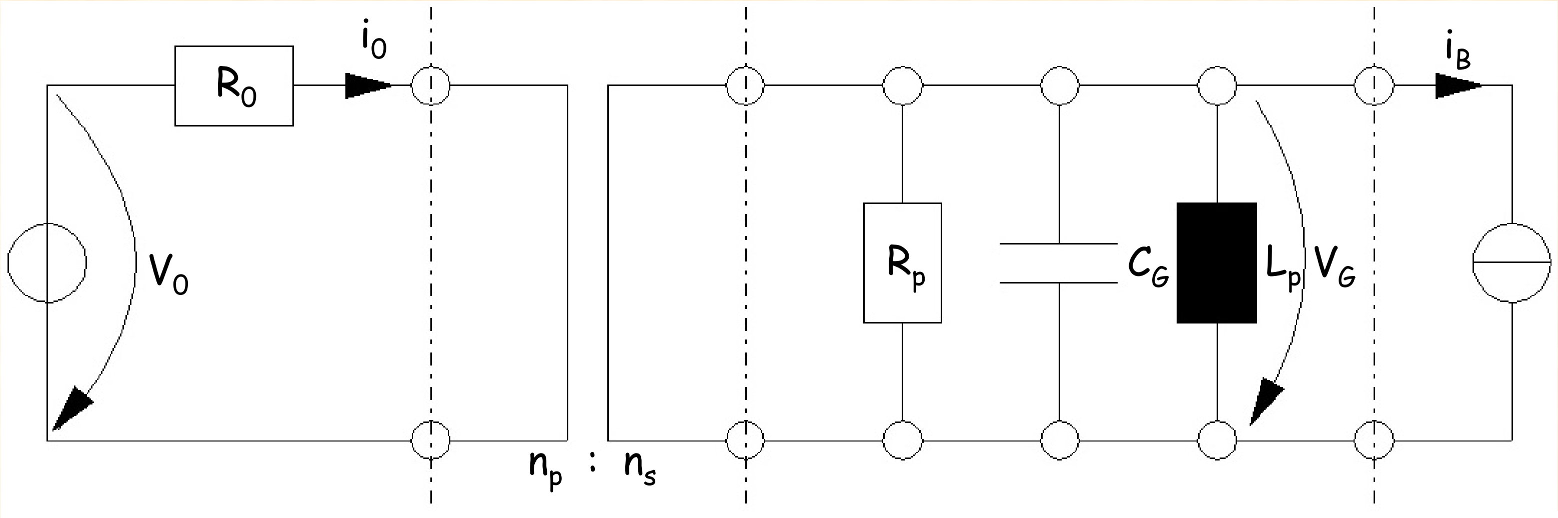
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2L_P C_G}} \quad \Rightarrow \quad C_G = 740\text{pF}$$

10.15 Equivalentes Parallelersatzbild zur Untersuchung der Generator-Resonator-Strahl-Wechselwirkung



Wir haben nun unser Ziel erreicht. Zur Untersuchung der Strahl-Generator-Resonator-Wechselwirkung steht uns oben stehendes equivalentes Ersatzbild zur Verfügung. Der Strahlstrom wird durch eine ideale Stromquelle dargestellt. Der Strahl nimmt natürlich auch Leistung während des Beschleunigungsvorgangs, aber gegenwärtig vernachlässigen wir das noch. Der Generator wird durch eine ideale Spannungsquelle mit Innenwiderstand dargestellt, was bei der HF-Erzeugung mit Vacuumröhren, wie zum Beispiel Tetroden, der Wahrheit am nächsten kommt. Bei einer Speisung durch ein Klystron wäre eher die ideale Stromquelle mit Innenwiderstand das Mittel der Wahl.

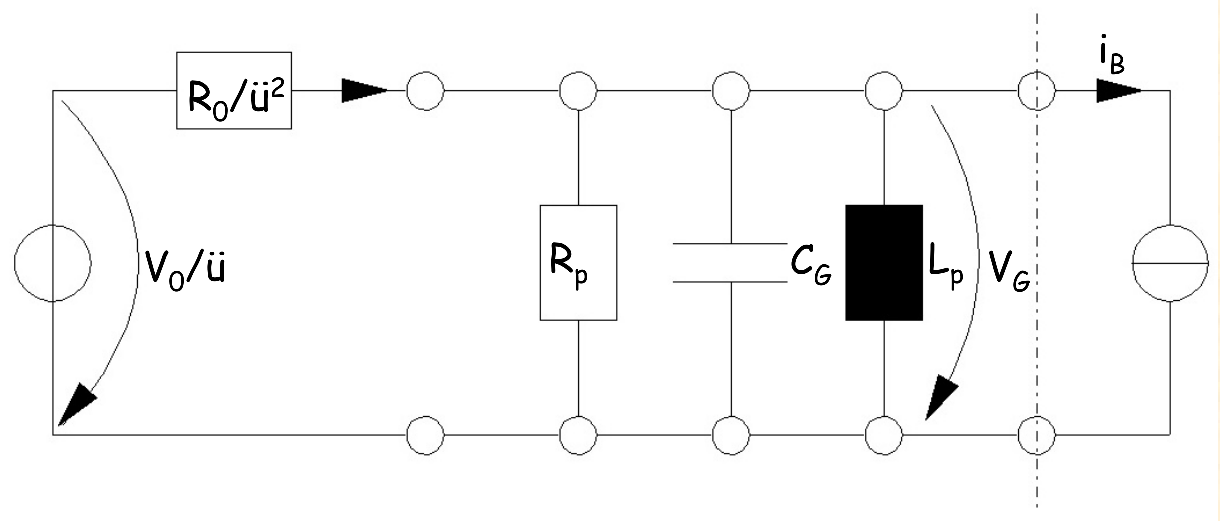
10.15 Equivalentes Parallelersatzbild zur Untersuchung der Generator-Resonator-Strahl-Wechselwirkung



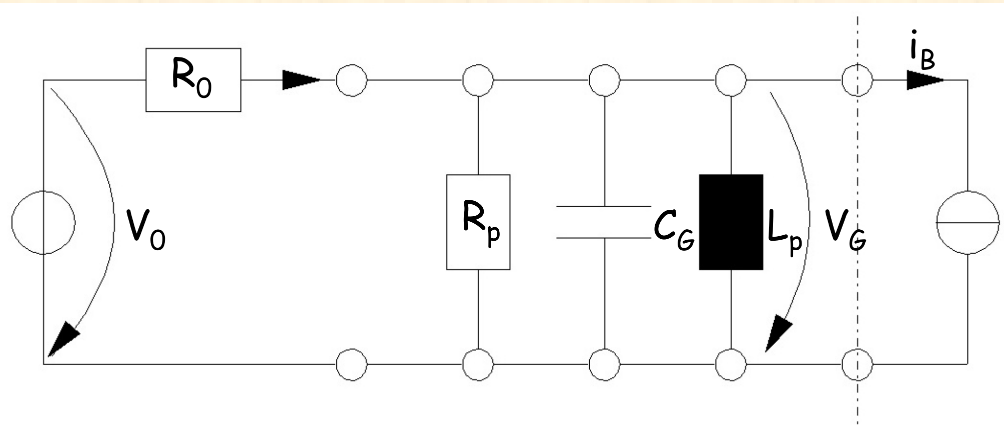
$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{n_p}{n_s} = \ddot{u}$$

$$\frac{i_p}{i_s} = \frac{n_s}{n_p} = \frac{1}{\ddot{u}}$$

$$R_p = \ddot{u}^2 R_s$$



10.15 Equivalentes Parallelersatzbild zur Untersuchung der Generator-Resonator-Strahl-Wechselwirkung



Koppelfaktor: $$k = \frac{R_p}{R_0}$$

Unbelastete Güte: $$Q_0 = \omega_0 C_G R_p$$

Belastete Güte: $$Q_L = \omega_0 C_G \frac{R_p R_0}{R_p + R_0} = \frac{Q_0}{1+k}$$

Strom aus dem Generator: $$i_0 = \frac{V_0}{R_0 + Z_K} = \frac{\left(1 + jQ_0\Omega\right) V_0}{R_0\left(1 + jQ_0\Omega\right) + R_p} = \frac{1}{\left(1+k\right)} \frac{\left(1 + jQ_0\Omega\right)}{\left(1 + jQ_L\Omega\right)} \frac{V_0}{R_0}$$

Die durch den Generatorstrom an der Kavität erzeugte Gapspannung:

$$V_G = Z_K i_0 = \frac{R_p}{\left(1 + jQ_0\Omega\right)} \frac{1}{\left(1+k\right)} \frac{\left(1 + jQ_0\Omega\right)}{\left(1 + jQ_L\Omega\right)} \frac{V_0}{R_0} = \frac{k}{\left(1+k\right)} \frac{1}{\left(1 + jQ_L\Omega\right)} V_0$$

GSI RF-Group, P. Hülsmann, Email: P.Huelsmann@gsi.de, Phone: +49 6159 71 2066

10. Kavitäten

10.16 Wieviel Leistung brauche ich zur Erzeugung einer Gapspannung V_G?

Die Leistung, die ein Generator mit dem Innenwiderstand R_0 an einen Lastwiderstand R_l im eingeschwungenen Zustand abgeben kann, ist:

$$P_0 = \frac{1}{2}\frac{\left|V_L\right|^2}{R_1} = \frac{1}{2}\frac{1}{R_1}\frac{R_1^2}{\left(R_1 + R_0\right)^2}\left|V_0\right|^2$$

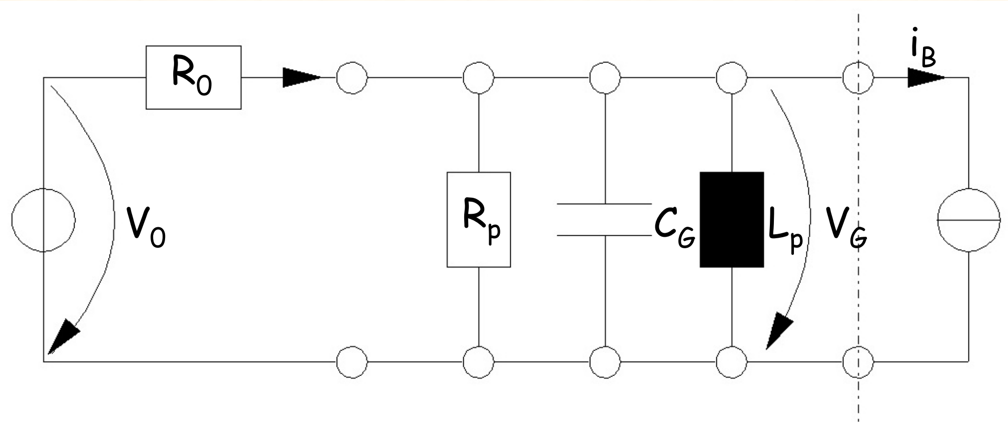
Die vom Generator abgebbare Leistung ist maximal, wenn Innenwiderstand R_0 und Lastwiderstand R_l gleich sind. Dann gilt:

$$P_{0\max} = \frac{1}{2}\frac{\left|V_L\right|^2}{R_1} = \frac{1}{8}\frac{\left|V_0\right|^2}{R_0}$$

Damit können wir die Generatorspannung durch die maximal abgebbare Generatorleistung P_{0max} ersetzen. Da V_0 ein komplexer Phasor ist, muß noch der Phasenwinkel θ_0 berücksichtigt werden:

$$V_G = \frac{k}{(1+k)}\frac{1}{(1+jQ_L\Omega)}V_0 = \frac{k}{(1+k)}\frac{2\sqrt{2R_0P_{0\max}}}{(1+jQ_L\Omega)}e^{i\theta_0} = \frac{2\sqrt{k}}{(1+k)}\frac{\sqrt{R_{Sh}P_{0\max}}}{(1+jQ_L\Omega)}e^{i\theta_0}$$

10.17 Was passiert mit der Gapspannung, wenn der Strahlstrom i_B durch die Kavität fließt?



Der Strahl mit dem Strahlstrom i_B sieht die mit dem Generatorwiderstand belastete Kavität:

$$Z_{KL} = \frac{\left(\frac{R_p R_0}{R_p + R_0}\right)}{1 + jQ_L\Omega} = \frac{R_p}{(1+k)} \frac{1}{(1 + jQ_L\Omega)}$$

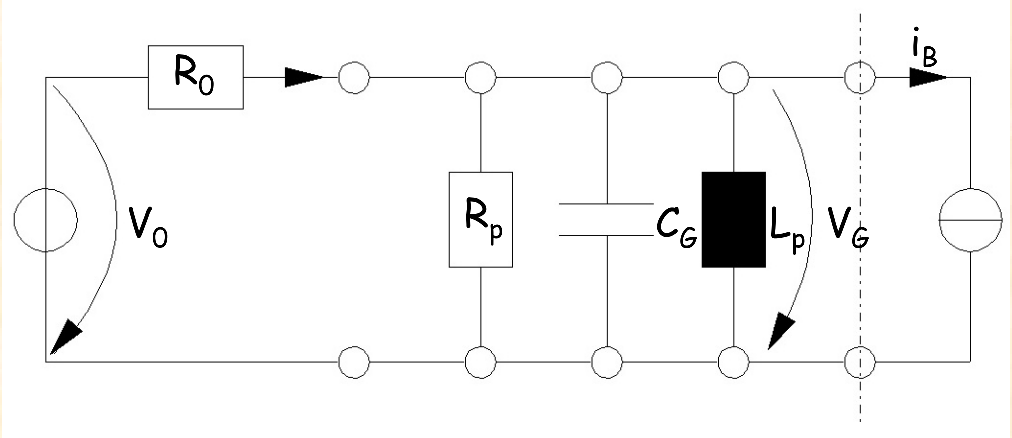
Folgerichtig induziert der Strahlstrom i_B die Spannung V_B in der Kavität:

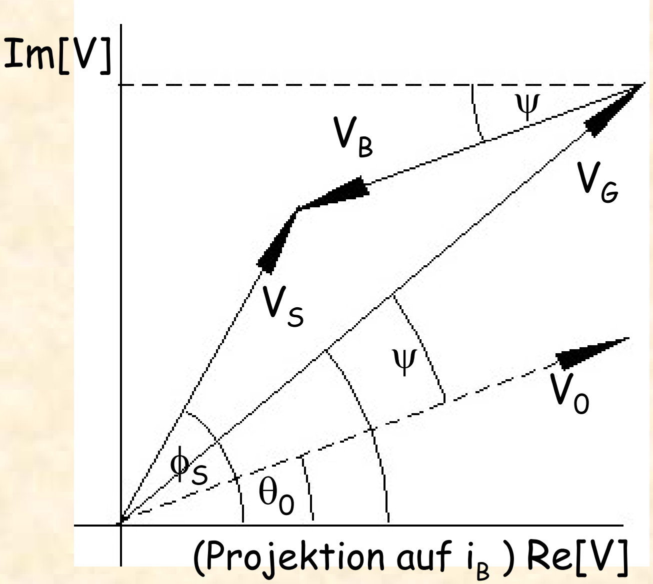
$$V_B = -Z_{KL} i_B = -\frac{R_p}{(1+k)} \frac{i_B}{(1+jQ_L\Omega)} = -\frac{1}{2} \frac{R_{Sh}}{(1+k)} \frac{i_B}{(1+jQ_L\Omega)}$$

Gemäß des Superpositionsprinzips kann man die beiden Spannungen, durch den Generator erzeugte Gapspannung V_g und durch den Strahl erzeugte Gapspannung V_B, einfach aufaddieren:

$$V_S = V_G + V_B = \frac{2\sqrt{k}}{(1+k)} \frac{\sqrt{R_{Sh} P_{0\max}}}{(1+jQ_L\Omega)} e^{i\theta_0} - \frac{1}{2} \frac{R_{Sh}}{(1+k)} \frac{i_B}{(1+jQ_L\Omega)} = \frac{2\sqrt{k}}{(1+k)} \frac{\sqrt{R_{Sh} P_{0\max}}}{(1+jQ_L\Omega)} \left(e^{i\theta_0} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{R_{Sh}}{k\, P_{0\max}}}\, i_B \right)$$

10.17 Was passiert mit der Gapspannung, wenn der Strahlstrom i_B durch die Kavität fließt?





Durch den Strahlstrom i_B kommt es zur induzierten Spannung V_B, und der Spannungsphasor V_G ändert sich zum Spannungsphasor V_S:

$$V_S = \frac{2\sqrt{k}}{(1+k)} \frac{\sqrt{R_{Sh} P_{0\max}}}{(1+jQ_L\Omega)} \left(e^{i\theta_0} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{R_{Sh}}{k P_{0\max}}}\, i_B \right) = \frac{2\sqrt{k}}{(1+k)} \sqrt{R_{Sh} P_{0\max}} \cos(\psi_L) e^{i\psi_L} \left(e^{i\theta_0} - \frac{K}{\sqrt{k}} \right)$$

Die Größe K nennt man Beam-Loading-Parameter:

$$K = \frac{i_B}{4}\sqrt{\frac{R_{Sh}}{P_{0\max}}}$$

10.18 In der Kavität verbrauchte Leistung P_V und im Generator verbrauchte Leistung P_{Ext} ohne Strahl

Die in der Kavität verbrauchte Leistung ist gegeben durch:

$$P_V = \frac{1}{2} V_G i_0^* = \frac{1}{2} \frac{k}{(1+k)} \frac{V_G}{(1+jQ_L\Omega)} \frac{1}{(1+k)} \frac{(1-jQ_0\Omega)}{(1-jQ_L\Omega)} \frac{V_G^*}{R_0} = 4 \frac{k}{(1+k)^2} \frac{(1-jQ_0\Omega)}{\left(1+(Q_L\Omega)^2\right)} P_{0\max}$$

Die Kavitätenleistung enthält noch einen Imaginärteil, die sogenannte Blindleistung, die natürlich die zusätzlich gespeicherte Energie darstellt, wenn man die Kavität neben der Resonanz betreibt. Für den Generator bedeutet das einen zusätzlichen Strom, den sogenannten Blindstrom, der zusätzlich aufgebracht werden muß. Berechnet man nämlich die im Generator verbrauchte Leistung, so sieht man, daß der zusätzliche Blindstrom Verluste am Generatorwiderstand macht:

$$P_{Ext} = \frac{1}{2} R_0 |i_0|^2 = \frac{1}{2} R_0 \frac{1}{(1+k)^2} \frac{\left(1+(Q_0\Omega)^2\right)}{\left(1+(Q_L\Omega)^2\right)} \frac{|V_0|^2}{R_0^2} = 4 \frac{1}{(1+k)^2} \frac{\left(1+(Q_0\Omega)^2\right)}{\left(1+(Q_L\Omega)^2\right)} P_{0\max}$$

Die an der Last reflektierte Leistung kann man nun auch berechnen:

$$P_r = P_{0\max} - P_V$$

10.19 In der Kavität verbrauchte Leistung P_V und im Generator verbrauchte Leistung P_{Ext} ohne Strahl und im Resonanzfall bei Koppelfaktor k=1

In Resonanz, das heißt Ω=0, erhält man für die Leistungen P_V und P_{Ext} :

$$P_V = 4\frac{k}{(1+k)^2}\frac{(1-jQ_0\Omega)}{\left(1+(Q_L\Omega)^2\right)}P_{0\max} \quad\Rightarrow\quad P_V(\omega_0) = 4\frac{k}{(1+k)^2}P_{0\max}$$

$$P_{Ext} = 4\frac{1}{(1+k)^2}\frac{\left(1+(Q_0\Omega)^2\right)}{\left(1+(Q_L\Omega)^2\right)}P_{0\max} \quad\Rightarrow\quad P_{Ext}(\omega_0) = 4\frac{1}{(1+k)^2}P_{0\max}$$

Im Resonanzfall erhält man für die reflektierte Leistung:

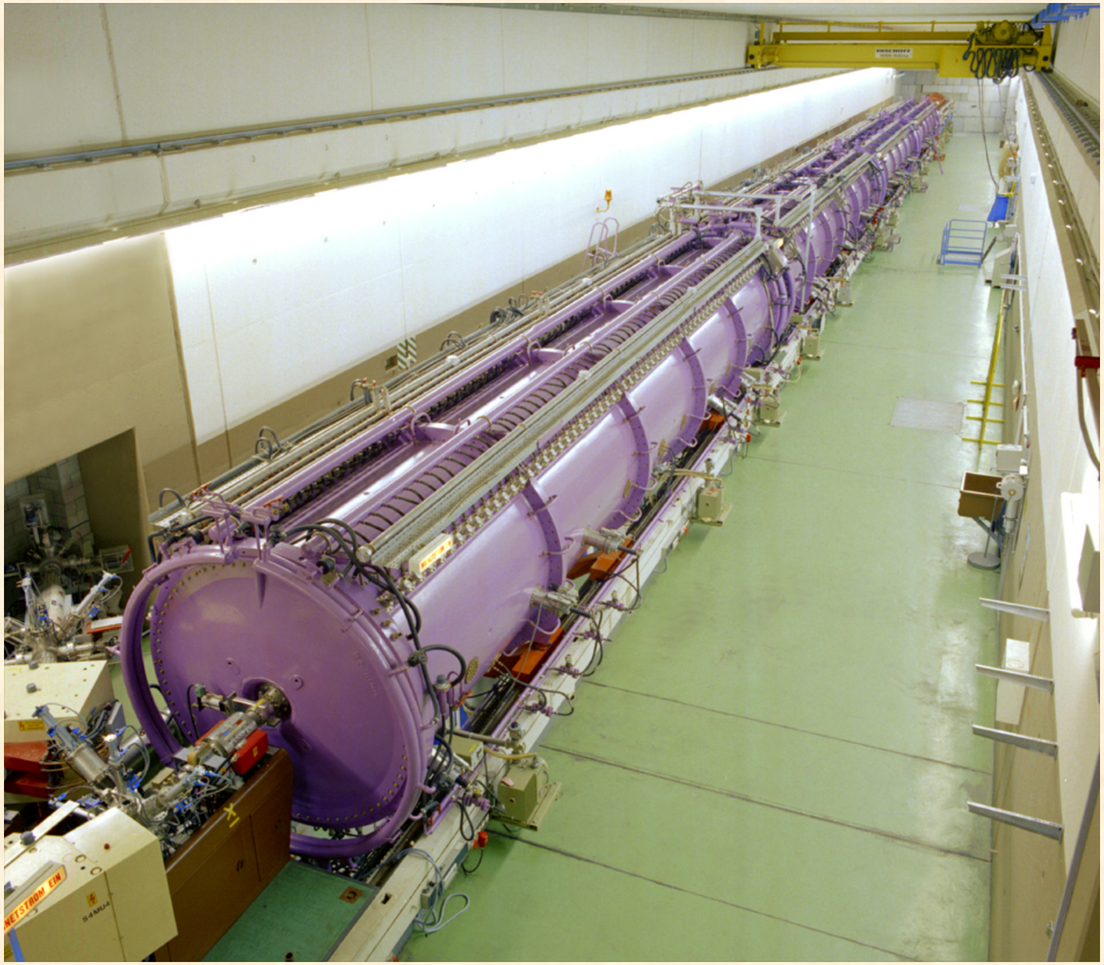
$$P_r(\omega_0) = P_{0\max} - P_V(\omega_0) = \frac{(1+k)^2-4k}{(1+k)^2}P_{0\max} = \frac{(1-k)^2}{(1+k)^2}P_{0\max} \quad\rightarrow\quad 0 \text{ für } k=1$$

Das heißt, bei kritischer Kopplung kommt nichts zurück in den Generator. Die Gesamtleistung ist:

$$P_{gesamt}(\omega_0) = P_{Ext}(\omega_0) + P_V(\omega_0) = 4\frac{(1+k)}{(1+k)^2}P_{0\max} = \frac{4}{(1+k)}P_{0\max} \quad\rightarrow\quad 2P_{0\max} \text{ für } k=1$$

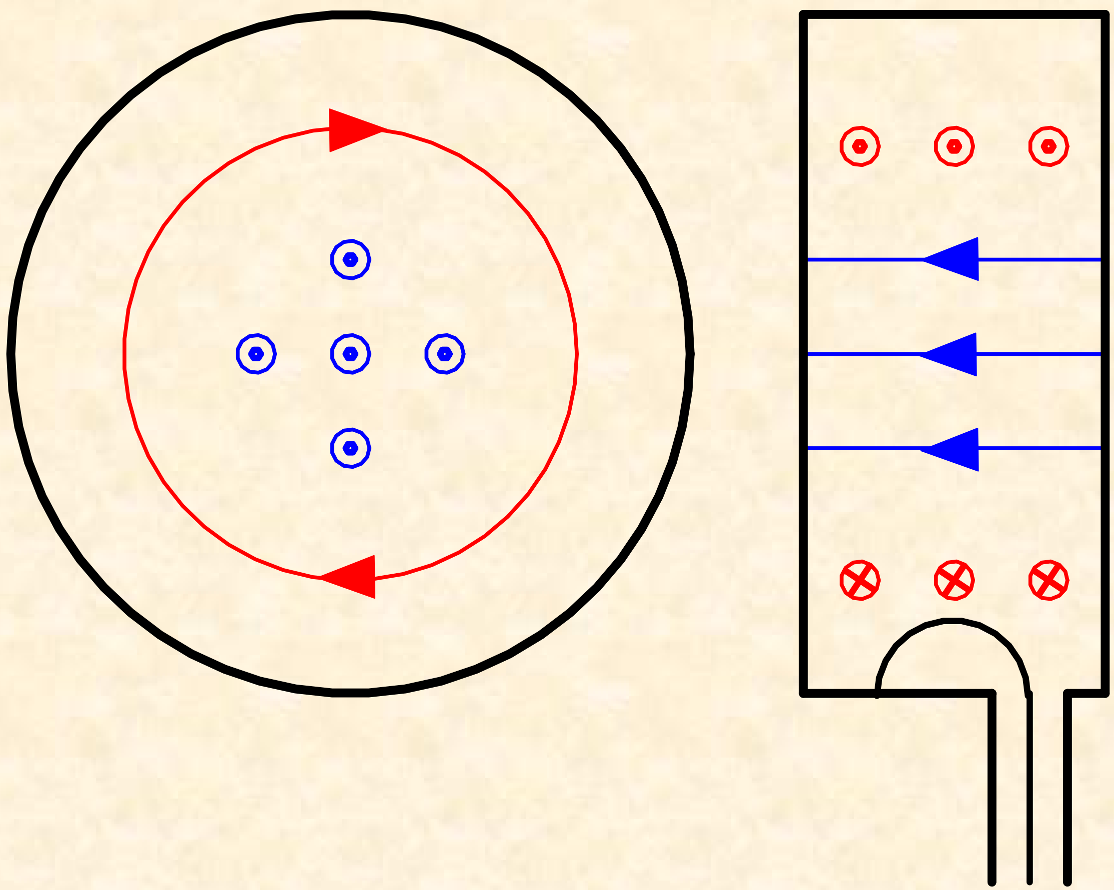
Bei kritischer Kopplung sind die im Generator und Kavität umgesetzten Leistungen gleich.

10.20 Hohlraumresonatoren die aus einer Pill-Box abgeleitet werden können (Alvarez-Struktur, GSI)



- TM_{010} mode for acceleration (also for single-gap resonators)

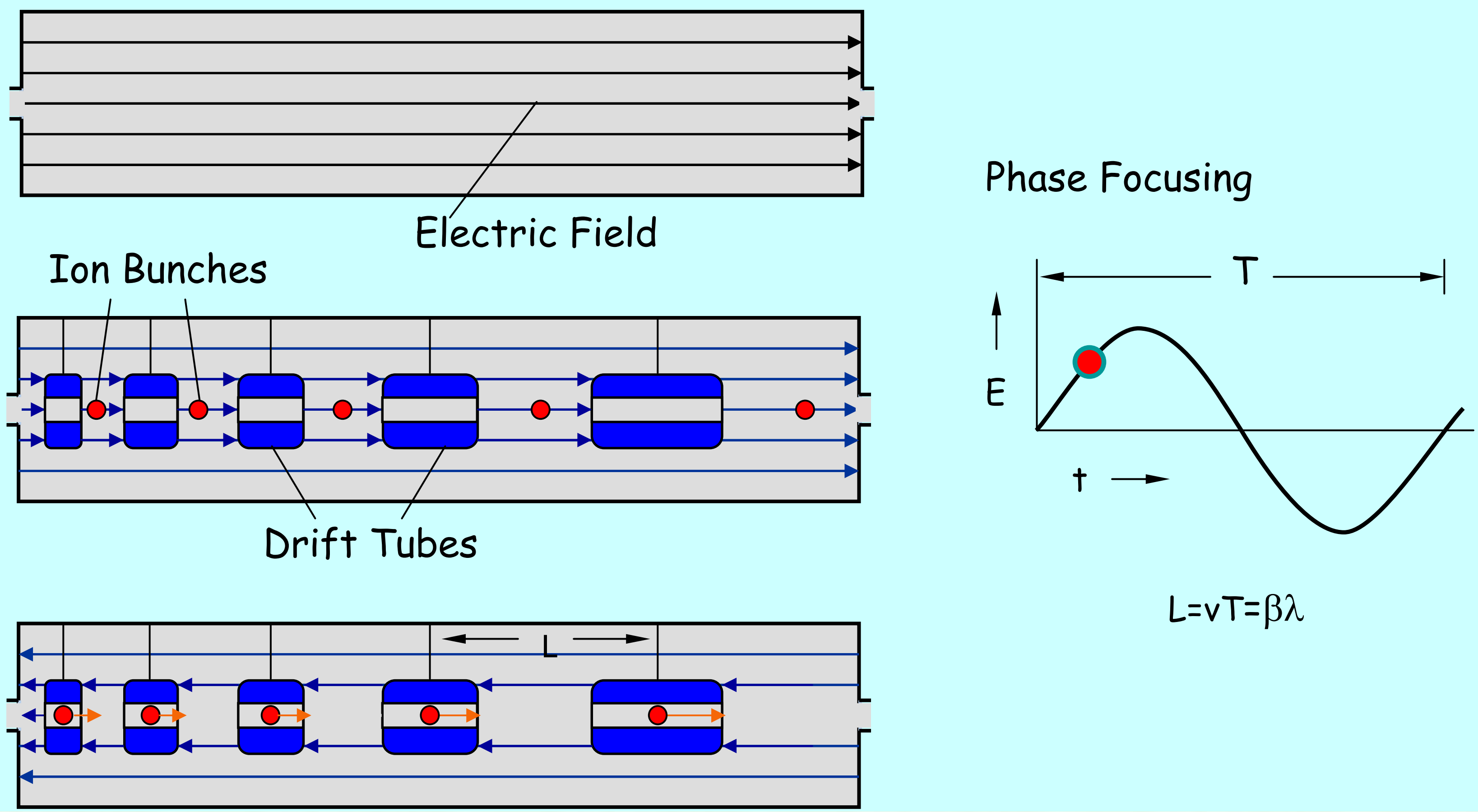
10.20 TM010-Mode der Pill-Box



GSI RF-Group, P. Hülsmann, Email: P.Huelsmann@gsi.de, Phone: +49 6159 71 2066

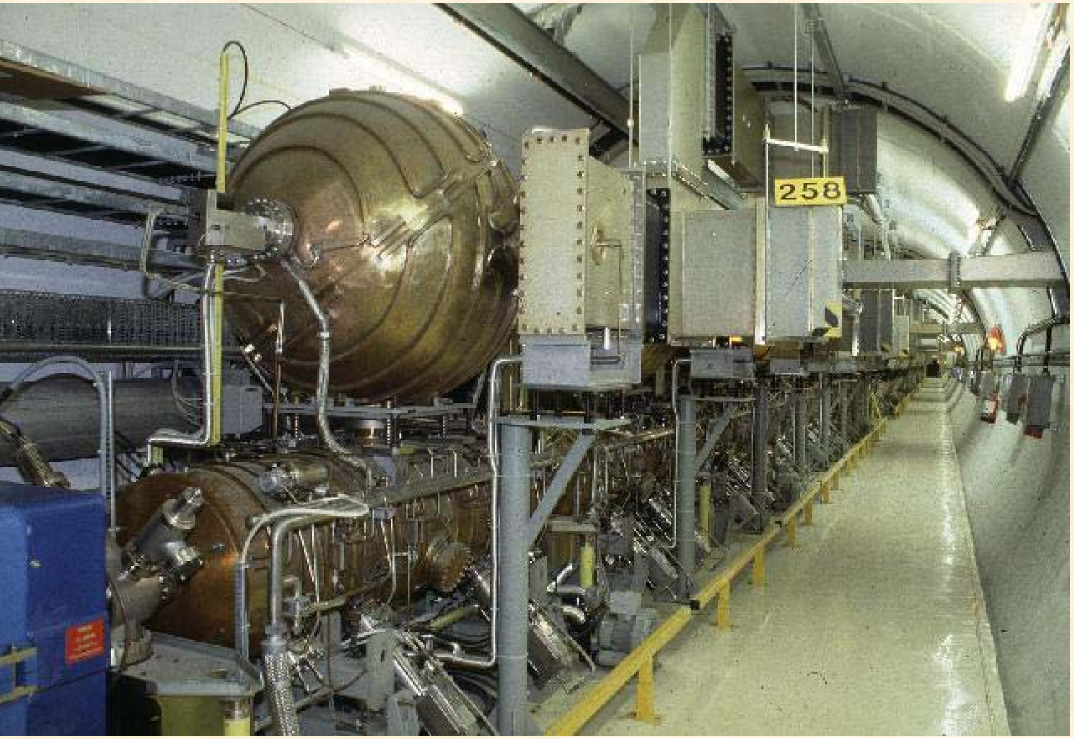
10. Kavitäten

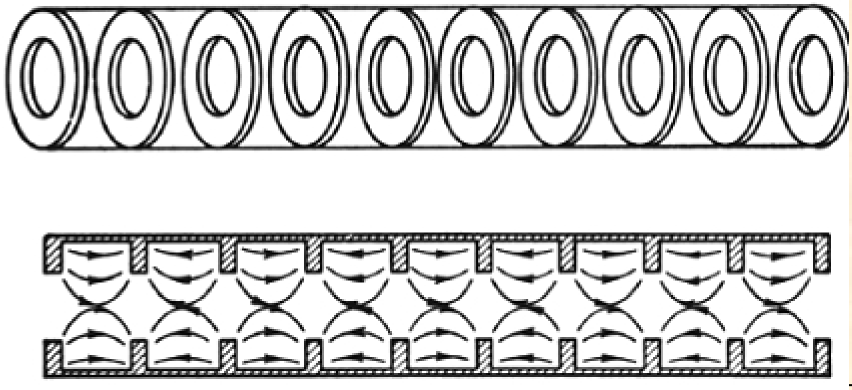
10.20 Hohlraumresonatoren die aus einer Pill-Box abgeleitet werden können (Alvarez-Struktur, GSI)

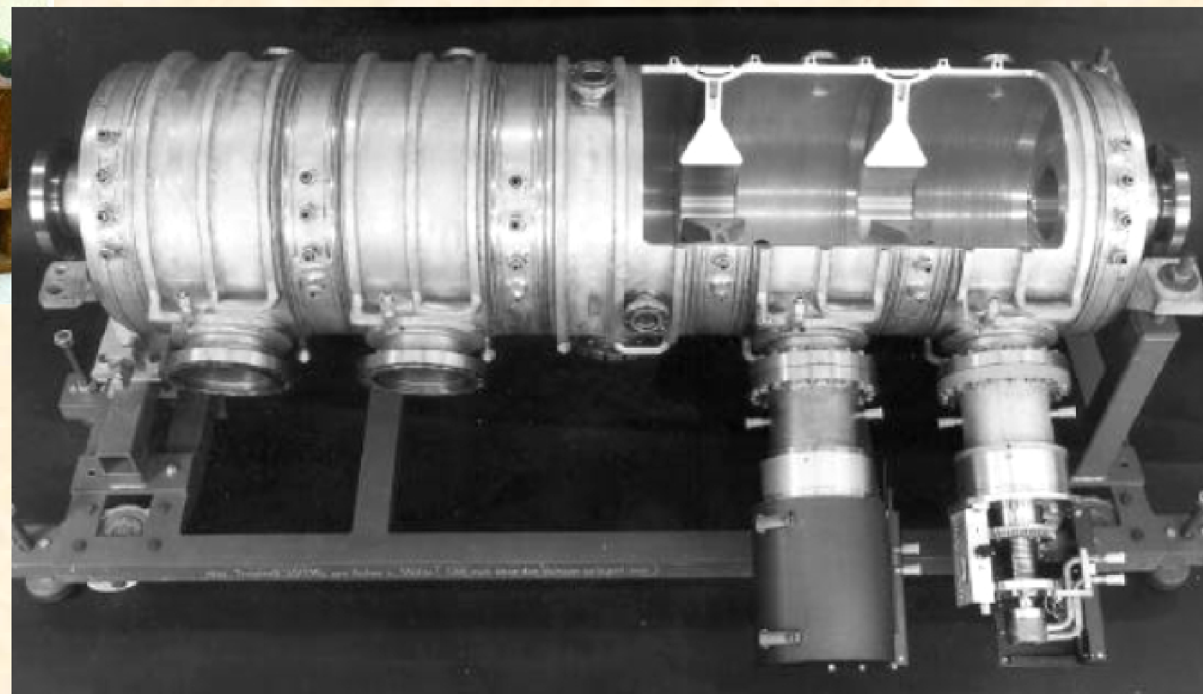


10. Kavitäten

10.20 Hohlraumresonatoren die aus einer Pill-Box abgeleitet werden können (normalleitende fünfzellige LEP-Struktur, CERN)



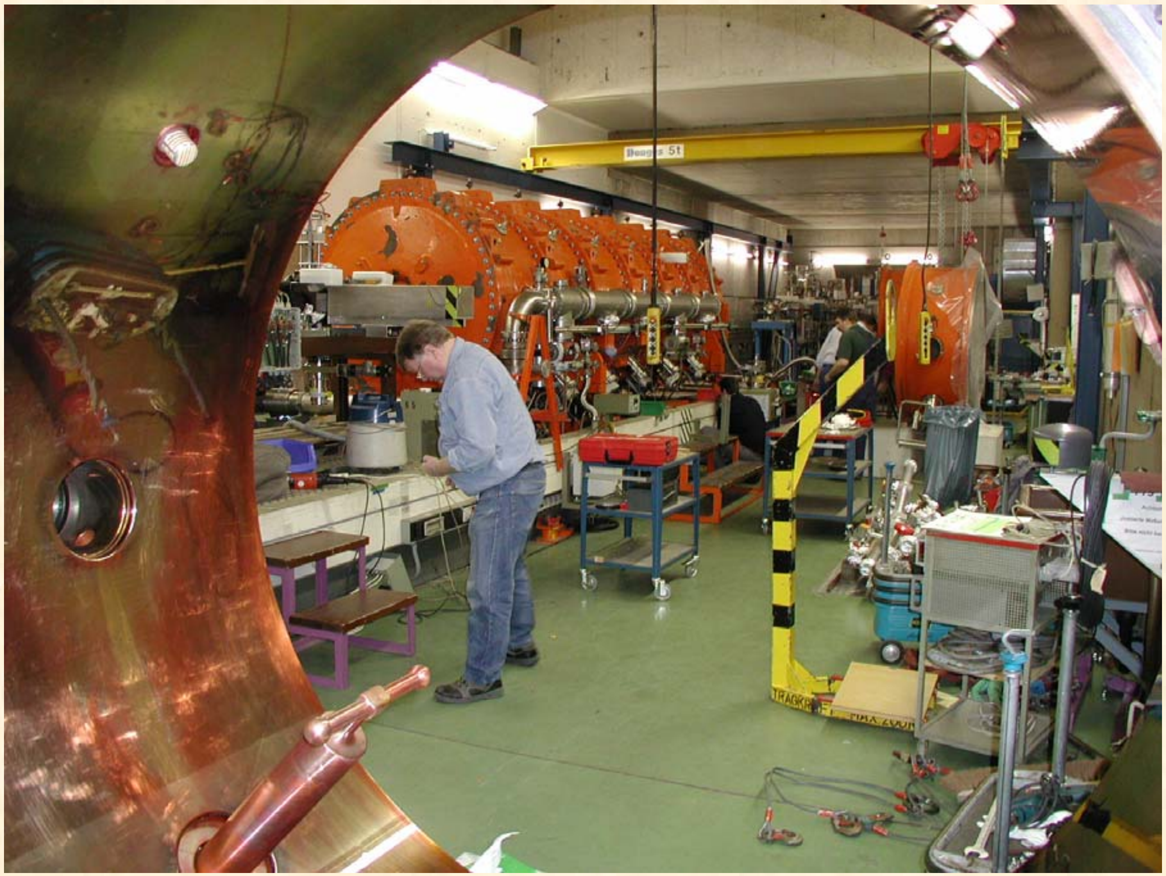




10. Kavitäten

10.20 Hohlraumresonatoren die aus einer Pill-Box abgeleitet werden können (normalleitende Einzelresonatoren, GSI)

Zu sehen ist hier ein Einzelresonator ohne Enddeckel. Der Blick auf dem linken Bild zeigt die Folge von 10 Einzelresonatoren im UNILAC. Auf dem rechten Bild sind sehr schön Einkoppelschleife und Tauchkolben zu erkennen.



10.21 Berechnung der TM_{010}-Mode einer Pill-Box

Wir gehen von der I. und der II. Maxwellschen Gleichung aus:

(I.) $$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$ (II.) $$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Wir suchen nun die einfachste Lösung, indem wir annehmen das elektrische Feld hätte nur eine longitudinale Komponente und das B-Feld nur eine azimutale Komponente. Dabei sollen die Komponenten nur von der radialen Koordinate r und nicht vom azimutal-Winkel Φ abhängen:

$$E_s(r,t)=E(r)e^{i\omega t} \qquad B_\phi(r,t)=B(r)e^{i\omega t}$$

Dieser Ansatz wird in die beiden Maxwellschen Gleichungen eingesetzt und führt auf:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rB(r))=i\omega\varepsilon\mu E(r) \qquad \frac{d}{dr}E(r)=i\omega B(r)$$

Die zweite Gleichung wird nach r abgeleitet und danach werden beide Gleichungen ineinander eingesetzt um B(r) zu ersetzen. Im Ergebnis hat man dann eine Wellengleichung in Zylinderkoordinaten für ein elektrisches Feld, dessen einzige Komponente E_s nur von r und nicht von θ abhängt:

$$\frac{d^2}{dr^2}E(r)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}E(r)+\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 E(r)=0$$

GSI RF-Group, P. Hülsmann, Email: P.Huelsmann@gsi.de, Phone: +49 6159 71 2066

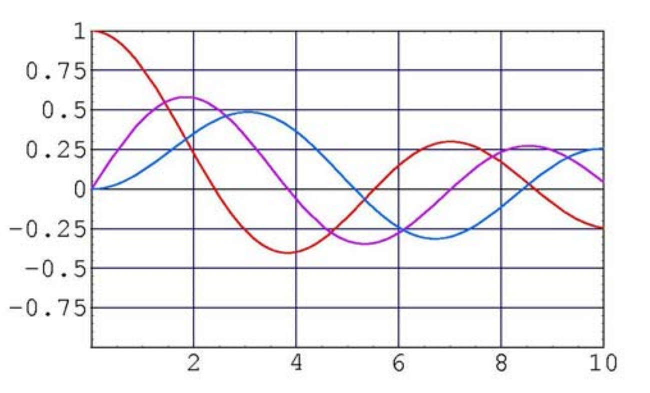
Wir werden jetzt die Wellengleichung

$$\frac{d^2}{dr^2}E(r)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}E(r)+\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 E(r)=0$$

durch folgende Substitution

$$u=\frac{\omega}{c_0}r \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dr}=\frac{\omega}{c_0}\frac{d}{du}$$

in die Besselsche Differentialgleichung für n=0 überführen:



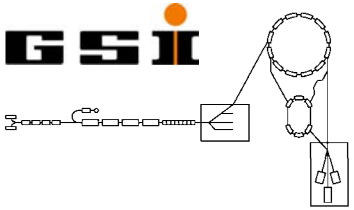
$$E''(u)+\frac{1}{u}E'(u)+E(u)=0$$

Lösung dieser Differentialgleichung ist die 0-te Besselfunktion, links im Bild die rote Kurve. Die Lösung lautet also:

$$E(r)=A\,J_0(u)=A\,J_0\left(\frac{\omega}{c_0}r\right)$$

Nun müssen noch die Konstanten A und ω/c_0 bestimmt werden.

GSI RF-Group, P. Hülsmann, Email: P.Huelsmann@gsi.de, Phone: +49 6159 71 2066



10. Kavitäten

10.21 Berechnung der TM_{010}-Mode einer Pill-Box

Nun wissen wir, dass das longitudinale elektrische Feld am Außenradius der Kavität verschwinden muss. Das bedeutet:

$$E(R) = A\,J_0\left(\frac{\omega}{c_0}R\right) = 0$$

$J_0(x)$ hat gemäß dem Bild eine Nullstelle bei ν_{10}=2,405. ν_{10} bedeutet die erste Nullstelle der 0-ten Besselfunktion.

Daher muß gelten: $\frac{\omega}{c_0}R = \nu_{10}$ Damit ist auch die Resonanzfrequenz bestimmt: $f = \frac{c_0}{2\pi}\frac{2,405}{R}$

Welche Frequenz hat eine brauchbare Kavität:

$$w_{max} = 2\sqrt{\frac{b}{a}} = 2\sqrt{\frac{Ze\hat{V}\beta^2 E}{2\pi h\,\omega_r^2\,\eta}}$$

1) Bei einer Frequenz von f=500 MHz wäre der Durchmesser der Kavität etwa D=0,46 m.
2) Die Strahlrohrmitte im SIS18 befindet sich auf einer Höhe von 1,3 m. Das wäre dann der maximal mögliche Radius einer solchen Kavität.
3) Die zu einem Kavitätenradius von 1,3 m gehörige Frequenz ist f=88,27 MHz.
4) Das wäre dann etwa die 441'ste Harmonische, wenn die Umlauffrequenz der Teilchen 200 kHz beträgt.

Wie lang darf eine solche Kavität sein?
Dazu definieren wir den Transit-Time-Faktor Λ:

$$\Lambda = \frac{\int_0^{l/2} E_0 \cos\left(\omega\frac{s}{v}\right) ds}{E_0\frac{l}{2}} = \frac{\sin(\xi)}{\xi} \qquad \xi = \frac{\omega}{v}\frac{l}{2}$$

10.21 Berechnung der TM_{010}-Mode einer Pill-Box

Ideal wäre natürlich Λ=1, aber dann müsste l=0 sein, d.h. Energiegewinn 0 sein, was ja nicht gerade zielführend wäre.
Kompromiss wäre zum Beispiel Λ = 0,9, dann wäre ξ ≈ 0,8 und damit l ≈ 17cm.
Das liegt aber am niedrigen β von 0,2.
Für $v=c_0$ wäre die Länge l=86cm.

Unsere Lösung für das longitudinale elektrische Feld lautet also:

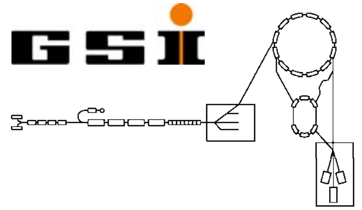
$$E_s(r,t) = E_0 J_0\left(\frac{\nu_{10}}{R} r\right) e^{i\omega t}$$

Auf die zugehörige magnetische Induktion B kommen wir über den Zusammenhang:

$$B(r) = \frac{1}{i\omega}\frac{d}{dr}E(r)$$

Die magnetische Induktion in azimutaler Richtung ist dann:

$$B_\phi(r,t) = -\frac{1}{i\omega}\frac{\nu_{01}}{R} E_0 J_1(\frac{\nu_{01}}{R} r)\, e^{i\omega t}$$




10.21 Berechnung der TM_{010}-Mode einer Pill-Box

Die Definition der Resonator-Güte Q:

$$Q = \omega \frac{\text{gespeicherte Energie}}{\text{Energieverlust pro Zeiteinheit}} = \omega \frac{W_0}{-\frac{dW_0}{dt}}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich leicht lösen und führt auf den Zusammenhang, wie die in der Kavität anfänglich gespeicherte Energie mit der Zeit abnimmt.

$$\frac{dW_0}{W_0} = -\frac{\omega}{Q} dt \qquad W_0(t) = W_{0A} e^{-\frac{\omega}{Q}t}$$

Die Kavität ohne Strahl ist ein gedämpfter Resonator. Die Dämpfung ist durch den Widerstand des Wandmaterials bedingt.
Zur Berechnung der Güte brauchen wir zunächst mal die gesamte, im Resonator gespeicherte Energie. Die im Hohlraumresonator gespeicherten Energien sind:

$$W_{el} = \frac{\varepsilon_0}{4} \int_V \left|\vec{E}\right| dv \qquad W_{mag} = \frac{\mu_0}{4} \int_V \left|\vec{H}\right| dv$$

Befindet sich der Resonator im Resonanzpunkt, dann sind beide Energien gleich groß und es folgt:

$$W_0 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \left|\vec{E}\right| dv$$

10.21 Berechnung der TM_{010}-Mode einer Pill-Box

Zur Berechnung der gespeicherten Energie im Resonator müssen wir also folgendes Integral lösen:

$$W_0 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V E_0^2 J_0^2\left(\frac{\nu_{10}}{R} r\right) r d\phi dr dz = \frac{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot l \cdot R^2}{2 \cdot \nu_{10}^2}\int_0^{\nu_{10}} J_0^2(u) u du$$

Das Integral über das Quadrat der Besselfunktion schauen wir im Bronstein nach:

$$\int_0^{\nu_{10}} J_0^2(u) u du = \frac{1}{2}\left(\nu_{10} J_1(\nu_{10})\right)^2$$

Weiterhin vereinfachen wir noch den Vorfaktor vor dem Integral oben rechts:

$$\frac{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot l \cdot R^2}{2 \cdot \nu_{10}^2} = \frac{\varepsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot V}{\nu_{10}^2}$$

V bedeutet hier das Volumen des Resonators.

Die im Resonator gespeicherte Energie, natürlich im Resonanzfall, hat sich also auf folgende einfache Formel reduziert:

$$W_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot V \cdot J_1^2(\nu_{10}) \approx \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot \text{Volumen} \cdot 0{,}52^2$$

10. Kavitäten

10.21 Berechnung der TM_{010}-Mode einer Pill-Box

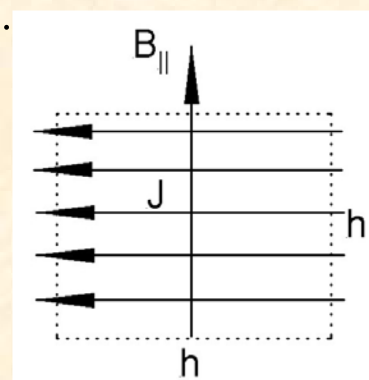
Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes verschwindet an den Leiteroberflächen. Die elektrische Feldstärke hat nur eine Komponente in s-Richtung. An den Deckelflächen trifft die Feldstärke senkrecht auf und an der Mantelfläche ist E_s=0:

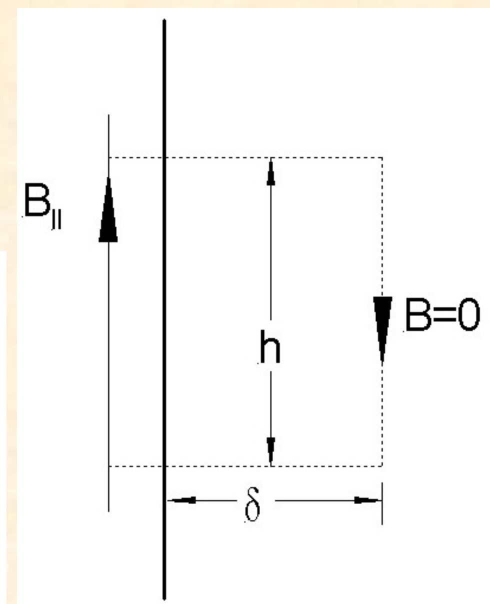
$$E_s\left(R,t\right)=E_0\,J_0\left(\frac{\nu_{10}}{R}R\right)e^{i\omega t}=0$$

Die Wandströme werden jedoch per Induktion vom azimutalen Magnetfeld hervorgerufen. Dies sind praktisch Oberflächenströme wegen des Skin-Effektes.

Skintiefe δ: $\delta=\sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\sigma}}$ σ ist hierbei die Leitfähigkeit.

Cu bei Raumtemperatur hat eine Leitfähigkeit von σ = 5,8·10^7 1/(Ωm)
Bei 500 MHz bedeutet das eine Skintiefe von δ=3μm.





$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I_{innen}\qquad B_{\parallel}\cdot h=\mu_0\cdot J\cdot h\cdot\delta$$

$$J=\frac{B_{\parallel}}{\mu_0\delta}$$

Ohmsche Leistung im Quadrat der Fläche $A = h^2$

Strom: $$I = J \cdot h \cdot \delta = \frac{B_{\parallel}}{\mu_0 \delta} \cdot h \cdot \delta$$

Widerstand: $$R = \rho \cdot \frac{h}{h \cdot \delta} = \frac{1}{\sigma\delta} = R_{Ob}$$

Der Oberflächenwiderstand ist eine Material-typische Größe:

$$\text{Cu bei 300K}, \quad f = 500\,\text{MHz}, \quad R_{Ob} = 5{,}7\,\text{m}\Omega$$

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot R_{Ob} \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \delta} \cdot J^2 \cdot h^2 \cdot \delta^2 \qquad \left(\frac{1}{2} \quad \text{wegen} \quad \left\langle \cos^2(\omega t) \right\rangle\right)$$

Verlustleistung pro Flächeneinheit:

$$P'_V = \frac{P_V}{h^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \delta} \cdot \frac{B_{\parallel}^2}{\mu_0^2 \cdot \delta^2} \cdot \delta^2 = \frac{1}{2} \cdot R_{Ob} \cdot \left(\frac{B_{\parallel}}{\mu_0}\right)^2$$

$$P'_V = \frac{1}{2} \cdot R_{Ob} \cdot \left(\frac{B_{\|}}{\mu_0} \right)^2$$

Dies muß über die Oberfläche integriert werden:

$$B_\phi(r,t) = -\frac{1}{i\omega} \frac{\nu_{01}}{R} E_0 J_1(\frac{\nu_{01}}{R} r) e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \left| B_{\|}(r) \right| = \frac{1}{\omega} \frac{\nu_{01}}{R} E_0 J_1(\frac{\nu_{01}}{R} r)$$

Also müssen wir einmal über den Mantel und zweimal über den Deckel integrieren:

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_{Ob}}{\mu_0^2} \cdot \left(\int_{\text{Mantel}} B_{\|}^2 da + 2 \cdot \int_{\text{Deckel}} B_{\|}^2 da \right)$$

Für Mantel und Deckel erhält man jeweils:

$$P_V^{Mantel} = \frac{1}{2} \cdot R_{Ob} \cdot \frac{E_0^2}{\mu_0^2 \cdot c_0^2} \cdot \left(J_1\left(2{,}405\right) \right)^2 \cdot 2\pi \cdot R \cdot 1$$

$$P_V^{Deckel} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot R_{Ob} \cdot \frac{E_0^2}{\mu_0^2 \cdot c_0^2} \cdot 2\pi \cdot \int_0^R J_1^2\left(\frac{\nu_{10}}{R} r \right) r\, dr$$

Wir haben also alles berechnet, um die Güte des Resonators ausrechnen zu können:

$$P_V^{Ges} = \frac{1}{2} \cdot R_{Ob} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \cdot E_0^2 \cdot (2\pi \cdot R \cdot l) \cdot \left(1 + \frac{R}{l}\right) \cdot J_1^2(2{,}405)$$

$$W_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot V \cdot J_1^2(\nu_{10}) \approx \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot \mathrm{Volumen} \cdot 0{,}52^2$$

$$\omega = c_0 \frac{\nu_{10}}{R}$$

$$Q = \omega \frac{\text{gespeicherte Energie}}{\text{Energieverlust pro Zeiteinheit}} = \nu_{10} \frac{c_0}{R} \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 R^2 \pi l}{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} E_0^2 2\pi R l \left(1 + \frac{R}{l}\right)} = \frac{\nu_{10} c_0 \mu_0}{2R_{Ob}\left(1 + \frac{R}{l}\right)}$$

$$\text{Cu bei 300K}, \quad f = 500\,\mathrm{MHz}, \quad Q \approx 30000$$

Bei HF-Anwendungen haben auch Supraleiter einen nicht verschwindenden Widerstand.
Grund: Das oszillierende Magnetfeld dringt ca. 1 Londonsche Eindringtiefe (l≈50nm) ein und bringt die ungepaarten Elektronen zum Schwingen.

BCS-Theorie:

$$2\Delta(0) = 3{,}5\,k\,T_C$$

$2\Delta(0)$ ist die Breite der Energielücke bei T=0K
T_C = kritische Temperatur

$$\frac{n_e}{2n_C} = \exp\left(-\frac{\Delta(T)}{k\,T_C}\right)$$

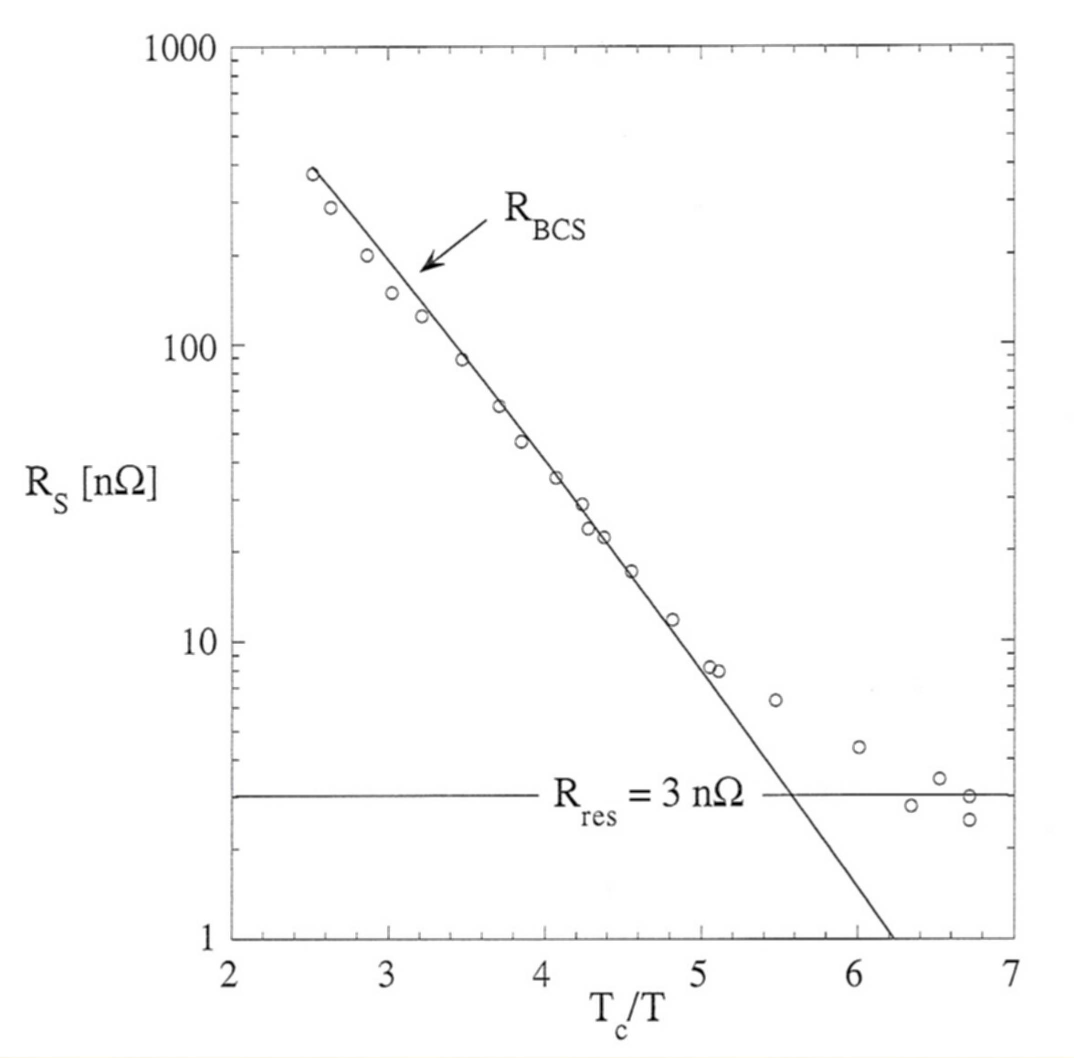
n_e Dichte der ungepaarten Elektronen (Normalleitung)
n_C Dichte der Cooperpaare

Für $T < 1/2 T_C$ (T_C=9,5K für Niob) gilt $\Delta(T) \approx \Delta(0)$ und $n_e(T) = 2n_C \exp\left(-1{,}75\frac{T_C}{T}\right)$

$$R_{Ob} = A\frac{\omega^2}{T}\exp\left(-1{,}75\frac{T_C}{T}\right) + R_{res}$$

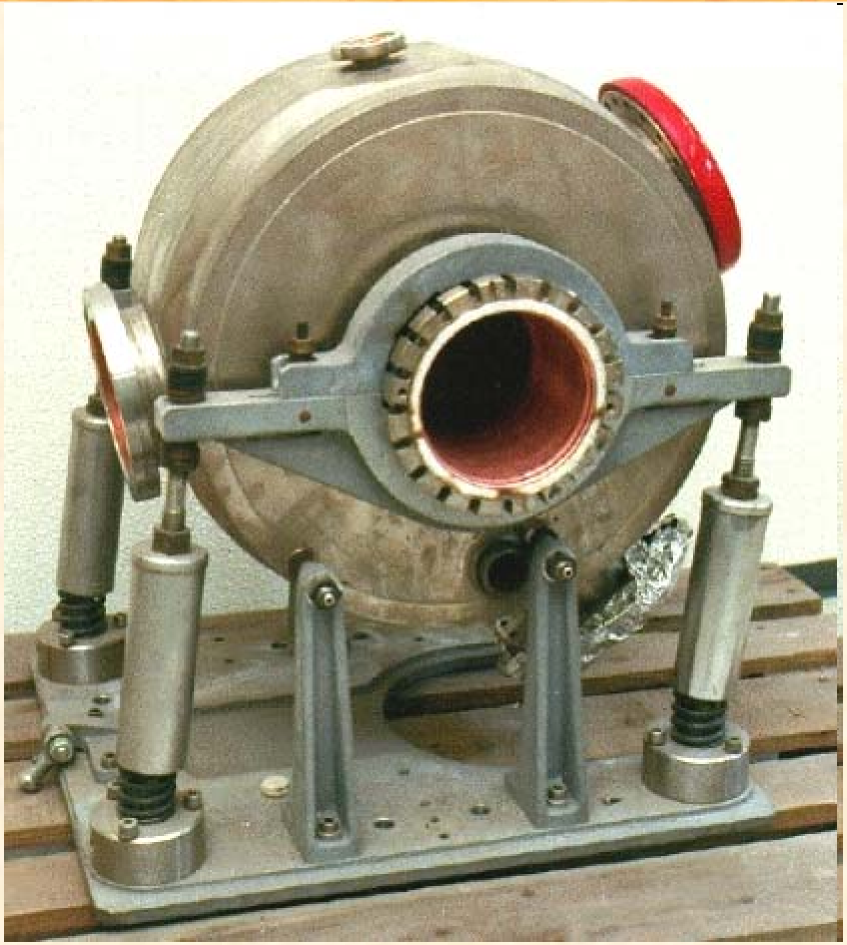
$$\text{Niob},\quad f = 500\,\text{MHz},\quad T = 4{,}2\,\text{K},\quad R_{Ob} = 70\,\text{n}\Omega$$

10.21 Berechnung der TM_{010}-Mode einer Pill-Box



10. Kavitäten

Kupfer-Kavität mit f=500MHz (DORIS)

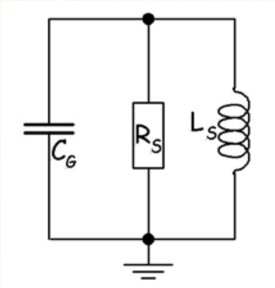


10.21 Berechnung der TM_{010}-Mode einer Pill-Box

Ein Hohlraumresonator kann als Schwingkreis hoher Güte dargestellt werden. Wählen wir als Ersatzschaltbild einen Parallelkreis, so muß man zur Erfassung der ohmschen Verluste einen Parallelwiderstand RS einführen, den sogenannten Shunt-Widerstand oder auch Shunt-Impedanz:

Für einen Parallelkreis gilt:

$$Q = \frac{R_S}{\omega_0 L} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_G}} \qquad R_S = \frac{\hat{V}^2}{2 \cdot P_V}$$



Kupfer-Kavität mit f=500MHz (DORIS):

$$Q = 38000, \quad R_S = 3 \cdot 10^6 \Omega, \quad \omega_0 L = 80\Omega, \quad V = 550\text{kV}$$

$$P_V = \frac{1}{2}\frac{\hat{V}^2}{R_S} = 50\text{kW}$$

$$\frac{R_S}{Q} = \frac{1}{\varepsilon_0 c_0 \nu_{10}\left(\frac{\pi R}{l}\right) J_1^2(2,405)}$$

$$l = \frac{2R}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_S}{Q} = 123\Omega, \quad R_S = 3,8\,\text{M}\Omega$$