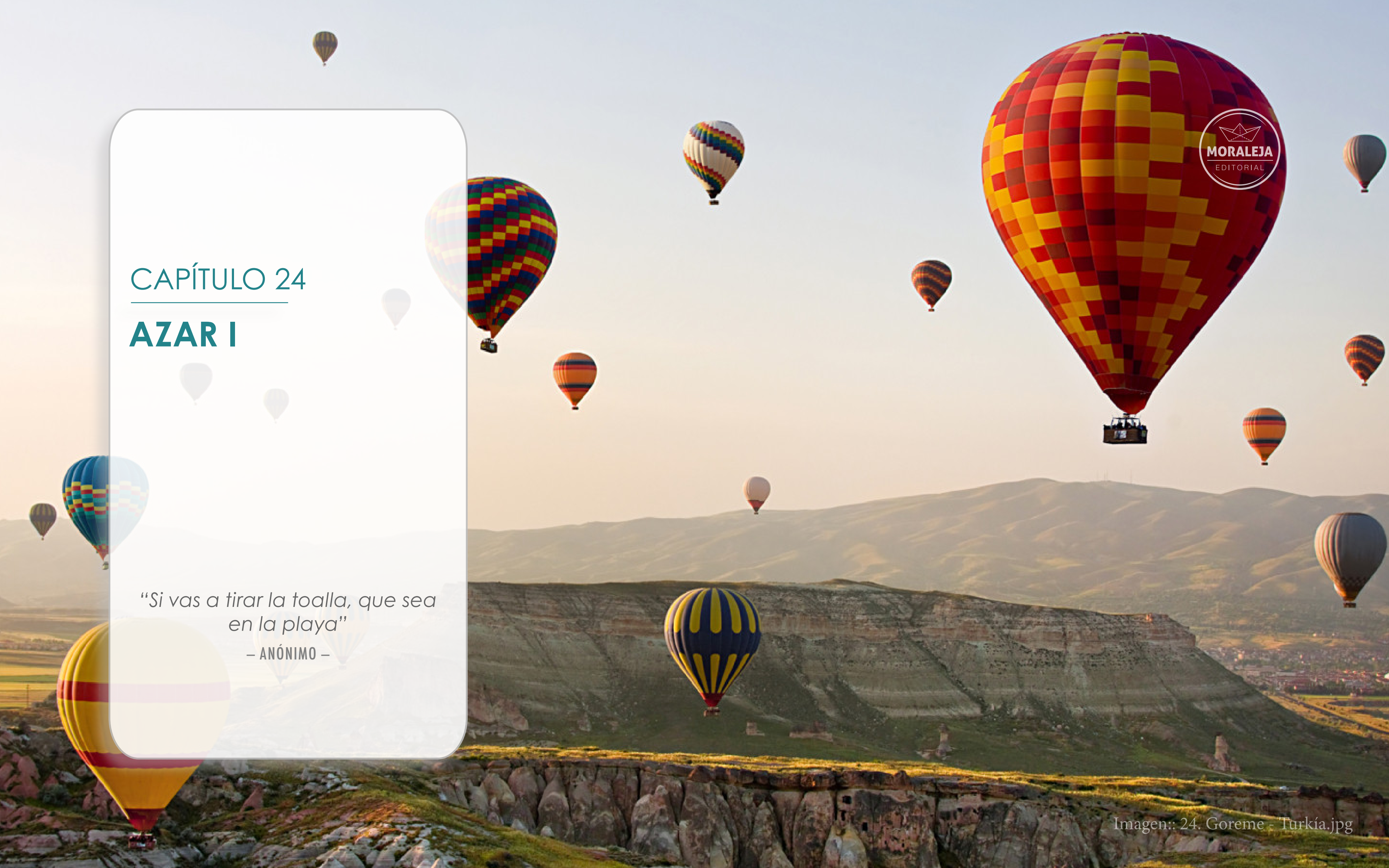


Imagen:: 24. Goreme - Turkía.jpg

CAPÍTULO 24

# AZAR I

*"Si vas a tirar la toalla, que sea en la playa"*

– ANÓNIMO –

# CAPÍTULO 24

## INDICE

# 1. TÉCNICAS DE CONTEO

Las técnicas de conteo nos permiten determinar la cantidad de maneras posibles en las que puede ocurrir un evento determinado con características dadas.

Para el desarrollo de algunas fórmulas que se presentan a continuación, se necesita saber lo que son los factoriales y cómo se calculan.

**Definición de factoriales**: Sea n un número natural. Se llama factorial de n al producto de los n primeros números naturales. La expresión **n!** se lee, n factorial.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

**NOTA:**

Algunos factoriales son:

» $0! = 1$
» $1! = 1$
» $2! = 2 \cdot 1 = 2$
» $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
» $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
» $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

## a. Principio Multiplicativo

Este principio se usa en situaciones en las que se deben escoger elementos en distintas etapas. Por ejemplo: Al escoger un menú, se debe elegir una entrada, un fondo y luego un postre. Al vestirse, se debe elegir una polera, un pantalón y luego un par de zapatos.

Entonces, la cantidad de menús que puedo formar, o la cantidad de tenidas de vestir diferentes que puedo formar, se calcula multiplicando la cantidad de opciones que tengo para cada etapa de elección: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots n_k$

**Ejemplo:**

Si tengo tres camisas y cuatro corbatas, ¿de cuántas maneras distintas puedo combinar una camisa y una corbata? Respuesta: de 12 maneras diferentes $(3 \cdot 4)$

Si se debe elegir un menú, y hay 3 opciones de entrada, 2 de fondo y 4 de postres, ¿cuántos menús diferentes puedo formar? Respuesta: 24 menús diferentes $(3 \cdot 2 \cdot 4)$

## b. Principio Aditivo

Este principio se usa en situaciones en las que se debe escoger una sola vez entre distintas opciones. Por ejemplo, si se debe escoger en qué restaurant almorzar y se tiene la opción A, la opción B y la opción C, se suma la cantidad de opciones. En este caso 3 opciones en total.

El principio aditivo suele combinarse con el principio multiplicativo como se muestra en el ejemplo.

**Ejemplo:**

Una persona quiere comprar un auto, y puede elegir entre distintas marcas con diferentes modelos y colores. La marca A tiene 2 modelos y 3 colores, la marca B tiene 4 modelos y 5 colores disponibles. ¿Entre cuántas combinaciones de autos puede elegir?

Dentro de la marca A se deben tomar dos decisiones: modelo y color $(2 \cdot 3)$ y dentro de la marca B, lo mismo con distinta cantidad de opciones $(4 \cdot 5)$. Luego, se suma la cantidad en total de autos diferentes que se tienen.

Respuesta: $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 26$ autos diferentes.

## c. Permutación

Aplicamos una permutación cuando utilizamos todos los elementos del conjunto y los ordenamos de distintas formas.

### i. Permutación simple

El número de **permutaciones** de n elementos está dado por:

$$P(n) = n!$$

**Ejemplo:**

¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra "GENIAL"?

Respuesta:

$P(n) = n! \rightarrow P(6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ palabras.

### ii. Permutación circular

El número de **permutaciones circulares** de n elementos está dado por:

$$P\varnothing(n) = (n-1)!$$

**Ejemplo:**

¿De cuántas maneras se pueden sentar en una mesa redonda 6 personas?

Respuesta:

$P\varnothing(n) = (n-1)!$

$P\varnothing(6) = (6-1)! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ maneras.

## iii. Permutación con elementos repetidos

El número de **permutaciones** de n elementos, cuando hay **elementos repetidos**, está dado por:

$$P^n_r = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot \ldots \cdot r!}$$

donde a, b,..., r son la cantidad de veces que se repite cada elemento repetido.

**Ejemplo:**

¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra "MORALEJA"?

La letra A está repetida, y se repite 2 veces.

Respuesta:

$$P^n_r = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot \ldots \cdot r!} \rightarrow P^8_2 = \frac{8!}{2!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$= 20.160 \text{ palabras}$$

## d. Variación

Aplicamos una variación cuando no utilizamos todos los elementos del conjunto y los ordenamos de distintas formas, importando el orden. (Esto quiere decir que si cambia el orden de los elementos, se considera un caso diferente: TEO ≠ OTE)

### i. Variación con elementos repetidos

La variación de n elementos tomados de r en r, con elementos repetidos o con reposición, está dado por:

$$VR_r^n = n^r$$

**Ejemplo:**

Se tienen los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. ¿Cuántos números de 4 dígitos se pueden formar con ellos si se pueden repetir?

$$VR_r^n = n^r \quad \rightarrow \quad VR_4^7 = 7^4 \quad = 2.401 \text{ números}$$

### ii. Variación sin elementos repetidos

La variación de n elementos tomados de r en r, sin elementos repetidos o sin reposición, está dado por:

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**Ejemplo:**

¿Cuántas palabras distintas de tres letras se pueden formar con las letras de la palabra "ARBOL"?

Respuesta:

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \rightarrow \quad V_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} \quad \rightarrow \quad \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$= 60 \text{ palabras}$$

## e. Combinación

Aplicamos una combinación cuando no utilizamos todos los elementos del conjunto y los combinamos de distintas formas, sin importar el orden en que quedan. (Esto quiere decir que si cambia el orden de los elementos, no se considera un caso diferente: Ana y Pedro = Pedro y Ana)

### i. Combinación con elementos repetidos

El número de combinaciones de n elementos tomados de r en r, con repetición está dado por:

$$CR_r^n = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \cdot r!}$$

**Ejemplo:**

Si debo escoger el sabor para 2 bolitas de helado para un postre y hay 6 disponibles, ¿de cuántas maneras puedo hacer mi elección? (Se puede repetir el sabor)

Respuesta:

$$CR_r^n = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \cdot r!} \rightarrow CR_2^6 = \frac{(6+2-1)!}{(6-1)! \cdot 2!} \rightarrow$$

$$\frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 2} = 7 \cdot 3 = 21 \text{ maneras}$$

## ii. Combinación sin elementos repetidos

El número de combinaciones de n elementos tomados de r en r sin repetición, está dado por:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

**Ejemplo:**

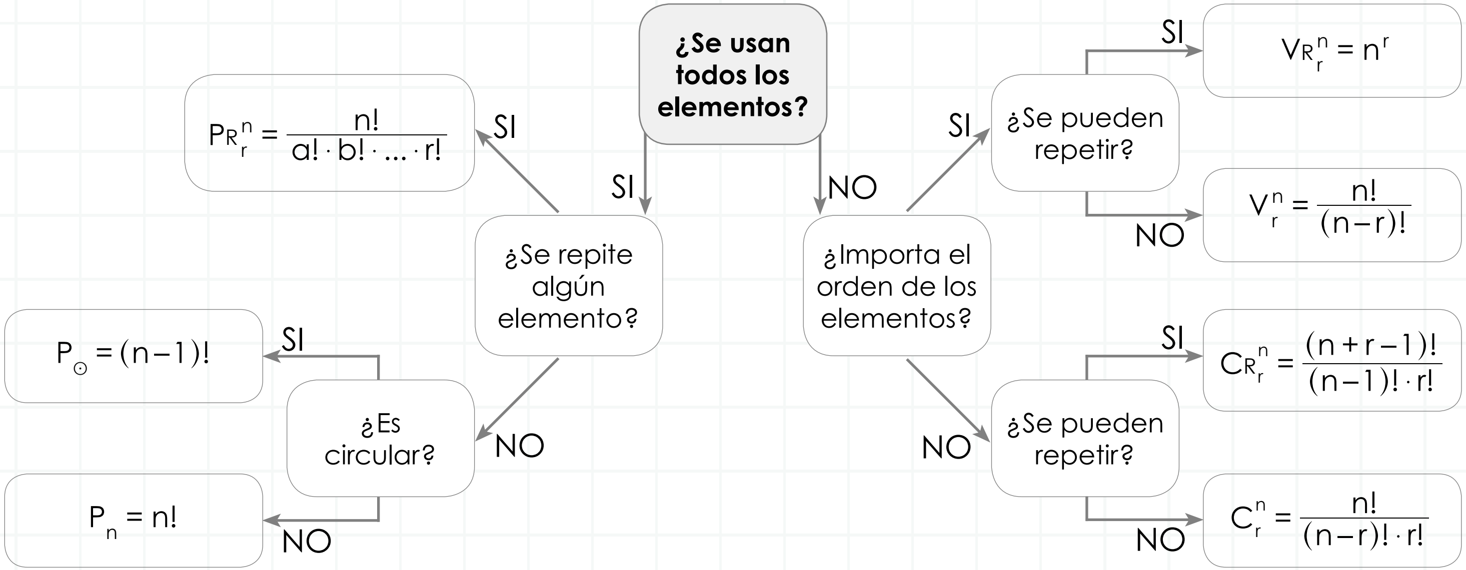
Si de un grupo de 10 personas, se deben escoger 6 de ellas para formar una comisión, ¿de cuántas maneras distintas se puede hacer la selección?

Respuesta:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \rightarrow C_6^{10} = \frac{10!}{(10-6)!\cdot 6!} \rightarrow$$

$$\frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{6!}} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210 \text{ maneras}$$

## 2. CUADRO RESUMEN DE TÉCNICAS DE CONTEO



1. En una fila de 7 sillas se sientan cuatro mujeres y tres hombres, ¿de cuántas maneras se pueden sentar ordenadamente, si las mujeres deben estar juntas y los hombres también?
*(DEMRE 2013)*

A) $2$

B) $4 \cdot 3$

C) $3! \cdot 4! \cdot 2$

D) $3! \cdot 4!$

E) $4 \cdot 3 \cdot 2$

2. Carolina, Daniela, Antonia y Victoria pertenecen a un grupo. Un profesor debe elegir a dos de ellas para realizar un trabajo de matemática. ¿Cuál es el máximo número de combinaciones de parejas que se pueden formar con estas cuatro niñas?
*(DEMRE 2015)*

A) 8
B) 2
C) 6
D) 12
E) 16

3. Antonia salió a un restaurante a almorzar y debe elegir un menú consistente en a lo menos una ensalada y a lo menos un tipo de carne. Se puede determinar la cantidad de combinaciones distintas de este tipo de alimentos que puede elegir Antonia, si se sabe que:
*(DEMRE 2015)*

(1) Hay 9 ensaladas distintas y 3 tipos de carne
(2) Antonia elige solo una ensalada y solo un tipo de carne

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

4. Un programa computacional genera números de tres dígitos distintos entre sí y ningún dígito puede ser cero. ¿Cuántos de estos números están formados con exactamente dos números primos?
*(DEMRE 2017)*

A) $3 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1}$

B) $3 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1}$

C) $6 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1}$

D) $6 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1}$

E) $3 \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1}$

5. ¿Cuántos números distintos divisibles por 2, menores que 100.000 y mayores que 10.000 se pueden formar en total usando los dígitos 3 , 4 , 5 , 7 y 9, considerando que estos se pueden repetir?
*(DEMRE 2018)*

A) 625

B) 20

C) 256

D) 120

E) 24

6. De un grupo formado por 5 ingenieros y 6 economistas, todos de distintas edades, se quiere formar una comisión presidida por el ingeniero de más edad del grupo, la cual estará integrada, en total, por 3 ingenieros y 2 economistas. ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar?
*(DEMRE 2018)*

A) 90
B) 210
C) 60
D) 21
E) 360

7. Se tienen 9 letras diferentes. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, es posible formar con estas 9 letras, sin que se repita ninguna letra, si estas palabras están formadas por al menos 2 letras o a lo más 4 letras?
*(DEMRE 2019)*

A) $3! \cdot \binom{9}{3}$

B) $\binom{9}{3}$

C) $\binom{9}{2}\binom{9}{3}\binom{9}{4}$

D) $2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \binom{9}{2}\binom{9}{3}\binom{9}{4}$

E) $2! \cdot \binom{9}{3} + 3! \cdot \binom{9}{3} + 4! \cdot \binom{9}{4}$

# 3. PROBABILIDAD BÁSICA

## a. Nociones básicas de las probabilidades

**Experimento aleatorio:** Experimento cuyo resultado no se puede predecir.

**Espacio muestral (E):** Conjunto de todos los posibles resultados que puede tener un experimento.

**Cardinalidad del espacio muestral:** Cantidad de elementos que tiene el espacio muestral, equivalente a la cantidad de casos totales del experimento.

**Evento:** Es un posible resultado del experimento.

**Evento cierto o seguro**: Es aquel que involucra a todos los elementos del espacio muestral. La probabilidad que ocurra un evento seguro es 1.

**Evento imposible**: Es aquel que no tiene elementos del espacio muestral. La probabilidad que ocurra un evento imposible es 0.

**Eventos mutuamente excluyentes**: Son aquellos eventos donde la ocurrencia de uno de ellos impide la ocurrencia del otro.

**Eventos complementarios**: son aquellos que no tienen elementos comunes pero juntos forman el espacio muestral.

## b. Probabilidad clásica o regla de Laplace

En un experimento aleatorio, la probabilidad de un suceso A se obtiene dividiendo el número de casos favorables al evento A por el número total de casos posibles (cardinalidad del espacio muestral).

$$P(A) = \frac{\text{N° de casos favorables (A)}}{\text{N° total de casos}}$$

**NOTA:** » $0 \leq P(A) \leq 1$ o bien $0\% \leq P(A) \leq 100\%$ » $P(A) = 1 - P(A`)$ ( A' = A NO ocurre )

## c. Determinación de casos favorables y totales

Para determinar la cantidad de casos favorables y totales, debemos conocer el espacio muestral del experimento asociado.

Espacios muestrales (E) más utilizados:

**1. Monedas:**

- Lanzamiento de 1 moneda: E →

  2 casos totales

| | |
|---|---|
| C | S |

- Lanzamiento de 2 monedas: E →

  4 casos totales ($2^2$)

| | |
|---|---|
| C | C |
| C | S |
| S | C |
| S | S |

- Lanzamiento de 3 monedas: E →

  8 casos totales ($2^3$)

| | | |
|---|---|---|
| C | C | C |
| C | C | S |
| C | S | C |
| C | S | S |
| S | C | C |
| S | C | S |
| S | S | C |
| S | S | S |

- Lanzamiento de 4 monedas: E →

  16 casos totales ($2^4$)

| | | | |
|---|---|---|---|
| C | C | C | C |
| C | C | C | S |
| C | C | S | C |
| C | C | S | S |
| C | S | C | C |
| C | S | C | S |
| C | S | S | C |
| C | S | S | S |
| S | C | C | C |
| S | C | C | S |
| S | C | S | C |
| S | C | S | S |
| S | S | C | C |
| S | S | C | S |
| S | S | S | C |
| S | S | S | S |

Si miramos las columnas de estas tablas de derecha a izquierda, vemos una regularidad: Cara y Sello de uno en uno, luego de dos en dos, luego de cuatro en cuatro, luego de ocho en ocho. Esto puede servir como ayuda para escribir los espacios muestrales de monedas y de todos los experimentos que tengan dos opciones de ocurrencia, cada una con igual probabilidad.

**NOTA:** » En el lanzamiento de n monedas, la cantidad de casos totales del experimento es $2^n$

## 2. Dados

- Lanzamiento de 1 dado: E ⟶ 6 casos totales

  E = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}

- Lanzamiento de 2 dado: E → 36 casos totales ($6^2$)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1–1 | 1–2 | 1–3 | 1–4 | 1–5 | 1–6 |
| 2 | 2–1 | 2–2 | 2–3 | 2–4 | 2–5 | 2–6 |
| 3 | 3–1 | 3–2 | 3–3 | 3–4 | 3–5 | 3–6 |
| 4 | 4–1 | 4–2 | 4–3 | 4–4 | 4–5 | 4–6 |
| 5 | 5–1 | 5–2 | 5–3 | 5–4 | 5–5 | 5–6 |
| 6 | 6–1 | 6–2 | 6–3 | 6–4 | 6–5 | 6–6 |

**NOTA:** »En el lanzamiento de n dados, la cantidad de casos totales del experimento es $6^n$

## 3. Bolitas

Supongamos que se tiene una urna con bolitas de colores: 4 negras y 5 blancas. El espacio muestral es $\{N_1 , N_2 , N_3 , N_4 , B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5\}$ y tiene 9 casos totales.

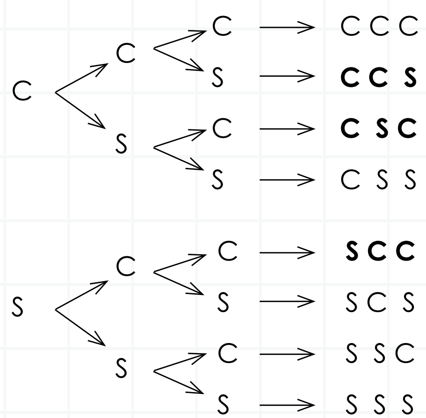
Existen algunos experimentos cuyo espacio muestral es más complejo y en los que se podrían necesitar técnicas de conteo para determinar la cantidad de casos favorables y totales.

## i. Diagrama del árbol

Un diagrama de árbol es una representación gráfica que nos permite ordenar todos posibles resultados de un experimento. Sera útil en algunos casos para determinar el espacio muestral y luego calcular sus probabilidades.

**Ejemplo:** ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 caras al lanzar una moneda 3 veces?

Construimos el diagrama del árbol




Del diagrama del árbol, podemos ver que se tienen 8 casos totales y 3 casos favorables. Por lo tanto, la probabilidad de obtener exactamente 2 caras es $\frac{3}{8}$.

**Ejemplo:** Al lanzar un dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par y un sello?

Construimos el diagrama del árbol

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | C | $\longrightarrow$ | 1 C |
| | S | $\longrightarrow$ | 1 S |
| 2 | C | $\longrightarrow$ | 2 C |
| | S | $\longrightarrow$ | **2 S** |
| 3 | C | $\longrightarrow$ | 3 C |
| | S | $\longrightarrow$ | 3 S |
| 4 | C | $\longrightarrow$ | 4 C |
| | S | $\longrightarrow$ | **4 S** |
| 5 | C | $\longrightarrow$ | 5 C |
| | S | $\longrightarrow$ | 5 S |
| 6 | C | $\longrightarrow$ | 6 C |
| | S | $\longrightarrow$ | **6 S** |

Del diagrama del árbol, podemos ver que hay 12 casos totales y 3 casos favorables. Por lo tanto, la probabilidad de obtener un número par y un sello es $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

### ii. Triángulo de Pascal

El triángulo de Pascal se utiliza en experimentos aleatorios con 3 o más repeticiones y en los que es difícil determinar el espacio muestral para determinar alguna probabilidad. El experimento debe tener dos sucesos equiprobables de ocurrencia, como por ejemplo: lanzar una moneda, el sexo de una persona, respuestas de preguntas del tipo Verdadero o Falso, etc. Gráficamente se muestra en la figura siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & 1C^1 & & 1S^1 & & & & & & = 2 \\
 & & & 1C^2 & & 2\,C^1\,S^1 & & 1S^2 & & & & & = 4 \\
 & & 1C^3 & & 3\,C^2\,S^1 & & 3\,C^1\,S^2 & & 1S^3 & & & & = 8 \\
 & 1C^4 & & 4\,C^3\,S^1 & & 6\,C^2\,S^2 & & 4\,C^1\,S^3 & & 1S^4 & & & = 16 \\
1C^5 & & 5\,C^4\,S^1 & & 10\,C^3\,S^2 & & 10\,C^2\,S^3 & & 5\,C^1\,S^4 & & 1S^5 & & = 32
\end{array}$$

**NOTA:**

» Los coeficientes primero y último de cada fila son siempre 1

» Cualquier otro coeficiente de una fila se obtiene como la suma de los dos valores que están justo arriba en la fila anterior.

» Si se suman los números de cada fila el resultado es siempre una potencia de 2 y corresponde a la cantidad de casos totales del experimento.

» Existe una simetría en cada fila respecto a su centro.

**Ejemplo:**

Se lanza una moneda 5 veces. Calcule la probabilidad de obtener 2 caras y 3 sellos.

Como se tienen 5 repeticiones, es complejo escribir el espacio muestral del experimento. Por esta razón usamos el triángulo de Pascal.

Al ser 5 repeticiones, se debe mirar la quinta fila correspondiente a la fila que luego del 1, viene un 5:

$$1C^5 \quad 5\,C^4\,S^1 \quad 10\,C^3\,S^2 \quad \mathbf{10}\,C^2\,S^3 \quad 5\,C^1\,S^4 \quad 1S^5 \qquad = 32$$

El 32 corresponde a los casos totales del experimento y se calcula sumando los valores de la fila del triángulo: $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$

Luego, hay que fijarse en el término $\mathbf{10}\,C^2\,S^3$, el cual indica que hay 10 casos favorables de obtener 2 caras y 3 sello ($C^2\,S^3$).

Por lo tanto la probabilidad pedida es igual a $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

### iii. `Ley de los grandes números

Existe la probabilidad teórica (Ley de Laplace) y la probabilidad experimental. Esta última corresponde a la probabilidad que se calcula a partir de un experimento ya realizado, es decir, se tienen los resultados. La ley de los grandes números establece que a medida que aumenta la cantidad de veces que se realiza un experimento, la probabilidad experimental se acerca a la probabilidad teórica. Por lo tanto, cuando un experimento se ha realizado muchas veces, se asume por esta ley, que las probabilidades asociadas al experimento son aproximadamente las probabilidades teóricas esperadas.

**Ejemplo:** Si 500 personas lanzan una vez el dado, la ley de los grandes números establece que aproximadamente $\frac{1}{6}$ de las 500 personas va a obtener el número 2, ya que $\frac{1}{6}$ es la probabilidad teórica de obtener un 2.

8. En un salón hay 1.000 personas y cada una de ellas lanza 3 monedas. La Ley de los Grandes Números permite afirmar que:
*(DEMRE 2016)*

A) En cualquier grupo de 8 personas del salón, una de ellas obtuvo tres caras
B) En cualquier grupo de 16 personas del salón, cuatro de ellas obtuvieron tres caras
C) Aproximadamente, el 12,5% de las personas del salón obtuvo tres caras
D) Aproximadamente, el 25% de las personas del salón obtuvo tres caras
E) Aproximadamente, la mitad de las personas del salón obtuvo tres caras

9. En un curso de 50 estudiantes se sorteará al azar un MP3 entre los asistentes a clases. Si por cada 3 mujeres de este curso hay 7 hombres y el día del sorteo del total de los estudiantes faltan solo 2 mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que el premio lo gane una mujer?

*(DEMRE 2017)*

A) $\frac{13}{48}$

B) $\frac{1}{48}$

C) $\frac{1}{50}$

D) $\frac{13}{50}$

E) $\frac{15}{50}$

10. En una caja hay en total 20 bolitas del mismo tipo, unas de color rojo, otras de color azul y otras de color negro. Al sacar una bolita al azar de la caja, se puede determinar la probabilidad de que esta sea de color negro, si se sabe que:

*(DEMRE 2018)*

(1) Al extraer al azar una bolita de la caja, la probabilidad de que sea negra es igual a la probabilidad de que sea roja

(2) La cantidad de bolitas azules que hay en la caja es la mitad de la cantidad de bolitas rojas que hay en la caja

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

11. En una bolsa hay 10 fichas del mismo tipo, numeradas correlativamente del 0 al 9. Si de la bolsa se saca una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta tenga un número primo?
*(DEMRE 2019)*

A) $\frac{5}{9}$

B) $\frac{4}{9}$

C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{2}{5}$

# 4. SUMA Y PRODUCTO DE PROBABILIDADES

## a. Suma de probabilidades

Para aprender la suma de probabilidades, se debe manejar el concepto de eventos mutuamente excluyentes y no mutuamente excluyentes:

### i. Mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B son **mutuamente excluyentes** si ellos no pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir no tienen elementos comunes.

Sean A y B, dos eventos **excluyentes** de un espacio muestral E. La probabilidad de que ocurra A o B está dada por:

$$P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Ejemplo:** En el lanzamiento de un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número 5 o un número par?

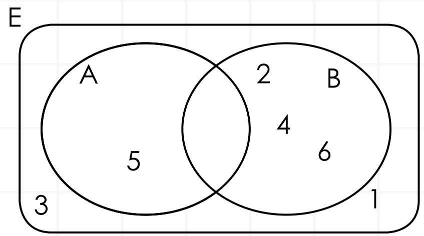
Que salga 5 = { 5 } , Par = { 2 , 4 , 6 }

$$P(5 \text{ o Par}) = P(5) + P(\text{Par})$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{3}{6}$$

$$= \frac{4}{6}$$

Gráficamente esto es:



## ii. No mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B son **no mutuamente excluyentes** si ellos pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir tienen elementos comunes.

Sean A y B, dos eventos **no excluyentes** de un espacio muestral E. La probabilidad de que ocurra A o B está dada por:

$$P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{probabilidad que ocurra lo común entre A y B}}$$

**Ejemplo:** En el lanzamiento de un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número primo o un número par?

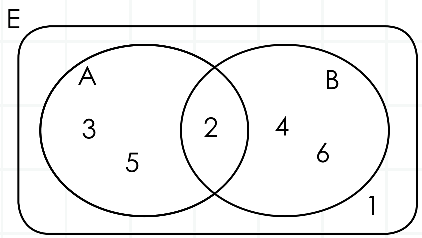
Primo = { 2 , 3 , 5 } , Par = { 2 , 4 , 6 }
(2 es lo común entre Primo y Par)

$$P(\text{Primo o Par}) = P(\text{Primo}) + P(\text{Par}) - P(2)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

Gráficamente esto es:



## b. Producto de probabilidades y probabilidad condicional

Para aprender el producto de probabilidades, se debe manejar el concepto de eventos dependientes e independientes:

### i. Eventos independientes

Dos eventos A y B son **independientes** si la ocurrencia de uno no influye sobre la ocurrencia del otro.

Sean A y B, dos **eventos independientes** de un espacio muestral E. La probabilidad de que ocurra A y B está dada por:

$$P(A \text{ y } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

**Ejemplo:** En el lanzamiento de dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número par y un número primo?

Pares = { 2 , 4 , 6 } , Primos = { 2 , 3 , 5 }

$$P(\text{Par y Primo}) = P(\text{Par}) \cdot P(\text{Primo})$$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

### i. Eventos dependientes

Dos eventos A y B son **dependientes** si la ocurrencia de uno influye sobre la ocurrencia del otro, modificando el espacio muestral.

**Ejemplo:** Se tienen 4 bolitas rojas y 3 azules. Se extraer dos bolitas sin reposición.

A: obtener una bolita roja en la primera extracción.

B: obtener una bolita azul en la segunda extracción.

Como en este experimento no se repone la primera bolita que se saca, la cantidad de bolitas cambia al momento de extraer la segunda bolita, lo que hace que los eventos A y B sean dependientes.

Sean A y B, dos **eventos dependientes**, la probabilidad de que ocurra A y B está dada por:

$$P(A \text{ y } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Es decir, la probabilidad que ocurra A y B es igual a la probabilidad que ocurra A multiplicada por la probabilidad que ocurra B asumiendo que A ocurrió anteriormente.

Se habla de P(B/A) como **probabilidad condicional,** ya que es la probabilidad de B, con la condición de que A ya ocurrió.

Esta fórmula también se puede expresar como:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

**Ejemplos:**

- Se tienen 8 bolitas verdes y 5 amarillas. Si se extraen dos bolitas al azar, sin reponer la primera.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener primero una verde y luego una amarilla?

$$P(V \text{ y } A) = P(V) \cdot P(A/V)$$

$$= \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12}$$

Para la segunda extracción, ya se había sacado anteriormente una bolita verde, por lo que cambia el total a 12.

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una verde y una amarilla? (sin especificar el orden)

Al no especificar el orden, en este ejercicio hay que considerar dos posibilidades: obtener primero verde y luego amarilla, o primero amarilla y luego verde. Estas dos opciones se suman.

$$P(V \text{ y } A_{\text{(sin orden)}}) = P(V) \cdot P(A/V) + P(A) \cdot P(V/A)$$

$$= \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12}$$

$$= \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12} \cdot 2$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolitas verdes? (primero verde y luego otra verde)

$$P(V \text{ y } V) = P(V) \cdot P(V/V)$$
$$= \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12}$$

Para la segunda extracción, ya se había sacado anteriormente una bolita verde, por lo que cambia el total a 12 y la cantidad de verdes a 7.

- En el lanzamiento de un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 4 sabiendo que es par?

  Los números pares son 2, 4, 6. Como ya se sabe que el valor es un número par, ya no tenemos 6 casos totales, si no 3 (cantidad de números pares). Considerando estos tres casos, la probabilidad de obtener un 4 es: $\frac{1}{3}$

12. La probabilidad de que un feriante venda frutas un día determinado dado que está lloviendo es $\frac{1}{3}$. Si la probabilidad de que venda y llueva ese día es $\frac{1}{5}$, ¿cuál es la probabilidad de que NO llueva ese día?
*(DEMRE 2016)*

A) $\frac{14}{15}$

B) $\frac{1}{15}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{4}{5}$

E) $\frac{2}{5}$

13. En una caja hay en total siete bolitas, de las cuales tres son blancas y cuatro son negras, todas del mismo tipo. Si se extraen al azar dos bolitas sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea negra y la segunda sea blanca?

*(DEMRE 2017)*

A) $\frac{2}{7}$

B) $\frac{1}{12}$

C) $\frac{1}{42}$

D) $\frac{7}{12}$

E) $\frac{12}{49}$

14. Un colegio ofrece a sus estudiantes varias actividades culturales, entre ellas teatro y danza. El 10% de los estudiantes del colegio participa en danza, el 8% participa en teatro y el 4% de los estudiantes del colegio participa en danza y teatro. Si se escoge al azar un estudiante del colegio, ¿cuál es la probabilidad de que éste participe en teatro si se sabe que participa en danza?

*(DEMRE 2017)*

A) $\frac{2}{9}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{1}{2}$

15. En una bolsa hay en total 22 bolitas del mismo tipo numeradas en forma correlativa del 1 al 22. Si se extrae al azar una bolita de la bolsa, ¿cuál es la probabilidad de que esta tenga un número de un dígito o un número múltiplo de10?
*(DEMRE 2018)*

A) $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}$

B) $\frac{9}{22} + \frac{2}{21}$

C) $\frac{1}{9} + \frac{1}{2}$

D) $\frac{9}{22} + \frac{2}{22}$

E) $\frac{9}{22} + \frac{1}{22}$

16. En la tabla adjunta se muestran los resultados de una encuesta realizada a 60 personas, sobre la preferencia de mermeladas, clasificadas en no dietética y dietética. Al seleccionar a uno de estos encuestados al azar, la probabilidad de que este prefiera una mermelada no dietética, sabiendo que es mujer, es:
*(DEMRE 2018)*

| | **Mermelada** | |
|---|---|---|
| | No dietética | Dietética |
| Mujer | 6 | 24 |
| Hombre | 18 | 12 |

A) $0,0\overline{3}$

B) $0,1\overline{6}$

C) $0,2$

D) $0,25$

E) $0,\overline{3}$

17. Un curso está compuesto por 30 hombres, de los cuales 10 utilizan frenillos y 20 mujeres, de las cuales 6 no los usan. Si se selecciona a un estudiante del curso al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y utilice frenillos?

*(DEMRE 2018)*

A) $\frac{35}{50}$

B) $\frac{14}{50}$

C) $\frac{14}{24}$

D) $\frac{24}{125}$

E) $\frac{6}{20}$

18. Se tienen dos llaveros: P con 4 llaves y Q con 2 llaves. En cada llavero solo hay una llave que abre la puerta de una bodega. Cada llavero tiene la misma probabilidad de ser elegido y cada llave de ese llavero es equiprobable de ser elegida. Si se escoge un llavero al azar y de él se escoge al azar una llave, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?
*(DEMRE 2019)*

I. La probabilidad de que la llave abra la bodega es $\frac{3}{8}$

II. La probabilidad de que el llavero escogido sea Q y que la llave no abra la bodega es $\frac{1}{2}$

III. La probabilidad de que el llavero escogido sea P y que la llave abra la bodega es la mitad de la probabilidad de que el llavero escogido sea Q y que la llave abra la bodega

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Solo II y III

19. En una población el 52% son hombres de los cuales el 12% es zurdo y el 15% de las mujeres también lo es. Si se eligiera al azar una persona entre las personas zurdas de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea hombre?

*(DEMRE 2019)*

A) $\frac{52}{100} \cdot \frac{12}{100}$

B) $\frac{12}{52}$

C) $\frac{12}{15}$

D) $\frac{12}{52} \cdot \frac{33}{48}$

E) $\frac{12 \cdot 52}{12 \cdot 52 + 15 \cdot 48}$

20. En un taller de arte se selecciona al azar un estudiante. Se puede determinar la probabilidad de que este vista pantalones negros, si se sabe que:
*(DEMRE 2019)*

(1) El 85% de los integrantes de este taller visten pantalones
(2) En este taller, el 60% de los que visten pantalones, los llevan de color negro

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

CAPÍTULO 24

# EJERCICIOS

Imagen:: 24. Goreme - Turkía.jpg

1. ¿De cuántas maneras distintas pueden distribuir a cinco personas alrededor de una mesa circular?

A) 5
B) 10
C) 15
D) 24
E) 25

2. En el experimento aleatorio "lanzar tres monedas", ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) ejemplo(s) de evento mutuamente excluyente?

    I. Obtener exactamente dos caras y obtener exactamente dos sellos
    II. Obtener a lo más una cara y obtener a lo más un sello
    III. Obtener exactamente un sello y obtener a lo menos una cara

    A) Solo I
    B) Solo III
    C) Solo I y II
    D) Solo I y III
    E) I, II y III

3. Se lanza una moneda 3 veces y se obtiene 3 caras, ¿cuál es la probabilidad que la cuarta vez se obtenga cara?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{3}{8}$

E) $\frac{7}{16}$

4. En una urna con fichas azules, blancas, rojas y verdes, la probabilidad de escoger una ficha azul o blanca es 0,4. Si en la urna hay 15 fichas de las cuales 7 son verdes, ¿cuál es el número de fichas rojas?

A) 6
B) 5
C) 4
D) 2
E) 3

5. Si se lanza una moneda 4 veces, ¿cuántos elementos tiene el espacio muestral?

A) 4
B) 8
C) 16
D) 32
E) 64

6. En el experimento del lanzamiento de un dado normal, es decir, no cargado, ¿cuáles de los siguientes sucesos tienen la misma posibilidad de ocurrencia?

   I. Que salga un número par
   II. Que salga un número impar
   III. Que salga un número primo

A) Solo I y II
B) Solo II y III
C) Solo I y III
D) I, II y III
E) Ninguno de ellos

7. Se lanza un dado normal. La probabilidad de obtener un número mayor o igual que 4 es:

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $\frac{5}{6}$

8. Se tiene una urna con fichas numeradas del 1 al 15. Si se elige una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la ficha contenga un número que sea múltiplo de 2?

A) $\frac{1}{15}$

B) $\frac{2}{15}$

C) $\frac{7}{15}$

D) $\frac{8}{15}$

E) $\frac{1}{2}$

9. Se lanzan dos monedas no cargadas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener caras iguales?

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{3}{4}$

10. Se lanzan dos dados no cargados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma igual a 3?

A) $\frac{1}{36}$

B) $\frac{1}{18}$

C) $\frac{1}{9}$

D) $\frac{5}{36}$

E) $\frac{1}{6}$

11. En una urna hay tres bolas negras y dos blancas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{2}{3}$

12. Un estuche contiene 3 lápices rojos, 4 lápices azules y 2 lápices negros, todos de igual peso y tamaño. Si se extrae un lápiz al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el lápiz NO sea negro?

A) $\frac{7}{9}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{9}$

E) $\frac{1}{7}$

13. La probabilidad de sacar una ficha azul de una urna es $\frac{2}{5}$. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha que no sea azul?

A) 1

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{3}{5}$

E) Falta información

14. En una caja hay 500 bolitas, todas de igual peso y tamaño. Si las bolitas pueden ser amarillas o verdes, se puede determinar cuántas bolitas verdes hay en la caja si:

    (1) Hay tantas bolitas amarillas como verdes

    (2) Si se extrae una bolita al azar, la probabilidad de sacar una bolita amarilla es del 50%

    A) (1) por sí sola
    B) (2) por sí sola
    C) Ambas juntas, (1) y (2)
    D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
    E) Se requiere información adicional

15. Se tiene un dado normal. Una de sus caras se encuentra en blanco y el resto están todas numeradas del 1 al 5. En este caso, ¿cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado, se obtenga un número par?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{2}{3}$

16. Una bandeja contiene 25 canapés de palmito, 45 canapés de camarones y 30 canapés de jamón serrano, todos de igual peso y tamaño. Si se extrae un canapé al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ese canapé NO sea de jamón serrano?

A) $\frac{7}{10}$

B) $\frac{3}{7}$

C) $\frac{3}{10}$

D) $\frac{1}{30}$

E) $\frac{1}{70}$

17. En una caja se encuentran círculos de papel de igual peso y tamaño donde están escritas las letras de la palabra CUADERNOS. Al extraer un papel al azar, la probabilidad de que esté escrita una consonante es:

A) $\frac{4}{5}$

B) $\frac{5}{9}$

C) $\frac{4}{9}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{1}{9}$

18. En una bolsa se encuentran 4 cubos blancos, 7 cubos azules y 9 cubos amarillos, todos de igual peso y tamaño. Si se extrae un cubo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que éste sea azul?

A) $\frac{13}{20}$

B) $\frac{7}{13}$

C) $\frac{7}{20}$

D) $\frac{1}{7}$

E) $\frac{1}{20}$

19. Al lanzar un dado común, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. La probabilidad de obtener un divisor de 6 es $\frac{1}{3}$

II. La probabilidad de obtener un múltiplo de 6 es $\frac{1}{6}$

III. La probabilidad de obtener un número primo es igual a la probabilidad de obtener un número impar

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo II y III
E) I, II y III

20. Una ruleta tiene 36 sectores circulares iguales numerados del 1 al 36. Se puede determinar la probabilidad de que salga un número par o un número de color blanco si:

(1) La probabilidad de que salga un número azul es $\frac{1}{4}$

(2) La ruleta está dividida en 4 sectores iguales donde los 9 primeros son rojos, los 9 siguientes azules, los otros 9 blancos y los 9 restantes negros

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

21. Si se lanzan tres monedas normales al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 caras y 1 sello?

A) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{3}{8}$

E) $\frac{1}{3}$

22. Una bolsa contiene 4 bolas blancas, 5 bolas rojas y 11 bolas negras. Si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca o roja?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{20}$

D) $\frac{9}{20}$

E) $\frac{11}{20}$

23. Una compañía de seguros debe elegir a una persona para desempeñar cierta función de entre 50 aspirantes. Entre los candidatos, algunos tienen título universitario, otros poseen experiencia previa en el área de seguros y algunos cumplen ambos requisitos, como se indica en la tabla. Si se elige un aspirante al azar entre los 50, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

| | Título | Sin Título |
|---|---|---|
| Con Experiencia | 5 | 10 |
| Sin Experiencia | 15 | 20 |

I. La probabilidad de que el elegido tenga experiencia es $\frac{3}{10}$

II. La probabilidad de que el elegido tenga título es $\frac{2}{5}$

III. La probabilidad de que el elegido no tenga experiencia es $\frac{5}{10}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

24. De un grupo de 20 personas les que gustan las empanadas, sólo a 5 de ellas le gustan con ají. Si se eligen dos personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que a ambas les gusten las empanadas con ají?

A) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{4}{19}$

D) $\frac{1}{19}$

E) $\frac{1}{20}$

25. Se tienen 2 cajas, una con 4 bolas blancas y 2 negras y la otra con 3 blancas y 5 negras. Si se saca una bola de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{3}$

E) $\frac{1}{2}$

26. Se tiene un naipe inglés (52 cartas). Si se extrae una carta al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar un seis o un as?

A) $\frac{1}{52} \cdot \frac{1}{52}$

B) $\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13}$

C) $\frac{1}{52} + \frac{1}{52}$

D) $\frac{1}{13} + \frac{1}{13}$

E) Ninguna de las probabilidades anteriores

27. La probabilidad de extraer una bola roja de una caja es $\frac{1}{4}$. La probabilidad de extraer una bola azul se puede calcular si:

(1) El total de bolas que hay en la caja es 12

(2) En la caja sólo hay bolas rojas, blancas y azules

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

28. En un curso hay 15 hombres y 20 mujeres. Se sabe que 12 de esos hombres y 14 de esas mujeres prefieren pastel de selva negra y el resto prefiere pastel de piña. Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esa persona sea hombre y prefiera pastel de piña?

A) $\frac{1}{35}$

B) $\frac{3}{35}$

C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{4}$

E) Ninguna de las probabilidades anteriores

29. Se hace girar 100 veces una ruleta que está dividida en 8 sectores iguales y se obtienen los siguientes resultados:

| Número | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia | 10 | 12 | 15 | 11 | 16 | 15 | 9 | 12 |

De acuerdo a la tabla de frecuencia, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. La probabilidad de obtener un número impar es de un 50 %
II. La probabilidad de obtener los números 1 ó 3 es de un 25%.
III. La probabilidad de obtener el números 6 es de un 15%

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

30. La tabla muestra la venta de dos tipos de hortalizas en una feria el día domingo, separados por color. Si se elige una hortaliza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea o bien un pimentón de cualquier color o bien cualquier hortaliza de color verde?

| | Verde | Rojo |
|---|---|---|
| Ají | 48 | 34 |
| Pimentón | 55 | 36 |

A) $\frac{139}{173}$

B) $\frac{55}{91}$

C) $\frac{55}{103}$

D) $\frac{55}{173}$

E) Ninguna de las probabilidades anteriores

31. Sean los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6. Entonces, ¿cuántos números pares de tres cifras distintas se pueden formar?

A) 60
B) 72
C) 90
D) 108
E) 120

32. En el lanzamiento de una moneda de $ 100 y una de $ 50, la probabilidad de obtener cara en la de cien y sello en la de cincuenta es:

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{3}{4}$

E) 1

33. En un experimento aleatorio E, dos eventos A y B son complementarios si:

(1) Al unir los conjuntos A y B se obtiene el espacio muestral
(2) La intersección de A y B es vacía

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

34. Al lanzar tres dados comunes, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres dos?

A) $\frac{1}{216}$

B) $\frac{1}{72}$

C) $\frac{1}{18}$

D) $\frac{1}{6}$

E) Ninguna de las probabilidades anteriores

35. Se tienen 3 estuches P, Q y R. El estuche P contiene 3 lápices de pasta azul y 4 lápices de mina, el estuche Q contiene 5 lápices de pasta azul y 7 lápices de mina y el estuche R contiene 8 lápices de pasta azul y 2 lápices de mina, todos de igual peso y tamaño Si se extrae al azar un lápiz de cada estuche, ¿cuál es la probabilidad de que los tres lápices sean de pasta azul?

A) $\frac{1}{840}$

B) $\frac{3}{29} \cdot \frac{5}{29} \cdot \frac{8}{29}$

C) $\frac{1}{7}$

D) $\frac{16}{29}$

E) Ninguna de las probabilidades anteriores

36. Al elegir un alumno al azar de un determinado curso, se puede determinar la probabilidad de que sea hombre si:

(1) La mitad de los alumnos del curso son mujeres

(2) El curso tiene 40 alumnos

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

37. Se tiene un naipe inglés (52 cartas). Si se extraen dos cartas al azar, con reposición, ¿cuál es la probabilidad de sacar un nueve y un káiser?

A) $\left(\frac{1}{52}\right)^2$

B) $\left(\frac{4}{52}\right)^2$

C) $\frac{2}{52}$

D) $\frac{8}{52}$

E) Ninguna de las probabilidades anteriores

38. Se tiene un naipe inglés (52 cartas). Si se extraen dos cartas al azar, sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de sacar un cinco y un as?

A) $\frac{4}{52}+\frac{4}{52}$

B) $2\cdot\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{51}$

C) $\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{51}$

D) $2\cdot\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{52}$

E) $\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}$

F) Ninguna de las probabilidades anteriores

39. Si se lanzan simultáneamente 2 dados, ¿cuál es la probabilidad que la suma de sus caras sea 5 u 11?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{6}$

C) $\frac{1}{9}$

D) $\frac{1}{12}$

E) Ninguna de las probabilidades anteriores

40. Si en un experimento se observa que un evento sucede en q de los casos y NO sucede en r de los mismos casos, entonces ¿Cuál es la probabilidad de que el evento suceda?

A) $\frac{q}{q+r}$

B) $\frac{r}{q+r}$

C) $\frac{r}{q}$

D) $\frac{q}{r}$

E) $1 - r$

41. Si se usan los dígitos {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7}. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar sin que se repitan los dígitos?

A) 21

B) 128

C) 210

D) 343

E) 5.040

42. ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar cuatro libros de física, tres de química y cinco de matemática en un estante lineal, si los libros de cada asignatura deben estar siempre juntos?

A) $4! \cdot 3! \cdot 5!$

B) $4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3!$

C) $4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3$

D) $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$

E) $12!$

43. En un curso se crea un comité formado por 7 alumnos. ¿De cuántas maneras se pueden completar los puestos de presidente, vicepresidente, secretario y tesorero en dicho comité?

A) 28

B) 35

C) 840

D) 1.680

E) 5.040

44. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. El experimento "lanzar cuatro veces una moneda", tiene un espacio muestral de 4 elementos
II. El espacio muestral del suceso "Lanzar dos monedas distintas", tiene 3 elementos
III. El complemento del espacio muestral es el conjunto vacío

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) Solo I y III

45. En una canasta hay una docena de manzanas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede escoger 3 manzanas?

A) 220
B) 110
C) 36
D) 440
E) 20.736

46. En una pared se deben colocar 7 cuadros de distinto tamaño en línea, de modo que el más grande debe ubicarse en el centro. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

A) 360
B) 720
C) 1.440
D) 2.520
E) 5.040

47. Se lanzan tres monedas no cargadas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener valores alternados?

A) $\frac{1}{8}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{3}{4}$

48. En una urna hay 14 fichas, en total, de colores blanco, rojo y negro. Si hay 5 fichas blancas y la probabilidad de sacar una ficha blanca o negra es $\frac{4}{7}$ entonces ¿Cuántas fichas son negras?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 7

49. Al lanzar dos dados, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. La probabilidad de obtener dos números pares es $\frac{5}{36}$

II. La probabilidad de obtener dos números primos es $\frac{1}{2}$

III. La probabilidad de obtener dos números iguales es $\frac{1}{6}$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

50. La tabla, muestra la experiencia laboral que tienen los postulantes a una empresa de seguros. Si de este grupo se elige una persona al azar, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

| | Con Experiencia | Sin experiencia |
|---|---|---|
| Masculino | 150 | 30 |
| Femenino | 50 | 20 |

I. La probabilidad de que sea varón es de $\frac{180}{250}$

II. La probabilidad de que sea mujer es de $\frac{70}{180}$

III. La probabilidad de que tenga experiencia laboral es de $\frac{200}{250}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y III
E) Solo II y III

51. Siete libros (todos con tapas de distintos colores) se deben ubicar uno al lado del otro en un estante. Si el libro de tapa roja se debe colocar en uno de los extremos, y el libro de tapa verde en el otro extremo, ¿de cuántas maneras se pueden ubicar los libros?

A) 35
B) 120
C) 240
D) 720
E) 1.440

52. Si se escoge un número al azar entre los primeros 30 números naturales, ¿cuál es la probabilidad de que éste sea un número primo?

A) $\frac{1}{30}$

B) $\frac{1}{10}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{11}{30}$

E) $\frac{2}{3}$

53. ¿Cuántas palabras con o sin sentido se pueden hacer con todas las letras de la palabra TAPA?

A) 3
B) 6
C) 12
D) 24
E) 48

54. Al lanzar al aire dos dados, uno a continuación del otro, de distintos colores, se observa que la suma de los números que aparecen es de por lo menos siete. La probabilidad de que en el segundo dado aparezca el cuatro es:

A) $\frac{4}{21}$

B) $\frac{5}{21}$

C) $\frac{6}{21}$

D) $\frac{7}{21}$

E) $\frac{8}{21}$

55. Se tiene una bolsa con bolitas numeradas del 1 al 20, todas de igual peso y tamaño. Si se extrae una bolita al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar un número impar o un número múltiplo de 8?

A) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{11}{20}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{10}$

E) Ninguna de las probabilidades anteriores

56. Se tiene un naipe inglés (52 cartas). Si se extraen dos cartas al azar y al mismo tiempo, ¿cuál es la probabilidad que las dos sean de la misma pinta?

A) $\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}$

B) $4\left(\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}\right)$

C) $\left(\frac{13}{52}\right)^2 + \left(\frac{13}{52}\right)^2 + \left(\frac{13}{52}\right)^2 + \left(\frac{13}{52}\right)^2$

D) $\left(\frac{13}{52}\right) + \left(\frac{13}{52}\right)$

E) $\left(\frac{13}{52}\right) + \left(\frac{13}{52}\right) + \left(\frac{13}{52}\right) + \left(\frac{13}{52}\right)$

57. Una caja contiene 3 esferas verdes y 2 amarillas. Si se sacan sucesivamente 2 esferas, sin devolverlas a la caja, ¿cuál es la probabilidad de que éstas sean de distinto color?

A) $\frac{3}{10}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{7}{10}$

E) Ninguna de las anteriores

58. Si se forman palabras de 5 letras (con o sin significado), con las letras de la palabra PROTEGIDA, entonces ¿Cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?

I. 120 palabras sólo contienen consonantes
II. 720 palabras comienzan con dos vocales consecutivas
III. 210 palabras comienzan con R y terminan en E

A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

59. ¿De cuántas formas se pueden repartir 2 premios entre 25 personas, si se sabe que ambos pueden ser concedidos a una misma persona?

A) $2^{25}$ formas
B) 25 formas
C) 50 formas
D) 600 formas
E) 625 formas

60. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden formar con los ocho vértices de un octágono regular?

A) 336

B) 168

C) 112

D) 56

E) 28

61. De los 4.500 alumnos de una Universidad, la probabilidad de que un alumno sea egresado es $\frac{1}{50}$ , ¿cuántos NO egresados tiene la Universidad?

A) 4.410
B) 4.300
C) 4.210
D) 3.900
E) 3.600

62. En una tómbola hay 80 bolitas de igual peso y tamaño, de las cuales 26 son azules, 24 son blancas y el resto son rojas. Si se extraen 4 bolitas al azar, ¿cuál es la probabilidad de extraer una bolita azul, una blanca, una roja y nuevamente una azul, en ese orden y sin reposición?

A) $\frac{26}{80} + \frac{24}{79} + \frac{30}{78} + \frac{25}{77}$

B) $\frac{26}{80} + \frac{24}{80} + \frac{30}{80} + \frac{25}{80}$

C) $\frac{26}{80} \cdot \frac{24}{79} \cdot \frac{30}{78} \cdot \frac{26}{77}$

D) $\frac{26}{80} \cdot \frac{24}{79} \cdot \frac{30}{78} \cdot \frac{25}{77}$

E) $\frac{26}{80} \cdot \frac{24}{80} \cdot \frac{30}{80} \cdot \frac{26}{80}$

63. ¿De cuántas maneras distintas pueden ordenarse 6 personas en una fila?

A) 46.656
B) 720
C) 36
D) 30
E) 21

64. En una panadería hay 18 hombres y 22 mujeres. Se sabe que 13 de esos hombres y 10 de esas mujeres prefieren empanadas de pino y el resto prefiere empanadas de queso. Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esa persona sea hombre y prefiera las empanadas de queso?

A) $\frac{1}{40}$

B) $\frac{1}{8}$

C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{5}{18}$

E) $\frac{5}{17}$

65. Las combinaciones distintas que hay para los resultados de un juego de lotería, se pueden determinar si:

(1) El universo tiene 36 números

(2) Se eligen 6 números

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

66. ¿De cuántas maneras distintas pueden ordenarse 4 personas dentro de un auto sabiendo que sólo una de ellas puede manejar?

A) 6
B) 9
C) 16
D) 24
E) 27

67. Se puede saber el número de formas que se puede repartir dos premios en un grupo de personas si:

(1) El grupo está conformado por dos hombres y tres mujeres
(2) Una persona no puede recibir los dos premios

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

68. Si una línea aérea tiene 11 destinos y una persona compra un pasaje en que aparece el lugar de origen y de destino, ¿cuántos pasajes distintos habrá?

A) 55
B) 72
C) 110
D) 121
E) 144

69. Si se extrae una ficha al azar de una caja que contiene 50 de ellas, todas de igual peso y tamaño, se puede determinar la probabilidad de que ésta sea verde si:

(1) En la caja sólo hay fichas verdes y rojas

(2) En la caja hay 20 fichas verdes

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

70. El experimento aleatorio E tiene sólo dos sucesos P y Q asociados a su espacio muestral S. Para saber si los sucesos P y Q son equiprobables se dispone de la siguiente información:

(1) La probabilidad del suceso P es de un 50%

(2) P y Q son dos sucesos mutuamente excluyentes

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

71. Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea impar dado que es divisible por 6?

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{2}{3}$

72. Una madre le dice a su hijo en la verdulería: “Puedes escoger 3 frutas para el paseo“. En la verdulería hay disponibles manzanas, peras, naranjas, kiwis y plátanos, y de cada fruta hay más de tres unidades. Si el hijo elige tres frutas, ¿de cuántas maneras distintas puede elegir las frutas para el paseo?

A) 3
B) 10
C) 15
D) 20
E) 35

73. Si una persona tiene 5 hijos, ¿cuál es la probabilidad de que 3 sean hombres y 2 sean mujeres?

A) $\frac{1}{32}$

B) $\frac{5}{32}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{5}{16}$

74. Se lanzan dos dados normales. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los valores obtenidos sea igual a su producto?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{1}{18}$

E) $\frac{1}{36}$

75. A un 35% de los alumnos de un curso le gusta el grupo musical “El rey”; a un 30%, del grupo “Sonora on fire”, y a un 15% le gusta ambos grupos. La probabilidad de que al elegir un alumno al azar, sea seguidor de “Sonora on fire”, sabiendo que le gusta escuchar a “El rey” es, aproximadamente:

A) 0,105
B) 0,429
C) 0,500
D) 2,333
E) 0,857

76. Se tienen tres bandejas de bombones, la primera contiene 15 bombones de trufa y 13 bombones de mazapán, la segunda bandeja contiene 18 bombones de trufa y 12 bombones de mazapán y la tercera bandeja contiene 16 bombones de trufa y 16 bombones de mazapán. Si se saca al azar un bombón de cada bandeja respectivamente, la probabilidad de que el primero sea de trufa, el segundo de mazapán y el tercero de trufa es:

A) $\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16}$

B) $\frac{15}{90} \cdot \frac{12}{90} \cdot \frac{16}{90}$

C) $\frac{3}{28}$

D) $\frac{43}{90}$

E) Ninguna de las probabilidades anteriores

77. En la tabla adjunta se muestran los resultados de una encuesta realizada a 80 personas, sobre la preferencia de frutas entre peras y mandarinas. Al seleccionar a uno de estos encuestados al azar, la probabilidad de que este prefiera una pera, sabiendo que es hombre, es:

| | **Fruta** | |
|---|---|---|
| | Pera | Mandarina |
| Hombre | 20 | 15 |
| Mujer | 10 | 35 |

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{3}{7}$

E) $\frac{4}{7}$

78. Se tienen 5 bolitas blancas y 3 negras en una urna y 5 blancas y 7 negras en otra urna. ¿Cuántas bolitas blancas es necesario traspasar desde una urna a la otra para que la probabilidad de sacar una bolita negra sea la misma en ambas urnas?

A) 5
B) 4
C) 3
D) 2
E) 1

79. Si el número de combinaciones de n objetos tomados de dos en dos es igual a 36, ¿cuál es el valor de n?

A) 3
B) 6
C) 9
D) 12
E) 18

80. ¿De cuántas maneras diferentes se puede escoger un comité por dos hombres y tres mujeres, de un grupo de cuatro hombres y cinco mujeres?

A) 90
B) 80
C) 72
D) 60
E) 45

# CAPÍTULO 24

## RESPUESTAS

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. C | 1. D | 21. D | 41. C | 61. A |
| 2. C | 2. C | 22. D | 42. B | 62. D |
| 3. C | 3. A | 23. C | 43. C | 63. B |
| 4. D | 4. D | **24. D** | 44. C | 64. B |
| 5. A | **5. C** | 25. C | 45. A | 65. E |
| 6. A | 6. D | 26. D | 46. B | 66. A |
| 7. E | 7. B | 27. E | 47. B | 67. C |
| 8. C | 8. C | 28. B | 48. B | 68. C |
| 9. A | 9. C | 29. E | 49. B | 69. B |
| 10. C | 10. B | 30. A | 50. D | 70. C |
| 11. E | 11. B | 31. A | 51. C | 71. D |
| 12. E | 12. A | 32. A | 52. C | 72. E |
| 13. A | 13. D | 33. C | 53. C | 73. E |
| 14. B | 14. D | 34. A | 54. A | 74. E |
| 15. D | 15. A | **35. C** | 55. A | 75. B |
| 16. C | 16. A | 36. A | 56. B | **76. C** |
| 17. B | 17. B | 37. B | **57. C** | 77. E |
| 18. D | 18. C | 38. B | 58. C | 78. D |
| 19. E | 19. D | 39. B | 59. E | 79. C |
| 20. C | 20. B | 40. A | 60. D | 80. D |

PIENSA COMO NACIONAL

## CAPÍTULOS