

Résolution numérique d'une EDS : étude d'erreur et simulation

Alois Marechal et Pineau Benjamin

1 Introduction au problème d'intérêt

On se place dans l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on le muni de la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. On notera W un mouvement brownien standard (m.b.s) adapté à la filtration \mathcal{F} . On s'intéresse à l'approximation numérique d'un processus numérique de diffusion X défini sur $I = [0, T]$, $T > 0$ solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) monodimensionnelle définie par

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad \forall t \in]0, T] \quad (1)$$

où l'état initial du processus est $X_0 \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_0)$, $b : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}$ est le terme de dérive et $\sigma : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est le terme de diffusion.

1.1 Hypothèses et solution forte

Dans le reste du problème, on suppose qu'il existe une constante $0 < K < +\infty$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in I$,

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K |x - y| \quad (2)$$

et

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq (1 + |x|) \quad (3)$$

Enfin, on suppose que b et σ sont 1/2-Höldérienne, c'est à dire que $\forall t, s \in I$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|b(t, x) - b(s, x)| + |\sigma(t, x) - \sigma(s, x)| \leq K |t - s|^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Sous les hypothèses (2) - (3), le problème (1) admet une unique solution forte dans l'intervalle I . On admettra que cette solution vérifie l'estimation a priori suivante :

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in I} |X_t|^2 \right) < C(1 + \mathbb{E}(X_0^2)) \quad (5)$$

1.2 Discrétisation

Considérons un maillage uniforme $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ de $[0, T]$ avec $t_n = n\Delta t$, $n = 0, \dots, N$ où $\Delta t = \frac{T}{N}$ désigne le pas de discrétisation. On rappelle que l'approximation X_n de X_{t_n} , aux temps t_n , $n = 1, \dots, N$, obtenue par le schéma d'Euler-Maruyama est définie par

$$X_{n+1} = X_n + b(t_n, X_n) \Delta t + \sigma(t_n, X_n) \Delta W_n \quad (6)$$

pour $\Delta W_s = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$. A partir des valeurs obtenues $\{X_0, \dots, X_n\}$, on peut reconstruire par interpolation linéaire le processus approché, continu en temps, $X^{\Delta t}$ sur I donné par

$$X_s^{\Delta t} = X_n + b_n(s - t_n) + \sigma_n(W_n - W_{t_n}), \quad s \in [t_n, t_{n+1}]^2$$

où $b_n = b(t_n, X_n)$ et $\sigma_n = \sigma(t_n, X_n)$. Ainsi, par construction on a $X_{t_n}^{\Delta t} = X_n$ pour $n = 0, 1, \dots, N$

1. On va montrer qu'il existe une constante strictement positive $C_1 := C_1(C, K, T, \mathbb{E}(X_0^2)) < \infty$ telle que pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\mathbb{E} \left((X_t - X_s)^2 \right) \leq C_1(t - s)$$

2 Etude d'erreur

2.1 Erreur de convergence forte

Dans cette section, on considère $t \in [t_{n-1}, t_n[$

1. On pose $\mathcal{E}_t = \mathbb{E}((X_t - X_t^{\Delta t}))$ et $Z_t = X_t - X_t^{\Delta t}$. Montrons que

$$dZ_t = \alpha(t)dt + \beta(t)dW_t \quad (7)$$

où $\alpha(t) = b(t, X_t) - b_{n-1}$ et $\beta(t) = \sigma(t, X_t) - \sigma_{n-1}$

Dans un premier temps, par linéarité on a : $dZ_t = dX_t - dX_t^{\Delta t} = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t - dX_t^{\Delta t}$, puis étant donné que $b_{n-1} = b(t_{n-1}, X_{n-1})$ est constant (de même pour σ)

$$\begin{aligned} dX_t^{\Delta t} &= b_{n-1}d(t - t_{n-1}) + \sigma_{n-1}d(W_t - W_{t_{n-1}}) \\ &= b_{n-1}dt + \sigma_{n-1}dW_t \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{dZ_t = \alpha(t)dt + \beta(t)dW_t}$$

2. On note à présent $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{t_n}$.

L'intégration par partie sous forme différentielle donne :

$$\begin{aligned} d(Z_t)^2 &= 2Z_t dZ_t + d\langle Z, Z \rangle_t \\ &= 2Z_t(\alpha(t)dt + \beta(t)dW_t) + \beta(t)^2 dt \\ &\leq Z_t^2 dt + \alpha(t)^2 dt + Z_t^2 dW_t + \beta(t)^2 dW_t + \beta(t)^2 dt \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. On prend alors la dernière inégalité et on intègre entre t et t_{n-1} . On obtient

$$Z_t^2 - Z_{t_{n-1}}^2 \leq \int_{t_{n-1}}^t [Z_t^2 + \alpha(t)^2 + \beta(t)^2] dt + \int_{t_{n-1}}^t [Z_t^2 + \beta(t)^2] dW_t$$

On passe ensuite à l'espérance, et on rappelle que pour un processus H_t , on a $\mathbb{E}(\int_0^t H_s dW_s) = 0$ ce

qui implique pour $t_{n-1} \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\int_{t_{n-1}}^t H_s dW_s) = \mathbb{E}(\int_0^t H_s dW_s) - \mathbb{E}(\int_0^{t_{n-1}} H_s dW_s) = 0$

Bilan :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_t^2 - Z_{t_{n-1}}^2) &= \mathcal{E}_t - \mathcal{E}_{n-1} \leq \mathbb{E}\left(\int_{t_{n-1}}^t [Z_t^2 + \alpha(t)^2 + \beta(t)^2] dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_{t_{n-1}}^t [Z_t^2 + \beta(t)^2] dW_t\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_{t_{n-1}}^t [Z_t^2 + \alpha(t)^2 + \beta(t)^2] dt\right) \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'établir le résultat suivant :

$$\boxed{\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_{n-1} \leq \mathbb{E}\left(\int_{t_{n-1}}^t [Z_t^2 + \alpha(t)^2 + \beta(t)^2] dt\right)}$$

3. On remarque que $\alpha(s) = [b(s, X_s) - b(s, X_{t_{n-1}})] + [b(s, X_{t_{n-1}}) - b(t_{n-1}, X_{t_{n-1}})] + [b(t_{n-1}, X_{t_{n-1}}) - b(t_{n-1}, X_{n-1})]$ (il en est de même pour β)

d'où $|\alpha(s)| \leq |b(s, X_s) - b(s, X_{t_{n-1}})| + |b(s, X_{t_{n-1}}) - b(t_{n-1}, X_{t_{n-1}})| + |b(t_{n-1}, X_{t_{n-1}}) - b(t_{n-1}, X_{n-1})|$
On somme ensuite α et β , et on utilise les relations (2) et (4) :

$$|\alpha(t)| + |\beta(t)| \leq K(|X_s - X_{t_{n-1}}| + |s - t_{n-1}|^{1/2} + |X_{t_{n-1}} - X_{n-1}|)$$

Ainsi, en observant que $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ et $|a|^2 + |b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$, on peut déduire que :

$$|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 \leq 3K^2(|X_s - X_{t_{n-1}}|^2 + |s - t_{n-1}| + |X_{t_{n-1}} - X_{n-1}|^2)$$

4. On rappelle le lemme de Gronwall :

Lemma 1 Soit $\psi \geq 0$ et ϕ des fonctions continues qui vérifient :

$$\forall \geq t_0, \quad \phi(t) \leq K + \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds$$

où K est une constante. Alors :

$$\forall \geq t_0, \quad \phi(t) \leq K \exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right)$$

On considère l'espérance comme un calcul d'intégrale, et on applique le théorème de Fubini positif pour inverser intégrale et espérance. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t - \mathcal{E}_{n-1} &\leq \int_{t_{n-1}}^t \mathbb{E}(Z_s^2)ds + 3K^2\left(\int_{t_{n-1}}^t \mathbb{E}(|X_s - X_{t_{n-1}}|^2)ds + \int_{t_{n-1}}^t |s - t_{n-1}|ds + \int_{t_{n-1}}^t \mathbb{E}(|X_{t_{n-1}} - X_{n-1}|^2)ds\right) \\ &\leq \int_{t_{n-1}}^t \mathcal{E}_s ds + 3K^2 \int_{t_{n-1}}^t \mathcal{E}_{n-1} ds + 3K^2 \left[\int_{t_{n-1}}^t (1 + C_1)(s - t_{n-1})ds \right] \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité $\mathbb{E}((X_t - X_s)^2) \leq C_1(t - s)$ sur la pièce $|X_s - X_{t_{n-1}}|$ et en remarquant que $|s - t_{n-1}| = s - t_{n-1}$ pour $s \geq t_{n-1}$.

On pose $C_2 = 3K^2(1 + C_1)$, $C_3 = 3K^2$ et on obtient une nouvelle inégalité :

$$\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_{n-1} \leq \int_{t_{n-1}}^t \mathcal{E}_s ds + C_3 \int_{t_{n-1}}^t \mathcal{E}_{n-1} ds + \int_{t_{n-1}}^t C_2(s - t_{n-1})ds$$

Enfin, on a

$$\begin{cases} \int_{t_{n-1}}^t C_2(s - t_{n-1})ds \leq C_2 \Delta t^2 \\ \int_{t_{n-1}}^t C_3 \mathcal{E}_{n-1} ds \leq C_3 \Delta t \mathcal{E}_{n-1} \end{cases}$$

donc

$$\mathcal{E}_t \leq \mathcal{E}_{n-1}(1 + C_3 \Delta t) + C_2 \Delta t^2 + \int_{t_{n-1}}^t \mathcal{E}_s ds$$

d'après le lemme de Gronwall, on a finalement

$$\mathcal{E}_t \leq \exp(t - t_{n-1})[\mathcal{E}_{n-1}(1 + C_3 \Delta t) + C_2 \Delta t^2]$$

5. On note $a = \exp(\Delta t)C_2 \Delta t^2$ et $b = \exp(\Delta t)(1 + \Delta t C_3)$, et on prend $t = t_n$ dans l'inégalité précédente :

$$\mathcal{E}_{n-1} \leq a + \mathcal{E}_n b$$

On va montrer la propriété suivante par récurrence :

$$\mathcal{E}_n \leq a \frac{b^n - 1}{b - 1} \quad (8)$$

Initialisation : On a $\mathcal{E}_1 \leq a + \mathcal{E}_0 b = a$

Hérédité : Soit n tel que la propriété soit vérifiée. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n+1} &\leq a + a \frac{b^n - 1}{b - 1} b \\ &= a \left(1 + b \frac{b^n - 1}{b - 1}\right) \\ &= a \left(\frac{b - 1 + b^{n+1} - b}{b - 1}\right) = a \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1} \end{aligned}$$

ce qui permet d'affirmer la propriété énoncé par récurrence. De plus, on sait que $b = \exp(\Delta t)(1 + \Delta t C_3) > 1$ car $\exp(\Delta t) > 1$ et $(1 + C_3 \Delta t) > 1$. Donc $\forall n \leq N$, $b^n \leq b^N$. On peut en déduire que

$$\boxed{\mathcal{E}_n \leq a \frac{b^N - 1}{b - 1} \quad \forall n \leq N}$$

6. Un équivalent de l'exponentielle peut s'écrire $\exp(x) \sim 1 + x$. De ce fait :

$$\mathcal{E}_n \lesssim \frac{(1 + \Delta t)C_2 \Delta t^2}{(1 + \Delta t)(1 + C_3 \Delta t) - 1} (b^N - 1)$$

et par définition de b et en utilisant l'équivalence :

$$b^N = \exp(\Delta t N)(1 + C_3 \Delta t)^N \sim \exp(\Delta t N) \exp(C_3 \Delta t N) = \exp(1 + C_3)T$$

On constate également que

$$(1 + \Delta t)(1 + C_3 \Delta t) - 1 = \Delta t(1 + C_3 + C_3 \Delta t) \geq \Delta t(1 + C_3)$$

Ce qui permet d'arriver au résultat suivant :

$$\boxed{\mathcal{E}_n \lesssim \frac{(1 + \Delta t)C_2 \Delta t}{1 + C_3} (\exp(1 + C_3)T - 1)}$$

En posant $A = \frac{C_2}{1 + C_3} (\exp(1 + C_3)T - 1) \in \mathbb{R}$, on a donc $\mathcal{E}_n \lesssim A \Delta t + A \Delta t^2$, d'où

$$\boxed{\mathcal{E}_n \lesssim \mathcal{O}(\Delta t)}$$

2.2 Erreur de convergence faible

Dans cette question, on introduit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et lipschitzienne, i.e. il existe $0 < L < \infty$ t.q.

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

On suppose également que l'EDP suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + b(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) + \frac{\sigma^2(t, x)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ u(T, x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (9)$$

admet une unique solution $u : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{1,2}(I \times \mathbb{R})$. On supposera que u a ses dérivées bornées, et que

$$\{\sigma(t, X_t) \partial_x u(t, X_t)\}_{t \in [0, T]} \in \Lambda^2([0, T])$$

1. L'erreur de convergence faible notée e_t est :

$$e_t = \mathbb{E}(|f(X_T) - f(X_t^{\Delta t})|) \leq L \mathbb{E}(|X_T - X_t^{\Delta t}|)$$

Cependant

$$\mathcal{O}(\Delta t) \gtrsim \sup_{t \in I} \mathbb{E} \left(\|X_t - X_t^{\Delta t}\| \right) \geq \mathbb{E} \left(\|X_t - X_t^{\Delta t}\|^2 \right) \geq \mathbb{E} \left(\|X_t - X_t^{\Delta t}\| \right)^2$$

donc l'erreur de convergence forte est d'ordre 1/2.

On sait également que convergence forte \implies convergence faible pour f lipschitzienne, ce qui permet de déduire que la convergence faible est au moins d'ordre 1/2.

2. Soit $E_n = \mathbb{E}(u(t_{n+1}, X_{n+1}) - u(t_n, X_n))$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}(u(t_{n+1}, X_{n+1}) - u(t_n, X_n))$$

Par linéarité de l'espérance, et par télescopage, on a :

$$\sum_{n=0}^{N-1} E_n = \mathbb{E}(u(t_N, X_N) - u(t_0, X_0))$$

Et:

$$\begin{aligned} e_t &:= \mathbb{E}(f(X_T) - f(X_t^{\Delta t})) = \mathbb{E}(f(X_T) - f(X_N)) \\ e_t &:= \mathbb{E}(u(T, X_T) - u(T, X_N)) = e_t := \mathbb{E}(u(T, X_T)) - \mathbb{E}(u(T, X_N)) \end{aligned}$$

Montrons que $\mathbb{E}(u(T, X_T)) = \mathbb{E}(u(t_0, X_0))$

Utilisons la formule d'Ito:

$$du(t, X_t) = \partial_t u(t, X_t)dt + \partial_x u(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\partial_{x^2}u(t, X_t)d\langle X_t, X_t \rangle$$

et

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad d\langle X_t, X_t \rangle = \sigma(t, X_t)^2 dt$$

Or u vérifie **9**, il reste donc :

$$du(t, X_t) = \partial_x u(t, X_t)\sigma(t, X_t)dW_t$$

En intégrant de 0 à T et en prenant l'espérance le terme de droite devient nul car W_t est un m.b.s

$$\mathbb{E}(u(T, X_T)) - \mathbb{E}(u(t_0, X_0)) = 0$$

Soit finalement:

$$e_t = - \sum_{n=0}^{N-1} E_n$$

3. On reprend la formule de Ito:

$$du(t, X_t^{\Delta t}) = \partial_t u(t, X_t^{\Delta t})dt + \partial_x u(t, X_t^{\Delta t})dX_t^{\Delta t} + \frac{1}{2}\partial_{x^2}u(t, X_t^{\Delta t})d\langle X_t^{\Delta t}, X_t^{\Delta t} \rangle$$

et

$$dX_t^{\Delta t} = b_n dt + \sigma_n dW_t \quad d\langle X_t^{\Delta t}, X_t^{\Delta t} \rangle = \sigma_n^2 dt$$

On intègre entre t_n et t_{n+1} et on prend l'espérance, les termes en dW_t disparaissent et cela donne :

$$E_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{E}(\partial_t u(t, X_t^{\Delta t}) + b_n \partial_x u(t, X_t^{\Delta t}) + \frac{\sigma_n^2}{2} \partial_{x^2} u(t, X_t^{\Delta t}))$$

ainsi en posant la fonction $e(t, x) \rightarrow (\partial_t + \frac{\sigma_n^2}{2} \partial_{x^2} + b_n \partial_x)u(t, x)$ On obtient bien :

$$E_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{E}(e(t, X_t^{\Delta t}))$$

4. On applique la formule de Ito à e :

$$de(t, X_t^{\Delta t}) = \partial_t e(t, X_t^{\Delta t})dt + \partial_x e(t, X_t^{\Delta t})dX_t^{\Delta t} + \frac{1}{2}\partial_{x^2}e(t, X_t^{\Delta t})d\langle X_t^{\Delta t}, X_t^{\Delta t} \rangle$$

et on a toujours

$$dX_t^{\Delta t} = b_n dt + \sigma_n dW_t \quad d\langle X_t^{\Delta t}, X_t^{\Delta t} \rangle = \sigma_n^2 dt$$

On pose la fonction $\bar{e}(t, x) \rightarrow (\partial_t + \frac{\sigma_n^2}{2} \partial_{x^2} + b_n \partial_x)e(t, x)$. On intègre entre t_n et t et on prend l'espérance, les termes en dW_t disparaissent et cela donne :

$$\mathbb{E}(e(t, X_t^{\Delta t}) - e(t_n, X_{t_n}^{\Delta t})) = \int_{t_n}^t \mathbb{E}(\bar{e}(t, X_t^{\Delta t}))$$

On obtient alors :

$$\mathbb{E}(e(t, X_t^{\Delta t})) = \int_{t_n}^t \mathbb{E}(\bar{e}(t, X_t^{\Delta t}))$$

Prenons la valeur absolue

$$|E_n| = \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma_n^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_n \frac{\partial}{\partial x} \right) e(s, X_s^{\Delta}) \right] ds dt \right|.$$

En intervertissant l'ordre des intégrales :

$$|E_n| = \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma_n^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_n \frac{\partial}{\partial x} \right) e(s, X_s^{\Delta}) \right] \int_s^{t_{n+1}} dt ds \right|.$$

Le terme intérieur $\int_s^{t_{n+1}} dt$ vaut $t_{n+1} - s \leq \Delta t$, donc en appliquons l'inégalité triangulaire :

$$|E_n| \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma_n^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_n \frac{\partial}{\partial x} \right) e(s, X_s^{\Delta}) \right] \right| \Delta t ds.$$

Or on a supposé que u et donc que e et ses dérivées sont bornées, on peut donc écrire :

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma_n^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_n \frac{\partial}{\partial x} \right) e(s, X_s^{\Delta}) \right| \leq C.$$

En intégrant :

$$|E_n| \leq C \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Delta t ds = C \Delta t^2.$$

On obtient ainsi :

$$|E_n| \leq C \Delta t^2,$$

ce qui montre que l'erreur E_n est d'ordre $O(\Delta t^2)$. Comme $e_T = -\sum_{n=0}^{N-1} E_n$, et que $N = T/\Delta t$, on a :

$$|e_T| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |E_n| \leq N C \Delta t^2 = C T \Delta t.$$

On en déduit que l'erreur de convergence faible du schéma d'Euler-Maruyama est d'ordre 1.

3 Application numérique

On définit r le processus (gaussien) d'Orstein-Uhlenbeck solution de

$$\begin{cases} dr_t = -\theta(r_t - \mu)dt + \sigma dW_t, & t > 0 \\ r_{t=0} = r_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (10)$$

1. Calculons dans un premier temps l'expression exacte de r . On pose $V_t = r_t - \mu \implies dV_t = dr_t$, et on considère alors la nouvelle équation

$$dV_t = -\theta V_t dt + \sigma dW_t$$

La solution de l'équation "classique" s'écrit $\tilde{V}_t = V_0 e^{-\theta t}$. la solution de cette équation différentielle stochastique (EDS) est de la forme $V_t = V_0 e^{-\theta t} C_t$, où C_t est un processus stochastique. Alors

$$\begin{aligned} dV_t &= -\theta V_0 e^{-\theta t} C_t dt + V_0 e^{-\theta t} dC_t \\ &= -\theta V_t dt + V_0 e^{-\theta t} dC_t \\ &= -\theta V_t dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

Il vient que

$$V_0 e^{-\theta t} dC_t = \sigma dW_t \iff dC_t = \frac{1}{V_0} e^{\theta t} \sigma dW_t$$

De plus, $V_{t=0} = V_0 \implies C_0 = 1$ Finalement :

$$C_t - 1 = \int_0^t \frac{\sigma}{V_0} e^{\theta s} dW_s$$

ce qui permet de déduire une première expression pour V_t :

$$V_t = V_0 e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{\theta(s-t)} dW_s$$

Ainsi, on a une expression du processus r :

$$r_t = \mu + e^{-\theta t}(r_0 - \mu) + \sigma \int_0^t e^{\theta(s-t)} dW_s$$

On remarque de plus que $I_t = \sigma \int_0^t e^{\theta(s-t)} dW_s$ est un processus gaussien, de variance

$$\mathbb{V}(I_t) = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}) = \tilde{\sigma}$$

Ainsi, l'intégrale I_t n'est autre qu'un processus gaussien tel que $I_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sqrt{\tilde{\sigma}})$. Cette remarque est utile lorsque nous essaierons de modéliser numériquement le processus r .

2. On s'intéresse à présent à la simulation de ce processus :

- **Simulation numérique avec une méthode exacte**

On utilise l'expression exacte du processus vérifiant **10**:

$$r_t = r_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dW_s$$

ce qui revient à implémenter l'algorithme suivant :

$$X_{t+\Delta t} = X_t e^{-\theta \Delta t} + \mu(1 - e^{-\theta \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\theta \Delta t}}{2\theta}} Z$$

où $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$

```

1  # Methode exacte
2
3  def simu_exact(r0, t):
4      N = len(t)
5      r = np.zeros(N)
6      for n in range(N-1):
7          dt = t[n+1] - t[n]
8          sigma_tilde = sigma**2/(2*theta)*(1 - np.exp(-2*theta*dt))
9          Z = np.sqrt(sigma_tilde)*np.random.normal(0, 1)
10         r[n+1] = np.exp(-theta*dt)*(r[n] - mu) + mu + Z
11     return r
12
13     t = np.linspace(a, b, 100)
14     for i in range(20):
15         plt.plot(t, simu_exact(0, t))
16         plt.ylabel('$r_t$')
17         plt.xlabel('$t$')
18         plt.title('Simulation du processus d\'Orstein-Uhlenbeck - methode
           exacte')

```

- **Simulation numérique avec une méthode approchée** On va utiliser le schéma d'Euler - Maruyana pour simuler numériquement le processus d'Orstein-Uhlenbeck :

$$X_{n+1} = X_n + b(t_n, X_n)\Delta t + \sigma(t_n, X_n)\Delta W_n$$

Dans notre cas, le schéma revient à faire l'algorithme suivant :

$$r_{n+1} = r_n - \theta(r_n - \mu)\Delta t + \sigma\Delta W$$

Remarque : on pourrait également utiliser le schéma de Milstein :

$$r_k^{n+1} = r_k^n + b_k(t^n, r^n)\Delta t + \sigma_{kk}(t^n, r^n)\Delta W_k^n + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial x_k}(t^n, r^n)((\Delta W_k^n)^2 - \Delta t), \quad \forall k$$

Cependant dans notre cas d'étude σ est constant. De ce fait $\frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial x_k} = 0$ et on retombe sur le schéma d'Orstein-Uhlenbeck

```

1 # Methode approchee : schema d'Euler-Maruyama
2
3 def simu_EM(r0, t):
4     N = len(t)
5     r = np.zeros(N)
6     r[0] = r0
7     for n in range(N-1):
8         dt = t[n+1] - t[n]
9         dW = np.sqrt(dt)*np.random.normal(0, 1)
10        r[n+1] = r[n] -theta*(r[n] - mu)*dt + sigma*dW
11    return r
12
13    t = np.linspace(a, b, 100)
14    for i in range(20):
15        plt.plot(t, simu_EM(0, t))
16        plt.ylabel('$r_t$')
17        plt.xlabel('$t$')
18        plt.title('Simulation du processus d\'Orstein-Uhlenbeck - methode
    approchee')
```

On obtient les résultats suivant :

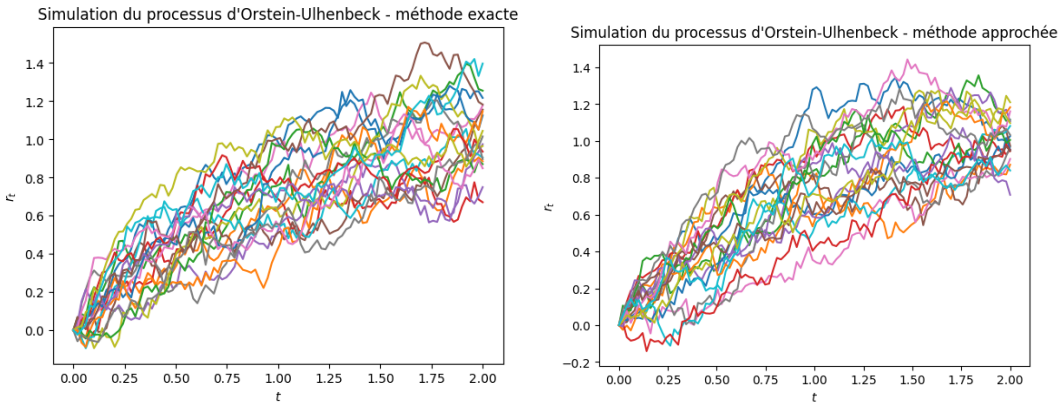


Figure 1: Simulation du processus d'Orstein-Uhlenbeck

3. Etude de l'erreur et de la convergence forte

On note l'erreur d'approximation $X_t^{\Delta t}$ de X_t par $\mathcal{E}_t = \mathbb{E}((X_t - X_t^{\Delta t})^2)$. On a montré le résultat suivant :

$$\sup_{t \in I} \mathcal{E}_t \lesssim \mathcal{O}(\Delta t)$$

L'idée est ici d'illustrer ce résultat de convergence forte

Dans notre cas d'étude, la solution exacte est accessible. De ce fait, on peut facilement estimer l'erreur d'approximation avec une méthode de Monte Carlo. Il suffit alors de prendre le sup pour les instants du maillage temporel. Ainsi :

$$\sup_{t \in I} \mathbb{E}((X_t - X_t^{\Delta t})^2) \simeq \sup_{0 \leq n \leq N} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|X_{t_n}(\omega_i) - X^n(\omega_i)\|^2$$

Remarque: $X_{t_n}(\omega_i)$ et $X^n(\omega_i)$ sont des réalisations indépendantes de $X_t^{\Delta t}$ et X_t simulé pour une même trajectoire du mouvement brownien $W(\omega_i)$. Il faut donc légèrement modifier les algorithmes précédents pour faire en sorte de toujours utiliser la même réalisation $W(\omega_i)$ lorsque l'on simule les $X_{t_n}(\omega_i)$ et les $X(\omega_i)$

```

1  # Methode exacte
2
3  def simu_exact_error(r0, t, Z):
4      N = len(t)
5      r = np.zeros(N)
6      for n in range(N-1):
7          dt = t[n+1] - t[n]
8          sigma_tilde = sigma**2/(2*theta)*(1 - np.exp(-2*theta*dt))
9          Z_t = np.sqrt(sigma_tilde)*Z
10         r[n+1] = np.exp(-theta*dt)*(r[n] - mu) + mu + Z_t
11     return r

```

```

1  # Methode approchee : schema d'Euler-Maruyama
2
3  def simu_EM_error(r0, t, Z):
4      N = len(t)
5      r = np.zeros(N)
6      r[0] = r0
7      for n in range(N-1):
8          dt = t[n+1] - t[n]
9          dW = np.sqrt(dt)*Z
10         r[n+1] = r[n] - theta*(r[n] - mu)*dt + sigma*dW
11     return r

```

```

1  M = 1000
2  liste_dt = [0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.002, 0.001]
3  liste_error = []
4
5  for dt in liste_dt:
6      t = np.linspace(a, b, int(b/dt))
7      liste_EM = []
8      liste_exact = []
9      print(dt, int(b/dt))
10     for m in range(M):
11         Z = np.random.normal(0, 1)
12         EM = simu_EM_error(0, t, Z)
13         exact = simu_exact_error(0, t, Z)
14         liste_EM.append(EM)
15         liste_exact.append(exact)
16
17     error = 1/M * sum( [(liste_EM[i] - liste_exact[i])**2 for i in range(0, M)
18                        ] )
19     error_max = np.max(error)
20     liste_error.append(error_max)
21
22 liste_dt = np.array(liste_dt)
23 liste_error = np.array(liste_error)

```

```

23 plt.plot(liste_dt, liste_error)
24 plt.xlabel('$\Delta t$')
25 plt.ylabel('$\sup(E_t)$')
26 plt.title('Evolution de l\'erreur en fonction de $\Delta t$')

```

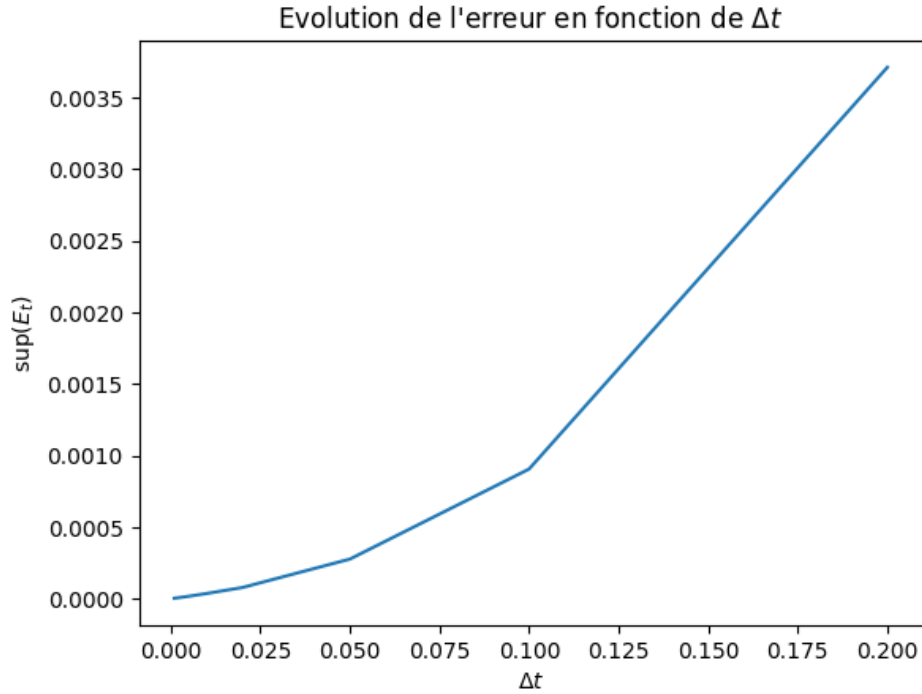


Figure 2: Evolution de l'erreur en fonction de Δt

Afin de mieux observer le résultat de convergence énoncé plus tôt, on observe l'erreur en la passant au logarithme. En effet, on souhaite observer

$$\sup_{t \in I} \mathcal{E}_t \leq C\Delta t \iff \log(\sup_{t \in I} \mathcal{E}_t) \leq \log(C) + \log(\Delta t)$$

Il suffira alors de remarquer que $f(t) = \Delta t$ et $g(t) = \sup_{t \in I} \mathcal{E}_t$ sont deux droites parallèles, qui diffèrent d'un shift (qui représente $\log(C)$)

```

1 M = 1000
2 liste_dt = [0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.002, 0.001]
3 liste_error = []
4
5 for dt in liste_dt:
6     t = np.linspace(a, b, int(b/dt))
7     liste_EM = []
8     liste_exact = []
9     print(dt, int(b/dt))
10    for m in range(M):
11        Z = np.random.normal(0, 1)
12        EM = simu_EM_error(0, t, Z)
13        exact = simu_exact_error(0, t, Z)
14        liste_EM.append(EM)
15        liste_exact.append(exact)
16
17    error = 1/M * sum( [(liste_EM[i] - liste_exact[i])**2 for i in range(0, M)
18                        ] )
19    error_max = np.max(error)

```

```

19     liste_error.append(error_max)
20
21     liste_dt = np.array(liste_dt)
22     liste_error = np.array(liste_error)
23     plt.plot(np.log(liste_dt), np.log(liste_error), label = 'sup($E_t$)')
24     plt.plot(np.log(liste_dt), np.log(liste_dt), label = '$\Delta t$')
25     plt.xlabel('$\Delta t$, échelle log')
26     plt.ylabel('sup($E_t$), échelle log')
27     plt.legend()
28     plt.title('Evolution de l\'erreur en fonction de $\Delta t$, échelle log')

```

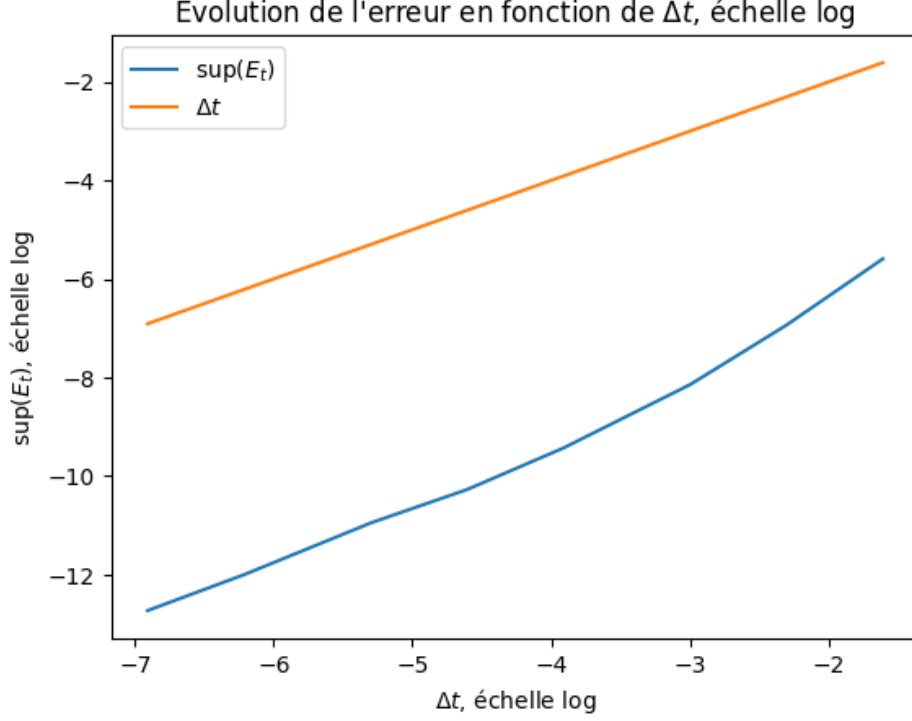


Figure 3: Evolution de l'erreur en fonction de Δt - échelle log

L'ordre de convergence observée est bien 1 pour \mathcal{E}_t

4 Annexe

4.1 Démonstration du lemme de Gronwall

Lemme 2 Soit $\psi \geq 0$ et ϕ des fonctions continues qui vérifient :

$$\forall t \geq t_0, \quad \phi(t) \leq K + \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s) ds$$

où K est une constante. Alors :

$$\forall t \geq t_0, \quad \phi(t) \leq K \exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s) ds\right)$$

Démonstration :

On pose $z(t) = \int_{t_0}^t \psi \phi$, alors

$$\begin{aligned} z'(t) - \psi(t)z(t) &\leq K\psi(t) \\ \implies \exp\left(-\int_{t_0}^t \psi\right)(z'(t) - \psi(t)z(t)) &\leq K\psi(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \psi\right) \\ \implies \left(z(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \psi\right)\right)' &\leq K \left(-\exp\left(-\int_{t_0}^t \psi\right)\right)' \end{aligned}$$

Puis on intègre sur $[t_0, t]$:

$$\begin{aligned} z(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \psi\right) - z(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t \psi\right) &\leq K \left(-\exp\left(-\int_{t_0}^t \psi\right) + 1\right) \\ \implies z(t) &\leq K \left(-1 + \exp\left(\int_{t_0}^t \psi\right)\right) \\ \implies \phi(t) &\leq K + z(t) \leq K - K + K \exp\left(\int_{t_0}^t \psi\right) \end{aligned}$$

d'où finalement :

$$\phi(t) \leq K \exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right) \tag{11}$$