

Rapport

24 juin 2014

Table des matières

1 Présentation de la méthode	4
1.1 Définition	4
1.1.1 Matrice d'inertie	5
1.1.2 Anisotropie	6
1.1.3 Direction d'anisotropie	6
1.2 Interprétation	8
1.2.1 Point de vue mécanique	8
1.2.2 Point de vue probabiliste	9
1.2.3 Maximum de dispersion	10
1.3 Valeurs extrêmes de l'anisotropie	11
1.3.1 Anisotropie nulle	11
1.3.2 Anisotropie égale à 1	12
1.4 Propriétés	13
1.4.1 Indépendance au choix des unités et du repère	13
1.4.2 Superposition de deux champs	14
1.5 Stabilité des champs a et θ	15
1.5.1 Perturbation d'une matrice d'inertie	15
1.5.2 Perturbation du champ	18
1.6 Représentation des résultats	19
1.6.1 Champ d'anisotropie	19
1.6.2 Directions d'anisotropie	21
1.7 Quelques exemples	23
1.7.1 Bruit blanc	24
1.7.2 Barreaux d'échelle	25
1.7.3 Droites	26
2 Application aux données	28
2.1 Données	28
2.1.1 Données RGPS	28
2.1.2 Modèle	29
2.2 Méthodologie	30
2.2.1 Pré-traitement	30
2.2.2 Domaine d'analyse	31
2.3 Résultats	35
2.3.1 Application à une sortie de modèle seule	35
2.3.2 Comparaison modèle et données	38
2.3.3 Distribution des valeurs d'anisotropie sur un stream	40

Introduction

Il faut modéliser la banquise.

La modélisation ne marche pas très bien. Pq les modèles prennent pas la fracturation en compte : fracturation donc plus d'eau libre, plus d'échange air-mer, plus d'évacuation par le détroit de fram.

Maintenant, nouveaux modèles (pa visquo-plastique, mais elasto-fragile).

Donc nouvelles validations.

Anisotropie est maintenant un caractère important

Donc la méthode.

Chapitre 1

Présentation de la méthode

Dans ce chapitre nous allons présenter la méthode d'analyse d'anisotropie qui a été au coeur de ce stage.

Cette méthode a été mise au point par Jérôme Weiss et (autres gens) : référence de l'article.

Elle va nous permettre, étant donné un champ de départ, de définir l'*anisotropie* et la *direction d'anisotropie* de ce champ *en chaque point et en fonction de l'échelle d'analyse*.

Notons que la dépendance à l'échelle d'analyse est un grand atout de cette méthode qui lui permet de rendre compte de la complexité du comportement de la banquise.

1.1 Définition

Dans cette partie nous allons définir formellement le champ d'anisotropie et le champ de directions d'anisotropie d'un champ de départ σ .

Fixons une échelle d'analyse

$$l \in \mathbb{R}_+^*$$

Soit champ scalaire σ :

$$\begin{aligned} \sigma &: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1] \\ P &\mapsto \sigma(P) \end{aligned}$$

En pratique, les champ considérés seront des images pixélisées, mieux représentées par des champ discrets.

Nous allons donc aussi considérer un champ discret M :

$$(P_i, M_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} \in (\mathbb{R}^2 \times [0, 1])^N$$

$P_i = (x_i, y_i)$ représente un pixel et M_i la valeur de ce pixel.

Nous définirons la méthode à la fois pour le champ continu σ et pour le champ discret M .

Remarque : Prendre des valeurs inférieures à 1 n'apporte pas de restriction car la méthode est invariante par multiplication par un scalaire. Les champs d'anisotropie et de directions d'anisotropie calculés pour un champ σ' quelconque borné non nul sont les mêmes que ceux de $\frac{\sigma'}{\max(\sigma')}$.

1.1.1 Matrice d'inertie

Soit $P_0 \in \mathbb{R}^2$

Soit D_0 le disque de centre P_0 et de diamètre l . On appellera ce disque fenêtre d'analyse.

Soit $G = (x_G, y_G)$ le barycentre du champ contenu dans la fenêtre d'analyse D_0 .

On appelle matrice d'inertie du champ σ dans la fenêtre D_0 :

- pour un champ continu, la matrice :

$$I = \iint_{D_0} \sigma(P) \cdot \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 y_0 \\ x_0 y_0 & y_0^2 \end{pmatrix} dS_P$$

- pour un champ discret, la matrice :

$$I = \sum_{i \in A} M_i \cdot \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 y_0 \\ x_0 y_0 & y_0^2 \end{pmatrix}, \text{ où } A = \{i | P_i \in D_0\}$$

où $(x_0, y_0) = (x_P - x_G, y_P - y_G)$ sont les coordonnées barycentriques

Cette matrice est symétrique. Montrons qu'elle est positive en montrant que son déterminant et sa trace sont positifs.

Pour montrer cela, il suffit de réécrire la matrice I en introduisant :

- Pour un champ continu :

$$\begin{aligned} fx & : D_0 \rightarrow [0, 1] \\ P & \mapsto x_0 \cdot \sqrt{\sigma(P)} \end{aligned}, \quad \begin{aligned} fy & : D_0 \rightarrow [0, 1] \\ P & \mapsto y_0 \cdot \sqrt{\sigma(P)} \end{aligned}$$

- Pour un champ discret :

$$(fx)_{i \in A} = (x_0 \cdot \sqrt{M_i}), \quad (fy)_{i \in A} = (y_0 \cdot \sqrt{M_i})$$

Avec ces notations I s'écrit :

$$I = \begin{pmatrix} \|fx\|^2 & (fx|fy) \\ (fx|fy) & \|fy\|^2 \end{pmatrix}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme 2 (des fonctions ou des vecteurs) et $(\cdot|.)$ le produit scalaire associé.

Sa trace est alors évidemment positive et son déterminant :

$$d = \|fx\|^2 \cdot \|fy\|^2 - (fx|fy)^2$$

est positif d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 I est bien symétrique positive. On sait alors que :

I admet deux valeurs propres réelles positives : λ_{\min} et λ_{\max} .

1.1.2 Anisotropie

On appelle anisotropie à l'échelle l en P_0 :

$$a(P_0) = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}, & \text{si } \lambda_{\max} > 0 \\ 0, & \text{si } \lambda_{\max} = 0 \end{cases}$$

Cette valeur est comprise entre 0 et 1. 0 correspond à une fenêtre parfaitement isotrope, 1 à une fenêtre parfaitement anisotrope.

Remarque : λ_{\max} est nul si et seulement si la matrice d'inertie est nulle. Ce ne peut être le cas uniquement si :

- Dans le cas continu, le champ est nul presque partout dans le disque D_0 .
- Dans le cas discret, le champ est nul sauf éventuellement en un point.

Dans les deux cas, une anisotropie nulle semble bien adaptée.

1.1.3 Direction d'anisotropie

Supposons $a(P_0) \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda_{\min} \neq \lambda_{\max}$.

On définit la direction d'anisotropie θ comme la direction de la droite des vecteurs propres associés à λ_{\max} .

Plus rigoureusement :

La direction d'anisotropie en P_0 à l'échelle l est l'unique θ appartenant à $[0, \pi[$ tel que $\vec{u}_\theta = (\cos \theta \sin \theta)$ soit vecteur propre de I associé à λ_{\max} .

Remarque : Dans le cas où l'anisotropie est nulle, les deux valeurs propres sont égales, l'espace propre associé à λ_{\max} est le plan entier et non plus une droite. Parler de direction d'anisotropie n'a alors plus de sens. La direction principale d'anisotropie n'est donc définie que lorsque l'anisotropie est non nulle. Afin de quand même définir le champ θ partout, nous prendrons la convention $\theta = 0$ lorsque $a = 0$. Toutefois, nous prendrons soin de ne jamais accorder de sens à la direction d'anisotropie en un point où l'anisotropie est nulle.

Nous avons ainsi bien défini deux champs associés à σ dépendant de l'échelle l :

$$\begin{aligned} a &: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1] \\ P &\mapsto a(P) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \theta &: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \pi] \\ P &\mapsto \theta(P) \end{aligned}$$

Ce sont les champs d'anisotropie et de directions d'anisotropie du champ σ à l'échelle l .

Remarque : Le choix de définir l'anisotropie en tout point du champ peut être discuté. En effet, en plus d'être couteux en calculs, on peut y voir une redondance d'information : les anisotropies calculées en deux points voisins risquent peu d'être différentes puisqu'elles sont calculées en deux disques se recouvrant presque entièrement l'un l'autre.

Au lieu de faire glisser le centre de la fenêtre d'analyse sur tout le domaine, il est possible d'en faire un simple recouvrement et de ne calculer la valeur et la direction d'anisotropie qu'au centre des fenêtres du recouvrement.

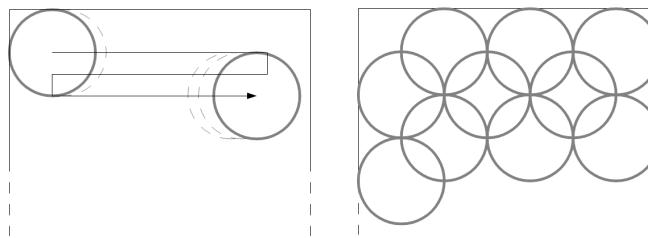


FIGURE 1.1 – Calcul avec fe-
nêtre glissante FIGURE 1.2 – Calcul avec re-
couvrement

Cependant, ce second choix, bien plus économique en calculs, pose deux problèmes :

- Effectuer un recouvrement avec des disques est délicat. Si l'on s'impose un recouvrement complet, certaines zones doivent être recouvertes par plusieurs fenêtres d'analyse alors que d'autres non. Il faut alors s'assurer que cela ne fausse pas les statistiques d'anisotropie et de direction. Choisir une autre forme de fenêtre d'analyse risquerait en revanche d'introduire une anisotropie artificielle.
- Les valeurs et directions d'anisotropie peuvent ne pas être représentatives du champ de départ si le positionnement des fenêtres est malheureux. Prenons un champ constitué de lignes à peu près parallèles (ce pourrait être un champ de cisaillement dans la banquise par exemple)

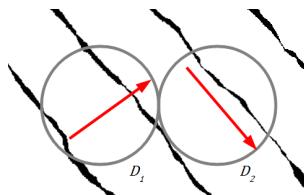


FIGURE 1.3 – Fractures parallèles

Dans cet exemple, l'analyse montre une direction d'anisotropie sud-ouest / nord-est sur la gauche qui n'est pas représentative du champ. Pire, l'analyse laisse penser qu'il y a une différence, en terme d'anisotropie, entre le

partie gauche et la partie droite alors qu'il n'en est rien.

Ce sont ces raisons qui justifient le choix fait ici d'utiliser une fenêtre glissante plutôt qu'un recouvrement, malgré un temps de calcul assez long. Une fois encore, ce choix est discutable et il existe certainement des moyens plus astucieux de positionner les fenêtres d'analyses.

1.2 Interprétation

Dans cette partie, nous allons voir comment interpréter les champs de valeur et de directions d'anisotropie. Pour cela, deux approches sont possibles :

- Une approche mécanique, bien adaptée à un champ de départ continu σ
- Une approche probabiliste, bien adaptée à un champ de départ discret M .

1.2.1 Point de vue mécanique

Il est possible de se représenter cette méthode plus intuitivement en s'inspirant de la mécanique du solide, dont est d'ailleurs tiré le terme "matrice d'inertie".

Donnons-nous un champ σ et un disque d'analyse D . Imaginons que ce disque soit un vrai disque que l'on puisse prendre dans les mains. Imaginons maintenant que sa masse surfacique corresponde au champ σ compris dans ce disque. La direction d'anisotropie est alors la direction dans le plan du disque suivant laquelle il est le plus facile de faire tourner le disque. La direction perpendiculaire (dans le plan du disque toujours) correspond à la direction suivant laquelle il est le plus difficile de faire tourner le disque. La valeur d'anisotropie traduit la différence d'effort à fournir pour mettre le disque en rotation suivant ces deux directions.

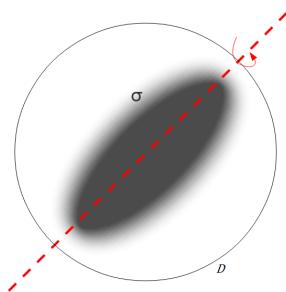


FIGURE 1.4 – Axe principal de rotation

Voyons cela plus en détails :

En mécanique, la matrice d'inertie A d'un solide S de masse volumique ρ est

définie par :

$$A = \iint_{P \in S} \rho(P) \cdot \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -yx & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -xz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dV_P$$

en utilisant les coordonnées barycentriques.

Etant donnée une droite de vecteur directeur \vec{u} passant par le barycentre de S , la matrice d'inertie A permet de calculer le moment d'inertie $J_{\vec{u}}$ suivant cette droite d'après la relation :

$$J_{\vec{u}} = \vec{u}^T A \vec{u}$$

Ce moment d'inertie est proportionnel à l'énergie nécessaire pour mettre le solide en rotation autour de l'axe défini par \vec{u} .

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres minimale et maximale correspondent donc aux directions des droites suivant lesquelles le moment d'inertie est respectivement le plus faible et le plus élevé.

Passons maintenant en deux dimensions en supposant que notre solide a une épaisseur suivant \vec{z} infiniment faible. Notons alors σ sa masse surfacique. La matrice d'inertie du solide devient une matrice 2×2 :

$$A = \iint_{P \in S} \sigma(P) \cdot \begin{pmatrix} y^2 & -yx \\ -xy & x^2 \end{pmatrix} dS_P$$

qui correspond quasiment à la matrice d'inertie I définie pour notre méthode que nous appliquerions au champ bidimensionnel de la masse surfacique du solide.

En réalité, pour passer de A à I , il suffit d'intervertir les deux valeurs propres λ_{min} et λ_{max} . Le vecteur propre de A associé à λ_{min} est ainsi vecteur propre de I associé à λ_{max} et inversement.

La direction d'anisotropie (définie par le vecteur propre associé à λ_{max}) correspond ainsi à la direction de la droite suivant laquelle le moment d'inertie du solide est minimal. La valeur de l'anisotropie, $\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max}}$, correspond à la différence relative entre le moment d'inertie maximal et le moment d'inertie minimal.

1.2.2 Point de vue probabiliste

Il est aussi possible d'avoir une approche probabiliste de cette méthode en remarquant que la matrice d'inertie définie plus haut correspond à une matrice de variance-covariance.

Pour mieux se représenter cela, considérons un champ discret binaire (P_i, M_i) de valeurs 0 ou 1.

Fixons-nous un disque d'analyse D et notons $(X_i, Y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les abscisses et ordonnées des n points de ce disque où le champ vaut 1.

On peut voir chaque abscisse et ordonnée de ces points comme la réalisation de deux variables aléatoires X et Y .

La matrice de variance-covariance de ces deux variables aléatoires est définie par :

$$\Sigma_{XY} = \begin{pmatrix} \text{var}(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \text{var}(Y) \end{pmatrix}$$

Soit, en notant I_D la matrice d'inertie du champ dans le disque D :

$$\Sigma_{XY} = \frac{1}{n} I_D$$

Les valeurs propres de I_D sont donc celles de Σ_{XY} multipliées par $\frac{1}{n}$, et les vecteurs propres associés sont identiques.

Or, la matrice de variance-covariance permet d'avoir la variance d'une combinaison linéaire des coordonnées $Z = \alpha X + \beta Y$ d'après :

$$\text{var}(Z) = (\alpha \ \ \beta) \Sigma_{XY} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Diagonaliser cette matrice donne donc accès, par ses vecteurs propres, aux directions suivant lesquelles la variance est minimale et maximale, ces deux directions étant nécessairement orthogonales. Les valeurs propres correspondent au minimum et au maximum de variance.

La direction d'anisotropie donne donc la direction suivant laquelle la variance du champ est maximale. La valeur d'anisotropie correspond à la différence relative entre la variance maximale et minimale du champ.

Dans le cas où le champ n'est pas binaire, il suffit de reprendre le raisonnement précédent en pondérant chaque (X_i, Y_i) par la valeur du champ en ce point.

1.2.3 Maximum de dispersion

On peut résumer les deux analogies précédentes en définissant la dispersion suivant une direction ϕ comme :

- pour le cas continu :

$$S_\phi = \iint_D \sigma(P) \cdot \left(\vec{GP} \cdot \vec{u}_\phi \right)^2 .dS_P$$

- pour le cas discret :

$$S_\phi = \sum_{P_i \in D} M_i \left(\vec{GP}_i \cdot \vec{u}_\phi \right)^2$$

Cette dispersion correspond au moment d'inertie suivant une droite de direction $\phi + \frac{\pi}{2}$ pour le cas continu ou à la variance de la combinaison linéaire $Z = \cos(\phi)X + \sin(\phi)Y$ dans le cas discret.

La matrice d'inertie I permet alors de calculer la dispersion suivant ϕ d'après :

$$S_\phi = (\cos \phi \ \ \sin \phi) I \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ_{max} et λ_{min} , l'anisotropie a et la direction d'anisotropie θ prennent alors tout leur sens :

- λ_{max} est la dispersion maximale, atteinte en θ .

- λ_{min} est la dispersion minimale, atteinte en $\theta + \frac{\pi}{2}$
- $a = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{min}}$ est la différence relative entre la dispersion maximale et minimale.

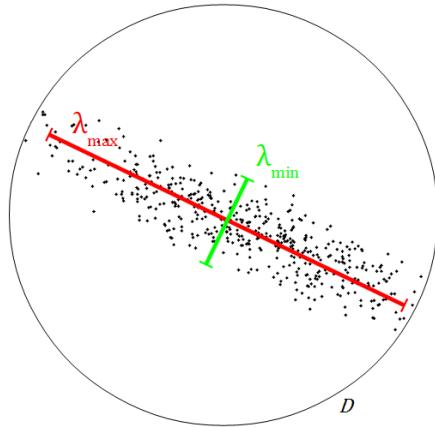


FIGURE 1.5 – Minimum et maximum de dispersion

Remarque : La trace de la matrice d'inertie :

- pour le cas continu :

$$tr = \iint_D \sigma(P) \cdot (\vec{GP})^2 \cdot dS_P$$

- pour le cas discret :

$$tr = \sum_{P_i \in D} M_i (\vec{GP}_i)^2$$

correspond à la dispersion radiale du champ, nécessairement supérieure à la dispersion maximale.

1.3 Valeurs extrêmes de l'anisotropie

Dans cette partie, nous allons voir ce que avoir une anisotropie nulle ou égale à 1 dans une fenêtre d'analyse implique sur le champ compris dans cette fenêtre.

Fixons-nous donc un champ, noté σ dans le cas continu et (P, M) dans le cas discret, ainsi qu'un disque d'analyse D . Nous noterons I_D la matrice d'inertie du champ dans ce disque, de valeurs propres λ_{min} et λ_{max}

1.3.1 Anisotropie nulle

Supposons que l'anisotropie est nulle : $1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} = 0$, soit :

$$\lambda_{min} = \lambda_{max}$$

On en déduit que la dispersion du champ est la même selon toute direction puisque les dispersions maximale et minimale sont égales.

Remarque : Cela est loin d'impliquer une symétrie circulaire. Par exemple, tous les champs invariant par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans un disque ont une anisotropie nulle dans ce disque.

1.3.2 Anisotropie égale à 1

Supposons maintenant que l'anisotropie est égale à un : $1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} = 1$, soit :

$$\lambda_{min} = 0$$

Ce qui implique

$$\det(I_D) = 0$$

En reprenant les notations introduites en 1.1.1, cela s'écrit :

$$\|fx\|^2 \|fy\|^2 - (fx, fy)^2 = 0$$

Cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. fx et fy sont donc colinéaires. Cela signifie :

- Dans le cas discret,

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall i, Y_i \sqrt{M_i} = \lambda X_i \sqrt{M_i}$$

Soit là où le champ est non nul :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall i : M_i > 0, Y_i = \lambda X_i$$

Le champ est donc nul sauf sur un droite.

- Dans le cas continu, la colinéarité de fx et fy implique aussi que le champ doit être nul sauf sur une droite. Mais cela implique que le champ doit être nul presque partout, et donc que I_D est nulle. Dans ce cas, l'anisotropie est nulle par convention. Avoir une anisotropie nulle est donc impossible dans le cas d'un champ continu.

Remarque : Ces deux résultats étaient en réalité prévisibles grâce aux analogies faites dans la partie précédente :

- Dans le cas discret, avoir une matrice de variance-covariance de déterminant nul signifie que :

$$\text{cov}(X, Y) = \text{var}(X) \text{var}(Y)$$

c'est à dire que les variables X et Y sont entièrement corrélées. Un régression linéaire de Y par X serait parfaite : le champ est nul sauf en dehors d'une droite.

- Dans le cas continu, une anisotropie nulle correspondrait à un solide qu'il serait possible de mettre en rotation sans fournir aucune énergie. On voit bien là qu'il s'agit d'un cas limite inatteignable.

Récapitulons :

- Une anisotropie nulle correspond à un champ dont la dispersion est la même suivant toute direction.
- Une anisotropie égale à 1 correspond à un champ nul, sauf le long d'une droite.

1.4 Propriétés

Dans cette partie nous allons voir quelques propriétés des valeurs et directions d'anisotropie

1.4.1 Indépendance au choix des unités et du repère

Pour que notre définition de l'anisotropie soit pertinente, il est nécessaire qu'elle soit indépendante de choix arbitraires comme le choix des unités utilisées pour exprimer le champ et les distances ou comme le repère choisi.

Pour un champ fixé σ , notons $a_{\sigma,l}$ et $\theta_{\sigma,l}$ les champs d'anisotropie et de directions d'anisotropie de σ à l'échelle l .

La méthode d'analyse d'anisotropie vérifie bien :

- l'indépendance au choix des unités du champ :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, a_{\alpha\sigma,l} = a_{\sigma,l} \text{ et } \theta_{\alpha\sigma,l} = \theta_{\sigma,l} \quad (\text{R1})$$

- L'indépendance au choix des unités de longueur :

$$a_{\sigma\circ h_\alpha, l} = a_{\sigma\alpha l} \circ h_\alpha \text{ et } \theta_{\sigma\circ h_\alpha, l} = \theta_{\sigma\alpha l} \circ h_\alpha \quad (\text{R2})$$

où h_α est une homothétie de rapport α .

- L'indépendance au choix du repère :

$$a_{r_\phi\circ\sigma} = a_\sigma \circ r_\phi \text{ et } \theta_{r_\phi\circ\sigma} = \theta_\sigma \circ r_\phi + \phi \quad (\text{R3})$$

où r_ϕ est une rotation d'angle ϕ .

Ces trois propriétés sont simples à vérifier :

- (R1) : Multiplier le champ par un scalaire α revient à multiplier toutes les matrices d'inertie par α . Cela ne change ni les vecteurs propres ni le rapport des valeurs propres. La direction et la valeur d'anisotropie restent donc inchangées.
- (R2) : L'image d'un disque d'analyse de diamètre l de centre O par une homothétie h_α de rapport α est un disque de centre $h_\alpha(O)$ et de rayon $\alpha \times l$, d'où (R2)
- (R3) : Notons R_ϕ la matrice associée à la rotation r_ϕ :

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Soit un disque D et D' son image par r_ϕ , I la matrice d'inertie de σ dans D et I' la matrice d'inertie de $r_\phi \circ \sigma$ dans D' .

Un changement de variable montre que :

$$I' = R_\phi I R_{-\phi}$$

Cela traduit bien une rotation d'angle ϕ des vecteurs propres sans modification des valeurs propres, d'où (R3).

Remarque : Sans détailler le calcul de (R3), notons tout de même que pour faire le changement de variable, il est nécessaire que la fenêtre d'analyse soit invariante par r_ϕ . Une fenêtre d'analyse circulaire est donc nécessaire pour avoir l'invariance de la méthode par rotation.

Maintenant rassurés sur l'indépendance de notre méthode par rapport aux choix de repère et d'unités, regardons des propriétés plus intéressantes.

1.4.2 Superposition de deux champs

Il n'existe malheureusement pas de relation simple reliant l'anisotropie de la superposition de deux champs à l'anisotropie de chacun des champs. Cependant, il en existe une pour les matrices d'inertie :

Soit un disque d'analyse D et deux champs σ_1 et σ_2 :

$$I_{\sigma_1+\sigma_2} = I_{\sigma_1} + I_{\sigma_2} + I_{\sigma_1/\sigma_2}$$

où

$$I_{\sigma_1/\sigma_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} (x_{G_1} - x_{G_2})^2 & (x_{G_1} - x_{G_2})(y_{G_1} - y_{G_2}) \\ (x_{G_1} - x_{G_2})(y_{G_1} - y_{G_2}) & (y_{G_1} - y_{G_2})^2 \end{pmatrix}$$

où G_i et m_i sont respectivement le barycentre et la somme du champ σ_i dans le disque D .

Cette matrice correspond aussi à la matrice du champ composé des deux points G_1 et G_2 pondérés par m_1 et m_2 .

On peut décomposer la matrice d'inertie de la superposition des deux champs en trois contributions :

- Deux contributions propres, dépendant uniquement de l'anisotropie de chaque champ
- Une contribution relative dépendant de la position des champs l'un par rapport à l'autre.

Pour deux champs ayant mêmes barycentres, la contribution relative est nulle :

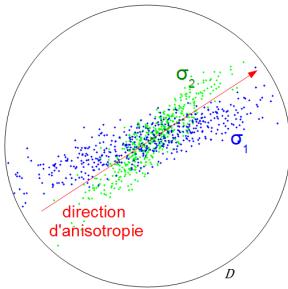


FIGURE 1.6 – Superposition de champs avec contribution relative nulle

En revanche, deux champs similaires mais décallés peuvent engendrer une anisotropie qui n'est propre à aucun des deux champs :

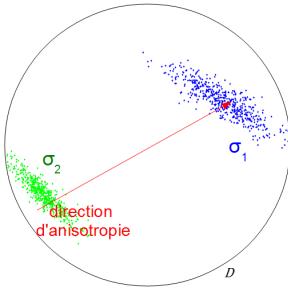


FIGURE 1.7 – Superposition de champs avec contribution relative non nulle

Cette relation nous sera utile dans la section suivant pour regarder la stabilité des champs d'anisotropie.

Remarque : Cette relation peut être généralisée pour la superposition de n champs :

$$I_{\sigma_1+\dots+\sigma_n} = I_{\sigma_1} + \dots + I_{\sigma_n} + I_{\sigma_1/\dots/\sigma_n}$$

1.5 Stabilité des champs a et θ

Dans cette partie, nous allons regarder l'influence que peut avoir un bruit ajouté à un champ de départ σ sur les champs a et θ associés.

1.5.1 Perturbation d'une matrice d'inertie

Dans un premier temps, plaçons nous dans une fenêtre d'analyse D , et supposons que la matrice d'inertie I de σ dans D est perturbée par I_ϵ . Nous allons regarder

les perturbations alors provoquées sur l'anisotropie et la direction d'anisotropie. Pour alléger les notations, plaçons-nous dans un repère où I est diagonale, c'est-à-dire où $\theta = 0$:

$$I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda < \mu$$

Ecrivons la matrice d'inertie perturbatrice ϵ_I sous la forme :

$$\epsilon_I = R_\phi \begin{pmatrix} \epsilon_\lambda & 0 \\ 0 & \epsilon_\mu \end{pmatrix} R_{-\phi} \quad \text{avec } \epsilon_\lambda < \epsilon_\mu$$

On note $a = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ et $b = 1 - \frac{\epsilon_\lambda}{\epsilon_\mu}$

Posons :

$$I_\epsilon = I + \epsilon_I$$

de valeurs propres λ_ϵ et μ_ϵ , de direction θ_ϵ et d'anisotropie $a_\epsilon = 1 - \frac{\lambda_\epsilon}{\mu_\epsilon}$:

$$I_\epsilon = R_{\theta_\epsilon} \begin{pmatrix} \lambda_\epsilon & 0 \\ 0 & \mu_\epsilon \end{pmatrix} R_{-\theta_\epsilon} \quad \text{avec } \lambda_\epsilon < \mu_\epsilon$$

Perturbation sur a_ϵ

Pour trouver une expression au premier ordre de a_ϵ en ϵ_λ et ϵ_μ , il nous faut une expression de λ_ϵ et μ_ϵ . Nous allons obtenir cela en différenciant λ_ϵ et μ_ϵ en fonction de ϵ_λ et ϵ_μ .

Dans le cas général, pour une matrice symétrique S de valeur propres (λ_i) , les différentielles des valeurs propres s'obtiennent selon :

$$d\lambda_i = u_i^T dS u_i$$

où u_i est un vecteur propre unitaire associé à λ_i .

Dans notre cas, cela donne :

$$d\lambda_\epsilon = (1 \ 0) R_\phi \begin{pmatrix} d\epsilon_\lambda & 0 \\ 0 & d\epsilon_\mu \end{pmatrix} R_{-\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne, après calcul :

$$\frac{(\partial \lambda_\epsilon, \mu_\epsilon)}{\partial (\epsilon_\lambda, \epsilon_\mu)}|_{\epsilon_\lambda=0, \epsilon_\mu=0} = \begin{pmatrix} \cos(\phi)^2 & \sin(\phi)^2 \\ \sin(\phi)^2 & \cos(\phi)^2 \end{pmatrix}$$

Comme de plus :

$$\frac{\partial a}{\partial (\lambda, \mu)} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} -1 & \frac{\lambda}{\mu} \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial a}{\partial (\epsilon_\lambda, \epsilon_\mu)} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} -\cos(\phi)^2 & \sin(\phi)^2 \frac{\lambda}{\mu} \end{pmatrix}$$

En posant $\epsilon = \frac{\epsilon_\mu}{\mu}$, on a :

$$a_\epsilon = a + \epsilon(-a + b(1 - (2 - a)\sin(\phi)^2)) + o(\epsilon)$$

Perturbation sur θ_ϵ

Trouvons maintenant l'expression de θ_ϵ au premier ordre en ϵ_λ et ϵ_{mu} .

Pour cela, nous allons différencier les deux expressions de I_ϵ :

$$R_{\theta_\epsilon} \begin{pmatrix} \lambda_\epsilon & 0 \\ 0 & \mu_\epsilon \end{pmatrix} R_{-\theta_\epsilon} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + R_\phi \begin{pmatrix} \epsilon_\lambda & 0 \\ 0 & \epsilon_\mu \end{pmatrix} R_{-\phi}$$

En remarquant que

$$dR_\theta = d\theta R_\theta R_{\frac{\pi}{2}}$$

on obtient :

$$R_{\theta_\epsilon} \begin{pmatrix} d\lambda_\epsilon \\ d\mu_\epsilon \end{pmatrix} R_{-\theta_\epsilon} = R_\phi \begin{pmatrix} d\epsilon_\lambda & 0 \\ 0 & d\epsilon_\mu \end{pmatrix} R_{-\phi}$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \theta}{\partial (\epsilon_\lambda, \epsilon_\mu)} = \frac{\sin(2\phi)}{a\mu} \begin{pmatrix} -1 & \frac{\lambda}{\mu} \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\theta_\epsilon = \epsilon \sin(2\phi) \frac{b}{a} + o(\epsilon)$$

On a ainsi les expressions au premier ordre de l'anisotropie et de la direction d'anisotropie perturbées a_ϵ et θ_ϵ . Dans un repère quelconque, cela donne :

$$\begin{aligned} a_\epsilon &= a + \epsilon \cdot (-a + b(1 - (2 - a)\sin(\phi - \theta)^2)) + o(\epsilon) \\ \theta_\epsilon &= \theta + \epsilon \cdot \sin(2(\phi - \theta)) \frac{b}{a} + o(\epsilon) \end{aligned}$$

Réécrivons cela plus simplement :

$$\begin{aligned} a_\epsilon &= a + \epsilon \cdot \alpha + o(\epsilon) \\ \theta_\epsilon &= \theta + \epsilon \cdot \beta + o(\epsilon) \end{aligned}$$

où $(\alpha, \beta) \in [-1, 1]^2$ dépendent de a , b et $\phi - \theta$.

Commentaires

Représentons-nous les calculs précédents comme ceux de la perturbation causée dans un disque d'analyse D par un bruit ϵ_σ sur un champ σ ayant mêmes barycentres (il n'y a pas de contribution relative à la matrice d'inertie résultante).

Il est intéressant de remarquer alors que le paramètre $\epsilon = \frac{\epsilon_\lambda}{\lambda}$ correspond au rapport de l'extension maximale de la perturbation sur celle du champ. Cela n'est pas inattendu : pour qu'une perturbation ait peu d'effet sur un champ, il faut que sa dispersion maximale soit faible devant la dispersion maximale du champ.

Toutefois, cela n'était pas évident non plus. Il n'aurait pas été choquant que ϵ corresponde au rapport de la dispersion maximale de la perturbation sur la

dispersion minimale du champ, auquel cas l'anisotropie aurait été bien moins stable !

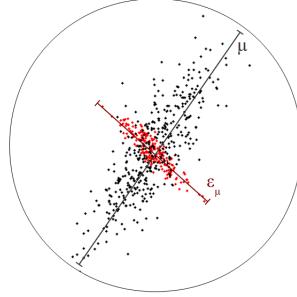


FIGURE 1.8 – Faible effet sur l'anisotropie car $\epsilon_\mu \ll \mu$

Le champ d'anisotropie est donc assez peu sensible au bruit.

Malheureusement ce n'est pas tout à fait le cas du champ de directions d'anisotropie. On remarque en effet le facteur β/a , divergeant lorsque a tend vers 0. Dans une fenêtre d'analyse où le champ est très isotrope, le moindre bruit anisotrope va définir la direction d'anisotropie.

Nous avions évoqué en 1.1.3 que dans une fenêtre d'analyse nulle, parler de direction d'anisotropie n'a pas de sens. Cela est ici renforcé : plus l'anisotropie dans une fenêtre d'analyse est faible, moins la direction d'anisotropie est fiable.

Nous verrons comment remédier à cela dans la partie "Représentation des Résultats".

1.5.2 Perturbation du champ

Fixons-nous une fenêtre d'analyse D , un champ σ et un champ perturbateur ϵ_σ . Grâce à la relation vue en 1.4.2, nous savons que la perturbation causée par ϵ_σ est la somme d'une contribution propre dépendant uniquement de l'anisotropie et de la direction d'anisotropie de ϵ_σ .

Nous avons vu l'effet provoqué par la perturbation propre : la perturbation de la matrice d'inertie de σ par celle de ϵ_σ .

Il ne nous reste plus qu'à voir l'effet de la perturbation relative :

$$I_{\epsilon_\sigma/\sigma} = \frac{m_\sigma m_{\epsilon_\sigma}}{m_\sigma + m_{\epsilon_\sigma}} \begin{pmatrix} (x_{G_\sigma} - x_{G_{\epsilon_\sigma}})^2 & (x_{G_\sigma} - x_{G_{\epsilon_\sigma}})(y_{G_\sigma} - y_{G_{\epsilon_\sigma}}) \\ (x_{G_\sigma} - x_{G_{\epsilon_\sigma}})(y_{G_\sigma} - y_{G_{\epsilon_\sigma}}) & (y_{G_\sigma} - y_{G_{\epsilon_\sigma}})^2 \end{pmatrix}$$

en utilisant les notations de 1.4.2.

Les valeurs propres de cette matrice sont 0 et $d(G_\sigma, G_{\epsilon_\sigma})^2$.

En supposant $m_{\epsilon_\sigma} \ll m_\sigma$ on a :

$$I_{\epsilon_\sigma/\sigma} = m_{\epsilon_\sigma} R_\psi \begin{pmatrix} d(G_\sigma, G_{\epsilon_\sigma})^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R_{-\psi}$$

Cette perturbation a donc peu d'effet si $m_{\epsilon_\sigma} d(G_\sigma, G_{\epsilon_\sigma})^2 \ll \mu$.

Récapitulons.

Pour qu'un perturbation dans un disque d'analyse ait peu d'effet, il faut :

- $\epsilon_\mu \ll \mu$ pour que la contribution propre soit faible.
- $m_{\epsilon_\sigma} d(G_\sigma, G_{\epsilon_\sigma})^2 \ll \mu$ pour que la contribution relative soit faible.

1.6 Représentation des résultats

Dans cette partie, nous allons détailler les différentes façons de représenter les champs d'anisotropie et de directions d'anisotropie.

Pour cela nous prendrons en exemple le champ représenté par l'image :

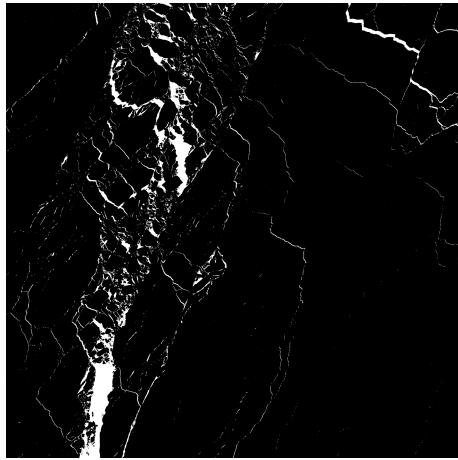


FIGURE 1.9 – Vue d'un carré de 50km² de banquise hivernale

Un aspect fondamental de la méthode d'analyse est sa dépendance à l'échelle. Il faudra donc tenir compte de ce paramètre, soit en le faisant intervenir directement dans la représentation des champs (comme dans le graph de dépendance à l'échelle), soit en mettant en comparaison les représentations pour différentes échelles.

1.6.1 Champ d'anisotropie

Regardons les différentes représentations du champ d'anisotropie a .

Champ d'anisotropie

La représentation la plus basique du champ d'anisotropie est l'affichage du champ lui-même.

Voici les champs d'anisotropie de la figure 1.9 pour trois échelles différentes :

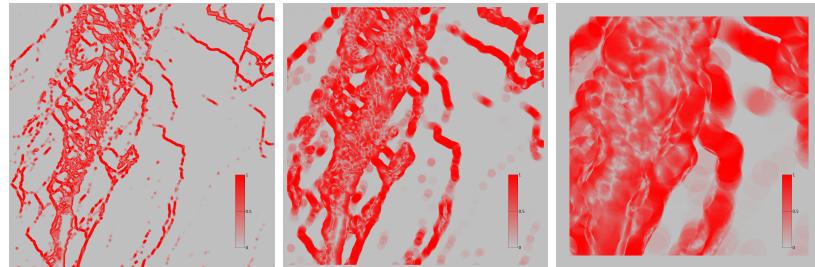


FIGURE 1.10 – FIGURE 1.11 – FIGURE 1.12 –
Echelle : 500m Echelle : 1,6km Echelle : 5km

Graphique anisotropie-échelle

Pour mieux s'intéresser à la dépendance à l'échelle d'analyse de l'anisotropie, un graphique représentant l'anisotropie moyenne des champs en fonction de l'échelle utilisée pour les calculer est intéressant :

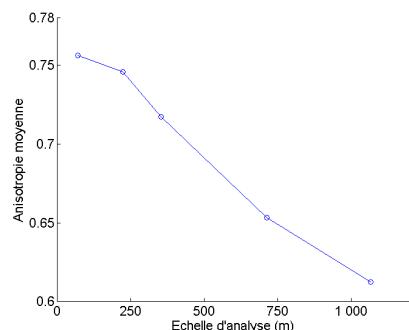


FIGURE 1.13 – Anisotropie Moyenne en fonction de l'échelle

Pour faire ce graphique, les fenêtres d'analyse vides n'ont pas été prises en compte.

Distribution des valeurs d'anisotropie

On peut aussi regarder, pour différentes échelles, les distributions des valeurs d'anisotropie :

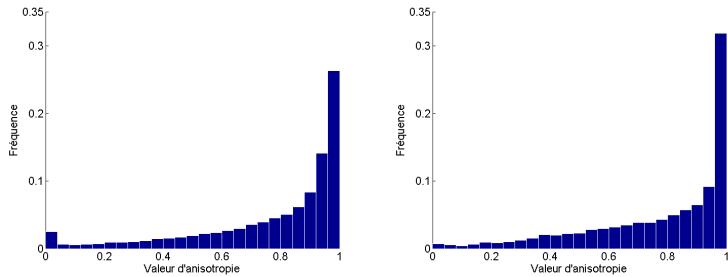


FIGURE 1.14 – Echelle : 70m

FIGURE 1.15 – Echelle : 250m

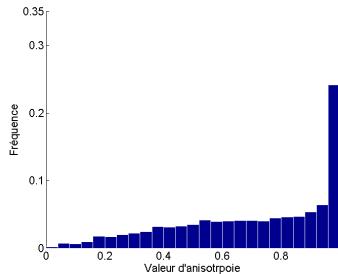


FIGURE 1.16 – Echelle : 700m

Ici aussi, les fenêtres d'analyse vides ne sont pas prises en compte.

1.6.2 Directions d'anisotropie

Regardons maintenant les représentations du champ de directions d'anisotropie θ .

Représentation par des ellipses

Un moyen astucieux de représenter à la fois l'anisotropie et la direction d'anisotropie est d'associer à chaque fenêtre d'analyse une ellipse telle que :

- Le grand axe de l'ellipse de l'ellipse correspond à l'échelle d'analyse.
- La direction du grand axe de l'ellipse direction d'anisotropie.
- Le rapport du petit axe de l'ellipse sur son grand axe correspond au rapport des valeurs propres de la matrice d'inertie.

Ainsi, plus l'anisotropie est élevée, plus l'ellipse est excentrique. Par conséquent, moins l'anisotropie est élevée, plus il est difficile de distinguer précisément la direction d'anisotropie, jusqu'au cas extrême d'une anisotropie nulle où l'ellipse est alors un cercle. C'est là que la méthode est astucieuse car elle rend bien compte du fait que la pertinence de la direction d'anisotropie diminue avec l'anisotropie comme nous l'avions vu en **1.5.1**.

Voici ce que cette représentation donne sur notre exemple pour une échelle de 5km :

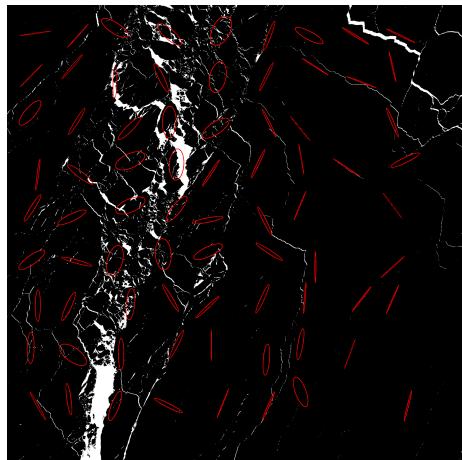


FIGURE 1.17 – Echelle : 5km

Roses des vents

On peut aussi représenter la distribution des directions d'anisotropie, pondérées par les valeurs d'anisotropie, grâce à une rose des vents.

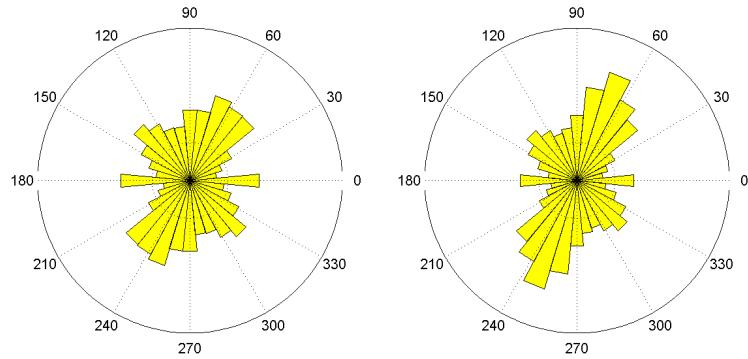


FIGURE 1.18 – Echelle : 70m

FIGURE 1.19 – Echelle : 250m

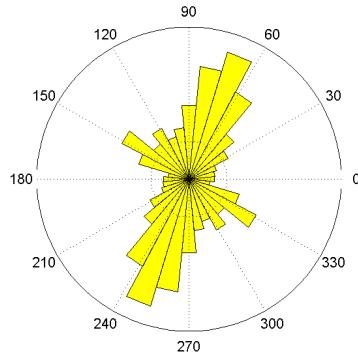


FIGURE 1.20 – Echelle : 700m

On voit sur ces figures émerger une direction principale à partir d'une échelle de quelques centaines de mètre. La direction des fractures dans la glace est uniforme, comme le montre la rose des vent à 70m, mais la zone fracturée, elle, a une orientation bien précise, comme le montre la rose des vents à 700m.

Remarque : Pondérer les directions par l'anisotropie permet de résoudre le problème de l'instabilité de la direction d'anisotropie lorsque l'anisotropie est faible. En effet, l'expression de la direction perturbée en 1.5.1 :

$$\theta_\epsilon = \theta + \epsilon \cdot \sin(2(\phi - \theta)) \frac{b}{a} + o(\epsilon)$$

montre que voit que la stabilité de $a\theta$ dépend beaucoup moins de a .

1.7 Quelques exemples

Dans cette partie nous allons appliquer la méthode d'analyse d'anisotropie à quelques exemples.

1.7.1 Bruit blanc

Commençons par un exemple censé être isotrope : une image dont les pixels sont les réalisations de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0, 1]$.

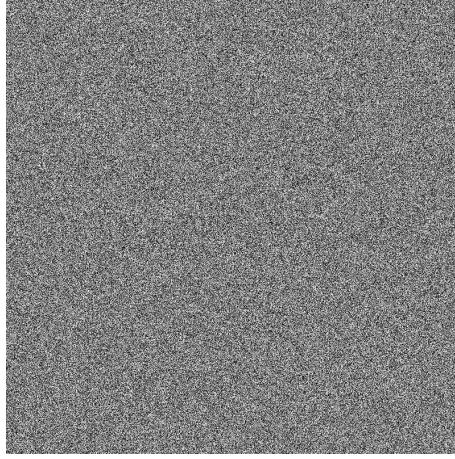


FIGURE 1.21 – Bruit blanc

Bien que l'image soit statistiquement isotrope, on imagine bien qu'il est très peu probable que l'anisotropie soit exactement égale à 0 dans une fenêtre d'analyse, surtout si la fenêtre d'analyse est petite. Regardons l'anisotropie moyenne en fonction de l'échelle :

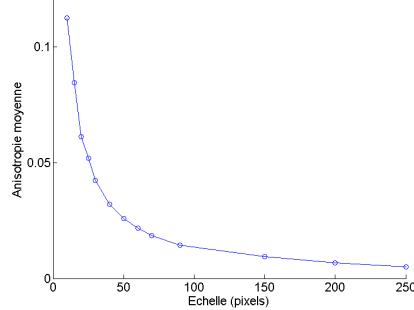


FIGURE 1.22 – Anisotropie moyenne en fonction de l'échelle

On observe une anisotropie non nulle décroissant en $\frac{1}{l}$.

Cela est intéressant car le champ théorique, infiniment précis, correspondant à un bruit blanc serait invariant suivant l'échelle d'observation et son anisotropie serait exactement nulle. L'anisotropie observée ici est donc un biais dû à la pixelisation de ce champ.

Ce biais existera pour tous les champs auxquels nous appliquerons la méthode d'analyse. Cet exemple est donc important puisqu'il nous a permis d'isoler l'effet

de la pixelisation.

Evidemment, il est très peu probable que ce biais soit le même pour tous les champs que nous observerons. Toutefois, cela nous a permis de nous faire une idée, grossière certes, de l'effet provoqué sur l'anisotropie par le caractère discret des champs.

Au vu de ce graph, *il paraît raisonnable pour la suite de s'interdire toute analyse à une échelle inférieure à 20 pixels.*

1.7.2 Barreaux d'échelle

Voici un exemple permettant de bien voir l'intérêt d'une analyse dépendant de l'échelle : un champ en barreaux d'échelle.

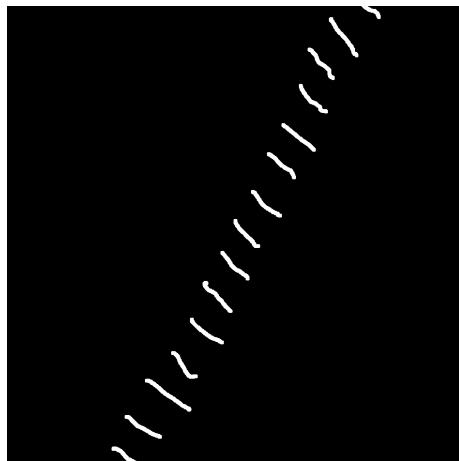


FIGURE 1.23 – Echelle

Ce champ présente deux anisotropies bien distinctes en fonction de l'échelle :

- à faible échelle : l'anisotropie est provoquée par chaque barreau d'échelle.
- à grande échelle : l'anisotropie est provoquée par l'organisation des barreaux entre eux.

Ces deux anisotropies sont flagrantes lorsqu'on regarde les roses des vents :

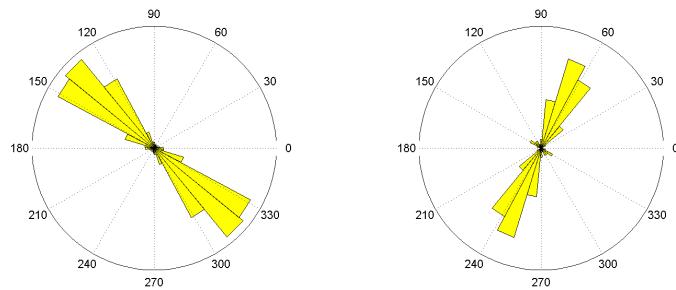


FIGURE 1.24 – Echelle : moitié de la longueur d'un barreau FIGURE 1.25 – Echelle : 1,5 fois la longueur d'un barreau

ou encore le graphe de l'anisotropie moyenne en fonction de l'échelle :

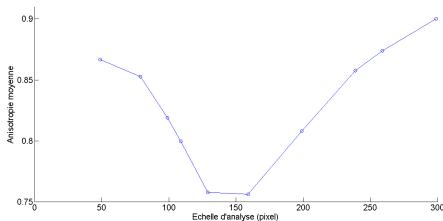


FIGURE 1.26 – Graphe anisotropie-échelle

Cet champ est un exemple très simple de changement de structure en fonction de l'échelle d'observation. Ce genre de changement de structure apparaît, de manière plus complexe, dans la fracturation d'un solide fragile comme la banquise. Il est très intéressant de pouvoir repérer ce phénomène.

1.7.3 Droites

Dernier exemple de cette section : des droites de différentes directions.

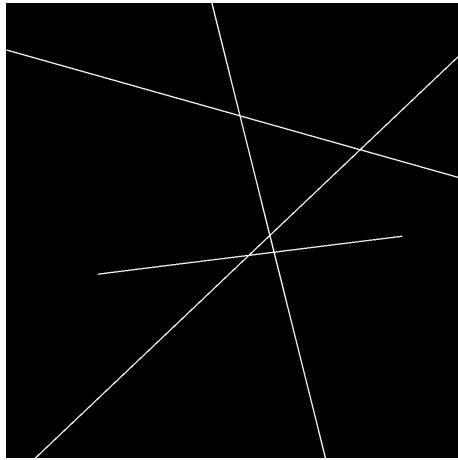


FIGURE 1.27 – Droites

Cet exemple est intéressant car notre méthode sera par la suite appliquée à des champs de déformation de la banquise (observés où simulés) souvent similaires à des réseaux de droites. La représentation intéressante ici est la rose des vents à faible échelle :

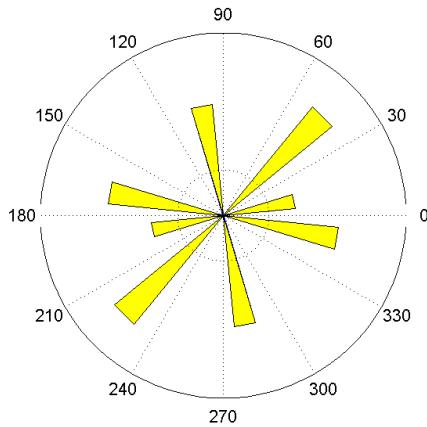


FIGURE 1.28 – Rose des vents à faible échelle

On voit que les directions sont celles des droites, et que les proportions correspondent aux longueurs relatives des droites.

On pourra donc interpréter les roses des vents à faible échelle des champs de déformations comme la distribution des directions des fractures.

Chapitre 2

Application aux données

Dans ce chapitre, nous allons voir l'application de la méthode d'analyse d'anisotropie à des champs de déformation de la banquise arctique issus de simulations et de mesures, dans l'objectif de les comparer.

2.1 Données

Les champs traités sont les champs de cisaillement issus des données RGPS et du modèle EB.

Commençons par donner quelques précisions sur ces données.

2.1.1 Données RGPS

Les données RGPS, pour RADARSAT Geophysical Processor System, sont produites par Ron Kwok, du Jet Propulsion Laboratory.

Elles sont obtenues à partir des observations des deux satellites canadiens RADARSAT. Au début de la saison des points sont repérés sur les observations RADARSAT, formant une grille d'un maillage d'une dizaine de kilomètres. Ces points sont suivis tous les 3 jours afin d'obtenir un champ de déplacement et de déformation de la banquise.

Voici un exemple de champs de déformation issus des données de déplacement RGPS :

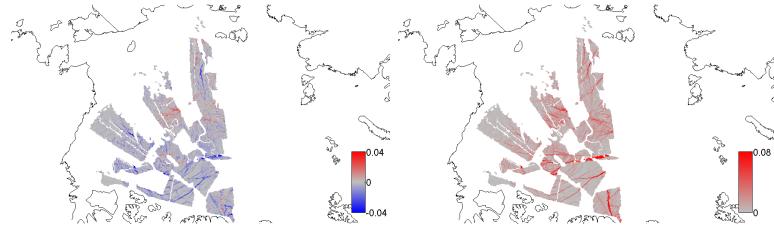


FIGURE 2.1 – Divergence

FIGURE 2.2 – Cisaillement

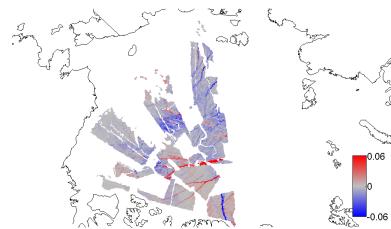


FIGURE 2.3 – Vorticité

Malheureusement, les données sont loin de recouvrir tout le bassin arctique. Elles se présentent sous forme de "streams" correspondant au passages des satellites. Les données de différents streams ne sont par ailleurs pas obtenues simultanément, les heures de passage des satellites n'étant pas les mêmes. Les données affichées ici ont été acquises entre le 28 février et le 5 mars 2007 sur une plage de six jours.

Pour confronter le modèle aux observations il faudra donc prendre soin de faire correspondre les domaines et les dates des données.

2.1.2 Modèle

Les champs simulés sont issus du modèle E.B. développé par Sylvain Bouillon et Pierre Rampal, chercheurs au NERSC.

Ce modèle est un des rares à avoir adopté un rhéologie élasto-fragile de la glace, et non une rhéologie visquo-plastique. Cette rhéologie permet de rendre compte de la fracturation et de faire émerger naturellement une anisotropie. C'est cela qui justifie une analyse d'anisotropie des sorties de ce modèle.

Voici la sortie de modèle correspondant aux données RGPS affichées plus haut :

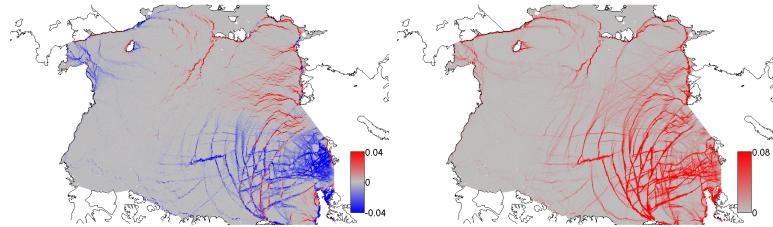


FIGURE 2.4 – Divergence

FIGURE 2.5 – Cisaillement

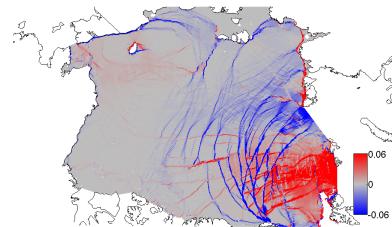


FIGURE 2.6 – Vorticité

Remarque : Nous avons choisi d’appliquer l’analyse d’anisotropie aux champs de cisaillement au lieu des autres invariants mécaniques car le cisaillement à l’avantage d’être positif. De plus, il s’agit de l’inviantant caractérisant le mieux les fractures, même si les champs des différents invariants sont très similaires, concentrant les fortes valeurs le long de fractures.

2.2 Méthodologie

Nous allons maintenant détailler la méthodologie utilisée pour calculer les champs d’anisotropie et de directions d’anisotropie.

2.2.1 Pré-traitement

Obtenir une image en pixels

Les champs affichés plus haut sont calculés sur un maillage triangulaire. Afin de pouvoir appliquer l’algorithme détaillé dans le chapitre "Boite à outil Matlab", ces champs doivent d’abord être projetés sur une grille de pixels. Pour ne pas détériorer la résolution de l’image, la résolution a été prise bien inférieure à celle du maillage triangulaire. La résolution du maillage est d’une dizaine de kilomètres alors que la résolution de la grille de pixels est de 1.7km.

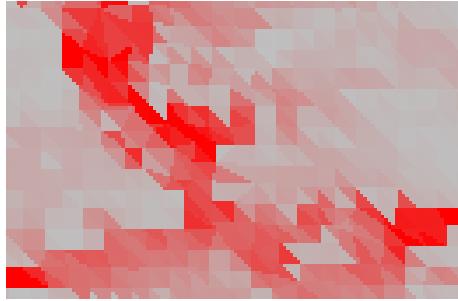


FIGURE 2.7 – Zoom sur la projection du champ sur une grille de pixels : le maillage triangulaire est toujours identifiable.

Elimination des faibles valeurs

Il n'est pas judicieux de garder les valeurs les plus faibles qui correspondent plus à du bruit qu'à de réelles données.

Un seuil a donc été fixé à 10^{-2} correspondant à la limite de fracturation de la glace.

Chaque valeur gardée se trouve donc sur une fracture. Plus le cisaillement est important, plus les deux bords de la fractures coulissent rapidement l'un par rapport à l'autre.

2.2.2 Domaine d'analyse

Nous n'avons jamais parlé jusqu'ici du domaine d'analyse : définit comme le domaine de définition des champs d'anisotropie et de directions d'anisotropie. Sa détermination à partir du domaine de définition des données et de l'échelle d'analyse n'est pas si évidente.

Reprendons les deux champs de cisaillement affichés en 2.1 :

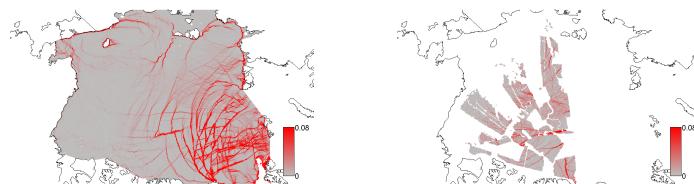


FIGURE 2.8 – Sortie de Modèle FIGURE 2.9 – Données RGPS

Dans le cas simple de la sortie de modèle, on peut se contenter de ne garder que les fenêtres entièrement incluses dans les données. Les domaines de définition des champs d'anisotropie et de directions d'anisotropie, même à grande échelle, restent suffisamment grands pour avoir une analyse valable :

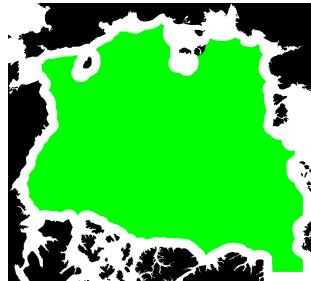


FIGURE 2.10 – Echelle 100km

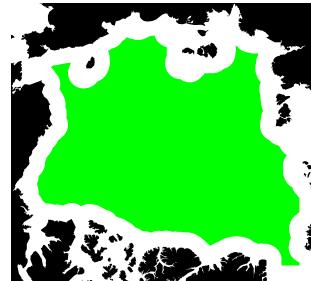


FIGURE 2.11 – Echelle 179km

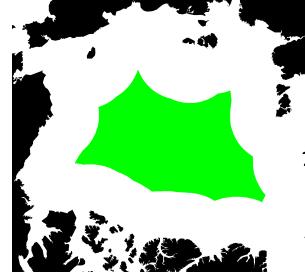


FIGURE 2.12 – Echelle 500km

Ce n'est malheureusement pas le cas pour les données RGPS.

Voici les domaines d'analyse définis par le même critère (fenêtre d'analyse entièrement incluse dans les zones de données) pour les données RGPS :



FIGURE 2.13 – Echelle 100km

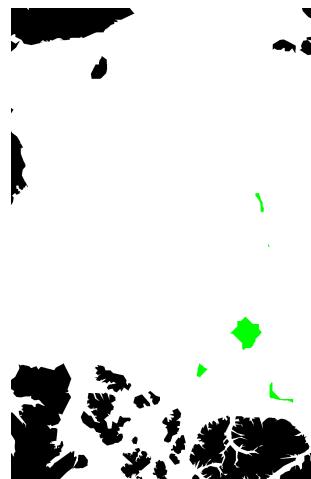


FIGURE 2.14 – Echelle 170km

Le domaine devient vide pour des échelles supérieures à 200km.

Ces domaines sont extrêmement réduits car non seulement le domaine des données est bien moins étendu que pour le modèle, mais surtout il y a beaucoup de trous dans les données qui réduisent considérablement le domaine d'analyse.

Il n'est pas possible de faire une analyse pertinente avec ces domaines. Pour faire varier autant que possible notre échelle d'analyse, il nous faut trouver un critère plus souple pour définir le champ d'anisotropie et de directions d'anisotropie, en acceptant qu'il y ait des trous dans les données contenues par les fenêtres d'analyse.

Le critère qui a été retenu a été de garder les fenêtres d'analyse dont au moins 90% de la surface contiennent des données.

Voici les domaines alors obtenus :



FIGURE 2.15 – Echelle 100km

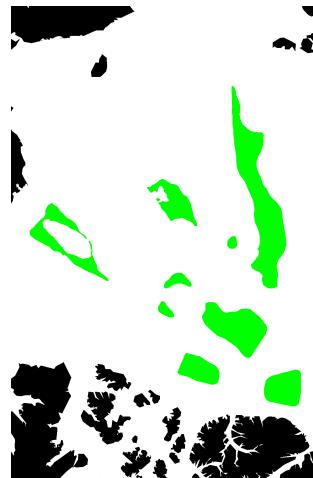


FIGURE 2.16 – Echelle 170km



FIGURE 2.17 – Echelle 250km

Ce critère agrandit considérablement le domaine d'analyse puisqu'il permet de s'affranchir des trous dans les données si ceux-ci sont suffisamment faibles devant l'échelle d'analyse. On voit ici qu'une analyse est encore possible à 250km.

Cependant, ce critère implique des erreurs dans les champs d'anisotropie et de directions d'anisotropie. Un moyen de réduire ces erreurs consiste à remplir

les zones sans données par la moyenne du champ. Même si localement, l'erreur n'est pas plus faible, l'erreur moyenne est quasiement nulle. Vous trouverez en annexe une étude plus détaillée de l'erreur provoquée en utilisant un champ test issu du modèle.

Ce critère est loin d'être optimal, et trouver une autre méthode moins arbitraire pour définir le domaine d'analyse est une nécessaire pour avoir métrique d'évaluation fiable.

Remarque : Il ne faut pas confondre le domaine d'analyse avec l'ensemble des données prises en compte.

Le domaine d'analyse correspond au centre des fenêtres d'analyse prise en compte. Si l'échelle d'analyse est de 100 km, les données prises en compte sont toutes celles situées à 50km ou moins du domaine d'analyse.

2.3 Résultats

Dans cette partie, nous allons voir les résultats de l'analyse d'anisotropie appliquée aux champs de cisaillement.

2.3.1 Application à une sortie de modèle seule

Regardons dans un premier temps les résultats de l'analyse effectuée seulement sur une sortie de modèle.

Sans les problèmes liés au domaine d'analyse, on peut avoir une étude allant jusqu'à de grandes échelles d'analyse, ce qui est impossible lors d'une comparaison avec des données RGPS.

La méthode n'est donc pas utilisée ici comme une métrique de validation, mais comme un simple outil d'analyse qui permet d'éclairer de nouvelles caractéristiques du modèle.

Le champ de cisaillement étudié est celui montré plus haut :

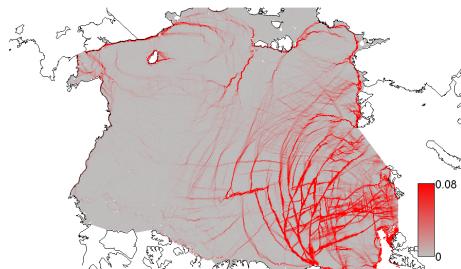


FIGURE 2.18 – Champ de cisaillement

L'analyse a été faites pour 7 échelles : 50km, 100km, 170km, 250km, 350km, 500km et 700km.

On rappelle que le champ est un champ calculé sur un maillage triangulaire de résolution d'environ 5km, projeté sur une grille de pixels de résolution 1,7km.

Carte des ellipses

Voici les représentations par ellipses de ce champ :

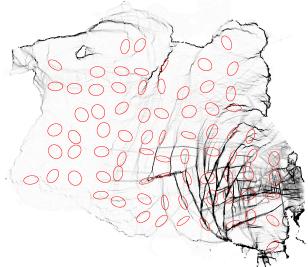


FIGURE 2.19 – Echelle 250km

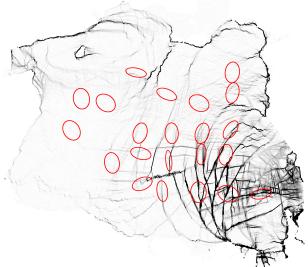


FIGURE 2.20 – Echelle 350km

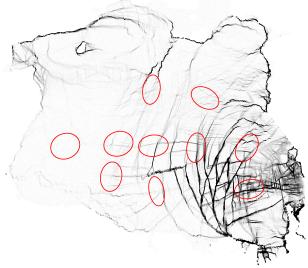


FIGURE 2.21 – Echelle 500km

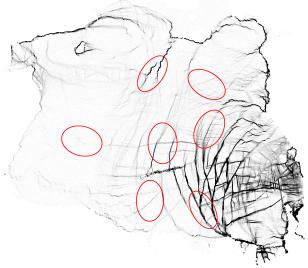


FIGURE 2.22 – Echelle 700km

Seules sont affichées sur ces cartes les ellipses suffisamment excentriques pour indiquer une direction. Les zones sans ellipses sont donc isotropes.

On observe déjà une tendance de l'anisotropie à diminuer avec l'échelle d'analyse, ainsi que certaines directions plus représentées que d'autres : l'horizontale et la direction à environ 80° de l'horizontale.

Roses des vents

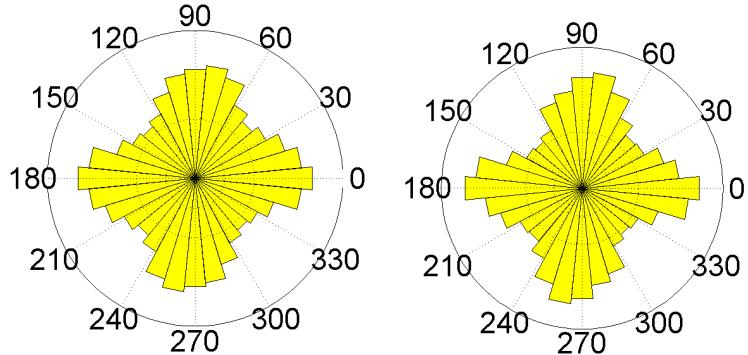


FIGURE 2.23 – Echelle 50km

FIGURE 2.24 – Echelle 170km

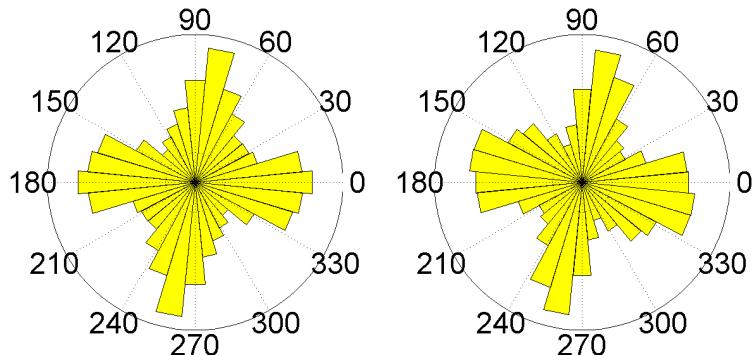


FIGURE 2.25 – Echelle 350km

FIGURE 2.26 – Echelle 500km

Ces roses montre une tendance des directions d'anisotropie :

- A faible échelle, les directions sont plutôt homogènes une prédominance à 0 et 90.
- A grande échelles, on voit deux directions principales d'anisotropie apparaître très nettement selon 80° et 0° , sui sont les directions visibles sur les cartes d'ellipses.

On peut interpréter cela comme une fracturation sans direction préférentielle très marquée à faible échelle, mais qui s'organise à grande échelle suivant deux grandes directions d'anisotropie.

Graph de dépendance à l'échelle

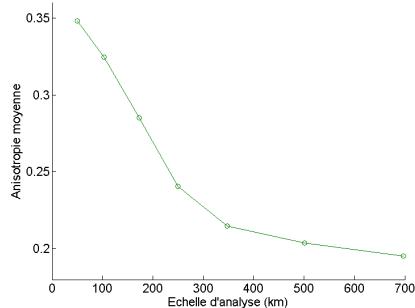


FIGURE 2.27 – Graphe de dépendance à l'échelle pour le modèle et les observations

2.3.2 Comparaison modèle et données

La comparaison modèle - données n'est pas encore très satisfaisante à cause de la détermination du domaine d'analyse qui reste très arbitraire.

Nous allons tout de même exposés les résultats obtenus avec les domaines d'analyse calculés comme expliqué en **2.2.2**

La comparaison a été effectuée pour le champ de cisaillement issu des données RGPS entre le 25 février et le 5 Mars 2008, soit sur une plage de 10 jours :

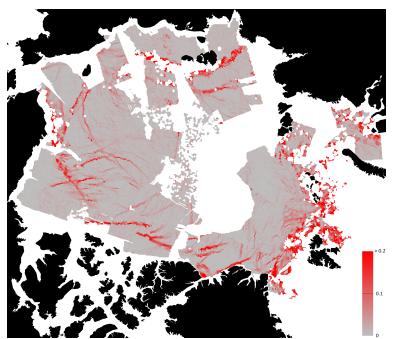


FIGURE 2.28 – RGPS

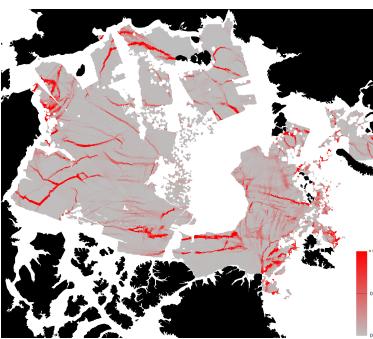


FIGURE 2.29 – Modèle

Le champ issu du modèle a été projeté sur le même domaine que le champ issu des données RGPS.

Nous prendrons ainsi soin de bien utiliser les mêmes domaines d'analyse pour chaque champ.

Cartes d'anisotropie

Regardons d'abord les allures des champs d'anisotropie à différentes échelles :

- pour une échelle de 50km :

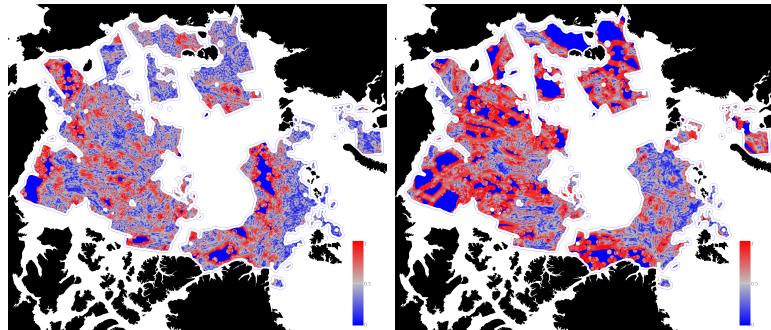


FIGURE 2.30 – Observations

FIGURE 2.31 – Modèle

- pour une échelle de 170km

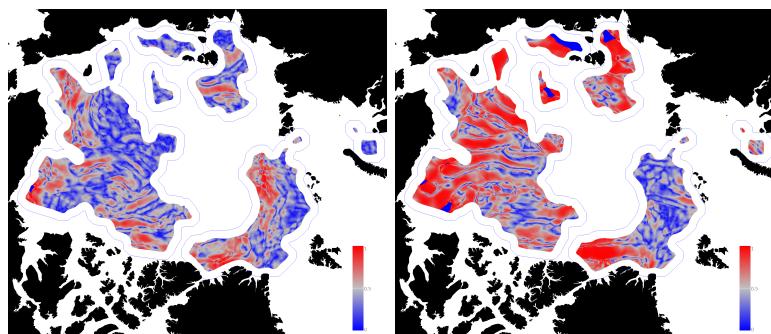


FIGURE 2.32 – Observation

FIGURE 2.33 – Modèle

- pour une échelle de 350km

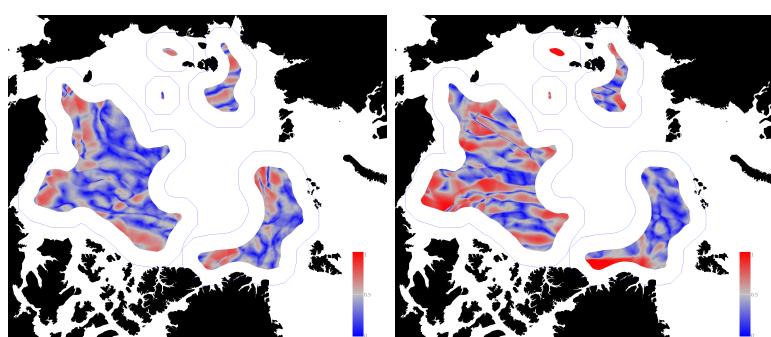


FIGURE 2.34 – Observations

FIGURE 2.35 – Modèle

Rose des vents

Cartes des Ellipses

Graphe de dépendance à l'échelle

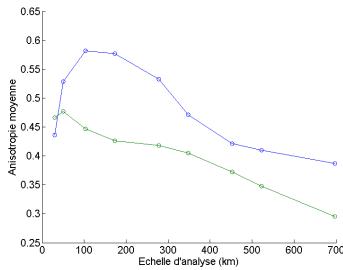


FIGURE 2.36 – Graphe de dépendance d'échelle en vert pour le modèle et en bleu pour les observations.

Le décalage des valeurs du modèle vers le haut pour des échelles supérieures à 100km s'explique certainement partiellement par le fait que le modèle est lancé sur une banquise vierge, sans fractures issues d'une histoire. Ces fractures, présentes dans le champ observé, ne présentent pas un cisaillement très important car les forçages qui les ont créés ont disparu. Ce cisaillement n'est cependant pas nul car les plaques séparées par ces fractures coulissent sous d'autres contraintes qui n'auraient pas suffi à les créer.

Toutes ces fractures rajoutent rajoute un fond qui amoindri l'anisotropie à grande échelle.

On remarque aussi qu'à partir de 100km, le décalage mis à part les pentes des courbes sont similaires, ce qui laisse penser que les structures des deux champs sont similaires, le décalage mis à part.

2.3.3 Distribution des valeurs d'anisotropie sur un stream

La distribution des valeurs d'anisotropie est intéressante à regarder pour comparer les deux modèles. Mais il est apparu que le fait d'utiliser un champ réunion de plusieurs streams, chacun correspondant à des dates différentes, introduisait une discontinuité à la frontière entre deux streams, et par conséquent, une anisotropie artificielle le long de cette discontinuité.

Pour éviter cet artefact nous allons nous cantonner à un stream uniquement :

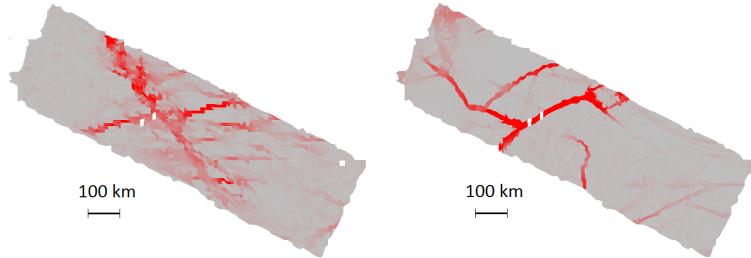


FIGURE 2.37 – stream d’observa- FIGURE 2.38 – stream sortie de tions modèle

Ce stream fait 1 100km de long pour 300 km de large.
Nous allons regarder la distribution des valeurs d’anisotropie pour une échelle de 50km :

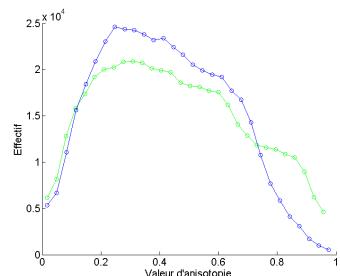


FIGURE 2.39 – Distribution des valeurs d’anisotropie à l’échelle 50km du modèle en vert et des observations en bleu.

Profitons aussi de s’être restreint à un seul stream pour regarder la carte des ellipses à cette échelle :

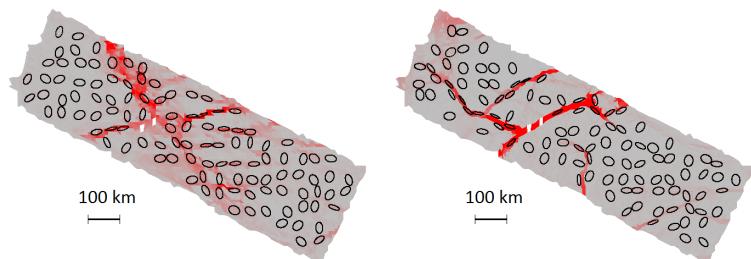


FIGURE 2.40 – Ellipses à 50km pour les observations FIGURE 2.41 – Ellipses à 50km pour le modèle

Chapitre 3

Boite à outil Matlab

Dans ce chapitre nous allons détailler la boite à outil Matlab mise au point pour effectuer les calculs des champs d'anisotropie et de direction d'anisotropie.
Les codes des fonctions de la toolbox sont disponibles en annexe.