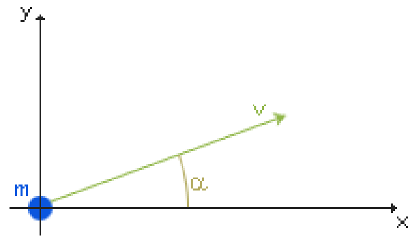
02.1 - Schiefer Wurf



Ein Körper der Masse m wird unter dem Winkel ? im Gravitationsfeld der Erde mit der Geschwindigkeit v abgeschossen.

(a) Stellen Sie mit Hilfe der Beziehung $\vec{F} = m\vec{a}$ die Differentialgleichung der Bewegung des Körpers auf

(b) Lösen Sie allgemein die Differentialgleichung (gesucht sind x(t) und y(t))

(c) Was erhalten Sie mit den Anfangsbedingungen x = y = 0 bei t = 0?

(d) Welche Bahnkurve y = f(x) ergibt sich?

(e) Berechnen Sie die maximale Schussweite bei v = 300m/s

Lösung

a)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$0 = m\ddot{x}$$

$$-mg = m\ddot{y}$$

b)

Lösen der DGL:

$$0 = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = 0$$

$$\dot{x} = C_1$$

$$x = C_1 t + C_2$$

Und in Y-Richtung:

$$-mg = m\ddot{y}$$

$$\ddot{y} = -g$$

$$\dot{y} = -gt + C_3$$

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + C_3 t + C_4$$

c)

Bestimmung der Konstanten C_1 bis C_4 mit Hilfe der Rahmenbedingungen:

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow -\frac{g}{2} \cdot 0^2 + C_3 \cdot 0 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\dot{x}(0) = \cos\alpha \cdot v_0 \Rightarrow C_1 = \cos\alpha \cdot v_0$$

$$\dot{y}(0) = \sin\alpha \cdot v_0 \Rightarrow -g \cdot 0 + C_3 = \sin\alpha \cdot v_0 \Rightarrow C_3 = \sin\alpha \cdot v_0$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} C_1 t + C_2 \\ -\frac{g}{2}t^2 + C_3 t + C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \cdot t \\ v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

d)

Bahnkurve:

Die Formel für die Bewegung in x-Richtung wird nach t umgestellt und in die Formel für die Bewegung in y-Richtung eingesetzt:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$$

$$y(t) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$y(x) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2$$

$$y(x) = \tan\alpha \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}$$

e)

Schussweite:

Funktion = 0 setzen:

$$\tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 = 0$$

Der erste Wert für x ist 0. Es interessiert uns daher nur der andere Wert. Wir teilen durch x:

$$\tan\alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x}{(v_0 \cos\alpha)^2} = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{g}{2} \cdot \frac{x}{(v_0 \cos\alpha)^2}$$

$$\frac{\tan\alpha \cdot 2\,(v_0 \cos\alpha)^2}{g} = x_2$$

Dies muss nun noch über den Winkel maximiert werden.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos^2\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

Dies wird durch ein Additionstheorem weiter vereinfacht:

$$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin(2\alpha)$$

Es gilt daher:

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$$

$$\sin(2\alpha)_{\max} = 1$$

$$\sin^{-1}(1) = 90^\circ \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$x_2 = \frac{\tan\alpha \cdot 2\left(v_0 \cos\alpha\right)^2}{g} = \frac{\tan\left(45°\right) \cdot 2\left(300\frac{m}{s}\cos\left(45°\right)\right)^2}{g} = 9174,311m$$