<u>דוגמאות הרצה</u>

מגישים: בנימין סאלדמן ודניאל גילקרוב

<u>אלגוריתם 1: מציאת חלוקת *EFM* של גרף דו-צדדי</u>

קלט: גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$.

פלט: חלוקת *EFM* ייחודית ל-*G* של הקודקודים $X = X_S \cup X_L$ ו-$Y = Y_S \cup Y_L$.

1. מצא שידוך מקסימלי *M* ב-*G*.
2. יהי $X_0 = X \backslash X_M$ תת קבוצה של קודקודים שלא שודכו על ידי *M*.
3. חשב את $S(M, X_0)$.
4. החזר: $X_S = \cup_{i \geq 0} X_i$ ו-$X_L = X \backslash X_S$ ו-$Y_S = \cup_{i \geq 0} Y_i$ ו-$Y_L = Y \backslash Y_S$.

<u>אלגוריתם 2: מציאת שידוך נטול קנאות מקסימלי בגרף ללא פונקציית משקלים</u>

קלט: גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$.

פלט: שידוך envy-free מקסימלי בגרף דו-צדדי ללא פונקציית משקלים *G*.

1. מצא שידוך מקסימלי *M* ב-*G*.
2. מצא את חלוקת ה-EFM $X = X_S \cup X_L$ ו-$Y = Y_S \cup Y_L$ באמצעות אלגוריתם 1.
3. החזר את תת-השידוך $G[X_L, Y_L]$.

<u>אלגוריתם 3: מציאת שידוך נטול קנאות מקסימלי בגרף עם פונקציית משקלים על הצלעות *w*</u>

קלט: גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$ עם פונקציית משקלים על הצלעות *w*.

פלט: שידוך envy-free מקסימלי בעל העלות הנמוכה ביותר.

1. מצא את חלוקת ה-EFM $X = X_S \cup X_L$ ו-$Y = Y_S \cup Y_L$ באמצעות אלגוריתם 1.
2. מצא והחזר את השידוך המקסימלי בעלות העלות המינימלית ב-$G[X_L, Y_L]$.

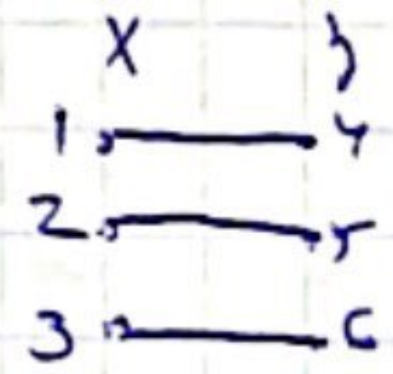
מאמר מחקרי - דוגמאות הרצה

1.

נתבונן בגרף הבא: $G =$ 

ונריץ עליו את אלגוריתמים 1 ו-2:

אלגוריתם 1: מציאת חלוקת EFM:

1. השידוך המקסימלי M ב-G הוא השידוך הבא: $M =$ 

2. נסמן: $X_0 = X \setminus X_M = \emptyset$ בגלל ש-M זה שידוך מושלם ב-G.
X_M = הקודקודים של X שמשודכים ע"י M.

3. $S(M, X_0) = \emptyset$ בגלל ההגדרה של $S(M, X_0)$, הסדרה מסתיימת לפני הקבוצה הריקה הראשונה ו-$X_0 = \emptyset$.

4. הגדרנו $X_L = X \setminus X_S = X$, $X_S = \bigcup_{i \geq 0} X_i = \emptyset$

$$Y_L = Y \setminus Y_S = Y \quad Y_S = \bigcup_{i \geq 0} Y_i = \emptyset$$

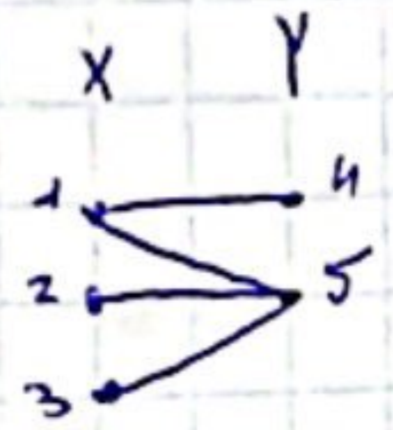
אלגוריתם 2: מציאת שידוך מקסימלי שוות קנאה ב-G:

1. מצא שידוך מקסימלי M ב-G, M זה אותו השידוך כמו באלגוריתם 1.

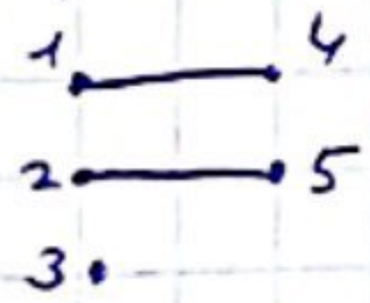
2. הרץ את אלגוריתם 1 ומצא את חלוקת ה-EFM של G: $X = X_L$, $Y = Y_L$ כי $X_S, Y_S = \emptyset$.

3. החזר את תת-השידוך $M[X_L, Y_L]$, בגרף הזה נקבל ש- $M = M[X_L, Y_L]$ וזה לא מפתיע כי כל שידוך מושלם הוא שידוך חסר קנאה.

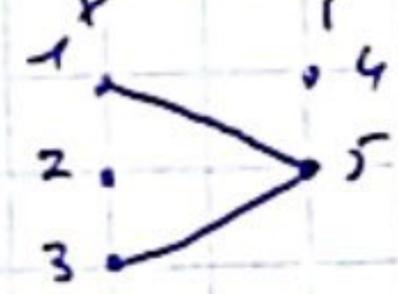
.2

בדוגמה הבאה נתבונן בגרף הבא: $G =$  .

אלגוריתם 1: מציאת חלוקת EFM:

1. מצאו שידוך מקסימלי M ב-G. בדוגמה הבאה, השידוך יהיה: $M =$  .

2. נסמן: $X_0 = X\setminus X_M = \{3\}$ מאחר וקודקוד 3 הוא היחידי שלא שודך.

3. חשב את $S(M, X_0)$: נצייר תחילה את הגרף $G\setminus M$:  שמתקבל ע"י הורדת הצלעות M מ-G.

כעת נחשב את הסדרה: $Y_1 = N_{G\setminus M}(X_0)\setminus \bigcup_{j<i} Y_j = 5$ $\quad X_1 = N_M(Y_1) = 2$

$Y_2 = N_{G\setminus M}(X_1)\setminus \bigcup_{j<i} Y_j = \emptyset$

ולכן עוצרים.

4. $X_S = \bigcup_{i\geq 0} X_i = \{3,2\}$ $\quad X_L = X\setminus X_S = \{1\}$

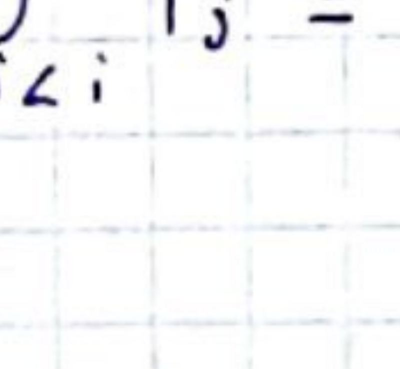
$Y_S = \bigcup_{i\geq 1} Y_i = \{5\}$ $\quad Y_L = Y\setminus Y_S = \{4,5\}$

אלגוריתם 2: מציאת שידוך חסר קנאה ב-G:

1. השידוך המקסימלי M הוא אותו השידוך שחושב באלגוריתם 1.

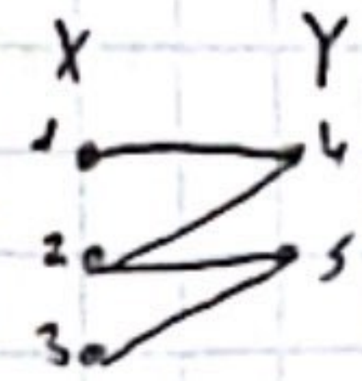
2. בעזרת אלגוריתם 1 מצאו את החלוקה $X = X_S\cup X_L$ ו-$Y = Y_S\cup Y_L$.

3. החזר את תת-השידוך $M[\{1\},\{4\}] \leftarrow M[X_L, Y_L]$

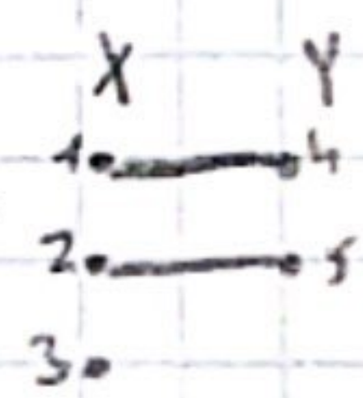
$M =$ 

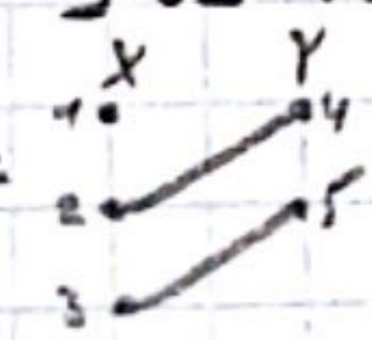
הגרף G מכיל שידוך חסר קנאה לא ריק וגם השידוך אינו מושלם.

.3

בדוגמה הזאת נתבונן בגרף הבא: $G =$ 

אלגוריתם 1: מציאת חלוקת EFM ב-G.

1. תחילה, נמצא שידוך מקסימלי M ב-G: במקרה הזה, $M=$ 

2. כעת נחשב את $S(M,X_0)$: תחילה, נשרטט את $G\setminus M$: $G\setminus M =$ 

$X_0 = X\setminus X_M = \{3\}$.

$Y_1 = N_{G\setminus M}(X_0)\setminus\bigcup_{j<i} Y_j = \{5\}$ $X_1 = N_M(Y_1) = \{2\}$

$Y_2 = N_{G\setminus M}(X_1)\setminus Y_1 = \{4\}\setminus\{5\} = 4$ $X_2 = N_M(Y_2) = \{1\}$

$Y_3 = N_{G\setminus M}(X_2)\setminus \bigcup(Y_1,Y_2) = \emptyset$

ופה עוצרים.

3. הגדר: $X_S = \bigcup_{i\geq 0} X_i = \{1,2,3\}$, $X_L = X\setminus X_S = \emptyset$

$Y_S = \bigcup_{i\geq 0} Y_i = \{4,5\}$ $Y_L = Y\setminus Y_S = \emptyset$

אלגוריתם 2: מציאת שידוך חסר קנאה ב-G.

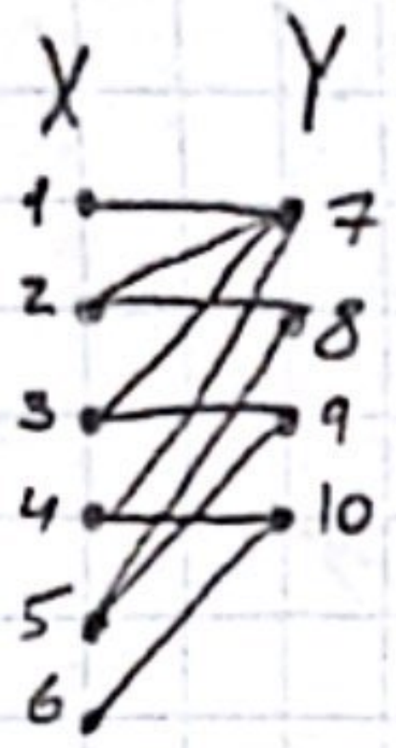
1. מצא שידוך מקסימלי M ב-G. במקרה הזה M יהיה השידוך שמצאנו באלגוריתם 1

2. מצא את חלוקת ה-EFM ב-G באמצעות אלגוריתם 1.
במקרה שלנו, $X_L=\emptyset$, $X_S=\{1,2,3\}$, $Y_L=\emptyset$, $Y_S=\{4,5\}$.

3. החזר את תת-השידוך: $M[X_L,Y_L]$
$= M[\emptyset,\emptyset] = \emptyset$

מדובר במסלול אי-זוגי ולפי המשפט הוא אינו מכיל שידוך חסר קנאה לא ריק.

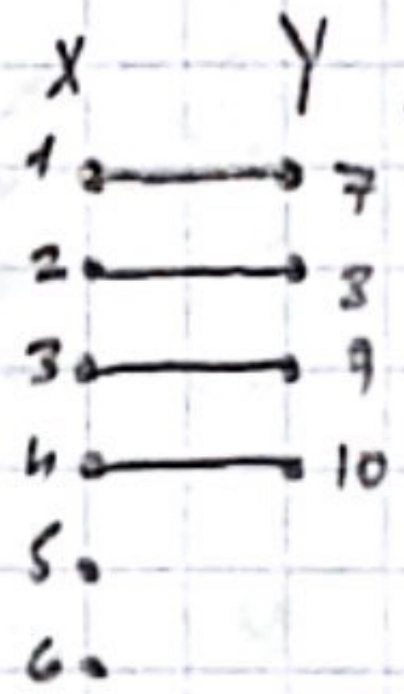
4. בדוגמה הבאות נשתמש בגרף הבא:

$G =$ 

G הוא גרף המכיל מסלול M חוי ולכן השידוך חסר הקנאה היחיד שנמצא בו הוא ריק.

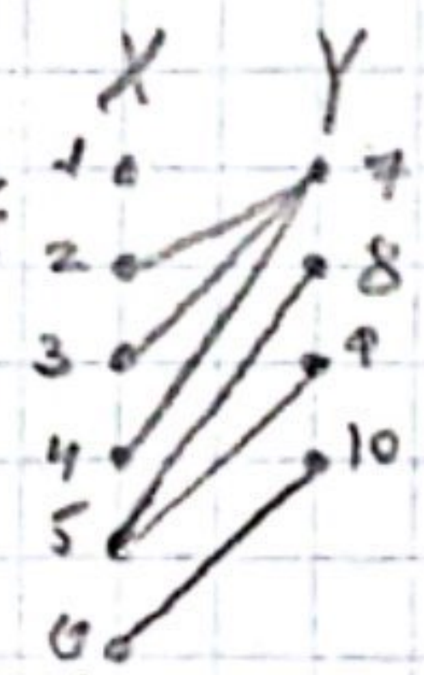
אלגוריתם 1: מציאת חלוקת EFM ב-G:

1. מצא שידוך מקסימלי M ב-G. בדוגמה הבאות:

$M =$ 

2. הגדר: $X_0 = X \setminus X_M = \{5,6\}$ הקודקודים של X שלא שודכו על ידי M.

3. חשב את $S(M,X_0)$: תחילה נחשב את הגרף $G \setminus M$:



$X_0=\{5,6\}$ $\quad Y_1 = N_{G\setminus M}(X_0) \setminus \bigcup_{j<1}(Y_j) = \{8,9,10\}$

$X_1 = N_M(Y_1) = \{2,3,4\}$ $\quad Y_2 = N_{G\setminus M}(X_1) \setminus \{8,9,10\} = \{7\}$

$X_2 = N_M(Y_2) = \{1\}$ $\quad Y_3 = N_{G\setminus M}(X_2) \setminus Y_2 \cup Y_1 = \emptyset$

ופה עוצרים.

4. החזר: $X_S = \bigcup_{i\ge 0} X_i = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad X_L = X \setminus X_S = \emptyset$

$Y_S = \bigcup_{i\ge 0} Y_i = \{7,8,9,10\}$ $\quad Y_L = Y \setminus Y_S = \emptyset$

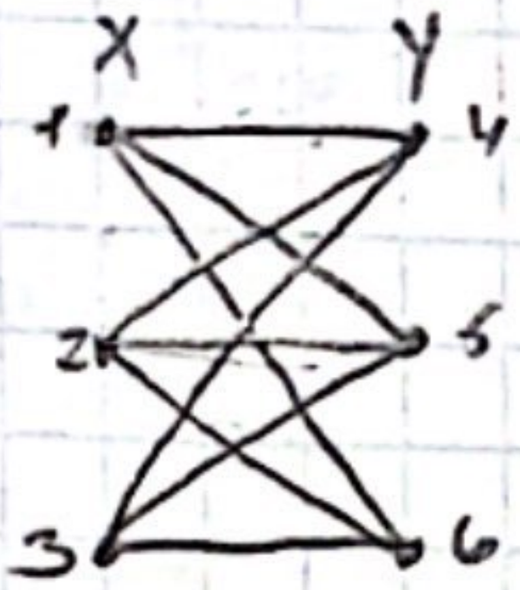
אלגוריתם 2: מציאת שידוך חסר קנאה ב-G:

1. השידוך המקסימלי M ב-G זה אותו השידוך שמצאנו באלגוריתם 1.

2. מצאו את חלוקת ה-EFM ב-G ע"י הפעלת אלגוריתם 1. נקבל: $X_S=\{1,2,3,4,5,6\}$, $X_L=\emptyset$ $\quad Y_S=\{7,8,9,10\}$ $\quad Y_L=\emptyset$

3. החזר את תת-השידוך $M[X_L,Y_L] \leftarrow M[\emptyset,\emptyset]=\emptyset$.

5. כעת נריץ את האלגוריתם על גרפים דו-צדדיים עם פונקציית משקל על הצלעות $W: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

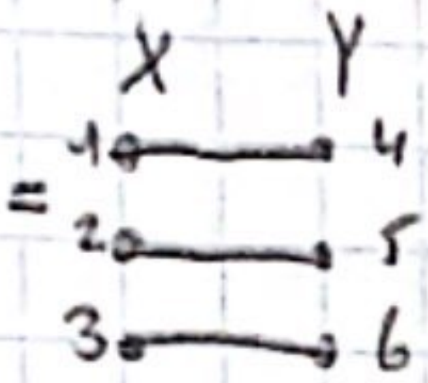
$G =$ 

$W(1,4)=250$ $W(1,5)=148$ $W(1,6)=122$

$W(2,4)=175$ $W(2,5)=135$ $W(2,6)=150$

$W(3,4)=150$ $W(3,5)=125$ $W(3,6)=128$

אלגוריתם 1: מציאת חלוקת EFM ב-G:

1. מצאו שידוך מקסימלי M ב-G. במקרה הזה: $M=$ 

2. נסמן: $X_0 = X \setminus X_M = \emptyset$ ← הקודקודים שלא כוסו ע"י M,

3. חשב את $S(M, X_0)$. נשים לב ש-$X_0=\emptyset$ לכן לא נמשיך לחשב את הספירה

4. החזר: $X_L = X \setminus X_S = \{1,2,3\}$ $X_S = \bigcup_{i \geq 0} X_i = \emptyset$

$Y_L = Y \setminus Y_S = \{4,5,6\}$ $Y_S = \bigcup_{i \geq 1} Y_i = \emptyset$

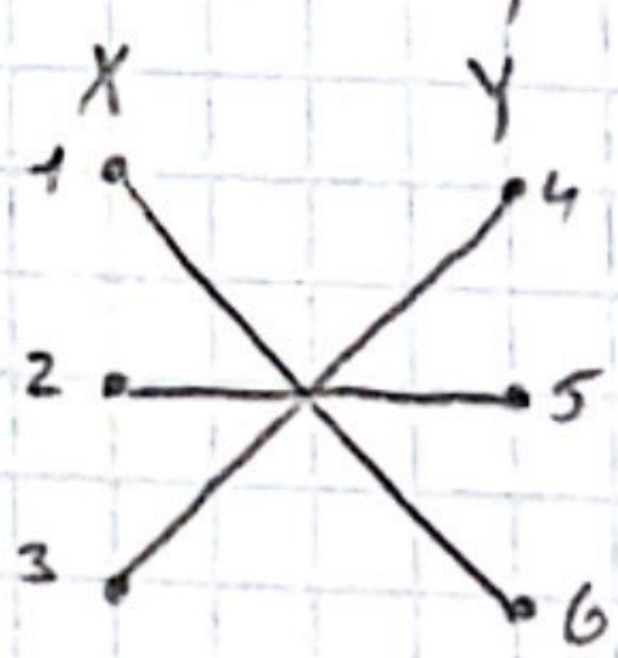
אלגוריתם 3: מציאת שידוך חסר קנאה מקסימלי זול ביותר ב-G:

1. מצאו את חלוקת ה-EFM של G באמצעות אלגוריתם 1.

נקבל: $X_S = \emptyset$ $X_L = \{1,2,3\}$ $Y_S = \emptyset$ $Y_L = \{4,5,6\}$

2. החזר שידוך מקסימלי זול ביותר ב-$G[X_L, Y_L]$.

במקרה הזה,



ונקבל שהעלות של השידוך היא:

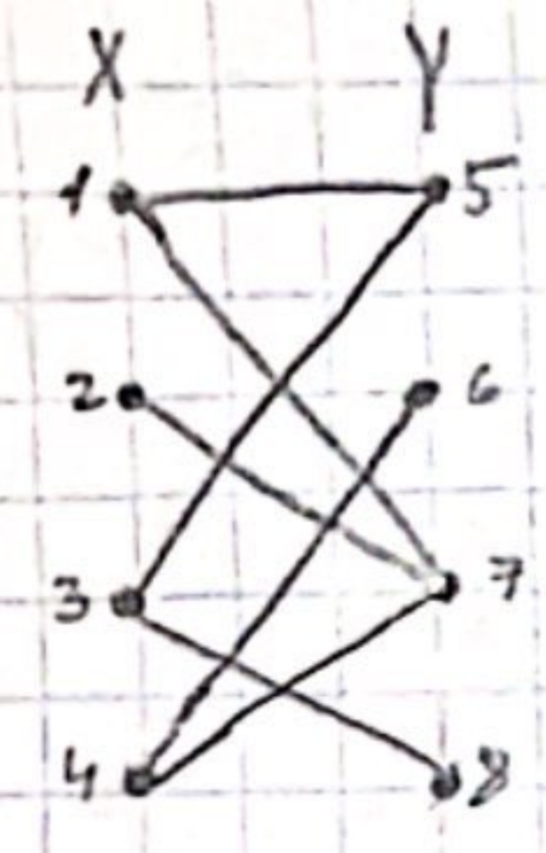
$122+135+150=407$

וזהו שידוך מושלם בעל העלות המינימלית בגרף.

6.

לצורך הדוגמה הזאת, נשתמש בגרף הבא:

G =



ופונקצית משקלים על הצלעות, כך ש- $w: E \to \mathbb{R}$:

$W(1,5)=5$ $W(1,7)=4$ $W(2,7)=1$

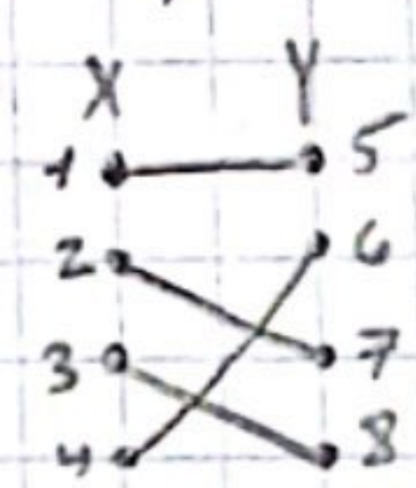
$W(3,5)=2$ $W(3,8)=4$ $W(4,6)=1$

$W(4,7)=2$

אלגוריתם 1: מציאת חלוקת EFM ב-G:

1. מצאו שידוך מקסימלי M ב-G. בדוגמה הזאת נקבל:

M =



2. נסמן: $X_0 = X \setminus X_M = \emptyset$ הקודקודים שלא שודכו ע"י M.

3. חשב את $S(M, X_0)$. במקרה הזה, $X_0 = \emptyset$ ולכן נעבור את החישוב.

4. החזר: $X_S = \bigcup_{i \geq 0} X_i = \emptyset$ $X_L = X \setminus X_S = \{1,2,3,4\}$ $Y_S = \bigcup_{i \geq 1} Y_i = \emptyset$ $Y_L = Y \setminus Y_S = \{5,6,7,8\}$

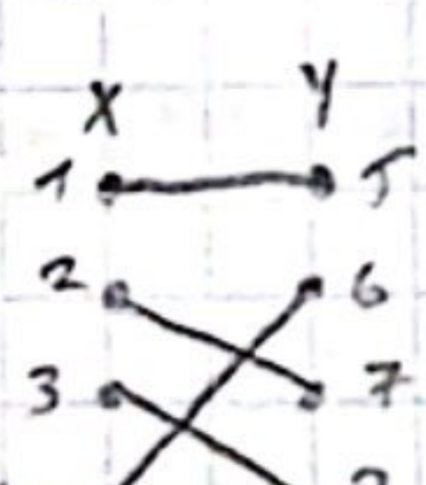
אלגוריתם 3: מציאת שידוך מקסימלי חסר קנאה כבד ביותר ב-G:

1. מצאו את חלוקת ה-EFM של G באמצעות אלגוריתם 1.

במקרה שלנו: $X_S = \emptyset$, $X_L = \{1,2,3,4\}$, $Y_S = \emptyset$, $Y_L = \{5,6,7,8\}$.

2. מצאו שידוך מקסימלי כבד ביותר ב- $G[X_L, Y_L]$.

בגלל ש-M הוא השידוך המושלם היחיד ב-G הוא גם השידוך המקסימלי הכבד ביותר ב-G ולכן נחזיר את M:

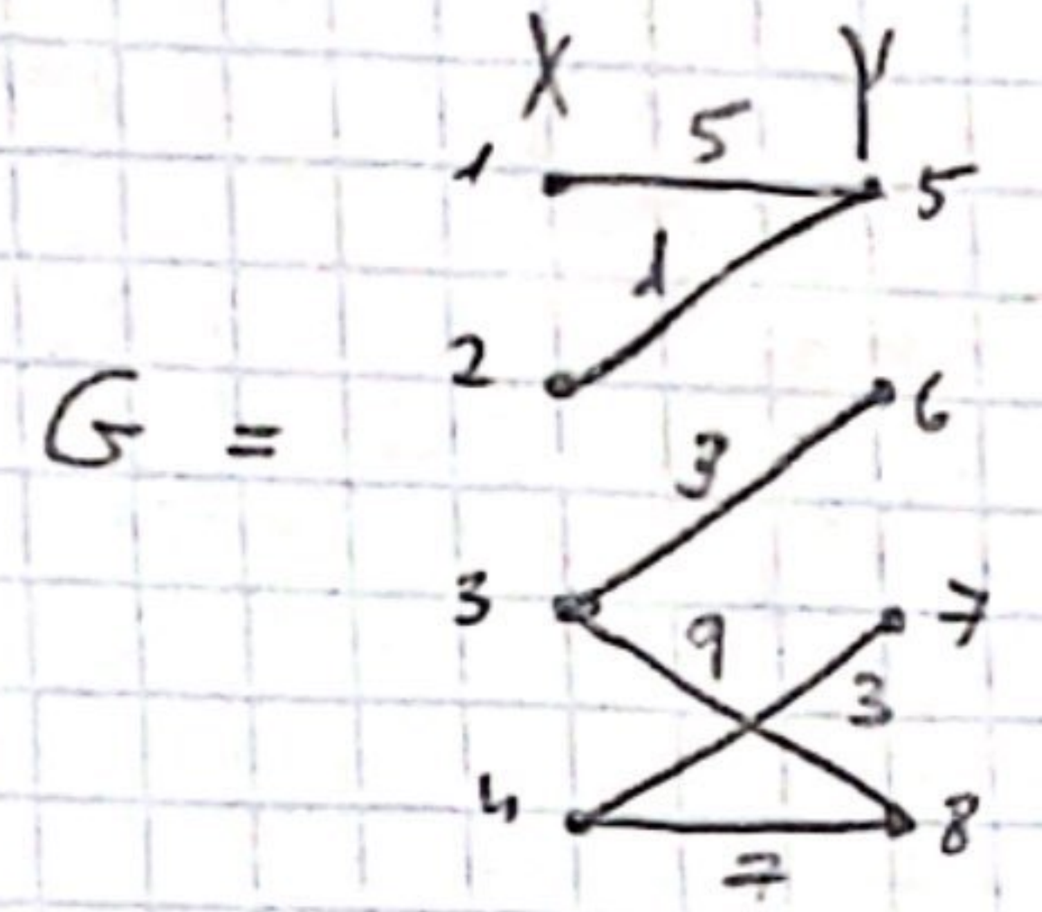


והעלות של M תהיה:

$5+1+4+1=11$

7.

נתבונן בגרף הבא:



ופונקציית משקלים: $w: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

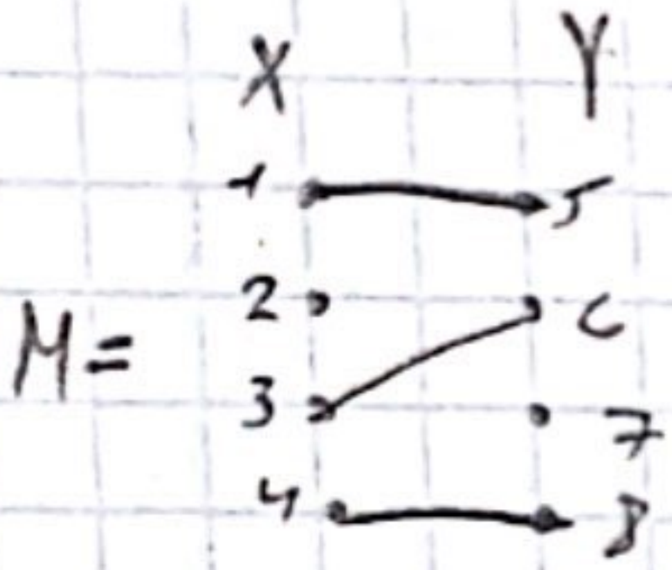
$w(1,5)=5$ $w(2,5)=1$

$w(3,6)=3$ $w(3,8)=9$

$w(4,8)=7$ $w(4,7)=3$

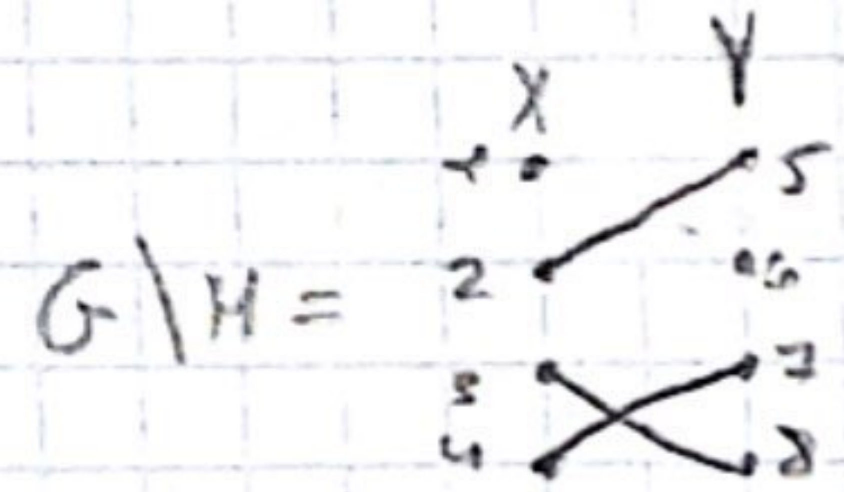
אלגוריתם 1: מציאת חלוקת EFM ב-G:

1. מצאו שידוך מקסימלי M ב-G. בדוגמה פה:



2. נסמן: $X_0 = X \setminus X_M = \{2\}$ הקודקודים של X שלא שודכו ע"י M.

3. חשב את $S(M, X_0)$. תחילה נצייר את $G \setminus M$:



$X_0 = \{2\}$ $Y_1 = N_{G\setminus M}(X_0) = \{5\}$

$X_1 = N_M(Y_1) = \{1\}$ $Y_2 = N_{G\setminus M}(X_1) \setminus Y_1 = \emptyset$

ופה נעצור.

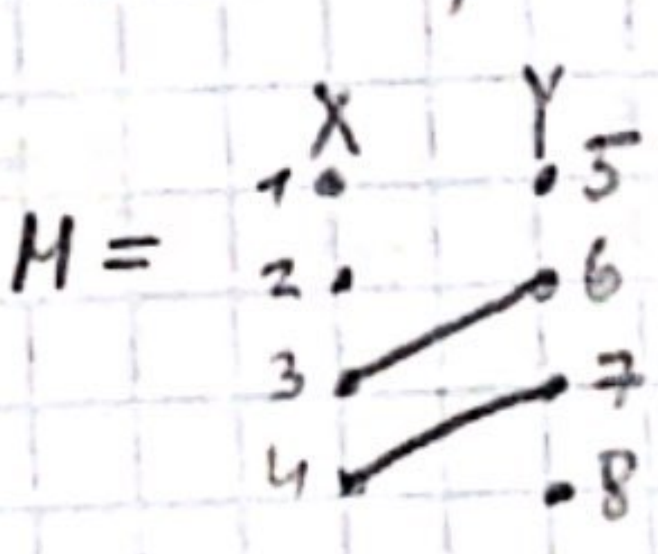
4. הגדר: $X_S = \bigcup_{i\geq 0} X_i = \{2,1\}$ $X_L = X \setminus X_S = \{3,4\}$ $Y_S = \bigcup_{i \geq 1} Y_i = \{5\}$ $Y_L = Y \setminus Y_S = \{6,7,8\}$

אלגוריתם 3: מציאת שידוך חסר קנאה מקסימלי בעל כיור ב-G:

1. מצאו את חלוקת ה-EFM של G באמצעות אלגוריתם 1. במקרה שלנו נקבל: $X_S = \{1,2\}$ $X_L = \{3,4\}$ $Y_S = \{5\}$ $Y_L = \{6,7,8\}$

2. מצאו שידוך מקסימלי בעל כיור בתת-הגרף $G[X_L, Y_L]$.

נקבל:



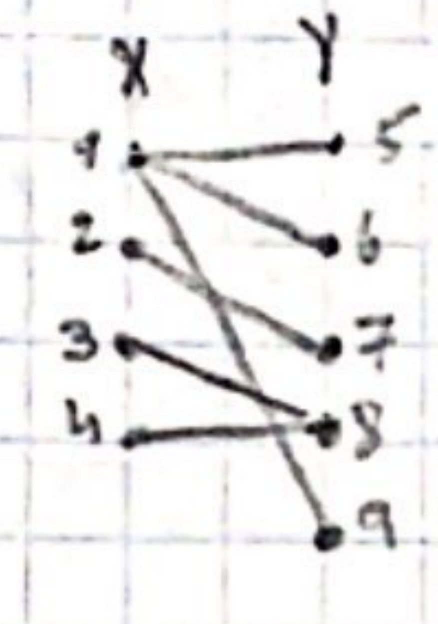
כאשר עלות השידוך היא:

$3+3=6$

Scanned with CamScanner

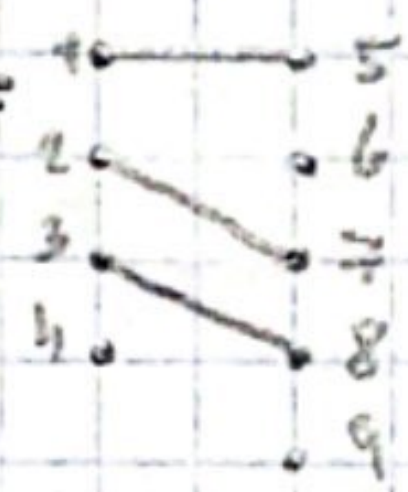
8. כעת נציג מחדש את אלגוריתם 2 על גרפים מסוימים.

נתבונן בגרף הבא:

$G =$ 

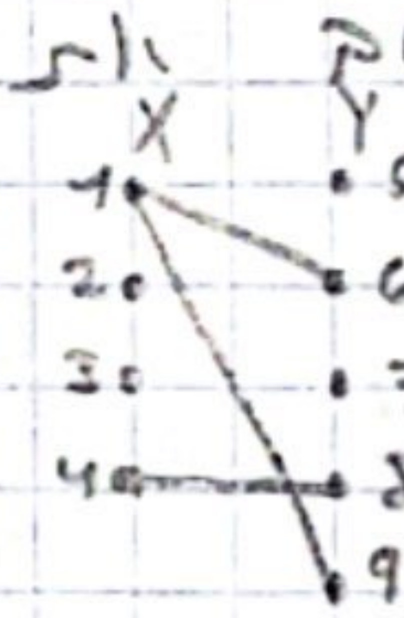
אלגוריתם 1: מציאת חלוקת EFM ב-G:

1. נמצא שידוך מקסימלי M ב-G. במקרה הזה:

$M =$ 

2. נסמן: $X_0 = X \setminus X_M = \{4\}$ הקודקודים של X שלא שודכו ע"י M.

3. חשב את $S(M, X_0)$: תחילה נצייר את $G\setminus M$:

$G \setminus M =$ 

$X_0 = \{4\}$ $\quad Y_1 = N_{G\setminus M}(X_1) = \{8\}$

$X_1 = N_M(Y_1) = \emptyset$

וכאן מסיימים.

4. נחזיר: $X_S = \bigcup_{i\geq 0} X_i = \{4\}$, $X_L = X\setminus X_S = \{1,2,3\}$ $\quad Y_S = \bigcup_{i\geq 0} Y_i = \{8\}$ $\quad Y_L = Y\setminus Y_S = \{5,6,7,9\}$

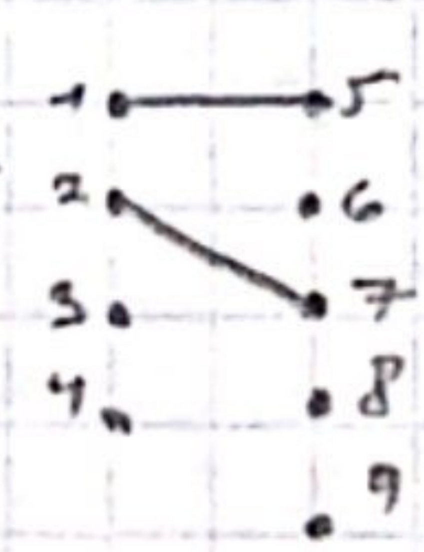
אלגוריתם 2: מציאת שידוך חסר קנאה מקסימלי ב-G:

1. נמצא שידוך מקסימלי M ב-G. ניקח את M כפי שמצאנו באלגוריתם 1.

2. נמצא את חלוקת ה-EFM של G. $\quad X_S = \{4\}$ $\quad X_L = \{1,2,3\}$

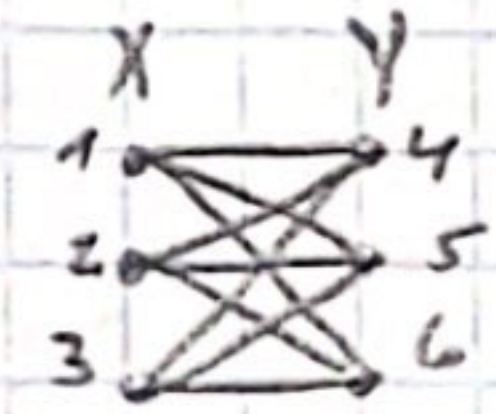
$Y_S = \{8\}$ $\quad Y_L = \{5,6,7,9\}$

3. נחזיר את תת-השידוך $M[X_L, Y_L]$.

$M[X_L, Y_L] =$ 

.9

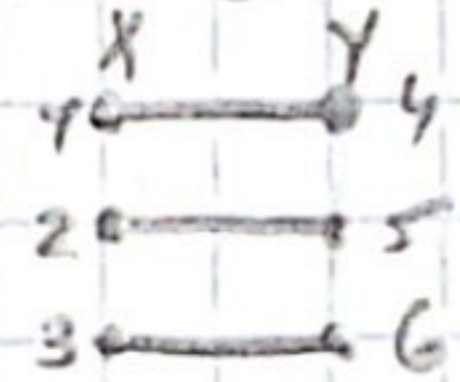
נתבונן בגרף הבא:

G = 

$G = K_{3,3}$

ולכן השידוך חסר הקשוה המקסימלי שמצאנו מכל הוא שידוך מושלם.

מציאת חלוקת EFH ב-G:

1. M = 

2. $X_0 = X \setminus X_M = \emptyset$

3. $S(M, X_0) = \emptyset$ כי $X_0 = \emptyset$.

4. $X_L = X$, $X_S = \emptyset$ $Y_L = Y$ $Y_S = \emptyset$

מציאת שידוך חסר קשוה מקסימלי ב-G:

1. מצאו שידוך M ב-G. ניקח את M מאלגוריתם 1.

2. הפעל את אלגוריתם 1 על G.
$X_S = \emptyset$, $X_L = X$
$Y_S = \emptyset$ $Y_L = Y$

3. החזר את תת-השידוך $M[X_L, Y_L]$.

$M[X_L, Y_L] = M$

10.

דוגמה לגרף שהאלגוריתם 1, 2, 3 לא מוצאים עבורו:

$G =$ 

G הוא גרף לא צפוף ולכן אלגוריתמים 1, 2, 3 לא מוצאים עבורו.