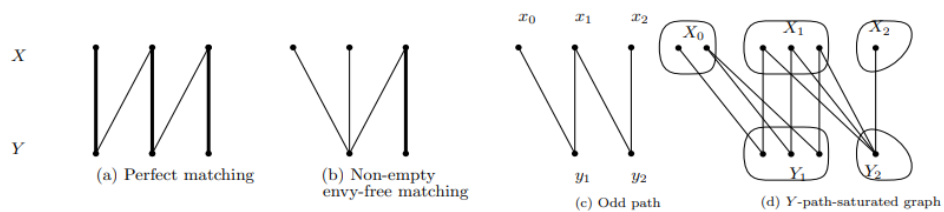


# סיכום מאמר אקדמי

## Envy-free Matchings in Bipartite Graphs and their Applications to Fair Division

*Elad Aigner-Horev and Erel Segal-Halevi*

מגשים: בנימין סאלדמן ודניאל גילקרום



## מבוא

שידוך בגרף דו-צדדי עם חלוקה  $X$  ו- $Y$  של הקודקודים נקרא נטול קנאה אם אין ללא השידוך קודקוד ב- $X$  שהוא סמוך לקודקוד ב- $Y$ . כל שידוך מושלם הוא גם נטול קנאה אבל שידוכים כאלה קיימים גם כאשר אין שידוך מושלם.

המאמר מראה שבכל גרף דו-צדדי קיימת חלוקה ייחודית כך שכל השידוכים נטולי הקנאות נמצאים בקרב הקבוצות של החלוקה ובעזרת ההוכחה הזאת הוא מציע אלגוריתם פולינומיאלי בזמן למציאת שידוך נטול קנאה בגרף דו-צדדי ממושקל ולא ממושקל.

במאמר עונה על השאלה הזו על ידי הוכחה של משפט מבנה עבור גרפים דו-צדדיים. הוא מוכיח שבכל גרף דו-צדדי קיימת חלוקה ייחודית של הקודקודים ל-2 קבוצות: "טובים" ו-"רעים" כאשר הקבוצה של ה-"טובים" היא  $X$  רוויה ולכן מכילה את השידוך נטול הקנאות הגדול ביותר האפשרי, בזמן שהקבוצה של ה-"רעים" בעלי מבנה שזהה למסלול אי-זוגי ולכן מכילה שידוך נטול קנאות ריק בלבד.

כמו כן, המאמר מציע אלגוריתמים עבור בעיות של חלוקה הוגנת הרצים בזמן פולינומי להבדיל ממאמרים אחרים המציעים רעיונות לאלגוריתמים או קרובים לפתרון.

עיקר השימוש של שידוך נטול קנאה הוא באלגוריתמים לחלוקה הוגנת של "עוגה" נטולת קנאה ומידול של הבעיה לבעיות שונות, למשל:

בהינתן שוק שיש בו כמה קונים וכמה סחורות, ולכל טוב יכול להיות מחיר. בהינתן וקטור מחיר, לכל קונה יש ערכת ביקוש - סט של חבילות שממקסמות את התועלת של הקונה על כל החבילות התאמה נטולת קנאה במחיר (בהינתן וקטור מחיר) היא התאמה שבה כל סוכן מקבל חבילה מקבוצת הביקוש שלו. המשמעות היא שאף סוכן לא יעדיף לקבל חבילה נוספת עם אותם מחירים. דוגמה להגדרה זו היא בעיית ההרמוניה בשכירות - התאמת דיירים (הסוכנים) לחדרים (הפריטים) תוך קביעת מחיר לכל חדר.

המאמר מראה כיצד ניתן להשתמש בשידוך נטול קנאה בבעיות שונות של חלוקה הוגנת עם משאבים, "עוגות" או אובייקטים בדידים ובפרט, המאמר מציע אלגוריתמים לחלוקה: אלגוריתם סימטרי לחיתוך "עוגה" פרופורציונלי, אלגוריתם עבור  $1\text{-out-of}(2n-2)$  הקצאה מקסימלית של טובין בדידים ואלגוריתם עבור  $1\text{-out-of}[2n/3]$  הקצאה מקסימלית של רעים (bads) בדידים בקרב  $n$  סוכנים.

**P. Manurangsi, W. Suksompong, When do envy-free allocations exist?, in: Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence, vol. 33, 2109–2116, 2019.**

מאמר מ-2019 בנושא קיום של הקצאות חסרות קנאות, המאמר בוחן תנאים לקיום הקצאות. בשונה מהמאמר שלנו שהציג אלגוריתם לפתרון בעיית חלוקה הוגנת ביעילות מסוימת, המאמר מציג אלגוריתם למציאת שידוך חסר קנאות בתור אמצעי להוכחת תנאי על קיום השידוך והוא אינו הנושא המרכזי.

**Naoyuki Kamiyama, The envy-free matching problem with pairwise preferences, 2021.**

מאמר מ-2021 שמציע אלגוריתם פולינומי למציאת שידוך חסר קנאות בגרף תחת מספר הנחות, בשונה מהמאמר שלנו שמציע אלגוריתם לבעיה זו תחת ההנחה שהגרף דו צדדי בלבד.

**Jiarui Gan, Warut Suksompong, Alexandros A. Voudouris, Envy-freeness in house-allocation problems, 2019.**

מאמר מ-2019 שמציע אלגוריתם יעיל לחישוב השמה חסרת קנאות לקבוצה של קוני בתים ובתים בשונה מהמאמר שלנו במאמר זה גם מציניים תנאי לא הכרחי שאם מתקיים יש סבירות גבוהה לקיום שידוך חסר קנאות במודל (הבעיה של הבתים והקונים מתורגמת לגרף דו צדדי לצורך חישוב)

**Y. Yokoi, Envy-free matchings with lower quotas, Algorithmica 82 (2) (2020) 188–211.**

מאמר מ-2020 שמציע אלגוריתם למציאת שידוך נטול קנאות ובנוסף בעל תכונות נוספות, בשונה מהמאמר שלנו רוצים שבשידוך יהיו עוד תכונות שמתקיימות פרט לחוסר קנאות.

**G. Ch`eze, Don't cry to be the first! Symmetric fair division algorithms exist, arXiv preprint 1804.03833, 2018.**

מאמר מ-2018 שמציע אלגוריתם סימטרי לחיתוך עוגה פרופורציונלי, בשונה מהמאמר שלנו, במאמר זה הם רוצים להוכיח קיום ומתרכזים על השאלה של היתכנות אלגוריתם כזה והגבלות שנובעות ממבנה הבעיה

## הגדרות

1. **שידור בגרף:** יהי גרף דו-צדדי  $G = (X \cup Y, E)$ . שידור  $M \subseteq E$  היא תת קבוצה של הצלעות כך שאין שתי צלעות המחוברות לקודקוד משותף.
2. **שידור מושלם:** יהי גרף דו-צדדי  $G = (X \cup Y, E)$ . שידור  $M \subseteq E$  ייקרא מושלם אם  $M$  מכסה את כל הקודקודים של  $G$ .
3. **שידור נטול קנאות:** יהי גרף דו-צדדי  $G = (X \cup Y, E)$ . שידור  $M \subseteq E$  נקרא שידור נטול קנאות אם אין קודקוד בקבוצה  $X \setminus X_M$  צמוד לקודקוד בקבוצה  $Y_M$  כאשר הקבוצות  $X_M$  ו- $Y_M$  הם קבוצות הקודקודים ששודכו ע"י  $M$  ושייכות ל- $X$  ו- $Y$  בהתאמה.
4. **מסלול  $\gamma$  רווי:** גרף דו-צדדי  $G = (X \cup Y, E)$  נקרא  $\gamma$ -path-saturated (מסלול  $\gamma$  רווי) אם עבור איזשהו  $k \geq 1$  קיימת חלוקה  $X = X_0 \cup \dots \cup X_k$  ו- $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$  כך שלכל  $i \geq 1$  מתקיים:
  - א. יש שידור מושלם בין  $X_i$  ל- $Y_i$ .
  - ב. כל קודקוד ב- $Y_i$  צמוד לקודקוד ב- $X_{i-1}$ .
 כל מסלול אי-זוגי שבו  $|X| > |Y|$  הוא מסלול  $\gamma$  רווי והשידור נטול הקנאה הגדול ביותר בו הוא הקבוצה הריקה.
5. **רצפים מתחלפים (רצף  $M$  מתחלף):** יהי  $M$  שידור בגרף דו-צדדי  $G = (X \cup Y, E)$ . יהי  $X_0 \subset X$  תת הקבוצה שמכילה קודקודים שלא שודכו ב- $M$ .  $M$ -alternating sequence (או רצף  $M$  מתחלף) ב- $X_0$  הוא רצף של זוגות של תתי קבוצות זרות של קודקודים  $X_0 - Y_1 - X_1 - Y_2 - X_2 - \dots$  כאשר לכל  $i \geq 1$ :
  - א.  $Y_i = N_{G \setminus M}(X_{i-1}) \setminus (\cup_{j>i} Y_j)$ .
  - ב.  $X_i = N_M(Y_i)$ .
6. **גרף  $X$  רווי:** יהי גרף דו-צדדי  $G = (X \cup Y, E)$ . הגרף ייקרא  $X$  רווי ( $X$ -saturated graph) אם קיים שידור  $M$  בגרף  $G$  המכסה את כל קודקודי הקבוצה  $X$ . בגרף כזה קיים שידור נטול קנאה מקסימלי.
7. **בעיית חלוקה הוגנת גנרית:** נחשוב על הבעיה הבאה – קיימת קבוצה  $C$  של שמייצגת משאבים שצריכים להתחלק בין  $n$  סוכנים. לכל סוכן יש מדד (פונקציה בין קבוצות)  $V_i: 2^C \rightarrow \mathbb{R}$  כאשר  $i$  זה מספר הסוכן (בין 1 ל- $n$ ) ולכל סוכן יש סף  $t_i \in \mathbb{R}$ . חלוקה  $t$ -הוגנת של  $C$  זו חלוקה של  $C$  ל- $n$  תתי קבוצות  $Z_1 \cup \dots \cup Z_n$  כך שלכל  $i$  (סוכן) מתקיים:  $V_i(Z_i) \geq t_i$ . הקיום של חלוקה  $t$ -הוגנת תלוי בערכי הסף ובטבעו של המשאב  $C$ .
8. **סף סביר:** בהינתן משאב  $C$ , מדד ערכי  $V_i$  על  $C$  ומספר שלם  $n \geq 2$ , מספר ממשי  $t_i \in \mathbb{R}$  נקרא סף סביר עבור  $V_i$  אם:
  - א. קיימת חלוקה של  $C$  כך ש:  $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$  ומתקיים:  $\forall j \in [n]: V_i(C_j) \geq t_i$ .
  - ב. לכל  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  ולכל  $k$  תתי קבוצות לא משותפים  $U_1, \dots, U_k \subseteq C$  אם מתקיים:  $\forall j \in [k]: V_i(U_j) < t_i$  אז קיימת חלוקה של  $C \setminus \cup_{j \in [k]} U_j$  ל- $C_{n-k} \cup \dots \cup C_1$  כך ש:  $\forall j \in [n-k]: V_i(C_j) \geq t_i$ .
9. **חיתוך עוגה פרופורציונלי:** בעיית חיתוך עוגה פרופורציונלית היא מקרה מיוחד של בעיית החלוקה ההוגנת הגנרית, שבו המשאב  $C$  הוא רציף והוא בדרך כלל נקרא "עוגה" ומיוצג על ידי האינטרוול הממשי  $[0,1]$ , המדדים  $V_i$  האם לא אטומיים ולכל סוכן  $i$  ערך הסף הוא  $t_i = V_i(C)/n$  והוא גם סף סביר.
10. **הקצאה הוגנת של אובייקטים בדידים:** בעיית הקצאת אובייקט הוגנת היא מקרה מיוחד של בעיית החלוקה ההוגנת הגנרית שבה המשאב  $C$  הוא קבוצה סופית שהאיברים שלו נקראים אובייקטים או פריטים ומדדי המחיר הם כל פונקציה בין קבוצות:  $V_i: 2^C \rightarrow \mathbb{R}$ . אובייקטים עם ערך חיובי לכל הסוכנים נקראים טובין (goods) ואובייקטים עם ערכים שליליים נקראים רעים (bads).

## האלגוריתמים

### אלגוריתם 1: מציאת חלוקת EFM של גרף דו-צדדי

**קלט:** גרף דו-צדדי  $G = (X \cup Y, E)$ .

**פלט:** חלוקת EFM ייחודית ל- $G$  של הקודקודים  $X = X_S \cup X_L$  ו- $Y = Y_S \cup Y_L$ .

1. מצא שידוך מקסימלי  $M$  ב- $G$ .
2. יהי  $X_0 = X \setminus X_M$  תת קבוצה של קודקודים שלא שודכו על ידי  $M$ .
3. חשב את  $S(M, X_0)$ .
4. החזר:  $X_L = X \setminus X_S$  ו- $X_S = \bigcup_{i \geq 0} X_i$  ו- $Y_L = Y \setminus Y_S$  ו- $Y_S = \bigcup_{i \geq 0} Y_i$ .

### אלגוריתם 2: מציאת שידוך נטול קנאות מקסימלי בגרף ללא פונקציית משקלים

**קלט:** גרף דו-צדדי  $G = (X \cup Y, E)$ .

**פלט:** שידוך envy-free מקסימלי בגרף דו-צדדי ללא פונקציית משקלים  $G$ .

1. מצא שידוך מקסימלי  $M$  ב- $G$ .
2. מצא את חלוקת ה- $EFM$   $X = X_S \cup X_L$  ו- $Y = Y_S \cup Y_L$  באמצעות אלגוריתם 1.
3. החזר את תת-השידוך  $G[X_L, Y_L]$ .

### אלגוריתם 3: מציאת שידוך נטול קנאות מקסימלי בגרף עם פונקציית משקלים על הצלעות $w$

**קלט:** גרף דו-צדדי  $G = (X \cup Y, E)$  עם פונקציית משקלים על הצלעות  $w$ .

**פלט:** שידוך envy-free מקסימלי בעל העלות הנמוכה ביותר.

1. מצא את חלוקת ה- $EFM$   $X = X_S \cup X_L$  ו- $Y = Y_S \cup Y_L$  באמצעות אלגוריתם 1.
2. מצא והחזר את השידוך המקסימלי בעלות העלות המינימלית ב- $G[X_L, Y_L]$ .

#### אלגוריתם 4: The Lone Divider algorithm

קלט:

1. קבוצת מקורות  $C$  שצריך לחלק.
  2. קבוצה של סוכנים  $X = [n]$  עם מדדים  $(V_i)_{i=1}^n$  על  $C$ .
  3. ערכי סף  $(t_i)_{i=1}^n$  המקיימים את תנאי הסף הסביר (הגדרה מספר 8).
- פלט:** חלוקה של  $C$  ל- $Z_1 \cup \dots \cup Z_n$  כך שמתקיים  $\forall i \in [n]: V_i(C_i) \geq t_i$ .

1. בחר באופן שרירותי סוכן מהקבוצה  $X$ . חלק את הקבוצה  $C$  ל- $|X|$  תתי קבוצות זרים המקיימים  $V_a(C_j) \geq t_a \forall j \in X$ .
2. הגדר גרף דו-צדדי  $G$  עם הסוכנים של  $X$  בצד אחד והקבוצה  $Y = \{C_1, \dots, C_{|X|}\}$  בצד השני. הוסף קשת  $(i, C_j)$  כשמתקיים  $V_i(C_j) \geq t_i$ .
3. השתמש באלגוריתם 2 ומצא שידוך נטול קנאות מקסימלי  $M$  ב- $G$ . הבא לכל אלמנט משודך ב- $Y_M$  את הסוכן שמשודך לו ב- $X_M$ .
4. הגדר  $X \leftarrow X \setminus X_M$  להיות הקבוצה של הסוכנים שלא שודכו ו- $C \leftarrow C \setminus (\cup Y_M)$  המשאבים שלא שודכו. אם  $X \neq \emptyset$  חזור על צעד מספר 1.

#### אלגוריתם 5: אלגוריתם סימטרי לחיתוך עוגה פרופורציונלי

**קלט:** עוגה  $C = [0,1]$  וקבוצה  $X = [n]$  של סוכנים בעלי מדדים לא אטומיים  $(V_i)_{i=1}^n$  על  $C$ . המדדים מנורמלים כך שמתקיים:  $\forall i \in [n]: V_i(C) = 1$ .

**פלט:** חלוקה  $C = Z_1 \cup \dots \cup Z_n$  כך שמתקיים  $\forall i \in [n]: V_i(Z_i) \geq 1/n$ .

1. שאל כל סוכן  $i \in X$  לייצר וקטור של סימנים  $z_i$  של  $n-1$  סימנים כך שמתקיים:  $0 < z_{i,1} < \dots < z_{i,n-1} < 1$ .
2. בחר מווקטורי הסימנים  $\{z_i | i \in [n]\}$  את האחד עם הערך המילוני הנמוך ביותר. חלק את  $C$  לפי הסימנים האלה. הגדר את חלקי החלוקה על ידי  $C_1, \dots, C_n$ .
3. הגדר גרף דו-צדדי  $G$  עם הסוכנים של  $X$  בצד אחד והחלקים מהסעיף הקודם (מסומנים באמצעות  $Y$ ) בצד השני. הוסף קשת  $(i, C_j)$  כשמתקיים  $V_i(C_j) \geq 1/n$ .
4. הקצה לכל סוכן  $i \in X$  משקל  $w(i) \in \{0, \dots, n-1\}$  זוהי פונקציה של קבוצת השכנים  $N_G(i)$  כך ששני סוכנים  $i, i' \in X$  בעלי משקל זהה אם ורק אם  $N_G(i) = N_G(i')$ .
5. הקצה לכל חלק  $C_j \in Y$  משקל ייחודי  $w(C_j) \in \{0, \dots, n-1\}$  כך שהמשקל של החלק השמאלי ביותר (המשויך ל-0) הוא 0 והמשקל של החלק השמאלי ביותר הבא הוא 1 וכו'.
6. הקצה לכל קשת  $(i, C_j) \in E$  את המחיר  $w(i, C_j) = 2^{n \cdot w(i) + w(C_j)}$ . בעזרת אלגוריתם 3, מצא שידוך נטול קנאות מקסימלי זול ביותר  $M$  ב- $G$ .
7. הגדר  $X_Y \subseteq X$  להיות הקבוצה של כל הסוכנים המשוויכים לכל החלקים ב- $Y$ . תן לכל סוכן בקבוצה  $X_Y$  חלק שרירותי מ- $N_M(X_Y)$ .
8. הגדר  $X_R = X_M \setminus X_Y$ . חלק את הסוכנים ב- $X_R$  לתתי קבוצות לפי המשקל שלהם. כלומר, עבור  $k \geq 1$  כלשהו, מצא חלוקה  $X_R = X_1 \cup \dots \cup X_k$  כך ש- $i, i'$  שייכים לאותו  $X_j$  אם ורק אם  $w(i) = w(i')$ .
9. עבור כל  $j \in [k]$ , חלק בצורה רקורסיבית את האיחוד של החלקים ב- $N_M(X_j)$  בקרב הסוכנים של  $X_j$ .
10. חלק בצורה רקורסיבית את האיחוד של החלקים ב- $Y \setminus Y_M$  בקרב הסוכנים של  $X \setminus X_M$  על ידי חזרה לצעד מספר 1.

## הוכחת נכונות האלגוריתמים

ניתן להוכיח את הנכונות של אלגוריתמים 1-3 על ידי הוכחת הטענות הבאות:

**טענה 1:** יהי  $M$  שידוך מקסימלי בגרף דו-צדדי  $G = (X \cup Y, E)$  ו- $X_0 = X \setminus X_M$  תת קבוצה של קודקודים שלא שודכו על ידי  $M$ . וחלוקות  $X = X_S \cup X_L$  ו- $Y = Y_S \cup Y_L$  המושגות על ידי  $S(M, X_0)$  ומתקיים:

1. אין צלעות בין  $X_S$  ל- $Y_L$ .
  2. תת הגרף  $G[X_S, Y_S]$  הוא  $Y$ -path-saturated.
  3. תת הגרף  $G[X_L, Y_L]$  הוא  $X$ -saturated.
  4. כל  $X_L$ -saturating matching הוא  $envy$ -free ב- $G$ .
  5. כל שידוך  $envy$ -free ב- $G$  מוכל ב- $G[X_L, Y_L]$ .
- (סעיפים 4,5 תקפים לכל חלוקה של  $X$  ו- $Y$  שמקיימים את סעיפים 1,2,3,4,5)

**הוכחת טענה 1: הוכחת סעיף (1)** - לפי הבניה של הגרף, הקבוצה  $Y_S$  זו קבוצת כל השכנים של  $X_S$  ב- $G$ . **הוכחת סעיף (2)** - נוכיח תחילה ש- $M[X_S, Y_S]$  תת הקבוצה של  $M$  המוכלת ב- $G[X_S, Y_S]$  מרווה את  $X_S$ . אכן, עבור  $i \geq 1$  כלשהו, קודקוד כלשהו  $y_i \in Y_i$  לא משודך על ידי  $M$  ולכן מסלול  $M$  מתחלף ניתן לאיתור בקרב הקשתות ששימשו את הבניה של  $S(M, X_0)$  כלומר:  $y_i - X_{i-1} - Y_{i-1} - \dots - X_0$ . כאשר שני קודקודי הקצה לא משודכים. על ידי היפוך המסלול ניתן להגדיל את השידוך  $M$  ב-1, אבל זה סותר את המקסימליות של  $M$ . לכן, כל הקודקוד של  $Y_i = \bigcup_{i \geq 1} Y_i$  משודכים על ידי  $M$ . לפי הבניה, קבוצת השידוכים שלהם ב- $M$  היא  $X_i \subseteq X_S$  ו- $Y_i \subseteq Y_S$ . זה מרמז על זה שבניית  $S(M, X_0)$  מסתיימת בצד של  $X$ , כלומר היא מסתיימת ב- $X_k$  עבור  $k \geq 0$  כלשהו. כעת, החלוקות  $X = X_0 \cup \dots \cup X_k$  ו- $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$  מקיימות את ההגדרה של מסלול  $Y$  רווי.

**הוכחת סעיף (3)** - נוכיח ש- $M[X_L, Y_L]$  תת הקבוצה של  $M$  המוכלת ב- $G[X_L, Y_L]$  מרווה את  $X_L$ .

אכן, לפי הנחת הטענה כל הקודקודים של  $X$  שלא משודכים על ידי  $M$  מוכלים ב- $X_0 \subseteq X_S$  כך שכל הקודקודים של  $X_L$  משודכים על ידי  $M$ . לפי הבניה, הם חייבים להיות משודכים לקודקודים שלא בתוך כל  $Y_i$ , לכן כל השידוכים נמצאים כולם ב- $Y_L$ .

**הוכחת סעיף (4)** - יהי  $W$  שידוך  $X_L$  מרווה ב- $G[X_L, Y_L]$ . מאחר ו- $W$  מרווה את  $X_L$ , אין קודקוד "קנאי" ב- $X_L$ . לפי (1), אין קשתות בין  $X_S$  ו- $Y_L$ . מאחר ורק הקודקודים של  $Y_L$  רוויים על ידי  $W$ , אף קודקוד של  $X_S$  מקנא. לכן, אין ב- $X$  קודקוד שמקנא ולכן  $W$  הוא שידוך חסר קנאות ב- $G$ .

**הוכחת סעיף (5)** - יהי  $W$  שידוך נטול קנאות כלשהו ב- $G$ . נגדיר:  $X_{SW}$  תת הקבוצה של  $X_S$  שמרווה על ידי  $W$  ו- $Y_{SW}$  תת הקבוצה של  $Y_S$  שמרווה על ידי  $W$ . אנחנו צריכים להוכיח ש- $X_{SW}$  ו- $Y_{SW}$  ריקים.

לפי (1), קודקוד של  $X_{SW}$  יכול להיות משודך רק לקודקוד של  $Y_{SW}$ , לכן מספיק להוכיח ש- $Y_{SW}$  ריקה.

נגדיר:  $k_{SW} = |Y_{SW}|$  ונניח בשלילה ש- $k_{SW} > 0$ . לפי (2) הגרף  $G[X_S, Y_S]$  הוא מסלול  $Y$ -רווי. נסמן את החלוקות על ידי:  $X = X_0 \cup \dots \cup X_k$  ו- $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_i$ . נגדיר  $i \geq 1$  להיות האינדקס הקטן ביותר כך שקודקוד של  $Y_i$  משודך על ידי  $W$  ומתקיים:  $Y_{SW} \subseteq \bigcup_{j \geq i} Y_j$ . לפי הגדרה 4, כל הקודקודים של  $Y_{SW}$  משודכים באופן מושלם לקודקודים של  $X_j$  ו- $Y_j$  עבור  $j \geq i$ . נסמן את השידוך שלהם על ידי.

נשים לב שמתקיים  $k_{SW} = |X'_{SW}|$ . כל קודקוד  $x \in X'_{SW}$  סמוך לקודקוד של  $Y_{SW}$  שמרווה על ידי  $W$ .

כדי להבטיח ש- $x$  לא מקנא,  $x$  חייב להיות מרווה על ידי  $W$ .

נגדיר את  $x'$  להיות קודקוד ב- $Y_i \cap Y_{SW}$ . לפי הגדרה 4, הוא סמוך לקודקוד כלשהו  $x' \in X_{i-1}$ .

כדי להבטיח ש- $x'$  לא מקנא, הוא גם חייב להיות רווי על ידי  $W$ . אבל  $x' \notin X'_{SW}$  מאחר ומתקיים:

$k_{SW} : W$  שרוויים על ידי  $X_S$  שרוויים על ידי  $X'_{SW} \subseteq \bigcup_{j \geq i} X_j$ . לכן, חייבים להיות לפחות  $k_{SW} + 1$  קודקודים של  $X_S$  שרוויים על ידי  $W$ . אבל זו סתירה שכן הקודקודים של  $X_S$  יכולים להיות משודכים רק לקודקודים של  $Y_S$  ורק  $k_{SW}$  קודקודים של  $Y_S$  משודכים על ידי  $W$ .

**טענה 2:** בכל גרף דו-צדדי  $G = (X \cup Y, E)$  קיימת חלוקה ייחודית  $X = X_S \cup X_L$  ו- $Y = Y_S \cup Y_L$

שמקיימת את שלושת התנאים הבאים:

1. אין צלעות בין  $X_S$  ל- $Y_L$ .
2. תת הגרף  $G[X_S, Y_S]$  הוא  $Y$ -path-saturated.
3. תת הגרף  $G[X_L, Y_L]$  הוא  $X$ -saturated.

בנוסף, החלוקה הזאת מניבה את התוצאות הבאות:

4. כל  $X_L$  – saturating matching ב- $G[X_L, Y_L]$  הוא  $envy$ -free ב- $G$ .
5. כל שידוך  $envy$ -free ב- $G$  מוכל ב- $G[X_L, Y_L]$ .

**הוכחת טענה 2:** נגדיר גרף דו-צדדי  $M, G = (X \cup Y, E)$  שידוך מקסימלי שרירותי ב- $G$  ו-חלוקות  $X = X_S \cup X_L$  ו- $Y = Y_S \cup Y_L$  המושרות על ידי הסדרה מתחלפת המקסימלית.

טענה 1 מראה שהחלוקות האלה מספקות את סעיפים 1,2,3,4,5. נותר להוכיח שהחלוקות הללו הן ייחודיות, כלומר הן לא תלויות בשידוך המקסימלי  $M$ .

נשקול חלוקות חלופיות  $X = X'_S \cup X'_L$  ו- $Y = Y'_S \cup Y'_L$  המספקות את סעיפים 1,2,3.

הפעלת סעיף 4 של טענה 1 על החלוקות  $X_S \cup X_L, Y_S \cup Y_L$  מרמזת שיש שידוך נטול קנאות ב- $G$  שמרווה את  $X_L$ . הפעלת סעיף 5 של טענה 1 על החלוקות  $X'_S \cup X'_L, Y'_S \cup Y'_L$  מרמזת על שהשידוך הזה חייב להיות מוכל ב- $G[X'_L, Y'_L]$ , בפרט  $X_L \subseteq X'_L$ . טיעונים אנלוגיים מרמזים ש- $X'_L \subseteq X_L$ .

לכן,  $X_L = X'_L$ . ולכן גם  $X'_L = X_L$ . מאחר ו- $Y_S = N_G(X_S)$  ו- $Y'_S = N_G(X'_S)$  מתקיים  $Y'_S = Y_S$  ולכן גם  $Y'_L = Y_L$ .

**הוכחת נכונות אלגוריתם מספר 1:**

לפי הגדרת החלוקות  $X = X_S \cup X_L$  ו- $Y = Y_S \cup Y_L$  בעזרת חישוב ה- $M$  סדרה מתחלפת המקסימלית בהוכחת טענה 2, נובע שהחלוקה המושרת על ידי חישוב ה- $M$  סדרה מתחלפת המקסימלית באלגוריתם (1) מספקת את סעיפים 1,2,3,4,5 של טענה 2 ולכן החלוקות:

$X_S = U_{i \geq 0} X_i, X_L = X \setminus X_S$  ו- $Y_S = U_{i \geq 0} Y_i, Y_L = Y \setminus Y_S$  מהוות חלוקות ייחודיות המקיימות את התנאים של טענה 2.

**הוכחת נכונות אלגוריתם מספר 2:**

לפי סעיף 1 של טענה 2 השידוך המקסימלי בגרף  $G[X_L, Y_L]$  (כאשר  $X_L, Y_L$  נובעים מאלגוריתם 1) מרווה את  $X_L$  ולפי סעיף 4 של טענה 2 השידוך הזה נטול קנאות. לפי סעיף 5 של טענה 2 אין עוד שידוך נטול קנאות שיכול להרוות כל קודקוד של  $X_S$ . ולכן השידוך המוחזר הוא בהכרח שידוך נטול קנאות מקסימלי.

**הוכחת נכונות אלגוריתם מספר 3:**

בדיוק כמו באלגוריתם 2, מתחילים בלמצוא את החלוקה הייחודית של  $G$  על ידי שימוש באלגוריתם 1. ההבדל הוא בצעד האחרון של האלגוריתם: במקום להחזיר את  $M[X_L, Y_L]$ , שזה שידוך  $X_L$  רווי, מחזירים שידוך  $X_L$  רווי בעל העלות הנמוכה ביותר. מציאת שידוך מקסימלי בעל העלות הנמוכה יותר ידוע בתור בעיית ההשמה. בגלל שיתכן והגדלים של  $X_L, Y_L$  יהיו שונים זו בעיית ההשמה לא מאוזנת. קיימים אלגוריתמים שמציעים פתרון לבעיה הזאת ומבוססים על השיטה ההונגרית. נוכיח כעת כי האלגוריתם נכון: לפי טענה 2 כל השידוכים חסרי הקנאות ב- $G$  נמצאים בתת-הגרף  $G[X_L, Y_L]$  וכל השידוכים המקסימליים ב- $G[X_L, Y_L]$  מרווים את  $X_L$  ולכן הם נטולי קנאה. לכן, הפעלת השיטה ההונגרית על- $G[X_L, Y_L]$  מניבה שידוך חסר קנאות מקסימלי בעל העלות הנמוכה ביותר ב- $G$ .



## **שאלות פתוחות**

### **שאלה פתוחה 1**

האם יש אלגוריתם פולינומי להכרעה האם קיים בגרף דו צדדי זיווג אחד לכולם חסר קנאה לא ריק?

### **שאלה פתוחה 2**

האם יש אלגוריתם פולינומי שעבור פונקציית ערך  $w$  מוצאת זיווג  $w$ -חסר-קנאה חלקית בגודל מקסימלי, האם קיים בנוסף עבור זיווג מקסימלי בערך?

### **שאלה פתוחה 3**

האם קיים אלגוריתם פולינומי למציאת שידוך מקסימלי מבין הזיווגים חסרי הקנאה המוערכים עבור אחד משיטות ההערכה שנשקלו במאמר?