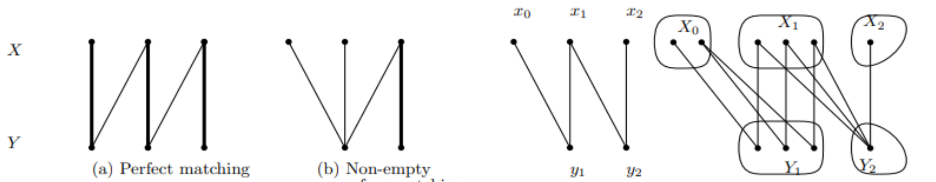
<u>סיכום מאמר אקדמי</u>

Envy-free Matchings in Bipartite Graphs and their Applications to Fair Division

Elad Aigner-Horev and Erel Segal-Halevi

מגישים: בנימין סאלדמן ודניאל גילקרוב



(a) Perfect matching (b) Non-empty envy-free matching (c) Odd path (d) Y-path-saturated graph

מבוא

שידוך בגרף דו-צדדי עם חלוקה X ו-Y של הקודקודים נקרא נטול קנאה אם אין ללא השידוך קודקוד ב-X שהוא סמוך לקודקוד ב-Y. כל שידוך מושלם הוא גם נטול קנאה אבל שידוכים כאלה קיימים גם כאשר אין שידוך מושלם.

המאמר מראה שבכל גרף דו-צדדי קיימת חלוקה ייחודית כך שכל השידוכים נטולי הקנאות נמצאים בקרב הקבוצות של החלוקה ובעזרת ההוכחה הזאת הוא מציע אלגוריתם פולינומיאלי בזמן למציאת שידוך נטול קנאה בגרף דו-צדדי ממושקל ולא ממושקל.

במאמר עונה על השאלה הזו על ידי הוכחה של משפט מבנה עבור גרפים דו צדדיים. הוא מוכיח שבכל גרף דו צדדי קיימת חלוקה ייחודית של הקודקודים ל-2 קבוצות: "טובים" ו-"רעים" כאשר הקבוצה של ה-"טובים" היא X רוויה ולכן מכילה את השידוך נטול הקנאות הגדול ביותר האפשרי, בזמן שהקבוצה של ה-"רעים" בעלי מבנה שזהה למסלול אי-זוגי ולכן מכילה שידוך נטול קנאות ריק בלבד.

כמו כן, המאמר מציע אלגוריתמים עבור בעיות של חלוקה הוגנת הרצים בזמן פולינומי להבדיל ממאמרים אחרים המציעים רעיונות לאלגוריתמים או קרובים לפתרון.

עיקר השימוש של שידוך נטול קנאה הוא באלגוריתמים לחלוקה הוגנת של "עוגה" נטולת קנאה ומידול של הבעיה לבעיות שונות, למשל:

בהינתן שוק שיש בו כמה קונים וכמה סחורות, ולכל טוב יכול להיות מחיר. בהינתן וקטור מחיר, לכל קונה יש ערכת ביקוש - סט של חבילות שממקסמות את התועלת של הקונה על כל החבילות התאמה נטולת קנאה במחיר (בהינתן וקטור מחיר) היא התאמה שבה כל סוכן מקבל חבילה מקבוצת הביקוש שלו. המשמעות היא שאף סוכן לא יעדיף לקבל חבילה נוספת עם אותם מחירים. דוגמה להגדרה זו היא בעיית ההרמוניה בשכירות - התאמת דיירים (הסוכנים) לחדרים (הפריטים) תוך קביעת מחיר לכל חדר.

המאמר מראה כיצד ניתן להשתמש בשידוך נטול קנאה בבעיות שונות של חלוקה הוגנת עם משאבים, "עוגות" או אובייקטים בדידים ובפרט, המאמר מציע אלגוריתמים לחלוקה: אלגוריתם סימטרי לחיתוך "עוגה" פרופורציונלי, אלגוריתם עבור 1-out-of(2n-2) הקצאה מקסימלית של טובין בדידים ואלגוריתם עבור 1-out-of[2n/3] הקצאה מקסימלית של רעים (bads) בדידים בקרב n סוכנים.

עבודות קודמות

P. Manurangsi, W. Suksompong, When do envy-free allocations exist?, in: Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence, vol. 33, 2109–2116, 2019.

מאמר מ2019 בנושא קיום של הקצאות חסרות קנאות, המאמר בוחן תנאים לקיום הקצאות.

בשונה מהמאמר שלנו שהציג אלגוריתם לפתרון בעיית חלוקה הוגנת ביעילות מסוימת, המאמר מציג אלגוריתם למציאת שידוך חסר קנאות בתור אמצעי להוכחת תנאי על קיום השידוך והוא אינו הנושא המרכזי.

Naoyuki Kamiyama, The envy-free matching problem with pairwise preferences, 2021.

מאמר מ2021 שמציע אלגוריתם פולינומי למציאת שידוך חסר קנאות בגרף תחת מספר הנחות,

בשונה מהמאמר שלנו שמציע אלגוריתם לבעיה זו תחת ההנחה שהגרף דו צדדי בלבד.

Jiarui Gan, Warut Suksompong, Alexandros A. Voudouris, Envy-freeness in house-allocation problems, 2019.

מאמר מ2019 שמציע אלגוריתם יעיל לחישוב השמה חסרת קנאות לקבוצה של קוני בתים ובתים

בשונה מהמאמר שלנו במאמר זה גם מציינים תנאי לא הכרחי שאם מתקיים יש סבירות גבוהה

לקיום שידוך חסר קנאות במודל (הבעיה של הבתים והקונים מתורגמת לגרף דו צדדי לצורך חישוב)

Y. Yokoi, Envy-free matchings with lower quotas, Algorithmica 82 (2) (2020) 188–211.

מאמר מ2020 שמציע אלגוריתם למציאת שידוך נטול קנאות ובנוסף בעל תכונות נוספות, בשונה מהמאמר שלנו רוצים שבשידוך יהיו עוד תכונות שמתקיימות פרט לחוסר קנאות.

G. Ch`eze, Don’t cry to be the first! Symmetric fair division algorithms exist, arXiv preprint 1804.03833, 2018.

מאמר מ2018 שמציע אלגוריתם סימטרי לחיתוך עוגה פרופורציונלי, בשונה מהמאמר שלנו, במאמר זה הם רוצים להוכיח קיום ומתרכזים על השאלה של היתכנות אלגוריתם כזה והגבלות שנובעות ממבנה הבעיה

הגדרות

1. **שידוך בגרף:** יהי גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$. שידוך $M \subseteq E$ היא תת קבוצה של הצלעות כך שאין שתי צלעות המחוברות לקודקוד משותף.
2. **שידוך מושלם:** יהי גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$. שידוך $M \subseteq E$ ייקרא מושלם אם M מכסה את כל הקודקודים של G.
3. **שידוך נטול קנאות:** יהי גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$. שידוך $M \subseteq E$ נקרא שידוך נטול קנאות אם אין קודקוד בקבוצה $X \backslash X_M$ צמוד לקודקוד בקבוצה Y_M כאשר הקבוצות X_M ו-Y_M הם קבוצות הקודקודים ששודכו ע"י M ושייכות ל-X ו-Y בהתאמה.
4. **מסלול Y רווי:** גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$ נקרא Y -path-saturated (מסלול Y רווי) אם עבור איזשהו $k \geq 1$ קיימת חלוקה $X = X_0 \cup \ldots . \cup X_k$ ו-$Y = Y_1 \cup \ldots . \cup Y_k$ כך שלכל $i \geq 1$ מתקיים:
   א. יש שידוך מושלם בין X_i ל-Y_i.
   ב. כל קודקוד ב-Y_i צמוד לקודקוד ב-X_{i-1}.
   כל מסלול אי-זוגי שבו $|X| > |Y|$ הוא מסלול Y רווי והשידוך נטול הקנאה הגדול ביותר בו הוא הקבוצה הריקה.
5. **רצפים מתחלפים (רצף M מתחלף):** יהי M שידוך בגרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$. יהי $X_0 \subset X$ תת הקבוצה שמכילה קודקודים שלא שודכו ב-M. *M-alternating sequence* (או רצף M מתחלף) ב-X_0 הוא רצף של זוגות של תתי קבוצות זרות של קודקודים $\mathrm{X}_0 - \mathrm{Y}_1 - \mathrm{X}_1 - \mathrm{Y}_2 - X_2 - \cdots$ כאשר לכל $i \geq 1$:
   א. $Y_i = N_{G \backslash M}(X_{i-1}) \setminus (\cup_{j>i} Y_j)$.
   ב. $X_i = N_M(Y_i)$.
6. **גרף X רווי:** יהי גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$. הגרף ייקרא X רווי (X-saturated graph) אם קיים שידוך M בגרף G המכסה את כל קודקודי הקבוצה X. בגרף כזה קיים שידוך נטול קנאה מקסימלי.
7. **בעיית חלוקה הוגנת גנרית:** נחשוב על הבעיה הבאה – קיימת קבוצה C של שמייצגת משאבים שצריכים להתחלק בין n סוכנים. לכל סוכן יש מדד (פונקציה בין קבוצות) $V_i: 2^c \rightarrow \mathbb{R}$ כאשר i זה מספר הסוכן (בין 1 ל-n) ולכל סוכן יש סף $t_i \in \mathbb{R}$. חלוקה t-הוגנת של C זו חלוקה של C ל-n תתי קבוצות $C = Z_1 \cup \ldots . \cup Z_n$ כך שלכל i (סוכן) מתקיים: $V_i(Z_i) \geq t_i$. הקיום של חלוקה t-הוגנת תלוי בערכי הסף ובטבעו של המשאב C.
8. **סף סביר:** בהינתן משאב C, מדד ערכי V_i על C ומספר שלם $n \geq 2$, מספר ממשי $t_i \in \mathbb{R}$ נקרא סף סביר עבור V_i אם:
   א. קיימת חלוקה של C כך ש: $C = C_1 \cup \ldots . \cup C_n$ ומתקיים: $\forall j \in [n]: V_i(C_j) \geq t_i$.
   ב. לכל $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ ולכל k תתי קבוצות לא משותפים $U_1, \ldots, U_k \subseteq C$ אם מתקיים: $\forall j \in [k]: V_i(U_j) < t_i$ אז קיימת חלוקה של $C \backslash \cup_{j \in [k]} U_j$ ל-$C_1 \cup \ldots . \cup C_{n-k}$ כך ש: $\forall j \in [n-k]: V_i(C_j) \geq t_i$.
9. **חיתוך עוגה פרופורציונלי:** בעיית חיתוך עוגה פרופורציונלית היא מקרה מיוחד של בעיית החלוקה ההוגנת הגנרית, שבו המשאב C הוא רציף והוא בדרך כלל נקרא "עוגה" ומיוצג על ידי האינטרוול הממשי [0,1], המדדים V_i האם לא אטומיים ולכל סוכן i ערך הסף הוא $t_i = V_i(C)/n$ והוא גם סף סביר.
10. **הקצאה הוגנת של אובייקטים בדידים:** בעיית הקצאת אובייקט הוגנת היא מקרה מיוחד של בעיית החלוקה ההוגנת הגנרית שבה המשאב C הוא קבוצה סופית שהאיברים שלו נקראים אובייקטים או פריטים ומדדי המחיר הם כל פונקציה בין קבוצות: $V_i: 2^c \rightarrow \mathbb{R}$. אובייקטים עם ערך חיובי לכל הסוכנים נקראים טובין (goods) ואובייקטים עם ערכים שליליים נקראים רעים (bads).

האלגוריתמים

אלגוריתם 1: מציאת חלוקת *EFM* של גרף דו-צדדי

קלט: גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$.

פלט: חלוקת *EFM* ייחודית ל-*G* של הקודקודים $X = X_S \cup X_L$ ו-$Y = Y_S \cup Y_L$.

1. מצא שידוך מקסימלי *M* ב-*G*.
2. יהי $X_0 = X \backslash X_M$ תת קבוצה של קודקודים שלא שודכו על ידי *M*.
3. חשב את $S(M, X_0)$.
4. החזר: $X_S = \cup_{i \geq 0} X_i$ ו-$X_L = X \backslash X_S$ ו-$Y_S = \cup_{i \geq 0} Y_i$ ו-$Y_L = Y \backslash Y_S$.

אלגוריתם 2: מציאת שידוך נטול קנאות מקסימלי בגרף ללא פונקציית משקלים

קלט: גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$.

פלט: שידוך envy-free מקסימלי בגרף דו-צדדי ללא פונקציית משקלים *G*.

1. מצא שידוך מקסימלי *M* ב-*G*.
2. מצא את חלוקת ה-EFM $X = X_S \cup X_L$ ו-$Y = Y_S \cup Y_L$ באמצעות אלגוריתם 1.
3. החזר את תת-השידוך $G[X_L, Y_L]$.

אלגוריתם 3: מציאת שידוך נטול קנאות מקסימלי בגרף עם פונקציית משקלים על הצלעות *w*

קלט: גרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$ עם פונקציית משקלים על הצלעות *w*.

פלט: שידוך envy-free מקסימלי בעל העלות הנמוכה ביותר.

1. מצא את חלוקת ה-EFM $X = X_S \cup X_L$ ו-$Y = Y_S \cup Y_L$ באמצעות אלגוריתם 1.
2. מצא והחזר את השידוך המקסימלי בעלות העלות המינימלית ב-$G[X_L, Y_L]$.

אלגוריתם 4: The Lone Divider algorithm

קלט:

1. קבוצת מקורות C שצריך לחלק.
2. קבוצה של סוכנים $X = [n]$ עם מדדים $(V_i)_{i=1}^{n}$ על C.
3. ערכי סף $(t_i)_{i=1}^{n}$ המקיימים את תנאי הסף הסביר (הגדרה מספר 8).

פלט: חלוקה של C ל-$C = Z_1 \cup \ldots \cup Z_n$ כך שמתקיים $\forall i \in [n]: V_i(C_i) \geq t_i$.

1. בחר באופן שרירותי סוכן מהקבוצה X. חלק את הקבוצה C ל-|X| תתי קבוצות זרים המקיימים $V_a(C_j) \geq t_a\ \forall j \in X$.
2. הגדר גרף דו-צדדי G עם הסוכנים של X בצד אחד והקבוצה $Y = \{C_1, \ldots C_{|x|}\}$ בצד השני. הוסף קשת (i, C_j) כשמתקיים $V_i(C_j) \geq t_i$.
3. השתמש באלגוריתם 2 ומצא שידוך נטול קנאות מקסימלי M ב-G. הבא לכל אלמנט משודך ב-Y_M את הסוכן שמשודך לו ב-X_M.
4. הגדר $X \leftarrow X \backslash X_M$ להיות הקבוצה של הסוכנים שלא שודכו ו-$C \leftarrow C \backslash (\cup\, Y_M)$ המשאבים שלא שודכו. אם $X \neq \emptyset$ חזור על צעד מספר 1.

אלגוריתם 5: אלגוריתם סימטרי לחיתוך עוגה פרופורציונלי

קלט: עוגה $C = [0,1]$ וקבוצה $X = [n]$ של סוכנים בעלי מדדים לא אטומיים $(V_i)_{i=1}^{n}$ על C. המדדים מנורמלים כך שמתקיים: $\forall i \in [n]: V_i(C) = n$.

פלט: חלוקה $C = Z_1 \cup \ldots \cup Z_n$ כך שמתקיים $\forall i \in [n]: V_i(Z_i) \geq 1$.

1. שאל כל סוכן $i \in X$ לייצר וקטור של סימנים z_i של *n-1* סימנים כך שמתקיים: $0 < z_{i,1} < \cdots < z_{i,n-1} < 1$ ומחלק את C ל-*n* תתי-אינטרוולים עם ערך של בדיוק 1 עבור *i*.
2. בחר מווקטורי הסימנים $\{z_i | i \in [n]\}$ את האחד עם הערך המילוני הנמוך ביותר. חלק את C לפי הסימנים האלה. הגדר את חלקי החלוקה על ידי $C_1, \ldots, C_n$.
3. הגדר גרף דו-צדדי G עם הסוכנים של X בצד אחד והחלקים מהסעיף הקודם (מסומנים באמצעות Y) בצד השני. הוסף קשת (i, C_j) כשמתקיים $V_i(C_j) \geq 1$.
4. הקצה לכל סוכן $i \in X$ משקל $w(i) \in \{0, \ldots, n-1\}$ זוהי פונקציה של קבוצת השכנים $N_G(i)$ כך ששני סוכנים $i, i' \in X$ בעלי משקל זהה אם ורק אם $N_G(i) = N_G(i')$.
5. הקצה לכל חלק $C_j \in Y$ משקל ייחודי $w(C_j) \in \{0, \ldots, n-1\}$ כך שהמשקל של החלק השמאלי ביותר (המשויך ל-0) הוא 0 והמשקל של החלק השמאלי ביותר הבא הוא 1 וכו'.
6. הקצה לכל קשת $(i, C_j) \in E$ את המחיר $w(i, C_j) = 2^{n * w(i) + w(c_j)}$. בעזרת אלגוריתם 3, מצא שידוך נטול קנאות מקסימלי וזול ביותר M ב-G.
7. הגדר $X_Y \subseteq X$ להיות הקבוצה של כל הסוכנים המשויכים לכל החלקים ב-Y. תן לכל סוכן בקבוצה X_Y חלק שרירותי מ-$N_M(X_Y)$.
8. הגדר $X_R = X_M \backslash X_Y$. חלק את הסוכנים ב-X_R לתתי קבוצות לפי המשקל שלהם. כלומר, עבור $k \geq 1$ כלשהו, מצא חלוקה $X_R = X_1 \cup \ldots \cup X_k$ כך ש-i, i' שייכים לאותו X_j אם ורק אם $w(i) = w(i')$.
9. עבור כל $j \in [k]$, חלק בצורה רקורסיבית את האיחוד של החלקים ב-$N_M(X_j)$ בקרב הסוכנים של X_j.
10. חלק בצורה רקורסיבית את האיחוד של החלקים ב-$Y \backslash Y_M$ בקרב הסוכנים של $X \backslash X_M$ על ידי חזרה לצעד מספר 1.

הוכחת נכונות האלגוריתמים

ניתן להוכיח את הנכונות של אלגוריתמים 1-3 על ידי הוכחת הטענות הבאות:

טענה 1: יהי M שידוך מקסימלי בגרף דו-צדדי $G = (X \cup Y, E)$ ו-$X_0 = X \setminus X_M$ תת קבוצה של קודקודים שלא שודכו על ידי M. וחלוקות $X = X_S \cup X_L$ ו-$Y = Y_S \cup Y_L$ המושרות על ידי $S(M, X_0)$ ומתקיים:

1. אין צלעות בין X_S ל-Y_L.
2. תת הגרף $G[X_S, Y_S]$ הוא Y -path-saturated.
3. תת הגרף $G[X_L, Y_L]$ הוא X-saturated.
4. כל $\mathrm{X}_L - \text{saturating matching}$ ב-$G[X_L, Y_L]$ הוא *envy-free* ב-G.
5. כל שידוך *envy-free* ב-G מוכל ב-$G[X_L, Y_L]$.

(סעיפים 4,5 תקפים לכל חלוקה של X ו-Y שמקיימים את סעיפים 1,2,3,4,5)

הוכחת טענה 1: הוכחת סעיף (1)- לפי הבניה של הגרף, הקבוצה Y_S זו קבוצת כל השכנים של X_S ב-G. **הוכחת סעיף (2)-** נוכיח תחילה ש-$M[X_S, Y_S]$ תת הקבוצה של M המוכלת ב-$G[X_S, Y_S]$ מרווה את Y_S. אכן, עבור $i \geq 1$ כלשהו, קודקוד כלשהו $y_i \in Y_i$ לא משודך על ידי M ולכן מסלול M מתחלף ניתן לאיתור בקרב הקשתות ששימשו את הבניה של $S(M, X_0)$ כלומר: $y_i - X_{i-1} - Y_{i-1} - \cdots - X_0$ כאשר שני קודקודי הקצה לא משודכים. על ידי היפוך המסלול ניתן להגדיל את השידוך M ב-1, אבל זה סותר את המקסימליות של M. לכן, כל הקודקוד של $\cup_{i \geq 1} Y_i = Y_S$ משודכים על ידי M. לפי הבניה, קבוצת השידוכים שלהם ב-M היא $\cup_{i \geq 1} X_i \subseteq X_S$. זה מרמז על זה שבניית $S(M, X_0)$ מסתיימת בצד של X, כלומר היא מסתיימת ב-X_k עבור $k \geq 0$ כלשהו. כעת, החלוקות

$X = X_0 \cup \ldots \cup X_k$ ו-$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_k$ מקיימות את ההגדרה של מסלול Y רווי.

הוכחת סעיף (3)- נוכיח ש- $M[X_L, Y_L]$ תת הקבוצה של M המוכלת ב-$G[X_L, Y_L]$ מרווה את X_L.

אכן, לפי הנחת הטענה כל הקודקודים של X שלא משודכים על ידי M מוכלים ב-X_S- $X_0 \subseteq$ כך שכל הקודקודים של X_L משודכים על ידי M. לפי הבנייה, הם חייבים להיות משודכים לקודקודים שלא בתוך כל Y_i, לכן כל השידוכים נמצאים כולם ב-Y_L.

הוכחת סעיף (4)- יהי W שידוך X_L מרווה ב-$G[X_L, Y_L]$. מאחר ו-W מרווה את X_L, אין קודקוד "קנאי" ב-X_L. לפי (1), אין קשתות בין X_S ו-Y_L. מאחר ורק הקודקודים של Y_L רווים על ידי W, אף קודקוד של X_S מקנא. לכן, אין ב-X קודקוד שמקנא ולכן W הוא שידוך חסר קנאות ב-G.

הוכחת סעיף (5)- יהי W שידוך נטול קנאות כלשהו ב-G. נגדיר: X_{SW} תת הקבוצה של X_S שמרווה על ידי W ו- Y_{SW} תת הקבוצה של Y_S שמרווה על ידי W. אנחנו צריכים להוכיח ש-X_{SW} ו-Y_{SW} ריקים.

לפי (1), קודקוד של X_{SW} יכול להיות משודך רק לקודקוד של Y_{SW}, לכן מספיק להוכיח ש-Y_{SW} ריקה.

נגדיר: $k_{SW} = |Y_{SW}|$ ונניח בשלילה ש-$k_{SW} > 0$. לפי (2) הגרף $G[X_S, Y_S]$ הוא מסלול Y-רווי. נסמן את החלוקות על ידי: $X = X_0 \cup \ldots \cup X_k$ ו-$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_k$. נגדיר $i \geq 1$ להיות האינדקס הקטן ביותר כך שקודקוד של Y_i משודך על ידי W ומתקיים: $Y_{SW} \subseteq \cup_{j \geq i} Y_j$. לפי הגדרה 4, כל הקודקודים של Y_{SW} משודכים באופן מושלם לקודקודים של $\cup_{j \geq i} X_j$. נסמן את השידוך שלהם על ידי.

נשים לב שמתקיים $k_{SW} = |X'_{SW}|$. כל קודקוד $x \in X'_{SW}$ סמוך לקודקוד של Y_{SW} שמרווה על ידי W .

כדי להבטיח ש-x לא מקנא, x חייב להיות מרווה על ידי W .

נגדיר את y' להיות קודקוד ב-$Y_i \cap Y_{SW}$. לפי הגדרה 4, הוא סמוך לקודקוד כלשהו $x' \in X_{i-1}$.

כדי להבטיח ש-x' לא מקנא, הוא גם חייב להיות רווי על ידי W . אבל $x' \notin X'_{SW}$ מאחר ומתקיים: $X'_{SW} \subseteq \cup_{j \geq i} X_j$. לכן, חייבים להיות לפחות $k_{SW} + 1$ קודקודים של X_S שרויים על ידי W: k_{SW} קודקודים של X'_{SW} ועוד הקודקוד x' שלא נמצא ב-x'. אבל זו סתירה שכן הקודקודים של X_S יכולים להיות משודכים רק לקודקודים של Y_S ורק k_{SW} קודקודים של Y_S משודכים על ידי W .

משפט 1: בכל גרף דו-צדדי $G=(X\cup Y,E)$ קיימת חלוקה ייחודית $X=X_S\cup X_L$ ו-$Y=Y_S\cup Y_L$ שמקיימת את שלושת התנאים הבאים:

1. אין צלעות בין X_S ל-Y_L.
2. תת הגרף $G[X_S,Y_S]$ הוא Y -path-saturated.
3. תת הגרף $G[X_L,Y_L]$ הוא X-saturated.

בנוסף, החלוקה הזאת מניבה את התוצאות הבאות:

4. כל $\mathrm{X}_L-\text{saturating matching}$ ב-$G[X_L,Y_L]$ הוא *envy-free* ב-G.
5. כל שידוך *envy-free* ב-G מוכל ב-$G[X_L,Y_L]$.

הוכחת משפט 1: נגדיר גרף דו-צדדי $G=(X\cup Y,E)$, M שידוך מקסימלי שרירותי ב-G ו- וחלוקות $X=X_S\cup X_L$ ו-$Y=Y_S\cup Y_L$ המושרות על ידי הסדרה מתחלפת המקסימלית.

טענה 1 מראה שהחלוקות האלה מספקות את סעיפים 1,2,3,4,5. נותר להוכיח שהחלוקות הללו הן ייחודיות, כלומר הן לא תלויות בשידוך המקסימלי *M*.

נשקול חלוקות חלופיות $X=X_S'\cup X_L'$ ו-$Y=Y_S'\cup Y_L'$ המספקות את סעיפים 1,2,3.

הפעלת סעיף 4 של טענה 1 על החלוקות $X_S\cup X_L$,$Y_S\cup Y_L$ מרמזת שיש שידוך נטול קנאות ב-G שמרווה את X_L. הפעלת סעיף 5 של טענה 1 על החלוקות $X_S'\cup X_L'$,$Y_S'\cup Y_L'$ מרמזת על שהשידוך הזה חייב להיות מוכל ב-$G[X_L'.Y_L']$, בפרט $X_L\subseteq X_L'$. טיעונים אנלוגיים מרמזים ש-$X'_L\subseteq X_L$.

לכן, $X_L=X'_L$. ולכן גם $X_L'=X_L$. מאחר ו-$Y_S=N_G(X_S)$ ו-$Y_S'=N_G(X_S')$ מתקיים $Y_S'=Y_S$ ולכן גם $Y_L'=Y_L$.

הוכחת נכונות אלגוריתם מספר 1:

לפי הגדרת החלוקות $X=X_S\cup X_L$ ו-$Y=Y_S\cup Y_L$ בעזרת חישוב ה-*M*- סדרה מתחלפת המקסימלית בהוכחת משפט 1, נובע שהחלוקה המושרת על ידי חישוב ה-*M*- סדרה מתחלפת המקסימלית באלגוריתם (1) מספקת את סעיפים 1,2,3,4,5 של משפט 1 ולכן החלוקות:

$X_S=U_{i\ge 0}X_i,X_L=X\backslash X_S$ ו-$Y_S=U_{i\ge 0}Y_i,Y_L=Y\backslash Y_S$ מהוות חלוקות ייחודיות המקיימות את התנאים של משפט 1.

הוכחת נכונות אלגוריתם מספר 2:

לפי סעיף 1 של משפט 1 השידוך המקסימלי בגרף $G[X_L,Y_L]$ (כאשר X_L,Y_L נובעים מאלגוריתם 1) מרווה את X_L ולפי סעיף 4 של משפט 1 השידוך הזה נטול קנאות. לפי סעיף 5 של משפט 1 אין עוד שידוך נטול קנאות שיכול להרוות כל קודקוד של X_S. ולכן השידוך המוחזר הוא בהכרח שידוך נטול קנאות מקסימלי.

הוכחת נכונות אלגוריתם מספר 3:

בדיוק כמו באלגוריתם 2, מתחילים בלמצוא את החלוקה הייחודית של G על ידי שימוש באלגוריתם 1. ההבדל הוא בצעד האחרון של האלגוריתם: במקום להחזיר את $M[X_L,Y_L]$, שזה שידוך X_L רווי, מחזירים שידוך X_L רווי בעל העלות הנמוכה ביותר. מציאת שידוך מקסימלי בעל העלות הנמוכה יותר ידוע בתור בעיית ההשמה. בגלל שייתכן והגדלים של X_L,Y_L יהיו שונים זו בעיית השמה לא מאוזנת. קיימים אלגוריתמים שמציעים פתרון לבעיה הזאת ומבוססים על השיטה ההונגרית. נוכיח כעת כי האלגוריתם נכון: לפי משפט 1 כל השידוכים חסרי הקנאות ב-G נמצאים בתת-הגרף $G[X_L,Y_L]$ וכל השידוכים המקסימליים ב-$G[X_L,Y_L]$ מרווים את X_L ולכן הם נטולי קנאה. לכן, הפעלת השיטה ההונגרית על-$G[X_L,Y_L]$ מניבה שידוך חסר קנאות מקסימלי בעל העלות הנמוכה ביותר ב-G.

שאלות פתוחות

שאלה פתוחה 1

האם יש אלגוריתם פולינומי להכרעה האם קיים בגרף דו צדדי זיווג אחד לכולם חסר קנאה לא ריק?

שאלה פתוחה 2

האם יש אלגוריתם פולינומי שעבור פונקציית ערך w מוצאת זיווג w-חסר-קנאה חלקית בגודל מקסימלי, האם קיים בנוסף עבור זיווג מקסימלי בערך?

שאלה פתוחה 3

האם קיים אלגוריתם פולינומי למציאת שידוך מקסימלי מבין הזיווגים חסרי הקנאה המוערכים עבור אחד משיטות ההערכה שנשקלו במאמר?