1° semana

Sistemas de inecuaciones lineales

Definición: Un sistema de inecuaciones lineales consta de 2 o más ecuaciones simultaneas que representan soluciones del mundo real.

Ej: $x + y \geq 3$ $2x - y < 7$

Para resolver un sistema de inecuaciones encontrar un pinto que satisface a las inecuaciones formuladas.

¿Como encontramos esos puntos?

1° primero resolvemos cada inecuación de forma individual

Un método en particular seria remplazar una de las variables de cada ecuación de forma que quede despaja usando el método del igualar los términos, respetando las propiedades de las inecuaciones.

2° Método grafico

Graficar los puntos en un plano cartesiano al despejar una de las variables de las inecuaciones.

3° Encontrar las soluciones

En un sistema de inecuaciones nuestras soluciones van a estar dadas por la región donde se superponen las rectas.

OBS: Para inecuaciones es útil usar el método gráfico y GeoGebra

Usando el ejemplo anterior:

Despejamos Y en ambas inecuaciones

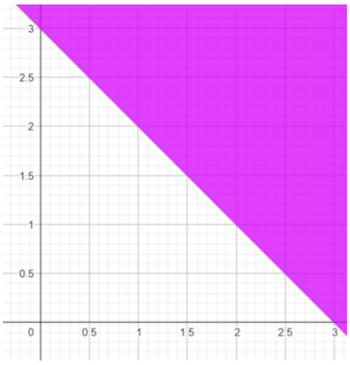
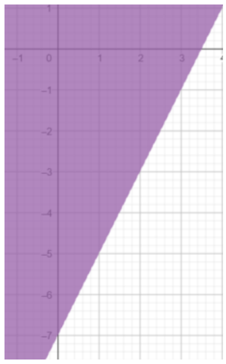
Original	Despejando Y
$x + y \geq 3$ $2x - y < 7$	$y \geq 3 \times x$ $y > 2x - 7$

Despejando Y:

Nos puede decir 2 cosas, los puntos de cada inecuación y la región que va a estar tomando cada inecuación.

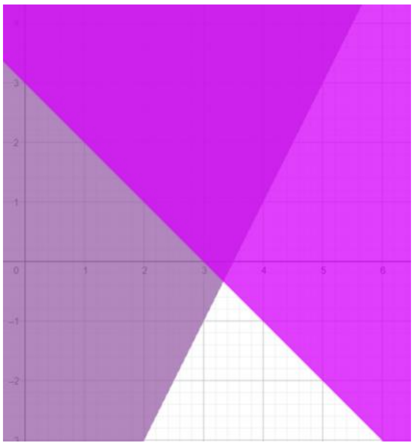
OBS: cuando comprobamos con el método grafico es importante verificar en base a los signos que las líneas que muestran las soluciones cumplan con las inecuaciones.

OBS: Diferencia de signos es importante además para mostrarnos todo lo anteriormente mencionado, sino también para saber si se está tomando los puntos de las rectas o no.

$\leq o \geq$	$< o >$
Va a tomar las soluciones mayores o menores y iguales a la recta. Ejemplo visual:  La línea es más densa y no está cortada, demostrando que está tomando los puntos que intercepta la recta.	Va a tomar **SOLO** las soluciones mayores o menores a la recta. Ejemplo visual:  La línea es notoriamente más fina y se ve como si estuviera cortada demostrando que se toman solo las soluciones mayores a los puntos que intercepta la recta.

Teniendo esto en cuenta la región en donde se "intercepten" los colores (ya que las regiones rellenadas sobre una recta representan las soluciones que toma es inecuación) serán las soluciones que va a tener mi sistema de inecuaciones.

Ejemplo visual:



Como graficar rectas sin uso de GeoGebra

<u>1° Tomamos una ecuación</u>

<table>
<tr><td rowspan="2">$x + 3 \leq 4y$
Desglosamos en ambas ecuaciones</td><td>$x + 3 < 4y$</td></tr>
<tr><td>$x + 3 = 4y$</td></tr>
</table>

2° Despejamos y del igual ($x + 3 = 4y$)

$$y = \frac{x}{4} + \frac{3}{4}$$

3° Coeficiente de posición y la pendiente

Semana 2

Programación lineal

Conceptos claves para tener en cuenta:

Cuando dibujamos una inecuación de la forma:

1. $ax + by + c < 0$
2. $ax + by + c > 0$
3. $ax + by + c \leq 0$
4. $ax + by + c \geq 0$

- Se forman dos semiplanos
- Para conocer el conjunto de solución de una inecuación, hay que evaluar cualquiera de los puntos en el semiplano
- Si el valor de la desigualdad es verdadero la solución para el semiplano es donde **está** el punto
- En caso de que la desigualdad sea falsa, la solución sería donde **no** está el punto

Otra forma de trabajar una inecuacion:

Por ejemplo, tenemos la siguiente inecuación:

1. $3x + 6y \leq 12$ / La trabajamos como una igualdad, pero manteniendo el signo
2. $3x + 6y \leq 12$ / Despejamos una variable (en este caso la y)
3. $6y \leq 12 - 3x$
4. $y \leq \frac{12-3x}{6}$/ Opcional: Simplificación

Ahora que tenemos el valor de y despejado, hay que saber el valor de x, ¿Como lo hacemos? agregando un valor a x nosotros.

x	y
0	2
2	0

OBS: Los valores que remplaces tienen que ser cómodos para y que no queden como decimal.

¿Pero para que sirve saber todo esto?

Para la programación lineal:

- Es una técnica de optimización matemática
- Se maximizan o minimizan funciones que se encuentran sujetas a restricciones
- La región que satisface de manera simultánea en un problema de programación lineal, en un gráfico se demostrara como una área o región sombreada. Cada punto muestra una función factible y dicha región se llamará como región factible.

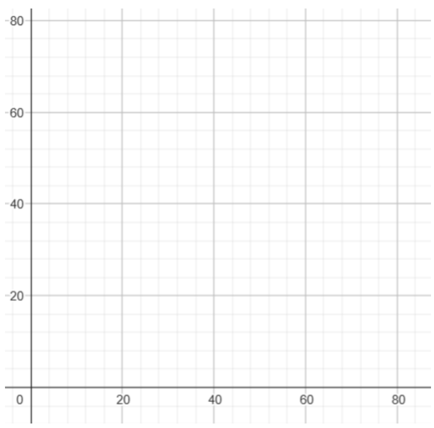
OBS: Cuando tengamos que dibujar un plano en base a las restricciones vamos a saber que parte del plano vamos a ocupar.

Para maximizar una variable que está sujeta a x restricciones, hay que partir por la primera y despejarla para ir obteniendo la recta.

Pongamos un ejemplo:

Z = $10x + 20y$

(1) $3x + y \leq 90$
(2) $x + y \leq 50$
(3) $y \leq 35$



Ahora tenemos una gráfica vacía que tenemos que saber la región factible, atreves de sus restricciones.

Empezamos resolviendo por la primera y asi sucesivamente

(1) $3x + y \leq 90$

$$y \leq 90 - 3x$$

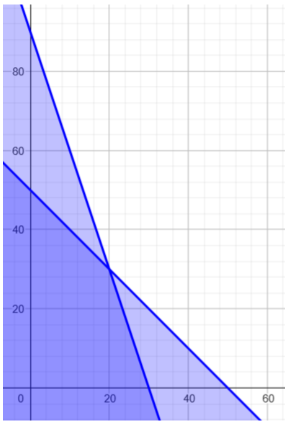
x	y
0	90
20	30

(2) $x + y \leq 50$

$$y \leq 50 - x$$

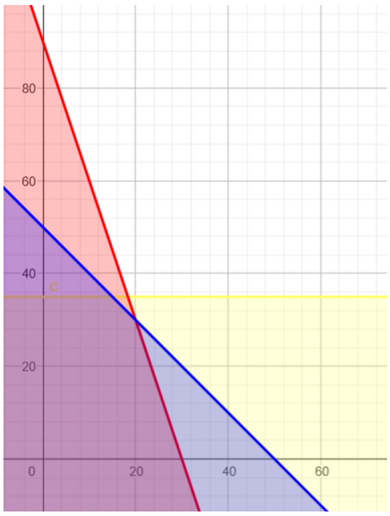
x	y
0	50
20	20

Básicamente después de a ver determinado cada restricción nos debió quedar las siguientes rectas:



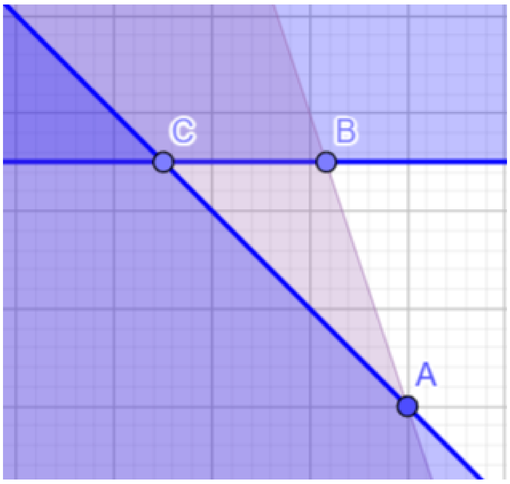
OBS: da lo mismo los puntos que elijas para resolver, lo importante es que sean variables cómodas, ya que al final vas a llegar a la misma región de soluciones.

Ya para terminar el plano sería el siguiente:



Nuestra región factible seria donde las 3 regiones de soluciones de cada recta se sombrean entre sí.

Pero para terminar de encontrar nuestra región factible tenemos que determinar cuáles son nuestros vértices y en el caso de que un vértices no este determinado, para encontrarlo hay que hacer un sistema de ecuaciones a través de las rectas que la forman.



Los puntos que se ven a continuación son los puntos que conforman los vértices de nuestra región factible. Algunos vértices sabemos sus coordenadas (Como A y C) dado que donde se interceptan las rectas en el plano cartesiano dan unas coordenadas que la hemos sacado por ecuaciones, en las restricciones que resolvimos se repiten coordenadas o se ven por vista en el plano.

En el caso de que un vértice (B) no este determinado una de sus coordenadas (X o Y), podemos hacer uso de un sistema de ecuaciones para resolver la coordenada faltante.

Por ejemplo: El vértice B no sabemos su coordenada exactamente en X, pero si en Y, A partir de ahí podemos realizar nuestro sistema de ecuaciones tomando como referencia las rectas que conforman ese vértice.

Sistema de ecuaciones para el vértice B

$$y = 35$$

$$x + y = 50$$

Cuando tengamos conformado nuestro sistema queda simplemente resolver

$x + 35 = 50$ / Sabemos qué Y = 35

$x = 50 - 35$ / despejamos la incógnita

$x = 15$ / Resultado

Esto dice que la coordenada X del vértice B es 15, con este método seriamos capaces de resolver todo tipo de coordenadas con no estén claras.

Al saber las coordenadas, pasamos al siguiente paso que se conforma por pasar las coordenadas de todos los vértices a la ecuación de Z, con la cual sabremos nuestro máximo

Atreves de la siguiente tabla:

Vértice	Coordenadas (X, Y)	Z = 10x + 20y
A	(20,30)	Z = 10(20) + 20(30) = 800
B	(15, 35)	Z = 10(15) + 20(35) = 850
C	(10,35)	Z = 10(10) + 20(35) = 800

Para finalizar todo el procedimiento de sistema de inecuaciones, hay que identificar a través de la tabla cuál es el que dio mayor para saber nuestro máximo.

En este caso sería el vértice B, ya que, al remplazar las coordenadas en la fórmula de Z, fue el que dio mayor resultado.

Semana 3

Resolución de problemas para problemas de algebra lineal

Primero hay que seguir unos para realizar la resolución de problemas.

Pasos sugeridos:

1) Subraya productos/ decisiones
2) Subraya recursos (horas, dinero, materia prima) y disponibilidad
3) Subraya ganancias/costos por unidad de cada producto
4) Verifica unidades (Trabajar con las mismas unidades)

Ejemplo de uso:

Un fabricante produce vestidos y faldas. Se requieren 3 horas para coser los dobladillos de una docena de faldas, y 5 horas para los dobladillos de una docena de vestidos. Además, se requieren 2 horas para coser los ojales de una docena de faldas y 1 hora para coser los ojales de una docena de vestidos. El fabricante debe asignar no más de 14 horas para los dobladillos y 35 horas para los ojales. Las ganancias son de U$7 por docena de vestidos y U$8 por docena de faldas. ¿Cuántos vestidos y cuántas faldas deben fabricarse para maximizar las ganancias?

Explicación de cada color:

Celeste y amarrillo: Son las variables que conformaran nuestra tabla de datos.

OBS: Se debe subrayar la variable junto su unidad.

Verde: Serian las restricciones

OBS: Cuando establezcamos las restricciones hay que tener en cuenta la lógica del objeto en cuestión. Ejemplo: si te piden una docena de empanadas, no puede tener una empanada negativa, ósea $x \geq 0$

Rojo: Seria la fórmula de Z

Morado: que valor de la Z se debe tomar.

Teniendo en cuenta todos los datos importantes podemos armar algo llamado:

tabla-recurso

Consiste en una tabla con toda la información útil subrayada de forma ordenada.

Recursos	Vestidos	Faldas	Disponibilidad
Ojales	5	3	14h
Dobladillos	1	2	35h
Ganancias: Por docena de vestidos U$7 y por docena de faldas U$8			

Se debe maximizar

Y a mera vista ya tendríamos nuestro sistema de inecuaciones, que nos quedaría de la siguiente manera:

1) $5x + 3y \geq 14$
2) $x + 2y \geq 35$
3) $x, y \geq 0$

$z = 7x + 8y$ Se debe encontrar el valor máximo

OBS: Cuando el enunciado nos pide un valor entero, tendremos que acercarlo al entero más cercano de la región factible.

OBS: Cuando los vértices te den x o y desconocidos, sin ningún punto de referencia en caso de necesitar encontrar uno u otro, está mal ubicado.

OBS: Cuando tengas que comprobar un vértice el cual su Z te diga mínimo o máximo, debes comprobar ese mismo vértice en cada restricción para ver si es que lo hiciste correctamente.

Semana 4

Factoriales

Introducción: antes de entrar en las factoriales primero tenemos que saber que es una sucesión de lista de números.

Definición de una sucesión

Una función contiene una sucesión la cual se le denominan f, su dominio seria todos los números naturales.

Los términos que conforman la sucesión serían los números de la función

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

Por lo general escribimos a_n en lugar de escribir la notación f(n), lo cual quedaría de la siguiente manera:

$$a(1), a(2), a(3), \dots, a(n), \dots$$

El número $a_1$se le denomina primer término, y asi sucesivamente, a $a_n$se le llama n-esimo termino.

OBS: en ocasiones es recomendable empezar con a subíndices 0, tal que empezarían de la siguiente manera: $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$

Escritura de una sucesión de números

Escribe los primero 4 termino para $a_n = 8n \times 2$

$$a_1 = 8(1) \times 2 = 16$$

$$a_2 = 8(2) \times 2 = 32$$

$$a_3 = 8(3) \times 2 = 48$$

$$a_4 = 8(4) \times 2 = 64$$

Ejercicio

Encuentra lo primeros 5 términos para $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{2(1)-1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2}{2(2)-1} = \frac{1}{3} = 0{,}3 \dots$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3}{2(3)-1} = \frac{-1}{5} = -0{,}20$$

$$a_4 = \frac{(-1)^4}{2(4)-1} = \frac{1}{7} = 0{,}142$$

$$a_5 = \frac{(-1)^5}{2(5)-1} = \frac{-1}{9} = 0{,}1 \dots$$

Sucesiones recursivas

Algunas sucesiones no tienen formulas definitorias sencillas como las anteriores. El n-esimo término de una sucesión puede depender de algunos o de todos los términos que lo proceden. Una sucesion definitoria de esta forma se le denomina recursiva.

Encuentre los primeros 5 términos definido por $a_1 = 1$ y $a_n = 3(a_{n-1} + 2)$

RESOLUCION:

$$a_1 = 3(a_{1-1} + 2) = 3(0 + 2) = 6$$

$$a_2 = 3(a_{2-1} + 2) = 3(1 + 2) = 9$$

$$a_3 = 3(a_{3-1} + 2) = 3(2 + 2) = 12$$

$$a_4 = 3(a_{4-1} + 2) = 3(3 + 2) = 15$$

$$a_5 = 3(a_{5-1} + 2) = 3(4 + 2) = 18$$

Sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci se define como sucesión recursiva, de la siguiente manera:

$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_k = a_{k-2} + a_{k-1}$, donde $k \geq 2$

Escribe los primeros 6 números de la sucesión

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_{2-2} + a_{2-1} = a_0 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_3 = a_{3-2} + a_{3-1} = a_1 + a_2 = 1 + (a_0 + a_1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$a_4 = a_{4-2} + a_{4-1} = a_2 + a_3 = (a_0 + a_1) + 3 = 1 + 1 + 3 = 5$$

$$a_5 = a_{5-2} + a_{5-1} = a_3 + a_4 = 3 + 5 = 8$$

La razón de oro

Los antiguos griegos consideraban dividir un segmento de regla entre la razón de oro, cual define que si la razón entre parte más corta y la parte más larga es igual a la razón entre la parte más larga y todo segmento.

Entonces el segmento mostrado esta divido por la razón de oro si

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1 + x}$$

Lo cual lleva a una ecuación cuadrática que su solución positiva es

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

Esta razón se presenta en muchos lugares. por ejemplo, en los experimentos psicológicos afirman que la forma más agradable de un rectángulo es cuya todos sus lados se encuentran en esta razón. De ahí los antiguos griegos estuvieron de acuerdo y construyeron sus templos en base a esta razón.

Suma de parciales

Suma de parciales para una sucesion

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

La suma de parciales es

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Se le atribuye nombres iguales a de los términos S_1se le llama **primera suma parcial** y asi sucesivamente hasta $S_n$la **n-esima suma de parciales**. La sucesion se denomina suma de parciales.

EJERCICIO

Encuentra las primeras cuatro sumas parciales y su n-sima suma parcial de: $a_n = \frac{1}{2^n}$

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2^1}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Notación sigma

Sería un resumen de n términos en una operatoria

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

<u>Puntos para considerar de la notación sigma</u>:

- n: esto nos dice que con k=n, ósea la cantidad de veces que se repite la suma.
- k=1: esto nos dice desde que numero se va a partir.

Sirve bastante para resumir sumas muy largas en una sola notación.

OBS: cuando no posee un término que afecte a k, el término que sale en la sumatoria se repetirá tantas veces según el término que sería (k=n).

EJERCICIO

Encontrar la suma para:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Encontrar la suma para:

$$\sum_{k=1}^{6} 2$$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

OBS: En el caso de que tengamos un numero entero en la sumatoria, ese mismo número se suma acorde a la cantidad de veces que dictamine n, en este caso 6

Propiedades

1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$
3. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c(\sum_{k=1}^{n} a_k)$
4. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = (\frac{n(n+1)^2}{2})$

OBS: esta propiedad solo puede aplicarse cuando las dos sumatorias poseen distinta cantidad de números.