Résolution pratique du TSP

François Lepan Benjamin Van Ryseghem

21 décembre 2012

1 Heuristiques

1.1 Complexité des deux méthodes

Construction itérative par ajout du plus proche :	$O(n^2)$
Construction par ajout d'arc :	$O(n^2)$

2 Borne inférieure

Pour être une solution du problème initiale, un chemin doit vérifier deux choses :
- être un circuit, c'est à dire une permutation des n villes,
- être de longueur l minimum.

Circuit Or si s' est une solution du problème réduit, s' vérifie :
- être un circuit, c'est à dire une permutation des n villes,
- être de longueur l' minimum.

Il ne reste plus qu'a prouver le deuxième point.

Longueur Soit s' une solution de P' le problème réduit. Alors s' peut s'écrire comme

$$s' = v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n \text{ où } v_i \text{ est une des } n \text{ villes du problème}$$

De plus, la longueur l' de s' peut s'écrire comme suit

$$l' = l'_{v_1,v_2}, l'_{v_2,v_3}, \dots, l'_{v_{n-1},v_n}, l'_{v_n,1} \text{ où } l'_{v_i,v_j} \text{ est la distance entre } v_i \text{ et } v_j \text{ pour le problème } P'$$

Alors les réductions successives des matrices a pour effet pour chaque ville :

1. ôter a toutes les arretes sortantes la distance minimale de ces arretes,
2. ôter a toutes les arretes entrantes la distance minimale de ces arretes,

On peut ainsi écrire que

$$\forall i, j \in [0, n], i \neq j, l_{v_i,v_j} = l'_{v_i,v_j} + min_s(v_i) + min_e(v_j)$$

où
- l_{v_i,v_j} est la distance entre v_i et v_j pour le problème P non réduit,
- $min_s(v)$ est le minimum des distances des arrêtes sortantes de la ville v,
- $min_e(v)$ est le minimum des distances des arrêtes entrantes de la ville v.

On peut alors écrire la longueur l de s la solution de P correspondant à s' comme suit :

$$\begin{aligned}
l &= \sum_{i=1}^{n-1} l_{v_i,v_{i+1}} + l_{v_n,v_1} \\
l &= \sum_{i=1}^{n-1} (l'_{v_i,v_{i+1}} + min_s(v_i) + min_e(v_{i+1})) + l'_{v_n,v_1} + min_s(v_n) + min_e(v_1) \\
l &= \sum_{i=1}^{n-1} l'_{v_i,v_{i+1}} + \sum_{i=1}^{n-1} min_s(v_i) + \sum_{i=2}^{n} min_e(v_i) + l'_{v_n,v_1} + min_s(v_n) + min_e(v_1) \\
l &= l' + \sum_{i=1}^{n} min_s(v_i) + \sum_{i=1}^{n} min_e(v_i)
\end{aligned}$$

Appellons $d = \sum_{i=1}^{n} min_s(v_i) + \sum_{i=1}^{n} min_e(v_i)$ la borne inférieure de la matrice de problème P.

Alors

$$l = l' + d$$

Reste à prouver que cette longueur l est minimum.

Raisonnement par l'absurde Supposons $l_r < l$ tel qu'il existe s_r une solution à P. D'après le paragraphe précédent, on peut donc déduire l'existence d'une solution s'_r pour P'.

La longueur l'_r de s'_r est alors de $l_r - d$.

Or par hypothèse

$$\begin{aligned}
l_r &< l \\
l_r - d &< l - d \\
l'_r &< l'
\end{aligned}$$

Or s' est supposé une solution optimale, donc il est impossible de trouver une solution s'_r de P' de longueur inférieure.

On aboutit donc à une contradiction. De ce fait, l'hypothèse de l'existence d'une solution de P de longueur minimale est absurde.

Conclusion En conclusion, nous avons trouvé une solution optimale de P à partir d'une solution optimale de P'. De plus, nou savons calculé sa longueur à partir de la longueur de la solution de P'.

Implémentation La méthode a une complexité de $O(n^2)$ en n le nombre de villes.

3 Méthode exacte

Version basique de la recherche arborescente Si on ajoute l'arc (i, j), on peut automatiquement interdire tous les arcs de la forme $(*, j)$ et $(i, *)$.

Au cours des itérations, le cout minimum ne peut que croitre.

Pour interdire l'arc (i, j) dans le deuxième, on peut modifier la matrice associée au deuxième de façon que le poids de l'arête (i, j) soit $+\infty$.

Introduction de la borne inférieure Lorsqu'un arc est interdit, du fait du bannissement de tous les arcs de de la forme $(i, *)$, on peut alors retirer $min_s(v_i)$ de la borne d.

De même, du fait du bannissement de tous les arcs de de la forme $(*, j)$, on peut alors retirer $min_e(v_j)$ de la borne d.