AAC: TP1

François Lepan
Benjamin Van Ryseghem

15 octobre 2012

1 Erreur de réduction

1.1 Calcul du minimum

On suppose une image ayant plus de 0 pixel, *i.e.*

Hypothesis 1

$$\forall start \in \mathbb{N}, \forall stop \in \mathbb{N}, start \leqslant stop, \sum_{i=start}^{stop} (histo[i]) \geqslant 0$$

Soit $f_{[i,j]}$ la fonction qui à un niveau de gris x retourne l'erreur $f(x)$ associée à ce niveau de gris sur l'intervalle $[start, stop]$.

$$\begin{aligned}
f_{[start,stop]}(x) &= \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x - palette[i])^2 \\
f_{[start,stop]}(x) &= \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x^2 - 2x \times palette[i] + palette[i]^2) \\
f'_{[start,stop]}(x) &= \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (2x - 2palette[i]) \\
f'_{[start,stop]}(x) &= 2 \times \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x - palette[i]) \\
f''_{[start,stop]}(x) &= 2 \times \sum_{i=start}^{stop} histo[i]
\end{aligned}$$

Minimiser l'erreur revient a minimiser $f_{[start;stop]}(x)$ pour $x \geqslant 0$.
Or $f_{[i,j]}$ est convexe sur $\mathbb{R}, \forall i, j \in \mathbb{N}, i \leqslant j$ car $f''_{[i,j]}(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$ donc f est minimal quand f' est nulle.

$$\begin{aligned}
f'_{[start,stop]}(x) &= 0 \\
\iff 2 \times \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x - palette[i]) &= 0 \\
\iff \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x - palette[i]) &= 0 \\
\iff \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times x) - \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i]) &= 0 \\
\iff \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times x) &= \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i]) \\
\iff x \times \sum_{i=start}^{stop} (histo[i]) &= \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i])
\end{aligned}$$

Donc d'apres l'hypothèse 1 :

$$\begin{aligned}
\iff x \times \sum_{i=start}^{stop} (histo[i]) &= \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i]) \\
\iff x &= \frac{\sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i])}{\sum_{i=start}^{stop} (histo[i])}
\end{aligned}$$

Donc l'erreur est minimale quand $x = \dfrac{\sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i])}{\sum_{i=start}^{stop} (histo[i])}$.
Appellons $x_{[i,j]}$ la valeur de x tel que $f_{[i,j]}$ est minimale.

1.2 Justification de l'équation de récurrence

Soit g qui a un intervalle associe l'erreur minimale obtenue en codant les niveaux de l'intervalle de la palette sur une seule couleur.
Donc $g([i,j]) = f_{[i,j]}(x_{[i,j]})$.
Or f est une somme donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall i,j,k \in \mathbb{N}, i \leqslant j \leqslant k, f_{[i,k]}(x) = f_{[i,j]}(x) + f_{[j,k]}(x)$$

Selon les mêmes propriétés, l'erreur minimal d'un intervalle est la somme des erreurs minimales de ses sous intervalles.
On peut donc écrire :

$$\forall i,j,k \in \mathbb{N}, i \leqslant j \leqslant k, g([i,k]) = g([i,j] \cup [j,k]) = g([i,j]) + g([j,k])$$

Le problème est de réduire une palette de α niveaux de gris en une palette de β niveaux de gris ($\beta < \alpha$) tout en minimisant l'erreur.
Or :

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}, \exists t_0, \dots, t_{\beta-1} \in \mathbb{N}, t_0 \leqslant \dots \leqslant t_{\beta-1} \ / \ [0, \alpha-1] = \underbrace{[0, t_0] \cup \dots \cup [t_{\beta-2}, t_{\beta-1}]}_{\beta \text{ éléments}}$$

Donc d'après la propriété précédente :

$$\begin{aligned} g([0,\alpha-1]) &= g([0,t_0] \cup \dots \cup [t_{\beta-2}, t_{\beta-1}]) = g([0,t_0]) + \dots + g([t_{\beta-2}, t_{\beta-1}]) \\ g([0,\alpha-1]) &= \underbrace{g([0,t_0]) + \sum_{i=0}^{\beta-2}([t_i, t_{i+1}])}_{\beta \text{ éléments}} \end{aligned}$$

Donc trouver $g([0,\alpha-1])$ revient à trouver les β intervalles $[0,t_0]$, ... , $[t_{\beta-2}, t_{\beta-1}]$ tels que l'erreur soit minimale.

1.3 Formule de récurrence

On cherche à exprimer R_n la formule de récurrence au rang n.

R_n correspond au n intervalles utilisés lors de la réduction d'une palette de α niveaux de gris en n niveau de gris en minimisant l'erreur.

Initialisation $R_1 = [0, \alpha-1]$
On réduit la palette $[0, \alpha-1]$ en un seul niveau de gris, en minimisant l'erreur.

Récurrence Supposons $n \in]\!]1, \alpha]\!]$ et supposons connu R_{n-1}.
On cherche donc ici à couper $[0, \alpha-1]$ en n intervalles de manière à minimiser l'erreur.
On sait couper $[0, \alpha-1]$ en $n-1$ intervalles d'après $R_{n-1} = \{[0,p_0], [p_0,p_1], \dots, [p_{n-2}, p_{n-1}]\}$.
Donc,

$$[0, \alpha-1] = [\![0, p_0]\!] \cup [\![p_0, p_1[\![\cup \dots \cup [\![p_{n-2}, p_{n-1}]\!]$$

Choisissons dans R_{n-1} l'intervalle dont l'erreur est la plus grande, notons le $I = [\![a, b]\!]$.
Nous cherchons désormais à couper I en deux intervalles, de manière à réduire l'erreur.
Couper $[\![a, b]\!]$ en deux revient à chercher $j \in [\![a, b]\!]$.

Mais nous souhaitons de plus réduire l'erreur. Pour cela, on peut simplement itérer sur les valeurs de j, et de garder la valeur de j pour laquelle l'expression suivante est minimale :

$$x_{[a,j]} + x_{[j,b]}$$

Notons $j_{\min}$ un tel j.
Nous pouvons donc exprimer I comme suit :

$$I = [\![a, j_{\min}]\!] \cup [\![j_{\min}, b]\!]$$

On peut facilement observer que l'erreur d'intervalle de I est supérieur à la somme des erreurs d'intervalle de $[\![a, j_{min}]\!]$ et $[\![j_{min}, b]\!]$.

De ce fait, nous avons obtenu n intervalles :

$$\begin{aligned}
R_{n-1} &= \{[0,p_0] \cup \cdots \cup [p_{k-1},p_k] \cup \qquad\qquad I \qquad\qquad \cup [p_{k+1},p_{k+2}] \cup \cdots \cup [p_{n-2},p_{n-1}]\} \\
R_n &= \{[0,p_0] \cup \cdots \cup [p_{k-1},p_k] \cup \quad [a, j_{\min}] \cup [j_{\min}, b] \quad \cup [p_{k+1},p_{k+2}] \cup \cdots \cup [p_{n-2},p_{n-1}]\}
\end{aligned}$$

Nous avons donc trouver R_n un ensemble de n intervalles fournissant une couverture de $[0, \alpha - 1]$ tout en minimisant l'erreur dû à la réduction de la palette en β niveaux de gris.

Conclusion En vertu du principe de récurrence, nous avons prouvé que $\forall n \in [\![1, \alpha]\!] \; \exists I \,/\, Card(I) = n, [0, \alpha - 1] = I$ et tel que l'erreur d'intervalle sur I soit minimale.

François Lepan
Benjamin Van Ryseghem