AAC: Séance 11

Benjamin Van Ryseghem

10 décembre 2012

Heuristique

```
aff <- tableau de taille n
aff(1) = 1 // sommet 1 dans ens1
aff(2) = 2 // sommet 2 dans ens2

S <- v(1,2) // l'arrete (1,2) rejoints les ensembles 1 et 2
Pour sommet: 3 à n faire
        v1 <- 0: augmentation de S si sommet est affecté à ens1
        v2 <- 0: augmentation de S si sommet est affecté à ens2
        pour i - 1 à sommet-1 faire
                si aff(1) =1 alors v2 <- v2+v(i, sommet)
                sinon v1 <- v1+v (i,sommet)
        si v1>v2 alors
                S <- S+v1
                aff(sommet) = 1
        sinon
                S <- S+v2
                aff(sommet) = 2
```

Invariant

$$S = \sum_{\substack{aff(i)\neq aff(j)\\ i<j<sommet}} v(i,j) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i<j<sommet} v(i,j)$$

Vérification de l'invariant

Étape initiale

$$\begin{aligned} S = \sum_{\substack{aff(i)\neq aff(j)\\ i<j<sommet}} v(i,j) &= v(1,2) \\ \frac{1}{2}\sum_{i<j<sommet} v(i,j) &= \frac{1}{2}v(1,2) \end{aligned}$$

L'invariant est donc respecté.

Durant les itérations

$$\begin{aligned}
S_{sommet+1} &= S_sommet + max(v_1, v_2) \\
\frac{1}{2}\sum_{i<j<sommet+1} v(i,j) &= \frac{1}{2}\sum_{i<j<sommet} v(i,j) + v_1 + v_2
\end{aligned}$$

Or, $\forall a, b$:

$$\begin{aligned}
2 * max(a,b) &\geqslant a + b \\
max(a,b) &\geqslant \frac{1}{2}(a+b)
\end{aligned}$$

Donc l'invariant est bien respecté durant les itérations.

Preuve d'approximation À la fin de l'algorithme, on a

$$S \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i<j<sommet} v(i,j)$$

La solution optimale ne peut pas avoir un poids supérieur que le poids de toutes les arrêtes du graphe $\sum_{i<j<sommet} v(i,j)$.

Donc $OPT \geqslant S \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i<j<sommet} v(i,j)$.

L'heuristique gloutonne est une 2-approximation pour le problème de Clustering.

Benjamin Van Ryseghem