

AAC: TP1

François LEPAN
Benjamin VAN RYSEGHEM

19 octobre 2012

1 Erreur de réduction

1.1 Calcul du minimum

On suppose une image ayant plus de 0 pixel, *i.e.*

Hypothesis 1

$$\forall start \in \mathbb{N}, \forall stop \in \mathbb{N}, start \leq stop, \sum_{i=start}^{stop} (histo[i]) \geq 0$$

Soit $f_{[i,j]}$ la fonction qui à un niveau de gris x retourne l'erreur $f(x)$ associée à ce niveau de gris sur l'intervalle $[start, stop]$.

$$\begin{aligned} f_{[start,stop]}(x) &= \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x - palette[i])^2 \\ f_{[start,stop]}(x) &= \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x^2 - 2x \times palette[i] + palette[i]^2) \\ f'_{[start,stop]}(x) &= \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (2x - 2palette[i]) \\ f'_{[start,stop]}(x) &= 2 \times \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x - palette[i]) \\ f''_{[start,stop]}(x) &= 2 \times \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \end{aligned}$$

Minimiser l'erreur revient à minimiser $f_{[start;stop]}(x)$ pour $x \geq 0$.

Or $f_{[i,j]}$ est convexe sur \mathbb{R} , $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \leq j$ car $f''_{[i,j]}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ donc f est minimal quand f' est nulle.

$$\begin{aligned}
f'_{[start, stop]}(x) &= 0 \\
\iff 2 \times \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x - palette[i]) &= 0 \\
\iff \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x - palette[i]) &= 0 \\
\iff \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times x) - \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i]) &= 0 \\
\iff \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times x) &= \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i]) \\
\iff x \times \sum_{i=start}^{stop} (histo[i]) &= \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i])
\end{aligned}$$

Donc d'après l'hypothèse 1 :

$$\begin{aligned}
\iff x \times \sum_{i=start}^{stop} (histo[i]) &= \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i]) \\
\iff x &= \frac{\sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i])}{\sum_{i=start}^{stop} (histo[i])}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc l'erreur est minimale quand } x = \frac{\sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i])}{\sum_{i=start}^{stop} (histo[i])}.$$

Appellons $x_{[i,j]}$ la valeur de x tel que $f_{[i,j]}$ est minimale.

1.2 Justification de l'équation de récurrence

Soit g qui a un intervalle associe l'erreur minimale obtenue en codant les niveaux de l'intervalle de la palette sur une seule couleur.

Donc $g([i, j]) = f_{[i,j]}(x_{[i,j]})$.

Or f est une somme donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall i, j, k \in \mathbb{N}, i \leq j \leq k, f_{[i,k]}(x) = f_{[i,j]}(x) + f_{[j,k]}(x)$$

Selon les mêmes propriétés, l'erreur minimal d'un intervalle est la somme des erreurs minimales de ses sous intervalles.

On peut donc écrire :

$$\forall i, j, k \in \mathbb{N}, i \leq j \leq k, g([i, k]) = g([i, j] \cup [j, k]) = g([i, j]) + g([j, k])$$

Le problème est de réduire une palette de α niveaux de gris en une palette de β niveaux de gris ($\beta < \alpha$) tout en minimisant l'erreur.

Or :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \exists t_0, \dots, t_{\beta-1} \in \mathbb{N}, t_0 \leq \dots \leq t_{\beta-1} / [0, \alpha - 1] = \underbrace{[0, t_0] \cup \dots \cup [t_{\beta-2}, t_{\beta-1}]}_{\beta \text{ éléments}}$$

Donc d'après la propriété précédente :

$$\begin{aligned} g([0, \alpha - 1]) &= g([0, t_0] \cup \dots \cup [t_{\beta-2}, t_{\beta-1}]) = g([0, t_0]) + \dots + g([t_{\beta-2}, t_{\beta-1}]) \\ g([0, \alpha - 1]) &= \underbrace{g([0, t_0]) + \sum_{i=0}^{\beta-2} g([t_i, t_{i+1}])}_{\beta \text{ éléments}} \end{aligned}$$

Donc trouver $g([0, \alpha - 1])$ revient à trouver les β intervalles $[0, t_0], \dots, [t_{\beta-2}, t_{\beta-1}]$ tels que l'erreur soit minimale.

1.3 Formule de récurrence

On cherche à exprimer R_n la formule de récurrence au rang n .

R_n correspond au n intervalles utilisés lors de la réduction d'une palette de α niveaux de gris en n niveau de gris en minimisant l'erreur.

Initialisation $R_1 = [0, \alpha - 1]$

On réduit la palette $[0, \alpha - 1]$ en un seul niveau de gris, en minimisant l'erreur.

Récurrence Supposons $n \in]1, \alpha]$ et supposons connu R_{n-1} .

On cherche donc ici à couper $[0, \alpha - 1]$ en n intervalles de manière à minimiser l'erreur.

On sait couper $[0, \alpha - 1]$ en $n - 1$ intervalles d'après $R_{n-1} = \{[0, p_0], [p_0, p_1], \dots, [p_{n-2}, p_{n-1}]\}$.
Donc,

$$[0, \alpha - 1] = \llbracket 0, p_0 \rrbracket \cup \llbracket p_0, p_1 \rrbracket \cup \dots \cup \llbracket p_{n-2}, p_{n-1} \rrbracket$$

Choisissons dans R_{n-1} l'intervalle dont l'erreur est la plus grande, notons le $I = \llbracket a, b \rrbracket$.

Nous cherchons désormais à couper I en deux intervalles, de manière à réduire l'erreur. Pour cela nous utilisons la fonction f précédemment défini appliquée à l'intervalle $\llbracket a, b \rrbracket$ afin de trouver la valeur où l'erreur est minimale. Cette valeur est ce que nous avons appelé $x_{\llbracket a, b \rrbracket}$.

Il existe donc un $j = x_{\llbracket a, b \rrbracket}$ tel que cette erreur soit minimale.

Notons j_{\min} un tel j .

Nous pouvons donc exprimer I comme suit :

$$I = \llbracket a, j_{\min} \rrbracket \cup \llbracket j_{\min}, b \rrbracket$$

On peut facilement observer que l'erreur d'intervalle de I est supérieur à la somme des erreurs d'intervalle de $\llbracket a, j_{\min} \rrbracket$ et $\llbracket j_{\min}, b \rrbracket$.

De ce fait, nous avons obtenu n intervalles :

$$\begin{aligned} R_{n-1} &= \{[0, p_0] \cup \dots \cup [p_{k-1}, p_k] \cup \quad I \quad \cup [p_{k+1}, p_{k+2}] \cup \dots \cup [p_{n-2}, p_{n-1}]\} \\ R_n &= \{[0, p_0] \cup \dots \cup [p_{k-1}, p_k] \cup \quad \llbracket a, j_{\min} \rrbracket \cup \llbracket j_{\min}, b \rrbracket \quad \cup [p_{k+1}, p_{k+2}] \cup \dots \cup [p_{n-2}, p_{n-1}]\} \end{aligned}$$

Nous avons donc trouver R_n un ensemble de n intervalles fournissant une couverture de $[0, \alpha - 1]$ tout en minimisant l'erreur dû à la réduction de la palette en β niveaux de gris.

Conclusion En vertu du principe de récurrence, nous avons prouvé que $\forall n \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket \exists I / \text{Card}(I) = n, [0, \alpha - 1] = I$ et tel que l'erreur d'intervalle sur I soit minimale.

2 Compression

en kB	215	256	53	32	8	3	2	1
Originale	262	968	997	786	786	786	786	786
Compression 1	224	224	28	11	1	1	1	1
Compression 2	166	166	33	13	1	1	1	1
Compression 3	155	155	35	12	1	1	1	1
Compression 4	154	154	50	18	1	1	1	1
Compression 5	153	153	35	12	1	1	1	1
Compression 6	224	224	28	11	1	1	1	1
Compression 7	151	151	36	12	1	1	1	1
Compression 8	224	224	28	11	1	1	1	1
Compression 9	240	240	58	45	33	33	33	33
Compression 10	151	151	48	35	33	33	33	33



François LEPAN
Benjamin VAN RYSEGHEM