Résolution pratique du TSP

François Lepan Benjamin Van Ryseghem

20 décembre 2012

1 Heuristiques

1.1 Complexité des deux méthodes

Construction itérative par ajout du plus proche :	$O(n^2)$
Construction par ajout d'arc :	$O(n^2)$

2 Borne inférieure

Pour être une solution du problème initiale, un chemin doit vérifier deux choses :
- être un circuit, c'est à dire une permutation des n villes,
- être de longueur l minimum.

Circuit Or si s' est une solution du problème réduit, s' vérifie :
- être un circuit, c'est à dire une permutation des n villes,
- être de longueur l' minimum.

Il ne reste plus qu'a prouver le deuxième point.

Longueur Soit s' une solution de P' le problème réduit. Alors s' peut s'écrire comme

$$s' = v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n \text{ où } v_i \text{ est une des } n \text{ villes du problème}$$

De plus, la longueur l' de s' peut s'écrire comme suit

$$l' = l'_{v_1,v_2}, l'_{v_2,v_3}, \ldots, l'_{v_{n-1},v_n}, l'_{v_n,1} \text{ où } l'_{v_i,v_j} \text{ est la distance entre } v_i \text{ et } v_j \text{ pour le problème } P'$$

Alors les réductions successives des matrices a pour effet pour chaque ville :

1. ôter a toutes les arretes sortantes la distance minimale de ces arretes,
2. ôter a toutes les arretes entrantes la distance minimale de ces arretes,

On peut ainsi écrire que

$$\forall i, j \in [0, n], i \neq j, l_{v_i,v_j} = l'_{v_i,v_j} + min_s(v_i) + min_e(v_j)$$

où
- l_{v_i,v_j} est la distance entre v_i et v_j pour le problème P non réduit,
- $min_s(v)$ est le minimum des distances des arrêtes sortantes de la ville v,
- $min_e(v)$ est le minimum des distances des arrêtes entrantes de la ville v.

On peut alors écrire la longueur l de s la solution de P correspondant à s' comme suit :

$$
\begin{aligned}
l &= \sum_{i=1}^{n-1} l_{v_i,v_{i+1}} + l_{v_n,v_1} \\
l &= \sum_{i=1}^{n-1} (l'_{v_i,v_{i+1}} + min_s(v_i) + min_e(v_{i+1})) + l'_{v_n,v_1} + min_s(v_n) + min_e(v_1) \\
l &= \sum_{i=1}^{n-1} l'_{v_i,v_{i+1}} + \sum_{i=1}^{n-1} min_s(v_i) + \sum_{i=2}^{n} min_e(v_i) + l'_{v_n,v_1} + min_s(v_n) + min_e(v_1) \\
l &= l' + \sum_{i=1}^{n} min_s(v_i) + \sum_{i=1}^{n} min_e(v_i)
\end{aligned}
$$

Appellons $d = \sum_{i=1}^{n} min_s(v_i) + \sum_{i=1}^{n} min_e(v_i)$ la borne inférieure de la matrice de problème P.
Alors

$$l = l' + d$$

Reste à prouver que cette longueur l est minimum.

Raisonnement par l'absurde Supposons $l_r < l$ tel qu'il existe s_r une solution à P. D'après le paragraphe précédent, on peut donc déduire l'existence d'une solution s'_r pour P'.

La longueur l'_r de s'_r est alors de $l_r - d$.

Or par hypothèse

$$
\begin{aligned}
l_r &< l \\
l_r - d &< l - d \\
l'_r &< l'
\end{aligned}
$$

Or s' est supposé une solution optimale, donc il est impossible de trouver une solution s'_r de P' de longueur inférieure.

On aboutit donc à une contradiction. De ce fait, l'hypothèse de l'existence d'une solution de P de longueur minimale est absurde.

Conclusion En conclusion, nous avons trouvé une solution optimale de P à partir d'une solution optimale de P'. De plus, nou savons calculé sa longueur à partir de la longueur de la solution de P'.