AAC: TP1

François Lepan
Benjamin Van Ryseghem

6 octobre 2012

1 Erreur de réduction

1.1 Calcul du minimum

On suppose une image ayant plus de 0 pixel, *i.e.*

Hypothesis 1

$$\forall start \in \mathbb{N}, \forall stop \in \mathbb{N}, start \leq stop, \sum_{i=start}^{stop} (histo[i]) \geq 0$$

Soit $f_{[i,j]}$ la fonction qui qui à un niveau de gris x retourne l'erreur $f(x)$ associée a ce niveau de gris sur l'intervalle $[start, stop]$.

$$\begin{aligned}
f_{[start,stop]}(x) &= \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x - palette[i])^2 \\
f_{[start,stop]}(x) &= \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x^2 - 2x \times palette[i] + palette[i]^2) \\
f'_{[start,stop]}(x) &= \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (2x - 2palette[i]) \\
f'_{[start,stop]}(x) &= 2 \times \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x - palette[i]) \\
f''_{[start,stop]}(x) &= 2 \times \sum_{i=start}^{stop} histo[i]
\end{aligned}$$

Minimiser l'erreur revient a minimiser $f_{[start;stop]}(x)$ pour $x \geq 0$.
Or $f_{[i,j]}$ est convexe sur $\mathbb{R}, \forall i, j \in \mathbb{N}, i \leq j$ car $f''_{[i,j]}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ donc f est minimal quand f' est nulle.

$$
\begin{aligned}
f'_{[start,stop]}(x) &= 0 \\
\iff 2 \times \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x - palette[i]) &= 0 \\
\iff \sum_{i=start}^{stop} histo[i] \times (x - palette[i]) &= 0 \\
\iff \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times x) - \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i]) &= 0 \\
\iff \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times x) &= \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i]) \\
\iff x \times \sum_{i=start}^{stop} (histo[i]) &= \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i])
\end{aligned}
$$

Donc d'apres l'hypothèse 1 :

$$
\begin{aligned}
\iff x \times \sum_{i=start}^{stop} (histo[i]) &= \sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i]) \\
\iff x &= \frac{\displaystyle\sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i])}{\displaystyle\sum_{i=start}^{stop} (histo[i])}
\end{aligned}
$$

Donc l'erreur est minimale quand $x = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=start}^{stop} (histo[i] \times palette[i])}{\displaystyle\sum_{i=start}^{stop} (histo[i])}$.

Appellons $x_{[i,j]}$ la valeur de x tel que $f_{[i,j]}$ est minimale.

1.2 Justification de l'équation de récurrence

Soit g qui a un intervalle associe l'erreur minimale obtenue en codant les niveaux de l'intervalle de la palette sur une seule couleur.

Donc $g([i,j]) = f_{[i,j]}(x_{[i,j]})$.
Or f est une somme donc associative.
De ce fait,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall i, j, k \in \mathbb{N}, i \leq j \leq k, f_{[i,k]}(x) = f_{[i,j]}(x) + f_{[j,k]}(x)$$

Selon les mêmes propriétés, l'erreur minimal d'un intervalle est la somme des erreurs minimales de ses sous intervalles.

On peut donc écrire :

$$\forall i,j,k \in \mathbb{N}, i \leq j \leq k, g([i,k]) = g([i,j] \cup [j,k]) = g([i,j]) + g([j,k])$$

Le problème est de réduire une palette de α niveaux de gris en une palette de β niveaux de gris ($\beta < \alpha$) tout en minimisant l'erreur.
Or :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \exists t_0, \ldots, t_{\beta-1} \in \mathbb{N}, t_0 \leq \cdots \leq t_{\beta-1} \ / \ [0, \alpha-1] = \underbrace{[0,t_0] \cup \cdots \cup [t_{\beta-2}, t_{\beta-1}]}_{\beta \text{ éléments}}$$

Donc d'après la propriété précédente :

$$\begin{aligned} g([0,\alpha-1]) &= g([0,t_0] \cup \cdots \cup [t_{\beta-2}, t_{\beta-1}]) = g([0,t_0]) + \cdots + g([t_{\beta-2}, t_{\beta-1}]) \\ g([0,\alpha-1]) &= \underbrace{g([0,t_0]) + \sum_{i=0}^{\beta-2}([t_i, t_{i+1}])}_{\beta \text{ éléments}} \end{aligned}$$

Donc trouver $g([0,\alpha-1])$ revient à trouver les β intervalles $[0,t_0]$, $\ldots$, $[t_{\beta-2}, t_{\beta-1}]$.

François Lepan
Benjamin Van Ryseghem