AAC : Séance 7

Benjamin Van Ryseghem

19 novembre 2012

Exercice 7 : SAT

Question 1

forme booléenne $\twoheadrightarrow$ forme disjonctive $\rightarrow$ test polynomiale de satisfiabilité $\Rightarrow$ formule booléenne testée en temps polynomiale.

Passer d'une forme booléenne a une forme disjonctive ne peut pas forcement se faire de façon polynomiale.

1 Exercice 1 : Vrai ou Faux

1.1 Question 1

Toute propriété NP est aussi P	Vrai si P = NP
Toute propriété P est aussi NP	Vrai
Une propriété NP est une propriété non polynomiale	Faux
Il existe une propriété NP polynomiale	Vrai
Il existe une propriété NP non polynomiale	Vrai si P$\neq$NP
Une propriété NP-dur n'est pas P	Vrai si P$\neq$NP

1.2 Question 2

Si P_1 se réduit polynomialement en Q, Q est P	Faux
Si Q se réduit polynomialement en P_1, Q est P	Vrai
Si Q se réduit polynomialement en P_2, Q est NP-dur	Faux
Si P_2 se réduit polynomialement en Q, Q est NP-dur	Vrai
Si Q se réduit polynomialement en P_3, Q est NP	Vrai
Si P_3 se réduit polynomialement en Q, Q est NP	Faux

2 Exercice 2

2.1 Question 1 : Montrer que le problème COL est NP-complet

Certificat Un certificat pour G est juste un coloriage des noeuds. On peut par exemple le représenter par un tableau de couleurs indexé par les sommets. On a donc :

$$\text{taille du certificat} \Leftarrow \text{taille du graphe}$$

(on suppose que la taille d'un graphe est au moins le nombre de sommets plus le nombre d'arcs) La taille d'un certificat est alors bien linéaire, donc polynomialement bornée, par rapport à celle de la donnée.

Algorithme de preuve Un certificat est valide ⇔ aucun arc ne relie deux noeuds de même couleur : le vérifier est bien polynomial :

```
boolean A(col, G){
        Pour chaque arc (s,d) de G
                si col(s)=col(d) retourner Faux;
        retourner Vrai;
}
```

La complexité de l'algorithme est de l'ordre de card(A) donc bien polynomiale.

Conclusion Le problème est bien NP. Il reste à montrer qu'il est NP-dur.

Soit une instance de 3-COL définie par $G_3 = (S_3, A_3)$ un graphe non orienté. On construit une instance de COL de la manière suivante :

- on fixe $G = G_3$.
- on fixe k = 3 pour l'instance de COL.
- la transformation est bien polynomiale.

Montrons que $I_3 vrai \Leftrightarrow Ivrai$ Montrons que s'il existe une 3-coloration dans G_3 alors dans G aussi et inversement.

Donc 3-COL se réduit polynomialement vers COL. Or comme 3-COL est NP-complet, on en déduit que COL est NP-dur.

Conclusion COL est NP et NP-dur, donc COL est NP-complet.

2.2 Question 2 :

Benjamin Van Ryseghem