Langages et grammaires algébriques

Mirabelle Nebut

Bureau 332 - M3
`mirabelle.nebut at lifl.fr`

2011-2012

But de ce cours

	outils pour l'analyse lexicale	outils pour l'analyse syntaxique
type de langage	langage régulier	langage algébrique
description	expressions régulières	grammaires algébriques
formalisme sous-jacent	AF(N)D	automates à pile

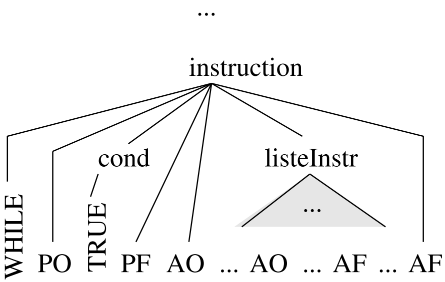
Langages et grammaires algébriques

Principes de l'analyse syntaxique

- reçoit de l'analyseur lexical une suite de symboles ;
- reconnaît dans cette suite la structure d'un texte.

Ex :

```
...
while (true) {
  while (true) {
    ...
  }
}
...
```



Décrire/reconnaître la structure d'un texte

Les langages réguliers / expressions régulières ne suffisent pas.

exemple archi-typique : $\{a^n b^n | n \geq 0\}$

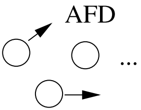
- parenthésage imbriqué
- pour le reconnaître :
  - compter/mémoriser le nombre de a ;
  - compter /mémoriser le nombre de b.
- pas régulier.

$a^n b^n$ pas régulier, argument intuitif - 1

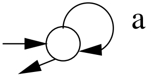
Dans un AF(fini)D : états = mémoire (finie)

Ex langages réguliers finis :

- $\{a^n b^n | n \leq 3\}$;
- $\{a^n b^n | n \leq 9045\}$;
- $\{a^n b^n | n \leq k\}$ pour k fixé ;



Ex langage régulier infini : a^*



$a^n b^n$ pas régulier, argument intuitif - 2

$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

~~AFD mémoire finie~~

$\Rightarrow$ il suffit de prendre n plus grand que la taille de la mémoire.

$a^n b^n$ pas régulier, argument intuitif - 3

Pour reconnaître $\{a^n b^n | n \geq 0\}$:

- mémoriser un nombre non borné de symboles a et b ;
- $\Rightarrow$ langage non régulier.

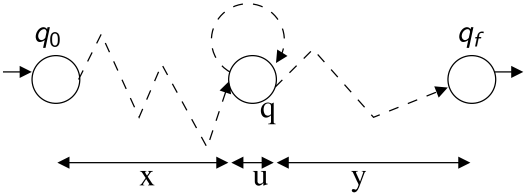
Pour reconnaître $\{a^n b^n | n \leq 32\}$:

- il faut mémoriser au pire 32 a et 32 b ;
- mémorisation bornée $\Rightarrow$ régulier.

$a^n b^n$ pas régulier, argument formel

Theorem (Lemme de pompage)

Soit L un langage régulier. Alors il existe un entier k tq pour tout mot m de L de longueur $\geq k$*, il existe des mots* $x, u, y \in \Sigma^*$ *avec* $m = xuv$*,* $u \neq \epsilon$ *et pour tout n,* $xu^n y \in L$*.*



Pour $a^n b^n$: où placer u ?

Grammaire algébrique pour INIT

programme $\rightarrow$ entete listDecl listInst

entete $\rightarrow$ PROG ID PV — une production

listInst $\rightarrow$ ϵ — une production vide

listInst $\rightarrow$ instr listInst

instr $\rightarrow$ lecture PV

instr $\rightarrow$ affect PV

lecture $\rightarrow$ READ ID

. . .

TERMINAUX $\in V_T$

non-terminaux $\in V_N$

axiome $\in V_N$

Grammaire algébrique pour INIT

programme $\rightarrow$ entete listDecl listInst
entete $\rightarrow$ PROG ID PV — une production
listInst $\rightarrow$ ϵ — une production vide
listInst $\rightarrow$ instr listInst
instr $\rightarrow$ lecture PV | affect PV
`// équivalent !`
lecture $\rightarrow$ READ ID
...

TERMINAUX $\in V_T$
non-terminaux $\in V_N$
axiome $\in V_N$

On écrit $X \rightarrow \alpha \mid \beta$ pour
$X \rightarrow \alpha$
$X \rightarrow \beta$

Définition formelle

Definition (grammaire algébrique)

Une grammaire algébrique ou hors-contexte est un quadruplet

$$G = (V_T, V_N, P, S)$$

- V_T et V_N sont des vocabulaires disjoints : V_T est l'ensemble des terminaux, V_N l'ensemble des non-terminaux ;
- $S \in V_N$ est l'axiome, ou symbole de départ (Start) ;
- $P \subseteq V_N \times (V_N \cup V_T)^*$ est l'ensemble des (règles de) productions.

Remarques

≪ $P \subseteq V_N \times (V_N \cup V_T)^*$ est l'ensemble des productions ≫ :

instr $\rightarrow$ affect PV
est une notation pour
(instr, affect PV) $\in P$

Terminaux de V_T = unités lexicales fixées à l'analyse lexicale.

La grammaire engendre des mots de ${V_T}^*$.

Langage engendré par une grammaire algébrique

Une grammaire algébrique permet de décrire un langage algébrique.

On dit que ce langage est engendré par la grammaire.

Comment engendrer des mots à partir d'une grammaire ?

Comment engendrer des mots ?

Problème : engendrer des mots de ${V_T}^*$ à partir :

- de l'axiome ;
- et des productions de la grammaire.

Ex : engendrer le mot PROG ID PV à partir de G_I :

(1)	programme $\rightarrow$ entete listDecl listInst	(3)	listDecl $\rightarrow \epsilon$
(2)	entete $\rightarrow$ PROG ID PV	(4)	listInst $\rightarrow \epsilon$

Moyen : dérivations directes successives, à partir de l'axiome.

Comment engendrer des mots - dérivations directes

(1)	programme → entete listDecl listInst	(3)	listDecl → ϵ
(2)	entete → PROG ID PV	(4)	listInst → ϵ

programme $\Rightarrow_{G_l}$ **entete listDecl listInst** (dér. directe par (1))

entete listDecl listeInst $\Rightarrow_{G_l}$ **PROG ID PV** listDecl listInst par (2)

PROG ID PV listDecl listInst $\Rightarrow_{G_l}$ PROG ID PV listDecl par (4)

PROG ID PV listDecl $\Rightarrow_{G_l}$ PROG ID PV par (3)

Dérivation : définition

Une dérivation est une suite de dérivations directes :

programme $\Rightarrow_{G_l}$ entete listDecl listInst
$\Rightarrow_{G_l}$ PROG ID PV listDecl listInst $\Rightarrow_{G_l}$ PROG ID PV listDecl
$\Rightarrow_{G_l}$ PROG ID PV

Cette dérivation est de longueur 4 : programme $\Rightarrow^4_{G_l}$ PROG ID PV

Notation : programme $\Rightarrow^*_{G_l}$ PROG ID PV

Pour une grammaire G d'axiome S, une dérivation pour le mot m désigne une dérivation de S à m.

Langage engendré

Definition (langage engendré)

Soit G une grammaire algébrique d'axiome S. Le langage engendré par G est défini par :

$$L(G) = \{m \in {V_T}^* \mid S \Rightarrow^* m\}$$

Déterminer si un mot m appartient au langage engendré, c'est déterminer si :

$$S \Rightarrow^*_G m\,?$$

Autre exemple - une grammaire des additions - 1

$G_A = (V_T, V_N, P, A)$ où

- $V_T = \{\texttt{id}, \texttt{+}\}$
- $V_N = \{\ A\ \}$
- $P = \{\ A \rightarrow A \texttt{ + } A \mid \texttt{id}\ \}$

Autre exemple - une grammaire des additions - 2

$A \rightarrow A + A \mid \texttt{id}$

Une dérivation possible pour le mot `id + id + id` :

$$\underline{A} \Rightarrow A + \underline{A} \Rightarrow A + \underline{A} + A \Rightarrow \underline{A} + \texttt{id} + A \Rightarrow \texttt{id} + \texttt{id} + \underline{A} \Rightarrow \texttt{id} + \texttt{id} + \texttt{id}$$

Donc $A \Rightarrow^* \texttt{id + id + id}$, ou $A \Rightarrow^5 \texttt{id + id + id}$

Mon voisin a trouvé une dérivation différente !

On peut souvent trouver plusieurs dérivations pour un mot.

Deux sources de choix :

- choix du non-terminal à dériver ;
- choix de la production à appliquer, de membre gauche le non-terminal choisi.

Dérivation directe (formellement) - 1

Definition (**dérivation directe**)

Soient $\beta, \beta' \in (V_N \cup V_T)^*$. β se dérive directement en β' selon G, noté $\beta \Rightarrow_G \beta'$, s'il existe des mots $\gamma, \gamma' \in (V_N \cup V_T)^*$ et une production $X \to \alpha$ tels que :

$$\begin{array}{ccccc} \beta & = & \gamma & X & \gamma' \\ \beta' & = & \gamma & \alpha & \gamma' \end{array}$$

Ex : $\overbrace{A + \underline{A} + A}^{\beta} \Rightarrow \overbrace{A + \texttt{id} + A}^{\beta'}$ par $\overbrace{A}^{X} \to \overbrace{\texttt{id}}^{\alpha}$

$$\underbrace{A\ +}_{\gamma}\underbrace{A}_{X}\underbrace{+\ A}_{\gamma'} \Rightarrow \underbrace{A\ +}_{\gamma}\underbrace{\texttt{id}}_{\alpha}\underbrace{+\ A}_{\gamma'}$$

Dérivation directe (formellement) - 2

Definition (**dérivation directe**)

Soient $\beta, \beta' \in (V_N \cup V_T)^*$. β se *dérive directement* en β' selon G, noté $\beta \Rightarrow_G \beta'$, s'il existe des mots $\gamma, \gamma' \in (V_N \cup V_T)^*$ et une production $X \to \alpha$ tels que :

$$\begin{array}{ccccc} \beta & = & \gamma & X & \gamma' \\ \beta' & = & \gamma & \alpha & \gamma' \end{array}$$

Ex : $\overbrace{A + \underline{A}}^{\beta} \Rightarrow \overbrace{A + A + A}^{\beta'}$ par $\overbrace{A}^{X} \to \overbrace{A + A}^{\alpha}$

$$\underbrace{A +}_{\gamma} \underbrace{A}_{X} \underbrace{\quad}_{\gamma'=\epsilon} \Rightarrow \underbrace{A +}_{\gamma} \underbrace{A + A}_{\alpha} \underbrace{\quad}_{\gamma'=\epsilon}$$

Encore un exemple, et un piège

$V_T = \{a, b\}$, $V_N = \{S, B\}$, axiome S,
$P = \{S \to BB,\ B \to a \mid b\ \}$.

Dérivation pour aa ?

De longueur 3, pas 2 !

Dérivation (formellement)

Definition (**dérivation**)

Soient $\beta, \beta' \in (V_N \cup V_T)^*$. Une suite de mots β_0, β_1, . . ., β_n ($n \geq 0$) est une *dérivation* de β en β' selon G si $\beta_0 = \beta$, $\beta_n = \beta'$, et

$$\beta_0 \Rightarrow \beta_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \beta_n$$

Definition (**relation de dérivation**)

La relation de dérivation $\Rightarrow_G^*$ est la *fermeture réflexive et transitive* de la relation de dérivation directe $\Rightarrow_G$.

Mon voisin a trouvé une grammaire différente !

On peut trouver 2 grammaires algébriques qui engendrent le même langage.

Definition (**grammaires équivalentes**)

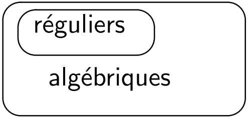
Deux grammaires sont équivalentes si elles engendrent le même langage.

Langages algébriques

Definition (langage algébrique)

Les langages engendrés par les grammaires algébriques sont appelés langages algébriques.

Comparaison avec les réguliers



régulier $\Rightarrow$ algébrique

algébrique $\not\Rightarrow$ régulier

Tout langage régulier est algébrique :

- possible d'utiliser une grammaire algébrique au lieu d'expressions régulières ;
- mais AF plus efficaces.

Il existe des algébriques qui ne sont pas réguliers : $\{a^n b^n | n \geq 0\}$

Un exemple pour la route

Une première grammaire des expressions arithmétiques :

$G_E = (V_T, V_N, P, E)$:

- $V_T = \{\texttt{id}, \texttt{+}, \texttt{*}, \texttt{(}, \texttt{)}\}$
- $V_N = \{ E \}$
- $P = \{ E \to E \texttt{ + } E \mid E \texttt{ * } E \mid \texttt{(} E \texttt{)} \mid \texttt{id} \}$

Montrer que `id * (id + id)` est un mot de $L(G_E)$.

Langage algébrique ? régulier ?

Limites des langages réguliers

Langages et grammaires algébriques

Arbres syntaxiques

Grammaires ≪ pathologiques ≫

Les algébriques. . . et les autres

Arbre syntaxique

Arbre résultant de l'analyse syntaxique.

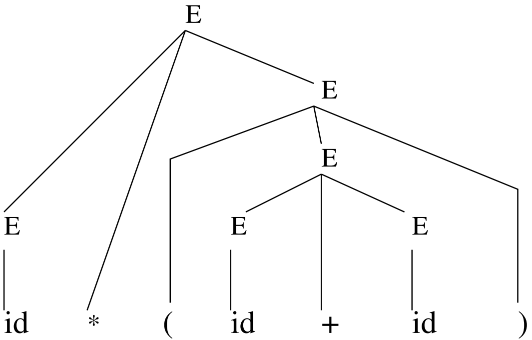
Fait apparaître la structure syntaxique d'un mot.

Notion très importante, on le verra plus tard.

On parle aussi d'arbre de dérivation.

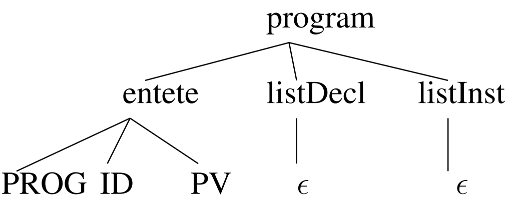
Arbre syntaxique : exemple - 1

Arbre syntaxique pour `id * (id + id)` selon G_E :



Arbre syntaxique : exemple - 2

Arbre syntaxique pour `PROG ID PV` selon G_I :

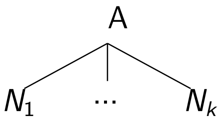


Schématiquement

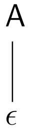
Pour une grammaire G :

- la racine : l'axiome de G ;
- le mot des feuilles : le mot qui nous intéresse ;
- les noeuds internes sont agencés selon les productions de G :

$$A \to N_1 N_2 \dots N_k$$



$$A \to \epsilon$$



Arbre syntaxique et appartenance à $L(G)$

Theorem

Soit $m \in {V_T}^*$. $m \in L(G)$ ss'il existe un arbre syntaxique selon G dont le mot aux feuilles est m.
On dit alors que cet arbre est un arbre syntaxique pour m, ou que m admet cet arbre.

Répondre à $m \in L(G)$ = chercher un arbre syntaxique pour m.

En pratique

Les analyseurs syntaxiques ne construisent pas un arbre syntaxique.

L'arbre est une représentation commode pour comprendre l'analyse syntaxique.

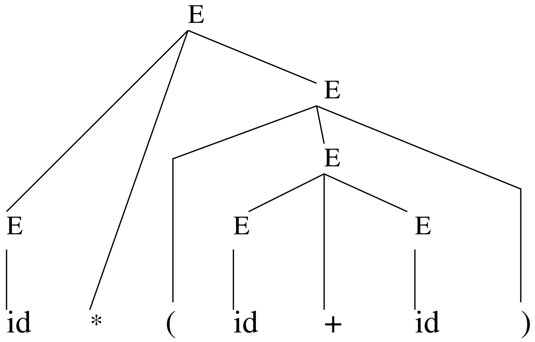
Ils construisent une dérivation particulière, appelée gauche ou droite.

$\Rightarrow$ lien entre arbre syntaxique et dérivation ?

Arbre syntaxique et dérivations - 1

Facile de construire un arbre syntaxique à partir d'une dérivation.

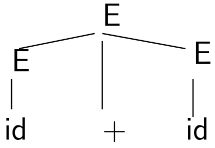
$$\begin{aligned} E &\Rightarrow E * E \\ &\Rightarrow \mathtt{id} * E \\ &\Rightarrow \mathtt{id} * (E) \\ &\Rightarrow \mathtt{id} * (E + E) \\ &\Rightarrow \mathtt{id} * (\mathtt{id} + E) \\ &\Rightarrow \mathtt{id} * (\mathtt{id} + \mathtt{id}) \end{aligned}$$



À une dérivation correspond un seul arbre.

Arbre syntaxique et dérivations - 2

À un arbre correspondent potentiellement plusieurs dérivations.



$$E \Rightarrow_{G_l} \underline{E} + E \Rightarrow_{G_l} \mathtt{id} + E \Rightarrow_{G_l} \mathtt{id} + \mathtt{id}$$

$$E \Rightarrow_{G_l} E + \underline{E} \Rightarrow_{G_l} E + \mathtt{id} \Rightarrow_{G_l} \mathtt{id} + \mathtt{id}$$

Ces 2 dérivations sont ≪ équivalentes ≫ : elles correspondent au même arbre :

- mêmes productions appliquées aux mêmes non-t^{aux} ;
- seul l'ordre des dérivations directes varie.

Arbre syntaxique et dérivations : dérivations gauche/droite

On peut fixer l'ordre des dérivations directes en choisissant systématiquement :

- soit le non-terminal le plus à gauche ;
  $E \Rightarrow_{G_l} \underline{E} + E \Rightarrow_{G_l} \mathtt{id} + \underline{E} \Rightarrow_{G_l} \mathtt{id} + \mathtt{id}$ dérivation gauche
- soit le non-terminal le plus à droite.
  $E \Rightarrow_{G_l} E + \underline{E} \Rightarrow_{G_l} \underline{E} + \mathtt{id} \Rightarrow_{G_l} \mathtt{id} + \mathtt{id}$ dérivation droite

À chaque arbre syntaxique correspond une unique dérivation gauche et une unique dérivation droite.

Dérivation gauche/droite, formellement

Definition

Soient $\beta, \beta' \in (V_N \cup V_T)^*$ et $\beta_0 \Rightarrow \beta_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \beta_n$ une dérivation de β en β'. Si à chaque étape on choisit de remplacer dans β_i le non-terminal :

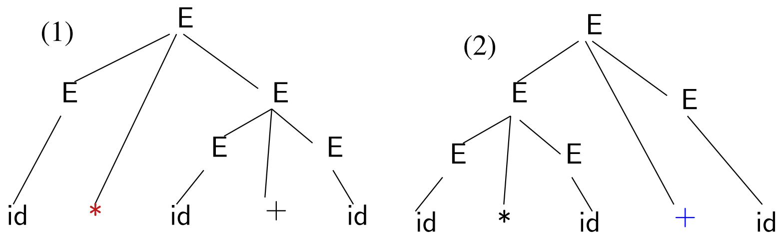
- le plus à gauche : c'est une dérivation gauche (leftmost derivation) notée $\beta \overset{lm}{\Longrightarrow}^* \beta'$;
- le plus à droite : c'est une dérivation droite (rightmost derivation) notée $\beta \overset{rm}{\Longrightarrow}^* \beta'$.

Arbre syntaxique et dérivations - 3

Certaines dérivations ne correspondent pas au même arbre.

(1) $E \Rightarrow E * \underline{E} \Rightarrow E * E + E \Rightarrow^* \texttt{id * id + id}$

(2) $E \Rightarrow \underline{E} + E \Rightarrow E * E + E \Rightarrow^* \texttt{id * id + id}$



À un mot correspondent potentiellement plusieurs arbres.

Récapitulatif

- À une dérivation correspond un seul arbre.
- À un arbre correspondent potentiellement plusieurs dérivations.
- À un arbre correspond une unique dérivation gauche et une unique dérivation droite.
- À un mot correspondent potentiellement plusieurs arbres/interprétations.

Et la suite ?

A-t-on tout ce qu'il faut pour utiliser un générateur d'analyseur syntaxique ?

Entrée de l'outil : une grammaire algébrique.

Mais pas toutes les grammaires algébriques !

$\Rightarrow$ comprendre en quoi une grammaire peut-être « parthologique ».

Pathologies vues dans ce cours

Les grammaires ambiguës :

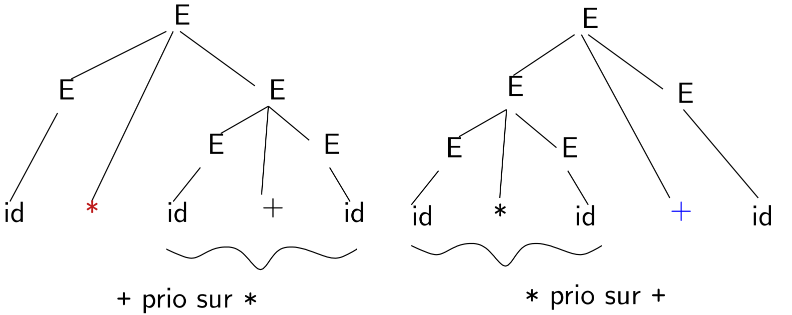
- elles sont rejetées par le générateur
- avec un message d'erreur pas forcément explicite
- il faut trouver une grammaire équivalente

Les grammaires non réduites :

- acceptées par le générateur, avec warning
- signale souvent une erreur de conception
- il faut savoir comprendre et réparer

Interprétation d'un mot et ambiguïté

Deux interprétations (sémantiques) différentes de `id * id + id` : ce mot est ambigu.



Définition

Definition

(**ambiguïté**) Un mot $w \in L(G)$ est ambigu s'il admet plusieurs arbres syntaxiques.

Récapitulatif

- À une dérivation correspond un seul arbre.
- À un arbre correspondent potentiellement plusieurs dérivations.
- À un arbre correspond une unique dérivation gauche et une unique dérivation droite.
- À un mot correspondent potentiellement plusieurs arbres/interprétations.
- À un mot non ambigu correspond un(e) unique arbre/interprétation.

Définitions

Definition

Une grammaire est ambiguë si elle permet de dériver au moins un mot ambigu.

Definition

Un langage est ambigu si toutes les grammaires qui l'engendrent sont ambiguës.

Le problème des interprétations multiples

Un programme ayant plusieurs interprétations ?

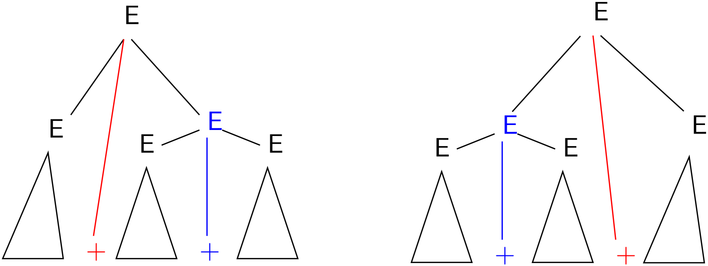
Désastreux pour un programme souhaité déterministe !

On ne travaille qu'avec des grammaires dites non ambiguës, pour lequelles tout mot admet un unique arbre syntaxique.

$\Rightarrow$ il faut savoir repérer les grammaires ambiguës.

Détecter l'ambiguïté - 1

Certaines grammaires sont ≪ clairement ≫ ambiguës, repérable avec de l'expérience.
Ex de production symétrique : $E \to E + E$.



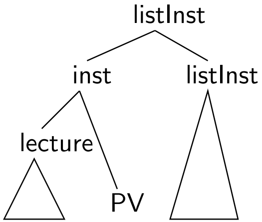
Détecter l'ambiguïté - 2

Certaines grammaires sont mal conçues

Ex grammaire Init G_1 non ambiguë :

$$\text{listInst} \rightarrow \epsilon \mid \text{inst listInst}$$
$$\text{inst} \rightarrow \text{affect PV} \mid \text{lecture PV}$$

lecture PV. . .



Détecter l'ambiguïté - 3

Déplacement de la production vide.

Ex grammaire Init G_2 ambiguë :

$$\text{listInst} \rightarrow \text{inst listInst} \mid \text{inst}$$
$$\text{inst} \rightarrow \epsilon \mid \text{affect PV} \mid \text{lecture PV}$$

Voyez-vous pourquoi G_2 est ambiguë ?

Prouver une ambiguïté

Prouver qu'une grammaire est ambiguë = trouver un mot qui admet au moins 2 arbres syntaxiques.

L'utilisation d'un générateur d'analyseur syntaxique peut aider.

Prouver qu'une grammaire n'est pas ambiguë = faire une preuve.

Décider de l'ambiguïté d'une grammaire est difficile : c'est un problème indécidable.

Grammaires ambiguës, en pratique

Quand un langage L est intuitivement non ambigü. . .

et qu'une grammaire engendrant L l'est. . . on peut essayer de la rendre non ambiguë :

- le plus souvent : on réfléchit et on change peu de choses ;
- cas particulier : les grammaires à opérateurs.

Grammaires à opérateurs

Grammaires faisant intervenir des opérateurs avec :

- associativité ;
- priorités.

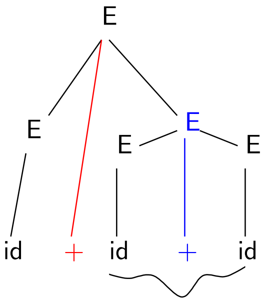
Ex : grammaire (ambiguë) des expressions arithmétiques

$$E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid \mathtt{id}$$

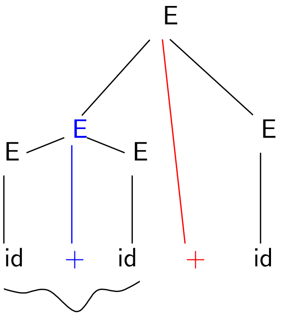
id (+id | x id)*

Associativité des opérateurs

Première source d'ambiguïté : l'associativité de + et $*$.



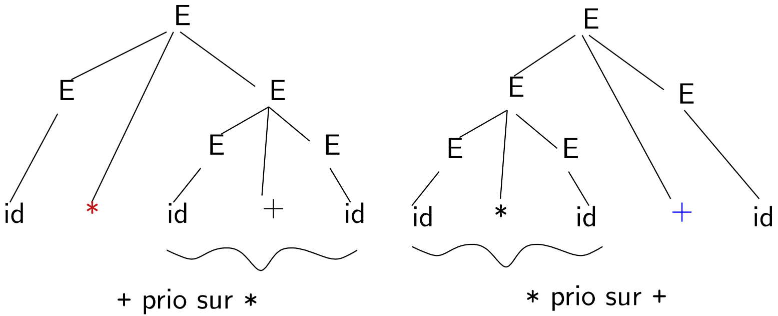
associativité droite



associativité gauche

Priorité des opérateurs

Seconde source d'ambiguïté : priorité de + et $*$.



NB : plus prioritaire $=$ dérivé du E le plus bas dans l'arbre

Principes - 1

$$E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid \texttt{id}$$

Dans cette grammaire l'axiome E représente potentiellement :

- une somme : opérateur $+$;
- un produit : opérateur $*$;
- une expression atomique : `id` ;
- une expression parenthésée.

Pour refléter les priorités des opérateurs dans la grammaire :

- on repère la structure d'une expression ;
- on structure la grammaire en conséquence.

Principes - 2

Structure d'une expression : somme de produits de facteurs

$$\sum_{i=0\dots n} \prod_{j=0\dots m} x_{ij}$$

Rmq : d'abord la somme, la moins prioritaire.

Les facteurs x_{ij} sont soit :

- un atome `id` ;
- une expression parenthésée.

Pour imiter cette structure dans la grammaire, on lui ajoute :

- $S \in V_N$ pour une somme ;
- $P \in V_N$ pour un produit ;
- $F \in V_N$ pour un facteur.

Traitement de l'associativité, ex des produits - 1

$F \rightarrow \texttt{id} \mid (E)$ $\qquad P \rightarrow ?\ *\ ?$

Un opérande d'un produit peut être :

- un autre produit : récursivité sur P ;
- un facteur F (ne permettant pas de dériver un produit).

Par ailleurs :

- on ne veut pas d'un produit $P * P$!
- il faut un ≪ cas d'arrêt ≫ : $P \rightarrow F$

$P \rightarrow F \mid P * F$?
$F \rightarrow \texttt{id} \mid (E)$

Récursivité gauche ?

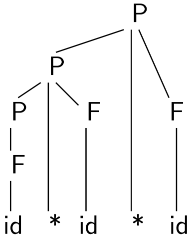
$P \rightarrow F \mid F * P$?
$F \rightarrow \texttt{id} \mid (E)$

Récursivité droite ?

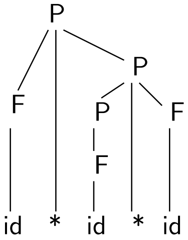
Traitement de l'associativité, ex des produits - 2

$P \rightarrow F \mid P * F$
$F \rightarrow \ldots$ récursivité gauche

$P \rightarrow F \mid F * P$
$F \rightarrow \ldots$ récursivité droite



associativité gauche



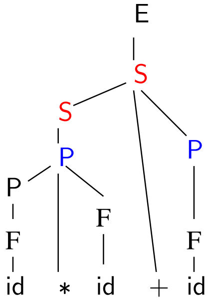
associativité droite

Ici on choisira donc une récursivité gauche.

Traitement des priorités - 1

En traitant la somme (de produits) de la même manière : OK

$$
\begin{aligned}
E &\to S \\
S &\to P \mid S + P \\
P &\to F \mid P * F \\
F &\to \mathtt{id} \mid (E)
\end{aligned}
$$

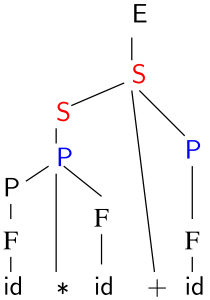


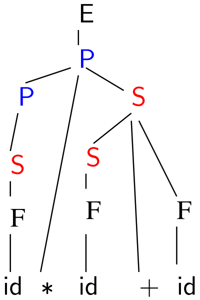
Traitement des priorités - 2

Rmq : en inversant somme et produit : KO

$E \to S$ $\quad$ S en haut
$S \to P \mid S + P$
$P \to F \mid P * F \ldots$

$E \to P$ $\quad$ P en haut
$P \to S \mid P * S$
$S \to F \mid S + F \ldots$





Systématisation

Pour rendre une grammaire à opérateur non ambiguë :

- on ajoute un non terminal par niveau de priorité (S pour +, P pour $*$, etc) ;
- les moins prioritaires en haut de l'arbre, proches de l'axiome ;
- les plus prioritaires en bas de l'arbre, proches des feuilles ;
- les « atomes » tout en bas ;
- associativité gauche/droite $\Rightarrow$ récursivité gauche/droite.

Exemple plus gros

$$E \to E \texttt{ + } E \mid E \texttt{ - } E \mid E \ast E \mid E \texttt{ / } E \mid \texttt{ - } E \mid \texttt{ (} E \texttt{) } \mid \texttt{id}$$

$$\underbrace{\{+, -_{\mathtt{b}}\}}_{S} \leq_{prio} \underbrace{\{*, /\}}_{P} \leq_{prio} \underbrace{\{\texttt{-}_u\}}_{U} \leq_{prio} \underbrace{\{()\}}_{A}$$

$$\begin{aligned}
E &\to S \\
S &\to P \mid S \texttt{ + } P \mid S \texttt{ - } P \\
P &\to U \mid P \ast U \mid P \texttt{ / } U \\
U &\to \texttt{ - } U \mid A \\
A &\to \texttt{ (} E \texttt{) } \mid \texttt{id}
\end{aligned}$$

Grammaires à opérateurs, bilan

Version ambiguë : très intuitive. . . mais ambiguë !

Version non ambiguë : opérationnalisable. . .

- mais complètement illisible !
- taille arbre beaucoup plus grande.

Grammaires à opérateurs, automatisation

On a un algorithme qui calcule une grammaire non ambiguë.

Il prend en entrée :

- une grammaire à opérateurs ambiguë ;
- et les niveaux de priorité + associativité des opérateurs.

Encore mieux grâce aux outils (cf TP) :

- spécifier et décorer uniquement la grammaire ambiguë ;
- garder implicite la version non-ambiguë.

Limites des langages réguliers

Langages et grammaires algébriques
- Les grammaires algébriques
- Langage engendré, dérivations
- Langages algébriques, comparaison avec les réguliers

Arbres syntaxiques

Grammaires ≪ pathologiques ≫
- Ambiguïté
- Grammaires réduites, analyse et transformation

Les algébriques. . . et les autres
- Comparaison avec les réguliers
- Limitation des algébriques
- Les autres

Aparté : parallèle code/grammaire - 1

Quand on code… :

- on écrit des bêtises (bugs) ;
- on écrit du code mort ;
- on écrit des choses simplifiables, genre `if (x == true)` ;
- etc.

Pour détecter ces bêtises :

- analyses statiques possibles (à la compilation) :
  - détecte des erreurs de typages, de syntaxe, code mort, etc.
- test (à l'exécution) :
  - on essaie pour voir si ça marche ;
  - détecte les erreurs ≪ sémantiques ≫ (le programme est syntaxiquement correct mais ne répond pas à sa spécification).

Aparté : parallèle code/grammaire - 2

Quand on écrit une grammaire : c'est pareil ! on peut se tromper :

- on a oublié une production ;
- on s'est trompé dans l'écriture d'une production ;
- etc.

Certaines erreurs sont détectables statiquement :

- détection de productions et non-t^{aux} inutiles ($\sim$ code mort) ;
- $\Rightarrow$ obtention d'une grammaire dite réduite (cf cours).

Erreurs sémantiques (la grammaire ne dit pas ce qu'on pense) :

- on teste en exécutant l'analyseur syntaxique.

Aparté : parallèle code/grammaire - 3

On souhaite parfois réusiner (refactoring) un programme. . .

. . . de même on peut souhaiter transformer une grammaire pour :

- obtenir des arbres syntaxiques plus compacts ;
  - suppression des règles $X \to Y$ et $X \to \epsilon$;
  - $\Rightarrow$ grammaires propres ;
- obtenir une forme de grammaire particulière propice à certaines analyses ;
  - forme normale de Chomsky (FNC) ;
  - $X \to a$ ou $X \to YZ$;
- mettre à part ϵ.

Pas dans ce cours, cf la littérature.

Grammaires réduites

Certaines grammaires sont « pathologiques » dans le cas où certains non-terminaux ne servent à rien.

Signale souvent une erreur de conception.

Il faut savoir détecter et supprimer ces non-terminaux.

On obtient une grammaire réduite.

Definition

Une grammaire est dite réduite si elle ne contient pas de non-terminal improductif ou inaccessible.

Non-terminaux improductifs

Ex : $liste \to elt\ liste \qquad elt \to \ldots$

liste est improductif : il ne permet pas de dériver un mot de ${V_T}^*$.

Definition

Un non-terminal $X \in V_N$ est improductif s'il n'existe pas de mot $u \in {V_T}^*$ tel que $X \Rightarrow^* u$ (le langage engendré par X est vide). Il est productif sinon.

Calcul des improductifs

1. on calcule les productifs ;
2. par complémentaire on a les improductifs ;
3. on supprime toutes les productions contenant un improductif en partie gauche ou droite.

Calcul des productifs : idée

X est productif :

- s'il existe une production $X \to u$ avec $u \in {V_T}^*$;
- ou s'il existe une production $X \to \alpha$ avec $\alpha \in (V_N \cup V_T)^*$ tel que tous les non-terminaux apparaissant dans α sont productifs.

Calcul des productifs : plus petit point fixe

Algorithme naïf pour calculer un plus petit point fixe par itérations successives :

- on part d'un ensemble initial ;
- on le fait grossir itérativement ;
- jusqu'à stabilisation.

Exemple

G_1 telle que $V_N = \{S, X, Y, Z, W\}$ (axiome S), $V_T = \{a, b, d\}$ et

(1) $S \rightarrow a\ X$
(2) $S \rightarrow d\ W$
(3) $X \rightarrow b\ S$
(4) $X \rightarrow a\ Y\ b\ Y$
(5) $Y \rightarrow b\ a$
(6) $Y \rightarrow a\ Z$
(7) $Z \rightarrow a\ Z\ X$
(8) $W \rightarrow a\ S$

Exemple, résolution

n^o itération	*Prod*
0 (init)	{Y}
1	{Y,X}
2	{Y,X,S}
3	{Y,X,S,W}
4	{Y,X,S,W}

Algorithme de calcul des productifs

`Entrée : une grammaire algébrique` G
`Sortie : l'ensemble` $Prod$
`de ses non-terminaux productifs`
`// Init`
$Prod = \emptyset$
pour toute *production* $X \to u, \ u \in {V_T}^*$
faire $Prod = Prod \cup \{X\}$ `// noté` $Prod \cup = \{X\}$
fait

Algorithme de calcul des productifs

```
// Itérations
faire jqa  stabilisation  de  Prod
     New = ∅  // les productifs découverts
              // pendant l'itération
     pour  toute  production X → u1 X1 u2 ... Xn un
           tq  X ∉ Prod   // X pas encore traité
               et  {X1, ..., Xn} ⊆ Prod  // X productif
     faire  New ∪= {X}
     fait
     Prod ∪= New
fait
```

Exemple, solution

On trouve $Prod = \{Y, X, S, W\}$, donc Z est improductif.

En supprimant Z partout on obtient la grammaire équivalente à G_1 :

G_1' telle que $V_N = \{S, X, Y, W\}$ et

(1) $S \to a\ X$
(2) $S \to d\ W$
(3) $X \to b\ S$
(4) $X \to a\ Y\ b\ Y$
(5) $Y \to b\ a$
(8) $W \to a\ S$

Non-terminaux inaccessibles

Ex : $\quad$ *instr* $\rightarrow$ *if* | *while* | *do*
affect $\rightarrow \ldots$

Oubli de *instr* $\rightarrow$ *affect*.

L'axiome ne permet pas ≪ d'attraper ≫ *affect*, qui est inutile.

Definition

Soit G une grammaire algébrique d'axiome S. Un non-terminal $X \in V_N$ est inaccessible s'il n'existe pas de mots $\alpha, \beta \in (V_N \cup V_T)^*$ tels que $S \Rightarrow^* \alpha X \beta$. Il est accessible sinon.

Calcul des inaccessibles

1. on calcule les accessibles ;
2. on a par complémentaire les inaccessibles ;
3. on supprime toutes les productions contenant un inaccessible en partie gauche (suffisant).

Supprimer les inaccessibles en partie gauche

Supprimera automatiquement les inaccessibles en partie droite.

$$Y \to \ldots X \ldots$$

Si X est inaccessible, Y l'est forcément aussi !

Calcul des accessibles : idée

X est accessible si :

- c'est l'axiome ;
- ou il existe une production $Y \to \alpha X \beta$ telle que Y est accessible.

Même principe d'itération de point fixe que pour les accessibles mais on cherche les candidats en partie droite de production.

Exemple

G_2 telle que $V_N = \{S, Y, U, V, X, Z\}$ (axiome S),
$V_T = \{a, b, d, e\}$ et

(1) $S \to Y$
(2) $Y \to Y\ Z$
(3) $Y \to Y\ a$
(4) $Y \to b$
~~(5)~~ $\cancel{U} \to V$
(6) $X \to e$
~~(7)~~ $\cancel{V} \to V\ d$
~~(8)~~ $\cancel{V} \to d$
(9) $Z \to Z\ X$

0-{S}
1-{SY}
2-{SYZ}
3-{SYZX}
4-{SYZX}

can remove U and V

Exemple, solution

$Acc = \{S, Y, Z, X\}$

En supprimant U et V partout on obtient la grammaire équivalente à G_2 :

G_2' telle que $V_N = \{S, X, Y, Z\}$ et

(1) $S \rightarrow Y$
~~(2)~~ $Y \rightarrow Y\ Z$
(3) $Y \rightarrow Y\ a$
(4) $Y \rightarrow b$
~~(6)~~ $X \rightarrow e$
~~(9)~~ $Z \rightarrow Z\ X$

Productifs	Accessibles
0-{YX}	0-{S}
1-{YXS}	1-{SY}
2-{XYS}	2-{SY}

Algorithme de calcul des accessibles

```
Entrée : une grammaire algébrique G d'axiome S
Sortie : l'ensemble Acc
 de ses non-terminaux accessibles
// Init
Acc = {S}
```

Algorithme de calcul des accessibles

```
// Itérations
faire jqa  stabilisation  de  Acc
     New = ∅   // les accessibles découverts
               // pendant l'itération
     pour  toute  production Y → αXβ, {X, Y} ⊆ V_N
           tq  X ∉ Acc   // X pas encore traité
               et  Y ∈ Acc   // X accessible
     faire  New ∪= {X}
     fait
     Acc ∪= New
fait
```

Grammaire réduite : attention

Il faut supprimer d'abord les improductifs puis les inaccessibles.

Ex : Improductifs de G_2' : $\{Z\}$

Si on supprime Z. . . X devient inaccessible !

La grammaire réduite équivalente est donc :
(1) $S \rightarrow Y$
(3) $Y \rightarrow Y\ a$
(4) $Y \rightarrow b$

Supprimer les improductifs puis les inaccessibles - 1

$$X \to \dots Y \dots$$

Supposons que :

- X soit improductif (et par exemple accessible)
- Y soit accessible uniquement via X

Si on supprime cette production : Y devient inaccessible.

$\Rightarrow$ Supprimer un improductif crée potentiellement des inaccessibles

Propriétés de clôture

réguliers $\subset$ algébriques

Les algébriques sont plus expressifs que les réguliers. Ils ont donc des propriétés moins fortes :

clôture par	langages réguliers	langages algébriques
Union	Oui	Oui
Concaténation	Oui	Oui
Etoile	Oui	Oui
Intersection	Oui	Non
Complémentaire	Oui	Non

Régulier ? Algébrique ?

Description de déplacements sur h et b.

$L_1 = \{w \in \{h, b\}^*\}$ régulier

$L_2 = \{h^n b^p \mid n \geq 0, p \geq 0\}$ régulier

$L_3 = \{h^n b^p \mid n \geq p \geq 0\}$ algébrique

$L_4 = \{w \in \{h, b\}^* \mid |w|_h = |w|_b\}$ algébrique

$L_5 = \{w \in \{h, b\}^* \mid w \text{ est un palindrome } \}$ algébrique

$L_6 = \{ww \mid w \in \{h, b\}^*\}$ ni l'un ni l'autre

Limitation des algébriques

$L_6 = \{ww \mid w \in \{h, b\}^*\}$ n'est pas algébrique.

Les grammaires algébriques expriment :

- les propriétés structurelles des langages ;
- mais pas leurs propriétés contextuelles ;
- on les appelle aussi « grammaires hors contexte ».

Par ex, on ne peut pas exprimer par une grammaire algébrique :

- que toute variable utilisée a été déclarée ;
- les vérifications de typage, etc.

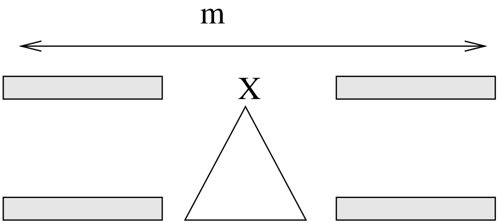
Ces propriétés relèvent de l'analyse sémantique.

Limitation des algébriques

Étant donné :

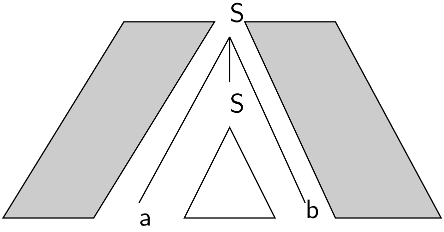
- un mot m de $(V_T \cup V_N)^*$ contenant $X \in V_N$
- une production $X \to \alpha$

la dérivation remplace X par α indépendamment de m, le contexte de X.



Ex de propriété structurelle

Toute accolade ouverte est fermée : $S \to \epsilon \mid aSb$



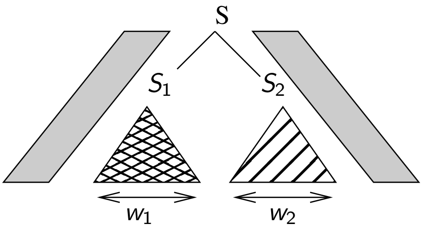
a et b sont dans le même arbre issu de S

$\Rightarrow$ propriété indépendante du contexte.

Ex de propriété contextuelle

$\{ww \mid w \in \{h, b\}^*\}$: essai...

$S \to S_1 S_2$
$S_1 \Rightarrow^* w_1$
$S_2 \Rightarrow^* w_2$



w_1 et w_2 sont dans deux arbres indépendants :

- on ne peut pas forcer $w_1 = w_2$;
- propriété dépendante du contexte.

Autre exemple

$$\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Comment forcer autant de a que de b que de c ?

Impossible avec des dérivations indépendantes les unes des autres.

$\Rightarrow$ $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ n'est pas algébrique.

Justification théorique : lemme fondamental des algébriques

Soient u_1, u_2, $v \in (V_T \cup V_N)^*$.

Si $u_1 u_2 \rightarrow^k v$ alors il existe $v_1, v_2 \in (V_T \cup V_N)^*$ tels que :

- $v = v_1 v_2$
- $u_1 \rightarrow^{k_1} v_1$ et $u_2 \rightarrow^{k_2} v_2$
- $k_1 + k_2 = k$.

Ce lemme ou sa généralisation sert dans les preuves, par exemple pour montrer que le langage engendré par $S \rightarrow aSb \,|\, \epsilon$ est $\{a^n b^n \,|\, n \geq 0\}$.

Comment être sensible au contexte ?

En utilisant une grammaire contextuelle.

Productions de la forme : $\alpha \to \beta$ avec $|\alpha| \leq |\beta|$
avec $\alpha, \beta \in (V_N \cup V_T)^*$

Ex : AB $\to$ BA

Les grammaires contextuelles :

- engendrent les langages contextuels ;
- ne sont pas utilisées lors de l'analyse syntaxique ;
- pas d'algorithme polynomial connu qui, pour tout mot, détermine si ce mot est engendré par une grammaire contextuelle donnée.

Si on continue à généraliser. . .

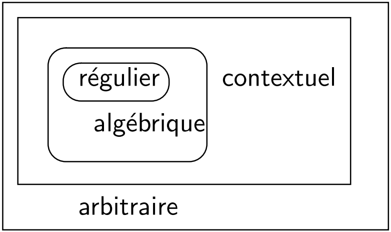
Il existe des grammaires arbitraires.

Productions de la forme : $\alpha \to \beta$
avec $\alpha, \beta \in (V_N \cup V_T)^*$

Ex : $AB \to \epsilon$

Ces grammaires engendrent l'ensemble de tous les langages.

Hiérarchie des langages et des grammaires



Chaque type de langage est généré par un type de grammaire particulier. . . y compris les réguliers.

Classification de Chomsky pour les grammaires :

$$\boxed{\text{régulière} \subset \text{algébrique}} \subset \text{contextuelle} \subset \text{quelconque}$$

Grammaires régulières

Type de grammaire algébrique qui n'engendre que des langages réguliers.

Definition

Une grammaire algébrique est dite régulière si chaque production est de la forme $X \to \epsilon$ ou $X \to aY$ avec $a \in V_T$ et $Y \in V_N$.

Si G est régulière alors $L(G)$ est régulier.

NB : $S \to \epsilon \mid aSa$

- non régulière ;
- engendre un langage régulier ;
- grammaire pas régulière $\not\Rightarrow$ langage pas régulier !

La suite au prochain numéro. . .

Langage régulier - expression régulière - AFND

Langage algébrique - grammaire algébrique - automate à pile