

RdF – Reconnaissance des Formes

Semaine 1 : attributs de forme

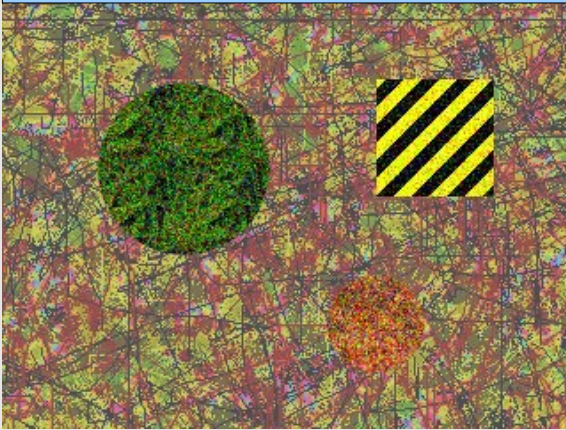
Master ASE : <http://master-ase.univ-lille1.fr/>

Master Informatique : <http://www.fil.univ-lille1.fr/>

Spécialité IVI : <http://master-ivi.univ-lille1.fr/>

Exemple de reconnaissance des Formes

image initiale

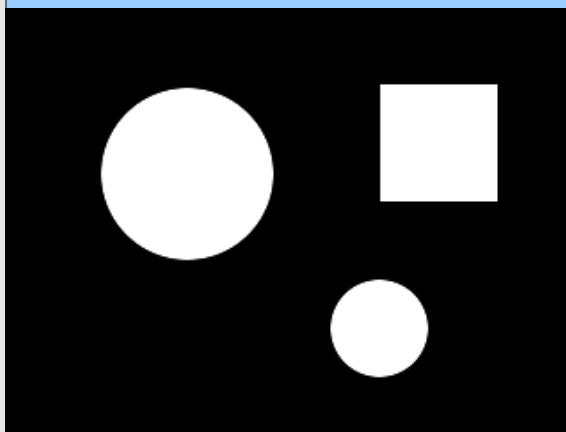


Reconnaissance
des Formes

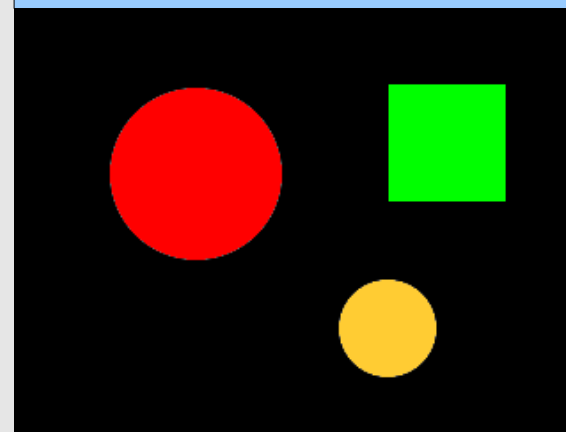
contenu

1 grand disque
1 carré
1 petit disque

image segmentée



composantes connexes



Plan du cours

1 – Indices de forme

définition, principes de construction et propriétés

moments cartésiens d'une forme

moments centrés : invariance en translation

moments normalisés : invariance au changement d'échelle

moments invariants de Hu

2 – Attributs déduits du contour

signature d'une forme à partir de son contour

signature en fonction de l'abscisse curviligne

descripteurs de Fourier

Indices de formes (1/2)

Définition

fonction $I(F)$ à **valeur réelle** (sans dimension) définie sur l'espace des **formes connexes** (homéomorphes à un disque) et **invariante** par translation, changement d'échelle et rotation ⁽¹⁾.

Propriétés

deux formes F_1 et F_2 peuvent avoir des indices de forme égaux **sans pour autant** être identiques.

s'il existe un indice de forme $I(.)$ tel que: $I(F_1) \neq I(F_2)$,
alors les formes F_1 et F_2 sont **différentes**.

Origine et calcul

souvent déterminés à partir d'**inégalités** reliant plusieurs paramètres **géométriques** pouvant être calculés sur la forme.

(1) L. Santalo, « Integral Geometry and Geometric Probability », Addison Wesley, 1976.

Indices de formes (2/2)

Exemple

on part de l'inégalité:

$$P^2 - 4\pi S \geq \pi^2(\rho_e - \rho_i)^2 ,$$

dont on peut déduire l'indice
appelé **déficit isopérimétrique**:

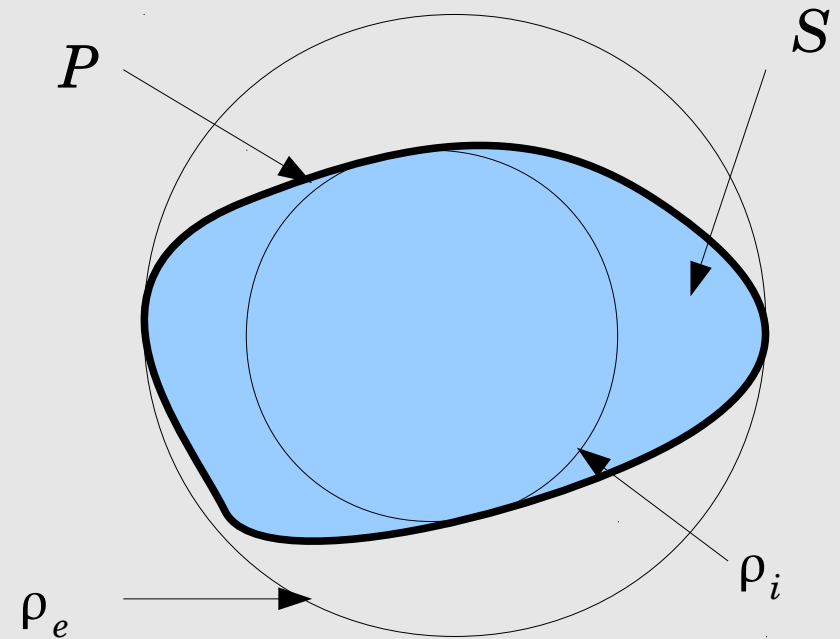
$$I(F) = \frac{4\pi S}{P^2} \in [0,1] .$$

Autres exemples

écart disque inscrit $\pi \frac{\rho_i^2}{S} \in [0,1]$

déficit $1 - \pi \frac{(\rho_e - \rho_i)^2}{P^2} \in [1 - \pi^2/16, 1]$

allongement des rayons $\rho_i / \rho_e \in [0,1]$



Moments d'une forme

Moment d'ordre 0

$$M_{00} = \sum_x \sum_y I(x, y) ,$$

dans laquelle $I(x,y)$ désigne le niveau de gris de l'image.

si l'image est **binaire**, le moment d'ordre 0 d'une forme est sa **surface** (unité: nombre de pixels).

Moments d'ordre supérieur

$$M_{ij} = \sum_x \sum_y x^i y^j I(x, y) ,$$

dans laquelle i et j sont des **entiers positifs**.

certaines **combinaisons** particulières de moments constituent de bons attributs pour la reconnaissance de formes.

exemple, **barycentre**: $(\bar{x}, \bar{y}) = (M_{10}/M_{00}, M_{01}/M_{00})$

Moments centrés et normalisés

Moments centrés

objectif: rendre les moments indépendants de la **position** de la forme dans l'image: attributs **invariants** en **translation**.

$$\mu_{ij} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^i (y - \bar{y})^j I(x, y) \quad .$$

les moments centrés d'ordre supérieur à 0 portent une **unité**, ils dépendent donc des **dimensions** de l'image.

Moments centrés normalisés

pour rendre les moments centrés indépendants de l'échelle de l'image, on définit les moments **normalisés**:

$$\eta_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu_{00}^{1+(i+j)/2}}$$

les moments normalisés sont des attributs de forme **invariants à un changement d'échelle** (homothétie)

Invariance à une rotation (1/2)

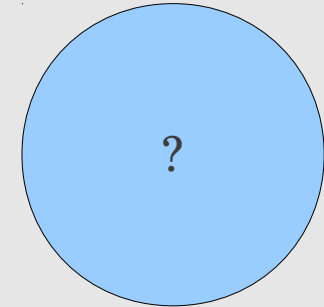
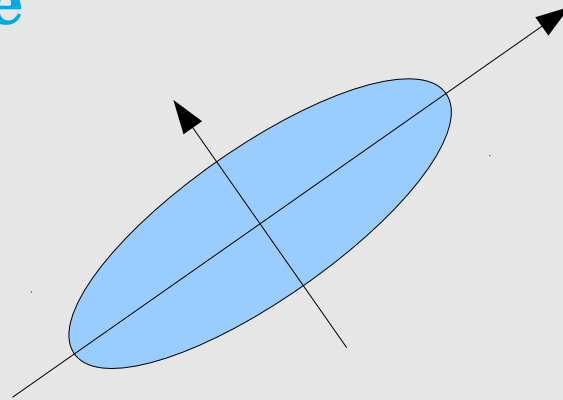
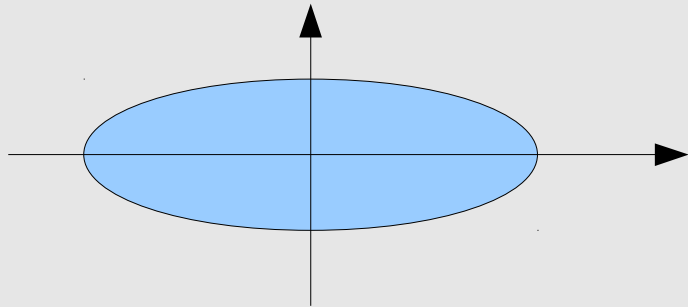
Moments d'ordre 2, inertie

analogie avec la **physique**: un objet est caractérisé par son **tenseur d'inertie** (ci-dessous en deux dimensions):

$$I = \begin{bmatrix} \mu_{20} & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \mu_{02} \end{bmatrix}, \quad \text{défini par rapport à son barycentre, ou centre d'inertie.}$$

le tenseur d'inertie indique comment la masse de l'objet est **répartie dans l'espace** par rapport aux **axes de rotation**.

Axes principaux d'inertie



Invariance à une rotation (1/2)

Changement de repère

le tenseur d'inertie est une **matrice symétrique**, donc on peut déterminer un repère dans laquelle elle devient **diagonale**.

$$I' = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \cdot I \cdot P, \quad \text{où } P \text{ est la matrice de changement de repère.}$$

I_1 et I_2 sont les **moments principaux d'inertie**.

les moments principaux d'inertie sont des attributs de forme **invariants en rotation**.

Diagonalisation de I

calcul des **valeurs propres** et **vecteurs propres** de la matrice I .

les valeurs propres sont les moments principaux d'inertie.

les vecteurs propres définissent les axes principaux d'inertie.

Exemple de diagonalisation

matrice d'inertie : $I = \begin{bmatrix} 77 & 70 \\ 70 & 77 \end{bmatrix}$,

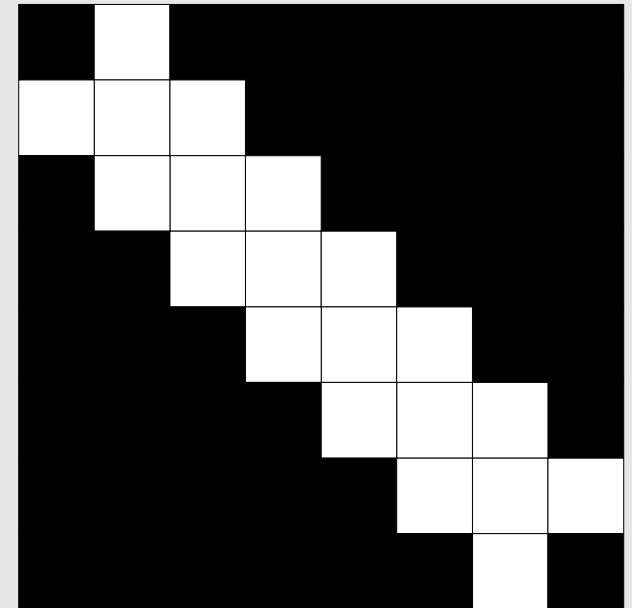
valeurs propres : $I_1 = 147, I_2 = 7$,
et vecteurs propres associés:

$$\vec{v}_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T, \quad \vec{v}_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T.$$

**la matrice de changement de repère
est formée par les vecteurs propres:**

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix},$$

et la matrice d'inertie modifiée est: $\begin{bmatrix} 147 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 77 & 70 \\ 70 & 77 \end{bmatrix} \cdot P.$



Moments invariants

attributs d'une forme qui sont **invariants** aux translations, aux changements d'échelle et aux rotations.

moments invariants proposés par **Hu** en 1962 ⁽¹⁾:

$$\Phi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$

$$\Phi_2 = (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + (2\eta_{11})^2$$

$$\Phi_3 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2$$

$$\Phi_4 = (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2$$

$$\Phi_5 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] + (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] \dots$$

il existe également des moments de Hu qui sont invariants à une déformation de l'objet de type **inclinaison**.

(1) M. K. Hu, « Visual Pattern Recognition by Moment Invariants », IRE Trans. Info. Theory, vol. IT-8, pp.179–187, 1962

Moments non cartésiens

Moments cartésiens

les moments définis précédemment sont une **décomposition** de l'image (fonction de x et y) sur la **base des polynômes**:

$$b_i(x) = x^i, \quad b_j(y) = y^j,$$

ces polynômes ne sont pas **orthogonaux**, donc la décomposition obtenue n'est pas une **représentation compacte** de l'image.

Moments orthogonaux

définis par une expression similaire:

$$M_{ij} = \sum_x \sum_y b_i(x) b_j(y) I(x, y) \quad ,$$

dans laquelle les fonctions de base sont **orthogonales**.

les plus utilisés: moments de **Legendre** (polynômes de Legendre) et moments de **Zernicke** (polynômes d'une variable complexe).

Signature d'un contour (1/2)

Principe

coder le contour (courbe délimitant l'objet) en utilisant les localisations de ses points par leurs **coordonnées polaires**.

Définition

origine du repère pour les coordonnées polaires = **barycentre** de la forme.

distance entre un point du contour et le centre en fonction de l'angle.

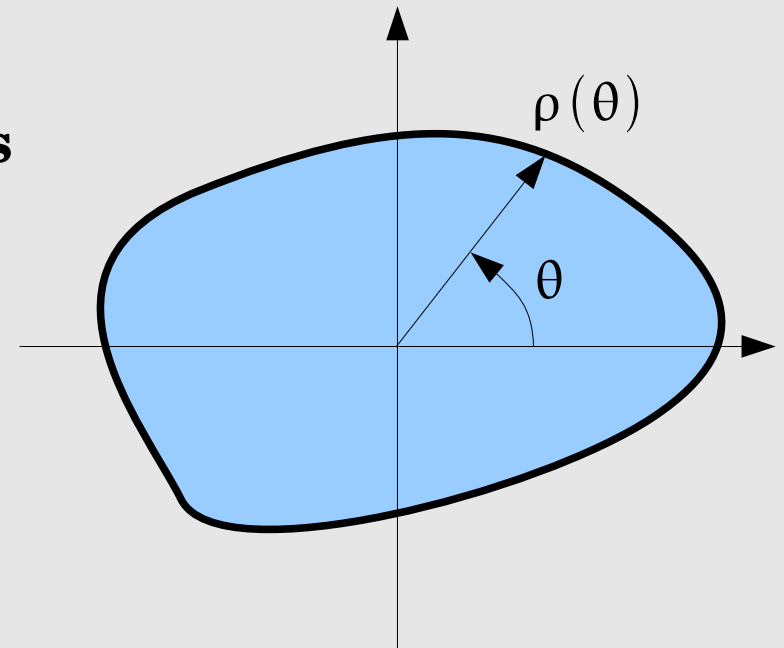
Propriétés

fonction **périodique**.

invariance en **translation**.

rotation de la forme = **déphasage** de sa signature.

dilatation = **multiplication** de la signature par le coefficient.



Signature d'un contour (2/2)

Inconvénient

nécessite que la forme soit **convexe**, sinon il peut y avoir **plusieurs** rayons pour un même angle.

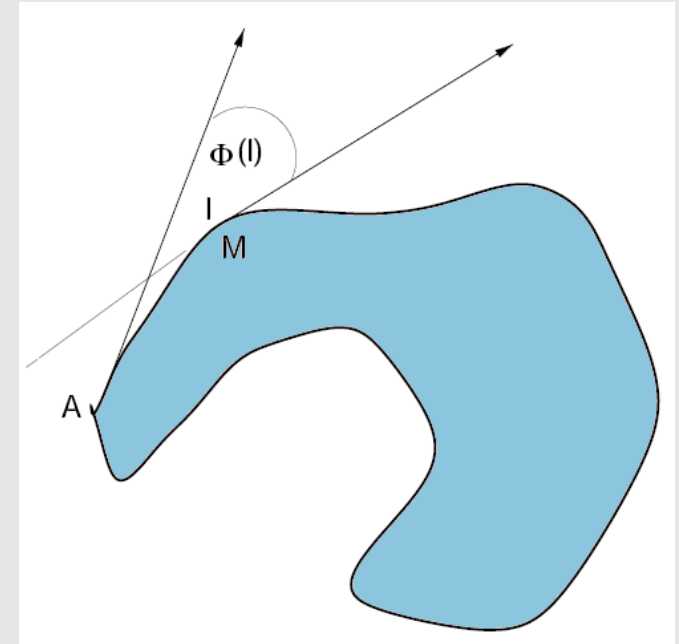
Solution

on utilise l'**abscisse curviligne** comme argument plutôt que l'angle.

Nouvelle définition

l'abscisse curviligne s varie entre 0 et le **périmètre** P de la forme.

on ne mesure plus le rayon, mais l'angle entre la **tangente** en s et la droite issue du **point origine A**.



$$\Phi(\theta) = \phi\left(\frac{P\theta}{2\pi}\right) - \theta, \quad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad s = \frac{P\theta}{2\pi}$$

Descripteurs de Fourier (1/3)

Objectif

permettent de coder la signature de façon **plus compacte** que par la fonction originale.

la signature est une fonction **périodique**, donc on peut calculer sa décomposition en **série de Fourier**:

$$\Phi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \exp(-i k \theta) \quad .$$

les **descripteurs de Fourier** d'une forme décrite par une fonction continue sont les coefficients a_k .

Propriétés

invariants par translation, rotation et changement d'origine.

pour comparer deux formes, on compare leurs descripteurs de Fourier jusqu'à une valeur fixant le **niveau de détails**.

Descripteurs de Fourier (2/3)

Version avec nombres complexes

un point de l'image est codé par un **nombre complexe**.
le contour de la forme est défini par une **série** de points:

$$z_j = x_j + i \cdot y_j, \quad j \in 0 \rightarrow N-1 \quad .$$

les descripteurs de Fourier sont les N coefficients de la transformée de Fourier **discrète** de la série de points:

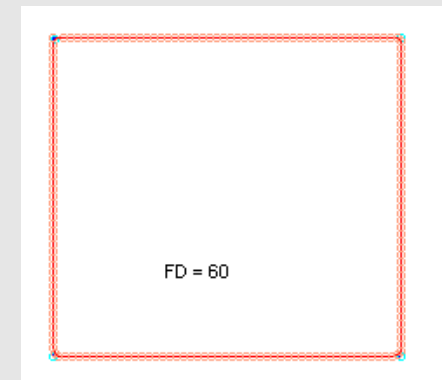
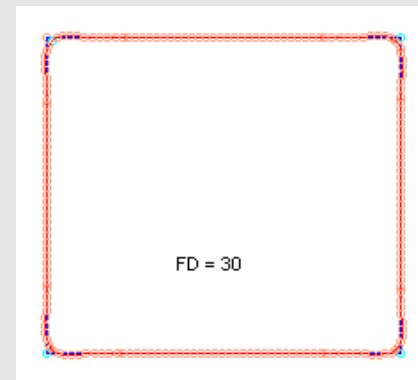
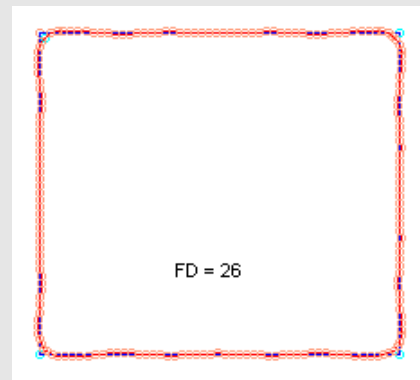
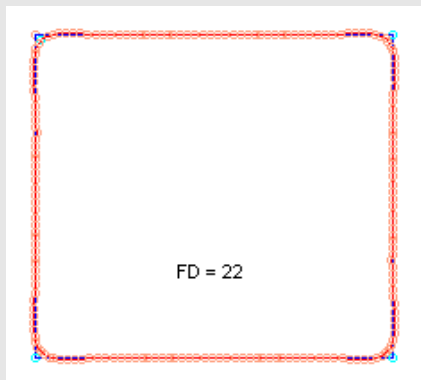
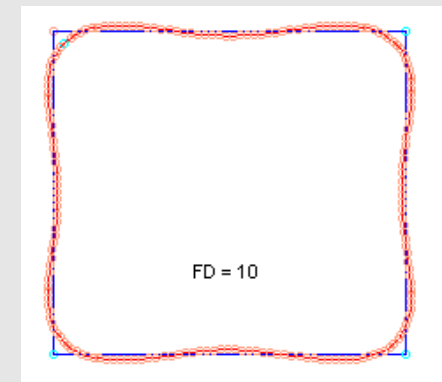
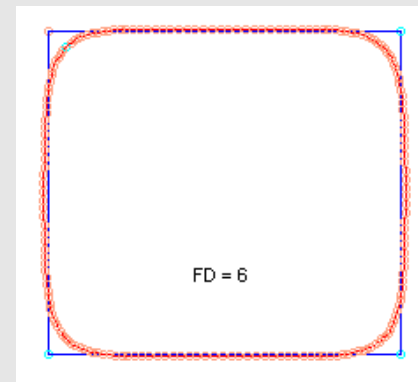
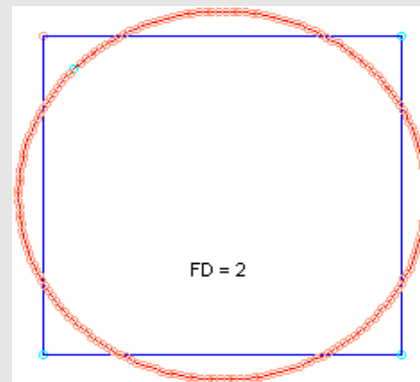
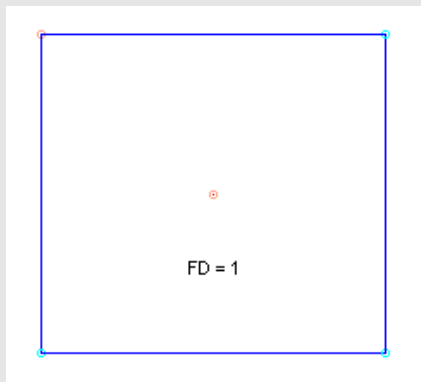
$$Z_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z_j \cdot \exp\left(-2\pi i \frac{jk}{N}\right) \quad .$$

Propriétés

Z_0 est le **barycentre** de la forme (en coordonnées complexes).
si tous les coefficients sont nuls sauf Z_1 , la forme est un **cercle**.
les descripteurs d'ordre élevé définissent les **détails**.

Descripteurs de Fourier (3/3)

Reconstruction avec des nombres variables de descripteurs



Pour approfondir

Duda, Hart, Stork, « Pattern Classification », 2ème édition, Wiley-Interscience, 2001.

<http://www.amazon.com/Pattern-Classification-2nd-Richard-Duda/dp/0471056693>

Statistical moments, Jamie Shutler (CVonline: Robert B. Fisher)

http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CVonline/LOCAL_COPIES/SHUTLER3/CVonline_moments.html

cours de master de Florence Tupin (ENST)

http://www.tsi.enst.fr/~tupin/NEW_PAGE/cours.html