M A R C O Á N T O N I O G Ó M E Z R A M ÍR E Z

Tarea Nº4.

Verificar analítica y gráficamente si las siguientes expresiones son funciones biyectivas, en caso afirmativo obtener sus dominios, recorridos y elaborar sus gráficas, así como clasificarlas en biyectivas o no, justificando su respuesta:

a) $y = \sqrt{x+2}$, b) $y = x^3 - 2x^2 - x$

a) Verificamos analíticamente si la función $y = \sqrt{x+2}$ es inyectiva.

Dominio de la función, el radicando debe ser mayor o igual a cero $x + 2 \geq 0$, $\boldsymbol{D_f; x \geq -2}$

Tabulamos la función

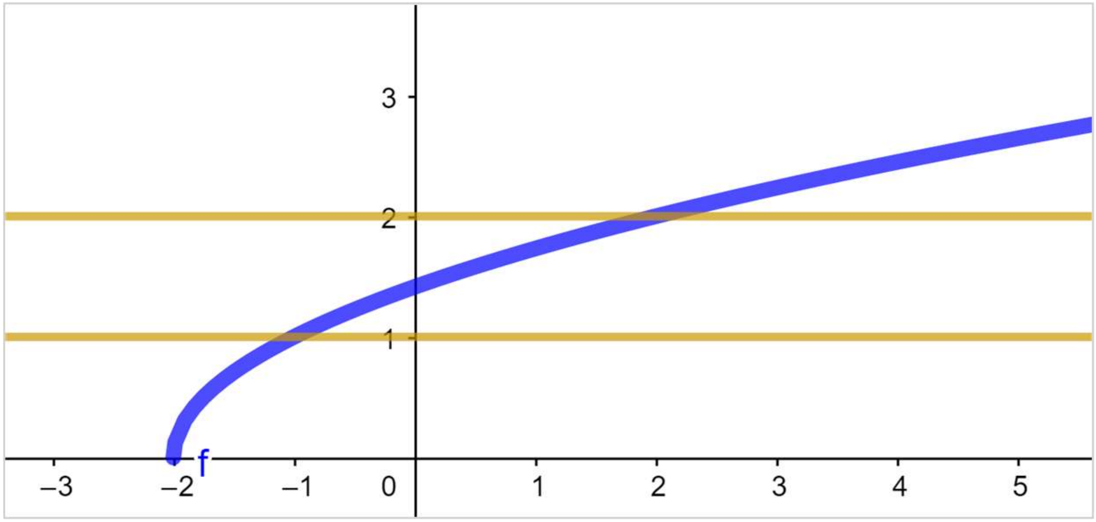
X	-2	-1	0	1	2
Y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2

Como para cada valor distinto de X hay un valor diferente de Y, se trata de una función inyectiva y sobreyectiva.

También es sobreyectiva porque cada valor del dominio tiene una imagen en el recorrido.

Verificamos gráficamente si la función $y = \sqrt{x+2}$ es inyectiva.

Pasando rectas horizontales, si las rectas intersecan una sola vez a la curva, la función es inyectiva.



Comprobamos gráficamente que la función es inyectiva, por lo tanto es **biyectiva**.

MARCO ANTONIO GÓMEZ RAMÍREZ

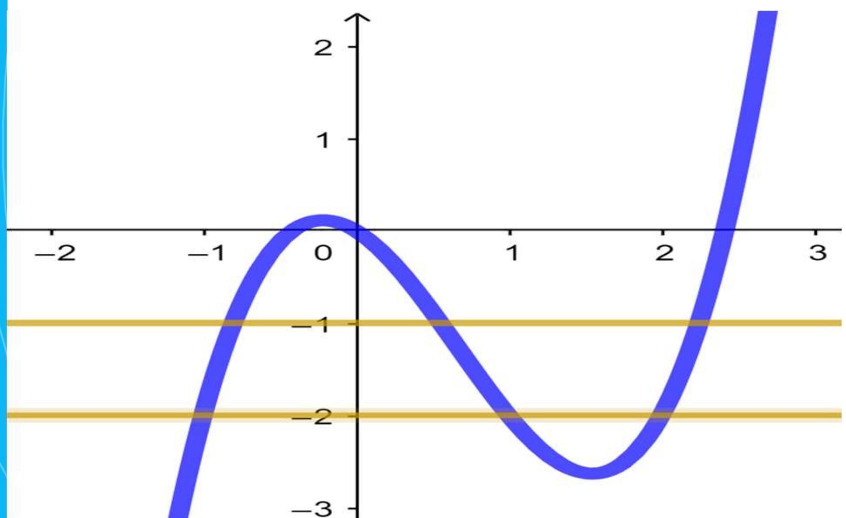
b) Verificamos analíticamente si la función $y = x^3 - 2x^2 - x$ es inyectiva.

Dominio de la función, $\boldsymbol{D_f; x} \in \mathbb{R}$

Tabulamos la función

X	-2	-1	0	1	2
Y	-14	-2	0	-2	-2

Como para cada valor distinto de X no hay un valor diferente de Y, se trata de una función que no es inyectiva.



Comprobamos gráficamente que la función no es inyectiva.

Por lo tanto no es un función Biyectiva.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

OPERACIONES CON FUNCIONES

MARCO ANTONIO GÓMEZ RAMÍREZ

OPERACIONES CON FUNCIONES.

Dos funciones pueden combinarse por medio de las cuatro operaciones aritméticas: Suma, resta, multiplicación y división, generando otras funciones.

Estas operaciones se representan $(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$, $(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$, $(\boldsymbol{f}*\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$ y $\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x})$.

Al combinar dos funciones aritméticamente es necesario que ambas estén definidas con las mismas variables dependiente X e independiente Y, así como en el campo de los números reales, por lo tanto, las funciones resultantes serán en el campo de los números reales.

En general el dominio de las funciones resultantes será la intersección de los dominios de las funciones que se están operando.

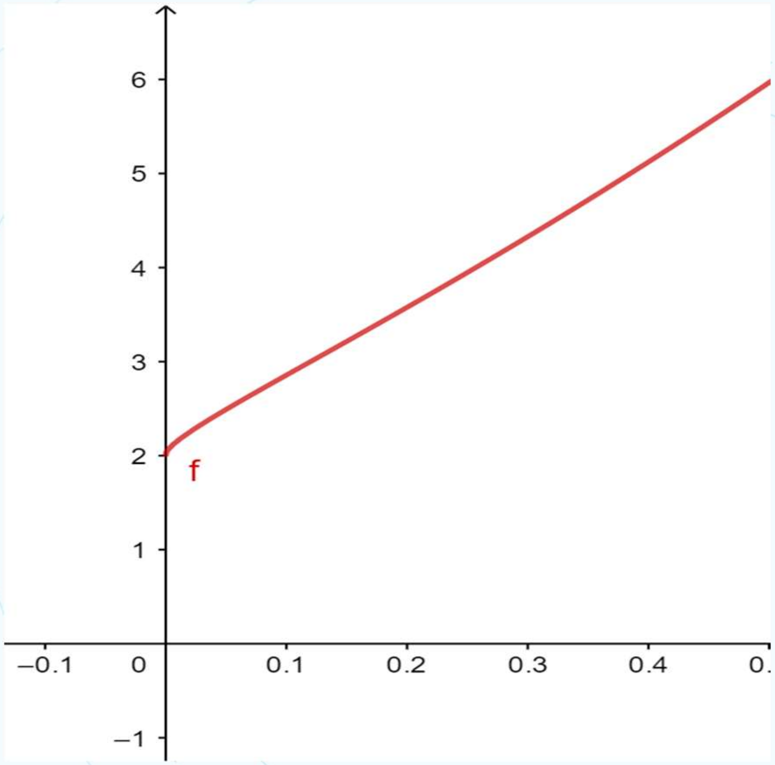
Si $\boldsymbol{\delta_1}$ es el dominio de $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{\delta_2}$ es el dominio de $\boldsymbol{g(x)}$, el dominio de la función resultante será $\boldsymbol{\delta_1 \cap \delta_2}$.

Para la división $\frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(x)}}$, se excluye en el dominio el valor de la X para el cual la función $\boldsymbol{g(x)}$ vale cero.

Ejemplo. Realizar las cuatro operaciones aritméticas con las funciones $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 2}$ y $\boldsymbol{g(x) = 5x + \sqrt{x}}$, determinar los dominios y recorridos de las funciones resultantes y graficarlas.

Suma de las funciones $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 2}$ y $\boldsymbol{g(x) = 5x + \sqrt{x}}$

$$\boldsymbol{(f + g)(x) = 3x^2 + 5x + \sqrt{x}} + 2$$

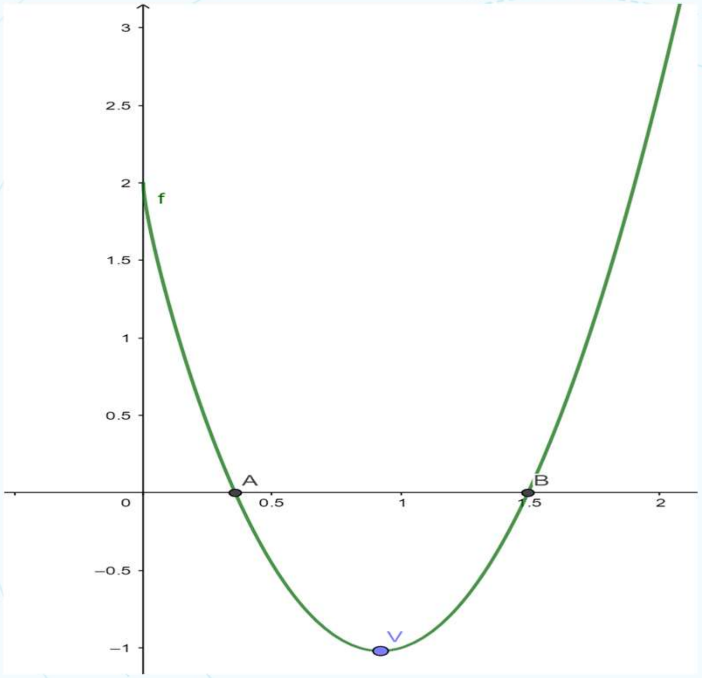


Se trata de una curva que se encuentra en el cuadrante positivo del sistema de referencia y parte del punto P(0, 2).

Dominio $\boldsymbol{D_f}: \{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} \geq 0\}$,
recorrido $\boldsymbol{R_f}: \{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{2}\}$

Diferencia de las funciones $f(x) = 3x^2 + 2$ y $g(x) = 5x + \sqrt{x}$

$(f - g)(x) = 3x^2 - 5x - \sqrt{x}$ +2



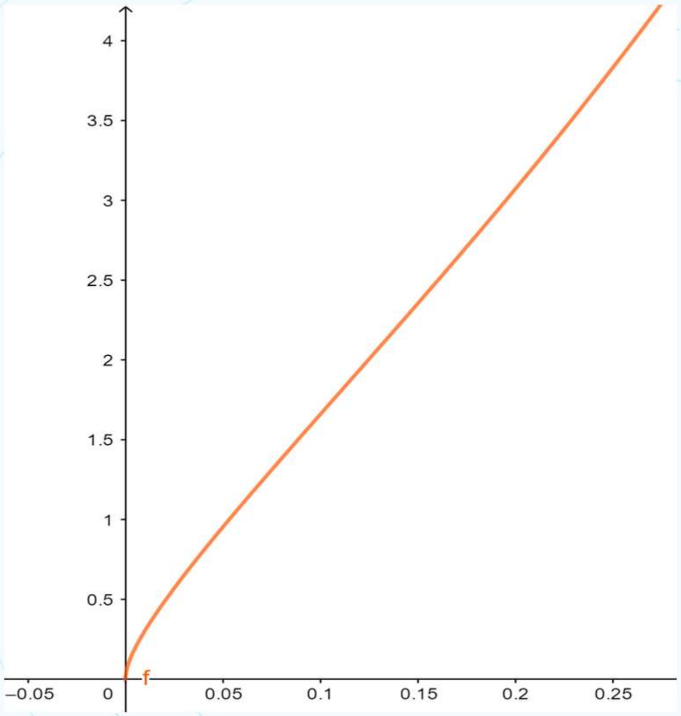
Se trata de la parte de una parábola vertical, que abre hacia arriba, con vértice en ***V(0.94, -1.0083)***, interseca al eje de las abscisas en los puntos $A(0.36, 0)$ y $B(1.5, 0)$.

Dominio D_f: $\{x|x \geq 0\}$,

recorrido R_f: $\{y|y \geq -1.0083\}$

Producto de las funciones $f(x) = 3x^2 + 2$ y $g(x) = 5x + \sqrt{x}$

$$(f * g)(x) = 15x^3 + 3x^{2.5} + 10x + 2x^{0.5}$$

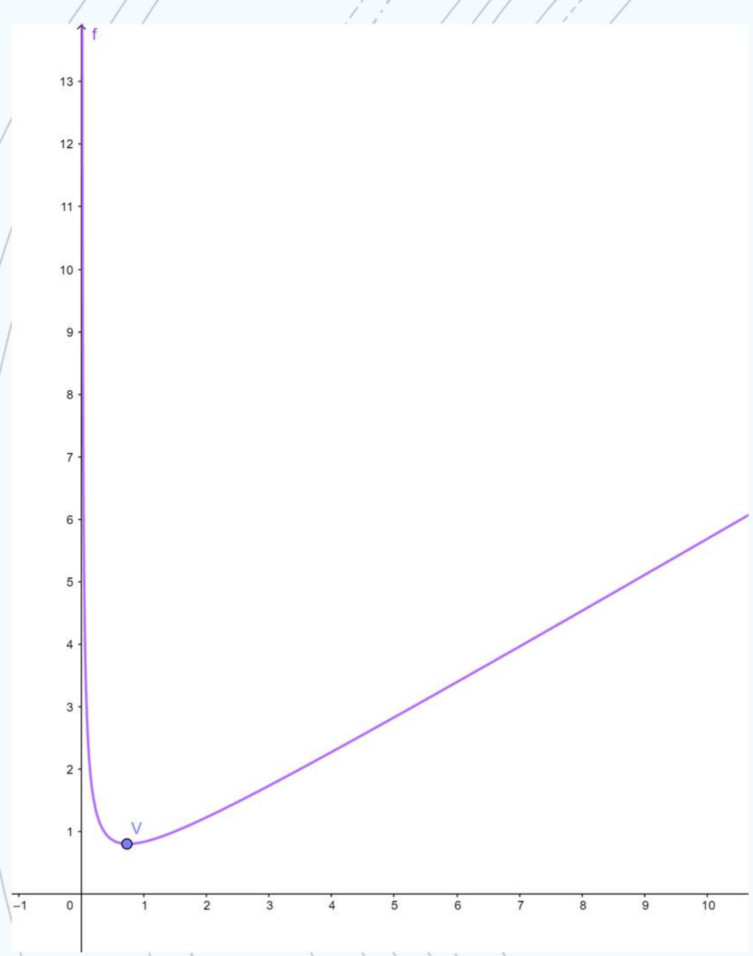


Se trata de una curva de tercer grado que inicia en el origen del sistema de referencia.

Dominio $D_f: \{x | x \geq 0 \}$,
recorrido $R_f: \{y | y \geq 0\}$

Cociente de las funciones $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 2}$ y $\boldsymbol{g(x) = 5x + \sqrt{x}}$

$$\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x^2 + 2}{5x + \sqrt{x}}}$$



Se trata de una curva parecida a una parábola con vértice en el punto **V(0.7, 0.8)**.

Como se excluye el valor de X que hace $\boldsymbol{g(x) = 0}$.
Dominio $\boldsymbol{D_f}: \{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} > 0\}$,
recorrido $\boldsymbol{R_f}: \{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y} \geq 0.8\}$

Ejemplo. Realizar las cuatro operaciones aritméticas con las funciones $\boldsymbol{f(x) = 2x + 1}$ y $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 2}$, determinar los dominios y recorridos de las funciones resultantes, y graficarlas.

Suma de las funciones

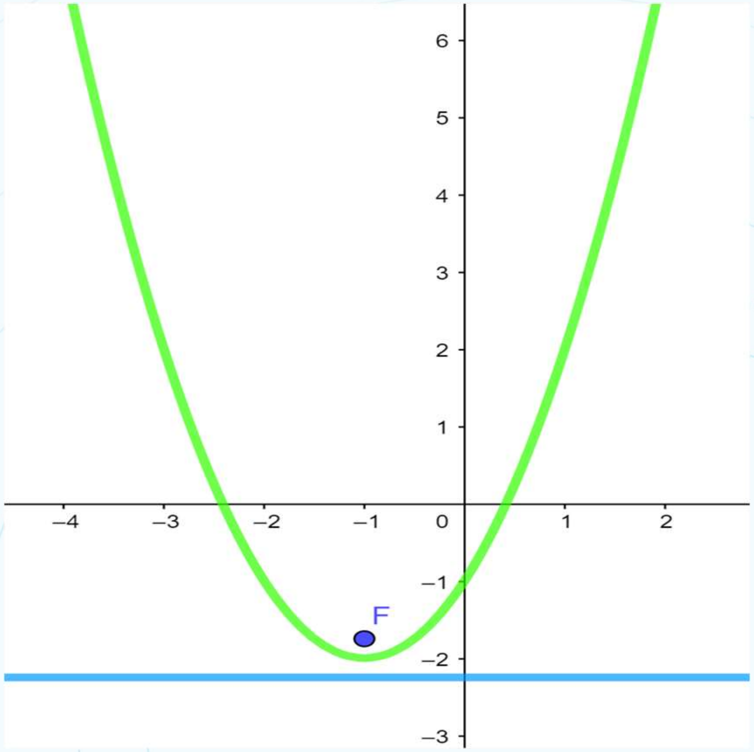
$\boldsymbol{f(x) = 2x + 1}$ y $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 2}$, $\boldsymbol{(f + g)(x) = x^2 + 2x - 1}$

$y = x^2 + 2x - 1$, agrupamos términos en x $x^2 + 2x = y + 1$,

Completamos trinomio en x $x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = y + 1 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$

Se trata de una parábola vertical $\boldsymbol{(x + 1)^2 = y + 2}$.

Con vértice en $\boldsymbol{V(-1, -2)}$, $\boldsymbol{p = \frac{1}{4}}$ abre hacia arriba, directriz $\boldsymbol{D}$: $\boldsymbol{y = -\frac{9}{4}}$, lado recto $\boldsymbol{LR = 1}$.



Diferencia de las funciones.

$$\boldsymbol{f(x) = 2x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 2}$$
$$\boldsymbol{(f - g)(x) = -x^2 + 2x + 3}$$

$y = -x^2 + 2x + 3,$ agrupamos términos en x $x^2 - 2x = -y + 3,$

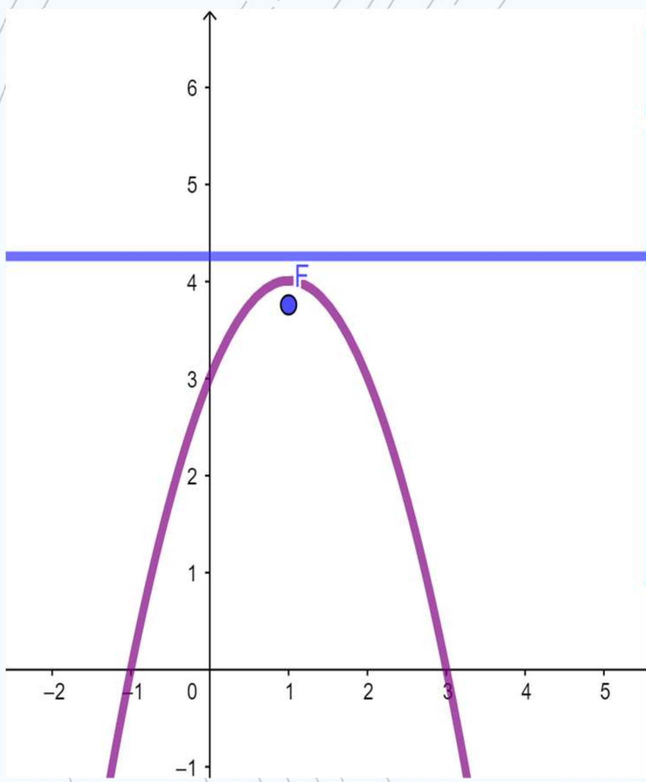
Completamos trinomio en x

$$x^2 - 2x + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = -y + 3 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2$$

Se trata de una parábola vertical $\boldsymbol{(x-1)^2 = -y + 4 = -(y-4)}$.

Dominio $\boldsymbol{D_f}: \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\}$,
recorrido $\boldsymbol{R_f}: \{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} \geq -\boldsymbol{2}\}$

Se trata de una parábola vertical $(x-1)^2 = -(y-4)$ con vértice en $V(1,4)$, $p = \frac{-1}{4}$ abre hacia abajo, directriz $D: y = -\frac{9}{4}$, lado recto $LR = 1$.



Dominio $D_f: \{x | x \in \mathbb{R}\}$, recorrido $R_f: \{y | y \leq 4\}$

Producto de las funciones.

$$f(x) = 2x + 1 \text{ y } g(x) = x^2 - 2$$
$$(f * g)(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$$

Se trata de una función cúbica

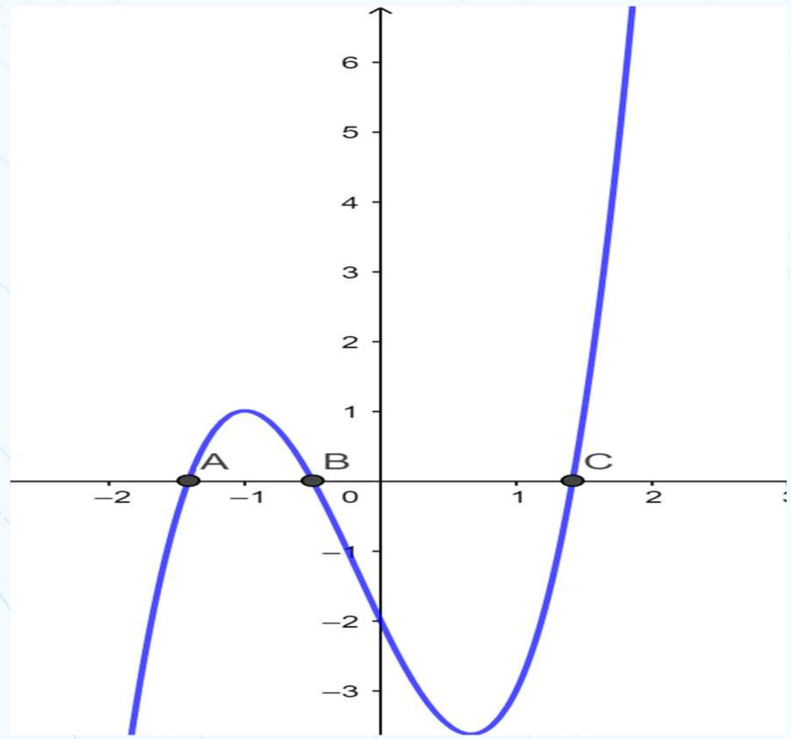
$$y = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$$

Se trata de una función cúbica $y = 2x^3 + x^2 - 4x - 2.$

Que interseca al eje de las abscisas en los puntos: $A(-1.41, 0)$, $B(-0.5, 0)$ y $C(1.41, 0)$,

tiene un máximo relativo en $M(-1, 1)$, un mínimo relativo en $m\left(\frac{2}{3}, -\frac{98}{27}\right)$

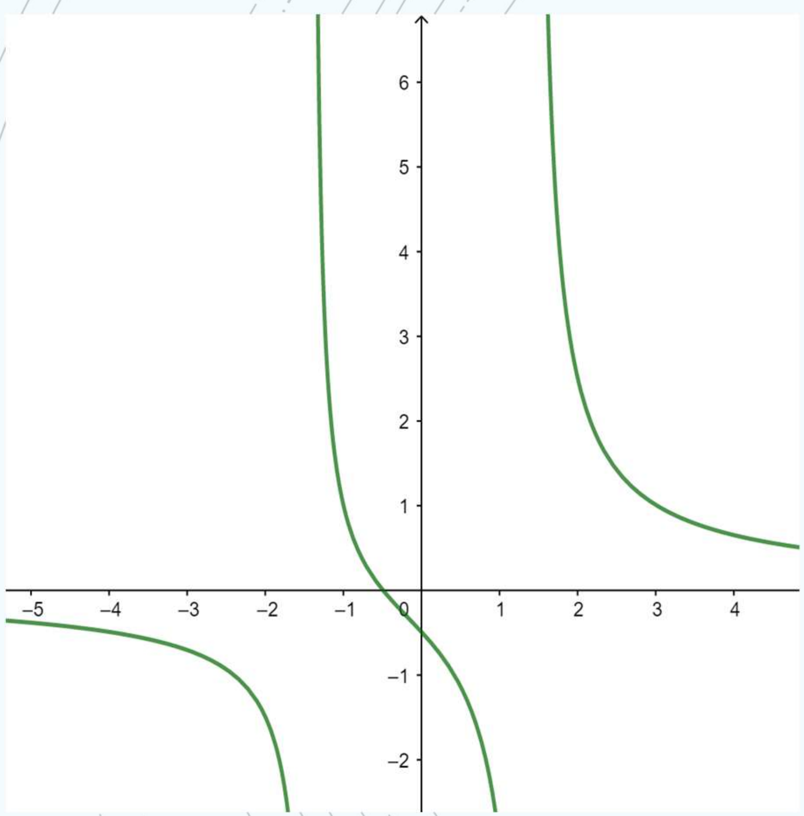
y un punto de inflexión en $I\left(\frac{-1}{6}, \frac{-71}{54}\right)$.



Dominio $D_f: \{x | x \in \mathbb{R}\}$, recorrido $R_f: \{y | y \in \mathbb{R}\}$

Cociente de las funciones.

$$f(x) = 2x + 1 \text{ y } g(x) = x^2 - 2; \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x+1}{x^2-2}$$



Se trata de una curva que interseca al eje X en el punto (-0.5, 0) y al eje Y en el punto (0, -0.5).

Para el dominio se excluyen los valores de X que hacen $g(x) = 0$.

Entonces $x^2 - 2 = 0, \quad x = \pm\sqrt{2}$

Dominio $D_f: \{x|x \in \mathbb{R},\ x \neq \pm\sqrt{2}\}$,
Recorrido $R_f: \{y|y \in \mathbb{R}\}$

Otras operaciones con funciones

Igualdad

$f(x) = g(x)$, se debe cumplir para cualquier valor de la variable independiente.

Por ejemplo $f(x) = (x+3)^2$ y $g(x) = x^2 + 6x + 9$ ¿son iguales?

Sí son iguales ya que si desarrollamos el binomio $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

Son iguales, puesto que las funciones originales $f(x)$ y $g(x)$ tiene el mismo dominio, los reales $D_f: \{x | x \in \mathbb{R}\}$

Otro ejemplo $\boldsymbol{f(x) = x - 2}$ $\quad y \quad$ $\boldsymbol{g(x) = \frac{x^2-4}{x+2}}$ ¿son iguales?

No son iguales

Si bien $\boldsymbol{\frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x - 2}$.

Las funciones originales; $\boldsymbol{f(x)}$ tiene de dominio los reales $\boldsymbol{D_f}: \{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\}$ y la función $\boldsymbol{g(x)}$ tiene de dominio $\boldsymbol{D_g}: \{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x} \neq -2\}$.

Entonces, no se cumple la condición de que deben ser iguales para todos los valores de x.

Función inversa.

La función inversa de una función $f(x)$ se obtiene únicamente sí $f(x)$ es Biyectiva

Es decir, sí $f(x)$ es una función uno a uno $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ por lo tanto $f(x_i) \neq f(x_j)$.

Además todos los elementos del dominio tienen una imagen en el recorrido.

La función inversa se representa mediante $f^{-1}(x)$.

Una función biyectiva $\boldsymbol{f(x)}$ y su función inversa $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ son funciones simétricas respecto a la recta $\boldsymbol{y = x}$.

El dominio de $\boldsymbol{f(x)}$ será el recorrido de $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ y el recorrido de $\boldsymbol{f(x)}$ será el dominio de $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$.

Para obtener la función inversa, de la función original $\boldsymbol{f(x)}$ se despeja la variable independiente y se intercambian las variables.

Ejemplo 1. Dada la función $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{-(x+1)}}$ obtener la función inversa correspondiente.

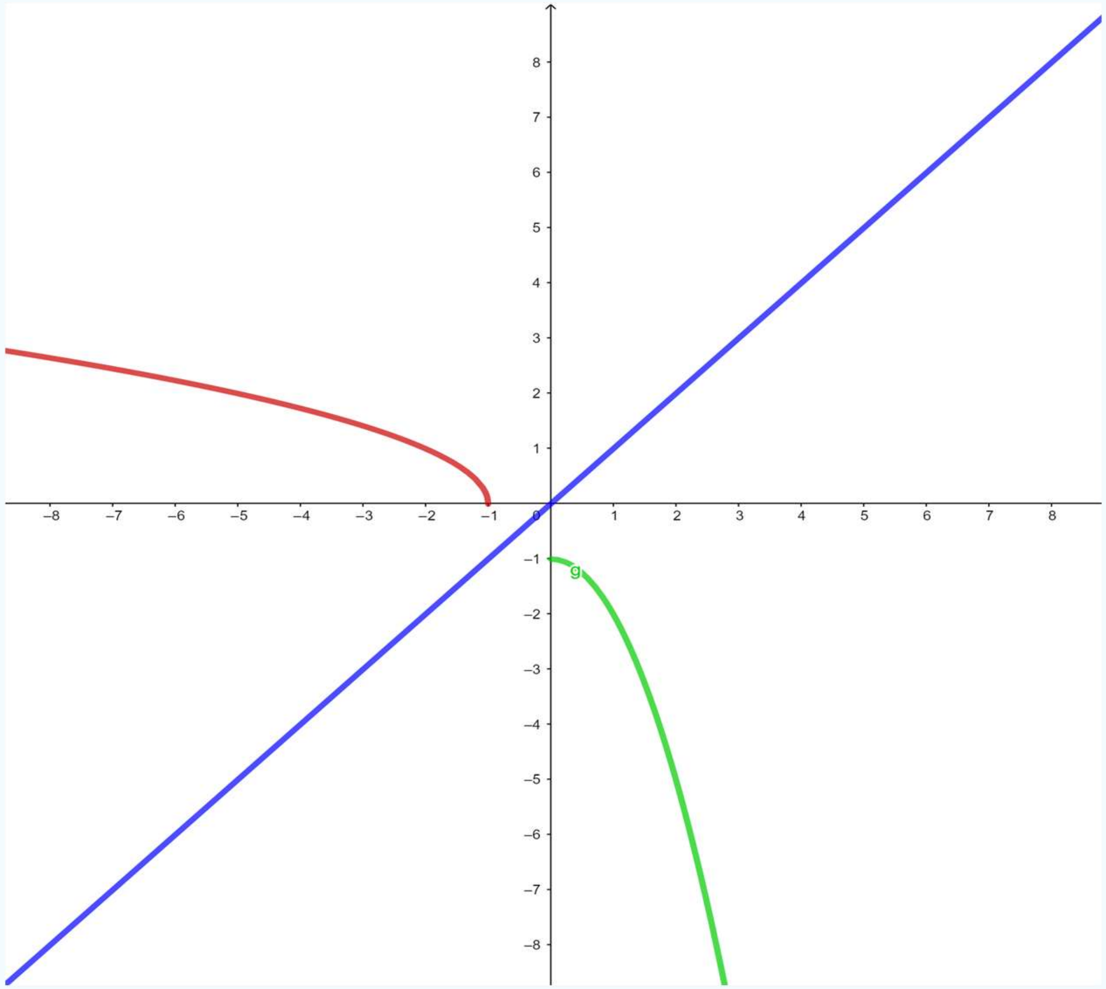
Para determinar el dominio de $\boldsymbol{f(x)}$, el radicando debe ser mayor, mínimo igual a cero $\boldsymbol{-(x+1) \geq 0}$, $\boldsymbol{-x-1 \geq 0}$, $\boldsymbol{x \leq -1,}$ entonces $\boldsymbol{D_f}\colon\{\boldsymbol{x|x \leq -1}\}$ y recorrido $\boldsymbol{R_f}\colon\{\boldsymbol{y|y \geq 0}\}$

$$y = \sqrt{-(x+1)}$$

Despejamos la variable independiente
$y^2 = -(x+1) = -x-1$,
$x = -y^2 - 1$.

Entonces, la función inversa sería
$f^{-1}(x) = -x^2 - 1$,

con dominio $D_{f^{-1}}: x \geq 0$
y recorrido $R_{f^{-1}}: y \leq -1$.



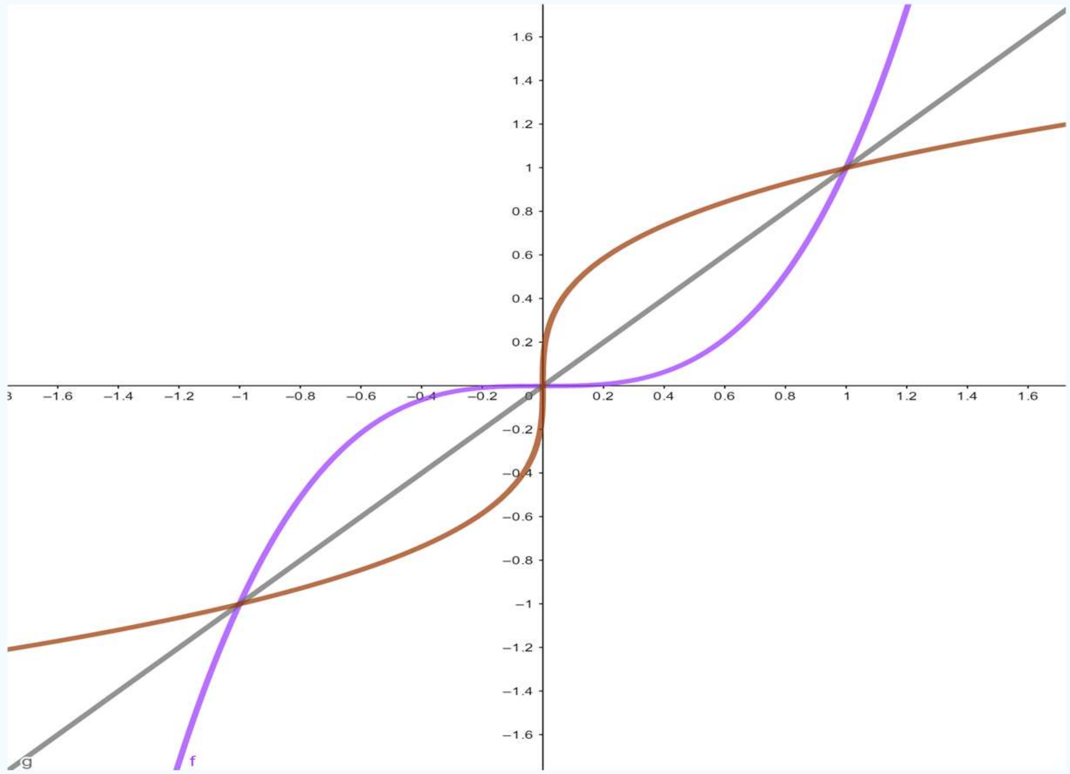
Ejemplo 2. Dada la función $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ obtener la función inversa correspondiente.

Dominio $\boldsymbol{D_f}$: $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\}$,
recorrido $\boldsymbol{R_f}$: $\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\}$

Despejamos la variable independiente $\boldsymbol{y^{1/3} = x,}$

entonces, la función inversa sería
$\boldsymbol{f^{-1}(x) = x^{1/3}}$,

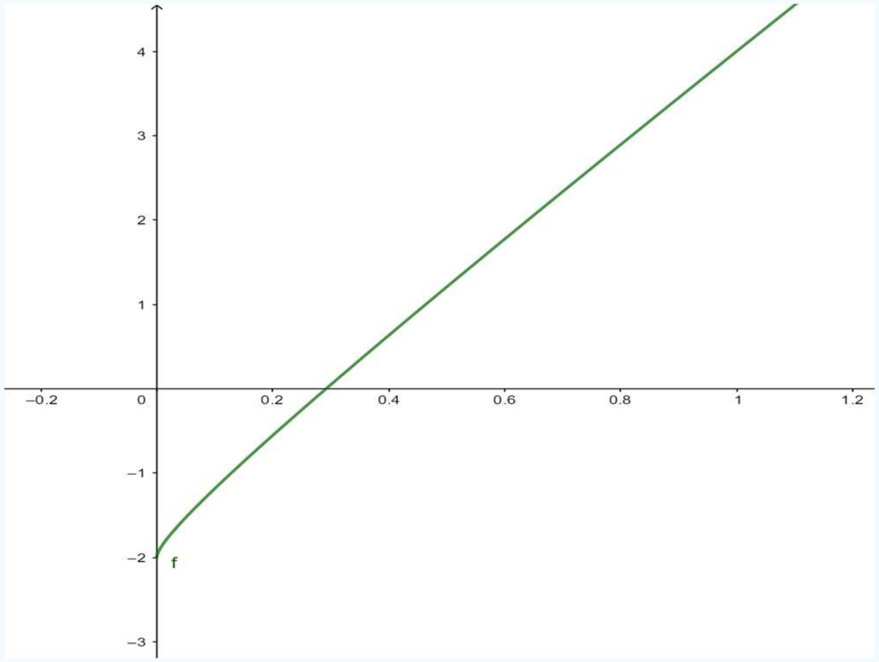
con dominio $\boldsymbol{D_{f^{-1}}}$; $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\}$
y recorrido $\boldsymbol{R_{f^{-1}}}$; $\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\}$.



Composición de funciones.

Dadas las funciones $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ se llama composición de funciones, cuando $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ actúa sobre $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, se representa mediante $\boldsymbol{fog}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]$.

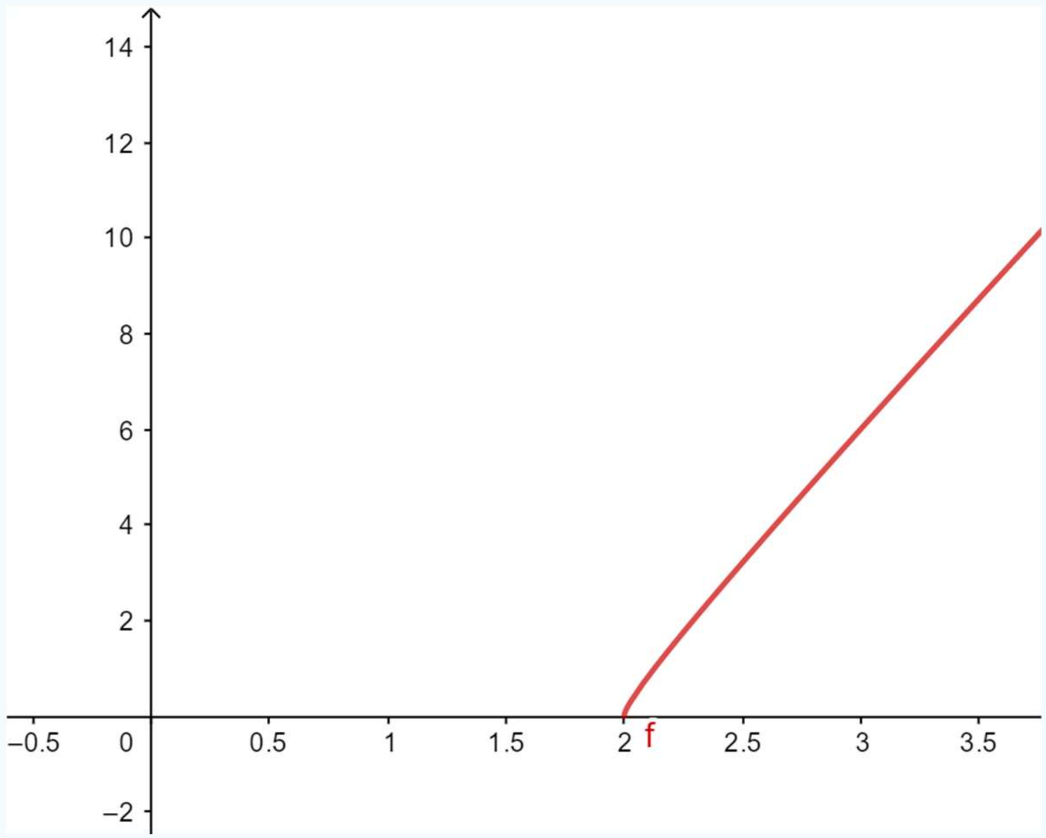
Ejemplo 1. Dadas las funciones $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{2}$ y $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{5x} + \sqrt{\boldsymbol{x}}$. Determinar la función $\boldsymbol{fog}(\boldsymbol{x})$, su dominio y recorrido.



$\boldsymbol{fog}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{5x} + \sqrt{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{2}$,
dominio $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{fog}}: \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \geq 0\}$,
recorrido $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{fog}}: \{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} \geq -\boldsymbol{2}\}$

También se puede obtener la composición $\boldsymbol{gof(x) = g[f(x)]}$.

Ejemplo, Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x) = x - 2}$ y $\boldsymbol{g(x) = 5x + \sqrt{x}}$. Determinar la función $\boldsymbol{gof(x)}$, su dominio y recorrido.



$\boldsymbol{gof(x) = 5(x-2) + \sqrt{x-2}}$,
$\boldsymbol{gof(x) = 5x + \sqrt{x-2} - 10}$
dominio $\boldsymbol{D_{gof}: \{x | x \geq 2\}}$,
recorrido $\boldsymbol{R_{gof}: \{y | y \geq 0\}}$

Tarea Nº 5

1.- Dadas $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 2x + 1}$ y $\boldsymbol{g(x) = x^2 - x - 2}$.
Determinar las combinaciones aritméticas del producto y del cociente de las funciones, sus dominios, sus recorridos y sus gráficas de las funciones resultantes.

2.- Determinar la función inversa de la función $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3}$, los dominios, sus recorridos de las funciones $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$, así como una gráfica con las dos funciones y la recta $\boldsymbol{y = x}$.

3.- Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$ y $\boldsymbol{g(x) = x^2 - x + 3}$, determinar las funciones $\boldsymbol{fog(x)}$ y $\boldsymbol{gof(x)}$, así como sus dominios, sus recorridos y sus gráficas.