mml

April 26, 2024

1 Radial Basis Function Neural Network

1.1 Basics

Jede lineare PDE zweiter Ordnung lässt sich in der Form

$$\sum_{ij}^{n}(A)_{ij}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i}^{n} b_i \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + cu(x) + d = f(x)$$

ausdrücken. Anhand der Matrix A können diese weiter klassifiziert werden:
elliptisch, falls A positiv oder negativ definit ist, i.e. Defekt $d = 0$ und Trägheitsindex $t = 0$
hyperbolisch, falls $d = 0$ und $t = 1$ oder $t = n - 1$
ultrahyperbolisch, falls $d = 0$ und $1 < t < n - 1$
parabolisch, falls A ausgeartet ist, i.e. $d > 0$.

Der Defekt d und Trägheitsindex t sind wie folgt für

$$\mathrm{diag}(A) = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

definiert:
$t =$ Anzahl der $j \in \{1, ..., n\}$ mit $\lambda_j < 0$
$d =$ Anzahl der $j \in \{1, ..., n\}$ mit $\lambda_j = 0$

1.2 Poisson Eq. Example (u_5 Larsson, Fornberg)

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega$$

$$u = g(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

Wähle Beispiel u_5 als bekannte Lösung:

$$u_5(x, y) = \sin(\pi(x^2 + y^2))$$

Entsprechend betrachten wir dim $= 2$ und Ω die Einheitsscheibe. Und es gilt

$$\Delta u_5(x, y) = -4\pi(\pi(x^2 + y^2)\sin(\pi(x^2 + y^2)) - \cos(\pi(x^2 + y^2)))$$

1.2.1 Approximation mit Methode 1:

$$s(x, \epsilon) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \phi(||x - x_j||, \epsilon)$$

Dabei wird für $\phi(r,\epsilon)$ die Multiquadric RBF gewählt:

$$\phi(r,\epsilon) = \sqrt{1 + (\epsilon r)^2}$$

Dementsprechend gilt für $\Delta\phi$ mit $\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$ in Polarkoordinaten:

$$\Delta\phi(r,\epsilon) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}$$

Wobei ϕ hier nur von r abhängt, entsprechend also gilt:

$$\Delta\phi(r,\epsilon) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

Und damit:

$$\Delta\phi(r,\epsilon) = \frac{\epsilon^2((\epsilon r)^2 + 2)}{((\epsilon r)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Definiere ϕ (`phi`) und $\Delta\phi$ (`Lphi`) in `Python`:

[1]:
```
import numpy as np

def phi(r, e):
    return np.sqrt(1 + (e*r) ** 2)

def Lphi(r, e):
    return e ** 2 * ((e*r) ** 2 + 2) / ((e*r) ** 2 + 1) ** (3/2)
```

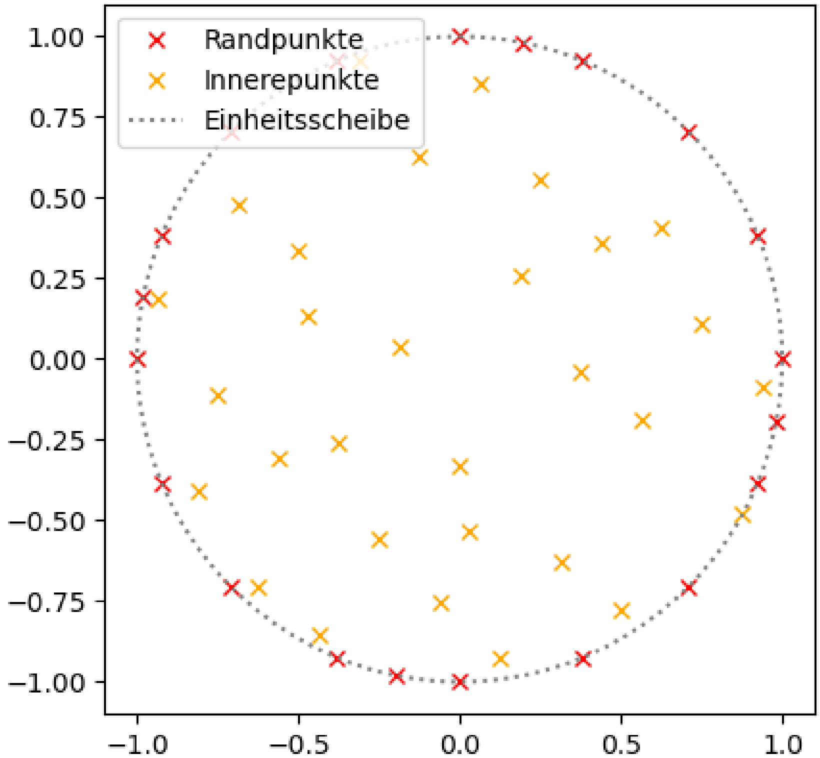
Definiere u_5 (`u`) und Δu_5 (`Lu`) in `Python`:

[2]:
```
def u(x, y):
    return np.sin(np.pi * (x ** 2 + y ** 2))

def Lu(x,y):
    return -4 * np.pi * (np.pi * (x ** 2 + y ** 2) * np.sin(np.pi * (x ** 2 + y␣
↪** 2)) - np.cos(np.pi * (x ** 2 + y ** 2)))
```

Erzeuge Distribution der 50 Nodes und Center-Points (entsprechend Methode 1 sind diese hier identisch) auf der Einheitsscheibe, wobei 30 im Inneren (`intd`) sind und 20 auf dem Rand (`bdyd`) liegen:

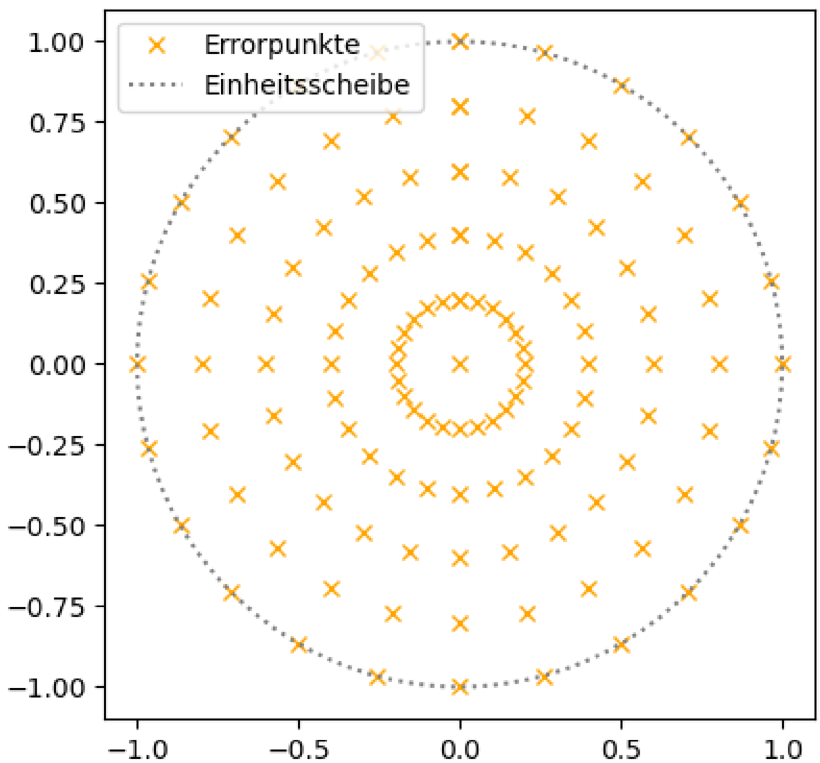
[3]:
```
from scipy.stats import qmc
import matplotlib.pyplot as plt

rng_bdy = qmc.Halton(d=1, scramble = False) # Pseudo-Zufallsgenerator für eine␣
↪Dimension (Winkel)
theta_bdy = rng_bdy.random(n = 20) * 2 * np.pi # Erzeuge 20 Zufallszahlen und␣
↪skaliere von [0, 1] auf [0, 2 * Pi]

# Mit diesen Zufallszahlen erzeuge Punkte auf Einheitskreis
bdyd_x = np.sin(theta_bdy)
```

```
bdyd_y = np.cos(theta_bdy)

bdyd = np.array([bdyd_x, bdyd_y]).T.reshape(20,2)

# Pseudo-Zufallsgenerator für zwei Dimension (x, y)
rng_int = qmc.Halton(d=2, scramble = False)

intd = [] # Array das am Ende die 30 Innerenpunkt (x, y) enthalten soll

# Erzeuge "Monte-Carlo mäßig" 30 Punkte
while len(intd) < 30:
    intd_ = rng_int.random(n = 30 - len(intd)) * 2 - 1 # Erzeuge 30 - (Anzahl␣
 ↪bereits erzeugter Werte) Zufallszahlen (x, y) auf [-1, 1]
    dist = np.linalg.norm(intd_, axis = 1) # Berechne Norm für diese␣
 ↪Zufallszahlen (sqrt(x^2+y^2))
    ind = []
    for i, d in enumerate(dist): # Loop über alle erzeugten Zufallszahlen
        if d >= 1: # Wenn Norm der Zufallszahl >= 1 (i.e. Punkt liegt nicht in␣
 ↪Einheitsscheibe), merke Index zum löschen
            ind.append(i)
    intd_ = np.delete(intd_, ind, axis = 0) # Lösche alle Punkte die außerhalb␣
 ↪der Einheitsscheibe liegen aus Array
    if len(intd) == 0:
        intd = intd_
    else:
        intd = np.append(intd, intd_, axis = 0)

th = np.linspace(0, 2*np.pi, 100) # Äquidistante Winkeldistribution für das␣
 ↪Ploten der Einheitsscheibe

#Plotten :)
plt.plot(bdyd_x, bdyd_y, color = 'red', linestyle = 'None', markersize = 5.5,␣
 ↪marker = 'x', label = 'Randpunkte');
plt.plot(intd.T[0], intd.T[1], color = 'orange', linestyle = 'None', markersize␣
 ↪= 5.5, marker = 'x', label = 'Innerepunkte')
plt.plot(np.sin(th), np.cos(th), color = 'gray', linestyle = 'dotted', label =␣
 ↪'Einheitsscheibe');
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.legend(loc='upper left')
plt.show();
```



Erzeuge Punkte an denen der Error (`errd`) evaluiert wird:

[4]:
```
errd = np.array([[0, 0]])
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 25)
for i in range(5):
    x = np.sin(theta) * 1/5 * (i + 1)
    y = np.cos(theta) * 1/5 * (i + 1)
    d = [[x, y]]
    errd = np.append(errd, np.transpose(d).reshape((25, 2)), axis = 0)

th = np.linspace(0, 2*np.pi, 100) # Äquidistante Winkeldistribution für das␣
 ↪Ploten der Einheitsscheibe

#Plotten :)
plt.plot(errd.T[0], errd.T[1], color = 'orange', linestyle = 'None', markersize␣
 ↪= 5.5, marker = 'x', label = 'Errorpunkte')
plt.plot(np.sin(th), np.cos(th), color = 'gray', linestyle = 'dotted', label =␣
 ↪'Einheitsscheibe');
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.legend(loc='upper left')
plt.show();
```



Der Error $E(\epsilon)$ ist definiert als

$$E(\epsilon) = \max_{\Omega}|s(x,\epsilon) - u(x)|$$

Definiere in `Python`:

[36]:
```python
def E(s, u):
    return np.max(np.absolute(s - u))
```

Für das Problem

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega$$
$$u(x) = g(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

Folgt mit $s(x,\epsilon) \approx u(x)$:

$$\Delta s(x,\epsilon) = f(x) \quad \text{in } \Omega$$
$$s(x,\epsilon) = g(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

Bzw. da in unserem Fall $f(x)$ und $g(x)$ aus einer vorgegebenen Lösung $u(x)$ definiert werden:

$$\Delta s(x,\epsilon) = \Delta u(x) \quad \text{in } \Omega$$

$$s(x,\epsilon) = u(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

Und entsprechend der Definition von $s(x, \epsilon)$:

$$\sum_{j=1}^{N_I} \lambda_j \Delta\phi(||x - x_j||, \epsilon) = \Delta u(x) \quad \text{in } \Omega$$

$$\sum_{j=1}^{N_B} \lambda_j \phi(||x - x_j||, \epsilon) = u(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

Mit

$$(A)_{ij} = \Delta\phi(||x_i - x_j||, \epsilon) \quad \text{für } j < N_I,$$
$$(A)_{ij} = \phi(||x_i - x_j||, \epsilon) \quad \text{für } N_I < j < N_I + N_B,$$
$$\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{N_I}, \lambda_{N_I+1}, ..., \lambda_{N_I+N_B})$$

und

$$\tilde{u} = (\Delta u(x_i), u(x_j)) \quad \text{für } i < N_I, j < N_B$$

können wir das zusammenfassen zu:

$$A \cdot \lambda = \tilde{u}$$

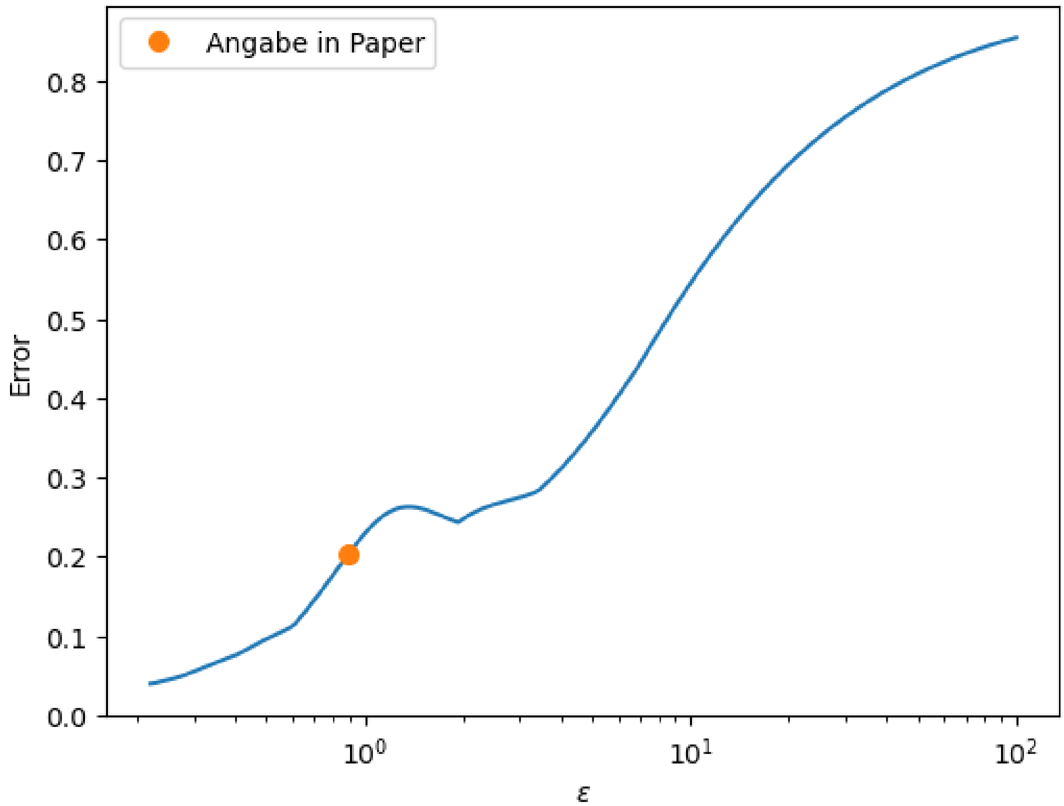
Dieses Gleichungssystem lässt sich lösen, da A nicht singulär wird und wird hier `SciPy` überlassen:

[16]:
```
from scipy import linalg
from scipy.spatial import distance_matrix

def meth1(e, int, bdy, err):
    dm = distance_matrix(err, np.append(int, bdy, axis = 0))
    dm_int = distance_matrix(int, np.append(int, bdy, axis = 0))
    dm_bdy = distance_matrix(bdy, np.append(int, bdy, axis = 0))

    u_tilde = np.append(Lu(int.T[0], int.T[1]), u(bdy.T[0], bdy.T[1]), axis =␣
 ↪0).reshape(50,1)
    A = np.asarray(np.bmat([[Lphi(dm_int, e)], [phi(dm_bdy, e)]]))
    lam = linalg.solve(A, u_tilde)

    return np.dot(phi(dm, e), lam)
```

Auswertung des Fehlers:

[44]:
```
u_exact = u(errd.T[0], errd.T[1])
eps = np.geomspace(2.2e-1, 1e2, 150)
Es = []
for ep in eps:
    s_approx = meth1(ep, intd, bdyd, errd).flatten()
    Es.append(E(s_approx, u_exact))

plt.plot(eps, Es);
plt.plot([0.89], E(meth1(0.89, intd, bdyd, errd).flatten(), u_exact), linestyle␣
 ↪= 'None', markersize = 7.0, marker = 'o', label = 'Angabe in Paper');
plt.xlabel('$\epsilon$');
```

```
plt.ylabel('Error')
plt.xscale('log');
plt.legend();
plt.show();
```



Für kleinere ϵ explodiert der Fehler und `SciPy` wirft Errors, da A nicht mehr well-posed ist.