mml

May 1, 2024

1 Radial Basis Function

1.1 Basics

Jede lineare PDE zweiter Ordnung lässt sich in der Form

$$\sum_{ij}^{n}(A)_{ij}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i}^{n} b_i \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+cu(x)+d=f(x)$$

ausdrücken. Anhand der Matrix A können diese weiter klassifiziert werden:
elliptisch, falls A positiv oder negativ definit ist, i.e. Defekt $d=0$ und Trägheitsindex $t=0$
hyperbolisch, falls $d=0$ und $t=1$ oder $t=n-1$
ultrahyperbolisch, falls $d=0$ und $1<t<n-1$
parabolisch, falls A ausgeartet ist, i.e. $d>0$.

Der Defekt d und Trägheitsindex t sind wie folgt für

$$\operatorname{diag}(A)=(\lambda_1,...,\lambda_n)$$

definiert:
$t=$ Anzahl der $j \in \{1,...,n\}$ mit $\lambda_j<0$
$d=$ Anzahl der $j \in \{1,...,n\}$ mit $\lambda_j=0$

1.2 Poisson Eq. Example (u_5 Larsson, Fornberg)

$$\Delta u(x)=f(x) \quad \text{in } \Omega$$
$$u=g(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

Wähle Beispiel u_5 als bekannte Lösung:

$$u_5(x,y)=\sin\left(\pi(x^2+y^2)\right)$$

Entsprechend betrachten wir $\dim=2$ und Ω die Einheitsscheibe. Und es gilt

$$\Delta u_5(x,y)=-4\pi(\pi(x^2+y^2)\sin\left(\pi(x^2+y^2)\right)-\cos\left(\pi(x^2+y^2)\right))$$

1.2.1 Approximation mit Methode 1 (Unsymmetrisch):

$$s(x,\epsilon)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\phi(||x-x_j||,\epsilon)$$

Dabei wird für $\phi(r,\epsilon)$ die Multiquadric RBF gewählt:

$$\phi(r,\epsilon)=\sqrt{1+(\epsilon r)^2}$$

1.2.2 Exkurs Polarkoordinaten

Jeder Punkt (x, y) lässt sich auch eindeutig durch seinen Abstand r vom Ursprung und den Winkel θ zwischen der Geraden vom Ursprung zum Punkt (x, y) und der x-Achse darstellen. Diese Koordinatentransformation wird durch

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

beschrieben. Das heißt eine Funktion $u(x, y)$ kann auch als $u(x(r, \theta), y(r, \theta))$ beschrieben werden und mit der Kettenregel folgt

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(\theta)$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r}\cos(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\cos(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\sin(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos(\theta)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos(\theta)\sin(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin(\theta)^2,$$

sowie

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos(\theta)$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta}r\sin(\theta) - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}r\sin(\theta) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}r\sin(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta}r\cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}r\cos(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}r\cos(\theta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}r^2\sin(\theta)^2 - \frac{\partial u}{\partial x}r\cos(\theta) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}r^2\sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r^2\cos(\theta)^2 - \frac{\partial u}{\partial y}r\sin(\theta) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}r^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Für $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(2\sin(\theta)\cos(\theta) - 2\sin(\theta)\cos(\theta)) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2) - \frac{1}{r}(\frac{\partial u}{\partial x}\cos($$

Mit $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(\theta)$ und $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$ erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

und entsprechend für

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Dementsprechend gilt für $\Delta\phi$ mit $\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ in Polarkoordinaten:

$$\Delta\phi(r, \epsilon) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

Wobei ϕ hier nur von r abhängt, i.e. $\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$. Entsprechend gilt:

$$\Delta\phi(r,\epsilon) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

Und damit:

$$\Delta\phi(r,\epsilon) = \frac{\epsilon^2((\epsilon r)^2 + 2)}{((\epsilon r)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Definiere ϕ (`phi`) und $\Delta\phi$ (`Lphi`) in `Python`:

[1]:
```
import numpy as np

def phi(r, e):
    return np.sqrt(1 + (e*r) ** 2)

def Lphi(r, e):
    return e ** 2 * ((e*r) ** 2 + 2) / ((e*r) ** 2 + 1) ** (3/2)
```

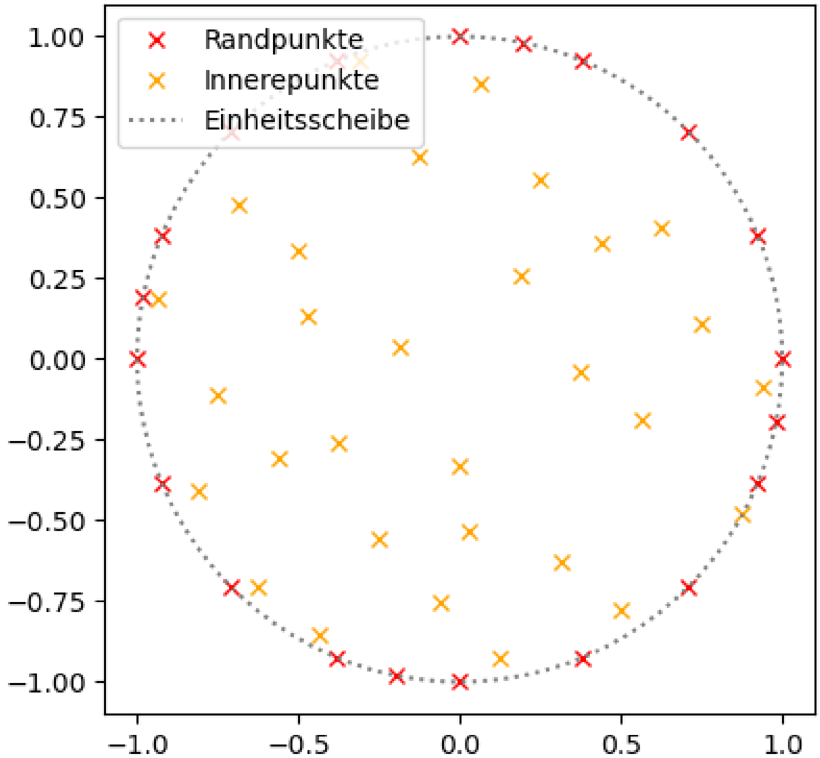
Definiere u_5 (`u`) und Δu_5 (`Lu`) in `Python`:

[2]:
```
def u(x, y):
    return np.sin(np.pi * (x ** 2 + y ** 2))

def Lu(x,y):
    return -4 * np.pi * (np.pi * (x ** 2 + y ** 2) * np.sin(np.pi * (x ** 2 + y␣
 ↪** 2)) - np.cos(np.pi * (x ** 2 + y ** 2)))
```

Erzeuge Distribution der 50 Nodes und Center-Points (entsprechend Methode 1 sind diese hier identisch) auf der Einheitsscheibe, wobei 30 im Inneren (`intd`) sind und 20 auf dem Rand (`bdyd`) liegen:

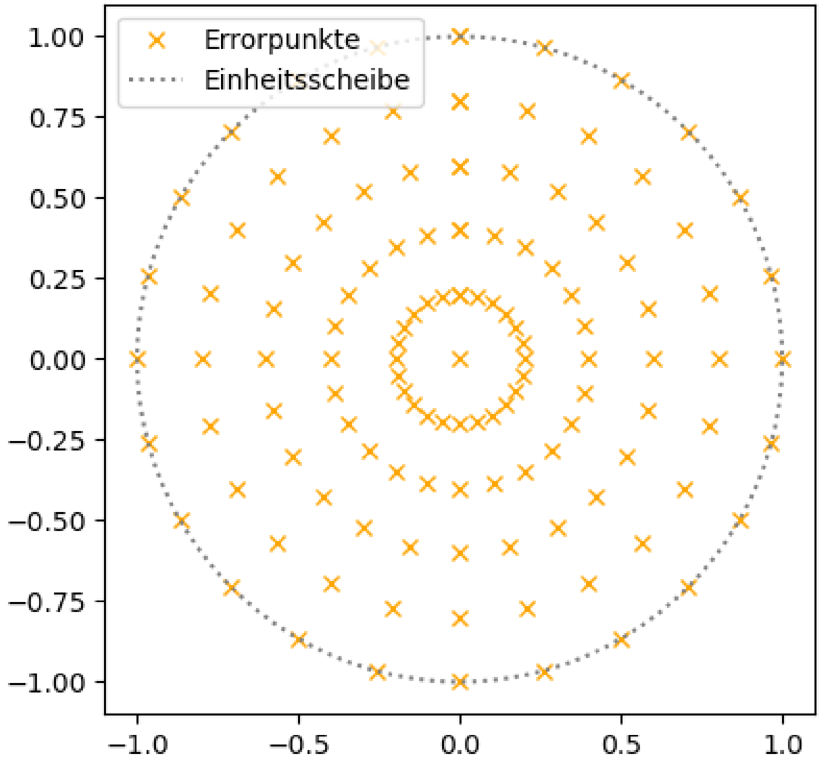
[3]:
```
from scipy.stats import qmc
import matplotlib.pyplot as plt

rng_bdy = qmc.Halton(d=1, scramble = False) # Pseudo-Zufallsgenerator für eine␣
 ↪Dimension (Winkel)
theta_bdy = rng_bdy.random(n = 20) * 2 * np.pi # Erzeuge 20 Zufallszahlen und␣
 ↪skaliere von [0, 1] auf [0, 2 * Pi]

# Mit diesen Zufallszahlen erzeuge Punkte auf Einheitskreis
bdyd_x = np.sin(theta_bdy)
bdyd_y = np.cos(theta_bdy)

bdyd = np.array([bdyd_x, bdyd_y]).T.reshape(20,2)

# Pseudo-Zufallsgenerator für zwei Dimension (x, y)
rng_int = qmc.Halton(d=2, scramble = False)

intd = [] # Array das am Ende die 30 Innerenpunkt (x, y) enthalten soll
```

```
# Erzeuge "Monte-Carlo mäßig" 30 Punkte
while len(intd) < 30:
    intd_ = rng_int.random(n = 30 - len(intd)) * 2 - 1 # Erzeuge 30 - (Anzahl bereits erzeugter Werte) Zufallszahlen (x, y) auf [-1, 1]
    dist = np.linalg.norm(intd_, axis = 1) # Berechne Norm für diese Zufallszahlen (sqrt(x^2+y^2))
    ind = []
    for i, d in enumerate(dist): # Loop über alle erzeugten Zufallszahlen
        if d >= 1: # Wenn Norm der Zufallszahl >= 1 (i.e. Punkt liegt nicht in Einheitsscheibe), merke Index zum löschen
            ind.append(i)
    intd_ = np.delete(intd_, ind, axis = 0) # Lösche alle Punkte die außerhalb der Einheitsscheibe liegen aus Array
    if len(intd) == 0:
        intd = intd_
    else:
        intd = np.append(intd, intd_, axis = 0)

th = np.linspace(0, 2*np.pi, 100) # Äquidistante Winkeldistribution für das Ploten der Einheitsscheibe

#Plotten :)
plt.plot(bdyd_x, bdyd_y, color = 'red', linestyle = 'None', markersize = 5.5, marker = 'x', label = 'Randpunkte');
plt.plot(intd.T[0], intd.T[1], color = 'orange', linestyle = 'None', markersize = 5.5, marker = 'x', label = 'Innerepunkte')
plt.plot(np.sin(th), np.cos(th), color = 'gray', linestyle = 'dotted', label = 'Einheitsscheibe');
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.legend(loc='upper left')
plt.show();
```



Erzeuge Punkte an denen der Error (`errd`) evaluiert wird:

[4]:
```
errd = np.array([[0, 0]])
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 25)
for i in range(5):
    x = np.sin(theta) * 1/5 * (i + 1)
    y = np.cos(theta) * 1/5 * (i + 1)
    d = [[x, y]]
    errd = np.append(errd, np.transpose(d).reshape((25, 2)), axis = 0)

th = np.linspace(0, 2*np.pi, 100) # Äquidistante Winkeldistribution für das␣
 ↪Ploten der Einheitsscheibe

#Plotten :)
plt.plot(errd.T[0], errd.T[1], color = 'orange', linestyle = 'None', markersize␣
 ↪= 5.5, marker = 'x', label = 'Errorpunkte')
plt.plot(np.sin(th), np.cos(th), color = 'gray', linestyle = 'dotted', label =␣
 ↪'Einheitsscheibe');
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.legend(loc='upper left')
plt.show();
```



Der Error $E(\epsilon)$ ist definiert als

$$E(\epsilon) = \max_{\Omega} |s(x,\epsilon) - u(x)|$$

Definiere in `Python`:

[5]:
```
def Err(s, u):
    return np.max(np.absolute(s - u))
```

Für das Problem

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega$$
$$u(x) = g(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

Folgt mit $s(x,\epsilon) \approx u(x)$:

$$\Delta s(x,\epsilon) = f(x) \quad \text{in } \Omega$$
$$s(x,\epsilon) = g(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

Bzw. da in unserem Fall $f(x)$ und $g(x)$ aus einer vorgegebenen Lösung $u(x)$ definiert werden:

$$\Delta s(x,\epsilon) = \Delta u(x) \quad \text{in } \Omega$$

$$s(x,\epsilon) = u(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

Und entsprechend der Definition von $s(x, \epsilon)$:

$$\sum_{j=1}^{N_I} \lambda_j \Delta\phi(||x - x_j||, \epsilon) = \Delta u(x) \quad \text{in } \Omega$$

$$\sum_{j=1}^{N_B} \lambda_j \phi(||x - x_j||, \epsilon) = u(x) \quad \text{on } \partial\Omega$$

Mit

$$(A)_{ij} = \Delta\phi(||x_i - x_j||, \epsilon) \quad \text{für } j < N_I,$$
$$(A)_{ij} = \phi(||x_i - x_j||, \epsilon) \quad \text{für } N_I < j < N_I + N_B,$$
$$\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{N_I}, \lambda_{N_I+1}, ..., \lambda_{N_I+N_B})$$

und

$$\tilde{u} = (\Delta u(x_i), u(x_j)) \quad \text{für } i < N_I, j < N_B$$

können wir das zusammenfassen zu:

$$A \cdot \lambda = \tilde{u}$$

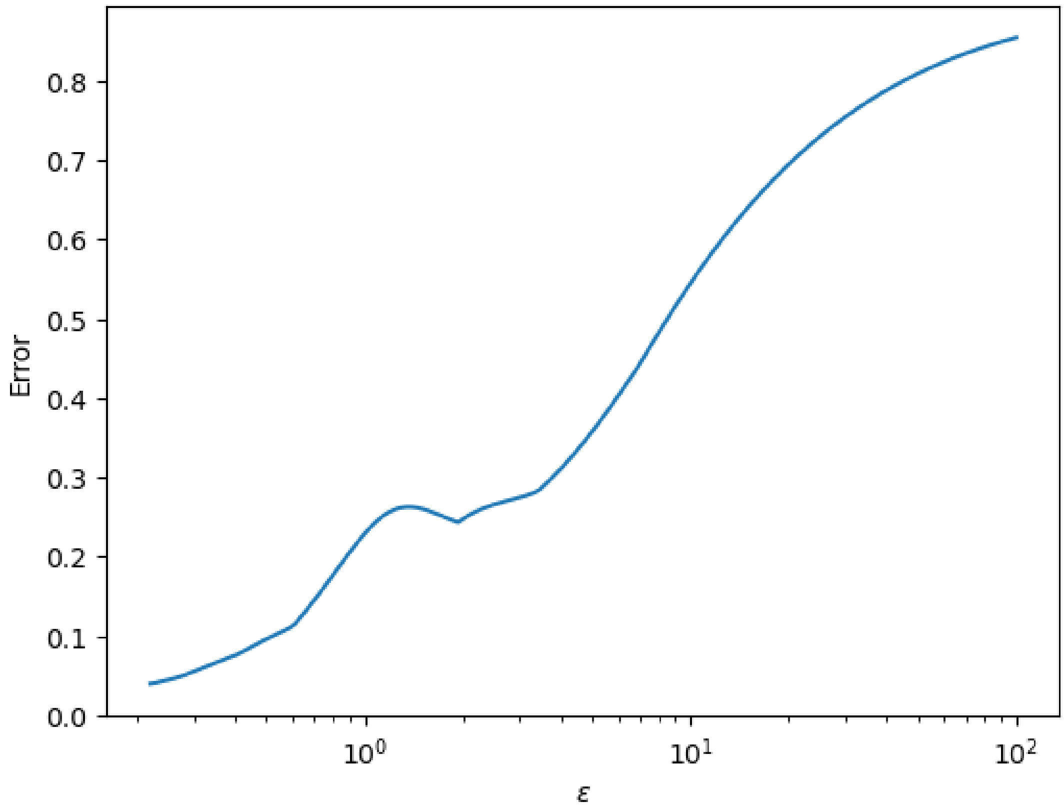
Dieses Gleichungssystem lässt sich lösen, da A (in den meisten Fällen) nicht singulär wird und wird hier `SciPy` überlassen:

[6]:
```
from scipy import linalg
from scipy.spatial import distance_matrix

def meth1_5(e, int, bdy, err):
    dm = distance_matrix(err, np.append(int, bdy, axis = 0))
    dm_int = distance_matrix(int, np.append(int, bdy, axis = 0))
    dm_bdy = distance_matrix(bdy, np.append(int, bdy, axis = 0))

    u_tilde = np.append(Lu(int.T[0], int.T[1]), u(bdy.T[0], bdy.T[1]), axis =
 ↪0).reshape(50,1)
    A = np.asarray(np.bmat([[Lphi(dm_int, e)], [phi(dm_bdy, e)]]))
    lam = linalg.solve(A, u_tilde)

    return np.dot(phi(dm, e), lam)
```

Auswertung des Fehlers:

[7]:
```
u_exact = u(errd.T[0], errd.T[1])
eps = np.geomspace(2.2e-1, 1e2, 150)
Es = []
for ep in eps:
    s_approx = meth1_5(ep, intd, bdyd, errd).flatten()
    Es.append(Err(s_approx, u_exact))

plt.plot(eps, Es);
plt.xlabel('$\epsilon$');
plt.ylabel('Error')
```

```
plt.xscale('log');
plt.show();
```



Für kleinere ϵ explodiert der Fehler und `SciPy` wirft Errors, da A nicht mehr well-posed ist.

1.3 Poisson Eq. Example (u_1 Larsson, Fornberg)

1.3.1 Approximation mit Methode 1 (Unsymmetrisch):

Um das Ergebnis nochmal mit dem des Papers vergleichen zu können betrachten wir u_1, da dieses geplottet wurde:

$$u_1 = \frac{65}{65 + (x - 0.2)^2 + (y + 0.1)^2}$$

Berechnen von Δu_1 mit `SymPy`:

$$\Delta u_1 =$$

[8]:
```
from sympy import *

def u1(x, y):
    return 65 / (65 + (x - 0.2)**2 + (y + 0.1) ** 2)
```

```
x, y = symbols('x y')
init_session(quiet = True)
u1_ = 65 / (65 + (x - 0.2)**2 + (y + 0.1) ** 2)
diff(u1_, x, x) + diff(u1_, y, y)
```

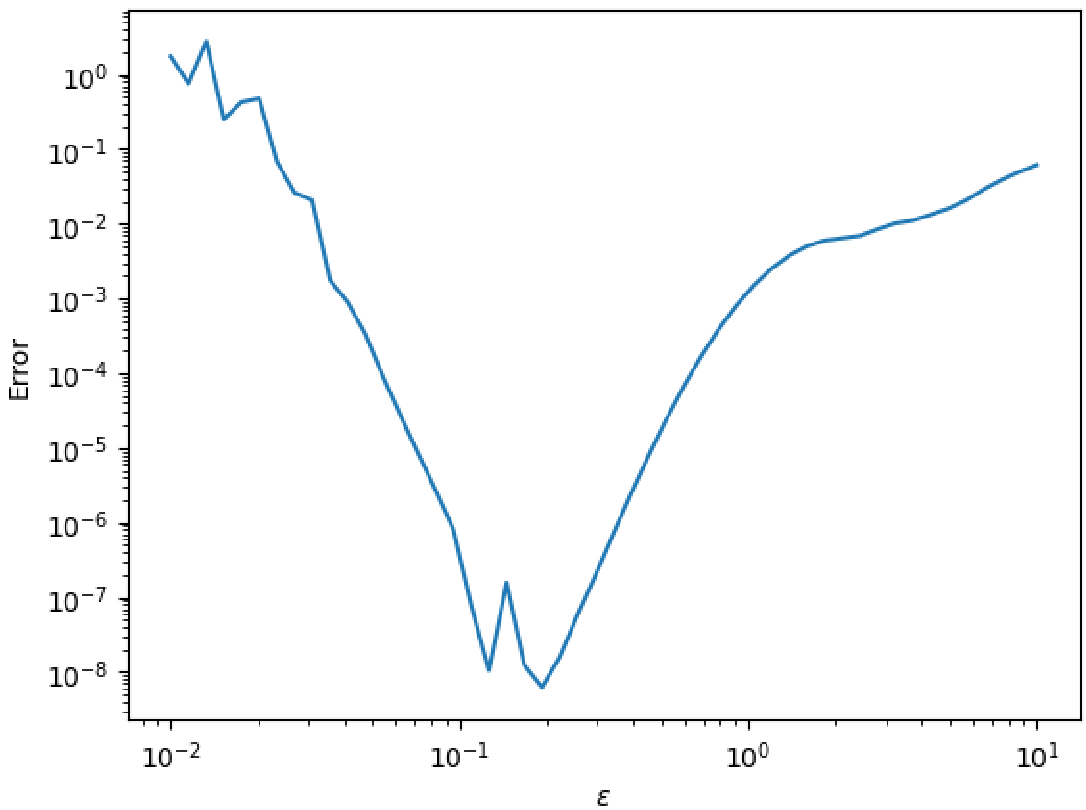
[8]:

$$\frac{65\left(\frac{(2x-0.4)(4x-0.8)}{(x-0.2)^2+(y+0.1)^2+65}-2\right)}{\left((x-0.2)^2+(y+0.1)^2+65\right)^2}+\frac{65\left(\frac{(2y+0.2)(4y+0.4)}{(x-0.2)^2+(y+0.1)^2+65}-2\right)}{\left((x-0.2)^2+(y+0.1)^2+65\right)^2}$$

[9]:
```
Lu1 = lambdify((x, y), diff(u1_, x, x) + diff(u1_, y, y))
```

[10]:
```
def meth1_1(e, int, bdy, err):
    dm = distance_matrix(err, np.append(int, bdy, axis = 0))
    dm_int = distance_matrix(int, np.append(int, bdy, axis = 0))
    dm_bdy = distance_matrix(bdy, np.append(int, bdy, axis = 0))

    u_tilde = np.append(Lu1(int.T[0], int.T[1]), u1(bdy.T[0], bdy.T[1]), axis =␣
↪0).reshape(50,1)
    A = np.asarray(np.bmat([[Lphi(dm_int, e)], [phi(dm_bdy, e)]]))
    lam = linalg.solve(A, u_tilde)

    return np.dot(phi(dm, e), lam)
```

[11]:
```
%matplotlib inline
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')

u_exact = u1(errd.T[0], errd.T[1])
eps = np.geomspace(1e-2, 1e1, 50)
Es = []
for ep in eps:
    s_approx = meth1_1(ep, intd, bdyd, errd).flatten()
    Es.append(Err(s_approx, u_exact))

plt.plot(eps, Es);
plt.xlabel('$\epsilon$');
plt.ylabel('Error')
plt.xscale('log');
plt.yscale('log');
plt.show();
```



Das schaut sehr wie das Ergebnis im Paper aus. Auch hier für kleinere ϵ ist A nicht mehr well-posed.

1.3.2 Approximation mit Methode 2 (Symmetrisch):

Um definitiv zu verhindern, dass A singulär wird, können wir $s(x,\epsilon)$ so definieren, dass A symmetrisch ist:

$$s(x,\epsilon) = \sum_{j=1}^{N_B} \lambda_j \phi(||x - x_j||, \epsilon) + \sum_{j=N_B+1}^{N} \lambda_j \Delta\phi(||x - x_j||, \epsilon)$$

Durch einsetzen in die PDE gilt:

$$\sum_{j=1}^{N_B} \lambda_j \phi(||x_i - x_j||, \epsilon) + \sum_{j=N_B+1}^{N} \lambda_j \Delta\phi(||x_i - x_j||, \epsilon) = g(x_i)$$

Für $i = 1, ..., N_B$.
Und

$$\sum_{j=1}^{N_B} \lambda_j \Delta\phi(||x_i - x_j||, \epsilon) + \sum_{j=N_B+1}^{N} \lambda_j \Delta^2\phi(||x_i - x_j||, \epsilon) = f(x_i)$$

Für $i = N_B + 1, ..., N$.
Für die hier genutzte `RBF` gilt (mit `SymPy`)

$$\Delta^2\phi(r,\epsilon) =$$

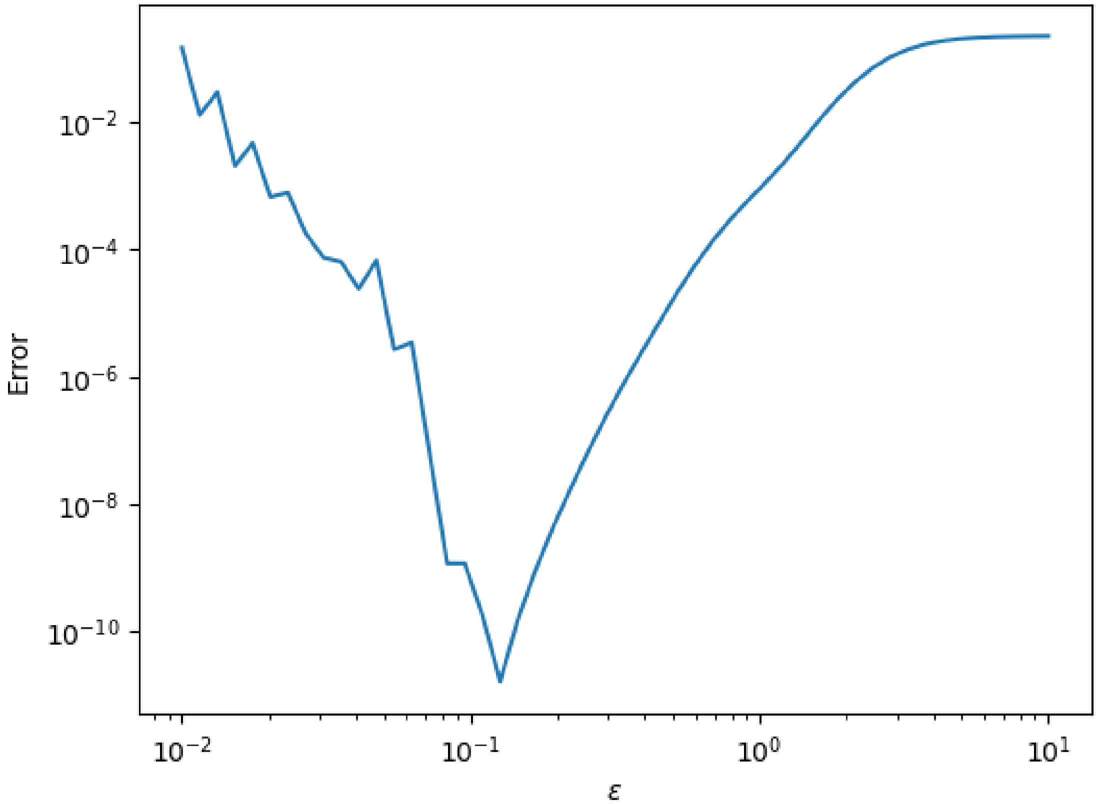
[12]:
```
r, e = symbols('r e')
phi__ = e ** 2 * ((e*r) ** 2 + 2) / ((e*r) ** 2 + 1) ** (3/2)

simplify(simplify(diff(phi__, r, r)+1/r*diff(phi__, r)))
```

[12]:
$$\frac{e^4\left(e^2r^2\left(e^2r^2+1\right)^{4.0}\cdot\left(15.0e^2r^2+30.0\right)-\left(e^2r^2+1\right)^{5.0}\cdot\left(18.0e^2r^2+12.0\right)+4.0\left(e^2r^2+1\right)^{6.0}\right)}{\left(e^2r^2+1\right)^{7.5}}$$

[13]:
```
L2phi = lambdify((r, e), simplify(simplify(diff(phi__, r, r)+1/r*diff(phi__,
 ↪r))))
```

[14]:
```
def meth2_1(e, int, bdy, err):
    dm_int = distance_matrix(err, int)
    dm_bdy = distance_matrix(err, bdy)
    dm_int_int = distance_matrix(int, int)
    dm_int_bdy = distance_matrix(int, bdy)
    dm_bdy_int = distance_matrix(bdy, int)
    dm_bdy_bdy = distance_matrix(bdy, bdy)

    u_tilde = np.append(Lu1(int.T[0], int.T[1]), u1(bdy.T[0], bdy.T[1]), axis =
 ↪0).reshape(50,1)
    A = np.asarray(np.bmat([[Lphi(dm_int_bdy, e), L2phi(dm_int_int, e)],
 ↪[phi(dm_bdy_bdy, e), Lphi(dm_bdy_int, e)]]))
    lam = linalg.solve(A, u_tilde)
    return np.dot(np.asarray(np.bmat([phi(dm_bdy, e), Lphi(dm_int, e)])), lam)
```

[15]:
```
u_exact = u1(errd.T[0], errd.T[1])
eps = np.geomspace(1e-2, 1e1, 50)
Es = []
for ep in eps:
    s_approx = meth2_1(ep, intd, bdyd, errd).flatten()
    Es.append(Err(s_approx, u_exact))

plt.plot(eps, Es);
plt.xlabel('$\epsilon$');
plt.ylabel('Error');
plt.xscale('log');
plt.yscale('log');
plt.show();
```



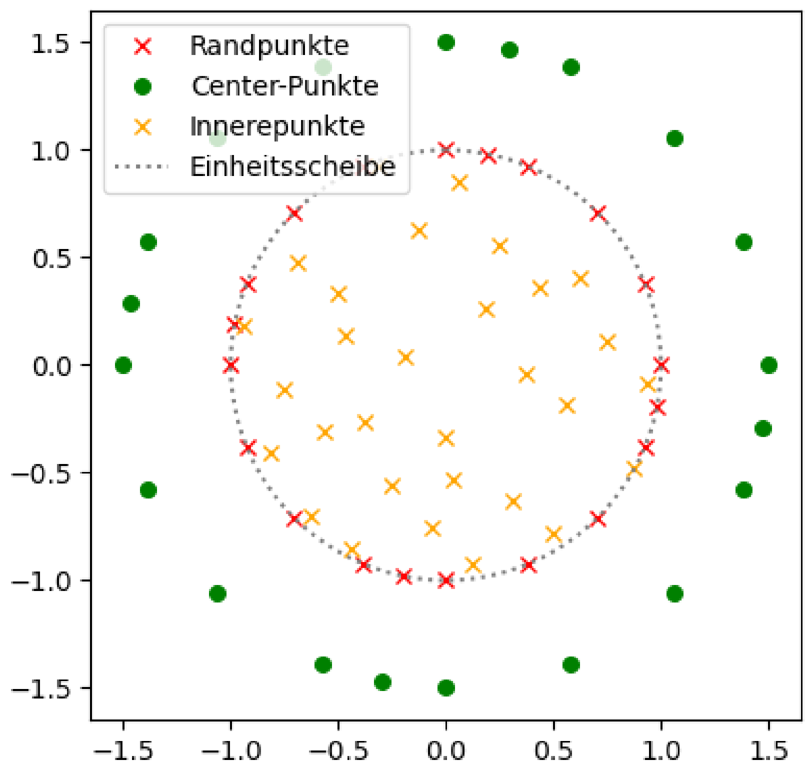
Vergleiche mit Methode 1, Methode 2 ist für kleine ϵ genauer.

1.3.3 Approximation mit Methode 3 (Unsymmetrisch):

(Beschreibung noch schreiben)

[16]:
```
rng_cnt = qmc.Halton(d=1, scramble = False) # Pseudo-Zufallsgenerator für eine␣
 ↪Dimension (Winkel)
theta_cnt = rng_bdy.random(n = 20) * 2 * np.pi # Erzeuge 20 Zufallszahlen und␣
 ↪skaliere von [0, 1] auf [0, 2 * Pi]

# Mit diesen Zufallszahlen erzeuge Punkte auf Kreis mit Radius 1.5
cntd_x = 1.5 * np.sin(theta_bdy)
cntd_y = 1.5 * np.cos(theta_bdy)

cntd = np.array([cntd_x, cntd_y]).T.reshape(20,2)

th = np.linspace(0, 2*np.pi, 100) # Äquidistante Winkeldistribution für das␣
 ↪Ploten der Einheitsscheibe

#Plotten :)
```

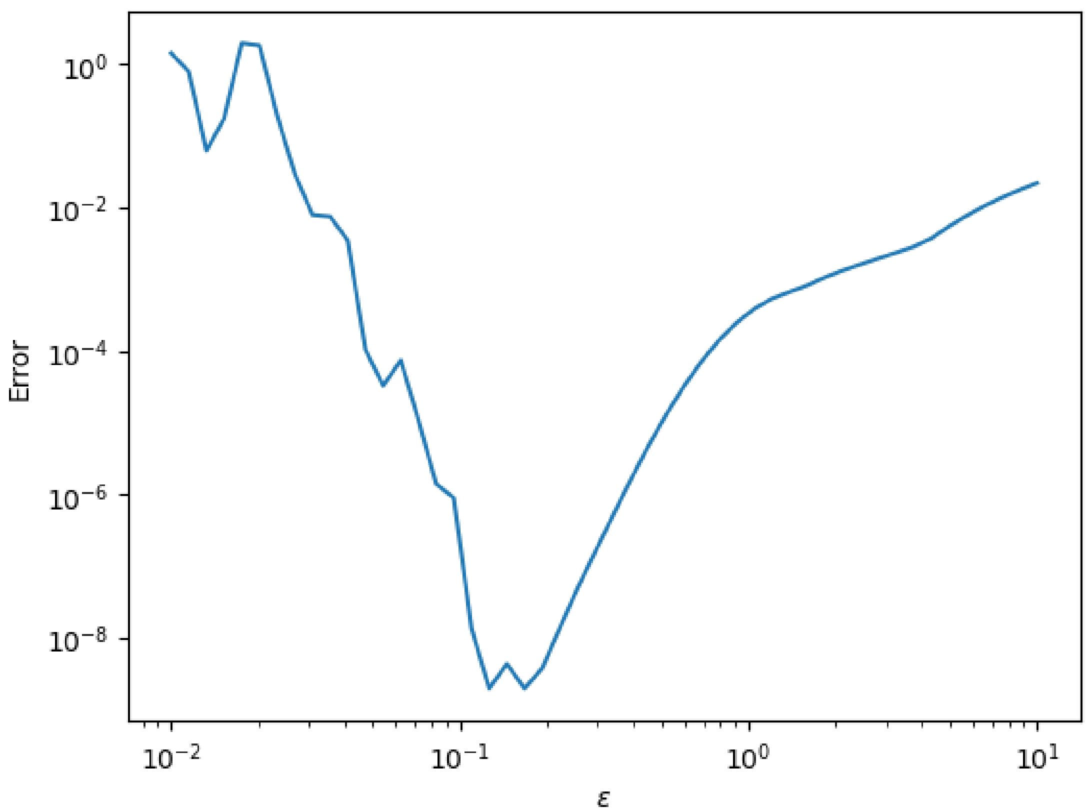
```
plt.plot(bdyd_x, bdyd_y, color = 'red', linestyle = 'None', markersize = 5.5,␣
    ↪marker = 'x', label = 'Randpunkte');
plt.plot(cntd_x, cntd_y, color = 'green', linestyle = 'None', markersize = 5.5,␣
    ↪marker = 'o', label = 'Center-Punkte');
plt.plot(intd.T[0], intd.T[1], color = 'orange', linestyle = 'None', markersize␣
    ↪= 5.5, marker = 'x', label = 'Innerepunkte')
plt.plot(np.sin(th), np.cos(th), color = 'gray', linestyle = 'dotted', label =␣
    ↪'Einheitsscheibe');
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.legend(loc='upper left')
plt.show();
```



[17]:
```
def meth3_1(e, int, bdy, cnt, err):
    dm = distance_matrix(err, np.append(int, cnt, axis = 0))
    dm_int = distance_matrix(int, np.append(int, cnt, axis = 0))
    dm_bdy = distance_matrix(bdy, np.append(int, cnt, axis = 0))

    u_tilde = np.append(Lu1(int.T[0], int.T[1]), u1(bdy.T[0], bdy.T[1]), axis =␣
    ↪0).reshape(50,1)
    A = np.asarray(np.bmat([[Lphi(dm_int, e)], [phi(dm_bdy, e)]]))
    lam = linalg.solve(A, u_tilde)
```

```
    return np.dot(phi(dm, e), lam)
```

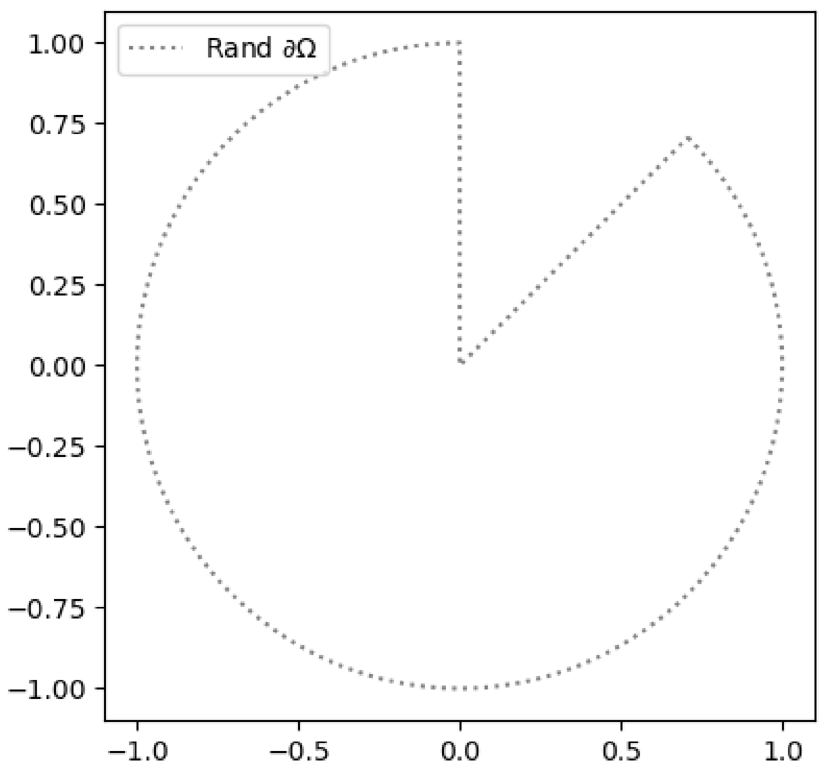
[18]:
```
u_exact = u1(errd.T[0], errd.T[1])
eps = np.geomspace(1e-2, 1e1, 50)
Es = []
for ep in eps:
    s_approx = meth3_1(ep, intd, bdyd, cntd, errd).flatten()
    Es.append(Err(s_approx, u_exact))

plt.plot(eps, Es);
plt.xlabel('$\epsilon$');
plt.ylabel('Error')
plt.xscale('log');
plt.yscale('log');
plt.show();
```



1.3.4 Vergleich der Methoden für "kantiges" Ω, Beispiel 1

Wähle Ω als Einheitskreisscheibe mit rausgeschnittenem "Kuchenstück"

[19]:
```
N_B_o = 1000

th = np.linspace(1/4*np.pi, 2*np.pi, N_B_o) # Äquidistante Winkeldistribution␣
↪für das Ploten der Einheitsscheibe
bdy = np.array([[np.sin(th)], [np.cos(th)]]).reshape(2, N_B_o)
n_dx = np.floor(1 / (7/4 * np.pi / N_B_o)).astype(int)
bdy2 = np.array([np.zeros((n_dx, 1)), np.linspace(0, 1, n_dx).reshape(n_dx,1)]).
↪reshape(2,n_dx)
bdy3 = np.array([np.linspace(0, np.sin(1/4 * np.pi), n_dx).reshape(n_dx,1), np.
↪linspace(0, np.cos(1/4 * np.pi), n_dx).reshape(n_dx,1)]).reshape(2,n_dx)

bdy = np.append(bdy, bdy2, axis = 1)
bdy = np.append(bdy, bdy3, axis = 1)

#Plotten :)
plt.plot(bdy[0], bdy[1], color = 'gray', linestyle = 'dotted', label = 'Rand␣
↪$\partial \Omega$');
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.legend(loc='upper left')
plt.show();
```

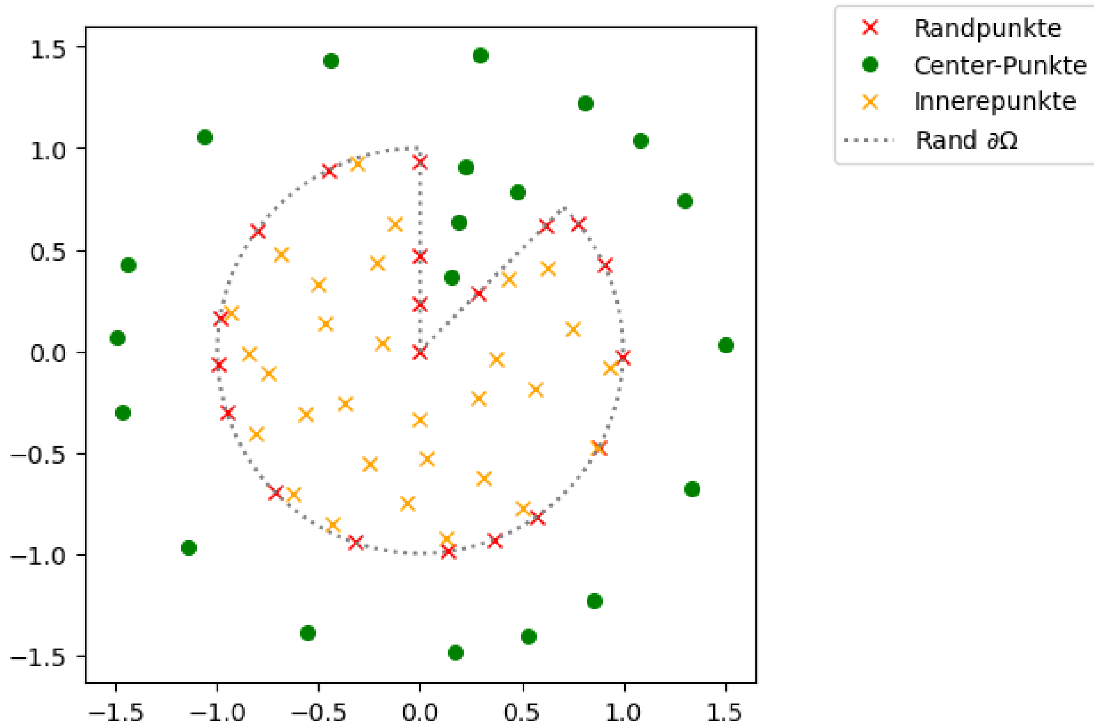


[20]:

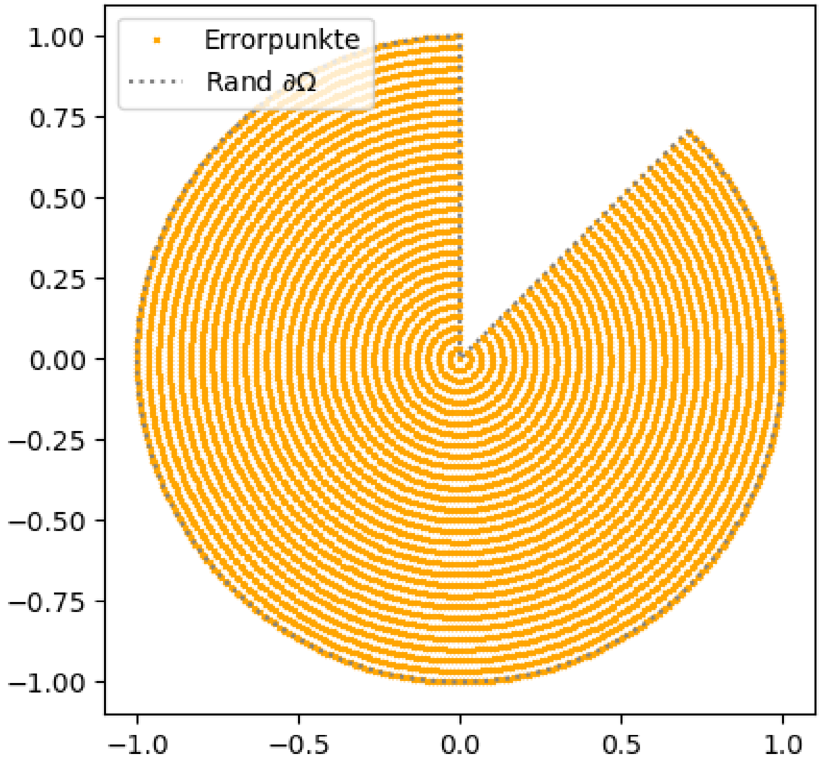
```
rng_bdy = qmc.Halton(d=1, scramble = False) # Pseudo-Zufallsgenerator für eine␣
↪Dimension (Winkel)
theta_bdy = rng_bdy.random(n = 20) * (7/4 * np.pi + 2) # Erzeuge 20␣
↪Zufallszahlen und skaliere von [0, 1] auf [0, 2 * Pi]

# Mit diesen Zufallszahlen erzeuge Punkte auf Einheitskreis

bdyd2_x = []
bdyd2_y = []

for t in theta_bdy:
    if t < 1:
        bdyd2_x.append(0)
        bdyd2_y.append(t[0])
    elif t < 2:
        bdyd2_x.append((t[0] - 1) * np.sin(1/4 * np.pi))
        bdyd2_y.append((t[0] - 1) * np.cos(1/4 * np.pi))
    else:
        bdyd2_x.append(np.sin(t[0] - 2 + 1/4 * np.pi))
        bdyd2_y.append(np.cos(t[0] - 2 + 1/4 * np.pi))

bdyd2 = np.array([np.array(bdyd2_x), np.array(bdyd2_y)]).T

rng_cnt = qmc.Halton(d=1, scramble = False) # Pseudo-Zufallsgenerator für eine␣
↪Dimension (Winkel)
theta_cnt = rng_cnt.random(n = 20) * (15/8 * np.pi + 2) # Erzeuge 20␣
↪Zufallszahlen und skaliere von [0, 1] auf [0, 2 * Pi]

cntd2_x = []
cntd2_y = []

x_s = 0.15
y_s = np.cos(np.pi / 8) / np.sin(np.pi / 8) * x_s

a_1 = 1.5 * np.cos(1/16 * np.pi) - y_s
a_2 = 1.5 * np.cos(3/16 * np.pi) - y_s
c_1 = 1.5 * np.sin(1/16 * np.pi) - x_s
c_2 = 1.5 * np.sin(3/16 * np.pi) - x_s

for t in theta_cnt:
    if t < 1:
        cntd2_x.append(t[0] * c_1 + x_s)
        cntd2_y.append(t[0] * a_1 + y_s)
    elif t < 2:
        cntd2_x.append((t[0] - 1) * c_2 + x_s)
        cntd2_y.append((t[0] - 1) * a_2 + y_s)
    else:
```

```
        cntd2_x.append(1.5 * np.sin(t[0] - 2 + 3/16 * np.pi))
        cntd2_y.append(1.5 * np.cos(t[0] - 2 + 3/16 * np.pi))

cntd2 = np.array([np.array(cntd2_x), np.array(cntd2_y)]).T

# Pseudo-Zufallsgenerator für zwei Dimension (x, y)
rng_int = qmc.Halton(d=2, scramble = False)

def theta(x, y):
    out = np.arccos(x / np.sqrt(x ** 2 + y ** 2))
    if y < 0:
        out *= -1
    return out

intd2 = [] # Array das am Ende die 30 Innerenpunkt (x, y) enthalten soll

# Erzeuge "Monte-Carlo mäßig" 30 Punkte
while len(intd2) < 30:
    intd_ = rng_int.random(n = 30 - len(intd2)) * 2 - 1 # Erzeuge 30 - (Anzahl␣
↪bereits erzeugter Werte) Zufallszahlen (x, y) auf [-1, 1]
    ind = []
    for i, x in enumerate(intd_): # Loop über alle erzeugten Zufallszahlen
        if np.linalg.norm(x) >= 1: # Wenn Norm der Zufallszahl >= 1 (i.e. Punkt␣
↪liegt nicht in Einheitsscheibe), merke Index zum löschen
            ind.append(i)
        elif theta(x[0], x[1]) < 1/2 * np.pi and theta(x[0], x[1]) > 1/4 * np.
↪pi:
            ind.append(i)
    intd_ = np.delete(intd_, ind, axis = 0) # Lösche alle Punkte die außerhalb␣
↪der Einheitsscheibe liegen aus Array
    if len(intd2) == 0:
        intd2 = intd_
    else:
        intd2 = np.append(intd2, intd_, axis = 0)

#Plotten :)
plt.plot(bdyd2_x, bdyd2_y, color = 'red', linestyle = 'None', markersize = 5.5,␣
↪marker = 'x', label = 'Randpunkte');
plt.plot(cntd2_x, cntd2_y, color = 'green', linestyle = 'None', markersize = 5.
↪5, marker = 'o', label = 'Center-Punkte');
plt.plot(intd2.T[0], intd2.T[1], color = 'orange', linestyle = 'None',␣
↪markersize = 5.5, marker = 'x', label = 'Innerepunkte')
plt.plot(bdy[0], bdy[1], color = 'gray', linestyle = 'dotted', label = 'Rand␣
↪$\partial \Omega$');
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.1, 1.05))
```

```
plt.show();
```

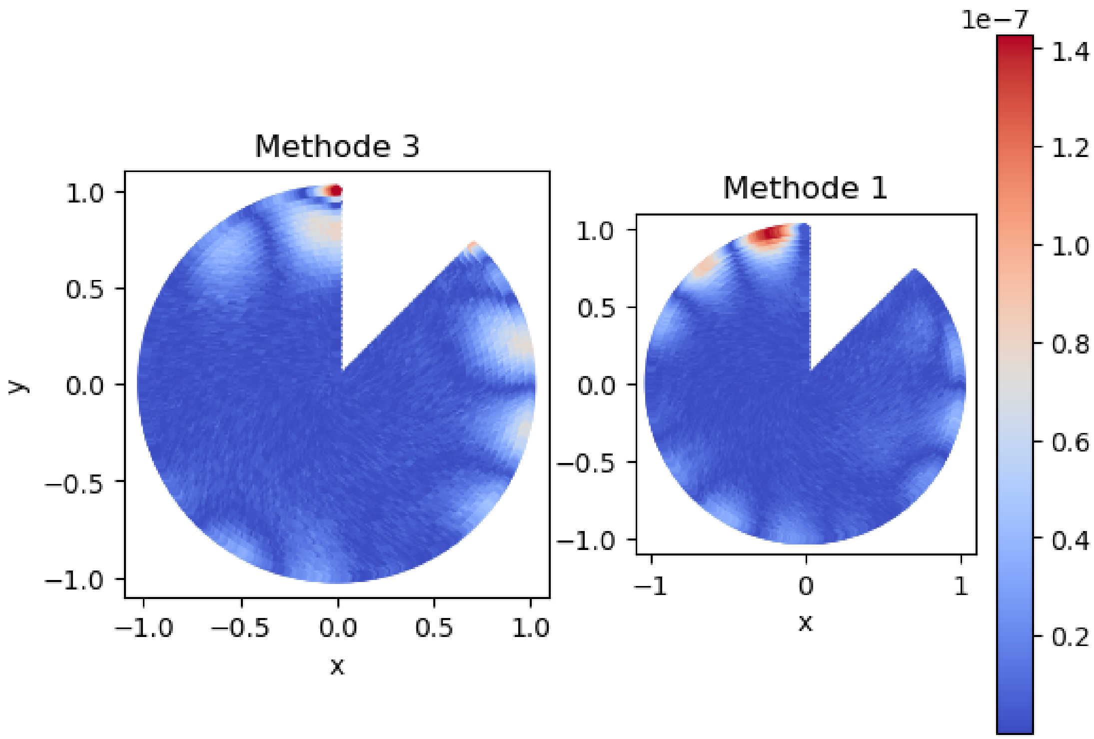


[21]:
```
errd2 = np.array([[0, 0]])
for i in range(30):
    theta = np.linspace(1/4 * np.pi, 2*np.pi, 15 * (i + 1))
    x = np.sin(theta) * 1/30 * (i + 1)
    y = np.cos(theta) * 1/30 * (i + 1)
    d = [[x, y]]
    errd2 = np.append(errd2, np.transpose(d).reshape((15 * (i + 1), 2)), axis =␣
 ↪0)

#Plotten :)
plt.plot(errd2.T[0], errd2.T[1], color = 'orange', linestyle = 'None',␣
 ↪markersize = 2, marker = 'x', label = 'Errorpunkte')
plt.plot(bdy[0], bdy[1], color = 'gray', linestyle = 'dotted', label = 'Rand␣
 ↪$\partial \Omega$');
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.legend(loc='upper left')
plt.show();
```



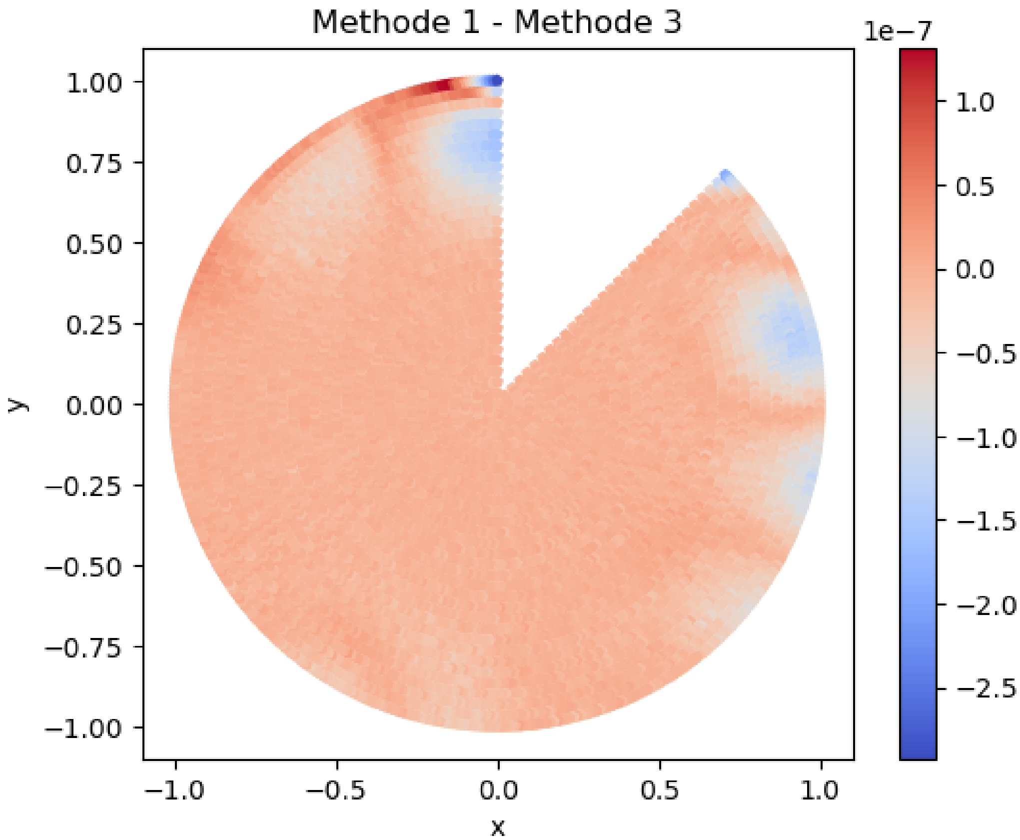
[22]:
```
u_exact = u1(errd2.T[0], errd2.T[1])
s_approx = meth3_1(0.2, intd2, bdyd2, cntd2, errd2).flatten()
s_approx1 = meth1_1(0.2, intd2, bdyd2, errd2).flatten()

Es = np.absolute(s_approx - u_exact)
Es1 = np.absolute(s_approx1 - u_exact)

cmap = plt.get_cmap('coolwarm')

#plt.style.use('seaborn-darkgrid')
fig, [ax1, ax2] = plt.subplots(1,2);
ax1.scatter(errd2.T[0], errd2.T[1], c = Es, cmap=cmap, s = 14, marker = 'p');
p = ax2.scatter(errd2.T[0], errd2.T[1], c = Es1, cmap=cmap, s = 14, marker =␣
↪'p');
fig.colorbar(p);
ax1.set_aspect('equal');
ax1.set_title("Methode 3");
ax1.set_xlabel('x');
ax1.set_ylabel('y');
ax2.set_aspect('equal');
ax2.set_title("Methode 1");
ax2.set_xlabel('x');
```

```
plt.show();
```



[23]:

```
fig, ax = plt.subplots();
p = ax.scatter(errd2.T[0], errd2.T[1], c = Es1 - Es, cmap=cmap, s = 14, marker␣
↪= 'p');
fig.colorbar(p);
ax.set_aspect('equal');
ax.set_xlabel('x');
ax.set_ylabel('y');
ax.set_title("Methode 1 - Methode 3");
plt.show();
```



1.4 RBF-Galerkin

1.4.1 Helmholtz Eq. mit von Neumann Randbed. (Testproblem, Fasshauer)

Wähle $\Omega = [1, 1]^2$.

$$-\Delta u + u = \cos(\pi x)\cos(\pi y) \quad \text{in}\, \Omega$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u = 0 \quad \text{on}\, \partial\Omega.$$

n ist der Einheitsnormalenvektor auf $\partial\Omega$.
Die analytische Lösung des Problems ist:

$$u(x, y) = \frac{\cos(\pi x)\cos(\pi y)}{2\pi^2 + 1}$$

Über die Galerkin-Methode ergibt sich:

$$A_{ij} = \int_\Omega \nabla\phi(||x - x_i||) \cdot \nabla\phi(||x - x_i||)\mathrm{d}x + \int_\Omega \phi(||x - x_i||)\phi(||x - x_i||)\mathrm{d}x.$$

Und die RHS

$$\int_\Omega f(x)\phi(||x - x_i||)\mathrm{d}x.$$

Integration erfolgt mittels `SciPy dblquad`
Für $\nabla\phi$ ergibt sich:

[24]:
```
x, y, e = symbols('x y e')
phi_sp = sqrt(1 + e ** 2 * (x ** 2 + y ** 2))
diff(phi_sp, x)
```

[24]:

$$\frac{e^2x}{\sqrt{e^2\left(x^2+y^2\right)+1}}$$

[25]:
```
diff(phi_sp, y)
```

[25]:

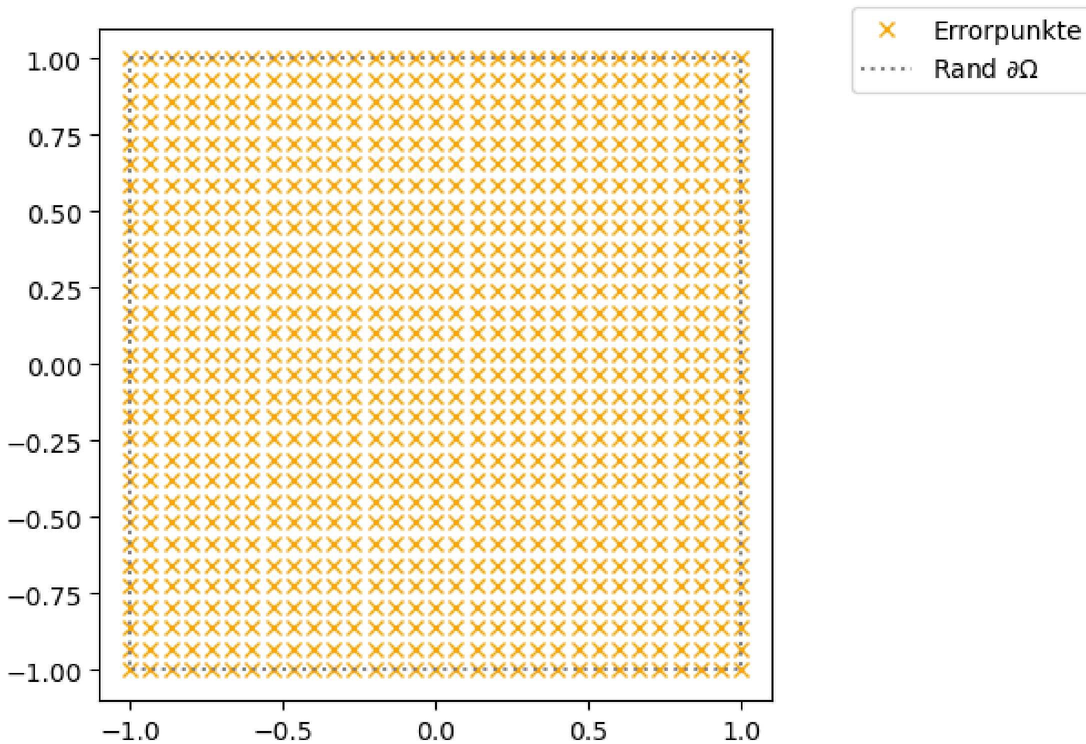
$$\frac{e^2y}{\sqrt{e^2\left(x^2+y^2\right)+1}}$$

[26]:
```
Nphi = lambdify([x, y, e], [diff(phi_sp, x), diff(phi_sp, y)])
```

[27]:
```
def phi_x(x, y, xi, yi, e):
    return np.sqrt(1 + e ** 2 * ((x - xi) ** 2 + (y - yi) ** 2))

def phi2(x, y, xi, yi, xj, yj, e):
    return phi_x(x, y, xi, yi, e) * phi_x(x, y, xj, yj, e)

def Nphi2(x, y, xi, yi, xj, yj, e):
    o = Nphi(x - xi, y - yi, e)
    o2 = Nphi(x - xj, y - yj, e)
    return o[0]*o2[0] + o[1]*o2[1]

def u_H(x, y):
    return np.cos(np.pi * x) * np.cos(np.pi * y) / (2 * np.pi ** 2 + 1)

def f(x, y):
    return np.cos(np.pi * x) * np.cos(np.pi * y)
```

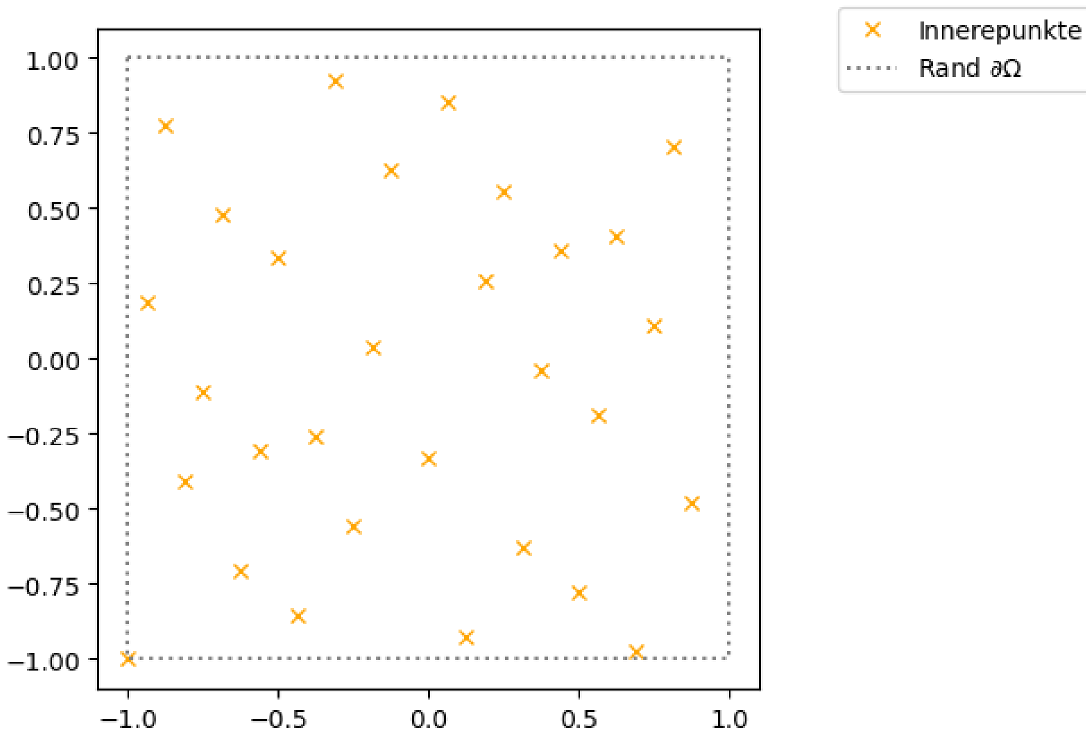
[28]:
```
N_err = 30

errd3 = np.array([np.ones(N_err), np.linspace(-1, 1, N_err)])
for i in range(N_err):
    errd3 = np.append(errd3, np.array([np.ones(N_err) * (1 - 2 * (i + 1) /
 ↪N_err), np.linspace(-1, 1, N_err)]), axis = 1)

th_1 = np.linspace(-1, 1, 100)
th_2 = np.ones(100)
th = np.array([th_1, th_2])
th = np.append(th, np.array([th_2, -th_1]), axis = 1)
th = np.append(th, np.array([-th_1, -th_2]), axis = 1)
th = np.append(th, np.array([-th_2, th_1]), axis = 1)

#Plotten :)
```

```
plt.plot(errd3[0], errd3[1], color = 'orange', linestyle = 'None', markersize =␣
 ↪5.5, marker = 'x', label = 'Errorpunkte')
plt.plot(th[0], th[1], color = 'gray', linestyle = 'dotted', label = 'Rand␣
 ↪$\partial \Omega$');
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.1, 1.05));
plt.show();
```



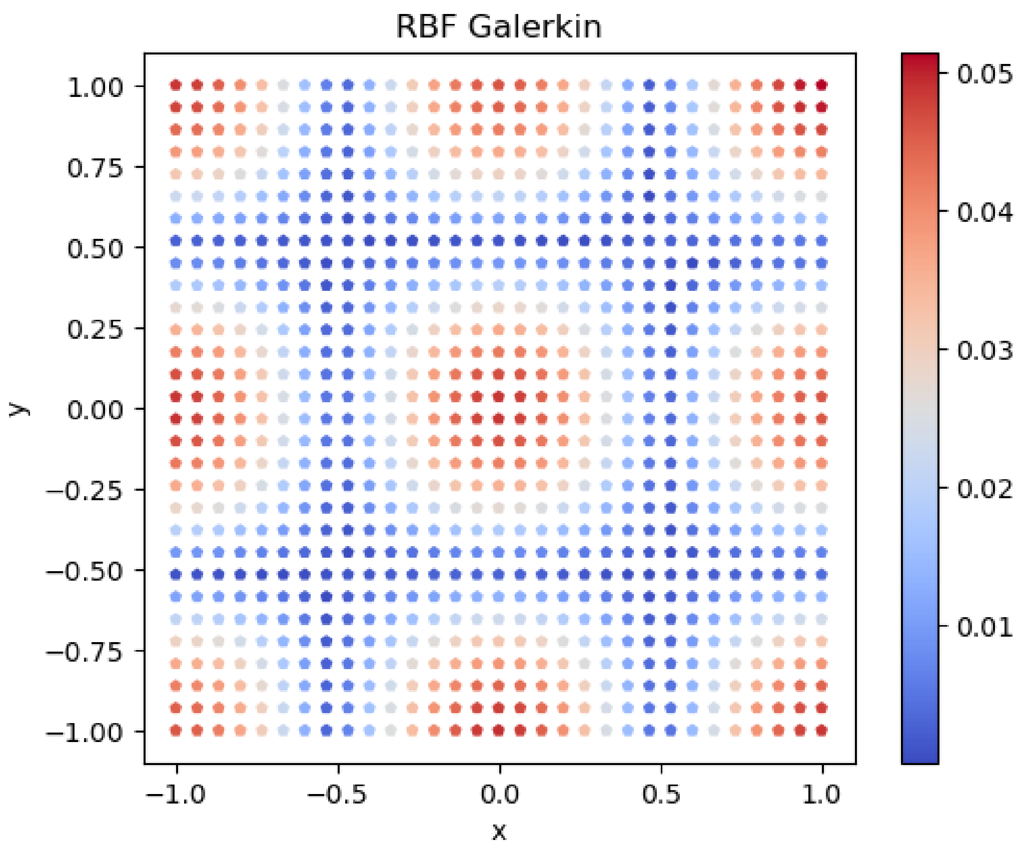
[29]:
```
# Pseudo-Zufallsgenerator für zwei Dimension (x, y)
rng_int = qmc.Halton(d=2, scramble = False)

N = 30
ep = 0.7

intd3 = (rng_int.random(n = N) * 2 - 1).T

th_1 = np.linspace(-1, 1, 100)
th_2 = np.ones(100)
th = np.array([th_1, th_2])
th = np.append(th, np.array([th_2, -th_1]), axis = 1)
th = np.append(th, np.array([-th_1, -th_2]), axis = 1)
th = np.append(th, np.array([-th_2, th_1]), axis = 1)
```

```
#Plotten :)
plt.plot(intd3[0], intd3[1], color = 'orange', linestyle = 'None', markersize =␣
↪5.5, marker = 'x', label = 'Innerepunkte')
plt.plot(th[0], th[1], color = 'gray', linestyle = 'dotted', label = 'Rand␣
↪$\partial \Omega$');
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.1, 1.05));
plt.show();
```



[49]:
```
from scipy import integrate

A = np.zeros((N, N))
rhs = np.zeros((N, 1))
for i in range(N):
    for j in range(i):
        Nphi2_ = lambda x, y: Nphi2(x, y, intd3[0][i], intd3[1][i],␣
↪intd3[0][j], intd3[1][j], ep)
        phi2_ = lambda x, y: phi2(x, y, intd3[0][i], intd3[1][i], intd3[0][j],␣
↪intd3[1][j], ep)
        A[i, j] = integrate.dblquad(Nphi2_, -1, 1, -1, 1)[0] + integrate.
↪dblquad(phi2_, -1, 1, -1, 1)[0]
```

```python
    rhs_ = lambda x, y: f(x, y) * phi_x(x, y, intd3[0][i], intd3[1][i], ep)
    rhs[i] = integrate.dblquad(rhs_, -1, 1, -1, 1)[0]

#Matrix symmetrisch machen (Ich verstehe noch nicht ganz warum)
A += A.T - np.diag(np.diag(A))

lam_gal = linalg.solve(A, rhs)

u_exact = u_H(errd3[0], errd3[1])
dm = distance_matrix(errd3.T, intd3.T)

phis = np.dot(phi(dm, ep), lam_gal)

Err = np.absolute(phis - u_exact.reshape((930, 1)))

fig, ax = plt.subplots();
p = ax.scatter(errd3[0], errd3[1], c = Err , cmap=cmap, s = 14, marker = 'p');
fig.colorbar(p);
ax.set_aspect('equal');
ax.set_xlabel('x');
ax.set_ylabel('y');
ax.set_title("RBF Galerkin");
plt.show();
```



1.5 RBF-Finite Differences

Quelle: Guidelines for RBF-FD Discretization: Numerical Experiments on the Interplay of a Multitude of Parameter Choices; Le Borne, Sabine; Leinen, Willi
Wir betrachten wieder N_I Innerepunkte und N_B Randpunkte, $N := N_I + N_B$

$$X_\Omega := \{x_1, .., x_{N_I}\} \subset \Omega$$

$$X_{\partial\Omega} := \{x_{N_I+1}, .., x_N\} \subset \partial\Omega$$

Mit der Stencil-Größe $n \leq N$ können wir den Stencil X_j zum Zenterpunkt x_j definieren

$$X_j = \{x_{s_1^j}, ..., x_{s_n^j}\} = \{x_i \in X : i \in I_j\} \quad \text{für } I_j := \{s_1^j, ..., s_n^j\}$$

Die Indizes in $I_j \subseteq \{1, ..., N\}$, s_i^j sind dabei als Indizes auf X für den j-ten Stencil zu verstehen. Damit wollen wir weights $w_1^j, ..., w_n^j \subset \mathbb{R}$ finden, sodass wir für eine Funktion u und einen Differentialoperator $\mathcal{L}$ diese approximieren:

$$\mathcal{L}u(x_j) \approx \sum_{i=1}^{n} w_i^j u(x_{s_i^j})$$

Betrachte Basisfunktionen (bspw. RBF) $k_1, ..., k_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mit denen wir u interpolieren

$$p_u(x) = \sum_{i=1}^{n} u(x_{s_i^j}) k_i(x)$$

Damit erhalten wir

$$\mathcal{L}p_u(x) = \sum_{i=1}^{n} u(x_{s_i^j}) \mathcal{L}k_i(x) = \sum_{i=1}^{n} u(x_{s_i^j}) w_i$$

Wobei wir die weights mittels $w_i := \mathcal{L}k_i(x)$ definieren.
Betrachte $\{\phi_{\epsilon,x_i} | i \in I_j\}$, die n RBF zu den Nodes des Stencils X_j.

$$\Pi_l := \text{span}\{p : \Omega \to \mathbb{R}, p(x) = \prod_{j=1}^{d} x_j^{k_j} | k_j \in \mathbb{N}_0, \sum_{j=1}^{d} k_j \leq l\}$$

$$M := \text{diim}\Pi_l$$

Ist der Raum der d-Variablen Polynome mit Ordnung maximal l.
Wir definieren die Basis von Π_l als $\{p_1, ..., p_M\}$
Damit definieren wir den RBF Funktionenraum zum Stencil X_j angepasst durch die oben definierten Polynome:

$$\mathcal{R}_j := \{s.\Omega \to \mathbb{R}, s(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j \{\phi_{\epsilon, x_{s_i^j}}(x) + \sum_{k=1}^{M} \tilde{\lambda}_k^j p_k(x) | \lambda_i^j, \tilde{\lambda}_k^j \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j p_k(x_{s_i^j}) = 0 \quad \text{für alle}\, k \in \{1, ..., M\}\}$$

Die Interpolation $s \in \mathcal{R}_j$ zu einer Funktion f ergibt sich über die Matrix-Darstellung

$$\begin{bmatrix} A_j & P_j \\ P_j^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^j \\ \tilde{\lambda}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^j \\ 0_M \end{bmatrix}$$

Und auf die Anwendung eines Differentialoperators übertragen:

$$\begin{bmatrix} A_j & P_j \\ P_j^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^j \\ \tilde{w}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\phi_j \\ \mathcal{L}p_j \end{bmatrix}$$

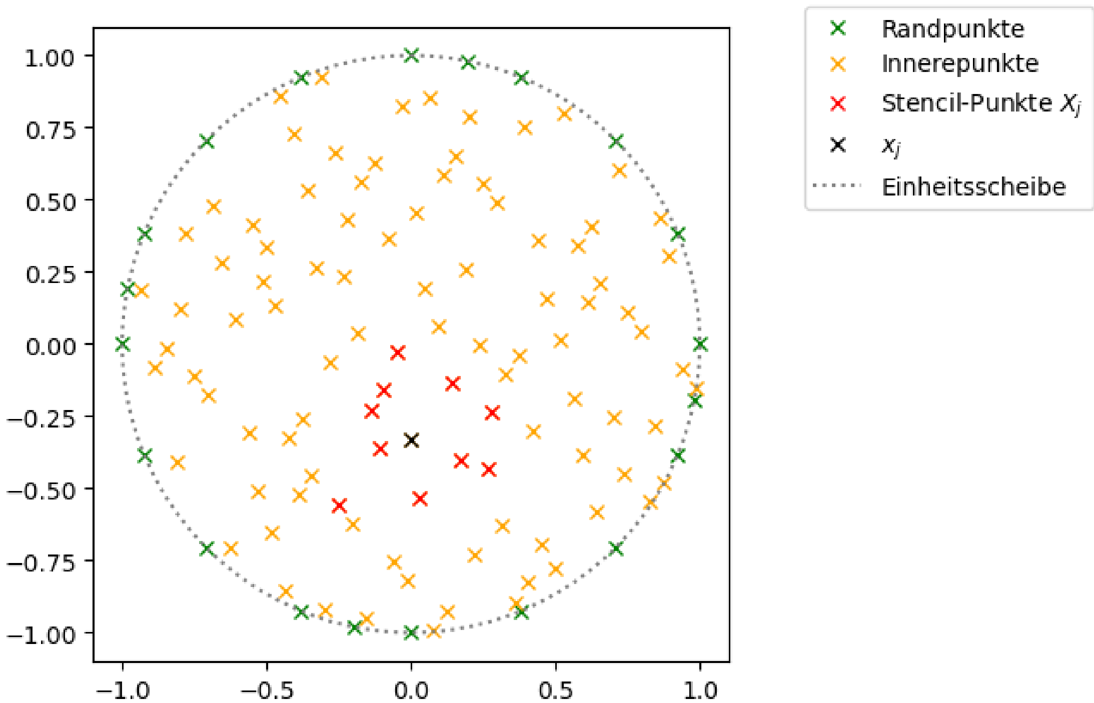
Stencil-Generation Der Stencil zu einem Zenterpunkt x_j kann bspw. als n nächste Nachbarpunkte gefunden (hier erstmal betrachtet) werden, kann aber auch für ein variables n_j die Punkte innerhalb eines fixen Radius um x_j sein.
Betrachte hier als Beispiel Ω als Einheitsscheibe.

[81]:
```
def stencil(xj ,yj, X, n):
    dm = distance_matrix(np.array([xj, yj]).reshape((2,1)).T, X)
    inds = np.argsort(dm).T
    out = np.array([X.T[0][inds[1]], X.T[1][inds[1]]])
    for i in range(2, n + 1):
        out = np.append(out, np.array([X.T[0][inds[i]], X.T[1][inds[i]]]), axis␣
↪= 1)
    return out
```

[82]:

```python
rng_bdy = qmc.Halton(d=1, scramble = False) # Pseudo-Zufallsgenerator für eine Dimension (Winkel)
theta_bdy = rng_bdy.random(n = 20) * 2 * np.pi # Erzeuge 20 Zufallszahlen und skaliere von [0, 1] auf [0, 2 * Pi]

# Mit diesen Zufallszahlen erzeuge Punkte auf Einheitskreis
bdyd4_x = np.sin(theta_bdy)
bdyd4_y = np.cos(theta_bdy)

bdyd4 = np.array([bdyd4_x, bdyd4_y]).T.reshape(20,2)

# Pseudo-Zufallsgenerator für zwei Dimension (x, y)
rng_int = qmc.Halton(d=2, scramble = False)

N_I = 100

intd4 = [] # Array das am Ende die N_I Innerenpunkt (x, y) enthalten soll

# Erzeuge "Monte-Carlo mäßig" N_I Punkte
while len(intd4) < N_I:
    intd_ = rng_int.random(n = N_I - len(intd4)) * 2 - 1 # Erzeuge N_I - (Anzahl bereits erzeugter Werte) Zufallszahlen (x, y) auf [-1, 1]
    dist = np.linalg.norm(intd_, axis = 1) # Berechne Norm für diese Zufallszahlen (sqrt(x^2+y^2))
    ind = []
    for i, d in enumerate(dist): # Loop über alle erzeugten Zufallszahlen
        if d >= 1: # Wenn Norm der Zufallszahl >= 1 (i.e. Punkt liegt nicht in Einheitsscheibe), merke Index zum löschen
            ind.append(i)
    intd_ = np.delete(intd_, ind, axis = 0) # Lösche alle Punkte die außerhalb der Einheitsscheibe liegen aus Array
    if len(intd4) == 0:
        intd4 = intd_
    else:
        intd4 = np.append(intd4, intd_, axis = 0)

th = np.linspace(0, 2*np.pi, 100) # Äquidistante Winkeldistribution für das Ploten der Einheitsscheibe

st_ = stencil(intd4.T[0][0], intd4.T[1][0], intd4, 10)

#Plotten :)
plt.plot(bdyd_x, bdyd_y, color = 'green', linestyle = 'None', markersize = 5.5, marker = 'x', label = 'Randpunkte');
plt.plot(intd4.T[0], intd4.T[1], color = 'orange', linestyle = 'None', markersize = 5.5, marker = 'x', label = 'Innerepunkte')
```

```
plt.plot(st_[0], st_[1], color = 'red', linestyle = 'None', markersize = 5.5,␣
 ↪marker = 'x', label = 'Stencil-Punkte $X_j$')
plt.plot(intd4.T[0][0], intd4.T[1][0], color = 'black', linestyle = 'None',␣
 ↪markersize = 5.5, marker = 'x', label = '$x_j$')
plt.plot(np.sin(th), np.cos(th), color = 'gray', linestyle = 'dotted', label =␣
 ↪'Einheitsscheibe');
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.1, 1.05));
plt.show();
```



1.5.1 Poisson Eq. Example (u_1 Larsson, Fornberg)

[ ]:

```

```