Úvod

Atomické formuly

1. prednáška · Matematika (4): Logika pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Letný semester 2019/2020

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Obsah 1. prednášky

Úvod

- O logike
- O tomto kurze

Atomické formuly

- Syntax atomických formúl
- Sémantika atomických formúl

Úvod

Úvod

O logike

Čo je logika

Logika je vedná disciplína, ktorá študuje usudzovanie.

Správne, racionálne usudzovanie je základom vedy a inžinierstva.

Vyžaduje rozoznať
správne úsudky z predpokladaných princípov a pozorovania
od chybných úvah a špekulácií.

Správnosť úsudkov, zdá sa, nie je iba vec konvencie a dohody.

Logika skúma, **aké** sú zákonitosti správneho usudzovania
a **prečo** sú zákonitosťami.

Ako sa v logika študuje usudzovanie

Logika má dva hlavné predmety záujmu:

Jazyk zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

Syntax pravidlá zápisu tvrdení

Sémantika význam tvrdení

Usudzovanie (inferencia)

odvodzovanie nových logických dôsledkov

z doterajších poznatkov

Ako vyplýva z jazyka?

Jazyk slúži na vyjadrenie tvrdení, ktoré popisujú informácie — poznatky o svete.

Súbor poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, tvorí **teóriu**.

Príklad 0.1 (Party time!)

Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah.

Organizujeme párty a P0: chceme na ňu pozvať niekoho z nich.

Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Možné stavy sveta a modely

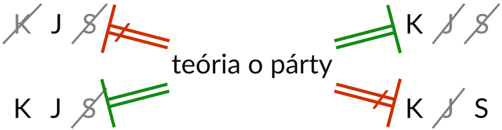
Teória rozdeľuje **možné stavy sveta** (interpretácie) na:

- $\models$ stavy, v ktorých je pravdivá — **modely** teórie,
- $\not\models$ stavy, v ktorých je nepravdivá.

Tvrdenie aj teória môžu mať viacero modelov, ale aj žiaden.

Príklad 0.2

Vymenujme možné stavy prítomnosti Kim, Jima a Sarah na párty. Zistime, v ktorých sú pravdivé jednotlivé tvrdenia našej teórie a celá teória.



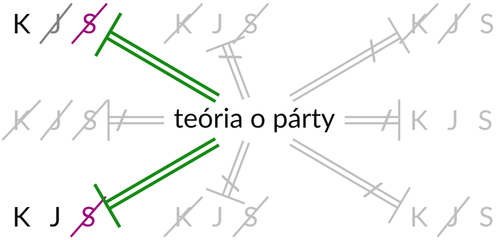
Logické dôsledky

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia,
ktoré sú pravdivé vo **všetkých modeloch** teórie.

Príklad 0.3

Logickým dôsledkom teórie P0, P1, P2, P3 je napríklad:

Sarah nepôjde na párty.



Logické usudzovanie

Vymenovanie všetkých svetov je často nepraktické až nemožné.

Logické dôsledky ale môžeme *odvodzovať* **usudzovaním** (*inferovať*).

Pri odvodení vychádzame z **premís** (*predpokladov*)
a postupnosťou **správnych úsudkov** dospievame k **záverom**.

Príklad 0.4

Vieme, že ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah (P1),
a že ak pôjde Jim, tak pôjde Kim (P2).

1. Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.
2. Podľa 1. a P2 pôjde aj Kim.
3. Podľa 2. a P1 nepôjde Sarah.

Teda podľa uvedenej úvahy:
Ak na párty pôjde Jim, tak nepôjde Sarah.

Dedukcia

Úsudok je správny (korektný) vtedy, keď vždy, keď sú pravdivé jeho premisy, je pravdivý aj jeho záver.

Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver je logickým dôsledkom premís a odvodenie je jeho dôkazom z premís.

Dedukcia je usudzovanie, pri ktorom sa používajú iba správne úsudky.

Logika študuje dedukciu, ale aj niektoré nededuktívne úsudky, ktoré sú *vo všeobecnosti* nesprávne,
ale sú správne v *špeciálnych* prípadoch alebo sú *užitočné*:

- indukcia — zovšeobecnenie;
- abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov;
- usudzovanie na základe analógie (podobnosti).

Kontrapríklad

Ak úsudok nie je správny, vieme nájsť kontrapríklad.

Stav sveta, v ktorom sú predpoklady pravdivé,
ale záver je nepravdivý.

Príklad 0.5

Nesprávny úsudok:

Ak platia tvrdenia teórie o party, na party príde Jim.

Kontrapríklad:

Stav, kedy príde Kim, nepríde Jim, nepríde Sarah.

Teória je pravdivá, výrok „na party príde Jim“ nie je pravdivý.

Ťažkosti s prirodzeným jazykom

Prirodzený jazyk je problematický:

- Viacznačné slová: Milo je v posluchárni A.
- Viacznačné tvrdenia: Videl som dievča v sále s ďalekohľadom.
- Ťažko syntakticky analyzovateľné tvrdenia:

  Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtretinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe veci, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; …

  — *Zákon č. 182/1993 Z. z. SR v znení neskorších predpisov*

- Výnimky a obraty so špeciálnym ustáleným významom:

  Nikto nie je dokonalý.

Formálne jazyky

Problémy prirodzených jazykov sa obchádzajú použitím umelých **formálnych** jazykov.

- Presne definovaná, zjednodušená syntax(pravidlá zápisu tvrdení) a sémantika (význam).
- Niekoľko formálnych jazykov už poznáte: aritmetika, jazyky fyzikálnych a chemických vzorcov, programovacie jazyky, …
- Problémy z reálneho sveta opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv **formalizovať**, a potom naň môžeme použiť logický aparát.
- Formalizácia vyžaduje cvik, trocha veda, trocha umenie.

Formalizácia poznatkov

S formalizáciou ste sa už stretli — napríklad pri riešení slovných úloh:

Karol je trikrát starší ako Mária. Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov. Koľko rokov majú Karol a Mária?	$\rightsquigarrow$	$k = 3 \cdot m$ $k + m = 12$

Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky.

Príklad 0.6

Sformalizujme náš párty príklad:

P0: Niekto z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Logika prvého rádu

Jazyk logiky prvého rádu (FOL) je jeden zo základných formálnych jazykov, ktorým sa logika zaoberá.

Do dnešnej podoby sa vyvinul na koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia — Gottlob Frege, Guiseppe Peano, Charles Sanders Peirce.

Výrokové spojky + **kvantifikátory** $\forall$ a $\exists$.

Dá sa v ňom vyjadriť veľa zaujímavých tvrdení, bežne sa používa v matematike.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ldots$$

Logika prvého rádu a informatika

Informatika sa vyvinula z logiky
(John von Neumann, Alan Turing, Alonzo Church, …)

Prvky logiky prvého rádu obsahuje väčšina programovacích jazykov:

- `all(x > m for x in arr)`,
- `select T1.x, T2.y from T1 inner join T2 on T1.z = T2.z where T1.z > 25`,

niektoré (Prolog) sú priamo podmnožinou FOL.

Vo FOL sa dá presne špecifikovať, čo má program robiť,
popísať, čo robí, a dokázať, že robí to, čo bolo špecifikované.

Vo výpočtovej logike a umelej inteligencii sa FOL používa na riešenie rôznych ťažkých problémov (plánovanie, rozvrh, hľadanie a overovanie dôkazov matematických tvrdení,…) simulovaním usudzovania.

Kalkuly — formalizácia usudzovania

Pre mnohé logické jazyky sú známe kalkuly — množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú

korektné — odvodzujú iba logické dôsledky
úplné — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky

Kalkuly sú bežné v matematike

- na počítanie s číslami, zlomkami (násobilka, aritmetika),
- riešenie lineárnych rovníc (kalkul lineárnej algebry),
- derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc (kalkul matematickej analýzy)

…

Sú korektné, ale nie vždy úplné.

Poznáte už aj jeden logický kalkul — ekvivalentné úpravy.

Úvod

O kurze

Čím sa budeme zaoberať v tomto kurze

Teoreticky

- Jazykmi logiky prvého rádu (FOL), jeho syntaxou a sémantikou
- Správnymi úsudkami v ňom a dôvodmi, prečo sú správne
- Korektnosťou a úplnosťou logických kalkulov
- Automatizáciou usudzovania

Prakticky

- Vyjadrovaním problémov vo FOL
- Automatizovaním riešenia problémov
- Manipuláciou symbolických stromových štruktúr (výrazov — formúl a termov)
- Programovaním vlastných jednoduchých automatických dokazovačov

Filozoficky

- Zamýšľanými a nezamýšľanými významami tvrdení
- Obmedzeniami vyjadrovania a usudzovania

Prístup k logike na tomto predmete

Stredoškolský prístup príliš neoddeľuje *jazyk* výrokov od jeho *významu* a vlastne ani jednu stránku nedefinuje jasne.

V tomto kurze sa budeme snažiť byť presní.

- *Zdanlivo* budeme o jednoduchých veciach hovoriť zložito

Pojmy z logiky budeme definovať matematicky

- ako množiny, postupnosti, funkcie, atď., ←-- Matematika (1), (3)

na praktických cvičeniach aj programami

- ako reťazce, slovníky, triedy a metódy. ←-- Programovanie (1), (2)

Budeme sa pokúšať dokazovať ich vlastnosti.

Budeme teda hovoriť o formálnej logike pomocou matematiky, ktorá je ale sama postavená na logike v prirodzenom jazyku — *meta* matematika logiky, matematika o logike.

Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4

Aktívne učenie

Na cvičeniach budeme používať techniku nazývanú aktívne učenie:

- Riešenie zadaných problémov v skupinkách.
- Cvičiaci budú s vami konzultovať postup a riešenia.
- Na tabuľu sa budú úlohy riešiť len výnimočne.
- Budete mať k dispozícii materiály z prednášok a zbierku s ukážkovými riešeniami a ďalšími úlohami.

Prečo?

- Samostatnou snahou o riešenie sa naučíte viac a hlbšie než pozorovaním, ako riešia iní.
- V praxi vám nik neukáže vzorové riešenie problémov.

Aktívne učenie

Problémy:

- Bude to mierne frustrujúce, budete neistí.
- Preto budete mať **pocit**, že ste sa nenaučili veľa.
- Je to **normálne**, ale **nebude to pravda**!

Čo s tým?

- Pýtajte sa!
- Prídite na konzultácie (termín oznámime na prvých cvičeniach).

Atomické formuly

Jazyky logiky prvého rádu

Logika prvého rádu je trieda (rodina) formálnych jazykov.

Zdieľajú:

- časti abecedy — **logické symboly** (spojky, kvantifikátory)
- pravidlá tvorby **formúl** (slov)

Líšia sa v **mimologických symboloch** — časť abecedy, pomocou ktorej sa tvoria najjednoduchšie — **atomické formuly** (**atómy**).

Atomické formuly a výroky v prirodzenom jazyku

Atomické formuly logiky prvého rádu zodpovedajú **jednoduchým vetám** o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch a rovnosti **pomenovaných** objektov.

Príklady 1.1

- ✔ Milo beží.
- ✔ Jarka vidí Mila.
- ✘ Milo beží, ale Jarka ho nevidí.
- ✘ Jarka vidí všetkých.
- ✔ Jarka dala Milovi Bobíka v sobotu.
- ✘ Jarka nie je doma.
- ✘ Niekto je doma.
- ✔ Súčet 2 a 2 je 3.
- ✔ Prezidentkou SR je Zuzana Čaputová.

Indivíduové konštanty

Indivíduové konštanty sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré pomenúvajú jednotlivé, pevne zvolené objekty.

Zodpovedajú vlastným menám, jednoznačným pomenovaniam, niekedy zámenám.

Príklady 1.2

`Jarka`, 2, `Zuzana_Čaputová`, `sobota`, π, …

Indivíduové konštanty a objekty

Indivíduová konštanta

- vždy pomenúva skutočný, existujúci objekt
  (na rozdiel od vlastného mena *Zeus*);
- nikdy nepomenúva viac objektov
  (na rozdiel od vlastného mena *Jarka*).

Objekt

- môže byť pomenovaný aj viacerými indivíduovými konštantami
  (napr. `Prezidentka_SR` a `Zuzana_Čaputová`);
- nemusí mať žiadne meno.

Predikátové symboly

Predikátové symboly sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré vyjadrujú vlastnosti alebo vzťahy.

Jednoduché vety v slovenčine majú *podmetovú* (*subjekt*) a *prísudkovú* časť (*predikát*):

Jarka	vidí	Mila.
podmet	prísudok	predmet
podmetová časť	prísudková časť	

Do logiky prvého rádu prekladáme takéto tvrdenie pomocou predikátového symbolu `vidí`, ktorý má dva *argumenty* („podmety“): indivíduové konštanty `Jarka` a `Milo`.

Úloha argumentu v predikáte je daná jeho poradím (podobne ako pozičné argumenty funkcií/metód v prog. jazykoch).

Arita predikátového symbolu

Predikátový symbol má pevne určený počet argumentov — *aritu*.

Vždy musí mať práve toľko argumentov, aká je jeho arita.

Dohoda 1.3

Aritu budeme niekedy písať ako horný index symbolu.

Napríklad $\texttt{beží}^1$, $\texttt{vidí}^2$, $\texttt{dal}^4$, $<^2$.

Zamýšľaný význam predikátových symbolov

Unárny predikátový symbol (teda s aritou 1) zvyčajne označuje **vlastnosť**, druh, rolu, stav.

Príklady 1.4

$$
\begin{array}{rl}
\texttt{pes}^1(x) & x \text{ je pes} \\
\texttt{čierne}^1(x) & x \text{ je čierne} \\
\texttt{beží}^1(x) & x \text{ beží}
\end{array}
$$

Binárny, *ternárny*, … predikátový symbol (s aritou 2, 3, …) zvyčajne označuje **vzťah** svojich argumentov.

Príklady 1.5

$$
\begin{array}{rl}
\texttt{vidí}^2(x, y) & x \text{ vidí } y \\
\texttt{dal}^4(x, y, z, t) & x \text{ dal(a/o) objektu } y \text{ objekt } z \text{ v čase } t
\end{array}
$$

Kategorickosť významu predikátových symbolov

V bežnom jazyku často nie je celkom jasné, či objekt má alebo nemá nejakú vlastnosť — kedy je niekto mladý?

Predikátové symboly predstavujú *kategorické* vlastnosti/vzťahy — pre každý objekt sa dá jednoznačne rozhodnúť, či má alebo nemá túto vlastnosť/vzťah s iným objektom či inými objektmi.

Význam predikátového symbolu preto často zodpovedá rovnakému slovenskému predikátu iba približne:
predikát $\texttt{mladší}^2$ môže označovať vzťah „x je mladší ako y“ presne;
predikát $\texttt{mladý}^1$ zodpovedá vlastnosti „x je mladý“ iba približne.

Nekategorickými vlastnosťami sa zaoberajú fuzzy logiky.
Predikáty v nich zachytávajú význam týchto vlastností presnejšie.

Atomické formuly

Atomické formuly majú tvar

$$\mathit{predik\acute{a}t}^k(\mathit{argument}_1, \mathit{argument}_2, \dots, \mathit{argument}_k),$$

alebo

$$\mathit{argument}_1 \doteq \mathit{argument}_2,$$

pričom k je arita $\mathit{predik\acute{a}t}$u,
a $\mathit{argument}_1, \dots, \mathit{argument}_k$ sú (nateraz) indivíduové konštanty.

Atomická formula zodpovedá (jednoduchému) **výroku** v slovenčine,
t.j. tvrdeniu, ktorého **pravdivostná hodnota** (pravda alebo nepravda)
sa dá jednoznačne určiť,
lebo predikát označuje kategorickú vlastnosť/vzťah
a indivíduové konštanty jednoznačne označujú objekty.

Formalizácia jednoduchých výrokov

Formalizácia je preklad výrokov z prirodzeného jazyka do formálneho logického jazyka.

Nie je to jednoznačný proces.

Predpísaný prvorádový jazyk (konštanty a predikáty) sa snažíme využiť čo najlepšie.

Príklad 1.6

Sformalizujme v jazyku s konštantami $\mathtt{Evka}$, $\mathtt{Jarka}$ a $\mathtt{Milo}$ a predikátom $\mathtt{vyšší}^2$ výroky:

A_1: Jarka je vyššia ako Milo. $\rightsquigarrow$ $\mathtt{vyšší}^2(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Milo})$

A_2: Evka je nižšia ako Milo. $\rightsquigarrow$ $\mathtt{vyšší}^2(\mathtt{Milo}, \mathtt{Evka})$

Zanedbávame nepodstatné detaily — pomocné slovesá, predložky, skloňovanie, rod, …: $\mathtt{vyšší}^2(x, y)$ — x je vyšší/vyššia/vyššie ako y.

Návrh jazyka pri formalizácii

Formalizácia spojená s návrhom vlastného jazyka je **iteratívna**: Postupne zisťujeme, aké predikáty a konštanty potrebujeme, upravujeme predchádzajúce formalizácie.

Príklady 1.7

A_1: Jarka dala Milovi Bobíka.

$\rightsquigarrow$ $\cancel{\mathtt{dalaMiloviBobíka}^1(\mathtt{Jarka})}$ $\cancel{\mathtt{dalBobíka}^2(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Milo})}$
$\mathtt{dal}^3(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Milo}, \mathtt{Bobík})$

A_2: Evka dostala Bobíka od Mila.

$\rightsquigarrow$ $\cancel{\mathtt{dalBobíka}^2(\mathtt{Milo}, \mathtt{Evka})}$ $\mathtt{dal}^3(\mathtt{Milo}, \mathtt{Evka}, \mathtt{Bobík})$

A_3: Evka dala Jarke Cilku.

$\rightsquigarrow$ $\cancel{\mathtt{dalCilku}^2(\mathtt{Evka}, \mathtt{Jarka})}$ $\mathtt{dal}^3(\mathtt{Evka}, \mathtt{Jarka}, \mathtt{Cilka})$

A_4: Bobík je pes.

$\rightsquigarrow$ $\mathtt{pes}^1(\mathtt{Bobík})$

Návrh jazyka pri formalizácii

Minimalizujeme počet predikátov, uprednostňujeme flexibilnejšie, viacúčelovejšie (`dal`^{3} pred `dalBobíka`^{2} a `dalCilku`^{2}).

- Expresívnejší jazyk (vyjadrí viac).
- Zrejmejšie logické vzťahy výrokov.

Podobné normalizácii databázových schém.

Atomické formuly

Syntax atomických formúl

Presné definície

Cieľom logiky je uvažovať o jazyku, výrokoch, vyplývaní, dôkazoch.

Výpočtová logika sa snaží automaticky riešiť konkrétne problémy vyjadrené v logických jazykoch.

Spoľahlivé a overiteľné úvahy a výpočty vyžadujú
presnú dohodu na tom, o čom hovoríme —
definíciu logických pojmov (jazyk, výrok, pravdivosť, …).

Pojmy (napr. *atomická formula*) môžeme zadefinovať napríklad

- **matematicky** ako množiny, n-tice, relácie, funkcie, postupnosti, …;
- **informaticky** tým, že ich **naprogramujeme**, napr. zadefinujeme triedu `AtomickaFormula` v Pythone.

Matematický jazyk je univerzálnejší ako programovací — abstraktnejší, menej nie až tak podstatných detailov.

Syntax atomických formúl logiky prvého rádu

Najprv sa musíme dohodnúť na tom,
aká je syntax atomických formúl logiky prvého rádu:

- z čoho sa skladajú,
- čím vlastne sú,
- akú majú štruktúru.

Symboly jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Z čoho sa skladajú atomické formuly?

Definícia 1.8

Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu sú mimologické, logické a pomocné symboly, pričom:

Mimologickými symbolmi sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Jediným *logickým symbolom* je $\doteq$ (symbol rovnosti).

Pomocnými symbolmi sú **(**, **)** a **,** (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú disjunktné.
Pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ani $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.
Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Abeceda jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky by ste povedali,
že *abecedou* jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu
je $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, \mathbf{(}, \mathbf{)}, \mathbf{,}\}$.

V logike sa väčšinou pojem *abeceda* nepoužíva, pretože potrebujeme rozlišovať rôzne druhy symbolov.

Namiesto *abeceda jazyka* $\mathcal{L}$ hovoríme *množina všetkých symbolov jazyka* $\mathcal{L}$ alebo len *symboly jazyka* $\mathcal{L}$.

Na zápise množiny $\Sigma_{\mathcal{L}}$ však ľahko vidíme,
čím sa rôzne jazyky atomických formúl logiky prvého rádu
od seba líšia a čo majú spoločné.

Príklady symbolov jazykov atomických formúl logiky prvého rádu

Príklad 1.9

Príklad o deťoch a zvieratkách sme sformalizovali v jazyku $\mathcal{L}_{\text{dz}}$, v ktorom:

- $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\texttt{Bobík}, \texttt{Cilka}, \texttt{Evka}, \texttt{Jarka}, \texttt{Milo}\}$,
- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\texttt{dal}, \texttt{pes}\}$,
- $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\texttt{dal}) = 3$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\texttt{pes}) = 1$.

Príklad 1.10

Príklad o návštevníkoch party by sme mohli sformalizovať v jazyku $\mathcal{L}_{\text{party}}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\text{party}}} = \{\texttt{Kim}, \texttt{Jim}, \texttt{Sarah}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{party}}} = \{\texttt{príde}\}$ a $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\text{party}}}(\texttt{príde}) = 1$.

Označenia symbolov

Keď budeme hovoriť o ľubovoľnom jazyku $\mathcal{L}$, často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme ***meta premenné***:
premenné v (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť **o** (po grécky *meta*) týchto symboloch.

Dohoda 1.11

Indivíduové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými a, b, c, d s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými P, Q, R s prípadnými dolnými indexmi.

Atomické formuly jazyka

Čo sú atomické formuly?

Definícia 1.12

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol s aritou n a $c_1, \dots, c_n$ sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Slová jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky by ste povedali,
že jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu nad abecedou $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, \mathbf{(}, \mathbf{)}, \mathbf{,}\}$ je množina slov

$$\{\, c_1 \doteq c_2 \mid c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, c_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \,\} \\ \cup \{\, P(c_1, \dots, c_n) \mid P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathrm{ar}_{\mathcal{L}}(P) = n, c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \,\}.$$

V logike sa jazyk takto nedefinuje, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy slov*. Navyše tieto slová zodpovedajú slovenským *vetám*.

Príklady atómov jazyka

Príklad 1.13

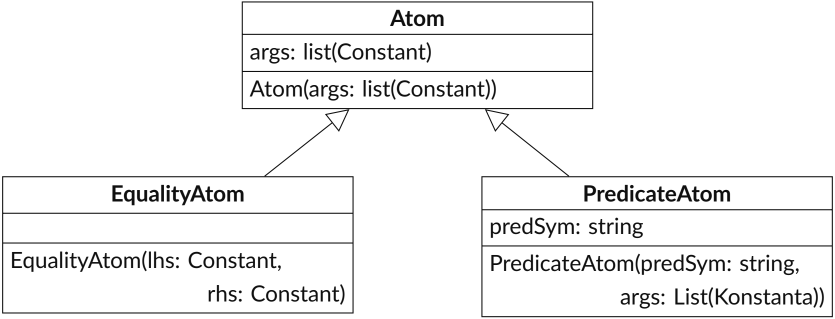
V jazyku $\mathcal{L}_{\text{dz}}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\mathtt{Bobík}, \mathtt{Cilka}, \mathtt{Evka}, \mathtt{Jarka}, \mathtt{Milo}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} = \{\mathtt{dal}, \mathtt{pes}\}$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\mathtt{dal}) = 3$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\mathtt{pes}) = 1$,
sú *okrem iných* rovnostné atómy:

$$\mathtt{Bobík} \doteq \mathtt{Bobík} \qquad \mathtt{Cilka} \doteq \mathtt{Bobík}$$
$$\mathtt{Evka} \doteq \mathtt{Jarka} \qquad \mathtt{Bobík} \doteq \mathtt{Cilka}$$

a predikátové atómy:

$$\mathtt{pes}(\mathtt{Cilka}) \quad \mathtt{dal}(\mathtt{Cilka}, \mathtt{Milo}, \mathtt{Bobík}) \quad \mathtt{dal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Evka}, \mathtt{Milo}).$$

Atómy ako triedy



Atomické formuly

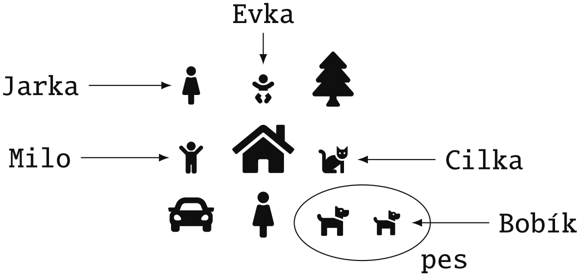
Sémantika atomických formúl

Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako zistíme, či je atomická formula `pes(Bobík)` pravdivá v nejakej situácii (napríklad u babky Evky, Jarky a Mila na dedine)?

Pozrieme sa na túto situáciu a zistíme:

1. aký objekt b pomenúva konštanta `Bobík`;
2. akú vlastnosť p označuje predikát `pes`;
3. či objekt b má vlastnosť p.



Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako môžeme tento postup matematicky alebo informaticky modelovať?

Potrebujeme:

- matematický/informatický model situácie (stavu vybranej časti sveta),
- postup na jeho použitie pri vyhodnocovaní pravdivosti formúl.

Matematický model stavu sveta

Ako môžeme matematicky popísať nejakú situáciu tak, aby sme pomocou tohto popisu mohli vyhodnocovať atomické formuly v nejakom jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$?

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
- ▶ množina všetkých objektov — **doména**;
- pre každú konštantu c z jazyka $\mathcal{L}$,
  ktorý objekt z domény c pomenúva,
- pre každý unárny predikát P z jazyka $\mathcal{L}$,
  ktoré objekty z domény majú vlastnosť označenú predikátom P,
- ▶ tvoria **podmnožinu** domény;
- pre každý n-árny predikát R z jazyka $\mathcal{L}$, $n > 1$,
  ktoré n-tice objektov z domény sú vo vzťahu ozn. pred. R,
- ▶ tvoria **n-árnu reláciu** na doméne;
- priradenie objektov ku konštantám a množín/relácií
  k predikátom musí byť jednoznačné
- ▶ **interpretačná funkcia**.

Štruktúra pre jazyk

Definícia 1.14

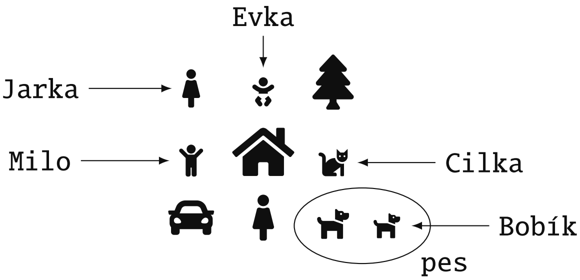
Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu.
Štruktúrou pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde
D je ľubovoľná **neprázdna** množina nazývaná ***doména*** štruktúry $\mathcal{M}$;
i je zobrazenie, nazývané ***interpretačná funkcia*** štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

- každému symbolu konštanty c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

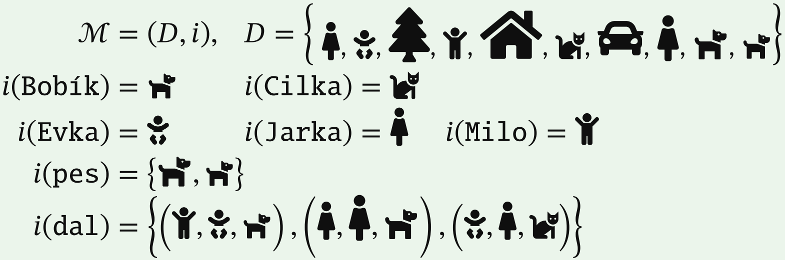
Dohoda 1.15

Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$.

Príklad štruktúry



Príklad 1.16



Štruktúra ako informatický objekt

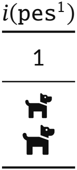
Štruktúru sme definovali pomocou *matematických* objektov.

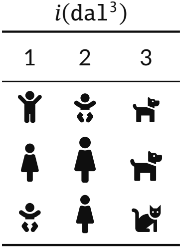
Aký **informatický** objekt zodpovedá štruktúre?

Databáza:

Predikátové symboly jazyka $\sim$ veľmi zjednodušená schéma DB (arita $\sim$ počet stĺpcov)

Interpretácia predikátových symbolov $\sim$ konkrétne tabuľky s dátami





Štruktúry — upozornenia

Štruktúr pre daný jazyk je nekonečne veľa.

Doména štruktúry

- môže mať ľubovoľné prvky;
- nijak nesúvisí s intuitívnym významom interpretovaného jazyka;

  Jazyk o deťoch a zvieratkách — číselná doména štruktúry
- môže byť nekonečná.

Interpretácia symbolov konštánt:

- každej konštante je priradený objekt domény;
- nie každý objekt domény musí byť priradený nejakej konštante;
- rôznym konštantám môže byť priradený rovnaký objekt.

Interpretácie predikátových symbolov môžu byť nekonečné.

Pravdivosť atomickej formuly v štruktúre

Ako zistíme, či je atomická formula pravdivá v štruktúre?

Definícia 1.17

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl jazyka logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm $c_1 \doteq c_2$ jazyka $\mathcal{L}$ je ***pravdivý v štruktúre*** $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $i(c_1) = i(c_2)$.

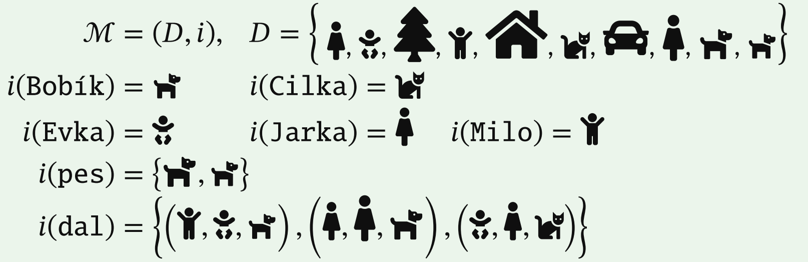
Predikátový atóm $P(c_1, \ldots, c_n)$ jazyka $\mathcal{L}$ je ***pravdivý v štruktúre*** $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $(i(c_1), \ldots, i(c_n)) \in i(P)$.

Vzťah *atóm A je pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$* skrátene zapisujeme $\mathcal{M} \models A$. Hovoríme aj, že $\mathcal{M}$ je ***modelom*** A.

Vzťah *atóm A nie je pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$* zapisujeme $\mathcal{M} \not\models A$. Hovoríme aj, že A ***je nepravdivý*** v $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}$ ***nie je modelom*** A.

Príklad určenia pravdivosti atómu v štruktúre

Príklad 1.18



Atóm $\mathtt{pes}(\mathtt{Bobík})$ je pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models \mathtt{pes}(\mathtt{Bobík})$,
lebo objekt $i(\mathtt{Bobík}) =$  je prvkom množiny  $= i(\mathtt{pes})$.

Atóm $\mathtt{dal}(\mathtt{Evka}, \mathtt{Jarka}, \mathtt{Cilka})$ je pravdivý v $\mathcal{M}$,
t.j., $\mathcal{M} \models \mathtt{dal}(\mathtt{Evka}, \mathtt{Jarka}, \mathtt{Cilka})$,
lebo $(i(\mathtt{Evka}), i(\mathtt{Jarka}), i(\mathtt{Cilka})) =$  $\in i(\mathtt{dal})$.

Atóm $\mathtt{Cilka} \doteq \mathtt{Bobík}$ nie je pravdivý v $\mathcal{M}$, t.j.,
$\mathcal{M} \not\models \mathtt{Cilka} \doteq \mathtt{Bobík}$,