Matematika 4 — Logika pre informatikov
Teoretická úloha 9

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **4. mája 2020 o 12:20** cez odovzdávací formulár pre tu09[1].

Odovzdávajte URL odkazy na

- **jeden PDF dokument s právom na komentovanie** nahratý na Google Drive; dokument musí obsahovať celé riešenie v textovej forme;
- **export** z editora prvorádových tabiel[4], ak ho použijete pri riešení;
- **export** z prieskumníka štruktúr[5], ak ho použijete pri riešení.

Exporty urýchlia vyhodnotenie úlohy, ale **nenahrádzajú** zobrazenia tabiel a zápisy štruktúr v PDF dokumente úlohy (JSON sa nedá zmysluplne komentovať).

Neodovzdávajte: priečinky; dokumenty s riešeniami viacerých úloh.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenia všetkých úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**[2].

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky[3], kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Riešenia niektorých úloh môžete skontrolovať pomocou editora prvorádových tabiel[4]a prieskumníka štruktúr[5].

Ak nie je uvedené inak, v každom použitom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu predpokladáme množinu indivíduových premenných $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, w, x, y, z, u_1, v_1, w_1, x_1, y_1, z_1, u_2, v_2, w_2, x_2, y_2, z_2, \dots\}$.

[1] https://forms.gle/E5aBHQLBNomN4WZJ6
[2] https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh
[3] https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf
[4] https://dai.fmph.uniba.sk/courses/lpi/folTableauEditor/
[5] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/structure-explorer/

Cvičenie 9.1. (6.4.1) Majme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_4\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{John}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pes}^1, \text{macka}^1, \text{mys}^1, \text{LS}^1, \text{steka}^1, \text{ma}^2\}$, pričom význam $\text{LS}(x)$ je *x má ľahký spánok*. Rozhodnite, či z teórie T, kde

(A_1) $\forall x(\text{pes}(x) \to \text{steka}(x))$

(A_2) $\forall x \forall y((\text{ma}(x, y) \land \text{macka}(y)) \to \neg \exists z(\text{ma}(x, z) \land \text{mys}(z)))$

(A_3) $\forall x(\text{LS}(x) \to \neg \exists y(\text{ma}(x, y) \land \text{steka}(y)))$

(A_4) $\exists x(\mathsf{ma}(\mathsf{John}, x) \land (\mathsf{macka}(x) \lor \mathsf{pes}(x)))$

vyplývajú formuly:

(X_1) $(\exists x(\mathsf{ma}(\mathsf{John}, x) \land \neg\mathsf{steka}(x)) \to \mathsf{LS}(\mathsf{John}))$

(X_2) $(\mathsf{LS}(\mathsf{John}) \to \forall x(\mathsf{ma}(\mathsf{John}, x) \to \neg\mathsf{mys}(x)))$

💡 Teóriu aj formuly X_1 a X_2 si najprv pozorne prečítajte, pochopte ich význam a intuitívne si premyslite, **prečo** X_1 resp. X_2 vyplýva alebo nevyplýva z teórie. Intuícia vás potom dovedie ku konštrukcii správneho tabla alebo štruktúry.

⚠ V logike prvého rádu vo všeobecnosti **nemôžeme použiť tablá na hľadanie spĺňajúcich štruktúr**, pretože úplné tablo môže byť nekonečné.

Cvičenie 9.2. (6.3.1) Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu:

1. Je aspoň jeden študent, ktorý je chlapec, a jedna študentka (ktorá je teda dievča), a sú spolužiaci.
2. Učiteľ, ktorý je profesorom, musí byť školiteľom aspoň jedného študenta.
3. Vzťah „byť spolužiakom“ je symetrický a tranzitívny.
4. Študenti a školitelia sú disjunktní.
5. Študent absolvuje predmet, iba ak ho má zapísaný.
6. Študent, ktorý absolvoval predmet, je spokojný.
7. Každý študent má medzi študentami aspoň dvoch kamarátov, pričom s jedným sa kamaráti viac než s tým druhým.
8. Každý študent má najviac jedného školiteľa.
9. Každá študentka má práve jednu spolužiačku, ktorá jej je najlepšia kamarátka.
10. Nikto si nezapisuje výberové predmety.

Cvičenie 9.3. (6.3.2) Uvažujme vetu: „Každé zvieratko niekto kŕmi.“ Ktorá z nasledovných formúl zodpovedá tejto vete? Akým vetám zodpovedajú zvyšné formuly?

(A_1) $\forall x\big(\mathsf{človek}(x) \to \exists y(\mathsf{zvieratko}(y) \land \mathsf{kŕmi}(x, y))\big)$

(A_2) $\forall y\big(\mathsf{zvieratko}(y) \to \exists x(\mathsf{človek}(x) \land \mathsf{kŕmi}(x, y))\big)$

(A_3) $\exists x\big(\mathsf{človek}(x) \land \forall y(\mathsf{zvieratko}(y) \to \mathsf{kŕmi}(x, y))\big)$

(A_4) $\exists y\big(\mathrm{zvieratko}(y) \land \forall x(\mathrm{človek}(x) \to \mathrm{kŕmi}(x, y))\big)$

Formuly A_1–A_4 možno vyabstrahovať do nasledovných štyroch všeobecných schém, kde P, Q a R označujú *formuly* s voľnými premennými x a y (teda nie nutne iba jednoduché predikáty):

(B_1) $\forall x\big(P(x) \to \exists y(Q(y) \land R(x, y))\big)$

(B_2) $\forall x\big(P(x) \to \exists y(Q(y) \land R(y, x))\big)$

(B_3) $\exists x\big(P(x) \land \forall y(Q(y) \to R(x, y))\big)$

(B_4) $\exists x\big(P(x) \land \forall y(Q(y) \to R(y, x))\big)$

Určte, ktorej schéme zodpovedá každé z nasledujúcich tvrdení (v zátvorkách je odporúčaná formula R):

1. V ZOO je zvieratko, ktoré chodia kŕmiť všetky deti.
   (kŕmi(x, y) — x chodí kŕmiť y)
2. Každý týždeň na Obchodnej zbijú cudzinca.
   (zbijú(x, t) — na Obchodnej zbijú x v období t)
3. Každú hodinu mi vyvoláva nejaký otravný predajca.
   (volá(x, ja, t) — telefonicky ma otravuje x v čase t)
4. Každý študent má kamaráta, ktorý je tiež študent.
   (kamarát(x, y) — x a y sú kamaráti)
5. Jeden študent sa kamaráti so všetkými študentami.

Cvičenie 9.4. (6.2.4) Dokážte, že nasledujúce formuly sú splniteľné, ale nie platné:

a) $\big(\forall x(\mathrm{doktorand}(x) \to \mathrm{študent}(x)) \to \forall x(\mathrm{doktorand}(x) \land \mathrm{študent}(x))\big)$,

b) $\big(\forall x\, \exists y(\mathrm{páči}(x, y) \to \mathrm{zaľúbený}(x)) \to \forall x(\exists y\, \mathrm{páči}(x, y) \to \mathrm{zaľúbený}(x))\big)$,

c) $\big(\forall x\, \exists y\, \mathrm{rodič}(x, y) \to \exists x\, \forall y\, \mathrm{rodič}(x, y)\big)$.

Tieto formuly zachytávajú časté chyby pri formalizácii. Všímajte si rozdiely vo význame ľavých a pravých strán implikácií.

Aby ste rozdiely naozaj pochopili, **neuspokojte sa** s jednou triviálnou štruktúrou. Skúmajte štruktúry s aspoň 4-prvkovými doménami, v ktorých sú podľa možnosti všeobecné kvantifikácie splnené **netriviálne**, teda antecedent vnorenej implikácie nie je vždy nesplnený.

Hodnotená časť

Úloha 9.5. (6.3.3) Uvažujme znova jazyk $\mathcal{L}$ a teóriu T z úlohy 9.2. Rozšírte teóriu T o formalizáciu nasledujúcich tvrdení na teóriu T' vo vhodnom rozšírení $\mathcal{L}'$ jazyka $\mathcal{L}$:

1. Každý študent študuje nejaký študijný program.
2. Garantom študijného programu je *iba* profesor.
3. Študent, ktorý absolvoval *všetky* predmety nejakého študijného programu, absolvoval tento program.
4. Vzťah „byť školiteľom" je ireflexívny a asymetrický.
5. *Nie* každý študent má školiteľa, ktorý je profesor.
6. Každý profesor má *práve* dvoch podriadených docentov.
7. *Nikto ne*učí ani si *ne*zapíše *ne*aktívny predmet.
8. Študent môže byť hodnotený známkou „Fx" *najviac* na dvoch predmetoch.
9. Pokiaľ má nejaký študent *samé* A-čka, učitelia sú spokojní.
10. Peter má dve také spolužiačky, ktoré sú *obe súčasne* jeho *naj*lepšie kamarátky.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte celý použitý jazyk $\mathcal{L}'$ a vysvetlite význam symbolov, ktoré ste použili na formalizáciu nových tvrdení. Z teórie T' uveďte iba nové formuly (teda $T' \setminus T$).

Úloha 9.6. (6.4.2) Rozhodnite, či z teórie $T = \{A_1, \dots, A_4\}$, kde

(A_1) $\forall x(\mathsf{kojot}(x) \to \exists y(\mathsf{roadrunner}(y) \land \mathsf{nahana}(x, y)))$

(A_2) $\forall x((\mathsf{roadrunner}(x) \land \mathsf{trubi}(x)) \to \mathsf{mudry}(x))$

(A_3) $\forall x\, \forall y((\mathsf{kojot}(x) \land (\mathsf{roadrunner}(y) \land \mathsf{mudry}(y))) \to \neg\mathsf{chyti}(x, y))$

(A_4) $\forall x(\mathsf{kojot}(x) \to$
$(\exists y(\mathsf{roadrunner}(y) \land (\mathsf{nahana}(x, y) \land \neg\mathsf{chyti}(x, y))) \to \mathsf{frustrovany}(x)))$

vyplývajú formuly:

(X_1) $(\forall x(\mathsf{roadrunner}(x) \to \mathsf{trubi}(x)) \to \forall x(\mathsf{kojot}(x) \to \mathsf{frustrovany}(x)))$

(X_2) $(\exists x(\mathsf{kojot}(x) \land \neg\mathsf{frustrovany}(x)) \to \neg\, \exists x(\mathsf{roadrunner}(x) \land \mathsf{trubi}(x)))$

Vyplývanie dokážte tablom. Nevyplývanie nájdením štruktúry.

Prémiová časť

Prémiová úloha 9.7. Prosíme o spoluprácu s naším diplomantom Adamom Grundom tých z vás, ktorých oslovil mailom v pondelok 27. 4.

Vytvorte zaujímavú (testovú) otázku alebo malú úlohu, ktorá sa týka tohtotýždňovej témy. K otázke pridajte niekoľko odpovedí na výber (správnych aj nesprávnych) a zadajte ich do systému na https://devcourses3.matfyz.sk/courses/aJpGT/quiz. Predtým je potrebné sa zaregistrovať so školskou emailovou adresou na https://devcourses3.matfyz.sk/register.

Môže to byť otázka, ktorá vám napadla počas prednášky, cvičení, práci na domácej úlohe, alebo odznela na konzultáciách, či variácia na malú časť tejto teoretickej úlohy. Otázka nemusí byť rozsiahla.

Za vytvorenie *originálnej* otázky získate **1 bonusový bod**.

Ďalší 1 bod získate, ak *vecne* okomentujete aspoň 2 otázky kolegov.

Vybrané otázky použijeme v skúškových písomkách.