

---

## Matematika 4 — Logika pre informatikov

### Teoretická úloha 12

---

Riešenie hodnotenej a prémieovej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok 25. mája 2020 o 12:20 cez odovzdávací formulár pre tu<sup>1</sup>.

**Odovzdávajte URL** odkaz na

- **jeden PDF dokument s právom na komentovanie** nahratý na Google Drive; dokument musí obsahovať celé riešenie vrátane rezolvenčného dôkazu;
- **export z editora rezolvenčných dôkazov**<sup>4</sup>, ak ho použijete pri riešení; čitateľný dôkaz sa musí nachádzať aj v PDF, aby sme ho mohli komentovať.

**Neodovzdávajte:** priechyky; dokumenty s riešeniami viacerých úloh.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenia všetkých úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**<sup>2</sup>.

Číslo úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky<sup>3</sup>, kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Riešenia niektorých úloh môžete skontrolovať pomocou editora rezolvenčných dôkazov<sup>4</sup>.

Ak nie je uvedené inak, v každom použitom jazyku  $\mathcal{L}$  logiky prvého rádu predpokladáme množinu individuových premenných  $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{k, l, m, \dots, x, y, z, k_1, l_1, m_1, \dots, x_1, y_1, z_1, k_2, l_2, m_2, \dots\}$ .

<sup>1</sup> <https://forms.gle/PUqqH4CFnD6Z3JnG8>

<sup>2</sup> [https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics\\_4/sk#pravidla-uloh](https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh)

<sup>3</sup> <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>

<sup>4</sup> <https://norbertju.github.io/ResolutionEditor/>

**Cvičenie 12.1.** (7.7.3) Zistite, či sú nasledujúce dvojice postupností symbolov unifikovateľné, a nájdite ich najvšeobecnejší unifikátor.

- |                                     |                                    |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| a) Arabela                          | prvý_majiteľ(x)                    |
| b) kupujúci(Kolobežka6259, y)       | kupujúci(t, prvý_majiteľ(t))       |
| c) predaj(x, prvý_majiteľ(t), t, p) | predaj(x, y, Kolobežka6259, 35eur) |
| d) predaj(u, u, w, r)               | predaj(kupujúci(y, t), y, t, p)    |
| e) predaj(x, Ingrid, t, cena(t))    | predaj(kupujúci(y, t), y, t, p)    |

**Cvičenie 12.2.** (7.7.4) SfaktORIZUJTE klauzuly:

- a)  $\neg \text{dáma}(x) \vee \text{urazil}(y, x) \vee \neg \text{dáma}(\text{Milagros})$
- b)  $\neg \text{chráni}(\text{osobný\_strážca}(x), x) \vee \neg \text{chráni}(x, y)$

**Cvičenie 12.3.** (7.7.5) V rezolvenčnom kalkule dokážte nespľniteľnosť množín klauzúl:

- a)  $T = \{(\text{šteká}(x) \vee \neg \text{pes}(x)), (\neg \text{pes}(x) \vee \text{hryzie}(x)),$   
 $(\neg \text{pes}(x) \vee \neg \text{šteká}(x) \vee \neg \text{hryzie}(x)), \text{pes}(\text{Dunčo})\}$
- b)  $T = \{(\text{dom}(x) \vee \text{strom}(y) \vee \text{pri}(x, y)),$   
 $(\text{strom}(y) \vee \neg \text{pri}(x, y)), (\neg \text{dom}(x) \vee \neg \text{strom}(y))\}$
- c)  $T = \{(c(x, y) \vee b(x)), (\neg c(x, L) \vee a(L)), (c(P, y) \vee \neg b(P)), (\neg a(y) \vee \neg c(x, y))\}$

**Cvičenie 12.4.** (7.7.9) Uvažujme nasledovné tvrdenia a ich formalizáciu v jazyku logiky prvého rádu *bez rovnosti*  $\mathcal{L}$ , kde  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Hanka}\}$ ,  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$  a  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{autíčko}^1, \text{bábika}^1, \text{červené}^1, \text{dievčenské}^1, \text{hračka}^1, \text{hračkárstvo}^1, \text{chlapčenské}^1, \text{matfyzáčka}^1, \text{P}^1, \text{šaty}^1, \text{mama}^2, \text{má}^2, \text{zakúpené\_v}^2, \text{kúpi}^3\}$ :

(A<sub>1</sub>) Autíčka sú chlapčenské hračky a bábiky sú dievčenské hračky.

$$\begin{aligned} \forall x(\text{autíčko}(x) \rightarrow \text{chlapčenské}(x) \wedge \text{hračka}(x)) \wedge \\ \forall x(\text{bábika}(x) \rightarrow \text{dievčenské}(x) \wedge \text{hračka}(x)) \end{aligned}$$

(A<sub>2</sub>) Hanka má dve autíčka.

$$\exists x \exists y(\text{P}(x) \wedge \neg \text{P}(y) \wedge \text{má}(\text{Hanka}, x) \wedge \text{autíčko}(x) \wedge \text{má}(\text{Hanka}, y) \wedge \text{autíčko}(y))$$

(A<sub>3</sub>) Každá hračka bola zakúpená v hračkárstve.

$$\forall x(\text{hračka}(x) \rightarrow \exists y(\text{zakúpené\_v}(x, y) \wedge \text{hračkárstvo}(y)))$$

(A<sub>4</sub>) Každé dievča má aspoň jednu dievčenskú hračku.

$$\forall x(\text{dievča}(x) \rightarrow \exists y(\text{má}(x, y) \wedge \text{dievčenské}(y) \wedge \text{hračka}(y)))$$

(A<sub>5</sub>) Hanka je dievča, ktoré má bábiku, ktorá má červené šaty.

$$\begin{aligned} &(\text{dievča}(\text{Hanka}) \wedge \\ &\exists x(\text{má}(\text{Hanka}, x) \wedge \text{bábika}(x) \wedge \exists y(\text{má}(x, y) \wedge \text{červené}(y) \wedge \text{šaty}(y)))) \end{aligned}$$

(A<sub>6</sub>) Každá mama kúpi svojmu dieťaťu nejakú hračku.

$$\forall x \forall y (\text{mama}(x, y) \rightarrow \exists z (\text{hračka}(z) \wedge \text{kúpi}(x, y, z)))$$

(A<sub>7</sub>) Dievčatá, ktoré majú nejakú chlapčenskú hračku, sa stanú matfyzáčkami.

$$\forall x (\text{dievča}(x) \rightarrow (\exists y (\text{hračka}(y) \wedge \text{chlapčenské}(y)) \rightarrow \text{matfyzáčka}(x)))$$

Zistite pomocou rezolvenzie, či sa Hanka stane matfyzáčkou, teda, či z teórie  $T = \{A_1, \dots, A_7\}$  vyplýva formula:

$$\text{matfyzáčka}(\text{Hanka})$$

## Hodnotená časť

**Úloha 12.5.** (7.7.11) Uvažujme nasledujúce tvrdenia:

- (V<sub>1</sub>) Každý vták spí na nejakom strome.
- (V<sub>2</sub>) Potáпки sú vtáky a sú tiež vodnými živočíchmi.
- (V<sub>3</sub>) Strom, na ktorom spí nejaký vodný vták, sa nachádza blízko jazera.
- (V<sub>4</sub>) Všetko, čo spí na niečom, čo sa nachádza blízko nejakého jazera, sa živí rybami.

Vyriešte nasledujúce úlohy:

- a) Sformalizujte tvrdenia ako teóriu  $T = \{V_1, \dots, V_4\}$  vo vhodnom jazyku logiky prvého rádu.  
Zvoľte predikátové a funkčné symboly podľa potreby tak, aby formalizácia dávala zmysel, teda aby sformalizované pojmy neboli izolované a formalizácia bola splniteľná.
- b) Upravte teóriu  $T$  na ekvisplniteľnú klauzálnu teóriu  $T'$ .
- c) Pre nasledujúcu otázku sformulujte príslušný logický problém a zodpovedzte problém aj otázku pomocou rezolvenzie pre logiku prvého rádu:  
*Je na základe tvrdení  $V_1 - V_4$  pravda, že každá potápka sa živí rybami?*

## Prémiová časť

**Prémiová úloha 12.6.** (1 bod, 4.3.1) Dokážte alebo vyvráťte:

- a) Nech  $A$  je prvorádová formula bez kvantifikátorov, rovnosti, premenných a funkčných symbolov (môže obsahovať konštanty). Výrokovú formulu  $B$  vytvoríme tak, že každú predikátovú atomickú formulu tvaru  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  v  $A$  nahradíme výrokovou premennou  $P_{a_1 a_2 \dots a_n}$ .  
 $B$  je výrokovologicky splniteľná vtt  $A$  je prvorádovo splniteľná.
- b) Ak vo výrokovologickej tautológii nahradíme všetky výrokové premenné prvorádovými formulami (tak, že za tú istú premennú vždy dosadíme tú istú formulu), dostaneme platnú prvorádovú formulu.

**Prémiová úloha 12.7.** (0,5 bodu, 4.3.4) Zadefinujte vzťah z *teórie*  $T$  vyplýva formula  $X$  ( $T \models X$ ) a pojem *nesplniteľná formula* vo výrokovej logike.

Dokážte alebo vyvráťte: Nech  $S$  je množina výrokových formúl a nech  $X$  je výroková formula. Ak  $X$  je nesplniteľná a  $S \models X$ , tak  $S$  je nesplniteľná.