
Matematika 4 — Logika pre informatikov

Teoretická úloha 10

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **11. mája 2020 o 12:20** cez odovzdávací formulár pre tu¹.

Odovzdávajte URL odkazy na

- **jeden PDF dokument s právom na komentovanie** nahrať na Google Drive; dokument musí obsahovať celé riešenie v textovej forme;
- **export** z prieskumníka štruktúr⁴, ak ho použijete pri riešení.

Export urýchli vyhodnotenie úlohy, ale **nenahrádza** zápis štruktúry v PDF dokumente úlohy (JSON sa nedá zmysluplne komentovať).

Neodovzdávajte: priečinky; dokumenty s riešeniami viacerých úloh.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenia všetkých úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**².

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky³, kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Riešenia niektorých úloh môžete skontrolovať pomocou prieskumníka štruktúr⁴.

Ak nie je uvedené inak, v každom použitom jazyku \mathcal{L} relačnej logiky prvého rádu predpokladáme množinu individuových premenných $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, w, x, y, z, u_1, v_1, w_1, x_1, y_1, z_1, u_2, v_2, w_2, x_2, y_2, z_2, \dots\}$.

¹ <https://forms.gle/ZMyBvnU2qAFEBdAG7>

² https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh

³ <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbiierka.pdf>

⁴ <https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/structure-explorer/>

Cvičenie 10.1. (7.1.1) Sformalizujte nasledovné tvrdenia v jazyku prvorádovej logiky s funkčnými symbolmi a s rovnosťou. Zamýšľanou doménou sú ľudia. V maximálnej miere využite funkčné symboly na vyjadrenie vždy existujúcich a jednoznačných vzťahov.

1. Každého matka je žena a otec je muž.
2. Každý má práve dvoch rodičov, svoju matku a svojho otca.
3. Súrodenec je (len a len) niekto, s kým máte spoločného rodiča.
4. Každý, kto má súrodenca, má aj najvyššieho súrodenca.

5. Každý rodičovský pár má svoje najobľúbenejšie dieťa, ktoré preferuje pred svojimi ostatnými deťmi.
6. Kto je jedináčik, je najobľúbenejším dieťaťom oboch svojich rodičov.

Cvičenie 10.2. (7.4.1) Pomocou tabla pre logiku prvého rádu dokažte:

$$\{x \doteq y, \text{rodič}(\text{matka}(v), x), \neg \text{rodič}(\text{matka}(w), y)\} \models w \neq v$$

Cvičenie 10.3. (7.4.2,7.4.3) Nasledujúce úvahy môžu pôsobiť prekvapujúco:

- a) Každý sa bojí Drakulu. Drakula sa bojí iba mňa. Takže som Drakula.
- b) Drakula je nadprirodzená bytosť. Nadprirodzené bytosti sa boja iba nadprirodzených bytostí. Drakula sa však bojí len a len tých, ktorí zjedli cesnak. Takže ak som zjedol cesnak, som nadprirodzená bytosť.

Sformalizujte úvahy v jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} , kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Drakula}, \text{ja}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$. Množinu $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ si vhodne zvolte. a dokažte ich správnosť prvorádovým tablom. Snažte sa o čo najkratší dôkaz s využitím korektných pravidiel ako MP, MT, ale tiež pravidiel pre ekvivalenciu a kvantifikátory.

Cvičenie 10.4. (7.4.6) Dokažte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

- a) Existuje formula *s rovnosťou*, ktorá je splnená iba v štruktúre, ktorá má:
 - i. najviac dvojprvkovú doménu;
 - ii. aspoň dvojprvkovú doménu.
- b) Existuje formula *bez rovnosti*, ktorá je splnená iba v štruktúre, ktorá má:
 - i. aspoň dvojprvkovú doménu;
 - ii. najviac dvojprvkovú doménu.

Hodnotená časť

Úloha 10.5. (7.1.2, 7.1.3) S využitím prieskumníka štruktúr nájdite štruktúru s aspoň trojprvkovou doménou, ktorá spĺňa teóriu, ktorá vznikne sformalizovaním výrokov z cvičenia 10.1. V riešení uveďte aj túto teóriu.

Úloha 10.6. (7.4.4) Sformalizujte nasledovné tvrdenia v jazyku prvorádovej logiky s funkčnými symbolmi a s rovnosťou. V maximálnej miere využite funkčné symboly na vyjadrenie jedno-jednoznačných vzťahov.

1. Fero je Jožov a Hankin najlepší kamarát, ale Ferov najlepší kamarát je Hanka.

2. Jožo nemá iných kamarátov, okrem svojho najlepšieho kamaráta.
3. Najvtipnejší je niekto, kto je vtipnejší ako všetci ostatní.
4. Hanka je dievča, a tie majú za najlepších kamarátov iba tých najvtipnejších.
5. Najvtipnejšieho študenta majú všetci študenti radi.

Tablovým kalkulom dokážte, že z tvrdení 1.–5. vyplýva:

- Ak sú všetci študenti, tak Hanka má rada všetkých Jožových kamarátov.