

---

# Matematika 4 — Logika pre informatikov

## Teoretická úloha 4

---

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **16. marca 2020 o 12:20** zaslaním **e-mailu s odkazom** na PDF dokument s vaším riešením, nahraný na službu Google Drive alebo OneDrive, na adresu **lpi-team@lists.dai.fmph.uniba.sk**. Neposielajte nám PDF priamo.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenia všetkých úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**.<sup>1</sup>

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky<sup>2</sup>, v ktorej nájdete ďalšie úlohy na precvičovanie a vzorové riešenia.

<sup>1</sup> [https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics\\_4/sk#pravidla-uloh](https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh)

<sup>2</sup> <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>

**Cvičenie 4.1.** (4.3.1) Dokážte: Nech  $\mathcal{L}_1$  je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami individuových konštánt  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$  a predikátových symbolov  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ , pričom  $z \notin \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ . Potom existuje jazyk  $\mathcal{L}_2$  výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinou individuových konštánt  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{z\}$  a množinou predikátových symbolov  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$ , taký že pre ľubovoľnú formulu  $A$  v jazyku  $\mathcal{L}_1$  existuje formula  $B$  v jazyku  $\mathcal{L}_2$  taká, že

- a)  $A$  je výrokovologicky splniteľná *vtt*  $B$  je výrokovologicky splniteľná (teda výrokové ohodnotenie  $v_1$  také, že  $v_1 \models_p A$ , existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie  $v_2$  také, že  $v_2 \models_p B$ ).
- b) Štruktúra  $\mathcal{M}_1$  taká, že  $\mathcal{M}_1 \models A$ , existuje *vtt* existuje štruktúra  $\mathcal{M}_2$  taká, že  $\mathcal{M}_2 \models B$ .

**Cvičenie 4.2.** (4.3.4) Nech  $X, Y$  a  $Z$  sú ľubovoľné formuly, nech  $T$  je ľubovoľná teória. Dokážte alebo vyvráťte:

- a) Ak  $T \models_p (X \rightarrow Y)$ , tak  $T \not\models_p X$  alebo  $T \models_p Y$ .
- b) Ak  $\{X, Y\} \models_p Z$ , tak  $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z))$  je tautológia.

**Cvičenie 4.3.** (4.1.1) O každej z nasledujúcich formúl nad jazykom  $\mathcal{L}$ , kde  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{'ľúbi'}\}$  a  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{P, L\}$ , pričom  $P$  značí Peter a  $L$  značí Lucia rozhodnite, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nespľniteľná. Pri každej formule rozhodnite o *všetkých* uvedených vlastnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

- a)  $((\neg \text{lúbi}(P, L) \rightarrow \neg \text{lúbi}(L, P)) \wedge (\text{lúbi}(P, L) \vee \text{lúbi}(L, P)))$   
b)  $\neg(\neg(\text{lúbi}(P, L) \wedge \text{lúbi}(L, P)) \leftrightarrow (\neg \text{lúbi}(P, L) \vee \neg \text{lúbi}(L, P)))$


## Hodnotená časť

**Úloha 4.1.** (4.2.1) Dokážte, že nasledujúce formuly sú výrokovologicky ekvivalentné:

$$\neg(\text{inteligentná}(\text{Eva}) \wedge (\text{rozumná}(\text{Eva}) \vee \text{milá}(\text{Eva}))) \\ ((\neg \text{inteligentná}(\text{Eva}) \vee \neg \text{rozumná}(\text{Eva})) \wedge (\neg \text{inteligentná}(\text{Eva}) \vee \neg \text{milá}(\text{Eva})))$$

**Úloha 4.2.** (4.3.2, 4.3.1) Dokážte: Nech  $\mathcal{L}_1$  je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami individuových konštant  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$  a predikátových symbolov  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ . Potom existuje jazyk  $\mathcal{L}_2$  výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinou individuových konštant  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2}$  a množinou predikátových symbolov  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$ , takou, že  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$  obsahuje iba *unárne* predikátové symboly a zároveň  $|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$ , taký že pre ľubovoľnú formulu  $A$  v jazyku  $\mathcal{L}_1$  existuje formula  $B$  v jazyku  $\mathcal{L}_2$ , pre ktorú platí:

- a) Výrokové ohodnotenie  $v_1$  také, že  $v_1 \models_p A$ , existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie  $v_2$  také, že  $v_2 \models_p B$ .  
b) Štruktúra  $\mathcal{M}_1$  taká, že  $\mathcal{M}_1 \models A$ , existuje *vtt* existuje štruktúra  $\mathcal{M}_2$  taká, že  $\mathcal{M}_2 \models B$ .

 **Pomôcka.** Riešenie cvičenia 4.1, ktoré nájdete v zbierke, tiež obsahuje transformáciu, ktorej výsledkom sú iba unárne predikátové symboly. Na rozdiel od cvičenia 4.1 je však v tejto úlohe potrebné jazyk  $\mathcal{L}_1$  preložiť do jazyka  $\mathcal{L}_2$  tak, aby sa počet predikátových symbolov nezmenil ( $|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$ ). Môžete teda napr. skúsiť takú transformáciu, že predikátové symboly „zachováte“, iba im zmeníte aritu na 1, a potrebný výsledok dosiahnete vhodnou transformáciou množiny individuových konštant.