

Kvantifikátory

8. prednáška · Matematika (4): Logika pre informatikov

Ján Klúka, Jozef Šiška

Letný semester 2019/2020

Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra aplikovanej informatiky

Obsah 8. prednášky

Kvantifikátory

Kvantifikácia

Kvantifikátory a premenné

Syntax relačnej logiky prvého rádu

Sémantika relačnej logiky prvého rádu

Aristotelovské formy

Zamlčané a zdanlivo opačné kvantifikátory

Nutné a postačujúce podmienky

Zložené kvantifikované vlastnosti

Konverzačné implikatúry

Bonus — tvorba (testových otázok)

Prosíme o spoluprácu s naším diplomantom Adamom Grundom:

Vytvorte zaujímavú (testovú) otázku alebo malú úlohu,
ktorá sa týka tohtotýždňovej/budúcotýždňovej témy.

Môže to byť otázka, ktorá vám napadne počas prednášky, cvičení, práci na domácej úlohe, alebo ju položíte na konzultáciách.

K otázke pridajte niekoľko odpovedí na výber (správnych aj nesprávnych) a zadajte ich do systému na <https://devcourses3.matfyz.sk/>.

Adam mailom osloví tento týždeň jednu polovicu z vás a budúci týždeň druhú. Dodržte toto rozdelenie.

Za vytvorenie **originálnej** otázky získate **1 bonusový bod**. **Ďalší 1 bod** získate, ak **vecne** okomentujete aspoň 2 otázky kolegov.

Tešíme sa, že sa zapojíte!

Kvantifikátor

Kvantifikátory

Kvantifikácia

Doteraz sme sa stretávali s prívlastkami, ktoré vyjadrovali vlastnosti alebo vzťahy **konkrétnych jednotlivých** objektov.

- Jurko kŕmi **veľkú Jankinu myš** Ľufka.
 $(\text{kŕmi}(\text{Jurko}, \text{Ľufko}) \wedge \text{veľký}(\text{Ľufko}) \wedge \text{patrí}(\text{Ľufko}, \text{Janka}) \wedge \text{myš}(\text{Ľufko}))$

Kvantifikované tvrdenia

V slovenských vetách sa ale používajú aj prívlastky ako **každý, nejaká, tri, tí, všetky, žiadny, nijaké** (gramaticky sú to zámená a číslovky).

- všetky veľké Jankine myši; nejaké dieťa; traja muži v člne; žiadny Bratislavčan; väčšina škrečkov; tá skriňa v kúte; ...

Nevyjadrujú vlastnosť konkrétnych objektov.

Vyjadrujú počet (kvantitu) objektov, ktoré majú nejaké vlastnosti alebo sú v nejakých vzťahoch.

Tvrdeniam, ktoré obsahujú tieto prívlastky, sa preto v logike **kvantifikované tvrdenia**.

Kvantifikácia a logické dôsledky

Kvantifikujúci prívlastok výrazne mení logické vlastnosti tvrdenia:

Všetky myši sú sivé.

Ňufko je myš.

Ňufko je sivý.

Je logický dôsledok.

Väčšina myší je sivá.

Ňufko je myš.

Ňufko je sivý.

Nie je log. dôsledkom,
ale je prijateľné.

Žiadne myši nie sú sivé.

Ňufko je myš.

Ňufko je sivý.

Nie je log. dôsledkom,
ani prijateľné.
Opak je pravdou.

Kvantifikácia sa nespráva ako funkcia na pravdivostných hodnotách — na rozdiel od logických spojok.

Vyjadruje vzťah súborov objektov
(tých, ktoré sú myšami, a tých, ktoré sú sivé).

Niektoré spojky a vzťahy implicitne vyjadrujú kvantifikáciu:

- Jurko kŕmi Ňufka, iba **keď** je noc.
Jurko kŕmi Ňufka **vždy** v noci.
V **každej** chvíli, v ktorej Jurko kŕmi Ňufka, je noc.
- V pondelok cvičí Klárka hru na flautu.
V **každý** deň, ktorý je pondelkom, cvičí Klárka hru na flautu.
- Z P **logicky vyplýva** Q .
V **každom** stave sveta, v ktorom je pravdivé P , je pravdivé aj Q .

Kvantifikátory

Kvantifikátory a premenné

Kvantifikátory logiky prvého rádu

Logika prvého rádu má iba dva symboly kvantifikátorov: \forall a \exists .

Zodpovedajú zámenám **všetko** a **niečo**.

S pomocou predikátov, výrokovologických spojok a rovnosti ale dokážu vyjadriť napr. kvantifikácie:

- všetky veľké Jankine myši; nejaké dieťa; traja muži v člne; žiadny Bratislavčan; zakaždým, keď.

Nedokážeme však nimi vyjadriť:

- väčšina škrokov; málo študentov; nekonečne veľa prvočísel.

Premenné

Na vyjadrenie toho, na ktoré argumenty predikátov sa vzťahuje kvantifikátor, sa používajú individuové premenné.

Individuová premenná

- môže byť argumentom predikátu,
podobne ako individuová konštanta;
- neoznačuje konkrétny objekt,
na rozdiel od individuovej konštanty,
ale prepája argumenty predikátov,
na ktoré sa vzťahuje ten istý kvantifikátor.

V každom prvorádovom jazyku s kvantifikátormi je **nekonečne veľa** premenných — väčšinou malé písmená z konca abecedy, podľa potreby s dolnými indexmi: u , v_4 , w , x , y_{37} , z_{123} .

Možné argumenty predikátov a rovnosti, teda premenné a konštanty, súhrnne nazývame *termy*.

Atomickými formulami logiky prvého rádu s kvantifikátormi sú potom

- predikátové atómy $\text{predikát}(\text{term}_1, \dots, \text{term}_k)$,
kde k je arita predikátu;
- rovnostné atómy $\text{term}_1 = \text{term}_2$.

Možné argumenty predikátov a rovnosti, teda premenné a konštanty, súhrnne nazývame *termy*.

Atomickými formulami logiky prvého rádu s kvantifikátormi sú potom

- predikátové atómy $\text{predikát}(term_1, \dots, term_k)$,
kde k je arita predikátu;
- rovnostné atómy $term_1 \doteq term_2$.

Všeobecný kvantifikátor \forall zodpovedá obratom všetko, každý/ktorýkoľvek/akýkoľvek/hociktorý/lubovoľný objekt, všetky objekty.

Vždy **viaže** premennú uvedenú bezprostredne za ním.

Postupnosť $\forall x$ čítame „**pre každý objekt x** “ (alebo trocha nepresne „pre každé x “).

Neobmedzená a obmedzená všeobecná kvantifikácia

Oblasť platnosti všeobecného kvantifikátora — **najmenšia ucelená** formula nasledujúca bezprostredne za viazanou premennou — vyjadruje vlastnosť, ktorú prisudzujeme všetkým objektom.

Neobmedzené, bezpodmienečné všeobecné tvrdenie „**Všetko** je doma“ vyjadruje formula $\forall x \text{ doma}(x)$ — každý objekt x spĺňa podmienku, že je doma.

Oveľa častejšie sú **obmedzené** všeobecné tvrdenia, napr. „**Všetci ľudia** sú doma,“ ktoré vyjadruje formula:

$$\forall x(\text{človek}(x) \rightarrow \text{doma}(x))$$

- Pre **každý** objekt, označme ho x , **ak** je x človek, **tak** x je doma.
- **Každý** objekt x spĺňa podmienku, že x **nie** je človek, **alebo** x je doma.
- **Každý** objekt, **ktorý** je človek, je doma.

Existenčný kvantifikátor \exists zodpovedá obratom *niečo*,
nejaký/niektorý/akýsi/aspoň jeden objekt,
je/existuje taký objekt.

Vždy **viaže** premennú uvedenú bezprostredne za ním.

Postupnosť $\exists x$ čítame „**pre nejaký objekt x** “
(alebo trochu nepresne „pre nejaké x “).

Neobmedzená a obmedzená existenčná kvantifikácia

Oblasť platnosti existenčného kvantifikátora — je **najmenšia ucelená** formula nasledujúca bezprostredne za viazanou premennou — vyjadruje vlastnosť, o ktorej tvrdíme, že ju má aspoň jeden objekt.

Neobmedzené, bezpodmienečné existenčné tvrdenie „**Niečo** je doma“ vyjadruje formula $\exists x \text{ doma}(x)$ — nejaký objekt x spĺňa podmienku, že je doma.

Oveľa častejšie sú **obmedzené** existenčné tvrdenia, napr. „**Nejaký človek** je doma,“ ktoré vyjadruje formula:

$$\exists x(\text{človek}(x) \wedge \text{doma}(x))$$

- **Nejaký** objekt, označme ho x , spĺňa podmienku, že x je človek **a súčasne** x je doma.
- **Existuje** aspoň jeden človek, **ktorý** je doma.

Neexistenciu v slovenčine zvyčajne vyjadruje *dvojitý zápor*: negatívne zámeno (nikto/nič/žiadne) a negatívne tvrdenie.

„Nikto nie je dokonalý“ môžeme sformalizovať

- s dôrazom na zámeno: $\neg \exists x \text{ dokonalý}(x)$;
- s dôrazom na negatívne tvrdenie: $\forall x \neg \text{dokonalý}(x)$.



V oboch prípadoch použijeme iba jednu negáciu!

Kvantifikátory

Syntax relačnej logiky prvého rádu

Symboly jazyka relačnej logiky prvého rádu

Definícia 6.1

Symbolmi jazyka \mathcal{L} relačnej logiky prvého rádu sú:

indivíduové premenné z nejakej nekonečnej spočítateľnej množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$;

mimologické symboly, ktorými sú

indivíduové konštanty z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$;

predikátové symboly z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$;

logické symboly, ktorými sú

logické spojky: unárna \neg , binárne $\wedge, \vee, \rightarrow$,

symbol rovnosti \doteq ,

kvantifikátory: *existenčný* \exists a *všeobecný* \forall ;

pomocné symboly $(,)$ a $,$ (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú vzájomne disjunktné.

Logické a pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\text{ar}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Označovanie symbolov rôznych druhov

Keď budeme hovoriť o **ľubovoľnom** jazyku \mathcal{L} , často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme **meta premenné**: premenné v (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť **o** (po grécky *meta*) týchto symboloch.

Dohoda 6.2

Individuové premenné budeme spravidla označovať meta premennými u, v, w, x, \dots, z s prípadnými dolnými indexmi.

Individuové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými a, b, c, d s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými P, Q, R s prípadnými dolnými indexmi.

Atomické formuly relačnej logiky prvého rádu

Definícia 6.3 (Term)

Nech \mathcal{L} je jazyk relačnej logiky prvého rádu. Individuové premenné z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ a konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ súhrnne nazývame **termy** jazyka \mathcal{L} .

Definícia 6.4 (Atomické formuly)

Nech \mathcal{L} je jazyk relačnej logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka \mathcal{L} je každá postupnosť symbolov $t_1 \doteq t_2$, kde t_1 a t_2 sú termy jazyka \mathcal{L} .

Predikátový atóm jazyka \mathcal{L} je každá postupnosť symbolov $P(t_1, \dots, t_n)$, kde P je predikátový symbol s aritou n a t_1, \dots, t_n sú termy jazyka \mathcal{L} .

Atomickými formulami (skrátene **atómami**) jazyka \mathcal{L} súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka \mathcal{L} . Množinu všetkých atómov jazyka \mathcal{L} označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Formuly jazyka relačnej logiky prvého rádu

Definícia 6.5

Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ všetkých **formúl** jazyka relačnej logiky prvého rádu \mathcal{L} je **najmenšia** množina postupností symbolov jazyka \mathcal{L} , ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je formulou z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$. Inak povedané, $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.
2. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ju **negácia** formuly A .
3. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ich postupne **konjunkcia**, **disjunkcia** a **implikácia** formúl A a B .
4. Ak x je individuová premenná a A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $\exists x A$ a $\forall x A$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ich postupne **existenčná** a **všeobecná kvantifikácia** formuly A vzhľadom na x .

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame **formulou** jazyka \mathcal{L} .

Príklad 6.6

Nech \mathcal{L} je prvorádový jazyk, v ktorom $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\}$,

$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jurko, Janka, Ľufko}\}$

$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{myš}^1, \text{škrekčok}^1, \text{biely}^1, \text{patrí}^2\}$.

Formulami v jazyku \mathcal{L} sú napríklad:

$\text{myš}(\text{Jurko}), \text{patrí}(y_2, \text{Janka}),$

$\text{myš}(x), \text{patrí}(x, y), \text{biely}(x),$

$(\text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x)),$

$\exists y \text{patrí}(x, y),$

$((\text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x)) \rightarrow \exists y \text{patrí}(x, y)),$

$\forall x((\text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x)) \rightarrow \exists y \text{patrí}(x, y))$

Dohoda 6.7

Formuly označujeme meta premennými A, B, C, X, Y, Z , s prípadnými dolnými indexmi.

$(A \leftrightarrow B)$ je skratka postupnosti symbolov $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$.

Dohoda 6.8

Pre každú dvojicu formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ skratka za formulu $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$.

Oblasť platnosti kvantifikátora

Dohoda 6.9

Nech \mathcal{L} je ľubovoľný jazyk logiky prvého rádu. Všetky symboly, termy a formuly v nasledujúcich definíciách a tvrdeniach sú v jazyku \mathcal{L} .

Definícia 6.10 (Oblasť platnosti kvantifikátora)

Nech A je postupnosť symbolov, nech B je formula, nech $Q \in \{\forall, \exists\}$, nech x je premenná.

V postupnosti $A = \dots Qx B \dots$ sa výskyt formuly $Qx B$ nazýva **oblasť platnosti kvantifikátora Qx v A** .

Príklad 6.11

Vyznačme všetky oblasti platnosti kvantifikátora $\forall x$ vo formule

$$((\forall x P(x) \wedge R(x, x)) \rightarrow (\forall x(R(x, y) \wedge \exists y P(y)) \vee \forall y P(y))).$$

Voľné a viazané výskyty premenných

Definícia 6.12 (Voľné a viazané výskyty premenných)

Nech A je postupnosť symbolov, nech x je premenná.

Výskyt premennej x v A je **viazaný** vtt

sa nachádza v niektorej oblasti platnosti kvantifikátora $\forall x$ alebo $\exists x$ v A .

Výskyt premennej x v A je **voľný** vtt

sa nenachádza v žiadnej oblasti platnosti kvantifikátora $\forall x$ ani $\exists x$ v A .

Príklad 6.13

$$\begin{aligned}& \neg \text{zapísaný}(x, y) \wedge \text{absolvuje}(x, y) \\& \neg \text{zapísaný}(x, y) \wedge \exists y \text{absolvuje}(x, y) \\& \exists y (\neg \text{zapísaný}(x, y) \wedge \text{absolvuje}(x, y)) \\& \forall x \exists y (\neg \text{zapísaný}(x, y) \wedge \text{absolvuje}(x, y)) \\& \forall x (\neg \text{zapísaný}(x, y) \wedge \exists y \text{absolvuje}(x, y))\end{aligned}$$

Definícia 6.14 (Voľné a viazané premenné)

Nech A je formula alebo term, nech x je premenná.

Premenná x je **viazaná** v A vtt

x sa vyskytuje v A a všetky výskyty x v A sú viazané.

Premenná x je **voľná** v A vtt x má v A aspoň jeden voľný výskyt.

Množinu voľných premenných formuly A označíme $\text{free}(A)$.

Príklad 6.15

$$\text{free}(\neg \text{zapísaný}(x, y) \wedge \text{absolvuje}(z, y)) = \{x, y\}$$

$$\text{free}(\neg \text{zapísaný}(x, y) \wedge \exists y \text{absolvuje}(z, y)) = \{x, y\}$$

$$\text{free}(\exists y (\neg \text{zapísaný}(x, y) \wedge \text{absolvuje}(z, y))) = \{x, z\}$$

$$\text{free}(\exists y (\neg \text{zapísaný}(x, y) \wedge \forall z \text{absolvuje}(z, y))) = \{x\}$$

$$\text{free}(\exists y \exists z (\forall x \neg \text{zapísaný}(x, y) \wedge \text{absolvuje}(z, y))) = \{\}$$

Tvrdenie 6.16

Pre každú individuovú premennú x , každý symbol konštanty a , každú aritu $n > 0$, každý predikátový symbol P s aritou n , všetky termy t_1, t_2, \dots, t_n a všetky formuly A, B platí:

$$\text{free}(x) = \{x\}$$

$$\text{free}(a) = \{\}$$

$$\text{free}(t_1 \doteq t_2) = \text{free}(t_1) \cup \text{free}(t_2)$$

$$\text{free}(P(t_1, \dots, t_n)) = \text{free}(t_1) \cup \dots \cup \text{free}(t_n)$$

$$\text{free}(\neg A) = \text{free}(A)$$

$$\begin{aligned}\text{free}(A \wedge B) &= \text{free}(A \vee B) = \text{free}(A \rightarrow B) = \\ &= \text{free}(A) \cup \text{free}(B)\end{aligned}$$

$$\text{free}(\forall x A) = \text{free}(\exists x A) = \text{free}(A) \setminus \{x\}$$

Definícia 6.17 (Uzavretá formula, teória)

Formula A jazyka \mathcal{L} je **uzavretá** vtt
žiadna premenná nie je voľná v A
(teda $\text{free}(A) = \emptyset$).

Teóriou v jazyku \mathcal{L} je každá
spočítateľná množinu uzavretých formúl jazyka \mathcal{L} .

Príklad 6.18

Ktoré z týchto formúl sú uzavreté?

$\exists x \text{patrí}(x, x),$

$\exists y \text{patrí}(x, y),$

$((\text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x)) \rightarrow \exists y \text{patrí}(x, y)),$

$\forall x((\text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x)) \rightarrow \exists y \text{patrí}(x, y))$

Kvantifikátory

Sémantika relačnej logiky prvého rádu

Definícia 6.19

Nech \mathcal{L} je jazyk relačnej logiky prvého rádu.

Štruktúrou pre jazyk \mathcal{L} nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde D je ľubovoľná **neprázdna** množina nazývaná **doména** štruktúry \mathcal{M} ; i je zobrazenie, nazývané **interpretačná funkcia** štruktúry \mathcal{M} , ktoré

- každej individuovej konštante c jazyka \mathcal{L} priraduje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka \mathcal{L} s aritou n priraduje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Dohoda 6.20

Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots$

Definícia 6.21

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk \mathcal{L} .

Ohodnotenie individuových premenných je ľubovoľná funkcia $e : \mathcal{V}_{\mathcal{L}} \rightarrow D$ (priraduje premenným prvky domény).

Nech ďalej v je individuová premenná z \mathcal{L} a v je prvok D . Zápisom $e(x/v)$ označíme ohodnotenie individuových premenných, ktoré premennej x priraduje hodnotu v a všetkým ostatným premenným rovnakú hodnotu ako im priraduje e .

Príklad ohodnotenia individuových premenných

Nech

$$\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\}$$

$$D = \{\text{Alica}, \text{Bonifác}, \text{Cyril}, \text{Eva}, \text{František}\}.$$

Ohodnotením (individuových) premenných je napríklad

$$e = \{x_1 \mapsto \text{Eva}, y_1 \mapsto \text{Bonifác}, x_2 \mapsto \text{Eva}, y_2 \mapsto \text{Bonifác}, \\ x_3 \mapsto \text{Eva}, y_3 \mapsto \text{Bonifác}, \dots\}$$

Potom

$$e(y_2/\text{Alica}) = \{x_1 \mapsto \text{Eva}, y_1 \mapsto \text{Bonifác}, x_2 \mapsto \text{Eva}, y_2 \mapsto \text{Alica}, \\ x_3 \mapsto \text{Eva}, y_3 \mapsto \text{Bonifác}, \dots\}$$

Definícia 6.22

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra, e je ohodnotenie premenných.

Hodnotou termu t v štruktúre \mathcal{M} pri ohodnotení premenných e je prvok $t^{\mathcal{M}}[e]$ z D určený nasledovne:

- $t^{\mathcal{M}}[e] = e(x)$, ak t je premenná $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$,
- $t^{\mathcal{M}}[e] = i(a)$, ak t je konštanta $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Definícia 6.23

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra, e je ohodnotenie premenných.

Relácia **štruktúra \mathcal{M} spĺňa formulu A pri ohodnotení e**

(skrátene $\mathcal{M} \models A[e]$) má nasledovnú indukčnú definíciu:

- $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[e]$ vtt $t_1^{\mathcal{M}}[e] = t_2^{\mathcal{M}}[e]$,
- $\mathcal{M} \models P(t_1, \dots, t_n)[e]$ vtt $(t_1^{\mathcal{M}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[e]) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \wedge B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ a zároveň $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \vee B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- ▶ $\mathcal{M} \models \exists x A[e]$ vtt pre **nejaký** prvok $m \in D$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,
- ▶ $\mathcal{M} \models \forall x A[e]$ vtt pre **každý** prvok $m \in D$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,

pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n , všetky termy t_1, t_2, \dots, t_n , všetky premenné x a všetky formuly A, B .

Príklad 6.24

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$i(\text{Jurko}) = 1, \quad i(\text{Janka}) = 2, \quad i(\text{Ňufko}) = 4$$

$$i(\text{myš}) = \{3, 4\}, \quad i(\text{škrekčok}) = \{5\}, \quad i(\text{biely}) = \{4, 5\},$$

$$i(\text{patrí}) = \{(3, 2), (4, 2), (5, 1)\}.$$

$$\text{Nech } e = \{x \mapsto 3, y \mapsto 5, \dots\}.$$

Zistime, či

- $\mathcal{M} \models ((\text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x)) \rightarrow \exists y \text{patrí}(x, y)) [e]$
- $\mathcal{M} \models \forall x ((\text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x)) \rightarrow \exists y \text{patrí}(x, y)) [e]$

Definícia 6.25

Nech X je **uzavretá** formula jazyka \mathcal{L} , nech \mathcal{M} je štruktúra pre \mathcal{L} .
Formula X je **pravdivá** v štruktúre \mathcal{M} (skrátene $\mathcal{M} \models X$) vtt \mathcal{M} spĺňa formulu X pri každom ohodnotení e .
Vtedy tiež hovoríme, že \mathcal{M} je **modelom** formuly X .

Definícia 6.26

Nech T je teória v jazyku \mathcal{L} , nech \mathcal{M} je štruktúra pre \mathcal{L} .
Teória T je pravdivá v štruktúre \mathcal{M} (skrátene $\mathcal{M} \models T$) vtt pre všetky formuly X z T platí $\mathcal{M} \models X$.
Vtedy tiež hovoríme, že \mathcal{M} je **modelom** teórie T .

Kvantifikátory

Aristotelovské formy

Štyri aristotelovské formy

Dávno pred kodifikáciou logiky prvého rádu sa kvantifikovanými tvrdeniami zaoberal staroveký grécky filozof Aristoteles.

Študoval najmä tvrdenia v tvaroch:

- Všetky P sú Q .
- Niektoré P sú Q .
- Žiadne P nie sú Q .
- Niektoré P nie sú Q .

ktorým dnes hovoríme obmedzená kvantifikácia.

Všetky P sú Q

Formu „Všetky P sú Q “ (napr. „Všetky myši sú sivé“) formalizujeme

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad \checkmark$$

teda „Pre každý objekt x je pravda, že ak x má vlastnosť P , tak x má vlastnosť Q .“

Študenti túto formu niekedy **nesprávne** sformalizujú ako

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \times$$

Pritom táto formalizácia neprejde jednoduchou skúškou — **stačí si ju prečítať:**

„**Každý** objekt x má **súčasne** vlastnosť P **aj** vlastnosť Q ,“
prirodzenejšie „**Všetko** je P **aj** Q “ (napr. „Všetko je myš a je to sivé“).

Forma „Všetky P sú Q “ sa v prirodzených vetách niekedy rozpoznáva ťažšie, napríklad keď je P alebo Q vzťah:

- Všetky myši kŕmi Jurko.

Všetky myši sú také, že ich kŕmi Jurko.

$$\forall x(\text{myš}(x) \rightarrow \text{kŕmi}(\text{Jurko}, x))$$

- Jurko kŕmi iba myši.

Všetko, čo Jurko kŕmi, sú myši.

$$\forall x(\text{kŕmi}(\text{Jurko}, x) \rightarrow \text{myš}(x)).$$

Niektoré P sú Q

Formu „Niektoré P sú Q “ (napr. „Niektoré myši sú biele“)
formalizujeme

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \checkmark$$

teda „Existuje aspoň taký jeden objekt x , že
 x má vlastnosť P a x má vlastnosť Q .“

Študenti túto formu niekedy **nesprávne** sformalizujú ako

$$\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad \times$$

Ani táto formalizácia neprejde čítacou skúškou:

„Existuje objekt x , ktorý nemá vlastnosť P alebo má vlastnosť Q .“
prirodzenejšie „Niečo nie je P alebo je Q “ (napr. „Niečo nie je myš
alebo je to biele“ — je pravdivé vo svete, kde sú všetky myši sivé a je
tam jeden človek).

Niektoré P sú Q – varianty

Forma „Niektoré P sú Q “ sa v prirodzených vetách niekedy rozpoznáva ťažšie, napríklad keď je P alebo Q vzťah.

- Jurko kŕmi nejaké myši.

Jurko kŕmi (nejakú) myš.

Niečo z toho, čo Jurko kŕmi, sú myši.

$\exists x(\text{kŕmi}(\text{Jurko}, x) \wedge \text{myš}(x))$

Niektorých študentov prekvapuje, že pri tejto forme nezáleží na poradí P a Q .

- Njaké myši kŕmi Jurko.

Niektoré myši sú také, že ich kŕmi Jurko.

$\exists x(\text{kŕmi}(\text{Jurko}, x) \wedge \text{myš}(x))$

Je ale **vernejšie** poradie pri formalizácii zachovať:

$\exists x(\text{myš}(x) \wedge \text{kŕmi}(\text{Jurko}, x))$

Žiadne P nie sú Q

Formu „Žiadne P nie sú Q “ (napr. „Žiadne myši nie sú červené“) formalizujeme (s dôrazom na „nie sú Q “)

$$\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \quad \checkmark$$

teda „Pre každý objekt x je pravda, že
ak x má vlastnosť P , tak x nemá vlastnosť Q ,“
„Každé P nie je Q ,“
alebo rovnako správne (s dôrazom na „žiadne“)

$$\neg \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \checkmark$$

teda „Nie je pravda, že existuje taký objekt x , že
 x má vlastnosť P a x má vlastnosť Q .“

Ani pri tejto forme nezáleží na poradí P a Q ,
ale je **vernejšie** ho pri formalizácii zachovať.

Niektoré P nie sú Q

Formu „Niektoré P nie sú Q “ (napr. „Niektoré myši nie sú sivé“) formalizujeme

$$\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \quad \checkmark$$

teda „Pre nejaký objekt x je pravda, že x má vlastnosť P a x nemá vlastnosť Q .“

Kvantifikátory

Zamlčané a zdanlivo opačné kvantifikátory

Zamľčaný všeobecný kvantifikátor

Niekedy kvantifikátor nie je explicitne vyjadrený príslušným zámenom.

Použitie všeobecného podstatného mena (zvyčajne, ale nie nutne v množnom čísle) v úlohe **podmetu** zvyčajne chápeme ako **všeobecnú** kvantifikáciu:

- Myši sú sivé.

$$\forall x(\text{myš}(x) \rightarrow \text{sivý}(x))$$

- Myš je hlodavec.

$$\forall x(\text{myš}(x) \rightarrow \text{hlodavec}(x))$$

- Kto je zodpovedný, ten je doma.

$$\forall x(\text{zodpovedný}(x) \rightarrow \text{doma}(x))$$

Použitie všeobecného podstatného mena v úlohe **predmetu pozitívneho** prísudku zvyčajne chápeme ako **existenčnú** kvantifikáciu:

- Jurko kŕmi myš.

$$\exists x(\text{kŕmi}(\text{Jurko}, x) \wedge \text{myš}(x))$$

- Bonifác si kúpil syr.

$$\exists x(\text{kúpil}(\text{Bonifác}, x) \wedge \text{syr}(x))$$

Použitie všeobecného podstatného mena v úlohe **predmetu negatívneho** prísudku zvyčajne chápeme ako **existenčnú** kvantifikáciu:

- Bonifác si nekúpil syr.

$$\neg \exists x (\text{kúpil}(\text{Bonifác}, x) \wedge \text{syr}(x))$$

- Jurko nekŕmi myši.

$$\forall x (\text{myš}(x) \rightarrow \neg \text{kŕmi}(\text{Jurko}, x))$$

$$\forall x (\text{kŕmi}(\text{Jurko}, x) \rightarrow \neg \text{myš}(x))$$

Zdanlivá existencia

V podmienkach sa občas vyskytujú neurčité zámená (niekto/niečo/niektorý/...), na ktoré sa ale odkazujeme v podmienenej vete:

- Ak je niekto doma, tak (on) je zodpovedný.
- Ak Jurko niečo kŕmi, má to rád.

Také tvrdenie nezodpovedá implikácii s existenčným kvantifikátorom:

✗ $(\exists x \text{ doma}(x) \rightarrow \text{zodpovedný}(x))$

✗ $\exists x(\text{doma}(x) \rightarrow \text{zodpovedný}(x))$

ale zodpovedá **všeobecne kvantifikovanej implikácii**:

✓ $\forall x(\text{doma}(x) \rightarrow \text{zodpovedný}(x))$

✓ $\forall x(\text{kŕmi}(\text{Jurko}, x) \rightarrow \text{má_rád}(\text{Jurko}, x))$

Kvantifikátory

Nutné a postačujúce podmienky

Nutné a postačujúce podmienky

Tvrdenia so (zamlčanou) všeobecnou kvantifikáciou majú často formu podradovacích súvetí:

1. Zodpovedný je každý, kto je doma.
2. Zodpovedný je iba ten, kto je doma.

pričom

- hlavná veta („Zodpovedný je ...“) vyjadruje nejakú **vlastnosť**,
- vedľajšia veta („kto je doma“) vyjadruje **podmienku**, ktorá súvisí s touto vlastnosťou.

Aký je rozdiel medzi týmito podmienkami?

Prvé tvrdenie „Zodpovedný je **každý, kto** je doma.“:

- Hovorí, že na to, aby niekto bol zodpovedný, **stačí**, aby platila podmienka, že je doma.
- Byť doma je teda **postačujúcou** podmienkou zodpovednosti.
- Ekvivalentne:
 - „Pre každého platí, že je zodpovedný, ak je doma.“
 - „Pre každého platí, že ak je doma, tak je zodpovedný.“
- Formalizácia je teda $\forall x(\text{doma}(x) \rightarrow \text{zodpovedný}(x))$

Druhé tvrdenie „Zodpovedný je **iba ten, kto** je doma.“:

- Hovorí, že na to, aby niekto bol zodpovedný, je **nevyhnutné** aby bol doma (keby nebol doma, nebol by zodpovedný).
- Byť doma je teda **nutnou** podmienkou zodpovednosti.
- Ekvivalentne:
 - „Pre každého platí, že je zodpovedný, **iba** ak je doma.“
 - „Pre každého platí, že ak **nie** je doma, tak **nie** je zodpovedný.“
 - „Pre každého platí, že ak je zodpovedný, tak je doma.“
- Formalizácia je teda $\forall x(\text{zodpovedný}(x) \rightarrow \text{doma}(x))$

Kvantifikátory

Zložené kvantifikované vlastnosti

Zložené kvantifikované vlastnosti

Často potrebujeme kvantifikovať objekty, ktoré majú zložité vlastnosti:

1. nejaká Jankina biela myš,
2. každý biely potkan, ktorého kŕmi Jurko.

Prvý druh kvantifikácií je zrejme existenčný a už vieme, že sa spravidla spája s konjunkciou.

Druhý druh kvantifikácií je zrejme všeobecný a vieme, že sa spravidla spája s implikáciou.

Použitie spojok ale závisí od pozície kvantifikácie vo vete.

(Nejaká) Jankina biela myš je sýta.

- Veta má formu „Niektoré P sú Q ,“
teda prekladáme ju ako $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.
Pričom ale P je zložená vlastnosť.
- Vlastnosť P opisuje objekt,
ktorý má zrejme byť súčasne Jankin, biely a má to byť myš.
Preto P vytvoríme z jednotlivých predikátov konjunkciou.

$$\exists x((\text{patrí}(x, \text{Janka}) \wedge \text{biely}(x) \wedge \text{myš}(x)) \wedge \text{sýty}(x))$$

Zložené všeobecne kvantifikované vlastnosti ako podmet

(Všetky) Jankine biele myši sú sýte.

- Veta má formu „Všetky P sú Q ,“
teda prekladáme ju ako $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$,
pričom P je zložená vlastnosť.
- Vlastnosť P opäť opisuje objekty,
ktoré majú byť súčasne Jankine, biele a myši.
Preto aj teraz P vytvoríme konjunkciou.

$$\forall x((\text{patrí}(x, \text{Janka}) \wedge \text{biely}(x) \wedge \text{myš}(x)) \rightarrow \text{sýty}(x))$$

Jurko má (nejakú) sýtu bielu myš.

- Aby sme zistili, ktorú aristotelovskú formu má veta, musíme ju preformulovať:

(Nejaká) sýta biela myš je Jurkova.

- Veta má formu „Niektoré P sú Q ,“
teda prekladáme ju ako $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$,
pričom P je zložená vlastnosť.

$$\exists x((\text{sýty}(x) \wedge \text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x)) \wedge \text{patrí}(x, \text{Jurko}))$$

Jurko má všetky sýte biele myši.

- Aj túto vetu musíme preformulovať:
Všetky sýte biele myši sú Jurkove.
- Veta má formu „Všetky P sú Q ,“
teda prekladáme ju ako $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.
pričom P je zložená vlastnosť.

$$\forall x((\text{sýty}(x) \wedge \text{biely}(x) \wedge \text{myš}(x)) \rightarrow \text{patrí}(x, \text{Jurko}))$$

Viacnásobné všeobecne kvantifikované prívlastky

Jurko má všetky myši a škrečky.

- Preformulujeme: Všetky myši a škrečky sú Jurkove.
- Veta má formu „Všetky P sú Q ,“
teda prekladáme ju ako $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.
- P je zložená vlastnosť. **Ale ako** je zložená?
- ❌ Keď „myši a škrečky“ sformalizujeme $(\text{myš}(x) \wedge \text{škrečok}(x))$,
 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ bude znamenať „Pre každé x ,
ak x je myš a zároveň x je škrečok, tak x patrí Jurkovi.“
- Vieme ale, že nič nie je naraz myš aj škrečok,
takže podmienke (v našom svete) nevyhovuje žiaden objekt,
takže Jurkovi nemusí nič patriť.
- ✅ Intuitívny význam zachováme, keď „myši a škrečky“
sformalizujeme $(\text{myš}(x) \vee \text{škrečok}(x))$.

$$\forall x((\text{myš}(x) \vee \text{škrečok}(x)) \rightarrow \text{patrí}(x, \text{Jurko}))$$

Kvantifikátory

Konverzačné implikatury

Triviálne pravdivé všeobecne kvantifikované implikácie

Nie všetkým sa zdá intuitívne, že formula

$$\forall x(\text{myš}(x) \rightarrow \text{biela}(x))$$

je **pravdivá** vo svetoch, kde **nie sú žiadne myši**.

Dobrý spôsob, ako to pochopiť je, že uvedomiť si, že vo svete, kde nie sú myši, **neexistuje kontrapríklad** pre túto formulu — myš, ktorá by nebola biela.

Hovoríme, že v takom svete je táto formula **triviálne pravdivá**.

Podobne je vo svetoch bez myší triviálne pravdivá ešte prekvapujúcejšia formula:

$$\forall x(\text{myš}(x) \rightarrow \text{človek}(x))$$

Triviálne pravdivé všeobecne kvantifikované implikácie

Tvrdenie „Každý prvák, ktorý si zapísal logiku, z nej dostal A.“
v sebe nesie implikatúru (domnelý dôsledok), že takí prváci existujú.

Ak je takéto tvrdenie nutne triviálne pravdivé, lebo objekty
z predpokladu neexistujú (napr. prváci si logiku nemôžu zapisovať),
intuitívne ho považujeme zavádzajúce.

Nič to ale nemení na fakte, že je pravdivé.

Existencia prváka, ktorý si zapísal logiku je skutočne iba implikatúra.

Dodatok „Ale žiadny prvák si ju nikdy nezapísal,“ nie je s tvrdením
v spore, ale objasňuje, že je triviálne pravdivé.

Ďalšia implikatúra sa spája s tvrdeniami: „Niektoré P sú Q .“

Niekomu sa môže „Niektoré P sú Q .“ zdať sporné s „Všetky P sú Q .“

— Prečo by sme hovorili „niektoré P “, keď to platí pre všetky P ?

Keď ale na otázku „Dostal niekto Ačko?“ odpovieme

„Áno, niektorí študenti Ačko dostali. Vlastne ho dostali všetci,“
druhá veta prvú dopĺňa, ale neprotirečí jej.

Ak chceme jasne vyjadriť domnelý význam, povieme

„Niektorí študenti Ačko dostali, **ale nie všetci**,“ čo formalizujeme
formulou v tvare $(\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)))$.

Literatúra
