Matematika 4 — Logika pre informatikov
Teoretická úloha 12

Riešenie hodnotenej a prémiovej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **25. mája 2020 o 12:20** cez odovzdávací formulár pre tu12[1].

Odovzdávajte URL odkaz na

- **jeden PDF dokument s právom na komentovanie** nahratý na Google Drive; dokument musí obsahovať celé riešenie vrátane rezolvenčného dôkazu;
- **export z editora rezolvenčných dôkazov**[4], ak ho použijete pri riešení; čitateľný dôkaz sa musí nachádzať aj v PDF, aby sme ho mohli komentovať.

Neodovzdávajte: priečinky; dokumenty s riešeniami viacerých úloh.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenia všetkých úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**[2].

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky[3], kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Riešenia niektorých úloh môžete skontrolovať pomocou editora rezolvenčných dôkazov[4].

Ak nie je uvedené inak, v každom použitom jazyku $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu predpokladáme množinu indivíduových premenných $\mathcal{V}_\mathcal{L} = \{k, l, m, \ldots, x, y, z, k_1, l_1\ m_1, \ldots, x_1, y_1, z_1, k_2, l_1\ m_2, \ldots\}$.

[1] https://forms.gle/PUqqH4CFnD6Z3JnG8
[2] https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh
[3] https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf
[4] https://norbertju.github.io/ResolutionEditor/

Cvičenie 12.1. (7.7.3) Zistite, či sú nasledujúce dvojice postupností symbolov unifikovateľné, a nájdite ich najvšeobecnejší unifikátor.

a)	Arabela	prvý_majiteľ(x)
b)	kupujúci(Kolobežka6259, y)	kupujúci(t, prvý_majiteľ(t))
c)	predaj(x, prvý_majiteľ(t), t, p)	predaj(x, y, Kolobežka6259, 35eur)
d)	predaj(u, u, w, r)	predaj(kupujúci(y, t), y, t, p)
e)	predaj(x, Ingrid, t, cena(t))	predaj(kupujúci(y, t), y, t, p)

Cvičenie 12.2. (7.7.4) Sfaktorizujte klauzuly:

a) $\neg\text{dáma}(x) \lor \text{urazil}(y, x) \lor \neg\text{dáma}(\text{Milagros})$

b) $\neg\text{chráni}(\text{osobný\_strážca}(x), x) \lor \neg\text{chráni}(x, y)$

Cvičenie 12.3. (7.7.5) V rezolvenčnom kalkule dokážte nesplniteľnosť množín klauzúl:

a) $T = \{(\text{šteká}(x) \lor \neg\text{pes}(x)),\ (\neg\text{pes}(x) \lor \text{hryzie}(x)),$
$(\neg\text{pes}(x) \lor \neg\text{šteká}(x) \lor \neg\text{hryzie}(x)),\ \text{pes}(\text{Dunčo})\}$

b) $T = \{(\text{dom}(x) \lor \text{strom}(y) \lor \text{pri}(x, y)),$
$(\text{strom}(y) \lor \neg\text{pri}(x, y)),\ (\neg\text{dom}(x) \lor \neg\text{strom}(y))\}$

c) $T = \{(\text{c}(x, y) \lor \text{b}(x)),\ (\neg\text{c}(x, \text{L}) \lor \text{a}(\text{L})),\ (\text{c}(\text{P}, y) \lor \neg\text{b}(\text{P})),\ (\neg\text{a}(y) \lor \neg\text{c}(x, y))\}$

Cvičenie 12.4. (7.7.9) Uvažujme nasledovné tvrdenia a ich formalizáciu v jazyku logiky prvého rádu *bez rovnosti* $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Hanka}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{autíčko}^1$, bábika^1, červené^1, dievčenské^1, hračka^1, hračkárstvo^1, chlapčenské^1, matfyzáčka^1, P^1, šaty^1, mama^2, má^2, zakúpené_v^2, $\text{kúpi}^3\}$:

(A_1) Autíčka sú chlapčenské hračky a bábiky sú dievčenské hračky.

$$\forall x(\text{autíčko}(x) \to \text{chlapčenské}(x) \land \text{hračka}(x)) \land$$
$$\forall x(\text{bábika}(x) \to \text{dievčenské}(x) \land \text{hračka}(x))$$

(A_2) Hanka má dve autíčka.

$$\exists x\, \exists y(\text{P}(x) \land \neg\text{P}(y) \land \text{má}(\text{Hanka}, x) \land \text{autíčko}(x) \land \text{má}(\text{Hanka}, y) \land \text{autíčko}(y))$$

(A_3) Každá hračka bola zakúpená v hračkárstve.

$$\forall x(\text{hračka}(x) \to \exists y\, (\text{zakúpené\_v}(x, y) \land \text{hračkárstvo}(y)))$$

(A_4) Každé dievča má aspoň jednu dievčenskú hračku.

$$\forall x(\text{dievča}(x) \to \exists y(\text{má}(x, y) \land \text{dievčenské}(y) \land \text{hračka}(y)))$$

(A_5) Hanka je dievča, ktoré má bábiku, ktorá má červené šaty.

$$(\text{dievča}(\text{Hanka}) \land$$
$$\exists x(\text{má}(\text{Hanka}, x) \land \text{bábika}(x) \land \exists y(\text{má}(x, y) \land \text{červené}(y) \land \text{šaty}(y))))$$

(A_6) Každá mama kúpi svojmu dieťaťu nejakú hračku.

$$\forall x\,\forall y(\mathrm{mama}(x,y) \rightarrow \exists z(\mathrm{hračka}(z) \land \mathrm{kúpi}(x,y,z)))$$

(A_7) Dievčatá, ktoré majú nejakú chlapčenskú hračku, sa stanú matfyzáčkami.

$$\forall x(\mathrm{dievča}(x) \rightarrow (\exists y(\mathrm{hračka}(y) \land \mathrm{chlapčenské}(y)) \rightarrow \mathrm{matfyzáčka}(x)))$$

Zistite pomocou rezolvencie, či sa Hanka stane matfyzáčkou, teda, či z teórie $T = \{A_1, \dots, A_7\}$ vyplýva formula:

$$\mathrm{matfyzáčka}(\mathrm{Hanka})$$

Hodnotená časť

Úloha 12.5. (7.7.11) Uvažujme nasledujúce tvrdenia:

(V_1) Každý vták spí na nejakom strome.

(V_2) Potápky sú vtáky a sú tiež vodnými živočíchmi.

(V_3) Strom, na ktorom spí nejaký vodný vták, sa nachádza blízko jazera.

(V_4) Všetko, čo spí na niečom, čo sa nachádza blízko nejakého jazera, sa živí rybami.

Vyriešte nasledujúce úlohy:

a) Sformalizujte tvrdenia ako teóriu $T = \{V_1, \dots, V_4\}$ vo vhodnom jazyku logiky prvého rádu.

   Zvoľte predikátové a funkčné symboly podľa potreby tak, aby formalizácia dávala zmysel, teda aby sformalizované pojmy neboli izolované a formalizácia bola splniteľná.

b) Upravte teóriu T na ekvisplniteľnú klauzálnu teóriu T'.

c) Pre nasledujúcu otázku sformulujte príslušný logický problém a zodpovedzte problém aj otázku pomocou rezolvencie pre logiku prvého rádu:

   Je na základe tvrdení V_1–V_4 pravda, že každá potápka sa živí rybami?

Prémiová časť

Prémiová úloha 12.6. (1 bod, 4.3.1) Dokážte alebo vyvráťte:

a) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk logiky prvého rádu bez funkčných symbolov ($\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$). Jazyk $\mathcal{L}_1$ vytvoríme z $\mathcal{L}$ pridaním novej indivíduovej konštanty c a zmenou všetkých predikátových symbolov na funkčné, teda: $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \{c\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1} = \emptyset$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}_1} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{V}_{\mathcal{L}_1} = \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$.

   Nech A je formula v jazyku $\mathcal{L}$. Formulu B v jazyku $\mathcal{L}_1$ vytvoríme tak, že každý predikátový atóm $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ v A nahradíme rovnostným atómom $P(a_1, a_2, \dots, a_n) \doteq c$. Potom platí:

   A je pravdivá v nejakej štruktúre pre $\mathcal{L}$ s aspoň dvojprvkovou doménou, vtt B je pravdivá v nejakej štruktúre pre $\mathcal{L}_1$ s aspoň dvojprvkovou doménou.

b) Ak vo výrokovologickej tautológii nahradíme všetky atómy prvorádovými formulami (tak, že za ten istý atóm vždy dosadíme tú istú formulu), dostaneme platnú prvorádovú formulu.

Prémiová úloha 12.7. (0,5 bodu, 4.3.4) Zadefinujte vzťah *z teórie T vyplýva formula X* ($T \vDash_{\mathrm{p}} X$) a pojem *nesplniteľná formula* vo výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Dokážte alebo vyvráťte: Nech S je množina výrokovologických formúl a nech X je výrokovologická formula. Ak X je nesplniteľná a $S \vDash_{\mathrm{p}} X$, tak S je nesplniteľná.