

Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Ján KLÚKA, Júlia PUKANCOVÁ,
Martin HOMOLA, Jozef ŠIŠKA

Letný semester 2019/2020

Posledná aktualizácia: 5. mája 2020

Obsah

1	Atomické formuly	4
1.1	Sémantika atomických formúl	4
1.2	Formalizácia do jazyka atomických formúl	8
2	Výrokovologické spojky	14
2.1	Syntax výrokovologických formúl	14
2.2	Sémantika výrokovologických formúl	16
2.3	Formalizácia do výrokovologických formúl	20
3	Výrokovologické vyplývanie	22
3.1	Ohodnotenia	22
3.2	Vyplývanie, nezávislosť, nespľniteľnosť	24
4	Vlastnosti a vzťahy výrokovologických formúl	28
4.1	Tautológie, splniteľné, falzifikovateľné a nespľniteľné formuly	28
4.2	Ekvivalencia	29
4.3	Tvrdenia o vyplývaní, splniteľnosti, atď.	30
5	Dôkazy a výrokovologické tablá	37
5.1	Vyplývanie a tautológie v tabľách	37
5.2	Splniteľnosť, falzifikovateľnosť a nespľniteľnosť v tabľách	43
5.3	Korektné pravidlá	53
5.4	Meta tvrdenia o tabľách	58
6	Kvantifikátory	62
6.1	Syntax jednoduchá formalizácia	62
6.2	Sémantika	63
6.3	Formalizácia s viacerými kvantifikátormi	66
6.4	Tablá pre kvantifikátory	72
7	Logika prvého rádu	77
7.1	Funkčné symboly – formalizácia a sémantika	77

7.2	Substitúcie, voľné a viazané premenné	78
7.3	Vzťah kvantifikátorov a funkčných symbolov	79
7.4	Rovnosť	79

1 Atomické formuly

1.1 Sémantika atomických formúl

1.1.1 Príklad. Uvažujme jazyk \mathcal{L} logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Anna, Boris, mama, oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{dievča}^1, \text{chlapec}^1, \text{sestra}^2, \text{uprednostňuje}^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\text{dievča}(x)$	x je žena
$\text{chlapec}(x)$	x je chlapec
$\text{sestra}(x, y)$	x je sestra y
$\text{uprednostňuje}(x, y, z)$	x uprednostňuje y pred z

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) $\text{dievča}(\text{Anna})$	(B_1) $\text{dievča}(\text{mama})$
(A_2) $\text{chlapec}(\text{Boris})$	(B_2) $\text{chlapec}(\text{oco})$
(A_3) $\text{sestra}(\text{Anna, Boris})$	(B_3) $\text{uprednostňuje}(\text{mama, Boris, Anna})$
(A_4) $\text{uprednostňuje}(\text{mama, Anna, Boris})$	(B_4) $\text{uprednostňuje}(\text{oco, Boris, Anna})$
(A_5) $\text{uprednostňuje}(\text{Boris, Boris, Anna})$	

Riešenie. Každú atomickú formulu zo zadania preložíme do vety v prirodzenom jazyku.

(A_1) Anna je dievča.	(B_1) Mama je dievča.
(A_2) Boris je chlapec.	(B_2) Oco je chlapec.
(A_3) Anna je sestra Borisa.	(B_3) Mama uprednostňuje Borisa pred Annou.
(A_4) Mama uprednostňuje Annu pred Borisom.	(B_4) Oco uprednostňuje Borisa pred Annou.
(A_5) Boris uprednostňuje samého seba pred Annou.	

‡

1.1.2 Príklad. Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku \mathcal{L} z úlohy 1.1.1?

Riešenie. Počet atomických formúl v jazyku \mathcal{L} závisí od počtu konštánt v jazyku \mathcal{L} (teda od kardinality množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$) a od jednotlivých arít jednotlivých predikátov z množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

V jazyku \mathcal{L} máme $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = 4$.

Pomocou predikátového symbolu, ktorého arita je 1 teda môžeme vytvoriť v jazyku \mathcal{L} 4 atomické formuly. Keďže unárne predikátové symboly máme v $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ dva (dievča a chlapec), dokopy vytvoríme 8 atomických formúl.

Pre binárny predikátový symbol (sestra) vieme vytvoriť 4^2 atomických formúl, teda 16. K tejto možnosti treba prirátavať aj rovnostné atomické formuly, ktoré vytvoríme pomocou symbolu rovnosti \doteq . Tento symbol je tiež binárny, a teda formúl bude opäť 16.

Analogicky pre ternárny predikátový symbol (uprednostňuje) vytvoríme $4^3 = 64$ atomických formúl.

Celkovo teda v jazyku \mathcal{L} môžeme zostrojiť $8 + 16 + 16 + 64 = 104$ atomických formúl. \dashv



Pomôcka. Vo všeobecnosti platí, že pre ľubovoľný predikátový symbol $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou k a pre $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = n$ môžeme v jazyku \mathcal{L} vytvoriť n^k atomických formúl.

1.1.3 Príklad. Uvažujme jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_5, B_1, \dots, B_4$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$i(\text{Anna}) = 1, \quad i(\text{Boris}) = 2, \quad i(\text{mama}) = 3, \quad i(\text{oco}) = 4,$$

$$i(\text{dievča}) = \{1, 5\},$$

$$i(\text{chlapec}) = \{2, 4, 5\},$$

$$i(\text{sestra}) = \{(3, 4), (1, 2)\},$$

$$i(\text{uprednostňuje}) = \{(3, 1, 2), (3, 2, 1), (5, 4, 1), (5, 3, 5)\}.$$

Riešenie.

(A_1) dievča(Anna) je pravdivé v \mathcal{M} , skrátene $\mathcal{M} \models \text{dievča}(\text{Anna})$, pretože $i(\text{Anna}) = 1 \in \{1, 5\} = i(\text{dievča})$.

(A_2) $\mathcal{M} \models \text{chlapec}(\text{Boris})$, pretože $i(\text{Boris}) = 2 \in i(\text{chlapec})$.

(A_3) $\mathcal{M} \models \text{sestra}(\text{Anna}, \text{Boris})$, pretože $(i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) = (1, 2) \in i(\text{sestra})$.

(A_4) $\mathcal{M} \models \text{uprednostňuje}(\text{mama}, \text{Anna}, \text{Boris})$, pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) \in i(\text{uprednostňuje})$.

(A_5) $\text{uprednostňuje}(\text{Boris}, \text{Boris}, \text{Anna})$ nie je pravdivé v \mathcal{M} , skrátene $\mathcal{M} \not\models \text{uprednostňuje}(\text{Boris}, \text{Boris}, \text{Anna})$, pretože $(i(\text{Boris}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{uprednostňuje})$.

(B_1) $\mathcal{M} \models \text{chlapec}(\text{oco})$, pretože $i(\text{oco}) \in i(\text{chlapec})$.

(B_2) $\mathcal{M} \models \text{uprednostňuje}(\text{mama}, \text{Boris}, \text{Anna})$, pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \in i(\text{uprednostňuje})$.

(B_3) $\mathcal{M} \not\models \text{uprednostňuje}(\text{oco}, \text{Boris}, \text{Anna})$,
pretože $(i(\text{oco}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{uprednostňuje})$. □

1.1.4 Príklad. Uvažujme opäť jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Zostrojte štruktúry \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 a \mathcal{M}_3 pre jazyk \mathcal{L} tak, aby každá z nich *súčasne* bola modelom všetkých formúl A_1, \dots, A_5 , ale nebola modelom žiadnej z formúl B_1, \dots, B_4 a aby *zároveň*:

- a) doména štruktúry \mathcal{M}_1 mala aspoň 6 prvkov;
- b) doména štruktúry \mathcal{M}_2 mala najviac 3 prvky;
- c) doména štruktúry \mathcal{M}_3 mala najviac 1 prvok.

Riešenie.

- a) Štruktúra \mathcal{M}_1 s aspoň 5 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= (\{a, b, c, d, m, o\}, i_1) \\ i_1(\text{Anna}) &= a, \quad i_1(\text{Boris}) = b, \quad i_1(\text{mama}) = m, \quad i_1(\text{oco}) = o, \\ i_1(\text{dievča}) &= \{a\}, \\ i_1(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\ i_1(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, d)\}, \\ i_1(\text{uprednostňuje}) &= \{(m, a, b), (o, a, b), (b, b, a)\}.\end{aligned}$$

- b) Štruktúra \mathcal{M}_2 s najviac 3 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 &= (\{a, b, c\}, i_2) \\ i_2(\text{Anna}) &= a, \quad i_2(\text{Boris}) = b, \quad i_2(\text{mama}) = c, \quad i_2(\text{oco}) = c, \\ i_2(\text{dievča}) &= \{a\}, \\ i_2(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\ i_2(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, c)\}, \\ i_2(\text{uprednostňuje}) &= \{(c, a, b), (b, b, a)\}.\end{aligned}$$

- c) Nie je možné zostrojiť \mathcal{M}_3 tak, aby mala najviac 1 prvok a súčasne bola modelom všetkých formúl A_1, \dots, A_5 , ale nebola modelom žiadnej z formúl B_1, \dots, B_4 .

Doména štruktúry nemôže byť prázdna, preto \mathcal{M}_3 by mala mať práve jeden prvok, teda $\mathcal{M}_3 = (\{a\}, i_3)$ pre nejaký prvok a .

Problém nastáva už pri A_1 a B_1 . Keďže v doméne \mathcal{M}_3 je jediný prvok, musia ho pomenúvať všetky konštanty, teda $i_3(\text{Anna}) = a$, ale aj $i_3(\text{mama}) = a$. Aby bola A_1 pravdivá v \mathcal{M}_3 , potom musí byť $a \in i_3(\text{dievča})$, teda $i_3(\text{dievča})$ musí byť $\{a\}$. Zároveň má byť B_1 nepravdivá, teda $a \notin i_3(\text{dievča})$, čo nie je možné. □

1.1.5 Uvažujme jazyk \mathcal{L} logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Alex, Beáta, Cyril, Dana, Edo, Gabika, oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{žena}^1, \text{rodič}^2, \text{dieťa}^3, \text{starší}^2\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\text{žena}(x)$	x je žena
$\text{rodič}(x, y)$	x je rodičom y
$\text{dieťa}(u, x, y)$	u je dieťaťom matky x a otca y
$\text{starší}(x, y)$	x je starší ako y


Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) žena(Beáta)	(B_1) žena(Alex)
(A_2) žena(Dana)	(B_2) dieťa(Beáta, Gabika, oco)
(A_3) rodič(Dana, Alex)	(B_3) rodič(Edo, Edo)
(A_4) rodič(Dana, Beáta)	(B_4) starší(Beáta, Gabika)
(A_5) dieťa(Cyril, Gabika, Edo)	(B_5) starší(Gabika, Cyril)
(A_6) dieťa(Alex, Dana, Cyril)	(B_6) Cyril \doteq oco

1.1.6 Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku \mathcal{L} z úlohy 1.1.5?

1.1.7 Uvažujme jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_6, B_1, \dots, B_6$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned}
 D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
 i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Beáta}) = 2, \quad i(\text{Cyril}) = 3, \quad i(\text{Dana}) = 4, \\
 i(\text{Edo}) &= 9, \quad i(\text{Gabika}) = 7, \quad i(\text{oco}) = 3, \\
 i(\text{žena}) &= \{1, 2, 3, 8\}, \\
 i(\text{rodič}) &= \{(4, 1), (9, 9), (2, 3), (3, 4), (8, 7)\}, \\
 i(\text{dieťa}) &= \{(3, 7, 9), (2, 7, 3), (8, 9, 1)\}, \\
 i(\text{starší}) &= \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (7, 3), (8, 7)\}
 \end{aligned}$$

 Lepšiu predstavu o štruktúre často získate, keď si ju graficky znázorníte napríklad takto:

- Každý objekt z domény znázorníte ako uzol.

- Interpretáciu symbolu konštanty znázorníte označením uzla týmto symbolom.
- Množinu interpretujúcu unárny predikát znázorníte ako uzavretú krivku (napr. elipsu) označenú symbolom predikátu a obsahujúcu uzly, ktoré do tejto množiny patria.
- Dvojicu patriacu do interpretácie binárneho predikátu znázorníte ako orientovanú hranu medzi uzlami označenú symbolom predikátu.
- n -ticu patriacu do interpretácie n -árneho predikátu pre $n \geq 3$ znázorníte ako n -uholník, ktorého vrcholy budú spojené hranami s príslušnými uzlami. Vhodne označte poradie prvkov v n -tici.

Pre každý predikát s aritou $n \geq 2$ je lepšie nakresliť si osobitný graf.

1.1.8 Uvažujme opäť jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ a \mathcal{M}_3 pre jazyk \mathcal{L} tak, aby každá z nich *súčasne* bola modelom všetkých formúl A_1, \dots, A_6 , ale nebola modelom žiadnej z formúl B_1, \dots, B_6 a aby *zároveň*:

- doména štruktúry \mathcal{M}_1 mala aspoň 9 prvkov;
- doména štruktúry \mathcal{M}_2 mala najviac 5 prvkov;
- doména štruktúry \mathcal{M}_3 mala najviac 2 prvky.

💡 Všimnite si, že hoci každý symbol konštanty musí byť interpretovaný ako niektorý objekt domény (teda pomenúvať ho), nie všetky objekty musia byť pomenované a viacero symbolov konštant môže pomenúvať ten istý objekt. Doména nemôže byť prázdna.

1.2 Formalizácia do jazyka atomických formúl

1.2.1 Príklad. Sfomalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

- Jozef je profesor a Mária je profesorka.
- Jozef je žemľovku. Žemľovka je múčnik.
- Jozef má žemľovku rád, Mária ju naopak nemá rada vôbec.
- Filoména je upratovačka.
- Upratovačky aj profesori sú zamestnanci.
- Filoména má menší plat ako Mária, ale väčší ako Jozef.

(A_7) Jozef učí predmet dejiny antického Ríma v posluchárni P42.

(A_8) Tento predmet si zapísali 3 študenti.

(A_9) Chodí naň aj Filoména, ktorá je v skutočnosti jedným zo študentov Jozefovho predmetu.

Riešenie. Postupne sformalizujeme atomické výroky a budeme pritom dbať na to aby sme volili vhodný spoločný jazyk, a zbytočne ho nerozširovali. Tvrdenie (A_1) sa v skutočnosti skladá z dvoch atomických výrokov:

$A_{1,1}$ profesor(Jozef)

$A_{1,1}$ profesor(Mária)

Všimnime si, že v prípade Márie sme nevytvorili nový predikátový symbol profesorka¹ ale rovnako ako v prípade Jozefa sme použili symbol profesor¹. Hoc v slovenčine na to máme dve samostatné slová, ich význam pre školskú doménu je rovnaký – je to symbol pre skupinu všetkých elementov domény, ktoré predstavujú profesorov. Ak by sme na napr. pýtali na všetkých profesorov, iste by me zahrnuli aj Máriu.

💡 Rozoberme si ešte dve alternatívne riešenia, ktoré ale nie sú správne. Prvým je formula je(Jozef, profesor). Čo by v tomto prípade znamenal konštantný symbol profesor? Zmysel slova profesor v danej vete nie je konkrétny profesor, ale skupina všetkých profesorov. Preto je správne voliť predikátový symbol. Z podobných dôvodov je rovnako formula Jozef $\hat{=}$ profesor nesprávna. Keby sme profesorov zapisovali týmto spôsobom, v skutočnosti by boli všetci profesori stotožnení do jedného objektu domény, čo v tomto prípade celkom určite nechceme.

Sformalizujme teraz formulu (A_2), prvú časť zapíšeme dvoma atomickými formulami:

$A_{2,1}$ je(Jozef, porcia278)

$A_{2,2}$ žemľovka(porcia278)

Keďže Jozef je nejakú konkrétnu porciu jedla, zvolíme si pre ňu nový konštantný symbol. Zvolili sme porcia278 (môže ísť o 278. porciu vydanú v ten deň v školskej jedálni). Druhou formulou sme následne povedali, že táto porcia patrí medzi (všetky) žemľovky, čo vyjadruje predikát žemľovka¹. Výborne sa nám tu hodil predikát je², ktorý sme zvažovali a napokon za vrhli pri tvrdení (A_1). Zamýšľaný význam je ale tentoraz iný.

Všimnime si druhú časť tvrdenia (A_2), teda že žemľovka je múčnik. Ide o všeobecné tvrdenie, ktoré nevieme atomickými formulami v jeho všeobecnom význame vyjadriť – náš jazyk je na to zatiaľ príliš obmedzený. Môžeme ale aspoň o všetkých konkrétnych žemľovkách, povedať, že sú zároveň múčniky. Keďže v celej úlohe (aj nižšie) máme len jednu konkrétnu žemľovku, bude to iba jedna atomická formula:

$A_{2,3}$ múčnik(porcia278)

Na obmedzenia jazyka atomických formúl narazíme aj v nasledujúcom tvrdení, ktoré sformalizujeme nasledovne:

$A_{3,1}$ má_rád_žemľovku(Jozef)

$A_{3,2}$ nemá_rád_žemľovku(Mária)

Opäť vidíme, že vo formálnom jazyku nerobíme rozdiel medzi mužským a ženským rodom. Tiež si všimnime, že tu nejde o vzťah medzi Jozefom a nejakou konkrétnou porciou žemľovky ako v prípade ($A_{2,1}$), ale ide tu vlastnosť mať rád žemľovku vo všeobecnosti. Toto vieme najlepšie vyjadriť unárnym predikátovým symbolom $má_rád_žemľovku^1$.

Venujme teraz pozornosť Márii, ktorá nemá rada žemľovku. Žiadalo by sa, aby sa vlastnosti mať rád a nemať rád žemľovku navzájom vylučovali. Toto ale s atomickými formulami vyjadriť nevieme (potrebovali by sme k tomu logickú spojku – negáciu). Použijeme teda zatiaľ samostatný a *nezávislý* predikátový symbol $ne má_rád_žemľovku^1$.

Ďalšie dve tvrdenia teraz poľahky sformalizujeme v súlade s tým, čo už sme videli vyššie:

A_4 upratovačka(Filoména)

$A_{5,1}$ zamestnanec(Jozef)

$A_{5,2}$ zamestnanec(Mária)

$A_{5,3}$ zamestnanec(Filoména)

Tvrdenie (A_5) je opäť všeobecné tvrdenie, preto v jazyku atomických formúl aspoň vymenujeme všetkých konkrétnych zamestnancov.

💡 Všimnime si, že tentoraz sme zvolili ženský rod pre predikátový symbol $upratovačka^1$. Nevadí to, pokiaľ ho konzistentne použijeme aj v prípade mužov-upratovačov. Dôležité je len to aby sme pre tú istú vec konzistentne stále používali ten istý predikátový symbol.

Tvrdenie (A_6) odpovedá 2 atomickým formulám:

$A_{6,1}$ má_väčší_plat_ako(Mária, Filoména)

$A_{6,2}$ má_väčší_plat_ako(Filoména, Jozef)

💡 Všimnime si, že sme zaviedli len jeden predikátový symbol $má_väčší_plat_ako^2$, ale úmyselne sme vyhli zavedeniu analogického symbolu $má_menší_plat_ako^2$. Ide tu totiž o dva vzťahy, ktoré sú navzájom inverzné. Takéto dva predikátové symboly by však boli od seba nezávislé, teda ak by platilo $má_väčší_plat_ako(Mária, Filoména)$ nijako by z toho nevyplývalo, že platí aj $má_menší_plat_ako(Filoména, Mária)$. Toto ale zrejme nie je zamýšľané. Jazyk atomických formúl nemá dostatočnú silu na to, aby sme mohli dva navzájom inverzné predikáty nejakým spôsobom vyjadriť. Musíme si preto vystačiť s jedným predikátom a používať ho vždy správnym smerom.

Tvrdenie (A_7) by nám už teraz nemalo robiť žiadne problémy. Musíme len správne rozpoznať všetky konkrétne objekty, o ktorých tvrdenie hovorí. Vyjde nám pri tom, že učí³ bude ternárny predikátový symbol. U dvoch nových konštantných symbolov, ktoré pre tieto objekty zavedieme, z tvrdenia tiež vyčítame do akej „skupiny“ patria, čo vyjadríme samostatnými atomickými formulami:

$A_{7,1}$ učí(Jozef, DAR, P42)

$A_{7,2}$ predmet(DAR)

$A_{7,3}$ poslucháreň(P42)

Z ďalšieho tvrdenia vieme, že Dejiny antického Ríma majú zapísané traja študenti. Nepoznáme ich mená, napriek tomu si môžeme zvoliť vhodné nové konštantné symboly $\check{s}_1, \dots, \check{s}_3$:

$A_{8,1}$ študent(\check{s}_1)

$A_{8,2}$ študent(\check{s}_2)

$A_{8,3}$ študent(\check{s}_3)

$A_{8,4}$ má_zapísaný(\check{s}_1 , DAR)

$A_{8,5}$ má_zapísaný(\check{s}_2 , DAR)

$A_{8,6}$ má_zapísaný(\check{s}_3 , DAR)

No a nakoniec ešte potrebujeme doplniť, že na tento predmet chodí aj Filoména. Opäť si uvedomme, že obe tieto tvrdenia zrejme referujú na ten istý vzťah medzi študentom a predmetom, preto nepridáme nový predikát, napr. chodiť_na². Okrem toho z tvrdenia (A_8) vieme, že predmet má troch študentov, preto ak chceme vylúčiť, že by Filoména mohla byť už štvrtým študentom, použijeme rovnosť:

$A_{9,1}$ má_zapísaný(Filoména, DAR)

$A_{9,2}$ $\check{s}_1 \doteq$ Filoména

Všimnime si, že vďaka sémantike rovnosti bude teraz Filoména a \check{s}_1 ten istý objekt. Preto je formula ($A_{9,1}$) vďaka ($A_{9,2}$) zbytočná, a môžeme ju vyhodiť.

💡 Zároveň je však potrebné si uvedomiť, že hoci sme zaviedli tri rôzne symboly $\check{s}_1, \dots, \check{s}_3$, sémantika nám nezaručuje, že nebudú referovať na ten istý objekt. Toto tiež náš jazyk zatiaľ neumožňuje (potrebovali by sme nerovnosť, čiže vlastne opäť negáciu).

Uvedieme ešte množiny konštantných a predikátových symbolov, ktoré sme použili: $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{DAR, Filoména, Jozef, Mária, porcia278, P42, } \check{s}_1, \check{s}_2, \check{s}_3\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{múčník}^1, \text{žemľovka}^1, \text{je}^2, \text{má_rád_žemľovku}^1, \text{nemá_rád_žemľovku}^1, \text{poslucháreň}^1, \text{predmet}^1, \text{profesor}^1, \text{upratovačka}^1, \text{zamestnanec}^1, \text{má_väčší_plat_ako}^2, \text{má_zapísaný}^2, \text{učí}^3\}$. A vysvetlíme ich význam:

Symbol	Význam
DAR	predmet Dejiny antického Ríma
Filoména, Jozef, Mária	konkrétne osoby z tvrdení v zadaní
porcia278	porcia jedla, ktorú Jozef je
P42	poslucháreň P42
$\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_3$	traja študenti zapísaní na Dejiny antického Ríma
$\text{múčnik}(x)$	x je múčnik
$\text{žemľovka}(x)$	x je žemľovka
$\text{je}(x, y)$	x je y (v zmysle <i>požíva</i>)
$\text{má_rád_žemľovku}(x)$	x má rád žemľovku
$\text{nemá_rád_žemľovku}(x)$	x (zamýšľaná) opačná vlastnosť: x nemá rád žemľovku
poslucháreň	x je poslucháreň
$\text{predmet}(x)$	x je predmet (v zmysle <i>kurz</i>)
$\text{profesor}(x)$	x je profesor(ka)
$\text{študent}(x)$	x je študent(ka)
upratovačka	x je upratovačka (alebo upratovač)
zamestnanec	x je zamestnanec
$\text{má_väčší_plat_ako}(x, y)$	x má väčší plat ako y
$\text{má_zapísaný}(x, y)$	x je zapísaný na predmet y
$\text{učí}(x, y, z)$	x učí predmet y v miestnosti z

⚠ Ako je vidieť z riešenia, symboly jazyka pridávame priebežne, podľa potreby. Vo vypracovaných zadaniach však býva zvykom uviesť ich na začiatku spolu s vysvetlením ich významu. □

1.2.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

- (A_1) Peter je muž.
- (A_2) Peter je študent.
- (A_3) Lucia je žena.
- (A_4) Je to študentka.
- (A_5) Lucia je staršia ako Peter.
- (A_6) Matematika je povinný predmet.
- (A_7) Matematiku učí Eugen.
- (A_8) Peter má rád Matematiku.

- (A₉) Peter a Lucia sú od neho mladší.
- (A₁₀) Peter dostal z Matematiky od Eugena známku A.
- (A₁₁) Eugen má rád Luciu.
- (A₁₂) Aj keď má Lucia z Matematiky (od neho) známku „dostatočný“.
- (A₁₃) Znáмка „dostatočný“ je len iný názov pre E-čko, a podobne „výborný“ značí to isté ako A-čko.
- (A₁₄) Lucia má rada Petra.
- (A₁₅) Lucia nemá rada Matematiku.
- (A₁₆) Eugen sa má rád.
- (A₁₇) Všetci študenti majú radi Telocvik.

1.2.3 Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov. Snažte sa o to aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší, nevytvárajte dva symboly s tým istým významom. Vytvorte štruktúru tak, aby výroky skupiny *A* boli všetky pravdivé a výroky skupiny *B* všetky nepravdivé.

- (A₁) Janka je dievča a Jurko je chlapec.
- (A₂) Chlapci a dievčatá sú deti.
- (A₃) Ňufko je Jankine zvieratko.
- (A₄) Je to myš.
- (A₅) Ňufko je veľký. Je väčší než Jurkov škrečok Chrumko.
- (A₆) Jurko si Chrumka kúpil sám.
- (A₇) Jurko v noci chodí kŕmiť potkana Smrad'ocha.
- (A₈) Smrad'och však v skutočnosti je Ňufko, ktorý v tme vyzerá ako potkan.
- (A₉) Všetky deti majú rady zvieratká, ktorá vlastnia, a tiež tie, ktoré kŕmia.
- (B₁) Janka sa Smrad'ocha bojí.
- (B₂) Jurko má rád potkany, nebojí sa ich.
- (B₃) Ňufko je menší ako Chrumko.
- (B₄) Janka má rada Jurka.
- (B₅) Ňufko a Chrumko sú deti.
- (B₆) Ňufka a Chrumka deťom kúpila ich mama.

2 Výrokovologické spojky

2.1 Syntax výrokovologických formúl

2.1.1 Príklad. Rozhodnite, či nasledovné postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. V prípade kladnej odpovede určte množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Svoje odpovede stručne zdôvodnite.

- | | |
|---|---|
| a) (futbalista(Adam)) | c) $\neg\neg(\text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}) \rightarrow \text{šťastný}(\text{Adam}))$ |
| b) (futbalista(Adam) \wedge vlastní(Adam, BT001AA) \wedge BMW(BT001AA)) | d) $(\text{šťastný}(\text{Adam}) \leftrightarrow \text{šťastný}(\neg\text{Barbora}))$ |

Riešenie. a) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A \ b \ B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek ale nachádza atomická formula.

b) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam) \wedge vlastní(Adam, BT001AA) \wedge BMW(BT001AA)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A \ b \ B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek nachádzajú tri atomické formuly a medzi nimi dve binárne spojky \wedge .

c) Postupnosť symbolov $\neg\neg(\text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}) \rightarrow \text{šťastný}(\text{Adam}))$ je formulou napríklad nad množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{lúbi}, \text{šťastný}\}$ a množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Adam}, \text{Barbora}\}$ (množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ môžu obsahovať aj ľubovoľné ďalšie prvky). Postupnosť symbolov sa začína symbolom negácie \neg , za ňou sa musí nachádzať formula A . Keďže v tomto prípade $A = \neg(\text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}) \rightarrow \text{šťastný}(\text{Adam}))$, opäť ide o formulu v tvar $\neg B$, kde $B = (\text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}) \rightarrow \text{šťastný}(\text{Adam}))$. Formula B je ohraničená zátvorkami, musí byť teda v tvare $(C \ b \ D)$. V prípade tejto formuly teda bude $C = \text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})$ a $D = \text{šťastný}(\text{Adam})$ a binárna spojka b zodpovedá implikácii \rightarrow .

d) Postupnosť symbolov $(\text{šťastný}(\text{Adam}) \leftrightarrow \text{šťastný}(\neg\text{Barbora}))$ nie je formulou. Postupnosť je ohraničená zátvorkami a v ich vnútri sa naozaj nachádza výraz v tvare $A \ b \ B$. B však nie je formulou, pretože argumentom potenciálneho predikátového symbolu šťastný musí byť konštanta, ale $\neg\text{Barbora}$ nie je správnou konstantou, lebo symboly konštánt a predikátové symboly nemôžu obsahovať žiadnu z logických spojok. \dashv

2.1.2 Rozhodnite, či nasledovné postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Kladnú odpoveď dokážte nájdením množín $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a vytvárajúcej postupnosti pre formulu. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

- a) $(\text{žena}(\text{Alex}) \wedge \text{muž}(\text{Alex}))$
- b) $\neg(\text{má_rād}(\text{Alex}, \text{Alex}))$
- c) $(\text{starší}(\text{Edo}, \text{Alex}) \rightarrow (\neg \text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo})))$
- d) $(\text{Alex} \vee \neg \text{oco})$
- e) $(\neg(\text{muž}(\text{Alex}) \wedge \text{žena}(\text{Alex})) \rightarrow (\neg \text{muž}(\text{Alex}) \vee \neg \text{žena}(\text{Alex})))$
- f) $(\neg \neg \text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \leftrightarrow (\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \neg \wedge \text{muž}(\text{Edo})))$

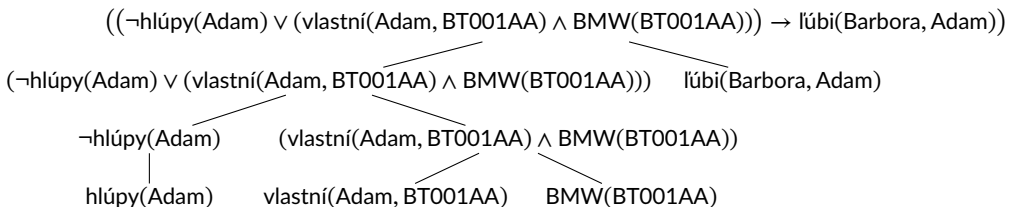
2.1.3 Príklad. Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$((\neg \text{hlúpy}(\text{Adam}) \vee (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \wedge \text{BMW}(\text{BT001AA}))) \rightarrow \text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}))$$

Riešenie. Vytvárajúcou postupnosťou pre zadanú formulu je napríklad nasledujúca postupnosť:

BMW(BT001AA),
 vlastní(Adam, BT001AA),
 (vlastní(Adam, BT001AA) \wedge BMW(BT001AA)),
 hlúpy(Adam),
 \neg hlúpy(Adam),
 (\neg hlúpy(Adam) \vee (vlastní(Adam, BT001AA) \wedge BMW(BT001AA))),
 lúbi(Barbora, Adam),
 ((\neg hlúpy(Adam) \vee (vlastní(Adam, BT001AA) \wedge BMW(BT001AA)))
 \rightarrow lúbi(Barbora, Adam)).

Nasledujúci strom predstavuje vytvárajúci strom pre zadanú formulu.



Stupeň zadanej formuly vypočítame ako:

$$\begin{aligned}
 & \deg(((\neg \text{hlúpy}(\text{Adam}) \vee (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \wedge \text{BMW}(\text{BT001AA}))) \\
 & \quad \rightarrow \text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}))) \\
 &= \deg(((\neg \text{hlúpy}(\text{Adam}) \vee (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \wedge \text{BMW}(\text{BT001AA})))) \\
 & \quad + \deg(\text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}))) \\
 & \quad + 1 \\
 &= \deg(\neg \text{hlúpy}(\text{Adam})) \\
 & \quad + \deg((\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \wedge \text{BMW}(\text{BT001AA}))) \\
 & \quad + 1 \\
 & \quad + 1 \\
 &= \deg(\text{hlúpy}(\text{Adam})) + 1 \\
 & \quad + \deg(\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA})) + \deg(\text{BMW}(\text{BT001AA})) + 1 \\
 & \quad + 1 + 1 \\
 &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4
 \end{aligned}$$

□

2.1.4 Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$\begin{aligned}
 & ((\text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Hugo}) \wedge \text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Tereza})) \rightarrow \\
 & \quad ((\neg \text{žena}(\text{Hugo}) \wedge \text{muž}(\text{Hugo})) \rightarrow \text{brat}(\text{Hugo}, \text{Tereza})))
 \end{aligned}$$

2.2 Sémantika výrokovologických formúl

2.2.1 Príklad. V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned}
 D &= \{\text{barča}, \text{janči}, \text{karči}\} \\
 i(\text{Karol}) &= \text{karči} \\
 i(\text{profesor}) &= \{\text{karči}, \text{janči}\} \\
 i(\text{hlúpy}) &= \{\text{janči}\} \\
 i(\text{sčítaný}) &= \{\text{barča}, \text{karči}\}
 \end{aligned}$$

vyhodnoťte nasledujúcu formulu postupom *zhora nadol* a postupom *zdola nahor*.

$$(\text{profesor}(\text{Karol}) \rightarrow (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol})))$$

Riešenie. 1. spôsob — zhora nadol: Podľa definície vzťahu pravdivosti (\models) a štruktúry \mathcal{M} platí:

$\mathcal{M} \models (\text{profesor}(\text{Karol}) \rightarrow (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol})))$

vtt (podľa def. \models) $\mathcal{M} \models \text{profesor}(\text{Karol})$ alebo $\mathcal{M} \models (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol}))$

vtt (podľa def. \models) $i(\text{Karol}) \notin i(\text{profesor})$

alebo $\mathcal{M} \models \neg \text{hlúpy}(\text{Karol})$ a súčasne $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$

vtt (pretože $i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor})$) $\mathcal{M} \models \neg \text{hlúpy}(\text{Karol})$ a súčasne $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$

vtt (podľa def. \models) $\mathcal{M} \models \text{hlúpy}(\text{Karol})$ a súčasne $i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný})$

vtt (pretože $i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný})$) $\mathcal{M} \models \text{hlúpy}(\text{Karol})$

vtt (podľa def. \models) $i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy})$.

Pretože v \mathcal{M} skutočne máme $i(\text{Karol}) = \text{karči} \notin \{\text{janči}\} = i(\text{hlúpy})$, konštatujeme, že daná formula je pravdivá v štruktúre \mathcal{M} , teda skutočne $\mathcal{M} \models (\text{profesor}(\text{Karol}) \rightarrow (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol})))$.

2. spôsob — zdola nahor: Vyhodnotíme pravdivosť formuly podľa definície pravdivosti pre všetky prvky jej vytvárajúcej postupnosti:

$\text{profesor}(\text{Karol}), \quad \text{sčítaný}(\text{Karol}), \quad \text{hlúpy}(\text{Karol}), \quad \neg \text{hlúpy}(\text{Karol}),$

$(\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol})), \quad (\text{profesor}(\text{Karol}) \rightarrow (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol})))$

Dostávame:

1. $i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor})$, teda $\mathcal{M} \models \text{profesor}(\text{Karol})$
2. $i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný})$, teda $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$
3. $i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy})$, teda $\mathcal{M} \models \neg \text{hlúpy}(\text{Karol})$
4. $\mathcal{M} \models \neg \text{hlúpy}(\text{Karol})$, teda $\mathcal{M} \models \neg \text{hlúpy}(\text{Karol})$
5. Keďže $\mathcal{M} \models \neg \text{hlúpy}(\text{Karol})$ a $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$,
tak $\mathcal{M} \models (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol}))$
6. Keďže $\mathcal{M} \models (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol}))$,
tak $\mathcal{M} \models (\text{profesor}(\text{Karol}) \rightarrow (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol})))$ □

2.2.2 V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$i(\text{Alex}) = 1, \quad i(\text{Bruno}) = 2, \quad i(\text{Hugo}) = 5, \quad i(\text{Tereza}) = 6,$$

$$i(\text{žena}) = \{1, 3, 4, 6\},$$

$$i(\text{muž}) = \{2, 4\},$$

$$\begin{aligned}
i(\text{má_réd}) &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5), (5, 6)\}, \\
i(\text{brat}) &= \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 6)\}, \\
i(\text{rodič}) &= \{(1, 1), (2, 5), (2, 6), (1, 5), (3, 4), (4, 2), (1, 6), (5, 6), (6, 5)\}, \\
i(\text{starší}) &= \{(2, 1), (5, 6), (6, 5)\},
\end{aligned}$$

zistíte postupom *zhora nadol* (viď príklad 2.2.1), či je pravdivá formula A_1 , a postupom *zdola nahor*, či sú pravdivé formuly A_2 a A_3 .

$$\begin{aligned}
(A_1) \quad &(\text{starší}(\text{Bruno}, \text{Alex}) \rightarrow \neg \text{starší}(\text{Alex}, \text{Bruno})) \\
(A_2) \quad &(\neg \text{má_réd}(\text{Alex}, \text{Bruno}) \leftrightarrow \neg \text{má_réd}(\text{Bruno}, \text{Alex})) \\
(A_3) \quad &((\text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Hugo}) \wedge \text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Tereza})) \rightarrow \\
&((\neg \text{žena}(\text{Hugo}) \wedge \text{muž}(\text{Hugo})) \rightarrow \text{brat}(\text{Hugo}, \text{Tereza})))
\end{aligned}$$

2.2.3 Vytvorte takú štruktúru, v ktorej budú všetky nasledujúce formuly pravdivé:

$$\begin{aligned}
(A_1) \quad &(\text{profesor}(\text{Alena}) \wedge \text{učiteľ}(\text{Alena})) \\
(A_2) \quad &(\text{profesor}(\text{Karol}) \leftrightarrow \text{učiteľ}(\text{Karol})) \\
(A_3) \quad &(\neg \text{profesor}(\text{Karol}) \rightarrow (\neg \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Alena}) \vee \neg \text{vychádza}(\text{Karol}, \text{Alena}))) \\
(A_4) \quad &\text{Karol} \neq \text{Alena}
\end{aligned}$$

Riešenie. Hľadáme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ tak, aby $\mathcal{M} \models A_1, \dots, \mathcal{M} \models A_4$.

🔗 Pri hľadaní štruktúry nám pomôže, keď podľa definície pravdivosti postupom *zhora nadol* rozoberieme, kedy je v \mathcal{M} pravdivá najkomplikovanejšia formula A_3 . Zistíme, že $\mathcal{M} \models A_3$ vtt $\mathcal{M} \models \text{profesor}(\text{Karol})$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Alena})$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{vychádza}(\text{Karol}, \text{Alena})$.

Vyberieme si poslednú možnosť, lebo predikát *vychádza* sa v inej formule nenachádza. Môžeme ho teda pokojne interpretovať podľa potrieb pravdivosti A_3 . Vytvoríme doménu, interpretácie konštánt a interpretáciu predikátu *vychádza* tak, aby $(\text{Karol}, \text{Alena}) \notin i(\text{vychádza})$.

Následne štruktúru doplníme tak, aby boli aj ostatné formuly pravdivé.

Nech

$$\begin{aligned}
D &= \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\} \\
i(\text{Alena}) &= \text{učiteľka218} \\
i(\text{Karol}) &= \text{školník} \\
i(\text{profesor}) &= \{\text{učiteľka218}\} \\
i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\} \\
i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{(\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\} \\ i(\text{vychádza}) = & \{(\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}), (\text{upratovačka2}, \text{upratovačka1})\} \end{aligned}$$

V tejto štruktúre sú pravdivé všetky formuly A_1 – A_4 . Zdôvodnenie môžeme spraviť analogicky ako v úlohe 2.1.4. □

2.2.4 Vytvorte štruktúru, v ktorej budú súčasne pravdivé všetky nasledujúce formuly:

(A_1) titul(Sofina_voľba)

(A_2) autor(Styron, Sofina_voľba)

(A_3) (titul(Kto_chytá_v_žite) \wedge autor(Salinger, Kto_chytá_v_žite))

(A_4) (\neg (číta(Adam, k325) \wedge obdivuje(Dana, Adam)) \rightarrow
 \neg (kniha(k325, Sofina_voľba) \vee kniha(k325, Kto_chytá_v_žite)))

(A_5) (kniha(k325, Kto_chytá_v_žite) \leftrightarrow \neg kniha(k325, Sofina_voľba))



Pomôcka. Aby ste zistili, ako majú byť v štruktúre interpretované predikáty, analyzujte význam formúl podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol, ako sme ukázali na prednáške.

2.2.5 Sformulujte základné definície syntaxe (symboly jazyka, atomická formula, formula, podformula) a sémantiky (pravdivosť formuly v štruktúre) pre výrokovú časť logiky prvého rádu s binárnymi spojkami \rightarrow (implikácia) a \nleftrightarrow („a nie“), pričom neformálny význam ($A \nleftrightarrow B$) je: A je pravdivá a B je nepravdivá. Formuly nebudú obsahovať iné spojky okrem týchto dvoch.



Účelom tejto úlohy je, aby ste si prečítali a upravili definície z prednášky a pokúsili sa osvojiť si spôsob vyjadrovania, ktorý sa v nich používa. Môže vám pripadať ťažkopádny, je však presný. Ak vám nejaká formulácia pripadá zbytočne komplikovaná, môžete sa ju pokúsiť zjednodušiť, no snažte sa, aby ste nezmenili jej význam.

Schopnosť presne sa vyjadriť je potrebná pri programovaní (počítaču musíte všetko vysvetliť do detailov), ale napríklad aj pri písaní špecifikácií softvéru, či požiadaviek na vašu bakalársku prácu.

2.2.6 Sformalizujte nasledovné skutočnosti do teórie T tak, aby T bola splniteľná. Formalizujte tak, aby každý konkrétny objekt, ktorý sa spomína bol označený individuovou konštantou; a aby všetky vlastnosti a vzťahy boli vyjadrené samostatným predikátovým symbolom:

1. Peter si obliekol nohavice a buď tričko alebo košeľu, nie však oboje. Pred odchodom si ešte zobral aj klobúk.
2. Vieme, že tričko nosí len k džínsovým nohaviciam. Tiež vieme, že džínsy si určite neobliekol, ak má klobúk.
3. Do práce Peter tiež chodí iba v džínсах.
4. Ak má Peter rande s Marikou, určite si vzal červenú alebo zelenú košeľu.
5. S Katkou má rande, len ak si zobral si zelenú.
6. Ak nemá rande (ani s jednou), obliekol si tričko.

Ďalej je vašou úlohou:


- a) Splniteľnosť T dokážte nájdením štruktúry \mathcal{M}_1 takej, že $\mathcal{M}_1 \models T$.
- b) Je za daných okolností *možné*, že Peter pôjde do práce? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou \mathcal{M}_2 . Ak nie, dokážte, že taká štruktúra \mathcal{M}_2 neexistuje.

2.3 Formalizácia do výrokovologických formúl

2.3.1 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

- (A_1) Lucia a jej kamarát sú deti.
- (A_2) Luciin kamarát má obľúbené hračky autíčko a koníka.
- (A_3) Obe jeho obľúbené hračky sú čierne, ale páčia sa aj Lucii, hoci jej obľúbená farba je červená.
- (A_4) Luciina obľúbená hračka je tiež autíčko, napriek tomu, že je dievča.
- (A_5) Jej autíčko je ale červené.
- (A_6) Lucia sa vždy hrá so svojím autíčkom a buď ešte s bábikou Elzou, ktorá má červené šaty, alebo s kamarátovým čiernym koníkom.
- (A_7) Lucia je veľmi kamarátska, ale Peter je asi taký kamarátsky ako je skromný.
- (A_8) Lucia sa preto môže hrať buď so svojím autíčkom alebo s Petrovým, ale s oboma naraz sa hrať nemôže.
- (A_9) V druhom prípade mu totiž musí to svoje požičať.
- (A_{10}) Peter je meno spomínaného Luciinho kamaráta.
- (A_{11}) Ak je slnečný deň, Peter sa hrá s loptou.


- (A_{12}) Psa venčí, ak je pekne.
 (A_{13}) S Luciou sa hrá, jedine ak nie je pekne.
 (A_{14}) Pod nie je pekne myslíme, že nie je slnečný deň.

 **Pomôcka.** Vo výrokoach sa zjavne hovorí o konkrétnych objektoch (napríklad autíčko a kóník Luciinho kamaráta), ktoré ale nemajú mená. Pri formalizácii ich označte vhodnými konštantami. Ďalšou zaujímavosťou je počasie. Čoho by mohlo byť vlastnosťou?

2.3.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

- (A_1) Do baru vošli Freddy a George.
 (A_2) Barmanka naliala drink Freddymu.
 (A_3) Barmankou je buď Mary alebo Jane. Službu má vždy len jedna z nich.
 (A_4) Harry nie je v bare, len ak nemá službu Mary, a naopak.
 (A_5) Freddy, George a Harry sú kamaráti. Barmanky sa však spolu nekararátia.
 (A_6) Freddymu jeho drink chutí, ak je to whisky, ale nie, ak je to koňak. Vtedy by však určite chutil Georgeovi.
 (A_7) Freddymu jeho drink nechutí.
 (A_8) Ak je barmankou Mary, tak naliala Freddymu whisky alebo koňak.
 (A_9) Jane nalieva Freddymu vždy iba whisky.
 (A_{10}) Iné drinky Mary ani Jane nenalievajú, pokiaľ nie je v bare prítomný Harry.

 **Pomôcka.** Všeobecné tvrdenia A_9 – A_{10} aplikujte na Freddyho drink. Napíšte teda také formuly, aby tvrdenia A_9 – A_{10} platili pre Freddyho drink, ktorý mu barmanka naliala v A_2 .

3 Výrokovologické vyplývanie

3.1 Ohodnotenia

3.1.1 Príklad. Nech \mathcal{L} je jazyk výrokových formúl logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Alena, Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{učiteľ, pozná}\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk \mathcal{L} , kde:

$$\begin{aligned} D &= \{\text{školník, učiteľka218, upratovačka1, upratovačka2}\} \\ i(\text{Alena}) &= \text{učiteľka218} \\ i(\text{Karol}) &= \text{školník} \\ i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\} \\ i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník, učiteľka218}), (\text{učiteľka218, školník}), \\ &\quad (\text{upratovačka1, upratovačka2})\} \end{aligned}$$

Zostrojte výrokovologické ohodnotenie v pre \mathcal{L} zhodné s \mathcal{M} .

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili výrokovologické ohodnotenie v zhodné s \mathcal{M} , musia sa zhodovať na všetkých predikátových atómoch jazyka \mathcal{L} , t.j., $v \models A$ vtt $\mathcal{M} \models A$ pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$. Preto potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ rozhodnúť, či je v \mathcal{M} pravdivý alebo nie. V prípade pravdivosti mu v ohodnotení v priradíme hodnotu t , v opačnom prípade hodnotu f .

Zostrojme teda množinu všetkých predikátových atómov jazyka \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} &= \{\text{učiteľ}(\text{Alena}), \text{učiteľ}(\text{Karol}), \\ &\quad \text{pozná}(\text{Alena, Alena}), \text{pozná}(\text{Karol, Karol}), \text{pozná}(\text{Alena, Karol}), \text{pozná}(\text{Karol, Alena})\} \end{aligned}$$

Následne zostrojíme hľadané ohodnotenie v tak, že pre každý atóm určíme, či je alebo nie je pravdivý v \mathcal{M} , a podľa toho mu vo v priradíme príslušnú pravdivostnú hodnotu:

$$\begin{array}{ll} i(\text{Alena}) \in i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{učiteľ}(\text{Alena}) & v = \{\text{učiteľ}(\text{Alena}) \mapsto t, \\ i(\text{Karol}) \notin i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{učiteľ}(\text{Karol}) & \text{učiteľ}(\text{Karol}) \mapsto f, \\ (i(\text{Alena}), i(\text{Alena})) \notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná}(\text{Alena, Alena}) & \text{pozná}(\text{Alena, Alena}) \mapsto f, \\ (i(\text{Karol}), i(\text{Karol})) \notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná}(\text{Karol, Karol}) & \text{pozná}(\text{Karol, Karol}) \mapsto f, \\ (i(\text{Alena}), i(\text{Karol})) \in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná}(\text{Alena, Karol}) & \text{pozná}(\text{Alena, Karol}) \mapsto t, \\ (i(\text{Karol}), i(\text{Alena})) \in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná}(\text{Karol, Alena}) & \text{pozná}(\text{Karol, Alena}) \mapsto t\} \quad \models \end{array}$$

3.1.2 Príklad. Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Adam}, \text{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{študent}^1, \text{profesor}^1, \text{učí}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned} v = \{ & \text{študent}(\text{Adam}) \mapsto t, & \text{študent}(\text{Karol}) \mapsto f, \\ & \text{profesor}(\text{Adam}) \mapsto f, & \text{profesor}(\text{Karol}) \mapsto t, \\ & \text{učí}(\text{Adam}, \text{Karol}) \mapsto f, & \text{učí}(\text{Karol}, \text{Adam}) \mapsto f \} \end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka \mathcal{L} . Zostrojte štruktúru \mathcal{M} zhodnú s v na dom v .

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili štruktúru \mathcal{M} zhodnú s v na dom v , teda na obore ohodnotenia v , potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \text{dom } v$, pre ktorý $v(A) = t$ zabezpečiť, aby bol A pravdivý v \mathcal{M} , teda $\mathcal{M} \models A$. Naopak, pre každý predikátový atóm $B \in \text{dom } v$, pre ktorý $v(B) = f$ musíme zabezpečiť, aby $\mathcal{M} \not\models B$. Konkrétne:

$$\begin{aligned} v(\text{študent}(\text{Adam})) &= t, & \text{takže } \mathcal{M} \models \text{študent}(\text{Adam}), & \text{teda } i(\text{Adam}) \in i(\text{študent}); \\ v(\text{študent}(\text{Karol})) &= f, & \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{študent}(\text{Karol}), & \text{teda } i(\text{Karol}) \notin i(\text{študent}); \\ v(\text{profesor}(\text{Adam})) &= f, & \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{profesor}(\text{Adam}), & \text{teda } i(\text{Adam}) \notin i(\text{profesor}); \\ v(\text{profesor}(\text{Karol})) &= t, & \text{takže } \mathcal{M} \models \text{profesor}(\text{Karol}), & \text{teda } i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor}); \\ v(\text{učí}(\text{Adam}, \text{Karol})) &= f, & \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{učí}(\text{Adam}, \text{Karol}), & \text{teda } (i(\text{Adam}), i(\text{Karol})) \notin i(\text{učí}); \\ v(\text{učí}(\text{Karol}, \text{Adam})) &= f, & \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{učí}(\text{Karol}, \text{Adam}), & \text{teda } (i(\text{Karol}), i(\text{Adam})) \notin i(\text{učí}). \end{aligned}$$

Všimnime si, že ohodnotenie v nepriradzuje pravdivostnú hodnotu všetkým predikátovým atómom z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. V prípade týchto atómov nezáleží, či budú alebo nebudú pravdivé v \mathcal{M} . Teraz už jednoducho zostrojíme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ napríklad takto:

Zvolíme si doménu s prinajmenšom rovnakou kardinalitou ako množina konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a každou konštantou pomenujeme iný prvok:

$$\begin{aligned} D &= \{s352, s667, s986, p520, p830, p921\}, \\ i(\text{Adam}) &= s667, \\ i(\text{Karol}) &= p830. \end{aligned}$$

Následne skonštruujeme interpretácie predikátov tak, aby v interpretujúcich množinách boli resp. neboli tieto prvky alebo ich n -tice tak, ako sme zistili vyššie:

$$\begin{aligned} i(\text{študent}) &= \{s352, s667, s986\}, \\ i(\text{profesor}) &= \{p520, p830, p921\}, \\ i(\text{učí}) &= \{(p520, s667), (p830, s352), (p830, s986)\}. \end{aligned}$$

□

3.1.3

- a) Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jack, Corona}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pivo}^1, \text{pije}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk \mathcal{L} , kde:

$$\begin{aligned} D &= \{s1, s2, s3, p1, p2\} \\ i(\text{Jack}) &= s3, \\ i(\text{Corona}) &= p1, \\ i(\text{pivo}) &= \{p1, p2\}, \\ i(\text{pije}) &= \{(s1, p1), (s2, p1), (s2, p2)\} \end{aligned}$$

Zostrojte výrokovologické ohodnotenie v pre \mathcal{L} zhodné so štruktúrou \mathcal{M} .

- b) Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Andy, Woody}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{hračka}^1, \text{chlapec}^1, \text{hrá_sa}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned} v &= \{\text{hračka}(\text{Woody}) \mapsto t, & \text{hračka}(\text{Andy}) \mapsto f, \\ & \text{chlapec}(\text{Andy}) \mapsto t, & \text{chlapec}(\text{Woody}) \mapsto f, \\ & \text{hrá_sa}(\text{Andy, Woody}) \mapsto t, & \text{hrá_sa}(\text{Woody, Andy}) \mapsto f\} \end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka \mathcal{L} . Zostrojte štruktúru \mathcal{M} zhodnú s v na dom v .

3.2 Vyplývanie, nezávislosť, nesplniteľnosť

3.2.1 Majme výrokovologicú teóriu T :

$$T = \left\{ \begin{array}{l} A_1: (\text{tancuje_s}(A, B) \rightarrow (\text{tancuje_s}(A, B) \vee \text{spieva}(A))), \\ A_2: (\neg \text{tancuje_s}(A, B) \vee \neg \text{spieva}(A)), \\ A_3: (\neg \text{spieva}(A) \rightarrow \text{fajer}(A)) \end{array} \right\}.$$

O každej z formúl X_1 – X_3 rozhodnite, či (a) vyplýva z teórie T , (b) je nezávislá od T , alebo (c) ani z nej nevyplýva, ani od nej nie je nezávislá:

- (X_1) $(\text{tancuje_s}(A, B) \rightarrow \text{fajer}(A))$,
 (X_2) $\neg \text{spieva}(A)$,
 (X_3) $(\text{spieva}(A) \rightarrow \text{tancuje_s}(A, B))$.

3.2.2 Príklad. V prípade bankovej lúpeže inšpektor Nick Fishtrawn zaistil dvoch podozrivých Andrews a Browna, pričom zistil nasledujúce skutočnosti:

(A_1) Andrews nikdy nepracuje sám.

(A_2) Nikto ďalší do prípadu už zapletený nie je.

Pomôžte inšpektorovi Fishtrawnovi zistiť, kto z podozrivých je určite vinný a má ho obviňiť, kto je naopak určite nevinný a má ho oslobodiť, a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť. Svoje odpovede dokážte.

Riešenie. Zistenia A_1 – A_2 sformalizujeme ako teóriu v jazyku výrokových formúl logiky prvého rádu s množinou konštantných symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{A, B\}$ (kde A značí Andrews a B značí Brown) a s množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{vinný}^1\}$ (kde $\text{vinný}(x)$ znamená, že x je vinný).

💡 Ostatné skutočnosti, ako napr. konkrétny prípad, kto chským pracuje a kto je do prípadu zapletený, nepotrebuje reprezentovať konštantnými alebo predikátovými symbolmi, pretože hovorí iba o vine alebo nevine podozrivých, a to už máme dostatočne reprezentované predikátovým symbolom vinný^1 .

Teória T je nasledovná:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} A_1: (\text{vinný}(A) \rightarrow \text{vinný}(B)), \\ A_2: (\text{vinný}(A) \vee \text{vinný}(B)) \end{array} \right\}.$$

Najprv zistíme, či je teória T splniteľná. Nájdeme všetky výrokové ohodnotenia atomických formúl, ktorá sa v nej nachádzajú, a zistíme, či je aspoň v jednom pravdivá:

	v_i		T			
	vinný(A)	vinný(B)	vinný(A)	vinný(B)	$(\text{vinný}(A) \rightarrow \text{vinný}(B))$	$(\text{vinný}(A) \vee \text{vinný}(B))$
v_1	f	f	$\not\models_p$	$\not\models_p$	\models_p	$\not\models_p$
v_2	t	f	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$	\models_p
v_3	f	t	$\not\models_p$	\models_p	\models_p	\models_p
v_4	t	t	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p

Zistili sme, že T je splniteľná, keďže napr. $v_3 \models_p T$. Teória má dva modely, v_3 a v_4 .

Môžeme teda prejsť na rozhodnutie o vine alebo nevine podozrivých. Urobíme tak na základe vyplývania:

- $T \models_p \text{vinný}(B)$, pretože $v_i \models_p \text{vinný}(B)$ pre oba modely v_i , $i \in \{3, 4\}$. Vieme teda určite rozhodnúť, že Brown je vinný.
- Keďže pre žiadneho podozrivého x neplatí $T \models_p \neg \text{vinný}(x)$, nevieme o nikom rozhodnúť, že je nevinný.

- Pretože $T \not\models_p \text{vinný}(A)$, keďže $v_3 \not\models_p \text{vinný}(A)$, a zároveň $T \not\models_p \neg\text{vinný}(A)$, keďže $v_4 \models_p \text{vinný}(A)$ – čiže formula $\text{vinný}(A)$ je nezávislá od T – tak o Adamsovej vine na základe zistených skutočností nemožno rozhodnúť.


💡 Uvedomme si, že záver, že je Brown vinný, môžeme zo zistenia $T \models_p \text{vinný}(B)$ urobiť len vďaka tomu, že sme predtým overili splniteľnosť T . Ak by totiž teória T bola nespĺniteľná, nemožno takýto ani žiadny iný záver vyvodiť. Z nespĺniteľnej teórie totiž vyplýva každá formula, teda aj to, že je Brown vinný, aj to že je nevinný. Na základe takejto teórie nemôžeme vyvodiť žiadne zmysluplné závery. ⊥

3.2.3 Inšpektor Scotland Yardu Nick Fishtrawn predviedol troch podozrivých z krádeže klenotov v obchodnom dome Harrods: Daviesa, Milesa a Roberts. Inšpektor vyšetrovaním zistil nasledovné skutočnosti:

- (A_1) Miles je určite vinný.
- (A_2) Miles nikdy nepracuje sám, je teda vinný, iba ak je vinný aspoň jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.
- (A_3) Davies vždy pracuje s Robertsom.
- (A_4) Roberts sa s Milesom neznáša, vinný je preto nanajvýš jeden z nich.
- (A_5) Na lúpeži sa mohli podieľať len títo traja podozriví a nikto iný.

Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

S využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite o vine a nevine jednotlivých podozrivých, pokiaľ to je možné.

 **Pomôcka.** Formalizáciu tentoraz obmedzte na skutočnosti, ktoré sú postačujúce k vyriešeniu úlohy (teda sústreďte sa na vinu podozrivých, ak je to postačujúce).


3.2.4 Inšpektor Nick Fishtrawn rieši ďalší zapeklitý prípad lúpeže. Podozriví sú Addams, Doyle a Harris. Inšpektor zistil nasledovné skutočnosti:

- (A_1) Ak pršalo, určite je vinný Harris.
- (A_2) Naopak, ak nepršalo, vinný je jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.
- (A_3) Harris má vždy najviac jedného kumpána.
- (A_4) Addams pracuje, ak je jeho kumpánom Doyle.
- (A_5) Addams pracuje, len ak prší.

(A_6) Nikto iný nie je podozrivý.

Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

S využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite o vine a nevine jednotlivých podozrivých, pokiaľ to je možné.

 **Pomôcka.** Pri formalizácii by vám mali stačiť 4 predikátové atómy.

4 Vlastnosti a vzťahy výrokovologických formúl


4.1 Tautológie, splniteľné, falzifikovateľné a nespľniteľné formuly

4.1.1 Majme jazyk \mathcal{L} , kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pekné, rýchle, ekologické}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{moje_auto}\}$. Označme $P = \text{pekné}(\text{moje_auto})$, $R = \text{rýchle}(\text{moje_auto})$ a $E = \text{ekologické}(\text{moje_auto})$.

Rozhodnite o každej z nasledujúcich formúl nad jazykom \mathcal{L} , či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nespľniteľná. Pri každej formule rozhodnite o *všetkých* uvedených vlastnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

- | | |
|--|---|
| a) $(\neg(P \wedge E) \rightarrow (\neg P \wedge \neg E))$ | i) $((P \rightarrow R) \rightarrow P) \rightarrow P$ |
| b) $((P \vee \neg P) \wedge \neg(E \vee \neg E))$ | j) $\neg\neg\neg(P \vee P)$ |
| c) $(P \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow P)))$ | k) $((P \wedge E) \rightarrow (\neg P \wedge E))$ |
| d) $(P \wedge (E \vee \neg(P \rightarrow R)))$ | l) $\neg((P \vee R) \vee (\neg P \vee E))$ |
| e) $((P \rightarrow P) \rightarrow P) \rightarrow \neg P$ | m) $((E \vee \neg R) \wedge (P \rightarrow \neg R)) \rightarrow$
$(\neg R \rightarrow (\neg P \wedge E))$ |
| f) $\neg(P \leftrightarrow \neg P)$ | n) $((P \rightarrow (\neg R \rightarrow E)) \wedge$
$((\neg P \vee \neg E) \wedge \neg(P \rightarrow R)))$ |
| g) $((P \wedge \neg P) \vee (P \vee \neg P))$ | |
| h) $(P \wedge \neg P)$ | |

Riešenie. a) Aby sme rozhodli, akého druhu je formula $A = (\neg(P \wedge E) \rightarrow (\neg P \wedge \neg E))$, podľa tvrdení 4.3 a 4.4 stačí preskúmať všetky rôzne ohodnotenia výrokovologických atómov, ktoré sa vyskytujú v A :

 Keďže v A sa vyskytujú dva atómy, takéto ohodnotenia sú štyri. Podobne ako v úlohách o vyplývaní výsledok nášho skúmania, ako aj čiastkové výsledky, zapíšeme do tabuľky.

	v_i		$\neg P$	$\neg E$	$(P \wedge E)$	$\neg(P \wedge E)$	$(\neg P \wedge \neg E)$	$(\neg(P \wedge E) \rightarrow (\neg P \wedge \neg E))$
	P	E						
v_1	f	f	\models_P	\models_P	$\not\models_P$	\models_P	\models_P	\models_P
v_2	t	f	$\not\models_P$	\models_P	$\not\models_P$	\models_P	$\not\models_P$	$\not\models_P$
v_3	f	t	\models_P	$\not\models_P$	$\not\models_P$	\models_P	$\not\models_P$	$\not\models_P$
v_4	t	t	$\not\models_P$	$\not\models_P$	\models_P	$\not\models_P$	$\not\models_P$	\models_P

💡 Keďže máme rozhodnúť o vlastnostiach formuly A , nezabudneme vysloviť závery a zdôvodniť ich:

- Keďže $v_2 \not\models_P A$, teda A nie je pravdivá vo všetkých ohodnoteniach, tak A nie je tautológiou.
- Keďže $v_1 \models_P A$, teda A je pravdivá v aspoň jednom ohodnotení, ak A je splniteľná.
- Keďže $v_2 \not\models_P A$, teda A je nepravdivá v aspoň jednom ohodnotení, tak A je aj falzifikovateľná.
- Keďže $v_1 \models_P A$, teda nie je pravda, že A je nepravdivá vo všetkých ohodnoteniach, tak A nie je nesplniteľná. □

4.1.2 O každej z nasledujúcich formúl nad jazykom \mathcal{L} , kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{lúbi}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{P, L\}$, pričom P značí Peter a L značí Lucia rozhodnite, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Rozhodnite o všetkých možnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

- $((\neg \text{lúbi}(P, L) \rightarrow \neg \text{lúbi}(L, P)) \wedge (\text{lúbi}(P, L) \vee \text{lúbi}(L, P)))$
- $\neg(\neg(\text{lúbi}(P, L) \wedge \text{lúbi}(L, P)) \leftrightarrow (\neg \text{lúbi}(P, L) \vee \neg \text{lúbi}(L, P)))$
- $((\neg \text{lúbi}(P, L) \rightarrow \text{lúbi}(L, P)) \wedge \neg(\text{lúbi}(P, L) \vee \text{lúbi}(L, P)))$

4.2 Ekvivalencia

4.2.1 Dokážte, že nasledujúce dvojice formúl nad jazykom \mathcal{L} , kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{f, h, b\}$, NHL, inteligentná, rozumná, milá, kde f značí futbalista, h značí hokejista, b značí bohatý, NHL značí hráč NHL a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{M, Eva\}$, kde M značí Miro, sú (sémanticky) ekvivalentné

- a) de Morganove pravidlá:
 $\neg(f(M) \wedge h(M))$ a $(\neg f(M) \vee \neg h(M))$,
 $\neg(f(M) \vee h(M))$ a $(\neg f(M) \wedge \neg h(M))$;
b) $(h(M) \rightarrow (b(M) \rightarrow \text{NHL}(M)))$ a $((h(M) \wedge b(M)) \rightarrow \text{NHL}(M))$;
c) $\neg(\text{inteligentná}(\text{Eva}) \wedge (\text{rozumná}(\text{Eva}) \vee \text{milá}(\text{Eva})))$
a $(\neg \text{inteligentná}(\text{Eva}) \vee \neg \text{rozumná}(\text{Eva})) \wedge (\neg \text{inteligentná}(\text{Eva}) \vee \neg \text{milá}(\text{Eva}))$.

Riešenie. a) Dokážme ekvivalentnosť formúl de Morganovo pravidla pre konjunkciu. Preverme pravdivosť formúl $\neg(f(M) \wedge h(M))$ a $(\neg f(M) \vee \neg h(M))$ vo všetkých rôznych ohodnotenia tých predikátových atómov, ktoré sa v skúmaných formulách vyskytujú:

	v_i						
	$f(M)$	$h(M)$	$\neg f(M)$	$\neg h(M)$	$(f(M) \wedge h(M))$	$\neg(f(M) \wedge h(M))$	$(\neg f(M) \vee \neg h(M))$
v_1	f	f	\vdash_p	\vdash_p	$\not\vdash_p$	\vdash_p	\vdash_p
v_2	t	f	$\not\vdash_p$	\vdash_p	$\not\vdash_p$	\vdash_p	\vdash_p
v_3	f	t	\vdash_p	$\not\vdash_p$	$\not\vdash_p$	\vdash_p	\vdash_p
v_4	t	t	$\not\vdash_p$	$\not\vdash_p$	\vdash_p	$\not\vdash_p$	$\not\vdash_p$

Z tabuľky vidíme, že skutočne pre každé ohodnotenie v_i , $i \in \{1, \dots, 4\}$, platí $v_i \vdash_p \neg(f(M) \wedge h(M))$ vtt $v_i \vdash_p (\neg f(M) \vee \neg h(M))$. Z toho, z tvrdenia 4.3 z prednášky a z definície ekvivalencie 4.9 vyplýva, že formuly $\neg(f(M) \wedge h(M))$ a $(\neg f(M) \vee \neg h(M))$ sú ekvivalentné.

💡 Podobne ako pri skúmaní sémantických vlastností jednotlivých formúl či overovaní vyplývania, nezabudnime vysloviť záver, ktorý z preskúmania všetkých ohodnotení vyvodzujeme.

□

4.3 Tvrdenia o vyplývaní, splniteľnosti, atď.

4.3.1 Príklad. Dokážte: Nech \mathcal{L}_1 je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami individuových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$, pričom $z \notin \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. Potom existuje jazyk \mathcal{L}_2 výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinou individuových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{z\}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$, taký že pre ľubovoľnú formulu A v jazyku \mathcal{L}_1 existuje formula B v jazyku \mathcal{L}_2 taká, že

- a) A je výrokovologicky splniteľná vtt B je výrokovologicky splniteľná (teda výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \vdash_p A$, existuje vtt existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \vdash_p B$).

b) Štruktúra \mathcal{M}_1 taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje vtt existuje štruktúra \mathcal{M}_2 taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

Riešenie. Nech \mathcal{L}_1 je jazyk podľa predpokladov. Jazyk \mathcal{L}_2 skonštruujeme tak, že $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{z\}$ (tu ani nemáme inú možnosť) a

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2} = \{p_{a_1 \dots a_n}^1 \mid p^n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}\}.$$

Nech A je ľubovoľná formula v jazyku \mathcal{L}_1 . Formulu B v jazyku \mathcal{L}_2 skonštruujeme z formuly A tak, že každý výskyt atómu $p(a_1, \dots, a_n)$ nahradíme atómom $p_{a_1 \dots a_n}(z)$, pre všetky $p^n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. (Teda napr. ak $A = (\text{ľúbi}(\text{Peter}, \text{Lucia}) \rightarrow \text{naliála}(\text{Lucia}, \text{Peter}, \text{Pivo}))$, tak $B = (\text{ľúbi_Peter_Lucia}(z) \rightarrow \text{naliála_Lucia_Peter_Pivo}(z))$.)

Dokážme najprv časť a), \Rightarrow : Nech v_1 je výrokové ohodnotenie také, že $v_1 \models A$. Výrokové ohodnotenie v_2 skonštruujeme nasledovne:

$$v_2(p_{a_1 \dots a_n}(z)) = v_1(p(a_1, \dots, a_n)),$$

pre všetky $p_{a_1 \dots a_n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$. Ostáva nám dokázať, že platí $v_1 \models A$ vtt $v_2 \models B$. Dôkaz urobíme indukciou na konštrukciu formuly A :

- Nech A je atomická formula. Teda je v tvare $A = p(a_1, \dots, a_n)$, pre nejaké $p^n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$, a jej zodpovedajúca formula $B = p_{a_1 \dots a_n}(z)$. Keďže v_2 sme skonštruovali tak, že oba atómy A aj B sú príslušným ohodnotením ohodnotené rovnako, vidíme, že platí $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$.
- Nech A je v tvare $\neg A_1$. Potom B je v tvare $\neg B_1$, pričom B_1 je zodpovedajúca formula k formule A_1 . Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení pre \neg potom platí aj $v_1 \not\models_p A$ vtt $v_1 \not\models_p A_1$ vtt $v_2 \not\models_p B_1$ vtt $v_2 \models_p B$.
- Nech A je v tvare $(A_1 \wedge A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \wedge B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení (\wedge) potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_1 \models_p A_1$ a $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_1$ a $v_2 \models_p B_2$ vtt $v_2 \models_p B$.
- Nech A je v tvare $(A_1 \vee A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \vee B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení (\vee) potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$ podobne ako v prípade konjunkcie.
- Nech A je v tvare $(A_1 \rightarrow A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \rightarrow B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení (\rightarrow) potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$ podobne ako v prípade konjunkcie.

Časť a), \Leftarrow je analogická, konštrukciu otočíme: Nech v_2 je výrokové ohodnotenie také, že $v_2 \models_p B$. Výrokové ohodnotenie v_1 skonštruujeme nasledovne:

$$v_1(p(a_1, \dots, a_n)) = v_2(p_{a_1 \dots a_n}(z)),$$

pre všetky $p^n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. V prípade atomickej formuly A opäť priamo z konštrukcie vyplýva že $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$. Indukciou na konštrukciu formuly poľahky dokážeme to isté pre ľubovoľné (neatomické) formuly vo všeobecnosti.

Dokážme teraz časť b), \Rightarrow : Nech $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$ je štruktúra taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$. Štruktúru $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$ skonštruujeme nasledovne:

$$\begin{aligned} D_2 &= \{x\}, \\ i_2(z) &= x, \\ i_2(p_{a_1 \dots a_n}) &= \begin{cases} \{x\}, & \text{ak } (i_1(a_1), \dots, i_1(a_n)) \in i_1(p), \\ \emptyset, & \text{inak,} \end{cases} \end{aligned}$$

pre všetky $p_{a_1 \dots a_n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$. Ak $A = p(a_1, \dots, a_n)$ je atomická formula (a teda $B = p_{a_1 \dots a_n}(z)$), tak z definície pravdivosti formuly v štruktúre a z konštrukcie \mathcal{M}_2 máme:

$$\mathcal{M}_1 \models A \quad \text{vtt} \quad (i_1(a_1), \dots, i_1(a_n)) \in i_1(p) \quad \text{vtt} \quad i_2(z) \in i_2(p_{a_1 \dots a_n}) \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M}_2 \models B.$$

Indukciou na konštrukciu formuly opäť poľahky dokážeme to isté aj pre ľubovoľné (neatomické) formuly.

Dokážme teraz časť b), \Leftarrow : Nech $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$ je štruktúra taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$. Štruktúru $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$ skonštruujeme nasledovne:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x_a \mid a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}\}, \\ i_1(a) &= x_a, & \text{pre všetky } a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}, \\ i_1(p) &= \{(x_{a_1}, \dots, x_{a_n}) \mid i_2(z) \in i_2(p_{a_1 \dots a_n})\}, & \text{pre všetky } p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}. \end{aligned}$$

Vďaka tejto konštrukcii je zvyšok dôkazu rovnaký ako v prípade \Leftarrow . Opäť sa poľahky presvedčíme, že ak $A = p(a_1, \dots, a_n)$ je atomická formula, a teda $B = p_{a_1 \dots a_n}(z)$, tak z definície pravdivosti formuly v štruktúre a z konštrukcie \mathcal{M}_2 máme:


$$\mathcal{M}_1 \models A \quad \text{vtt} \quad (i_1(a_1), \dots, i_1(a_n)) \in i_1(p) \quad \text{vtt} \quad i_2(z) \in i_2(p_{a_1 \dots a_n}) \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M}_2 \models B.$$

Následne indukciou na konštrukciu formuly dokážeme to isté aj pre ľubovoľné formuly. \square

4.3.2 Dokážte: Nech \mathcal{L}_1 je jazyk výrovkologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami individuových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$. Potom existuje jazyk \mathcal{L}_2 výrovkologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti

s množinou individuových konštant $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$, takou, že $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$ obsahuje iba *unárne* predikátové symboly a zároveň $|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$, taký že pre ľubovoľnú formulu A v jazyku \mathcal{L}_1 existuje formula B v jazyku \mathcal{L}_2 , pre ktorú platí:

- Výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$.
- Štruktúra \mathcal{M}_1 taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra \mathcal{M}_2 taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

 **Pomôcka.** Riešenie cvičenia 4.3.1, tiež obsahuje transformáciu, ktorej výsledkom sú iba unárne predikátové symboly. Na rozdiel od cvičenia 4.3.1 je však v tejto úlohe potrebné jazyk \mathcal{L}_1 preložiť do jazyka \mathcal{L}_2 tak, aby sa počet predikátových symbolov nezmenil ($|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$). Môžete teda napr. skúsiť takú transformáciu, že predikátové symboly „zachováte“, iba im zmeníte aritu na 1, a potrebný výsledok dosiahnete vhodnou transformáciou množiny individuových konštant.

4.3.3 Uvažujme jazyk \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti a nech $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ je nejaká jeho individuová konštanta.

Nech A je ľubovoľná výrokovologická formula jazyka \mathcal{L} a nech B vznikne z A nahradením všetkých výskytov všetkých individuových konštant konštantou a .

Dokážte alebo vyvráťte:

- Ak A je splniteľná, tak aj B je splniteľná.
- Ak B je splniteľná, tak aj A je splniteľná.

4.3.4 Uvažujme jazyk \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti. Nech X a Y sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka \mathcal{L} , nech T je ľubovoľná výrokovologická teória v \mathcal{L} . Dokážte alebo vyvráťte:

- $\{\} \models_p X$ vtt X je tautológia.
- Formuly X a Y sú ekvivalentné vtt $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia.
- Ak $T \models_p \neg X$, tak $T \not\models_p X$.
- Ak $T \not\models_p X$, tak $T \models_p \neg X$.
- $T \models_p (X \rightarrow Y)$ vtt $T \cup \{X\} \models_p Y$.
- Ak $T \models_p (X \rightarrow Y)$, tak $T \not\models_p X$ alebo $T \models_p Y$.
- Ak $T \not\models_p X$ alebo $T \models_p Y$, tak $T \models_p (X \rightarrow Y)$.
- $T \models_p X$ a $T \models_p Y$ vtt $T \models_p (X \wedge Y)$.
- Formula $(X \rightarrow Y)$ je nespľniteľná
- Ak $T \not\models_p X$ alebo $T \models_p Y$, tak $T \models_p (X \rightarrow Y)$.
- Ak $T \models_p X$ alebo $T \not\models_p Y$, tak $T \models_p (X \rightarrow Y)$.
- Formula $(X \rightarrow Y)$ je nespľniteľná

vtt X je tautológia a Y je nespĺniteľná.

- l) Formula X je nezávislá od $\{ \}$ vtt X je splniteľná a falzifikovateľná.
- m) Ak formula X logicky nevyplýva z T a ani nie je nezávislá od T , tak T je splniteľná a vyplýva z nej negácia X .
- n) Ak $T \models_p (A \rightarrow B)$,
tak $T \cup \{ \neg B \} \models_p \neg A$.
- o) Ak $T \not\models_p (A \wedge B)$,
tak $T \models_p \neg A$ alebo $T \models_p \neg B$.
- p) Ak $T \not\models_p (A \vee B)$,
tak $T \not\models_p A$ a $T \not\models_p B$.
- q) Ak $T \models_p (A \rightarrow B)$,
tak $T \not\models_p (A \wedge \neg B)$.
- r) Nech T je teória a X je formula.
Ak T je nespĺniteľná, tak nemožno rozhodnúť, či $T \models_p X$ alebo $T \not\models_p X$.

Riešenie. a) Dokážme alebo vyvráťme: $\{ \} \models_p X$ vtt X je tautológia.

💡 Na prednáškach ste už videli dôkaz podobného tvrdenia 4.12c). Dôkaz tvrdenia a) podrobne okomentujeme, aby ste podľa neho dokázali robiť vlastné.

Tvrdenia, ktoré majú formu ekvivalencie, zvyčajne dokazujeme ako implikácie v oboch smeroch. Inak povedané, musíme dokázať, že $\{ \} \models_p X$ je postačujúcou (\Rightarrow) aj nutnou (\Leftarrow) podmienkou toho, že X je tautológia, teda:

(\Rightarrow) ak $\{ \} \models_p X$, tak X je tautológia; (\Leftarrow) ak X je tautológia, $\{ \} \models_p X$.

(\Rightarrow) a (\Leftarrow) sú zvyčajné označenia dvoch implikácií, ktoré tvoria ekvivalenciu (*nezamieňajte* ich so symbolom implikácie \rightarrow). Obe dokážeme priamymi dôkazmi.

Pri priamom dôkaze implikácie predpokladáme jej antecedent (ľavú stranu) a snažíme sa ukázať, že z jeho platnosti a z doteraz známych definícií a tvrdení vyplýva konzekvent (pravá strana).

(\Rightarrow) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že $\{ \} \models_p X$. Chceme ukázať, že potom X je tautológia.

Podľa definície vyplývania teda predpokladáme, že v každom ohodnotení v , v ktorom je pravdivá teória $\{ \}$, je pravdivá aj formula X . Podľa definície tautológie chceme dokázať, že X je pravdivá v každom ohodnotení v .

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v . Pretože teória $\{ \}$ neobsahuje žiadne formuly, triviálne platí, že všetky formuly z $\{ \}$ sú pravdivé vo v , a teda podľa definície pravdivosti teórie v ohodnotení, $v \models_p \{ \}$.

💡 Najprv si uvedomíme, ako sú definované pojmy, ktoré sa v tvrdení vyskytujú. Tým si vyjasníme, čo vlastne predpokladáme a čo dokazujeme.

💡 Keď máme dokázať, že všetky objekty nejakého typu (ohodnotenia) majú nejakú vlastnosť (je v nich pravdivá X), zoberieme si hocijaký taký objekt a ukážeme, že keď poctivo preskúmame všetky možnosti, ktoré môžu nastať, tento objekt bude vždy mať požadovanú vlastnosť.

Z predpokladu, že $z \in \{ \}$ vyplýva X , potom máme, že $v \models_p X$. Na základe tohto zistenia a preto, že v bolo ľubovoľné, môžeme konštatovať, že X je pravdivá v každom ohodnotení v , teda X je tautológia, čo bolo treba dokázať.

(\Leftarrow) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že X je tautológia, teda že (podľa definície tautológie) X je pravdivá vo všetkých ohodnoteniach. Chceme dokázať, že potom $\{ \} \models_p X$ teda, že (podľa definície vyplývania) vo všetkých ohodnoteniach, v ktorých je pravdivá $\{ \}$, je pravdivá aj X .

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v . Predpokladajme, že $v \models_p \{ \}$, a ukážme, že $v \models_p X$. To však máme priamo z predpokladu, že X je tautológia. Teda zovšeobecňujeme, že v každom ohodnotení, v ktorom je pravdivá $\{ \}$, je pravdivá aj X , teda $z \in \{ \}$ vyplýva X , čo bolo treba dokázať.

Dokázaním tvrdení (\Rightarrow) a (\Leftarrow) sme dokázali tvrdenie a).

💡 Jasnejšia formulácia tvrdenia „Vo všetkých ohodnoteniach, v ktorých je pravdivá $\{ \}$, je pravdivá aj X ,“ je „Pre všetky ohodnotenia v , ak $v \models_p \{ \}$, tak $v \models_p X$ “. Ide opäť o všeobecne kvantifikovanú implikáciu. Postup na jej dôkaz bude teda: Zobrať ľubovoľný objekt požadovaného typu, predpokladať antecedent a dokázať konzekvent.

💡 Pri dôkazoch iných tvrdení možno budete navyše potrebovať techniku *rozboru prípadov*, ktorú sme na prednáške použili pri dôkaze prvej ekvivalencie z vety 4.10 a tvrdenia 4.12c)(\Leftarrow).

c) Dokážme alebo vyvráťme: Ak $T \models_p \neg X$, tak $T \not\models_p X$.

💡 Pokúsme sa tvrdenie dokázať. Je to implikácia, takže predpokladáme pravdivosť jej antecedentu (ľavej strany) a snažíme sa ukázať pravdivosť konzekventu (pravej strany).

Predpokladajme, že $T \models_p \neg X$. Naším cieľom je dokázať, že potom $T \not\models_p X$.

Uvedomíme si definíciu vyplývania a aplikujeme ju na náš prípad:

Podľa predpokladu v každom ohodnotení v , v ktorom je pravdivá T , je pravdivá aj $\neg X$. Máme dokázať, že nie je pravda, že v každom ohodnotení v , v ktorom je pravdivá T , je pravdivá aj X . To znamená, že musíme nájsť nejaké ohodnotenie v , v ktorom je T pravdivá, ale X nepravdivá. Zdá sa, že s nájdením ohodnotenia by nám mohol pomôcť nasledujúci rozbor prípadov.

Pre každú teóriu sú dve možnosti: buď existuje ohodnotenie, v ktorom je pravdivá, alebo také ohodnotenie neexistuje.

- Ak existuje v , v ktorom je T pravdivá, tak podľa predpokladu $v \models_p \neg X$, a teda $v \not\models_p X$. V tomto prípade teda existuje ohodnotenie, v ktorom je T pravdivá, ale X nepravdivá.
- Ak neexistuje v , v ktorom je T pravdivá, tak neexistuje ani ohodnotenie, v ktorom je T pravdivá a navyše X nepravdivá. Požadovaný cieľ v tomto prípade **nie je možné dosiahnuť**.

Situáciu by ešte mohlo zachrániť, keby prípad „neexistuje v , v ktorom je T pravdivá“ nemohol nastať, lebo je v spore s nejakým predchádzajúcim predpokladom. To však nie je pravda, čo dokážeme nájdením **konkrétnej** teórie T a formuly X , pre ktoré sú predpoklady pravdivé, ale záver nie.

Zoberme jazyk \mathcal{L} s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{a\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{p\}$, teóriu $T = \{(p(a) \wedge \neg p(a))\}$ a formulu $X = p(a)$. T je nespĺniteľná, a preto triviálne platí, že z T vyplýva $\neg X$ (pretože pre každé ohodnotenie v je implikácia „ak $v \models_p T$, tak $v \models_p \neg X$ “ pravdivá, pretože jej antecedent je nepravdivý). Zároveň ale žiadne ohodnotenie nemá vlastnosť, že je v ňom T pravdivá a X nepravdivá.

Konštatujeme teda, že tvrdenie c) **neplatí**. Vyššie uvedená teória a formula tvoria jeden z jeho **kontrapríkladov**.

d) Dokážme alebo vyvráťme: Ak $T \not\models_p X$, tak $T \models_p \neg X$.

💡 Predpokladajme, že $T \not\models_p X$, a zistíme, či $T \models_p \neg X$. Podľa predpokladu existuje nejaké ohodnotenie v , pre ktoré platí $v \models_p T$, ale $v \not\models_p X$. Máme dokázať, že potom pre každé ohodnotenie w platí, že ak $w \models_p T$, tak $w \models_p \neg X$.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie w a predpokladajme, že $w \models_p T$. Ak $w = v$, tak $w \not\models_p X$, a teda $w \models_p \neg X$. Ak však $w \neq v$, túto úvahu uplatniť nemôžeme. Nie je ťažké si uvedomiť, že predpoklad tvrdenia a tento prípad vieme dosiahnuť pre konkrétne T , X a ohodnotenie v , pričom však v nejakom inom ohodnotení budú T aj X pravdivé, a teda $\neg X$ nepravdivé.

Máme teda dôvod sa domnievať, že tvrdenie neplatí. Potvrdíme to nájdením **konkrétneho** kontrapríkladu.

Zoberme jazyk \mathcal{L} s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{a, b\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{p\}$, teóriu $T = \{p(a)\}$ a formulu $X = p(b)$. Potom $T \not\models_p X$, lebo pre ohodnotenie $v = \{p(a) \mapsto t, p(b) \mapsto f\}$ máme $v \models_p T$ a $v \not\models_p X$. Zároveň pre ohodnotenie $w = \{p(a) \mapsto t, p(b) \mapsto t\}$ máme $w \models_p T$ a $w \models_p X$, teda $w \not\models_p \neg X$. Preto $T \not\models_p \neg X$. Našli sme kontrapríklad, takže tvrdenie d) **neplatí**. \square

5 Dôkazy a výrokovologické tablá

5.1 Vyplývanie a tautológie v tabľách

5.1.1 Príklad. (Smullyan [4]) Na políciu predviedli troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

- a) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.
- b) Doyle nikdy nepracuje sám.
- c) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.
- d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Dokážte pomocou tabľového kalkulu, že z týchto skutočností vyplýva, že Mills je vinný. Dôkaz vyplývania formuly preložte do slovenčiny.

Riešenie. Naším cieľom je dokázať, že tvrdenie *Mills je vinný* vyplýva zo zistení a) – d). Všetky tvrdenia najprv sformalizujeme.

Pri formalizácii sme v úlohe rozpoznali tri atomické formuly vinný(Mills), vinný(Doyle) a vinný(Adamsová) v jazyku \mathcal{L} , kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{vinný}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Mills, Doyle, Adamsová}\}$. Pre lepšiu čitateľnosť riešenia si jednotlivé atomické formuly pomenujeme nasledovne: $M = \text{vinný(Mills)}$, $D = \text{vinný(Doyle)}$ a $A = \text{vinný(Adamsová)}$.

Zistenia a) – d) sme sformalizovali do nasledovnej teórie:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} ((A \wedge \neg M) \rightarrow D), \\ (D \rightarrow (A \vee M)), \\ (A \rightarrow \neg D), \\ (A \vee (M \vee D)) \end{array} \right\}.$$

Dokazované tvrdenie sformalizujeme atomickou formulou M . To, že dokazované tvrdenie zodpovedá atomickej formule, samozrejme, nie je pravidlo.

Na to, aby sme dokázali Millsovu vinu na základe teórie T , potrebujeme najprv overiť, či je splniteľná. Na to postačuje nájsť hocijaký model teórie T , teda také ohodnotenie v , že $v \models_p T$. Lahko si overíme, že takýmto modelom je napríklad $v = \{\text{vinný(Mills)} \mapsto t, \text{vinný(Doyle)} \mapsto f, \text{vinný(Adamsová)} \mapsto f\}$.

💡 Neskôr budeme na overovanie splniteľnosti teórie využívať iné, formálne metódy.

To, že formula M , t.j. vinný(Mills), vyplýva z teórie T (teda $T \models_p M$, resp. $T \models_p$ vinný(Mills)), sa pokúsime dokázať nájdením uzavretého tabla pre množinu označených formúl $T_M^+ = \{T((A \wedge \neg M) \rightarrow D), T(D \rightarrow (A \vee M)), T(A \rightarrow \neg D), T(A \vee (M \vee D)), FM\}$.

1. $T((A \wedge \neg M) \rightarrow D) \quad T_M^+$
2. $T(D \rightarrow (A \vee M)) \quad T_M^+$
3. $T(A \rightarrow \neg D) \quad T_M^+$
4. $T(A \vee (M \vee D)) \quad T_M^+$
5. $FM \quad T_M^+$

6. $\mathbf{TA} \beta 4$			15. $\mathbf{T(M \vee D)} \beta 4$			
7. $\mathbf{FA} \beta 3$ * 6, 7	8. $\mathbf{T} \neg D \beta 3$ 9. $\mathbf{FD} \quad \alpha 8$		16. $\mathbf{TM} \beta 15$ * 5, 16	17. $\mathbf{TD} \beta 15$		
	10. $\mathbf{F(A \wedge \neg M)} \beta 1$			18. $\mathbf{FD} \beta 2$ * 17, 18	19. $\mathbf{T(A \vee M)} \beta 2$	
	14. $\mathbf{TD} \beta 1$ * 9, 14				20. $\mathbf{TA} \beta 19$	
	11. $\mathbf{FA} \beta 10$ * 6, 11	12. $\mathbf{F} \neg M \beta 10$ 13. $\mathbf{TM} \quad \alpha 12$ * 5, 13			24. $\mathbf{TM} \beta 19$ * 5, 24	
				21. $\mathbf{FA} \beta 3$ * 20, 21	22. $\mathbf{T} \neg D \beta 3$ 23. $\mathbf{FD} \quad \alpha 22$ * 17, 23	

Podarilo sa nám uzavrieť všetky vetvy tabla pre množinu T_M^+ , a teda podľa dôsledku 5.17 vety o korektnosti tablového kalkulu sme dokázali, že $T \models_p$ vinný(Mills).

Teda tvrdenie, že Mills je vinný vyplýva zo zistení a) – d). Pretože zároveň vieme, že tieto tvrdenia sú splniteľné, polícia na ich základe môže usúdiť, že Mills je určite vinný.

Napíšme teraz s pomocou tohto tabla slovný dôkaz toho, že zo zistení a) – d) vyplýva, že Mills je vinný.

💡 Tablo sa dá priamočiaro čítať ako dôkaz sporom, aj keď toto čítanie môže pôsobiť „umelo“ (viď nižšie). Pre lepšiu orientáciu v dôkaze v zátvorkách uvádzame čísla uzlov tabla, ktoré zodpovedajú práve vyjadrenej úvahe.

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, že zistenia a) – d) sú pravdivé (1–4), ale Mills je nevinný (5).

Podľa d) vieme, že aspoň jeden z trojice Adamsová, Mills, Doyle je vinný – preskúmame teda všetky tri možnosti:

Možnosť, že je vinný Mills (16) je v spore s predpokladom.

💡 Použitie pravidla β na disjunkciu zvyčajne čítame ako rozbor možných prípadov. Viacero použití pravidla β na vnorené disjunkcie (napr. $(A \vee (M \vee D))$) spájame v slovnom dôkaze do jedného rozboru.

V prípade, že je vinná Adamsová (6), podľa c) nie je vinný Doyle (7, 8, 9). Podľa tvrdenia a) však potom nemôže byť pravda, že je vinná Adamsová a Mills nevinný (10, 14). To znamená, že buď nie je Adamsová vinná (11), čo je spor s predpokladom tohto prípadu, alebo nie je Mills nevinný (12), teda Mills je vinný (13), čo je spor s predpokladom celého dôkazu.

Ostala nám posledná možnosť – Doyle je vinný (17). Podľa tvrdenia b) je potom vinná Adamsová alebo Mills (18, 19). Vina Millsa (24) je však v spore s úvodným predpokladom. V prípade viny Adamsovej (20) musíme na základe tvrdenia c) uvažovať nevinu Doylea (21, 22), čo je tiež spor.

Preskúmali sme všetky možnosti, akými by zistenia a) – d) mohli byť pravdivé, ale Mills by bol nevinný. Žiadna z nich nemôže nastať, pretože viedla k sporu. Preto Mills je vinný, ak sú pravdivé a) – d). Millsova vina teda vyplýva z teórie tvorenej zisteniami a) – d). □

💡 Predchádzajúci dôkaz sporom pôsobil „umelo“. „Skutočné“ dôkazy sporom z negácie dokazovaného tvrdenia odvodí nejaké dôsledky a až o nich ukážu, že sú v spore s dôsledkami predpokladov. My sme však predpoklad dôkazu sporom (Mills je nevinný) použili vždy iba vo chvíli, keď sme úvahou dospeli k opačnému tvrdeniu (Mills je vinný).

Naše tablo je preto „prirodzenejšie“ čítať ako priamy dôkaz. Formulu *M* označenú znamienkom **F** chápeme ako *cieľ*, ktorý chceme dokázať. Formuly označené znamienkom **T** stále chápeme ako *predpoklady*.

Dôkaz (priamy). Predpokladajme, že zistenia a) – d) sú pravdivé (1–4). Dokážme, že Mills je vinný (5). Podľa tvrdenia d) je vinný niekto z podozrivých Adamsová, Mills, alebo Doyle. V prípade, že je vinný Mills (16), dokazované tvrdenie triviálne platí. Rozoberme teda zvyšné dva prípady:

Predpokladajme najprv, že je vinná Adamsová (6). Podľa c) teda nie je vinný Doyle (7, 8, 9). Preto podľa a) nie je pravda, že Adamsová je vinná a Mills je nevinný (10, 14). Teda Adamsová nie je vinná alebo Mills nie je nevinný. Prvú možnosť (11) vylučuje predpoklad tohto prípadu. Ostáva teda druhá možnosť (12), čiže Mills je vinný (13).

Teraz predpokladajme, že je vinný Doyle (17). Podľa b) je vinná Adamsová alebo je vinný Mills (19). Keby bola vinná Adamsová (20), podľa c) by bol Doyle nevinný (21, 22), čo je však v spore s predpokladom tohto prípadu. Preto opäť ostáva iba možnosť, že Mills je vinný (24).

Z predpokladu pravdivosti zistení a) – d) sme teda vo všetkých možných prípadoch dospeli k tomu, že Mills je vinný, čo bolo treba dokázať. □

💡 Použitie pravidla β na implikáciu, pri ktorom sa hneď uzavrie ľavá vetva, sa dá čítať ako modus ponens: „Pretože ak *X*, tak *Y*, a platí *X*, platí aj *Y*.“ V tomto dôkaze sa hodí pri implikáciách b) a c).

Keď sa pravidlo β použije na implikáciu a hneď sa uzavrie pravá vetva, môžeme ho čítať ako modus tollens: „Pretože ak *X*, tak *Y*, a neplatí *Y*, neplatí ani *X*.“ To sa hodí pre implikáciu a).

💡 V prípade priameho dôkazu je ešte jedna možnosť (okrem vyššie uvedených), ako čítať použitie pravidla β na implikáciu $\mathbf{T}(X \rightarrow Y)$ – nahradenie doterajšieho cieľa jeho postačujúcou podmienkou: „Pretože ak X , tak Y , a máme dokázať Y , postačí dokázať X .“

Keď naopak *dokazujeme* implikáciu, teda tablo obsahuje označenú formulu $\mathbf{F}(X \rightarrow Y)$, zvyčajne na ňu aplikujeme pravidlá α s dôsledkami $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}Y$. Obvyklé čítanie týchto krokov je: „Chceme dokázať, že ak X , tak Y . Predpokladajme teda X a dokážme Y .“

Pri našom dôkaze sa síce tieto situácie nevyskytli, ale nájdú využitie napríklad pri čítaní tabiel v iných úlohách. ⌋

5.1.2 Dokážte, že $T \models_p X$, pričom $T = \{A_1, \dots, A_7\}$ a T je splniteľná, kde:

(A_1) ($\text{kino}(\text{Fero}, \text{Anka}) \vee (\text{pocuva}(\text{Fero}, \text{PinkFloyd}) \vee \text{hra}(\text{Fero}, \text{FeroPS}))$)

(A_2) ($\text{kapela}(\text{PinkFloyd}) \wedge \text{hraciaKonzola}(\text{FeroPS})$)

(A_3) ($\neg \text{frustrovany}(\text{Fero}) \rightarrow \text{kino}(\text{Fero}, \text{Anka})$)

(A_4) ($\text{frustrovany}(\text{Fero}) \rightarrow (\text{pocuva}(\text{Fero}, \text{PinkFloyd}) \vee \text{hra}(\text{Fero}, \text{FeroPS}))$)

(A_5) ($\neg(\text{kino}(\text{Fero}, \text{Anka}) \wedge (\text{pocuva}(\text{Fero}, \text{PinkFloyd}) \wedge \text{hra}(\text{Fero}, \text{FeroPS})))$)

(A_6) ($\text{hra}(\text{Fero}, \text{FeroPS}) \rightarrow \text{pocuva}(\text{Fero}, \text{PinkFloyd})$)

(A_7) ($\text{pocuva}(\text{Fero}, \text{PinkFloyd}) \rightarrow \neg \text{frustrovany}(\text{Fero})$)

výrokovologicky vyplýva formula:

(X) ($\neg \text{hra}(\text{Fero}, \text{FeroPS}) \rightarrow \text{kino}(\text{Fero}, \text{Anka})$)

Preložte teóriu, formulu aj dôkaz jej vyplývania do slovenčiny.

5.1.3 Dokážte, že z teórie $T = \{A_1, \dots, A_5\}$, kde:

(A_1) ($\text{mam}(\text{dazdnik}, \text{den}) \rightarrow \neg \text{prsi}(\text{den})$)

(A_2) ($\text{mokry}(\text{cesta}, \text{den}) \rightarrow (\text{prsi}(\text{den}) \vee \text{preslo}(\text{umyvacieAuto}, \text{cesta}, \text{den}))$)

(A_3) ($\text{vikend}(\text{den}) \rightarrow \neg \text{preslo}(\text{umyvacieAuto}, \text{cesta}, \text{den})$)

(A_4) ($(\text{utorok}(\text{den}) \rightarrow \text{idemElektrickou}(\text{den}))$

$\wedge ((\neg \text{utorok}(\text{den}) \wedge \neg \text{vikend}(\text{den})) \rightarrow \neg \text{idemElektrickou}(\text{den}))$)

(A_5) ($\text{idemElektrickou}(\text{den}) \rightarrow \neg \text{mam}(\text{dazdnik}, \text{den})$)

výrokovologicky vyplýva

(X) ($((\text{mam}(\text{dazdnik}, \text{den}) \wedge \text{mokry}(\text{cesta}, \text{den})) \rightarrow \neg \text{vikend}(\text{den}))$)

Preložte teóriu, formulu aj dôkaz jej vyplývania do slovenčiny.

5.1.4 Dokážte, že z tvrdení:

- (A_1) Vianočný darček kúpil otec alebo ho kúpila mama.
- (A_2) Darček kúpil otec a Ondrej je šťastný, len ak to bude spoločný darček s Hankou a aj ona je šťastná.
- (A_3) Určite sa nestane, aby ani Ondrej ani Hanka neboli šťastní.
- (A_4) Otec neznáša nakupovanie, takže sa z toho vždy vyvlečie.

vyplýva tvrdenie:

- (X) Ak by bol Ondro šťastný, iba ak by darček kúpil otec, tak nakupovala mama a Hanka je šťastná.

Tvrdenia sformalizujte v jazyku s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{kúpil}^2, \text{šťastný}^1\}$, dokážte vyplývanie tablom a dôkaz prepíšte do čo najprirodzenejšej slovenskej formy.

5.1.5 Predmet môže študent úspešne absolvovať iba vtedy, keď odovzdá domáce úlohy a úspešne absolvuje (spraví) riadny alebo náhradný test. Náhradný test môžu písať iba tí, čo boli chorí, ale keďže býva ľahký, tak ho aj hneď spravia (teda iba chorí mohli spraviť náhradný test). Riadny test spravia iba tí, ktorí sa učili alebo aspoň riešili domáce úlohy. Študenti, ktorí odovzdali domáce úlohy ich buď riešili alebo odpísali. Odpisujú ich ale iba flákači, čo sa neučia.

Dokážte v tablovom kalkule, že ak som predmet úspešne absolvoval a nebol som pri tom chorý, musel som riešiť domáce úlohy.

5.1.6 Pomocou tablového kalkulu vyriešte nasledujúce úlohy:

- a) Keď Katka nakreslí obrázok, je na ňom buď mačka alebo pes. Obrázok mačky Katkin pes vždy hneď roztrhá. Ak jej pes roztrhá obrázok, Katka je smutná. Dokážte, že ak Katka nakreslila obrázok a je šťastná (nie je smutná), tak na jej obrázku je pes.
- b) Bez práce nie sú koláče. Ak niekto nemá ani koláče, ani chleba, tak bude hladný. Na chlieb treba múku. Dokážte, že ak niekto nemá múku a je najedený (nie je hladný), tak pracoval.
- c) Bez oblakov niet dažďa (ak nie sú oblaky, nemôže pršať). Ak je cesta mokrá, tak prší alebo práve prešlo umývacie auto. Umývacie autá nechodia v sobotu (ak je sobota, tak umývacie autá nechodia). Dokážte, že ak je sobota a je mokrá cesta, tak je oblačno.

5.1.7 (Smullyan [4]) Inšpektor Nick Fishtrawn zaistil podozrivých Browna, Smitha, Taylora a McDonalda, pričom zistil, že:

- (A_1) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.
- (A_2) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.
- (A_3) Taylor nikdy nepracuje bez McDonalda.
- (A_4) McDonald je vinný, ak je Brown nevinný.

Dokážte pomocou tablového kalkulu, že z týchto skutočností vyplývajú nasledujúce tvrdenia (X) a (Y) .

(X) Ak je Taylor nevinný, tak je nevinný aj Brown.

(Y) McDonald je vinný.

5.1.8 Nech A, B a C sú ľubovoľné formuly v ľubovoľnom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu \mathcal{L} . Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú tautológie:

- | | |
|---|--|
| a) $((A \rightarrow B) \rightarrow$ | j) $(A \rightarrow (A \vee B)),$ |
| $((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))),$ | k) $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)),$ |
| b) $((\neg A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)),$ | l) $(\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)),$ |
| c) $(\neg\neg A \leftrightarrow A),$ | m) $(\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)),$ |
| d) $((((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A),$ | n) $(\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)),$ |
| e) $(A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))),$ | o) $((A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))),$ |
| f) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow$ | p) $((A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))),$ |
| $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))),$ | q) $((A \vee (A \wedge B)) \leftrightarrow A).$ |
| g) $(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))),$ | r) $((A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B),$ |
| h) $((((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow$ | s) $((\neg B \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow \neg A).$ |
| $((A \vee B) \rightarrow C)),$ | t) $((C \rightarrow A) \rightarrow$ |
| i) $(A \rightarrow (B \rightarrow A)),$ | $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow A))$ |

Riešenie.

🔗 Na začiatok je dobré si uvedomiť, že tablo pre množinu označených formúl môžeme konštruovať aj bez toho, aby sme poznali všetky ich detaily, teda v našom prípade podformuly A, B, C .

b) Zoberme ľubovoľné formuly A a B . Aby sme dokázali, že $((\neg A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \rightarrow A))$ je tautológia, stačí zistiť, či je množina $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \rightarrow A))\}$ nespĺniteľná, teda či pre ňu existuje uzavreté tablo.

💡 Pre formuly $(X \leftrightarrow Y)$ nemáme špeciálne tablové pravidlá, pretože tieto formuly sú iba skratky za $((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X))$. V table preto pracujeme s neskrátenou verziou.

1. $\mathbf{F}(((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \wedge ((B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)))$ S^+			
2. $\mathbf{F}((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A))$	$\beta 1$	11. $\mathbf{F}((B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B))$	$\beta 1$
3. $\mathbf{T}(\neg A \rightarrow \neg B)$	$\alpha 2$	12. $\mathbf{T}(B \rightarrow A)$	$\alpha 11$
4. $\mathbf{F}(B \rightarrow A)$	$\alpha 2$	13. $\mathbf{F}(\neg A \rightarrow \neg B)$	$\alpha 11$
5. $\mathbf{T}B$	$\alpha 4$	14. $\mathbf{T}\neg A$	$\alpha 13$
6. $\mathbf{F}A$	$\alpha 4$	15. $\mathbf{F}\neg B$	$\alpha 13$
7. $\mathbf{F}\neg A$	$\beta 3$	16. $\mathbf{F}A$	$\alpha 14$
8. $\mathbf{T}A$	$\alpha 7$	17. $\mathbf{T}B$	$\alpha 15$
* 6, 8		18. $\mathbf{F}B$ $\beta 12$	
9. $\mathbf{T}\neg B$ $\beta 3$		19. $\mathbf{T}A$ $\beta 12$	
10. $\mathbf{F}B$ $\beta 9$		* 17, 18	
* 6, 10		* 19, 16	

Našli sme uzavreté tablo pre množinu $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \rightarrow A))\}$, ktorá je teda nespĺniteľná, a preto $((\neg A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \rightarrow A))$ je tautológia. \models

5.2 Splniteľnosť, falzifikovateľnosť a nespĺniteľnosť v tabľách

5.2.1 O nasledujúcich formulách v jazyku \mathcal{L} , kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{p, q, r, s\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{c\}$ rozhodnite pomocou tablového kalkulu, či sú splniteľné, nespĺniteľné, tautológie, alebo falzifikovateľné. Pri každej formule sa vyjadrite ku všetkým 4 vlastnostiam.

$(X_1) ((p(c) \rightarrow q(c)) \vee (\neg q(c) \rightarrow r(c)))$

$(X_2) (((p(c) \rightarrow r(c)) \rightarrow p(c)) \rightarrow p(c))$

$(X_3) ((s(c) \vee r(c)) \rightarrow (\neg p(c) \wedge (\neg s(c) \rightarrow r(c)))$

$(X_4) ((p(c) \rightarrow r(c)) \wedge \neg(r(c) \vee \neg p(c)))$

$(X_5) ((p(c) \rightarrow (p(c) \vee r(c))) \rightarrow \neg(\neg p(c) \vee (p(c) \vee r(c))))$

$$(X_6) \quad (\neg((p(c) \vee r(c)) \rightarrow s(c)) \leftrightarrow ((\neg p(c) \wedge \neg r(c)) \wedge s(c)))$$

$$(X_7) \quad (\neg((p(c) \vee r(c)) \rightarrow s(c)) \leftrightarrow ((p(c) \wedge r(c)) \wedge \neg s(c)))$$

$$(X_8) \quad (((p(c) \rightarrow s(c)) \wedge (r(c) \rightarrow s(c))) \wedge \neg((p(c) \vee r(c)) \rightarrow s(c))),$$

$$(X_9) \quad (((\neg p(c) \rightarrow (p(c) \wedge q(c))) \vee ((p(c) \wedge q(c)) \wedge \neg q(c))) \vee ((p(c) \rightarrow s(c)) \vee \neg p(c)))$$

Riešenie. (X_1) Preverovanie vlastností formuly $X_1 = ((p(c) \rightarrow q(c)) \vee (q(c) \rightarrow r(c)))$ začneme tým, že sa pokúsime dokázať, že je tautológia, podobne ako v úlohe 5.1.8. Pokúsime sa teda uzavrieť tablo pre $S^+ = \{\mathbf{F}((p(c) \rightarrow q(c)) \vee (q(c) \rightarrow r(c)))\}$. Ak tablo uzavrieme v každej vetve, formula je tautológia. Naopak, ak nájdeme aspoň jednu úplnú a otvorenú vetvu, vieme z nej vyčítať ohodnotenie, v ktorom formula nie je pravdivá:

1.	$\mathbf{F}((p(c) \rightarrow q(c)) \vee (q(c) \rightarrow r(c)))$	S^+
2.	$\mathbf{F}(p(c) \rightarrow q(c))$	$\alpha 1$
3.	$\mathbf{F}(\neg q(c) \rightarrow r(c))$	$\alpha 1$
4.	$\mathbf{T}p(c)$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{F}q(c)$	$\alpha 2$
6.	$\mathbf{T}\neg q(c)$	$\alpha 3$
7.	$\mathbf{F}r(c)$	$\alpha 3$

Toto tablo má síce iba jednu vetvu, ale tá je úplná (viď definícia 5.23 z prednášky), ale nie je uzavretá (teda je otvorená). Formula X_1 teda *nie je tautológia*, lebo z úplnej a otvorenej vetvy končiacej v liste 7 môžeme skonštruovať ohodnotenie $v_1 = \{p(c) \mapsto t, q(c) \mapsto f, r(c) \mapsto f\}$, v ktorom je naša formula nepravdivá. Formula X_1 teda *je falzifikovateľná*.

Ďalej potrebujeme ešte preveriť, či existuje aj nejaké ohodnotenie, v ktorom je formula pravdivá, (teda či je splniteľná) alebo také ohodnotenie neexistuje (a teda formula je nespĺniteľná). Aby sme to zistili, pokúsime sa v table pre množinu $S^+ = \{\mathbf{T}((p(c) \rightarrow q(c)) \vee (q(c) \rightarrow r(c)))\}$, nájsť aspoň jednu úplnú otvorenú vetvu, alebo naopak toto tablo uzavrieť:

1. $\mathbf{T}((p(c) \rightarrow q(c)) \vee (q(c) \rightarrow r(c)))$ S^+			
2. $\mathbf{T}(p(c) \rightarrow q(c))$ $\beta 1$		5. $\mathbf{T}(\neg q(c) \rightarrow r(c))$ $\beta 1$	
3. $\mathbf{F}p(c)$ $\beta 2$	4. $\mathbf{T}q(c)$ $\beta 2$		

Tablo sme ani nemuseli dokončiť, pretože po aplikovaní dvoch β -pravidiel (najprv pre disjunkciu, a potom pre implikáciu na ľavej strane) sme našli hneď dve otvorené a úplné vetvy (s listami 3 a 4). Z nich vieme vyčítať, že vo všetkých ohodnoteniach v , pre ktoré $v(p(c)) = f$ alebo $v(q(c)) = t$, je formula X_1 pravdivá. Konkrétne je napríklad podľa vetvy s listom 3 pravdivá v ohodnotení $v_2 = \{p(c) \mapsto f, q(c) \mapsto f, r(c) \mapsto f\}$. Formula X_1 teda *je splniteľná a nie je nespĺniteľná*. Tým sme zodpovedali všetky otázky zo zadania. \square

💡 Pokiaľ sa nám podarí správne uhádnuť, že je formula X tautológia, postačí, ak urobíme tablo pre $\{FX\}$ a všetky vetvy sa nám podarí uzavrieť. Keďže tým dokážeme, že formula je pravdivá vo všetkých ohodnoteniach, nie je už potrebné hľadať nejaké konkrétne — formula je splniteľná (je pravdivá napríklad v ohodnotení, kde sú všetky atómy nepravdivé), nie je falzifikovateľná ani nespľniteľná.

Podobne, ak sa nám zdá, že je formula nespľniteľná, môžeme začať tablom pre $\{TX\}$. Ak sa nám ho podarí uzavrieť, nemusíme už robiť tablo pre $\{FX\}$. Vieme, že X je nepravdivá vo všetkých ohodnoteniach, teda je falzifikovateľná, nie je splniteľná ani tautológia.

⚠️ Študenti sa občas pokúšajú vyjadrovať k vlastnostiam formuly na základe *uzavretých* vetiev v úplných, ale *otvorených tabľách*. Samotná uzavretá vetva nám však neposkytuje *žiadne informácie*, lebo nezodpovedá žiadnemu ohodnoteniu. Keby zodpovedala, nejaká formula by v tomto ohodnotení musela byť súčasne pravdivá aj nepravdivá, čo nie je možné.

💡 Závěry teda môžeme vyvodzovať iba z dvoch stavov tabla:

- Tablo je uzavreté, t.j. všetky vetvy sú uzavreté. Potom je množina označených formúl, pre ktorú sme tablo vytvorili, nespľniteľná.
- Tablo obsahuje *otvorenú a úplnú* vetvu. Potom je množina, pre ktorú sme tablo vytvorili, splniteľná. Z vetvy môžeme určiť aspoň jedno ohodnotenie, v ktorom je pravdivá. Špeciálny prípad tejto možnosti je, že je otvorené a úplné celé tablo (všetky vetvy sú úplné alebo uzavreté, niektorá je otvorená). Vtedy môžeme z vetiev určiť postupne všetky ohodnotenia, v ktorých je množina označených formúl, pre ktorú sme tablo vytvorili, pravdivá.

5.2.2 Pomocou tablového kalkulu nájdite aspoň dve ohodnotenia predikátových atómov, v ktorých sú pravdivé nasledujúce teórie v jazyku \mathcal{L} , kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{p, r, s\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{a, c\}$. Vyznačte časť tabla, ktorá dokazuje vašu odpoveď a zdôvodnite ju.

$$T_1 = \{(p(a) \rightarrow (r(c) \vee s(c))), (p(a) \vee r(c))\},$$

$$T_2 = \{((r(c) \wedge s(c)) \rightarrow p(a)), (p(a) \vee r(c))\},$$

$$T_3 = \{(p(a) \rightarrow (r(c) \vee s(c))), (\neg r(c) \vee \neg s(c))\}.$$

5.2.3 Príklad. (Smullyan [4]) Pripomeňme si prípad lúpeže v klenotníctve z úlohy 5.1.1: Na políciu predviedli troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

- Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.
- Doyle nikdy nepracuje sám.
- Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.

- d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Pomocou tablového kalkulu rozhodnite, kto z podozrivých je vinný, kto nevinný, a o koho vine alebo nevine nemožno rozhodnúť. Svoje závery slovne zdôvodnite.

Riešenie. Naším cieľom je zistiť, ktorého z podozrivých možno s istotou obviňiť, ktorý je určite nevinný, a vinu ktorého nemôžeme s istotou ani potvrdiť ani vyvrátiť.

Pri formalizácii sme v úlohe rozpoznali tri atomické formuly vinný(Mills), vinný(Doyle) a vinný(Adamsová) v jazyku \mathcal{L} , kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{vinný}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Mills, Doyle, Adamsová}\}$. Pre lepšiu čitateľnosť riešenia si jednotlivé atomické formuly označíme nasledovne: $M = \text{vinný(Mills)}$, $D = \text{vinný(Doyle)}$ a $A = \text{vinný(Adamsová)}$. Zistenia a)–d) sme sformalizovali do nasledovnej teórie:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} ((A \wedge \neg M) \rightarrow D), \\ (D \rightarrow (A \vee M)), \\ (A \rightarrow \neg D), \\ (A \vee (M \vee D)) \end{array} \right\}.$$

Úlohu riešime tablovým kalkulom.

Aby sme mohli naše logické závery interpretovať vo svete slovnej úlohy (teda odvodzovať praktické dôsledky), musíme najprv preveriť, či je T splniteľná. Na to sa v table pre $T^+ = \{\mathbf{T}((A \wedge \neg M) \rightarrow D), \mathbf{T}(D \rightarrow (A \vee M)), \mathbf{T}(A \rightarrow \neg D), \mathbf{T}(A \vee (M \vee D))\}$ pokúsime nájsť aspoň jednu úplnú otvorenú vetvu:

1. $\mathbf{T}((A \wedge \neg M) \rightarrow D) \quad T^+$
2. $\mathbf{T}(D \rightarrow (A \vee M)) \quad T^+$
3. $\mathbf{T}(A \rightarrow \neg D) \quad T^+$
4. $\mathbf{T}(A \vee (M \vee D)) \quad T^+$

5. $\mathbf{F}(A \wedge \neg M) \quad \beta 1$		6. $\mathbf{T}D \quad \beta 1$			
7. $\mathbf{F}D \quad \beta 2$ * 6, 7		8. $\mathbf{T}(A \vee M) \quad \beta 2$			
		9. $\mathbf{T}A \quad \beta 8$		10. $\mathbf{T}M \quad \beta 8$	
		11. $\mathbf{F}A \quad \beta 3$			16. $\mathbf{T}\neg D \quad \beta 3$
		12. $\mathbf{T}A \quad \beta 4$ * 11, 12			17. $\mathbf{F}D \quad \alpha 16$ * 6, 17
		13. $\mathbf{T}(M \vee D) \quad \beta 4$			
		14. $\mathbf{T}M \quad \beta 13$	15. $\mathbf{T}D \quad \beta 13$		

Toto sa nám aj podarilo, keďže vetvy končiace v 14 a 15 sú obe otvorené a úplné. Teda T je splniteľná. Na otázku, ktorý z obvinených je určite vinný či nevinný, môžeme teda zmysluplne odpovedať pomocou vyplývania.

V riešení úlohy 5.1.1 sme už dokázali, že $T \models M$. Presnejšie, podarilo sa nám uzavrieť všetky vetvy tabla pre množinu $T_M^+ = \{\mathbf{T}((A \wedge \neg M) \rightarrow D), \mathbf{T}(D \rightarrow (A \vee M)), \mathbf{T}(A \rightarrow \neg D), \mathbf{T}(A \vee (M \vee D)), \mathbf{F}M\}$. Keďže T je splniteľná teória, môžeme usúdiť, že Mills je vinný.

O vine, či nevine Adamsovej a Doylea môžeme rozhodnúť obdobným postupom. Pre dôkaz viny Adamsovej, teda vyplývania $T \models A$, by sme potrebovali nájsť uzavreté tablo pre množinu $T_A^+ = \{\mathbf{T}((A \wedge \neg M) \rightarrow D), \mathbf{T}(D \rightarrow (A \vee M)), \mathbf{T}(A \rightarrow \neg D), \mathbf{T}(A \vee (M \vee D)), \mathbf{F} A\}$, podobne ako pre dôkaz viny Millsa. Ak sa nám tablo nepodarí uzavrieť, teda aspoň jedna vetva tabla bude úplná otvorená, Adamsovú obviniť nemôžeme.

To však ešte nestačí na rozhodnutie o tom, či je Adamsová *určite* nevinná. Na to potrebujeme dokázať, že tvrdenie „Adamsová je nevinná“ vyplýva z T , čiže $T \models \neg A$. Dosiahneme to nájdením uzavretého tabla pre množinu $T_{\neg A}^+ = \{\mathbf{T}((A \wedge \neg M) \rightarrow D), \mathbf{T}(D \rightarrow (A \vee M)), \mathbf{T}(A \rightarrow \neg D), \mathbf{T}(A \vee (M \vee D)), \mathbf{F} \neg A\}$.

Ak aj teraz dospejeme k tablu s aspoň jednou úplnou otvorenou vetvou, nemôžeme o Adamsovej na základe našej konzistentnej teórie T rozhodnúť ani to, že je nevinná. Formula A je potom nezávislá od teórie T : Z úplnej otvorenej vetvy prvého tabla skonštruujeme ohodnotenie, v ktorom je pravdivá T , ale A je nepravdivá. Z úplnej otvorenej vetvy druhého tabla skonštruujeme iné ohodnotenie, v ktorom je pravdivá T , ale $\neg A$ je nepravdivá, teda A je pravdivá. Adamsovú vtedy nemôžeme s istotou obviniť, ani si nemôžeme byť istí jej nevinnou. Polícia v takých prípadoch podozrivých prepúšťa pre nedostatok dôkazov. \dashv

5.2.4 (Smullyan [4]) Pripomeňme si prípad bankovej lúpeže z úlohy 5.1.7: Inšpektor Nick Fishtrawn zaistil podozrivých Browna, Smitha, Taylora, a McDonalda, pričom zistil, že:

- (A₁) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.
- (A₂) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.
- (A₃) Taylor nikdy nepracuje bez McDonalda.
- (A₄) McDonald je vinný, ak je Brown nevinný.

Zistili sme, že vinný je McDonald. Dokážte jeho vinu tablovým kalkulom. Podobne dokážte, že Browna nemožno obviniť, ani jeho vinu vyvrátiť. Svoje závery slovne zdôvodnite.

5.2.5 Inšpektorka Veszprémiová zistila, že lúpež v Budapeštianskej záložni spáchal niekto z dvoch podozrivých: Balogh alebo Cucz. Inšpektorka vie, že Balogh nikdy nepracuje sám. Svedok Nagy vypovedal, že Cucz bol v čase lúpeže spolu s ním v kine Uránia na filme *Čas sa zastaví*.

Koho môže inšpektorka na základe týchto informácií obviniť? Úlohu riešte tablovým kalkulom.

5.2.6 (Smullyan [4]) Londýnsky obchodník, pán McConnor, telefonoval do Scotland Yardu, že sa stal obeťou lúpeže. Detektívi predviedli na výsluch troch podozrivých X , Y , Z a zistili nasledujúce fakty:

- (A₁) Každý z podozrivých X, Y, Z bol v McConnorovom obchode v deň lúpeže a nik iný tam v ten deň nebol.
- (A₂) X vždy pracuje s práve jedným spoločníkom.
- (A₃) Z nie je vinný alebo je vinný Y.
- (A₄) Ak sú vinní práve dvaja, tak X je jedným z nich.
- (A₅) Y je vinný, iba ak je vinný aj Z.
- Koho má inšpektorka Fishcousová obviníť?

5.2.7 (Smullyan [4]) Inšpektor Herring so Scotland Yardu predviedol na výsluch troch podozrivých z prepadnutia taxíka: Parkera, Roberta a Smitha. Na výsluchu boli zistené nasledovné skutočnosti:

- (A₁) Taxík bol prepadnutý potom, ako bol privolaný do hostinca, v ktorom v tom čase popíjali Parker a Roberts. V hostinci bol s nimi už len hostinský Smith.
- (A₂) Parker je známy lupič, vie sa však o ňom, že má vždy komplica.
- (A₃) Roberts bol v čase incidentu natoľko podgurážený, že nebol pri zmysloch, a nemohol sa teda na lúpeži podieľať.

Pomocou tablového kalkulu zistíte o každom z podozrivých, či je ho možné obviníť, či je naopak nevinný, alebo či ho bude musieť inšpektor Herring so škripajúcimi zubami prepustiť pre nedostatok dôkazov.

5.2.8 (Smullyan [4]) Z lúpeže v Miláne polícia podozrieva tri známe kriminálničky: Aidu P., Biancu D. a Chiaru P. Aida a Chiara sú identické dvojčičky a málokto ich dokáže rozoznať. Všetky podozrivé majú bohaté trestné spisy a policajti dobre poznajú ich povahy a zvyky. Konkrétne, dvojčičky sú dosť nesmelé a žiadna by sa neodvážila na záťah bez spolupáchateľa. Bianca D. je naopak veľmi odvážna a neznáša spoliehať sa na komplicov. Niekoľko svedkov tiež uviedlo, že v čase lúpeže videli jednu z dvojčičiek v bare v Janove, ale nevie sa, o ktorú z nich išlo.

Za predpokladu, že nikto okrem podozrivých sa lúpeže nezúčastnil, ktoré z nich sú vinné a ktoré nevinné?

5.2.9 Pomocou formalizácie a tablového kalkulu vyriešte nasledujúce problémy nájdením dôkazu alebo kontrapríkladu.

- a) Chceme na párty pozvať niekoho z trojice Jim, Kim a Sára, bohužiaľ každý z nich má nejaké svoje podmienky: Sára nepôjde na párty, ak pôjde Kim. Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim. Sára nepôjde bez Jima.
- Je pravda, že na párty pôjde Kim a nepôjde Sára?

- b) Anka ide do práce autom vždy, keď prší. Ak neprší, ide do práce na bicykli. Keď ide do práce na bicykli, má celý deň dobrú náladu.
Je pravda, že ak Anka nejde do práce autom, má celý deň dobrú náladu?
- c) Ak by metalová kapela nemohla hrať alebo by občerstvenie nedodali načas, silvestrovská oslava by sa musela zrušiť a Rudy by zúril. Ak by sa oslava musela zrušiť, organizátori by vrátili vstupné. Organizátori vstupné nevrátili.
Je pravda, že metalová kapela mohla hrať?

5.2.10 Pomocou formalizácie a tablového kalkulu overte správnosť úsudkov a ich zdôvodnení, pričom:

- ak je úsudok chybný, nájdite kontrapríklad;
- ak je chybné zdôvodnenie, vysvetlite, kde a aké sú v ňom chyby;
- ak je úsudok správny, ale zdôvodnenie chybné, napíšte podľa tablového dôkazu správne slovné zdôvodnenie.

Pracujte s nasledujúcimi úsudkami a zdôvodneniami. V prvom prípade sme premisy a záver úsudku a jeho zdôvodnenie vyznačili. V druhom prípade sami rozpoznajte tieto časti.

- a) *Premisy:* Do laboratória sa dostanem, ak si nezabudnem čipovú kartu.
Vždy, keď si zabudnem čipovú kartu, nemám ani peňaženku.
Záver: Takže ak nemám peňaženku, nedostanem sa do laboratória.
Zdôvodnenie: Je to tak preto, že keď nemám peňaženku, zabudol som si čipovú kartu, a teda sa nemám ako dostať do laboratória.
- b) Ak by na protest neprišli desaťtisíce občanov alebo by boli jeho účastníci agresívni, protest by nebol úspešný a predseda vlády by neodstúpil. Ak by boli účastníci protestu agresívni, zasiahla by polícia. Polícia nezasiahla. Preto ak predseda vlády odstúpil, na protest prišli desaťtisíce občanov.
Pretože polícia nezasiahla, účastníci protestu neboli agresívni. Predpokladajme, že predseda vlády odstúpil. Protest bol teda úspešný, a preto naň prišli desaťtisíce občanov alebo jeho účastníci boli agresívni. Už sme však zistili, že druhá možnosť nenastala. Preto musí platiť prvá, teda na protest prišli desaťtisíce občanov, čo sme chceli dokázať.

5.2.11 Príklad. Alica a Bonifác si plánujú spoločný valentínsky večer. Rozhodujú sa, či pôjdu na večeru, do kina, do divadla, alebo do wellnessu. Majú však nasledujúce podmienky:

1. Alica usúdila, že ak by šli na večeru a tiež do divadla, wellness by už určite nestihli.
2. Bonifác zhodnotil, že potom ale určite musia ísť do wellnessu, ak nepôjdu na večeru ani do divadla.
3. Alici sa zdá divadlo nezlúčiteľné s wellnessom.
4. Bonifác trvá na tom, že aspoň nejaké kultúrne podujatie absolvovať musia (a teda trvá na divadle alebo kine).
5. Alica uznala argument o kultúre, ale nechce ísť do divadla, keďže by si nestihla kúpiť vhodné šaty.

Podarí sa Alici a Bonifácovi vybrať nejaký program? Aké majú možnosti?

Na otázky odpovedajte pomocou tablového kalkulu. Jasne vyjadrite:

- akému logickému problému zodpovedá vyriešenie slovnej úlohy,
- ako vaše tablo alebo tablá tento logický problém riešia,
- akému riešeniu slovnej úlohy zodpovedá nájdené riešenie logického problému.

Riešenie.

💡 Na riešenie tejto slovnej úlohy použijeme zvyčajný postup:

- i. Sformalizujeme tvrdenia zodpovedajúcimi formulami vo vhodnom jazyku.
- ii. Určíme logické problémy, ktoré musíme vyriešiť na zodpovedanie otázok z úlohy.
- iii. Vyriešime tieto problémy vhodnými prostriedkami (v tomto prípade máme použiť tablá) a sformulujeme príslušné logické závery.
- iv. Zinterpretujeme logické závery ako odpovede na otázky zo slovnej úlohy.

Aby bolo jasnejšie, v ktorej fáze sa nachádzame, tieto kroky v riešení vyznačíme.

i. Cieľom úlohy je zistiť, či a ako môžu Alica s Bonifácom stráviť valentínske rande. Zvolíme si prvorádový jazyk \mathcal{L} , ktorý mám umožní sformalizovať ich podmienky bez nepodstatných detailov. Postačia nám na to mimologické symboly $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{rande}^3, \text{v_kine}^1, \text{v_divadle}^1, \text{na_večeri}^1, \text{vo_wellness}^1\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{r, \text{Alica}, \text{Bonifác}\}$, pričom konštanta r označuje Alicino a Bonifácovo rande a zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\text{rande}(x, y, z)$	x je rande, na ktoré idú y a z
$\text{v_divadle}(x)$	rande x sa odohrá v divadle
$\text{v_kine}(x)$	rande x sa odohrá v kine
$\text{na_večeri}(x)$	rande x sa odohrá na večeri
$\text{vo_wellness}(x)$	rande x sa odohrá vo wellness

Alicine a Bonifácove podmienky sformalizujeme ako teóriu $T = \{A_0, \dots, A_5\}$ s nasledujúcimi formulami:

- $(A_0) \text{ rande}(r, \text{Alica}, \text{Bonifác})$
- $(A_1) ((\text{na_večeri}(r) \wedge \text{v_divadle}(r)) \rightarrow \neg \text{vo_wellness}(r))$
- $(A_2) (\neg(\text{na_večeri}(r) \vee \text{v_divadle}(r)) \rightarrow \text{vo_wellness}(r))$
- $(A_3) (\text{v_divadle}(r) \rightarrow \neg \text{vo_wellness}(r))$
- $(A_4) (\text{v_divadle}(r) \vee \text{v_kine}(r))$
- $(A_5) \neg \text{v_divadle}(r)$

💡 Otázky v tejto úlohe nesmerujú k zisteniu, aký program *musia* Alica a Bonifác *nutne* mať, aby splnili svoje podmienky. Z logického hľadiska sa teda *nepýtame na vyplývanie*.

Pýtame sa na to, aké majú *možnosti* stráviť rande tak, aby boli podmienky splnené. Rôzne možnosti splnenia podmienok v logike predstavujú rôzne *modely* teórie T , ktorá tieto podmienky formalizuje. Ak by napríklad v nejakom modeli T boli pravdivé atómy $\text{v_divadle}(r)$, $\text{vo_wellness}(r)$ a nepravdivé atómy $\text{v_kine}(r)$, $\text{na_večeri}(r)$, znamenalo by to, že podmienky 1–5 by boli splnené, keby Alica a Bonifác išli na rande (zrejme v nejakom poradí) do divadla a do wellness, ale zároveň nie do kina ani na večeru.

Úlohám tohto typu sa hovorí *konfiguračné*.

ii. Otázku, či sa Alici a Bonifácovi podarí vybrať nejaký program, zodpovieme na základe vyriešenia logického problému, či je teória T splniteľná. V prípade, že by teória bola nesplniteľná, teda nemala by žiadne modely, neexistuje možnosť, ako vyhovieť súčasne všetkým Bonifácovým a Aliciným požiadavkám, program sa im teda vybrať nepodarí. Rovnako by sme interpretovali stav, kedy by teória mala len jeden model a v ňom by jednotlivým predikátovým atómom predstavujúcim formu rande bola priradený pravdivostná hodnota f .

Otázku, aké možnosti majú Alica a Bonifác na svojom rande, zodpovieme nájdením *všetkých* modelov teórie T .

iii. Modely teórie nájdeme skonštruovaním tabla pre množinu označených formúl $S^+ = \{T A_0, \dots, T A_5\}$. Týmto tablom vieme overiť splniteľnosť, podobne ako v úlohe 5.2.1, nájdením úplnej otvorenej vetvy. Ako už vieme zo spomínanej úlohy, z tejto vetvy vieme vyčítať jedno či viac ohodnotení, v ktorých je S^+ (a teda aj T) pravdivá.

💡 V prípade, že sa predikátový atóm $p(c)$, nachádzajúci sa v teórii, v otvorenej a úplnej vetve nenachádza ani s označením **T**, ani s označením **F**, znamená to, že pravdivostná hodnota tohto atómu nemá vplyv na daný model teórie, ktorý vieme z tejto úplnej otvorenej vetvy vyčítať. Z vetvy teda vyčítame jednak modely v_i , v ktorých $p(c) \mapsto t$, ale tiež modely v_j , v ktorých $p(c) \mapsto f$. Počet modelov, ktoré vieme z otvorenej a úplnej vetvy vyčítať, teda závisí od počtu predikátových atómov, ktoré nevystupujú v tejto vetve s jedným z označení.

V našej úlohe hľadáme *všetky* modely. Neuspokojíme sa preto s nájdením jednej otvorenej a úplnej vetvy, ale tablo pre S^+ spravíme úplné – *všetky* vetvy budú úplné alebo uzavreté. Všetky ohodnotenia, v ktorých je S^+ pravdivá, potom vyčítame z tých vetiev, ktoré sú otvorené a úplné.

⚠ Uzavretá vetva nezodpovedá žiadnemu ohodnoteniu. Keby zodpovedala, nejaká formula by v tomto ohodnotení musela byť súčasne pravdivá aj nepravdivá, čo nie je možné.

Pre prehľadnosť riešení v zbierke takéto tablo neuvádzame. Vypracujte ho samostatne. Z jeho úplných a otvorených vetiev by ste mali potom určiť nasledujúce modely:

$$\begin{aligned} v_1 &= \{\text{rande}(r, \text{Alica}, \text{Bonifác}) \mapsto t, \\ &\quad \text{v_divadle}(r) \mapsto f, \text{v_kine}(r) \mapsto t, \text{na_večeri}(r) \mapsto t, \text{vo_wellness}(r) \mapsto f\} \\ v_2 &= \{\text{rande}(r, \text{Alica}, \text{Bonifác}) \mapsto t, \\ &\quad \text{v_divadle}(r) \mapsto f, \text{v_kine}(r) \mapsto t, \text{na_večeri}(r) \mapsto f, \text{vo_wellness}(r) \mapsto t\} \\ v_3 &= \{\text{rande}(r, \text{Alica}, \text{Bonifác}) \mapsto t, \\ &\quad \text{v_divadle}(r) \mapsto f, \text{v_kine}(r) \mapsto t, \text{na_večeri}(r) \mapsto t, \text{vo_wellness}(r) \mapsto t\}. \end{aligned}$$

Nájdením úplných otvorených vetiev v table a k nim prislúchajúcich modelov sme súčasne overili splniteľnosť teórie.

iv. Vďaka menovaným modelom teórie vieme odpovedať na otázky zo zadania: Alici a Bonifácovi sa podarí vybrať program na valentínsky večer. Majú pritom dve možnosti, ako ho stráviť: Ohodnoteniu v_1 zodpovedá možnosť, že pôjdu do kina a na večeru, pričom nepôjdu do divadla a do wellness. Ohodnotenie v_2 zodpovedá možnosti, v ktorej pôjdu do kina a do wellness, no nepôjdu na večeru, ani do divadla. A ohodnoteniu v_3 zodpovedá možnosť, že pôjdu aj do kina, aj na večeru, aj do wellness, no nepôjdu do divadla. \models

5.2.12 Pani Betka si chce kúpiť auto. Zohľadnením Betkiných preferencií ako aj možností dodávateľa zistíte, aké typy karosérie (sedan, kombi, ...) a v akých farbách pripadajú do úvahy:


1. Betka si kúpi auto. Určite však nie čierne.
2. Každé auto (u predajcu, ktorého si vybrala) je buď sedan, kombi, alebo kabriolet.
3. Kabriolety majú len červené.

4. Sedany a kombi mali zasa len biele alebo čierne.
5. Ak kúpi biele auto, určite to nebude sedan.
6. Kabriolety nie sú kombi; kabriolety tiež nie sú sedany; ani sedany nie sú kombi. (Čiže typy karosérie sú navzájom disjunktné.)
7. Červené veci nie sú čierne; červené veci nie sú ani biele; ani čierne veci nie sú biele. (Opäť ide o vzájomnú disjunktnosť.)

Na otázku odpovedzte pomocou tablového kalkulu. Jasne vyjadrite:

- ako úlohu formalizujete,
- akému logickému problému zodpovedá vyriešenie úlohy,
- ako vaše tablo alebo tablá tento logický problém riešia,
- akému riešeniu úlohy zodpovedá nájdené riešenie logického problému.

Na riešenie nie je potrebné tablo či tablá s viac ako 60 uzlami.

 **Pomôcka.** Všeobecné tvrdenia vhodne špecializujte. Číslovanie tvrdení je iba orientačné. Tvrdenia, ktoré majú povahu konjunkcie viacerých častí, je výhodnejšie sformalizovať viacerými formulami.


5.3 Korektné pravidlá


5.3.1 Dokážte, že nasledujúce tablové pravidlá sú korektné:

$\frac{T(X \rightarrow Y) \quad TX}{TY} \quad (MP)$	$\frac{T(X \rightarrow Y) \quad FY}{FX} \quad (MT)$
$\frac{T(X \vee Y) \quad FX}{TY} \quad (DS)$	$\frac{T(X \vee Y) \quad FY}{TX} \quad (DS)$
$\frac{F(X \wedge Y) \quad TX}{FY} \quad (NCS)$	$\frac{F(X \wedge Y) \quad TY}{FX} \quad (NCS)$
$\frac{TX \mid FX}{\quad} \quad (cut)$	$\frac{T(X \rightarrow Y) \quad T(Y \rightarrow Z)}{T(X \rightarrow Z)} \quad (HS)$
$\frac{T(X_1 \leftrightarrow X_2) \quad TX_i}{TX_{3-i}} \quad (ESTT)$	$\frac{T(X_1 \leftrightarrow X_2) \quad FX_i}{FX_{3-i}} \quad (ESTF)$

$$\begin{array}{c}
\frac{F(X_1 \leftrightarrow X_2) \quad T X_i}{F X_{3-i}} \quad (\text{ESFT}) \\
\frac{T(X \leftrightarrow Y)}{T(X \wedge Y) \mid F(X \vee Y)} \quad (\text{ECDT})
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\frac{F(X_1 \leftrightarrow X_2) \quad F X_i}{T X_{3-i}} \quad (\text{ESFF}) \\
\frac{F(X \leftrightarrow Y)}{T(X \wedge \neg Y) \mid F(X \vee \neg Y)} \quad (\text{ECDF})
\end{array}$$

Tieto pravidlá sa nazývajú: (MP) modus ponens, (MT) modus tolens, (DS) disjunktívny sylogizmus, (HS) hypotetický sylogizmus, (cut) rez. Pravidlo (NCS) je variácia (DS) pre nesplnenú konjunkciu. Pravidlá (ES..) sú verziami (MP) a (MT) pre ekvivalenciu. V nich $i \in \{1, 2\}$ a všimnite si, že $3 - 1 = 2$ a $3 - 2 = 1$. Pravidlo (ECDT) redukuje pravdivú ekvivalenciu na prípady, že sú jej „priame“ podformuly obe pravdivé alebo obe nepravdivé. Pravidlo (ECDF) je analogické.

 **Pomôcka.** Definíciu korektnosti pravidla a príklady jej dôkazov nájdete v poznámkach z prednášok.

 V nasledujúcich úlohách môžete použiť tablový kalkulus rozšírený o vyššie uvedené pravidlá. Vzniknú tak pravdepodobne prehľadnejšie a menšie tabľá, ktoré sa ľahšie interpretujú ako dôkaz v prirodzenom jazyku.

5.3.2 Prechádzate sa v labyrinte a zrazu sa ocitnete na križovatke, z ktorej vedú tri možné cesty: cesta naľavo je vydláždená zlatom, cesta pred vami je vydláždená mramorom a cesta napravo je vysypaná kamienkami. Každú cestu stráži strážnik a každý z nich vám povie niečo o cestách:

Strážnik zlatej cesty: „Táto cesta vedie priamo do stredu labyrintu. Navyše, ak vás kamienky dovedú do stredu, tak vás do stredu dovedie aj mramor.“

Strážnik mramorovej cesty: „Ani zlato, ani kamienky nevedú do stredu labyrintu.“

Strážnik kamienkovej cesty: „Nasledujte zlato a dosiahnete stred, nasledujte mramor a stratíte sa.“

Viete, že všetci strážnici stále klamú.

- i. Dá sa na základe uvedených informácií rozhodovať o tom, ktoré cesty vedú a ktoré nevedú do stredu labyrintu?
- ii. O ktorých cestách môžete s istotou povedať, že vedú do stredu labyrintu?
- iii. Ktoré z ciest určite nevedú do stredu labyrintu?

- iv. O ktorých cestách sa nedá rozhodnúť, že do stredu labyrintu vedú alebo nevedú?

Vašou úlohou je:

- Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokologickú teóriu vo vhodnom jazyku, pričom význam symbolov stručne vysvetlíte.
- Určiť, aké logické problémy zodpovedajú otázkam i–iv (napr. rozhodnutie, či nejaká konkrétna formula je tautológia, nejaká konkrétna teória je pravdivá v nejakom ohodnotení, konkrétna formula vyplýva z konkrétnej teórie a pod.).
- Vyriešiť tieto problémy v *rozšírenom tablovom kalkule* s pravidlami z predchádzajúcej úlohy prednášky.
- Zodpovedať otázky i–iv na základe riešení logických problémov.

5.3.3 Štyria spolužiaci sa dohadujú, kedy pôjdu na pivo do krčmy Pod Machnáčom:

- Do úvahy pripadajú tri večery, utorok až štvrtok.
- Fero povedal, že v utorok aj v stredu určite príde.
- Zuzka povedala, že vo štvrtok príde.
- Jožo povedal, že pôjde, len ak pôjde aspoň jedno dievča.
- Katka nepôjde, ak pôjde Fero.
- Zuzka pôjde, len ak pôjde Katka.
- Všetci vedia, že Fero chodí do krčmy len v utorok, lebo v stredu je v telke futbal a vo štvrtok má tréning.

Pomocou prostriedkov výrokovej logiky zistíte, v ktoré večery a v akom zložení môžu spolužiaci ísť na pivo.

5.3.4 Malá firma vyrába prístrojové skrinky z viacerých materiálov, s rôznymi povrchovými úpravami a v niekoľkých farbách. Aj keď je zdanlivo možných viac ako tisíc kombinácií, nie všetky sa dajú vyrobiť. Vybavenie firmy, vlastnosti materiálov a výrobné postupy kladú nasledujúce obmedzenia:

- | | |
|---|--|
| (X_1) Skrinky sa vyrábajú z materiálov: | (X_4) Brúsenú povrchovú úpravu môžu mať iba nelakované kovové skrinky. |
| (X_2) Hliník a oceľ sú kovy. | |
| (X_3) Iba oceľ sa dá lakovať. | (X_5) Lakované skrinky aj plastové |

skrinky sú čierne, biele, alebo zelené.

(X₆) Nelakované oceľové skrinky koroďujú.

dvoch rôznych kovov.

(X₈) Eloxovať sa dajú iba hliníkové skrinky a po tejto úprave sú buď sivé alebo čierne.

(X₇) Koróziu spôsobí aj kombinácia (X₉) Korózia je neprípustná.

Zákazník požaduje eloxovanú čierno-bielu skrinku. Môže mu firma vyhovieť? Ak áno, z ktorých materiálov a z ktorých ich kombinácií môže byť taká skrinka vyhotovená?

Obchodný zástupca si chce ujasniť možné kombinácie. Domnieva sa, že skrinka s brúsenou povrchovou úpravou je sivá alebo čierna. Usúdil správne?

Vašou úlohou je:

- Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu vo vhodnom jazyku a stručne popísať význam jeho symbolov.
- Pojmami výrokovej logiky (napr. tautológia, splnenie, vyplývanie a pod.) vyjadriť otázky z predloženého problému.
- Zodpovedať otázky a odpovede dokázať *pomocou tablového kalkulu*.


5.3.5 Detektívi Miller a Skillová riešia prípad bankovej lúpeže. Partia lupičov v seife vylomila aj bezpečnostné schránky a nie je úplne jasné, čo z nich ukradli, pretože klienti si nespomínajú alebo nechcú spomenúť, čo v nich mali. Detektívom sa však podarilo zúžiť okruh podozrivých a získať tieto indície:

- Bloom sa dá nahovoriť iba na takú prácu, pri ktorej ide o drahokamy, a vždy spolupracuje s Yarrom alebo Malloyom.
- Malloy sa špecializuje výhradne na cenné papiere.
- Podľa dôveryhodného informátora sa drahokamy nekradnú, ak je v partii Pakľúč a nie Ocean.
- Ak bol medzi lupičmi Yarr, tak v partii nebol Ryan, s ktorým sa Yarr len ťažko znesie, alebo išlo o zlato, kvôli ktorému je Yarr ochotný spolupracovať skoro s hociakým.
- Ocean zásadne nekradne zlato.
- Pod prezývkou Pakľúč je známy Ryan.
- Bloomovu tvár zaznamenala bezpečnostná kamera v okolí banky, pri vystupovaní z auta tesne pred lúpežou, a všetci klienti banky potvrdili, že im neukradli cenné papiere.

Pomôžte Skillovej a Millerovi na základe týchto indícií rozhodnúť, či lúpil alebo nelúpil Ryan, a o tom, či lupiči ukradli zlato.

Pri riešení tejto úlohy:

- Určte **aké logické problémy** je potrebné vyriešiť, aby ste mohli urobiť požadované rozhodnutie.
- Vyriešte **všetky** logické problémy použitím **tablového** kalkulu rozšíreného o korektné pravidlá z úlohy 5.3.1 v zbierke. Tieto pravidlá použijete **všade**, kde je to možné a užitočné z hľadiska veľkosti tabla.
- Zdôvodnite, **ako a prečo** použité tablo či tablá riešia určené logické problémy.
- Vyjadrite **riešenia určených logických problémov**.
- Vyvod'te **požadované rozhodnutie**.

 **Pomôcka.** Indície sformalizujeme v jazyku \mathcal{L} s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{lúpil}^1, \text{cp}^1, \text{drahokamy}^1, \text{zlato}^1\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{lup, Bloom, Malloy, Ocean, Paklúč, Ryan, Yarr}\}$. Konštanta lup označuje množinu ulúpených cenností, ostatné konštanty označujú jednotlivých podozrivých. Zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\text{lúpil}(x)$	x sa zúčastnil predmetnej lúpeže
$\text{cp}(x)$	x obsahuje cenné papiere
$\text{drahokamy}(x)$	x obsahuje drahokamy
$\text{zlato}(x)$	x obsahuje zlato

Formalizácia indícií je potom nasledovná:

$(A_1) (\text{lúpil}(\text{Bloom}) \rightarrow (\text{drahokamy}(\text{lup}) \wedge (\text{lúpil}(\text{Yarr}) \vee \text{lúpil}(\text{Malloy}))))$

$(A_2) (\text{lúpil}(\text{Malloy}) \rightarrow \text{cp}(\text{lup}))$

$(A_3) ((\text{lúpil}(\text{Paklúč}) \wedge \neg \text{lúpil}(\text{Ocean})) \rightarrow \neg \text{drahokamy}(\text{lup}))$

$(A_4) (\text{lúpil}(\text{Yarr}) \rightarrow (\neg \text{lúpil}(\text{Ryan}) \vee \text{zlato}(\text{lup})))$

$(A_5) (\text{lúpil}(\text{Ocean}) \rightarrow \neg \text{zlato}(\text{lup}))$

$(A_6) (\text{lúpil}(\text{Paklúč}) \leftrightarrow \text{lúpil}(\text{Ryan}))$

$(A_7) (\text{lúpil}(\text{Bloom}) \wedge \neg \text{cp}(\text{lup}))$

Odporúčame vám označiť atomické formuly vhodnými meta premennými, napr. $B = \text{lúpil}(\text{Bloom})$, ktoré potom použijete v tabľách.

Editor tabiel **nepozná** pravidlá z úlohy 5.3.1 v zbierke. Môžete v ňom však vybudovať tablo/tablá použitím štandardných pravidiel a následne ich zjednodušiť použitím pravidiel z úlohy 5.3.1.

5.4 Meta tvrdenia o tabľách

5.4.1 Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

- a) Nech π je *úplná* vetva v ľubovoľnom table. Nech α , α_1 , α_2 sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Ak sa α nachádza na π , potom aj α_1 a α_2 sa nachádzajú na π .
- b) Nech π je *úplná* vetva v ľubovoľnom table. Nech α , α_1 , α_2 sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Ak sa α_1 a α_2 nachádzajú na π , tak sa aj α nachádza na π .
- c) Existujú označené formuly A^+ typu α a B^+ typu β také, že α_2 pre A^+ je rovnaká ako β_1 pre B^+ .
- d) Nech π je *uzavretá* vetva v ľubovoľnom table. Nech β , β_1 , β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Ak sa β nachádza na π , tak aj β_1 a β_2 sa nachádzajú na π .
- e) Nech π je *úplná* vetva v ľubovoľnom table. Nech β , β_1 , β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Ak sa β_1 alebo β_2 nachádza na π , tak sa aj β nachádza na π .
- f) Nech π je *uzavretá* vetva v ľubovoľnom table. Nech α , α_1 , α_2 sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Ak sa α nachádza na π , tak aspoň jedna z α_1 , α_2 sa nachádza na π .
- g) Nech π je *úplná a uzavretá* vetva v ľubovoľnom table. Nech α , α_1 , α_2 sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Nech β , β_1 , β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Ak sa α a β nachádzajú na π , tak aspoň jedna z α_1 , β_1 je tiež na π .

Riešenie. Vyriešime časti a) a b) ako vzor. Ostatné časti vyriešte samostatne.

Tvrdenie a) platí.

Dôkaz. Nech \mathcal{T} je ľubovoľné tablo a nech π je ľubovoľná úplná vetva v \mathcal{T} . Nech α je ľubovoľná označená formula typu α , ktorá sa nachádza na π . Nech α_1 a α_2 sú dôsledky oboch pravidiel pre formulu α :

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \quad \frac{\alpha}{\alpha_2}.$$

Keďže π je úplná vetva \mathcal{T} , tak podľa definície 5.23 úplnosti vetvy musí platiť, že aj α_1 a rovnako aj α_2 sa nachádzajú na π .

Tvrdenie b) neplatí.

Kontrapríklad. Nájdeme konkrétnu formulu typu α a konkrétne tablo s úplnou vetvou π , na ktorej sa budú nachádzať α_1 aj α_2 pre formulu α , ale samotná α sa na vetve π nachádzať nebude.

Nech $S^+ = \{\mathbf{F}(\neg p(c) \rightarrow r(c))\}$. Tablo pre S^+ vyzerá nasledovne:

1.	$\mathbf{F}(\neg p(c) \rightarrow r(c))$	S^+
2.	$\mathbf{F} \neg p(c)$	α_1
3.	$\mathbf{T} r(c)$	α_1
4.	$\mathbf{T} p(c)$	α_2

Toto tablo má jedinu vetvu, ktorá je úplná. Označme ju π . Zoberme si teraz nasledovný pár inštancií pravidiel α pre konjunkciu:

$$\frac{\mathbf{T}(p(c) \wedge r(c))}{\mathbf{T} p(c)} \quad \frac{\mathbf{T}(p(c) \wedge r(c))}{\mathbf{T} r(c)}$$


Teda $\alpha = \mathbf{T}(p(c) \wedge r(c))$, $\alpha_1 = \mathbf{T} p(c)$ a $\alpha_2 = \mathbf{T} r(c)$. Vidíme, že formuly α_1 a α_2 sa na vetve π nachádzajú (konkrétne v uzloch 4 a 3). Formula α sa ale na π nenachádza.

Našli sme teda kontrapríklad k tvrdeniu b), a tvrdenie b) tým pádom neplatí. \square

5.4.2 Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

- Nech \mathcal{T} je ľubovoľné tablo pre množinu označených formúl $\{\mathbf{F} X\}$. Ak je v \mathcal{T} niektorá vetva uzavretá, tak X je splniteľná.
- Nech \mathcal{T} je ľubovoľné tablo pre $\{\mathbf{F} X\}$. Ak je v \mathcal{T} niektorá vetva uzavretá, tak X je falzifikovateľná.
- Nech S je množina formúl a X je formula. Nech \mathcal{T} je ľubovoľné tablo pre množinu označených formúl $\{\mathbf{T} A \mid A \in S\} \cup \{\mathbf{F} X\}$. Ak je v \mathcal{T} niektorá vetva otvorená a úplná a iná vetva uzavretá, tak X je nezávislá od S .

Riešenie. a)

 Nakoľko je tvrdenie a) všeobecné (hovorí, že čosi platí pre všetky formuly X a všetky tablá s nejakými vlastnosťami), je dobré začať o jeho pravdivosti rozmýšľať, akoby sme ho chceli dokazovať sporom, teda pokúsiť sa jeho pravdivosť spochybniť: Kedy by mohlo a) byť nepravdivé? Keby sa našla aspoň jedna formula X a aspoň jedno tablo pre $\{\mathbf{F} X\}$, ktoré má uzavretú vetvu, ale pritom by X bola nespĺniteľná. Pretože X má byť nespĺniteľná, tablo zrejme bude mať aj nejaké otvorené vetvy.

Veľmi jednoduchá nespĺniteľná formula je napríklad $Z = (p(c) \wedge \neg p(c))$, ale úplné tablo pre ňu má dve otvorené vetvy.

Na druhej strane, keď chceme formulu Y , aby tablo pre $\{FY\}$ malo uzavretú vetvu, môžeme za Y zvoliť tautológiu, napríklad $(p(c) \vee \neg p(c))$.

Vieme tieto dve formuly spojiť tak, aby sme dostali aj nespľniteľnú formulu aj úplnú vetvu? Áno. Stačí si uvedomiť, že konjunkcia nespľniteľnej formuly s hocikakou je stále nespľniteľná. Keď na $F(Y \wedge Z)$ použijeme pravidlo β , dostaneme dve vetvy. V ľavej bude FY , a teda ju vieme uzavrieť. Tým sme v podstate prišli na kontrapríklad a ostáva nám iba poctivo ho zapísať a zdôvodniť.

Iný spôsob ako nájsť kontrapríklad je uvedomiť si, že $(A \wedge \neg A)$ je nespľniteľná pre hocikakú formulu A . Ľavá vetva v table pre $\{F(A \wedge \neg A)\}$ začína označenou formulou FA , a keď A je tautológia, táto vetva sa dá uzavrieť.

Tvrdenie a) je nepravdivé. Pretože ide o všeobecné tvrdenie, vyvrátíme ho nájdením kontrapríkladu.

Kontrapríklad. Potrebujeme nájsť formulu X a tablo \mathcal{T} pre $\{FX\}$, pre ktoré bude platiť: tablo \mathcal{T} má aspoň jednu uzavretú vetvu a súčasne X je nespľniteľná.


Zoberme si teda napríklad formulu $X = ((p(c) \vee \neg p(c)) \wedge (p(c) \wedge \neg p(c)))$ v jazyku \mathcal{L} s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{p\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{c\}$. Jej nespľniteľnosť si vieme overiť rýchlou analýzou ohodnotení:

v_i						
		$p(c)$	$\neg p(c)$	$(p(c) \vee \neg p(c))$	$(p(c) \wedge \neg p(c))$	$((p(c) \vee \neg p(c)) \wedge (p(c) \wedge \neg p(c)))$
v_1	f	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p
v_2	t	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p

Keďže pre obe ohodnotenia v_1 a v_2 pre jazyk \mathcal{L} platí, že X v nich nie je pravdivá, X je nespľniteľná.

Skonštruujeme teraz tablo \mathcal{T} pre $\{FX\}$, v ktorom nájdeme aspoň jednu uzavretú vetvu:

1. $F((p(c) \vee \neg p(c)) \wedge (p(c) \wedge \neg p(c)))$		$\{FX\}$
2. $F(p(c) \vee \neg p(c))$	$\beta 1$	6. $F(p(c) \wedge \neg p(c))$
3. $Fp(c)$	$\alpha 2$	$\beta 1$
4. $F\neg p(c)$	$\alpha 2$	
5. $Tp(c)$	$\alpha 4$	
*	3, 5	

 Tvrdenie a) je príkladom chybných úsudkov, ktoré občas študenti robia, keď majú pomocou tabiel rozhodnúť, či je formula tautológia, splniteľná, falzifikovateľná, alebo nespľniteľná.

Pravdepodobne je to spôsobené falošnou analógiou medzi ohodnoteniami a vetvami tabla. Je pravda, že formula X je tautológiou vtt je X pravdivá vo *všetkých* ohodnoteniach. Tiež je pravda, že formula X je tautológiou vtt *všetky* vetvy v table pre $\{FX\}$ sú uzavreté. Falošná analógia spočíva v tom, že na základe predchádzajúcich faktov a toho, že formula X je splniteľná vtt je X pravdivá v *aspoň jednom* ohodnotení, študent usúdi, že to nastáva vtt *aspoň jedna* vetva v table pre $\{FX\}$ je uzavretá, ako keby uzavretá vetva zodpovedala ohodnoteniu, v ktorom je FX nepravdivá a X pravdivá.

Uzavretá vetva však nezodpovedá žiadnemu ohodnoteniu (ako sme poznamenali pri viacerých predchádzajúcich príkladoch). b

6 Kvantifikátory

6.1 Syntax a jednoduchá formalizácia

6.1.1 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu vo vhodnom jazyku v logiky prvého rádu:

1. Evka je doktorandka a má školiteľa.
2. Všetko sú ľudia.
3. Všetci doktorandi sú študenti.
4. Niektorí doktorandi sú aj učiteľmi.
5. Nikto nemôže učiť sám seba.
6. Žiaden profesor nemôže byť doktorand.
7. Niektorí študenti samozrejme nie sú doktorandi.
8. Doktorandi profesora Nového sú cvičiaci buď na Teórii všetkého alebo Úvode do abstrakcie.
9. Učitelia okrem asistentov sú profesori a docenti.
10. Adamov školiteľ musí byť docent alebo profesor v prípade, že je Adam doktorand.
11. Docentka Mladá školí iba takých študentov, ktorí absolvovali s vyznamenaním Kurz pre náročných, ale nie sú doktorandi.
12. Predmet Teória všetkého si nemôžu zapísať tí, čo neabsolvovali ani Kurz pre náročných, ani Úvod do abstrakcie.
13. Ak nejaký kurz učí profesor Nový, tak ide o neoblíbený kurz.
14. Doktorandi profesora Nového cvičiaci Teóriu všetkého sú veľmi bystrí.
15. Ak je nejaký Mladý doktorand bystrý, tak je šťastná.
16. Nový je šťastný, iba ak ho obľubuje aspoň jeden študent.

6.2 Sémantika

6.2.1 Nech \mathcal{L} je jazyk relačnej logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Boris, Etela, Klára}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{muž}^1, \text{žena}^1, \text{manželia}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk \mathcal{L} , kde:

$$\begin{aligned} D &= \{1, 2, 3\} \\ i(\text{Etela}) &= 1 & i(\text{muž}) &= \{2\} \\ i(\text{Klára}) &= 1 & i(\text{žena}) &= \{1\} \\ i(\text{Boris}) &= 3 & i(\text{manželia}) &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\} \end{aligned}$$

Zistite, či sú nasledujúce formuly pravdivé alebo nepravdivé v štruktúre \mathcal{M} . Každú formulu preložte do čo najprirodzenejšieho slovenského tvrdenia.

- (A₁) $(\exists x \text{žena}(x) \wedge \exists y \text{muž}(y))$
- (A₂) $(\forall x \text{muž}(x) \vee \exists y \text{muž}(y))$
- (A₃) $\forall x(\text{žena}(x) \rightarrow \neg \text{muž}(x))$
- (A₄) $\exists x(\text{žena}(x) \wedge \text{muž}(x))$
- (A₅) $\forall x(\text{žena}(x) \rightarrow \text{muž}(x))$
- (A₆) $\exists x(\text{žena}(x) \rightarrow \text{muž}(x))$
- (A₇) $\exists x(\text{žena}(x) \rightarrow (\text{žena}(x) \wedge \text{muž}(x)))$
- (A₈) $\exists x(\text{manželia}(x, \text{Klára}) \wedge (\text{muž}(x) \vee \text{žena}(x)))$
- (A₉) $\forall x(\text{manželia}(x, \text{Etela}) \rightarrow \text{žena}(x))$
- (A₁₀) $\forall x(\text{manželia}(x, \text{Boris}) \rightarrow (\text{žena}(x) \wedge \text{muž}(x)))$
- (A₁₁) $\forall x((\text{žena}(x) \wedge \neg \text{manželia}(x, \text{Klára})) \rightarrow \text{manželia}(x, \text{Boris}))$
- (A₁₂) $\neg \forall x((\text{muž}(x) \wedge \neg \text{manželia}(x, \text{Klára})) \rightarrow \text{manželia}(x, \text{Etela}))$
- (A₁₃) $\exists x((\text{žena}(x) \wedge \text{manželia}(x, \text{Klára})) \rightarrow \text{manželia}(x, \text{Etela}))$
- (A₁₄) $\neg \forall x(\text{muž}(x) \vee \text{žena}(x))$
- (A₁₅) $\neg \exists y \text{manželia}(\text{Boris}, y)$
- (A₁₆) $\forall x \forall y(\text{manželia}(x, y) \rightarrow \text{manželia}(y, x))$

6.2.2 Nech \mathcal{L} je jazyk relačnej logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Matematika}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{depresivny}^1, \text{lenivy}^1, \text{sikovny}^1, \text{student}^1, \text{uspesny}^1, \text{maRad}^2\}$.

Zostrojte štruktúru \mathcal{M} pre jazyk \mathcal{L} tak, aby bola modelom teórie tvorenej všetkými nasledujúcimi formulami.

Každú formulu preložte do čo najprirodzenejšieho slovenského tvrdenia.

- $(A_1) \quad \forall x(\text{student}(x) \rightarrow (\text{sikovny}(x) \vee \text{lenivy}(x)))$
 $(A_2) \quad \forall x(\text{sikovny}(x) \rightarrow \neg \text{lenivy}(x))$
 $(A_3) \quad (\exists x(\text{student}(x) \wedge \text{lenivy}(x)) \wedge \exists x(\text{student}(x) \wedge \neg \text{lenivy}(x)))$
 $(A_4) \quad \forall x(\text{student}(x) \rightarrow (\text{sikovny}(x) \rightarrow \text{maRad}(x, \text{Matematika})))$
 $(A_5) \quad \forall x(\text{maRad}(x, \text{Matematika}) \rightarrow \text{uspesny}(x))$
 $(A_6) \quad (\neg \forall x \neg \text{sikovny}(x) \rightarrow \neg \exists x(\neg \text{depresivny}(x) \wedge \text{uspesny}(x)))$
 $(A_7) \quad \neg \forall x(\neg \text{uspesny}(x) \rightarrow \neg \text{depresivny}(x))$

6.2.3 Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku \mathcal{L} relačnej logiky prvého rádu:

1. Poznáme červené ovocie.
2. Jablko je ovocie.
3. Jablká sú červené, zelené, ale aj žlté.
4. Darinka je mandarínka.
5. Mandarínky a pomaranče sú oranžové ovocie.
6. Nič oranžové nie je červené.
7. Žiadne ovocie nie je nezdravé, ibaže by bolo hnilé či plesnivé.
8. Afrika je kontinent a ovocie, ktoré z nej pochádza, považujeme za exotické.
9. Čo nie je americké, to nie je z Kalifornie.
10. Aj Darinka musí odniekiaľ pochádzať.
11. Janko má rád africké ovocie, ak je zelené, a americké, iba ak je červené.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte použitý jazyk \mathcal{L} a vysvetlite význam jeho symbolov.

Následne:

- a) Zostrojte štruktúru \mathcal{M}_1 pre \mathcal{L} , ktorá bude modelom vašej teórie T .
- b) Je za daných okolností *možné*, že Janko má rád Darinku, keď Darinka pochádza z Kalifornie? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou \mathcal{M}_2 . Ak nie, dokažte, že taká štruktúra \mathcal{M}_2 neexistuje.

6.2.4 Dokážte, že nasledujúce formuly sú splniteľné, ale nie platné:

- $(\forall x(\text{doktorand}(x) \rightarrow \text{študent}(x)) \rightarrow \forall x(\text{doktorand}(x) \wedge \text{študent}(x)))$,
- $(\forall x \exists y(\text{páči}(x, y) \rightarrow \text{zaľúbený}(x)) \rightarrow \forall x(\exists y \text{ páči}(x, y) \rightarrow \text{zaľúbený}(x)))$,
- $(\forall x \exists y \text{ rodič}(x, y) \rightarrow \exists x \forall y \text{ rodič}(x, y))$.
- $(\exists x(\text{pes}(x) \rightarrow \text{zly}(x)) \rightarrow \exists x(\text{pes}(x) \wedge \text{zly}(x)))$,
- $(\neg \exists x \neg \exists y(\text{student}(x) \wedge \text{skolitel}(x, y)) \rightarrow \neg \exists x \exists y(\text{student}(x) \wedge \text{skolitel}(x, y)))$,
- $(\forall x \exists y(\text{skolitel}(x, y) \rightarrow \text{docent}(x)) \rightarrow \forall x \forall y(\text{skolitel}(x, y) \rightarrow \text{docent}(x)))$,

💡 Tieto formuly zachytávajú časté chyby pri formalizácii. Všímajte si rozdiely vo význame ľavých a pravých strán implikácií.

Aby ste rozdiely naozaj pochopili, **neuspokojte sa** s jednou triviálnou štruktúrou. Skúmajte štruktúry s aspoň 4-prvkovými doménami, v ktorých sú podľa možnosti všeobecné kvantifikácie splnené **netriviálne**, teda antecedent vnorenej implikácie nie je vždy nesplnený.

6.2.5 Dokážte, že nasledujúce formuly sú splniteľné, ale nie platné:

- $\neg \forall x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$,
- $\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \exists x P(x)$,
- $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$,
- $(\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$,
- $(\neg \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$,
- $(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$,
- $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$,
- $\neg \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \neg \forall x P(x) \vee \neg \forall x Q(x)$,
- $\neg \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \neg \exists x P(x) \vee \neg \exists x Q(x)$.

💡 Tieto formuly ukazujú prípady, v ktorých **nie je** možné distribuovať („presúvať“) kvantifikátory cez logické spojky tak, aby táto úprava bola ekvivalentná.

Dodržte odporúčania k predchádzajúcej úlohe.

Riešenie pre c). $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$

Napríklad štruktúra $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$, pričom:

$$D_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$i_1(P) = \emptyset$$

$$i_1(Q) = \{1, 2, 3, 4\}$$

spĺňa formulu c), ale štruktúra $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$, kde:

$$D_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$i_2(P) = \{2, 4\}$$

$$i_2(Q) = \{1, 3\}$$

ju nespĺňa. Formula c) teda nie je ani platná, ani nespĺniteľná.

□

6.3 Formalizácia s viacerými kvantifikátormi

6.3.1 Príklad. Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku \mathcal{L} relačnej logiky prvého rádu:

1. Je aspoň jeden študent, ktorý je chlapec, a jedna študentka (ktorá je teda dievča), a sú spolužiaci.
2. Učiteľ, ktorý je profesorom, musí byť školiteľom aspoň jedného študenta.
3. Vzťah „byť spolužiakom“ je symetrický a tranzitívny.
4. Študenti a školitelia sú disjunktní.
5. Študent absolvuje predmet, iba ak ho má zapísaný.
6. Študent, ktorý absolvoval predmet, je spokojný.
7. Každý študent má medzi študentami aspoň dvoch kamarátov, pričom s jedným sa kamaráti viac než s tým druhým.
8. Každý študent má najviac jedného školiteľa.
9. Každá študentka má práve jednu spolužiačku, ktorá jej je najlepšia kamarátka.
10. Nikto si nezapisuje výberové predmety.

Riešenie. Tvrdenia sformalizujeme v jazyku, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{chlapec}^1, \text{dievca}^1, \text{predmet}^1, \text{profesor}^1, \text{student}^1, \text{ucitel}^1, \text{vyberovy}^1, \text{absolvoval}^2, \text{kamarat}^2, \text{skolitel}^2, \text{spoluziaci}^2, \text{lepsi_kamarat}^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je nasledovný:

Predikát	Význam
$P(x)$	x je P – pre každý unárny predikát P
$\text{absolvoval}(x, y)$	x absolvoval y
$\text{kamarat}(x, y)$	x je kamarát s y
$\text{skolitel}(x, y)$	x je školiteľom y
$\text{spoluziaci}(x, y)$	x a y sú spolužiaci
$\text{lepsi_kamarat}(x, y, z)$	x je lepší kamarát s y ako so z

1. Je aspoň jeden študent, ktorý je chlapec, a jedna študentka (ktorá je teda dievča), a sú spolužiaci.

$$\exists x \exists y (\text{student}(x) \wedge \text{chlapec}(x) \wedge \text{student}(y) \wedge \text{dievca}(y) \wedge \text{spoluziaci}(x, y))$$

2. Učiteľ, ktorý je profesorom, musí byť školiteľom aspoň jedného študenta.

$$\forall x ((\text{ucitel}(x) \wedge \text{profesor}(x)) \rightarrow \exists y (\text{student}(y) \wedge \text{skolitel}(x, y)))$$

3. Vzťah „býť spolužiakom“ je symetrický a tranzitívny.

Symetria:

$$\forall x \forall y (\text{spoluziaci}(x, y) \rightarrow \text{spoluziaci}(y, x))$$

Tranzitivita:

$$\forall x \forall y \forall z ((\text{spoluziaci}(x, y) \wedge \text{spoluziaci}(y, z)) \rightarrow \text{spoluziaci}(x, z))$$

alebo ekvivalentne:

$$\forall x \forall z (\exists y (\text{spoluziaci}(x, y) \wedge \text{spoluziaci}(y, z)) \rightarrow \text{spoluziaci}(x, z))$$

4. Študenti a školitelia sú disjunktní.

$$\forall x (\text{student}(x) \rightarrow \neg \exists y \text{ skolitel}(x, y))$$

5. Študent absolvuje predmet, iba ak ho má zapísaný.

$$\forall x \forall y ((\text{student}(x) \wedge \text{absolvoval}(x, y) \wedge \text{predmet}(y)) \rightarrow \text{zapisany}(x, y))$$

6. Študent, ktorý absolvoval predmet, je spokojný.

$$\forall x ((\text{student}(x) \wedge \exists y (\text{predmet}(y) \wedge \text{absolvoval}(x, y))) \rightarrow \text{spokojny}(x))$$

7. Každý študent má medzi študentami aspoň dvoch kamarátov, pričom s jedným sa kamaráti viac než s tým druhým.

$$\forall x (\text{student}(x) \rightarrow$$

$$\exists y \exists z (\neg z \doteq y \wedge \text{student}(y) \wedge \text{student}(z) \wedge \text{kamarat}(x, y) \wedge \text{kamarat}(x, z) \\ \wedge \text{lepsi_kamarat}(x, y, z) \wedge \neg z \doteq x \wedge \neg y \doteq x))$$

8. Každý študent má najviac jedného školiteľa.

$$\forall x \forall y ((\text{student}(x) \wedge \text{skolitel}(y, x)) \rightarrow \forall z (\text{skolitel}(z, x) \rightarrow z \doteq y))$$

alebo ekvivalentne:

$$\forall x \forall y ((\text{student}(x) \wedge \text{skolitel}(y, x)) \rightarrow \neg \exists z (\text{skolitel}(z, x) \wedge \neg z \doteq y))$$

alebo ekvivalentne:

$$\forall x((\text{student}(x) \rightarrow \forall y \forall z((\text{skolitel}(y, x) \wedge \text{skolitel}(z, x)) \rightarrow y \doteq z))$$

9. Každá študentka má práve jednu spolužiačku, ktorá je jej najlepšia kamarátka.

$$\forall x((\text{student}(x) \wedge \text{dievca}(x)) \rightarrow$$

$$\exists y(\text{student}(y) \wedge \text{dievca}(y) \wedge \text{spoluziaci}(x, y) \wedge \text{kamarat}(x, y) \\ \wedge \neg \exists z(\text{lepsí_kamarat}(x, z, y) \wedge \neg z \doteq y)))$$

10. Nikto si nezapisuje výberové predmety.

$$\neg \exists x \exists y(\text{predmet}(y) \wedge \text{vyberovy}(y) \wedge \text{zapisany}(x, y))$$

□

6.3.2 Uvažujme vetu: „Každé zvieratko niekto kŕmi.“ Ktorá z nasledovných for-
múl zodpovedá tejto vete? Akým vetám zodpovedajú zvyšné formuly?

$$(A_1) \forall x(\text{človek}(x) \rightarrow \exists y(\text{zvieratko}(y) \wedge \text{kŕmi}(x, y)))$$

$$(A_2) \forall y(\text{zvieratko}(y) \rightarrow \exists x(\text{človek}(x) \wedge \text{kŕmi}(x, y)))$$

$$(A_3) \exists x(\text{človek}(x) \wedge \forall y(\text{zvieratko}(y) \rightarrow \text{kŕmi}(x, y)))$$

$$(A_4) \exists y(\text{zvieratko}(y) \wedge \forall x(\text{človek}(x) \rightarrow \text{kŕmi}(x, y)))$$

Formuly A_1 – A_4 možno vyabstrahovať do nasledovných štyroch všeobecných schém,
kde P , Q a R označujú *formuly* s voľnými premennými x a y (teda nie nutne iba
jednoduché predikáty):

$$(B_1) \forall x(P(x) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x, y)))$$

$$(B_2) \forall x(P(x) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(y, x)))$$

$$(B_3) \exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \rightarrow R(x, y)))$$

$$(B_4) \exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \rightarrow R(y, x)))$$

Určte, ktorej schéme zodpovedá každé z nasledujúcich tvrdení (v zátvorkách je
odporúčaná formula R):

1. V ZOO je zvieratko, ktoré chodia kŕmiť všetky deti.
($\text{kŕmi}(x, y)$ – x chodí kŕmiť y)
2. Každý týždeň na Obchodnej zbijú cudzinca.
($\text{zbijú}(x, t)$ – na Obchodnej zbijú x v období t)
3. Každú hodinu mi vyvoláva nejaký otravný predajca.
($\text{volá}(x, ja, t)$ – telefonicky ma otravuje x v čase t)
4. Každý študent má kamaráta, ktorý je tiež študent.
($\text{kamarát}(x, y)$ – x a y sú kamaráti)
5. Jeden študent sa kamaráti so všetkými študentami.

6.3.3 Uvažujme znova jazyk \mathcal{L} a teóriu T z úlohy 6.3.1. Rozšírte teóriu T o formalizáciu nasledujúcich tvrdení na teóriu T' vo vhodnom rozšírení \mathcal{L}' jazyka \mathcal{L} :

1. Každý študent študuje nejaký študijný program.
2. Garantom študijného programu je *iba* profesor.
3. Študent, ktorý absolvoval *všetky* predmety nejakého študijného programu, absolvoval tento program.
4. Vzťah „byť školiteľom“ je ireflexívny a asymetrický.
5. *Nie* každý študent má školiteľa, ktorý je profesor.
6. Každý profesor má *práve* dvoch podriadených docentov.
7. *Nikto* neučí ani si nezapíše neaktívny predmet.
8. Študent môže byť hodnotený známkou „Fx“ *najviac* na dvoch predmetoch.
9. Pokiaľ má nejaký študent *samé* A-čka, učitelia sú spokojní.
10. Peter má dve také spolužiačky, ktoré sú *obe súčasne* jeho *najlepšie* kamarátky.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte celý použitý jazyk \mathcal{L}' a vysvetlite význam symbolov, ktoré ste použili na formalizáciu nových tvrdení. Z teórie T' uveďte iba nové formuly (teda $T' \setminus T$).

6.3.4 Formalizujte nasledovné znalosti z oblasti univerzitného vzdelávania ako teóriu v logike prvého rádu:

- a) Každý študent študuje nejaký študijný program.
- b) Učiteľ, ktorý je profesorom, musí byť školiteľom aspoň jedného študenta.
- c) Evka a Ferko sú študenti. Evka je dievča.
- d) Študent absolvuje predmet, iba ak ho má zapísaný.
- e) Každý študent má školiteľa.
- f) Garantom študijného programu je iba profesor.
- g) Každý predmet sa vyučuje v práve jednom semestri.
- h) Evkina školiteľka je učiteľka, ale nie je profesorka.
- i) Predmet je aktívny, ak sú naň zapísaní aspoň dvaja študenti, alebo ak je naň zapísaný hoc aj len jeden študent a je to dievča.
- j) Nikto neučí ani si nezapíše neaktívny predmet.
- k) Sú práve dva rôzne semestre – letný a zimný.
- l) Študent môže byť hodnotený známkou „Fx“ *najviac* na dvoch predmetoch v tom istom semestri.
- m) Pokiaľ má nejaký študent *samé* A-čka, učitelia sú spokojní.

6.3.5 Zadefinujte nasledujúcej pojmy v logike prvého rádu

- Hovoríme, že učiteľ učí študenta vtedy a len vtedy, keď učí predmet, ktorý má študent zapísaný, alebo je študentovým školiteľom.
- Povinný predmet v danom študijnom programe je práve taký predmet, ktorý absolvuje každý študent tohto študijného programu.

Pomocou zadefinovaných pojmov formalizujte nasledujúce tvrdenie:

- Nikto si nezapisuje ťažké predmety, ak nie sú povinné v ich študijnom programe.

6.3.6 Pojmami prvorádovej logiky vyjadrite nasledujúce otázky. Otázky zodpovedzte a odpovede dokážte.

- Môže byť profesorom niekto, kto nie je školiteľom žiadneho študenta?
- Bude predmet Základy základov aktívny, ak sa naň zapíše Evka?
- Sú všetci školitelia profesormi?
- Profesor Šašo tvrdí, že jeho predmet sa vyučuje aj v letnom, aj v zimnom semestri. Môžeme mu veriť?
- Je pravda, že nikto neabsolvuje neaktívny predmet?

6.3.7 Formalizujte nasledovné tvrdenia ako teóriu v relačnej logike prvého rádu. Vhodne zvolte spoločný jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

- Vzťah súrodenec je symetrický a všetci súrodenci sa majú radi.
- Nikto nemá rád nikoho, kto sa posmieva jeho súrodencovi.
- Ak jedného súrodenca uprednostní niektorý z rodičov pred druhým súrodencom, je z toho ten druhý prirodzene smutný.
- Každý sa nahnevá, keď mu súrodenec zoberie hračku, alebo mu na oplátku tiež nejakú zoberie.
- Ak nejakí súrodenci dostanú hračky rôznej značky, zaručene si budú navzájom závidieť.

6.3.8 Formalizujte v naznačenom alebo vhodne zvolenom jazyku logiky prvého rádu nasledujúce tvrdenia:

- Bez práce nie sú koláče. ($\text{má}(kto, čo)$, $\text{práca}(x)$, $\text{koláč}(x)$).
- Pomôž iným, pomôžeš aj sebe.

- c) Kto druhému jamu kope, sám do nej spadne.
- d) Tí, čo iným jamy nekopú, nie sú intrigáni.
- e) Aký otec, taký syn. ($\text{má_vlastnosť}(\text{kto}, \text{vlastnosť}), \text{je_syn}(\text{kto}, \text{koho}))$).
- f) Nepriatelia mojich nepriateľov sú mojimi priateľmi. ($\text{priateľ}(\text{kto}, \text{koho}))$)

6.3.9 (Lenhart K. Schubert prostredníctvom Pelletiera [2]) Zvoľte vhodný jazyk logiky prvého rádu a sformalizujte v ňom nasledujúci detektívny príbeh:

Someone in Dreadsbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadsbury Mansion, and are the only ones to live there. A killer always hates, and is no richer than his victim. Charles hates no one whom Agatha hates. Agatha hates everybody except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone whom Agatha hates. No one hates everyone. Who killed Agatha?

Niektor v Dreadsburskom kaštieli zabil tetu Agátu. V Dreadsburskom kaštieli bývajú Agáta, komorník a Karol a nikto iný okrem nich tam nebyva. Vrah vždy nenávidí svoju obeť a nie je od nej bohatší. Karol neprechováva nenávisť k nikomu, koho nenávidí Agáta. Agáta nenávidí každého okrem komorníka. Komorník nenávidí každého, kto nie je bohatší ako Agáta. Komorník nenávidí každého, koho nenávidí Agáta. Niet toho, kto by nenávidel všetkých. Kto zabil Agátu?

6.3.10 (Novak [1]) Sformalizujte v jazyku logiky prvého rádu.

- (A₁) Každý kojot naháňa nejakého roadrunnera.
- (A₂) Každý roadrunner, ktorý robí „beep-beep“, je múdry.
- (A₃) Žiadny kojot nechytí roadrunnera, ktorý je múdry.
- (A₄) Kojot, ktorý naháňa roadrunnera, a nechytí ho, je frustrovaný
- (X) Ak všetky roadrunnery robia „beep-beep“, tak všetky kojoty sú frustrované.

6.3.11 Vyjadrite čo najprirodzenejšími slovenskými vetami nasledujúcu formalizáciu zistení o deťoch a Vianociach v jazyku \mathcal{L} s množinami symbolov $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, w, x, y, z\}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Vianoce}, \text{Ježiško}, \text{Santa}, \text{Anička}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{autíčko}^1, \text{blud}^1, \text{dieťa}^1, \text{dobry}^1, \text{dostane}^2, \text{chlapec}^1, \text{kriticky_myslí}^1, \text{teší_sa_na}^2, \text{uhlie}^1, \text{verí_v}^2\}$:

- (V₁) $\forall x((\text{dieťa}(x) \wedge (\text{verí_v}(x, \text{Ježiško}) \vee \text{verí_v}(x, \text{Santa}))) \rightarrow \text{teší_sa_na}(x, \text{Vianoce}))$,

- $(V_2) \forall x((\text{dieťa}(x) \wedge \neg \text{verí}_v(x, \text{Santa})) \rightarrow (\text{verí}_v(x, \text{Ježiško}) \vee \text{kriticky_myslí}(x))),$
 $(V_3) \forall x(\text{kriticky_myslí}(x) \rightarrow \forall y(\text{blud}(y) \rightarrow \neg \text{verí}_v(x, y))),$
 $(V_4) \forall x(\neg \text{dobrý}(x) \rightarrow (\neg \exists y \text{dostane}(x, y) \vee$
 $\quad (\text{verí}_v(x, \text{Santa}) \rightarrow \exists y(\text{dostane}(x, y) \wedge \text{uhlie}(y))))),$
 $(V_5) \forall x((\text{dobrý}(x) \wedge \text{chlapec}(x)) \rightarrow \exists y(\text{dostane}(x, y) \wedge \text{autíčko}(y))).$


6.4 Tablá pre kvantifikátory


6.4.1 (Novak [1]) Majme teóriu $T = \{A_1, \dots, A_4\}$ v jazyku \mathcal{L} , kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{John}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pes}^1, \text{macka}^1, \text{mys}^1, \text{LS}^1, \text{steka}^1, \text{ma}^2\}$, pričom význam $\text{LS}(x)$ je x má ľahký spánok. Rozhodnite, či z teórie T , kde

- $(A_1) \forall x(\text{pes}(x) \rightarrow \text{steka}(x))$
 $(A_2) \forall x \forall y((\text{ma}(x, y) \wedge \text{macka}(y)) \rightarrow \neg \exists z(\text{ma}(x, z) \wedge \text{mys}(z)))$
 $(A_3) \forall x(\text{LS}(x) \rightarrow \neg \exists y(\text{ma}(x, y) \wedge \text{steka}(y)))$
 $(A_4) \exists x(\text{ma}(\text{John}, x) \wedge (\text{macka}(x) \vee \text{pes}(x)))$

vyplývajú formuly:

- $(X_1) (\exists x(\text{ma}(\text{John}, x) \wedge \neg \text{steka}(x)) \rightarrow \text{LS}(\text{John}))$
 $(X_2) (\text{LS}(\text{John}) \rightarrow \forall x(\text{ma}(\text{John}, x) \rightarrow \neg \text{mys}(x)))$

 Teóriu aj formuly X_1 a X_2 si najprv pozorne prečítajte, pochopte ich význam a intuitívne si premyslite, **prečo** X_1 resp. X_2 vyplýva alebo nevyplýva z teórie. Intuícia vás potom dovedie ku konštrukcii správneho tabla alebo štruktúry.

 V logike prvého rádu vo všeobecnosti **nemôžeme použiť tablá na hľadanie spĺňajúcich štruktúr**, pretože úplné tablo môže byť nekonečné.

6.4.2 (Novak [1]) Rozhodnite, či z teórie $T = \{A_1, \dots, A_4\}$, kde

- $(A_1) \forall x(\text{kojot}(x) \rightarrow \exists y(\text{roadrunner}(y) \wedge \text{nahana}(x, y)))$
 $(A_2) \forall x((\text{roadrunner}(x) \wedge \text{trubi}(x)) \rightarrow \text{mudry}(x))$
 $(A_3) \forall x \forall y((\text{kojot}(x) \wedge (\text{roadrunner}(y) \wedge \text{mudry}(y))) \rightarrow \neg \text{chyti}(x, y))$
 $(A_4) \forall x(\text{kojot}(x) \rightarrow$
 $\quad (\exists y(\text{roadrunner}(y) \wedge (\text{nahana}(x, y) \wedge \neg \text{chyti}(x, y)))) \rightarrow \text{frustrovany}(x)))$

vyplývajú formuly:

$(X_1) (\forall x(\text{roadrunner}(x) \rightarrow \text{trubi}(x)) \rightarrow \forall x(\text{kojot}(x) \rightarrow \text{frustrovany}(x)))$
 $(X_2) (\exists x(\text{kojot}(x) \wedge \neg \text{frustrovany}(x)) \rightarrow \neg \exists x(\text{roadrunner}(x) \wedge \text{trubi}(x)))$
 Vyplývajúce dokážte tablom. Nevyplyvajúce nájdením štruktúry.

6.4.3 Príklad. Dokážte v tablovom kalkule:

$$\models ((\exists x \text{ muž}(x) \wedge \exists x \text{ žena}(x)) \rightarrow \exists x(\text{muž}(x) \vee \text{žena}(x)))$$

Riešenie. Máme dokázať, že formula zo zadania je platná. Vybudujeme preto tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{F}((\exists x \text{ muž}(x) \wedge \exists x \text{ žena}(x)) \rightarrow \exists x(\text{muž}(x) \vee \text{žena}(x)))\}$.

💡 Zápis formule je zjednodušený podľa pravidiel z prednášky. Jej plne uzatvorkovaný tvar je $((\exists x \text{ muž}(x) \wedge \exists x \text{ žena}(x)) \rightarrow \exists x(\text{muž}(x) \vee \text{žena}(x)))$. Formula je teda **implikáciou**, ktorej antecedent je konjunkcia dvoch existenčne kvantifikovaných formúl a konzekvent je existenčná kvantifikácia disjunkcie. Tablové pravidlá musíme aplikovať **v súlade** s touto štruktúrou.

1.	$\mathbf{F}((\exists x \text{ muž}(x) \wedge \exists x \text{ žena}(x)) \rightarrow \exists x(\text{muž}(x) \vee \text{žena}(x)))$	S^+
2.	$\mathbf{T}(\exists x \text{ muž}(x) \wedge \exists x \text{ žena}(x))$	$\alpha 1$
3.	$\mathbf{F} \exists x(\text{muž}(x) \vee \text{žena}(x))$	$\alpha 1$
4.	$\mathbf{T} \exists x \text{ muž}(x)$	$\alpha 2$
5.	$\mathbf{T} \exists x \text{ žena}(x)$	$\alpha 2$
6.	$\mathbf{T} \text{ muž}(y)$	$\delta 4\{x \mapsto y\}$ ⚠️
7.	$\mathbf{T} \text{ žena}(z)$	$\delta 5\{x \mapsto z\}$ ⚠️
8.	$\mathbf{F}(\text{muž}(z) \vee \text{žena}(z))$	$\gamma 3\{x \mapsto z\}$ 💡
9.	$\mathbf{F} \text{ muž}(z)$	$\alpha 8$
10.	$\mathbf{F} \text{ žena}(z)$	$\alpha 8$
	*	7, 10

⚠️ Pravidlo δ sme v table použili dvakrát (uzly 6 a 7, aj keď 6 sme vlastne nepotrebovali). **Vždy** sme za pôvodne viazanú premennú x substituovali **novú** voľnú premennú (v 6 to bola y , potom v 7 to bola z , lebo v tej chvíli sa už y vo vetve vyskytovala voľná). Bolo by **chybou** použiť premennú, ktorá **sa už predtým** vo vetve tabla **vyskytla voľná**. Dôvod je nasledovný:

O objekte, ktorý existuje podľa formule 4, je známe **iba** to, že má vlastnosť muž. Podobne o objekte, ktorý existuje podľa formule 5, je známe **iba** to, že má vlastnosť žena. Tento objekt pravdepodobne **nebude rovnaký** ako objekt, ktorý má vlastnosť muž. **Nesmieme** ich preto označiť rovnakou premennou. Nemohli by sme použiť ani inú premennú, ktorá by sa už v table

predtým vyskytla voľná, lebo aj o ňou označenom objekte by už boli známe nejaké ďalšie skutočnosti. Tento princíp platí pri všetkých formulách typu δ .

💡 Formuly typu γ hovoria, že nimi opísanou vlastnosť (pozitívnu či negatívnu) majú **všetky** objekty. Preto:

- Pri ich použití (8) môžeme za pôvodne viazanú premennú substituovať **ľubovoľný term** (premennú, konštantu, aplikáciu funkčného symbolu na ľubovoľné argumenty) — samozrejme, táto substitúcia musí byť **aplikovateľná**.
- Tú istú formulu typu γ môžeme použiť **viackrát**, pričom substituujeme rôzne termy. V tomto table stačilo jedno použitie.

Opakovane môžeme použiť formulu každého typu, ale iba pri type γ dostaneme skutočne rôzne výsledky. Pri opakovanom použití formuly typu δ nás pravidlo donúti zaviesť novú premennú, ale získame rovnakú informáciu ako pri prvom použití (rôzne premenné môžu označovať ten istý objekt).

Tablo je uzavreté, takže množina S^+ je nesplniteľná. Neexistuje teda štruktúra, v ktorej by formula $((\exists x \text{ muž}(x) \wedge \exists x \text{ žena}(x)) \rightarrow \exists x (\text{muž}(x) \vee \text{žena}(x)))$ pri nejakom ohodnotení bola nesplnená, a preto je táto formula platná. \dashv

6.4.4 Rozhodnite, či formula vyplýva z teórie. Vyplývanie dokážte tablom, nevypĺvanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom.

- $\{\exists x \neg \text{myš}(x) \vee \forall x \text{ hlodavec}(x)\} \models \forall x (\text{myš}(x) \rightarrow \text{hlodavec}(x))$
- $\{\forall x (\text{myš}(x) \rightarrow \text{hlodavec}(x))\} \models \exists x \neg \text{myš}(x) \vee \forall x \text{ hlodavec}(x)$
- $\{\forall x \exists y (\text{hladný}(x) \wedge \text{zje}(x, y) \rightarrow \text{bude_sýty}(x))\}$
 $\models \forall x (\text{hladný}(x) \wedge \exists y \text{ zje}(x, y) \rightarrow \text{bude_sýty}(x))$
- $\{\forall x (\text{hladný}(x) \wedge \exists y \text{ zje}(x, y) \rightarrow \text{sýty}(x))\}$
 $\models \forall x \exists y (\text{hladný}(x) \wedge \text{zje}(x, y) \rightarrow \text{sýty}(x))$

⚠ Na rozdiel od výrokovej logiky, v logike prvého rádu sme nedefinovali, kedy je vetva tabla **úplná**. Keby sme tak urobili, úplná vetva by musela obsahovať použitia každej formuly typu γ so **všetkými** možnými substitúciami. Tých je vo všeobecnosti nekonečne veľa.

Tablo, ktoré sa nám napriek správne používaniu pravidiel, trpezlivosti a skúšaní rôznych prístupov **nedarí uzavrieť**, preto iba **naznačuje**, ale **nedokazuje**, že formula z teórie nevyplyva (resp. že začiatočná množina označených formúl je splniteľná). Na to, aby sme tento fakt naozaj **dokázali**, musíme skonštruovať vhodnú štruktúru. Otvorené vetvy v table nám v tom môžu pomôcť, pretože naznačujú, ktoré podformuly (možno atomické) má štruktúra spĺňať a ktoré nie.

6.4.5 Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú platné:

- a) $(\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x))$
- b) $(\forall x P(x) \rightarrow \forall y P(y))$
- c) $(\exists x P(x) \rightarrow \exists y P(y))$
- d) $(\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y))$
- e) $\forall y(\forall x P(x) \rightarrow P(y))$
- f) $\exists y(P(y) \rightarrow \forall x P(x))$
- g) $(\neg \exists y P(y) \rightarrow \forall y(\exists x P(x) \rightarrow P(y)))$

💡 Tieto formuly ilustrujú niekoľko základných vlastností kvantifikátorov: Zoslabenie všeobecného kvantifikátora na existenčný (a, d), možnosť premenovať viazanú premennú (b, c) možnosť odvodiť ľubovoľnú inštanciu všeobecne kvantifikovanej formuly (e, základ pravidla γ), existencia kontrapríkladu (f, základ pravidla δ), dôkaz sporom z neexistencie (g).

6.4.6 Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú platné:


- a) $\neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$
- b) $\neg \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \neg P(x)$
- c) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
- d) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- e) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
- f) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$

💡 Tieto formuly ilustrujú de Morganove (a, b) a distributívne zákony pre kvantifikátory (c, d). Platnosť formuly e) a neplatnosť 6.2.5f) ukazujú, že existenčný kvantifikátor je možné distribuovať do konjunkcie, ale nemožno ho pred konjunkciu „vyňať“.

Duálne, platnosť formuly f) a neplatnosť 6.2.5g) ukazujú, že všeobecný kvantifikátor možno „vyňať“ pred disjunkciu, ale nemožno ho do nej distribuovať.

6.4.7 Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú platné:

- a) $\exists x(P(x) \vee R(y)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee R(y)$
- b) $\forall x(P(x) \vee R(y)) \leftrightarrow \forall x P(x) \vee R(y)$
- c) $\forall x(P(x) \wedge R(y)) \leftrightarrow \forall x P(x) \wedge R(y)$
- d) $\exists x(P(x) \wedge R(y)) \leftrightarrow \exists x P(x) \wedge R(y)$
- e) $\exists x R(y) \leftrightarrow R(y)$
- f) $\forall x R(y) \leftrightarrow R(y)$
- g) $\exists x(P(x) \rightarrow R(y)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \rightarrow R(y))$
- h) $\forall x(P(x) \rightarrow R(y)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \rightarrow R(y))$
- i) $\forall x(R(y) \rightarrow P(x)) \leftrightarrow (R(y) \rightarrow \forall x P(x))$
- j) $\exists x(R(y) \rightarrow P(x)) \leftrightarrow (R(y) \rightarrow \exists x P(x))$

 Tieto formuly ilustrujú distributívne zákony pre kvantifikátory v prípade, že v jednej z podformúl (predstavuje ju atóm $R(y)$) sa kvantifikovaná premenná (x) nevyskytuje voľná.

6.4.8 (Quine [3]) Dokážte, že z faktov:

- (A_1) Ak všetci uchádzači, ktorí dostali pozvánku na pohovor, sú z ročníka 2016, tak niektorí uchádzači pozvánku na pohovor nedostali.
- (A_2) Všetci uchádzači dostali pozvánku na pohovor, alebo sú všetci uchádzači z ročníka 2016.

vyplýva záver

- (X) Ak všetci uchádzači z ročníka 2016 dostali pozvánku na pohovor, tak aj niektorí uchádzači, ktorí nie sú z ročníka 2016, dostali pozvánku na pohovor.

7 Logika prvého rádu

7.1 Funkčné symboly — formalizácia a sémantika

7.1.1 Sformalizujte nasledovné tvrdenia v jazyku prvorádovej logiky s funkčnými symbolmi a s rovnosťou. Zamýšľanou doménou sú ľudia. V maximálnej miere využite funkčné symboly na vyjadrenie vždy existujúcich a jednoznačných vzťahov.

1. Každého matka je žena a otec je muž.
2. Každý má práve dvoch rodičov, svoju matku a svojho otca.
3. Súrodenec je (len a len) niekto, s kým máte spoločného rodiča.
4. Každý, kto má súrodenca, má aj najvyššieho súrodenca.
5. Každý rodičovský pár má svoje najobľúbenejšie dieťa, ktoré preferuje pred svojimi ostatnými deťmi.
6. Kto je jedináčik, je najobľúbenejším dieťaťom oboch svojich rodičov.

7.1.2 S využitím prieskumníka štruktúr nájdite štruktúru s aspoň trojprvkovou doménou, ktorá spĺňa teóriu, ktorá vznikne sformalizovaním výrokov z cvičenia 7.1.1.

7.1.3 Nájdite štruktúru, ktorá splní prvorádovú teóriu $T = \{A_1, \dots, A_6\}$ v jazyku \mathcal{L} ,

kde $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, w, x, y, z\}$,

$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Andrea, Danka, Hanka, Janka, Max, Nikita}\}$,

$\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\text{manžel}^1, \text{manželka}^1, \text{prvorodené_dieťa}^2\}$,

$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{Lekár}^1, \text{Manželia}^2, \text{Muž}^1, \text{Právnik}^1, \text{Žena}^1\}$.

$(A_1) \quad \forall x \forall y (\text{Manželia}(x, y) \rightarrow \text{Manželia}(y, x))$

$(A_2) \quad \forall x \forall y (\text{Manželia}(x, y) \rightarrow$
 $(\text{Muž}(x) \rightarrow x \doteq \text{manžel}(y)) \wedge (\text{Žena}(x) \rightarrow x \doteq \text{manželka}(y)))$

$(A_3) \quad \forall x \forall y (\text{Manželia}(x, y) \wedge \text{Muž}(x) \wedge \text{Žena}(y) \rightarrow$
 $\text{Lekár}(\text{prvorodené_dieťa}(x, y)) \vee \text{Právnik}(\text{prvorodené_dieťa}(x, y)))$

$(A_4) \quad \text{Manželia}(\text{Hanka}, \text{Max}) \wedge \text{Žena}(\text{Hanka}) \wedge \text{Muž}(\text{Max})$

$(A_5) \text{ Manželia}(\text{Danka, Janka}) \wedge \text{Žena}(\text{Danka}) \wedge \text{Žena}(\text{Janka})$

$(A_6) \text{ Manželia}(\text{Andrea, Nikita}) \wedge \text{Muž}(\text{Andrea})$

7.2 Substitúcie, voľné a viazané premenné

7.2.1 Uvažujme nasledujúce postupnosti symbolov:

$(X_1) \text{ matka}(\text{matka}(x))$

$(X_2) y \doteq \text{matka}(x)$

$(X_3) \forall x \forall y (y \doteq \text{matka}(x) \rightarrow \text{dieťa}(x, y))$

$(X_4) \exists x (\text{ľúbi}(x, y) \vee \neg \text{ľúbi}(x, y))$

$(X_5) \forall x P(x) \wedge Q(x)$

$(X_6) \exists x \exists y R(x, y) \vee \forall y S(x, y)$

$(X_7) \exists x (P(f(x)) \wedge \forall x \forall y (Q(x, x) \rightarrow P(g(x)) \vee R(x, y)))$

Pre každú z nich:

- vyznačte oblasti platnosti kvantifikátorov, ktoré sa v nej vyskytujú;
- vyznačte voľné a viazané výskyty premenných x, y ;
- zistite, či je premenná y voľná;
- určte množinu voľných premenných.

7.2.2 Zistite, či je v nasledujúcich prípadoch substitúcia aplikovateľná; ak áno, určte výsledok substitúcie:

a) $x\{x \mapsto f(y)\}$

b) $y\{x \mapsto f(y)\}$

c) $g(x, y)\{x \mapsto y\}$

d) $h(x, a, g(x, y))\{x \mapsto f(a)\}$

e) $(\neg P(x, y) \vee Q(x, y))\{y \mapsto a\}$

f) $(\exists x \neg P(x, y) \vee Q(x, y))\{y \mapsto a\}$

g) $(\exists x P(x, y) \vee Q(x, y))\{x \mapsto g(b, y)\}$

h) $(\forall z (P(x, z) \wedge Q(x, g(y, z))))\{x \mapsto f(z), z \mapsto g(x, y)\}$

i) $(P(x) \wedge \exists x (Q(x) \vee R(x)) \rightarrow S(x))\{x \mapsto c\}$

- j) $(\forall z (P(x, z) \wedge Q(x, g(y, z))) \{x \mapsto f(y), y \mapsto g(x, y)\}$
 k) $(P(y) \wedge \exists x (Q(x, y) \vee R(x)) \rightarrow S(x)) \{x \mapsto c, y \mapsto f(x)\}$
 l) $\forall z (P(x, z) \wedge \exists w (R(w) \rightarrow Q(x, g(y, z))) \rightarrow P(z, w))$
 $\{x \mapsto f(y), y \mapsto g(x, y), w \mapsto g(a), z \mapsto x\}$


7.3 Vzťah kvantifikátorov a funkčných symbolov

7.3.1 Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú platné:

- a) $\forall x P(x) \rightarrow \forall x P(f(x))$
 b) $\exists x P(f(x)) \rightarrow \exists x P(x)$

7.3.2 Dokážte nájdením štruktúry, že nasledujúce formuly nie sú platné:

- a) $\forall x P(f(x)) \rightarrow \forall x P(x)$
 b) $\exists x P(x) \rightarrow \exists x P(f(x))$

 Predchádzajúce úlohy ilustrujú, že obor hodnôt interpretácie funkčného symbolu je podmnožinou domény (7.3.1) a môže byť *vlastnou* podmnožinou domény (7.3.2). Túto skutočnosť je dobré si uvedomovať pri nasledujúcej úlohe.

7.3.3 Rozhodnite, či je formula platná, resp. či vyplýva z teórie. Vyplývanie dokážte tablom, nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom.

- a) $\models \forall x (\forall y R(x, g(x, y)) \rightarrow \forall y R(x, y))$
 b) $\{ \neg \exists x \neg \exists y (\text{panovník}(x) \rightarrow \text{panovník}(\text{potomok}(x, y))) \} \models$
 $\neg \exists x \exists y (\text{panovník}(x) \wedge \neg \text{panovník}(\text{potomok}(x, y)))$
 c) $\{ \neg \exists x \exists y (\text{panovník}(x) \wedge \neg \text{panovník}(\text{potomok}(x, y))) \} \models$
 $\neg \exists x \neg \exists y (\text{panovník}(x) \rightarrow \text{panovník}(\text{potomok}(x, y)))$
 d) $\{ \forall x (P(x) \wedge \exists y \forall z Q(f(x, y), z)) \} \models \exists x (P(g(x)) \wedge \forall y Q(x, g(y)))$

7.4 Rovnosť

7.4.1 Prvorádovými tabľami (teda tabľami s pravidlami $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, pravidlom reflexivity a Eulerovým pravidlom) dokážte:

- a) $\models x \doteq y \wedge \neg \text{student}(y) \rightarrow \neg \text{student}(x)$
 b) $\{x \doteq y, \text{rodič}(\text{matka}(v), x), \neg \text{rodič}(\text{matka}(w), y)\} \models w \neq v$
 c) $\{f(f(f(x))) \doteq x, f(f(f(x))) \doteq f(f(x))\} \models f(x) \doteq x$

7.4.2 (Smullyan [4]) Nasledujúca úvaha môže vyzerat' prekvapujúco:

Každý sa bojí Drakulu. Drakula sa bojí iba mňa. Takže som Drakula.

Sformalizujte úvahu v jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} , kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Drakula}, \text{ja}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{bojí_sa}^2\}$ a dokážte, že je správna, prvorádovým tablom.

7.4.3 Aj nasledujúca úvaha môže prekvapiť:

Drakula je nadprirodzená bytosť. Nadprirodzené bytosti sa boja iba nadprirodzených bytostí. Drakula sa však bojí tých a jedine tých, ktorí zjedli cesnak. Takže ak som zjedol cesnak, som nadprirodzená bytosť.

Sformalizujte úvahu v jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} , kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Drakula}, \text{ja}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$. Množinu $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ si vhodne zvolte. Dokážte správnosť úvahy prvorádovým tablom. Snažte sa o čo najkratší dôkaz s využitím korektných pravidiel ako MP, MT, ale tiež pravidiel pre ekvivalenciu a kvantifikátory.

7.4.4 Sformalizujte nasledovné tvrdenia v jazyku prvorádovej logiky s funkčnými symbolmi a s rovnosťou. V maximálnej miere využite funkčné symboly na vyjadrenie jedno-jednoznačných vzťahov.

1. Fero je Jožov a Hankin najlepší kamarát, ale Fero je najlepší kamarát je Hanka.
2. Jožo nemá iných kamarátov, okrem svojho najlepšieho kamaráta.
3. Najvtipnejší je niekto, kto je vtipnejší ako všetci ostatní.
4. Hanka je dievča, a tie majú za najlepších kamarátov iba tých najvtipnejších.
5. Najvtipnejšieho študenta majú všetci študenti radi.

Tablovým kalkulom dokážte, že z tvrdení 1.–5. vyplýva:

- Ak sú všetci študenti, tak Hanka má rada všetkých Jožových kamarátov.

7.4.5 Pripomeňme si formalizáciu záhady vraždy tety Agáty z Dreadbury (6.3.9):

- (A_1) $\exists x(\text{vDreadbury}(x) \wedge \text{zabil}(x, \text{Agáta}))$
 (A_2) $\forall x(\text{vDreadbury}(x) \leftrightarrow x \doteq \text{Agáta} \vee x \doteq \text{Komorník} \vee x \doteq \text{Charles})$
 (A_3) $\forall x \forall y(\text{zabil}(x, y) \rightarrow \text{nenávidí}(x, y))$

- $(A_4) \forall x \forall y (\text{zabil}(x, y) \rightarrow \neg \text{bohatší_ako}(x, y))$
 $(A_5) \forall x (\text{nenávidí}(\text{Agáta}, x) \rightarrow \neg \text{nenávidí}(\text{Charles}, x))$
 $(A_6) \forall x (\neg x \doteq \text{Komorník} \rightarrow \text{nenávidí}(\text{Agáta}, x))$
 $(A_7) \forall x (\neg \text{bohatší_ako}(x, \text{Agáta}) \rightarrow \text{nenávidí}(\text{Komorník}, x))$
 $(A_8) \forall x (\text{nenávidí}(\text{Agáta}, x) \rightarrow \text{nenávidí}(\text{Komorník}, x))$
 $(A_9) \forall x \exists y (\vee \text{Dreadbury}(y) \wedge \neg \text{nenávidí}(x, y))$
 $(A_{10}) \neg \text{Agáta} \doteq \text{Komorník}$

Nech $T = \{A_1, \dots, A_{10}\}$ (pozor na zmenu vo formulách A_2 , A_9 a A_{10} oproti praktickým cvičeniam). Dokážte tablovým kalkulom, kto zabil Agátu, teda dokážte že platí $T \models \text{zabil}(v, \text{Agáta})$, keď za v dosadíte správneho vraha.

Symbolsy predikátov a konštánt si vhodne skráťte. Použite prvorádové tablo rozšírené o pravidlá z úlohy 5.3.1.

7.4.6 Dokážte alebo vyvráťte:

- a) Existuje formula bez rovnosti, ktorá je splnená iba v štruktúre, ktorá má:
 - i. najviac dvojprvkovú doménu;
 - ii. aspoň dvojprvkovú doménu.
- b) Existuje formula s rovnosťou, ktorá je splnená iba v štruktúre, ktorá má:
 - i. najviac dvojprvkovú doménu;
 - ii. aspoň dvojprvkovú doménu.

Literatúra

- [1] Gordon S. Novak Jr. Resolution example and exercises. [online]. <https://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html>.
- [2] Francis Jeffry Pelletier. Seventy-five problems for testing automatic theorem provers. *J. Autom. Reasoning*, 2(2):191–216, 1986.
- [3] Willard Van Orman Quine. *Methods of Logic*. Holt, Rinehart and Winston, revised edition, 1959.
- [4] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. Prentice-Hall, 1978.