Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Matematika (4): Logika pre informatikov

Poznámky z prednášok

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Letný semester 2019/2020
Posledná aktualizácia: 19. februára 2020

Obsah

Časť I.
Úvod

Atomické formuly

0. Úvod

0.1. O logike

Čo je logika

Logika je vedná disciplína, ktorá študuje usudzovanie.

Správne, racionálne usudzovanie je základom vedy a inžinierstva.

Vyžaduje rozoznať
správne úsudky z predpokladaných princípov a pozorovania
od chybných úvah a špekulácií.

Správnosť úsudkov, zdá sa, nie je iba vec konvencie a dohody.

Logika skúma, *aké* sú zákonitosti správneho usudzovania
a *prečo* sú zákonitosťami.

Ako sa v logika študuje usudzovanie

Logika má dva hlavné predmety záujmu:

Jazyk zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

Syntax pravidlá zápisu tvrdení

Sémantika význam tvrdení

Usudzovanie (inferencia)
odvodzovanie nových *logických dôsledkov* z doterajších poznatkov
Ako vyplýva z jazyka?

Jazyk, poznatky a teórie

Jazyk slúži na vyjadrenie tvrdení, ktoré popisujú informácie — poznatky o svete.

Súbor poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, tvorí *teóriu*.

Príklad 1 (Party time!). Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah.
Organizujeme párty a chceme na ňu pozvať niektorých z nich.
Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

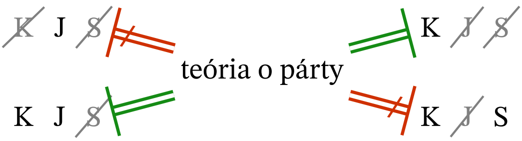
Možné stavy sveta a modely

Teória rozdeľuje *možné stavy sveta* (interpretácie) na:

- $\models$ stavy, v ktorých je pravdivá — *modely* teórie,
- $\not\models$ stavy, v ktorých je nepravdivá.

Tvrdenie aj teória môžu mať viacero modelov, ale aj žiaden.

Príklad 2. Vymenujme možné stavy prítomnosti Kim, Jima a Sarah na párty. Zistime, v ktorých sú pravdivé jednotlivé tvrdenia našej teórie a celá teória.



Logické dôsledky

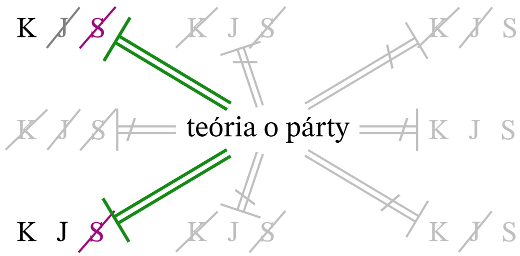
Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo *všetkých modeloch* teórie.

Príklad 3. Logickým dôsledkom teórie (P1), (P2), (P3) je napríklad:
Sarah nepôjde na párty.

Logické usudzovanie

Vymenovanie všetkých svetov je často nepraktické až nemožné.
Logické dôsledky ale môžeme *odvodzovať usudzovaním* (*inferovať*).
Pri odvodení vychádzame z *premís* (*predpokladov*) a postupnosťou *správnych úsudkov* dospievame k *záverom*.

Príklad 4. Vieme, že (P1) ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah,
a že (P2) ak pôjde Jim, tak pôjde Kim.



1. Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.
2. Podľa 1. a (P2) pôjde aj Kim.
3. Podľa 2. a (P1) nepôjde Sarah.

Teda podľa uvedenej úvahy: Ak na párty pôjde Jim, tak nepôjde Sarah.

Dedukcia

Úsudok je správny (*korektný*) vtedy, keď *vždy*, keď sú pravdivé jeho premisy, je pravdivý aj jeho záver.

Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver je logickým dôsledkom premís a odvodenie je jeho *dôkazom* z premís.

Dedukcia je usudzovanie, pri ktorom sa používajú iba správne úsudky.

Logika študuje dedukciu, ale aj niektoré nededuktívne úsudky,
ktoré sú *vo všeobecnosti* nesprávne,
ale sú správne v *špeciálnych* prípadoch alebo sú *užitočné*:

- indukcia — zovšeobecnenie;
- abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov;
- usudzovanie na základe analógie (podobnosti).

Kontrapríklad

Ak úsudok nie je správny, vieme nájsť *kontrapríklad*.

Stav sveta, v ktorom sú predpoklady pravdivé, ale záver je nepravdivý.

Príklad 5. Nesprávny úsudok:
Ak platia tvrdenia teórie o party, na party príde Jim.

Kontrapríklad:
Stav, kedy príde Kim, nepríde Jim, nepríde Sarah.

Teória je pravdivá, výrok na party príde Jim nie je pravdivý.

Ťažkosti s prirodzeným jazykom

Prirodzený jazyk je problematický:

- Viacznačné slová: Milo *je* v poslucharni A.
- Viacznačné tvrdenia: Videl som dievča v sále *s ďalekohľadom*.
- Ťažko syntakticky analyzovateľné tvrdenia:

  > Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtretinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe veci, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; … — *Zákon č. 182/1993 Z. z. SR*

- Výnimky a obraty so špeciálnym ustáleným významom: *Ni*kto *nie* je dokonalý.

Formálne jazyky

Problémy prirodzených jazykov sa obchádzajú použitím umelých *formálnych* jazykov.

- Presne definovaná, zjednodušená syntax(pravidlá zápisu tvrdení) a sémantika (význam).
- Niekoľko formálnych jazykov už poznáte: aritmetika, jazyky fyzikálnych a chemických vzorcov, programovacie jazyky, …
- Problémy z reálneho sveta opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv *formalizovať*, a potom naň môžeme použiť logický aparát.
- Formalizácia vyžaduje cvik, trocha veda, trocha umenie.

Formalizácia poznatkov

S formalizáciou ste sa už stretli — napríklad pri riešení slovných úloh:

Karol je trikrát starší ako Mária.
Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov.
Koľko rokov majú Karol a Mária?

$$\rightsquigarrow \quad \begin{aligned} k &= 3 \cdot m \\ k + m &= 12 \end{aligned}$$

Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky.

Príklad 6. Sformalizujme náš párty príklad:

P0: Niekto z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Logika prvého rádu

Jazyk logiky prvého rádu (FOL) je jeden zo základných formálnych jazykov, ktorým sa logika zaoberá.

Do dnešnej podoby sa vyvinul na koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia — Gottlob Frege, Guiseppe Peano, Charles Sanders Peirce.

Výrokové spojky + *kvantifikátory* $\forall$ a $\exists$.

Dá sa v ňom vyjadriť veľa zaujímavých tvrdení, bežne sa používa v matematike.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \ldots$$

Logika prvého rádu a informatika

Informatika sa vyvinula z logiky (John von Neumann, Alan Turing, Alonzo Church, …)

Prvky logiky prvého rádu obsahuje väčšina *programovacích jazykov*:

- `all(x > m for x in z)`,
- `select T1.x, T2.y from T1 inner join T2 on T1.z = T2.z where T1.z > 25`,

niektoré (Prolog) sú priamo podmnožinou FOL.

Vo FOL sa dá *presne špecifikovať*, čo má program robiť, *popísať*, čo robí, a *dokázať*, že robí to, čo bolo špecifikované.

Vo *výpočtovej logike* a umelej inteligencii sa FOL používa na riešenie rôznych ťažkých problémov (plánovanie, rozvrh, hľadanie a overovanie dôkazov matematických tvrdení,…) simulovaním usudzovania.

Kalkuly — formalizácia usudzovania

Pre mnohé logické jazyky sú známe *kalkuly* — množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú

korektné — odvodzujú iba logické dôsledky

úplné — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky

Kalkuly sú bežné v matematike

- na počítanie s číslami, zlomkami (násobilka, aritmetika),
- riešenie lineárnych rovníc (kalkul lineárnej algebry),
- derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc (kalkul matematickej analýzy)

…

Sú korektné, ale nie vždy úplné.

Poznáte už aj jeden logický kalkul — ekvivalentné úpravy.

0.2. O tomto kurze

Čím sa budeme zaoberať v tomto kurze

Teoreticky

- Jazykmi logiky prvého rádu (FOL), jeho syntaxou a sémantikou
- Správnymi úsudkami v ňom a dôvodmi, prečo sú správne
- Korektnosťou a úplnosťou logických kalkulov
- Automatizáciou usudzovania

Prakticky
- Vyjadrovaním problémov vo FOL
- Automatizovaním riešenia problémov
- Manipuláciou symbolických stromových štruktúr (výrazov — formúl a termov)
- Programovaním vlastných jednoduchých automatických dokazovačov

Filozoficky
- Zamýšľanými a nezamýšľanými významami tvrdení
- Obmedzeniami vyjadrovania a usudzovania

Prístup k logike na tomto predmete

Stredoškolský prístup príliš *neoddeľuje jazyk* výrokov od jeho *významu* a vlastne ani jednu stránku *nedefinuje jasne*.

V tomto kurze sa budeme snažiť byť *presní*.

- *Zdanlivo* budeme o jednoduchých veciach hovoriť zložito

Pojmy z logiky budeme *definovať matematicky*

- ako množiny, postupnosti, funkcie, atď., ⇠ Matematika (1), (3)

na praktických cvičeniach aj *programami*

- ako reťazce, slovníky, triedy a metódy. ⇠ Programovanie (1), (2)

Budeme sa pokúšať *dokazovať* ich vlastnosti.

Budeme teda hovoriť *o formálnej logike* pomocou matematiky,
ktorá je ale sama postavená na *logike v prirodzenom jazyku* —
meta matematika logiky, matematika ***o*** logike.

Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4

Aktívne učenie

Na cvičeniach budeme používať techniku nazývanú *aktívne učenie*:

- Riešenie zadaných problémov v skupinkách.
- Cvičiaci budú s vami *konzultovať* postup a riešenia.
- Na tabuľu sa budú úlohy riešiť len výnimočne.
- Budete mať k dispozícii materiály z prednášok a zbierku s ukážkovými riešeniami a ďalšími úlohami.

Prečo?

- Samostatnou snahou o riešenie sa *naučíte viac a hlbšie* než pozorovaním, ako riešia iní.
- V praxi vám nik neukáže vzorové riešenie problémov.

Aktívne učenie

Problémy:

- Bude to mierne frustrujúce, budete neistí.
- Preto budete mať *pocit*, že ste sa nenaučili veľa.
- Je to *normálne*, ale *nebude to pravda*!

Čo s tým?

- Pýtajte sa!
- Príďite na konzultácie (termín oznámime na prvých cvičeniach).

1. Atomické formuly

Jazyky logiky prvého rádu

Logika prvého rádu je trieda (rodina) formálnych jazykov.
Zdieľajú:

- časti abecedy — *logické symboly* (spojky, kvantifikátory)
- pravidlá tvorby *formúl* (slov)

Líšia sa v *mimologických symboloch* — časť abecedy, pomocou ktorej sa tvoria najjednoduchšie — *atomické formuly* (*atómy*).

Atomické formuly a výroky v prirodzenom jazyku

Atomické formuly logiky prvého rádu zodpovedajú *jednoduchým vetám* o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch a rovnosti *pomenovaných* objektov.

Príklady 7.

- ✅ Milo beží.
- ✅ Jarka vidí Mila.
- ❌ Milo beží, ale Jarka ho nevidí.
- ❌ Jarka vidí všetkých.
- ✅ Jarka dala Milovi Bobíka v sobotu.
- ❌ Jarka nie je doma.
- ❌ Niekto je doma.
- ✅ Súčet 2 a 2 je 3.
- ✅ Prezidentkou SR je Zuzana Čaputová.

Indivíduové konštanty

Indivíduové konštanty sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré pomenúvajú jednotlivé, pevne zvolené objekty.

Zodpovedajú vlastným menám, jednoznačným pomenovaniam, niekedy zámenám.

Príklady 8. Jarka, 2, Zuzana_Čaputová, sobota, π, …

Indivíduové konštanty a objekty

Indivíduová konštanta

- vždy pomenúva skutočný, existujúci objekt (na rozdiel od vlastného mena *Zeus*);
- nikdy nepomenúva viac objektov (na rozdiel od vlastného mena *Jarka*).

Objekt

- môže byť pomenovaný aj viacerými indivíduovými konštantami (napr. Prezidentka_SR a Zuzana_Čaputová);
- nemusí mať žiadne meno.

Predikátové symboly

Predikátové symboly sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré vyjadrujú vlastnosti alebo vzťahy.

Jednoduché vety v slovenčine majú *podmetovú* (*subjekt*) a *prísudkovú* časť (*predikát*):

Jarka	vidí	Mila.
podmet	prísudok	predmet
podmetová časť	prísudková časť	

Do logike prvého rádu prekladáme takéto tvrdenie pomocou predikátového symbolu vidí, ktorý má dva *argumenty* („podmety“): indivíduové konštanty Jarka a Milo.

Úloha argumentu v predikáte je daná jeho poradím (podobne ako pozičné argumenty funkcií/metód v prog. jazykoch).

Arita predikátového symbolu

Predikátový symbol má pevne určený počet argumentov — *aritu*.

Vždy musí mať práve toľko argumentov, aká je jeho arita.

Dohoda 9. Aritu budeme niekedy písať ako horný index symbolu.
Napríklad beží^1, vidí^2, dal^4, $<^2$.

Zamýšľaný význam predikátových symbolov

Unárny predikátový symbol (teda s aritou 1) zvyčajne označuje *vlastnosť*, druh, rolu, stav.

Príklady 10.

$\mathsf{pes}^1(x)$	x je mačka
$\mathsf{čierne}^1(x)$	x je čierne
$\mathsf{beží}^1(x)$	x beží

Binárny, *ternárny*, … predikátový symbol (s aritou 2, 3, …) zvyčajne označuje *vzťah* svojich argumentov.

Príklady 11.

$\mathsf{vidí}^2(x, y)$	x vidí y
$\mathsf{dal}^4(x, y, z, t)$	x dal(a/o) objektu y objekt z v čase t

Kategorickosť významu predikátových symbolov

V bežnom jazyku často nie je celkom jasné, či objekt má alebo nemá nejakú vlastnosť — kedy je niekto mladý?

Predikátové symboly predstavujú *kategorické* vlastnosti/vzťahy — pre každý objekt sa dá *jednoznačne rozhodnúť*, či má alebo nemá túto vlastnosť/vzťah s iným objektom či inými objektmi.

Význam predikátového symbolu preto často zodpovedá rovnakému slovenskému predikátu iba približne:
predikát $\mathsf{mladší}^2$ môže označovať vzťah „x je mladší ako y“ presne;
predikát $\mathsf{mladý}^1$ zodpovedá vlastnosti „x je mladý“ iba približne.

Nekategorickými vlastnosťami sa zaoberajú fuzzy logiky. Predikáty v nich zachytávajú význam týchto vlastností presnejšie.

Atomické formuly

Atomické formuly majú tvar

$$predikát^k(argument_1, argument_2, \dots, argument_k),$$

alebo

$$argument_1 \doteq argument_2,$$

pričom k je arita *predikát*u, a $argument_1$, …, $argument_k$ sú (nateraz) indivíduové konštanty.

Atomická formula zodpovedá (jednoduchému) *výroku* v slovenčine, t.j. tvrdeniu, ktorého *pravdivostná hodnota* (pravda alebo nepravda) sa dá jednoznačne určiť, lebo predikát označuje kategorickú vlastnosť/vzťah a indivíduové konštanty jednoznačne označujú objekty.

Formalizácia jednoduchých výrokov

Formalizácia je preklad výrokov z prirodzeného jazyka do formálneho logického jazyka.

Nie je to jednoznačný proces.

Predpísaný prvorádový jazyk (konštanty a predikáty) sa snažíme využiť čo najlepšie.

Príklad 12. Sformalizujme v jazyku s konštantami Evka, Jarka a Milo a predikátom vyšší^2 výroky:

A_1: Jarka je vyššia ako Milo. $\rightsquigarrow$ $\text{vyšší}^2(\text{Jarka}, \text{Milo})$

A_2: Evka je nižšia ako Milo. $\rightsquigarrow$ $\text{vyšší}^2(\text{Milo}, \text{Evka})$

Zanedbávame nepodstatné detaily — pomocné slovesá, predložky, skloňovanie, rod, …: $\text{vyšší}^2(x, y)$ — x je vyšší/vyššia/vyššie ako y.

Návrh jazyka pri formalizácii

Formalizácia spojená s návrhom vlastného jazyka je *iteratívna*: Postupne zisťujeme, aké predikáty a konštanty potrebujeme, upravujeme predchádzajúce formalizácie.

Príklady 13. A_1: Jarka dala Milovi Bobíka.

$\rightsquigarrow$ $\cancel{\text{dalaMiloviBobíka}^1(\text{Jarka})}$ $\cancel{\text{dalBobíka}^2(\text{Jarka}, \text{Milo})}$ $\text{dal}^3(\text{Jarka}, \text{Milo}, \text{Bobík})$

A_2: Evka dostala Bobíka od Mila.

$\rightsquigarrow$ $\cancel{\text{dalBobíka}^2(\text{Milo}, \text{Evka})}$ $\text{dal}^3(\text{Milo}, \text{Evka}, \text{Bobík})$

A_3: Evka dala Jarke Cilku.

$\rightsquigarrow$ $\cancel{\text{dalCilku}^2(\text{Evka}, \text{Jarka})}$ $\text{dal}^3(\text{Evka}, \text{Jarka}, \text{Cilka})$

A_4: Bobík je pes.

$\rightsquigarrow$ $\text{pes}^1(\text{Bobík})$

Návrh jazyka pri formalizácii

Minimalizujeme počet predikátov, uprednostňujeme flexibilnejšie, viacúčelovejšie (dal^3 pred dalBobíka^2 a dalCilku^2).

- Expresívnejší jazyk (vyjadrí viac).
- Zrejmejšie logické vzťahy výrokov.

Podobné normalizácii databázových schém.

1.1. Syntax atomických formúl

Presné definície

Cieľom logiky je uvažovať o jazyku, výrokoch, vyplývaní, dôkazoch.

Výpočtová logika sa snaží automaticky riešiť konkrétne problémy vyjadrené v logických jazykoch.

Spoľahlivé a overiteľné úvahy a výpočty vyžadujú *presnú* dohodu na tom, o čom hovoríme — *definíciu* logických pojmov (jazyk, výrok, pravdivosť, …).

Pojmy (napr. *atomická formula*) môžeme zadefinovať napríklad

- *matematicky* ako množiny, n-tice, relácie, funkcie, postupnosti, …;
- *informaticky* tým, že ich *naprogramujeme*, napr. zadefinujeme triedu `AtomickaFormula` v Pythone.

Matematický jazyk je univerzálnejší ako programovací — abstraktnejší, menej nie až tak podstatných detailov.

Syntax atomických formúl logiky prvého rádu

Najprv sa musíme dohodnúť na tom, aká je *syntax* atomických formúl logiky prvého rádu:

- z čoho sa skladajú,
- čím vlastne sú,
- akú majú štruktúru.

Symboly jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Z čoho sa skladajú atomické formuly?

Definícia 14. *Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu* sú mimologické, logické a pomocné symboly, pričom:

Mimologickými symbolmi sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.

Jediným *logickým symbolom* je $\doteq$ (symbol rovnosti).
Pomocnými symbolmi sú **(**, **)** a **,** (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ sú disjunktné.
Pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ ani $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.
Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}_\mathcal{L}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Abeceda jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky by ste povedali, že *abecedou* jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu je $\Sigma_\mathcal{L} = \mathcal{C}_\mathcal{L} \cup \mathcal{P}_\mathcal{L} \cup \{\doteq, (,), ,\}$.

V logike sa väčšinou pojem *abeceda* nepoužíva, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy* symbolov.

Namiesto *abeceda jazyka $\mathcal{L}$* hovoríme *množina všetkých symbolov jazyka $\mathcal{L}$* alebo len *symboly jazyka $\mathcal{L}$*.

Na zápise množiny $\Sigma_\mathcal{L}$ však ľahko vidíme, čím sa rôzne jazyky atomických formúl logiky prvého rádu od seba líšia a čo majú spoločné.

Príklady symbolov jazykov atomických formúl logiky prvého rádu

Príklad 15. Príklad o deťoch a zvieratkách sme sformalizovali v jazyku $\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}$, v ktorom:

- $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} = \{\textsf{Bobík}, \textsf{Cilka}, \textsf{Evka}, \textsf{Jarka}, \textsf{Milo}\}$,
- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} = \{\textsf{dal}, \textsf{pes}\}$,
- $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\textsf{dal}) = 3$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\textsf{pes}) = 1$.

Príklad 16. Príklad o návštevníkoch party by sme mohli sformalizovať v jazyku $\mathcal{L}_{\mathrm{party}}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathrm{party}}} = \{\textsf{Kim}, \textsf{Jim}, \textsf{Sarah}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathrm{party}}} = \{\textsf{príde}\}$ a $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{party}}}(\textsf{príde}) = 1$.

Označenia symbolov

Keď budeme hovoriť o *ľubovoľnom* jazyku $\mathcal{L}$, často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme *meta premenné*: premenné v (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť *o* (po grécky *meta*) týchto symboloch.

Dohoda 17. Indivíduové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými a, b, c, d s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými P, Q, R s prípadnými dolnými indexmi.

Atomické formuly jazyka

Čo sú atomické formuly?

Definícia 18. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol s aritou n a $c_1, \dots, c_n$ sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Slová jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky by ste povedali, že jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu nad abecedou $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, (,), ,\}$ je množina slov

$$
\begin{aligned}
&\{ c_1 \doteq c_2 \mid c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, c_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \} \\
&\qquad\qquad \cup \{ P(c_1, \dots, c_n) \mid P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathrm{ar}_{\mathcal{L}}(P) = n, c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \}.
\end{aligned}
$$

V logike sa jazyk takto nedefinuje, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy slov*. Navyše tieto slová zodpovedajú slovenským *vetám*.

Príklady atómov jazyka

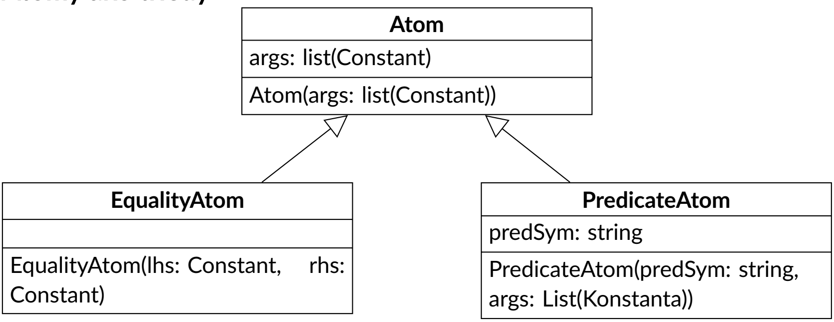
Príklad 19. V jazyku $\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} = \{\mathsf{Bobík}, \mathsf{Cilka}, \mathsf{Evka}, \mathsf{Jarka}, \mathsf{Milo}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} = \{\mathsf{dal}, \mathsf{pes}\}$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\mathsf{dal}) = 3$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\mathsf{pes}) = 1$, sú *okrem iných* rovnostné atómy:

$$\mathsf{Bobík} \doteq \mathsf{Bobík} \qquad \mathsf{Cilka} \doteq \mathsf{Bobík}$$
$$\mathsf{Evka} \doteq \mathsf{Jarka} \qquad \mathsf{Bobík} \doteq \mathsf{Cilka}$$

a predikátové atómy:

$$\mathsf{pes}(\mathsf{Cilka}) \qquad \mathsf{dal}(\mathsf{Cilka}, \mathsf{Milo}, \mathsf{Bobík}) \qquad \mathsf{dal}(\mathsf{Jarka}, \mathsf{Evka}, \mathsf{Milo}).$$

Atómy ako triedy



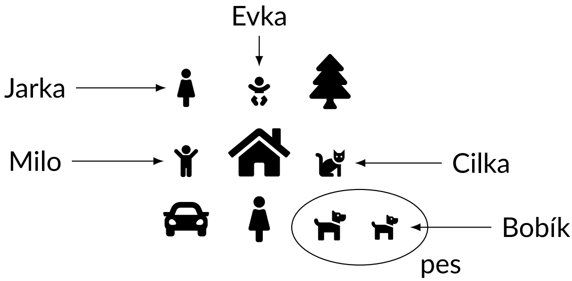
1.2. Sémantika atomických formúl

Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako zistíme, či je atomická formula $\mathsf{pes}(\mathsf{Bobík})$ pravdivá v nejakej situácii (napríklad u babky Evky, Jarky a Mila na dedine)?

Pozrieme sa na túto situáciu a zistíme:

1. aký objekt b pomenované konštanta $\mathsf{Bobík}$;
2. akú vlastnosť p označuje predikát pes;
3. či objekt b má vlastnosť p.



Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako môžeme tento postup matematicky alebo informaticky modelovať? Potrebujeme:

- matematický/informatický model situácie (stavu vybranej časti sveta),
- postup na jeho použitie pri vyhodnocovaní pravdivosti formúl.

Matematický model stavu sveta

Ako môžeme matematicky popísať nejakú situáciu tak, aby sme pomocou tohto popisu mohli vyhodnocovať atomické formuly v nejakom jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$?

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
- ▶ množina všetkých objektov — *doména*;
- pre každú konštantu c z jazyka $\mathcal{L}$,
  ktorý objekt z domény c pomenúva,
- pre každý unárny predikát P z jazyka $\mathcal{L}$,
  ktoré objekty z domény majú vlastnosť označenú predikátom P,
- ▶ tvoria *podmnožinu* domény;

- pre každý n-árny predikát R z jazyka $\mathcal{L}$, $n > 1$,
  ktoré n-tice objektov z domény sú vo vzťahu ozn. pred. R,

▶ tvoria *n-árnu reláciu* na doméne;

- priradenie objektov ku konštantám a množín/relácií k predikátom musí byť jednoznačné

▶ *interpretačná funkcia*.

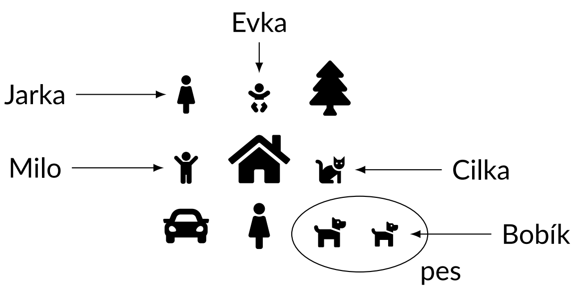
Štruktúra pre jazyk

Definícia 20. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu.
Štruktúrou pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde
D je ľubovoľná *neprázdna* množina nazývaná *doména* štruktúry $\mathcal{M}$;
i je zobrazenie, nazývané *interpretačná funkcia* štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

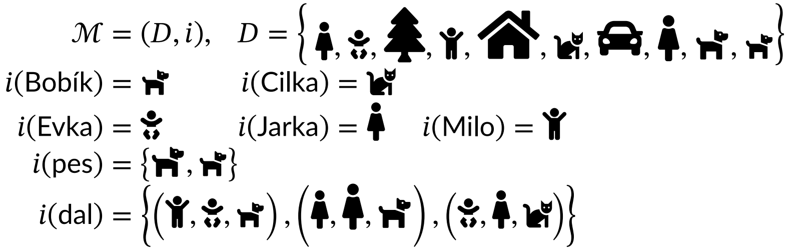
- každému symbolu konštanty c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n
  priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Dohoda 21. Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$.

Príklad štruktúry



Príklad 22.



Štruktúra ako informatický objekt

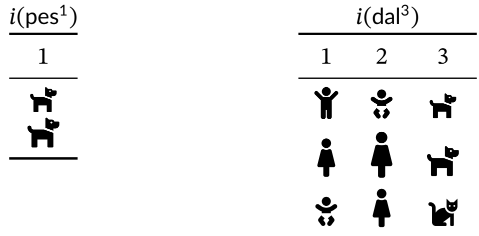
Štruktúru sme definovali pomocou *matematických* objektov.

Aký *informatický* objekt zodpovedá štruktúre?

Databáza:

Predikátové symboly jazyka ~ veľmi zjednodušená schéma DB (arita ~ počet stĺpcov)

Interpretácia predikátových symbolov ~ konkrétne tabuľky s dátami



Štruktúry — upozornenia

Štruktúr pre daný jazyk je *nekonečne veľa*.

Doména štruktúry

- môže mať ľubovoľné prvky;
- nijak *nesúvisí* s intuitívnym významom interpretovaného jazyka;
  Jazyk o deťoch a zvieratkách — číselná doména štruktúry
- môže byť *nekonečná*.

Interpretácia symbolov konštánt:

- každej konštante je priradený objekt domény;

- nie každý objekt domény musí byť priradený nejakej konštante;
- rôznym konštantám môže byť priradený rovnaký objekt.

Interpretácie predikátových symbolov môžu byť *nekonečné*.

Pravdivosť atomickej formuly v štruktúre

Ako zistíme, či je atomická formula pravdivá v štruktúre?

Definícia 23. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl jazyka logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm $c_1 \doteq c_2$ jazyka $\mathcal{L}$ je *pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $i(c_1) = i(c_2)$.

Predikátový atóm $P(c_1, \dots, c_n)$ jazyka $\mathcal{L}$ je *pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$.

Vzťah *atóm A je pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$* skrátene zapisujeme $\mathcal{M} \models A$. Hovoríme aj, že $\mathcal{M}$ je *modelom A*.

Vzťah *atóm A nie je pravdivý (tiež* je nepravdivý*) v štruktúre* $\mathcal{M}$ (tiež $\mathcal{M}$ *nie je modelom A*) skrátene zapisujeme $\mathcal{M} \not\models A$.

Príklad určenia pravdivosti atómu v štruktúre

Príklad 24.

$$\mathcal{M} = (D, i), \quad D = \{ , , , , , , , , , \}$$

$i(\textsf{Bobík}) =$ $\qquad$ $i(\textsf{Cilka}) =$

$i(\textsf{Evka}) =$ $\qquad$ $i(\textsf{Jarka}) =$ $\qquad$ $i(\textsf{Milo}) =$

$i(\textsf{pes}) = \{ , \}$

$i(\textsf{dal}) = \{ (, ,), (, ,), (, ,) \}$

Atóm $\textsf{pes}(\textsf{Bobík})$ *je pravdivý* v štruktúre $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models \textsf{pes}(\textsf{Bobík})$, lebo objekt $i(\textsf{Bobík}) =$ je prvkom množiny $\{ , \} = i(\textsf{pes})$.

Atóm $\textsf{dal}(\textsf{Evka}, \textsf{Jarka}, \textsf{Cilka})$ *je pravdivý* v $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models \textsf{dal}(\textsf{Evka}, \textsf{Jarka}, \textsf{Cilka})$, lebo $(i(\textsf{Evka}), i(\textsf{Jarka}), i(\textsf{Cilka})) = (, ,) \in i(\textsf{dal})$.

Atóm $\textsf{Cilka} \doteq \textsf{Bobík}$ *nie je pravdivý* v $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \not\models \textsf{Cilka} \doteq \textsf{Bobík}$, lebo $i(\textsf{Cilka}) = \ \neq \ = i(\textsf{Bobík})$.