Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Júlia Pukancová,
Martin Homola, Jozef Šiška

Letný semester 2019/2020

Posledná aktualizácia: 17. marca 2020

Obsah

1 Atomické formuly

1.1 Sémantika atomických formúl

1.1.1 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Anna}, \text{Boris}, \text{mama}, \text{oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{dievča}^1, \text{chlapec}^1, \text{sestra}^2, \text{uprednostňuje}^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
dievča(x)	x je žena
chlapec(x)	x je chlapec
sestra(x, y)	x je sestra y
uprednostňuje(x, y, z)	x uprednostňuje y pred z

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) dievča(Anna)

(A_2) chlapec(Boris)

(A_3) sestra(Anna, Boris)

(A_4) uprednostňuje(mama, Anna, Boris)

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna)

(B_1) dievča(mama)

(B_2) chlapec(oco)

(B_3) uprednostňuje(mama, Boris, Anna)

(B_4) uprednostňuje(oco, Boris, Anna)

Riešenie. Každú atomickú formulu zo zadania preložíme do vety v prirodzenom jazyku.

(A_1) Anna je dievča.

(A_2) Boris je chlapec.

(A_3) Anna je sestra Borisa.

(A_4) Mama uprednostňuje Annu pred Borisom.

(A_5) Boris uprednostňuje samého seba pred Annou.

(B_1) Mama je dievča.

(B_2) Oco je chlapec.

(B_3) Mama uprednostňuje Borisa pred Annou.

(B_4) Oco uprednostňuje Borisa pred Annou.

♮

1.1.2 Príklad. Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.1?

Riešenie. Počet atomických formúl v jazyku $\mathcal{L}$ závisí od počtu konštánt v jazyku $\mathcal{L}$ (teda od kardinality množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$) a od jednotlivých arít jednotlivých predikátov z množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

V jazyku $\mathcal{L}$ máme $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = 4$.

Pomocou predikátového symbolu, ktorého arita je 1 teda môžeme vytvoriť v jazyku $\mathcal{L}$ 4 atomické formuly. Kedže unárne predikátové symboly máme v $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ dva (dievča a chlapec), dokopy vytvoríme 8 atomických formúl.

> **Pomôcka.** Vo všeobecnosti platí, že pre ľubovoľný predikátový symbol $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou k a pre $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = n$ môžeme v jazyku $\mathcal{L}$ vytvoriť n^k atomických formúl.

Pre binárny predikátový symbol (sestra) vieme vytvoriť 4^2 atomických formúl, teda 16. K tejto možnosti treba prirátať aj rovnostné atomické formuly, ktoré vytvoríme pomocou symbolu rovnosti $\doteq$. Tento symbol je tiež binárny, a teda formúl bude opäť 16.

Analogicky pre ternárny predikátový symbol (uprednostňuje) vytvoríme $4^3 = 64$ atomických formúl.

Celkovo teda v jazyku $\mathcal{L}$ môžeme zostrojiť $8 + 16 + 16 + 64 = 104$ atomických formúl. ♮

1.1.3 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_5, B_1, \dots, B_4$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$
\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
i(\text{Anna}) &= 1, \quad i(\text{Boris}) = 2, \quad i(\text{mama}) = 3, \quad i(\text{oco}) = 4, \\
i(\text{dievča}) &= \{1, 5\}, \\
i(\text{chlapec}) &= \{2, 4, 5\}, \\
i(\text{sestra}) &= \{(3, 4), (1, 2)\}, \\
i(\text{uprednostňuje}) &= \{(3, 1, 2), (3, 2, 1), (5, 4, 1), (5, 3, 5)\}.
\end{aligned}
$$

Riešenie.

(A_1) dievča(Anna) je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \models$ dievča(Anna), pretože $i(\text{Anna}) = 1 \in \{1, 5\} = i(\text{dievča})$.

(A_2) $\mathcal{M} \models$ chlapec(Boris), pretože $i(\text{Boris}) = 2 \in i(\text{chlapec})$.

(A_3) $\mathcal{M} \models$ sestra(Anna, Boris), pretože $(i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) = (1, 2) \in i(\text{sestra})$.

(A_4) $\mathcal{M} \models$ uprednostňuje(mama, Anna, Boris), pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) \in i(\text{uprednostňuje})$.

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna) nie je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \not\models$ uprednostňuje(Boris, Boris, Anna), pretože $(i(\text{Boris}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{uprednostňuje})$.

(B_1) $\mathcal{M} \models$ chlapec(oco), pretože $i(\text{oco}) \in i(\text{chlapec})$.

(B_2) $\mathcal{M} \models$ uprednostňuje(mama, Boris, Anna), pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \in i(\text{uprednostňuje})$.

(B_3) $\mathcal{M} \not\models$ upredostňuje(oco, Boris, Anna),
pretože $(i(\text{oco}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{upredostňuje})$. ♮

1.1.4 Príklad. Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich *súčasne* bola modelom všetkých formúl $A_1, \ldots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \ldots, B_4$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 6 prvkov;

b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 3 prvky;

c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 1 prvok.

Riešenie.

a) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ s aspoň 5 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= (\{a, b, c, d, m, o\}, i_1) \\
i_1(\text{Anna}) &= a, \quad i_1(\text{Boris}) = b, \quad i_1(\text{mama}) = m, \quad i_1(\text{oco}) = o, \\
i_1(\text{dievča}) &= \{a\}, \\
i_1(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\
i_1(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, d)\}, \\
i_1(\text{upredostňuje}) &= \{(m, a, b), (o, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

b) Štruktúra $\mathcal{M}_2$ s najviac 3 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= (\{a, b, c\}, i_2) \\
i_2(\text{Anna}) &= a, \quad i_2(\text{Boris}) = b, \quad i_2(\text{mama}) = c, \quad i_2(\text{oco}) = c, \\
i_2(\text{dievča}) &= \{a\}, \\
i_2(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\
i_2(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, c)\}, \\
i_2(\text{upredostňuje}) &= \{(c, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

c) Nie je možné zostrojiť $\mathcal{M}_3$ tak, aby mala najviac 1 prvok a súčasne bola modelom všetkých formúl $A_1, \ldots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \ldots, B_4$.

Doména štruktúry nemôže byť prázdna, preto $\mathcal{M}_3$ by mala mať práve jeden prvok, teda $\mathcal{M}_3 = (\{a\}, i_3)$ pre nejaký prvok a.

Problém nastáva už pri A_1 a B_1. Keďže v doméne $\mathcal{M}_3$ je jediný prvok, musia ho pomenúvať všetky konštanty, teda $i_3(\text{Anna}) = a$, ale aj $i_3(\text{mama}) = a$. Aby bola A_1 pravdivá v $\mathcal{M}_3$, potom musí byť $a \in i_3(\text{dievča})$, teda $i_3(\text{dievča})$ musí byť $\{a\}$. Zároveň má byť B_1 nepravdivá, teda $a \notin i_3(\text{dievča})$, čo nie je možné. ♮

1.1.5 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{$Alex, Beáta, Cyril, Dana, Edo, Gabika, oco$\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{$žena^1, rodič^2, dieťa^3, starší$^2\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
žena(x)	x je žena
rodič(x, y)	x je rodičom y
dieťa(u, x, y)	u je dieťaťom matky x a otca y
starší(x, y)	x je starší ako y

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) žena(Beáta)

(A_2) žena(Dana)

(A_3) rodič(Dana, Alex)

(A_4) rodič(Dana, Beáta)

(A_5) dieťa(Cyril, Gabika, Edo)

(A_6) dieťa(Alex, Dana, Cyril)

(B_1) žena(Alex)

(B_2) dieťa(Beáta, Gabika, oco)

(B_3) rodič(Edo, Edo)

(B_4) starší(Beáta, Gabika)

(B_5) starší(Gabika, Cyril)

(B_6) Cyril $\doteq$ oco

1.1.6 Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.5?

1.1.7 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_6, B_1, \dots, B_6$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\\
i(\text{Alex}) = 1, \quad i(\text{Beáta}) &= 2, \quad i(\text{Cyril}) = 3, \quad i(\text{Dana}) = 4,\\
i(\text{Edo}) = 9, \quad i(\text{Gabika}) &= 7, \quad i(\text{oco}) = 3,\\
i(\text{žena}) &= \{1, 2, 3, 8\},\\
i(\text{rodič}) &= \{(4, 1), (9, 9), (2, 3), (3, 4), (8, 7)\},\\
i(\text{dieťa}) &= \{(3, 7, 9), (2, 7, 3), (8, 9, 1)\},\\
i(\text{starší}) &= \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (7, 3), (8, 7)\}
\end{aligned}$$

Lepšiu predstavu o štruktúre často získate, keď si ju graficky znázorníte napríklad takto:

- Každý objekt z domény znázornite ako uzol.

- Interpretáciu symbolu konštanty znázornite označením uzla týmto symbolom.
- Množinu interpretujúcu unárny predikát znázornite ako uzavretú krivku (napr. elipsu) označenú symbolom predikátu a obsahujúcu uzly, ktoré do tejto množiny patria.
- Dvojicu patriacu do interpretácie binárneho predikátu znázornite ako orientovanú hranu medzi uzlami označenú symbolom predikátu.
- n-ticu patriacu do interpretácie n-árneho predikátu pre $n \geq 3$ znázornite ako n-uholník, ktorého vrcholy budú spojené hranami s príslušnými uzlami. Vhodne označte poradie prvkov v n-tici.

Pre každý predikát s aritou $n \geq 2$ je lepšie nakresliť si osobitný graf.

1.1.8 Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich *súčasne* bola modelom všetkých formúl $A_1, \ldots, A_6$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \ldots, B_6$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 9 prvkov;

b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 5 prvkov;

c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 2 prvky.

Všimnite si, že hoci každý symbol konštanty musí byť interpretovaný ako niektorý objekt domény (teda pomenúvať ho), nie všetky objekty musia byť pomenované a viacero symbolov konštánt môže pomenúvať ten istý objekt. Doména nemôže byť prázdna.

1.2 Formalizácia do jazyka atomických formúl

1.2.1 Príklad. Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Jozef je profesor a Mária je profesorka.

(A_2) Jozef je žemľovku. Žemľovka je múčnik.

(A_3) Jozef má žemľovku rád, Mária ju naopak nemá rada vôbec.

(A_4) Filoména je upratovačka.

(A_5) Upratovačky aj profesori sú zamestnanci.

(A_6) Filoména má menší plat ako Mária, ale väčší ako Jozef.

(A_7) Jozef učí predmet dejiny antického Ríma v posluchárni P42.

(A_8) Tento predmet si zapísali 3 študenti.

(A_9) Chodí naň aj Filoména, ktorá je v skutočnosti jedným zo študentov Jozefovho predmetu.

Riešenie. Postupne sformalizujeme atomické výroky a budeme pritom dbať na to aby sme volili vhodný spoločný jazyk, a zbytočne ho nerozširovali. Tvrdenie (A_1) sa v skutočnosti skladá z dvoch atomických výrokov:

$A_{1.1}$ profesor(Jozef)

$A_{1.1}$ profesor(Mária)

Všimnime si, že v prípade Márie sme nevytvorili nový predikátový symbol profesorka^1 ale rovnako ako v prípade Jozefa sme použili symbol profesor^1. Hoc v slovenčine na to máme dve samostatné slová, ich význam pre školskú doménu je rovnaký – je to symbol pre skupinu všetkých elementov domény, ktoré predstavujú profesorov. Ak by sme na napr. pýtali na všetkých profesorov, iste by me zahrnuli aj Máriu.

Rozoberme si ešte dve alternatívne riešenia, ktoré ale nie sú správne. Prvým je formula je(Jozef, profesor). Čo by v tomto prípade znamenal konštantný symbol profesor? Zmysel slova profesor v danej vete nie je konkrétny profesor, ale skupina všetkých profesorov. Preto je správne voliť predikátový symbol. Z podobných dôvodov je rovnako formula Jozef $\doteq$ profesor nesprávna. Keby sme profesorov zapisovali týmto spôsobom, v skutočnosti by boli všetci profesori stotožnení do jedného objektu domény, čo v tomto prípade celkom určite nechceme.

Sformalizujme teraz formulu (A_2), prvú časť zapíšeme dvoma atomickými formulami:

$A_{2.1}$ je(Jozef, porcia278)

$A_{2.2}$ žemľovka(porcia278)

Keďže Jozef je nejakú konkrétnu porciu jedla, zvolíme si pre ňu nový konštantný symbol. Zvolili sme porcia278 (môže ísť o 278. porciu vydanú v ten deň v školskej jedálni). Druhou formulou sme následne povedali, že táto porcia patrí medzi (všetky) žemľovky, čo vyjadruje predikát žemľovka^1. Výborne sa nám tu hodil predikát je^2, ktorý sme zvažovali a napokon za vrhli pri tvrdení (A_1). Zamýšľaný význam je ale tentoraz iný.

Všimnime si druhú časť tvrdenia (A_2), teda že žemľovka je múčnik. Ide o všeobecné tvrdenie, ktoré nevieme atomickými formulami v jeho všeobecnom význame vyjadriť – náš jazyk je na to zatiaľ príliš obmedzený. Môžeme ale aspoň o všetkých konkrétnych žemľovkách, povedať, že sú zároveň múčniky. Keďže v celej úlohe (aj nižšie) máme len jednu konkrétnu žemľovku, bude to iba jedna atomická formula:

$A_{2.3}$ múčnik(porcia278)

Na obmedzenia jazyka atomických formúl narazíme aj v nasledujúcom tvrdení, ktoré sformalizujeme nasledovne:

$A_{3.1}$ má_rád_žemľovku(Jozef)

$A_{3.2}$ nemá_rád_žemľovku(Mária)

Opäť vidíme, že vo formálnom jazyku nerobíme rozdiel medzi mužským a ženským rodom. Tiež si všimnime, že tu nejde o vzťah medzi Jozefom a nejakou konkrétnou porciou žemľovky ako v prípade ($A_{2.1}$), ale ide tu vlastnosť mať rád žemľovku vo všeobecnosti. Toto vieme najlepšie vyjadriť unárnym predikátovým symbolom má_rád_žemľovku^1.

Venujme teraz pozornosť Márii, ktorá nemá rada žemľovku. Žiadalo by sa, aby sa vlastnosti mať rád a nemať rád žemľovku navzájom vylučovali. Toto ale s atomickými formulami vyjadriť nevieme (potrebovali by sme k tomu logickú spojku – negáciu). Použijeme teda zatiaľ samostatný a *nezávislý* predikátový symbol nemá_rád_žemľovku^1.

Ďalšie dve tvrdenia teraz poľahky sformalizujeme v súlade s tým, čo už sme videli vyššie:

A_4 upratovačka(Filoména)

$A_{5.1}$ zamestnanec(Jozef)

$A_{5.2}$ zamestnanec(Mária)

$A_{5.3}$ zamestnanec(Filoména)

Tvrdenie (A_5) je opäť všeobecné tvrdenie, preto v jazyku atomických formúl aspoň vymenujeme všetkých konkrétnych zamestnancov.

Všimnime si, že tentoraz sme zvolili ženský rod pre predikátový symbol upratovačka^1. Nevadí to, pokiaľ ho konzistentne použijeme aj v prípade mužov-upratovačov. Dôležité je len to aby sme pre tú istú vec konzistentne stále používali ten istý predikátový symbol.

Tvrdenie (A_6) odpovedá 2 atomickým formulám:

$A_{6.1}$ má_väčší_plat_ako(Mária, Filoména)

$A_{6.2}$ má_väčší_plat_ako(Filoména, Jozef)

Všimnime si, že sme zaviedli len jeden predikátový symbol má_väčší_plat_ako^2, ale úmyselne sme sa vyhli zavedeniu analogického symbolu má_menší_plat_ako^2. Ide tu totiž o dva vzťahy, ktoré sú navzájom inverzné. Takéto dva predikátové symboly by však boli od seba nezávislé, teda ak by platilo má_väčší_plat_ako(Mária, Filoména) nijako by z toho nevyplývalo, že platí aj má_menší_plat_ako(Filoména, Mária). Toto ale zrejme nie je zamýšľané. Jazyk atomických formúl nemá dostatočnú silu na to, aby sme mohli dva navzájom inverzné predikáty nejako vyjadriť. Musíme si preto vystačiť s jedným predikátom a používať ho vždy správnym smerom.

Tvrdenie (A_7) by nám už teraz nemalo robiť žiadne problémy. Musíme len správne rozpoznať všetky konkrétne objekty, o ktorých tvrdenie hovorí. Vyjde nám pri tom, že $\mathsf{učí}^3$ bude ternárny predikátový symbol. U dvoch nových konštantných symbolov, ktoré pre tieto objekty zavedieme, z tvrdenia tiež vyčítame do akej „skupiny“ patria, čo vyjadríme samostatnými atomickými formulami:

$A_{7.1}$ učí(Jozef, DAR, P42)

$A_{7.2}$ predmet(DAR)

$A_{7.3}$ posluchár eň(P42)

Z ďalšieho tvrdenia vieme, že Dejiny antického Ríma majú zapísané traja študenti. Nepoznáme ich mená, napriek tomu si môžeme zvoliť vhodné nové konštantné symboly $\mathsf{š}_1, \dots, \mathsf{š}_3$:

$A_{8.1}$ študent($\mathsf{š}_1$)

$A_{8.2}$ študent($\mathsf{š}_2$)

$A_{8.3}$ študent($\mathsf{š}_3$)

$A_{8.4}$ má_zapísaný($\mathsf{š}_1$, DAR)

$A_{8.5}$ má_zapísaný($\mathsf{š}_2$, DAR)

$A_{8.6}$ má_zapísaný($\mathsf{š}_3$, DAR)

No a nakoniec ešte potrebujeme doplniť, že na tento predmet chodí aj Filoména. Opäť si uvedomme, že obe tieto tvrdenia zrejme referujú na ten istý vzťah medzi študentom a predmetom, preto nepridáme nový predikát, napr. $\mathsf{chodiť\_na}^2$. Okrem toho z tvrdenia (A_8) vieme, že predmet má troch študentov, preto ak chceme vylúčiť, že by Filoména mohla byť už štvrtým študentom, použijeme rovnosť:

$A_{9.1}$ má_zapísaný(Filoména, DAR)

$A_{9.2}$ $\mathsf{š}_1 \doteq \mathsf{Filoména}$

Všimnime si, že vďaka sémantike rovnosti bude teraz Filoména a $\mathsf{š}_1$ ten istý objekt. Preto je formula ($A_{9.1}$) vďaka ($A_{9.2}$) zbytočná, a môžeme ju vyhodiť.

Zároveň je však potrebné si uvedomiť, že hoci sme zaviedli tri rôzne symboly $\mathsf{š}_1, \dots, \mathsf{š}_3$, sémantika nám nezaručuje, že nebudú referovať na ten istý objekt. Toto tiež náš jazyk zatiaľ neumožňuje (potrebovali by sme nerovnosť, čiže vlastne opäť negáciu).

Uvedieme ešte množiny konštantných a predikátových symbolov, ktoré sme použili: $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\mathsf{DAR}, \mathsf{Filoména}, \mathsf{Jozef}, \mathsf{Mária}, \mathsf{porcia278}, \mathsf{P42}, \mathsf{š}_1, \mathsf{š}_2, \mathsf{š}_3\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\mathsf{múčnik}^1, \mathsf{žemľovka}^1, \mathsf{je}^2, \mathsf{má\_rád\_žemľovku}^1, \mathsf{nemá\_rád\_žemľovku}^1, \mathsf{poslucháreň}^1, \mathsf{predmet}^1, \mathsf{profesor}^1, \mathsf{upratovačka}^1, \mathsf{zamestnanec}^1, \mathsf{má\_väčší\_plat\_ako}^2, \mathsf{má\_zapísaný}^2, \mathsf{učí}^3\}$. A vysvetlime ich význam:

Symbol	Význam
DAR	predmet Dejiny antického Ríma
Filoména, Jozef, Mária	konkrétne osoby z tvrdení v zadaní
porcia278	porcia jedla, ktorú Jozef je
P42	poslucháreň P42
$š_1, \dots, š_3$	traja študenti zapísaní na Dejiny antického Ríma
múčnik(x)	x je múčnik
žemľovka(x)	x je žemľovka
je(x, y)	x je y (v zmysle *požíva*)
má_rád_žemľovku(x)	x má rád žemľovku
nemá_rád_žemľovku(x)	x (zamýšľaná) opačná vlastnosť: x nemá rád žemľovku
poslucháreň(x)	x je poslucháreň
predmet(x)	x je predment (v zmysle *kurz*)
profesor(x)	x je profesor(ka)
študent(x)	x je študent(ka)
upratovačka(x)	x je upratovačka (alebo upratovač)
zamestnanec(x)	x je zamestnanec
má_väčší_plat_ako(x, y)	x má väčší plat ako y
má_zapísaný(x, y)	x je zapísaný na predmet y
učí(x, y, z)	x učí predmet y v miestnosti z

⚠ Ako je vidieť z riešenia, symboly jazyka pridávame priebežne, podľa potreby. Vo vypracovaných zadaniach však býva zvykom uviesť ich na začiatku spolu s vysvetlením ich významu. ♮

1.2.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Peter je muž.

(A_2) Peter je študent.

(A_3) Lucia je žena.

(A_4) Je to študentka.

(A_5) Lucia je staršia ako Peter.

(A_6) Matematika je povinný predmet.

(A_7) Matematiku učí Eugen.

(A_8) Peter má rád Matematiku.

(A_9) Peter a Lucia sú od neho mladší.

(A_{10}) Peter dostal z Matematiky od Eugena známku A.

(A_{11}) Eugen má rád Luciu.

(A_{12}) Aj keď má Lucia z Matematiky (od neho) známku „dostatočný“.

(A_{13}) Známka „dostatočný“ je len iný názov pre E-čko, a podobne „výborný“ značí to isté ako A-čko.

(A_{14}) Lucia má rada Petra.

(A_{15}) Lucia nemá rada Matematiku.

(A_{16}) Eugen sa má rád.

(A_{17}) Všetci študenti majú radi Telocvik.

1.2.3 Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov. Snažte sa o to aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší, nevytvárajte dva symboly s tým istým významom. Vytvorte štruktúru tak, aby výroky skupiny A boli všetky pravdivé a výroky skupiny B všetky nepravdivé.

(A_1) Janka je dievča a Jurko je chlapec.

(A_2) Chlapci a dievčatá sú deti.

(A_3) Ňufko je Jankine zvieratko.

(A_4) Je to myš.

(A_5) Ňufko je veľký. Je väčší než Jurkov škrečok Chrumko.

(A_6) Jurko si Chrumka kúpil sám.

(A_7) Jurko v noci chodí kŕmiť potkana Smraďocha.

(A_8) Smraďoch však v skutočnosti je Ňufko, ktorý v tme vyzerá ako potkan.

(A_9) Všetky deti majú rady zvieratká, ktorá vlastnia, a tiež tie, ktoré kŕmia.

(B_1) Janka sa Smraďocha bojí.

(B_2) Jurko má rád potkany, nebojí sa ich.

(B_3) Ňufko je menší ako Chrumko.

(B_4) Janka má rada Jurka.

(B_5) Ňufko a Chrumko sú deti.

(B_6) Ňufka a Chrumka deťom kúpila ich mama.

2 Výrokovologické spojky

2.1 Syntax výrokovologických formúl

2.1.1 Príklad. Rozhodnite, či nasledovné postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. V prípade kladnej odpovede určte množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Svoje odpovede stručne zdôvodnite.

a) (futbalista(Adam))

b) (futbalista(Adam) ∧ vlastní(Adam, BT001AA) ∧ BMW(BT001AA))

c) ¬¬(ľúbi(Barbora, Adam) → šťastný(Adam))

d) (šťastný(Adam) ↔ šťastný(¬Barbora))

Riešenie. a) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A\,b\,B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek ale nachádza atomická formula.

b) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam) ∧ vlastní(Adam, BT001AA) ∧ BMW(BT001AA)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A\ b\ B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek nachádzajú tri atomické formuly a medzi nimi dve binárne spojky ∧.

c) Postupnosť symbolov ¬¬(ľúbi(Barbora, Adam) → šťastný(Adam)) je formulou napríklad nad množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{$ľúbi, šťastný$\}$ a množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{$Adam, Barbora$\}$ (množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ môžu obsahovať aj ľubovoľné ďalšie prvky). Postupnosť symbolov sa začína symbolom negácie ¬, za ňou sa musí nachádzať formula A. Keďže v tomto prípade $A =$ ¬(ľúbi(Barbora, Adam) → šťastný(Adam)), opäť ide o formulu v tvar $\neg B$, kde $B =$ (ľúbi(Barbora, Adam) → šťastný(Adam)). Formula B je ohraničená zátvorkami, musí byť teda v tvare $(C\ b\ D)$. V prípade tejto formuly teda bude $C =$ ľúbi(Barbora, Adam) a $D =$ šťastný(Adam) a binárna spojka b zodpovedá implikácii →.

d) Postupnosť symbolov (šťastný(Adam) ↔ šťastný(¬Barbora)) nie je formulou. Postupnosť je ohraničená zátvorkami a v ich vnútri sa naozaj nachádza výraz v tvare $A\,b\,B$. B však nie je formulou, pretože argumentom potenciálneho predikátového symbolu šťastný musí byť konštanta, ale ¬Barbora nie je správnou konštantou, lebo symboly konštánt a predikátové symboly nemôžu obsahovať žiadnu z logických spojok. ♮

2.1.2 Rozhodnite, či nasledovné postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Kladnú odpoveď dokážte nájdením množín $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a vytvárajúcej postupnosti pre formulu. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

a) $(\text{žena}(\text{Alex}) \land \text{muž}(\text{Alex}))$

b) $\lnot(\text{má\_rád}(\text{Alex}, \text{Alex}))$

c) $\big(\text{starší}(\text{Edo}, \text{Alex}) \to (\lnot\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}))\big)$

d) $(\text{Alex} \lor \lnot\text{oco})$

e) $\big(\lnot(\text{muž}(\text{Alex}) \land \text{žena}(\text{Alex})) \to (\lnot\text{muž}(\text{Alex}) \lor \lnot\text{žena}(\text{Alex}))\big)$

f) $\big(\lnot\lnot\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \leftrightarrow (\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \lnot\land \text{muž}(\text{Edo}))\big)$

2.1.3 Príklad. Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$\big((\lnot\text{hlúpy}(\text{Adam}) \lor (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA})))\\ \to \text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})\big)$$

Riešenie. Vytvárajúcou postupnosťou pre zadanú formulu je napríklad nasledujúca postupnosť:

$$\begin{aligned}
&\text{BMW}(\text{BT001AA}),\\
&\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}),\\
&(\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA})),\\
&\text{hlúpy}(\text{Adam}),\\
&\lnot\text{hlúpy}(\text{Adam}),\\
&(\lnot\text{hlúpy}(\text{Adam}) \lor (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA}))),\\
&\text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}),\\
&\big((\lnot\text{hlúpy}(\text{Adam}) \lor (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA})))\\
&\qquad \to \text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})\big).
\end{aligned}$$

Nasledujúci strom predstavuje vytvárajúci strom pre zadanú formulu.

- $\big((\lnot\text{hlúpy}(\text{Adam}) \lor (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA}))) \to \text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})\big)$
  - $(\lnot\text{hlúpy}(\text{Adam}) \lor (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA})))$
    - $\lnot\text{hlúpy}(\text{Adam})$
      - $\text{hlúpy}(\text{Adam})$
    - $(\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA}))$
      - $\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA})$
      - $\text{BMW}(\text{BT001AA})$
  - $\text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})$

Stupeň zadanej formuly vypočítame ako:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{deg}\Big(&\big((\neg\text{hlúpy}(\text{Adam}) \vee (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \wedge \text{BMW}(\text{BT001AA}))\big) \\
&\qquad \to \text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})\big)\Big) \\
&= \mathrm{deg}\big((\neg\text{hlúpy}(\text{Adam}) \vee (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \wedge \text{BMW}(\text{BT001AA})))\big) \\
&\quad + \mathrm{deg}(\text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})) \\
&\quad + 1 \\
&= \mathrm{deg}(\neg\text{hlúpy}(\text{Adam})) \\
&\quad + \mathrm{deg}((\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \wedge \text{BMW}(\text{BT001AA}))) \\
&\quad + 1 \\
&\quad + 1 \\
&= \mathrm{deg}(\text{hlúpy}(\text{Adam})) + 1 \\
&\quad + \mathrm{deg}(\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA})) + \mathrm{deg}(\text{BMW}(\text{BT001AA})) + 1 \\
&\quad + 1 + 1 \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 = 4
\end{aligned}
\qquad \natural
$$

2.1.4 Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$
\begin{aligned}
&\big((\text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Hugo}) \wedge \text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Tereza})) \to \\
&\quad \big((\neg\text{žena}(\text{Hugo}) \wedge \text{muž}(\text{Hugo})) \to \text{brat}(\text{Hugo}, \text{Tereza})\big)\big)
\end{aligned}
$$

2.2 Sémantika výrokovologických formúl

2.2.1 Príklad. V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$
\begin{aligned}
D &= \{\text{barča}, \text{janči}, \text{karči}\} \\
i(\text{Karol}) &= \text{karči} \\
i(\text{profesor}) &= \{\text{karči}, \text{janči}\} \\
i(\text{hlúpy}) &= \{\text{janči}\} \\
i(\text{sčítaný}) &= \{\text{barča}, \text{karči}\}
\end{aligned}
$$

vyhodnoťte nasledujúcu formulu postupom *zhora nadol* a postupom *zdola nahor*.

$$
\big(\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol}))\big)
$$

Riešenie. 1. spôsob — zhora nadol: Podľa definície vzťahu spĺňania ($\models$) a štruktúry $\mathcal{M}$ platí:

$\mathcal{M} \models (\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol})))$

vtt (podľa def. $\models$) $\mathcal{M} \not\models \text{profesor}(\text{Karol})$ alebo $\mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))$

vtt (podľa def. $\models$) $i(\text{Karol}) \notin i(\text{profesor})$

alebo $\mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy}(\text{Karol})$ a súčasne $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$

vtt (pretože $i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor})$) $\mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy}(\text{Karol})$ a súčasne $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$

vtt (podľa def. $\models$) $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol})$ a súčasne $i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný})$

vtt (pretože $i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný})$) $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol})$

vtt (podľa def. $\models$) $i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy})$.

Pretože v $\mathcal{M}$ skutočne máme $i(\text{Karol}) = \text{karči} \notin \{\text{janči}\} = i(\text{hlúpy})$, konštatujeme, že daná formula je pravdivá v štruktúre $\mathcal{M}$, teda skutočne $\mathcal{M} \models \big(\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))\big)$.

2. spôsob — zdola nahor: Vyhodnotíme splnenie formuly podľa definície spĺňania pre všetky prvky jej vytvárajúcej postupnosti:

$$\text{profesor}(\text{Karol}),\quad \text{sčítaný}(\text{Karol}),\quad \text{hlúpy}(\text{Karol}),\quad \neg\text{hlúpy}(\text{Karol}),$$
$$(\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol})),\quad \big(\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))\big)$$

Dostávame:

1. $i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor})$, teda $\mathcal{M} \models \text{profesor}(\text{Karol})$
2. $i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný})$, teda $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$
3. $i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy})$, teda $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol})$
4. $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol})$, teda $\mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy}(\text{Karol})$
5. Keďže $\mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy}(\text{Karol})$ a $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$,
   tak $\mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))$
6. Keďže $\mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))$,
   tak $\mathcal{M} \models (\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol})))$ ♮

2.2.2 V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\\
i(\text{Alex}) &= 1,\quad i(\text{Bruno}) = 2,\quad i(\text{Hugo}) = 5,\quad i(\text{Tereza}) = 6,\\
i(\text{žena}) &= \{1, 3, 4, 6\},\\
i(\text{muž}) &= \{2, 4\},\\
i(\text{má_rád}) &= \{(1,1), (1,2), (1,5), (1,6), (2,2), (3,3), (3,4), (4,4), (5,5), (5,6)\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
i(\text{brat}) &= \{(1,2),(2,1),(3,1),(4,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,6)\},\\
i(\text{rodič}) &= \{(1,1),(2,5),(2,6),(1,5),(3,4),(4,2),(1,6),(5,6),(6,5)\},\\
i(\text{starší}) &= \{(2,1),(5,6),(6,5)\},
\end{aligned}
$$

zistite postupom *zhora nadol* (viď príklad 2.2.1), či je pravdivá formula A_1, a postupom *zdola nahor*, či sú pravdivé formuly A_2 a A_3.

(A_1) (starší(Bruno, Alex) → ¬starší(Alex, Bruno))

(A_2) (¬má_rád(Alex, Bruno) ↔ ¬má_rád(Bruno, Alex))

(A_3) ((rodič(Bruno, Hugo) ∧ rodič(Bruno, Tereza)) →
((¬žena(Hugo) ∧ muž(Hugo)) → brat(Hugo, Tereza)))

2.2.3 Vytvorte takú štruktúru, v ktorej budú všetky nasledujúce formuly pravdivé:

(A_1) (profesor(Alena) ∧ učiteľ(Alena))

(A_2) (profesor(Karol) ↔ učiteľ(Karol))

(A_3) (¬profesor(Karol) → (¬pozná(Karol, Alena) ∨ ¬vychádza(Karol, Alena)))

(A_4) Karol ≉ Alena

Riešenie. Hľadáme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ tak, aby $\mathcal{M} \models A_1, \ldots, \mathcal{M} \models A_4$.

Pri hľadaní štruktúry nám pomôže, keď podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol rozoberieme, kedy je v $\mathcal{M}$ pravdivá najkomplikovanejšia formula A_3. Zistíme, že $\mathcal{M} \models A_3$ vtt $\mathcal{M} \models$ profesor(Karol) alebo $\mathcal{M} \not\models$ pozná(Karol, Alena) alebo $\mathcal{M} \not\models$ vychádza(Karol, Alena).

Vyberieme si poslednú možnosť, lebo predikát vychádza sa v inej formule nenachádza. Môžeme ho teda pokojne interpretovať podľa potrieb pravdivosti A_3. Vytvoríme doménu, interpretácie konštánt a interpretáciu predikátu vychádza tak, aby (Karol, Alena) $\notin i$(vychádza).

Následne štruktúru doplníme tak, aby boli aj ostatné formuly pravdivé.

Nech

$$
\begin{aligned}
D &= \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\}\\
i(\text{Alena}) &= \text{učiteľka218}\\
i(\text{Karol}) &= \text{školník}\\
i(\text{profesor}) &= \{\text{učiteľka218}\}\\
i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\}\\
i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}),\\
&\qquad (\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\}
\end{aligned}
$$

$$i(\text{vychádza}) = \{(\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}), (\text{upratovačka2}, \text{upratovačka1})\}$$

Táto štruktúra spĺňa všetky formuly A_1–A_4. Zdôvodnenie môžeme spraviť analogicky ako v úlohe 2.1.4. ♮

2.2.4 Vytvorte štruktúru, v ktorej budú súčasne pravdivé všetky nasledujúce formuly:

(A_1) titul(Sofiina_voľba)

(A_2) autor(Styron,Sofiina_voľba)

(A_3) (titul(Kto_chytá_v_žite) ∧ autor(Salinger, Kto_chytá_v_žite))

(A_4) (¬(číta(Adam, k325) ∧ obdivuje(Dana, Adam)) →
¬(kniha(k325, Sofiina_voľba) ∨ kniha(k325, Kto_chytá_v_žite)))

(A_5) (kniha(k325, Kto_chytá_v_žite) ↔ ¬kniha(k325, Sofiina_voľba))

Pomôcka. Aby ste zistili, ako majú byť v štruktúre interpretované predikáty, analyzujte význam formúl podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol, ako sme ukázali na prednáške.

2.2.5 Sformulujte základné definície syntaxe (symboly jazyka, atomická formula, formula, podformula) a sémantiky (pravdivosť formuly v štruktúre) pre výrokovú časť logiky prvého rádu s binárnymi spojkami → (implikácia) a $\nrightarrow$ („a nie“), pričom neformálny význam $(A \nrightarrow B)$ je: A je pravdivá a B je nepravdivá. Formuly nebudú obsahovať iné spojky okrem týchto dvoch.

Účelom tejto úlohy je, aby ste si prečítali a upravili definície z prednášky a pokúsili sa osvojiť si spôsob vyjadrovania, ktorý sa v nich používa. Môže vám pripadať ťažkopádny, je však presný. Ak vám nejaká formulácia pripadá zbytočne komplikovaná, môžete sa ju pokúsiť zjednodušiť, no snažte sa, aby ste nezmenili jej význam.

Schopnosť presne sa vyjadriť je potrebná pri programovaní (počítaču musíte všetko vysvetliť do detailov), ale napríklad aj pri písaní špecifikácií softvéru, či požiadaviek na vašu bakalársku prácu.

2.3 Formalizácia do výrokovologických formúl

2.3.1 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

(A_1) Lucia a jej kamarát sú deti.

(A_2) Luciin kamarát má obľúbené hračky autíčko a koníka.

(A_3) Obe jeho obľúbené hračky sú čierne, ale páčia sa aj Lucii, hoci jej obľúbená farba je červená.

(A_4) Luciina obľúbená hračka je tiež autíčko, napriek tomu, že je dievča.

(A_5) Jej autíčko je ale červené.

(A_6) Lucia sa vždy hrá so svojím autíčkom a buď ešte s bábikou Elzou, ktorá má červené šaty, alebo s kamarátovým čiernym koníkom.

(A_7) Lucia je veľmi kamarátska, ale Peter je asi taký kamarátsky ako je skromný.

(A_8) Lucia sa preto môže hrať buď so svojím autíčkom alebo s Petrovým, ale s oboma naraz sa hrať nemôže.

(A_9) V druhom prípade mu totiž musí to svoje požičať.

(A_{10}) Peter je meno spomínaného Luciinho kamaráta.

(A_{11}) Ak je slnečný deň, Peter sa hrá s loptou.

(A_{12}) Psa venčí, ak je pekne.

(A_{13}) S Luciou sa hrá, jedine ak nie je pekne.

(A_{14}) Pod nie je pekne myslíme, že nie je slnečný deň.

Pomôcka. Vo výrokoch sa zjavne hovorí o konkrétnych objektoch (napríklad autíčko a koník Luciinho kamaráta), ktoré ale nemajú mená. Pri formalizácii ich označte vhodnými konštantami. Ďalšou zaujímavosťou je počasie. Čoho by mohlo byť vlastnosťou?

2.3.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

(A_1) Do baru vošli Freddy a George.

(A_2) Barmanka naliala drink Freddymu.

(A_3) Barmankou je buď Mary alebo Jane. Službu má vždy len jedna z nich.

(A_4) Harry nie je v bare, len ak nemá službu Mary, a naopak.

(A_5) Freddy, George a Harry sú kamaráti. Barmanky sa však spolu nekamarátia.

(A_6) Freddymu jeho drink chutí, ak je to whisky, ale nie, ak je to koňak. Vtedy by však určite chutil Georgeovi.

(A_7) Freddymu jeho drink nechutí.

(A_8) Ak je barmankou Mary, tak naliala Freddymu whisky alebo koňak.

(A_9) Jane nalieva Freddymu vždy iba whisky.

(A_{10}) Iné drinky Mary ani Jane nenalievajú, pokiaľ nie je v bare prítomný Harry.

Pomôcka. Všeobecné tvrdenia A_9–A_{10} aplikujte na Freddyho drink. Napíšte teda také formuly, aby tvrdenia A_9–A_{10} platili pre Freddyho drink, ktorý mu barmanka naliala v A_2.

3 Výrokovologické vyplývanie

3.1 Ohodnotenia

3.1.1 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokových formúl logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Alena}, \text{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{učiteľ}, \text{pozná}\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$D = \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\}$$

$$\begin{aligned}
i(\text{Alena}) &= \text{učiteľka218} \\
i(\text{Karol}) &= \text{školník} \\
i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\} \\
i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}), \\
&\qquad (\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\}
\end{aligned}$$

Zostrojte výrokologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$.

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili výrokovologické ohodnotenie v zhodné s $\mathcal{M}$, musia sa zhodovať na všetkých predikátových atómoch jazyka $\mathcal{L}$, t.j., $v \models A$ vtt $\mathcal{M} \models A$ pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$. Preto potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ rozhodnúť, či je v $\mathcal{M}$ pravdivý alebo nie. V prípade pravdivosti mu v ohodnotení v priradíme hodnotu t, v opačnom prípade hodnotu f.

Zostrojme teda množinu všetkých predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{PA}_{\mathcal{L}} = \{&\text{učiteľ}(\text{Alena}), \text{učiteľ}(\text{Karol}), \\
&\text{pozná}(\text{Alena}, \text{Alena}), \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Karol}), \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Karol}), \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Alena})\}
\end{aligned}$$

Následne zostrojíme hľadané ohodnotenie v tak, že pre každý atóm určíme, či je alebo nie je pravdivý v $\mathcal{M}$, a podľa toho mu vo v priradíme príslušnú pravdivostnú hodnotu:

$$\begin{array}{rl}
i(\text{Alena}) \in i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{učiteľ}(\text{Alena}) & v = \{\text{učiteľ}(\text{Alena}) \mapsto t, \\
i(\text{Karol}) \notin i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{učiteľ}(\text{Karol}) & \quad \text{učiteľ}(\text{Karol}) \mapsto f, \\
(i(\text{Alena}), i(\text{Alena})) \notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Alena}) & \quad \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Alena}) \mapsto f, \\
(i(\text{Karol}), i(\text{Karol})) \notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Karol}) & \quad \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Karol}) \mapsto f, \\
(i(\text{Alena}), i(\text{Karol})) \in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Karol}) & \quad \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Karol}) \mapsto t, \\
(i(\text{Karol}), i(\text{Alena})) \in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Alena}) & \quad \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Alena}) \mapsto t\}
\end{array}$$

♮

3.1.2 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{Adam}, \mathsf{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{študent}^1, \mathsf{profesor}^1, \mathsf{učí}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned} v = \{&\mathsf{študent}(\mathsf{Adam}) \mapsto t, && \mathsf{študent}(\mathsf{Karol}) \mapsto f, \\ &\mathsf{profesor}(\mathsf{Adam}) \mapsto f, && \mathsf{profesor}(\mathsf{Karol}) \mapsto t, \\ &\mathsf{učí}(\mathsf{Adam}, \mathsf{Karol}) \mapsto f, && \mathsf{učí}(\mathsf{Karol}, \mathsf{Adam}) \mapsto f\} \end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$. Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na dom v.

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na dom v, teda na obore ohodnotenia v, potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \operatorname{dom} v$, pre ktorý $v(A) = t$ zabezpečiť, aby bol A pravdivý v $\mathcal{M}$, teda $\mathcal{M} \models A$. Naopak, pre každý predikátový atóm $B \in \operatorname{dom} v$, pre ktorý $v(B) = f$ musíme zabezpečiť, aby $\mathcal{M} \not\models B$. Konkrétne:

$$\begin{aligned} &v(\mathsf{študent}(\mathsf{Adam})) = t, && \text{takže } \mathcal{M} \models \mathsf{študent}(\mathsf{Adam}), && \text{teda } i(\mathsf{Adam}) \in i(\mathsf{študent}); \\ &v(\mathsf{študent}(\mathsf{Karol})) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \mathsf{študent}(\mathsf{Karol}), && \text{teda } i(\mathsf{Karol}) \notin i(\mathsf{študent}); \\ &v(\mathsf{profesor}(\mathsf{Adam})) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \mathsf{profesor}(\mathsf{Adam}), && \text{teda } i(\mathsf{Adam}) \notin i(\mathsf{profesor}); \\ &v(\mathsf{profesor}(\mathsf{Karol})) = t, && \text{takže } \mathcal{M} \models \mathsf{profesor}(\mathsf{Karol}), && \text{teda } i(\mathsf{Karol}) \in i(\mathsf{profesor}); \\ &v(\mathsf{učí}(\mathsf{Adam}, \mathsf{Karol})) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \mathsf{učí}(\mathsf{Adam}, \mathsf{Karol}), && \text{teda } (i(\mathsf{Adam}), i(\mathsf{Karol})) \notin i(\mathsf{učí}); \\ &v(\mathsf{učí}(\mathsf{Karol}, \mathsf{Adam})) = f, && \text{takže } \mathcal{M} \not\models \mathsf{učí}(\mathsf{Karol}, \mathsf{Adam}), && \text{teda } (i(\mathsf{Karol}), i(\mathsf{Adam})) \notin i(\mathsf{učí}). \end{aligned}$$

Všimnime si, že ohodnotenie v nepriraďuje pravdivostnú hodnotu všetkým predikátovým atómom z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. V prípade týchto atómov nezáleží, či budú alebo nebudú pravdivé v $\mathcal{M}$. Teraz už jednoducho zostrojíme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ napríklad takto:

Zvolíme si doménu s prinajmenšom rovnakou kardinalitou ako množina konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a každou konštantou pomenujeme iný prvok:

$$\begin{aligned} D &= \{s352, s667, s986, p520, p830, p921\}, \\ i(\mathsf{Adam}) &= s667, \\ i(\mathsf{Karol}) &= p830. \end{aligned}$$

Následne skonštruujeme interpretácie predikátov tak, aby v interpretujúcich množinách boli resp. neboli tieto prvky alebo ich n-tice tak, ako sme zistili vyššie:

$$\begin{aligned} i(\mathsf{študent}) &= \{s352, s667, s986\}, \\ i(\mathsf{profesor}) &= \{p520, p830, p921\}, \\ i(\mathsf{učí}) &= \{(p520, s667), (p830, s352), (p830, s986)\}. \end{aligned}$$ ♮

3.1.3

a) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jack}, \text{Corona}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pivo}^1, \text{pije}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$\begin{aligned} D &= \{s1, s2, s3, p1, p2\} \\ i(\text{Jack}) &= s3, \\ i(\text{Corona}) &= p1, \\ i(\text{pivo}) &= \{p1, p2\}, \\ i(\text{pije}) &= \{(s1, p1), (s2, p1), (s2, p2)\} \end{aligned}$$

Zostrojte výrokovologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$ zhodné so štruktúrou $\mathcal{M}$.

b) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Andy}, \text{Woody}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{hračka}^1, \text{chlapec}^1, \text{hrá\_sa}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned} v = \{&\text{hračka(Woody)} \mapsto t, && \text{hračka(Andy)} \mapsto f, \\ &\text{chlapec(Andy)} \mapsto t, && \text{chlapec(Woody)} \mapsto f, \\ &\text{hrá\_sa(Andy, Woody)} \mapsto t, && \text{hrá\_sa(Woody, Andy)} \mapsto f\} \end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$. Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na dom v.

3.2 Vyplývanie, nezávislosť, nesplniteľnosť

3.2.1 Majme výrokovologickú teóriu T:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} A_1\colon \big(\text{tancuje\_s(A, B)} \to (\text{tancuje\_s(A, B)} \lor \text{spieva(A)})\big), \\ A_2\colon (\neg\text{tancuje\_s(A, B)} \lor \neg\text{spieva(A)}), \\ A_3\colon (\neg\text{spieva(A)} \to \text{frajer(A)}) \end{array} \right\}.$$

O každej z formúl X_1–X_3 rozhodnite, či (a) vyplýva z teórie T, (b) je nezávislá od T, alebo (c) ani z nej nevyplýva, ani od nej nie je nezávislá:

(X_1) $(\text{tancuje\_s(A, B)} \to \text{frajer(A)})$,

(X_2) $\neg\text{spieva(A)}$,

(X_3) $(\text{spieva(A)} \to \text{tancuje\_s(A, B)})$.

3.2.2 Príklad. V prípade bankovej lúpeže inšpektor Nick Fishtrawn zaistil dvoch podozrivých Andrewsa a Browna, pričom zistil nasledujúce skutočnosti:

(A_1) Andrews nikdy nepracuje sám.

(A_2) Nikto ďalší do prípadu už zapletený nie je.

Pomôžte inšpektorovi Fishtrawnovi zistiť, kto z podozrivých je určite vinný a má ho obviniť, kto je naopak určite nevinný a má ho oslobodiť, a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť. Svoje odpovede dokážte.

Riešenie. Zistenia A_1–A_2 sformalizujeme ako teóriu v jazyku výrokových formúl logiky prvého rádu s množinou konštantných symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}\}$ (kde A značí Andrews a B značí Brown) a s množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{vinný}^1\}$ (kde vinný(x) znamená, že x je vinný).

Ostatné skutočnosti, ako napr. konkrétny prípad, kto chským pracuje a kto je do prípadu zapletený, nepotrebujeme reprezentovať konštantnými alebo predikátovými symbolmi, pretože hovoria iba o vine alebo nevine podozrivých, a to už máme dostatočne reprezentované predikátovým symbolom $\mathsf{vinný}^1$.

Teória T je nasledovná:

$$T = \left\{ \begin{aligned} &A_1\colon (\mathsf{vinný}(\mathsf{A}) \to \mathsf{vinný}(\mathsf{B})),\\ &A_2\colon (\mathsf{vinný}(\mathsf{A}) \lor \mathsf{vinný}(\mathsf{B})) \end{aligned} \right\}.$$

Najprv zistíme, či je teória T splniteľná. Nájdeme všetky výrokové ohodnotenia atomických formúl, ktorá sa v nej nachádzajú, a zistíme, či ju aspoň jedno z nich spĺňa:

	v_i				T	
	vinný(A)	vinný(B)	vinný(A)	vinný(B)	(vinný(A) → vinný(B))	(vinný(A) ∨ vinný(B))
v_1	f	f	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$
v_2	t	f	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$
v_3	f	t	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\models$
v_4	t	t	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$

Zistili sme, že T je splniteľná, keďže napr. $v_3 \models T$. Teória má dva modely v_3 a v_4.

Môžeme teda prejsť na rozhodnutie o vine alebo nevine podozrivých. Urobíme tak na základe vyplývania:

- $T \models \mathsf{vinný}(\mathsf{B})$, pretože $v_i \models \mathsf{vinný}(\mathsf{B})$ pre oba modely v_i, $i \in \{3, 4\}$. Vieme teda určite rozhodnúť, že Brown je vinný.
- Keďže pre žiadneho podozrivého x neplatí $T \models \neg\mathsf{vinný}(x)$, nevieme o nikom rozhodnúť, že je nevinný.

- Pretože $T \not\models$ vinný(A), keďže $v_3 \not\models$ vinný(A), a zároveň $T \not\models \neg$vinný(A), keďže $v_4 \models$ vinný(A) – čiže formula vinný(A) je nezávislá od T – tak o Adamsovej vine na základe zistených skutočností nemožno rozhodnúť.

Uvedomme si, že záver, že je Brown vinný, môžeme zo zistenia $T \models$ vinný(B) urobiť len vďaka tomu, že sme predtým overili splniteľnosť T. Ak by totiž teória T bola nesplniteľná, nemožno takýto ani žiadny iný záver vyvodiť. Z nesplniteľnej teórie totiž vyplýva každá formula, teda aj to, že je Brown vinný, aj to že je nevinný. Na základe takejto teórie nemôžeme vyvodiť žiadne zmysluplné závery. ♮

3.2.3 Inšpektor Scotland Yardu Nick Fishtrawn predviedol troch podozrivých z krádeže klenotov v obchodnom dome Harrods: Daviesa, Milesa a Robertsa. Inšpektor vyšetrovaním zistil nasledovné skutočnosti:

(A_1) Miles je určite vinný.

(A_2) Miles nikdy nepracuje sám, je teda vinný, iba ak je vinný aspoň jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.

(A_3) Davies vždy pracuje s Robertsom.

(A_4) Roberts sa s Milesom neznáša, vinný je preto nanajvýš jeden z nich.

(A_5) Na lúpeži sa mohli podieľať len títo traja podozriví a nikto iný.

Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.

S využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite o vine a nevine jednotlivých podozrivých, pokiaľ to je možné.

Pomôcka. Formalizáciu tentoraz obmedzte na skutočnosti, ktoré sú postačujúce k vyriešeniu úlohy (teda sústreďte sa na vinu podozrivých, ak je to postačujúce).

3.2.4 Inšpektor Nick Fishtrawn rieši ďalší zapeklitý prípad lúpeže. Podozriví sú Addams, Doyle a Harris. Inšpektor zistil nasledovné skutočnosti:

(A_1) Ak pršalo, určite je vinný Harris.

(A_2) Naopak, ak nepršalo, vinný je jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.

(A_3) Harris má vždy najviac jedného kumpána.

(A_4) Addams pracuje, ak je jeho kumpánom Doyle.

(A_5) Addams pracuje, len ak prší.

(A_6) Nikto iný nie je podozrivý.

Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.

S využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite o vine a nevine jednotlivých podozrivých, pokiaľ to je možné.

Pomôcka. Pri formalizácii by vám mali stačiť 4 predikátové atómy.

4 Vlastnosti a vzťahy výrokovologických formúl

4.1 Tautológie, splniteľné, falzifikovateľné a nesplniteľné formuly

4.1.1 Majme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pekné}, \text{rýchle}, \text{ekologické}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{moje\_auto}\}$. Označme $P = \text{pekné}(\text{moje\_auto})$, $R = \text{rýchle}(\text{moje\_auto})$ a $E = \text{ekologické}(\text{moje\_auto})$.

Rozhodnite o každej z nasledujúcich formúl nad jazykom $\mathcal{L}$, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Pri každej formule rozhodnite o *všetkých* uvedených vlastnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

a) $(\neg(P \land E) \to (\neg P \land \neg E))$
b) $((P \lor \neg P) \land \neg(E \lor \neg E))$
c) $(P \to (P \to (P \to P)))$
d) $(P \land (E \lor \neg(P \to R)))$
e) $(((P \to P) \to P) \to \neg P)$
f) $\neg(P \leftrightarrow \neg P)$
g) $((P \land \neg P) \lor (P \lor \neg P))$
h) $(P \land \neg P)$
i) $(((P \to R) \to P) \to P)$
j) $\neg\neg\neg(P \lor P)$
k) $((P \land E) \to (\neg P \land E))$
l) $\neg((P \lor R) \lor (\neg P \lor E))$
m) $\big(((E \lor \neg R) \land (P \to \neg R)) \to (\neg R \to (\neg P \land E))\big)$
n) $\big((P \to (\neg R \to E)) \land ((\neg P \lor \neg E) \land \neg(P \to R))\big)$

Riešenie. a) Aby sme rozhodli, akého druhu je formula $A = (\neg(P \land E) \to (\neg P \land \neg E))$, podľa tvrdení 4.3 a 4.4 stačí preskúmať všetky rôzne ohodnotenia výrokovologických atómov, ktoré sa vyskytujú v A:

Keďže v A sa vyskytujú dva atómy, takéto ohodnotenia sú štyri. Podobne ako v úlohách o vyplývaní výsledok nášho skúmania, ako aj čiastkové výsledky, zapíšeme do tabuľky.

	v_i							
	P	E	$\neg P$	$\neg E$	$(P \land E)$	$\neg(P \land E)$	$(\neg P \land \neg E)$	$(\neg(P \land E) \to (\neg P \land \neg E))$
v_1	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_2	t	f	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v_3	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v_4	t	t	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$

Keďže máme rozhodnúť o vlastnostiach formuly A, nezabudneme vysloviť závery a zdôvodniť ich:

i. Keďže $v_2 \not\models_p A$, teda *nie všetky* ohodnotenia spĺňajú A, tak A *nie je* tautológiou.

ii. Keďže $v_1 \models_p A$, teda *aspoň jedno* ohodnotenie spĺňa A, tak A *je* splniteľná.

iii. Keďže $v_2 \not\models_p A$, teda *aspoň jedno* ohodnotenie nespĺňa A, tak A *je* aj falzifikovateľná.

iv. Keďže $v_1 \models_p A$, teda *nie je pravda*, že *všetky* ohodnotenia *nespĺňajú* A, tak A *nie je* nesplniteľná. ♮

4.1.2 O každej z nasledujúcich formúl nad jazykom $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{ľúbi}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{P}, \text{L}\}$, pričom P značí Peter a L značí Lucia rozhodnite, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Rozhodnite o všetkých možnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

a) $((\neg\text{ľúbi}(\text{P},\text{L}) \to \neg\text{ľúbi}(\text{L},\text{P})) \land (\text{ľúbi}(\text{P},\text{L}) \lor \text{ľúbi}(\text{L},\text{P})))$

b) $\neg(\neg(\text{ľúbi}(\text{P},\text{L}) \land \text{ľúbi}(\text{L},\text{P})) \leftrightarrow (\neg\text{ľúbi}(\text{P},\text{L}) \lor \neg\text{ľúbi}(\text{L},\text{P})))$

c) $((\neg\text{ľúbi}(\text{P},\text{L}) \to \text{ľúbi}(\text{L},\text{P})) \land \neg(\text{ľúbi}(\text{P},\text{L}) \lor \text{ľúbi}(\text{L},\text{P})))$

4.2 Ekvivalencia

4.2.1 Dokážte, že nasledujúce dvojice formúl nad jazykom $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{f}, \text{h}, \text{b}, \text{NHL}, \text{inteligentná}, \text{rozumná}, \text{milá}\}$, kde f značí futbalista, h značí hokejista, b značí bohatý, NHL značí hráč NHL a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{M}, \text{Eva}\}$, kde M značí Miro, sú (sémanticky) ekvivalentné

a) de Morganove pravidlá:
$\neg(\text{f}(\text{M}) \land \text{h}(\text{M}))$ a $(\neg\text{f}(\text{M}) \lor \neg\text{h}(\text{M}))$,
$\neg(\text{f}(\text{M}) \lor \text{h}(\text{M}))$ a $(\neg\text{f}(\text{M}) \land \neg\text{h}(\text{M}))$;

b) $(\text{h}(\text{M}) \to (\text{b}(\text{M}) \to \text{NHL}(\text{M}))$ a $((\text{h}(\text{M}) \land \text{b}(\text{M})) \to \text{NHL}(\text{M})))$;

c) ¬(inteligentná(Eva) ∧ (rozumná(Eva) ∨ milá(Eva)))
a (¬inteligentná(Eva) ∨ ¬rozumná(Eva)) ∧ (¬inteligentná(Eva) ∨ ¬milá(Eva))).

Riešenie. a) Dokážme ekvivalentnosť formúl de Morganovo pravidla pre konjunkciu. Preverme splnenie formúl ¬(f(M) ∧ h(M)) a (¬f(M) ∨ ¬h(M)) vo všetkých rôznych ohodnotenia tých výrokových premenných, ktoré sa v skúmaných formulách vyskytujú:

	v_i						
	f(M)	h(M)	¬f(M)	¬h(M)	(f(M) ∧ h(M))	¬(f(M) ∧ h(M))	(¬f(M) ∨ ¬h(M))
v_1	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_2	t	f	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_3	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_4	t	t	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$

Z tabuľky vidíme, že skutočne pre každé ohodnotenie v_i, $i \in \{1, \dots, 4\}$, platí $v_i \models_p$ ¬(f(M) ∧ h(M)) vtt $v_i \models_p$ (¬f(M) ∨ ¬h(M)). Z toho, z tvrdenia 4.3 z prednášky a z definície ekvivalencie 4.9 vyplýva, že formuly ¬(f(M) ∧ h(M)) a (¬f(M) ∨ ¬h(M)) sú ekvivalentné.

Podobne ako pri skúmaní sémantických vlastností jednotlivých formúl či overovaní vyplývania, nezabudnime vysloviť záver, ktorý z preskúmania všetkých ohodnotení vyvodzujeme.

♮

4.3 Tvrdenia o vyplývaní, splniteľnosti, atď.

4.3.1 Príklad. Dokážte: Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$, pričom z $\notin \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. Potom existuje jazyk $\mathcal{L}_2$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinou indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{\mathsf{z}\}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$, taký že pre ľubovoľnú formulu A v jazyku $\mathcal{L}_1$ existuje formula B v jazyku $\mathcal{L}_2$ taká, že

a) A je výrokovologicky splniteľná *vtt* B je výrokovologicky splniteľná (teda výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$).

b) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra $\mathcal{M}_2$ taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

Riešenie. Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk podľa predpokladov. Jazyk $\mathcal{L}_2$ skonštruujeme tak, že $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{\mathsf{z}\}$ (tu ani nemáme inú možnosť) a

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2} = \{\mathsf{p\_a_1\_\dots\_a_n}^1 \mid \mathsf{p}^n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}, \mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}\}.$$

Nech A je ľubovoľná formula v jazyku $\mathcal{L}_1$. Formulu B v jazyku $\mathcal{L}_2$ skonštruujeme z formuly A tak, že každý výskyt atómu $\mathsf{p}(\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n)$ nahradíme atómom $\mathsf{p\_a}_1\_\dots\_\mathsf{a}_n(\mathsf{z})$, pre všetky $\mathsf{p}^n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$, $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. (Teda napr. ak $A = (\text{ľúbi}(\text{Peter}, \text{Lucia}) \to \text{naliala}(\text{Lucia}, \text{Peter}, \text{Pivo}))$, tak $B = (\text{ľúbi\_Peter\_Lucia}(\mathsf{z}) \to \text{naliala\_Lucia\_Peter\_Pivo}(\mathsf{z}))$.)

Dokážme najprv časť a), ⇒: Nech v_1 je výrokové ohodnotenie také, že $v_1 \models A$. Výrokové ohodnotenie v_2 skonštruujeme nasledovne:

$$v_2(\mathsf{p\_a}_1\_\dots\_\mathsf{a}_n(\mathsf{z})) = v_1(\mathsf{p}(\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n)),$$

pre všetky $\mathsf{p\_a}_1\_\dots\_\mathsf{a}_n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$. Ostáva nám dokázať, že platí $v_1 \models A$ vtt $v_2 \models B$. Dôkaz urobíme indukciou na konštrukciu formuly A:

- Nech A je atomická formula. Teda je v tvare $A = \mathsf{p}(\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n)$, pre nejaké $\mathsf{p}^n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$, $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$, a jej zodpovedajúca formula $B = \mathsf{p\_a}_1\_\dots\_\mathsf{a}_n(\mathsf{z})$.
  Keďže v_2 sme skonštruovali tak, že oba atómy A aj B sú príslušným ohodnotením ohodnotené rovnako, vidíme, že platí $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$.
- Nech A je v tvare $\neg A_1$. Potom B je v tvare $\neg B_1$, pričom B_1 je zodpovedajúca formula k formule A_1. Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení pre $\neg$ potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_1 \not\models_p A_1$ vtt $v_2 \not\models_p B_1$ vtt $v_2 \models_p B$.
- Nech A je v tvare $(A_1 \land A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \land B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení ($\land$) potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_1 \models_p A_1$ a $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_1$ a $v_2 \models_p B_2$ vtt $v_2 \models_p B$.
- Nech A je v tvare $(A_1 \lor A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \lor B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení ($\lor$) potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$ podobne ako v prípade konjunkcie.
- Nech A je v tvare $(A_1 \to A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \to B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení ($\to$) potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$ podobne ako v prípade konjunkcie.

Časť a), ⇐ je analogická, konštrukciu otočíme: Nech v_2 je výrokové ohodnotenie také, že $v_2 \models_p B$. Výrokové ohodnotenie v_1 skonštruujeme nasledovne:

$$v_1(\mathsf{p}(\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n)) = v_2(\mathsf{p\_a}_1\_\dots\_\mathsf{a}_n(\mathsf{z})),$$

pre všetky $\mathsf{p}^n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$, $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. V prípade atomickej formuly A opäť priamo z konštrukcie vyplýva že $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$. Indukciou na konštrukciu formuly poľahky dokážeme to isté pre ľubovoľné (neatomické) formuly vo všeobecnosti.

Dokážme teraz časť b), $\Rightarrow$: Nech $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$ je štruktúra taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$. Štruktúru $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$ skonštruujeme nasledovne:

$$\begin{aligned} D_2 &= \{x\}, \\ i_2(\mathsf{z}) &= x, \\ i_2(\mathsf{p\_a_1\_\dots\_a}_n) &= \begin{cases} \{x\}, & \text{ak } (i_1(\mathsf{a}_1), \dots, i_1(\mathsf{a}_n)) \in i_1(p), \\ \emptyset, & \text{inak,} \end{cases} \end{aligned}$$

pre všetky $\mathsf{p\_a_1\_\dots\_a}_n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$. Ak $A = \mathsf{p}(\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n)$ je atomická formula (a teda $B = \mathsf{p\_a_1\_\dots\_a}_n(\mathsf{z})$), tak z definície pravdivosti formuly v štruktúre a z konštrukcie $\mathcal{M}_2$ máme:

$$\mathcal{M}_1 \models A \quad \text{vtt} \quad (i_1(\mathsf{a}_1), \dots, i_1(\mathsf{a}_n)) \in i_1(p) \quad \text{vtt} \quad i_2(\mathsf{z}) \in i_2(\mathsf{p\_a_1\_\dots\_a}_n) \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M}_2 \models B.$$

Indukciou na konštrukciu formuly opäť poľahky dokážeme to isté aj pre ľubovoľné (neatomické) formuly.

Dokážme teraz časť b), $\Leftarrow$: Nech $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$ je štruktúra taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$. Štruktúru $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$ skonštruujeme nasledovne:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x_\mathsf{a} \mid \mathsf{a} \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}\}, \\ i_1(\mathsf{a}) &= x_\mathsf{a}, && \text{pre všetky } \mathsf{a} \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}, \\ i_1(\mathsf{p}) &= \{(x_{\mathsf{a}_1}, \dots, x_{\mathsf{a}_n}) \mid i_2(\mathsf{z}) \in i_2(\mathsf{p\_a_1\_\dots\_a}_n)\}, && \text{pre všetky } \mathsf{p} \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}. \end{aligned}$$

Vďaka tejto konštrukcii je zvyšok dôkazu rovnaký ako v prípade $\Leftarrow$. Opäť sa poľahky presvedčíme, že ak $A = \mathsf{p}(\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n)$ je atomická formula, a teda $B = \mathsf{p\_a_1\_\dots\_a}_n(\mathsf{z})$, tak z definície pravdivosti formuly v štruktúre a z konštrukcie $\mathcal{M}_2$ máme:

$$\mathcal{M}_1 \models A \quad \text{vtt} \quad (i_1(\mathsf{a}_1), \dots, i_1(\mathsf{a}_n)) \in i_1(p) \quad \text{vtt} \quad i_2(\mathsf{z}) \in i_2(\mathsf{p\_a_1\_\dots\_a}_n) \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M}_2 \models B.$$

Následne indukciou na konštrukciu formuly dokážeme to isté aj pre ľubovoľné formuly. ♮

4.3.2 Dokážte: Nech $\mathcal{L}_1$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami indivíduových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$. Potom existuje jazyk $\mathcal{L}_2$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinou indivíduových konštantánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$, takou, že $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$ obsahuje iba *unárne* predikátové symboly a zároveň $|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$, taký že pre ľubovoľnú formulu A v jazyku $\mathcal{L}_1$ existuje formula B v jazyku $\mathcal{L}_2$, pre ktorú platí:

a) Výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$.
b) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra $\mathcal{M}_2$ taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

Pomôcka. Riešenie cvičenia 4.3.1, tiež obsahuje transformáciu, ktorej výsledkom sú iba unárne predikátové symboly. Na rozdiel od cvičenia 4.3.1 je však v tejto úlohe potrebné jazyk $\mathcal{L}_1$ preložiť do jazyka $\mathcal{L}_2$ tak, aby sa počet predikátových symbolov nezmenil ($|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$). Môžete teda napr. skúsiť takú transformáciu, že predikátové symboly „zachováte“, iba im zmeníte aritu na 1, a potrebný výsledok dosiahnete vhodnou transformáciou množiny indivíduových konštánt.

4.3.3 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti a nech $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ je nejaká jeho indivíduová konštanta.

Nech A je ľubovoľná výrokovologická formula jazyka $\mathcal{L}$ a nech B vznikne z A nahradením všetkých výskytov všetkých indivíduových konštánt konštantou a.

Dokážte alebo vyvráťte:

a) Ak A je splniteľná, tak aj B je splniteľná.

b) Ak B je splniteľná, tak aj A je splniteľná.

4.3.4 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti. Nech X a Y sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$, nech T je ľubovoľná výrokovologická teória v $\mathcal{L}$. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $\{\} \models_{\mathrm{p}} X$ vtt X je tautológia.

b) Formuly X a Y sú ekvivalentné vtt $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia.

c) Ak $T \models_{\mathrm{p}} \neg X$, tak $T \not\models_{\mathrm{p}} X$.

d) Ak $T \not\models_{\mathrm{p}} X$, tak $T \models_{\mathrm{p}} \neg X$.

e) $T \models_{\mathrm{p}} (X \to Y)$ vtt $T \cup \{X\} \models_{\mathrm{p}} Y$.

f) Ak $T \models_{\mathrm{p}} (X \to Y)$, tak $T \not\models_{\mathrm{p}} X$ alebo $T \models_{\mathrm{p}} Y$.

g) Ak $T \not\models_{\mathrm{p}} X$ alebo $T \models_{\mathrm{p}} Y$, tak $T \models_{\mathrm{p}} (X \to Y)$.

h) Ak $T \models_{\mathrm{p}} (X \lor Y)$, tak $T \models_{\mathrm{p}} X$ alebo $T \models_{\mathrm{p}} Y$.

i) Ak $T \models_{\mathrm{p}} X$ alebo $T \models_{\mathrm{p}} Y$, tak $T \models_{\mathrm{p}} (X \lor Y)$.

j) $T \models_{\mathrm{p}} X$ a $T \models_{\mathrm{p}} Y$ vtt $T \models_{\mathrm{p}} (X \land Y)$.

k) Formula $(X \to Y)$ je nesplniteľná vtt X je tautológia a Y je nesplniteľná.

l) Formula X je nezávislá od $\{\}$ vtt X je splniteľná a falzifikovateľná.

m) Ak formula X logicky nevyplýva z T a ani nie je nezávislá od T, tak T je splniteľná a vyplýva z nej negácia X.

n) Ak $T \models_{\mathrm{p}} (A \to B)$, tak $T \cup \{\neg B\} \models_{\mathrm{p}} \neg A$.

o) Ak $T \not\models_{\mathrm{p}} (A \land B)$, tak $T \models_{\mathrm{p}} \neg A$ alebo $T \models_{\mathrm{p}} \neg B$.

p) Ak $T \not\models_{\mathrm{p}} (A \lor B)$, tak $T \not\models_{\mathrm{p}} A$ a $T \not\models_{\mathrm{p}} B$.

q) Ak $T \models_{\mathrm{p}} (A \to B)$, tak $T \not\models_{\mathrm{p}} (A \land \neg B)$.

r) Nech T je teória a X je formula. Ak T je nesplniteľná, tak nemožno rozhodnúť, či $T \models_p X$ alebo $T \not\models_p X$.

Riešenie. a) Dokážme alebo vyvráťme: $\{\} \models_p X$ vtt X je tautológia.

Na prednáškach ste už videli dôkaz podobného tvrdenia 4.12c). Dôkaz tvrdenia a) podrobne okomentujeme, aby ste podľa neho dokázali robiť vlastné.

Tvrdenia, ktoré majú formu ekvivalencie, zvyčajne dokazujeme ako implikácie v oboch smeroch. Inak povedané, musíme dokázať, že $\{\} \models_p X$ je postačujúcou ($\Rightarrow$) aj nutnou ($\Leftarrow$) podmienkou toho, že X je tautológia, teda:

($\Rightarrow$) ak $\{\} \models_p X$, tak X je tautológia; ($\Leftarrow$) ak X je tautológia, $\{\} \models_p X$.

($\Rightarrow$) a ($\Leftarrow$) sú zvyčajné označenia dvoch implikácií, ktoré tvoria ekvivalenciu (*nezamieňajte* ich so symbolom implikácie $\rightarrow$). Obe dokážeme priamymi dôkazmi.

Pri priamom dôkaze implikácie predpokladáme jej antecedent (ľavú stranu) a snažíme sa ukázať, že z jeho platnosti a z doteraz známych definícií a tvrdení vyplýva konzekvent (pravá strana).

($\Rightarrow$) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že $\{\} \models_p X$. Chceme ukázať, že potom X je tautológia.

Podľa definície vyplývania teda predpokladáme, že v každom ohodnotení v, v ktorom je pravdivá teória $\{\}$, je pravdivá aj formula X. Podľa definície tautológie chceme dokázať, že X je pravdivá v každom ohodnotení v.

Najprv si uvedomíme, ako sú definované pojmy, ktoré sa v tvrdení vyskytujú. Tým si vyjasníme, čo vlastne predpokladáme a čo dokazujeme.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v. Pretože teória $\{\}$ neobsahuje žiadne formuly, triviálne platí, že všetky formuly z $\{\}$ sú pravidvé vo v, a teda podľa definície pravdivosti teórie v ohodnotení, $v \models_p \{\}$. Z predpokladu, že z $\{\}$ vyplýva X, potom máme, že $v \models_p X$. Na základe tohto zistenia a preto, že v bolo ľubovoľné, môžeme konštatovať, že X je pravdivá v každom ohodnotení v, teda X je tautológia, čo bolo treba dokázať.

Keď máme dokázať, že *všetky* objekty nejakého typu (ohodnotenia) majú nejakú vlastnosť (je v nich pravdivá X), zoberieme si hocijaký taký objekt a ukážeme, že keď poctivo preskúmame všetky možnosti, ktoré môžu nastať, tento objekt bude vždy mať požadovanú vlastnosť.

($\Leftarrow$) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že X je tautológia, teda že (podľa definície tautológie) X je pravdivá vo všetkých ohodnoteniach. Chceme dokázať, že potom $\{\} \models_p X$ teda, že (podľa definície vyplývania) vo všetkých ohodnoteniach, v ktorých je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v. Predpokladajme, že $v \models_p \{\}$, a ukážme, že $v \models_p X$. To však máme priamo z predpokladu, že X je tautológia. Teda zovšeobecňujeme, že v každom ohodnotení, v ktorom je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X, teda z $\{\}$ vyplýva X, čo bolo treba dokázať.

Jasnejšia formulácia tvrdenia „*Vo všetkých ohodnoteniach, v ktorých je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X*,“ je „*Pre všetky ohodnotenia v, ak $v \models_p \{\}$, tak $v \models_p X$*“. Ide opäť o všeobecne kvantifikovanú implikáciu. Postup na jej dôkaz bude teda: Zobrať ľubovoľný objekt požadovaného typu, predpokladať antecedent a dokázať konzekvent.

Dokázaním tvrdení (⇒) a (⇐) sme dokázali tvrdenie a).

Pri dôkazoch iných tvrdení možno budete navyše potrebovať techniku *rozboru prípadov*, ktorú sme na prednáške použili pri dôkaze prvej ekvivalencie z vety 4.10 a tvrdenia 4.12c)(⇐).

c) Dokážme alebo vyvráťme: Ak $T \models_p \neg X$, tak $T \not\models_p X$.

Pokúsme sa tvrdenie dokázať. Je to implikácia, takže predpokladáme pravdivosť jej antecedentu (ľavej strany) a snažíme sa ukázať pravdivosť konzekventu (pravej strany).

Predpokladajme, že $T \models_p \neg X$. Naším cieľom je dokázať, že potom $T \not\models_p X$.

Uvedomíme si definíciu vyplývania a aplikujeme ju na náš prípad:

Podľa predpokladu v každom ohodnotení v, v ktorom je pravdivá T, je pravdivá aj $\neg X$. Máme dokázať, že nie je pravda, že v každom ohodnotení v, v ktorom je pravdivá T, je pravdivá aj X. To znamená, že musíme nájsť nejaké ohodnotenie v, v ktorom je T pravdivá, ale X nepravdivá.

Zdá sa, že s nájdením ohodnotenia by nám mohol pomôcť nasledujúci rozbor prípadov.

Pre každú teóriu sú dve možnosti: buď existuje ohodnotenie, v ktorom je pravdivá, alebo také ohodnotenie neexistuje.

- Ak existuje v, v ktorom je T pravdivá, tak podľa predpokladu $v \models_p \neg X$, a teda $v \not\models_p X$. V tomto prípade teda existuje ohodnotenie, v ktorom je T pravdivá, ale X nepravdivá.
- Ak neexistuje v, v ktorom je T pravdivá, tak neexistuje ani ohodnotenie, v ktorom je T pravdivá a navyše X nepravdivá. Požadovaný cieľ v tomto prípade **nie je možné dosiahnuť**.

  Situáciu by ešte mohlo zachrániť, keby prípad „neexistuje v, v ktorom je T pravdivá“ nemohol nastať, lebo je v spore s nejakým predchádzajúcim predpokladom. To však nie je pravda, čo dokážeme nájdením ***konkrétnej*** teórie T a formuly X, pre ktoré sú predpoklady pravdivé, ale záver nie.

Zoberme jazyk $\mathcal{L}$ s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{a}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{p}\}$, teóriu $T = \{(\mathrm{p(a)} \land \neg\mathrm{p(a)})\}$ a formulu $X = \mathrm{p(a)}$. T je nesplniteľná, a preto triviálne platí, že z T vyplýva $\neg X$ (pretože pre každé ohodnotenie v

je implikácia „ak $v \models_p T$, tak $v \models_p \neg X$“ pravdivá, pretože jej antecedent je nepravdivý). Zároveň ale žiadne ohodnotenie nemá vlastnosť, že je v ňom T pravdivá a X nepravdivá.

Konštatujeme teda, že tvrdenie c) **neplatí**. Vyššie uvedená teória a formula tvoria jeden z jeho ***kontrapríkladov***.

d) Dokážme alebo vyvráťme: Ak $T \not\models_p X$, tak $T \models_p \neg X$.

Predpokladajme, že $T \not\models_p X$, a zistime, či $T \models_p \neg X$. Podľa predpokladu existuje nejaké ohodnotenie v, pre ktoré platí $v \models_p T$, ale $v \not\models_p X$. Máme dokázať, že potom pre každé ohodnotenie w platí, že ak $w \models_p T$, tak $w \models_p \neg X$.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie w a predpokladajme, že $w \models_p T$. Ak $w = v$, tak $w \not\models_p X$, a teda $w \models_p \neg X$. Ak však $w \neq v$, túto úvahu uplatniť nemôžeme. Nie je ťažké si uvedomiť, že predpoklad tvrdenia a tento prípad vieme dosiahnuť pre konkrétne T, X a ohodnotenie v, pričom však v nejakom inom ohodnotení budú T aj X pravdivé, a teda $\neg X$ nepravdivé.

Máme teda dôvod sa domnievať, že tvrdenie neplatí. Potvrdíme to nájdením ***konkrétneho*** kontrapríkladu.

Zoberme jazyk $\mathcal{L}$ s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{p}\}$, teóriu $T = \{\mathrm{p(a)}\}$ a formulu $X = \mathrm{p(b)}$. Potom $T \not\models_p X$, lebo pre ohodnotenie $v = \{\mathrm{p(a)} \mapsto t, \mathrm{p(b)} \mapsto f\}$ máme $v \models_p T$ a $v \not\models_p X$. Zároveň pre ohodnotenie $w = \{\mathrm{p(a)} \mapsto t, \mathrm{p(b)} \mapsto t\}$ máme $w \models_p T$ a $w \models_p X$, teda $w \not\models_p \neg X$. Preto $T \not\models_p \neg X$. Našli sme kontrapríklad, takže tvrdenie d) **neplatí**. ♮

5 Dôkazy a výrokovologické tablá

5.1 Vyplývanie a tautológie v tablách

5.1.1 Príklad. (Smullyan [5]) Na políciu predviedli troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

a) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.

b) Doyle nikdy nepracuje sám.

c) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.

d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Dokážte pomocou tablového kalkulu, že z týchto skutočností vyplýva, že Mills je vinný. Dôkaz vyplývania formuly preložte do slovenčiny.

Riešenie. Naším cieľom je dokázať, že tvrdenie *Mills je vinný* vyplýva zo sformalizovaných výrokov tvoriacich teóriu. Pri formalizácii sme v úlohe rozpoznali tri atomické formuly vinný(Mills), vinný(Doyle) a vinný(Adamsová) v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{vinný}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Mills}, \text{Doyle}, \text{Adamsová}\}$. Pre lepšiu čitateľnosť riešenia si jednotlivé atomické formuly pomenujeme nasledovne: $M = \text{vinný(Mills)}$, $D = \text{vinný(Doyle)}$ a $A = \text{vinný(Adamsová)}$.

Zistenia (a–d) sme sformalizovali do nasledovnej teórie:

$$T = \left\{ \begin{matrix} ((A \land \neg M) \to D)), \\ (D \to (A \lor M)), \\ (A \to \neg D), \\ (A \lor (M \lor D)) \end{matrix} \right\}.$$

Na to, aby sme dokázali Millsovu vinu na základe teórie T, potrebujeme najprv overiť, či je splniteľná. Na to postačuje nájsť hocijaký model teórie T, teda také ohodnotenie v, že $v \models_{\mathrm{p}} T$. Ľahko si overíme, že takýmto modelom je napríklad $v = \{\text{vinný(Mills)} \mapsto t, \text{vinný(Doyle)} \mapsto f, \text{vinný(Adamsová)} \mapsto f\}$.

Neskôr budeme na overovanie splniteľnosti teórie využívať iné, formálne metódy.

To, že formula M, t.j. vinný(Mills) vyplýva z teórie T (teda $T \vDash_{\mathrm{p}} M$, resp. $T \vDash_{\mathrm{p}}$ vinný(Mills)), sa pokúsime dokázať nájdením uzavretého tabla pre množinu označených formúl $T_M^+ = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D)), \mathbf{F}\,M\}$.

1. $\mathbf{T}\,((A \land \neg M) \to D)$ T_M^+
2. $\mathbf{T}\,(D \to (A \lor M))$ T_M^+
3. $\mathbf{T}\,(A \to \neg D)$ T_M^+
4. $\mathbf{T}\,(A \lor (M \lor D))$ T_M^+
5. $\mathbf{F}\,M$ T_M^+

- 6. $\mathbf{T}\,A$ $\beta 4$
  - 7. $\mathbf{F}\,A$ $\beta 3$ — $*$ 6, 7
  - 8. $\mathbf{T}\,\neg D$ $\beta 3$; 9. $\mathbf{F}\,D$ $\alpha 8$
    - 10. $\mathbf{F}\,(A \land \neg M)$ $\beta 1$
      - 11. $\mathbf{F}\,A$ $\beta 10$ — $*$ 6, 11
      - 12. $\mathbf{F}\,\neg M$ $\beta 10$; 13. $\mathbf{T}\,M$ $\alpha 12$ — $*$ 5, 13
    - 14. $\mathbf{T}\,D$ $\beta 1$ — $*$ 9, 14
- 15. $\mathbf{T}\,(M \lor D)$ $\beta 4$
  - 16. $\mathbf{T}\,M$ $\beta 15$ — $*$ 5, 16
  - 17. $\mathbf{T}\,D$ $\beta 15$
    - 18. $\mathbf{F}\,D$ $\beta 2$ — $*$ 17, 18
    - 19. $\mathbf{T}\,(A \lor M)$ $\beta 2$
      - 20. $\mathbf{T}\,A$ $\beta 19$
        - 21. $\mathbf{F}\,A$ $\beta 3$ — $*$ 20, 21
        - 22. $\mathbf{T}\,\neg D$ $\beta 3$; 23. $\mathbf{F}\,D$ $\alpha 22$ — $*$ 17, 23
      - 24. $\mathbf{T}\,M$ $\beta 19$ — $*$ 5, 24

Podarilo sa nám uzavrieť všetky vetvy tabla pre množinu T_M^+, a teda podľa dôsledku 5.17 vety o korektnosti tablového kalkulu sme dokázali, že $T \vDash_{\mathrm{p}}$ vinný(Mills).

Teda tvrdenie, že Mills je vinný vyplýva zo zadaných tvrdení (a–d). Pretože zároveň vieme, že tieto tvrdenia sú splniteľné, môžeme usúdiť, že ak sú pravdivé, Mills je určite vinný.

Napíšme teraz s pomocou tohto tabla slovný dôkaz toho, že zo zistení a)–d) vyplýva, že Mills je vinný.

Tablo sa dá priamočiaro čítať ako dôkaz sporom, aj keď toto čítanie môže pôsobiť „umelo“ (viď nižšie). Pre lepšiu orientáciu v dôkaze v zátvorkách uvádzame čísla uzlov tabla, ktoré zodpovedajú práve vyjadrenej úvahe.

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, že zistenia a)–d) sú pravdivé (1–4), ale Mills je nevinný (5).

Podľa d) vieme, že aspoň jeden z trojice Adamsová, Mills, Doyle je vinný — preskúmame teda všetky tri možnosti:

Možnosť, že je vinný Mills (16) je v spore s predpokladom.

Použitie pravidla β na disjunkciu zvyčajne čítame ako rozbor možných prípadov. Viacero použití pravidla β na vnorené disjunkcie (napr. $(A \lor (M \lor D))$) spájame v slovnom dôkaze do jedného rozboru.

V prípade, že je vinná Adamsová (6), podľa c) nie je vinný Doyle (7, 8, 9). Podľa tvrdenia a) však potom nemôže byť pravda, že je vinná Adamsová a Mills nevinný (10, 14). To znamená, že buď nie je Adamsová vinná (11), čo je spor s predpokladom tohto prípadu, alebo nie je Mills nevinný (12), teda Mills je vinný (13), čo je spor s predpokladom celého dôkazu.

Použitie pravidla β na implikáciu, pri ktorom sa hneď uzavrie ľavá vetva, sa dá čítať ako modus ponens: „Pretože ak X, tak Y, a platí X, platí aj Y.“ V tomto dôkaze sa hodí pri implikáciách b) a c).

Keď sa pravidlo β použije na implikáciu a hneď sa uzavrie pravá vetva, môžeme ho čítať ako modus tolens: „Pretože ak X, tak Y, a neplatí Y, neplatí ani X.“ To sa hodí pre implikáciu a).

Ostala nám posledná možnosť — Doyle je vinný (17). Podľa tvrdenia b) je potom vinná Adamsová alebo Mills (18, 19). Vina Millsa (24) je však v spore s úvodným predpokladom. V prípade viny Adamsovej (20) musíme na základe tvrdenia c) uvažovať nevinu Doyla (21, 22), čo je tiež spor.

Preskúmali sme všetky možnosti toho, či by mohol byť Mills nevinný. Keďže žiadna z nich nemôže nastať, pretože viedla k sporu, musí byť Mills určite vinný. Millsova vina teda vyplýva z teórie tvorenej zisteniami a)–d). □

Predchádzajúci dôkaz sporom pôsobil „umelo“. „Skutočné“ dôkazy sporom z negácie dokazovaného tvrdenia odvodia nejaké dôsledky a až o nich ukážu, že sú v spore s dôsledkami predpokladov. My sme však predpoklad dôkazu sporom (Mills je nevinný) použili vždy iba vo chvíli, keď sme úvahou dospeli k opačnému tvrdeniu (Mills je vinný).

Naše tablo je preto „prirodzenejšie“ čítať ako priamy dôkaz. Formulu M označenú znamienkom $\mathbf{F}$ chápeme ako *cieľ*, ktorý chceme dokázať. Formuly označené znamienkom $\mathbf{T}$ stále chápeme ako *predpoklady*.

Dôkaz (priamy). Predpokladajme, že zistenia a)–d) sú pravdivé (1–4). Dokážme, že Mills je vinný (5). Podľa tvrdenia d) je vinný niekto z podozrivých Adamsová, Mills, alebo Doyle. V prípade, že je vinný Mills (16), dokazované tvrdenie triviálne platí. Rozoberme teda zvyšné dva prípady:

Prepokladajme najprv, že je vinná Adamsová (6). Podľa c) teda nie je vinný Doyle (7, 8, 9). Preto podľa a) nie je pravda, že Adamsová je vinná a Mills je nevinný (10, 14). Teda Adamsová nie je vinná alebo Mills nie je nevinný. Prvú možnosť (11) vylučuje predpoklad tohto prípadu. Ostáva teda druhá možnosť (12), čiže Mills je vinný (13).

Teraz predpokladajme, že je vinný Doyle (17). Podľa b) je vinná Adamsová alebo je vinný Mills (19). Keby bola vinná Adamsová (20), podľa c) by bol Doyle nevinný (21, 22), čo je však v spore s predpokladom tohto prípadu. Preto opäť ostáva iba možnosť, že Mills je vinný (24).

Z predpokladu pravdivosti zistení a)–d) sme teda vo všetkých možných prípadoch dospeli k tomu, že Mills je vinný, čo bolo treba dokázať. □

💡 V prípade priameho dôkazu je ešte jedna možnosť (okrem vyššie uvedených), ako čítať použitie pravidla β na implikáciu $\mathbf{T}(X \to Y)$ — nahradenie doterajšieho cieľa jeho postačujúcou podmienkou: „Pretože ak X, tak Y, a máme dokázať Y, postačí dokázať X."

Keď naopak *dokazujeme* implikáciu, teda tablo obsahuje označenú formulu $\mathbf{F}(X \to Y)$, zvyčajne na ňu aplikujeme pravidlá α s dôsledkami $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}Y$. Obvyklé čítanie týchto krokov je: „Chceme dokázať, že ak X, tak Y. Predpokladajme teda X a dokážme Y."

Pri našom dôkaze sa síce tieto situácie nevyskytli, ale nájdu využitie napríklad pri čítaní tabiel v iných úlohách. ♮

5.1.2 Dokážte, že $T \models_p X$, pričom $T = \{A_1, \dots, A_7\}$ a T je splniteľná, kde:

(A_1) $\big($kino(Fero, Anka) ∨ (pocuva(Fero, PinkFloyd) ∨ hra(Fero, FerovaPS))$\big)$

(A_2) (kapela(PinkFloyd) ∧ hraciaKonzola(FerovaPS))

(A_3) (¬frustrovany(Fero) → kino(Fero, Anka))

(A_4) $\big($frustrovany(Fero) → (pocuva(Fero, PinkFloyd) ∨ hra(Fero, FerovaPS))$\big)$

(A_5) ¬$\big($kino(Fero, Anka) ∧ (pocuva(Fero, PinkFloyd) ∧ hra(Fero, FerovaPS))$\big)$

(A_6) (hra(Fero, FerovaPS) → pocuva(Fero, PinkFloyd))

(A_7) (pocuva(Fero, PinkFloyd) → ¬frustrovany(Fero))

výrokovologicky vyplýva formula:

(X) (¬hra(Fero, FerovaPS) → kino(Fero, Anka))

Preložte teóriu, formulu aj dôkaz jej vyplývania do slovenčiny.

5.1.3 Dokážte, že z teórie $T = \{A_1, \dots, A_5\}$, kde:

(A_1) (mam(dazdnik, den) → ¬prsi(den))

(A_2) (mokry(cesta, den) → (prsi(den) ∨ preslo(umyvacieAuto, cesta, den)))

(A_3) (vikend(den) → ¬preslo(umyvacieAuto, cesta, den))

(A_4) $\big($(utorok(den) → idemElektrickou(den))
∧ ((¬utorok(den) ∧ ¬vikend(den)) → ¬idemElektrickou(den))$\big)$

(A_5) (idemElektrickou(den) → ¬mam(dazdnik, den))

výrokovologicky vyplýva

(X) ((mam(dazdnik, den) ∧ mokry(cesta, den)) → ¬vikend(den))

Preložte teóriu, formulu aj dôkaz jej vyplývania do slovenčiny.

5.1.4 Dokážte, že z tvrdení:

(A_1) Vianočný darček kúpil otec alebo ho kúpila mama.

(A_2) Darček kúpil otec a Ondrej je šťastný, len ak to bude spoločný darček s Hankou a aj ona je šťastná.

(A_3) Určite sa nestane, aby ani Ondrej ani Hanka neboli šťastní.

(A_4) Otec neznáša nakupovanie, takže sa z toho vždy vyvlečie.

vyplýva tvrdenie:

(X) Ak by bol Ondro šťastný, iba ak by darček kúpil otec, tak nakupovala mama a Hanka je šťastná.

Tvrdenia sformalizujte v jazyku s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{kúpil}^2, \text{šťastný}^1\}$, dokážte vyplývanie tablom a dôkaz prepíšte do čo najprirodzenejšej slovenskej formy.

5.1.5 Predmet môže študent úspešne absolvovať iba vtedy, keď odovzdá domáce úlohy a úspešne absolvuje (spraví) riadny alebo náhradný test. Náhradný test môžu písať iba tí, čo boli chorí, ale keďže býva ľahký, tak ho aj hneď spravia (teda iba chorí mohli spraviť náhradný test). Riadny test spravia iba tí, ktorí sa učili alebo aspoň riešili domáce úlohy. Študenti, ktorí odovzdali domáce úlohy ich buď riešili alebo odpísali. Odpisujú ich ale iba flákači, čo sa neučia.

Dokážte v tablovom kalkule, že ak som predmet úspešne absolvoval a nebol som pri tom chorý, musel som riešiť domáce úlohy.

5.1.6 Pomocou tablového kalkulu vyriešte nasledujúce úlohy:

a) Keď Katka nakreslí obrázok, je na ňom buď mačka alebo pes. Obrázok mačky Katkin pes vždy hneď roztrhá. Ak jej pes roztrhá obrázok, Katka je smutná.

   Dokážte, že ak Katka nakreslila obrázok a je šťastná (nie je smutná), tak na jej obrázku je pes.

b) Bez práce nie sú koláče. Ak niekto nemá ani koláče, ani chleba, tak bude hladný. Na chlieb treba múku.

   Dokážte, že ak niekto nemá múku a je najedený (nie je hladný), tak pracoval.

c) Bez oblakov niet dažďa (ak nie sú oblaky, nemôže pršať). Ak je cesta mokrá, tak prší alebo práve prešlo umývacie auto. Umývacie autá nechodia v sobotu (ak je sobota, tak umývacie autá nechodia).

   Dokážte, že ak je sobota a je mokrá cesta, tak je oblačno.

5.1.7 (Smullyan [5]) Inšpektor Nick Fishtrawn zaistil podozrivých Browna, Smitha, Taylora a McDonnalda, pričom zistil, že:

(A_1) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.

(A_2) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.

(A_3) Taylor nikdy nepracuje bez McDonnalda.

(A_4) McDonnald je vinný, ak je Brown nevinný.

Dokážte pomocou tablového kalkulu, že z týchto skutočností vyplývajú nasledujúce tvrdenia (X) a (Y).

(X) Ak je Taylor nevinný, tak je nevinný aj Brown.

(Y) McDonnald je vinný.

5.1.8 Nech A, B a C sú ľubovoľné formuly v ľubovoľnom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú tautológie:

a) $\big((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))\big)$,

b) $((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))$,

c) $(\neg\neg A \leftrightarrow A)$,

d) $\big(((A \to B) \land (A \to \neg B)) \to \neg A\big)$,

e) $\big(A \to (\neg B \to \neg(A \to B))\big)$,

f) $\big((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))\big)$,

g) $\big(A \to (B \to (A \land B))\big)$,

h) $\big(((A \to C) \land (B \to C)) \to ((A \lor B) \to C)\big)$,

i) $(A \to (B \to A))$,

j) $(A \to (A \lor B))$,

k) $(\neg A \to (A \to B))$,

l) $(\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B))$,

m) $(\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B))$,

n) $(\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \land \neg B))$,

o) $\big((A \land (B \lor C)) \leftrightarrow ((A \land B) \lor (A \land C))\big)$,

p) $\big((A \lor (B \land C)) \leftrightarrow ((A \lor B) \land (A \lor C))\big)$,

q) $\big((A \lor (A \land B)) \leftrightarrow A\big)$.

r) $\big((A \land (A \to B)) \to B\big)$,

s) $\big((\neg B \land (A \to B)) \to \neg A\big)$.

t) $\big((C \to A) \to (((A \to B) \to C) \to A)\big)$

Riešenie.

Na začiatok je dobré si uvedomiť, že tablo pre množinu označených formúl môžeme konštruovať aj bez toho, aby sme poznali všetky ich detaily, teda v našom prípade podformuly A, B, C.

b) Zoberme ľubovoľné formuly A a B. Aby sme dokázali, že $((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))$ je tautológia, stačí zistiť, či je množina $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))\}$ nesplniteľná, teda či pre ňu existuje uzavreté tablo.

Pre formuly $(X \leftrightarrow Y)$ nemáme špeciálne tablové pravidlá, pretože tieto formuly sú iba skratky za $((X \to Y) \land (Y \to X))$. V table preto pracujeme s neskrátenou verziou.

$$
\begin{array}{c}
1.\quad \mathbf{F}\big(((\neg A \to \neg B) \to (B \to A)) \land ((B \to A) \to (\neg A \to \neg B))\big) \quad S^+ \\
\hline
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{lll}
2. & \mathbf{F}((\neg A \to \neg B) \to (B \to A)) & \beta 1 \\
3. & \mathbf{T}(\neg A \to \neg B) & \alpha 2 \\
4. & \mathbf{F}(B \to A) & \alpha 2 \\
5. & \mathbf{T}B & \alpha 4 \\
6. & \mathbf{F}A & \alpha 4
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{lll|lll}
7. & \mathbf{F}\neg A & \beta 3 & 9. & \mathbf{T}\neg B & \beta 3 \\
8. & \mathbf{T}A & \alpha 7 & 10. & \mathbf{F}B & \beta 9 \\
 & * & 6,8 & & * & 6,10
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\begin{array}{lll}
11. & \mathbf{F}((B \to A) \to (\neg A \to \neg B)) & \beta 1 \\
12. & \mathbf{T}(B \to A) & \alpha 11 \\
13. & \mathbf{F}(\neg A \to \neg B) & \alpha 11 \\
14. & \mathbf{T}\neg A & \alpha 13 \\
15. & \mathbf{F}\neg B & \alpha 13 \\
16. & \mathbf{F}A & \alpha 14 \\
17. & \mathbf{T}B & \alpha 15
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{lll|lll}
18. & \mathbf{F}B & \beta 12 & 19. & \mathbf{T}A & \beta 12 \\
 & * & 17,18 & & * & 19,16
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Našli sme uzavreté tablo pre množinu $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))\}$, ktorá je teda nesplniteľná, a preto $((\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A))$ je tautológia. $\natural$

Literatúra

[1] Chiara Ghidini and Luciano Serafini. *Mathematical Logic Exercises*. University of Trento, 2014. http://disi.unitn.it/~ldkr/ml2014/ExercisesBooklet.pdf.

[2] Gordon S. Novak Jr. Resolution example and exercises. [online]. https://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html.

[3] Francis Jeffry Pelletier. Seventy-five problems for testing automatic theorem provers. *J. Autom. Reasoning*, 2(2):191–216, 1986.

[4] Willard Van Orman Quine. *Methods of Logic*. Holt, Rinehart and Winston, revised edition, 1959.

[5] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. Prentice-Hall, 1978.

[6] Andrei Voronkov. Logic and modeling 2014. [online]. http://www.voronkov.com/lics.cgi.