

Výrokovologické spojky

2. prednáška · Matematika (4): Logika pre informatikov

Ján Klúka, Jozef Šiška

Letný semester 2019/2020

Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra aplikovanej informatiky

Obsah 2. prednášky

Výrokovologické spojky

 Boolovské spojky

 Implikácia

 Ekvivalencia

 Syntax výrokovologických formúl

 Sémantika výrokovologických formúl

 Správnosť a vernosť formalizácie

Minulý týždeň sme sa naučili:

- Čo sú symboly jazyka logiky prvého rádu.
- Čo sú atomické formuly.
- Čo sú štruktúry.
 - Konštanty označujú objekty.
 - Predikáty označujú vzťahy a vlastnosti.
- Kedy sú atomické formuly pravdivé.
- Jazyk atomických formúl je oproti slovenčine veľmi slabý.
 - Môžu byť pravdivé vo veľmi čudných štruktúrach.
 - Veľa sme vyjadrovali približne.

Výrokovologické spojky

Výrokovologické spojky

Atomické formuly logiky prvého rádu môžeme spájať do zložitejších tvrdení **výrokovologickými spojkami**.

- Zodpovedajú spojkám v slovenčine, ktorými vytvárame súvetia.
- Významom spojky je vždy **boolovská funkcia**, teda funkcia na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov. Pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí **iba** od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

Príklad 2.1

Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, ...

Nevýrokovologické spojky

Negatívny príklad

Spojka *pretože* nie je výrokovologická.

Dôkaz.

Uvažujme o výroku *Karol je doma, pretože Jarka je v škole*.

Je pravdivý v situácii: Je 18:00 a Karol je doma, aby nakrmil psa Bobíka, ktorý by inak bol hladný až do 19:30, keď sa Jarka vráti zo školy, kde má cvičenia od 17:20 do 18:50.

Nie je pravdivý v situácii: Jarka išla ráno do školy, ale Karol ostal doma, lebo je chorý. S Jarkinou prítomnosťou v škole to nesúvisí.

V oboch situáciách sú výroky *Karol je doma* aj *Jarka je v škole* pravdivé, ale pravdivostná hodnota zloženého výroku je rôzna. **Nezávisí** iba od pravdivostných hodnôt podvýrokov (ale od existencie vzťahu **príčina-následok** medzi nimi).

Spojka *pretože* teda nie je **funkciou** na pravdivostných hodnotách.



Výrokovologické spojky

Boolovské spojky

Negácia

Negácia \neg je **unárna** spojka — má jeden argument, formulu.

Zodpovedá výrazom *nie*, *nie je pravda*, *že ...*, predpone *ne-*.

Ľubovoľne vnáratelná.

Formula vytvorená negáciou sa **nezátvorkuje**.

Okolo argumentu negácie **nepridávame** zátvorky,
ale môže ich mať on sám, ak to jeho štruktúra vyžaduje.

Príklad 2.2

$\neg \text{doma}(\text{Karol})$

Karol **nie** je doma.

$\neg \text{Jarka} \doteq \text{Karol}$

Jarka **nie** je Karol.

$\neg \neg \neg \text{poslúcha}(\text{Cilka})$

Nie je pravda, že **nie** je pravda,
že Cilka **ne**poslúcha.

Konjunkcia

Konjunkcia \wedge je **binárna** spojka.

Zodpovedá spojkám *a*, *aj*, *i*, *tiež*, *ale*, *avšak*, *no*, *hoci*, *ani*, *ba* (*aj/ani*), ...

Formalizujeme ňou zlučovacie, stupňovacie a odporovacie súvetia:

- Jarka je doma **aj** Karol je doma.
(doma(Jarka) \wedge doma(Karol))
- Jarka je v škole, **no** Karol je doma.
(v_škole(Jarka) \wedge doma(Karol))
- **Ani** Jarka nie je doma, **ani** Karol tam nie je.
(\neg doma(Jarka) \wedge \neg doma(Karol))
- **Nielen** Jarka je chorá, **ale aj** Karol je chorý.
(chorý(Jarka) \wedge chorý(Karol))

Zloženú formulu vždy **zátvorkujeme**.

Formalizácia viacnásobných vetných členov konjunkciou

Zlučovacie viacnásobné vetné členy tiež formalizujeme ako konjunkcie:

- Jarka aj Karol sú doma.
 $(\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{doma}(\text{Karol}))$
- Karol sa potkol a spadol.
 $(\text{potkol_sa}(\text{Karol}) \wedge \text{spadol}(\text{Karol}))$
- Jarka dostala Bobíka od mamy a otca.
 $(\text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Bobík}, \text{mama}) \wedge \text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Bobík}, \text{otec}))$

Podobne (viacnásobné zlučovacie) prívlastky vlastností:

- Eismann je ruský špión.
 $(\text{Rus}(\text{Eismann}) \wedge \text{špión}(\text{Eismann}))$
- Bobík je malý čierny psík.
 $((\text{malý}(\text{Bobík}) \wedge \text{čierny}(\text{Bobík})) \wedge \text{pes}(\text{Bobík}))$

Zlučovacie súvetia niekedy vyjadrujú časovú následnosť, ktorá sa pri priamočiarom preklade do logiky prvého rádu stráca:

- Jarka a Karol sa stretli a išli do kina.

$$(\text{stretli_sa}(\text{Jarka}, \text{Karol}) \wedge \\ (\text{do_kina}(\text{Jarka}) \wedge \text{do_kina}(\text{Karol})))$$

- Jarka a Karol išli do kina a stretli sa.

$$((\text{do_kina}(\text{Jarka}) \wedge \text{do_kina}(\text{Karol})) \wedge \\ \text{stretli_sa}(\text{Jarka}, \text{Karol}))$$

Disjunkcia

Disjunkcia \vee je binárna spojka, ktorá zodpovedá spojkám *alebo*, *či*, *bud'...*, *alebo ...* v **inkluzívnom** význame (môžu nastať aj obe možnosti).

Disjunkciou formalizujeme vylučovacie súvetia:

- Jarka je doma **alebo** Karol je doma.
(doma(Jarka) \vee doma(Karol))
- Bud' je Karol doma, **alebo** je Jarka v škole.
(doma(Karol) \vee v_škole(Jarka))

Zloženú formulu vždy **zátvorkujeme**.

Formalizácia viacnásobných vetných členov disjunkciou

Viacnásobné vetné členy s vylučovacou spojkou tiež prekladáme ako disjunkcie:

- Doma je Jarka alebo Karol.
 $(\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{doma}(\text{Karol}))$
- Jarka je doma alebo v škole.
 $(\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{v_škole}(\text{Jarka}))$
- Jarka dostala Bobíka od mamy alebo otca.
 $(\text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Bobík}, \text{mama}) \vee \text{dostal}(\text{Jarka}, \text{Bobík}, \text{otec}))$
- Bobík je čierny či tmavohnedý psík.
 $((\text{čierny}(\text{Bobík}) \vee \text{tmavohnedý}(\text{Bobík})) \wedge \text{pes}(\text{Bobík}))$

Exkluzívna disjunkcia

Konštrukcia *bud'...*, *alebo ...* **neznamená** nutne exkluzívnu disjunkciu.

- Bobík a Cilka sa pobili.
Bud' Bobík pohrýzol Cilku, alebo Cilka poškrabala Bobíka.
(Mohlo sa stať jedno aj druhé.)

Niekedy samotné *alebo* znamená exkluzívnu disjunkciu.

- Jarka je doma alebo v škole.
(Nemôže byť súčasne na dvoch miestach.)

Exkluzívnu disjunkciu môžeme vyjadriť zložitejšou formulou:

$$((\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{v_škole}(\text{Jarka})) \wedge \\ \neg(\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{v_škole}(\text{Jarka}))).$$

Jednoznačnosť rozkladu

Formuly s binárnymi spojkami sú vždy uzátvorkované.

Dajú sa jednoznačne rozložiť na podformuly a interpretovať.

Slovenské tvrdenia so spojkami nie sú vždy jednoznačné:

- Karol je doma a Jarka je doma alebo je Bobík šťastný.
 - ❓ $((\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka})) \vee \text{šťastný}(\text{Bobík}))$
 - ❓ $(\text{doma}(\text{Karol}) \wedge (\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{šťastný}(\text{Bobík})))$
- Karol je doma alebo Jarka je doma a Bobík je šťastný.
 - ❓ $((\text{doma}(\text{Karol}) \vee \text{doma}(\text{Jarka})) \wedge \text{šťastný}(\text{Bobík}))$
 - ❓ $(\text{doma}(\text{Karol}) \vee (\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{šťastný}(\text{Bobík})))$

Jednoznačnosť rozkladu v slovenčine

Slovenčina má prostriedky podobné zátvorkám:

- Karol aj Jarka sú (obaja) doma alebo je Bobík šťastný.
 $((\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka})) \vee \text{šťastný}(\text{Bobík}))$
- Karol je doma a buď je doma Jarka, alebo je Bobík šťastný.
Aj Karol je doma, aj Jarka je doma alebo je Bobík šťastný.
 $(\text{doma}(\text{Karol}) \wedge (\text{doma}(\text{Jarka}) \vee \text{šťastný}(\text{Bobík})))$
- Doma je Karol alebo Jarka a Bobík je šťastný.
Nieкто z dvojice Karol a Jarka je doma a Bobík je šťastný.
 $((\text{doma}(\text{Karol}) \vee \text{doma}(\text{Jarka})) \wedge \text{šťastný}(\text{Bobík}))$
- Buď je doma Karol, alebo je doma Jarka a Bobík je šťastný.
 $(\text{doma}(\text{Karol}) \vee (\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{šťastný}(\text{Bobík})))$

Príslušnosť výrokov k spojкам vyjadrujú viacnásobný vetný člen (+*obaja*, *nieкто z*) a kombinácie spojok *buď* ..., *alebo* ...; *aj* ..., *aj* ...; *ani* ..., *ani* ...; atď.

Oblasť platnosti negácie

Výskyt negácie sa vzťahuje na **najkratšiu nasledujúcu formulu** — **oblasť platnosti** tohto výskytu.

- $((\neg \text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka})) \vee \text{šťastný}(\text{Bobík}))$
- $(\neg (\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka}))) \vee \text{šťastný}(\text{Bobík})$

Argument negácie je **uzátvorkovaný práve vtedy**, keď je **priamo** vytvorený binárnou spojkou:

✓ $\neg \neg (\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka}))$

✗ $\neg (\neg (\text{doma}(\text{Karol}) \wedge \text{doma}(\text{Jarka})))$

Negácia rovnostného atómu

Rovnosť nie je spojka, preto:

✓ $\neg \text{Jarka} \doteq \text{Karol}$ — Jarka **nie** je Karol.

✗ $\neg (\text{Jarka} \doteq \text{Karol})$

Zátvorky sú zbytočné, lebo čítanie

„*«Nie je pravda, že Jarka» sa rovná Karol*“ je nezmyselné:

1. Syntakticky: Negácia sa vzťahuje na formulu.
Konštanta nie je formula, rovnosť s oboma argumentmi je.
2. Sémanticky: Negácia je funkcia na pravdivostných hodnotách.
Konštanty označujú objekty domény.
Objekty nie sú pravdivé ani nepravdivé.

Dohoda 2.3

Formulu $\neg \tau \doteq \sigma$ budeme skrátene zapisovať $\tau \neq \sigma$.

Výrokovologické spojky

Implikácia

Implikácia

Implikácia \rightarrow je binárna spojka približne zodpovedajúca podmienkovému podradovaciemu súvetiu *ak ..., tak ...*.

Vo formule $(A \rightarrow B)$ hovoríme podformule A **antecedent**, a podformule B **konzekvent**,

Formula vytvorená implikáciou je nepravdivá v jedinom prípade: antecedent je pravdivý a konzekvent nepravdivý.



Tomuto významu nezodpovedajú všetky súvetia *ak ..., tak ...*.

Napr. výrok *ak by Sarah prišla, Jim by prišiel tiež* je nepravdivý, keď si myslíme, že išli rovnakým autobusom, ale Jim išiel iným a zmeškal ho.

Keď ..., potom ... má často význam časovej následnosti, ktorý implikácia nepostihuje.

Nutná a postačujúca podmienka

Implikáciu vyjadrujú aj súvetia:

Jim príde, **ak** príde Kim.

Jim príde, **iba ak** príde Kim.

Vedľajšie vety (*príde Kim*) sú **podmienkami** hlavnej vety (*Jim príde*).

Ale je medzi nimi **podstatný rozdiel**:

Jim príde, **ak** príde Kim.

postačujúca
podmienka

Jim príde, **iba ak** príde Kim.

nutná
podmienka

Postačujúca podmienka

Jim príde, **ak** príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, **stačí**, aby prišla Kim.
- Teda, ak príde Kim, tak príde aj Jim.
- Nepravdivé, keď Kim príde, ale Jim **ne**príde.
- Zodpovedá teda $(\text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim}))$.

Vo všeobecnosti:

$$A, \text{ ak } B. \quad \rightsquigarrow \quad (B \rightarrow A)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, **pokiaľ** príde Kim.

Nutná podmienka

Jim príde, **iba ak** príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, **je nevyhnutné**, aby prišla Kim, ale nemusí to stačiť.
- Teda, ak Jim príde, tak príde aj Kim.
- Nepravdivé, keď Jim príde, ale Kim **ne**príde.
- Zodpovedá teda $(\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim}))$.

Vo všeobecnosti:

$$A, \text{ iba ak } B. \quad \rightsquigarrow \quad (A \rightarrow B)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, **iba pokiaľ** s Kim.
- Jim príde **iba** spolu s Kim.
- Jim **ne**príde **bez** Kim.

Nutná a postačujúca podmienka rukolapne

Určite by sa vám páčilo, keby z pravidiel predmetu vyplývalo:

*Logikou prejdete, **ak** odovzdáte všetky domáce úlohy.*

Stačilo by odovzdať úlohy a nebolo by nutné urobiť nič iné.

Žiaľ, z našich pravidiel vyplýva:

*Logikou prejdete, **iba ak** odovzdáte všetky domáce úlohy.*

Odovzdať úlohy je nutné, ale na prejdenie to nestačí.

Súvetia formalizované implikáciou

$(A \rightarrow B)$ formalizuje (okrem iných) zložené výroky:

- Ak A , tak B .
- Ak A , tak aj B .
- Ak A , B .
- Pokiaľ A , [tak (aj)] B .
- A , iba ak B .
- A , len ak B .
- A nastane iba spolu s B .
- A nenastane bez B .
- B , ak A .
- B , pokiaľ A .

Výrokovologické spojky

Ekvivalencia

Ekvivalencia

Ekvivalencia \leftrightarrow vyjadruje, že ňou spojené výroky majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Zodpovedá slovenským výrazom *ak a iba ak; vtedy a len vtedy, keď; práve vtedy, keď; rovnaký ... ako ...; taký ... ako*

- Jim príde, ak a iba ak príde Kim.
($\text{príde}(\text{Jim}) \leftrightarrow \text{príde}(\text{Kim})$)
- Číslo n je párne práve vtedy, keď n^2 je párne.
($\text{párne}(n) \leftrightarrow \text{párne}(n^2)$)
- Müller je taký Nemec, ako je Stirlitz Rus.
($\text{Nemec}(\text{Müller}) \leftrightarrow \text{Rus}(\text{Stirlitz})$)

Ekvivalencia

Ekvivalencia ($A \leftrightarrow B$) zodpovedá tvrdeniu, že A je nutnou aj postačujúcou podmienkou B .

Budeme ju preto považovať za **skratku** za formulu

$$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)).$$

Ďalšie spojky a vetné konštrukcie

V slovenčine a iných prirodzených aj umelých jazykoch sa dajú tvoriť aj oveľa komplikovanejšie podmienené tvrdenia:

- Karol je doma, ak je Jarka v škole, inak má Jarka obavy.
- Karol je doma, ak je Jarka v škole,
inak má Jarka obavy, okrem prípadov, keď je Bobík s ním.

Výrokovologické spojky sa dajú vytvoriť aj pre takéto konštrukcie, ale väčšinou sa to nerobí.

Výrokovologické spojky

Syntax výrokovologických formúl

Syntax a sémantika formúl s výrokovologickými spojkami

Podobne ako pri atomických formulách, aj pri formulách s výrokovologickými spojkami potrebujem **zadefinovať** — presne a záväzne — ich **syntax** (skladbu) a **sémantiku** (význam).

Niektoré definície preberieme, iné rozšírime alebo modifikujeme, ďalšie pridáme.

Syntax výrokovologických formúl logiky prvého rádu špecifikuje:

- z čoho sa skladajú,
- čím sú a akú majú štruktúru.

Symboly výrokovologickej časti logiky prvého rádu

Definícia 2.4

Symbolmi jazyka \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu sú:

mimologické symboly, ktorými sú

- *individuové konštanty* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$;

logické symboly, ktorými sú

- *výrokovologické spojky* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ (nazývané, v uvedenom poradí, *symbol negácie*, *symbol konjunkcie*, *symbol disjunkcie*, *symbol implikácie*);
- a *symbol rovnosti* \doteq ;

pomocné symboly $(,)$ a $,$ (ľavá zátvorka, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú disjunktné. Pomocné ani logické symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ani $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\text{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Atomické formuly

Definícia atomických formúl je takmer rovnaká ako doteraz:

Definícia 2.5

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka \mathcal{L} je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú individuové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Predikátový atóm jazyka \mathcal{L} je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol s aritou n a c_1, \dots, c_n sú individuové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Atomickými formulami (skrátene **atómami**) jazyka \mathcal{L} súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka \mathcal{L} .

Množinu všetkých atómov jazyka \mathcal{L} označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Čo sú výrokovologické formuly?

Majme jazyk \mathcal{L} , kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Kim}, \text{Jim}, \text{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{príde}^1\}$.

Čo sú formuly tohto jazyka?

- Samotné atómy, napr. $\text{príde}(\text{Sarah})$.
- Negácie atómov, napr. $\neg \text{príde}(\text{Sarah})$.
- Premenné alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr. $(\neg \text{príde}(\text{Kim}) \vee \text{príde}(\text{Sarah}))$.
- Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr. $(\neg(\text{príde}(\text{Kim}) \wedge \text{príde}(\text{Sarah})) \rightarrow (\neg \text{príde}(\text{Kim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Sarah})))$.

Ako to presne a úplne popíšeme?

Čo sú výrokovologické formuly?

Ako presne a úplne popíšeme, čo je formula?

Induktívnou definíciou:

1. Povieme, čo sú základné formuly,
ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
 - ▶ Podobne ako 0 pri matematickej indukcii.
2. Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.
 - ▶ Podobne ako indukčný krok pri matematickej indukcii.
3. Zabezpečíme, že nič iné nie je formulou.

Definícia 2.6

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ formúl jazyka \mathcal{L} je (3.) **najmenšia** množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je formulou z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.
- 2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ju **negácia** formuly A .
- 2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ich postupne **konjunkcia**, **disjunkcia** a **implikácia** formúl A a B .

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame **formulou** jazyka \mathcal{L} .

Dohoda 2.7

Formuly označujeme meta premennými A, B, C, X, Y, Z , podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Dohoda 2.8

Pre každú dvojicu formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ skratka za formulu $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$.

Príklad 2.9

Ako by sme podľa definície 2.6 mohli dokázať, že $(\neg \text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow (\text{príde}(\text{Jim}) \vee \text{príde}(\text{Sarah})))$ je formula? Teda, ako by sme ju podľa definície 2.6 mohli **vytvoriť**?

Veta 2.10 (Princíp indukcie na konštrukciu formuly)

Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne

1. každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ má vlastnosť P ,
- 2.1. ak formula A má vlastnosť P , tak aj $\neg A$ má vlastnosť P ,
- 2.2. ak formuly A a B majú vlastnosť P , tak aj každá z formúl $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ má vlastnosť P ,

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).

Definícia 2.11

Vytvárajúcou postupnosťou nad jazykom \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu je ľubovoľná konečná postupnosť A_0, \dots, A_n postupností symbolov, ktorej každý člen

- je atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, alebo
- má tvar $\neg A$, pričom A je niektorý predchádzajúci člen postupnosti, alebo
- má jeden z tvarov $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, kde A a B sú niektoré predchádzajúce členy postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X .

Formula a existencia vytvárajúcej postupnosti

Tvrdenie 2.12

Postupnosť symbolov A je formulou vtedy a len vtedy, keď existuje vytvárajúca postupnosť pre A .

Osnova dôkazu.

(\Rightarrow) Indukciou na konštrukciu formuly

(\Leftarrow) Indukciou na dĺžku vytvárajúcej postupnosti



(Ne)jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Čo keby sme zadefinovali „formuly“ takto?

Definícia „formúl“



Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ „formúl“ jazyka \mathcal{L} je (3.) **najmenšia** množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je „formulou“ z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.
- 2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.
- 2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $A \wedge B$, $A \vee B$ a $A \rightarrow B$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.
- 2.3. ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov (A) je v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame „formulou“ jazyka \mathcal{L} .

Čo znamená „formula“

$(\text{príde}(\text{Jim}) \rightarrow \text{príde}(\text{Kim}) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah}))?$

Pre našu definíciu formúl platí:

Tvrdenie 2.13 (o jednoznačnosti rozkladu)

Pre každú formulu $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ v jazyku \mathcal{L} platí práve jedna z nasledujúcich možností:

- X je atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.
- Existuje práve jedna formula $A \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ taká, že $X = \neg A$.
- Existujú práve jedna dvojica formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a jedna spojka $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ také, že $X = (A \ b \ B)$.

Problémy s vytvárajúcou postupnosťou

Vytvárajúca postupnosť popisuje konštrukciu formuly podľa definície formúl:

$\text{príde}(\text{Jim}), \text{príde}(\text{Sarah}), \neg \text{príde}(\text{Jim}), \text{príde}(\text{Kim}), \neg \text{príde}(\text{Sarah}),$
 $\text{príde}(\text{Kim}), ((\neg \text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah}))$

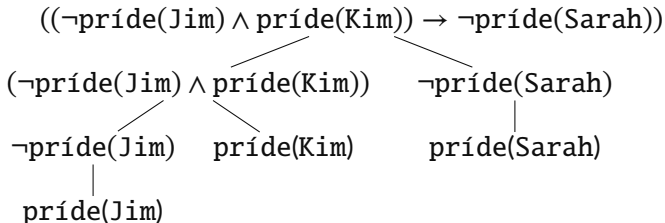
ale

- môže obsahovať „zbytočné“ prvky;
- nie je jasné ktoré z predchádzajúcich formúl sa *bezprostredne* použijú na vytvorenie nasledujúcej formuly.

Akou „dátovou štruktúrou“ vieme vyjadriť konštrukciu formuly bez týchto problémov?

Vytvárajúci strom

Konštrukciu si ale vieme predstaviť ako *strom*:



Takéto stromy voláme *vytvárajúce*.

Ako ich *presne* a *všeobecne* popíšeme — zdefinujeme?

Definícia 2.14

Vytvárajúci strom T pre formulu X je binárny strom obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X ,
- ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu A ,
- ak vrchol obsahuje formulu $(A \ b \ B)$, kde b je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu A a pravé formulu B ,
- vrcholy obsahujúce atómy sú listami.

Syntaktické vzťahy formúl

Uvažujme formulu:

$$((\neg \text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg \text{príde}(\text{Sarah}))$$

- Ako nazveme formuly, z ktorých vznikla?

$\text{príde}(\text{Sarah}), \neg \text{príde}(\text{Jim}), (\neg \text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})), \dots$

- Ako nazveme formuly, z ktorých *bezprostredne/priamo* vznikla?

$$(\neg \text{príde}(\text{Jim}) \wedge \text{príde}(\text{Kim})) \quad \text{a} \quad \neg \text{príde}(\text{Sarah})$$

- Ako tieto pojmy presne zdefinujeme?

Definícia 2.15 (Priama podformula)

Pre všetky formuly A a B :

- Priamou podformulou $\neg A$ je formula A .
- Priamymi podformulami $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú formuly A (ľavá priama podformula) a B (pravá priama podformula).

Definícia 2.16 (Podformula)

Vzťah *byť podformulou* je najmenšia relácia na formulách spĺňajúca pre všetky formuly X , Y a Z :

- X je podformulou X .
- Ak X je priamou podformulou Y , tak X je podformulou Y .
- Ak X je podformulou Y a Y je podformulou Z ,
tak X je podformulou Z .

Formula X je *vlastnou podformulou* formuly Y práve vtedy, keď X je podformulou Y a $X \neq Y$.

Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Miera zložitosti/veľkosti formuly:

- Jednoduchá: dĺžka, teda počet symbolov
 - Počíta aj pomocné symboly.
 - Nič nemá mieru 0, ani atómy.
- Lepšia: počet netriviálnych krokov pri konštrukcii formuly
 - pridanie negácie,
 - spojenie formúl spojkou.

Túto lepšiu mieru nazývame *stupeň formuly*.

Príklad 2.17

Aký je stupeň formuly $((\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg \text{príde}(\text{Kim})) \wedge \neg(\text{príde}(\text{Sarah}) \rightarrow \text{príde}(\text{Jim})))$?

Ako stupeň zdefinujeme?

Podobne ako sme zdefinovali formuly — induktívne:

1. určíme hodnotu stupňa pre atomické formuly,
2. určíme, ako zo stupňa priamych podformúl vypočítame stupeň z nich zloženej formuly.

Stupeň formuly

Definícia 2.18 (Stupeň formuly)

Pre všetky formuly A a B a všetky $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

- Atomická formula je stupňa 0.
- Ak A je formula stupňa n , tak $\neg A$ je stupňa $n + 1$.
- Ak A je formula stupňa n_1 a B je formula stupňa n_2 , tak $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú stupňa $n_1 + n_2 + 1$.

Definícia 2.18 (Stupeň formuly presnejšie a symbolicky)

Stupeň $\deg(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme pre všetky formuly A , $B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

- $\deg(A) = 0$, ak $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$,
- $\deg(\neg A) = \deg(A) + 1$,
- $\deg((A \wedge B)) = \deg((A \vee B)) = \deg((A \rightarrow B)) = \deg(A) + \deg(B) + 1$.

Veta 2.19 (Princíp indukcie na stupeň formuly)

Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne

1. *báza indukcie: každá formula stupňa 0 má vlastnosť P ,*
2. *indukčný krok: pre každú formulu X z predpokladu, že všetky formuly menšieho stupňa ako $\deg(X)$ majú vlastnosť P , vyplýva, že aj X má vlastnosť P ,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).

Výrokovologické spojky

Sémantika výrokovologických formúl

Význam formúl výrokovologickej časti logiky prvého rádu popíšeme podobne ako význam atomických formúl pomocou **štruktúr**.

Definícia štruktúry takmer nemení:

Definícia 2.20

Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Štruktúrou pre jazyk \mathcal{L} nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde D je ľubovoľná **neprázdna** množina nazývaná **doména** štruktúry \mathcal{M} ; i je zobrazenie, nazývané **interpretačná funkcia** štruktúry \mathcal{M} , ktoré

- každému symbolu konštanty c jazyka \mathcal{L} priraduje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka \mathcal{L} s aritou n priraduje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Definícia 2.21

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Reláciu **formula A je pravdivá v štruktúre \mathcal{M}** ($\mathcal{M} \models A$) definujeme **induktívne** pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n všetky konštanty c_1, c_2, \dots, c_n , a všetky formuly A, B jazyka \mathcal{L} nasledovne:

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \wedge B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \vee B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,

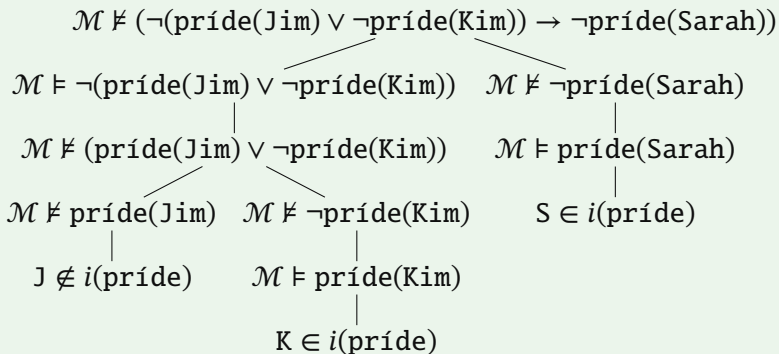
kde **vtt** skrakuje *vtedy a len vtedy* a **$\mathcal{M} \not\models A$** skrakuje *$A$ nie je pravdivá v \mathcal{M}* .

Vyhodnotenie formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie formuly v štruktúre)

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{A, K, J, S\}$,
 $i(\text{Kim}) = K$, $i(\text{Jim}) = J$, $i(\text{Sarah}) = S$, $i(\text{príde}) = \{K, S\}$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor
(od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):



Hľadanie štruktúry

Príklad 2.23 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula

$\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah}))?$

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models (\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim})) \rightarrow \neg\text{príde}(\text{Sarah}))$

vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim}))$ alebo

$\mathcal{M} \models \neg\text{príde}(\text{Sarah})$

vtt $\mathcal{M} \models (\text{príde}(\text{Jim}) \vee \neg\text{príde}(\text{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Sarah})$

vtt $\mathcal{M} \models \text{príde}(\text{Jim})$ alebo $\mathcal{M} \models \neg\text{príde}(\text{Kim})$ alebo

$\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Sarah})$

vtt $\mathcal{M} \models \text{príde}(\text{Jim})$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Kim})$ alebo

$i(\text{Sarah}) \notin i(\text{príde})$.

Stačí teda zabezpečiť, aby $i(\text{Sarah}) \notin i(\text{príde})$.

Výrokovologické spojky

Správnosť a vernosť formalizácie

Správnou formalizáciou výroku je taká formula, ktorá je pravdivá **za tých istých okolností** ako formalizovaný výrok.

Formuly dokážeme vyhodnocovať iba v štruktúrach.

Preto **za tých istých okolností** znamená **v tých istých štruktúrach**.

Vernosť formalizácie

Výrok *Nie je pravda, že Jarka a Karol sú doma* sa dá **správne** formalizovať ako

$$\neg(\text{doma}(\text{Jarka}) \wedge \text{doma}(\text{Karol})),$$

ale rovnako **správna** je aj formalizácia

$$(\neg \text{doma}(\text{Jarka}) \vee \neg \text{doma}(\text{Karol})),$$

lebo je pravdivá v rovnakých štruktúrach.

Pri formalizácii sa snažíme o správnosť, ale zároveň **uprednostňujeme** formalizácie, ktoré **vernejšie** zachytávajú štruktúru výroku.

Zvyšuje to pravdepodobnosť, že sme neurobili chybu, a uľahčuje hľadanie chýb.

Prvá formalizácia je vernejšia ako druhá, a preto ju uprednostníme.

Znalosti na pozadí

Na praktických cvičeniach ste sa stretli so **znalosťami na pozadí** (background knowledge).

Uprednostňujeme ich vyjadrovanie **samostatnými formulami**.

Rovnaké dôvody ako pre vernosť.

Niektoré tvrdenia **vyznievajú** silnejšie, ako naozaj sú:

- Prílohou sú *bud' zemiaky alebo šalát*.
Znie ako exkluzívna disjunkcia.
- *Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %*.
Znie mnohým ako ekvivalencia.

Skutočný logický dôsledok tvrdenia **nemôžeme poprieť** dodatkami bez sporu s pôvodným tvrdením.

- Keď k tvrdeniu *Karol a Jarka sú doma* dodáme *Ale Karol nie je doma*, dostaneme sa do sporu. Takže *Karol je doma* je skutočným dôsledkom pôvodného výroku.

Logické dôsledky a konverzačné implikatury

Dôsledok tvrdenia, ktorý **môžeme poprieť** dodatkami bez sporu s pôvodným tvrdením, sa nazýva **konverzačná implikatura** (H. P. Grice). Nie je skutočným logickým dôsledkom pôvodného tvrdenia.

- Prílohou sú buď zemiaky alebo šalát.

Ale môžete si dať aj oboje.

Dodatok popiera exkluzívnosť, ale nie je v spore s tvrdením.

- Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %.

Ale nemusíte mať všetko na 100 %, aby ste prešli.

Dodatok popiera opačnú implikáciu, ale nie je v spore s tvrdením.