Matematika 4 — Logika pre informatikov
Teoretická úloha 8

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **27. apríla 2020 o 12:20** cez odovzdávací formulár pre tu08[1]. **Odovzdávajte**:

- Odkaz na **jeden PDF dokument s právom na komentovanie** nahratý na Google Drive. Dokument musí obsahovať celé riešenie v textovej forme.
- Ak použijete prieskumník štruktúr[4], odkaz na **export** z neho. Export urýchli vyhodnotenie úlohy. **Nenahrádza** však textové riešenie v PDF dokumente, pretože sa nedá komentovať.

Neodovzdávajte: priečinky; dokumenty s riešeniami viacerých úloh.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenia všetkých úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**[2].

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky[3], kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Riešenia niektorých úloh môžete skontrolovať pomocou prieskumníka štruktúr[4].

[1] https://forms.gle/FvjofTvdXmpXAWFT6
[2] https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh
[3] https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf
[4] https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/structure-explorer/

Ak nie je uvedené inak, v každom použitom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu predpokladáme množinu indivíduových premenných $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, w, x, y, z, u_1, v_1, w_1, x_1, y_1, z_1, u_2, v_2, w_2, x_2, y_2, z_2, \dots\}$.

Cvičenie 8.1. (6.1.1) Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu vo vhodnom jazyku v logiky prvého rádu:

1. Evka je doktorandka a má školiteľa.
2. Všetko sú ľudia.
3. Všetci doktorandi sú študenti.
4. Niektorí doktorandi sú aj učiteľmi.
5. Nikto nemôže učiť sám seba.
6. Žiaden profesor nemôže byť doktorand.
7. Niektorí študenti samozrejme nie sú doktorandi.

8. Doktorandi profesora Nového sú cvičiaci buď na Teórii všetkého alebo Úvode do abstrakcie.
9. Učitelia okrem asistentov sú profesori a docenti.
10. Adamov školiteľ musí byť docent alebo profesor v prípade, že je Adam doktorand.
11. Docentka Mladá školí iba takých študentov, ktorí absolvovali s vyznamenaním Kurz pre náročných, ale nie sú doktorandi.
12. Predmet Teória všetkého si nemôžu zapísať tí, čo neabsolvovali ani Kurz pre náročných, ani Úvod do abstrakcie.
13. Ak nejaký kurz učí profesor Nový, tak ide o neobľúbený kurz.
14. Doktorandi profesora Nového cvičiaci Teóriu všetkého sú veľmi bystrí.
15. Ak je nejaký Mladej doktorand bystrý, tak je šťastná.
16. Nový je šťastný, iba ak ho obľubuje aspoň jeden študent.

Cvičenie 8.2. (6.2.1) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\mathsf{Boris}, \mathsf{Etela}, \mathsf{Klára}\}$, $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\mathsf{muž}^1, \mathsf{žena}^1, \mathsf{manželia}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$
\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3\} & & \\
i(\mathsf{Etela}) &= 1 & i(\mathsf{muž}) &= \{2\} \\
i(\mathsf{Klára}) &= 1 & i(\mathsf{žena}) &= \{1\} \\
i(\mathsf{Boris}) &= 3 & i(\mathsf{manželia}) &= \{(1,1), (1,2), (2,1)\}
\end{aligned}
$$

Zistite, či sú nasledujúce formuly pravdivé alebo nepravdivé v štruktúre $\mathcal{M}$. Každú formulu preložte do čo najprirodzenejšieho slovenského tvrdenia.

(A_1) $(\exists x\, \mathsf{žena}(x) \land \exists y\, \mathsf{muž}(y))$

(A_2) $(\forall x\, \mathsf{muž}(x) \lor \exists y\, \mathsf{muž}(y))$

(A_3) $\forall x(\mathsf{žena}(x) \to \neg \mathsf{muž}(x))$

(A_4) $\exists x(\mathsf{žena}(x) \land \mathsf{muž}(x))$

(A_5) $\forall x(\mathsf{žena}(x) \to \mathsf{muž}(x))$

(A_6) $\exists x(\mathsf{žena}(x) \to \mathsf{muž}(x))$

(A_7) $\exists x(\mathsf{žena}(x) \to (\mathsf{žena}(x) \land \mathsf{muž}(x)))$

(A_8) $\exists x(\mathsf{manželia}(x, \mathsf{Klára}) \land (\mathsf{muž}(x) \lor \mathsf{žena}(x)))$

(A_9) $\forall x(\text{manželia}(x, \text{Etela}) \to \text{žena}(x))$

(A_{10}) $\forall x(\text{manželia}(x, \text{Boris}) \to (\text{žena}(x) \land \text{muž}(x)))$

(A_{11}) $\forall x((\text{žena}(x) \land \neg\text{manželia}(x, \text{Klára})) \to \text{manželia}(x, \text{Boris}))$

(A_{12}) $\neg \forall x((\text{muž}(x) \land \neg\text{manželia}(x, \text{Klára})) \to \text{manželia}(x, \text{Etela}))$

(A_{13}) $\exists x((\text{žena}(x) \land \text{manželia}(x, \text{Klára})) \to \text{manželia}(x, \text{Etela}))$

(A_{14}) $\neg \forall x(\text{muž}(x) \lor \text{žena}(x))$

(A_{15}) $\neg \exists y\, \text{manželia}(\text{Boris}, y)$

(A_{16}) $\forall x \forall y(\text{manželia}(x, y) \to \text{manželia}(y, x))$

Cvičenie 8.3. (6.2.2) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Matematika}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{depresivny}^1, \text{lenivy}^1, \text{sikovny}^1, \text{student}^1, \text{uspesny}^1, \text{maRad}^2\}$.

Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby bola modelom teórie tvorenej všetkými nasledujúcimi formulami.

Každú formulu preložte do čo najprirodzenejšieho slovenského tvrdenia.

(A_1) $\forall x(\text{student}(x) \to (\text{sikovny}(x) \lor \text{lenivy}(x)))$

(A_2) $\forall x(\text{sikovny}(x) \to \neg\text{lenivy}(x))$

(A_3) $(\exists x(\text{student}(x) \land \text{lenivy}(x)) \land \exists x(\text{student}(x) \land \neg\text{lenivy}(x)))$

(A_4) $\forall x(\text{student}(x) \to (\text{sikovny}(x) \to \text{maRad}(x, \text{Matematika})))$

(A_5) $\forall x(\text{maRad}(x, \text{Matematika}) \to \text{uspesny}(x))$

(A_6) $(\neg \forall x \neg\text{sikovny}(x) \to \neg \exists x(\neg\text{depresivny}(x) \land \text{uspesny}(x)))$

(A_7) $\neg \forall x(\neg\text{uspesny}(x) \to \neg\text{depresivny}(x))$

Hodnotená časť

Úloha 8.4. (6.2.3) Sformalizujte nasledujúce tvrdenia ako ucelenú teóriu T vo vhodnom jazyku $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu:

1. Poznáme červené ovocie.
2. Jablko je ovocie.
3. Jablká sú červené, zelené, ale aj žlté.
4. Darinka je mandarínka.
5. Mandarínky a pomaranče sú oranžové ovocie.
6. Nič oranžové nie je červené.

7. Žiadne ovocie nie je nezdravé, ibaže by bolo hnilé či plesnivé.
8. Afrika je kontinent a ovocie, ktoré z nej pochádza, považujeme za exotické.
9. Čo nie je americké, to nie je z Kalifornie.
10. Aj Darinka musí odniekiaľ pochádzať.
11. Janko má rád africké ovocie, ak je zelené a americké, iba ak je červené.

Pred uvedením formalizácie zadefinujte použitý jazyk $\mathcal{L}$ a vysvetlite význam jeho symbolov.

Následne:

a) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}_1$ pre $\mathcal{L}$, ktorá bude modelom vašej teórie T.

b) Je za daných okolností *možné*, že Janko má rád Darinku, keď Darinka pochádza z Kalifornie? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

Prémiová časť

Prémiová úloha 8.5. Prosíme o spoluprácu s naším diplomantom Adamom Grundom, tých z vás, ktorých oslovil mailom. (Ostatných poprosíme o spoluprácu na budúci týždeň.)

Vytvorte zaujímavú (testovú) otázku alebo malú úlohu, ktorá sa týka tohtotýždňovej témy. K otázke pridajte niekoľko odpovedí na výber (správnych aj nesprávnych) a zadajte ich do systému na https://devcourses3.matfyz.sk/, či variácia na malú časť tejto teoretickej úlohy.

Môže to byť otázka, ktorá vám napadla počas prednášky, cvičení, práci na domácej úlohe, alebo odznela na konzultáciách.

Za vytvorenie *originálnej* otázky získate **1 bonusový bod**.

Ďalší 1 bod získate, ak *vecne* okomentujete aspoň 2 otázky kolegov.

Vybrané otázky použijeme v skúškových písomkách.