
Matematika 4 — Logika pre informatikov

Teoretická úloha 7

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v utorok **14. apríla 2020 o 23:59** cez odovzdávací formulár pre tu07a midterm¹.

Odovzdávajte odkaz na **jeden PDF dokument s právom na komentovanie** nahratý na Google Drive. Dokument musí obsahovať čitateľné zobrazenie tabiel.

Neodovzdávajte: priečinky; dokumenty s riešeniami viacerých úloh.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenia všetkých úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**².

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky³, v ktorej nájdete ďalšie úlohy na precvičovanie a vzorové riešenia.

¹ <https://forms.gle/Mx4dyHcpd8upBGgz5>

² https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh

³ <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>

Cvičenie 7.1. (5.3.1) Dokážte, že nasledujúce tablové pravidlá sú korektné:

$$\frac{T(X \rightarrow Y) \quad F Y}{F X} \text{ (MT)} \qquad \frac{T(X \leftrightarrow Y)}{T(X \wedge Y) \mid F(X \vee Y)} \text{ (ECDT)}$$

Cvičenie 7.2. (5.4.1) Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

- c) Existujú označené formuly A^+ typu α a B^+ typu β také, že α_2 pre A^+ je rovnaká ako β_1 pre B^+ .
- d) Nech π je *uzavretá* vetva v ľubovoľnom table. Nech β, β_1, β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Ak sa β nachádza na π , tak aj β_1 a β_2 sa nachádzajú na π .
- g) Nech π je *úplná a uzavretá* vetva v ľubovoľnom table. Nech $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ sú označené formuly podľa niektorej dvojice α pravidiel. Nech β, β_1, β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Ak sa α a β nachádzajú na π , tak aspoň jedna z α_1, β_1 je tiež na π .

Cvičenie 7.3. (5.4.2) Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

- c) Nech S je množina formúl a X je formula. Nech \mathcal{T} je ľubovoľné tablo pre množinu označených formúl $\{T A \mid A \in S\} \cup \{F X\}$. Ak je v \mathcal{T} niektorá vetva úplná otvorená a iná uzavretá, tak X je nezávislá od S .

Hodnotená časť

Úloha 7.4. (tu07, 2 body, 5.3.1) Pre každú dvojicu výrokovologických formúl A a B v jazyku \mathcal{L} zadefinujeme $(A \leftrightarrow B)$ ako skratku za formulu $(A \wedge \neg B)$.

Sformulujte tablové pravidlá pre označené formuly $\mathbf{T}(A \leftrightarrow B)$ a $\mathbf{F}(A \leftrightarrow B)$ podobné pravidlám α a β pre základné výrokovologické spojky.

Dokážte, že tieto pravidlá sú korektné.

Úloha 7.5. (midterm, 5 bodov, 2.2.6) Sformalizujte nasledovné skutočnosti do teórie T tak, aby T bola splniteľná. Formalizujte tak, aby každý konkrétny objekt, ktorý sa spomína, bol označený individuovou konštantou a aby všetky vlastnosti a vzťahy boli vyjadrené samostatným predikátovým symbolom:

1. Peter si obliekol nohavice a buď tričko alebo košeľu, nie však oboje. Pred odchodom si ešte zobral aj klobúk.
2. Vieme, že tričko nosí len k džínsovým nohaviciam. Tiež vieme, že džínsy si určite neobliekol, ak má klobúk.
3. Do práce Peter tiež chodí iba v džínсах.
4. Ak má Peter rande s Marikou, určite si vzal červenú alebo zelenú košeľu.
5. S Katkou má rande, len ak si zobral si zelenú.
6. Ak nemá rande (ani s jednou), obliekol si tričko.

Ďalej je vaša úlohou:

- a) Splniteľnosť T dokážte nájdením štruktúry \mathcal{M}_1 takej, že $\mathcal{M}_1 \models T$.
- b) Je za daných okolností *možné*, že Peter pôjde do práce? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou \mathcal{M}_2 . Ak nie, dokážte, že taká štruktúra \mathcal{M}_2 neexistuje.

Úloha 7.6. (midterm, 5 bodov, 5.3.5, 5.2.3) Detektívi Miller a Skillová riešia prípad bankovej lúpeže. Partia lupičov v seffe vylomila aj bezpečnostné schránky a nie je úplne jasné, čo z nich ukradli, pretože klienti si nespomínajú alebo nechcú spomenúť, čo v nich mali. Detektívom sa však podarilo zúžiť okruh podozrivých a získať tieto indície:


1. Bloom sa dá nahovoriť iba na takú prácu, pri ktorej ide o drahokamy, a vždy spolupracuje s Yarrom alebo Malloyom.
2. Malloy sa špecializuje výhradne na cenné papiere.
3. Podľa dôveryhodného informátora sa drahokamy nekradnú, ak je v partii Paklúč a nie Ocean.

4. Ak bol medzi lupičmi Yarr, tak v partii nebol Ryan, s ktorým sa Yarr len ťažko znesie, alebo išlo o zlato, kvôli ktorému je Yarr ochotný spolupracovať skoro s hocikým.
5. Ocean zásadne nekradne zlato.
6. Pod prezývkou Paklúč je známy Ryan.
7. Bloomovu tvár zaznamenala bezpečnostná kamera v okolí banky, pri vystupovaní z auta tesne pred lúpežou, a všetci klienti banky potvrdili, že im neukradli cenné papiere.

Pomôžte Skillovej a Millerovi na základe týchto indícií rozhodnúť, či lúpil alebo nelúpil Ryan.

Pri riešení tejto úlohy:

- i. Určte **aké logické problémy** je potrebné vyriešiť, aby ste mohli urobiť požadované rozhodnutie.
- ii. Vyriešte **všetky** logické problémy použitím **tablového** kalkulu rozšíreného o korektné pravidlá z úlohy 5.3.1 v zbierke. Tieto pravidlá použite **všade**, kde je to možné a užitočné z hľadiska veľkosti tabla.
- iii. Zdôvodnite, **ako a prečo** použité tablo či tablá riešia určené logické problémy.
- iv. Vyjadrite **riešenia určených logických problémov**.
- v. Vyvod'te **požadované rozhodnutie**.

 **Pomôcka.** Indície sformalizujeme v jazyku \mathcal{L} s $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{lúpil}^1, \text{cp}^1, \text{drahokamy}^1, \text{zlato}^1\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{lup}, \text{Bloom}, \text{Malloy}, \text{Ocean}, \text{Paklúč}, \text{Ryan}, \text{Yarr}\}$. Konštanta lup označuje množinu ulúpených cenností, ostatné konštanty označujú jednotlivých podozrivých. Zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

| Predikát | Význam |
|-----------------------|------------------------------------|
| $\text{lúpil}(x)$ | x sa zúčastnil predmetnej lúpeže |
| $\text{cp}(x)$ | x obsahuje cenné papiere |
| $\text{drahokamy}(x)$ | x obsahuje drahokamy |
| $\text{zlato}(x)$ | x obsahuje zlato |

Formalizácia indícií je potom nasledovná:

$$(A_1) (\text{lúpil}(\text{Bloom}) \rightarrow (\text{drahokamy}(\text{lup}) \wedge (\text{lúpil}(\text{Yarr}) \vee \text{lúpil}(\text{Malloy}))))$$

$$(A_2) (\text{lúpil}(\text{Malloy}) \rightarrow \text{cp}(\text{lup}))$$

$$(A_3) ((\text{lúpil}(\text{Paklúč}) \wedge \neg \text{lúpil}(\text{Ocean})) \rightarrow \neg \text{drahokamy}(\text{lup}))$$

$(A_4) \text{ (lúpil(Yarr) } \rightarrow (\neg \text{lúpil(Ryan)} \vee \text{zlato(lup))})$

$(A_5) \text{ (lúpil(Ocean) } \rightarrow \neg \text{zlato(lup)})$

$(A_6) \text{ (lúpil(Paklúč) } \leftrightarrow \text{lúpil(Ryan)})$

$(A_7) \text{ (lúpil(Bloom) } \wedge \neg \text{cp(lup)})$

Odporúčame vám označiť atomické formuly vhodnými meta premennými, napr. $B = \text{lúpil(Bloom)}$, ktoré potom použijete v tabľách.

Editor tabiel **nepozná** pravidlá z úlohy 5.3.1 v zbierke. Môžete v ňom však vybudovať tablo/tablá použitím štandardných pravidiel a následne ich zjednodušiť použitím pravidiel z úlohy 5.3.1. Odovzdávajte **iba** výsledné zjednodušené tablo/tablá.