Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Matematika (4): Logika pre informatikov

Poznámky z prednášok

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Letný semester 2019/2020
Posledná aktualizácia: 31. marca 2020

Obsah

1. prednáška

Úvod

Atomické formuly

---

0. Úvod

0.1. O logike

Čo je logika

Logika je vedná disciplína, ktorá študuje usudzovanie.

Správne, racionálne usudzovanie je základom vedy a inžinierstva.

Vyžaduje rozoznať správne úsudky z predpokladaných princípov a pozorovania od chybných úvah a špekulácií.

Správnosť úsudkov, zdá sa, nie je iba vec konvencie a dohody.

Logika skúma, *aké* sú zákonitosti správneho usudzovania a *prečo* sú zákonitosťami.

Ako sa v logika študuje usudzovanie

Logika má dva hlavné predmety záujmu:

Jazyk zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

Syntax pravidlá zápisu tvrdení

Sémantika význam tvrdení

Usudzovanie (inferencia) odvodzovanie nových *logických dôsledkov* z doterajších poznatkov Ako vyplýva z jazyka?

Jazyk, poznatky a teórie

Jazyk slúži na vyjadrenie tvrdení, ktoré popisujú informácie — poznatky o svete.

Súbor poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, tvorí *teóriu*.

Príklad 0.1 (Party time!). Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah. Organizujeme párty a P0: chceme na ňu pozvať niekoho z nich. Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

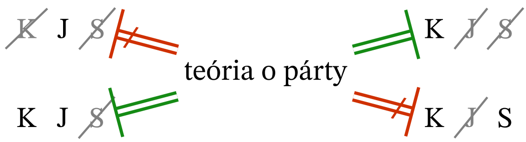
Možné stavy sveta a modely

Teória rozdeľuje *možné stavy sveta* (interpretácie) na:

- $\models$ stavy, v ktorých je pravdivá — *modely* teórie,
- $\not\models$ stavy, v ktorých je nepravdivá.

Tvrdenie aj teória môžu mať viacero modelov, ale aj žiaden.

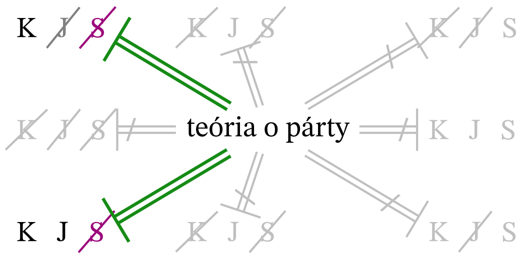
Príklad 0.2. Vymenujme možné stavy prítomnosti Kim, Jima a Sarah na párty. Zistime, v ktorých sú pravdivé jednotlivé tvrdenia našej teórie a celá teória.



Logické dôsledky

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo *všetkých modeloch* teórie.

Príklad 0.3. Logickým dôsledkom teórie P0, P1, P2, P3 je napríklad: *Sarah nepôjde na párty.*



Logické usudzovanie

Vymenovanie všetkých svetov je často nepraktické až nemožné.

Logické dôsledky ale môžeme *odvodzovať usudzovaním* (*inferovať*).

Pri odvodení vychádzame z *premís* (*predpokladov*) a postupnosťou *správnych úsudkov* dospievame k *záverom*.

Príklad 0.4. Vieme, že ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah (P1), a že ak pôjde Jim, tak pôjde Kim (P2).

1. Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.
2. Podľa 1. a P2 pôjde aj Kim.
3. Podľa 2. a P1 nepôjde Sarah.

Teda podľa uvedenej úvahy: Ak na párty pôjde Jim, tak nepôjde Sarah.

Dedukcia

Úsudok je správny (*korektný*) vtedy, keď *vždy*, keď sú pravdivé jeho premisy, je pravdivý aj jeho záver.

Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver je logickým dôsledkom premís a odvodenie je jeho *dôkazom* z premís.

Dedukcia je usudzovanie, pri ktorom sa používajú iba správne úsudky.

Logika študuje dedukciu, ale aj niektoré nededuktívne úsudky, ktoré sú *vo všeobecnosti* nesprávne, ale sú správne v *špeciálnych* prípadoch alebo sú *užitočné*:

- indukcia — zovšeobecnenie;
- abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov;

- usudzovanie na základe analógie (podobnosti).

Kontrapríklad

Ak úsudok nie je správny, vieme nájsť *kontrapríklad*.
Stav sveta, v ktorom sú predpoklady pravdivé, ale záver je nepravdivý.

Príklad 0.5. Nesprávny úsudok: Ak platia tvrdenia teórie o party, na party príde Jim.

Kontrapríklad: Stav, kedy príde Kim, nepríde Jim, nepríde Sarah.
Teória je pravdivá, výrok „na party príde Jim" nie je pravdivý.

Ťažkosti s prirodzeným jazykom

Prirodzený jazyk je problematický:

- Viacznačné slová: Milo *je* v posluchárni A.
- Viacznačné tvrdenia: Videl som dievča v sále *s ďalekohľadom*.
- Ťažko syntakticky analyzovateľné tvrdenia:

  > Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtretinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe veci, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; ...
  >
  > — *Zákon č. 182/1993 Z. z. SR v znení neskorších predpisov*

- Výnimky a obraty so špeciálnym ustáleným významom: *Ni*kto *nie* je dokonalý.

Formálne jazyky

Problémy prirodzených jazykov sa obchádzajú použitím umelých *formálnych* jazykov.

- Presne definovaná, zjednodušená syntax(pravidlá zápisu tvrdení) a sémantika (význam).

- Niekoľko formálnych jazykov už poznáte: aritmetika, jazyky fyzikálnych a chemických vzorcov, programovacie jazyky, …
- Problémy z reálneho sveta opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv *formalizovať*, a potom naň môžeme použiť logický aparát.
- Formalizácia vyžaduje cvik, trocha veda, trocha umenie.

Formalizácia poznatkov

S formalizáciou ste sa už stretli — napríklad pri riešení slovných úloh:

Karol je trikrát starší ako Mária.
Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov. $\rightsquigarrow$
Koľko rokov majú Karol a Mária?

$$k = 3 \cdot m$$
$$k + m = 12$$

Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky.

Príklad 0.6. Sformalizujme náš párty príklad:

P0: Niekto z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Logika prvého rádu

Jazyk logiky prvého rádu (FOL) je jeden zo základných formálnych jazykov, ktorým sa logika zaoberá.

Do dnešnej podoby sa vyvinul na koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia — Gottlob Frege, Guiseppe Peano, Charles Sanders Peirce.

Výrokové spojky + *kvantifikátory* $\forall$ a $\exists$.

Dá sa v ňom vyjadriť veľa zaujímavých tvrdení, bežne sa používa v matematike.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ldots$$

Logika prvého rádu a informatika

Informatika sa vyvinula z logiky (John von Neumann, Alan Turing, Alonzo Church, …)

Prvky logiky prvého rádu obsahuje väčšina *programovacích jazykov*:

- `all(x > m for x in arr)`,
- `select T1.x, T2.y from T1 inner join T2 on T1.z = T2.z where T1.z > 25`,

niektoré (Prolog) sú priamo podmnožinou FOL.

Vo FOL sa dá *presne špecifikovať*, čo má program robiť, *popísať*, čo robí, a *dokázať*, že robí to, čo bolo špecifikované.

Vo *výpočtovej logike* a umelej inteligencii sa FOL používa na riešenie rôznych ťažkých problémov (plánovanie, rozvrh, hľadanie a overovanie dôkazov matematických tvrdení,…) simulovaním usudzovania.

Kalkuly — formalizácia usudzovania

Pre mnohé logické jazyky sú známe *kalkuly* — množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú

korektné — odvodzujú iba logické dôsledky

úplné — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky

Kalkuly sú bežné v matematike

- na počítanie s číslami, zlomkami (násobilka, aritmetika),
- riešenie lineárnych rovníc (kalkul lineárnej algebry),
- derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc (kalkul matematickej analýzy)

…

Sú korektné, ale nie vždy úplné.

Poznáte už aj jeden logický kalkul — ekvivalentné úpravy.

0.2. O tomto kurze

Čím sa budeme zaoberať v tomto kurze

Teoreticky
- Jazykmi logiky prvého rádu (FOL), jeho syntaxou a sémantikou
- Správnymi úsudkami v ňom a dôvodmi, prečo sú správne
- Korektnosťou a úplnosťou logických kalkulov
- Automatizáciou usudzovania

Prakticky
- Vyjadrovaním problémov vo FOL
- Automatizovaním riešenia problémov
- Manipuláciou symbolických stromových štruktúr (výrazov — formúl a termov)
- Programovaním vlastných jednoduchých automatických dokazovačov

Filozoficky
- Zamýšľanými a nezamýšľanými významami tvrdení
- Obmedzeniami vyjadrovania a usudzovania

Prístup k logike na tomto predmete

Stredoškolský prístup príliš *neoddeľuje jazyk* výrokov od jeho *významu* a vlastne ani jednu stránku *nedefinuje jasne*.

V tomto kurze sa budeme snažiť byť *presní*.

▶ *Zdanlivo* budeme o jednoduchých veciach hovoriť zložito

Pojmy z logiky budeme *definovať matematicky*

▶ ako množiny, postupnosti, funkcie, atď., ⇠ Matematika (1), (3)

na praktických cvičeniach aj *programami*

▶ ako reťazce, slovníky, triedy a metódy. ⇠ Programovanie (1), (2)

Budeme sa pokúšať *dokazovať* ich vlastnosti.

Budeme teda hovoriť *o formálnej logike* pomocou matematiky, ktorá je ale sama postavená na *logike v prirodzenom jazyku* — *meta* matematika logiky, matematika ***o*** logike.

Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4

Aktívne učenie

Na cvičeniach budeme používať techniku nazývanú *aktívne učenie*:

- Riešenie zadaných problémov v skupinkách.
- Cvičiaci budú s vami *konzultovať* postup a riešenia.
- Na tabuľu sa budú úlohy riešiť len výnimočne.
- Budete mať k dispozícii materiály z prednášok a zbierku s ukážkovými riešeniami a ďalšími úlohami.

Prečo?

- Samostatnou snahou o riešenie sa *naučíte viac a hlbšie* než pozorovaním, ako riešia iní.
- V praxi vám nik neukáže vzorové riešenie problémov.

Aktívne učenie

Problémy:

- Bude to mierne frustrujúce, budete neistí.
- Preto budete mať *pocit*, že ste sa nenaučili veľa.
- Je to *normálne*, ale *nebude to pravda*!

Čo s tým?

- Pýtajte sa!
- Príďite na konzultácie (termín oznámime na prvých cvičeniach).

1. Atomické formuly

Jazyky logiky prvého rádu

Logika prvého rádu je trieda (rodina) formálnych jazykov.
Zdieľajú:

- časti abecedy — *logické symboly* (spojky, kvantifikátory)
- pravidlá tvorby *formúl* (slov)

Líšia sa v *mimologických symboloch* — časť abecedy, pomocou ktorej sa tvoria najjednoduchšie — *atomické formuly* (*atómy*).

Atomické formuly a výroky v prirodzenom jazyku

Atomické formuly logiky prvého rádu zodpovedajú *jednoduchým vetám* o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch a rovnosti *pomenovaných* objektov.

Príklady 1.1.

- ✅ Milo beží.
- ✅ Jarka vidí Mila.
- ❌ Milo beží, ale Jarka ho nevidí.
- ❌ Jarka vidí všetkých.
- ✅ Jarka dala Milovi Bobíka v sobotu.
- ❌ Jarka nie je doma.
- ❌ Niekto je doma.
- ✅ Súčet 2 a 2 je 3.
- ✅ Prezidentkou SR je Zuzana Čaputová.

Indivíduové konštanty

Indivíduové konštanty sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré pomenúvajú jednotlivé, pevne zvolené objekty.

Zodpovedajú vlastným menám, jednoznačným pomenovaniam, niekedy zámenám.

Príklady 1.2. Jarka, 2, Zuzana_Čaputová, sobota, π, …

Indivíduové konštanty a objekty

Indivíduová konštanta

- vždy pomenúva skutočný, existujúci objekt (na rozdiel od vlastného mena *Zeus*);
- nikdy nepomenúva viac objektov (na rozdiel od vlastného mena *Jarka*).

Objekt

- môže byť pomenovaný aj viacerými indivíduovými konštantami (napr. Prezidentka_SR a Zuzana_Čaputová);
- nemusí mať žiadne meno.

Predikátové symboly

Predikátové symboly sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré vyjadrujú vlastnosti alebo vzťahy.

Jednoduché vety v slovenčine majú *podmetovú* (*subjekt*) a *prísudkovú* časť (*predikát*):

Jarka	vidí	Mila.
podmet	prísudok	predmet
podmetová časť	prísudková časť	

Do logiky prvého rádu prekladáme takéto tvrdenie pomocou predikátového symbolu vidí, ktorý má dva *argumenty* („podmety“): indivíduové konštanty Jarka a Milo.

Úloha argumentu v predikáte je daná jeho poradím (podobne ako pozičné argumenty funkcií/metód v prog. jazykoch).

Arita predikátového symbolu

Predikátový symbol má pevne určený počet argumentov — *aritu*.

Vždy musí mať práve toľko argumentov, aká je jeho arita.

Dohoda 1.3. Aritu budeme niekedy písať ako horný index symbolu. Napríklad beží^1, vidí^2, dal^4, $<^2$.

Zamýšľaný význam predikátových symbolov

Unárny predikátový symbol (teda s aritou 1) zvyčajne označuje *vlastnosť*, druh, rolu, stav.

Príklady 1.4.

$\mathsf{pes}^1(x)$	x je pes
$\mathsf{čierne}^1(x)$	x je čierne
$\mathsf{beží}^1(x)$	x beží

Binárny, *ternárny*, … predikátový symbol (s aritou 2, 3, …) zvyčajne označuje *vzťah* svojich argumentov.

Príklady 1.5.

$\mathsf{vidí}^2(x, y)$	x vidí y
$\mathsf{dal}^4(x, y, z, t)$	x dal(a/o) objektu y objekt z v čase t

Kategorickosť významu predikátových symbolov

V bežnom jazyku často nie je celkom jasné, či objekt má alebo nemá nejakú vlastnosť — kedy je niekto mladý?

Predikátové symboly predstavujú *kategorické* vlastnosti/vzťahy — pre každý objekt sa dá *jednoznačne rozhodnúť*, či má alebo nemá túto vlastnosť/vzťah s iným objektom či inými objektmi.

Význam predikátového symbolu preto často zodpovedá rovnakému slovenskému predikátu iba približne: predikát $\mathsf{mladší}^2$ môže označovať vzťah „x je mladší ako y" presne; predikát $\mathsf{mladý}^1$ zodpovedá vlastnosti „x je mladý" iba približne.

Nekategorickými vlastnosťami sa zaoberajú fuzzy logiky. Predikáty v nich zachytávajú význam týchto vlastností presnejšie.

Atomické formuly

Atomické formuly majú tvar

$$predikát^k(argument_1, argument_2, \dots, argument_k),$$

alebo

$$argument_1 \doteq argument_2,$$

pričom k je arita *predikát*u, a $argument_1$, …, $argument_k$ sú (nateraz) indivíduové konštanty.

Atomická formula zodpovedá (jednoduchému) *výroku* v slovenčine, t.j. tvrdeniu, ktorého *pravdivostná hodnota* (pravda alebo nepravda) sa dá jednoznačne určiť, lebo predikát označuje kategorickú vlastnosť/vzťah a indivíduové konštanty jednoznačne označujú objekty.

Formalizácia jednoduchých výrokov

Formalizácia je preklad výrokov z prirodzeného jazyka do formálneho logického jazyka.

Nie je to jednoznačný proces.

Predpísaný prvorádový jazyk (konštanty a predikáty) sa snažíme využiť čo najlepšie.

Príklad 1.6. Sformalizujme v jazyku s konštantami Evka, Jarka a Milo a predikátom vyšší^2 výroky:

A_1: Jarka je vyššia ako Milo. $\rightsquigarrow$ $\text{vyšší}^2(\text{Jarka}, \text{Milo})$

A_2: Evka je nižšia ako Milo. $\rightsquigarrow$ $\text{vyšší}^2(\text{Milo}, \text{Evka})$

Zanedbávame nepodstatné detaily — pomocné slovesá, predložky, skloňovanie, rod, …: $\text{vyšší}^2(x, y)$ — x je vyšší/vyššia/vyššie ako y.

Návrh jazyka pri formalizácii

Formalizácia spojená s návrhom vlastného jazyka je *iteratívna*: Postupne zisťujeme, aké predikáty a konštanty potrebujeme, upravujeme predchádzajúce formalizácie.

Príklady 1.7. A_1: Jarka dala Milovi Bobíka.

$\rightsquigarrow$ $\cancel{\text{dalaMiloviBobíka}^1(\text{Jarka})}$ $\cancel{\text{dalBobíka}^2(\text{Jarka}, \text{Milo})}$ $\text{dal}^3(\text{Jarka}, \text{Milo}, \text{Bobík})$

A_2: Evka dostala Bobíka od Mila.

$\rightsquigarrow$ $\cancel{\text{dalBobíka}^2(\text{Milo}, \text{Evka})}$ $\text{dal}^3(\text{Milo}, \text{Evka}, \text{Bobík})$

A_3: Evka dala Jarke Cilku.

$\rightsquigarrow$ $\cancel{\text{dalCilku}^2(\text{Evka}, \text{Jarka})}$ $\text{dal}^3(\text{Evka}, \text{Jarka}, \text{Cilka})$

A_4: Bobík je pes.

$\rightsquigarrow$ $\text{pes}^1(\text{Bobík})$

Návrh jazyka pri formalizácii

Minimalizujeme počet predikátov, uprednostňujeme flexibilnejšie, viacúčelovejšie (dal^3 pred dalBobíka^2 a dalCilku^2).

- Expresívnejší jazyk (vyjadrí viac).
- Zrejmejšie logické vzťahy výrokov.

Podobné normalizácii databázových schém.

1.1. Syntax atomických formúl

Presné definície

Cieľom logiky je uvažovať o jazyku, výrokoch, vyplývaní, dôkazoch.

Výpočtová logika sa snaží automaticky riešiť konkrétne problémy vyjadrené v logických jazykoch.

Spoľahlivé a overiteľné úvahy a výpočty vyžadujú *presnú* dohodu na tom, o čom hovoríme — *definíciu* logických pojmov (jazyk, výrok, pravdivosť, …).

Pojmy (napr. *atomická formula*) môžeme zadefinovať napríklad

- *matematicky* ako množiny, n-tice, relácie, funkcie, postupnosti, …;
- *informaticky* tým, že ich *naprogramujeme*, napr. zadefinujeme triedu `AtomickaFormula` v Pythone.

Matematický jazyk je univerzálnejší ako programovací — abstraktnejší, menej nie až tak podstatných detailov.

Syntax atomických formúl logiky prvého rádu

Najprv sa musíme dohodnúť na tom, aká je *syntax* atomických formúl logiky prvého rádu:

- z čoho sa skladajú,
- čím vlastne sú,
- akú majú štruktúru.

Symboly jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Z čoho sa skladajú atomické formuly?

Definícia 1.8. *Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu* sú mimologické, logické a pomocné symboly, pričom:

Mimologickými symbolmi sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Jediným *logickým symbolom* je $\doteq$ (symbol rovnosti).

Pomocnými symbolmi sú **(**, **)** a **,** (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú disjunktné. Pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ani $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^{+}$.

Abeceda jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky by ste povedali, že *abecedou* jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu je $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, (,), ,\}$.

V logike sa väčšinou pojem *abeceda* nepoužíva, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy* symbolov.

Namiesto *abeceda jazyka $\mathcal{L}$* hovoríme *množina všetkých symbolov jazyka $\mathcal{L}$* alebo len *symboly jazyka $\mathcal{L}$*.

Na zápise množiny $\Sigma_{\mathcal{L}}$ však ľahko vidíme, čím sa rôzne jazyky atomických formúl logiky prvého rádu od seba líšia a čo majú spoločné.

Príklady symbolov jazykov atomických formúl logiky prvého rádu

Príklad 1.9. Príklad o deťoch a zvieratkách sme sformalizovali v jazyku $\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}$, v ktorom:

- $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} = \{\text{Bobík}, \text{Cilka}, \text{Evka}, \text{Jarka}, \text{Milo}\}$,
- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} = \{\text{dal}, \text{pes}\}$,
- $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\text{dal}) = 3$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\text{pes}) = 1$.

Príklad 1.10. Príklad o návštevníkoch party by sme mohli sformalizovať v jazyku $\mathcal{L}_{\mathrm{party}}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathrm{party}}} = \{\text{Kim}, \text{Jim}, \text{Sarah}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathrm{party}}} = \{\text{príde}\}$ a $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{party}}}(\text{príde}) = 1$.

Označenia symbolov

Keď budeme hovoriť o *ľubovoľnom* jazyku $\mathcal{L}$, často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme *meta premenné*: premenné v (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť *o* (po grécky *meta*) týchto symboloch.

Dohoda 1.11. Indivíduové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými a, b, c, d s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými P, Q, R s prípadnými dolnými indexmi.

Atomické formuly jazyka

Čo sú atomické formuly?

Definícia 1.12. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol s aritou n a $c_1, \dots, c_n$ sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Slová jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky by ste povedali, že jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu nad abecedou $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, (,), ,\}$ je množina slov

$$\{ c_1 \doteq c_2 \mid c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, c_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \} \\ \cup \{ P(c_1, \dots, c_n) \mid P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathrm{ar}_{\mathcal{L}}(P) = n, c_1 \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \}.$$

V logike sa jazyk takto nedefinuje, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy slov*. Navyše tieto slová zodpovedajú slovenským *vetám*.

Príklady atómov jazyka

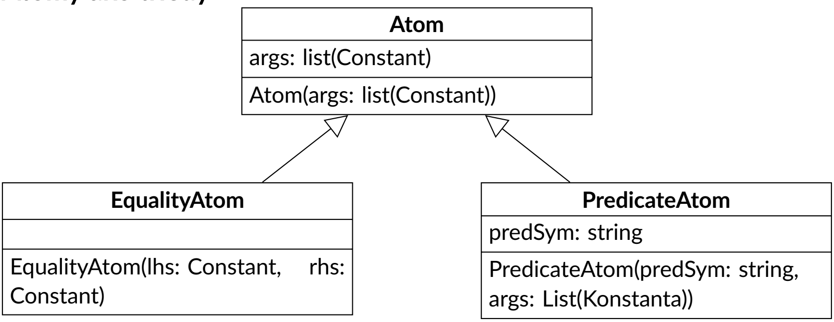
Príklad 1.13. V jazyku $\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} = \{\mathsf{Bobík}, \mathsf{Cilka}, \mathsf{Evka}, \mathsf{Jarka}, \mathsf{Milo}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} = \{\mathsf{dal}, \mathsf{pes}\}$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\mathsf{dal}) = 3$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\mathsf{pes}) = 1$, sú *okrem iných* rovnostné atómy:

$$\mathsf{Bobík} \doteq \mathsf{Bobík} \qquad \mathsf{Cilka} \doteq \mathsf{Bobík}$$
$$\mathsf{Evka} \doteq \mathsf{Jarka} \qquad \mathsf{Bobík} \doteq \mathsf{Cilka}$$

a predikátové atómy:

$$\mathsf{pes}(\mathsf{Cilka}) \qquad \mathsf{dal}(\mathsf{Cilka}, \mathsf{Milo}, \mathsf{Bobík}) \qquad \mathsf{dal}(\mathsf{Jarka}, \mathsf{Evka}, \mathsf{Milo}).$$

Atómy ako triedy



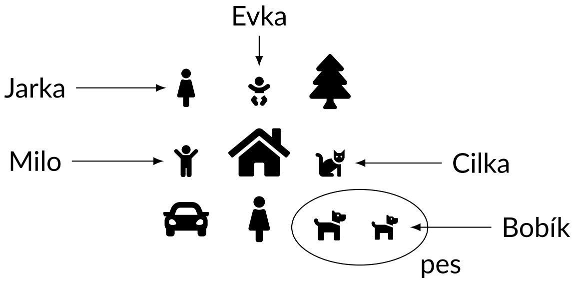
1.2. Sémantika atomických formúl

Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako zistíme, či je atomická formula $\mathsf{pes}(\mathsf{Bobík})$ pravdivá v nejakej situácii (napríklad u babky Evky, Jarky a Mila na dedine)?

Pozrieme sa na túto situáciu a zistíme:

1. aký objekt b pomenúva konštanta $\mathsf{Bobík}$;
2. akú vlastnosť p označuje predikát pes;
3. či objekt b má vlastnosť p.



Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako môžeme tento postup matematicky alebo informaticky modelovať? Potrebujeme:

- matematický/informatický model situácie (stavu vybranej časti sveta),
- postup na jeho použitie pri vyhodnocovaní pravdivosti formúl.

Matematický model stavu sveta

Ako môžeme matematicky popísať nejakú situáciu tak, aby sme pomocou tohto popisu mohli vyhodnocovať atomické formuly v nejakom jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$?

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
- ▶ množina všetkých objektov — *doména*;
- pre každú konštantu c z jazyka $\mathcal{L}$, ktorý objekt z domény c pomenúva,
- pre každý unárny predikát P z jazyka $\mathcal{L}$, ktoré objekty z domény majú vlastnosť označenú predikátom P,
- ▶ tvoria *podmnožinu* domény;
- pre každý n-árny predikát R z jazyka $\mathcal{L}$, $n > 1$, ktoré n-tice objektov z domény sú vo vzťahu ozn. pred. R,

▶ tvoria *n-árnu reláciu* na doméne;

- priradenie objektov ku konštantám a množín/relácií k predikátom musí byť jednoznačné

▶ *interpretačná funkcia*.

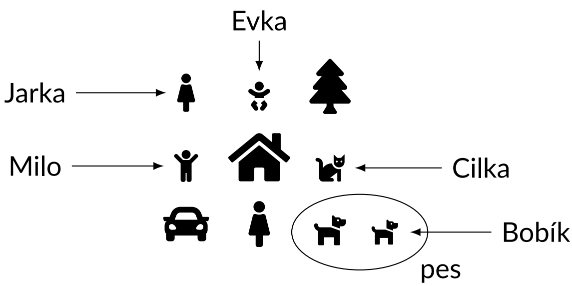
Štruktúra pre jazyk

Definícia 1.14. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu. *Štruktúrou* pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde D je ľubovoľná *neprázdna* množina nazývaná *doména* štruktúry $\mathcal{M}$; i je zobrazenie, nazývané *interpretačná funkcia* štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

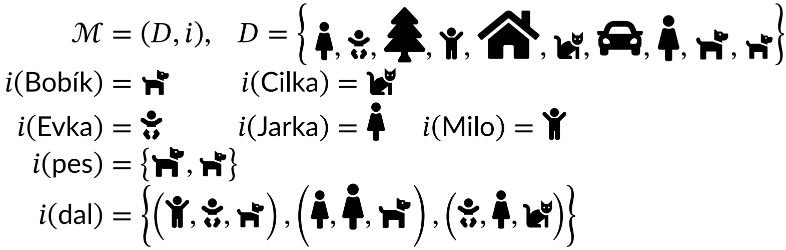
- každému symbolu konštanty c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Dohoda 1.15. Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\ldots$.

Príklad štruktúry



Príklad 1.16.



Štruktúra ako informatický objekt

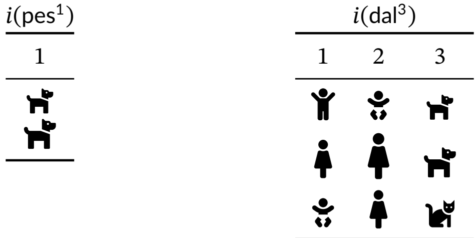
Štruktúru sme definovali pomocou *matematických* objektov.

Aký *informatický* objekt zodpovedá štruktúre?

Databáza:

Predikátové symboly jazyka ~ veľmi zjednodušená schéma DB (arita ~ počet stĺpcov)

Interpretácia predikátových symbolov ~ konkrétne tabuľky s dátami



Štruktúry — upozornenia

Štruktúr pre daný jazyk je *nekonečne veľa*.
Doména štruktúry

- môže mať ľubovoľné prvky;
- nijak *nesúvisí* s intuitívnym významom interpretovaného jazyka;

  Jazyk o deťoch a zvieratkách — číselná doména štruktúry

- môže byť *nekonečná*.

Interpretácia symbolov konštánt:

- každej konštante je priradený objekt domény;

- nie každý objekt domény musí byť priradený nejakej konštante;
- rôznym konštantám môže byť priradený rovnaký objekt.

Interpretácie predikátových symbolov môžu byť *nekonečné*.

Pravdivosť atomickej formuly v štruktúre

Ako zistíme, či je atomická formula pravdivá v štruktúre?

Definícia 1.17. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl jazyka logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm $c_1 \doteq c_2$ jazyka $\mathcal{L}$ je *pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $i(c_1) = i(c_2)$.

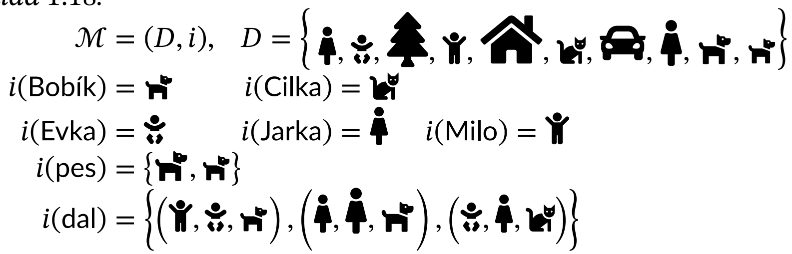
Predikátový atóm $P(c_1, \dots, c_n)$ jazyka $\mathcal{L}$ je *pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$.

Vzťah *atóm* A *je pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ skrátene zapisujeme $\mathcal{M} \models A$. Hovoríme aj, že $\mathcal{M}$ je *modelom* A.

Vzťah *atóm* A *nie je pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ zapisujeme $\mathcal{M} \not\models A$. Hovoríme aj, že A *je nepravdivý* v $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}$ *nie je modelom* A.

Príklad určenia pravdivosti atómu v štruktúre

Príklad 1.18.



Atóm pes(Bobík) *je pravdivý* v štruktúre $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models$ pes(Bobík), lebo objekt i(Bobík) = je prvkom množiny  = i(pes).

Atóm dal(Evka, Jarka, Cilka) *je pravdivý* v $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models$ dal(Evka, Jarka, Cilka), lebo (i(Evka), i(Jarka), i(Cilka)) =  $\in i$(dal).

Atóm Cilka $\doteq$ Bobík *nie je pravdivý* v $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \not\models$ Cilka $\doteq$ Bobík, lebo i(Cilka) =  $\neq$  = i(Bobík).

2. prednáška

Výrokovologické spojky

Rekapitulácia

Minulý týždeň sme sa naučili:

- Čo sú symboly jazyka logiky prvého rádu.
- Čo sú atomické formuly.
- Čo sú štruktúry.
  - Konštanty označujú objekty.
  - Predikáty označujú vzťahy a vlastnosti.
- Kedy sú atomické formuly pravdivé.
- Jazyk atomických formúl je oproti slovenčine veľmi slabý.
  - Môžu byť pravdivé vo veľmi čudných štruktúrach.
  - Veľa sme vyjadrovali približne.

2. Výrokovologické spojky

Výrokovologické spojky

Atomické formuly logiky prvého rádu môžeme spájať do zložitejších tvrdení *výrokovologickými spojkami*.

- Zodpovedajú spojkám v slovenčine, ktorými vytvárame súvetia.
- Významom spojky je vždy *boolovská funkcia*, teda funkcia na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov. Pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí *iba* od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

Príklad 2.1. Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, …

Nevýrokovologické spojky

Negatívny príklad
Spojka *pretože* nie je výrokovologická.

Dôkaz. Uvažujme o výroku *Karol je doma, pretože Jarka je v škole*.

Je pravdivý v situácii: Je 18:00 a Karol je doma, aby nakŕmil psa Bobíka, ktorý by inak bol hladný až do 19:30, keď sa Jarka vráti zo školy, kde má cvičenia od 17:20 do 18:50.

Nie je pravdivý v situácii: Jarka išla ráno do školy, ale Karol ostal doma, lebo je chorý. S Jarkinou prítomnosťou v škole to nesúvisí.

V oboch situáciách sú výroky *Karol je doma* aj *Jarka je v škole* pravdivé, ale pravdivostná hodnota zloženého výroku je rôzna. *Nezávisí* iba od pravdivostných hodnôt podvýrokov (ale od existencie vzťahu *príčina-následok* medzi nimi).

Spojka *pretože* teda nie je *funkciou* na pravdivostných hodnotách. □

2.1. Boolovské spojky

Negácia

Negácia ¬ je *unárna* spojka — má jeden argument, formulu.

Zodpovedá výrazom *nie*, *nie je pravda, že* …, predpone *ne*-.

Ľubovoľne vnárateľná.

Formula *vytvorená* negáciou sa *nezátvorkuje*.

Okolo argumentu negácie *nepridávame* zátvorky, ale môže ich mať on sám, ak to jeho štruktúra vyžaduje.

Príklad 2.2.

$\neg\mathsf{doma}(\mathsf{Karol})$	Karol *nie* je doma.
$\neg\mathsf{Jarka} \doteq \mathsf{Karol}$	Jarka *nie* je Karol.
$\neg\neg\neg\mathsf{poslúcha}(\mathsf{Cilka})$	*Nie* je pravda, že *nie* je pravda, že Cilka *ne*poslúcha.

Konjunkcia

Konjunkcia ∧ je *binárna* spojka.

Zodpovedá spojkám *a*, *aj*, *i*, *tiež*, *ale*, *avšak*, *no*, *hoci*, *ani*, *ba (aj/ani)*, …

Formalizujeme ňou zlučovacie, stupňovacie a odporovacie súvetia:

- Jarka je doma *aj* Karol je doma. (doma(Jarka) ∧ doma(Karol))
- Jarka je v škole, *no* Karol je doma. (v_škole(Jarka) ∧ doma(Karol))
- *Ani* Jarka nie je doma, *ani* Karol tam nie je. (¬doma(Jarka)∧¬doma(Karol))
- *Nielen* Jarka je chorá, *ale aj* Karol je chorý. (chorý(Jarka)∧chorý(Karol))

Zloženú formulu vždy *zátvorkujeme*.

Formalizácia viacnásobných vetných členov konjunkciou

Zlučovacie viacnásobné vetné členy tiež formalizujeme ako konjunkcie:

- *Jarka aj Karol* sú doma. (doma(Jarka) ∧ doma(Karol))
- Karol *sa potkol a spadol*. (potkol_sa(Karol) ∧ spadol(Karol))
- Jarka dostala Bobíka *od mamy a otca*. (dostal(Jarka, Bobík, mama) ∧ dostal(Jarka, Bobík, otec))

Podobne (viacnásobné zlučovacie) prívlastky vlastností:

- Eismann je *ruský špión*. (Rus(Eismann) ∧ špión(Eismann))
- Bobík je *malý čierny psík*. ((malý(Bobík)∧čierny(Bobík))∧pes(Bobík))

Stratené v preklade

Zlučovacie súvetia niekedy vyjadrujú časovú následnosť, ktorá sa pri priamočiarom preklade do logiky prvého rádu *stráca*:

- Jarka a Karol sa stretli *a* išli do kina. (stretli_sa(Jarka, Karol) ∧ (do_kina(Jarka) ∧ do_kina(Karol)))
- Jarka a Karol išli do kina *a* stretli sa. ((do_kina(Jarka)∧do_kina(Karol))∧ stretli_sa(Jarka, Karol))

Disjunkcia

Disjunkcia $\vee$ je binárna spojka, ktorá zodpovedá spojkám *alebo*, *či*, *buď …, alebo …* v *inkluzívnom* význame (môžu nastať aj obe možnosti).

Disjunkciou formalizujeme vylučovacie súvetia:

- Jarka je doma *alebo* Karol je doma. (doma(Jarka) $\vee$ doma(Karol))
- Buď je Karol doma, *alebo* je Jarka v škole. (doma(Karol)$\vee$v_škole(Jarka))

Zloženú formulu vždy *zátvorkujeme*.

Formalizácia viacnásobných vetných členov disjunkciou

Viacnásobné vetné členy s vylučovacou spojkou tiež prekladáme ako disjunkcie:

- Doma je Jarka alebo Karol. (doma(Jarka) $\vee$ doma(Karol))
- Jarka je doma alebo v škole. (doma(Jarka) $\vee$ v_škole(Jarka))
- Jarka dostala Bobíka od mamy alebo otca. (dostal(Jarka, Bobík, mama)$\vee$ dostal(Jarka, Bobík, otec))
- Bobík je čierny či tmavohnedý psík. ((čierny(Bobík)$\vee$tmavohnedý(Bobík))$\wedge$ pes(Bobík))

Exkluzívna disjunkcia

Konštrukcia *buď …, alebo … neznamená* nutne exkluzívnu disjunkciu.

- Bobík a Cilka sa pobili. Buď Bobík pohrýzol Cilku, alebo Cilka poškrabala Bobíka. (Mohlo sa stať jedno aj druhé.)

Niekedy samotné *alebo* znamená exkluzívnu disjunkciu.

- Jarka je doma alebo v škole. (Nemôže byť súčasne na dvoch miestach.)

Exkluzívnu disjunkciu môžeme vyjadriť zložitejšou formulou:((doma(Jarka)$\vee$ v_škole(Jarka)) $\wedge$ $\neg$(doma(Jarka) $\wedge$ v_škole(Jarka))).

Jednoznačnosť rozkladu

Formuly s binárnymi spojkami sú vždy uzátvorkované. Dajú sa jednoznačne rozložiť na podformuly a interpretovať.

Slovenské tvrdenia so spojkami nie sú vždy jednoznačné:

- Karol je doma a Jarka je doma alebo je Bobík šťastný.
  - $\big((\mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \land \mathrm{doma}(\mathrm{Jarka})) \lor \text{šťastný}(\text{Bobík})\big)$
  - $\big(\mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \land (\mathrm{doma}(\mathrm{Jarka}) \lor \text{šťastný}(\text{Bobík}))\big)$
- Karol je doma alebo Jarka je doma a Bobík je šťastný.
  - $\big((\mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \lor \mathrm{doma}(\mathrm{Jarka})) \land \text{šťastný}(\text{Bobík})\big)$
  - $\big(\mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \lor (\mathrm{doma}(\mathrm{Jarka}) \land \text{šťastný}(\text{Bobík}))\big)$

Jednoznačnosť rozkladu v slovenčine

Slovenčina má prostriedky podobné zátvorkám:

- Karol aj Jarka sú (obaja) doma alebo je Bobík šťastný.
  $\big((\mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \land \mathrm{doma}(\mathrm{Jarka})) \lor \text{šťastný}(\text{Bobík})\big)$
- Karol je doma a buď je doma Jarka, alebo je Bobík šťastný. Aj Karol je doma, aj Jarka je doma alebo je Bobík šťastný.
  $\big(\mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \land (\mathrm{doma}(\mathrm{Jarka}) \lor \text{šťastný}(\text{Bobík}))\big)$
- Doma je Karol alebo Jarka a Bobík je šťastný.
  Niekto z dvojice Karol a Jarka je doma a Bobík je šťastný.
  $\big((\mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \lor \mathrm{doma}(\mathrm{Jarka})) \land \text{šťastný}(\text{Bobík})\big)$
- Buď je doma Karol, alebo je doma Jarka a Bobík je šťastný.
  $\big(\mathrm{doma}(\mathrm{Karol}) \lor (\mathrm{doma}(\mathrm{Jarka}) \land \text{šťastný}(\text{Bobík}))\big)$

Príslušnosť výrokov k spojkám vyjadrujú viacnásobný vetný člen (+*obaja*, *niekto z*) a kombinácie spojok *buď* …, *alebo* …; *aj* …, *aj* …; *ani* …, *ani* …; atď.

Oblasť platnosti negácie

Výskyt negácie sa vzťahuje na *najkratšiu nasledujúcu formulu* — *oblasť platnosti* tohto výskytu.

- $((\neg\,\mathsf{doma(Karol)} \land \mathsf{doma(Jarka)}) \lor \mathsf{šťastný(Bobík)})$
- $(\neg\,(\mathsf{doma(Karol)} \land \mathsf{doma(Jarka)}) \lor \mathsf{šťastný(Bobík)})$

Argument negácie je *uzátvorkovaný práve vtedy*, keď je *priamo* vytvorený binárnou spojkou:

✓ $\neg\neg\,(\mathsf{doma(Karol)} \land \mathsf{doma(Jarka)})$

✗ $\neg\,(\neg(\mathsf{doma(Karol)} \land \mathsf{doma(Jarka)}))$

Negácia rovnostného atómu

Rovnosť nie je spojka, preto:

✓ $\neg\,\mathsf{Jarka} \doteq \mathsf{Karol}$ — Jarka *nie* je Karol.

✗ $\neg\,(\mathsf{Jarka} \doteq \mathsf{Karol})$

Zátvorky sú zbytočné, lebo čítanie *„«Nie je pravda, že Jarka» sa rovná Karol“* je nezmyselné:

1. Syntakticky: Negácia sa vzťahuje na formulu. Konštanta nie je formula, rovnosť s oboma argumentmi je.
2. Sémanticky: Negácia je funkcia na pravdivostných hodnotách. Konštanty označujú objekty domény. Objekty nie sú pravdivé ani nepravdivé.

Dohoda 2.3. Formulu $\neg\,\tau \doteq \sigma$ budeme skrátene zapisovať $\tau \not\doteq \sigma$.

2.2. Implikácia

Implikácia

Implikácia $\rightarrow$ je binárna spojka približne zodpovedajúca podmienkovému podraďovaciemu súvetiu *ak …, tak …*.

Vo formule $(A \rightarrow B)$ hovoríme podformule A *antecedent*, a podformule B *konzekvent*,

Formula vytvorená implikáciou je nepravdivá v jedinom prípade: antecedent je pravdivý a konzekvent nepravdivý.

⚠ Tomuto významu nezodpovedajú všetky súvetia *ak …, tak …*. Napr. výrok *ak* by *Sarah prišla, Jim* by *prišiel tiež* je nepravdivý, keď si myslíme, že išli rovnakým autobusom, ale Jim išiel iným a zmeškal ho.

Keď …, potom … má často význam časovej následnosti, ktorý implikácia nepostihuje.

Nutná a postačujúca podmienka

Implikáciu vyjadrujú aj súvetia:

Jim príde, *ak* príde Kim.	Jim príde, *iba ak* príde Kim.

Vedľajšie vety (*príde Kim*) sú *podmienkami* hlavnej vety (*Jim príde*).

Ale je medzi nimi *podstatný rozdiel*:

Jim príde, *ak* príde Kim.	Jim príde, *iba ak* príde Kim.
postačujúca podmienka	*nutná* podmienka

Postačujúca podmienka

Jim príde, *ak* príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, *stačí*, aby prišla Kim.
- Teda, ak príde Kim, tak príde aj Jim.
- Nepravdivé, keď Kim príde, ale Jim *ne*príde.
- Zodpovedá teda (príde(Kim) $\rightarrow$ príde(Jim)).

Vo všeobecnosti:

$$A\text{, ak } B. \qquad \rightsquigarrow \qquad (B \rightarrow A)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, *pokiaľ* príde Kim.

Nutná podmienka

Jim príde, *iba ak* príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, *je nevyhnutné*, aby prišla Kim, ale nemusí to stačiť.
- Teda, ak Jim príde, tak príde aj Kim.
- Nepravdivé, keď Jim príde, ale Kim *ne*príde.
- Zodpovedá teda (príde(Jim) → príde(Kim)).

Vo všeobecnosti:

$$A\text{, iba ak } B. \qquad \rightsquigarrow \qquad (A \rightarrow B)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, *iba pokiaľ* s Kim.
- Jim príde *iba* spolu s Kim.
- Jim *ne*príde *bez* Kim.

Nutná a postačujúca podmienka rukolapne

Určite by sa vám páčilo, keby z pravidiel predmetu vyplývalo:

> Logikou prejdete, *ak* odovzdáte všetky domáce úlohy.

Stačilo by odovzdať úlohy a *nebolo by nutné* urobiť nič iné.

Žiaľ, z našich pravidiel vyplýva:

> Logikou prejdete, *iba ak* odovzdáte všetky domáce úlohy.

Odovzdať úlohy *je nutné*, ale na prejdenie to *nestačí*.

Súvetia formalizované implikáciou

$(A \to B)$ formalizuje (okrem iných) zložené výroky:

- Ak A, tak B.
- Ak A, tak aj B.
- Ak A, B.
- Pokiaľ A, [tak (aj)] B.
- A, iba ak B.
- A, len ak B.
- A nastane iba spolu s B.
- A nenastane bez B.
- B, ak A.
- B, pokiaľ A.

2.3. Ekvivalencia

Ekvivalencia

Ekvivalencia $\leftrightarrow$ vyjadruje, že ňou spojené výroky majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Zodpovedá slovenským výrazom *ak a iba ak*; *vtedy a len vtedy, keď*; *práve vtedy, keď*; *rovnaký … ako …*; *taký … ako …*.

- Jim príde, ak a iba ak príde Kim. (príde(Jim) $\leftrightarrow$ príde(Kim))
- Číslo n je párne práve vtedy, keď n^2 je párne. (párne(n) $\leftrightarrow$ párne(n^2))
- Müller je taký Nemec, ako je Stirlitz Rus. (Nemec(Müller) $\leftrightarrow$ Rus(Stirlitz))

Ekvivalencia

Ekvivalencia $(A \leftrightarrow B)$ zodpovedá tvrdeniu, že A je nutnou aj postačujúcou podmienkou B.

Budeme ju preto považovať za *skratku* za formulu

$$\big((A \to B) \land (B \to A)\big).$$

Ďalšie spojky a vetné konštrukcie

V slovenčine a iných prirodzených aj umelých jazykoch sa dajú tvoriť aj oveľa komplikovanejšie podmienené tvrdenia:

- Karol je doma, ak je Jarka v škole, inak má Jarka obavy.
- Karol je doma, ak je Jarka v škole, inak má Jarka obavy, okrem prípadov, keď je Bobík s ním.

Výrokovologické spojky sa dajú vytvoriť aj pre takéto konštrukcie, ale väčšinou sa to nerobí.

2.4. Syntax výrokovologických formúl

Syntax a sémantika formúl s výrokovologickými spojkami

Podobne ako pri atomických formulách, aj pri formulách s výrokovologickými spojkami potrebujem *zadefinovať* — presne a záväzne — ich *syntax* (skladbu) a *sémantiku* (význam).

Niektoré definície preberieme, iné rozšírime alebo modifikujeme, ďalšie pridáme.

Syntax výrokovologických formúl logiky prvého rádu špecifikuje:

- z čoho sa skladajú,
- čím sú a akú majú štruktúru.

Symboly výrokovologickej časti logiky prvého rádu

Definícia 2.4. *Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu* sú:

mimologické symboly, ktorými sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_\mathcal{L}$;

logické symboly, ktorými sú

- *výrokovologické spojky* $\neg$, $\land$, $\lor$, $\to$ (nazývané, v uvedenom poradí, *symbol negácie*, *symbol konjunkcie*, *symbol disjunkcie*, *symbol implikácie*);
- a *symbol rovnosti* $\doteq$;

pomocné symboly **(**, **)** a **,** (ľavá zátvorka, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ sú disjunktné. Pomocné ani logické symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ ani $\mathcal{P}_\mathcal{L}$. Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}_\mathcal{L}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Atomické formuly

Definícia atomických formúl je takmer rovnaká ako doteraz:

Definícia 2.5. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_\mathcal{L}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol s aritou n a $c_1, \dots, c_n$ sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_\mathcal{L}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_\mathcal{L}$.

Čo sú výrokovologické formuly?

Majme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim}, \mathsf{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{príde}^1\}$.
Čo sú formuly tohto jazyka?

- Samotné atómy, napr. $\mathsf{príde(Sarah)}$.
- Negácie atómov, napr. $\neg\mathsf{príde(Sarah)}$.
- Premenné alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr. $(\neg\mathsf{príde(Kim)} \lor \mathsf{príde(Sarah)})$.
- Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr. $\big(\neg(\mathsf{príde(Kim)} \land \mathsf{príde(Sarah)}) \to (\neg\mathsf{príde(Kim)} \lor \neg\mathsf{príde(Sarah)})\big)$.

Ako to presne a úplne popíšeme?

Čo sú výrokovologické formuly?

Ako presne a úplne popíšeme, čo je formula?
Induktívnou definíciou:

1. Povieme, čo sú základné formuly, ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
   - Podobne ako 0 pri matematickej indukcii.
2. Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.
   - Podobne ako indukčný krok pri matematickej indukcii.
3. Zabezpečíme, že nič iné nie je formulou.

Formuly jazyka výrokovologickej časti logiky prvého rádu

Definícia 2.6. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. *Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ formúl jazyka $\mathcal{L}$* je (3.) *najmenšia* množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je formulou z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ju *negácia* formuly A.

2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ich postupne *konjunkcia*, *disjunkcia* a *implikácia* formúl A a B.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame *formulou* jazyka $\mathcal{L}$.

Dohody · Vytvorenie formuly

Dohoda 2.7. Formuly označujeme meta premennými A, B, C, X, Y, Z, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Dohoda 2.8. Pre každú dvojicu formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ *skratka* za formulu $((A \to B) \land (B \to A))$.

Príklad 2.9. Ako by sme podľa definície 2.6 mohli dokázať, že $\big(\neg\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \to (\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))\big)$ je formula? Teda, ako by sme ju podľa definície 2.6 mohli *vytvoriť*?

Indukcia na konštrukciu formuly

Veta 2.10 (Princíp indukcie na konštrukciu formuly). *Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne*

1. *každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ má vlastnosť P,*

2.1. *ak formula A má vlastnosť P, tak aj $\neg A$ má vlastnosť P,*

2.2. *ak formuly A a B majú vlastnosť P, tak aj každá z formúl $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ má vlastnosť P,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).

Vytvárajúca postupnosť

Definícia 2.11. *Vytvárajúcou postupnosťou* nad jazykom $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu je ľubovoľná konečná postupnosť $A_0, \ldots, A_n$ postupností symbolov, ktorej každý člen

- je atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, alebo

- má tvar $\neg A$, pričom A je niektorý predchádzajúci člen postupnosti, alebo
- má jeden z tvarov $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, kde A a B sú niektoré predchádzajúce členy postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X.

Formula a existencia vytvárajúcej postupnosti

Tvrdenie 2.12. *Postupnosť symbolov A je formulou vtedy a len vtedy, keď existuje vytvárajúca postupnosť pre A.*

Osnova dôkazu. ($\Rightarrow$) *Indukciou na konštrukciu formuly*

($\Leftarrow$) *Indukciou na dĺžku vytvárajúcej postupnosti* □

(Ne)jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Čo keby sme zadefinovali „formuly“ takto?

Definícia „formúl“

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ „formúl“ jazyka $\mathcal{L}$ je (3.) *najmenšia* množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je „formulou“ z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.1. Ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.2. Ak A a B sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $A \wedge B$, $A \vee B$ a $A \to B$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.3. ak A patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov (A) je v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

Každý prvok A množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame „formulou“ jazyka $\mathcal{L}$.

Čo znamená „formula“ (príde(Jim) → príde(Kim) → ¬príde(Sarah))?

Formulu by sme mohli čítať ako A = (príde(Jim) → (príde(Kim) → ¬príde(Sarah))) alebo ako B = ((príde(Jim) → príde(Kim)) → ¬príde(Sarah)).

Čítanie A hovorí, že Sarah nepríde, ak prídu Jim a Kim súčasne. To neplatí v *práve jednej* situácii: keď všetci prídu.

Čítanie B hovorí, že Sarah nepríde, ak alebo nepríde Jim alebo príde Kim. To však neplatí *v aspoň dvoch* rôznych situáciách: keď prídu všetci a keď príde Sarah a Kim, ale nie Jim.

Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Pre našu definíciu formúl platí:

Tvrdenie 2.13 (o jednoznačnosti rozkladu). *Pre každú formulu $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ v jazyku $\mathcal{L}$ platí práve jedna z nasledujúcich možností:*

- *X je atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.*
- *Existuje práve jedna formula $A \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ taká, že $X = \neg A$.*
- *Existujú práve jedna dvojica formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a jedna spojka $b \in \{\land, \lor, \to\}$ také, že $X = (A\ b\ B)$.*

Problémy s vytvárajúcou postupnosťou

Vytvárajúca postupnosť popisuje konštrukciu formuly podľa definície formúl:

príde(Jim), príde(Sarah), ¬príde(Jim), príde(Kim), ¬príde(Sarah), (¬príde(Jim) ∧ príde(Kim)), ((¬príde(Jim) ∧ príde(Kim)) → ¬príde(Sarah))

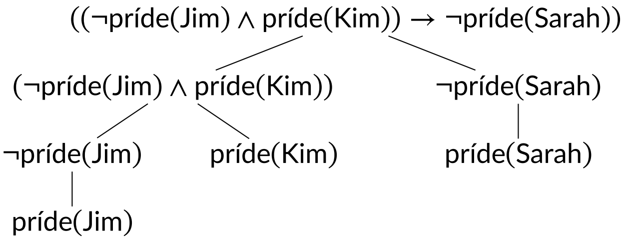
ale

- môže obsahovať „zbytočné“ prvky;
- nie je jasné *ktoré* z predchádzajúcich formúl sa *bezprostredne* použijú na vytvorenie nasledujúcej formuly.

Akou „dátovou štruktúrou“ vieme vyjadriť konštrukciu formuly bez týchto problémov?

Vytvárajúci strom

Konštrukciu si ale vieme predstaviť ako *strom*:



Takéto stromy voláme *vytvárajúce*.

Ako ich *presne* a *všeobecne* popíšeme — zadefinujeme?

Vytvárajúci strom formuly

Definícia 2.14. *Vytvárajúci strom T* pre formulu X je binárny strom obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X,
- ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu A,
- ak vrchol obsahuje formulu $(A\ b\ B)$, kde b je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu A a pravé formulu B,
- vrcholy obsahujúce atómy sú listami.

Syntaktické vzťahy formúl

Uvažujme formulu:

$$((\neg\text{príde}(\text{Jim}) \land \text{príde}(\text{Kim})) \to \neg\text{príde}(\text{Sarah}))$$

- Ako nazveme formuly, z ktorých vznikla?

$$\text{príde}(\text{Sarah}), \neg\text{príde}(\text{Jim}), (\neg\text{príde}(\text{Jim}) \land \text{príde}(\text{Kim})), \ldots$$

- Ako nazveme formuly, z ktorých *bezprostredne*/*priamo* vznikla?

$$(\neg\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \land \mathsf{príde}(\mathsf{Kim})) \quad \text{a} \quad \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})$$

- Ako tieto pojmy presne zadefinujeme?

Priame podformuly

Definícia 2.15 (Priama podformula)**.** Pre všetky formuly A a B:

- Priamou podformulou $\neg A$ je formula A.
- Priamymi podformulami $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú formuly A (*ľavá* priama podformula) a B (*pravá* priama podformula).

Podformuly

Definícia 2.16 (Podformula)**.** Vzťah *byť podformulou* je najmenšia relácia na formulách spĺňajúca pre všetky formuly X, Y a Z:

- X je podformulou X.
- Ak X je priamou podformulou Y, tak X je podformulou Y.
- Ak X je podformulou Y a Y je podformulou Z, tak X je podformulou Z.

Formula X je *vlastnou podformulou* formuly Y práve vtedy, keď X je podformulou Y a $X \neq Y$.

Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Miera zložitosti/veľkosti formuly:

- Jednoduchá: dĺžka, teda počet symbolov
  - Počíta aj pomocné symboly.
  - Nič nemá mieru 0, ani atómy.
- Lepšia: počet netriviálnych krokov pri konštrukcii formuly

- pridanie negácie,
- spojenie formúl spojkou.

Túto lepšiu mieru nazývame *stupeň formuly*.

Príklad 2.17. Aký je stupeň formuly ((príde(Jim)∨¬príde(Kim))∧¬(príde(Sarah) → pr

Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Ako stupeň zadefinujeme?
Podobne ako sme zadefinovali formuly — induktívne:

1. určíme hodnotu stupňa pre atomické formuly,
2. určíme, ako zo stupňa priamych podformúl vypočítame stupeň z nich zloženej formuly.

Stupeň formuly

Definícia 2.18 (Stupeň formuly)**.** Pre všetky formuly A a B a všetky n, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

- Atomická formula je stupňa 0.
- Ak A je formula stupňa n, tak $\neg A$ je stupňa $n + 1$.
- Ak A je formula stupňa n_1 a B je formula stupňa n_2, tak $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \to B)$ sú stupňa $n_1 + n_2 + 1$.

Definícia 2.18 (Stupeň formuly presnejšie a symbolicky)**.** *Stupeň* $\deg(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme pre všetky formuly $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

- $\deg(A) = 0$, ak $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$,
- $\deg(\neg A) = \deg(A) + 1$,
- $\deg((A \wedge B)) = \deg((A \vee B)) = \deg((A \to B)) = \deg(A) + \deg(B) + 1$.

Indukcia na stupeň formuly

Veta 2.19 (Princíp indukcie na stupeň formuly)**.** *Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne*

1. báza indukcie: *každá formula stupňa* 0 *má vlastnosť P,*
2. indukčný krok: *pre každú formulu X z predpokladu, že všetky formuly menšieho stupňa ako* $\deg(X)$ *majú vlastnosť P, vyplýva, že aj X má vlastnosť P,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).

2.5. Sémantika výrokovologických formúl

Sémantika výrokovej logiky

Význam formúl výrokovologickej časti logiky prvého rádu popíšeme podobne ako význam atomických formúl pomocou *štruktúr*.

Štruktúra pre jazyk

Definícia štruktúry takmer nemení:

Definícia 2.20. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. *Štruktúrou* pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde D je ľubovoľná *neprázdna* množina nazývaná *doména* štruktúry $\mathcal{M}$; i je zobrazenie, nazývané *interpretačná funkcia* štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

- každému symbolu konštanty c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Splnenie formuly v štruktúre

Definícia 2.21. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Reláciu *formula A je pravdivá v štruktúre $\mathcal{M}$* ($\mathcal{M} \models A$) definujeme *induktívne* pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n všetky konštanty $c_1, c_2, \ldots, c_n$, a všetky formuly A, B jazyka $\mathcal{L}$ nasledovne:

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$ vtt $\big(i(c_1), \dots, i(c_n)\big) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,

kde *vtt* skracuje *vtedy a len vtedy* a $\mathcal{M} \not\models A$ skracuje A *nie je pravdivá v* $\mathcal{M}$.

Vyhodnotenie formuly

Príklad 2.22 (Vyhodnotenie formuly v štruktúre). Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{\mathsf{A}, \mathsf{K}, \mathsf{J}, \mathsf{S}\}$, $i(\mathsf{Kim}) = \mathsf{K}$, $i(\mathsf{Jim}) = \mathsf{J}$, $i(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{S}$, $i(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{K}, \mathsf{S}\}$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):

- $\mathcal{M} \not\models (\neg(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \lor \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))$
  - $\mathcal{M} \models \neg(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \lor \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}))$
    - $\mathcal{M} \not\models (\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \lor \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}))$
      - $\mathcal{M} \not\models \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})$
        - $\mathsf{J} \notin i(\mathsf{príde})$
      - $\mathcal{M} \not\models \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})$
        - $\mathcal{M} \models \mathsf{príde}(\mathsf{Kim})$
          - $\mathsf{K} \in i(\mathsf{príde})$
  - $\mathcal{M} \not\models \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})$
    - $\mathcal{M} \models \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})$
      - $\mathsf{S} \in i(\mathsf{príde})$

Hľadanie štruktúry

Príklad 2.23 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá). V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula $\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \lor \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})\big)$?

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa defínície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big(\neg(\text{príde}(\text{Jim}) \lor \neg\text{príde}(\text{Kim})) \to \neg\text{príde}(\text{Sarah})\big)$ vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\text{príde}(\text{Jim}) \lor \neg\text{príde}(\text{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \models \neg\text{príde}(\text{Sarah})$ vtt $\mathcal{M} \models (\text{príde}(\text{Jim}) \lor \neg\text{príde}(\text{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Sarah})$ vtt $\mathcal{M} \models \text{príde}(\text{Jim})$ alebo $\mathcal{M} \models \neg\text{príde}(\text{Kim})$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Sarah})$ vtt $\mathcal{M} \models \text{príde}(\text{Jim})$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{príde}(\text{Kim})$ alebo $i(\text{Sarah}) \notin i(\text{príde})$.

Stačí teda zabezpečiť, aby $i(\text{Sarah}) \notin i(\text{príde})$.

2.6. Správnosť a vernosť formalizácie

Skúška správnosti formalizácie

Správnou formalizáciou výroku je taká formula, ktorá je pravdivá *za tých istých okolností* ako formalizovaný výrok.

Formuly dokážeme vyhodnocovať iba v štruktúrach.

Preto *za tých istých okolností* znamená *v tých istých štruktúrach*.

Vernosť formalizácie

Výrok *Nie je pravda, že Jarka a Karol sú doma* sa dá *správne* formalizovať ako

$$\neg(\text{doma}(\text{Jarka}) \land \text{doma}(\text{Karol})),$$

ale rovnako *správna* je aj formalizácia

$$(\neg\text{doma}(\text{Jarka}) \lor \neg\text{doma}(\text{Karol})),$$

lebo je pravdivá v rovnakých štruktúrach.

Pri formalizácii sa snažíme o správnosť, ale zároveň *uprednostňujeme* formalizácie, ktoré *vernejšie* zachytávajú štruktúru výroku.

Zvyšuje to pravdepodobnosť, že sme neurobili chybu, a uľahčuje hľadanie chýb.

Prvá formalizácia je vernejšia ako druhá, a preto ju uprednostníme.

Znalosti na pozadí

Na praktických cvičeniach ste sa stretli so *znalosťami na pozadí* (background knowledge).

Uprednostíňujeme ich vyjadrovanie *samostatnými formulami*.
Rovnaké dôvody ako pre vernosť.

Logické dôsledky a konverzačné implikatúry

Niektoré tvrdenia *vyznievajú* silnejšie, ako naozaj sú:

- Prílohou sú *buď zemiaky alebo šalát*. Znie ako exkluzívna disjunkcia.
- *Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %.* Znie mnohým ako ekvivalencia.

Skutočný logický dôsledok tvrdenia *nemôžeme poprieť* dodatkami bez sporu s pôvodným tvrdením.

- Keď k tvrdeniu *Karol a Jarka sú doma* dodáme *Ale Karol nie je doma*, dostaneme sa do sporu. Takže *Karol je doma* je skutočným dôsledkom pôvodného výroku.

Logické dôsledky a konverzačné implikatúry

Dôsledok tvrdenia, ktorý *môžeme poprieť* dodatkami bez sporu s pôvodným tvrdením, sa nazýva *konverzačná implikatúra* (H. P. Grice). Nie je skutočným logickým dôsledkom pôvodného tvrdenia.

- Prílohou sú buď zemiaky alebo šalát. *Ale môžete si dať aj oboje.* Dodatok popiera exkluzívnosť, ale nie je v spore s tvrdením.
- Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %. *Ale nemusíte mať všetko na 100 %, aby ste prešli.* Dodatok popiera opačnú implikáciu, ale nie je v spore s tvrdením.

3. prednáška

Výrokovologické vyplývanie

Rekapitulácia

Minulý týždeň sme sa naučili:

- čo sú výrokovologické spojky,
- ako zodpovedajú slovenským spojkám,
- čo sú symboly jazyka výrokovologickej časti logiky prvého rádu,
- čo sú formuly tohto jazyka,
- kedy sú formuly pravdivé v danej štruktúre.

3. Výrokovologické vyplývanie

Logické dôsledky

Na 1. prednáške:

- Hovorili sme o tom, že logiku zaujíma, čo a prečo sú zákonitosti správneho usudzovania.
- Správne úsudky odvodzujú z predpokladov (teórií) závery, ktoré sú ich logickými dôsledkami.
- *Logickými dôsledkami* teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo *všetkých modeloch* teórie.

Minulý týždeň sme začali pracovať s *výrokovologickou* časťou logiky prvého rádu.

Čo sú v nej: teórie, modely, logické dôsledky?

3.1. Teórie a ich modely

Príklad teórie

Neformálne je teória súbor tvrdení, ktoré pokladáme za pravdivé.

Zvyčajne popisujú našu predstavu o zákonitostiach platných v nejakej časti sveta a pozorovania o jej stave.

Príklad 3.1. Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah. Organizujeme párty a P0: chceme, aby na ňu prišiel niekto z nich. Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepríde na párty, ak príde Kim.

P2: Jim príde na párty, len ak príde Kim.

P3: Sarah nepríde bez Jima.

Výrokovologické teórie

V logike prvého rádu tvrdenia zapisujeme formulami.

Príklad 3.2.

$$\begin{aligned}T_{\text{party}} = \{&((\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Kim})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Jim}))\}\end{aligned}$$

Definícia 3.3. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Každú množinu formúl jazyka $\mathcal{L}$ budeme nazývať *teóriou* v jazyku $\mathcal{L}$.

Modely teórií

Neformálne je *modelom* teórie stav vybranej časti sveta.

Pre logiku prvého rádu stavy sveta vyjadrujú štruktúry.

Príklad 3.4 (Model teórie o party).

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}, \mathsf{e}, \mathsf{h}\}, i),\\
&i(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k}, \qquad i(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j}, \qquad i(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s},\\
&i(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{e}\};
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models ((\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))\\
&\mathcal{M} \models (\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))\\
&\mathcal{M} \models (\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Kim}))\\
&\mathcal{M} \models (\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Jim}))
\end{aligned}\right\} \mathcal{M} \models T_{\text{party}}$$

Model teórie

Definícia 3.5 (Model)**.** Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$ a $\mathcal{M}$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.

Teória T je *pravdivá* v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \models T$, vtt *každá* formula X z T je pravdivá v $\mathcal{M}$ (teda $\mathcal{M} \models X$).

Hovoríme tiež, že $\mathcal{M}$ je *modelom* T.

Teória T je *nepravdivá* v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \not\models T$, vtt T nie je pravdivá v $\mathcal{M}$.

3.2. Výrokovologické teórie a ohodnotenia

Nekonečne veľa štruktúr

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo všetkých modeloch teórie.

Ale štruktúr je nekonečne veľa a ak má teória jeden model, má aj nekonečne veľa ďalších:

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{M}_1 = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}\}, i_1) & \mathcal{M}_1' = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}, 0\}, i_1') & \mathcal{M}_1'' = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}, 0, 1\}, i_1'') & \cdots\\
i_1(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k} & i_1'(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k} & i_1''(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k} & \\
i_1(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j} & i_1'(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j} & i_1''(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j} & \\
i_1(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s} & i_1'(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s} & i_1''(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s} & \\
i_1(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}\} & i_1'(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}\} & i_1''(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}\} &
\end{array}$$

Rozdiely modelov

V čom sa líšia a čo majú spoločné nasledujúce modely T_{party}?

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}, \mathsf{e}, \mathsf{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathsf{kj}, \mathsf{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k}$	$i_2(\mathsf{Kim}) = 1$	$i_3(\mathsf{Kim}) = \mathsf{kj}$
$i_1(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j}$	$i_2(\mathsf{Jim}) = 2$	$i_3(\mathsf{Jim}) = \mathsf{kj}$
$i_1(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s}$	$i_2(\mathsf{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s}$
$i_1(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{e}\}$	$i_2(\mathsf{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{kj}\}$

Líšia sa doménami aj v interpretáciách.

Líšia sa v pravdivosti rovnostných atómov, napr. $\mathsf{Kim} \doteq \mathsf{Jim}$.

Zhodujú sa na pravdivosti *všetkých predikátových* atómov príde(Kim), príde(Jim), príde(Sarah).

V T_{party} *na ničom inom nezáleží.*

Ohodnotenie atómov

Z každej zo štruktúr

$\mathcal{M}_1 = (\{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{s}, \mathsf{e}, \mathsf{h}\}, i_1)$	$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 3\}, i_2)$	$\mathcal{M}_3 = (\{\mathsf{kj}, \mathsf{s}\}, i_3)$
$i_1(\mathsf{Kim}) = \mathsf{k}$	$i_2(\mathsf{Kim}) = 1$	$i_3(\mathsf{Kim}) = \mathsf{kj}$
$i_1(\mathsf{Jim}) = \mathsf{j}$	$i_2(\mathsf{Jim}) = 2$	$i_3(\mathsf{Jim}) = \mathsf{kj}$
$i_1(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s}$	$i_2(\mathsf{Sarah}) = 3$	$i_3(\mathsf{Sarah}) = \mathsf{s}$
$i_1(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{k}, \mathsf{j}, \mathsf{e}\}$	$i_2(\mathsf{príde}) = \{1, 2\}$	$i_3(\mathsf{príde}) = \{\mathsf{kj}\}$

môžeme skonštruovať to isté *ohodnotenie predikátových atómov*:

$$
\begin{aligned}
v(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim})) &= t && \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \mathsf{príde}(\mathsf{Kim}),\\
v(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) &= t && \text{lebo } \mathcal{M}_j \models \mathsf{príde}(\mathsf{Jim}),\\
v(\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})) &= f && \text{lebo } \mathcal{M}_j \not\models \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}).
\end{aligned}
$$

Všetky tieto štruktúry (a nekonečne veľa ďalších) vieme pri vyhodnocovaní formúl jazyka $\mathcal{L}_{\text{party}}$ nahradiť týmto ohodnotením.

Výrokovologické formuly, teórie a ohodnotenia

Definícia 3.6. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.
Množinu predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Výrokovologickými formulami jazyka $\mathcal{L}$ nazveme všetky formuly jazyka $\mathcal{L}$, ktoré neobsahujú symbol rovnosti. Množinu všetkých výrokovologických formúl jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$.

Definícia 3.7. Nech (f, t) je usporiadaná dvojica *pravdivostných hodnôt*, $f \neq t$, kde f predstavuje *nepravdu* a t predstavuje *pravdu*. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Výrokovologickým ohodnotením pre $\mathcal{L}$, skrátene *ohodnotením*, nazveme každé zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$.

Pravdivé formuly v ohodnotení

Ako vyhodnotíme, či je formula pravdivá v nejakom ohodnotení?

Definícia 3.8. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty a nech $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. Reláciu *výrokovologická formula A je pravdivá v ohodnotení v* ($v \models_{\mathrm{p}} A$) definujeme *induktívne* pre všetky výrokovologické formuly A, B jazyka $\mathcal{L}$ nasledovne:

- $v \models_{\mathrm{p}} A$ vtt $v(A) = t$, ak A je predikátový atóm,
- $v \models_{\mathrm{p}} \neg A$ vtt $v \not\models_{\mathrm{p}} A$,
- $v \models_{\mathrm{p}} (A \land B)$ vtt $v \models_{\mathrm{p}} A$ a zároveň $v \models_{\mathrm{p}} B$,
- $v \models_{\mathrm{p}} (A \lor B)$ vtt $v \models_{\mathrm{p}} A$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} B$,
- $v \models_{\mathrm{p}} (A \to B)$ vtt $v \not\models_{\mathrm{p}} A$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} B$,

kde *vtt* skracuje *vtedy a len vtedy* a $v \not\models_{\mathrm{p}} A$ skracuje *A nie je pravdivá vo v*.

Vyhodnotenie formuly v ohodnotení

Príklad 3.9. Vyhodnoťme formulu

$$X = ((\text{príde}(\text{Jim}) \lor \neg\text{príde}(\text{Kim})) \to \text{príde}(\text{Sarah}))$$

vo výrokovologickom ohodnotení

$$v = \{\text{príde}(\text{Kim}) \mapsto t,\ \text{príde}(\text{Jim}) \mapsto t,\ \text{príde}(\text{Sarah}) \mapsto f\}$$

zdola nahor:

	p(Kim)	p(Jim)	p(Sarah)	¬p(Kim)	(p(Jim) ∨ ¬p(Kim))	X
v	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$

príde sme skrátili na p.

Ohodnotenie zhodné so štruktúrou

Definícia 3.10. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty, $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ a $S \subseteq \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ je množina predikátových atómov.

Ohodnotenie v a štruktúra $\mathcal{M}$ sú navzájom *zhodné na* S vtt pre každý predikátový atóm $A \in S$ platí

$$v(A) = t \text{ vtt } \mathcal{M} \models A.$$

Ohodnotenie v a štruktúra $\mathcal{M}$ sú navzájom *zhodné* vtt sú zhodné na $\mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$.

Konštrukcia ohodnotenia zhodného so štruktúrou

Ohodnotenie zhodné so štruktúrou zostrojíme ľahko:

Tvrdenie 3.11. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a (f, t) sú pravdivostné hodnoty. Zobrazenie $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ definované pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:*

$$v(A) = \begin{cases} t, & \text{ak } \mathcal{M} \models A, \\ f, & \text{ak } \mathcal{M} \not\models A \end{cases}$$

je výrokovologické ohodnotenie zhodné s $\mathcal{M}$.

Dôkaz. Pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ musíme dokázať, že $v(A) = t$ vtt $\mathcal{M} \models A$:

($\Leftarrow$) Priamo: Ak $\mathcal{M} \models A$, tak $v(A) = t$ podľa jeho definície v leme.

($\Rightarrow$) Nepriamo: Ak $\mathcal{M} \not\models A$, tak $v(A) = f$ podľa jeho definície v leme, a pretože $t \neq f$, tak $v(A) \neq t$. $\square$

Konštrukcia štruktúry zhodnej s ohodnotením

Dokážeme zostrojiť aj štruktúru z ohodnotenia, aby boli zhodné?

Tvrdenie 3.12. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech (f, t) sú pravdivostné hodnoty a $v : \mathcal{PA}_{\mathcal{L}} \to \{f, t\}$ je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$.*

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ s doménou $D = \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a interpretačnou funkciou definovanou pre všetky $n > 0$, všetky konštanty c a všetky predikátové symboly $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n takto:

$$i(c) = c$$
$$i(P) = \{ (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}^n \mid v(P(c_1, \dots, c_n)) = t \}$$

Potom $\mathcal{M}$ je zhodná s v.

Zhoda ohodnotenia a štruktúry je definované iba na *atómoch*.
Ako sa správajú na *zložitejších* formulách?

Zhoda na všetkých výrokovologických formulách

Tvrdenie 3.13. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$. Potom pre každú výrokovologickú formulu $X \in \mathcal{PE}_{\mathcal{L}}$ platí, že $v \models_{\mathrm{p}} X$ vtt $\mathcal{M} \models X$.*

Dôkaz indukciou na konštrukciu formuly. 1.1: Nech X je rovnostný atóm. Potom nie je výrokovologickou formulou a tvrdenie preň triviálne platí.

1.2: Nech X je predikátový atóm. Potom $v \models_{\mathrm{p}} X$ vtt $v(X) = t$ vtt $\mathcal{M} \models A$.

2.1: Indukčný predpoklad: Nech tvrdenie platí pre formulu X. Dokážme tvrdenie pre $\neg X$. Ak X neobsahuje symbol rovnosti $\doteq$, potom $v \models_{\mathrm{p}} \neg X$ vtt $v \not\models_{\mathrm{p}} X$ vtt (podľa IP) $\mathcal{M} \not\models X$ vtt $\mathcal{M} \models \neg X$. Ak X obsahuje $\doteq$, $\neg X$ ho obsahuje tiež, teda nie je výrokovologická a tvrdenie pre ňu platí triviálne.

2.2: IP: Nech tvrdenie platí pre formuly X a Y. Dokážme ho pre $(X \land Y)$, $(X \lor Y)$, $(X \to Y)$. Ak X alebo Y obsahuje $\doteq$, tvrdenie platí pre $(X \land Y)$, $(X \lor Y)$, $(X \to Y)$ triviálne, lebo nie sú výrokovologické.

Nech teda X ani Y neobsahuje $\doteq$. Potom platí $v \models_{\mathrm{p}} (X \to Y)$ vtt $v \not\models_{\mathrm{p}} X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \not\models X$ alebo $\mathcal{M} \models Y$ vtt $\mathcal{M} \models (X \to Y)$.

Ďalej $v \models_{\mathrm{p}} (X \land Y)$ vtt $v \models_{\mathrm{p}} X$ a $v \models_{\mathrm{p}} Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \models X$ a $\mathcal{M} \models Y$ vtt $\mathcal{M} \models (X \land Y)$.

Nakoniec $v \models_{\mathrm{p}} (X \lor Y)$ vtt $v \models_{\mathrm{p}} X$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} Y$ vtt (podľa IP) vtt $\mathcal{M} \models X$ alebo $\mathcal{M} \models Y$ vtt $\mathcal{M} \models (X \lor Y)$. □

3.3. Vyplývanie, nezávislosť a nesplniteľnosť

Výrokovologické teórie

Vráťme sa naspäť k teóriám, modelom a vyplývaniu.

Definícia 3.14. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Každú množinu výrokovologických formúl jazyka $\mathcal{L}$ budeme nazývať *výrokovologickou teóriou* v jazyku $\mathcal{L}$.

Príklad 3.15. Výrokovologickou teóriou je

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{party}} = \{&((\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Kim})),\\ &(\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Jim}))\}, \end{aligned}$$

ale nie

$$T_{\mathrm{party}} \cup \{\mathsf{Kim} \doteq \mathsf{Sarah}\}.$$

Príklad výrokovologického modelu

Príklad 3.16 (Výrokovologický model teórie o party).

$$v = \{\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \mapsto t, \mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \mapsto t, \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}) \mapsto f\}$$

$$\left.\begin{aligned} &v \models_{\mathrm{p}} ((\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) \lor \mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))\\ &v \models_{\mathrm{p}} (\mathsf{príde}(\mathsf{Kim}) \to \neg\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}))\\ &v \models_{\mathrm{p}} (\mathsf{príde}(\mathsf{Jim}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Kim}))\\ &v \models_{\mathrm{p}} (\mathsf{príde}(\mathsf{Sarah}) \to \mathsf{príde}(\mathsf{Jim})) \end{aligned}\right\} v \models_{\mathrm{p}} T_{\mathrm{party}}$$

Výrokovologický model

Definícia 3.17 (Výrokovologický model)**.** Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$ a v je výrokovologické ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$.

Teória T je *pravdivá* v ohodnotení v, skrátene $v \models_{\mathrm{p}} T$, vtt *každá* formula X z T je pravdivá vo v (teda $v \models_{\mathrm{p}} X$ pre každú $X \in T$).

Hovoríme tiež, že v je *výrokovologickým modelom* T.

Teória T je *nepravdivá* vo v, skrátene $v \not\models_{\mathrm{p}} T$, vtt T nie je pravdivá vo v.

Zrejme $v \not\models_{\mathrm{p}} T$ vtt $v \not\models_{\mathrm{p}} X$ pre *nejakú* $X \in T$.

Model teórie, splniteľnosť a nesplniteľnosť

Definícia 3.18 (Splniteľnosť a nesplniteľnosť)**.** Teória je *výrokovologicky splniteľná* vtt má aspoň jeden výrokovologický model.

Teória je *výrokovologicky nesplniteľná* vtt nemá žiaden výrokovologický model.

Zrejme teória nie je splniteľná vtt keď je nesplniteľná.

Príklad 3.19. T_{party} je evidentne splniteľná.

Výrokovologické vyplývanie

Ak sú množiny konštánt a predikátových symbolov jazyka konečné, jazyk má konečne veľa predikátových atómov a teda aj *konečne veľa* ohodnotení.

Uvažovať o všetkých ohodnoteniach a modeloch teórie nie je také odstrašujúce. Napríklad si ľahšie predstavíme logický dôsledok:

Definícia 3.20. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku $\mathcal{L}$.

Formula X je *výrokovologickým dôsledkom* teórie T vtt pre každé ohodnotenie v pre jazyk $\mathcal{L}$ platí, že ak $v \models_{\mathrm{p}} T$, tak $v \models_{\mathrm{p}} X$.

Hovoríme tiež, že X *vyplýva* z T a píšeme $T \models_{\mathrm{p}} X$.

Ak X *ne*vyplýva z T, píšeme $T \not\models_{\mathrm{p}} X$.

Príklad výrokovologického vyplývania

Príklad 3.21. Vyplýva príde(Kim) výrokovologicky z T_{party}? Pretože vieme vymenovať všetky ohodnotenia pre $\mathcal{L}_{\text{party}}$, zistíme to ľahko:

	v_i			((p(K) ∨ p(J)) ∨ p(S))	(p(K) → ¬p(S))	(p(J) → p(K))	(p(S) → p(J))	T_{party}	p(K)
	p(K)	p(J)	p(S)						
v_0	f	f	f	$\not\models_p$				$\not\models_p$	
v_1	f	f	t	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	
v_2	f	t	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_3	f	t	t	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_4	t	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_5	t	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$			$\not\models_p$	
v_6	t	t	f	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_7	t	t	t	$\models_p$	$\not\models_p$			$\not\models_p$	

Skrátili sme príde na p, Kim na K, Jim na J, Sarah na S.

Logický záver: Formula príde(Kim) výrokovologicky vyplýva z T_{party}.

Praktický záver: Aby boli všetky požiadavky splnené, Kim *musí* prísť na párty.

Príklad nezávislosti

Príklad 3.22. Vyplýva príde(Jim) výrokovologicky z T_{party}?

	v_i			((p(K) ∨ p(J)) ∨ p(S))	(p(K) → ¬p(S))	(p(J) → p(K))	(p(S) → p(J))	T_{party}	p(J)
	p(K)	p(J)	p(S)						
v_0	f	f	f	$\not\models_p$				$\not\models_p$	
v_1	f	f	t	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	
v_2	f	t	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_3	f	t	t	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_4	t	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v_5	t	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$			$\not\models_p$	
v_6	t	t	f	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_7	t	t	t	$\models_p$	$\not\models_p$			$\not\models_p$	

Logický záver: Formula príde(Jim) *nevyplýva* z T_{party}.

Výrokovologická nezávislosť

Vzťahu medzi príde(Jim) a T_{party} hovoríme *nezávislosť*.

Definícia 3.23. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku $\mathcal{L}$.

Formula X je *výrokovologicky nezávislá* od teórie T vtt existujú také ohodnotenia v_0 a v_1 pre jazyk $\mathcal{L}$, že $v_0 \models_p T$ aj $v_1 \models_p T$, ale $v_0 \not\models_p X$ a $v_1 \models_p X$.

Príklad 3.24 (pokračovanie príkladu 3.22). *Logický záver:* Formula príde(Jim) je *nezávislá* od T_{party}.

Praktický záver: Všetky požiadavky budú naplnené *bez ohľadu na to*, či Jim príde alebo nepríde na párty. *Nie je nutné*, aby bol prítomný ani aby bol neprítomný. Jeho prítomnosť od požiadaviek *nezávisí*.

Príklad vyplývania negácie

Príklad 3.25. Je príde(Sarah) výrokovologickým dôsledkom T_{party} alebo nezávislá od T_{party}?

	v_i								
	p(K)	p(J)	p(S)	((p(K) ∨ p(J)) ∨ p(S))	(p(K) → ¬p(S))	(p(J) → p(K))	(p(S) → p(J))	T_{party}	p(S)
v_0	f	f	f	$\not\models_p$				$\not\models_p$	
v_1	f	f	t	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	
v_2	f	t	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_3	f	t	t	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$		$\not\models_p$	
v_4	t	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v_5	t	f	t	$\models_p$	$\not\models_p$			$\not\models_p$	
v_6	t	t	f	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$
v_7	t	t	t	$\models_p$	$\not\models_p$			$\not\models_p$	

Logický záver: Formula príde(Sarah) *nevyplýva* z T_{party}, ale ani *nie je nezávislá* od T_{party}.

Vyplývanie negácie

Tvrdenie 3.26. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je splniteľná výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku $\mathcal{L}$.*

Formula X nevyplýva z teórie T a nie je výrokovologicky nezávislá od T vtt $\neg X$ vyplýva z T.

Príklad 3.27 (pokračovanie príkladu 3.25). *Logický záver:* Z T_{party} vyplýva ¬príde(Sarah).

Praktický záver: Aby boli všetky požiadavky naplnené, Sarah *nesmie* prísť na party.

Vzťahy teórií a formúl

Medzi *ohodnotením a formulou* sú iba *dva vzájomne výlučné* vzťahy:

$$\text{Buď } v \models_{\mathrm{p}} X, \text{ alebo } v \not\models_{\mathrm{p}} X.$$

Medzi *teóriou a formulou* je *viac* možných vzťahov:

	existuje v také, že $v \models_{\mathrm{p}} T$ a $v \models_{\mathrm{p}} X$	pre všetky v, ak $v \models_{\mathrm{p}} T$, tak $v \not\models_{\mathrm{p}} X$
existuje v také, že $v \models_{\mathrm{p}} T$ a $v \not\models_{\mathrm{p}} X$	X je nezávislá od T $T \not\models_{\mathrm{p}} X$ a $T \not\models_{\mathrm{p}} \neg X$	$T \models_{\mathrm{p}} \neg X$ a $T \not\models_{\mathrm{p}} X$
pre všetky v, ak $v \models_{\mathrm{p}} T$, tak $v \models_{\mathrm{p}} X$	$T \models_{\mathrm{p}} X$ a $T \not\models_{\mathrm{p}} \neg X$	T je *nesplniteľná* $T \models_{\mathrm{p}} X$ aj $T \models_{\mathrm{p}} \neg X$

Nesplniteľná teória

Príklad 3.28. Je teória $T'_{\text{party}} = T_{\text{party}} \cup \{$(¬príde(Sarah) → ¬príde(Kim))$\}$ splniteľná?

	v_i			((p(K) ∨ p(J)) ∨ p(S))	(p(K) → ¬p(S))	(p(J) → p(K))	(p(S) → p(J))	(¬p(S) → ¬p(K))	T'_{party}
	p(K)	p(J)	p(S)						
v_0	f	f	f	$\not\models_{\mathrm{p}}$					$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_1	f	f	t	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$		$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_2	f	t	f	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$			$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_3	f	t	t	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$			$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_4	t	f	f	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_5	t	f	t	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$				$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_6	t	t	f	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_7	t	t	t	$\models_{\mathrm{p}}$	$\not\models_{\mathrm{p}}$				$\not\models_{\mathrm{p}}$

Logický záver: T'_{party} je nesplniteľná, vyplýva z nej každá formula.

Praktický záver: T'_{party} *nemá* praktické dôsledky, lebo *nevypovedá o žiadnom stave sveta*. Na jej základe *nevieme rozhodnúť*, kto musí alebo nesmie prísť na párty.

Vyplývanie a nesplniteľnosť

Nesplniteľnosť ale nie neužitočná vlastnosť.

Tvrdenie 3.29. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech T je splniteľná výrokovologická teória a X je výrokovologická formula, obe v jazyku $\mathcal{L}$.*

Formula X výrokovologicky vyplýva z teórie T vtt $T \cup \{\neg X\}$ je výrokovologicky nesplniteľná.

Podľa tohto tvrdenia sa rozhodnutie vyplývania dá *zredukovať* na rozhodnutie splniteľnosti.

Výrokovologickú splniteľnosť rozhoduje SAT solver.

Množina atómov formuly a teórie

Definícia 3.30. *Množinu atómov* $\operatorname{atoms}(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme pre všetky formuly $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

- $\operatorname{atoms}(A) = \{A\}$, ak A je atóm,
- $\operatorname{atoms}(\neg A) = \operatorname{atoms}(A)$,
- $\operatorname{atoms}((A \land B)) = \operatorname{atoms}((A \lor B)) = \operatorname{atoms}((A \to B)) = \operatorname{atoms}(A) \cup \operatorname{atoms}(B)$.

Množinou atómov teórie T je

$$\operatorname{atoms}(T) = \bigcup_{X \in T} \operatorname{atoms}(X).$$

Ohodnotenia zhodné na atómoch teórie

Definícia 3.31. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, nech $M \subseteq \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$. Ohodnotenia v_1 a v_2 sa *zhodujú* na množine M vtt $v_1(A) = v_2(A)$ pre každý atóm $A \in M$.

Tvrdenie 3.32. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú teóriu T a formulu X jazyka $\mathcal{L}$ a všetky ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré zhodujú na množine* $\mathrm{atoms}(T) \cup \mathrm{atoms}(X)$ *platí*

- $v_1 \models_{\mathrm{p}} T$ *vtt* $v_2 \models_{\mathrm{p}} T$,
- $v_1 \models_{\mathrm{p}} X$ *vtt* $v_2 \models_{\mathrm{p}} X$.

Ohodnotenia postačujúce na skúmanie teórií

Inak povedané: Pravdivosť formuly/teórie v ohodnotení závisí *iba* od pravdivostných hodnôt ohodnotenia tých atómov, ktoré sa v nej vyskytujú.

Takže na zistenie vyplývania, nezávislosti, splniteľnosti stačí preskúmať všetky ohodnotenia, ktoré sa *líšia* na atómoch *vyskytujúcich* sa vo formule a teórii.

Pokiaľ je teória je konečná, stačí skúmať konečne veľa ohodnotení, aj keby bol jazyk nekonečný.

4. prednáška

Vlastnosti a vzťahy výrokovologických formúl

Rekapitulácia

Minulý týždeň sme:

- *zjednodušili* pohľad na možné stavy sveta zo štruktúr na *výrokovologické* ohodnotenia,
- zistili sme, že na zistenie vyplývania/logických dôsledkov stačí pre konečné teórie skúmať konečne veľa ohodnotení, ktoré zastúpia nekonečne veľa štruktúr,
- presne sme zadefinovali vzťahy medzi teóriou a formulou z hľadiska ohodnotení:
  - výrokovologické vyplývanie,
  - výrokovologickú nezávislosť.

4. Vlastnosti a vzťahy výrokovologických formúl

4.1. Tautológie, splniteľné, falzifikovateľné a nesplniteľné formuly

Logické dôsledky prázdnej teórie

Tvrdenie vyplýva z nejakej teórie (je jej logickým dôsledkom), keď je pravdivé v každom modeli teórie, teda v každom stave sveta, v ktorom sú pravdivé všetky tvrdenia teórie.

Čo keď je teória *prázdna*?

- Je pravdivá v *každom* stave sveta.
- Jej logické dôsledky sú teda *tiež* pravdivé v každom stave sveta.

Navyše:

- Každý model hocijakej neprázdnej teórie T je aj modelom prázdnej teórie.
- Logické dôsledky prázdnej teórie sú v ňom pravdivé.
- Preto sú aj logickými dôsledkami T.

Logické dôsledky prázdnej teórie sú teda dôsledkami *všetkých* teórií.

Príklady logických dôsledkov prázdnej teórie

Existujú vôbec logické dôsledky prázdnej teórie?
Áno, napríklad:

- pre každú konštantu c je pravdivé tvrdenie $c \doteq c$;
- pre každý atóm A je pravdivé $(A \vee \neg A)$.

Pretože sú pravdivé bez ohľadu na teóriu a sú pravdivé v každom stave sveta, sú *logickými pravdami* a sú *nutne* pravdivé.

Rozpoznateľné logické pravdy

Jazyk a spôsob pohľadu na stavy sveta ovplyvňuje, ktoré logické pravdy dokážeme rozpoznať:

- $c \doteq c$ aj $(A \vee \neg A)$ sú pravdivé v každej štruktúre.
- Výrokovologické ohodnotenia sa nezaoberajú rovnostnými atómami. Pomocou nich nezistíme, že $c \doteq c$ je nutne pravda. Ale zistíme, že $(A \vee \neg A)$ pre každý *predikátový* atóm A je pravdivé v každom ohodnotení, a teda je nutne pravdou.

Logickým pravdám, ktorých nutnú pravdivosť dokážeme určiť rozborom všetkých výrokovologických ohodnotení, hovoríme *tautológie*.

Príklad tautológie

Príklad 4.1. Majme jazyk $\mathcal{L}$ s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{Pacient348}\}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{očkovaný}^1, \mathsf{chorý}^1\}$. Je formula $X = \big(\neg(\neg\mathsf{očkovaný}(\mathsf{Pacient348}) \lor \mathsf{chorý}(\mathsf{Pacient348})) \to (\mathsf{očkovaný}(\mathsf{Pacien}$ $\neg\mathsf{chorý}(\mathsf{Pacient348}))\big)$ tautológiou?

Označme $O = \mathsf{očkovaný}(\mathsf{Pacient348})$ a $C = \mathsf{chorý}(\mathsf{Pacient348})$, teda $X = \big(\neg(\neg O \lor C) \to (O \lor \neg C))\big)$ a preskúmajme všetky výrokovologické ohodnotenia týchto atómov:

	v_i							
	O	C	$\neg O$	$(\neg O \lor C)$	$\neg(\neg O \lor C)$	$\neg C$	$(O \lor \neg C)$	X
v_0	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_1	t	f	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v_2	f	t	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$
v_3	t	t	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$

Pretože X je pravdivá vo všetkých ohodnoteniach pre $\mathcal{L}$, X je tautológiou.

Tautológia

Definícia 4.2. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X je výrokovologická formula. Formulu X nazveme *tautológiou* (skrátene $\models_p X$) vtt X je *pravdivá* v *každom* výrokovologickom ohodnotení v pre $\mathcal{L}$ (teda *pre každé* výrokovologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$ platí $v \models_p X$).

Definícia vyžaduje preveriť všetky možné ohodnotenia pre $\mathcal{L}$, teda ohodnotenia *všetkých predikátových atómov jazyka* $\mathcal{L}$. Ale…

	v_i			
	A_1	A_2	$\cdots$	X
v_0	f	f	$\cdots$	$\models_p$
v_1	f	f	$\cdots$	$\models_p$
		$\cdots$		
v_k	t	f	$\cdots$	$\models_p$
		$\cdots$		

Postačujúca podmienka pre tautológiu

Na minulej prednáške sme spomenuli, že platí:

Tvrdenie 4.3. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech X je výrokovologická formula jazyka $\mathcal{L}$. Pre všetky ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré zhodujú na množine* $\mathsf{atoms}(X)$*, platí $v_1 \models_p X$ vtt $v_2 \models_p X$.*

Stačí teda preverovať ohodnotenia atómov *vyskytujúcich* sa vo formule:

Dôsledok 4.4. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech X je výrokovologická formula jazyka $\mathcal{L}$. Formula X je tautológiou vtt X je pravdivá v každom výrokovologickom ohodnotení $v : \operatorname{atoms}(X) \to \{f, t\}$.*

Dôkaz zhody ohodnotení na formule

O pravdivosti týchto tvrdení sa vieme ľahko presvedčiť:

Dôkaz tvrdenia 4.3. Tvrdenie dokážeme indukciou na konštrukciu formuly:

1.1. Ak X je rovnostný atóm, nie je výrokovologickou formulou a tvrdenie preň platí triviálne.

1.2. Nech X je predikátový atóm. Zoberme ľubovoľné ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré sa zhodujú na $\operatorname{atoms}(X)$, teda na samotnom X. Podľa definície pravdivosti platí $v_1 \models_p X$ vtt $v_1(X) = t$ vtt $v_2(X) = t$ vtt $v_2 \models_p X$.

2.1 Indukčný predpoklad (IP): Predpokladajme, že tvrdenie platí pre formulu X. Dokážme ho pre $\neg X$. Zoberme ľubovoľné ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré sa zhodujú na $\operatorname{atoms}(\neg X)$. Pretože $\operatorname{atoms}(\neg X) = \operatorname{atoms}(X)$, v_1 a v_2 sa zhodujú na $\operatorname{atoms}(X)$, a teda podľa IP $v_1 \models_p X$ vtt $v_2 \models_p X$. Preto $v_1 \models_p \neg X$ vtt (def. $\models_p$) $v_1 \not\models_p X$ vtt (IP) $v_2 \not\models_p X$ vtt (def. $\models_p$) $v_2 \models_p \neg X$.

2.2 Indukčný predpoklad (IP): Predpokladajme, že tvrdenie platí pre formuly X a Y. Dokážme ho pre $(X \land Y)$. Zoberme ľubovoľné ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré sa zhodujú na $\operatorname{atoms}((X \land Y))$. Pretože $\operatorname{atoms}((X \land Y)) = \operatorname{atoms}(X) \cup \operatorname{atoms}(Y)$, v_1 a v_2 sa zhodujú na $\operatorname{atoms}(X)$, a teda podľa IP $v_1 \models_p X$ vtt $v_2 \models_p X$; tiež sa zhodujú na $\operatorname{atoms}(Y)$, a teda podľa IP $v_1 \models_p Y$ vtt $v_2 \models_p Y$. Preto $v_1 \models_p (X \land Y)$ vtt (def. $\models_p$) $v_1 \models_p X$ a $v_1 \models_p Y$ vtt (IP) $v_2 \models_p X$ a $v_2 \models_p Y$ vtt (def. $\models_p$) $v_2 \models_p (X \land Y)$.

Podobne postupujeme pre ďalšie binárne spojky. □

Splniteľnosť

Kým tautológie sú *nutne* pravdivé, teda pravdivé vo *všetkých* ohodnoteniach, mnohé formuly iba *môžu* byť pravdivé, teda sú pravdivé v *niektorých* ohodnoteniach.

Nazývame ich *splniteľné*.

	v_i			
	A_1	A_2	$\cdots$	X
v_0	f	f	$\cdots$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_1	f	f	$\cdots$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
		$\cdots$		
v_k	t	f	$\cdots$	$\models_{\mathrm{p}}$
		$\cdots$		

Definícia 4.5. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X je výrokovologická formula. Formulu X nazveme *splniteľnou* vtt X je *pravdivá* v *nejakom* výrokovologickom ohodnotení pre $\mathcal{L}$ (teda *existuje* také výrokovologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$, že $v \models_{\mathrm{p}} X$).

Falzifikovateľnosť

Na rozdiel od tautológií, ktoré sú *nutne* pravdivé, a teda *nemôžu* byť *ne*pravdivé, mnohé formuly *môžu* byť *ne*pravdivé, teda sú *ne*pravdivé v *niektorých* ohodnoteniach.

Nazývame ich *falzifikovateľné*.

	v_i			
	A_1	A_2	$\cdots$	X
v_0	f	f	$\cdots$	$\models_{\mathrm{p}}$
v_1	f	f	$\cdots$	$\models_{\mathrm{p}}$
		$\cdots$		
v_k	t	f	$\cdots$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
		$\cdots$		

Definícia 4.6. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X je výrokovologická formula. Formulu X nazveme *falzifikovateľnou* vtt X je *nepravdivá* v *nejakom* výrokovologickom ohodnotení pre $\mathcal{L}$ (teda *existuje* také výrokovologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$, že $v \not\models_{\mathrm{p}} X$).

Nesplniteľnosť

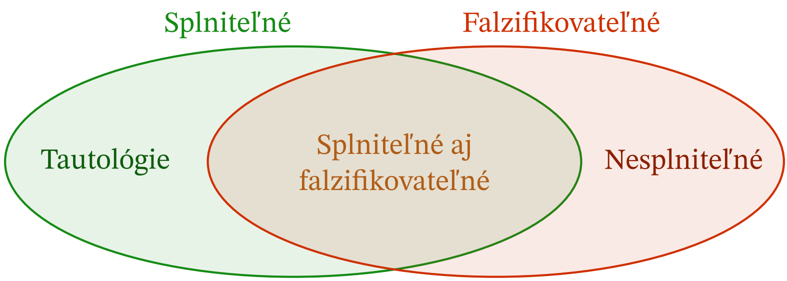
Nakoniec, mnohé formuly sú *nutne ne*pravdivé, teda sú *ne*pravdivé vo *všetkých* ohodnoteniach.

Nazývame ich *nesplniteľné*.

	v_i			
	A_1	A_2	$\cdots$	X
v_0	f	f	$\cdots$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
v_1	f	f	$\cdots$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
		$\cdots$		
v_k	t	f	$\cdots$	$\not\models_{\mathrm{p}}$
		$\cdots$		

Definícia 4.7. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X je výrokovologická formula. Formulu X nazveme *nesplniteľnou* vtt X je *nepravdivá* v *každom* výrokovologickom ohodnotení pre $\mathcal{L}$ (teda pre *každé* výrokovologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$, platí $v \not\models_{\mathrm{p}} X$).

„Geografia“ formúl podľa pravdivosti vo všetkých ohodnoteniach



Obrázok podľa Papadimitriou [1994]

4.2. Ekvivalencia

Logická ekvivalencia

Dve tvrdenia sú *ekvivalentné*, ak sú v každom stave sveta buď obe pravdivé alebo obe nepravdivé.

Ekvivalentné tvrdenia sú navzájom nahraditeľné. To je výhodné vtedy, keď potrebujeme, aby tvrdenie malo nejaký požadovaný tvar, alebo používalo iba niektoré spojky. Napríklad vstupom pre SAT solver je teória zložená iba z disjunkcií literálov.

Podobne ako pri tautológiách môžeme pomocou skúmania všetkých ohodnotení rozpoznať *niektoré* ekvivalentné tvrdenia zapísané formulami (ale nie všetky, pretože ohodnotenia napríklad nedávajú význam rovnostným atómom).

Príklad výrokovologicky ekvivalentných formúl

Príklad 4.8. V jazyku $\mathcal{L}$ z príkladu 4.1 označme O = očkovaný(Pacient348) a C = chorý(Pacient348). Sú formuly $X = \neg(O \rightarrow \neg C)$ a $Y = (O \land C)$ výrokovologicky ekvivalentné?

Preskúmajme všetky výrokovologické ohodnotenia atómov O a C:

	v_i				X	Y
	O	C	$\neg C$	$(O \rightarrow \neg C)$	$\neg(O \rightarrow \neg C)$	$(C \land O)$
v_0	f	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v_1	t	f	$\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v_2	f	t	$\not\models_p$	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v_3	t	t	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$

X je pravdivá *v práve tých* ohodnoteniach pre $\mathcal{L}$, v ktorých je pravdivá Y, preto X a Y sú výrokovologicky ekvivalentné.

Výrokovogická ekvivalencia

Definícia 4.9. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X a Y sú výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$. Formuly X a Y sú *výrokovologicky ekvivalentné*, skrátene $X \Leftrightarrow_p Y$ vtt pre *každé* výrokovologické ohodnotenie v pre jazyk $\mathcal{L}$ platí, že X je pravdivá vo v vtt Y je pravdivá vo v.

$\Leftrightarrow_p$ verzus $\leftrightarrow$

⚠ ***Pozor!*** Nemýľte si zápis $X \Leftrightarrow_p Y$ s formulou $(X \leftrightarrow Y)$.

- $X \Leftrightarrow_p Y$ je skrátené vyjadrenie vzťahu dvoch formúl podľa práve uvedenej definície. Keď napíšeme $X \Leftrightarrow_p Y$, tvrdíme tým, že X a Y sú výrokovologicky ekvivalentné formuly (alebo sa pýtame, či to tak je).

- $(X \leftrightarrow Y)$ je formula, postupnosť symbolov, ktorá môže byť pravdivá v nejakom ohodnotení a nepravdivá v inom, môže byť splniteľná, tautológia, falzifikovateľná, nesplniteľná, môže vyplývať, či byť nezávislá od nejakej teórie, alebo môže byť výrokovologicky ekvivalentná s inou formulou.

Medzi $X \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} Y$ a $(X \leftrightarrow Y)$ je vzťah, ktorý si ozrejmíme neskôr.

Známe ekvivalencie

O mnohých dvojiciach formúl už viete, že sú vzájomne ekvivalentné. Zhrnuli sme ich do nasledujúcej vety.

Známe ekvivalencie

Veta 4.10. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech A, B a C sú ľubovoľné výrokovologické formuly, $\top$ je ľubovoľná tautológia a $\bot$ je ľubovoľná nesplniteľná formula jazyka $\mathcal{L}$. Potom:*

$$(A \to B) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (\neg A \lor B) \qquad \text{nahradenie } \to$$

$$(A \land (B \land C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \land B) \land C) \qquad \text{asociatívnosť } \land$$
$$(A \lor (B \lor C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \lor B) \lor C) \qquad \text{asociatívnosť } \lor$$

$$(A \land B) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (B \land A) \qquad \text{komutatívnosť } \land$$
$$(A \lor B) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (B \lor A) \qquad \text{komutatívnosť } \lor$$

$$(A \land (B \lor C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \land B) \lor (A \land C)) \qquad \text{distributívnosť } \land \text{ cez } \lor$$
$$(A \lor (B \land C)) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} ((A \lor B) \land (A \lor C)) \qquad \text{distributívnosť } \lor \text{ cez } \land$$

Známe ekvivalencie

Veta 4.10 (pokračovanie)**.**

$$\neg(A \land B) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (\neg A \lor \neg B) \qquad \text{de Morganove}$$
$$\neg(A \lor B) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (\neg A \land \neg B) \qquad \text{zákony}$$

$$\neg\neg A \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} A \qquad \text{zákon dvojitej negácie}$$

$(A \land A) \Leftrightarrow_p A$	idempotencia pre $\land$
$(A \lor A) \Leftrightarrow_p A$	idempotencia pre $\lor$
$(A \land \top) \Leftrightarrow_p A$	identita pre $\land$
$(A \lor \bot) \Leftrightarrow_p A$	identita pre $\lor$
$(A \lor (A \land B)) \Leftrightarrow_p A$	absorpcia
$(A \land (A \lor B)) \Leftrightarrow_p A$	
$(A \lor \neg A) \Leftrightarrow_p \top$	vylúčenie tretieho *(tertium non datur)*
$(A \land \neg A) \Leftrightarrow_p \bot$	spor

Všeobecné dôkazy známych ekvivalencií

Pre *konkrétne* dvojice formúl v konkrétnom jazyku sa ekvivalencia dá dokázať rozborom všetkých ohodnotení ako v príklade 4.8.

Ak chceme dokázať napríklad ekvivalenciu $(A \to B)$ a $(\neg A \lor B)$ skutočne pre *ľubovoľné* formuly A a B, musíme postupovať *opatrnejšie*.

Nemôžeme predpokladať, že A a B sú atomické a ohodnotenia im *priamo* priraďujú pravdivostné hodnoty f a t.

Môžeme však zobrať *ľubovoľné* ohodnotenie v a uvažovať o všetkých možnostiach, akými môžu byť A a B pravdivé alebo nepravdivé v tomto ohodnotení a ukázať, že v každom prípade bude $(A \to B)$ pravdivá vo v vtt bude $(\neg A \lor B)$ pravdivá vo v.

Príklad dôkazu známej ekvivalencie

Dôkaz prvej ekvivalentnej dvojice z vety 4.10. Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly v ľubovoľnom jazyku $\mathcal{L}$.

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. V tomto ohodnotení môže byť každá z formúl A a B buď pravdivá alebo nepravdivá, a teda môžu nastať nasledovné prípady:

- $v \not\models_p A$ a $v \not\models_p B$, vtedy $v \models_p (A \to B)$ a $v \models_p (\neg A \lor B)$;
- $v \not\models_p A$ a $v \models_p B$, vtedy $v \models_p (A \to B)$ a $v \models_p (\neg A \lor B)$;
- $v \models_p A$ a $v \not\models_p B$, vtedy $v \not\models_p (A \to B)$ a $v \not\models_p (\neg A \lor B)$;

- $v \models_p A$ a $v \models_p B$, vtedy $v \models_p (A \to B)$ a $v \models_p (\neg A \lor B)$.

Rozobrali sme *všetky prípady* pravdivosti A a B v ohodnotení v a aj keď sa prípady od seba líšia pravdivosťou $(A \to B)$ a $(\neg A \lor B)$, v *každom prípade* platí, že $v \models_p (A \to B)$ *vtt* $v \models_p (\neg A \lor B)$. Preto môžeme konštatovať, že bez ohľadu na to, ktorý prípad nastáva, v ohodnotení v platí, že $v \models_p (A \to B)$ vtt $v \models_p (\neg A \lor B)$.

Pretože ohodnotenie v bolo *ľubovoľné*, môžeme toto konštatovanie *zovšeobecniť* na všetky ohodnotenia pre $\mathcal{L}$ a podľa definície 4.9 sú $(A \to B)$ a $(\neg A \lor B)$ výrokovologicky ekvivalentné. □

Dôkazy rozborom prípadov

Rozbor prípadov z odrážkového zoznamu v predchádzajúcom dôkaze môžeme zapísať do *podobnej* tabuľky ako v príklade 4.8:

	A	B	$(A \to B)$	$(\neg A \lor B)$
v	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v	$\not\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$
v	$\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$	$\models_p$

Vždy ju však treba doplniť

1. úvodom o ľubovoľnom ohodnotení,
2. úvodom k rozboru prípadov,
3. záverom o všetkých prípadoch,
4. záverom o všetkých ohodnoteniach.

Podobne môžeme uvažovať o tautológiách, nesplniteľnosti, či dokonca vyplývaní.

4.3. Vzťah tautológií, vyplývania a ekvivalencie

Tautológie a vyplývanie

Tautológie nie sú zaujímavé iba preto, že sú logickými pravdami.

Kedy je formula $((A_1 \wedge A_2) \to B)$ tautológia?

Vtedy, keď je pravdivá v každom ohodnotení, teda keď v každom ohodnotení v máme $v \nvDash_{\mathrm{p}} (A_1 \wedge A_2)$ alebo $v \vDash_{\mathrm{p}} B$, čiže keď v každom ohodnotení v, v ktorom $v \vDash_{\mathrm{p}} (A_1 \wedge A_2)$, máme aj $v \vDash_{\mathrm{p}} B$ teda keď v každom ohodnotení v, v ktorom $v \vDash_{\mathrm{p}} A_1$ a $v \vDash_{\mathrm{p}} A_2$, máme aj $v \vDash_{\mathrm{p}} B$, teda keď z $\{A_1, A_2\}$ výrokovologicky *vyplýva* B.

Vzťahy výrokovologického vyplývania a tautológií

Tvrdenie 4.11. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech S a T sú výrokovologické teórie a A je výrokovologická formula v $\mathcal{L}$, pričom $S \subseteq T$. Ak $S \vDash_{\mathrm{p}} A$, tak $T \vDash_{\mathrm{p}} A$.*

Tvrdenie 4.12. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech T je výrokovologická teória, nech $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú výrokovologické formuly v $\mathcal{L}$. Potom:*

a) A vyplýva z prázdnej teórie $\emptyset$ vtt A je tautológia. (Skrátene: $\emptyset \vDash_{\mathrm{p}} A$ vtt $\vDash_{\mathrm{p}} A$.)

b) $T \cup \{A\} \vDash_{\mathrm{p}} B$ vtt $T \vDash_{\mathrm{p}} (A \to B)$.

c) $\vDash_{\mathrm{p}} (((\cdots(A_1 \wedge A_2) \wedge \cdots) \wedge A_n) \to B)$ vtt $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vDash_{\mathrm{p}} B$.

Dôkaz vzťahu vyplývania a tautológií (⇒)

Dôkaz tvrdenia 4.12c). Dôkaz tohto tvrdenia sme už naznačili, ale spravme ho podrobnejšie: Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ sú výrokovologické formuly v ľubovoľnom jazyku $\mathcal{L}$.

(⇒) Predpokladajme, že $X = (((\cdots(A_1 \wedge A_2) \wedge \cdots) \wedge A_n) \to B)$ je tautológia a dokážme, že potom z $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ vyplýva B.

Zoberme ľubovoľné výrokovologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$. Musíme preň dokázať, že ak $v \vDash_{\mathrm{p}} \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, tak $v \vDash_{\mathrm{p}} B$. Predpokladajme teda, že $v \vDash_{\mathrm{p}} \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Potom je vo v pravdivá každá z formúl A_1 až A_n, a teda aj o konjunkciách $(A_1 \wedge A_2)$, $((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3)$, $\ldots$, $(((\cdots(A_1 \wedge A_2) \wedge \cdots) \wedge A_n)$ postupne zistíme, že sú pravdivé vo v. Pretože X je tautológia, je pravdivá aj v ohodnotení v, a teda podľa definície pravdivosti a predchádzajúceho zistenia, musí byť pravdivý jej konzekvent B.

Zistili sme teda, že pre v platí, že ak $v \models_p \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, tak $v \models_p B$. Pretože v bolo ľubovoľné, môžeme toto zistenie zovšebecniť na všetky ohodnotenia a podľa definície vyplývania potom $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models_p B$. □

Dôkaz vzťahu vyplývania a tautológií (⇐)

Dôkaz tvrdenia 4.12c) (pokračovanie). (⇐) Predpokladajme, že (∗) z $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ vyplýva B a dokážme, že $X = (((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_n) \to B)$ je tautológia.

Zoberme ľubovoľné výrokovologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$. Musíme preň dokázať, že $v \models_p X$. Môžeme to napríklad urobiť rozborom týchto prípadov:

- Ak $v \models_p A_i$ pre všetky $i = 1, \ldots, n$, tak $v \models_p \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Podľa predpokladu (∗) a definície vyplývania potom musí $v \models_p B$, a teda platí, že $v \not\models_p (((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_n)$ alebo $v \models_p B$, a teda $v \models_p X$.

- Ak $v \not\models_p A_i$ pre niektoré $i \in \{1, \ldots, n\}$, tak $v \not\models_p (((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_i)$ a postupným pridávaním ďalších konjunktov dostaneme, že $v \not\models_p ((\cdots((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_i) \cdots) \land A_n)$. Aj v tomto prípade teda platí, že $v \not\models_p (((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_n)$ alebo $v \models_p B$, a teda $v \models_p X$.

V oboch prípadoch, z ktorých jeden musí vždy nastať, sme dospeli k rovnakému záveru: $v \models_p X$. Pretože v bolo ľubovoľné, môžeme toto zistenie zovšeobecniť na všetky ohodnotenia a podľa definície tautológie je X tautológiou. □

Tautológie a ekvivalencia

Kedy je formula $(X \leftrightarrow Y)$, teda $((X \to Y) \land (Y \to X))$ tautológia?

Vtedy, keď je pravdivá v každom ohodnotení, teda keď v každom ohodnotení v máme $v \models_p (X \to Y)$ a $v \models_p (Y \to X)$, teda keď v každom ohodnotení v máme buď $v \not\models_p X$ alebo $v \models Y$ a zároveň buď $v \not\models_p Y$ alebo $v \models X$, teda keď v každom ohodnotení v platí, že ak $v \models_p X$, tak $v \models_p Y$, a ak $v \models_p X$, tak $v \models_p Y$, teda keď v každom ohodnotení v máme $v \models_p X$ vtt $v \models_p Y$, teda keď X výrokovologicky *ekvivalentná* s Y.

Vzťah výrokovologickej ekvivalencie a tautológií

Tvrdenie 4.13. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X a Y sú výrokovologické formuly v $\mathcal{L}$. Potom $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia vtt X a Y sú výrokologicky ekvivalentné. (Skrátene: $\models_p (X \leftrightarrow Y)$ vtt $X \Leftrightarrow_p Y$.)*

Dôkaz je podobný dôkazu tvrdenia 4.12.

4.4. Ekvivalentné úpravy a CNF

Reťazenie ekvivalentných úprav

Určite ste už robili ekvivalentné úpravy formúl, pri ktorých ste *reťazili dvojice* vzájomne ekvivalentných formúl:

$$\neg(O \to \neg C) \Leftrightarrow_p \neg(\neg O \lor \neg C) \Leftrightarrow_p (\neg\neg O \land \neg\neg C) \Leftrightarrow_p (O \lor C)$$

a nakoniec ste prehlásili, že prvá $\neg(O \to \neg C)$ a posledná formula $(O \land C)$ sú ekvivalentné.

Mohli ste to urobiť, lebo $\Leftrightarrow_p$ je *tranzitívna* relácia na formulách, dokonca viac než iba tranzitívna.

Výrokovologická ekvivalencia ako relácia ekvivalencie

Tvrdenie 4.14. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.*

Vzťah výrokovologickej ekvivalencie $\Leftrightarrow_p$ je reláciou ekvivalencie na výrokovologických formulách jazyka $\mathcal{L}$, teda pre všetky výrokovologické formuly X, Y, Z jazyka $\mathcal{L}$ platí:

- *Reflexivita: $X \Leftrightarrow_p X$.*
- *Symetria: Ak $X \Leftrightarrow_p Y$, tak $Y \Leftrightarrow_p X$.*
- *Tranzitivita: Ak $X \Leftrightarrow_p Y$ a $Y \Leftrightarrow_p Z$, tak $X \Leftrightarrow_p Z$.*

Dôkaz. Priamym dôkazom dokážeme tranzitivitu. Ostatné vlastnosti sa dajú dokázať podobne.

Nech X, Y a Z sú výrokovologické formuly jazyka $\mathcal{L}$. Nech (1) X je výrokovologicky ekvivalentná s Y a (2) Y je ekvivalentná so Z.

Aby sme dokázali, že X je výrokovologicky ekvivalentná so Z, musíme ukázať, že pre každé ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$ platí, že $v \models_p X$ vtt $v \models_p Y$.

Nech teda v je ľubovoľné ohodnotenie pre $\mathcal{L}$.

- Ak $v \models_{\mathrm{p}} X$, tak podľa predpokladu (1) a definície výrokovologickej ekvivalencie 4.9 musí platiť $v \models_{\mathrm{p}} Y$, a teda podľa predpokladu (2) a definície ekvivalencie máme $v \models_{\mathrm{p}} Z$.

- Nezávisle od toho, ak $v \models_{\mathrm{p}} Z$, tak $v \models_{\mathrm{p}} Y$ podľa (2) a def. 4.9, a teda $v \models_{\mathrm{p}} X$ podľa (1) a def. 4.9.

Preto $v \models_{\mathrm{p}} X$ vtt $v \models_{\mathrm{p}} Z$.

Pretože v bolo ľubovoľné, môžeme náš záver zovšeobecniť na všetky ohodnotenia, a teda podľa definície ekvivalencie 4.9 sú X a Z výrokovologicky ekvivalentné. □

Výrokovologická ekvivalencia ako relácia ekvivalencie

Tvrdenie 4.15. *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.*

Vzťah výrokovologickej ekvivalencie $\Leftrightarrow_{\mathrm{p}}$ je reláciou ekvivalencie na výrokovologických formulách jazyka $\mathcal{L}$, teda pre všetky výrokovologické formuly X, Y, Z jazyka $\mathcal{L}$ platí:

- *Reflexivita: $X \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} X$.*

- *Symetria: Ak $X \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} Y$, tak $Y \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} X$.*

- *Tranzitivita: Ak $X \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} Y$ a $Y \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} Z$, tak $X \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} Z$.*

Substitúcia pri ekvivalentných úpravách

V reťazci ekvivalentných úprav

$$\neg(O \to \neg C) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} \neg(\neg O \lor \neg C) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (\neg\neg O \land \neg\neg C) \Leftrightarrow_{\mathrm{p}} (O \lor C)$$

v prvom a poslednom kroku nezodpovedá *celá* formula niektorej zo známych ekvivalencií z vety 4.10.

Podľa známej ekvivalencie sme *nahrádzali podformuly — substituovali* sme ich.

Definícia 4.16 (Substitúcia)**.** Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech X, A, B sú formuly jazyka $\mathcal{L}$. *Substitúciou B* za A v X (skrátene $X[A|B]$) nazývame formulu, ktorá vznikne nahradením každého výskytu A v X formulou B.

Substitúcia rekurzívne

Substitúciu si vieme predstaviť aj ako induktívne definovanú (rekurzívnu) operáciu:

Substitúcia rekurzívne
Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre všetky formuly A, B, X, Y jazyka $\mathcal{L}$, a všetky binárne spojky $b \in \{\land, \lor, \to\}$:

$$
\begin{aligned}
X[A|B] &= B, && \text{ak } A = X \\
X[A|B] &= X, && \text{ak } X \text{ je atóm a } A \neq X \\
(\neg X)[A|B] &= \neg(X[A|B]), && \text{ak } A \neq \neg X \\
(X\ b\ Y)[A|B] &= ((X[A|B])\ b\ (Y[A|B])), && \text{ak } A \neq (X\ b\ Y).
\end{aligned}
$$

Korektnosť substitúcie ekvivalentnej formuly

Substitúciou ekvivalentnej podformuly, napríklad

$$(\neg\neg O \land \neg\neg C)[\neg\neg O|O] = (O \lor \neg\neg C),$$

skutočne dostávame formulu ekvivalentnú s pôvodnou:

Veta 4.17 (Ekvivalentné úpravy substitúciou)**.** *Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech X je formula, A a B sú ekvivalentné formuly jazyka $\mathcal{L}$. Potom formuly X a $X[A|B]$ sú tiež ekvivalentné.*

Toto tvrdenie môžeme dokázať indukciou na konštrukciu formuly.

Ekvivalentné úpravy a vstup pre SAT solver

Častým použitím ekvivalentných úprav je transformácia teórie (napríklad o nejakom Sudoku) do tvaru vhodného pre SAT solver.

Aby sme tento tvar mohli popísať, potrebujeme pomenovať viacnásobne vnorené konjunkcie a viacnásobne vnorené disjunkcie a dohodneme sa na skracovaní ich zápisu vynechaním vnútorných zátvoriek.

Konjunkcia a disjunkcia postupnosti formúl

Definícia 4.18. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je konečná postupnosť formúl jazyka $\mathcal{L}$.

- *Konjunkciou postupnosti* $A_1, \ldots, A_n$ je formula $(((A_1 \land A_2) \land A_3) \land \cdots \land A_n)$, skrátene $(A_1 \land A_2 \land A_3 \land \cdots \land A_n)$.
  - Konjunkciu *prázdnej* postupnosti formúl ($n = 0$) označujeme $\top$. Chápeme ju ako ľubovoľnú *tautológiu*, napríklad $(P(c) \lor \neg P(c))$ pre nejaký unárny predikát P a nejakú konštantu c jazyka $\mathcal{L}$.
- *Disjunkciou postupnosti* $A_1, \ldots, A_n$ je formula $(((A_1 \lor A_2) \lor A_3) \lor \cdots \lor A_n)$, skrátene $(A_1 \lor A_2 \lor A_3 \lor \cdots \lor A_n)$.
  - Disjunkciu *prázdnej* postupnosti formúl označujeme $\bot$ alebo $\square$. Chápeme ju ako ľubovoľnú *nesplniteľnú* formulu, napríklad $(P(c) \land \neg P(c))$.
- Pre $n = 1$ chápeme samotnú formulu A_1 ako konjunkciu aj ako disjunkciu jednoprvkovej postupnosti formúl A_1.

Literál, klauzula, konjunktívny normálny tvar

Vstup do SAT solvera je formula v konjunktívnom normálnom tvare.

Definícia 4.19.

Literál je atóm alebo negácia atómu.

Klauzula (tiež „klauza“, angl. *clause*) je *disjunkcia* postupnosti literálov.

Formula v konjunktívnom normálnom tvare (angl. conjunctive normal form, *CNF*) je *konjunkcia* postupnosti klauzúl.

Príklad 4.20. **Literály:** $P, C, \neg C, \neg O$

Klauzuly: $P, \neg O, \square, (\neg P \lor O \lor \neg C)$

CNF: $P, \neg O, \top, (P \lor \neg O)$ $(P \land \neg O \land C), \square, ((P \lor O) \land \square), ((\neg P \lor O) \land (O \lor C))$
ak $P = \text{pacient(Edo)}$, $O = \text{očkovaný(Edo)}$, $C = \text{chorý(Edo)}$.

Existencia ekvivalentnej formuly v CNF

Veta 4.21. *Ku každej formule X existuje ekvivalentná formula C v konjunktívnom normálnom tvare.*

Dôkaz. Zoberme všetky ohodnotenia $v_1, \dots, v_n$ také, že $v_i \models_p \neg X$ a $v_i(A) = f$ pre všetky atómy $A \notin \text{atoms}(\neg X)$. Pre každé v_i zostrojme formulu C_i ako konjunkciu obsahujúcu A, ak $v_i(A) = t$, alebo $\neg A$, ak $v_i(A) = f$, pre každý atóm $A \in \text{atoms}(\neg X)$. Očividne formula $D = (C_1 \lor \dots \lor C_2)$ je ekvivalentná s $\neg X$ (vymenúva všetky možnosti, kedy je $\neg X$ pravdivá).

Znegovaním D a aplikáciou de Morganových pravidiel dostaneme formulu C v CNF, ktorá je ekvivalentná s X. □

Konverzia formuly do ekvivalentnej v CNF

Skúmanie všetkých ohodnotení podľa dôkazu vety 4.21 nie je ideálny spôsob ako upraviť formulu do CNF — najmä keď má veľa premenných a jej splniteľnosť chceme rozhodnúť SAT solverom.

Jednoduchý algoritmus na konverziu formuly do ekvivalentnej formuly v CNF založený na ekvivalentných úpravách si naprogramujete ako **praktické cvičenie**.

Konverzia formuly do ekvivalentnej v CNF

Algoritmus konverzie do CNF má dve fázy:

1. Upravíme formulu na *negačný normálny tvar* — nevyskytuje sa v ňom implikácia a negované sú iba atómy:
   - Nahradíme implikácie disjunkciami: $(A \to B) \Leftrightarrow_p (\neg A \lor B)$
   - Presunieme $\neg$ dovnútra pomocou de Morganových zákonov a zákona dvojitej negácie.
2. Odstránime konjunkcie vnorené v disjunkciách „roznásobením“ podľa distributívnosti a komutatívnosti:

$$
\begin{aligned}
(A \lor (B \land C)) &\Leftrightarrow_p ((A \lor B) \land (A \lor C)) \\
((B \land C) \lor A) &\Leftrightarrow_p (A \lor (B \land C)) \Leftrightarrow_p ((A \lor B) \land (A \lor C)) \\
&\Leftrightarrow_p ((B \lor A) \land (A \lor C)) \\
&\Leftrightarrow_p ((B \lor A) \land (C \lor A))
\end{aligned}
$$

5. prednáška

Dôkazy a výrokovologické tablá

Rekapitulácia

Minulý týždeň sme sa zaoberali:

- vlastnosťami formúl vzhľadom na všetky ohodnotenia:
  - tautológia,
  - splniteľnosť,
  - falzifikovateľnosť,
  - nesplniteľnosť;
- vzťahmi formúl:
  - ekvivalencia;
- vzťahom vyplývania a ekvivalencie s tautológiami;
- transformáciou formúl medzi jazykmi so zachovaním splniteľnosti.

5. Dôkazy a výrokovologické tablá

Dôkazy a formalizácia

Minulý týždeň sme v rámci teoretických úloh dokazovali tvrdenia o vyplývaní a tautológiách:

- matematické tvrdenia v slovenčine;
- dôkazy tiež v slovenčine.

Výroky v slovenčine sme *sformalizovali* ako *formuly* v jazyku logiky prvého rádu

- matematická „dátová štruktúra“: postupnosti symbolov s induktívnymi pravidlami konštrukcie;

- javovská dátová štruktúra: stromy objektov podtried triedy `Formula`.

Dôkazy v slovenčine začneme *formalizovať* tento týždeň

Čo sú dôkazy a prečo sa dokazuje

Dôkaz je úvaha, ktorá zdôvodňuje, prečo je nejaký záver logickým dôsledkom predpokladov.

Načo sú vlastne dobré *dôkazy*?

- Môžeme nimi *presvedčiť* iných o pravdivosti svojich záverov.
- Zvyčajne sú menej prácne a *pochopiteľnejšie* ako rozbor všetkých možností.

  Už 16 možností v 3. teoretickej úlohe bolo prácne rozobrať.

  Ak je možností nekonečne veľa, rozbor všetkých možností ani nie je možný.
- Odvodzovaním podľa pravidiel dôkazov môžeme skúmať, aké dôsledky má naša teória aj bez konkrétneho cieľa.

Prečo formalizovať dôkazy

Načo je dobré *formalizovať* dôkazy?

- Aby sme si ujasnili, *čo* sú dôkazy a kedy sú *správne*. Správna argumentácia nie je dôležitá iba v matematike:
  - uvažovanie o správnosti našich programov či dopytov,
  - základ kritického/vedeckého myslenia v bežnom živote.
- Aby sme vedeli naprogramovať *dátové štruktúry* na ich reprezentáciu v počítači.
- Aby sme mohli dokazovanie *automatizovať*.
  - Automatické dokazovanie je jeden z cieľov umelej inteligencie.
- Aby sme zistili, čo sa dá a čo sa *nedá* dokázať.
  - Prakticky: Čo sa nedá dokázať, toho dôkaz sa nedá automatizovať.
  - Filozoficky: Hranice poznania a chápania.

5.1. Druhy dôkazov

Druhy dôkazov

V matematike sa na to používa viac typov dôkazov:

- priamy,
- sporom,
- nepriamy,
- analýzou prípadov,

ktoré sa často kombinujú.

Priamy dôkaz a analýza prípadov

Priamy dôkaz Z predpokladov postupným odvodzovaním jednoduchých logických dôsledkov dospejeme k požadovanému záveru.

Dôkaz analýzou (rozborom) prípadov Keď predpoklady obsahujú *disjunkciu*, dokážeme požadovaný záver *z každého disjunktu* a ostatných predpokladov *nezávisle* od ostatných disjunktov.

Ak aj predpoklady disjunkciu neobsahujú, môžeme rozoberať prípady, že je nejaké pomocné tvrdenie pravdivé alebo nepravdivé.

Príklad priameho dôkazu s analýzou prípadov

Príklad 5.1 (Párty po karanténe · priamy dôkaz s analýzou prípadov). (A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril. (A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka. (A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (priamo). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé. Dokážme X.

Ak nepríde Anka, X je pravdivé.

Preto predpokladajme, že Anka príde. Podľa A_1 potom musia prísť aj Betka a Cyril. Preto príde Betka, a teda príde Betka alebo Dávid. Podľa A_2 potom príde aj Evka. Pretože podľa A_3 by Evka neprišla, ak by prišiel Fero, ale Evka príde, musí byť pravda, že Fero nepríde. Preto je tvrdenie X opäť pravdivé.

Dôkaz sporom a nepriamy dôkaz

Dôkaz sporom Príjmeme predpoklady, ale *spochybníme záver* — predpokladáme, že je nepravdivý. Postupným odvodzovaním jednoduchých logických dôsledkov dospejeme k *sporu* s predpokladom alebo iným dôsledkom.

Záver teda nemôže byť nepravdivý, preto ak sú pravdivé predpoklady, je nutne pravdivý, vyplýva z nich.

Nepriamy dôkaz — variácia dôkazu sporom Predpokladáme, že záver je nepravdivý. Postupným odvodzovaním jednoduchých logických dôsledkov dospejeme k nepravdivosti niektorého z predpokladov.

Tým dokážeme: Ak je nepravdivý záver, tak sú nepravdivé predpoklady. Obmena: Ak sú pravdivé predpoklady, je pravdivý záver.

Príklad dôkazu sporom

Príklad 5.2 (Párty po karanténe · dôkaz sporom).
(A_1) Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril. (A_2) Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka. (A_3) Evka nepríde, ak príde Fero.

Teda: (X) Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Dôkaz (sporom). Predpokladajme, že tvrdenia A_1 až A_3 sú pravdivé, ale X je nepravdivé.

Predpokladáme teda, že príde Anka a príde aj Fero. Preto príde Fero a podľa A_3 Evka nepríde. Zároveň vieme, že príde Anka, a podľa A_1 teda prídu aj Betka a Cyril. Preto príde Betka, a teda príde Betka alebo Dávid. Podľa A_2 potom príde aj Evka. To je však spor z predchádzajúcim dôsledkom A_3, že Evka nepríde.

Predpoklad, že X je nepravdivé viedol k sporu, preto X je pravdivé.

Výhody dôkazu sporom

Dôkaz sporom je veľmi konkrétna ukážka kritického, vedeckého myslenia:

1. Pochybujeme o pravdivosti tvrdenia.

2. Vyvrátením tejto pochybnosti sa presvedčíme o pravdivosti.

Má ale aj „technickú“ výhodu: Nemusíme pri ňom až tak tápať, ako dospejeme k cieľu, pretože

- dostaneme viac predpokladov;
- máme jednoduchý cieľ: nájsť spor.

Odvodzovanie jednoduchých dôsledkov

Kroky dôkazu by mali odvodzovať *jednoduché dôsledky*.

Tie potom používame na odvodenie ďalších dôsledkov.

Aký dôsledok je jednoduchý?

Závisí od čitateľa dôkazu — musí byť schopný ho overiť.

Matematici radi robia väčšie skoky a nechajú čitateľa domýšľať si, prečo ich mohli urobiť.

Vyučujúci chcú malé kroky — aby si overili, že študent skutočne uvažuje správne.

5.2. Výrokovologické tablá

Jednoduché dôsledky podľa definície pravdivosti formúl

Pozrime sa znova na príklad dôkazu sporom:

1. Sformalizujme ho.
2. Uvedomme si, čo vlastne dokazujeme.
3. Všímajme si, aké kroky robíme.

Príklad dôkazu sporom s formulami

Príklad 5.3 (Párty po karanténe · formalizovaný dôkaz sporom). Dokážme, že z $T = \{A_1, A_2, A_3\}$, kde

$A_1 = (\mathsf{p}(\mathsf{A}) \to (\mathsf{p}(\mathsf{B}) \land \mathsf{p}(\mathsf{C})))$ Anka príde, iba ak príde Betka a Cyril.
$A_2 = ((\mathsf{p}(\mathsf{B}) \lor \mathsf{p}(\mathsf{D})) \to \mathsf{p}(\mathsf{E}))$ Ak príde Betka alebo Dávid, príde aj Evka.
$A_3 = (\mathsf{p}(\mathsf{F}) \to \neg\mathsf{p}(\mathsf{E}))$, Evka nepríde, ak príde Fero.

vyplýva formula X,

$X = (\mathsf{p}(\mathsf{A}) \to \neg\mathsf{p}(\mathsf{F}))$ Ak príde Anka, tak nepríde Fero.

Príklad dôkazu sporom s formulami

Príklad 5.3 (Párty po karanténe · formal. dôkaz sporom, pokrač.).
Dôkaz (sporom). Predpokladajme, pre nejaké ohodnotenie v platí, že
(1) $v \models_p (\mathsf{p(A)} \rightarrow (\mathsf{p(B)} \land \mathsf{p(C)}))$,
(2) $v \models_p ((\mathsf{p(B)} \lor \mathsf{p(D)}) \rightarrow \mathsf{p(E)})$,
(3) $v \models_p (\mathsf{p(F)} \rightarrow \neg\mathsf{p(E)})$, ale
(4) $v \not\models_p (\mathsf{p(A)} \rightarrow \neg\mathsf{p(F)})$.
Podľa definície pravdivosti v ohodnotení, potom máme:
(5) $v \models_p \mathsf{p(A)}$ zo (4) a súčasne
(6) $v \not\models_p \neg\mathsf{p(F)}$ zo (4), teda
(7) $v \models_p \mathsf{p(F)}$ z (6). Ďalej
(8) $v \not\models_p \mathsf{p(F)}$, alebo (9) $v \models_p \neg\mathsf{p(E)}$ podľa (3).

- (8): čo je v spore so (7),
- (9): (10) $v \not\models_p \mathsf{p(E)}$ z (9). Zároveň
  (11) $v \not\models_p \mathsf{p(A)}$, alebo (12) $v \models_p (\mathsf{p(B)} \land \mathsf{p(C)})$ podľa (1).
  - (11): čo je v spore s (5),
  - (12): (13) $v \models_p \mathsf{p(B)}$ z (12). Potom podľa (2):
    (14) $v \not\models_p (\mathsf{p(B)} \lor \mathsf{p(D)})$, alebo (15) $v \models_p \mathsf{p(E)}$, spor s (9).
    - (14): (16) $v \not\models_p (\mathsf{p(B)}$ zo (14), spor s (13);

Tablový kalkul

Z takýchto dôkazov sporom vychádza *tablový kalkul* — jeden z *formálnych deduktívnych systémov* pre výrokovologickú časť logiky prvého rádu

Formálny deduktívny systém je systém odvodzovacích pravidiel na konštrukciu dôkazov vyplývania formúl z teórií

Nami používaná verzia tablového kalkulu pochádza od Raymonda M. Smullyana [Smullyan, 1979].

Postupne si ukážeme, ako z predchádzajúci dôkaz premeníme na *tablo* — formálny dôkaz v tablovom kalkule.

Označené formuly a ich sémantika

Zbavme sa najprv opakovania $v \models_p \cdots$ a $v \not\models_p \cdots$.

Definícia 5.4. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X je výrokovologická formula jazyka $\mathcal{L}$. Postupnosti symbolov $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}X$ nazývame *označené formuly*.

Definícia 5.5. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, v je ohodnotenie pre $\mathcal{L}$ a X je výrokovologická formula v $\mathcal{L}$. Potom

- *vo v je pravdivá* $\mathbf{T}X$ (skrátene $v \models_p \mathbf{T}X$) vtt vo v je pravdivá X;
- *vo v je pravdivá* $\mathbf{F}X$ (skr. $v \models_p \mathbf{F}X$) vtt vo v nie je pravdivá X.

Znamienko **F** sa teda správa ako negácia a **T** nemení význam formuly. Znamienka **F** a **T** sa *nesmú* objaviť v podformulách. Vďaka znamienkam stačí hovoriť iba o pravdivých ozn. formulách.

Dôkaz sporom s označenými formulami

Príklad 5.5 (Párty po karanténe · dôkaz s označenými formulami). Predpokladajme, pre nejakom ohodnotení v sú pravdivé označené formuly
(1) $\mathbf{T}(p(A) \to (p(B) \land p(C)))$,
(2) $\mathbf{T}((p(B) \lor p(D)) \to p(E))$,
(3) $\mathbf{T}(p(F) \to \neg p(E))$, ale
(4) $\mathbf{F}(p(A) \to \neg p(F))$.
Podľa definície pravdivosti, sú vo v pravdivé:
(5) $\mathbf{T}\,p(A)$ zo (4) a súčasne
(6) $\mathbf{F}\,\neg p(F)$ zo (4), teda
(7) $\mathbf{T}\,p(F)$ z (6). Ďalej
(8) $\mathbf{F}\,p(F)$, alebo (9) $\mathbf{T}\,\neg p(E)$ podľa (3).
čo je v spore so (7), | (10) $\mathbf{F}\,p(E)$ z (9). Zároveň
(11) $\mathbf{F}\,p(A)$, alebo (12) $\mathbf{T}(p(B) \land p(C))$ z (1).
čo je v spore s (5), | (13) $\mathbf{T}\,p(B)$ z (12). Potom podľa (2)
(14) $\mathbf{F}(p(B) \lor p(D))$, alebo (15) $\mathbf{T}\,p(E)$,
(16) $\mathbf{F}(p(B)$ zo (14), spor s (13); | spor s (9).

Kroky odvodenia

Všimnime si teraz kroky, ktoré sme v dôkaze robili:

- Niektoré z pravdivosti formuly *priamo odvodili* pravdivosť niektorej priamej podformuly, napr.:
  - z (4) $\mathbf{F}(p(A) \to \neg p(F))$ sme odvodili (5) $\mathbf{T}\,p(A)$;
  - z (4) $\mathbf{F}(p(A) \to \neg p(F))$ sme odvodili (6) $\mathbf{F}\,\neg p(F)$;
  - z (9) $\mathbf{T}\,\neg p(E)$ sme odvodili (10) $\mathbf{F}\,p(E)$.
- Iné viedli k *analýze prípadov* pravdivosti *oboch* priamych podformúl:

- (2) $\mathbf{T}((\mathsf{p}(\mathsf{B}) \lor \mathsf{p}(\mathsf{D})) \to \mathsf{p}(\mathsf{E}))$ viedla k analýze prípadov: (14) $\mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathsf{B}) \lor \mathsf{p}(\mathsf{D}))$ *alebo* (15) $\mathbf{T}\,\mathsf{p}(\mathsf{E})$.

Priame odvodenie pravdivosti priamych podformúl

Z definície pravdivosti formúl ľahko dostaneme:

Pozorovanie 5.6. *Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X a Y sú ľubovoľné formuly $\mathcal{L}$:*

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Ak } v \models_{\mathrm{p}} \neg X, \textit{ tak } v \not\models_{\mathrm{p}} X. & \textit{Ak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,\neg X, \textit{ tak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,X. \\
\textit{Ak } v \not\models_{\mathrm{p}} \neg X, \textit{ tak } v \models_{\mathrm{p}} X. & \textit{Ak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,\neg X, \textit{ tak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,X. \\
\textit{Ak } v \models_{\mathrm{p}} (X \land Y), \textit{ tak } v \models_{\mathrm{p}} X. & \textit{Ak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}(X \land Y), \textit{ tak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,X. \\
\textit{Ak } v \models_{\mathrm{p}} (X \land Y), \textit{ tak } v \models_{\mathrm{p}} Y. & \textit{Ak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}(X \land Y), \textit{ tak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,Y. \\
\textit{Ak } v \not\models_{\mathrm{p}} (X \lor Y), \textit{ tak } v \not\models_{\mathrm{p}} X. & \textit{Ak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}(X \lor Y), \textit{ tak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,X. \\
\textit{Ak } v \not\models_{\mathrm{p}} (X \lor Y), \textit{ tak } v \not\models_{\mathrm{p}} Y. & \textit{Ak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}(X \lor Y), \textit{ tak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,Y. \\
\textit{Ak } v \not\models_{\mathrm{p}} (X \to Y), \textit{ tak } v \models_{\mathrm{p}} X. & \textit{Ak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}(X \to Y), \textit{ tak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,X. \\
\textit{Ak } v \not\models_{\mathrm{p}} (X \to Y), \textit{ tak } v \not\models_{\mathrm{p}} Y. & \textit{Ak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}(X \to Y), \textit{ tak } v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,Y.
\end{array}
$$

Zjednodušujúce tablové pravidlá

Z pozorovania 5.6 môžeme sformulovať pravidlá, ktoré priamo odvodzujú z označených formúl ich označené podformuly:

$$
\frac{\mathbf{T}\,\neg X}{\mathbf{F}\,X} \qquad \frac{\mathbf{F}\,\neg X}{\mathbf{T}\,X} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \land Y)}{\mathbf{T}\,X} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \lor Y)}{\mathbf{F}\,X} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \to Y)}{\mathbf{T}\,X}
$$

$$
\frac{\mathbf{T}(X \land Y)}{\mathbf{T}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \lor Y)}{\mathbf{F}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \to Y)}{\mathbf{F}\,Y}
$$

Na tieto pravdidlá sa dá pozerať ako na *špeciálne prípady jedného pravidla*, ktorému sa hovorí α, zjednodušenie alebo sploštenie (angl. *flatten*), pre rôzne spojky.

Jednotný zápis označených formúl typu α

Definícia 5.7 (Jednotný zápis označených formúl typu α)**.** Označená formula A^+ je *typu α* vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y. Takéto formuly budeme označovať písmenom α; α_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca, α_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$

Pozorovanie 5.8 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)**.** *Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Potom $v \models_p \alpha$ vtt $v \models_p \alpha_1$ a $v \models_p \alpha_2$.*

Analýza prípadov pravdivosti priamych podformúl

Z definície pravdivosti formúl ľahko dostaneme:

Pozorovanie 5.9. *Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech X a Y sú ľubovoľné formuly $\mathcal{L}$:*

- *Ak $v \not\models_p (X \land Y)$, tak $v \not\models_p X$ alebo $v \not\models_p Y$. Ak $v \models_p \mathbf{F}(X \land Y)$, tak $v \models_p \mathbf{F}\,X$ alebo $v \models_p \mathbf{F}\,Y$.*
- *Ak $v \models_p (X \lor Y)$, tak $v \models_p X$ alebo $v \models_p Y$. Ak $v \models_p (X \lor Y)$, tak $v \models_p \mathbf{T}\,X$ alebo $v \models_p \mathbf{T}\,Y$.*
- *Ak $v \models_p (X \to Y)$, tak $v \not\models_p X$ alebo $v \models_p Y$. Ak $v \models_p \mathbf{T}(X \to Y)$, tak $v \models_p \mathbf{F}\,X$ alebo $v \models_p \mathbf{T}\,Y$.*

Rozvetvujúce tablové pravidlá

Z pozorovania 5.9 môžeme sformulovať pravidlá, ktoré vedú k analýze prípadov pravdivosti priamych podformúl:

$$\frac{\mathbf{F}(X \land Y)}{\mathbf{F}\,X \;\big|\; \mathbf{F}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \lor Y)}{\mathbf{T}\,X \;\big|\; \mathbf{T}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \to Y)}{\mathbf{F}\,X \;\big|\; \mathbf{T}\,Y}$$

Aj na tieto pravdidlá sa dá pozerať ako na špeciálne prípady jedného pravidla, ktorému sa hovorí β alebo vetvenie (angl. *split*), pre rôzne spojky.

Jednotný zápis označených formúl typu β

Definícia 5.10 (Jednotný zápis označených formúl typu β).
Označená formula B^+ je *typu* β vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y. Takéto formuly budeme označovať písmenom β; β_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca, β_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{F}Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{T}Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{T}Y$

Pozorovanie 5.11 (Stručne vďaka jednotnému zápisu). *Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Potom $v \models_{\mathrm{p}} \beta$ vtt $v \models_{\mathrm{p}} \beta_1$ alebo $v \models_{\mathrm{p}} \beta_2$.*

Označovanie označených formúl a ich množín

Čo vlastne dokazujeme v našom príklade? To, že predpoklad existencie ohodnotenia v, v ktorom sú pravdivé všetky prvky množiny označených formúl

$$\begin{aligned} S^+ = \{\, & \mathbf{T}(\mathsf{p}(\mathsf{A}) \to (\mathsf{p}(\mathsf{B}) \land \mathsf{p}(\mathsf{C}))), \\ & \mathbf{T}((\mathsf{p}(\mathsf{B}) \lor \mathsf{p}(\mathsf{D})) \to \mathsf{p}(\mathsf{E})), \\ & \mathbf{T}(\mathsf{p}(\mathsf{F}) \to \neg\mathsf{p}(\mathsf{E})), \\ & \mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathsf{A}) \to \neg\mathsf{p}(\mathsf{F}))\} \end{aligned}$$

vedie k sporu, teda že S^+ je *nesplniteľná*.

Dohoda 5.12. Pre označené formuly budeme používať veľké písmená zo začiatku a konca abecedy s horným indexom + a prípadne s dolnými indexmi, napr. A^+, X_7^+.

Pre množiny označených formúl budeme používať písmená S, T s horným indexom + a prípadne s dolnými indexmi, napr. S^+, T_3^+.

Príklad tabla

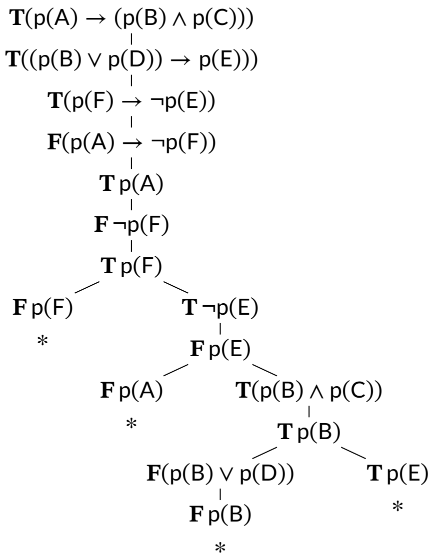
Príklad 5.12 (Párty po karanténe · tablo).

1.	$\mathbf{T}(\mathsf{p}(A) \to (\mathsf{p}(B) \land \mathsf{p}(C)))$	S^+
2.	$\mathbf{T}((\mathsf{p}(B) \lor \mathsf{p}(D)) \to \mathsf{p}(E))$	S^+
3.	$\mathbf{T}(\mathsf{p}(F) \to \neg\mathsf{p}(E))$	S^+
4.	$\mathbf{F}(\mathsf{p}(A) \to \neg\mathsf{p}(F))$	S^+
5.	$\mathbf{T}\,\mathsf{p}(A)$	$\alpha 4$
6.	$\mathbf{F}\,\neg\mathsf{p}(F)$	$\alpha 4$
7.	$\mathbf{T}\,\mathsf{p}(F)$	$\alpha 6$

<table>
<tr>
<td>8. $\mathbf{F}\,\mathsf{p}(F)$ $\beta 3$
$*7, 8$</td>
<td>9. $\mathbf{T}\,\neg\mathsf{p}(E)$ $\beta 3$
10. $\mathbf{F}\,\mathsf{p}(E)$ $\alpha 9$
<table>
<tr>
<td>11. $\mathbf{F}\,\mathsf{p}(A)$ $\beta 1$
$*5, 11$</td>
<td>12. $\mathbf{T}(\mathsf{p}(B) \land \mathsf{p}(C))$ $\beta 1$
13. $\mathbf{T}\,\mathsf{p}(B)$ $\alpha 12$
<table>
<tr>
<td>14. $\mathbf{F}(\mathsf{p}(B) \lor \mathsf{p}(D))$ $\beta 2$
16. $\mathbf{F}\,\mathsf{p}(B)$ $\alpha 14$
$*13, 16$</td>
<td>15. $\mathbf{T}\,\mathsf{p}(E)$ $\beta 2$
$*9,15$</td>
</tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Štruktúra tabla

Čo je teda tablo? Aká „dátová štruktúra“? Čo v nej musí platiť?



Tablo pre množinu označených formúl

Definícia 5.13. *Analytické tablo pre množinu označených formúl* S^+ (skrátene *tablo pre* S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:

  α: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.

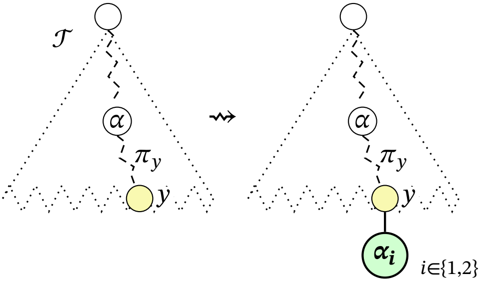
  β: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.

  S^+: Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Nič iné nie je tablom pre S^+.

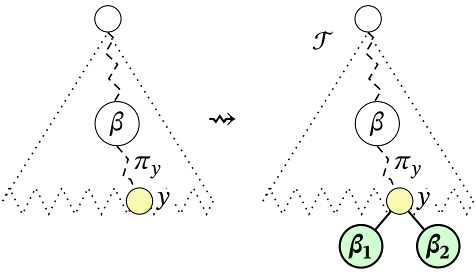
Tablá a tablové pravidlá

Pôvodné tablo **Možné priame rozšírenie** **Pravidlá a označené formuly v nich**



$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}$$

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$



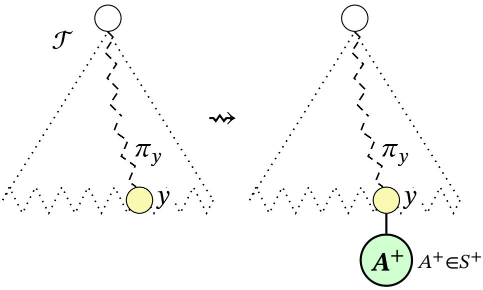
$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Legenda: y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

Tablá a tablové pravidlá (pokračovanie)

Pôvodné tablo **Možné priame rozšírenie** **Pravidlá a označené formuly v nich**



$$\frac{}{A^+} \qquad A^+ \in S^+$$

Legenda: y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

Uzavretosť a otvorenosť vetvy a tabla

Definícia 5.14. *Vetvou* tabla $\mathcal{T}$ je každá cesta od koreňa $\mathcal{T}$ k niektorému listu $\mathcal{T}$.

Označená formula X^+ sa *vyskytuje na vetve* π v $\mathcal{T}$ vtt X^+ sa nachádza v niektorom vrchole na π. Skrátene to budeme zapisovať $X^+ \in \mathrm{formulas}(\pi)$.

Tablo ~ dôkaz sporom. Vetvenie ~ rozbor možných prípadov. $\Longrightarrow$ Spor musí nastať vo všetkých vetvách.

Definícia 5.15. *Vetva* π tabla $\mathcal{T}$ je *uzavretá* vtt na π sa súčasne vyskytujú označené formuly $\mathbf{F}\,X$ a $\mathbf{T}\,X$ pre nejakú formulu X. Inak je π *otvorená*.

Tablo $\mathcal{T}$ *je uzavreté* vtt *každá* jeho vetva je uzavretá. Naopak, $\mathcal{T}$ je *otvorené* vtt *aspoň jedna* jeho vetva je otvorená.

Korektnosť tablového kalkulu

Veta 5.16 (Korektnosť tablového kalkulu). *Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+. Potom je množina S^+ nesplniteľná.*

Dôsledok 5.17. *Nech S je výrokovologická teória a X je výrokovologická formula. Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{T}\,A \mid A \in S\} \cup \{\mathbf{F}\,X\}$ (skrát. $S \vdash_{\mathrm{p}} X$), tak z S výrokovologicky vyplýva X ($S \vDash_{\mathrm{p}} X$).*

Dôsledok 5.18. *Nech X je výrokovologická formula. Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$ (skrátene $\vdash_{\mathrm{p}} X$), tak X je tautológia ($\vDash_{\mathrm{p}} X$).*

Spomeňte si 5.1

1. Má každé tablo *aspoň* jedno priame rozšírenie?
2. Má každé tablo *najviac* jedno priame rozšírenie?

6. prednáška

Korektnosť a úplnosť výrokovologických tabiel

Rekapitulácia

Pred dvoma týždňami:

- Sformalizovali sme dôkazy sporom pomocou tabiel.
- Vyslovili, ale nedokázali tvrdenie o *korektnosti tabiel*: *uzavreté tablo* dokazuje výrokovologickú *nesplniteľnosť*
- a dôsledky pre dokazovanie vyplývania a tautológií.

Dnes:

- *Dokážeme* korektnosť tabiel.
- Preskúmame, čo vedia tablá povedať o *splniteľnosti*.
- *Dokážeme* úplnosť tabiel.

5.3. Korektnosť tabiel

Korektnosť — idea dôkazu

Aby sme dokázali korektnosť tabiel, teda vetu 5.16, dokážeme postupne dve lemy:

K1: Ak máme tablo pre splniteľnú množinu S^+ s aspoň jednou splniteľnou vetvou, tak každé jeho priame rozšírenie má tiež splniteľnú vetvu.

K2: Každé tablo pre splniteľnú množinu S^+ má aspoň jednu splniteľnú vetvu.

Z toho ľahko sporom dokážeme, že množina, pre ktorú sme našli uzavreté tablo je nesplniteľná.

Korektnosť — pravdivosť priameho rozšírenia tabla

Všimnime si:

Vetva sa správa ako konjunkcia svojich označených formúl — všetky musia byť naraz pravdivé.

Tablo sa správa ako disjunkcia vetiev — niektorá musí byť pravdivá.

Definícia 5.19. Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+, nech π je vetva tabla $\mathcal{T}$ a nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. Potom:

- *vetva π je pravdivá vo v* ($v \models_p \pi$) vtt vo v sú pravdivé *všetky* označené formuly vyskytujúce sa na vetve π.
- *tablo $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v* ($v \models_p \mathcal{T}$) vtt *niektorá* vetva v table $\mathcal{T}$ je pravdivá.

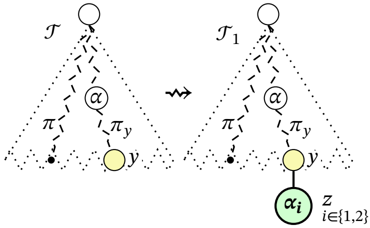
Korektnosť — pravdivosť priameho rozšírenia tabla

Pomocou predchádzajúcej definície sformulujeme lemu K1 takto:

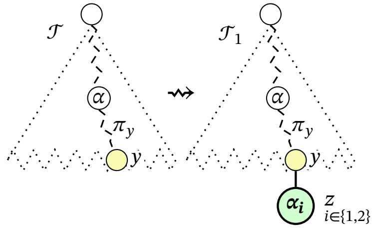
Lema 5.20 (K1). *Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. Ak S^+ a $\mathcal{T}$ sú pravdivé vo v, tak aj každé priame rozšírenie $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v.*

Dôkaz lemy K1. Nech S^+ je množina označených formúl, $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a v je ohodnotenie.Nech $v \models_p S^+$ a nech $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v. Potom je pravdivá niektorá vetva v $\mathcal{T}$. Zoberme jednu takú vetvu a označme ju π. Nech $\mathcal{T}_1$ je priame rozšírenie $\mathcal{T}$. Nastáva jeden z prípadov:

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom α, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje α_1 alebo α_2 pre nejakú formulu α na vetve π_y.

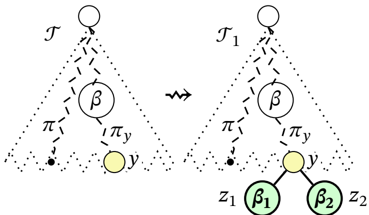


Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π, a teda aj $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v.

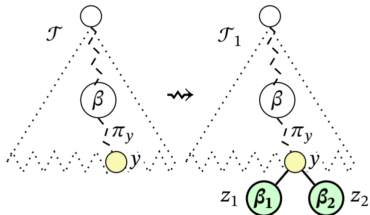


Ak $\pi = \pi_y$, tak α je pravdivá vo v, pretože α je na π. Potom aj α_1 a α_2 sú pravdivé vo v (pozorovanie 5.8). Vetva π_z v table $\mathcal{T}_1$ rozširuje vetvu π pravdivú vo v o vrchol z obsahujúci ozn. formulu α_1 alebo α_2 pravdivú vo v. Preto π_z je pravdivá vo v, a teda aj tablo $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v.

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom β, pridaním detí z_1 a z_2 nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z_1 obsahuje β_1 a z_2 obsahuje β_2 pre nejakú formulu β na vetve π_y.

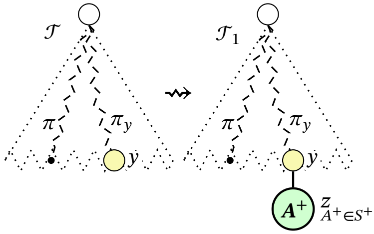


Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π, a teda aj $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v.

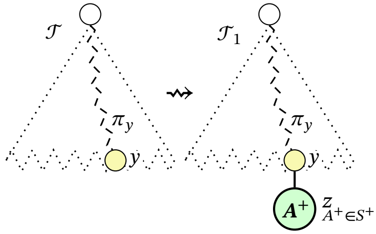


Ak $\pi = \pi_y$, tak $v \models_p \beta$, pretože β je na π. Potom $v \models_p \beta_1$ *alebo* $v \models_p \beta_2$ (poz. 5.11). Ak $v \models_p \beta_1$, tak $v \models_p \pi_{z_1}$, a teda $v \models_p \mathcal{T}_1$. Ak $v \models_p \beta_2$, tak $v \models_p \pi_{z_2}$, a teda $v \models_p \mathcal{T}_1$.

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom S^+, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje formulu $A^+ \in S^+$.



Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π, a teda aj $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v.



Ak $\pi = \pi_y$, tak π_z v table $\mathcal{T}_1$ je pravdivá vo v, pretože je rozšírením vetvy π pravdivej vo v o vrchol z obsahujúci formulu A^+ pravdivú vo v (pretože $v \models_p S^+$ a $A^+ \in S^+$). Preto tablo $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v. □

Korektnosť — pravdivosť množiny a tabla pre ňu

Lema 5.21 (K2). *Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. Ak S^+ je pravdivá vo v, tak aj $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v.*

Dôkaz lemy K2. Nech S^+ je množina označených formúl, nech v je ohodnotenie a nech $v \models_p S^+$. Úplnou indukciou na počet vrcholov tabla $\mathcal{T}$ dokážeme, že vo v je pravdivé každé tablo $\mathcal{T}$ pre S^+.

Ak má $\mathcal{T}$ jediný vrchol, tento vrchol obsahuje formulu $A^+ \in S^+$, ktorá je pravdivá vo v. Preto je pravdivá jediná vetva v $\mathcal{T}$, teda aj $\mathcal{T}$.

Ak $\mathcal{T}$ má viac ako jeden vrchol, je priamym rozšírením nejakého tabla $\mathcal{T}_0$, ktoré má o 1 alebo o 2 vrcholy menej ako $\mathcal{T}$. Podľa indukčného predpokladu je $\mathcal{T}_0$ pravdivé vo v. Podľa lemy K1 je potom vo v pravdivé aj $\mathcal{T}$. □

Korektnosť — dôkaz

Dôkaz vety o korektnosti 5.16. Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+. Sporom: Predpokladajme, že existuje ohodnotenie, v ktorom je S^+ pravdivá. Označme ho v. Potom podľa lemy K2 je vo v pravdivé tablo $\mathcal{T}$, teda vo v je pravdivá niektorá vetva π v $\mathcal{T}$. Pretože $\mathcal{T}$ je uzavreté, aj vetva π je uzavretá. Na π sa teda nachádzajú označené formuly $\mathbf{T}\,X$

a $\mathbf{F}X$ pre nejakú formulu X. Pretože π je pravdivá vo v, musia byť vo v pravdivé všetky formuly na nej. Ale $v \models_p \mathbf{T}X$ vtt $v \models_p X$ a $v \models_p \mathbf{F}X$ vtt $v \not\models_p X$. Teda $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}X$ nemôžu byť obe pravdivé, čo je spor. $\square$

5.4. Testovanie nesplniteľnosti, splniteľnosti a falzifikovateľnosti

Úplná vetva a tablo

Príklad 5.22. Zistime tablom, či $\{((\mathsf{rychly}(\mathsf{p}) \lor \mathsf{spravny}(\mathsf{p})) \land (\mathsf{citatelny}(\mathsf{p}) \lor \mathsf{rychly}(\mathsf{p})))\} \models_p (\mathsf{rychly}(\mathsf{p}) \land (\mathsf{spravny}(\mathsf{p}) \lor \mathsf{citatelny}(\mathsf{p})))$.

Vybudujeme tablo pre množinu označených formúl:

$$\{\mathbf{T}((\mathsf{rychly}(\mathsf{p}) \lor \mathsf{spravny}(\mathsf{p})) \land (\mathsf{citatelny}(\mathsf{p}) \lor \mathsf{rychly}(\mathsf{p}))),$$
$$\mathbf{F}(\mathsf{rychly}(\mathsf{p}) \land (\mathsf{spravny}(\mathsf{p}) \lor \mathsf{citatelny}(\mathsf{p})))\}$$

Podarí sa nám ho uzavrieť?

Úplná vetva a tablo

Nech v príklade tablové pravidlá používame akokoľvek,

- *nenájdeme uzavreté* tablo, ale
- ak pravidlá nepoužívame opakovane na rovnakú formulu v rovnakej vetve, po čase *vybudujeme úplné* a *otvorené* tablo.

Definícia 5.23 (Úplná vetva a úplné tablo)**.** Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+.

Vetva π v table $\mathcal{T}$ *je úplná* vtt má všetky nasledujúce vlastnosti:

- pre každú označenú formulu α, ktorá sa vyskytuje na π, sa *obidve* označené formuly α_1 a α_2 vyskytujú na π;
- pre každú označenú formulu β, ktorá sa vyskytuje na π, sa *aspoň jedna* z označených formúl β_1, β_2 vyskytuje na π;
- *každá* $X^+ \in S^+$ sa vyskytuje na π.

Tablo $\mathcal{T}$ *je úplné* vtt *každá* jeho vetva je buď *úplná alebo uzavretá*.

Otvorené tablo a splniteľnosť

Z *otvoreného* a *úplného* tabla pre S^+ môžeme vytvoriť ohodnotenie v:

1. nájdeme otvorenú vetvu π,
2. pre každý atóm A
   - ak sa na π nachádza $\mathbf{T}\,A$, definujeme $v(A) = t$;
   - ak sa na π nachádza $\mathbf{F}\,A$, definujeme $v(A) = f$;
   - inak definujeme $v(A)$ ľubovoľne.

V tomto v je pravdivá π, a preto je v ňom *pravdivá aj* S^+ (všetky formuly z S^+ sa vyskytujú na π, lebo π je úplná).

Otázka.

- Dá sa vždy nájsť úplné tablo pre S^+?
- Naozaj sa z úplného otvoreného tabla dá vytvoriť model S^+?

Existencia úplného tabla

Lema 5.24 (o existencii úplného tabla)**.** *Nech S^+ je konečná množina označených formúl. Potom existuje úplné tablo pre S^+.*

Dôkaz. Vybudujme tablo $\mathcal{T}_0$ pre S^+ tak, že do koreňa vložíme niektorú formulu z S^+ a opakovaním spravidla S^+ postupne doplníme ostatné.

Potom tablo postupne rozširujeme tak, že vyberieme ľubovoľný list y tabla $\mathcal{T}_i$, ktorého vetva π_y je otvorená a nie je úplná. Potom nastane aspoň jedna z možností:

- Na π_y sa nachádza nejaká formula α, ale nenachádza sa *niektorá* z formúl α_1 a α_2.
- Na π_y sa nachádza nejaká formula β, ale nenachádza sa *ani jedna* z formúl β_1 a β_2.

Ak platí prvá alebo obe možnosti, aplikujeme pravidlo α. Ak platí druhá možnosť, aplikujeme pravidlo β. Získame tablo $\mathcal{T}_{i+1}$, s ktorým proces opakujeme.

Tento proces po konečnom počte krokov (prečo?) vytvorí nejaké tablo $\mathcal{T}_n$, v ktorom už neexistuje vetva, ktorá by bola otvorená a nebola úplná. Teda každá vetva v $\mathcal{T}_n$ je buď uzavretá alebo úplná, čiže $\mathcal{T}_n$ je úplné. □

5.5. Úplnosť

Nadol nasýtené množiny a Hintikkova lemma

Definícia 5.25. Množina označených formúl S^+ sa nazýva *nadol nasýtená* vtt platí:

H_0: v S^+ sa nevyskytujú naraz $\mathbf{T}\,A$ a $\mathbf{F}\,A$ pre žiaden predikátový atóm A;

H_1: ak $\alpha \in S^+$, tak $\alpha_1 \in S^+$ a $\alpha_2 \in S^+$;

H_2: ak $\beta \in S^+$, tak $\beta_1 \in S^+$ alebo $\beta_2 \in S^+$.

Pozorovanie 5.26. *Nech π je úplná otvorená vetva nejakého tabla $\mathcal{T}$. Potom množina všetkých formúl na π je nadol nasýtená.*

Lema 5.27 (Hintikkova)**.** *Každá nadol nasýtená množina S^+ je splniteľná.*

Dôkaz Hintikkovej lemy. Chceme dokázať, že existuje ohodnotenie v, v ktorom sú pravdivé všetky označené formuly z S^+. Definujme v pre každý predikátový atóm A takto:

$$v(A) = \begin{cases} t, & \text{ak } \mathbf{T}\,A \in S^+; \\ f, & \text{ak } \mathbf{F}\,A \in S^+; \\ t, & \text{ak ani } \mathbf{T}\,A \text{ ani } \mathbf{F}\,A \text{ nie sú v } S^+. \end{cases}$$

v je korektne definované vďaka H_0 (každému atómu priradí t alebo f, žiadnemu nepriradí obe).

Indukciou na stupeň formuly dokážeme, že vo v sú pravdivé všetky formuly z S^+:

1. Všetky označené predikátové atómy z S^+ sú pravdivé vo v.
2. Nech $X^+ \in S^+$ a nech platí IP: Vo v sú pravdivé všetky formuly z S^+ nižšieho stupňa ako X^+. X^+ je buď α alebo β:

   Ak X^+ je α, potom obidve α_1, $\alpha_2 \in S^+$ (H_1), sú nižšieho stupňa ako X^+, a teda podľa indukčného predpokladu sú pravdivé vo v, preto (podľa poz. 5.8) je v ňom pravdivá aj α.

   Ak X^+ je β, potom aspoň jedna z β_1, β_2 je v S^+ (H_2). Nech je to ktorákoľvek, má nižší stupeň ako X^+, teda podľa IP je pravdivá vo v, a preto (podľa poz. 5.11) je vo v pravdivá aj β. □

Úplnosť

Úplnosť kalkulu neformálne: Ak je nejaké tvrdenie pravdivé, tak existuje jeho dôkaz v kalkule.

Veta 5.28 (o úplnosti)**.** *Nech S^+ je konečná nesplniteľná množina označených formúl. Potom existuje uzavreté tablo pre S^+.*

Dôsledok 5.29. *Nech S je konečná teória a X je formula. Ak $S \models_{\mathrm{p}} X$, tak $S \vdash_{\mathrm{p}} X$.*

Dôsledok 5.30. *Nech X je formula. Ak $\models_{\mathrm{p}} X$, tak $\vdash_{\mathrm{p}} X$.*

Úplnosť platí aj pre nekonečné množiny, ale dôkaz je ťažší.

Úplnosť — dôkaz

Dôkaz vety o úplnosti. Zoberme ľubovoľnú konečnú nesplniteľnú množinu označených formúl S^+.

Podľa lemy o existencii úplného tabla vieme pre S^+ nájsť úplné tablo $\mathcal{T}$, teda také, že každá vetva je buď uzavretá alebo úplná.

Ak by niektorá vetva bola otvorená, potom musí byť úplná, a teda nadol uzavretá. Podľa Hintikkovej lemy by bola splniteľná. Pretože obsahuje všetky formuly z S^+, bola by aj S^+ splniteľná, čo je spor s nesplniteľnosťou S^+.

Preto musia byť všetky vetvy tabla $\mathcal{T}$ uzavreté. $\square$

Literatúra

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.