Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Júlia Pukancová,
Martin Homola, Jozef Šiška

Letný semester 2019/2020

Posledná aktualizácia: 25. februára 2020

1 Atomické formuly

1.1 Sémantika atomických formúl

1.1.1 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Anna}, \text{Boris}, \text{mama}, \text{oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{dievča}^1, \text{chlapec}^1, \text{sestra}^2, \text{uprednostňuje}^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
dievča(x)	x je žena
chlapec(x)	x je chlapec
sestra(x, y)	x je sestra y
uprednostňuje(x, y, z)	x uprednostňuje y pred z

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) dievča(Anna)

(A_2) chlapec(Boris)

(A_3) sestra(Anna, Boris)

(A_4) uprednostňuje(mama, Anna, Boris)

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna)

(B_1) dievča(mama)

(B_2) chlapec(oco)

(B_3) uprednostňuje(mama, Boris, Anna)

(B_4) uprednostňuje(oco, Boris, Anna)

Riešenie. Každú atomickú formulu zo zadania preložíme do vety v prirodzenom jazyku.

(A_1) Anna je dievča.

(A_2) Boris je chlapec.

(A_3) Anna je sestra Borisa.

(A_4) Mama uprednostňuje Annu pred Borisom.

(A_5) Boris uprednostňuje samého seba pred Annou.

(B_1) Mama je dievča.

(B_2) Oco je chlapec.

(B_3) Mama uprednostňuje Borisa pred Annou.

(B_4) Oco uprednostňuje Borisa pred Annou.

♮

1.1.2 Príklad. Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.1?

Riešenie. Počet atomických formúl v jazyku $\mathcal{L}$ závisí od počtu konštánt v jazyku $\mathcal{L}$ (teda od kardinality množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$) a od jednotlivých arít jednotlivých predikátov z množiny $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.

V jazyku $\mathcal{L}$ máme $|\mathcal{C}_\mathcal{L}| = 4$.

Pomocou predikátového symbolu, ktorého arita je 1 teda môžeme vytvoriť v jazyku $\mathcal{L}$ 4 atomické formuly. Kedže unárne predikátové symboly máme v $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ dva (dievča a chlapec), dokopy vytvoríme 8 atomických formúl.

Pomôcka. Vo všeobecnosti platí, že pre ľubovoľný predikátový symbol $p \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$ s aritou k a pre $|\mathcal{C}_\mathcal{L}| = n$ môžeme v jazyku $\mathcal{L}$ vytvoriť n^k atomických formúl.

Pre binárny predikátový symbol (sestra) vieme vytvoriť 4^2 atomických formúl, teda 16. K tejto možnosti treba prirátať aj rovnostné atomické formuly, ktoré vytvoríme pomocou symbolu rovnosti $\doteq$. Tento symbol je tiež binárny, a teda formúl bude opäť 16.

Analogicky pre ternárny predikátový symbol (uprednostňuje) vytvoríme $4^3 = 64$ atomických formúl.

Celkovo teda v jazyku $\mathcal{L}$ môžeme zostrojiť $8 + 16 + 16 + 64 = 104$ atomických formúl. ♮

1.1.3 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_5, B_1, \dots, B_4$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned} D &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ i(\text{Anna}) &= 1, \quad i(\text{Boris}) = 2, \quad i(\text{mama}) = 3, \quad i(\text{oco}) = 4, \\ i(\text{dievča}) &= \{1, 5\}, \\ i(\text{chlapec}) &= \{2, 4, 5\}, \\ i(\text{sestra}) &= \{(3, 4), (1, 2)\}, \\ i(\text{uprednostňuje}) &= \{(3, 1, 2), (3, 2, 1), (5, 4, 1), (5, 3, 5)\}. \end{aligned}$$

Riešenie.

(A_1) dievča(Anna) je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \models$ dievča(Anna), pretože $i(\text{Anna}) = 1 \in \{1, 5\} = i(\text{dievča})$.

(A_2) $\mathcal{M} \models$ chlapec(Boris), pretože $i(\text{Boris}) = 2 \in i(\text{chlapec})$.

(A_3) $\mathcal{M} \models$ sestra(Anna, Boris), pretože $(i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) = (1, 2) \in i(\text{sestra})$.

(A_4) $\mathcal{M} \models$ uprednostňuje(mama, Anna, Boris), pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) \in i(\text{uprednostňuje})$.

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna) nie je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \not\models$ uprednostňuje(Boris, Boris, Anna), pretože $(i(\text{Boris}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{uprednostňuje})$.

(B_1) $\mathcal{M} \not\models$ dievča(mama), pretože $i(\text{mama}) \notin i(\text{dievča})$.

(B_2) $\mathcal{M} \models$ chlapec(oco), pretože $i(\text{oco}) \in i(\text{chlapec})$.

(B_3) $\mathcal{M} \models$ uprednostňuje(mama, Boris, Anna),
pretože (i(mama), i(Boris), i(Anna)) $\in i$(uprednostňuje).

(B_4) $\mathcal{M} \not\models$ uprednostňuje(oco, Boris, Anna),
pretože (i(oco), i(Boris), i(Anna)) $\notin i$(uprednostňuje). ♮

1.1.4 Príklad. Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich *súčasne* bola modelom všetkých formúl $A_1, \dots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \dots, B_4$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 6 prvkov;
b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 3 prvky;
c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 1 prvok.

Riešenie.

a) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ s aspoň 5 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= (\{a, b, c, d, m, o\}, i_1)\\
i_1(\text{Anna}) &= a, \quad i_1(\text{Boris}) = b, \quad i_1(\text{mama}) = m, \quad i_1(\text{oco}) = o,\\
i_1(\text{dievča}) &= \{a\},\\
i_1(\text{chlapec}) &= \{b\},\\
i_1(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, d)\},\\
i_1(\text{uprednostňuje}) &= \{(m, a, b), (o, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

b) Štruktúra $\mathcal{M}_2$ s najviac 3 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= (\{a, b, c\}, i_2)\\
i_2(\text{Anna}) &= a, \quad i_2(\text{Boris}) = b, \quad i_2(\text{mama}) = c, \quad i_2(\text{oco}) = c,\\
i_2(\text{dievča}) &= \{a\},\\
i_2(\text{chlapec}) &= \{b\},\\
i_2(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, c)\},\\
i_2(\text{uprednostňuje}) &= \{(c, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

c) Nie je možné zostrojiť $\mathcal{M}_3$ tak, aby mala najviac 1 prvok a súčasne bola modelom všetkých formúl $A_1, \dots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \dots, B_4$.
Doména štruktúry nemôže byť prázdna, preto $\mathcal{M}_3$ by mala mať práve jeden prvok, teda $\mathcal{M}_3 = (\{a\}, i_3)$ pre nejaký prvok a.
Problém nastáva už pri A_1 a B_1. Keďže v doméne $\mathcal{M}_3$ je jediný prvok, musia ho pomenúvať všetky konštanty, teda i_3(Anna) $= a$, ale aj i_3(mama) $= a$. Aby bola A_1 pravdivá v $\mathcal{M}_3$, potom musí byť $a \in i_3$(dievča), teda i_3(dievča) musí byť $\{a\}$. Zároveň má byť B_1 nepravdivá, teda $a \notin i_3$(dievča), čo nie je možné. ♮

1.1.5 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{$Alex, Beáta, Cyril, Dana, Edo, Gabika, oco$\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{$žena^1, rodič^2, dieťa^3, starší$^2\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
žena(x)	x je žena
rodič(x, y)	x je rodičom y
dieťa(u, x, y)	u je dieťaťom matky x a otca y
starší(x, y)	x je starší ako y

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) žena(Beáta)

(A_2) žena(Dana)

(A_3) rodič(Dana, Alex)

(A_4) rodič(Dana, Beáta)

(A_5) dieťa(Cyril, Gabika, Edo)

(A_6) dieťa(Alex, Dana, Cyril)

(B_1) žena(Alex)

(B_2) dieťa(Beáta, Gabika, oco)

(B_3) rodič(Edo, Edo)

(B_4) starší(Beáta, Gabika)

(B_5) starší(Gabika, Cyril)

(B_6) Cyril $\doteq$ oco

1.1.6 Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.5?

1.1.7 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_6, B_1, \dots, B_6$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$
\begin{gathered}
D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
i(\text{Alex}) = 1, \quad i(\text{Beáta}) = 2, \quad i(\text{Cyril}) = 3, \quad i(\text{Dana}) = 4, \\
i(\text{Edo}) = 9, \quad i(\text{Gabika}) = 7, \quad i(\text{oco}) = 3, \\
i(\text{žena}) = \{1, 2, 3, 8\}, \\
i(\text{rodič}) = \{(4, 1), (9, 9), (2, 3), (3, 4), (8, 7)\}, \\
i(\text{dieťa}) = \{(3, 7, 9), (2, 7, 3), (8, 9, 1)\}, \\
i(\text{starší}) = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (7, 3), (8, 7)\}
\end{gathered}
$$

Lepšiu predstavu o štruktúre často získate, keď si ju graficky znázorníte napríklad takto:

- Každý objekt z domény znázornite ako uzol.

- Interpretáciu symbolu konštanty znázornite označením uzla týmto symbolom.
- Množinu interpretujúcu unárny predikát znázornite ako uzavretú krivku (napr. elipsu) označenú symbolom predikátu a obsahujúcu uzly, ktoré do tejto množiny patria.
- Dvojicu patriacu do interpretácie binárneho predikátu znázornite ako orientovanú hranu medzi uzlami označenú symbolom predikátu.
- n-ticu patriacu do interpretácie n-árneho predikátu pre $n \geq 3$ znázornite ako n-uholník, ktorého vrcholy budú spojené hranami s príslušnými uzlami. Vhodne označte poradie prvkov v n-tici.

Pre každý predikát s aritou $n \geq 2$ je lepšie nakresliť si osobitný graf.

1.1.8 Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich *súčasne* bola modelom všetkých formúl $A_1, \dots, A_6$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \dots, B_6$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 9 prvkov;

b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 5 prvkov;

c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 2 prvky.

Všimnite si, že hoci každý symbol konštanty musí byť interpretovaný ako niektorý objekt domény (teda pomenúvať ho), nie všetky objekty musia byť pomenované a viacero symbolov konštánt môže pomenúvať ten istý objekt. Doména nemôže byť prázdna.

1.2 Formalizácia do jazyka atomických formúl

1.2.1 Príklad. Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Jozef je profesor a Mária je profesorka.

(A_2) Jozef je žemľovku. Žemľovka je múčnik.

(A_3) Jozef má žemľovku rád, Mária ju naopak nemá rada vôbec.

(A_4) Filoména je upratovačka.

(A_5) Upratovačky aj profesori sú zamestnanci.

(A_6) Filoména má menší plat ako Mária, ale väčší ako Jozef.

(A_7) Jozef učí predmet dejiny antického Ríma v posluchárni P42.

(A_8) Tento predmet si zapísali 3 študenti.

(A_9) Chodí naň aj Filoména, ktorá je v skutočnosti jedným zo študentov Jozefovho predmetu.

Riešenie. Postupne sformalizujeme atomické výroky a budeme pritom dbať na to aby sme volili vhodný spoločný jazyk, a zbytočne ho nerozširovali. Tvrdenie (A_1) sa v skutočnosti skladá z dvoch atomických výrokov:

$A_{1.1}$ profesor(Jozef)

$A_{1.1}$ profesor(Mária)

Všimnime si, že v prípade Márie sme nevytvorili nový predikátový symbol profesorka^1 ale rovnako ako v prípade Jozefa sme použili symbol profesor^1. Hoc v slovenčine na to máme dve samostatné slová, ich význam pre školskú doménu je rovnaký – je to symbol pre skupinu všetkých elementov domény, ktoré predstavujú profesorov. Ak by sme na napr. pýtali na všetkých profesorov, iste by me zahrnuli aj Máriu.

> Rozoberme si ešte dve alternatívne riešenia, ktoré ale nie sú správne. Prvým je formula je(Jozef, profesor). Čo by v tomto prípade znamenal konštantný symbol profesor? Zmysel slova profesor v danej vete nie je konkrétny profesor, ale skupina všetkých profesorov. Preto je správne voliť predikátový symbol. Z podobných dôvodov je rovnako formula Jozef $\doteq$ profesor nesprávna. Keby sme profesorov zapisovali týmto spôsobom, v skutočnosti by boli všetci profesori stotožnení do jedného objektu domény, čo v tomto prípade celkom určite nechceme.

Sformalizujme teraz formulu (A_2), prvú časť zapíšeme dvoma atomickými formulami:

$A_{2.1}$ je(Jozef, porcia278)

$A_{2.2}$ žemľovka(porcia278)

Keďže Jozef je nejakú konkrétnu porciu jedla, zvolíme si pre ňu nový konštantný symbol. Zvolili sme porcia278 (môže ísť o 278. porciu vydanú v ten deň v školskej jedálni). Druhou formulou sme následne povedali, že táto porcia patrí medzi (všetky) žemľovky, čo vyjadruje predikát žemľovka^1. Výborne sa nám tu hodil predikát je^2, ktorý sme zvažovali a napokon za vrhli pri tvrdení (A_1). Zamýšľaný význam je ale tentoraz iný.

Všimnime si druhú časť tvrdenia (A_2), teda že žemľovka je múčnik. Ide o všeobecné tvrdenie, ktoré nevieme atomickými formulami v jeho všeobecnom význame vyjadriť – náš jazyk je na to zatiaľ príliš obmedzený. Môžeme ale aspoň o všetkých konkrétnych žemľovkách, povedať, že sú zároveň múčniky. Keďže v celej úlohe (aj nižšie) máme len jednu konkrétnu žemľovku, bude to iba jedna atomická formula:

$A_{2.3}$ múčnik(porcia278)

Na obmedzenia jazyka atomických formúl narazíme aj v nasledujúcom tvrdení, ktoré sformalizujeme nasledovne:

$A_{3.1}$ má_rád_žemľovku(Jozef)

$A_{3.2}$ nemá_rád_žemľovku(Mária)

Opäť vidíme, že vo formálnom jazyku nerobíme rozdiel medzi mužským a ženským rodom. Tiež si všimnime, že tu nejde o vzťah medzi Jozefom a nejakou konkrétnou porciou žemľovky ako v prípade ($A_{2.1}$), ale ide tu vlastnosť mať rád žemľovku vo všeobecnosti. Toto vieme najlepšie vyjadriť unárnym predikátovým symbolom má_rád_žemľovku^1.

Venujme teraz pozornosť Márii, ktorá nemá rada žemľovku. Žiadalo by sa, aby sa vlastnosti mať rád a nemať rád žemľovku navzájom vylučovali. Toto ale s atomickými formulami vyjadriť nevieme (potrebovali by sme k tomu logickú spojku – negáciu). Použijeme teda zatiaľ samostatný a *nezávislý* predikátový symbol nemá_rád_žemľovku^1.

Ďalšie dve tvrdenia teraz poľahky sformalizujeme v súlade s tým, čo už sme videli vyššie:

A_4 upratovačka(Filoména)

$A_{5.1}$ zamestnanec(Jozef)

$A_{5.2}$ zamestnanec(Mária)

$A_{5.3}$ zamestnanec(Filoména)

Tvrdenie (A_5) je opäť všeobecné tvrdenie, preto v jazyku atomických formúl aspoň vymenujeme všetkých konkrétnych zamestnancov.

Všimnime si, že tentoraz sme zvolili ženský rod pre predikátový symbol upratovačka^1. Nevadí to, pokiaľ ho konzistentne použijeme aj v prípade mužov-upratovačov. Dôležité je len to aby sme pre tú istú vec konzistentne stále používali ten istý predikátový symbol.

Tvrdenie (A_6) odpovedá 2 atomickým formulám:

$A_{6.1}$ má_väčší_plat_ako(Mária, Filoména)

$A_{6.2}$ má_väčší_plat_ako(Filoména, Jozef)

Všimnime si, že sme zaviedli len jeden predikátový symbol má_väčší_plat_ako^2, ale úmyselne sme sa vyhli zavedeniu analogického symbolu má_menší_plat_ako^2. Ide tu totiž o dva vzťahy, ktoré sú navzájom inverzné. Takéto dva predikátové symboly by však boli od seba nezávislé, teda ak by platilo má_väčší_plat_ako(Mária, Filoména) nijako by z toho nevyplývalo, že platí aj má_menší_plat_ako(Filoména, Mária). Toto ale zrejme nie je zamýšľané. Jazyk atomických formúl nemá dostatočnú silu na to, aby sme mohli dva navzájom inverzné predikáty nejako vyjadriť. Musíme si preto vystačiť s jedným predikátom a používať ho vždy správnym smerom.

Tvrdenie (A_7) by nám už teraz nemalo robiť žiadne problémy. Musíme len správne rozpoznať všetky konkrétne objekty, o ktorých tvrdenie hovorí. Vyjde nám pri tom, že učí^3 bude ternárny predikátový symbol. U dvoch nových konštantných symbolov, ktoré pre tieto objekty zavedieme, z tvrdenia tiež vyčítame do akej „skupiny" patria, čo vyjadríme samostatnými atomickými formulami:

$A_{7.1}$ učí(Jozef, DAR, P42)

$A_{7.2}$ predmet(DAR)

$A_{7.3}$ posluch※áreň(P42)

Z ďalšieho tvrdenia vieme, že Dejiny antického Ríma majú zapísané traja študenti. Nepoznáme ich mená, napriek tomu si môžeme zvoliť vhodné nové konštantné symboly $\text{š}_1, \dots, \text{š}_3$:

$A_{8.1}$ študent(š_1)

$A_{8.2}$ študent(š_2)

$A_{8.3}$ študent(š_3)

$A_{8.4}$ má_zapísaný(š_1, DAR)

$A_{8.5}$ má_zapísaný(š_2, DAR)

$A_{8.6}$ má_zapísaný(š_3, DAR)

No a nakoniec ešte potrebujeme doplniť, že na tento predmet chodí aj Filoména. Opäť si uvedomme, že obe tieto tvrdenia zrejme referujú na ten istý vzťah medzi študentom a predmetom, preto nepridáme nový predikát, napr. chodiť_na^2. Okrem toho z tvrdenia (A_8) vieme, že predmet má troch študentov, preto ak chceme vylúčiť, že by Filoména mohla byť už štvrtým študentom, použijeme rovnosť:

$A_{9.1}$ má_zapísaný(Filoména, DAR)

$A_{9.2}$ $\text{š}_1 \doteq$ Filoména

Všimnime si, že vďaka sémantike rovnosti bude teraz Filoména a š_1 ten istý objekt. Preto je formula ($A_{9.1}$) vďaka ($A_{9.2}$) zbytočná, a môžeme ju vyhodiť.

Zároveň je však potrebné si uvedomiť, že hoci sme zaviedli tri rôzne symboly $\text{š}_1, \dots, \text{š}_3$, sémantika nám nezaručuje, že nebudú referovať na ten istý objekt. Toto tiež náš jazyk zatiaľ neumožňuje (potrebovali by sme nerovnosť, čiže vlastne opäť negáciu).

Uvedieme ešte množiny konštantných a predikátových symbolov, ktoré sme použili: $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{$DAR, Filoména, Jozef, Mária, porcia278, P42, $\text{š}_1, \text{š}_2, \text{š}_3\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{múčnik}^1, \text{žemľovka}^1, \text{je}^2, \text{má\_rád\_žemľovku}^1, \text{nemá\_rád\_žemľovku}^1, \text{poslucháreň}^1, \text{predmet}^1, \text{profesor}^1, \text{upratovačka}^1, \text{zamestnanec}^1, \text{má\_väčší\_plat\_ako}^2, \text{má\_zapísaný}^2, \text{učí}^3\}$. A vysvetlime ich význam:

Symbol	Význam
DAR	predmet Dejiny antického Ríma
Filoména, Jozef, Mária	konkrétne osoby z tvrdení v zadaní
porcia278	porcia jedla, ktorú Jozef je
P42	posluchNone P42
$\text{š}_1, \ldots, \text{š}_3$	traja študenti zapísaní na Dejiny antického Ríma
múčnik(x)	x je múčnik
žemľovka(x)	x je žemľovka
je(x, y)	x je y (v zmysle *požíva*)
má_rád_žemľovku(x)	x má rád žemľovku
nemá_rád_žemľovku(x)	x (zamýšľaná) opačná vlastnosť: x nemá rád žemľovku
poslucháreň(x)	x je poslucháreň
predmet(x)	x je predment (v zmysle *kurz*)
profesor(x)	x je profesor(ka)
študent(x)	x je študent(ka)
upratovačka(x)	x je upratovačka (alebo upratovač)
zamestnanec(x)	x je zamestnanec
má_väčší_plat_ako(x, y)	x má väčší plat ako y
má_zapísaný(x, y)	x je zapísaný na predmet y
učí(x, y, z)	x učí predmet y v miestnosti z

⚠ Ako je vidieť z riešenia, symboly jazyka pridávame priebežne, podľa potreby. Vo vypracovaných zadaniach však býva zvykom uviesť ich na začiatku spolu s vysvetlením ich významu.

♮

1.2.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Peter je muž.

(A_2) Peter je študent.

(A_3) Lucia je žena.

(A_4) Je to študentka.

(A_5) Lucia je staršia ako Peter.

(A_6) Matematika je povinný predmet.

(A_7) Matematiku učí Eugen.

(A_8) Peter má rád Matematiku.

(A_9) Peter a Lucia sú od neho mladší.

(A_{10}) Peter dostal z Matematiky od Eugena známku A.

(A_{11}) Eugen má rád Luciu.

(A_{12}) Aj keď má Lucia z Matematiky (od neho) známku „dostatočný“.

(A_{13}) Známka „dostatočný“ je len iný názov pre E-čko, a podobne „výborný“ značí to isté ako A-čko.

(A_{14}) Lucia má rada Petra.

(A_{15}) Lucia nemá rada Matematiku.

(A_{16}) Eugen sa má rád.

(A_{17}) Všetci študenti majú radi Telocvik.

1.2.3 Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov. Snažte sa o to aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší, nevytvárajte dva symboly s tým istým významom. Vytvorte štruktúru tak, aby výroky skupiny A boli všetky pravdivé a výroky skupiny B všetky nepravdivé.

(A_1) Janka je dievča a Jurko je chlapec.

(A_2) Chlapci a dievčatá sú deti.

(A_3) Ňufko je Jankine zvieratko.

(A_4) Je to myš.

(A_5) Ňufko je veľký. Je väčší než Jurkov škrečok Chrumko.

(A_6) Jurko si Chrumka kúpil sám.

(A_7) Jurko v noci chodí kŕmiť potkana Smraďocha.

(A_8) Smraďoch však v skutočnosti je Ňufko, ktorý v tme vyzerá ako potkan.

(A_9) Všetky deti majú rady zvieratká, ktorá vlastnia, a tiež tie, ktoré kŕmia.

(B_1) Janka sa Smraďocha bojí.

(B_2) Jurko má rád potkany, nebojí sa ich.

(B_3) Ňufko je menší ako Chrumko.

(B_4) Janka má rada Jurka.

(B_5) Ňufko a Chrumko sú deti.

(B_6) Ňufka a Chrumka deťom kúpila ich mama.

2 Výrokovologické spojky

2.1 Syntax výrokovologických formúl

2.1.1 Príklad. Rozhodnite, či nasledovné postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. V prípade kladnej odpovede určte množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Svoje odpovede stručne zdôvodnite.

a) $(\text{futbalista}(\text{Adam}))$

b) $(\text{futbalista}(\text{Adam}) \land \text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA}))$

c) $\neg\neg(\text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}) \to \text{šťastný}(\text{Adam}))$

d) $(\text{šťastný}(\text{Adam}) \leftrightarrow \text{šťastný}(\neg\text{Barbora}))$

Riešenie. a) Postupnosť symbolov $(\text{futbalista}(\text{Adam}))$ nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A\,b\,B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek ale nachádza atomická formula.

b) Postupnosť symbolov $(\text{futbalista}(\text{Adam}) \land \text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA}))$ nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A\ b\ B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek nachádzajú tri atomické formuly a medzi nimi dve binárne spojky $\land$.

c) Postupnosť symbolov $\neg\neg(\text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}) \to \text{šťastný}(\text{Adam}))$ je formulou napríklad nad množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{ľúbi}, \text{šťastný}\}$ a množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Adam}, \text{Barbora}\}$ (množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ môžu obsahovať aj ľubovoľné ďalšie prvky). Postupnosť symbolov sa začína symbolom negácie $\neg$, za ňou sa musí nachádzať formula A. Keďže v tomto prípade $A = \neg(\text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}) \to \text{šťastný}(\text{Adam}))$, opäť ide o formulu v tvar $\neg B$, kde $B = (\text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}) \to \text{šťastný}(\text{Adam}))$. Formula B je ohraničená zátvorkami, musí byť teda v tvare $(C\ b\ D)$. V prípade tejto formuly teda bude $C = \text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})$ a $D = \text{šťastný}(\text{Adam})$ a binárna spojka b zodpovedá implikácii $\to$.

d) Postupnosť symbolov $(\text{šťastný}(\text{Adam}) \leftrightarrow \text{šťastný}(\neg\text{Barbora}))$ nie je formulou. Postupnosť je ohraničená zátvorkami a v ich vnútri sa naozaj nachádza výraz v tvare $A\,b\,B$. B však nie je formulou, pretože argumentom potenciálneho predikátového symbolu šťastný musí byť konštanta, ale $\neg\text{Barbora}$ nie je správnou konštantou, lebo symboly konštánt a predikátové symboly nemôžu obsahovať žiadnu z logických spojok. ♮

2.1.2 Rozhodnite, či nasledovné postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Kladnú odpoveď dokážte nájdením množín $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a vytvárajúcej postupnosti pre formulu. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

a) $(\mathsf{žena}(\mathsf{Alex}) \land \mathsf{muž}(\mathsf{Alex}))$

b) $\neg(\mathsf{má\_rád}(\mathsf{Alex}, \mathsf{Alex}))$

c) $\big(\mathsf{starší}(\mathsf{Edo}, \mathsf{Alex}) \to (\neg\mathsf{starší}(\mathsf{Alex}, \mathsf{Edo}))\big)$

d) $(\mathsf{Alex} \lor \neg\mathsf{oco})$

e) $\big(\neg(\mathsf{muž}(\mathsf{Alex}) \land \mathsf{žena}(\mathsf{Alex})) \to (\neg\mathsf{muž}(\mathsf{Alex}) \lor \neg\mathsf{žena}(\mathsf{Alex}))\big)$

f) $\big(\neg\neg\mathsf{starší}(\mathsf{Alex}, \mathsf{Edo}) \leftrightarrow (\mathsf{starší}(\mathsf{Alex}, \mathsf{Edo}) \neg\land \mathsf{muž}(\mathsf{Edo}))\big)$

2.1.3 Príklad. Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$\Big(\big(\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}) \lor (\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA}))\big) \\ \to \mathsf{ľúbi}(\mathsf{Barbora}, \mathsf{Adam})\Big)$$

Riešenie. Vytvárajúcou postupnosťou pre zadanú formulu je napríklad nasledujúca postupnosť:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA}),\\
&\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}),\\
&(\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA})),\\
&\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}),\\
&\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}),\\
&(\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}) \lor (\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA}))),\\
&\mathsf{ľúbi}(\mathsf{Barbora}, \mathsf{Adam}),\\
&\Big(\big(\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}) \lor (\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA}))\big)\\
&\qquad \to \mathsf{ľúbi}(\mathsf{Barbora}, \mathsf{Adam})\Big).
\end{aligned}$$

Nasledujúci strom predstavuje vytvárajúci strom pre zadanú formulu.

$$\Big(\big(\neg\text{hlúpy}(\text{Adam}) \lor (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA}))\big) \to \text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})\Big)$$

$$(\neg\text{hlúpy}(\text{Adam}) \lor (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA}))) \qquad \text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})$$

$$\neg\text{hlúpy}(\text{Adam}) \qquad (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA}))$$

$$\text{hlúpy}(\text{Adam}) \qquad \text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \qquad \text{BMW}(\text{BT001AA})$$

Stupeň zadanej formuly vypočítame ako:

$$\begin{aligned}
&\deg\Big(\Big(\big(\neg\text{hlúpy}(\text{Adam}) \lor (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA}))\big)\\
&\qquad \to \text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})\Big)\Big)\\
&= \deg\Big(\big(\neg\text{hlúpy}(\text{Adam}) \lor (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA}))\big)\Big)\\
&\quad + \deg(\text{ľúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}))\\
&\quad + 1\\
&= \deg(\neg\text{hlúpy}(\text{Adam}))\\
&\quad + \deg((\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \land \text{BMW}(\text{BT001AA})))\\
&\quad + 1\\
&\quad + 1\\
&= \deg(\text{hlúpy}(\text{Adam})) + 1\\
&\quad + \deg(\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA})) + \deg(\text{BMW}(\text{BT001AA})) + 1\\
&\quad + 1 + 1\\
&= 1 + 1 + 1 + 1 = 4
\end{aligned}$$

♮

2.1.4 Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$\Big((\text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Hugo}) \land \text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Tereza})) \to$$
$$\Big((\neg\text{žena}(\text{Hugo}) \land \text{muž}(\text{Hugo})) \to \text{brat}(\text{Hugo}, \text{Tereza})\Big)\Big)$$

2.2 Sémantika výrokovologických formúl

2.2.1 Príklad. V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$D = \{\text{barča}, \text{janči}, \text{karči}\}$$

$$i(\mathsf{Karol}) = \mathsf{karči}$$
$$i(\mathsf{profesor}) = \{\mathsf{karči}, \mathsf{janči}\}$$
$$i(\mathsf{hlúpy}) = \{\mathsf{janči}\}$$
$$i(\mathsf{sčítaný}) = \{\mathsf{barča}, \mathsf{karči}\}$$

vyhodnoťte nasledujúcu formulu postupom *zhora nadol* a postupom *zdola nahor*.

$$\Big(\mathsf{profesor}(\mathsf{Karol}) \to (\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol}) \land \mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol}))\Big)$$

Riešenie. 1. spôsob — zhora nadol: Podľa definície vzťahu spĺňania ($\models$) a štruktúry $\mathcal{M}$ platí:

$\mathcal{M} \models (\mathsf{profesor}(\mathsf{Karol}) \to (\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol}) \land \mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol})))$

vtt (podľa def. $\models$) $\mathcal{M} \not\models \mathsf{profesor}(\mathsf{Karol})$ alebo $\mathcal{M} \models (\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol}) \land \mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol}))$

vtt (podľa def. $\models$) $i(\mathsf{Karol}) \notin i(\mathsf{profesor})$
alebo $\mathcal{M} \models \neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol})$ a súčasne $\mathcal{M} \models \mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol})$

vtt (pretože $i(\mathsf{Karol}) \in i(\mathsf{profesor})$) $\mathcal{M} \models \neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol})$ a súčasne $\mathcal{M} \models \mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol})$

vtt (podľa def. $\models$) $\mathcal{M} \not\models \mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol})$ a súčasne $i(\mathsf{Karol}) \in i(\mathsf{sčítaný})$

vtt (pretože $i(\mathsf{Karol}) \in i(\mathsf{sčítaný})$) $\mathcal{M} \not\models \mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol})$

vtt (podľa def. $\models$) $i(\mathsf{Karol}) \notin i(\mathsf{hlúpy})$.

Pretože v $\mathcal{M}$ skutočne máme $i(\mathsf{Karol}) = \mathsf{karči} \notin \{\mathsf{janči}\} = i(\mathsf{hlúpy})$, konštatujeme, že daná formula je pravdivá v štruktúre $\mathcal{M}$, teda skutočne $\mathcal{M} \models \Big(\mathsf{profesor}(\mathsf{Karol}) \to (\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol}) \land \mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol}))\Big)$.

2. spôsob — zdola nahor: Vyhodnotíme splnenie formuly podľa definície spĺňania pre všetky prvky jej vytvárajúcej postupnosti:

$\mathsf{profesor}(\mathsf{Karol})$, $\mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol})$, $\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol})$, $\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol})$,
$(\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol}) \land \mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol}))$, $\Big(\mathsf{profesor}(\mathsf{Karol}) \to (\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol}) \land \mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol}))\Big)$

Dostávame:

1. $i(\mathsf{Karol}) \in i(\mathsf{profesor})$, teda $\mathcal{M} \models \mathsf{profesor}(\mathsf{Karol})$
2. $i(\mathsf{Karol}) \in i(\mathsf{sčítaný})$, teda $\mathcal{M} \models \mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol})$
3. $i(\mathsf{Karol}) \notin i(\mathsf{hlúpy})$, teda $\mathcal{M} \not\models \mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol})$
4. $\mathcal{M} \not\models \mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol})$, teda $\mathcal{M} \models \neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol})$
5. Keďže $\mathcal{M} \models \neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol})$ a $\mathcal{M} \models \mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol})$,
   tak $\mathcal{M} \models (\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol}) \land \mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol}))$
6. Keďže $\mathcal{M} \models (\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol}) \land \mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol}))$,
   tak $\mathcal{M} \models (\mathsf{profesor}(\mathsf{Karol}) \to (\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Karol}) \land \mathsf{sčítaný}(\mathsf{Karol})))$ ♮

2.2.2 V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$
\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\\
i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Bruno}) = 2, \quad i(\text{Hugo}) = 5, \quad i(\text{Tereza}) = 6,\\
i(\text{žena}) &= \{1, 3, 4, 6\},\\
i(\text{muž}) &= \{2, 4\},\\
i(\text{má\_rád}) &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5), (5, 6)\},\\
i(\text{brat}) &= \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 6)\},\\
i(\text{rodič}) &= \{(1, 1), (2, 5), (2, 6), (1, 5), (3, 4), (4, 2), (1, 6), (5, 6), (6, 5)\},\\
i(\text{starší}) &= \{(2, 1), (5, 6), (6, 5)\},
\end{aligned}
$$

zistite postupom *zhora nadol* (viď príklad 2.2.1), či je pravdivá formula A_1, a postupom *zdola nahor*, či sú pravdivé formuly A_2 a A_3.

(A_1) (starší(Bruno, Alex) → ¬starší(Alex, Bruno))

(A_2) (¬má_rád(Alex, Bruno) ↔ ¬má_rád(Bruno, Alex))

(A_3) $\Big($(rodič(Bruno, Hugo) ∧ rodič(Bruno, Tereza)) →
$\big($(¬žena(Hugo) ∧ muž(Hugo)) → brat(Hugo, Tereza)$\big)\Big)$

2.2.3 Vytvorte takú štruktúru, v ktorej budú všetky nasledujúce formuly pravdivé:

(A_1) (profesor(Alena) ∧ učiteľ(Alena))

(A_2) (profesor(Karol) ↔ učiteľ(Karol))

(A_3) (¬profesor(Karol) → (¬pozná(Karol, Alena) ∨ ¬vychádza(Karol, Alena)))

(A_4) Karol $\not\doteq$ Alena

Riešenie. Hľadáme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ tak, aby $\mathcal{M} \models A_1, \ldots, \mathcal{M} \models A_4$.

Pri hľadaní štruktúry nám pomôže, keď podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol rozoberieme, kedy je v $\mathcal{M}$ pravdivá najkomplikovanejšia formula A_3. Zistíme, že $\mathcal{M} \models A_3$ vtt $\mathcal{M} \models$ profesor(Karol) alebo $\mathcal{M} \not\models$ pozná(Karol, Alena) alebo $\mathcal{M} \not\models$ vychádza(Karol, Alena).

Vyberieme si poslednú možnosť, lebo predikát vychádza sa v inej formule nenachádza. Môžeme ho teda pokojne interpretovať podľa potrieb pravdivosti A_3. Vytvoríme doménu, interpretácie konštánt a interpretáciu predikátu vychádza tak, aby (Karol, Alena) $\notin i$(vychádza).

Následne štruktúru doplníme tak, aby boli aj ostatné formuly pravdivé.

Nech

$$
\begin{aligned}
D &= \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\} \\
i(\text{Alena}) &= \text{učiteľka218} \\
i(\text{Karol}) &= \text{školník} \\
i(\text{profesor}) &= \{\text{učiteľka218}\} \\
i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\} \\
i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}), \\
&\qquad (\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\} \\
i(\text{vychádza}) &= \{(\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}), (\text{upratovačka2}, \text{upratovačka1})\}
\end{aligned}
$$

Táto štruktúra spĺňa všetky formuly A_1–A_4. Zdôvodnenie môžeme spraviť analogicky ako v úlohe 2.1.4. ♮

2.2.4 Vytvorte štruktúru, v ktorej budú súčasne pravdivé všetky nasledujúce formuly:

(A_1) titul(Sofiina_voľba)

(A_2) autor(Styron,Sofiina_voľba)

(A_3) (titul(Kto_chytá_v_žite) ∧ autor(Salinger, Kto_chytá_v_žite))

(A_4) $\Big(\neg\Big(\text{číta(Adam, k325)} \land \text{obdivuje(Dana, Adam)}\Big) \to$
$\neg\Big(\text{kniha(k325, Sofiina\_voľba)} \lor \text{kniha(k325, Kto\_chytá\_v\_žite)}\Big)\Big)$

(A_5) (kniha(k325, Kto_chytá_v_žite) ↔ ¬kniha(k325, Sofiina_voľba))

Pomôcka. Aby ste zistili, ako majú byť v štruktúre interpretované predikáty, analyzujte význam formúl podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol, ako sme ukázali na prednáške.

2.2.5 Sformulujte základné definície syntaxe (symboly jazyka, atomická formula, formula, podformula) a sémantiky (pravdivosť formuly v štruktúre) pre výrokovú časť logiky prvého rádu s binárnymi spojkami → (implikácia) a ↛ („a nie“), pričom neformálny význam $(A \nrightarrow B)$ je: A je pravdivá a B je nepravdivá. Formuly nebudú obsahovať iné spojky okrem týchto dvoch.

Účelom tejto úlohy je, aby ste si prečítali a upravili definície z prednášky a pokúsili sa osvojiť si spôsob vyjadrovania, ktorý sa v nich používa. Môže vám pripadať ťažkopádny, je však presný. Ak vám nejaká formulácia pripadá zbytočne komplikovaná, môžete sa ju pokúsiť zjednodušiť, no snažte sa, aby ste nezmenili jej význam.

Schopnosť presne sa vyjadriť je potrebná pri programovaní (počítaču musíte všetko vysvetliť do detailov), ale napríklad aj pri písaní špecifikácií softvéru, či požiadaviek na vašu bakalársku prácu.

2.3 Formalizácia do výrokovologických formúl

2.3.1 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

(A_1) Lucia a jej kamarát sú deti.

(A_2) Luciin kamarát má obľúbené hračky autíčko a koníka.

(A_3) Obe jeho obľúbené hračky sú čierne, ale páčia sa aj Lucii, hoci jej obľúbená farba je červená.

(A_4) Luciina obľúbená hračka je tiež autíčko, napriek tomu, že je dievča.

(A_5) Jej autíčko je ale červené.

(A_6) Lucia sa vždy hrá so svojím autíčkom a buď ešte s bábikou Elzou, ktorá má červené šaty, alebo s kamarátovým čiernym koníkom.

(A_7) Lucia je veľmi kamarátska, ale Peter je asi taký kamarátsky ako je skromný.

(A_8) Lucia sa preto môže hrať buď so svojím autíčkom alebo s Petrovým, ale s oboma naraz sa hrať nemôže.

(A_9) V druhom prípade mu totiž musí to svoje požičať.

(A_{10}) Peter je meno spomínaného Luciinho kamaráta.

(A_{11}) Ak je slnečný deň, Peter sa hrá s loptou.

(A_{12}) Psa venčí, ak je pekne.

(A_{13}) S Luciou sa hrá, jedine ak nie je pekne.

(A_{14}) Pod nie je pekne myslíme, že nie je slnečný deň.

Pomôcka. Vo výrokoch sa zjavne hovorí o konkrétnych objektoch (napríklad autíčko a koník Luciinho kamaráta), ktoré ale nemajú mená. Pri formalizácii ich označte vhodnými konštantami. Ďalšou zaujímavosťou je počasie. Čoho by mohlo byť vlastnosťou?

2.3.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

(A_1) Do baru vošli Freddy a George.

(A_2) Barmanka naliala drink Freddymu.

(A_3) Barmankou je buď Mary alebo Jane. Službu má vždy len jedna z nich.

(A_4) Harry nie je v bare, len ak nemá službu Mary, a naopak.

(A_5) Freddy, George a Harry sú kamaráti. Barmanky sa však spolu nekamarátia.

(A_6) Freddymu jeho drink chutí, ak je to whisky, ale nie, ak je to koňak. Vtedy by však určite chutil Georgeovi.

(A_7) Freddymu jeho drink nechutí.

(A_8) Ak je barmankou Mary, tak naliala Freddymu whisky alebo koňak.

(A_9) Jane nalieva Freddymu vždy iba whisky.

(A_{10}) Iné drinky Mary ani Jane nenalievajú, pokiaľ nie je v bare prítomný Harry.

Pomôcka. Všeobecné tvrdenia A_9–A_{10} aplikujte na Freddyho drink. Napíšte teda také formuly, aby tvrdenia A_9–A_{10} platili pre Freddyho drink, ktorý mu barmanka naliala v A_2.