Matematika 4 — Logika pre informatikov
Teoretická úloha 11

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **18. mája 2020 o 12:20** cez odovzdávací formulár pre tu11[1].

Odovzdávajte URL odkaz na **jeden PDF dokument s právom na komentovanie** nahratý na Google Drive; dokument musí obsahovať celé riešenie v textovej forme.

Neodovzdávajte: priečinky; dokumenty s riešeniami viacerých úloh.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Na riešenia všetkých úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá**[2].

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky[3], kde nájdete riešené príklady a ďalšie úlohy na precvičovanie.

Riešenia niektorých úloh môžete skontrolovať pomocou editora prvorádových tabiel[4] a prieskumníka štruktúr[5].

Ak nie je uvedené inak, v každom použitom jazyku $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu predpokladáme množinu indivíduových premenných $\mathcal{V}_\mathcal{L} = \{k, m, n, p, q, r, u, v, w, x, y, z, k_1, m_1, n_1, p_1, q_1, r_1, u_1, v_1, w_1, x_1, y_1, z_1, k_2, m_2, \dots\}$.

[1] https://forms.gle/Sn4dWuBBRA368zy36
[2] https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh
[3] https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf
[4] https://dai.fmph.uniba.sk/courses/lpi/folTableauEditor/
[5] https://bl96.github.io/structure-explorer/

Cvičenie 11.1. (7.5.1) Uvažujme doménu rodinných vzťahov, ktorú opisujeme jazykom $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu, ktorý obsahuje predikáty ako žena^1, muž^1, rodič^2, súrodenec^2, manželia^2 so zamýšľaným významom:

Predikát	Význam
$\text{žena}(x)$	x je žena
$\text{muž}(x)$	x je muž
$\text{rodič}(x, y)$	x je (vlastným) rodičom y
$\text{súrodenec}(x, y)$	x je (pokrvným) súrodencom y
$\text{manželia}(x, y)$	x a y sú manželmi

Sformulujte slovenské definície nasledovných odvodených pojmov (tak, ako ich poznáte z prirodzeného jazyka) a zapíšte ich ako definície predikátov, ktorými rozšírime jazyk $\mathcal{L}$:

(D_1) prastarý_rodič[2]

(D_2) sesternica[2]

(D_3) macocha[2]

(D_4) jedináčik[1]

⚠ Sesternica nie je sestra.

Cvičenie 11.2. (7.5.2) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk z predchádzajúcej úlohy ďalej rozšírený o symboly konštánt Andrea, Cyril, Boris, Diana tak, aby $\mathcal{M}$ splnila všetky definície predikátov z úlohy 11.1 a súčasne nasledujúce formuly v každom ohodnotení:

(A_1) $((\text{rodič}(\text{Andrea}, \text{Cyril}) \land \exists x\, \text{rodič}(\text{Andrea}, x)) \land \text{rodič}(\text{Boris}, \text{Diana}))$,

(A_2) $\exists x\, \exists y\, \exists z((\text{rodič}(x, \text{Andrea}) \land (\text{rodič}(x, \text{Boris}) \land \text{žena}(x))) \land$
$(\text{rodič}(y, \text{Andrea}) \land \text{rodič}(z, \text{Andrea})))$

(A_3) $(\forall x\, \neg\text{rodič}(x, x) \land \forall x\, \forall y(\text{rodič}(x, y) \to \neg\text{rodič}(y, x)))$,

(A_4) $\forall x((\text{žena}(x) \lor \text{muž}(x)) \land \neg(\text{žena}(x) \land \text{muž}(x)))$,

(A_5) $\forall x\, \forall y(\text{rodič}(x, y) \to \exists z(\text{rodič}(z, y) \land (\text{muž}(x) \leftrightarrow \neg\text{muž}(z))))$

(A_6) $\forall p\, \forall r\, \forall x(((\text{rodič}(p, x) \land \text{rodič}(r, x)) \land (\text{žena}(p) \leftrightarrow \text{žena}(r))) \to p \doteq r)$,

(A_7) $\forall x\, \forall y(\text{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow (\neg x \doteq y \land \exists z(\text{rodič}(z, x) \land \text{rodič}(z, y))))$;

(B_1) $\exists x\, \exists y\, \text{prastarý\_rodič}(x, y)$,

(B_2) $\exists x(\text{jedináčik}(x) \land \forall y(\text{rodič}(y, x) \to \text{jedináčik}(y)))$,

(B_3) $\exists x\, \exists y(\text{macocha}(x, y) \land \exists z\, \text{rodič}(x, z))$.

💡 Všímajte si, ktoré formuly skutočne vynútia pridanie nových objektov do domény a ktoré splníte aj pomocou existujúcich objektov.

⚠ Nezabudnite, že na splnenie definície nejakého predikátu musíte zabezpečiť, aby súčasne:

- všetky objekty (n-tice), ktoré patria do interpretácie predikátu, mali vlastnosti požadované definíciou;
- všetky objekty (n-tice), ktoré majú požadované vlastnosti, patrili do interpretácie predikátu.

Cvičenie 11.3. (7.5.3) Dokážte, že z teórie, pozostávajúcej zo (sformalizovaných) tvrdení:

1. Definícia A_7 pojmu súrodenec z cvičenia 11.2.
2. Definícia D_2 pojmu sesternica z cvičenia 11.1.
3. Definícia D_4 pojmu jedináčik z cvičenia 11.1.
4. Každý rodičovský pár má svoje najobľúbenejšie dieťa, ktoré je dieťaťom tohto páru a tento pár ho preferuje pred svojimi ostatnými deťmi.

vyplýva:

a) Pre každých dvoch jedináčikov platí, že nie sú súrodenci.

b) Dieťa jedináčikov nemá žiadne sesternice.

c) Každý jedináčik je najobľúbenejším dieťaťom svojho rodičovského páru.

Cvičenie 11.4. (7.3.3) Dokážte, že nasledujúce formuly sú platné, resp. vyplývajú z uvedenej teórie:

a) $\models \exists x(\mathrm{pije}(x) \to \forall y\, \mathrm{pije}(y))$,

b) $\models \forall x(\exists y\, \mathrm{pozna}(x, \mathrm{otec}(y)) \to \exists y\, \mathrm{pozna}(x, y))$,

c) $\{\forall x(\mathrm{socialny}(\mathrm{najKam}(x)) \to \exists y\, \mathrm{pozna}(x, \mathrm{najKam}(y)))\}$
$\models \exists x(\mathrm{socialny}(x) \to \forall y\, \exists z\, \mathrm{pozna}(\mathrm{matka}(y), z))$.

Dôkazy platnosti prvých dvoch formúl sú prípravou na dôkaz vyplývania v tretej časti. Odporúčame vám skontrolovať tablo pomocou editora prvorádových tabiel.

Hodnotená časť

Úloha 11.5. (7.5.5) Sformalizujte v logike prvého rádu nasledujúce tvrdenia o deťoch a hračkách.

Následne tablovým kalkulom dokážte, že z tvrdení 1–9 vyplýva tvrdenie 10. V maximálnej miere využite korektné pravidlá z prednášky (tvrdenie 14.11) a zbierky (úloha 5.3.1).

1. Dieťa je skromné práve vtedy, keď chce najviac jednu hračku.
2. Rozmaznané sú také deti, ktoré sú spokojné iba vtedy, keď dostali všetky hračky, ktoré chcú. Iné deti rozmaznané nie sú.

3. Za vďačné považujeme také a iba také dieťa, ktorému na spokojnosť stačí, že dostalo akúkoľvek hračku.
4. Ako náročné definujeme tie deti, ktorých spokojnosť vyžaduje, aby dostali iba také hračky, ktoré chcú.
5. Ak sa dieťa hnevá, hoci dostalo všetky hračky, ktoré chce, tak hovoríme, že zlostí. Platí to aj naopak.
6. Nikto spokojný sa nehnevá.
7. Každý má práve jednu vytúženú hračku. Túto hračku chce.
8. Každý má aj práve jednu obľúbenú hračku. Ak vôbec dostal nejakú hračku, tak aj túto.
9. Žirafa Irma je hračka.

$$\therefore$$

10. Ak skromné, ale náročné dieťa dostalo žirafu Irmu a je spokojné, tak je to jeho vytúžená hračka.

Pomôcka 1. Definované vlastnosti prisudzujeme deťom, ale v definíciách to nemusíte uvádzať. Teda aj keď by si úplná formalizácia vyžadovala napr. pre definíciu skromného dieťaťa formulu v tvare: $\forall x(\text{dieta}(x) \rightarrow (\text{skromne}(x) \leftrightarrow \cdots))$, môžete to zjednodušiť na: $\forall x(\text{skromne}(x) \leftrightarrow \cdots)$. Zjednodušíte si tým dôkaz.

Pomôcka 2. Vzťahy s jednoznačne priradenými objektmi formalizujte funkčnými symbolmi. Tým automaticky dostanete existenciu a jednoznačnosť priradených objektov. Potom stačí sformalizovať iba ich druh a ďalšie vlastnosti. Použitie predikátov v týchto prípadoch by veľmi skomplikovalo formalizáciu a najmä dôkazy.

Napríklad, keď chceme jazyk a teóriu z cvičení 11.1 a 11.2 rozšíriť o formalizáciu tvrdenia: *Každý má práve jednu mamu, ženu, ktorá je jeho rodičom*, existenciu a jednoznačnosť mamy pre každý objekt zabezpečíme pridaním funkčného symbolu matka do jazyka. Vlastnosti a vzťahy mamy, o ktorých sa v tvrdení ďalej hovorí, potom môžeme vyjadriť použitím tohto funkčného symbolu: $\forall x(\text{žena}(\text{matka}(x)) \land \text{rodič}(\text{matka}(x), x))$.

Prémiová časť

Prémiová úloha 11.6. (1 bod, 7.6.2) Zadefinujte syntax logiky prvého rádu s funkčnými symbolmi a s kvantifikátorom $\geqslant 2$ („pre aspoň dve“) namiesto klasických kvantifikátorov — teda jazyk a pojmy ako *term*, *formula*.

Zadefinujte pojmy *hodnota termu v štruktúre pri ohodnotení* a *štruktúra spĺňa formulu pri ohodnotení* pre formuly v tejto syntaxi.