Korektnosť a úplnosť výrokovologických tabiel

6. prednáška · Matematika (4): Logika pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Letný semester 2019/2020

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Obsah 6. prednášky

- Dôkazy a výrokovologické tablá
  - Výrokovologické tablá — opakovanie
  - Korektnosť tabiel
  - Testovanie nesplniteľnosti, splniteľnosti a falzifikovateľnosti
  - Úplnosť

Rekapitulácia

Pred dvoma týždňami:

- Sformalizovali sme dôkazy sporom pomocou tabiel.
- Vyslovili, ale nedokázali tvrdenie o korektnosti tabiel:
  uzavreté tablo dokazuje výrokovologickú nesplniteľnosť
- a dôsledky pre dokazovanie vyplývania a tautológií.

Dnes:

- Dokážeme korektnosť tabiel.
- Preskúmame, čo vedia tablá povedať o splniteľnosti.
- Dokážeme úplnosť tabiel.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Dôkazy a výrokovologické tablá

Výrokovologické tablá — opakovanie

Tablo pre množinu označených formúl

Definícia 5.1

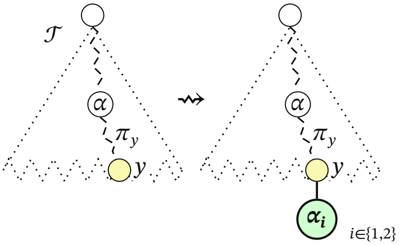
Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre*** S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - $\boldsymbol{\alpha}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - $\boldsymbol{\beta}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.
  - $\boldsymbol{S^+}$: Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Nič iné nie je tablom pre S^+.

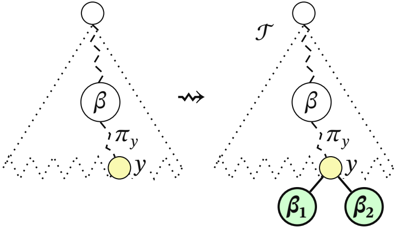
Tablá a tablové pravidlá

Pôvodné tablo	**Možné priame rozšírenie**	**Pravidlá a označené formuly v nich**



$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}$$

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$



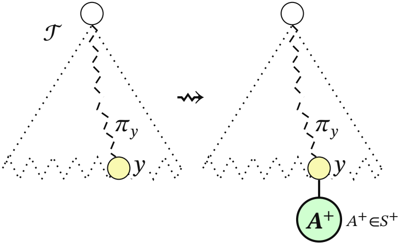
$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Legenda: y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

Tablá a tablové pravidlá (pokračovanie)

Pôvodné tablo	**Možné priame rozšírenie**	**Pravidlá a označené formuly v nich**	
		$\dfrac{}{A^+}$	$A^+ \in S^+$



Legenda: y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

Uzavretosť a otvorenosť vetvy a tabla

Definícia 5.2

Vetvou tabla $\mathcal{T}$ je každá cesta od koreňa $\mathcal{T}$ k niektorému listu $\mathcal{T}$.

Označená formula X^+ sa ***vyskytuje na vetve*** π v $\mathcal{T}$
vtt X^+ sa nachádza v niektorom vrchole na π.
Skrátene to budeme zapisovať $X^+ \in \mathrm{formulas}(\pi)$.

Tablo $\sim$ dôkaz sporom. Vetvenie $\sim$ rozbor možných prípadov.

$\Longrightarrow$ Spor musí nastať vo všetkých vetvách.

Definícia 5.3

Vetva π tabla $\mathcal{T}$ je ***uzavretá*** vtt na π sa súčasne vyskytujú označené formuly $\mathbf{F}X$ a $\mathbf{T}X$ pre nejakú formulu X.
Inak je π ***otvorená***.

Tablo $\mathcal{T}$ ***je uzavreté*** vtt *každá* jeho vetva je uzavretá.
Naopak, $\mathcal{T}$ je ***otvorené*** vtt *aspoň jedna* jeho vetva je otvorená.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Korektnosť tabiel

Korektnosť tablového kalkulu

Veta 5.16 (Korektnosť tablového kalkulu)

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+. Potom je množina S^+ nesplniteľná.

Dôsledok 5.17

Nech S je výrokovologická teória a X je výrokovologická formula.
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{T}\,A \mid A \in S\} \cup \{\mathbf{F}\,X\}$ (skrát. $S \vdash_{\mathrm{p}} X$), tak z S výrokovologicky vyplýva X ($S \vDash_{\mathrm{p}} X$).

Dôsledok 5.18

Nech X je výrokovologická formula.
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$ (skrátene $\vdash_{\mathrm{p}} X$), tak X je tautológia ($\vDash_{\mathrm{p}} X$).

Korektnosť — idea dôkazu

Aby sme dokázali korektnosť tabiel, dokážeme postupne dve lemy:

K1: Ak máme tablo pre splniteľnú množinu S^+
s aspoň jednou splniteľnou vetvou,
tak každé jeho priame rozšírenie má tiež splniteľnú vetvu.

K2: Každé tablo pre splniteľnú množinu S^+
má aspoň jednu splniteľnú vetvu.

Z toho ľahko sporom dokážeme, že množina, pre ktorú sme našli uzavreté tablo je nesplniteľná.

Korektnosť — pravdivosť priameho rozšírenia tabla

Všimnime si:

Vetva sa správa ako konjunkcia svojich označených formúl — všetky musia byť naraz pravdivé.

Tablo sa správa ako disjunkcia vetiev — niektorá musí byť pravdivá.

Definícia 5.19

Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+, nech π je vetva tabla $\mathcal{T}$ a nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. Potom:

- ***vetva π je pravdivá vo v*** ($v \models_p \pi$) vtt vo v sú pravdivé **všetky** označené formuly vyskytujúce sa na vetve π.
- ***tablo $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v*** ($v \models_p \mathcal{T}$) vtt **niektorá** vetva v table $\mathcal{T}$ je pravdivá.

Korektnosť — pravdivosť priameho rozšírenia tabla

Pomocou predchádzajúcej definície sformulujeme lemu K1 takto:

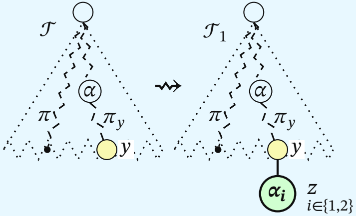
Lema 5.20 (K1)

Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$.
Ak S^+ a $\mathcal{T}$ sú pravdivé vo v,
tak aj každé priame rozšírenie $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v.

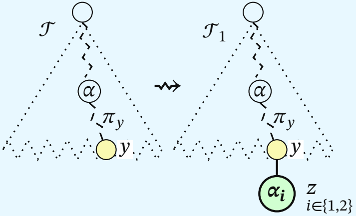
Dôkaz lemy K1.

Nech $v \models_p S^+$ a nech $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v. Potom je pravdivá niektorá vetva v $\mathcal{T}$. Zoberme jednu takú vetvu a označme ju π. Nech $\mathcal{T}_1$ je priame rozšírenie $\mathcal{T}$. Nastáva jeden z prípadov:

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom α, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje α_1 alebo α_2 pre nejakú formulu α na vetve π_y.



Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π, a teda aj $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v.

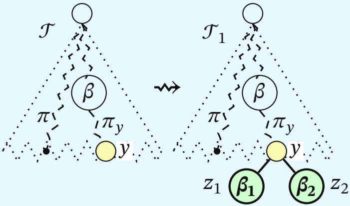


Ak $\pi = \pi_y$, tak α je pravdivá vo v, pretože α je na π. Potom aj α_1 a α_2 sú pravdivé vo v (pozorovanie 5.8). Vetva π_z v table $\mathcal{T}_1$ rozširuje vetvu π pravdivú vo v o vrchol z obsahujúci ozn. formulu α_1 alebo α_2 pravdivú vo v. Preto π_z je pravdivá vo v, a teda aj tablo $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v.

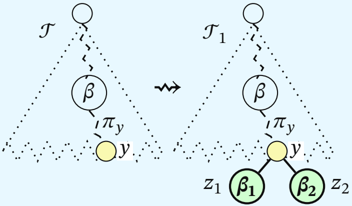
Dôkaz lemy K1.

Nech $v \models_p S^+$ a nech $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v. Potom je pravdivá niektorá vetva v $\mathcal{T}$. Zoberme jednu takú vetvu a označme ju π. Nech $\mathcal{T}_1$ je priame rozšírenie $\mathcal{T}$. Nastáva jeden z prípadov:

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom β, pridaním detí z_1 a z_2 nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z_1 obsahuje β_1 a z_2 obsahuje β_2 pre nejakú formulu β na vetve π_y.



Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π, a teda aj $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v.



Ak $\pi = \pi_y$, tak $v \models_p \beta$, pretože β je na π. Potom $v \models_p \beta_1$ alebo $v \models_p \beta_2$ (poz. 5.11).

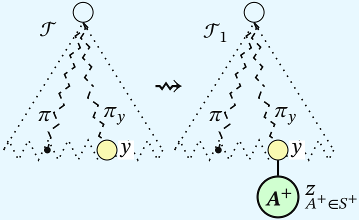
Ak $v \models_p \beta_1$, tak $v \models_p \pi_{z_1}$, a teda $v \models_p \mathcal{T}_1$.

Ak $v \models_p \beta_2$, tak $v \models_p \pi_{z_2}$, a teda $v \models_p \mathcal{T}_1$.

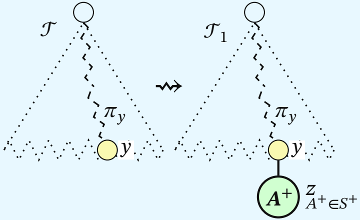
Dôkaz lemy K1.

Nech $v \models_p S^+$ a nech $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v. Potom je pravdivá niektorá vetva v $\mathcal{T}$. Zoberme jednu takú vetvu a označme ju π. Nech $\mathcal{T}_1$ je priame rozšírenie $\mathcal{T}$. Nastáva jeden z prípadov:

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom S^+, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje formulu $A^+ \in S^+$.



Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π, a teda aj $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v.



Ak $\pi = \pi_y$, tak π_z v table $\mathcal{T}_1$ je pravdivá vo v, pretože je rozšírením vetvy π pravdivej vo v o vrchol z obsahujúci formulu A^+ pravdivú vo v (pretože $v \models_p S^+$ a $A^+ \in S^+$). Preto tablo $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v. $\square$

Korektnosť — pravdivosť množiny a tabla pre ňu

Lema 5.21 (K2)

Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie pre $\mathcal{L}$.
Ak S^+ je pravdivá vo v, tak aj $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v.

Dôkaz lemy K2.

Nech S^+ je množina označených formúl, nech v je ohodnotenie a nech $v \models_p S^+$. Úplnou indukciou na počet vrcholov tabla $\mathcal{T}$ dokážeme, že vo v je pravdivé každé tablo $\mathcal{T}$ pre S^+.

Ak má $\mathcal{T}$ jediný vrchol, tento vrchol obsahuje formulu $A^+ \in S^+$, ktorá je pravdivá vo v. Preto je pravdivá jediná vetva v $\mathcal{T}$, teda aj $\mathcal{T}$.

Ak $\mathcal{T}$ má viac ako jeden vrchol, je priamym rozšírením nejakého tabla $\mathcal{T}_0$, ktoré má o 1 alebo o 2 vrcholy menej ako $\mathcal{T}$.
Podľa indukčného predpokladu je $\mathcal{T}_0$ pravdivé vo v.
Podľa lemy K1 je potom vo v pravdivé aj $\mathcal{T}$. □

Dôkaz vety o korektnosti 5.16.

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+.

Sporom: Predpokladajme, že existuje ohodnotenie, v ktorom je S^+ pravdivá. Označme ho v.

Potom podľa lemy K2 je vo v pravdivé tablo $\mathcal{T}$, teda vo v je pravdivá niektorá vetva π v $\mathcal{T}$.

Pretože $\mathcal{T}$ je uzavreté, aj vetva π je uzavretá. Na π sa teda nachádzajú označené formuly $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}X$ pre nejakú formulu X.

Pretože π je pravdivá vo v, musia byť vo v pravdivé všetky formuly na nej. Ale $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}X$ vtt $v \models_{\mathrm{p}} X$ a $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}X$ vtt $v \not\models_{\mathrm{p}} X$.

Teda $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}X$ nemôžu byť obe pravdivé, čo je spor. $\square$

Dôkazy a výrokovologické tablá

Testovanie nesplniteľnosti, splniteľnosti a falzifikovateľnosti

Úplná vetva a tablo

Príklad 5.22

Zistime tablom, či $\{((\mathtt{rychly}(\mathtt{p}) \lor \mathtt{spravny}(\mathtt{p})) \land (\mathtt{citatelny}(\mathtt{p}) \lor \mathtt{rychly}(\mathtt{p})))\} \vDash_{\mathrm{p}} (\mathtt{rychly}(\mathtt{p}) \land (\mathtt{spravny}(\mathtt{p}) \lor \mathtt{citatelny}(\mathtt{p})))$.

Vybudujeme tablo pre množinu označených formúl:

$$\{\mathbf{T}((\mathtt{rychly}(\mathtt{p}) \lor \mathtt{spravny}(\mathtt{p})) \land (\mathtt{citatelny}(\mathtt{p}) \lor \mathtt{rychly}(\mathtt{p}))),$$
$$\mathbf{F}(\mathtt{rychly}(\mathtt{p}) \land (\mathtt{spravny}(\mathtt{p}) \lor \mathtt{citatelny}(\mathtt{p})))\}$$

Podarí sa nám ho uzavrieť?

Úplná vetva a tablo

Nech v príklade tablové pravidlá používame akokoľvek,

- **nenájdeme uzavreté** tablo, ale
- ak pravidlá nepoužívame opakovane na rovnakú formulu v rovnakej vetve, po čase **vybudujeme úplné** a **otvorené** tablo.

Definícia 5.23 (Úplná vetva a úplné tablo)

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+.

Vetva π v table $\mathcal{T}$ ***je úplná*** vtt má všetky nasledujúce vlastnosti:

- pre každú označenú formulu α, ktorá sa vyskytuje na π, sa **obidve** označené formuly α_1 a α_2 vyskytujú na π;
- pre každú označenú formulu β, ktorá sa vyskytuje na π, sa **aspoň jedna** z označených formúl β_1, β_2 vyskytuje na π;
- **každá** $X^+ \in S^+$ sa vyskytuje na π.

Tablo $\mathcal{T}$ je úplné vtt **každá** jeho vetva je buď **úplná alebo uzavretá**.

Otvorené tablo a splniteľnosť

Z **otvoreného** a **úplného** tabla pre S^+ môžeme vytvoriť ohodnotenie v:

1. nájdeme otvorenú vetvu π,
2. pre každý atóm A
   - ak sa na π nachádza $\mathbf{T}\,A$, definujeme $v(A) = t$;
   - ak sa na π nachádza $\mathbf{F}\,A$, definujeme $v(A) = f$;
   - inak definujeme $v(A)$ ľubovoľne.

V tomto v je pravdivá π, a preto je v ňom **pravdivá aj S^+** (všetky formuly z S^+ sa vyskytujú na π, lebo π je úplná).

Otázka

- Dá sa vždy nájsť úplné tablo pre S^+?
- Naozaj sa z úplného otvoreného tabla dá vytvoriť model S^+?

Existencia úplného tabla

Lema 5.24 (o existencii úplného tabla)

Nech S^+ je konečná množina označených formúl.

Potom existuje úplné tablo pre S^+.

Dôkaz.

Vybudujme tablo $\mathcal{T}_0$ pre S^+ tak, že do koreňa vložíme niektorú formulu z S^+ a opakovaním spravidla S^+ postupne doplníme ostatné.

Potom tablo postupne rozširujeme tak, že vyberieme ľubovoľný list y tabla $\mathcal{T}_i$, ktorého vetva π_y je otvorená a nie je úplná.
Potom nastane aspoň jedna z možností:

- Na π_y sa nachádza nejaká formula α,
  ale nenachádza sa **niektorá** z formúl α_1 a α_2.
- Na π_y sa nachádza nejaká formula β,
  ale nenachádza sa **ani jedna** z formúl β_1 a β_2.

Ak platí prvá alebo obe možnosti, aplikujeme pravidlo α.
Ak platí druhá možnosť, aplikujeme pravidlo β.
Získame tablo $\mathcal{T}_{i+1}$, s ktorým proces opakujeme.

Tento proces po konečnom počte krokov (prečo?) vytvorí nejaké tablo $\mathcal{T}_n$, v ktorom už neexistuje vetva, ktorá by bola otvorená a nebola úplná.
Teda každá vetva v $\mathcal{T}_n$ je buď uzavretá alebo úplná, čiže $\mathcal{T}_n$ je úplné. $\square$

Dôkazy a výrokovologické tablá

Úplnosť

Nadol nasýtené množiny a Hintikkova lemma

Definícia 5.25

Množina označených formúl S^+ sa nazýva *nadol nasýtená* vtt platí:

H_0: v S^+ sa nevyskytujú naraz $\mathbf{T}\,A$ a $\mathbf{F}\,A$ pre žiaden predikátový atóm A;

H_1: ak $\alpha \in S^+$, tak $\alpha_1 \in S^+$ a $\alpha_2 \in S^+$;

H_2: ak $\beta \in S^+$, tak $\beta_1 \in S^+$ alebo $\beta_2 \in S^+$.

Pozorovanie 5.26

Nech π je úplná otvorená vetva nejakého tabla $\mathcal{T}$.

Potom množina všetkých formúl na π je nadol nasýtená.

Lema 5.27 (Hintikkova)

Každá nadol nasýtená množina S^+ je splniteľná.

Dôkaz Hintikkovej lemy.

Chceme dokázať, že existuje ohodnotenie v, v ktorom sú pravdivé všetky označené formuly z S^+. Definujme v pre každý predikátový atóm A takto:

$$v(A) = \begin{cases} t, & \text{ak } \mathbf{T}\,A \in S^+; \\ f, & \text{ak } \mathbf{F}\,A \in S^+; \\ t, & \text{ak ani } \mathbf{T}\,A \text{ ani } \mathbf{F}\,A \text{ nie sú v } S^+. \end{cases}$$

v je korektne definované vďaka H_0 (každému atómu priradí t alebo f, žiadnemu nepriradí obe).

Indukciou na stupeň formuly dokážeme, že vo v sú pravdivé všetky formuly z S^+:

1. Všetky označené predikátové atómy z S^+ sú pravdivé vo v.
2. Nech $X^+ \in S^+$ a nech platí IP: Vo v sú pravdivé všetky formuly z S^+ nižšieho stupňa ako X^+. X^+ je buď α alebo β:

   Ak X^+ je α, potom obidve $\alpha_1, \alpha_2 \in S^+$ (H_1), sú nižšieho stupňa ako X^+,
   a teda podľa indukčného predpokladu sú pravdivé vo v,
   preto (podľa poz. 5.8) je v ňom pravdivá aj α.

   Ak X^+ je β, potom aspoň jedna z β_1, β_2 je v S^+ (H_2). Nech je to ktorákoľvek,
   má nižší stupeň ako X^+, teda podľa IP je pravdivá vo v,
   a preto (podľa poz. 5.11) je vo v pravdivá aj β. □

Úplnosť

Úplnosť kalkulu neformálne:

Ak je nejaké tvrdenie pravdivé, tak existuje jeho dôkaz v kalkule.

Veta 5.28 (o úplnosti)

Nech S^+ je konečná nesplniteľná množina označených formúl.

Potom existuje uzavreté tablo pre S^+.

Dôsledok 5.29

Nech S je konečná teória a X je formula.

Ak $S \models_{\mathrm{p}} X$, tak $S \vdash_{\mathrm{p}} X$.

Dôsledok 5.30

Nech X je formula. Ak $\models_{\mathrm{p}} X$, tak $\vdash_{\mathrm{p}} X$.

Úplnosť platí aj pre nekonečné množiny, ale dôkaz je ťažší.

Úplnosť — dôkaz

Dôkaz vety o úplnosti.

Zoberme ľubovoľnú konečnú nesplniteľnú množinu označených formúl S^+.

Podľa lemy o existencii úplného tabla vieme pre S^+ nájsť úplné tablo $\mathcal{T}$, teda také, že každá vetva je buď uzavretá alebo úplná.

Ak by niektorá vetva bola otvorená, potom musí byť úplná, a teda nadol uzavretá. Podľa Hintikkovej lemy by bola splniteľná. Pretože obsahuje všetky formuly z S^+, bola by aj S^+ splniteľná, čo je spor s nesplniteľnosťou S^+.

Preto musia byť všetky vetvy tabla $\mathcal{T}$ uzavreté. $\square$

Literatúra

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.