
Matematika 4 — Logika pre informatikov

Teoretická úloha 1

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **24. februára 2020 o 11:30** na prednáške.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Ohodnotené riešenia poskytneme k nahliadnutiu, ale **nevrátime** vám ich, uchovajte si kópiu. Na riešenia všetkých úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá** zverejnené na adrese https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course/Mathematics_4/sk#pravidla-uloh.

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky, v ktorej nájdete ďalšie úlohy na precvičovanie a vzorové riešenia: <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>.

Pri riešení niektorých úloh vám môže pomôcť prieskumník štruktúr (<https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/structure-explorer/>).

Cvičenie 1.1. (1.1.1,1.1.5) Uvažujme jazyk \mathcal{L} logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Alex, Beáta, Cyril, Dana, Edo, Gabika, oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{žena}^1, \text{rodič}^2, \text{dieťa}^3, \text{starší}^2\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\text{žena}(x)$	x je žena
$\text{rodič}(x, y)$	x je rodičom y
$\text{dieťa}(u, x, y)$	u je dieťaťom matky x a otca y
$\text{starší}(x, y)$	x je starší ako y

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) žena(Beáta)

(B_1) žena(Alex)

(A_2) žena(Dana)

(B_2) dieťa(Beáta, Gabika, oco)

(A_3) rodič(Dana, Alex)

(B_3) rodič(Edo, Edo)

(A_4) rodič(Dana, Beáta)

(B_4) starší(Beáta, Gabika)

(A_5) dieťa(Cyril, Gabika, Edo)

(B_5) starší(Gabika, Cyril)

(A_6) dieťa(Alex, Dana, Cyril)

(B_6) Cyril \doteq oco

Cvičenie 1.2. (1.1.2,1.1.6) Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku \mathcal{L} z úlohy 1.1?

Cvičenie 1.3. (1.1.3,1.1.7) Uvažujme jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_6, B_1, \dots, B_6$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned} D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Beáta}) = 2, \quad i(\text{Cyril}) = 3, \quad i(\text{Dana}) = 4, \\ i(\text{Edo}) &= 9, \quad i(\text{Gabika}) = 7, \quad i(\text{oco}) = 3, \\ i(\text{žena}) &= \{1, 2, 3, 8\}, \\ i(\text{rodič}) &= \{(4, 1), (9, 9), (2, 3), (3, 4), (8, 7)\}, \\ i(\text{dieťa}) &= \{(3, 7, 9), (2, 7, 3), (8, 9, 1)\}, \\ i(\text{starší}) &= \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (7, 3), (8, 7)\} \end{aligned}$$

💡 Lepšiu predstavu o štruktúre často získate, keď si ju graficky znázorníte napríklad takto:

- Každý objekt z domény znázorníte ako uzol.
- Interpretáciu symbolu konštanty znázorníte označením uzla týmto symbolom.
- Množinu interpretujúcu unárny predikát znázorníte ako uzavretú krivku (napr. elipsu) označenú symbolom predikátu a obsahujúcu uzly, ktoré do tejto množiny patria.
- Dvojicu patriacu do interpretácie binárneho predikátu znázorníte ako orientovanú hranu medzi uzlami označenú symbolom predikátu.
- n -ticu patriacu do interpretácie n -árneho predikátu pre $n \geq 3$ znázorníte ako n -uholník, ktorého vrcholy budú spojené hranami s príslušnými uzlami. Vhodne označte poradie prvkov v n -tici.

Pre každý predikát s aritou $n \geq 2$ je lepšie nakresliť si osobitný graf.

Cvičenie 1.4. (1.1.4,1.1.8) Uvažujme opäť jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ a \mathcal{M}_3 pre jazyk \mathcal{L} tak, aby každá z nich *súčasne* bola modelom všetkých formúl A_1, \dots, A_6 , ale nebola modelom žiadnej z formúl B_1, \dots, B_6 a aby *zároveň*:

- doména štruktúry \mathcal{M}_1 mala aspoň 9 prvkov;
- doména štruktúry \mathcal{M}_2 mala najviac 5 prvkov;
- doména štruktúry \mathcal{M}_3 mala najviac 2 prvky.

💡 Všimnite si, že hoci každý symbol konštanty musí byť interpretovaný ako niektorý objekt domény (teda pomenúvať ho), nie všetky objekty musia byť pomenované a viacero symbolov konštant môže pomenúvať ten istý objekt.

Cvičenie 1.5. (1.2.1,1.2.2) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

- (A_1) Peter je muž.
- (A_2) Peter je študent.
- (A_3) Lucia je žena.
- (A_4) Je to študentka.
- (A_5) Lucia je staršia ako Peter.
- (A_6) Matematika je povinný predmet.
- (A_7) Matematiku učí Eugen.
- (A_8) Peter má rád Matematiku.
- (A_9) Peter a Lucia sú od neho mladší.
- (A_{10}) Peter dostal z Matematiky od Eugena známku A.
- (A_{11}) Eugen má rád Luciu.
- (A_{12}) Aj keď má Lucia z Matematiky (od neho) známku „dostatočný“.
- (A_{13}) Znáмка „dostatočný“ je len iný názov pre E-čko, a podobne „výborný“ značí to isté ako A-čko.
- (A_{14}) Lucia má rada Petra.
- (A_{15}) Lucia nemá rada Matematiku.
- (A_{16}) Eugen sa má rád.
- (A_{17}) Všetci študenti majú radi Telocvik.

Hodnotená časť

Úloha 1.1. (1.2.3) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov. Snažte sa o to aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší, nevytvárajte dva symboly s tým istým významom. Vytvorte štruktúru tak, aby výroky skupiny A boli všetky pravdivé a výroky skupiny B všetky nepravdivé.

- (A₁) Janka je dievča a Jurko je chlapec.
- (A₂) Chlapci a dievčatá sú deti.
- (A₃) Ňufko je Jankine zvieratko.
- (A₄) Je to myš.
- (A₅) Ňufko je veľký. Je väčší než Jurkov škrečok Chrumko.
- (A₆) Jurko si Chrumka kúpil sám.
- (A₇) Jurko v noci chodí kŕmiť potkana Smrad'ocha.
- (A₈) Smrad'och však v skutočnosti je Ňufko, ktorý v tme vyzerá ako potkan.
- (A₉) Všetky deti majú rady zvieratká, ktorá vlastnia, a tiež tie, ktoré kŕmia.
- (B₁) Janka sa Smrad'ocha bojí.
- (B₂) Jurko má rád potkany, nebojí sa ich.
- (B₃) Ňufko je menší ako Chrumko.
- (B₄) Janka má rada Jurka.
- (B₅) Ňufko a Chrumko sú deti.
- (B₆) Ňufka a Chrumka deťom kúpila ich mama.