Coputerphysik

Benjamin Schuster, Philipp Niketta

April 2024

1 2. Dampfdruckkurve der Van der Waals-gleichung

1.1

Gegeben sind die Relationen:

$$p(u,t) = \frac{8t}{2u-1} - \frac{3}{u^2} \tag{1}$$

$$\int_f^g du p(u,t) = p_D(t) \cdot (g-f) \tag{2}$$

$$p_D(t) = p(f,t) = p(g,t) \tag{3}$$

Zunächst soll gezeigt werden, dass:

$$8t \cdot \left(\frac{g-f}{3f-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln(3g-1)}{\ln(3f-1)} \right) - \frac{3(g-f)}{f^2 g} = 0 \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_f^g du p(u,t) - p_D(t) \cdot (g-f) \\
&= 8t \int_f^g du \frac{1}{3u-1} - \int_f^g du \frac{3}{u^2} - p(f,t) \cdot (g-f) \\
&= 8t \cdot \left[\frac{1}{3} \ln(3u-1) \right]_f^g + 3 \cdot \left[\frac{1}{u} \right]_f^g - 8t \cdot \left(\frac{1}{3f-1} \right) (g-f) - \frac{3}{f^2} (g-f) \\
&= 8t \cdot \left(\frac{g-f}{3f-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln(3g-1)}{(3f-1)} \right) - \frac{3(g-f)}{f^2} - 3 \cdot \frac{(f-g)}{fg} \\
&= 8t \cdot \left(\frac{g-f}{3f-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln(3g-1)}{(3f-1)} \right) - 3 \cdot \frac{(g-f) \cdot g}{f^2 \cdot g} + 3 \cdot \frac{(f-g) \cdot g}{f^2 \cdot g} \\
&= 8t \cdot \left(\frac{g-f}{3f-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln(3g-1)}{(3f-1)} \right) - \frac{3 \cdot (g-f)^2}{f^2 \cdot g}
\end{aligned}$$

Nun ist folgende Relation herzuleiten:

$$\frac{8t}{(3f-1) \cdot (3g-1)} = \frac{g+f}{g^2 \cdot f^2} \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
(g+f)\cdot(3g-1)\cdot(3f-1) &= 8t\cdot g^2\cdot f^2\\
9g^2\cdot f+9gf^2-6f\cdot g-3g^2-3f^2+f+g &= 8t\cdot g^2\cdot f^2\\
(9f-8t\cdot f^2-3)\cdot g^2+(3f-1)^2\cdot g+f-3f^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Mit der Mitternachtsformel gelangt man zu folgendem Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
g(f) &= \frac{-(3f-1)^2\pm\sqrt{(3f-1)^4-4\cdot(9f-8tf^2-3)\cdot(f-3f^2)}}{2\cdot(9f-8tf^2-3)}\\
&= \frac{(3f-1)^2\mp\sqrt{(3f-1)^4-4f\cdot[8tf^2-3(f-1)]\cdot(3f-1)}}{2\cdot[8tf^2-3(f-1)]}
\end{aligned}
$$

Hier ist, da hier die größere der beiden Nullstellen relevant ist, ist nur das Ergebnis mit positivem Vorzeichen vor der Wurzel von Bedeutung.