Matemática Discreta

Relações binárias

Universidade de Aveiro 2018/2019

http://moodle.ua.pt

Pares ordenados e produto cartesiano

Definição (de par ordenado)

Dados x e y, designa-se por par ordenado e denota-se por (x, y) o conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, ou seja, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.
Adicionalmente, dizemos que x é o primeiro elemento e y o segundo.

- Mais geralmente, temos o n-uplo ordenado:

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= (x_1, \overbrace{(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{(n-1)\text{-uplo}}), \quad n \geq 3 \\
&= \{\{x_1\}, \{x_1, (x_2, x_3, \ldots, x_n)\}\} \\
&= \{\{x_1\}, \{x_1, \{\{x_2\}, \{x_2, (x_3, \ldots, x_n)\}\}\}\}.
\end{aligned}
$$

Produto cartesiano

Definição (produto cartesiano)

Sejam A e B dois conjuntos. Designa-se por produto cartesiano de A e B e denota-se por $A \times B$, o conjunto

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \ \wedge \ y \in B\}.$$

- Se $A = B$, então $A^2 = A \times A = \{(x, y) : x \in A \wedge \ y \in A\}$.

Relações binárias

Definição de relação binária (relação)

Uma relação binária (ou relação) $\mathcal{R}$ entre os conjuntos A e B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

- Notação: escreve-se $x\mathcal{R}y$ para indicar $(x, y) \in \mathcal{R}$.
- Exemplo 1: Sendo $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$, então $2 \times 3 = 6$

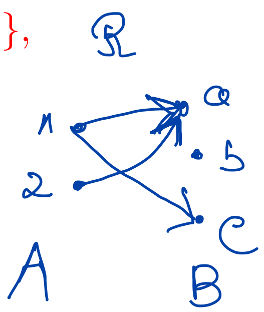
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\},$$

$$R^{-1} = \{(a,1), (c,1), (a,2)\}$$

e

$$\mathcal{R} = \{(1, a), (1, c), (2, a)\} \subseteq A \times B$$

é uma relação entre A e B.



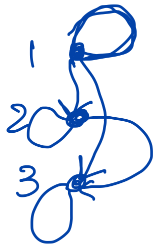
$\mathrm{dom}\, R = \{1, 2\}$ $\quad$ $\mathrm{img}\, R = \{a, c\}$

$R(1) = \{a, c\}$ $\quad$ $R^{-1}(a) = \{1, 2\}$ $\quad$ $R^{-1}(c) = \{1\}$ $\quad$ $R^{-1}(b) = \emptyset$

Casos particulares

- Se $A = B$, designamos $\mathcal{R} \subseteq A^2$ por relação binária definida em A (ou sobre A).
- Exemplo 2: a relação $\leq$ definida em $A = \{1, 2, 3\}$ é o subconjunto de A^2:

$$\leq = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}.$$



- Nota: usualmente, $(x, y) \in \leq$ denota-se por $x \leq y$.
- Exemplo 3: igualmente se conclui que sendo $\leq$ uma relação binária definida em $\mathbb{N}$,

$$\leq = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\} \subseteq \mathbb{N}^2.$$

- A relação $I = \{(x, x) : x \in A\}$ designa-se por relação identidade de A ou definida em A.

Domínio e imagem

Definição (de domínio e imagem)

Sejam A e B dois conjuntos e $\mathcal{R}$ uma relação binária entre A e B.

- Designa-se por domínio de $\mathcal{R}$ e denota-se por $\mathrm{dom}(\mathcal{R})$, o conjunto

$$\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{x \in A : (x, y) \in \mathcal{R} \text{ para algum } y \in B\}.$$

- Designa-se por imagem (ou contradomínio) de $\mathcal{R}$ e denota-se por $\mathrm{img}(\mathcal{R})$, o conjunto

$$\mathrm{img}(\mathcal{R}) = \{y \in B : (x, y) \in \mathcal{R} \text{ para algum } x \in A\}.$$

Imagem e imagem recíproca

Definição (de imagem e imagem recíproca de um elemento)

Considere a relação binária $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.

- Designa-se por imagem de $x \in A$ por $\mathcal{R}$ e denota-se por $\mathcal{R}(x)$, o conjunto
$$\mathcal{R}(x) = \{y \in B : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$
- Designa-se por imagem recíproca de $y \in B$ por $\mathcal{R}$ e denota-se por $\mathcal{R}^{-1}(y)$, o conjunto
$$\mathcal{R}^{-1}(y) = \{x \in A : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Relação inversa de $\mathcal{R}$: $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in \mathcal{R}\}$.

Se R é uma função então R(x) é um conjunto singular.

Exercício 2 da Folha 2

2. Considere a relação $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N}_0^2 : a + b = 4\}$
   (a) Determine $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}^{-1}$.
   (b) Determine as imagens de 1 e 3 por $\mathcal{R}$.
   (c) Determine as imagens recíprocas por $\mathcal{R}$ de $0,\ 2$ e 4.

TPC