

universidade de aveiro



theoria poiesis praxis

**UNIVERSIDADE DE AVEIRO**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**3810-193 AVEIRO**

**Mecânica e Campo Eletromagnético**

**Capítulo 3. Campos elétrico e magnético**

**1ª serie**

## Distribuições de carga

1. A densidade linear de carga dum bastão de comprimento  $L$  é dada por :  $\lambda = \lambda_0 + 2x$  (onde  $0 \leq x \leq L$ ). Qual é a carga total do bastão?

**Solução:**  $Q = \lambda_0 L + L^2$

2. Uma placa quadrada, com 2m de lado, situada segundo os eixos  $x$  e  $y$  e com um vértice na origem, tem uma densidade superficial de carga dada por  $\sigma = (2-y) \text{ Cm}^{-2}$ . Calcule a carga total da placa.

**Solução:**  $Q = 4C$

3. Um disco de raio  $R$  tem uma densidade de carga dada por  $\sigma = 3r$ . Calcule a carga total do disco.

**Solução:**  $Q = 2\pi R^3$

4. Uma coroa esférica de raios  $r_1$  e  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) tem uma densidade de carga que é inversamente proporcional ao raio. Sabendo que a carga total da coroa é  $Q$ , obtenha uma expressão para a densidade de carga.

**Solução:**  $\rho = \frac{Q}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)r}$

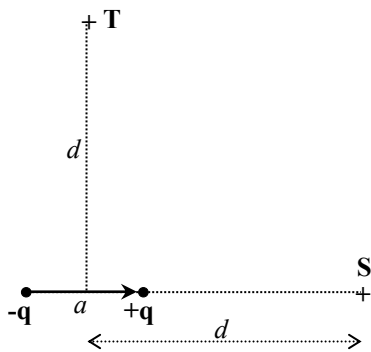
## Lei de Coulomb. Campo e Potencial Eléctricos

5. Quatro cargas  $+q, +q, -q, -q$  estão colocadas nos vértices dum quadrado de lado  $a$ .  
a) Determine, para os dois casos de distribuição das cargas, o campo elétrico e o potencial no centro do quadrado.

- b) Escolha uma linha apropriada e verifique que  $\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

**Solução:**  $\vec{E} = \frac{q\sqrt{2}}{\pi \epsilon_0 a^2} \hat{k}$  e  $V = 0$  ;  $\vec{E} = \vec{0}$  e  $V = 0$

6. Duas cargas iguais e de sinais contrários, com uma distância constante entre si *constituem* dipolo (ver figura).



- Mostre que o campo elétrico em **S** é paralelo ao vetor  $\vec{a}$ , e em **T** tem o sentido contrário.
- Determine o campo elétrico em **T** e em **S**, fazendo aproximações adequadas ( $d \gg a$ ). Introduza no resultado o vector momento dipolar elétrico,  $\vec{P} = q \vec{a}$
- Mostre que um dipolo colocado num campo elétrico uniforme  $\vec{E}$  fica sujeito a um binário cujo momento é dado por  $\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$ .

**Solução:**  $\vec{E}(S) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{d^3}$  ;  $\vec{E}(T) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{d^3}$

7. Considere um anel de raio **R** carregado uniformemente com uma carga total **Q**.

- Calcule o campo elétrico no centro do anel.
- Calcule o campo elétrico num ponto do eixo do anel, distante de **d** do seu centro
  - a partir da lei de Coulomb.
  - A partir do potencial

**Solução:**  $\vec{E}(O) = \vec{0}$  ;  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q d}{(R^2 + d^2)^{3/2}}$  ;  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(R^2 + d^2)^{1/2}}$

8. Um fio semi-circular de raio **R** está uniformemente carregado com uma carga total **Q**. Encontre o vetor campo elétrico no centro de curvatura.

**Solução:**  $E = \frac{Q}{2\epsilon_0 \pi^2 R^2}$

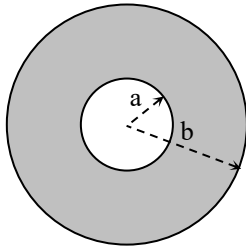
9. Determine a partir da lei de Coulomb o campo e o potencial criados por um fio infinito, carregado com uma densidade linear de carga constante  $\lambda$ .

**Solução:**  $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{u}_r$  e  $V = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + const.$  há cargas no infinito...

10. Determine, a partir da lei de Coulomb o, campo e o potencial criados num ponto do eixo (à distância **x**) dum disco de raio **R**, uniformemente carregado com uma densidade superficial de carga  $\sigma$ . Estude o caso limite  $R \rightarrow \infty$  ?

**Solução:**  $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) \hat{u}_x$  e  $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - |x|)$   
 quando  $R \rightarrow \infty$ ,  $E \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  como o caso do plano infinito ( $\sigma$ )

**11.** Um anel circular, de raio interior **a** e de raio exterior **b** ( $a < b$ ), tem uma densidade superficial de carga  $\sigma$  constante.



- Calcule o potencial num ponto P do eixo da coroa, à distância **x** do centro.
- Deduz a expressão do campo elétrico em P.
- Verifique que no limite em que  $a \rightarrow 0$ , as expressões acima tendem para o caso do disco uniformemente carregado.

**Solução:**

$$V(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{x^2 + b^2} - \sqrt{x^2 + a^2} \right) \quad e \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right) \hat{u}_x$$

**12.** Uma superfície hemisférica fina de raio **R**, com a base situada no plano **xy**, tem uma carga **Q** uniformemente distribuída. Encontre o campo elétrico e o potencial no centro de curvatura **O**, origem do sistema de eixos.

**Solução:**  $\vec{E}(O) = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \hat{u}_z = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \hat{u}_z$  ;  $V(O) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R$

**13.** Um fio de comprimento **L**, centrado na origem dum sistema de eixos **xy** e paralelo a **x'**, está carregado uniformemente com uma densidade de cargas dada por  $\lambda \text{ Cm}^{-1}$ .

- Determine a expressão do campo elétrico num ponto genérico ao longo do fio, fora e dentro do fio.
- Determine o campo elétrico nos pontos que se situam ao longo da reta que é perpendicular ao fio e passa pelo ponto médio deste.

**Solução:**

$$E_{fora}(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{x - \frac{L}{2}} - \frac{1}{x + \frac{L}{2}} \right];$$

$$E_{dentro}(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\frac{L}{2} - x} - \frac{1}{\frac{L}{2} + x} \right];$$

$$E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{L}{y(L^2 + 4y^2)^{1/2}} \right]$$

### Aplicações do teorema de Gauss

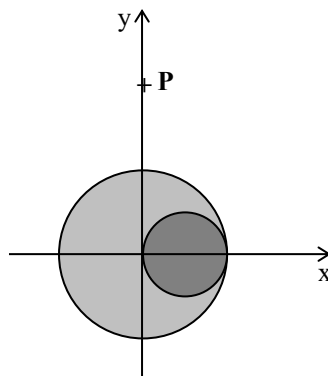
**14.** Uma esfera de centro A e de raio **a** está carregada com uma densidade volúmica uniforme **ρ**, exceto numa cavidade esférica de centro B e de raio **b**, que não contem cargas. Mostre que o campo eléctrico dentro da cavidade é uniforme e encontre uma expressão para ele.

**Solução:**  $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{AB}$

**15.** Linhas de *força* emergem radialmente numa superfície esférica e têm uma densidade uniforme ao longo da superfície. Quais são as possíveis distribuições de carga dentro da esfera?

**Solução:**  $\rho(r); \sigma(r)$

**16.** Considere uma esfera isoladora de raio **R** que tem uma carga distribuída uniformemente com densidade volúmica **ρ**, exceto numa região esférica de raio **R/2**, como se representa na figura. Nessa região a densidade volúmica é **2ρ**.



- Calcule o campo eléctrico em qualquer ponto do eixo **xx**. Considere as várias regiões onde o campo é diferente.
- Calcule o campo eléctrico no ponto **P** do eixo **yy**, à distância **2R**, do centro da esfera.

- c) Qual o valor do campo elétrico no ponto **P**, se a esfera de raio **R/2** fosse comprimida até ficar com raio nulo, mantendo a carga total das duas regiões constante.
- d) Determine o fluxo através de uma esfera concêntrica com a esfera na origem, e que passa por **P**.

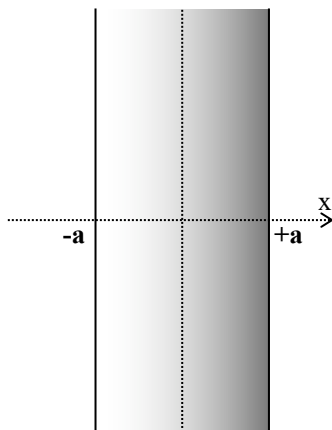
**17.** Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço devido a um plano infinito uniformemente carregado:

- a) A partir da lei de Coulomb.  
b) Usando a lei de Gauss.

Justifique o cálculo.

**Solução:**  $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$

**18.** Considere que no espaço limitado por dois planos infinitos e paralelos ( $x=a$  e  $x=-a$ ), existe uma distribuição de carga  $\rho = \rho x$ .



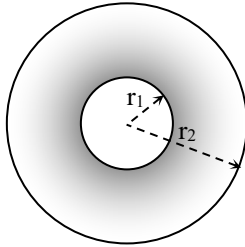
- a) Determine a carga por unidade de área existente entre os planos.
- b) Mostre que o campo no exterior é nulo.
- c) Determine o campo em cada ponto no interior dos planos.
- d) Represente graficamente  $|\vec{E}|$  em função de  $x$ .

e) Que densidade de carga  $\sigma$  deveria ter a superfície dos planos, sem carga no interior, para o campo ter o mesmo valor em  $x=0$  que na situação anterior?

**Solução:**    a)  $Q=0$                       b)  $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0}$                       c)  $E_{\text{int}} = \frac{\alpha}{2\epsilon_0} (a^2 - x^2)$

                    d) porção de parábola para  $-a \leq x \leq +a$                       e)  $\sigma = \frac{\alpha a^2}{2}$

19. Considere uma coroa esférica de raios interno  $r_1$  e externo  $r_2$  com uma densidade de carga  $\rho = \frac{\alpha}{r}$ .

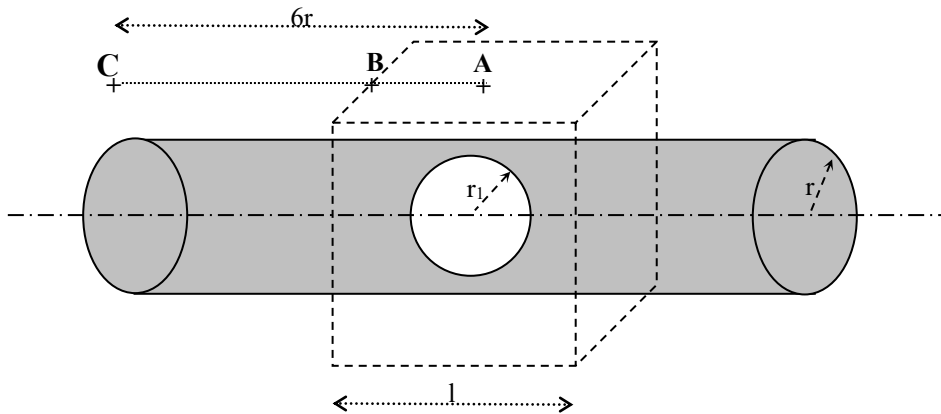


- Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço.
- Que tipo de distribuição poderia criar um campo uniforme no interior da coroa esférica?

**Solução:**

$$\begin{aligned} r < r_1 &\Rightarrow E=0 \\ r_1 < r < r_2 &\Rightarrow E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0 r^2} (r^2 - r_1^2) \\ r > r_2 &\Rightarrow E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0 r^2} (r_2^2 - r_1^2) \end{aligned}$$

20. Considere a seguinte distribuição de cargas livres  $\rho$  num cilindro infinito de raio  $r$ , onde existe um vazio esférico de raio  $r_1 < r$  e com centro sobre o eixo.



- Determine o fluxo do campo elétrico através de um cubo de aresta  $l > 2r$ , de tal modo que o cilindro o atravesse, nos casos em que:
  - no interior do cubo se encontra o espaço vazio.
  - o interior do cubo não inclui esse espaço.
- Mostre que estes cálculos não lhe permitem calcular o campo  $\vec{E}$  em qualquer ponto do espaço.
- Usando o princípio da sobreposição determine o campo elétrico nos pontos **A**, **B** e **C**.

**Solução:**      a) i)       $\phi = \frac{\rho\pi}{\epsilon_0} \left( r^2 l - \frac{4}{3} r_1^3 \right)$       a) ii)       $\phi = \frac{\rho\pi}{\epsilon_0} r^2 l$

c)       $\vec{E}_A = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{l} - \frac{4}{3} \frac{r_1^3}{l^2} \right) \hat{r}$  ;       $\vec{E}_B = \left( -\frac{\rho r_1^3 \sqrt{2}}{3\epsilon_0 l^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{r^2}{l} \right) \hat{r}_{cil} \pm \frac{\rho r_1^3 \sqrt{2}}{3\epsilon_0 l^2} \hat{z}$

$\vec{E}_C = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{l} - \frac{r_1^3 l}{6 (l^2/4 + 36r^2)^{3/2}} \right) \hat{r}_{cil} \pm \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{2r_1^3 r}{(l^2/4 + 36r^2)^{3/2}} \hat{z}$

### Relações campo-potencial e equações locais do campo

**21.** Uma esfera de raio **R** contém uma distribuição volúmica de cargas **ρ**, de simetria esférica.

a) Determine a função **ρ(r)** sabendo que o campo elétrico dentro da esfera é radial com um módulo constante **E<sub>0</sub>**:

- i) aplicando a forma local do teorema de Gauss.
- j) aplicando a forma integral do teorema de Gauss.

b) Calcule a carga total **Q** contida na esfera e determine o campo elétrico ao exterior da esfera. Verifique a continuidade do campo na fronteira interior/exterior da esfera.

**Solução:**       $\rho(r) = \frac{2\epsilon_0}{r} E_0$  ;       $Q = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^2$  ;       $E(r) = \frac{E_0 R^2}{r^2}$

**22.** O chamado “potencial de Yukawa” é uma maneira de representar as forças nucleares, cujo alcance é muito mais curto do que as forças coulombianas:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-r/a)}{r} \quad \text{onde } a > 0 \text{ representa o alcance da interação.}$$

Determine a distribuição volúmica de carga que cria este potencial.

**Solução:**       $\rho = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-r/a)}{ra^2}$

**23.** O espaço entre dois cilindros coaxiais infinitos, de raios **R<sub>1</sub> < R<sub>2</sub>**, está carregado com uma densidade volúmica de carga **ρ = a/r**.

- a) Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço.
- b) Deduza as expressões do potencial elétrico, sob a hipótese que  $V(R_1) = 0$ .



**Solução:**

$$a) \quad E_1 = 0 \quad ; \quad E_2 = \frac{a}{\epsilon_0} \frac{r - R_1}{r} \quad ; \quad E_3 = \frac{a}{\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{r}$$

b)

$$V_1 = 0 \quad ; \quad V_2 = \frac{a}{\epsilon_0} \left( R_1 \ln \frac{r}{R_1} - r + R_1 \right) \quad ; \quad V_3 = \frac{a}{\epsilon_0} \{ (R_1 - R_2)(1 + \ln r) - R_1 \ln R_1 + R_2 \ln R_2 \}$$

**24.** Um longo cilindro de raio **a** tem uma carga uniforme por unidade de comprimento **Q** C/m. Encontre a d.d.p. entre dois pontos situados à distância **r<sub>1</sub>** e **r<sub>2</sub>** do eixo do cilindro (**a < r<sub>1</sub> < r<sub>2</sub>**).

**Solução:**  $V_1 - V_{21} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$

**25.** Ao longo de um plano o potencial é dado por:  $V = \frac{a \cos \theta}{r^2} + \frac{b}{r}$  em que **r** e **θ** são as variáveis do sistema polar de coordenadas e **a** e **b** são duas constantes. Encontre as componentes **E<sub>ρ</sub>** e **E<sub>θ</sub>** do campo elétrico, em qualquer ponto.

**Solução:**  $E_r = -\frac{2a \cos \theta}{r^3} - \frac{b}{r^2} \quad ; \quad E_\theta = -\frac{a \sin \theta}{r^3} + \frac{b}{r^2}$

**26.** Dada a função vetorial de componentes:

$$A_x = 6xy \quad A_y = 3x^2 - 3y^2 \quad A_z = 0$$

- Calcule o integral de linha de  $\vec{A}$ , do ponto **(0,0,0)** para o ponto **(2,4,0)**, através do caminho mais curto. Repita o cálculo para um caminho parabólico. Tire conclusões.
- Verifique que o campo  $\vec{A}$  pode representar um campo eletrostático.
- Calcule a divergência do campo  $\vec{A}$  e interprete o resultado atendendo ao significado físico de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ .

**Solução:** a) -16      b)  $\text{rot} \vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \left( \exists V \mid \vec{A} = -\vec{\nabla} V \right)$       c)

$$\text{div} \vec{A} = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

**27.** Numa determinada região do espaço o campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{k} \right)$$

Verifique se nessa região do espaço existe ou não uma distribuição de carga elétrica.

**Solução:**  $\rho = \frac{1}{2\pi r}$

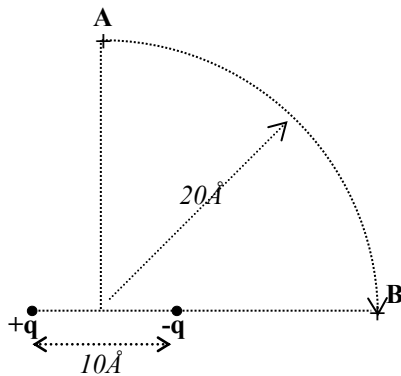
**28.** Considere uma esfera carregada com uma densidade de carga  $\rho = \alpha r$ .

- a) Determine a divergência de  $\vec{E}$  no interior da esfera.  
 b) Atendendo à simetria do sistema, calcule a menos de uma constante, o campo elétrico, em qualquer ponto.

**Solução:** a)  $\text{div} \vec{E} = \frac{\alpha r}{\epsilon_0}$       b)  $\vec{E}_{\text{int}} = \frac{\alpha}{4\epsilon_0} r^2 \hat{r}$  ;  $\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\alpha R^4}{4\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$

### Trabalho das forças elétricas. Energia eletrostática

**29.** Um electro está colocado num ponto **A**, no campo dum dipolo de cargas  $+q$  e  $-q$  distanciadas de  $a=10 \text{ \AA}$ .



- a) Qual será o trabalho realizado se o electro fizer uma volta circular de raio  $d=20 \text{ \AA}$ , partindo do ponto **A** e voltando ao mesmo ponto. Considerando as linhas de campo dum dipolo, indique onde o trabalho é positivo ou negativo.  
 b) Determine o trabalho realizado no caminho circular de **A** para **B**.

**Solução:** a)  $W_{A \rightarrow A} = 0$       b)  $W_{A \rightarrow B} = -e \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{d^2 - (a^2/4)}$

**30.** Calcule a energia eletrostática **W** duma esfera de raio R e de densidade de carga  $\rho$  uniforme, colocada no vácuo, pelos dois métodos seguintes

- a) A partir da densidade de energia.

- c) Usando a lei  $W = \frac{1}{2} \int \rho V dv$  ou calculando o trabalho necessário para carregar a esfera, a partir de  $W = \int_0^Q V dq$ .
- d) A esfera representa um eletrão. A sua energia total pode ser vista como a energia duma partícula em repouso (seja  $W = m.c^2$ ), ou pode ser vista como energia eletrostática. Na base desta equivalência, calcule o raio equivalente do eletrão (chamado “raio clássico” do eletrão).  
 $m \cong 10^{-30} \text{ kg}$  ;  $c = 3.10^8 \text{ m/s}$  ;  $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$

**Solução:**  $W = \frac{4}{15} \frac{\pi \rho^2 R^5}{\epsilon_0}$  ;  $R \cong 1,5.10^{-15} \text{ m}$

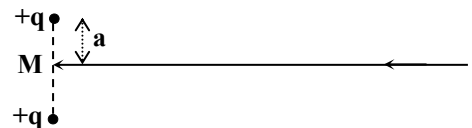
31. Um dipolo de carga  $\pm q$  e separação  $a$  está colocado ao longo do eixo  $x'x$ .



- a) Calcule o trabalho necessário para trazer uma carga  $+Q$  desde o infinito até ao ponto  $S$ , em  $x = b$ .
- b) Escreva uma aproximação para o potencial em  $S$ , na condição  $b \gg a$ .
- c) Use o resultado da alínea anterior para obter a amplitude e direção do campo elétrico no ponto  $S$ .

**Solução:**  $W = \frac{Q q a}{4\pi\epsilon_0 (b^2 - a^2/4)}$  ;  $V_S = \frac{q a}{4\pi\epsilon_0 b^2}$  ;  $\vec{E} = \frac{2 q a}{4\pi\epsilon_0 b^3} \hat{x}$

32. Duas cargas pontuais idênticas de valor  $+q$  estão separadas de uma distância  $2a$  como mostra a figura.



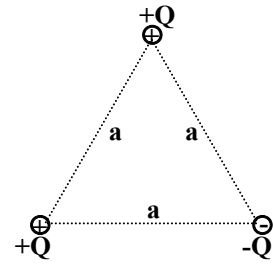
Calcule o trabalho por unidade de carga para trazer uma carga desde o infinito ao longo de uma linha representada na figura e até ao ponto  $M$  :

- a) calculando o integral de linha
- b) usando o conceito de potencial

**Solução:**  $W = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a}$

**33.** Calcule a energia potencial do sistema de cargas ilustrado na figura.

*Nota: a energia potencial de um sistema de cargas pontuais é igual ao trabalho necessário para trazer as cargas para as suas posições finais, desde muito longe (do infinito).*



**Solução:** 
$$E_p = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

### Condutores

**34.** Uma esfera metálica tem o raio **R** e está isolada de todos os outros corpos.

- Expresse o potencial da superfície da esfera como função da carga nela colocada.
- Integre a expressão da alínea anterior para determinar o trabalho necessário para carregar a esfera a um potencial **V**.

**Solução:** 
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad ; \quad W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$