

## Exercício 4 da Folha 1 (cont.)

Matemática  
Discreta  
Conjuntos

4. Usando tautologias apropriadas simplifique as proposições:

- (a)  $p \vee [q \wedge (\neg p)]$ ;  
 (b)  $\neg[(\neg p) \wedge (\neg q)]$ ;  
 (c)  $[p \wedge q] \vee [p \wedge (\neg q)]$ .

Handwritten solution for (b) and (c) with annotations:

(b)  $\neg[(\neg p) \wedge (\neg q)] \stackrel{\text{De Morgan}}{=} \neg(\neg p) \vee \neg(\neg q)$   
 $\stackrel{\text{dupla negação}}{=} p \vee q$

(c)  $[p \wedge q] \vee [p \wedge (\neg q)]$   
 $\stackrel{\text{distributiva}}{=} [p \vee (p \wedge (\neg q))] \wedge [q \vee (p \wedge (\neg q))]$   
 $\stackrel{\text{dist.}}{=} (p \vee p) \wedge (p \vee (\neg q)) \wedge (q \vee p) \wedge (q \vee (\neg q))$   
 $\stackrel{p \vee p \equiv p}{=} p \wedge (p \vee (\neg q)) \wedge (q \vee p)$   
 $\stackrel{p \wedge p \equiv p}{=} p \wedge [p \vee (\neg q \wedge q)]$   
 $\stackrel{\text{distributiva}}{=} p \wedge (p \vee \text{F})$   
 $\stackrel{\text{dist.}}{=} p \wedge [q \vee \neg q]$   
 $\stackrel{\text{dist.}}{=} p \wedge 1 \equiv p$

## Mais uma vez 8(e) da Folha 1

Matemática  
Discreta  
Conjuntos

Se  $\overset{p}{\text{passar a MD}}$  então  $\overset{b}{\text{vou de férias para as Bermudas}}$  caso seja responsável.

Handwritten solution for the logic problem:

$p \Rightarrow (\pi \Rightarrow b) \equiv (p \wedge \pi) \Rightarrow b$

$p \Rightarrow (\pi \Rightarrow b) \stackrel{\text{C1}}{=} \neg p \vee (\pi \Rightarrow b)$   
 $\stackrel{\text{C1}}{=} \neg p \vee (\neg \pi \vee b)$   
 $\stackrel{\text{assoc.}}{=} (\neg p \vee \neg \pi) \vee b$   
 $\stackrel{\text{De Morgan}}{=} \neg(p \wedge \pi) \vee b$   
 $\stackrel{\text{C1}}{=} (p \wedge \pi) \Rightarrow b$

Annotations: C1, assoc., De Morgan, C1.

## Exercício 10 da Folha 1 (cont.)

Matemática  
Discreta  
Conjuntos

10. Verifique a correcção de cada uma das seguintes deduções:

- (a) Chove se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.
- (b) Chove se e só se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.
- (c) Se o mordomo cometeu o crime, então ele vai estar nervoso quando interrogado. O mordomo estava nervoso quando interrogado. Logo, o mordomo cometeu o crime.
- (d)  $r$  é uma condição suficiente para  $q$ . Além disso, verifica-se  $r$  ou a negação de  $p$ . Logo, se  $q$  não for verdadeiro, não se verifica  $p$ . *De Morgan*  $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$  *simpliciter*
- (e) De  $\neg(p \vee q)$  deduz-se  $\neg p$ .
- (f) A simplificação da expressão  $(\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q$  foi feita de acordo com os seguintes passos:

*enviar*

$$\begin{aligned} (\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (q \vee r) \\ &\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r. \end{aligned}$$

10

(a)  $(G \Rightarrow C \wedge \neg G) \Rightarrow \neg C$  X

$(G \Rightarrow C \wedge \neg C) \Rightarrow \neg G$  MT

$(G \Rightarrow C \wedge G) \Rightarrow C$  MP

(b)  $(C \Leftrightarrow G \wedge \neg G) \Rightarrow \neg C$  ✓

## Resolução

Matemática  
Discreta  
Conjuntos

$$\begin{aligned} C \Leftrightarrow G \wedge \neg G &\supset "(\Leftrightarrow) \Rightarrow \Leftarrow" \\ &\equiv (C \Rightarrow G \wedge G \Rightarrow C) \wedge \neg G \quad \downarrow \text{simpliciter} \\ &\Rightarrow C \Rightarrow G \wedge \neg G \quad \downarrow \text{M.T} \\ &\Rightarrow \neg C \\ (c) &[(C \Rightarrow m) \wedge m] \Rightarrow C \quad \text{X} \\ &[C \Rightarrow m \wedge \neg m] \Rightarrow \neg C \quad \text{MT} \\ (d) &[(r \Rightarrow q) \wedge (r \vee \neg p)] \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_A \\ A &\text{enviar.} \\ A &\equiv (r \Rightarrow q) \wedge (r \vee \neg p) \equiv (r \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \end{aligned}$$

## Exercício 11 da Folha 1

Matemática  
Discreta

Conjuntos

11. Cinco amigos têm acesso a uma *sala de chat*. Admitindo que é conhecida a seguinte informação:

- O António ou a Berta ou ambos estão na *sala de chat*
- O Carlos ou a Dalila mas não ambos estão na *sala de chat*
- Se a Ema está na *sala de chat* <sup>então</sup> também está o Carlos
- A Dalila e o António estão ambos na *sala de chat* ou nenhum está
- Se a Berta está na *sala de chat* então também estão a Ema e o António,

$$a \vee b$$

$$c \vee d$$

$$e \Rightarrow c$$

$$d \Leftrightarrow a$$

$$b \Rightarrow (e \wedge a)$$

é possível determinar quem está a conversar?

$$(a \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge (e \Rightarrow c) \wedge (d \Leftrightarrow a) \wedge (b \Rightarrow (e \wedge a))$$

$$\underline{\text{Se } a=0 \text{ então } b=1 \wedge d=0 \wedge \underbrace{1 \Rightarrow 0}_0 \times}$$

$$\underline{\text{Se } a=1 \text{ então } d=1 \wedge c=0 \wedge e=0 \wedge b=0.}$$

Está na *sal.* a Dalila e  
o António.

## Resolução

Matemática  
Discreta

Conjuntos

$$\begin{aligned}
 A &\stackrel{\text{comut.}}{=} (r \Rightarrow q) \wedge (r \vee r) \stackrel{\text{comut.}}{=} (r \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow r) \\
 &\stackrel{\text{silogismo hipotético}}{=} (r \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q) \\
 &\stackrel{\text{contrad. - poric.}}{=} r \Rightarrow q \\
 &\stackrel{\text{contrad. - poric.}}{=} \neg q \Rightarrow \neg r
 \end{aligned}$$

Simplificac.

$$P \wedge q \Rightarrow P$$

P	q	$P \wedge q$	$P \wedge q \Rightarrow P$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

$$2 > 1 \wedge 5 > 0$$

$\Downarrow$

$$2 > 1$$