

Capítulo 1 - Coordenadas e cálculo vectorial

- 1 - Determine as coordenadas cartesianas do ponto de coordenadas cilíndricas:
 $(\rho, \phi, z) = (2, \pi/3, 1)$.
- 2 - Determine as coordenadas cartesianas do ponto de coordenadas esféricas:
 $(r, \theta, \phi) = (2, \pi/3, \pi/2)$.
- 3 - Determine as coordenadas cilíndricas do ponto de coordenadas cartesianas:
 $(x, y, z) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$.
- 4 - Determine as coordenadas esféricas do ponto de coordenadas cartesianas:
 $(x, y, z) = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$.
- 5 - Escreva as componentes cartesianas dos vectores unitários associados às coordenadas cilíndricas.
- 6 - Escreva as componentes cartesianas dos vectores unitários associados às coordenadas esféricas.
- 7 - Escreva o vector posição na base das coordenadas cilíndricas e esféricas.
- 8 - Escreva o vector $\mathbf{v} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ na base das coordenadas cilíndricas e esféricas.
- 9 - Escreva o vector $\mathbf{v} = z\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ na base das coordenadas cilíndricas e esféricas.
- 10 - Determine o ângulo entre duas diagonais de duas faces adjacentes dum cubo.
- 11 - Determine o ângulo entre as diagonais de dois vértices opostos dum cubo.
- 12 - Um vector \mathbf{A} , cujo módulo é 10, faz ângulos iguais com os eixos das coordenadas cartesianas. Determine A_x , A_y , A_z e esse ângulo.
- 13 - Os vértices de um triângulo \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são dados pelos pontos $(-1, 0, 2)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, -1, 0)$, respectivamente. Determine o ponto \mathbf{D} tal que a figura \mathbf{ABCD} seja um paralelogramo.
- 14 - Determine o coseno do ângulo entre os vectores $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
- 15 - Dois vectores \mathbf{A} e \mathbf{B} são dados por $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. Determine os produtos escalar e vectorial $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

- 16 - Dados três vectores $\mathbf{P} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{R} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, ache dois vectores que são perpendiculares e dois que são paralelos ou antiparalelos.
- 17 - Encontre um vector \mathbf{A} que é perpendicular aos vectores $\mathbf{U} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{V} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e a sua norma.
- 18 - Os vértices de um paralelogramo \mathbf{ABCD} são $(1, 0, 0)$, $(2, -1, 0)$, $(0, -1, 1)$, e $(-1, 0, 1)$. Calcule as áreas do triângulo \mathbf{ABC} e do triângulo \mathbf{BCD} . Estas áreas são iguais?
- 19 - Um vértice de um paralelepípedo está na origem. Os outros 3 vértices estão em $(3, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$, e $(0, 3, 1)$. Todos os comprimentos estão em centímetros. Calcule o volume do paralelepípedo usando o produto escalar triplo.
- 20 - Dados 3 vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} ,

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{k}.$$

- (a) Determine o produto escalar triplo, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Reparando que $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, apresente uma interpretação geométrica para o resultado do produto escalar triplo.
- (b) Determine $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.
- 21 - Três vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são dados por $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{C} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Determine os valores de $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ e $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. O que pode concluir?

Soluções

1 - $(x, y, z) = (1, \sqrt{3}, 1)$.

2 - $(x, y, z) = (0, \sqrt{3}, 1)$.

3 - $(\rho, \phi, z) = (2, -\pi/4, 2)$.

4 - $(r, \theta, \phi) = (2, -\pi/4, 0)$.

5 - $\mathbf{i} = \cos \phi \mathbf{e}_\rho - \sin \phi \mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{j} = \sin \phi \mathbf{e}_\rho + \cos \phi \mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$.

6 - $\mathbf{i} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \mathbf{e}_\phi$,
 $\mathbf{j} = \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_\theta + \cos \phi \mathbf{e}_\phi$,
 $\mathbf{k} = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$.

- 7** - cilíndricas: $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z$,
 esféricas: $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$.
- 8** - cilíndricas: $\mathbf{v} = \rho z \mathbf{e}_\rho + \rho^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{e}_z$,
 esféricas: $\mathbf{v} = r^2 \cos \theta \sin^2 \theta (1 + \sin \phi \cos \phi) \mathbf{e}_r + r^2 \sin \theta [1 - \sin^2 \theta (1 + \sin \phi \cos \phi)] \mathbf{e}_\theta$.
- 9** - cilíndricas: $\mathbf{v} = (z + 2\rho \sin \phi) \cos \phi \mathbf{e}_\rho + (2\rho \cos^2 \phi - z \sin \phi) \mathbf{e}_\phi + \rho \sin \phi \mathbf{e}_z$,
 esféricas: $\mathbf{v} = r \sin \theta [\cos \theta (\sin \phi + \cos \phi) + \sin \theta \sin(2\phi)] \mathbf{e}_r + r [\cos^2 \theta (\sin \phi + \cos \phi) + \sin(2\theta) \sin(2\phi)/2 - \sin \phi] \mathbf{e}_\theta + r [2 \sin \theta \cos^2 \phi - \cos \theta \sin \phi] \mathbf{e}_\phi$.
- 10** - $\cos \varphi = 1/2 \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.
- 11** - $\cos \varphi = 1/3$.
- 12** - $A_x = A_y = A_z = 10/\sqrt{3}$, $\cos \varphi = 1/\sqrt{3}$.
- 13** - $(2, 0, -2)$.
- 14** - $\cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$.
- 15** - $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -36$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 28\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$.
- 16** - antiparalelos: $\mathbf{Q} = -2\mathbf{P}$, perpendiculares: $\mathbf{P} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = 0$.
- 17** - $\mathbf{A} = -3(\mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\|\mathbf{A}\| = 3\sqrt{2}$.
- 18** - Área = $\frac{1}{2} \|- \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}\| = \sqrt{6}/2$.
- 19** - 18 cm^3 .
- 20** - (a) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$, porque \mathbf{A} está no mesmo plano de \mathbf{B} e \mathbf{C} , mas $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ é perpendicular a esse plano, (b) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
- 21** - $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = 36\mathbf{i} + 24\mathbf{j} - 30\mathbf{k}$, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -24\mathbf{i} - 56\mathbf{j} + 62\mathbf{k}$. O produto externo não é associativo.