

Tautologias e contradições

Matemática
Discreta

Lógica
Proposicional

Lógica
Proposicional

Fórmulas bem
formadas (fbf)

Fórmulas
válidas e
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

Definição de tautologia e contradição

Uma **tautologia** é uma fórmula que tem valor lógico **1** qualquer que seja a interpretação.

Uma **contradição** é uma fórmula que tem valor lógico **0** qualquer que seja a interpretação.

Exemplo de tautologia: $p \vee \neg p$

Exemplo de contradição: $p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0

Tautologia Contradição

Fórmulas válidas, inconsistentes e equivalentes

Matemática
Discreta

Lógica
Proposicional

Lógica
Proposicional

Fórmulas bem
formadas (fbf)

Fórmulas
válidas e
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

Definição [fórmula válida]

Uma fbf diz-se **válida** se é uma tautologia, i.e., se é verdadeira sobre qualquer das suas possíveis interpretações.

Uma fbf diz-se **não válida (ou inválida)** se não é válida.

Definição [fórmula inconsistente]

Uma fbf diz-se **inconsistente** se é uma contradição, i.e., se é falsa qualquer que seja a interpretação.

Uma fbf diz-se **consistente** se não é inconsistente.

Fórmulas lógicas equivalentes

Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Lógica Proposicional

Fórmulas bem formadas (fbf)

Fórmulas válidas e inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

Definição [fórmulas equivalentes]

Duas fórmulas lógicas, r e s , dizem-se **equivalentes** (\equiv) se $r \Leftrightarrow s$ é uma tautologia.

- Duas fórmulas lógicas com as mesmas variáveis são equivalentes quando têm a mesma tabela de verdade.

- Como consequência, podemos afirmar que $(p \Rightarrow q)$ é equivalente a $\neg p \vee q$ conforme decorre das respectivas tabelas de verdade.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Voltando ao exercício 8e)

Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Lógica Proposicional

Fórmulas bem formadas (fbf)

Fórmulas válidas e inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

(e) Se passar a Matemática Discreta então vou de férias para as Bermudas caso seja responsável.

$q \Rightarrow (p \Rightarrow r) \quad (A)$
 $(p \wedge q) \Rightarrow r \quad (B)$

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$p \wedge q$	(A)	(B)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1

Comutatividade, leis de De Morgan e associatividade

Matemática
Discreta

Lógica
Proposicional

Lógica
Proposicional

Fórmulas bem
formadas (fbf)

Fórmulas
válidas e
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

- Comutatividade:

- $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
- $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

- Leis de De Morgan:

- $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- $(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

- Associatividade:

- $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
- $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$

Idempotência, distributividade, lei da contraposição, lei da dupla negação

Matemática
Discreta

Lógica
Proposicional

Lógica
Proposicional

Fórmulas bem
formadas (fbf)

Fórmulas
válidas e
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

- Idempotência:

- $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
- $(p \vee p) \Leftrightarrow p$

- Distributividade:

- $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
- $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

- Lei da contraposição:

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

- Lei da dupla negação:

- $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

Outras propriedades

Matemática
Discreta

Lógica
Proposicional

Lógica
Proposicional

Fórmulas bem
formadas (fbf)

Fórmulas
válidas e
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

Seja p uma proposição arbitrária.

$$\blacksquare (p \wedge 1) \Leftrightarrow p;$$

$$\blacksquare (p \vee 1) \Leftrightarrow 1;$$

$$\blacksquare (p \wedge 0) \Leftrightarrow 0;$$

$$\blacksquare (p \vee 0) \Leftrightarrow p;$$

$$\blacksquare \neg 1 \Leftrightarrow 0;$$

$$\blacksquare \neg 0 \Leftrightarrow 1;$$

Modus ponens e modus tollens

Matemática
Discreta

Lógica
Proposicional

Lógica
Proposicional

Fórmulas bem
formadas (fbf)

Fórmulas
válidas e
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

- Modus ponens:

$$\blacksquare [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$$

- Modus tollens:

$$\blacksquare [(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$$

Outras regras

Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Lógica Proposicional

Fórmulas bem formadas (fbf)

Fórmulas válidas e inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

- Adição:

$$\blacksquare p \Rightarrow (p \vee q)$$

$$x > 2 \Rightarrow x > 2 \vee x < 10$$

- Simplificação:

$$\blacksquare (p \wedge q) \Rightarrow p$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow q$$

$$(x > 2) \wedge (x < 50)$$

$$\Downarrow \\ x > 2$$

- Silogismo hipotético:

$$\blacksquare [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

p	q	p ∧ q	(p ∧ q) ⇒ p
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Folha de exercícios 1

Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Lógica Proposicional

Fórmulas bem formadas (fbf)

Fórmulas válidas e inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

4. Usando tautologias apropriadas simplifique as proposições:

(a) $p \vee [q \wedge (\neg p)]$;

(b) $\neg[(\neg p) \wedge (\neg q)]$;

(c) $[p \wedge q] \vee [p \wedge (\neg q)]$.

$$\begin{aligned} 4(a) \quad & p \vee [q \wedge (\neg p)] \\ & \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \quad \text{distrib.} \\ & \equiv (p \vee q) \wedge 1 \quad p \vee \neg p \equiv 1 \\ & \equiv p \vee q \quad p \wedge 1 \equiv p \end{aligned}$$

$$(c) \equiv p \wedge [q \vee \neg q] \equiv p \wedge 1 \equiv p$$

distributividade

Utilização do "ou exclusivo" em fórmulas lógicas

Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Lógica Proposicional

Fórmulas bem formadas (fbf)

Fórmulas válidas e inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

• Para além do conetivo \vee que se designa também por *ou inclusivo*, por vezes adopta-se o *ou exclusivo* (ou *rejeição*) que se denota por $\dot{\vee}$.

• Este *ou exclusivo* aplicado às proposições p e q produz a proposição $p\dot{\vee}q$ que significa p ou q , mas não ambos.

• Assim, a proposição $p\dot{\vee}q$ é verdadeira quando uma e apenas uma das proposições p ou q é verdadeira.

p	q	$p\dot{\vee}q$	$p\oplus q$	$\neg(p\oplus q)$
0	0	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

$$p\oplus q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Folha de exercícios 1

Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Lógica Proposicional

Fórmulas bem formadas (fbf)

Fórmulas válidas e inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

10. Verifique a correcção de cada uma das seguintes deduções:

- (a) Chove se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.
- (b) Chove se e só se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.
- (c) Se o mordomo cometeu o crime, então ele vai estar nervoso quando interrogado. O mordomo estava nervoso quando interrogado. Logo, o mordomo cometeu o crime.
- (d) r é uma condição suficiente para q . Além disso, verifica-se r ou a negação de p . Logo, se q não for verdadeiro, não se verifica p .
- (e) De $\neg(p \vee q)$ deduz-se $\neg p$.

(f) A simplificação da expressão $(\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q$ foi feita de acordo com os seguintes passos:

$$\neg(\neg p) \vee q$$

$$(\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r.$$

(a) $(g \Rightarrow e) \wedge \neg g \Rightarrow \neg e$

(b) $(g \Rightarrow c) \wedge \neg c \Rightarrow \neg g$ MT

(c) $(g \Rightarrow c) \wedge g \Rightarrow c$ MP

(d) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(e) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(f) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(g) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(h) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(i) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(j) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(k) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(l) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(m) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(n) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(o) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(p) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(q) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(r) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(s) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(t) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(u) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(v) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(w) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(x) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(y) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

(z) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

Resolução (cont.)

Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Lógica Proposicional

Fórmulas bem formadas (fbf)

Fórmulas válidas e inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

$$(b) [(c \Rightarrow g) \wedge \neg g] \Rightarrow \neg c$$

$$= \underbrace{(c \Rightarrow g)}_1 \wedge \underbrace{(g \Rightarrow c)}_2 \wedge \underbrace{\neg g}_3$$

Simpl.

$$\Rightarrow (c \Rightarrow g) \wedge \neg g$$

MT

$$\Rightarrow \neg c$$

$$(c) [(c \Rightarrow n) \wedge n] \Rightarrow c$$

$$[(c \Rightarrow n) \wedge \neg n] \Rightarrow \neg c \quad \text{MT}$$

A é cond. suf. para B $A \Rightarrow B$
 A é cond. neces. para B $B \Rightarrow A$
 A se B $B \Rightarrow A$
 A só se B $A \Rightarrow B$

→ útil

Folha de exercícios 1

Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Lógica Proposicional

Fórmulas bem formadas (fbf)

Fórmulas válidas e inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

11. Cinco amigos têm acesso a uma *sala de chat*. Admitindo que é conhecida a seguinte informação:

- O Antônio ou a Berta ou ambos estão na *sala de chat*
- O Carlos ou a Dalila mas não ambos estão na *sala de chat*
- Se a Ema está na *sala de chat* também está o Carlos
- A Dalila e o Antônio estão ambos na *sala de chat* ou nenhum está
- Se a Berta está na *sala de chat* então também estão a Ema e o Antônio,

é possível determinar quem está a conversar?

Ainda o 10.

$$(d) [(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \} \rightarrow \neg p \quad \text{MT}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \neg p \wedge (p \vee \neg p) \\ &\Rightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg p) \\ &\Rightarrow 0 \vee (\neg p \wedge \neg p) \\ &\Rightarrow \neg p \wedge \neg p \Rightarrow \neg p \quad \text{Simpl} \end{aligned}$$

Referências bibliográficas

Matemática
Discreta

Lógica
Proposicional

Lógica
Proposicional

Fórmulas bem
formadas (fbf)

Fórmulas
válidas e
inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

- **Referência bibliográfica principal:**
D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami,
Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos, Escolar Editora, 2009.
- **Referência bibliográfica complementar:**
N. L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 2nd Ed. (2002).