Aula 08

Recursão versus Iteração

Recursão e Iteração em Estruturas Ordenadas

Programação II, 2020-2021

v1.3, 2020-04-12

DETI, Universidade de Aveiro

Conteúdo

1 Recursão: implementação **1**

2 Conversão entre recursão e iteração **3**

2.1 Iteração para recursão 3

2.2 Recursão para iteração 3

3 Travessia de listas: recursão e iteração **4**

4 Travessia de vectores: recursão e iteração **5**

5 Gestão de listas e vectores ordenados **5**

1 Recursão: implementação

- Não há suporte directo para a recursão nas *linguagens de máquina*, isto é, linguagens que são directamente executadas pelos processadores (`CPU`) existentes nos computadores;
- Assim, para que este mecanismo funcione é necessária uma adequada implementação pelos compiladores (ou interpretadores) das linguagens de programação de mais alto nível (como o Java);

Problema: Garantir uma separação clara entre o contexto do cliente (que invoca o método) e o contexto do método, impedindo a interferência entre diferentes invocações do método (incluindo possíveis invocações recursivas).

Recursão: implementação

- Este objectivo pode ser atingido fazendo com que os métodos, sempre que são invocados, funcionem com *contextos de execução* próprios onde são armazenadas as suas variáveis locais e parâmetros.
- Podemos fazer uma analogia com a instanciação de objectos, com a diferença de as variáveis do método só existirem durante a execução do método.
  - As variáveis são criadas quando o método inicia a sua execução e descartadas quando termina.

- A implementação mais eficiente para este fim assenta numa estrutura de dados composta designada por *Pilha* (*stack*), que se caracteriza por uma gestão do tipo *LIFO* (*Last In First Out*);

08.4

Exemplo

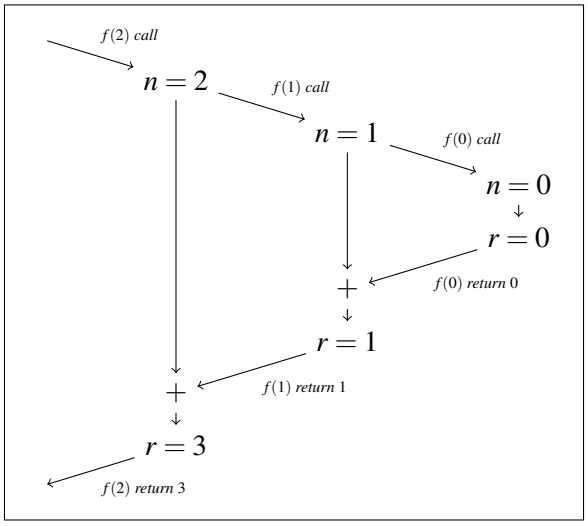
- Vejamos, como exemplo, a seguinte função recursiva $f(n)$, que devolve o somatório dos números de 0 a n:

```
static int f(int n) {
  assert n >= 0;
  //out.printf("f(%d)...\n", n);
  int r = 0;
  if (n > 0)
    r = n + f(n-1);
  //out.printf("f(%d) = %d\n", n, r);
  return r;
}
```

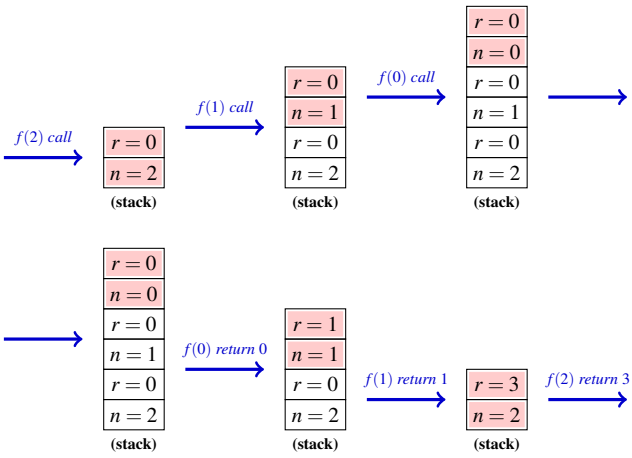
08.5

Exemplo: execução de $f(2)$

(Experimente este exemplo no Java Tutor.)



08.6



08.7

Note que a representação acima está um pouco simplificada. Na implementação real, para cada execução da função `f`, além das variáveis locais `n` e `r`, a pilha guarda também os endereços para aonde retornar.

2 Conversão entre recursão e iteração

2.1 Iteração para recursão

- Como já foi referido, um algoritmo recursivo tem sempre uma versão iterativa e vice-versa.
- Uma forma genérica de converter um ciclo (estruturado) numa função recursiva é a seguinte:

Implementação Iterativa

```
for (INIT; COND; UPDATE) {
  BODY
}
...
```

Implementação Recursiva

```
INIT
loopEquiv(ARGS)
...

static void loopEquiv(ARGS decl) {
  if (COND) {
    BODY
    UPDATE
    loopEquiv(ARGS);
  }
}
```

- A função recursiva tem de declarar argumentos formais correspondentes às variáveis utilizadas no ciclo.
- Os valores dessas variáveis têm de ser passados como argumentos da função.

08.8

- Se precisarmos dos valores finais de algumas variáveis, então a função recursiva deverá *devolver* esses valores como resultado ou modificando atributos do objeto.
- Se o ciclo não for estruturado, ou seja, se contiver instruções do tipo "salto" (`break`, `continue` ou `return`), então terá de ser transformado num ciclo estruturado antes da conversão.

Iteração para recursão: exemplo

Implementação Iterativa

```
// int[] arr
for(int i=0; i<arr.length; i++)
  out.println(arr[i]);
...
```

Implementação Recursiva

```
int i = 0;
loopEquiv(arr, i);
...

static void loopEquiv(int[] arr, int i) {
  if (i < arr.length) {
    out.println(arr[i]);
    i++;
    loopEquiv(arr, i);
  }
}
```

- Podemos melhorar esta implementação substituindo o incremento de `i` pela passagem de `i+1` para a função.

08.9

2.2 Recursão para iteração

- A conversão de algoritmos recursivos para ciclos é, em geral, mais complexa do que a transformação inversa.
- Uma forma geral de fazer essa conversão faz uso de uma *pilha* para armazenar explicitamente os contextos de execução da função recursiva (contendo os argumentos e variáveis locais da função) e substitui as chamadas das funções por instruções do tipo *salto* (*goto*).
- No entanto, o algoritmo resultante fica muito *menos legível*.
- Alguns tipos particulares de recursividade, como é o caso da *recursão de cauda* (*tail recursion*) prestam-se a optimizações interessantes (já que podemos prescindir do armazenamento de algum contexto).
- Mas isso sai fora do âmbito desta disciplina.

08.10

Recursão para iteração: exemplo

- Certas funções recursivas (como o cálculo dos números de Fibonacci ou o factorial) são, no entanto, facilmente convertidas em ciclos:
  - Basta fazer a iteração desde o(s) caso(s) limite até ao valor desejado, e ir armazenando os valores calculados num array.
  - E sbstituir as invocações recursivas por acessos ao array.

Implementação Recursiva

```
static int factorial(int n) {
  assert n >= 0;
  int res;

  if (n <= 1)
    res = 1;
  else
    res = n * factorial(n-1);

  return res;
}
```

Implementação Iterativa (com array)

```
static int factorial(int n) {
  assert n >= 0;
  int[] arr = new int[n+1];
  for(int i = 0; i <= n; i++) {
    if (i <= 1) // casos limite
      arr[i] = 1;
    else
      arr[i] = i * arr[i-1];
  }
  return arr[n];
}
```

08.11

Por vezes, pode não ser necessário armazenar todos os valores anteriores. Nesses casos, pode optimizar-se o algoritmo iterativo para usar menos memória. (Pode fazer isso no exemplo acima.)

3 Travessia de listas: recursão e iteração

Travessia de listas: recursão e iteração

- Embora as listas sejam estruturas de dados recursivas, é possível utilizar algoritmos iterativos.
- Vejamos novamente a função `contains()` da classe `LinkedList`, da aula anterior, comparando com uma versão iterativa equivalente.

Implementação Iterativa

```
public class LinkedList<E> {
  ...
  public boolean contains(E e) {
    boolean found = false;
    Node<E> n = first;
    while (n!=null && !found) {
      if (n.elem.equals(e))
        found = true;
      n = n.next;
    }
    return found;
  }
  ...
}
```

Implementação Recursiva

```
public class LinkedList<E> {
  ...
  public boolean contains(E e) {
    return contains(first, e);
  }
  private boolean contains(Node<E> n, E e) {
    if (n == null) return false;
    if (n.elem.equals(e)) return true;
    return contains(n.next, e);
  }
  ...
}
```

08.12

Um padrão que se repete ...

- Muitas funções têm de fazer uma *travessia* da lista.
- Essa travessia segue um padrão que convém assimilar.

Implementação Iterativa

```
public class LinkedList<E> {
  ...
  public ... xpto(...) {
     ...
     Node<E> n = first;
     while (n!=null && ...) {
        ...
        n = n.next;
     }
     return ...;
  }
  ...
}
```

Implementação Recursiva

```
public class LinkedList<E> {
  ...
  public ... xpto(...) {
     return xpto(first, e);
  }
  private ... xpto(Node<E> n, ...) {
     if (n == null) return ...;
     ...
     ... xpto(n.next, ...);
     return ...
  }
  ...
}
```

Travessia (= percurso): Algoritmo que percorre potencialmente todos os elementos de uma estrutura de dados visitando cada um apenas uma vez.

08.13

4 Travessia de vectores: recursão e iteração

Travessia de vectores: recursão e iteração

- Como faríamos uma pesquisa sequencial num vector?
- Aqui, em vez de passarmos de `n` a `n.next`, passamos de `i` a `i+1`.
- E, em vez de compararmos com `n.elem`, comparamos com o elemento `v[i]` do vector.

Implementação Iterativa

```
public static
boolean contains(E[] v, E e) {
  int i=0;
  while (i < v.length) {
    if (v[i].equals(e))
      return true;
    i++;
  }
  return false;
}
```

Implementação Recursiva

```
public static
boolean contains(E[] v, E e) {
  return contains(v, e, 0);
}

private static
boolean contains(E[] v, E e, int i) {
  if (i >= v.length) return false;
  if (v[i].equals(e)) return true;
  return contains(v, e, i+1);
}
```

08.14

5 Gestão de listas e vectores ordenados

- Em muitas aplicações, dá jeito ter estruturas ordenadas.
  - O problema coloca-se quer para vectores, quer para listas.
- Na próxima aula, vamos ver diversos algoritmos de ordenação.
- Um problema mais simples é o de criar e manter uma estrutura sempre ordenada.
  - Dependendo da aplicação, pode ser preferível.
- Por simplicidade, vamos trabalhar com listas e vectores de elementos inteiros.

08.15

Lista ligada ordenada: semântica

- **insert(e)** - inserir o elemento dado.
  - Pré-condição: `isSorted()`
  - Pós-condição: `contains(e) && isSorted()`
- **removeFirst()** - remover o primeiro elemento.
  - Pré-condição: `!isEmpty()`
- **first()** - consultar o primeiro elemento.
  - Pré-condição: `!isEmpty()`
- **remove(e)** - remover o elemento dado.
  - Pré-condição: `contains(e) && isSorted()`
  - Pós-condição: `isSorted()`

08.16

Vector ordenado: semântica

- **insert(v, ne, e)** - inserir o elemento dado.
  - Pré-condição: `isSorted(v, ne) && !isFull(v, ne)`
  - Pós-cond.: `contains(v, ne, e) && isSorted(v, ne)`
- **removeFirst(v, ne)** - remover o primeiro elemento.
  - Pré-condição: `!isEmpty(v, ne)`
- **first(v)** - consultar o primeiro elemento.
  - Pré-condição: `!isEmpty(v, ne)`
- **remove(v, ne, e)** - remover o elemento dado.
  - Pré-cond.: `contains(v, ne, e) && isSorted(v, ne)`
  - Pós-condição: `isSorted(v, ne) && !isFull(v, ne)`
- (`v` = vector, `ne` = número de elementos, `e` = elemento)

08.17

Verificar se uma lista está ordenada: recursão e iteração

- Numa lista ordenada, qualquer função deve manter a lista ordenada.
- Precisamos assim de uma função que verifique isso.
- Essa verificação pode ser usada em asserções.
- Em cada passo, precisamos de conhecer o elemento anterior (`p`).

Implementação Iterativa

```
public class SortedListInt {
  ...
  public boolean isSorted() {
    if (size < 2)
      return true;
    NodeInt p = first;
    NodeInt n = first.next;
    while (n!=null) {
      if (n.elem<p.elem)
        return false
      p = n; //previous
      n = n.next;
    }
    return true;
  }
  ...
}
```

Implementação Recursiva

```
public class SortedListInt {
  ...
  public boolean isSorted() {
    if (size < 2) return true;
    return isSorted(first, first.next);
  }
  private
  boolean isSorted(NodeInt p, NodeInt n) {
    if (n == null) return true;
    if (n.elem < p.elem) return false;
    return isSorted(n, n.next);
  }
  ...
}
```

Verificar se um vector está ordenado: recursão e iteração

Implementação Iterativa

```
public static
boolean isSorted(int[] v)
{
  if (v.length < 2)
    return true;
  int i = 1;
  boolean sorted = true;
  while (i!=v.length && sorted) {
    if (v[i] < v[i-1])
      sorted = false;
    i++;
  }
  return sorted;
}
```

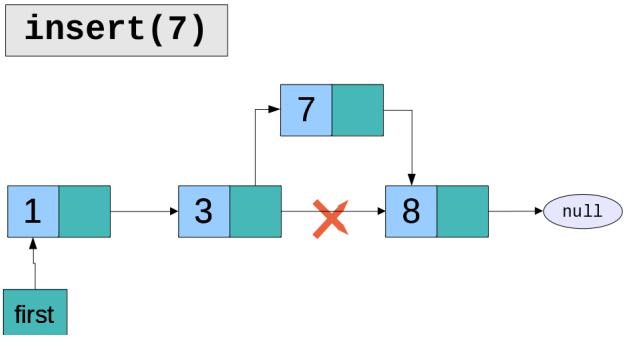
Implementação Recursiva

```
public static
boolean isSorted(int[] v)
{
  if (v.length < 2)
    return true;
  return isSorted(v, 1);
}
private static
boolean isSorted(int[] v, int i)
{
  if (i==v.length) return true;
  if (v[i] < v[i-1]) return false;
  return isSorted(v, i+1);
}
```

08.19

Inserção numa lista ordenada

- Inserção no meio da lista:



- Quando o elemento fica no início, funciona como `addFirst`
- Quando o elemento fica no fim, funciona como `addLast`

08.20

Inserção numa lista ordenada: recursão e iteração

Implementação Iterativa

```
public class SortedListInt {
  ...
  public void insert(int e) {

    if (first==null||e<first.elem)
      first = new NodeInt(e, first);
    else {
      NodeInt p = first;
      NodeInt n = first.next;
      while (n!=null && e>n.elem) {
        p = n;
        n = n.next;
      }
      p.next = new NodeInt(e, n);
    }
    size++;
  }
  ...
}
```

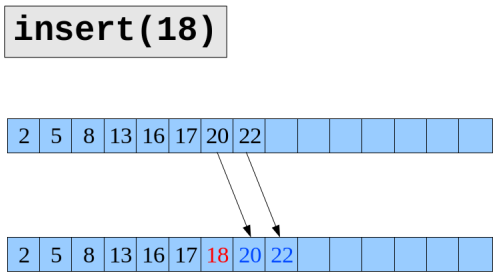
Implementação Recursiva

```
public class SortedListInt {
  ...
  public void insert(int e) {
    first = insert(first, e);
    size++;
  }
  private
  NodeInt insert(NodeInt n, int e) {
    if (n==null || e<n.elem)
      return new NodeInt(e, n);
    n.next = insert(n.next, e);
    return n;
  }
  ...
}
```

08.21

Inserção num vector ordenado

- Inserção no meio do vector:



08.22

Inserção num vector ordenado: recursão e iteração

- Inserir um elemento `e` num vector `v` com `ne` elementos

Implementação Iterativa

```
public static int
insert(int[] v, int ne, int e) {
  int i=ne;
  while (i>0 && e<v[i-1]) {
    v[i] = v[i-1];
    i--;
  }
  v[i] = e;
  return ne+1;
}
```

Implementação Recursiva

```
public static int
insert(int[] v, int ne, int e) {
  shiftInsert(v, e, ne);
  return ne+1;
}

public static void
shiftInsert(int[] v, int e, int i) {
  if (i==0 || e>v[i-1]) v[i] = e;
  else {
    v[i] = v[i-1];
    shiftInsert(v, e, i-1);
  }
}
```

08.23

Implementação de uma lista ordenada genérica

- Qualquer objecto Java tem o método `equals()`.
- No entanto, só alguns objectos têm o método `compareTo()` necessário para manter uma lista ordenada.
- Podemos definir classes genéricas em que os parâmetros de tipo são declarados como "comparáveis".

```
public class SortedList<E extends Comparable<E>> {
  ...
  public void insert(E e) {
    ...
  }
  ...
}
...
public static void main(String args[]) {
  ...
  SortedList<Double>  p1 = new SortedList<Double>();
  SortedList<Integer> p2 = new SortedList<Integer>();
  ...
}
```

08.24