

## Capítulo 5 – Oscilador Harmónico

**1** - Um corpo de 2 kg estica de 10 cm uma mola, à qual está pendurado na vertical, em equilíbrio. O corpo preso à mola é depois colocado sobre uma mesa lisa, com uma das extremidades da mola fixa. O corpo é mantido à distância de 5 cm da posição de equilíbrio e então solto oscilando com movimento harmónico simples. Determine:

- a) A frequência angular,  $\omega$ .
- b) A frequência,  $f$ , e o período,  $T$ .
- c) A amplitude,  $A$ .
- d) A fase da oscilação,  $\delta$ .
- e) Qual é o módulo da velocidade máxima do corpo, e quando ele a tem?

**2** - Uma segunda mola, idêntica à do problema anterior, está ligada a um segundo corpo, que tem também a massa de 2 kg. A mola está esticada de 10 cm em relação à posição de equilíbrio e as duas molas são simultaneamente soltas, estando a primeira distendida apenas 5 cm. Qual dos dois corpos atinge, em primeiro lugar, a posição de equilíbrio?

**3** - Um movimento harmónico simples demora 12 segundos a descrever 5 oscilações completas. Determine:

- a) O período das oscilações
- b) A frequência
- c) A frequência angular.

**4** - Qual o período de um pêndulo de comprimento 1 m, quando  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ?

**5** - Uma partícula tem o deslocamento,  $x$ , dado por  $x = 3 \cos(5 \pi t + \pi)$  em que  $x$  está expresso em metros e  $t$  em segundos.

- a) Qual a frequência,  $f$ , e o período,  $T$ , do movimento?
- b) Qual a maior distância percorrida pela partícula, medida a partir do equilíbrio?
- c) Onde está a partícula no instante  $t = 0$ ? E no instante  $t = 0,5$  s?

**6** - Uma massa de 1 kg, está suspensa do tecto de um elevador através de uma mola de constante  $k = 9 \text{ N/m}$ . Se o elevador descer com velocidade  $v = 3 \text{ m/s}$ , e a massa estiver em repouso em relação ao elevador, escreva a equação do movimento da massa quando, em  $t = 0 \text{ s}$ , o elevador parar.

**7** - Uma partícula, com movimento harmónico simples, está em repouso a uma distância de 6 cm da posição de equilíbrio, no instante  $t = 0$ . O seu período é 2 s. Escreva as expressões da posição,  $x$ , da velocidade,  $v_x$  e da aceleração,  $a$ , em função do tempo.

**8** - Um objecto de 500 g, preso a uma mola com  $k = 8 \text{ N/m}$ , oscila num movimento com amplitude  $A = 10 \text{ cm}$ . Calcule:

- a) A velocidade e aceleração máximas.
- b) A velocidade e aceleração quando dista 6 cm da posição de equilíbrio.
- c) O tempo necessário para o objecto partir de  $x = 0$  e chegar a  $x = 8 \text{ cm}$ .

**9** - A posição de uma partícula é dada por  $x = 4 \sin(2t)$ , em que  $x$  é expresso em metros e  $t$  em segundos.

- Qual é o valor máximo de  $x$ ?
- Qual o primeiro instante, depois de  $t = 0$ , em que ocorre este máximo?
- Determine a expressão da velocidade da partícula em função do tempo.
- Qual é a velocidade no instante  $t = 0$ ?
- Determine uma expressão para a aceleração da partícula em função do tempo. Qual é a aceleração no instante  $t = 0$ ? Qual é o valor máximo da aceleração?

**10** - Uma partícula desloca-se num círculo no plano  $xy$  com centro na origem. O raio do círculo é 40 cm e o módulo da velocidade da partícula é  $80 \text{ cm.s}^{-1}$ .

- Qual a velocidade angular da partícula?
- Quais a frequência e o período do movimento circular?
- Escreva as componentes  $x$  e  $y$  do vector posição,  $\vec{r}$ , em função do tempo.

**11** - Um bloco de massa  $M = 4,0 \text{ kg}$  está assente numa mesa horizontal e ligado a uma mola de massa desprezável e com constante  $K = 100 \text{ N/m}$ . O sistema executa um movimento harmónico simples. Considere que no instante inicial a mola está na posição de compressão máxima, que corresponde a 10 cm. Determine:

- A frequência angular
- O período
- A equação do movimento
- A energia cinética do sistema no instante  $t = 1,0 \text{ s}$

**12** - Um corpo de 3 kg está preso a uma mola e oscila com a amplitude de 10 cm e a frequência  $f = 2 \text{ Hz}$ .

- Qual é a constante de força da mola?
- Qual é a energia mecânica total do movimento?
- Escreva uma equação  $x(t)$  que descreva a posição do corpo em relação à sua posição de equilíbrio. A constante de fase pode ser determinada pela informação que se deu?

**13** - Um corpo de 100 g executa um movimento harmónico simples com uma frequência de 20 Hz e amplitude de 0,5 cm.

- Qual é a constante da força,  $k$ , que actua sobre ele?
- Qual é a aceleração máxima?
- Qual é a energia mecânica total do movimento?

**14** - A posição inicial, velocidade e aceleração de um objecto que executa um movimento harmónico simples, são  $x_i$ ,  $v_i$  e  $a_i$ , respectivamente. A frequência angular do movimento é  $\omega$ .

- Mostre que a posição e velocidade do objecto estão relacionadas através de:

$$x(t) = x_i \cos(\omega t) + \frac{v_i}{\omega} \sin(\omega t) ; v(t) = -x_i \omega \sin(\omega t) + v_i \cos(\omega t) .$$

- Se a amplitude do movimento for  $A$ , mostre que:

$$v^2 - a x = v_i^2 - a_i x_i = \omega^2 A^2 .$$

**15** - Quando o deslocamento de um corpo que oscila preso a uma mola é igual à metade da amplitude, qual a fracção da sua energia mecânica total que corresponde à energia cinética? Para que deslocamento as energias cinética e potencial são iguais?

**16** - Se o período de um pêndulo de 70 cm de comprimento é 1,68 s, qual o valor de  $g$  no local onde ele se encontra?

**17** - Um corpo de 2 kg está suspenso verticalmente numa mola de constante de força,  $K = 350 \text{ N.m}^{-1}$ .

- Determine o alongamento,  $y_0$ , da mola esticada quando o corpo está em repouso, e a energia potencial da mola em relação à situação em que está sem tensão.
- O corpo é puxado para baixo, até uma distância  $y_0 = 3 \text{ cm}$  abaixo do ponto de equilíbrio. Determine a variação da energia potencial da mola, a variação da energia potencial gravitacional e a variação total da energia potencial. Mostre que a variação total da energia potencial é  $Ky_0^2/2$ .
- O corpo é então libertado. Determine o período, a frequência e a amplitude da oscilação subsequente.

**18** - Uma massa de 1 kg vibra com movimento harmónico simples no extremo de uma mola. No instante  $t = 0 \text{ s}$  a massa está a uma distância de 10 cm da posição de equilíbrio e está em repouso. O período natural do movimento é de 5 s. Obtenha:

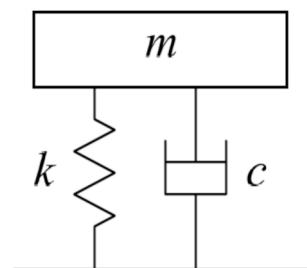
- A frequência natural do movimento e a constante da mola;
- A equação da posição em função do tempo,  $x(t)$
- A velocidade e a aceleração máximas da massa;
- Considere agora que o movimento é amortecido com uma constante de amortecimento  $b = 0,05 \text{ kg.s}^{-1}$ . Considerando que o período da oscilação natural é igual ao da oscilação amortecida, qual é a variação da energia mecânica do movimento num período.

**19** - Um corpo de 2 kg oscila preso a uma mola de constante de força  $K = 400 \text{ N.m}^{-1}$ , com amplitude inicial de 3 cm.

- Determine o período e a energia mecânica total inicial.
- Qual a constante de amortecimento  $b$ , quando a energia diminui de 1% por período. Assuma que o período da oscilação natural é igual ao da oscilação amortecida.

**20** - O sistema de fecho automático de uma porta pode ser descrito como um oscilador amortecido, como mostra a figura, onde  $k = 250 \text{ N/m}$  (constante da mola),  $m = 10 \text{ kg}$  (massa do sistema) e  $c = 40 \text{ Ns/m}$  (parâmetro de amortecimento).

- Qual é o tipo de amortecimento da porta (sub-amortecimento, amortecimento crítico ou super-amortecimento)?
- Pretende redesenhar a porta de forma a que esta seja super-amortecida. Adiciona amortecedores (de valor  $c$ ) em série ou em paralelo? Qual o número mínimo de amortecedores necessários?



**21 -** Um corpo de massa 2kg está preso a uma mola que se encontra na horizontal sobre uma superfície sem atrito. Na direcção do movimento, o corpo está sujeito a uma força restauradora de módulo igual a  $20x$  (onde  $x$  é a posição do corpo relativamente à posição de equilíbrio) e a uma força de amortecimento de módulo igual a  $2v$  (onde  $v$  é a velocidade do corpo).

- Determine a frequência angular do movimento.
- Sabendo que a amplitude inicial é de 20 cm, determine a amplitude após 2 s.
- Escreva a equação diferencial do movimento.

**22 -** Considere um sistema massa-mola com atrito, tal como mostra a figura seguinte. Dado um deslocamento inicial  $x_0 = 1$  m, qual será a amplitude do deslocamento após 3 ciclos? E após 10 ciclos?



**23 -** Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola ( $K = 100 \text{ N/m}$ ) executa um movimento harmónico simples com amplitude igual a 10 cm. A oscilação tem início numa das posições extremas.

- Determine a energia cinética e energia potencial elástica do oscilador no instante de tempo em que elas são iguais. Determine o primeiro instante de tempo e a posição respectiva em que isso acontece.

De seguida, o oscilador fica sujeito a amortecimento ( $b = 2 \text{ kg/s}$ ).

- Determine a variação de energia mecânica no segundo ( $\Delta t = 1 \text{ s}$ ) seguinte.
- Se se pretendesse manter a oscilação com amplitude igual à amplitude inicial, qual seria a potência da força exterior necessária a aplicar ao oscilador?

**24 -** Um sistema composto de uma mola de massa  $m = 10 \text{ kg}$ , oscila com um período de 2 s e uma amplitude inicial de 20 cm. Após 10 oscilações completas a amplitude reduz-se a 1 cm.

- Calcule a constante de amortecimento do movimento oscilatório.
- Calcule a posição do oscilador ao fim de 2 oscilações completas. Assuma que, no instante inicial, o oscilador se encontrava na posição de equilíbrio.
- Calcule a energia mecânica total do sistema ao fim de 2 oscilações completas.
- O oscilador passa a ser forçado por uma força externa de amplitude 100 N. Calcule a frequência da força externa para a amplitude do oscilador ser metade da amplitude inicial ( $A_0 = 20 \text{ cm}$ ).

**25 -** Um corpo de massa  $m = 1 \text{ kg}$  ligado a uma mola de constante elástica  $K = 100 \text{ N/m}$  oscila sob acção de uma força externa sinusoidal de valor máximo 10 N e frequência angular 6 rad/s. A constante de amortecimento do sistema é igual a 2 kg/s.

- Escreva a expressão da força externa em função do tempo.
- Determine a amplitude das oscilações forçadas.
- Para que valor da frequência força externa ocorre ressonância?
- Se a força externa deixar de actuar, ao fim de quanto tempo a amplitude passa para metade do valor inicial.

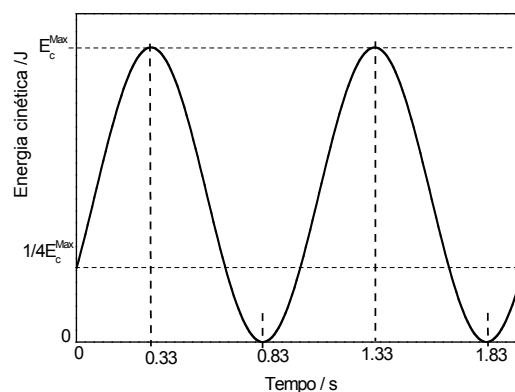
**26** - Um corpo de 2 kg oscila preso a uma mola de constante de força  $K = 400 \text{ N.m}^{-1}$ . A constante de amortecimento é  $b = 2,00 \text{ kg.s}^{-1}$ . O corpo é accionado por uma força sinusoidal de valor máximo 10 N e frequência angular de  $10 \text{ rad.s}^{-1}$ .

- Qual é a amplitude das oscilações?
- Se a frequência da força se alterar, em que frequência ocorrerá a ressonância?
- Determine a amplitude das vibrações na ressonância.

**27** - Um corpo de massa  $m = 2 \text{ kg}$  encontra-se ligado a uma mola de constante elástica  $K = 10 \text{ N/m}$ . O sistema oscila com uma amplitude inicial de 20 cm. Ao fim de 2 s a amplitude de oscilação passa para metade.

- Determine a frequência angular do movimento.
- Qual a frequência angular com que uma força externa deveria ser aplicada para que o sistema vibrasse em ressonância?

**28** - A figura representa o gráfico da energia cinética em função do tempo para uma massa de 0,5 kg ligada a uma mola que oscila em torno da posição de equilíbrio com uma amplitude de 0,5 m.

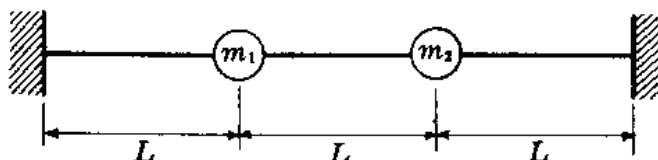


- Determine a constante da mola.
- Escreva a dependência temporal da aceleração do corpo,  $a(t)$ .
- Represente o gráfico força resultante em função do tempo.
- Considere que a partir de um dado instante actua sobre o sistema corpo-mola uma força com as seguintes características:  $F(t) = 2 \cos(5t) \text{ (N)}$ . Determine a nova amplitude de oscilação.

**29** - Um objecto de massa 1,5 kg está pendurado numa mola com  $K = 600 \text{ N/m}$  e perde 3% da sua energia em cada ciclo. A partir de dada altura o sistema passa a ser excitado por uma força sinusoidal com um valor máximo de 0,50 N.

- Qual é a frequência angular  $\omega_R$  da ressonância?
- Qual é a amplitude de oscilação na ressonância?
- Qual é a amplitude de oscilação para  $\omega_f = 19 \text{ rad/s}$ ?

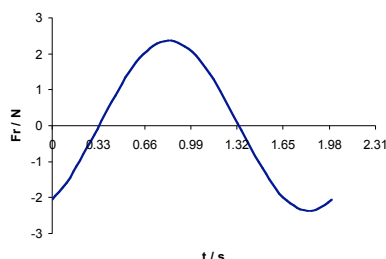
**30** - Duas massas  $m_1$  e  $m_2$  estão presas a um fio como mostra a figura. A tensão no fio é  $T$ . Determine as frequências naturais do sistema.



## Soluções

- 1 - a)  $\omega = 9,9 \text{ rad.s}^{-1}$ ; b)  $f = 1,58 \text{ Hz}$ ;  $T = 0,63 \text{ s}$ ; c)  $A = 5 \text{ cm}$ ; d)  $\delta = 0 \text{ rad}$ ;  
 e)  $v_{\max} = 0,495 \text{ m/s}$ .  
 2 - Chegam ao mesmo tempo ( $\Delta t = T/4$ )  
 3 - a)  $2,4 \text{ s}$ ; b)  $0,417 \text{ Hz}$ ; c)  $2,62 \text{ rad/s}$   
 4 -  $2,006 \text{ s}$   
 5 - a)  $5/2 \text{ s}^{-1}$  e  $0,4 \text{ s}$ ; b)  $3 \text{ m}$ ; c)  $-3 \text{ m}$  e  $0 \text{ m}$ .  
 6 -  $x(t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ , com sentido positivo para cima.  
 7 -  $x(t) = 6 \cos(\pi t) \text{ (cm)}$ ;  $v(t) = -6\pi \sin(\pi t) \text{ (cm/s)}$ ;  $a(t) = -6\pi^2 \cos(\pi t) \text{ (cm.s}^{-2}\text{)}$ .  
 9 - a)  $4 \text{ m}$ ; b)  $\pi/4 \text{ s}$ ; c)  $8 \cos(2t) \text{ (m/s)}$ ; d)  $8 \text{ m/s}$ ; e)  $0 \text{ ms}^{-2}$  e  $16 \text{ ms}^{-2}$ .  
 8 - a)  $40 \text{ cm/s}$ ;  $160 \text{ cm/s}^2$ ; b)  $32 \text{ cm/s}$ ;  $-96 \text{ cm/s}^2$ ; c)  $0,232 \text{ s}$ .  
 10 - a)  $2 \text{ rad/s}$ ; b)  $0,318 \text{ Hz}$  e  $3,14 \text{ s}$ ; c)  $x = 40 \cos(2t + \delta) \text{ (m)}$  e  $y = 40 \sin(2t + \delta) \text{ (m)}$ .  
 11 - a)  $5 \text{ rad/s}$ ; b)  $1,256 \text{ s}$ ; c)  $0,1 \cos(5t - \pi)$ ; d)  $0,46 \text{ J}$ .  
 12 - a)  $474 \text{ N/m}$ ; b)  $2,37 \text{ J}$ ; c)  $x = 0,1 \cos(4\pi t + \delta)$ ; Não.  
 13 - a)  $1579 \text{ N/m}$ ; b)  $79 \text{ m.s}^{-2}$ ; c)  $0,0197 \text{ J}$ .  
 15 -  $3/4$  e  $x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$ .  
 16 -  $9,79 \text{ m.s}^{-2}$ .  
 17 - a)  $5,6 \text{ cm}$  e  $0,55 \text{ J}$ ; b)  $0,7455 \text{ J}$ ,  $-0,588 \text{ J}$  e  $0,1575 \text{ J}$ ; c)  $0,475 \text{ s}$ ,  $2,1 \text{ Hz}$  e  $0,03 \text{ m}$ .  
 18 - a)  $f_0 = 0,2 \text{ Hz}$ ;  $K = 1,6 \text{ N/m}$ ; b)  $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \delta) = 0,1 \cos(0,4\pi t) \text{ (m)}$ .  
 c)  $v_{\max} = 0,04\pi \text{ m/s}$ ;  $a_{\max} = 1,58 \times 10^{-1} \text{ m/s}^2$ ; d)  $\Delta E_M = -1,77 \times 10^{-2} \text{ J}$ .  
 19 - a)  $0,44 \text{ s}$  e  $0,18 \text{ J}$ ; b)  $0,045 \text{ kg/s}$ .  
 20 - a) sub-amortecimento; b) no mínimo 3 amortecedores colocados em paralelo.  
 21 - a)  $\omega = 3,12 \text{ rad/s}$ ; b)  $A = 7,36 \text{ cm}$ ; c)  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 10x = 0$ .  
 22 - ao fim de 3 ciclos,  $A = 0,647 \text{ m}$ ; ao fim de 10 ciclos,  $A = 0 \text{ m}$  (já parou).  
 23 - a)  $E_c = E_{\text{pot}} = 0,25 \text{ J}$ ;  $t = 0,079 \text{ s}$ ;  $x = 0,07 \text{ m}$ ; b)  $\Delta E_m = -0,43 \text{ J}$ ; c)  $\bar{P} = 0,43 \text{ W}$ .  
 24 - a)  $b = 3 \text{ kg/s}$ ; b)  $x = 0 \text{ m}$ ; c)  $E_{\text{mec}} = 0,596 \text{ J}$ ; d)  $\omega = 10,5 \text{ rad/s}$ .  
 25 - a)  $F_{\text{ext}} = 10 \cos(6t + \phi)$ ; b)  $A = 0,15 \text{ m}$ ; c)  $\omega_f = \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ ; d)  $t = 0,69 \text{ s}$ .  
 26 - a)  $4,98 \text{ cm}$ ; b)  $14,14 \text{ rad/s}$ ; c)  $35,4 \text{ cm}$ .  
 27 - a)  $\omega = 4,88 \text{ rad/s}$ ; b)  $\omega_f = \omega_0 = \sqrt{5} \text{ rad/s}$ .  
 28 - a)  $K = 4,9 \text{ N/m}$ ; b)  $a(t) = -\frac{\pi^2}{2} \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (m/s}^2\text{)}$ ; d)  $A = 0,26 \text{ m}$ ;

c)



- 29 - a)  $\omega_R = 20 \text{ rad/s}$ ; b)  $A = 0,172 \text{ m}$ ; c)  $35,4 \text{ cm}$ ; d)  $A = 0,0085 \text{ m}$ .  
 30 -  $\omega_{\pm} = \omega_0 \left(1 \pm \sqrt{1 - 3\beta/M}\right)^{1/2}$ , com  $\omega_0 = \sqrt{T/(\beta L)}$ ,  $M = m_1 + m_2$  e  $\beta = m_1 m_2 / M$ .