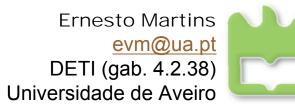


"Hi, honey... I'm Ohm!"

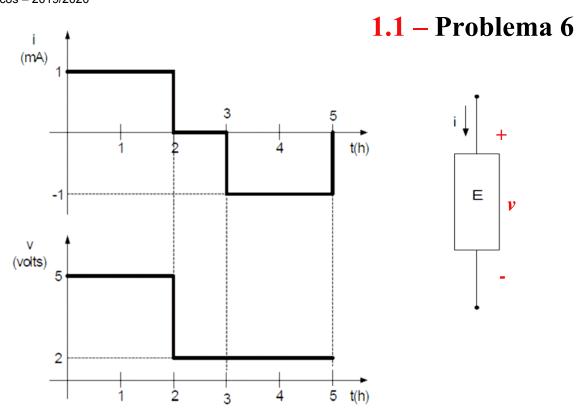
CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Problemas resolvidos

I

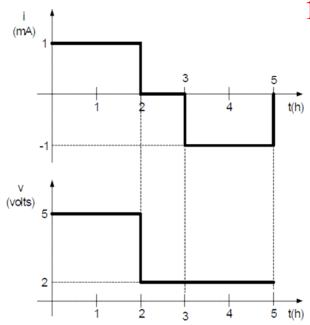


Circuitos Eléctricos – 2019/2020



a) Qual foi a potência fornecida ao elemento E em cada um dos 3 intervalos ?

1.1 - Problema 6





a)

$$P[0,2] = 5 \times 1mA = 5mW$$

$$P[2,3] = 2 \times 0 = 0W$$

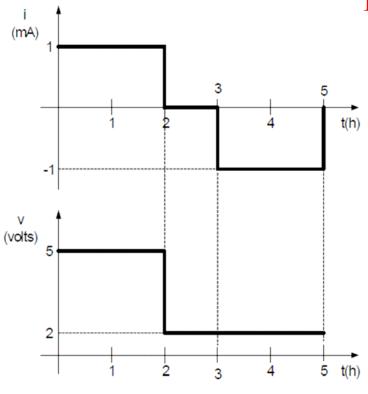
 $P[3,5]=2\times (-1mA)=-2mW$ (neste intervalo o elemento E fornece potência ao exterior)

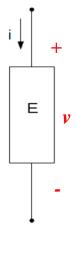
E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

I-3

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

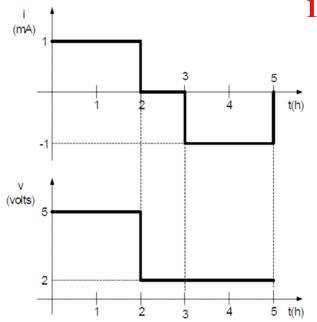
1.1 – Problema 6





b) Qual foi a energia fornecida ao elemento E durante as primeiras duas horas ?

1.1 - Problema 6





b)
$$P = VI = 5x(1mA) = 5mW$$

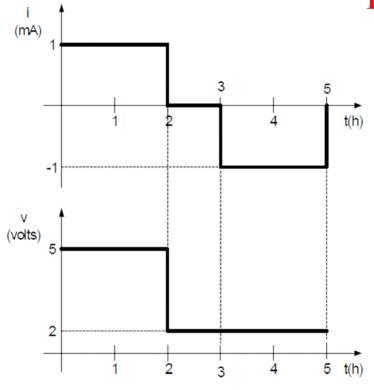
 $E = Pxt = (5mW)(2x60x60) = 36J$

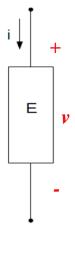
E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

I-5

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

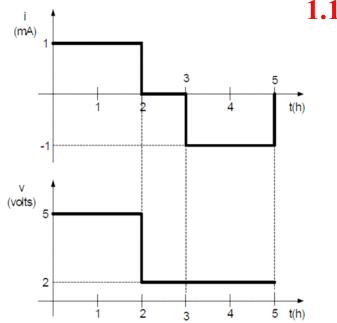
1.1 – Problema 6





c) Supondo uma energia inicial nula, qual é a energia que permanece (restante) no elemento E ao fim das 5 horas ?

1.1 - Problema 6



c)
$$E[0,2] = 36J$$

$$E[3,5] = -2mW \times 2h \times 60m \times 60s = -14.4J$$

$$E_{restante} = 36J - 14.4J = 21.6J$$

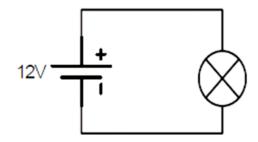
E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

I-7

Circuitos Eléctricos – 2019/2020

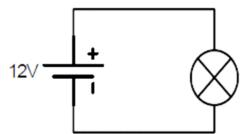
1.2 – Problema 10

Um circuito composto por um bateria de automóvel de 12Volts e uma lâmpada, apresentado na figura 1.2 fornece à lâmpada uma energia de 460.8Wh durante o período de 8 horas.



- a) Qual é a potência fornecida à lâmpada ?
- b) Qual é a corrente que percorre a lâmpada?

1.2 – Problema 10



a) Uma vez que a potência é igual à energia a dividir pelo tempo temos:

$$P = \frac{E}{t} = \frac{460.8}{8} = 57.6W$$

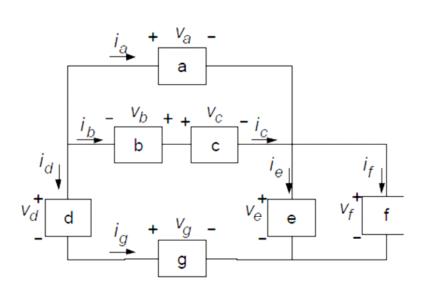
b) Uma vez que a corrente é igual à potência a dividir pela tensão:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{57.6}{12} = 4.8A$$

E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

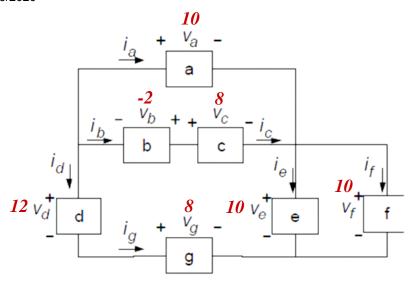
I-9

Circuitos Eléctricos – 2019/2020



- Calcular valores das tensões, correntes e potências dissipadas.
- Para cada elemento, indicar se está a dissipar ou a fornecer potência (D/F).

Tabela I							
Elemento	V (V)	I (A)	P _d (W)	D/F			
a	10	25					
b	-2						
c		5					
d	12						
e	10	10					
f							
g							



$$\begin{split} V_a - V_c + V_b &= 0 \Leftrightarrow 10 - V_c - 2 = 0 \Leftrightarrow V_c = 8V \\ V_f &= V_e = 10V \\ V_a + V_e - V_g - V_d &= 0 \Leftrightarrow 10 + 10 - V_g - 12 = 0 \Leftrightarrow V_g = 8V \end{split}$$

I-11

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

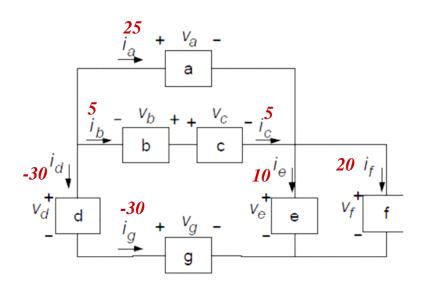


Tabela I							
Elemento	V (V)	I (A)	P _d (W)	D/F			
a	10	25					
b	-2						
c		5					
d	12						
e	10	10					
f							
g							

$$\begin{split} I_b &= I_c = 5A \\ I_a + I_b + I_d &= 0 \Leftrightarrow 25 + 5 + I_d = 0 \Leftrightarrow I_d = -30A \\ I_g &= I_d = -30A \\ I_e + I_f + I_g &= 0 \Leftrightarrow 10 + I_f - 30 = 0 \Leftrightarrow I_f = 20A \end{split}$$

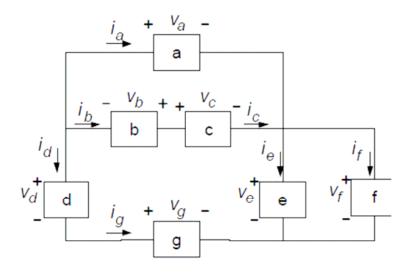


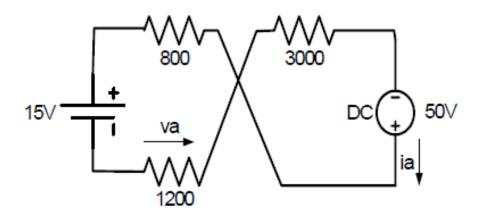
Tabela I							
Elemento	V (V)	I(A)	P _d (W)	D/F			
a	10	25	250	D			
b	-2	5	10	D			
c	8	5	40	D			
d	12	-30	-360	F			
e	10	10	100	D			
f	10	20	200	D			
g	8	-30	-240	F			

I-13

Circuitos Eléctricos – 2019/2020

1.4 - Problema 16

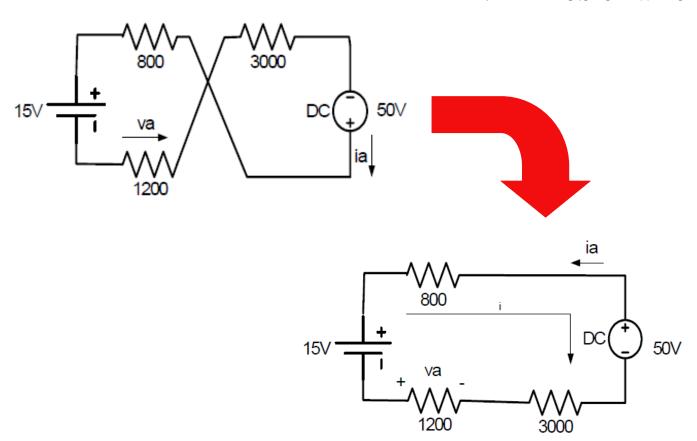
Dado o circuito eléctrico da figura 1.5 em que as unidades das resistências estão todas em ohms (Ω) .



Calcular:

- a) O valor da corrente ia.
- b) O valor da tensão va.
- c) A potência fornecida pela fonte de 15Volts.

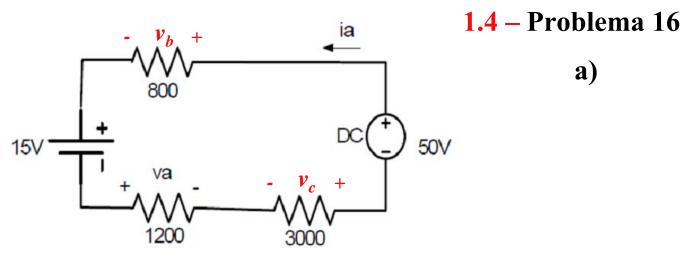
1.4 - Problema 16



E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

I-15

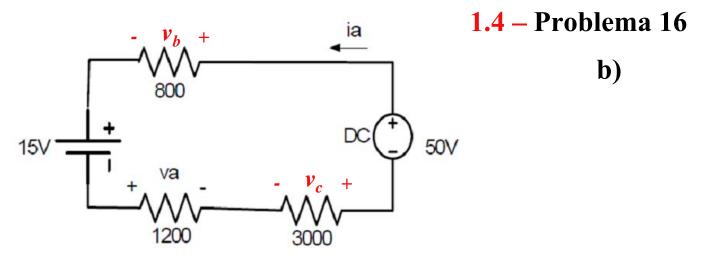
Circuitos Eléctricos - 2019/2020



KVL:
$$-15 - v_b + 50 + v_c - v_a = 0$$

$$v_a = 1200i_a$$

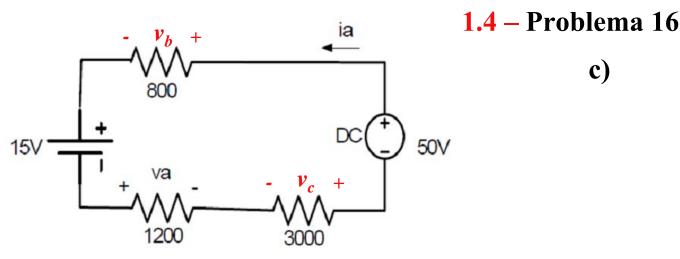
 $v_b = 800i_a$
 $-15 - 800i_a + 50 - 3000i_a - 1200i_a = 0$
 $v_c = -3000i_a$
 $i_a = 7mA$



$$i_a = 7mA$$
 $v_a = 1200i_a = 1200 \times 0.007 = 8.4V$

I-17

Circuitos Eléctricos - 2019/2020



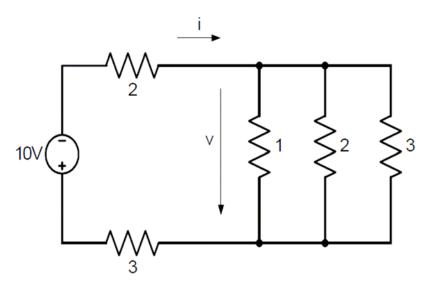
$$i_a = 7mA$$
 $P_{a(15)} = VxI = 15x0.007 = 105mW$

Mas isto é a potência absorvida!

$$P_{f(15)} = -105mW$$

1.5 – **Problema 14A**

Dado o circuito eléctrico

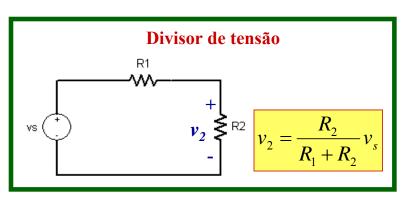


Calcular a tensão v e a corrente i.

E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

I-19

Circuitos Eléctricos - 2019/2020



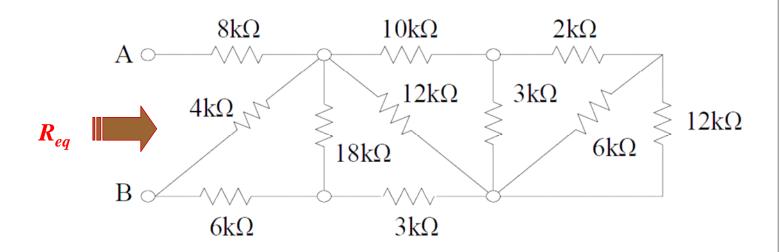
$$v = -\frac{R_p}{2+3+R_p} = 10$$

$$v = -0.98V$$

$$i = \frac{v}{R_p} = -1.8A$$

E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

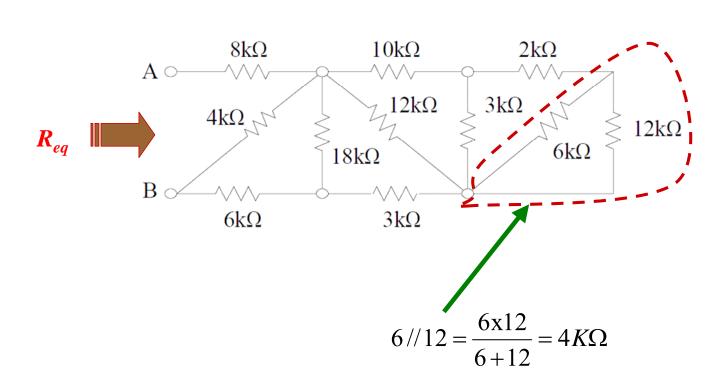
Calcular a resistência equivalente entre A e B

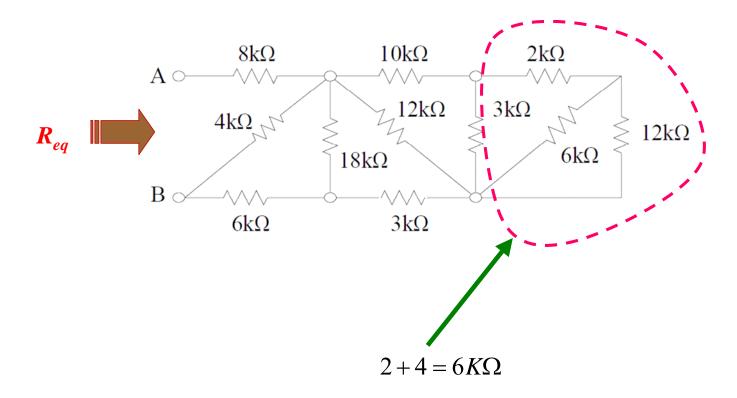


E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

I-21

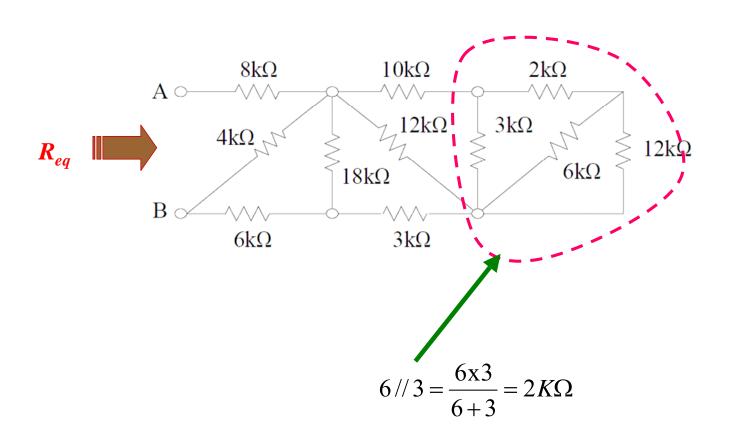
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

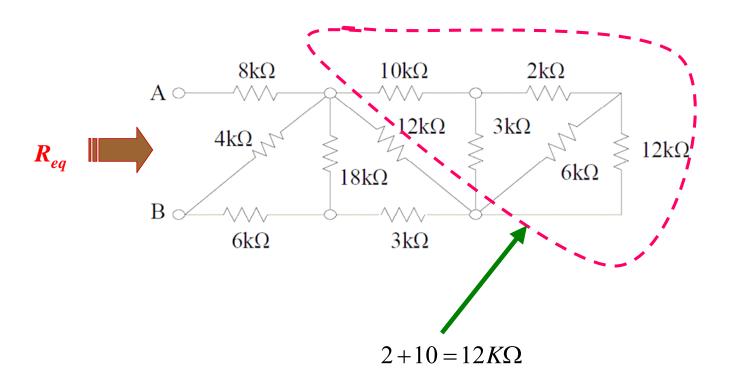




I-23

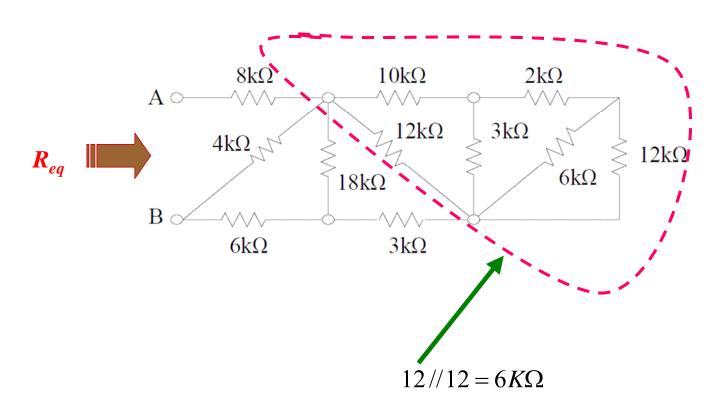
Circuitos Eléctricos – 2019/2020

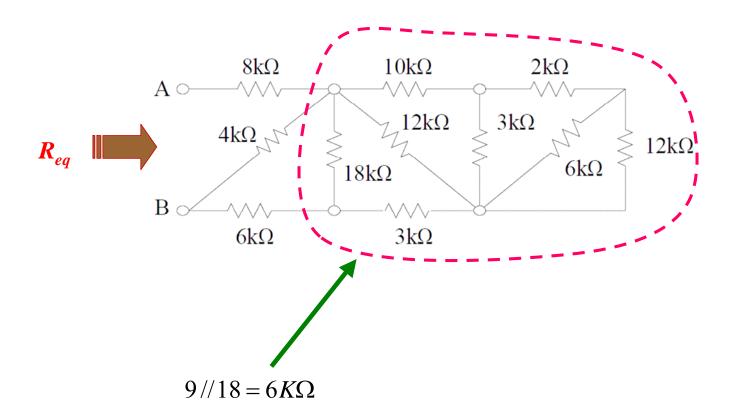




I-25

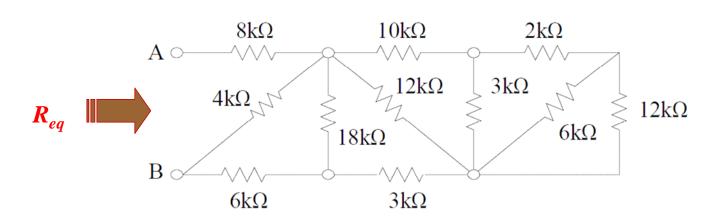
Circuitos Eléctricos - 2019/2020





I-27

Circuitos Eléctricos – 2019/2020



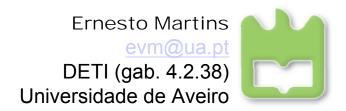
$$R_{eq} = [(6+6)//4] + 8 = 3 + 8 = 11K\Omega$$



CIRCUITOS ELÉCTRICOS

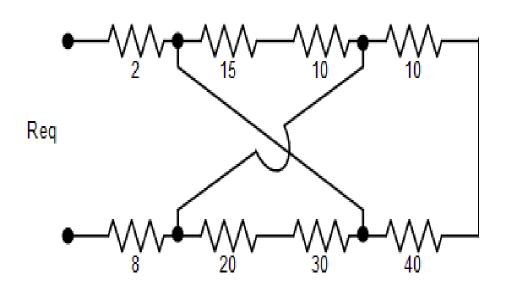
Problemas resolvidos

II

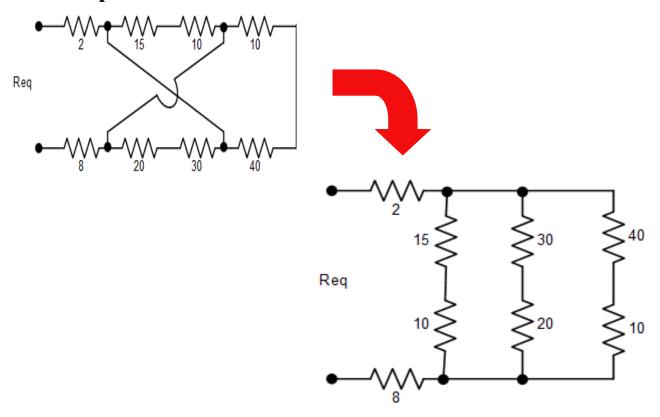


Circuitos Eléctricos - 2019/2020

1 - Calcule *Req* (valores das resistências em *Ohm*)



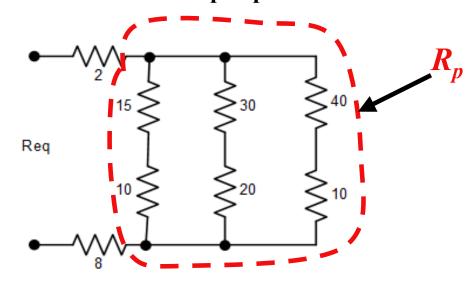
1º Passo: redesenhar o circuito de maneira a evidenciar séries e paralelos...



II-3

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

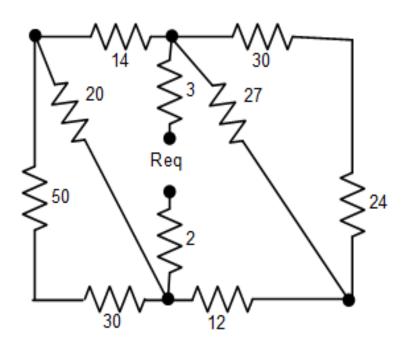
2º Passo: associar resistências por partes...



$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{15+10} + \frac{1}{30+20} + \frac{1}{40+10} \Leftrightarrow R_p = 12.5\Omega$$

$$R_{eq} = 2 + R_p + 8 = 22.5\Omega$$

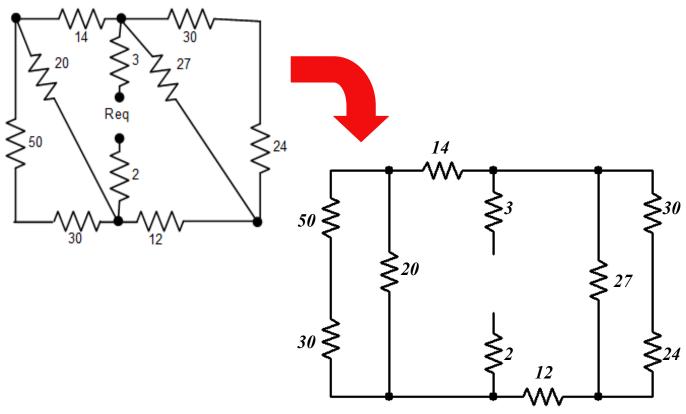
2 - Calcule Req (valores das resistências em Ohm)



11-5

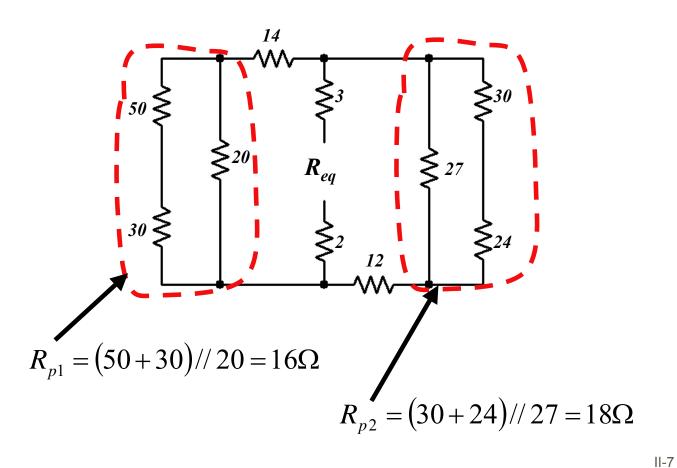
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

1º Passo: redesenhar o circuito de maneira a evidenciar séries e paralelos (e evitar elementos oblíquos)...



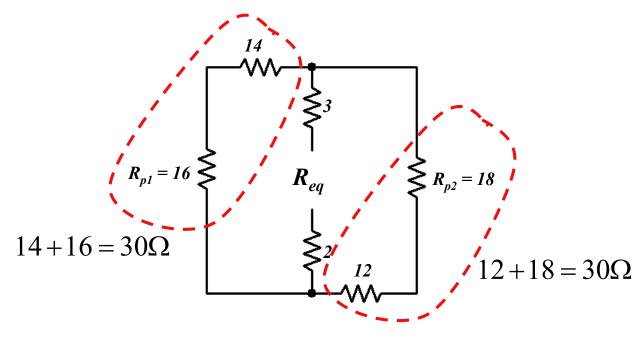
2

2º Passo: associar resistências por partes...



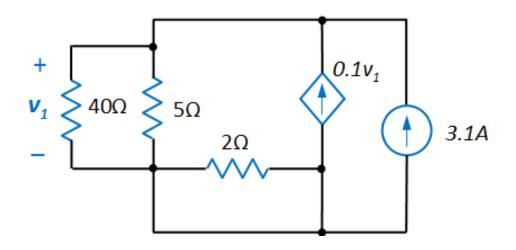
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

3º Passo: associar o resto...



$$R_{eq} = (30/30) + 3 + 2 = 20\Omega$$

3 - Calcule a potência absorvida por cada um dos elementos do circuito.

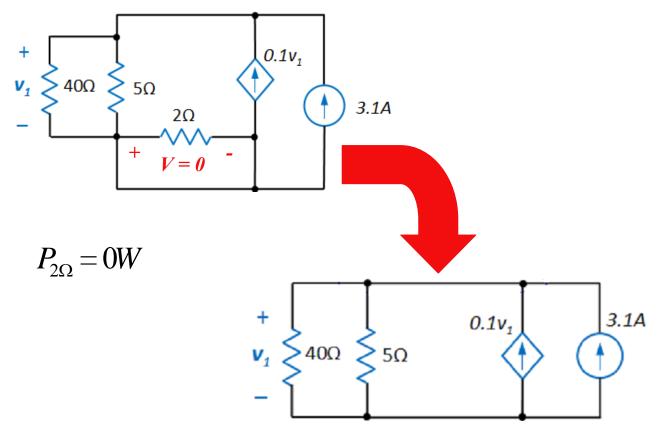


Prob. 19

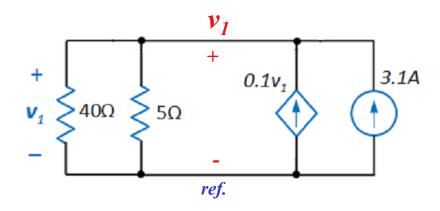
11-9

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

1º Passo: redesenhar o circuito...



2º Passo: aplicar Análise Nodal...

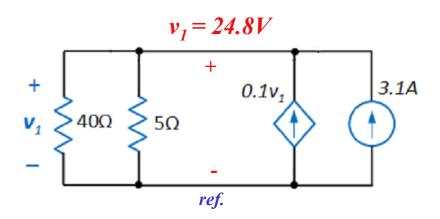


$$\frac{v_1}{40} + \frac{v_1}{5} - 0.1v_1 - 3.1 = 0$$
$$v_1 = 24.8V$$

II-11

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

3º Passo: calculamos a potências absorvidas



Resistências:

$$P_{40\Omega} = \frac{(v_1)^2}{40} = \frac{(24.8)^2}{40} = 15.4W$$

$$P_{5\Omega} = \frac{(v_1)^2}{5} = 123W$$

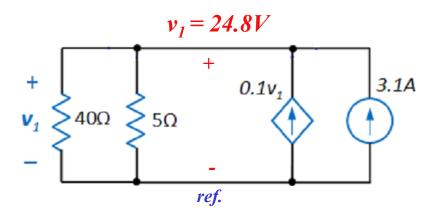
Fontes:

$$P_{0.1v_1} = VxI = -v_1(0.1v_1) = -61.5W$$

 $P_{3.1} = VxI = -v_1(3.1) = -76.9W$

Ambas as fontes fornecem energia!

4º Passo: verificar o balanço das potências

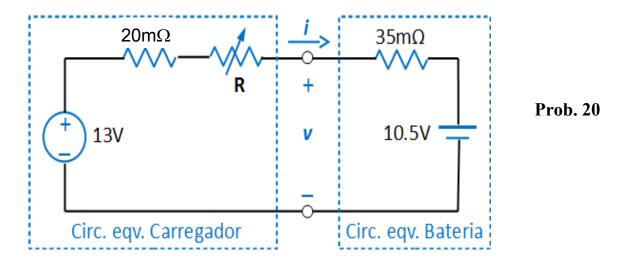


$$\sum_{i} P_{i} = 15.4 + 123 - 61.5 - 76.9 = 0$$

II-13

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

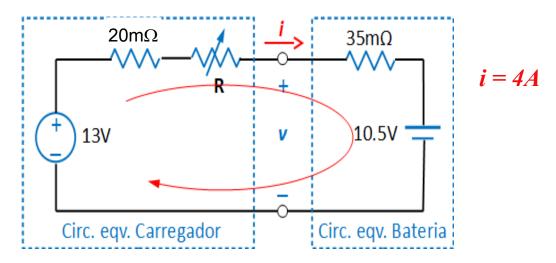
4 - Circuito representa um carregador ligado a uma bateria.



Calcular o valor de R de maneira que:

- a) a corrente de carga seja 4A;
- b) a potência fornecida à bateria seja 25W;
- c) a tensão aos terminais da bateria seja 11V.

a) Aplicar KVL



$$-13 + 0.02i + Ri + 0.035i + 10.5 = 0$$

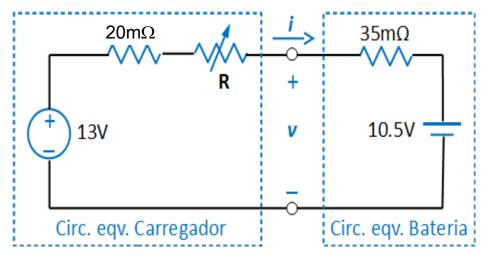
$$R = \frac{2.5}{i} - 0.055$$

Para
$$i = 4A$$
, $R = 0.57\Omega$

II-15

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

b) Começamos por calcular *i*...



$$P_{BAT} = 25W$$

$$P_{Bat} = 25$$

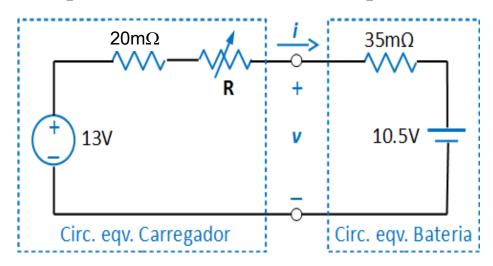
$$P_{Bat} = P_{35} + P_{10.5} = 25$$

$$0.035i^{2} + 10.5i = 25$$

$$i^{2} + 300i - 714.3 = 0$$

$$i = \frac{-300 \pm \sqrt{300^2 - 4(-714.3)}}{2}$$
$$i = 2.36A \quad \lor \quad i = -302.4A$$

b) ... e depois calculamos o valor de R para esse i

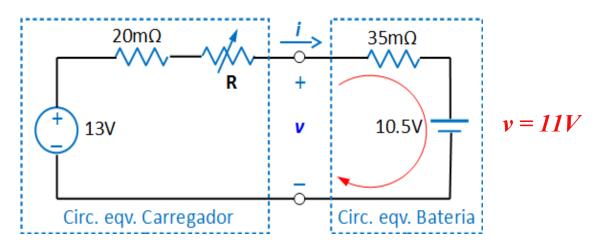


$$R = \frac{2.5}{i} - 0.055$$
 Para $i = 2.36A$, $R = 1\Omega$

II-17

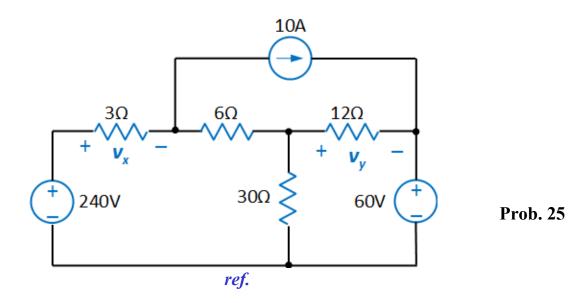
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

c) Começamos por aplicar KVL no loop de saída para obter i



$$-11+0.035i+10.5=0$$
 $R = \frac{2.5}{i} - 0.055$ $i = 14.29A$ Para $i = 14.29A$, $R = 0.12\Omega$

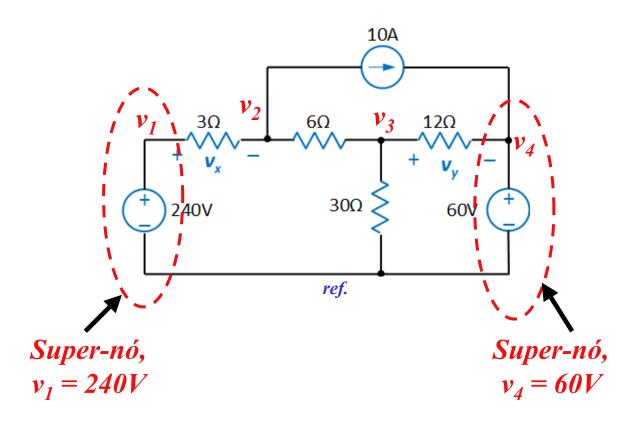
- 5 Use a Análise Nodal para calcular
- a) $v_x e v_y$
- b) a potência absorvida pela resistência de 6Ω



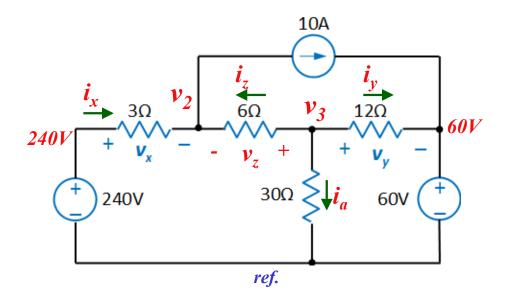
II-19

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

1º Passo: identificar nós do circuito e tensões nodais...



2º Passo: marcar correntes e tensões nas resistências...

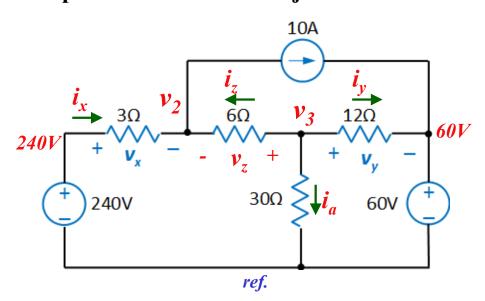


NOTA: Os sentidos das correntes e as polaridades das tensões são de referência – por isso são arbitrárias!

II-21

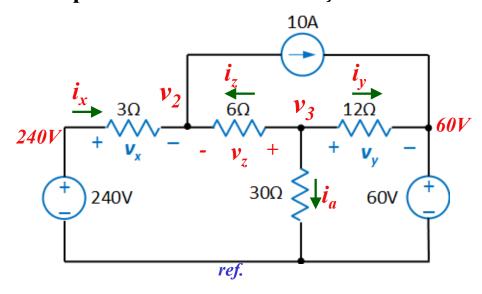
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

3º Passo: Aplicar KCL aos nós cuja tensão é desconhecida...



Nó
$$v_2$$
: $i_x + i_z = 10$
Nó v_3 : $i_z + i_a + i_y = 0$

4º Passo: Exprimir correntes em função das tensões ...



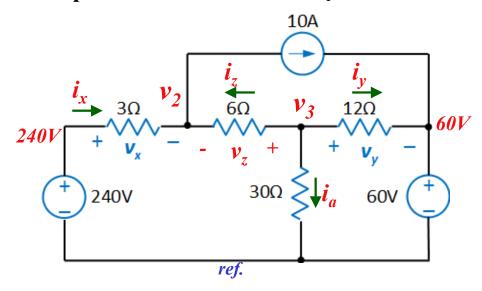
Nó
$$v_2$$
: $i_x + i_z = 10 \Leftrightarrow \frac{v_x}{3} + \frac{v_z}{6} = 10$

Nó
$$v_3$$
: $i_z + i_a + i_y = 0 \Leftrightarrow \frac{v_z}{6} + \frac{v_3}{30} + \frac{v_y}{12} = 0$

11-23

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

5º Passo: Exprimir correntes em função das tensões nodais...

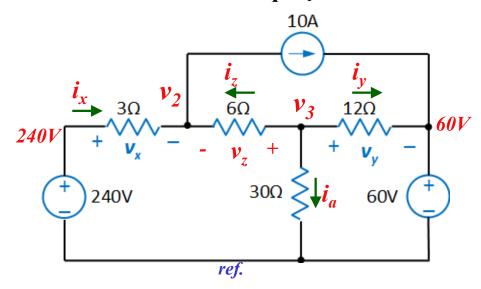


Nó
$$v_2$$
: $\frac{v_x}{3} + \frac{v_z}{6} = 10 \iff \frac{240 - v_2}{3} + \frac{v_3 - v_2}{6} = 10$

Nó
$$v_3$$
: $\frac{v_z}{6} + \frac{v_3}{30} + \frac{v_y}{12} = 0 \Leftrightarrow \frac{v_3 - v_2}{6} + \frac{v_3}{30} + \frac{v_3 - 60}{12} = 0$

II-24

6º Passo: Resolver sistema de equações...



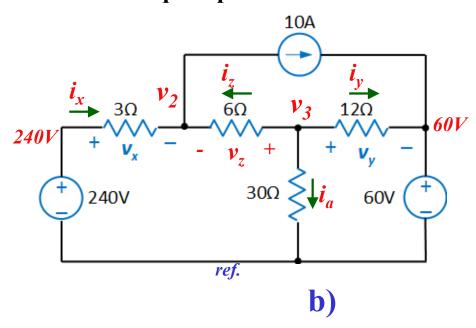
$$\begin{cases} \frac{240 - v_2}{3} + \frac{v_3 - v_2}{6} = 10\\ \frac{v_3 - v_2}{6} + \frac{v_3}{30} + \frac{v_3 - 60}{12} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = 181.5V \\ v_3 = 124.4V \end{cases}$$

II-25

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

7º Passo: Calcular o que é pedido.



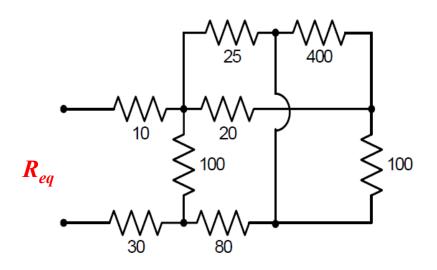
a)

$$v_x = 240 - v_2 = 58.5V$$

 $v_y = v_3 - 60 = 64.5V$

$$P_{6\Omega} = \frac{(v_z)^2}{6} = \frac{(v_3 - v_2)^2}{6} = 543.4W$$

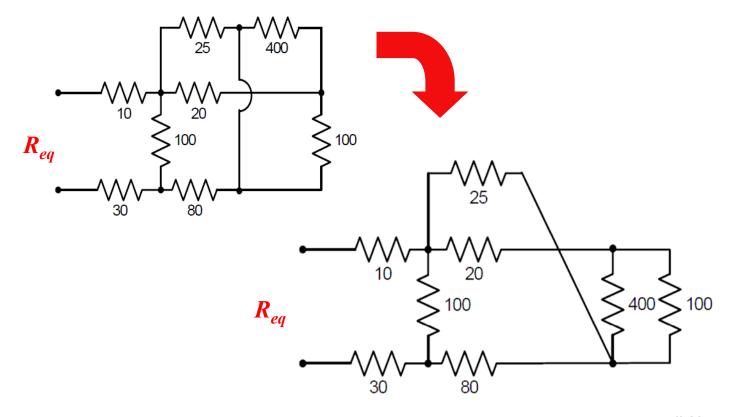
6 - Calcule *Req* (valores das resistências em *Ohm*)



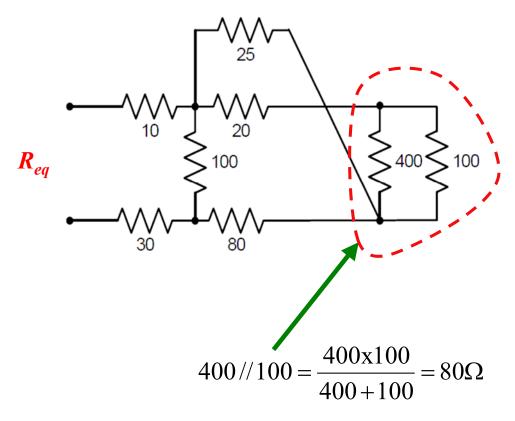
II-27

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

1º Passo: redesenhar o circuito de maneira a evidenciar séries e paralelos...

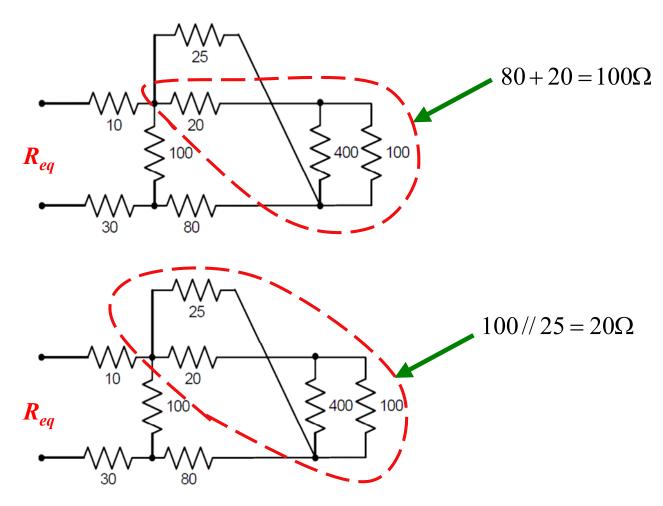


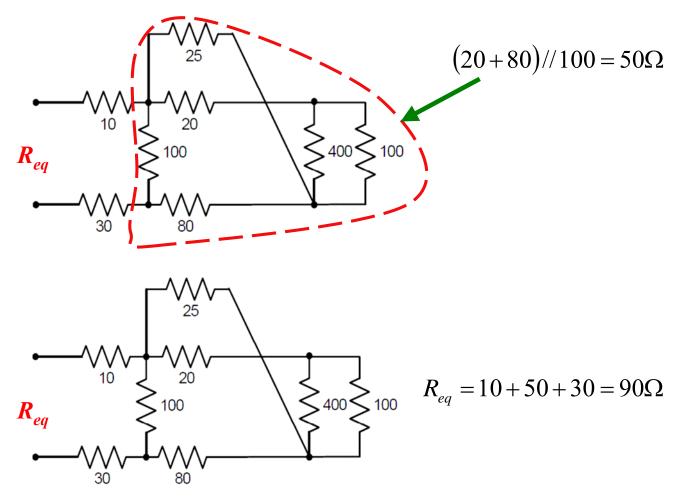
2º Passo: Associar resistências gradualmente da direita para a esquerda...



II-29

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

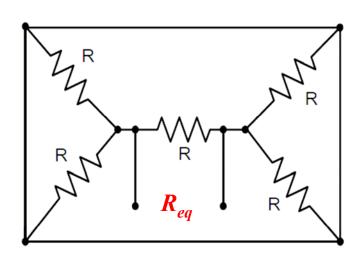




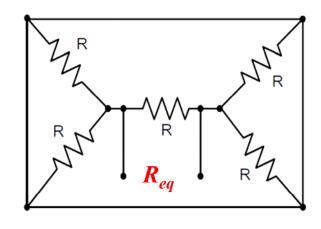
II-31

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

7 - Calcule *Req*

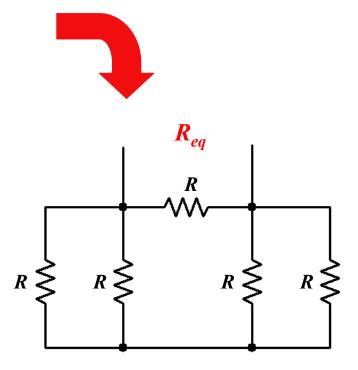


Redesenhar o circuito de maneira a evidenciar séries e paralelos...



$$R_{eq} = R //[(R // R) + (R // R)]$$

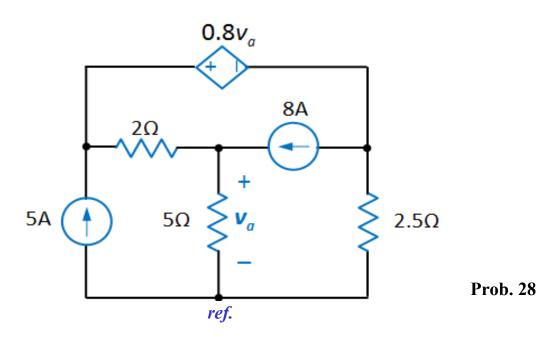
$$R_{eq} = \frac{R}{2}$$



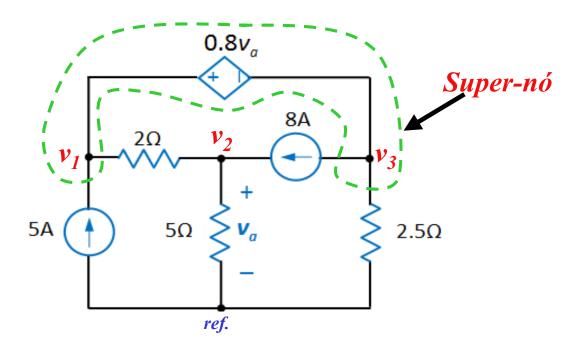
II-33

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

8 – Calcular v_A usando Análise Nodal.



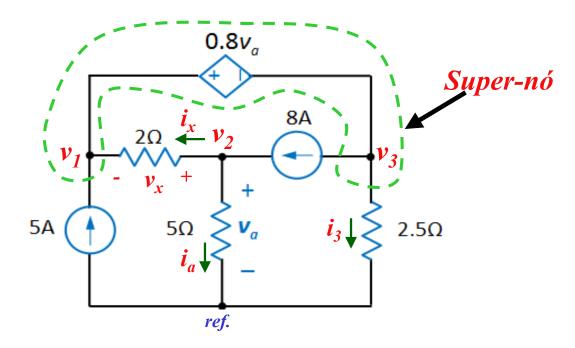
1º Passo: identificar nós do circuito e tensões nodais...



II-35

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

2º Passo: marcar correntes e tensões nas resistências...



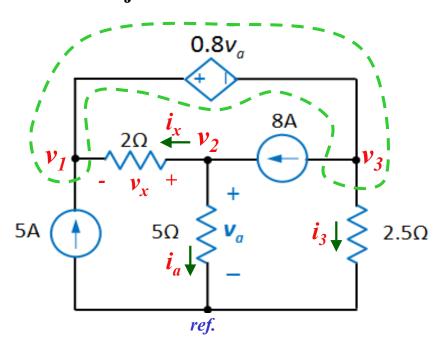
Mais uma vez, não esquecer que estas marcações têm sentidos e polaridades arbitrárias!

3º Passo: Aplicar KCL aos nós cuja tensão é desconhecida...

Temos que escrever duas equações nodais:

- \triangleright nó v_2 e
- Super-nó

Nó
$$v_2$$
: $i_x + i_a = 8$



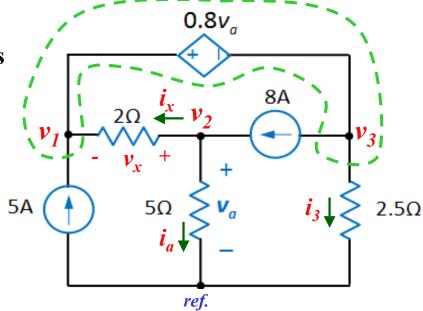
Super-nó:
$$i_3 + 8 = i_x + 5$$

II-37

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

4º Passo: Exprimir correntes em função das tensões...

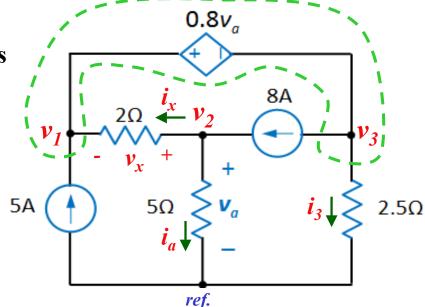
Notar que $v_a = v_2$



Nó
$$v_2$$
: $i_x + i_a = 8 \Leftrightarrow \frac{v_x}{2} + \frac{v_2}{5} = 8$

Super-nó:
$$i_3 + 8 = i_x + 5 \Leftrightarrow \frac{v_3}{2.5} + 8 = \frac{v_x}{2} + 5$$

5° Passo: Exprimir correntes em função das tensões nodais...



Nó
$$v_2$$
: $\frac{v_x}{2} + \frac{v_2}{5} = 8 \Leftrightarrow \frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{v_2}{5} = 8$

Super-nó:
$$\frac{v_3}{2.5} + 8 = \frac{v_x}{2} + 5 \Leftrightarrow \frac{v_3}{2.5} + 8 = \frac{v_2 - v_1}{2} + 5$$

II-39

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

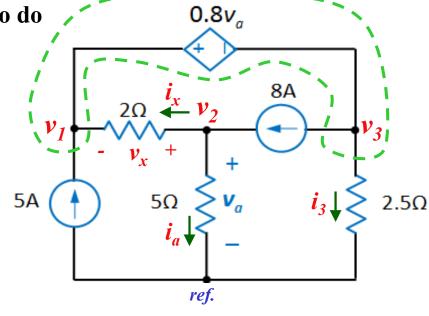
6º Passo: Obter equação do super-nó e resolver...

Equação do super-nó:

$$0.8v_a = v_1 - v_3$$

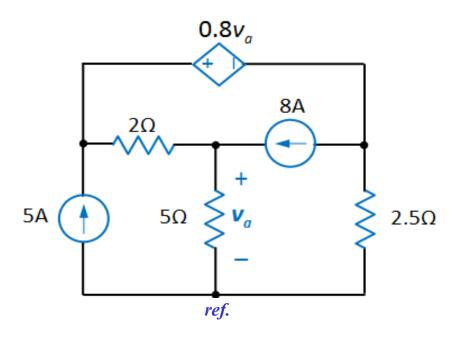
Ou, como $v_a = v_2$

$$0.8v_2 = v_1 - v_3$$



Juntando esta às duas equações anteriores...
$$\begin{cases} -0.5v_1 + 0.5v_2 - v_3/2.5 = 3 \\ 0.5v_1 - 0.7v_2 = -8 \\ v_1 - 0.8v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 20.3V \\ v_2 = 25.9V \\ v_3 = -0.45V \end{cases}$$

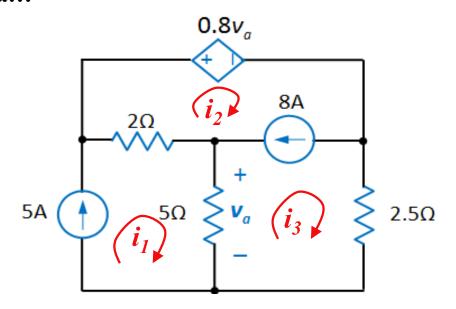
9 – Calcular v_A usando, agora, Análise de Malhas.



II-41

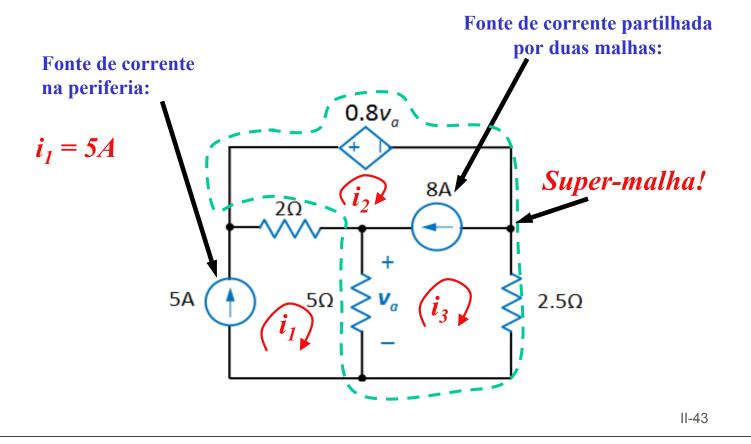
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

1º Passo: identificar as malhas do circuito e atribuir correntes de malha...



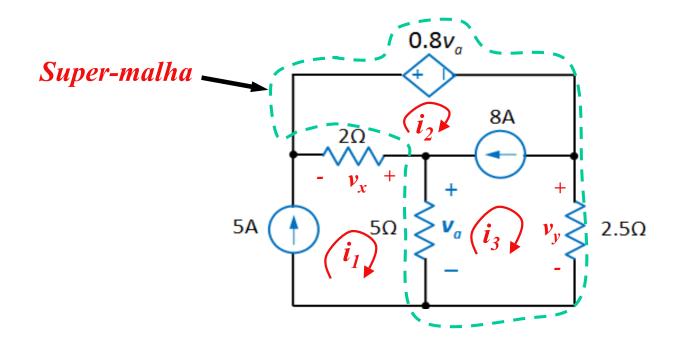
Mais uma vez, não esquecer que os sentidos das correntes de malha são arbitrários

2º Passo: ... fontes de corrente dão lugar a simplificações... e a super-malhas!

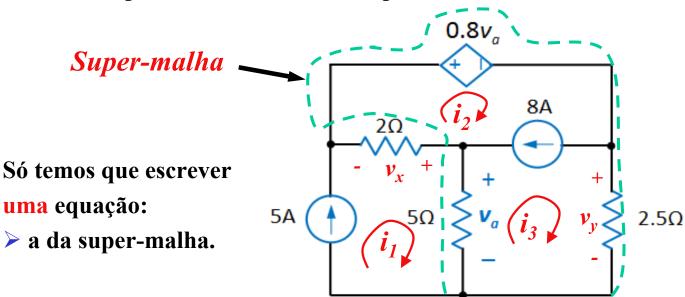


Circuitos Eléctricos - 2019/2020

3º Passo: marcar tensões nas resistências...



4º Passo: Aplicar KVL às malhas/super-malhas...



Usando o sentido horário...

Super-malha:
$$-v_a + v_x + 0.8v_a + v_y = -0.2v_a + v_x + v_y = 0$$

II-45

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

5º Passo: Exprimir tensões em função das correntes de

malha...

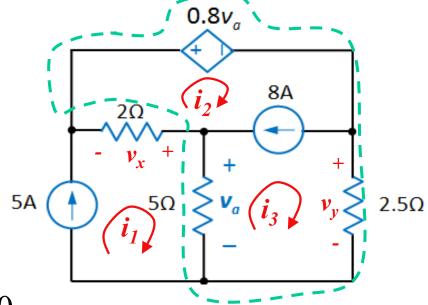
$$v_a = 5(i_1 - i_3)$$

$$v_x = 2(i_2 - i_1)$$

$$v_y = 2.5i_3$$

Substituindo em...

$$-0.2v_a + v_x + v_y = 0$$



Obtemos

$$-0.2[5(i_1-i_3)]+2(i_2-i_1)+2.5i_3=-3i_1+2i_2+3.5i_3=0$$

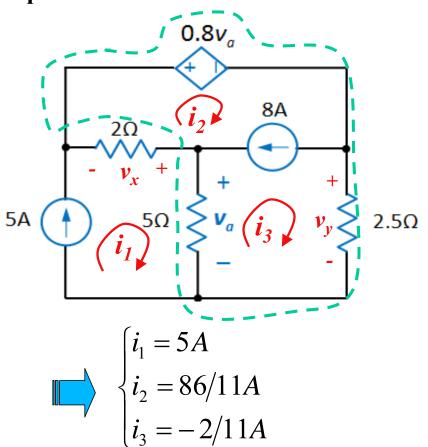
6º Passo: Aplicar KCL à super-malha e resolver...

A fonte de corrente de 8A pode ser expressa por

$$i_2 - i_3 = 8$$

Juntando esta à equação anterior obtemos:

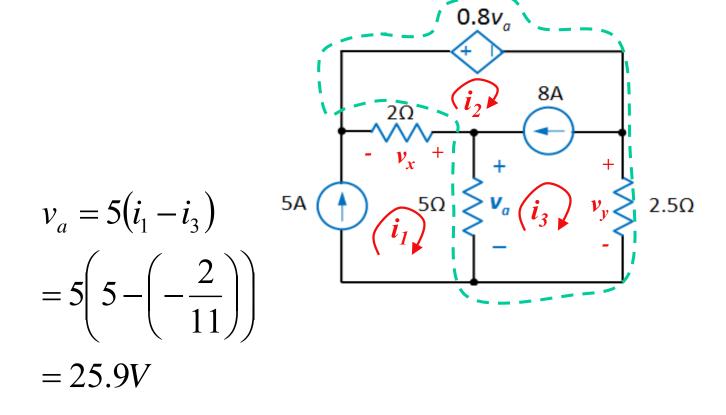
$$\begin{cases} i_1 = 5 \\ i_2 - i_3 = 8 \\ -3i_1 + 2i_2 + 3.5i_3 = 0 \end{cases}$$



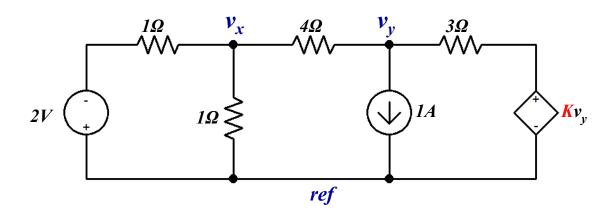
11-47

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

7º Passo: Calcular o que é pedido.



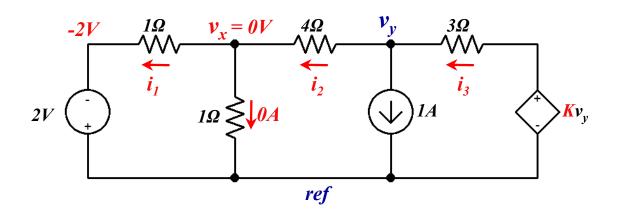
10 – Calcular K de modo que a tensão v_x seja θV



11-49

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

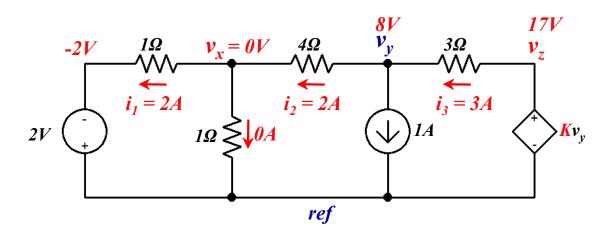
O problema resolve-se partindo da suposição $v_x = \theta V \dots$



$$i_1 = \frac{v_x - (-2)}{1} = 2A$$

$$i_2 = i_1 = 2A$$

$$i_3 = i_2 + 1 = 3A$$

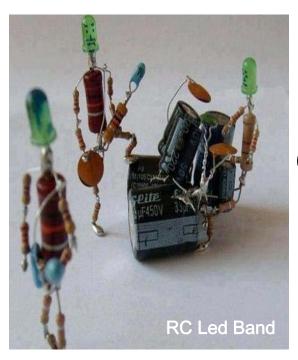


$$\frac{v_y - v_x}{4} = i_2 \Leftrightarrow v_y = 4i_2 = 8V$$

$$\frac{v_z - v_y}{3} = i_3 \Leftrightarrow v_z = 3i_3 + v_y = 17V$$

$$v_z = Kv_y \Leftrightarrow K = 17/8$$

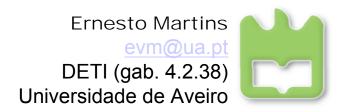
II-51



CIRCUITOS ELÉCTRICOS

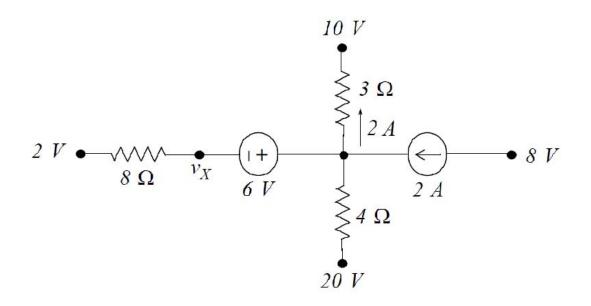
Problemas resolvidos



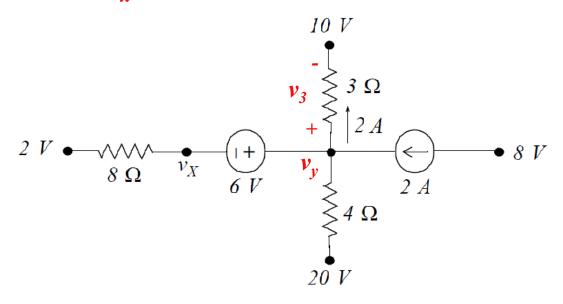


Circuitos Eléctricos - 2019/2020

1 — As tensões indicadas nos terminais do circuito abaixo são relativas a um nó de referência não representado. Calcule o valor da tensão nodal v_x e a potência fornecida pela fonte de 6V.



1: calculo de v_x

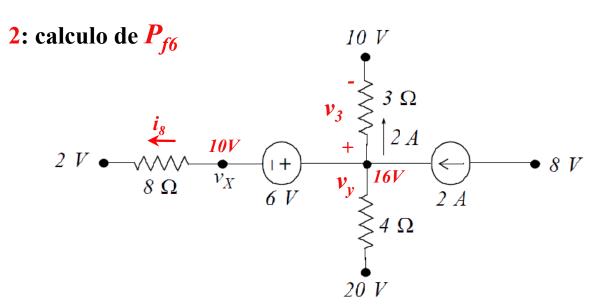


$$v_y = v_3 + 10 \iff v_y = (3)(2) + 10 = 16V$$

 $v_y - v_x = 6 \iff v_x = v_y - 6 = 10V$

III-3

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

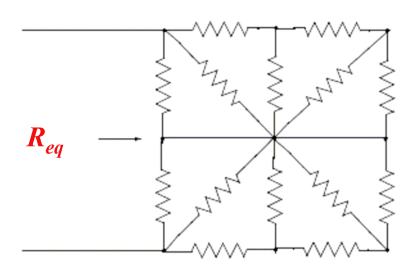


$$i_8 = \frac{10-2}{8} = 1A$$

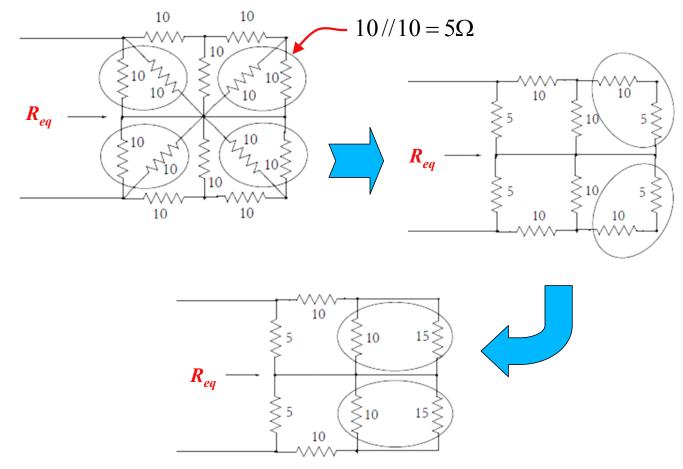
$$P_{a6} = V \times I = 6 \times 1 = 6W$$
 É a potência absorvida!

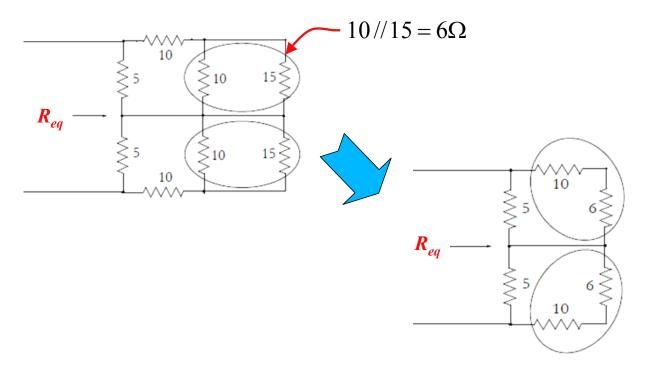
$$P_{f6} = -6W$$

2 - Calcule Req (o valor de todas as resistências é 10Ω)







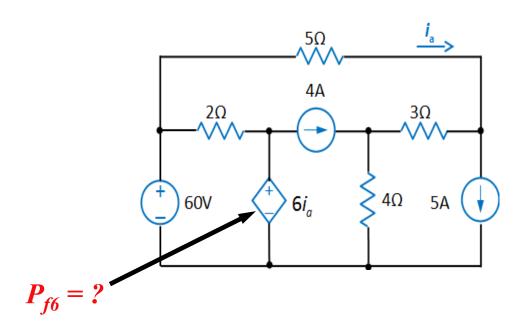


$$R_{eq} = (16//5) + (16//5) = 7.62\Omega$$

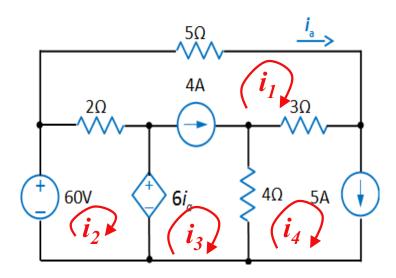
111-7

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

3 – Usando Análise de Malhas calcule a potência fornecida pela fonte dependente.



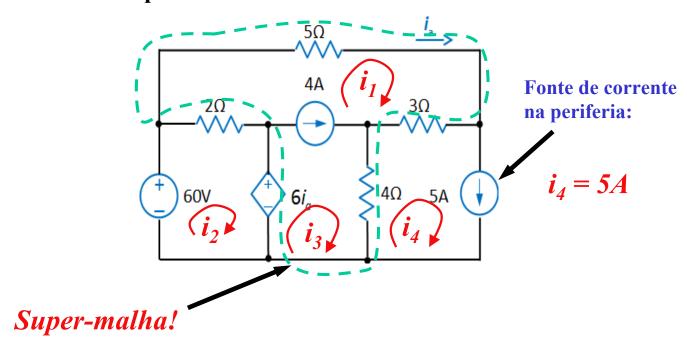
1º Passo: identificar as malhas do circuito e atribuir correntes de malha...



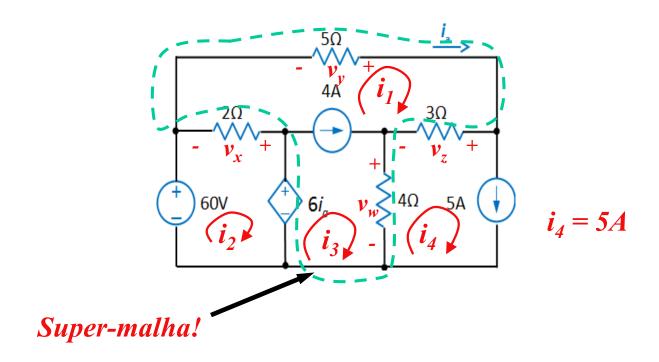
III-9

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

2º Passo: identificar super-malhas e malhas com fontes de corrente na periferia



3º Passo: marcar tensões nas resistências...

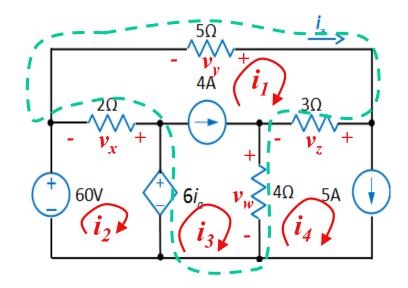


III-11

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

4º Passo: Aplicar KVL à malha e super-malha...

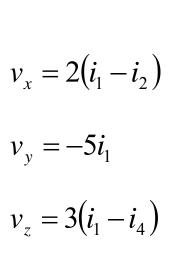
- ●Temos de escrever:
- uma equação para a malha 2;
- uma equação para a super-malha.



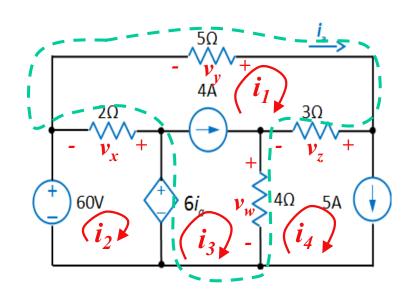
Malha 2:
$$-60 - v_x + 6i_a = 0$$

Super-malha:
$$-6i_a + v_x - v_y + v_z + v_w = 0$$

5º Passo: Exprimir tensões em função das correntes de malha...



 $v_{w} = 4(i_3 - i_4)$



III-13

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

6º Passo: Resolver equações...

Sabendo que

$$i_4 = 5A$$

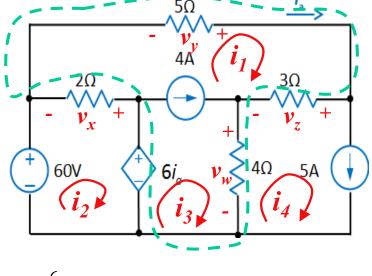
$$i_a = i_1$$

$$i_3 - i_1 = 4$$

e substituindo tudo nas equações da malha 2 e da super-malha...

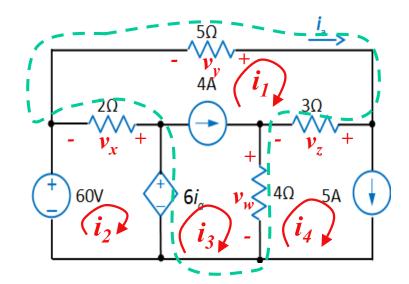
$$\begin{cases} 2i_1 + i_2 = 30 \\ 4i_1 - 2i_2 + 4i_3 = 35 \\ i_3 - i_1 = 4 \end{cases}$$





$$\begin{cases} i_1 = 6.58A \\ i_2 = 16.83A \\ i_3 = 10.58A \end{cases}$$

7º Passo: Calcular o que é pedido...



A potência absorvida pela fonte dependente é

$$P_{a6} = VxI = (6i_a)(i_2 - i_3)$$
$$= (6x6.58)(16.58 - 10.58)$$
$$= 236.9W$$

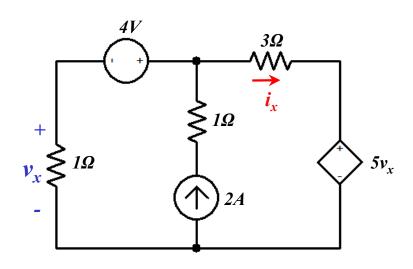
A potência fornecida é

$$P_{f6} = -P_{a6} = -236.9W$$

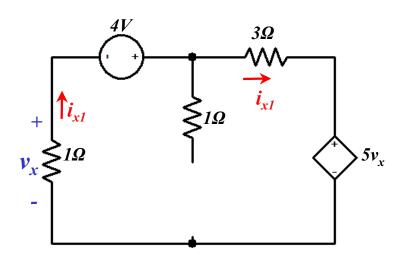
III-15

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

- 4 Usando teorema da sobreposição calcule
- a) O valor de i_x
- b) O valor que deverá ter a fonte de corrente, para que i_x diminua para metade do valor obtido em a)



a) Desactivemos primeiro a fonte de corrente...



Usando KVL:
$$-v_x - 4 + 3i_{x1} + 5v_x = 0$$

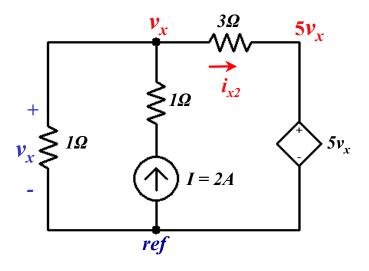
Substituindo:
$$v_x = -1i_{x1} \implies i_{x1} - 4 + 3i_{x1} - 5i_{x1} = 0$$

 $i_{x1} = -4A$

III-17

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

a) ... e agora anulamos a fonte de tensão de 4V.



Aplicando KCL:

$$i_{x2} + \frac{v_x}{1} = I$$

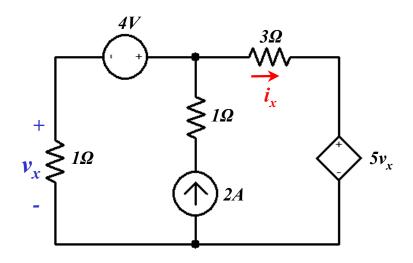
e sabendo que:

$$\frac{v_x - 5v_x}{3} = i_{x2} \Leftrightarrow v_x = -\frac{3}{4}i_{x2}$$

substituindo...

$$i_{x2} - \frac{3}{4}i_{x2} = I \Leftrightarrow i_{x2} = 4I$$
 $i_{x2} = 8A$

a) Aplicamos o Teorema da Sobreposição para obter i_x



$$i_x = i_{x1} + i_{x2} = -4 + 8 = 4A$$

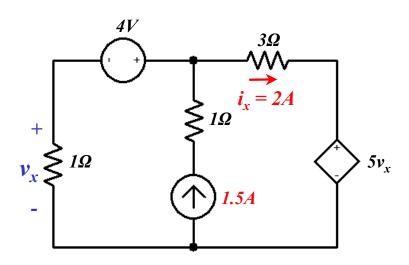
III-19

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

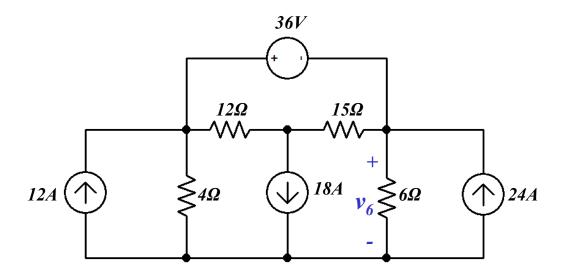
b) Para obter metade do valor anterior de i_x ...

$$i_x = i_{x1} + i_{x2} = -4 + 4I = 4/2$$

$$I = 1.5A$$



5 - Calcule v_6 pelo Teorema da Sobreposição

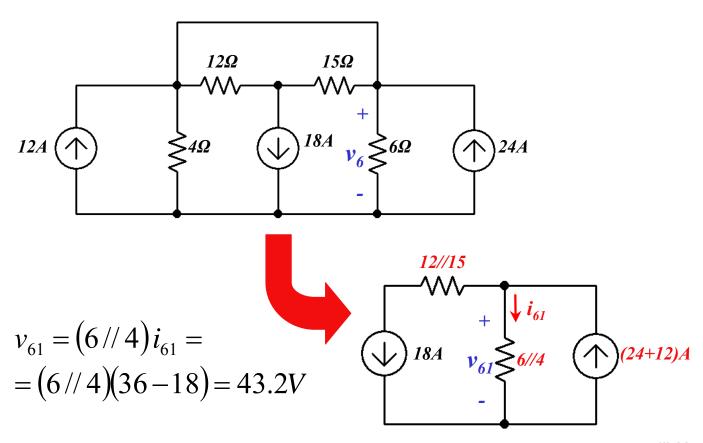


A aplicação do Teorema da Sobreposição não obriga que se considere o efeito individual de cada uma das fontes. Por vezes é mais útil agrupar fontes e considerar o efeito de cada grupo. Este exemplo ilustra este ponto.

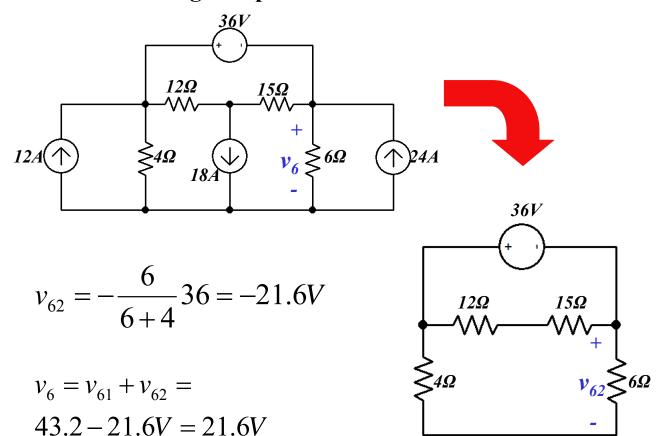
III-21

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

1º Passo: consideremos o efeito só das fontes de corrente



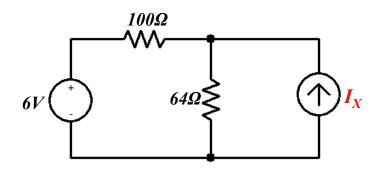
2º Passo: ... e agora apenas o efeito da fonte de tensão



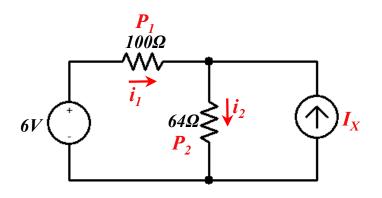
III-23

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

6 — Usando o Teorema da Sobreposição, determine o intervalo de valores da corrente I_X que garante que a potência dissipada em qualquer uma das resistências do circuito não ultrapassa os 250mW.



1º Passo: comecemos por calcular os limites das correntes em cada uma das resistências.



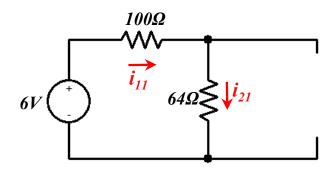
$$P_1 = 100(i_1)^2 < 250mW \iff |i_1| < 50mA$$

$$P_2 = 64(i_2)^2 < 250mW \iff |i_2| < 62.5mA$$

III-25

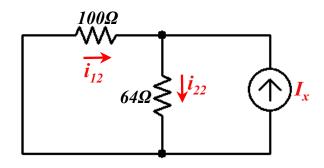
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

2º Passo: consideremos agora só a fonte de tensão



$$i_{11} = i_{21} = \frac{6}{100 + 64} = 36.6 \text{mA}$$

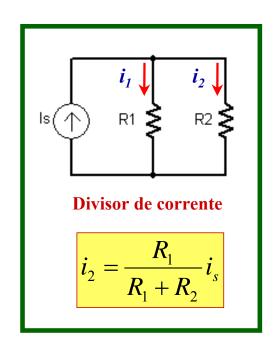
3º Passo: consideremos agora só a fonte de corrente



Aplicando a fórmula do divisor de corrente:

$$i_{12} = -\frac{64}{100 + 64}I_X = -0.39I_X$$

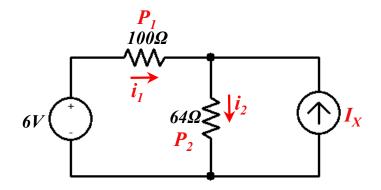
$$i_{22} = \frac{100}{100 + 64} I_X = 0.61 I_X$$



III-27

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

4º Passo: aplicamos agora o Teorema da Sobreposição



$$i_1 = i_{11} + i_{12} = 36.6 - 0.39I_X$$

$$i_2 = i_{21} + i_{22} = 36.6 + 0.61I_X$$

5° Passo: finalmente obtemos os limites de I_X para cada resistência

Resistência de 100Ω

$$i_1 = 36.6 - 0.39I_X$$

Sabendo que

$$|i_1| < 50 mA$$
 ou $-50 < i_1 < 50$

Obtém-se

$$-34.4mA < I_x < 222.1mA$$

Resistência de 64Ω

$$i_2 = 36.6 + 0.61I_X$$
 $|i_2| < 62.5mA$
 $-62.5 < i_2 < 62.5$

$$-162.5mA < I_x < 42.5mA$$

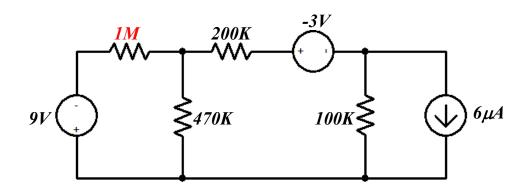
O intervalo de valores permissível para I_X será pois:

$$-34.4mA < I_X < 42.5mA$$

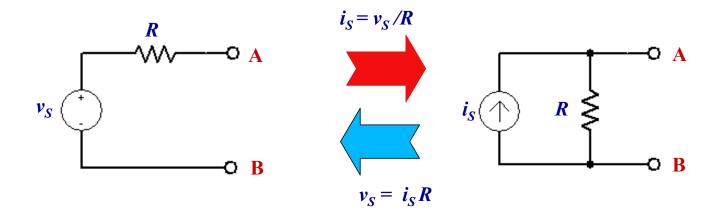
III-29

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

7 — Calcule a potência dissipada na resistência de 1M. Comece por simplificar o circuito usando sucessivas transformações de fontes.

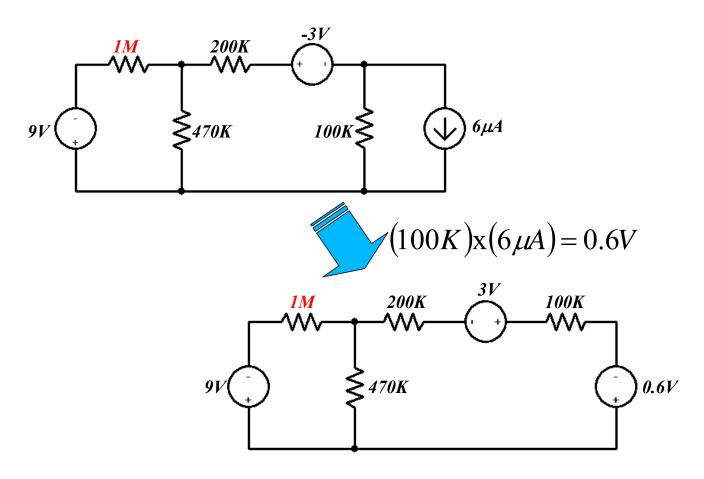


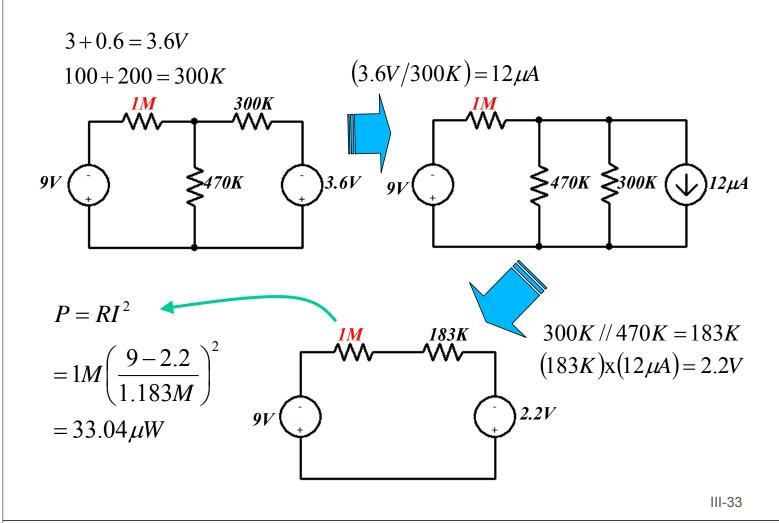
Recordando a Transformação de fontes...



III-31

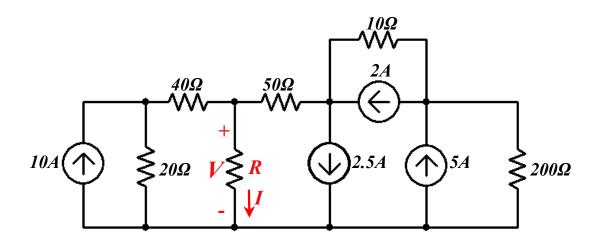
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

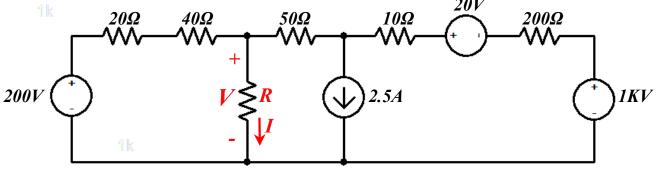




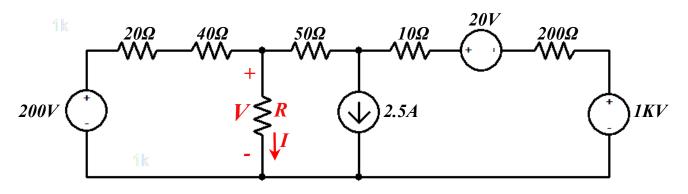
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

8 – Usando transformação de fontes, determine o valor máximo de V e o valor máximo de I.

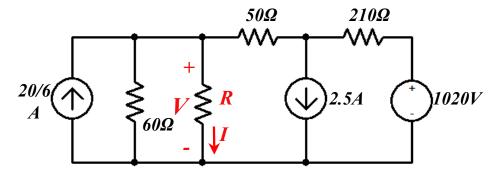


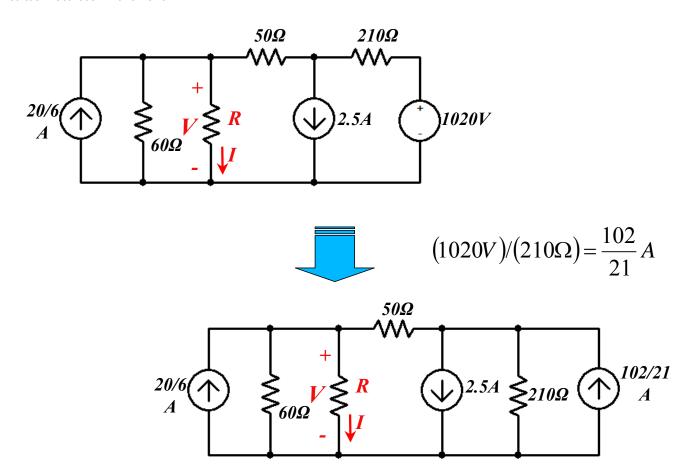


Circuitos Eléctricos - 2019/2020



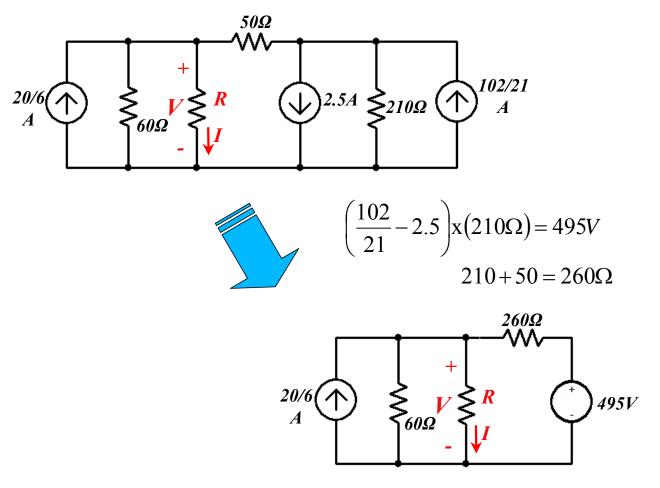
$$(200V)/(60\Omega) = \frac{20}{6}A$$

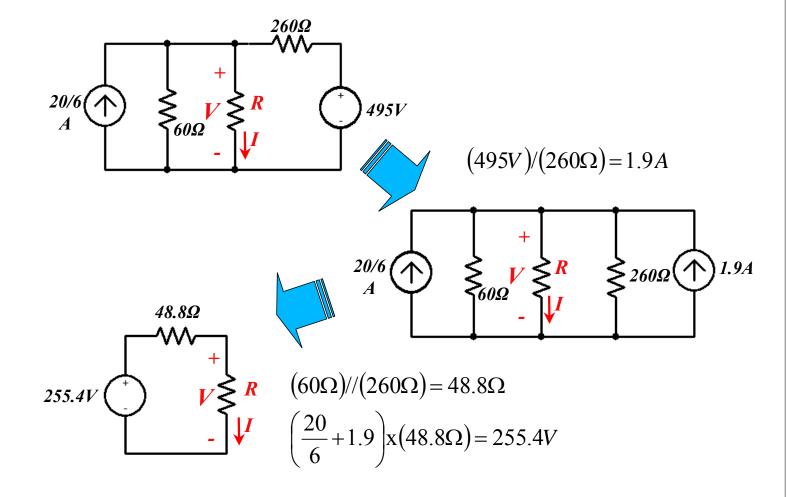




III-37

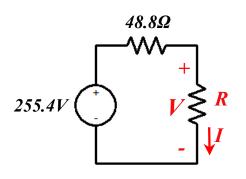
Circuitos Eléctricos - 2019/2020





Circuitos Eléctricos – 2019/2020

... finalmente obtemos os valores máximos de Ve de I



• Se $R = \infty$ (circuito aberto) $\Rightarrow I = 0$

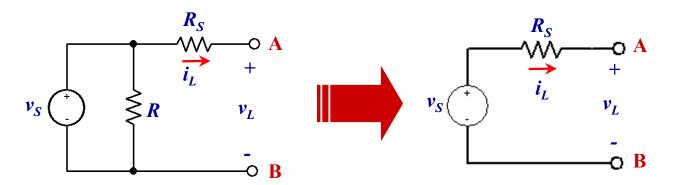
$$V_{\text{max}} = 255.4V$$

• Se
$$R = \theta$$
 (curto-circuito) $\Rightarrow V = \theta$

$$I_{\text{max}} = \frac{255.4}{48.8} = 5.23A$$

Relembrando...

→ Resistência em paralelo com fonte de tensão



Aplicando KVL ao circuito:

$$-v_S + R_S i_L + v_L = 0$$
$$v_L = -R_S i_L + v_S$$

• ... igual à fonte real de tensão!

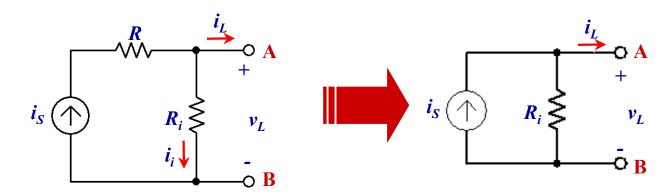
 Do ponto de vista dos terminais A e B, o circuito é equivalente a uma fonte real de tensão.

III-41

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

Relembrando...

→ Resistência em série com fonte de corrente



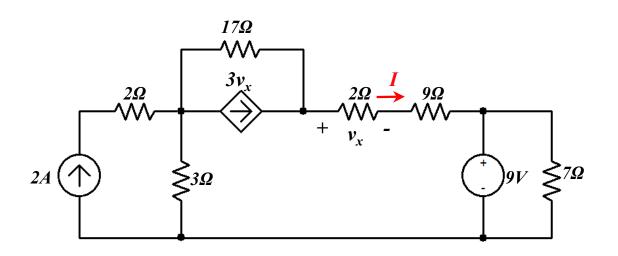
• Aplicando KCL ao nó superior:

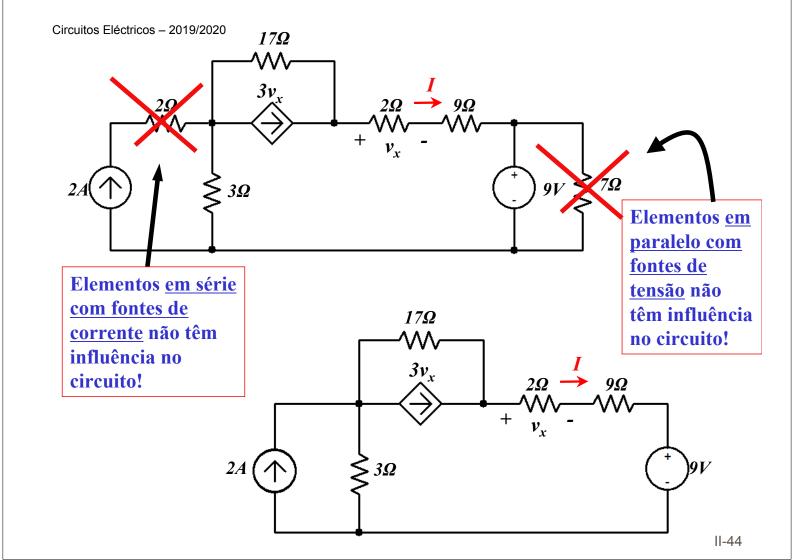
$$i_L = -i_i + i_S = -\frac{1}{R_i} v_L + i_S$$

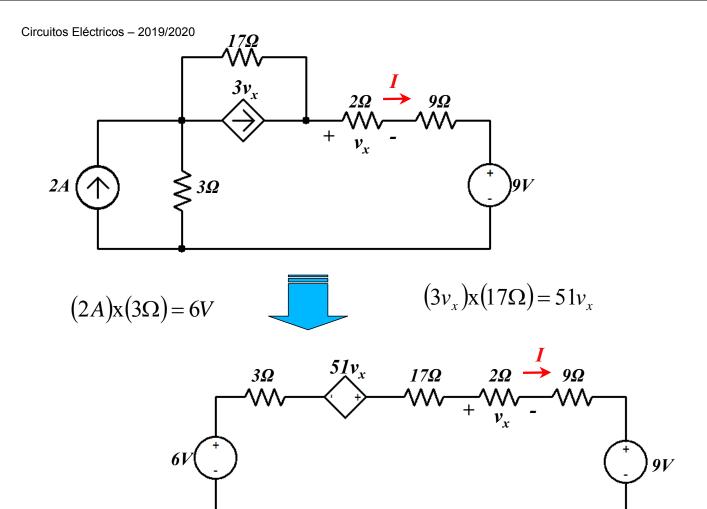
• ... igual à fonte real de corrente!

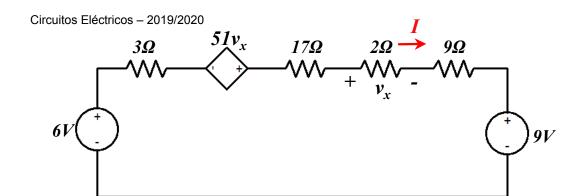
 Do ponto de vista dos terminais A e B, o circuito é equivalente a uma fonte real de corrente.

9 – Calcular I. Simplificar primeiro o circuito usando transformações de fontes.







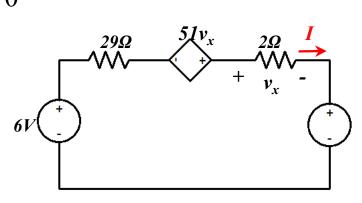


$$-6 + 29I - 51v_x + v_x + 9 = 0$$

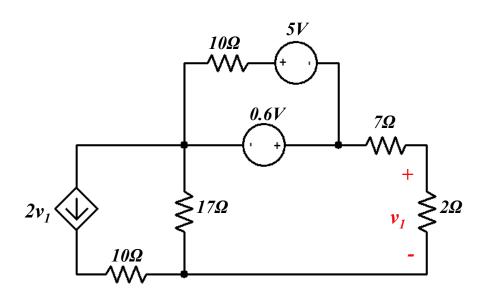
$$v_x = 2I$$

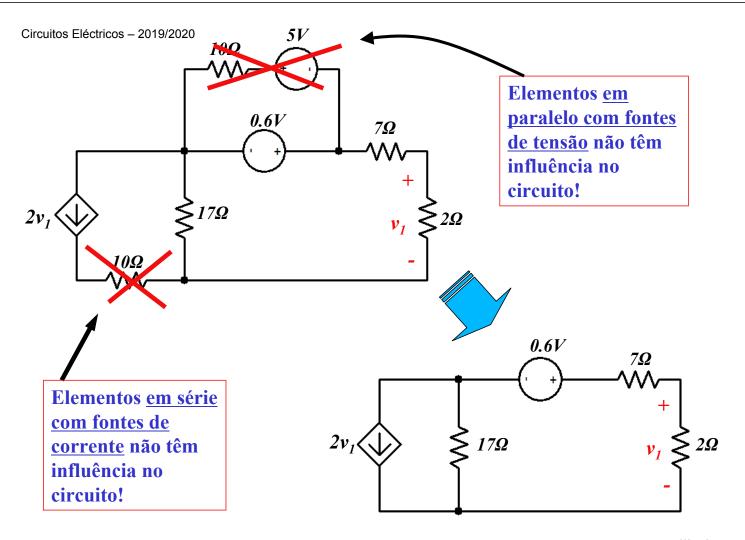
De onde se tira

$$I = 43.2 mA$$

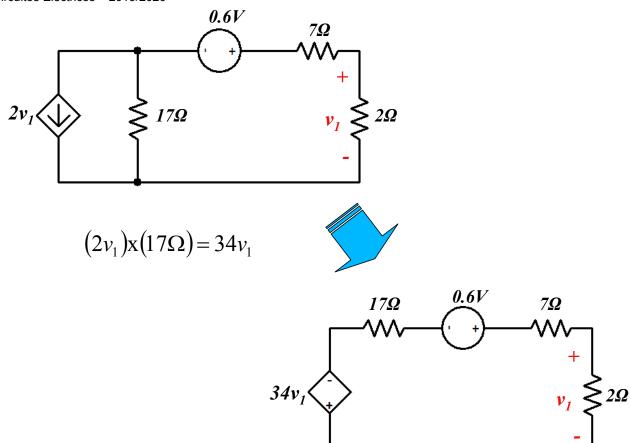


10 – Calcular v_I . Simplificar primeiro o circuito usando transformações de fontes.



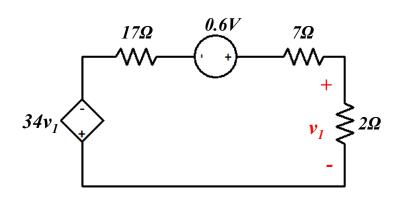


Circuitos Eléctricos - 2019/2020



III-49

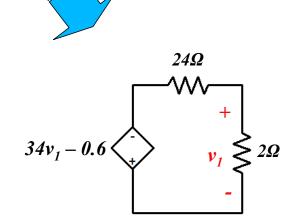
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

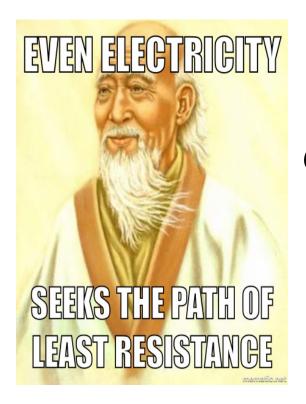


$$v_1 = -\frac{2}{2+24} (34v_1 - 0.6)$$

Donde

$$v_1 = 12.8 mV$$

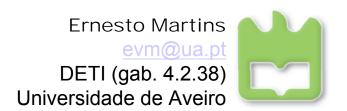




CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Problemas resolvidos



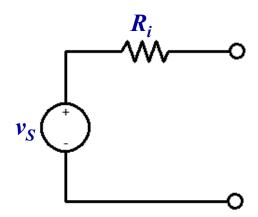


Circuitos Eléctricos - 2019/2020

- 1 Efectuaram-se as seguintes medições de tensão aos terminais de uma fonte de alimentação DC de laboratório:
- > 75V, com a fonte em aberto;
- \succ 60V, tendo-se ligado previamente uma resistência de 20 Ω entre os terminais da fonte.

Com base nestes dados, calcule o equivalente de Thévenin da fonte de alimentação.

Como sabemos, uma fonte de tensão real pode representarse pelo circuito...



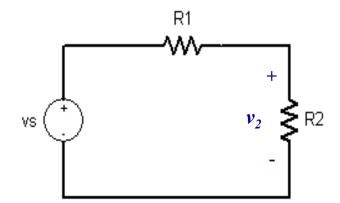
... que tem, portanto, a mesma forma que o equivalente de Thévenin dessa fonte, com $v_T = v_S$ e $R_T = R_i$.

IV-3

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

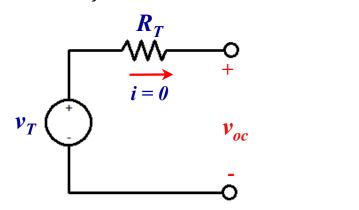
Antes de prosseguir, recordemos, mais um vez, o omnipresente e infinitamente recorrente, divisor de tensão © ...

Divisor de tensão



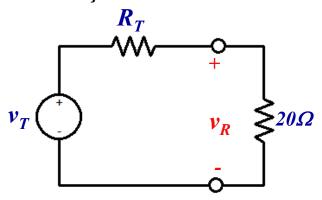
$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$$

Medição em circuito aberto: 75V



$$v_{oc} = 75V = v_T$$

Medição com resistência de 20Ω : 60V



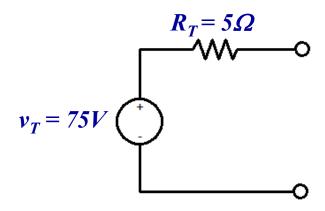
$$v_R = \frac{20}{R_T + 20} \, 75 = 60V$$

$$R_T = 5\Omega$$

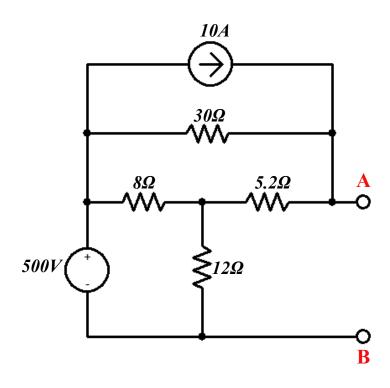
IV-5

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

O equivalente de Thévenin da fonte de alimentação é portanto.



2 – Calcule os equivalentes de Thévenin e de Norton entre os terminais A e B do circuito.



IV-7

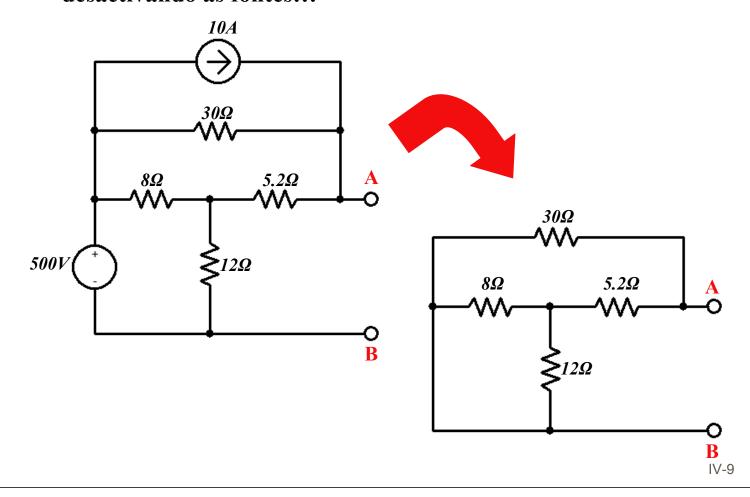
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

1º Passo: Comecemos por determinar a resistência de Thévenin (R_T) que é, como sabemos, igual à resistência de Norton (R_N) .

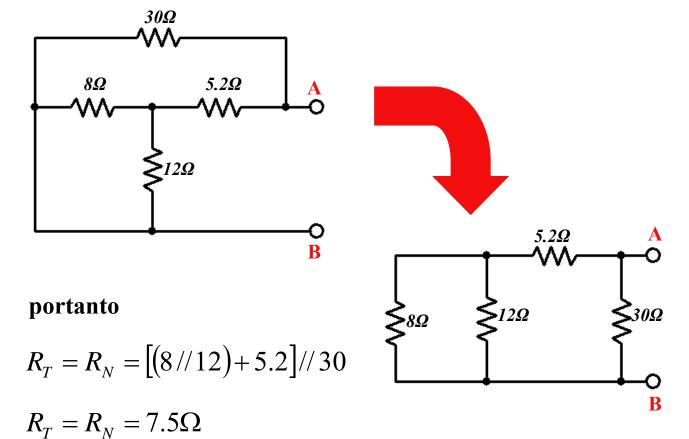
Segundo a definição, esta resistência é:

• a resistência equivalente vista aos terminais do circuito quando este é desativado, ou seja, quando todas as fontes independentes de tensão são curto-circuitadas e todas as fontes independentes de corrente são abertas (as fontes dependentes mantêm-se).

desactivando as fontes...

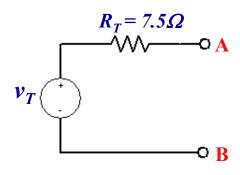


Circuitos Eléctricos - 2019/2020

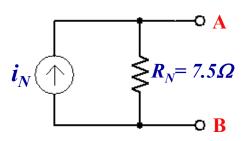


2° Passo: calculo de ou v_T e i_N

Equivalente de Thévenin



Equivalente de Norton



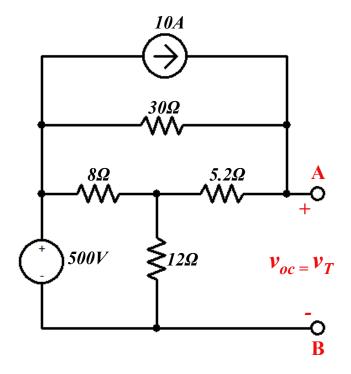
Sabemos que $i_N = v_T / R_T$

portanto, podemos optar por determinar ou v_T ou i_N ... o que for mais fácil de obter!

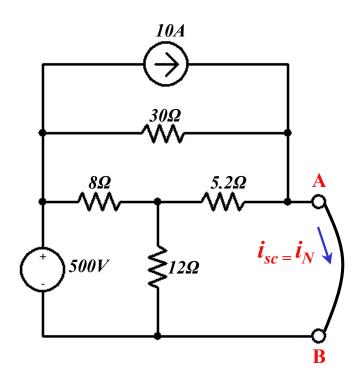
IV-11

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

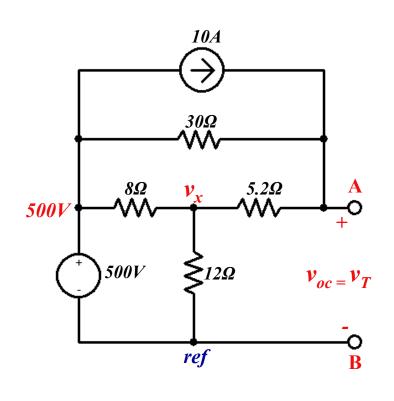
v_T é igual à tensão em circuito aberto



i_N é igual à corrente de curto-circuito



Calculemos a tensão em circuito aberto



Usando análise nodal

Nó v_x :

$$\frac{500 - v_x}{8} = \frac{v_x}{12} + \frac{v_x - v_T}{5.2}$$

Nó A:

$$10 + \frac{500 - v_T}{30} + \frac{v_x - v_T}{5.2} = 0$$

Resolvendo...

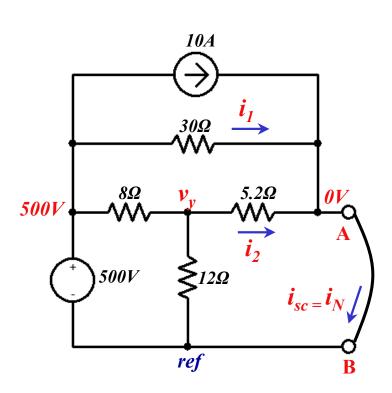
$$v_x = 360V$$

$$v_T = 425V$$

IV-13

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

O cálculo da corrente de curto-circuito seria, no entanto, mais fácil!...



$$i_N = 10 + i_1 + i_2$$
$$= 10 + \frac{500}{30} + \frac{v_y}{5.2}$$

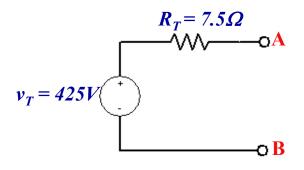
$$v_y = \frac{5.2//12}{8 + (5.2//12)} 500 = 156.1V$$

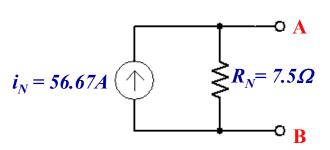
$$i_N = 56.67A$$

Os equivalentes de Thévenin e de Norton são portanto

Equivalente de Thévenin

Equivalente de Norton





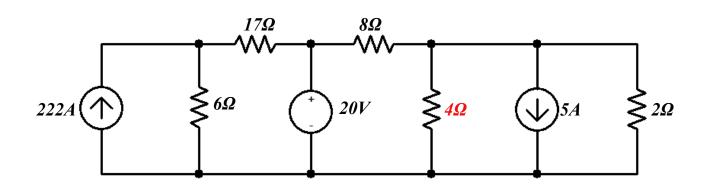
Notar que, como era de esperar, verifica-se $i_N = v_T/R_T$

Nota: Neste problema fizemos duas análises separadas para obter v_T e i_N mas em geral basta calcular um destes valores. O outro obtém-se usando a relação acima.

IV-15

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

- 3 Calcule:
- a) A potência dissipada na resistência de 4Ω ;
- b) O novo valor que esta resistência deve ter de forma a que dissipe, neste circuito, a potência máxima.



Dado que

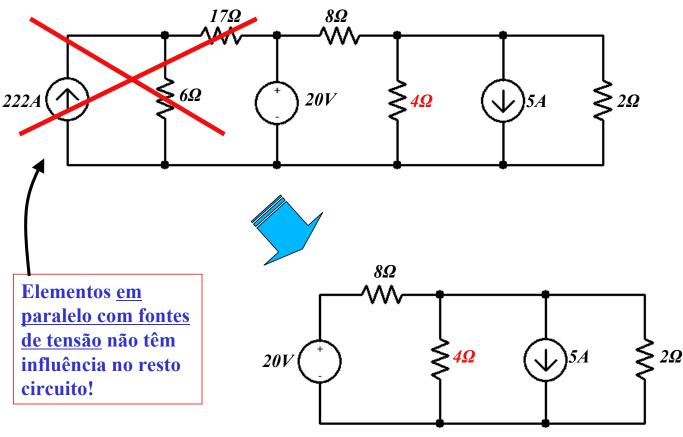
- \succ as duas alíneas do problema se referem à resistência de 4Ω ;
- uma delas remete para o Teorema da Máxima Transferência de Potência...

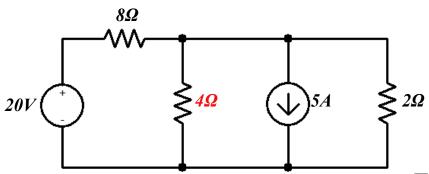
... a melhor estratégia passa por determinar primeiro o Equivalente de Thévenin visto por esta resistência.

IV-17

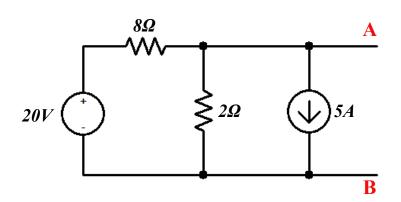
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

Começemos por simplificar o circuito...





Este é o circuito *visto* pela resistência de 4Ω



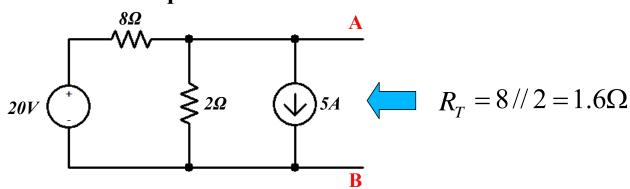


Vamos portanto calcular o Equivalente de Thévenin entre A e B

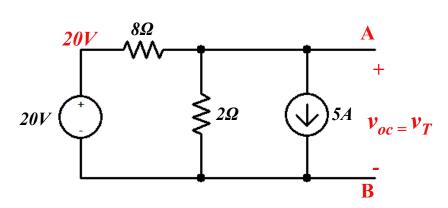
IV-19

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

Resistência equivalente



Tensão em circuito aberto



Nó A:

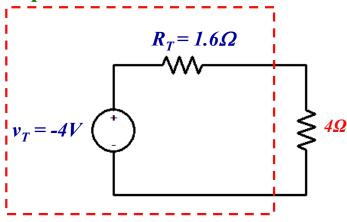
$$\frac{20 - v_T}{8} = \frac{v_T}{2} + 5$$

Resolvendo...

$$v_T = -4V$$

Com o Equivalente de Thévenin é agora muito fácil responder às questões:

Equivalente de Thévenin



a) A potência dissipada na resistência de 4Ω ?

$$P = RI^{2}$$

$$= 4\left(\frac{-4}{4+1.6}\right)^{2}$$

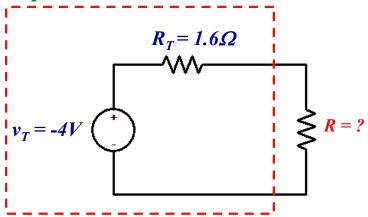
$$= 2.04W$$

IV-21

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

b) Novo valor da resistência de forma a que dissipe a potência máxima?

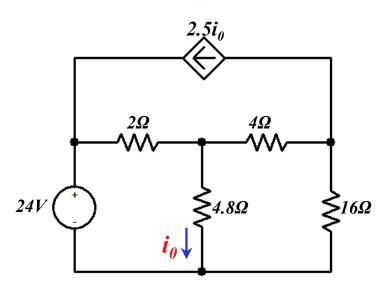
Equivalente de Thévenin



Teorema da máxima transferência de potência: Uma fonte real de tensão com resistência interna R_S , fornece a potência máxima quando a resistência de carga tem o valor $R_L = R_S$

Portanto, o novo valor da resistência deve ser 1.6Ω .

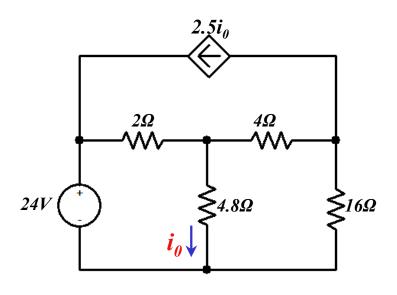
- 4 Um amperímetro é usado para medir a corrente i_0 , indicando o valor 2.1A. Determine:
- a) A resistência interna do amperímetro;
- b) A percentagem de erro introduzida pelo amperímetro na medição.



IV-23

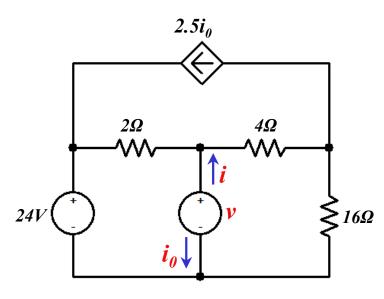
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

O problema diz respeito ao ramo onde está a resistência de 4.8Ω, portanto o melhor é começarmos por determinar o Equivalente de Thévenin visto por esta resistência.



Dado que o circuito inclui uma fonte dependente, vamos usar aqui o Método Universal, substituindo a resistência de 4.8Ω por uma fonte de tensão de teste, de valor ν .

Aplicação do Método Universal



• Vamos então analisar o circuito de forma a obter uma expressão de *v* em função de *i*, com a forma

$$v = ai + b$$

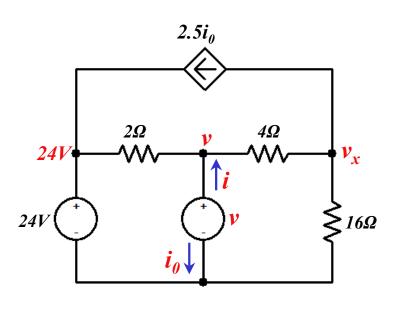
Dos coeficientes a e b concluiremos

$$R_T = a$$
 e $v_T = b$

IV-25

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

Usando análise nodal...



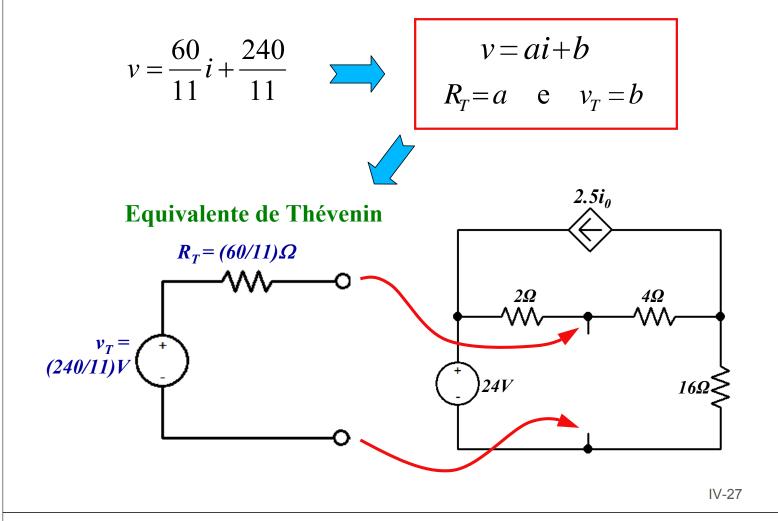
Nó v:
$$\frac{24-v}{2} + i = \frac{v-v_x}{4}$$

Nó
$$v_x$$
: $\frac{v - v_x}{4} = 2.5i_0 + \frac{v_x}{16}$

Sabendo que $i_0 = -i$ obtém-se

$$\begin{cases} v + 10i = \frac{5}{4}v_x \\ -3v + 4i = -v_x - 48 \end{cases}$$

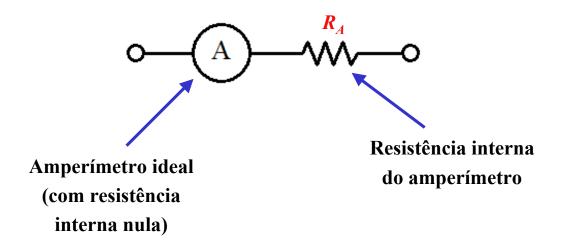
Eliminando v_x , obtemos...



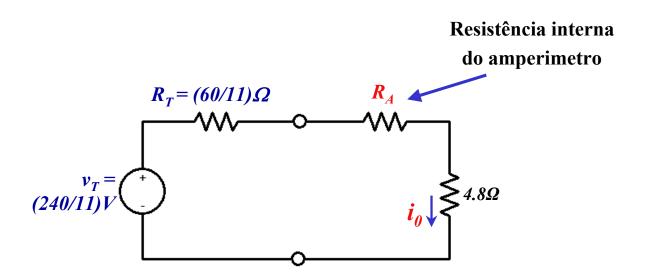
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

Modelo do amperímetro

Podemos considerar que o amperímetro usado na medição é constituído por um amperímetro ideal em série com uma resistência.

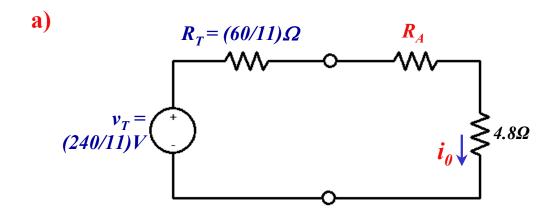


Ligar o amperimetro em série com a resistência de 4.8Ω no circuito original, é o mesmo que ligar este conjunto ao Equivalente de Thévenin determinado:



IV-29

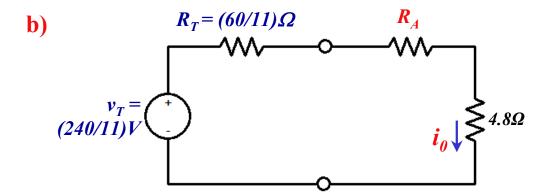
Circuitos Eléctricos - 2019/2020



Nestas condições o valor medido de i_0 foi 2.1A, portanto

$$\frac{240/11}{(60/11) + R_A + 4.8} = 2.1$$

$$R_{\Delta} = 135m\Omega$$



Sem o amperímetro presente no circuito o valor de i_{θ} seria

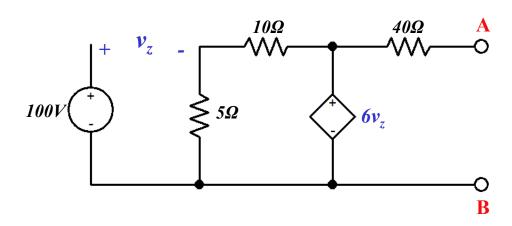
$$\frac{240/11}{(60/11)+4.8} = 2.13A$$

O erro introduzido pelo amperímetro é portanto
$$\frac{2.1-2.13}{2.13} = -0.014 \rightarrow -1.4\%$$

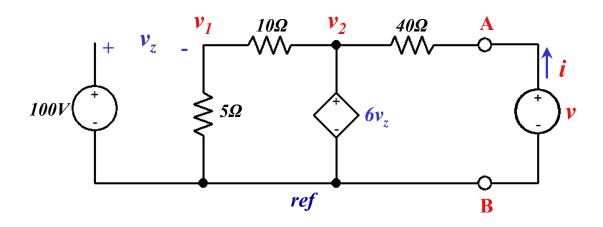
IV-31

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

5 – Determine o equivalente de Thévenin entre os terminais A e B do circuito.



Como o circuito contém uma fonte dependente, vamos usar o Método Universal.



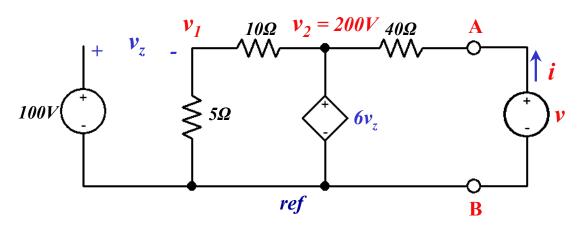
Por um lado:
$$v_1 = \frac{5}{5+10}v_2 = \frac{v_2}{3}$$

... e por outro:
$$v_2 = 6v_z = 6(100 - v_1)$$

IV-33

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

Conjugando as duas equações obtemos $v_2 = 200V$

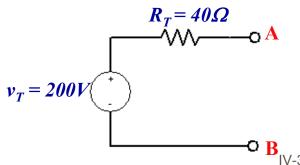


$$i = \frac{v - 200}{40} \Leftrightarrow v = 40i + 200$$

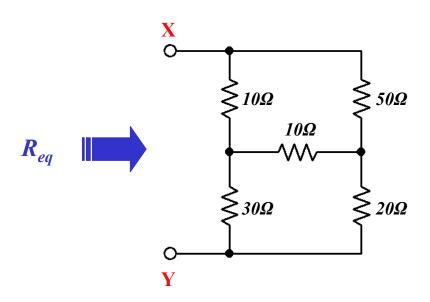
Equivalente de Thévenin

Portanto

$$v_T = 200V$$
 $R_T = 40\Omega$



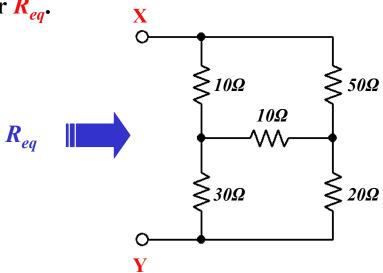
6 – Determine a resistência equivalente entre os terminais X e Y.



IV-35

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

Note-se, antes de mais, que este circuito não permite associação de resistências em série ou em paralelo para obter R_{eq} .



Na prática, se tivéssemos que medir esta resistência, aplicaríamos uma tensão ν entre os terminais X e Y, mediamos a corrente i e, finalmente, calcularíamos R_{eq} fazendo $R_{eq} = \nu/i$.

É isso mesmo que podemos fazer!

Usando análise nodal...

Nó v_1 :

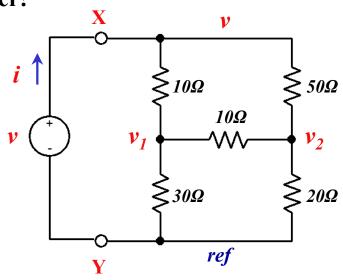
$$\frac{v_1}{30} + \frac{v_1 - v_2}{10} + \frac{v_1 - v}{10} = 0$$

Nó v_2 :

$$\frac{v_2}{20} + \frac{v_2 - v_1}{10} + \frac{v_2 - v}{50} = 0$$

Usando KCL no nó inferior...

$$\frac{v_1}{30} + \frac{v_2}{20} = i$$



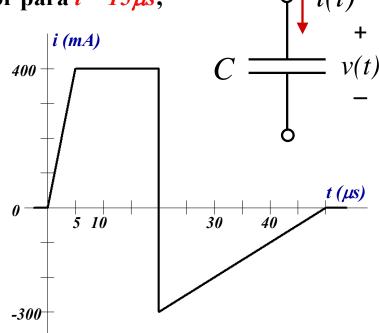
Eliminando as incógnitas v_1 e v_2 obtemos...

$$\frac{v}{i} = 21.7\Omega = R_{eq}$$

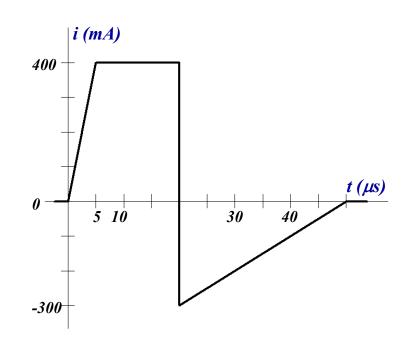
IV-37

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

- 7 Um condensador de $0.25\mu F$ é percorrido pela corrente i do gráfico abaixo. Sabendo que v(0) = 0, calcule
- a) A carga no condensador para $t = 15 \mu s$;
- b) A tensão no condensador para t = 30 μs;
- c) A energia armazenada no condensador para $t > 50 \mu s$.



• A partir do gráfico dado poderíamos começar por exprimir algebricamente i(t), integrando depois as equações correspondentes a cada intervalo de tempo, de forma a responder às questões pedidas.



• ... mas uma maneira mais expedita de chegar lá é calculando áreas.

Vejamos:

IV-39

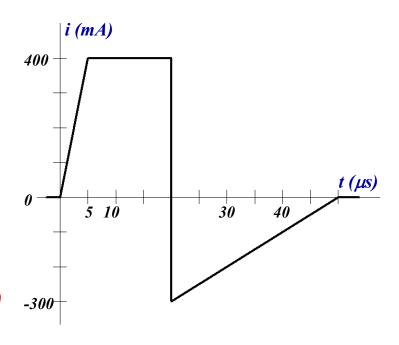
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

a)
$$q(t = 15 \mu s) = ?$$

Num qualquer instante t₁ a carga no condensador pode ser calculada por

$$q(t_1) = \int_{0}^{t_1} i(t)dt + q(0)$$

Como $v(\theta) = 0$, então $q(\theta) = 0$ e a carga pode ser obtida calculando a área:

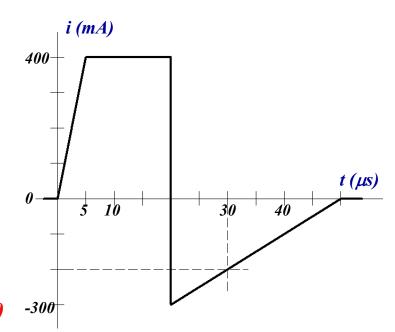


$$\acute{A}rea_{[0,15]} = \frac{5x400}{2} + (15-5)x400 = 5000nC = 5\mu C$$

b)
$$v(t = 30 \mu s) = ?$$

Num qualquer instante t₁ a tensão no condensador é dada por

$$v(t_1) = \frac{1}{C} \int_{0}^{t_1} i(t)dt + v(0)$$



Calculamos então a área de 0

a 30 µs :

$$\acute{A}rea_{[0,30]} = \acute{A}rea_{[0,15]} + (20 - 15)x400 - \left[(30 - 20)x200 + \frac{(30 - 20)x100}{2} \right]$$

$$\acute{A}rea_{[0,30]} = 4.5 \mu C \qquad \rightarrow \qquad v(30 \mu s) = \frac{4.5 \mu C}{0.25 \mu F} = 18V$$

IV-41

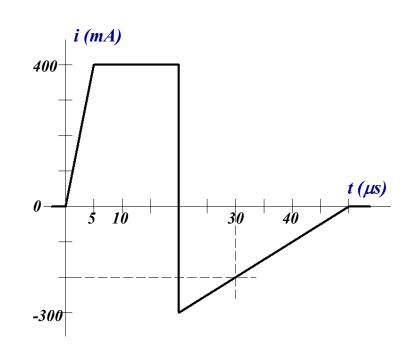
Circuitos Eléctricos - 2019/2020

c)
$$E_C(t = 50 \mu s) = ?$$

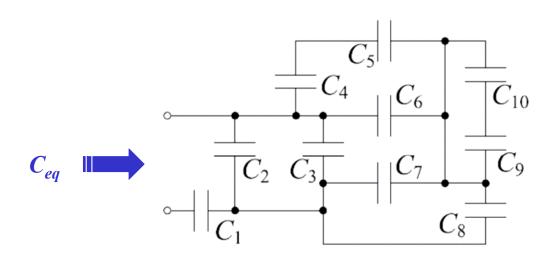
Calculamos *v(50 µs)* pela área total

$$v(50\mu s) = \frac{2.5\mu C}{0.25\mu F} = 10V$$

$$\rightarrow E_{\rm C}(50\mu s) = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}x0.25x10^2 = 12.5\mu J$$



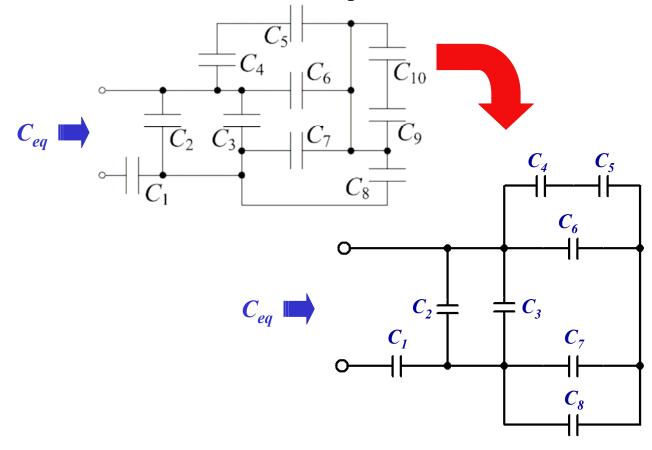
8 – Determine o valor da capacidade equivalente no circuito abaixo. Todos os condensadores são de 1μF.

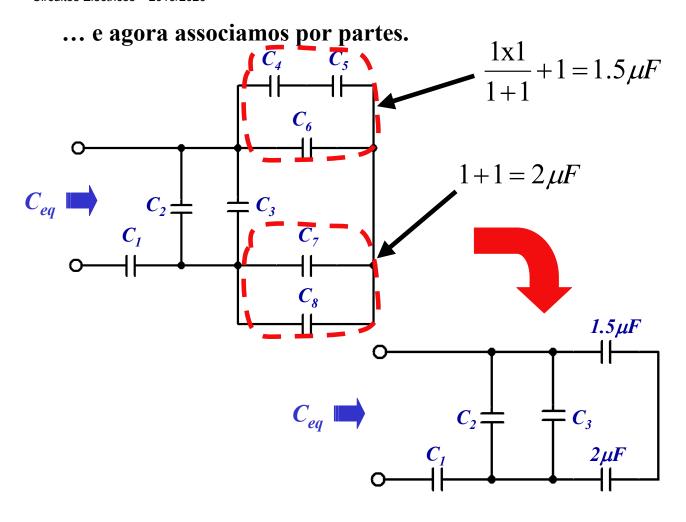


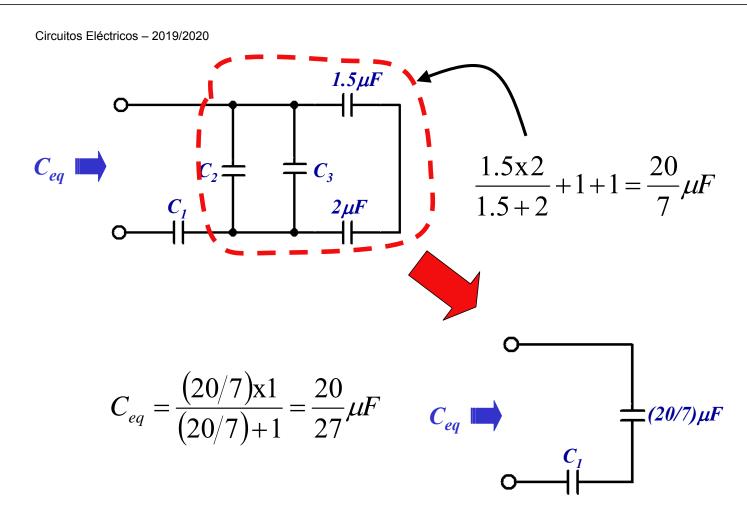
IV-43

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

Como sempre, começamos por redesenhar o circuito de maneira a evidenciar séries e paralelos...

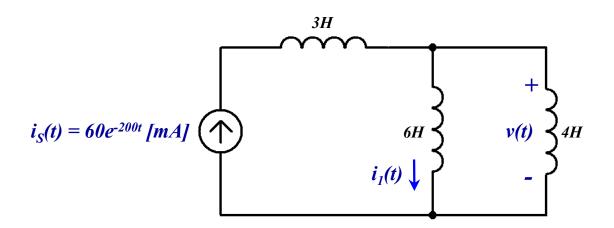


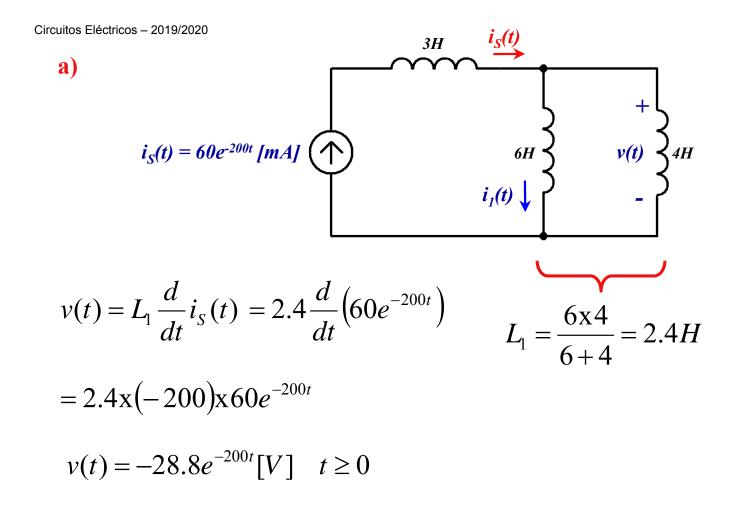




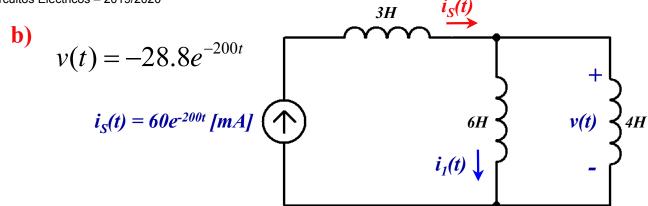
9 – No circuito abaixo considere $i_1(0) = 20mA$. Calcule

- a) A tensão v(t);
- b) A energia armazenada na bobina de 6H em t = 5ms.





Circuitos Eléctricos - 2019/2020



$$i_{1}(t) = \frac{1}{L} \int_{0}^{t} v(t)dt + i_{1}(0) = \frac{1}{6} \int_{0}^{t} -28.8e^{-200t}dt + 0.02$$

$$= \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{200} \right) (-28.8)e^{-200t} \Big|_{0}^{t} + 0.02 = 24e^{-200t} - 4 \quad [mA]$$

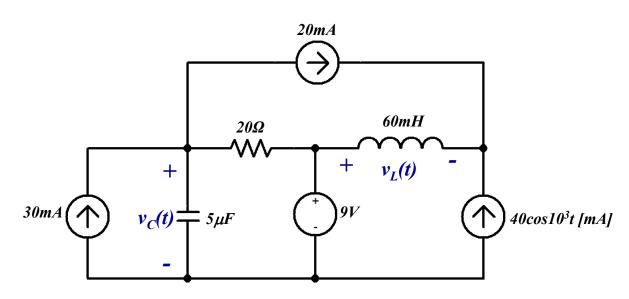
$$i_{1}(5ms) = 4.83mA \qquad W = \frac{1}{2} Li_{1}^{2} = 70 \mu J$$

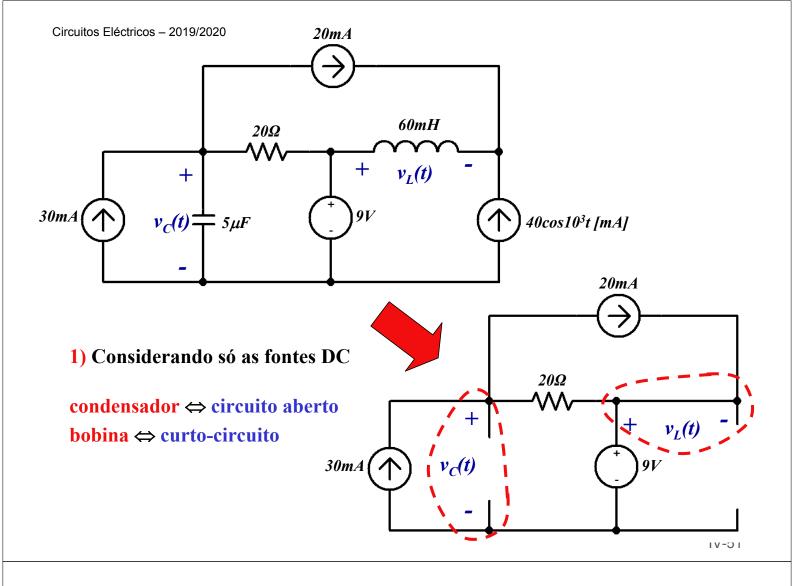
IV-49

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

10 – Usando o Principio da Sobreposição, calcule no circuito abaixo

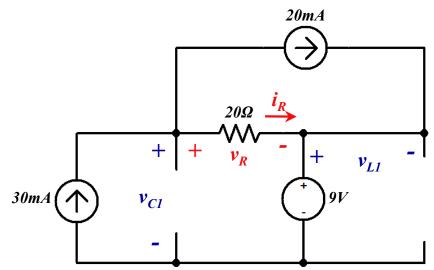
- a) $v_C(t)$;
- b) $v_I(t)$.





Circuitos Eléctricos - 2019/2020

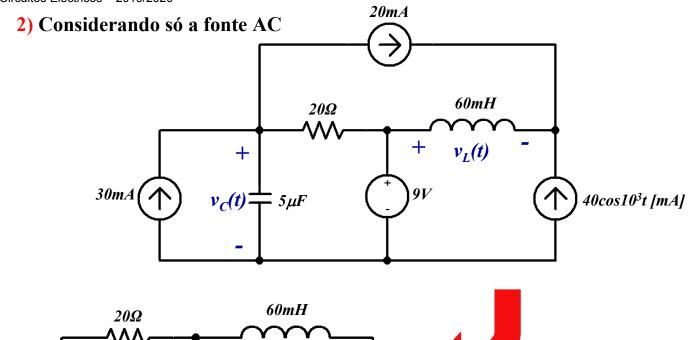
1) Considerando só as fontes DC

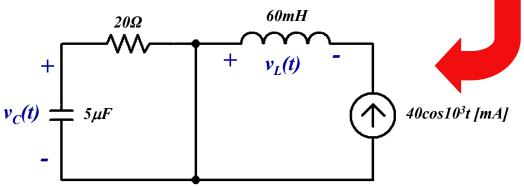


Do circuito tiramos: $v_{L1} = 0V$

$$i_R + 20 = 30 \iff i_R = 10mA$$

 $-v_{C1} + v_R + 9 = 0 \iff v_{C1} = 9 + (20x0.01) = 9.2V$

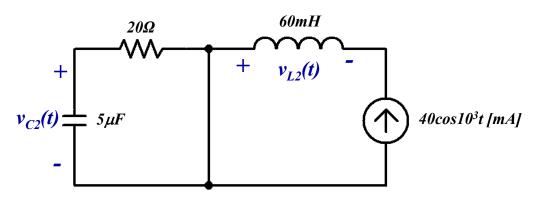




IV-53

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

2) Considerando só a fonte AC



Do circuito tiramos: $v_{C2} = 0V$

$$v_{L2}(t) = -L\frac{d}{dt}i(t) = -0.06\frac{d}{dt}(0.04\cos 10^3 t) = 2.4\sin 10^3 t$$
 [V]

Aplicando o Teorema da Sobreposição:

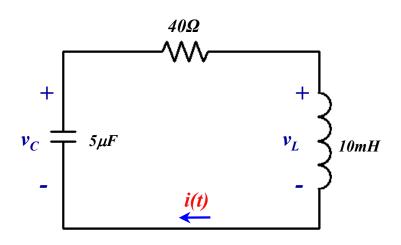
$$v_C(t) = v_{C1} + v_{C2} = 9.2 + 0 = 9.2V$$

$$v_L(t) = v_{L1} + v_{L2} = 0 + 2.4 \sin 10^3 t = 2.4 \sin 10^3 t$$
 [V]

11 – Sabendo que, no circuito abaixo, i(t) é dada por

$$i(t) = 5e^{-2000t} \cos 4000t \quad [A] \quad t \ge 0$$

Calcule $v_L(\theta)$ e $v_C(\theta)$.



 40Ω

IV-55

Circuitos Eléctricos - 2019/2020

Começamos por calcular a tensão na bobina

$$v_L = L \frac{d}{dt} i(t)$$

$$=0.01\frac{d}{dt} \left(5e^{-2000t}\cos 4000t\right)$$

$$=0.01\left[5(-2000)e^{-2000t}\cos 4000t + 5e^{-2000t}(-4000\sin 4000t)\right]$$

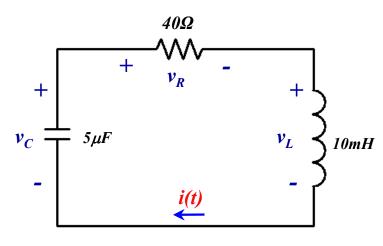
$$v_L = -100e^{-2000t} (\cos 4000t + 2\sin 4000t)$$
 [V]

Calculamos agora os valores

para t = 0

$$v_L = -100e^{-2000t} (\cos 4000t + 2\sin 4000t)$$

$$v_L(0) = -100V$$



Aplicando KVL:

$$-v_C(0) + v_R(0) + v_L(0) = 0$$
$$v_C(0) = 40i(0) - 100$$

$$v_C(0) = 40x5 - 100 = 100V$$

$$i(t) = 5e^{-2000t} \cos 4000t$$
$$i(0) = 5A$$