

**Parte 1: Domínios; conjuntos de nível; derivadas parciais; gradientes.**

1. Represente geometricamente os seguintes conjuntos:

- (a)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2y^2 < 4\}$ ;
- (b)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x-1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\}$ ;
- (c)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 < z \leq x + y\}$ ;
- (d)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ ;
- (e)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$ .

Caracterize cada um dos conjuntos do ponto de vista topológico (usando a topologia usual em  $\mathbb{R}^2$  e em  $\mathbb{R}^3$ ).

2. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente:

- (a)  $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ ;
- (b)  $f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2}$ ;
- (c)  $f(x, y) = \frac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$ ;
- (d)  $f(x, y) = \ln(xy)$ ;
- (e)  $f(x, y) = \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{|x| - |y|}$ ;
- (f)  $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{z}{x^2 + y^2}$ ;
- (g)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ ;
- (h)  $f(x, y, z) = \operatorname{arcsen} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

3. Determine as curvas / superfícies de nível das seguintes funções e descreva-as do ponto de vista geométrico:

- (a)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ ;
- (b)  $f(x, y) = e^{xy}$ ;
- (c)  $f(x, y, z) = x + y + 3z$ ;
- (d)  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$ ;
- (e)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

4. Suponha que  $T(x, y) = 40 - x^2 - y^2$  representa uma distribuição de temperatura no plano  $xOy$  (admita que  $x$  e  $y$  são dados em quilómetros e a temperatura  $T$  em graus Celsius). Um indivíduo encontra-se na posição  $(3, 2)$  e pretende dar um passeio.

Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se desejar desfrutar sempre da mesma temperatura.

5. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem da função  $f$  dada por

$$f(x, y, z) = e^x \sin x + \cos(z - 3y).$$

6. Calcule, caso existam, as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções nos pontos  $P$  indicados:

(a)  $f(x, y) = \sqrt{xy}$   $[P = (2, 2)]$ ;

(b)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{4-x^2-2y^2}, & \text{se } x^2 + 2y^2 \neq 4 \\ 0, & \text{se } x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$   $[P = (2, 0)]$ ;

(c)  $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ x \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$   $[P = (0, 0)]$ .

7. Determine as derivadas parciais de primeira e de segunda ordens da função

$$f(x, y) = \ln(x + y) - \ln(x - y).$$

8. Determine uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^3 - 6x + \frac{y}{1+y^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

9. Mostre que não existe nenhuma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + xy^2$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = y^2$ .

10. Sendo  $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ , mostre que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

11. Mostre que a função  $f(x, y) = \arctg(y/x)$  verifica a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{equação de Laplace}).$$

12. Considere a função  $f(x, y) = \ln x + xy^2$ .

- (a) Indique o domínio de  $f$ .  
(b) Determine equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1, 2, 4)$ .

13. Seja  $f(x, y, z) = x \sin(yz)$ .

- (a) Determine o gradiente de  $f$ .  
(b) Calcule a derivada direcional de  $f$  no ponto  $(1, 3, 0)$  segundo o vetor unitário  $\vec{u}$  com a direção e sentido de  $v = (1, 2, -1)$ .

14. Considere a função  $f$  definida por  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ .

- (a) Indique o domínio  $D$  de  $f$  e caracterize-o do ponto de vista topológico.  
(b) Descreva as curvas de nível da função  $f$ .  
(c) Escreva a expressão geral das derivadas direcionais de  $f$  no ponto  $(1, 0)$ .

15. Determine reta normal e o plano tangente à superfície cônica

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3 - z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

no ponto  $(3, 4, -2)$ .

16. Considere a função  $f$  dada por  $f(x, y, z) = 3xy + z^2$ .
- (a) Calcule o gradiente de  $f$  num ponto genérico.
  - (b) Determine uma equação do plano tangente à superfície de nível 4 de  $f$ , no ponto  $(1, 1, 1)$ .

**Parte 2: Extremos globais, extremos locais e extremos condicionados.**

17. Considere a função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  no domínio  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ .
- (a) Esboce graficamente o domínio  $D$ .
  - (b) Aplique cuidadosamente o Teorema de Weierstrass para garantir a existência de extremos absolutos de  $f$  e determine-os.  
[Sug.: relacione o valor de  $f$  em cada ponto  $(x, y)$  com a norma desse ponto].
18. Sejam  $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$  e  $f(x, y, z) = z^2$ . O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos absolutos de  $f$  em  $\mathcal{S}$ ? Porquê?
19. Seja  $f$  a função definida em  $\mathbb{R}^2$  por  $f(x, y) = -x^2$ . Justifique que  $f$  possui uma infinidade de maximizantes.
20. Considere  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .
- (a) O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos absolutos de  $f$ ? Justifique.
  - (b) Justifique, usando diretamente a definição, que  $(0, 0, 0)$  é minimizante de  $f$ .
21. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ .
- (a) Mostre que  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ .
  - (b) Justifique que  $(0, 0)$  é maximizante absoluto de  $f$ .
22. Considere a função  $g(x, y) = y$  e os conjuntos  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  e  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
- (a) Justifique que  $g$  possui extremos globais em  $B$ .
  - (b) Identifique os extremantes globais de  $g$  em  $B$ .
  - (c) A função  $g$  possui extremantes globais em  $A$ ? Justifique.
23. Mostre que a função  $h(x, y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$  não atinge o seu máximo global na origem.
24. Determine os pontos críticos das seguintes funções:
- (a)  $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$ ;
  - (b)  $f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y)$ ;
  - (c)  $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ .
25. Mostre que a função  $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1$  tem apenas um mínimo local e que este ocorre apenas no ponto  $(1, 2)$ .
26. Considere a função  $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4(x - 2y)$  definida em  $D = [0, 1] \times [0, 2]$ .
- (a) Diga, justificando, se  $f$  possui pontos críticos no interior de  $D$ .

- (b) Prove a existência de extremos absolutos e determine-os.
27. Determine os extremos locais das seguintes funções:
- $f(x, y) = xy e^{-x-y}$ ;
  - $g(x, y) = x^3 - 2x^2y - x^2 + 4y^2$ .
28. Verifique que  $(-2, 0)$  e  $(0, 0)$  são os pontos críticos da função  $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$ , mas que só o primeiro é extremante de  $f$ .
29. Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = (x - y^3)^2 - x^3$ .
- Verifique que  $(0, 0)$  é ponto crítico de  $f$ .
  - Mostre que  $(0, 0)$  não é extremante local de  $f$ .
30. Determine os extremos absolutos da função  $f$  definida por  $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$  no círculo  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
31. Calcule os extremos globais da função  $f$  definida por  $f(x, y) = xy$  no semicírculo  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$ .
32. Determine os pontos da circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 80$  que estão à menor distância do ponto  $(1, 2)$  e os pontos da mesma circunferência que estão à maior distância do mesmo ponto.
33. Determine o ponto do plano  $x + 2y + z = 4$  que se encontra mais próximo do ponto  $(0, 0, 0)$ .
34. Determine a distância mais curta entre o ponto  $(1, 0, -2)$  e o plano de equação  $x + 2y + z = 4$ .
35. Determine os pontos da superfície esférica de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que estão mais próximo e mais distante do ponto  $(3, 1, -1)$ .
36. Seja  $f$  a função definida em  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$  por  $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ .
- Represente geometricamente o domínio  $D$  e o gráfico de  $f$ .
  - Determine os pontos críticos da função  $f$  no interior do seu domínio.
  - Determine os extremos globais da função  $f$  em  $D$ .
37. Seja  $f$  a função definida em  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq 1\}$  por  $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$ .
- Represente geometricamente o domínio  $D$ .
  - Determine o interior de  $D$  e diga, justificando, se  $f$  possui aí pontos críticos.
  - Determine os extremos globais da função  $f$  em  $D$ .
38. O lucro anual de uma empresa é calculado através da expressão

$$L(x, y) = -x^2 - y^2 + 22x + 18y - 102,$$

onde  $x$  representa o montante gasto em investigação e  $y$  o montante gasto em publicidade ( $L$ ,  $x$  e  $y$  expressos em unidades de milhões de euros).

Determine o lucro máximo da empresa e os valores de  $x$  e  $y$  que o realizam.

39. Numa dada empresa, as funções *produção* ( $P$ ) e *custo* ( $C$ ) são dadas por

$$P = 3K^{1/3}L^{1/3} \quad \text{e} \quad C = K^2 + 2L + 8 \quad (K\text{-capital; } L\text{-trabalho}).$$

Calcule o custo mínimo para uma produção de 12 unidades.