Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Universidade de Aveiro 2020/2021

http://moodle.ua.pt

Lógica proposicional

- Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa (ao mesmo tempo).
- Princípio do terceiro excluído: uma proposição ou é verdadeira ou é falsa (i.e., verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro).
- O valor lógico de uma proposição é verdadeiro (V ou 1) ou falso (F ou 0).

Exemplos

São proposições:

1) $2 > 3$ F

2) Luís Vaz de Camões escreveu os Lusíadas ✓

3) a equação $x^2 = 4$ tem duas soluções reais ✓

Não são proposições:

1) $x > 3$

2) Apreciem a paisagem

3) $x^2 = 4$

Decomposição de proposições

Matemática Discreta
Lógica Proposicional
Lógica Proposicional
Fórmulas bem formadas (fbf)
Fórmulas válidas e inconsistentes
Propriedades
Inferência
Ou exclusivo

Uma proposição

atómica não se pode decompor noutras proposições.

- Denotam-se por letras minúsculas: p, q, $\ldots$

composta pode decompor-se em proposições atómicas e operadores lógicos.

Exemplo de proposição composta:

- Se o cão tem fome então o cão come muito,

proposições atómicas:

- p: "o cão tem fome"
- q: "o cão come muito"

operador lógico: $\Rightarrow$

$$p \Rightarrow q$$

Operadores lógicos (ou conetivos lógicos)

Negação	$\neg$	(não)
Conjunção	$\wedge$	(e)
Disjunção	$\vee$	(ou)
Implicação	$\Rightarrow$	(se ... então)
Equivalência	$\Leftrightarrow$	(se e só se (sse))

Folha de exercícios 1

Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Lógica Proposicional

Fórmulas bem formadas (fbf)

Fórmulas válidas e inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

8. Sejam as a proposições

   p: *Sou responsável*;

   q: *Passo a Matemática Discreta*;

   r: *Vou de férias para as Bermudas*.

   Traduza as frases seguintes por meio de fórmulas proposicionais.

   (a) Se passar a Matemática Discreta, vou de férias para as Bermudas.

   (b) $\underbrace{\text{Para ir de férias para as Bermudas}}_{r}$ é suficiente $\underbrace{\text{que eu seja responsável}}_{p}$.

   (c) $\underbrace{\text{Passo a Matemática Discreta}}_{q}$ só se $\underbrace{\text{for responsável}}_{p}$.

   (d) $\underbrace{\text{Para passar a Matemática Discreta}}_{q}$ é necessário $\underbrace{\text{que eu seja responsável}}_{p}$.

   (e) Se $\underbrace{\text{passar a Matemática Discreta}}_{q}$ então $\underbrace{\text{vou de férias para as Bermudas}}_{r}$ $\underbrace{\text{caso seja responsável}}_{p}$.

(a) $q \Rightarrow r$

(b) $p \Rightarrow r$

(c) $q \Rightarrow p$

(d) $q \Rightarrow p$

(e) $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

? $(p \wedge q) \Rightarrow r$

Tabelas de verdade

Tabela de verdade da **negação**:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Tabelas de verdade (cont.)

Matemática Discreta
Lógica Proposicional
Lógica Proposicional
Fórmulas bem formadas (fbf)
Fórmulas válidas e inconsistentes
Propriedades
Inferência
Ou exclusivo

Tabela de verdade da **conjunção**:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

e

Tabela de verdade da **disjunção**:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ou

Tabelas de verdade (cont.)

Tabela de verdade da implicação:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$\underbrace{2>5 \Rightarrow 2=7}_{V}$

Tabela de verdade da equivalência:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Folha de exercícios 1

Matemática Discreta
Lógica Proposicional
Lógica Proposicional
Fórmulas bem formadas (fbf)
Fórmulas válidas e inconsistentes
Propriedades
Inferência
Ou exclusivo

2. Diga, justificando, quais das seguintes fórmulas são tautologias:
   (a) $[(p \Rightarrow q) \land p] \Rightarrow q$;
   (b) $[p \land (\neg p)] \Rightarrow q$;
   (c) $\underbrace{[(p \lor q) \land (\neg p \lor r)]}_{A} \Rightarrow (q \lor r)$.
3. Encontre uma proposição composta envolvendo as proposições p, q e r que é verdadeira se p e q são verdadeiras e r é falsa e é falsa em qualquer outro caso.

p	q	r	$\neg p$	$p \lor q$	$\neg p \lor r$	A	$q \lor r$	(c)
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1

é Tautologia!

Folha de exercícios 1

2. Diga, justificando, quais das seguintes fórmulas são tautologias:
   (a) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$;
   (b) $[p \wedge (\neg p)] \Rightarrow q$;
   (c) $[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \Rightarrow (q \vee r)$.
3. Encontre uma proposição composta envolvendo as proposições p, q e r que é verdadeira se p e q são verdadeiras e r é falsa e é falsa em qualquer outro caso.

Fórmulas bem formadas

Matemática Discreta
Lógica Proposicional
Lógica Proposicional
Fórmulas bem formadas (fbf)
Fórmulas válidas e inconsistentes
Propriedades
Inferência
Ou exclusivo

Definição [fórmula bem formada (fbf)]

1. Verdadeiro (V ou 1) é uma fbf;
2. Falso (F ou 0) é uma fbf;
3. Uma proposição atómica é uma fbf;
4. se r é uma fbf então $\neg r$ é uma fbf;
5. se r e s são fbf's então $(r \wedge s)$, $(r \vee s)$, $(r \Rightarrow s)$, $(r \Leftarrow s)$ e $(r \Leftrightarrow s)$ são fbf's.

Também utilizamos os parêntesis retos "[" e "]" em alternativa ou conjuntamente com os parêntesis curvos "(" e ")".

Uma fórmula bem formada também se designa por **expressão lógica**.

Tautologias e contradições

Definição de tautologia e contradição

Uma **tautologia** é uma fórmula que tem valor lógico 1 qualquer que seja a interpretação.
Uma **contradição** é uma fórmula que tem valor lógico 0 qualquer que seja a interpretação.

Exemplo de tautologia: $p \vee \neg p$

Exemplo de contradição: $p \wedge \neg p$

Fórmulas válidas, inconsistentes e equivalentes

Definição [fórmula válida]

Uma fbf diz-se **válida** se é uma tautologia, i.e., se é verdadeira sobre qualquer das suas possíveis interpretações.

Uma fbf diz-se **não válida (ou inválida)** se não é válida.

Definição [fórmula inconsistente]

Uma fbf diz-se **inconsistente** se é uma contradição, i.e., se é falsa qualquer que seja a interpretação.

Uma fbf diz-se **consistente** se não é inconsistente.

Fórmulas lógicas equivalentes

Definição [fórmulas equivalentes]

Duas fórmulas lógicas, r e s, dizem-se **equivalentes** ($\equiv$) se $r \Leftrightarrow s$ é uma tautologia.

- Duas fórmulas lógicas com as mesmas variáveis são equivalentes quando têm a mesma tabela de verdade.
- Como consequência, podemos afirmar que $(p \Rightarrow q)$ é equivalente a $\neg p \vee q$ conforme decorre das respectivas tabelas de verdade.

Comutatividade, leis de De Morgan e associatividade

Matemática Discreta
Lógica Proposicional
Lógica Proposicional
Fórmulas bem formadas (fbf)
Fórmulas válidas e inconsistentes
Propriedades
Inferência
Ou exclusivo

- Comutatividade:
  - $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
  - $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
- Leis de De Morgan:
  - $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
  - $(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- Associatividade:
  - $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
  - $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$

Idempotência, distributividade, lei da contraposição, lei da dupla negação

- Idempotência:
  - $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
  - $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
- Distributividade:
  - $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
  - $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
- Lei da contraposição:
  - $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
- Lei da dupla negação:
  - $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

Outras propriedades

Matemática Discreta
Lógica Proposicional
Lógica Proposicional
Fórmulas bem formadas (fbf)
Fórmulas válidas e inconsistentes
Propriedades
Inferência
Ou exclusivo

Seja p uma proposição arbitrária.

- $(p \wedge 1) \Leftrightarrow p$;
- $(p \vee 1) \Leftrightarrow 1$;
- $(p \wedge 0) \Leftrightarrow 0$;
- $(p \vee 0) \Leftrightarrow p$;
- $\neg 1 \Leftrightarrow 0$;
- $\neg 0 \Leftrightarrow 1$;

Modus ponens e modus tollens

- Modus ponens:
  - $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
- Modus tollens:
  - $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$

Outras regras

- Adição:
  - $p \Rightarrow (p \vee q)$
- Simplificação:
  - $(p \wedge q) \Rightarrow p$
- Silogismo hipotético:
  - $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Folha de exercícios 1

4. Usando tautologias apropriadas simplifique as proposições:

   (a) $p \vee [q \wedge (\neg p)]$;

   (b) $\neg[(\neg p) \wedge (\neg q)]$;

   (c) $[p \wedge q] \vee [p \wedge (\neg q)]$.

Utilização do "ou exclusivo" em fórmulas lógicas

- Para além do conetivo $\vee$ que se designa também por *ou inclusivo*, por vezes adopta-se o *ou exclusivo* (ou *rejeição*) que se denota por $\dot{\vee}$.

- Este *ou exclusivo* aplicado às proposições p e q produz a proposição $p \dot{\vee} q$ que significa p ou q, mas não ambos.

- Assim, a proposição $p \dot{\vee} q$ é verdadeira quando uma e apenas uma das proposições p ou q é verdadeira.

Folha de exercícios 1

10. Verifique a correcção de cada uma das seguintes deduções:

    (a) Chove se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.

    (b) Chove se e só se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.

    (c) Se o mordomo cometeu o crime, então ele vai estar nervoso quando interrogado. O mordomo estava nervoso quando interrogado. Logo, o mordomo cometeu o crime.

    (d) r é uma condição suficiente para q. Além disso, verifica-se r ou a negação de p. Logo, se q não for verdadeiro, não se verifica p.

    (e) De $\neg(p \vee q)$ deduz-se $\neg p$.

    (f) A simplificação da expressão $(\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q$ foi feita de acordo com os seguintes passos:

$$\begin{aligned}(\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge \neg q\\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (q \vee r)\\ &\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r.\end{aligned}$$

Resolução (cont.)

Folha de exercícios 1

11. Cinco amigos têm acessso a uma *sala de chat*. Admitindo que é conhecida a seguinte informação:

    - O António ou a Berta ou ambos estão na *sala de chat*
    - O Carlos ou a Dalila mas não ambos estão na *sala de chat*
    - Se a Ema está na *sala de chat* também está o Carlos
    - A Dalila e o António estão ambos na *sala de chat* ou nenhum está
    - Se a Berta está na *sala de chat* então também estão a Ema e o António,

    é possível determinar quem está a conversar?

Referências bibliográficas

Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Lógica Proposicional

Fórmulas bem formadas (fbf)

Fórmulas válidas e inconsistentes

Propriedades

Inferência

Ou exclusivo

- Referência bibliográfica principal:
  D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami, *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*, Escolar Editora, 2009.

- Referência bibliográfica complementar:
  N. L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 2nd Ed. (2002).