Capítulo 2 – Cinemática

1 - A posição de um objecto que se move segundo uma linha recta é dada por:
$x = 3,0\ t - 4,0\ t^2 + t^3$ em que x é expresso em metros e t em segundos.

a) Calcule a posição do objecto para t = 1, 2, 3 e 4 s.
b) Qual a distância total percorrida entre t = 0 e t = 4 s?
c) Qual a velocidade média no intervalo de tempo t = 2 e t = 4 s?
d) Determine a expressão para a velocidade em função do tempo.

2 - Uma partícula material, na origem, parte do repouso com uma aceleração de 10 ms^{-2}, que decresce linearmente até se reduzir a metade ao fim de 2 s. A partir desse instante a partícula move-se com aceleração constante durante 60 s, findos os quais fica sujeita apenas ao atrito do meio, que lhe comunica uma aceleração constante, obrigando-a a parar ao fim de 10 s.

a) Interprete graficamente a variação da aceleração e da velocidade no tempo;
b) Calcule a velocidade máxima atingida pela partícula e o valor da aceleração devida ao atrito do meio.

3 - Um carro parte do repouso com uma aceleração de 4 m s^{-2} durante 4 s. Durante os 10 s seguintes move-se com movimento uniforme. Em seguida, aplicam-se os travões e o carro trava com aceleração de 8 m s^{-2} até que pára.

a) Faça a representação gráfica da velocidade em função do tempo
b) Determine a distância percorrida desde a partida.

4 - Um corpo A, inicialmente em repouso num ponto O, parte deste ponto, seguindo uma trajectória rectilínea, com uma aceleração constante de 2 m s^{-2}. Decorridos 4 s, um outro corpo, B, parte do repouso, mesmo ponto O, seguindo a mesma trajectória, porém acelerado constantemente à razão de 3 m s^{-2}. A que distância de O o corpo B ultrapassará o A?

5 - Um corpo desloca-se com movimento rectilíneo uniformemente acelerado percorre 17 m em 2 s. Durante os dois segundos imediatos percorre 24 m.

a) Calcule a velocidade inicial do corpo e a sua aceleração.
b) Que distância percorrerá nos 4 s seguintes?

6 - O módulo da velocidade dum corpo é dado por:

$v = 2t$ para $0 < t < 10$
$v = 20$ para $10 < t < 30$
$v = 140 - 4\ t$ para $30 < t < 35$

em que v é velocidade em m s^{-1} e t em s. No intervalo de 0 a 35 s:

a) Represente graficamente v(t)
b) Represente graficamente a(t)
c) Represente graficamente x(t)

7 - Estabeleça a lei do movimento x(t) de um ponto material cuja trajectória é rectilínea com aceleração (2 - 6 t) m s^{-2}, cuja velocidade inicial é 1 m s^{-1}, e que em t=1s se encontra na origem.

8 - A aceleração de um corpo que se move ao longo de uma linha recta é dada por $\vec{a} = \left(4 - t^2\right)\vec{i}$ em que as unidades de a são m s^{-2} e t está em segundos. Determinar a velocidade e a posição em função do tempo, sabendo que quando t = 3 s, v = 2m s^{-1} e x = 9m.

9 - A velocidade de um corpo que se desloca em linha recta é v = 1 + 6 t^2, onde v é dado em cm s^{-1} e t em segundos. Em t = 2 s, a posição é x = 20 cm. Determine:

a) As expressões da aceleração e da posição do corpo em qualquer instante

b) A posição e velocidade em t=0.

10 - Considere uma particular cujo vector posição é dado por $\mathbf{r}(t)=(t^3-2t,-3e^{-t},t)$ m. Determine a velocidade e a aceleração nos instantes t = 0 s e t = 1 s.

11 - Uma partícula tem movimento circular uniforme, com velocidade angular ω e raio r constantes, sendo a sua posição dada por $\vec{r} = r\cos(\omega t)\vec{i} + r\sin(\omega t)\vec{j}$.

a) Determine a velocidade $\vec{v}$ e mostre que $\vec{r}.\vec{v} = 0$.

b) Determine o módulo da velocidade.

c) Determine a aceleração $\vec{a}$ e mostre que $\vec{a} + \omega^2\vec{r} = 0$.

d) Determine $\vec{r} \times \vec{v}$.

12 - Uma partícula tem movimento helicoidal, com velocidade angular ω e raio r constants, sendo a sua posição dada por $\vec{r} = r\cos(\omega t)\vec{i} + r\sin(\omega t)\vec{j} + \omega t\vec{k}$.

a) Determine a velocidade $\vec{v}$ da partícula.

b) Determine a aceleração $\vec{a}$ da particula.

13 - Um homem, no cimo de um edifício, lança uma bola verticalmente para cima, com uma velocidade inicial de 10 m s^{-1}. A bola atinge a rua 4,25 s depois do instante em que é lançada.

a) Qual a altura máxima atingida pela bola?

b) Qual a altura do edifício?

c) Com que velocidade a bola atinge a rua?

14 - Lançam-se dois projécteis simultaneamente, um para cima na direcção vertical, e outro numa direcção que faz um ângulo de 30^{o} com a horizontal. Determine a relação das velocidades iniciais para que, quando o primeiro atinja o solo, o segundo atinja a altura máxima. Verifique que esta relação se reduz a metade se os dois projécteis atingirem simultaneamente o solo.

15 - Um projéctil é lançado com uma velocidade de 100 m s^{-1} fazendo um ângulo de 60^{o} com a horizontal. Calcule:

a) O alcance do projéctil.

b) A altura máxima.

c) A velocidade e a altura 10 s após o lançamento.

16 - Uma partícula move-se com velocidade constante v ao longo de uma circunferência de raio R. Determine a velocidade angular e o vector aceleração.

17 - Uma partícula move-se com velocidade constante v ao longo da cardióide $r = k(1+\cos\phi)$. Determine a velocidade angular.

18 - Determine o módulo da velocidade e a aceleração centrípeta da Terra no seu movimento em torno do Sol. O raio da órbita da Terra é de 1,49 x 10^{11} m .

19 - A Lua gravita à volta da Terra completando uma volta em 27,3 dias. Suponha a órbita circular com raio de 384.000 km. Qual a intensidade da aceleração da Lua em torno da Terra?

20 - Um corpo desloca-se num arco de circunferência de raio r=10 m obedecendo à seguinte lei: s (t) = 2 cos (0,2t). Em t=0 s=0 e o sentido positivo de s é no sentido retrógrado. Determine:

a) O vector velocidade em qualquer instante.
b) O vector aceleração em qualquer instante.
c) As componentes tangencial e normal da aceleração em t=1s.
d) Os instantes em que a velocidade é nula.

21 - Um corpo desloca-se num arco de circunferência de raio r=1,0 m no plano OXY obedecendo à seguinte lei: $s(t) = 2t-t^2$. Em t=0 encontra-se na origem (0,0) e o sentido positivo de s é no sentido retrógrado. Determine, usando coordenadas cartesianas:

a) O vector de posição da partícula em qualquer instante.
b) O vector velocidade em qualquer instante. Determine o módulo.
c) O vector aceleração em qualquer instante.
d) As componentes tangencial e normal da aceleração em t=0.5s.
e) A distância percorrida até t=2 s. Qual a posição?

22 - Um objecto move-se com trajectória circular e uma velocidade, de módulo constante, v = 50 cm s^{-1}. O vector posição muda de direcção de 30^{o} em cada 2 s.

a) Calcule o raio da trajectória.
b) Qual é a aceleração centrípeta?

23 - Um corpo descreve uma trajectória circular de raio igual a 2 m, com velocidade angular ω = 3 t + 1 (t é expresso em segundos).

a) Calcule o vector aceleração do corpo no instante t = 1 s (módulo e ângulo do vector com a tangente à circunferência).

b) Determine a equação que descreve o espaço percorrido em função do tempo.

24 - Um insecto desloca-se ao longo da espiral de uma concha. A trajectória descrita pelo insecto é dada pela equação: $R = R_0 e^{a\theta}$, onde $a = 0.182$ e R_0 = 5 mm. A distância radial do insecto ao centro da espiral aumenta à razão constante de 2 mm/s. Determine as componentes a_x e a_y da aceleração do insecto quando $\theta = \pi$.

Soluções

1 - a) x(1) = 0 m; x (2) = - 2 m; x(3) = 0 m; x (4) = 12 m; b) d = 17,5 m;
c) v_{med} = 7 m/s; d) v=3,0-8,0t +$3t^2$.

2 - b) v_{max}= 315 m/s; a = -31,5 m/s^2.

3 - b) d = 208 m.

4 - d = 475,1 m (encontram-se ao fim de 21,8s).

5 - a) v_0 = 6,75 m/s; a = 1,75 m/s^2; b) d = 69 m.

7 - x = -1+ t + t^2 - t^3 m.

8 - v = -1 + 4t - $t^3/3$ m/s;
x = 0,75 - t + $2t^2$ - t^4 /12 m.

9 - a) a = 12t cm/s^2; x = 2 + t + $2t^3$ cm; b) v (0) = 1 cm/s; x (0) = 2 cm.

10 - v(t)=($3t^2$-2,3e^{-t},1); **a**(t)=(6t,-3e^{-t},0); **v**(0)=(-2,3,1); **a**(0)=(0,-3,0).

11 - a) $\vec{v} = -\omega r \sin(\omega t)\vec{i} + \omega r \cos(\omega t)\vec{j}$; b) $\|\vec{v}\| = \omega r$;
c) $\vec{a} = -\omega^2\left(r\cos(\omega t)\vec{i} + r\sin(\omega t)\vec{j}\right)$; d) $\omega r^2 \vec{k}$.

12 - a) $\vec{v} = -\omega r \sin(\omega t)\vec{i} + \omega r \cos(\omega t)\vec{j} + \omega \vec{k}$;
b) $\vec{a} = -\omega^2\left(r\cos(\omega t)\vec{i} + r\sin(\omega t)\vec{j}\right)$.

13 - a) h_{max} = 51,1 m (desde a rua) ; b) h = 46 m; c) v (4,25) = - 31,5 m/s.

14 - $v_{02} = 4v_{01}$.

15 - a) x ($2t_h$) = 884 m; b) h = 383 m; c) v(10) = 51,3 m/s; h (10) = 376 m.

16 - $\dot{\phi} = v/R; \vec{a} = -v^2/R\,\vec{e}_R$.

17 - $\dot{\phi} = \dfrac{v}{\sqrt{2kr}}$.

18 - |v| = 29,7 x 10^4 m/s; a_c = 5,9 x 10^{-3} m/s^2.

19 - a_c = 2,72 x 10^{-3} m/s^2.

20 - a) $\vec{v} = 0{,}4\sin(0{,}2t)\,\hat{u}_t$ b) $\vec{a} = -0{,}08\cos(0{,}2t)\,\hat{u}_t + 0{,}016\sin^2(0{,}2t)\,\hat{u}_n$;
c) $a_t = -0{,}078$ m/s^2; a_n =6,32x10^{-4} m/s^2 ; d) $t_{v=0}$ = 5n π, com n = 0, 1, 2, ...

21 - a) x=-1+cos(2t-t^2), y=sin(2t-t^2);
b) v_x=-(2-2t)sin(2t-t^2), v_y=(2-2t)cos(2t-t^2), |v|=2-2t ;
c) a_x=-$(2-2t)^2$ cos(2t-t^2)+2 sin(2t-t^2) ; a_y=-$(2-2t)^2$ sin(2t-t^2)-2 cos(2t-t^2) ;
d) a_t=-2 m/s^2; a_n=1 m/s^2 e) d=2m; s=0; ponto (0,0).

22 - a) r=1,9 m; b) a_c = 0,13 m/s^2.

23 - a) $\vec{a}(1) = 6\hat{u}_t + 32\hat{u}_n$; a(1)= 32,6 m/s^2; ϕ = 79,4º ; b) s(t) = 2t + $3t^2$.

24 - $\vec{a} = -\dfrac{\dot{R}^2 e^{-a\theta}}{R_0 a}\left(\dfrac{1}{a}\vec{e}_R - \vec{e}_\theta\right) = -13.63\vec{e}_R + 2.48\vec{e}_\theta = 13.63\vec{i} - 2.48\vec{j}$ (mm/s^2).