Capítulo 4 – Trabalho e Energia

1 - Um corpo de massa 2,0 kg é deslocado 10 metros numa mesa horizontal, com atrito (μ_{est}=0,2 ; μ_{cin}=0,1), por uma força constante F de intensidade 10,0 N, com inclinação de 30º com a horizontal, para baixo.

a) Represente as forças aplicadas ao corpo.
b) Determine o trabalho realizado pela força F.
c) Determine o trabalho realizado pelo peso do corpo.
d) Determine o trabalho realizado pela reacção normal da superfície da mesa.
e) Determine o trabalho realizado pela força de atrito.
f) Qual a variação de energia cinética do corpo durante o deslocamento?
g) Como mudariam as respostas anteriores se não existisse atrito entre a superfície e o corpo?

2 - Um corpo de massa 10 kg desce um plano inclinado, com inclinação 45º com a horizontal e altura 20 m. Entre o corpo e o plano existe atrito (μ_{est}=0,2 ; μ_{cin}=0,1). Para o deslocamento desde o topo do plano até à base, determine:

a) O trabalho realizado pelo peso do corpo.
b) O trabalho realizado pela reacção normal da superfície do plano.
c) O trabalho realizado pela força de atrito.
d) A variação de energia cinética do corpo durante o deslocamento.
e) Como mudariam as respostas anteriores se o corpo subisse o plano.
f) Como mudariam as respostas anteriores se não existisse atrito entre a superfície e o corpo?

3 - Uma partícula está sujeita a uma força $\vec{F} = (2y^2 - x^2)\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j}$. Calcule o trabalho realizado pela força quando a partícula se move da origem (0,0) para o ponto (2,4) ao longo dos seguintes caminhos:

a) ao longo do eixo dos x de (0,0) até (2,0) e depois paralelo a y até (2,4).
b) ao longo do eixo dos y de (0,0) até (0,4) e depois paralelo a x até (2,4).
c) ao longo do segmento de recta que une os dois pontos.
d) ao longo da parábola $y=x^2$.
e) Que conclui sobre a força poder ser conservativa?

4 - Determine a força associada a cada uma das funções trabalho seguintes:

a) $W(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$,
b) $W(x,y,z) = x^2 y^3 z^4$,
c) $W(x,y,z) = e^x \sin y \ln z$.

5 - A altura de um monte (em metros), onde y é a distância (em km) medida para Norte e x a distância medida para Este, é dada por:

$$h(x,y) = 3(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12).$$

a) Onde está localizado o pico do monte?
b) Qual é a altura do monte?
c) Qual é o declive num ponto situado a 1 km para Norte e 1 km para Este?

6 - Seja o trabalho $W = \|\vec{r}\|$. Calcule a força no ponto $\vec{r} = (1,2,3)$ e a sua intensidade.

7 - Calcule a divergência das forças seguintes:

a) $\vec{F} = x^2\vec{i} + 3xz^2\vec{j} - 2xz\vec{k}$,

b) $\vec{F} = xy\vec{i} + 2yz\vec{j} + 3xz\vec{k}$,

c) $\vec{F} = y^2\vec{i} + (2xy + z^2)\vec{j} + 2yz\vec{k}$.

8 - Calcule a divergência e o rotacional da força $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$.

9 - Determine a divergência e o rotacional da força gravítica. Justifique o resultado.

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r\ .$$

10 - Um arqueiro desloca 50 cm o apoio da seta na corda do arco, exercendo uma força que aumenta uniformemente desde 0 até 250N.

a) Qual a constante efectiva de mola que pode atribuir ao arco.

b) Qual o trabalho realizado pelo arqueiro ao esticar o arco?

c) Supondo que a massa da seta é 100g, qual a velocidade com que é lançada, na horizontal?

11 - Em estradas com descidas muito acentuadas existem zonas de travagem de emergência, com cascalho e pedras, para as quais o condutor pode orientar o veículo (sem travões, p. ex.) para o imobilizar em segurança. Suponha que um camião, de massa 5 toneladas, entra numa zona de travagem de emergência, horizontal, com a velocidade de 100 km/h, parando numa distância de 150 m.

a) Qual a força média exercida pelo piso, que trava o camião?

b) Se a zona de travagem só pudesse ter uma extensão de 100m, qual a inclinação que deveria ter para o camião poder ser travado?

12 - Numa pista horizontal, um ciclista de massa 75 kg consegue pedalar à velocidade máxima de 36 km/h. Sabendo que se deixar de pedalar, pára em 150m, e que a massa da bicicleta é 15 kg, determine:

a) a força de atrito (suposta constante) exercida no sistema bicicleta+ciclista.

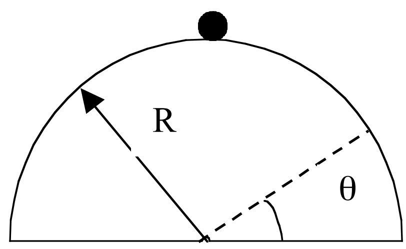
b) a potência desenvolvida quando o ciclista se desloca à velocidade máxima.

13 - Um corpo de massa de 10 g cai duma altura de 3 m em cima dum monte de areia. O corpo penetra 3 cm na areia antes de parar. Que força exerce a areia sobre o corpo?

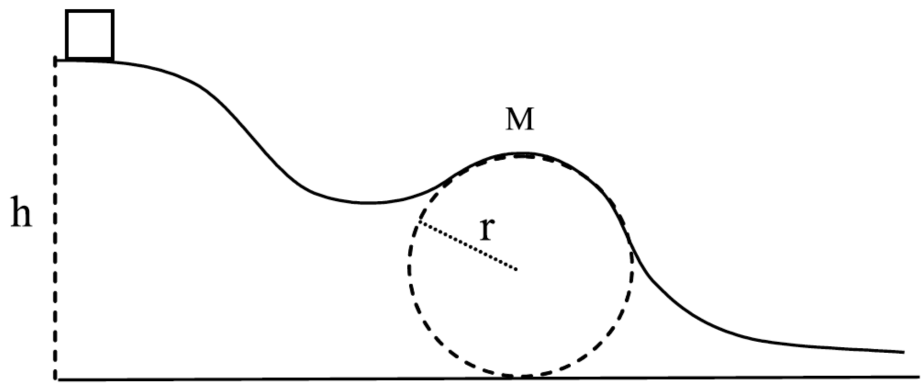
14 - Uma partícula de massa m, encontra-se, em repouso no topo duma cúpula hemisférica, de raio R, onde pode deslizar, sem atrito

a) Depois de largada, qual o ponto em que a partícula deixa de estar em contacto com a cúpula?

b) Qual a velocidade máxima com que pode ser lançada, horizontalmente, para que não deslize sobre a cúpula?



15 - Uma partícula parte do repouso e desliza ao longo de uma superfície como mostra a figura. Entre que valores pode variar a altura inicial da partícula de modo a que esta descreva a trajectória dada pela figura (sem abandonar a superfície)?



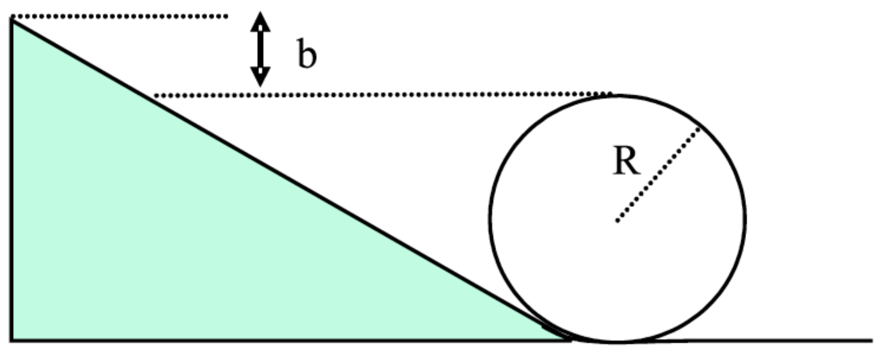
16 - Uma bola de massa M está presa a um fio de comprimento L e roda num plano vertical.

a) Mostre que as tensões máxima e mínima no fio verificam: $T_{max}-T_{min}=6Mg$.

b) Qual o menor valor da velocidade da bola durante a trajectória?

17 - Um pêndulo simples de massa igual a 50 g suspenso por um fio de 1 m de comprimento oscila com uma amplitude de 60° . Qual é a tensão do fio na passagem pela vertical e pela posição extrema?

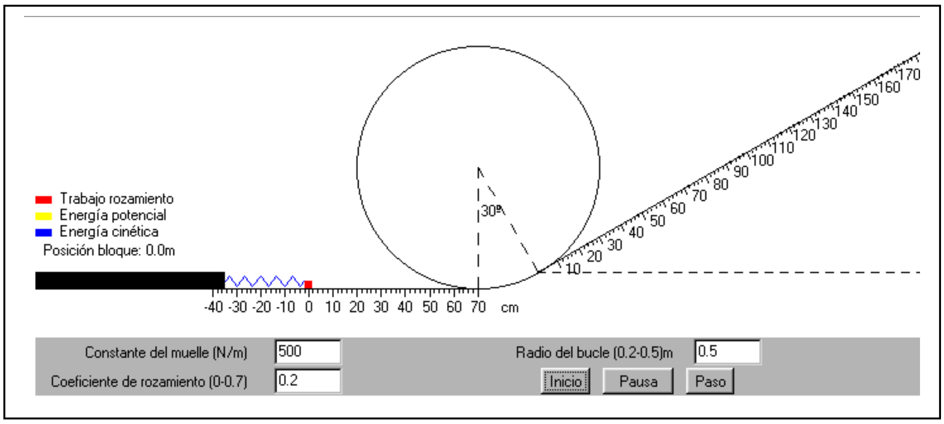
18 - Uma partícula de massa *m* parte do repouso no topo de um plano inclinado, desliza sem atrito, e entra numa calha circular de raio *R*, tal como mostra a figura:



a) Qual é o valor mínimo de *b*, para que a partícula não abandone a calha no seu movimento?

b) Assuma $b = R$. Determine a força exercida pela calha na particular quando esta atinge a altura *R*.

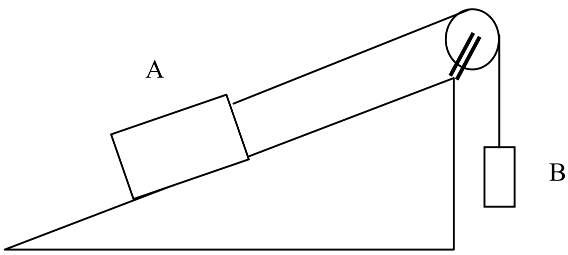
19 - Considere a pista descrita na figura, constituída por uma secção horizontal, um looping vertical de raio *R*, e um plano inclinado que faz um ângulo de 30º com a horizontal. Uma partícula de massa *m* é lançada na secção horizontal comprimindo duma distância *D* uma mola, de constante *K*. Os pontos de ligação entre o looping e as secções rectas estão indicados na figura.



Supondo que não há atrito, determine:

a) O valor mínimo de *D* para a partícula poder dar a volta no looping.
b) A velocidade quando passa no topo do looping, nessas condições.
c) Sendo *D* metade do valor calculado em a), até que ângulo com a vertical se desloca no looping?
d) Sendo *D* o dobro do valor calculado em a), qual a velocidade com que passa no topo do looping?
e) Supondo que a partícula era largada do plano inclinado, suposto sem atrito, de que ponto deve ser lançada para poder dar a volta no looping?

20 - Dois corpos A e B de massa igual encontram-se ligados por uma corda inextensível e sem massa, que passa pela gola de uma roldana, sem atrito e sem massa, como indicado na figura. A inclinação do plano é θ=30º e o sistema encontra-se inicialmente em repouso.



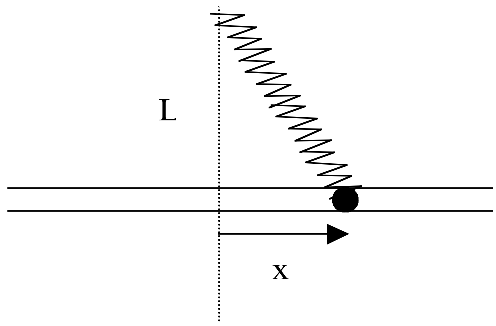
a) Suponha que o corpo A pode deslizar sobre o plano sem atrito. Determine a velocidade de B após ter percorrido uma distância de 1 m depois de largado.
b) Repita a alínea anterior supondo que o coeficiente de atrito cinético entre A e o plano é μ=0,1.

21 - Um bloco de massa 0,2 kg sobe um plano inclinado, que faz 30° com a horizontal, com uma velocidade inicial de 12 ms^{-1}. Se o coeficiente de atrito for 0,16, determinar o espaço percorrido pelo bloco, supondo que ele inicia o movimento da base, até parar. Qual é a velocidade do bloco quando (se) ele voltar à base do plano.

22 - Uma partícula de massa M = 1 kg está sujeita a uma força $\vec{F}$ que resulta de uma energia potencial $U(x,y) = x^2 + y^2$ (x,y em m).

a) Determine $\vec{F}\,(x,y)$. Represente para alguns pontos do plano xy.
b) Qual a posição de equilíbrio.
c) Supondo que a partícula possui uma trajectória circular em torno da origem, determine o respectivo raio quando a energia total é de 2 J. Que tipo de movimento se verifica?

23 - Um corpo de massa m = 1 kg pode deslocar-se, sem atrito, numa calha horizontal, ao longo do eixo dos x. O corpo está ligado a uma mola elástica, de comprimento natural L e constante elástica K, como representado na figura.



a) Se o corpo for deslocado de uma distância x em relação à origem, mostre que a energia potencial é dada por:
$$U(x) = \frac{1}{2}K\left(x^2 + 2L^2 - 2L\sqrt{L^2 + x^2}\right)$$
b) Determine $F(x)$, a força resultante sobre a partícula
c) Represente graficamente $U(x)$ e $F(x)$. Qual a posição de equilíbrio?
d) Relacione a amplitude do movimento com a velocidade máxima.
e) Suponha L = 1,0 m e K = 40 N/m. Se o corpo for deslocado 50 cm para a direita, qual a sua velocidade quando chega à posição de equilíbrio?
f) Compare com a situação duma mola idêntica colocada ao longo da calha.

24 - Uma partícula de massa unitária move-se ao longo do eixo do xx sob acção de uma força conservativa, de energia potencial $U(x) = 6x^2 - x^3$.

a) Encontre os pontos de equilíbrio e investigue a sua estabilidade.
b) Para o ponto estável, se a partícula for deslocada um pouco da sua posição de equilíbrio, ela adquire um movimento oscilatório em torno dessa posição. Qual é o período desse movimento?

25 - Sabendo que a força dada por $\vec{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\,\vec{i} + 2xyz^3\vec{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\vec{k}$ é conservativa, calcule a expressão da energia potencial $U(x,y)$ correspondente.

26 - Considere a força $\vec{F} = (1 - 2xy)\,\vec{i} - (x^2 - 9y^2)\,\vec{j}$.

a) Mostre que é uma força conservativa.
b) Ache a expressão da energia potencial $U(x,y)$ correspondente.
c) Encontre os pontos de equilíbrio.

27 - Alguns lançamentos:

a) Calcule a energia que é necessário fornecer a um satélite de massa 500 kg para que este tenha uma órbita geoestacionária. Qual a velocidade correspondente?

b) Calcule a energia que é necessário fornecer a um satélite de massa 500 kg para que este passe de uma órbita com raio igual ao dobro do raio da Terra para uma órbita com o triplo do raio da Terra.

c) Calcule a energia mínima que é necessário fornecer a uma nave de massa 1000 kg para que esta se afaste indefinidamente da Terra. Qual a velocidade correspondente?

28 - O campo eléctrico entre duas placas carregadas paralelas separadas de 2,0 cm tem um valor uniforme de $2{,}0 \times 10^4$ N/C.

a) Determine a diferença de potencial entre as duas placas.

b) Determine a força a que está sujeito um electrão.

c) Qual a energia cinética que um electrão adquire ao ser acelerado a partir do repouso, desde a placa negativa até à placa positiva?

d) Qual a velocidade mínima com que deve ser lançado um electrão da placa positiva, de modo a atingir a placa negativa?

e) Até onde se desloca, se for lançado com metade da velocidade calculada na alínea anterior?

29 - Um electrão que se move paralelamente ao eixo dos x tem uma velocidade inicial de $3{,}0 \times 10^6$ m/s no ponto A. A velocidade do electrão reduz-se para $1{,}5 \times 10^5$ m/s no ponto B. Calcule a diferença de potencial entre esses pontos.

30 - Um protão move-se num campo eléctrico uniforme, numa direcção paralela ao campo. Depois de percorrer 2,0 cm, a sua energia cinética aumentou $5{,}5 \times 10^{-18}$ J.

a) Qual a diferença de potencial entre os dois pontos?

b) Qual a grandeza do campo eléctrico?

Soluções

1 - b) 86,6 J; c) 0; d) 0; e) –24,6 J; f) 62 J.

2 - a) 1960 J; b) 0; c) –196 J; d) 1764 J; e) –2156 J.

3 - a) 88/3 J; b) 184/3 J; c) 40 J; d) 536/15 J; e) não conservativa.

4 - a) $\vec{F} = 2x\vec{i} + 3y^2\vec{j} + 4z^3\vec{k}$; b) $\vec{F} = 2xy^3z^4\,\vec{i} + 3x^2y^2z^4\,\vec{j} + 4x^2y^3z^3\vec{k}$;
c) $\vec{F} = e^x \sin y \ln z\,\vec{i} + e^x \cos y \ln z\,\vec{j} + e^x \sin y / z\,\vec{k}$.

5 – a) $\vec{\nabla} h = 3(2y - 6x - 18)\vec{i} + 3(2x - 8y + 28)\vec{j} = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$ km, $y = 3$ km;
b) $h_{max} = h(-2,3) = 216$ m; c) $\left\|\vec{\nabla} h\right\| = 2\sqrt{33}$ m/km.

6 - $\vec{F} = \vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r} \;\Rightarrow\; \vec{F}_{(1,2,3)} = \dfrac{(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})}{\sqrt{14}}$; $\left\|\vec{F}\right\| = 1$ N.

7 - a) 0; b) $3x+y+2z$; c) $2(x+y)$.

8 - $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$; $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 2\vec{k}$.
9 - $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$, significa que o fluxo da força gravítica se conserva;
$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$, significa que a força gravítica é conservativa.
10 - a) 500 N/m; b) 62,5 J; c) 35 m/s.
11 - a) 1,29 x10^4 N; b) 7,6º.
12 - a) 30 N; b) 300 W.
13 - 9,8 N.
14 - a) $\sin\theta = 2/3 \Rightarrow \theta = 41{,}8^o$; b) $\sqrt{gR}$.
15 - $2R \le h \le 5R/2$.
16 - b) $\sqrt{gL}$.
17 - T_V = 0,98 N ; T_E = 0,245 N.
18 - a) $b = R/2$; b) $F = 4mg$.
19 - a) $\sqrt{\dfrac{5mgR}{K}}$; b) $\sqrt{gR}$; c) 68º; d) $4\sqrt{gR}$; e) x = 4,73 R sobre o plano.
20 - a) 2,21 m/s; b) 2,01 m/s.
21 - d = 11,5 m ; V = - 9,0 m/s.
22 - a) $\vec{F} = -2x\,\hat{\imath} - 2y\,\hat{j}$; b) (0,0); c) r=1 m.
23 - b) $F(x) = -Kx\left(1 - \dfrac{L}{\sqrt{L^2 + x^2}}\right)$; c) 0;
d) $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{K}{m}}\left(\sqrt{L^2 + A^2} - L\right)$; e) 0,75 m/s; f) 3,16 m/s.
24 – a) x = 0 m estável; x = 4 m, instável; b) $F(0+\delta x) \approx -12\delta x$, logo $T \approx \pi/\sqrt{3}$ s.
25 - $U(x,y) = x - x^2y + y^3 + Cte$.
26 - a) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$; b) $U(x,y) = x - x^2y + 3y^3 + Cte$; c) $(x,y) = \pm\dfrac{(3,1)}{\sqrt{6}}$
27 - a) E=2,89x10^{10} J; v=10,7 km/s; b) E=2,61x10^9 J; c) E=6,26x10^{10} J; v=11,2 km/s.
28 - a) 400V ; b) 3,2x10^{-15} N; c) 400 eV; d) 1,2x10^7 m/s; e) 0,50 cm.
29 - -25,5 V.
30 - a) -34,4V; b) 1,72x10^3 N/C.