

Theorievragen Wiskundige basistechnieken (§9), 2021–2022

§9. Differentiaalrekenen met één veranderlijke

30. a) Geef de definitie van de different van een functie f in a .
b) Duidt dit aan op een tekening.
31. a) Geef de definitie van de afgeleide van een functie f in a .
b) Wat is het verband met de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met abscis a ?
c) Hoe ontstaat dat verband?
32. Gebruik de definitie van de afgeleide om aan te tonen dat de afgeleide van een constante functie de constante functie 0 is.
33. Gebruik de definitie van de afgeleide om aan te tonen dat de afgeleide van de identieke functie op \mathbb{R} de constante functie 1 is.
34. Verklaar vanuit de rekenregel van het afleiden van een product dat voor iedere $n \in \mathbb{N}_0$ geldt $D(x^n) = nx^{n-1}$.
35. a) Leg uit hoe je uit de kettingregel voor het afleiden een algemene formule vindt voor de afgeleide van een inverse functie.
b) Gebruik deze algemene formule om uit $D(x^n)$ met $n \in \mathbb{N}_0$ de afgeleide van de n -de machtswortel te vinden.
36. Leg uit hoe je $D(\sin x)$ bekomt uit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
37. a) Leg uit hoe je uit de kettingregel voor het afleiden een algemene formule vindt voor de afgeleide van een inverse functie.
b) Gebruik deze algemene formule om uit $D(\sin x)$ de afgeleide van $\arcsin x$ te vinden.
38. Leg uit hoe je $D(a^x)$ bekomt uit $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a$.
39. a) Leg uit hoe je uit de kettingregel voor het afleiden een algemene formule vindt voor de afgeleide van een inverse functie.
b) Gebruik deze algemene formule om uit $D(a^x)$ de afgeleide van $\log_a(x)$ te vinden.
40. a) Geef de definitie van de differentiaal van een functie f in a .
b) Duidt dit aan op een tekening.
41. a) Geef de definitie van de differentiaal van een functie f in a .
b) Wat is het voordeel van de differentiaal?
42. a) Als $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow y = f(x)$ een strikt dalende reële functie is op een open interval $I \subset \text{dom } f$ waarop f afleidbaar is en $a \in I$, wat weet je dan over $Df(a)$?
b) Verklaar jouw antwoord door de definitie van de afgeleide te gebruiken.
c) Geef een voorbeeld dat aantoont dat $Df(a)$ gelijk aan 0 kan zijn.

43. a) Als $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow y = f(x)$ een reële functie is, $I \subset \text{dom } f$ een open interval waarop f afleidbaar is, $a \in I$ en $f(a) < f(x)$ voor iedere $x \in I$, wat weet je dan over $Df(a)$?
- b) Verklaar jouw antwoord door de definitie van de afgeleide te gebruiken.
44. a) Formuleer de Stelling van Rolle.
- b) Teken voor iedere voorwaarde die in die stelling voorkomt een grafiek van een functie waarin enkel de betreffende voorwaarde niet voldaan is en ook het besluit van de Stelling van Rolle niet geldig is.
45. a) Formuleer de Stelling van Lagrange.
- b) Leg uit hoe deze stelling volgt uit de Stelling van Rolle.
- c) Leg ook uit wat die Stelling van Lagrange betekent op een grafiek.
46. a) Als $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow y = f(x)$ een reële functie is en $I \subset \text{dom } f$ een open interval zodat voor iedere $x \in I$ geldt $Df(x) < 0$, wat weet je dan over het verloop van de functie f op I ?
- b) Verklaar jouw antwoord door de stelling van Lagrange te gebruiken.
47. Gegeven is een reële functie $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow y = f(x)$.
- a) Geef de definitie van een buigpunt en buigraaklijn voor zulke functie.
- b) Wat onderscheidt buigraaklijnen van andere raaklijnen? Illustreer dit duidelijk aan de hand van een tekening.
48. a) Geef een voorbeeld van een reële functie f die strikt dalend is op \mathbb{R} en waarvoor een $a \in \text{dom } f$ bestaat waarvoor $Df(a) = 0$.
- b) Geef eveneens een voorbeeld van een reële functie f gedefinieerd op volledig \mathbb{R} die geen enkel buigpunt heeft en een maximum heeft in $a \in \text{dom } f$ waarvoor $D^2f(a) = 0$.
- In geen van beide voorbeelden mag de grafiek van de functie een rechte zijn.